



# Interaction entre des impulsions électromagnétiques quantifiées et des systèmes atomiques : effets transitoires

Simon Derouault

## ► To cite this version:

Simon Derouault. Interaction entre des impulsions électromagnétiques quantifiées et des systèmes atomiques : effets transitoires. Physique Quantique [quant-ph]. Université Paul Sabatier, 2014. Français. <tel-01160570>

**HAL Id: tel-01160570**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01160570>**

Submitted on 5 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *05/12/2014* par :

**SIMON DEROUAULT**

**Interaction entre des impulsions électromagnétiques  
quantifiées et des systèmes atomiques : effets transitoires**

---

---

### JURY

M. M. AZIZ BOUCHENE	Professeur d'Université	Directeur de thèse
M. THIERRY CHANELIÈRE	Chargé de Recherche	Rapporteur
M. THOMAS COUDREAU	Professeur d'Université	Rapporteur
M. NICOLAS TREPS	Professeur d'Université	Président du jury
M. BRAHIM LAMINE	Maître de Conférence	Examineur
M. CARLO RIZZO	Professeur d'Université	Examineur

---

**École doctorale et spécialité :**

*SDM : Physique de la matière - CO090*

**Unité de Recherche :**

*Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité (UMR5589)*

**Directeur de Thèse :**

*M.A. Bouchene*

**Rapporteurs :**

*M. Thierry Chanelière et M. Thomas Coudreau*



# Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit a été possible grâce aux contributions directes ou indirectes de nombreuses personnes que je souhaite remercier ici. Je voudrais tout d'abord remercier le directeur et le sous directeur, Jacques Vigué et Jean-Marc L'Hermite, suivis par la suite de Béatrice Chatel, de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité au cours de ces trois années.

Je tiens aussi à remercier les membres de mon jury, Thierry Chanelière et Thomas Coudreau qui ont accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit avec des délais particulièrement serrés, Nicolas Trepas pour avoir présidé le jury, ainsi que Brahim Lamine et Carlo Rizzo pour leur remarques constructives.

Je voudrais ensuite remercier l'équipe théorie que j'ai intégrée et particulièrement mon directeur de thèse Aziz Bouchene, qui m'a accueilli dès mon stage de M2. Merci de m'avoir conseillé et soutenu jusqu'au bout de ces trois ans, même lorsque je t'en ai fait voir de toutes les couleurs! Ton investissement et tes encouragements ("demain est un autre jour!") ont permis à ce travail d'aboutir. Merci aussi à Christoph Meier pour m'avoir dégoté juste ce qui fallait de financement supplémentaire pour terminer ma rédaction.

Au cours de ces trois années j'ai eu la possibilité de compléter mon travail de recherche par une activité d'enseignement à l'Université. Je tiens tout particulièrement à remercier Pierre Cafarelli qui m'a permis de faire mes premières armes.

Je remercie aussi l'ensemble des permanents, que j'ai côtoyés aux cours de mes déambulations (petite et bruyante, la cafétéria reste le point névralgique!) et qui font de l'IRSAMC un lieu où il fait bon vivre. Une note spéciale pour Valérie Blanchet, avec qui j'ai partagé un bureau à mes débuts, dont la bonne humeur et la joie de vivre (et le rire) sont un vrai plaisir. Je remercie aussi Sylvie Boukhari et Christine Soucasse du secrétariat, qui ont systématiquement réussi à démêler l'imbroglio administratif que je leur fournissais.

Un très grand merci à tous les amis qui m'ont entouré durant ces dernières années. Merci aux "anciens" thésards, Mick, Cha, Paul, Renaud, Sylvain, Adrien, Hugo, Jonathan, Pierrick, ..., pour l'accueil que vous m'avez réservé à mon arrivée et pour les moments passés ensemble. Merci aussi à tout ceux qui ont suivi par la suite. Gaby, François, Aéla, Isabelle, Mina, Muammar, Guillaume, Lionel, Étienne, Julien, toutes ces sessions hors laboratoire ont été salvatrices! Merci à Gabriel Hétet, ce fut un plaisir de se perdre tout les deux en pleine nuit à SF. Merci à mes compagnons de route rencontrés en L2, Hugo & Hugo, Annaël, Flo, qui ont tous fini en thèse. Je vous souhaite tout le courage nécessaire pour la finir et j'espère bien que l'on a encore un long chemin à parcourir ensemble. Tout cela sans oublier les amis de longue date qui m'ont soutenu tout ce temps. Quentin (je ne compte plus tes traversées de la France pour venir passer un week-end détente), Carole, Ingrid, Ralph, Raf, on s'est tous un peu dispersés, mais c'est toujours un plaisir inégalable de se retrouver. Un grand merci aussi au groupe du dub (beaucoup sont déjà cités et ils se reconnaîtront, mais n'oublions pas Rémi et Morane), dont le mélange hétéroclite a permis d'avoir des discussions allant des points précis de la physique quantique à des sujets disons, moins sérieux, mais

non moins intéressants!

Enfin je souhaiterais remercier ma famille. Tout d'abord mes parents Yvon et Mireille qui m'ont toujours encouragé et m'ont permis d'arriver jusque là, mes deux frères Quentin et Paco, ainsi que tout les autres qui m'ont systématiquement soutenu (merci Nicole pour le petit colis juste avant la soutenance). Une dernière pensée pour Mané, qui bien que regrettant de ne pas me voir devenir potier était fière que je devienne physicien (encore un scientifique!!), mais qui n'a malheureusement pas eu le temps d'en voir l'aboutissement.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Système à deux niveaux</b>	<b>5</b>
1.1 Modèle semi-classique . . . . .	7
1.1.1 Atome à deux niveaux . . . . .	7
1.1.2 Base adiabatique . . . . .	9
1.1.3 Cas résonnant : oscillations de Rabi . . . . .	9
1.1.4 Cas non-résonnant : transitions non-adiabatiques . . . . .	11
1.2 Ensemble atomique . . . . .	15
1.3 Modèle de Jaynes-Cummings . . . . .	17
1.3.1 Hamiltonien de Jaynes-Cummings . . . . .	17
1.3.2 Base adiabatique . . . . .	19
1.3.3 Évolution du système . . . . .	19
1.3.4 Oscillations de Rabi quantiques . . . . .	20
<b>2 Effets transitoires dans un micro-mazer</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Modèle . . . . .	26
2.3 Base adiabatique . . . . .	28
2.4 Évolution du système : différents régimes . . . . .	29
2.4.1 Cas résonnant . . . . .	29
2.4.2 Cas non-résonnant . . . . .	31
2.5 Évolution indépendante du temps . . . . .	32
2.6 Régimes chaud et intermédiaire . . . . .	33
2.7 Régime chaud : influence de la forme de $u(z)$ . . . . .	34
2.8 Régime intermédiaire . . . . .	39
2.8.1 Interprétation temporelle . . . . .	39
2.8.2 Discussion . . . . .	39
2.8.3 Modèle simplifié : schéma d'interférence . . . . .	42
2.9 Conclusion . . . . .	45
<b>3 Diffusion d'un paquet d'onde à un photon par des atomes dans un guide d'onde</b>	<b>47</b>
3.1 Introduction . . . . .	49
3.2 Interaction d'un photon unique avec un atome unique dans un guide d'onde . . . . .	50
3.2.1 Formalisme . . . . .	50

3.2.2	Évolution temporelle . . . . .	51
3.2.3	Champ électrique effectif . . . . .	52
3.2.4	Aire du pulse . . . . .	53
3.2.5	Simulations numériques . . . . .	54
3.3	Interaction d'un photon unique avec deux atomes dans un guide d'onde . . . . .	57
3.3.1	Modèle théorique . . . . .	57
3.3.2	Couplage entre atomes . . . . .	60
3.3.3	Chemins quantiques . . . . .	62
3.3.4	Photons réels et virtuels . . . . .	64
3.3.5	Importance des termes hors-RWA . . . . .	64
3.3.6	Signal photo-électrique . . . . .	66
3.3.7	Champs transmis et réfléchi - Théorème de l'aire . . . . .	67
3.3.8	Solutions exactes pour les populations et le champ . . . . .	70
3.3.9	Discussion . . . . .	72
3.3.10	Équivalence de jauges . . . . .	76
3.4	Conclusion . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Diffusion d'une impulsion multimodes non-résonnante par un atome. État de flux</b> . . . . .	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Modèle théorique . . . . .	86
4.2.1	Hamiltonien . . . . .	86
4.2.2	États de flux . . . . .	88
4.2.3	Base adiabatique . . . . .	91
4.2.4	Équations d'évolutions . . . . .	93
4.2.5	Conditions initiales . . . . .	95
4.3	Situation à deux modes . . . . .	96
4.3.1	Construction des états de flux . . . . .	96
4.3.2	Termes de couplage . . . . .	97
4.3.3	Conditions initiales . . . . .	97
4.4	Modèle semi-classique . . . . .	99
4.5	Discussion . . . . .	100
4.5.1	Cas semi-classique . . . . .	100
4.5.2	Limite semi-classique . . . . .	100
4.5.3	Influence du nombre de photon à $\chi$ fixé . . . . .	101
4.5.4	Influence du nombre de photon à $g_0$ fixé . . . . .	102
4.5.5	Influence des couplages inter- et intra-bandes . . . . .	103
4.6	Conclusion . . . . .	111
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Annexes du chapitre 3</b> . . . . .	<b>117</b>
A.1	Équation fondamentale pour les populations . . . . .	117
A.2	Contributions des termes hors-RWA au signal photo-électrique . . . . .	119
A.3	Relation entre les champs et les amplitudes de populations . . . . .	120

---

<b>B Annexes du chapitre 4</b>	<b>125</b>
B.1 Démonstration de $[\hat{N}_{exc}, H_{int}] = 0$	125
B.2 Établissement de la base adiabatique	126
B.3 Démonstration du théorème adiabatique	126
B.4 Démonstration de $[\hat{N}_{exc}, \partial_t(\hat{H}_{int})] = 0$	127
B.5 Vecteur de Poynting	128
B.6 Démonstration $m$ entier positif	128
B.7 Démonstration $[\hat{N}, \hat{F}] = 0$	130
B.8 Orthogonalité des états $ m, n, \{p\}\rangle$	131
B.9 Démonstration de $[\hat{b}, \partial_t \hat{b}^\dagger] = 0$	132
<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>





# Introduction

L'étude des phénomènes transitoires en physique atomique remonte aux travaux précurseurs de Rabi sur la dynamique d'un système atomique excité de manière cohérente [1]. Les oscillations purement quantiques, dites de Rabi, ont joué un rôle essentiel dans la compréhension des phénomènes optiques résonnants. Cependant, les études résolues en temps n'ont connu un grand développement que depuis l'apparition de sources de rayonnement cohérent dans les années 50 (création du maser [2, 3]) et surtout avec l'apparition des sources lasers [4]. Dans le cadre semi-classique (matière quantifiée, champ classique), les phénomènes optiques induits par des impulsions lumineuses font intervenir des superpositions particulières entre états quantiques de la matière, donnant lieu aux phénomènes de transitoires cohérents. On peut citer le passage adiabatique rapide [5], la nutation optique [6], la précession optique [7] ou l'écho de photons [8]. Ces études n'ont toujours pas fini de révéler de nouveaux effets. Pour preuve, récemment et de façon surprenante il a été montré qu'il est possible de réaliser un transfert complet de population à l'aide de sauts non-adiabatiques [9, 10].

Parallèlement à ces études portant sur un atome unique, les phénomènes transitoires résultant de la propagation d'impulsions lumineuses dans un milieu optiquement épais conduisent à des résultats spectaculaires tels que le ralentissement ou le stockage de la lumière [11, 12] ainsi que l'effet Kerr géant [13]. Ces études sont le prolongement d'investigations plus anciennes sur le comportement d'impulsions courtes se propageant dans des milieux épais et résonnants. Un résultat important connu sous le nom de théorème de McCall et Hahn [14, 15] joue un rôle central pour comprendre la déformation d'une impulsion au cours de sa propagation dans un milieu optiquement épais. Ce théorème stipule que le profil temporel de l'impulsion est déformé de sorte que son aire algébrique (intégrale du champ électrique) sature au cours de la propagation. En régime de couplage fort cela permet de comprendre des phénomènes tels que la transparence auto-induite ou la fragmentation d'impulsions [16]. En régime de couplage faible cette contrainte impose une déformation à l'impulsion en lui octroyant une structure fortement oscillante au cours du temps [17, 18].

Les travaux menés au cours de cette thèse entrent dans le cadre d'un large projet tentant de transposer au cas tout quantique –lumière et matière quantifiées– l'étude de ces effets transitoires bien connus en théorie semi-classique. La situation devient alors très vite complexe. En effet, quand quelques photons interagissent avec un atome, deux sérieuses limitations apparaissent. Premièrement, le régime de champ fort est difficile sinon impossible à atteindre dans le vide. En effet, la manière la plus simple pour l'atteindre consiste à focaliser le rayonnement quan-

tique sur l'atome. Cependant, après focalisation, la polarisation de la lumière est très fortement dispersée (spatialement) et le couplage effectif avec l'atome devient faible [19, 20]. Deuxièmement, le rayonnement diffusé n'étant pas directif (rayonnement du dipôle), un couplage spatio-temporel s'établit et l'étude purement temporelle des phénomènes est alors difficile à mener. En semi-classique, ces problèmes ne sont pas limitants. En effet, le nombre de photons constituant une impulsion est toujours suffisamment élevé pour que l'on puisse atteindre aisément le régime de champ fort dans le domaine optique. Deuxièmement, en travaillant sur un échantillon d'atomes et non pas sur un seul, le rayonnement résultant de l'interférence des différents émetteurs est toujours directif (rayonnement cohérent vers l'avant). De ce fait, l'aspect temporel ne souffre d'aucun couplage directionnel et les phénomènes transitoires sont alors bien isolés. En tout quantique, cette dernière méthode n'est pas transposable car elle conduit à l'apparition d'un nouveau phénomène inexistant en semi-classique : l'intrication du champ avec les atomes et des atomes entre eux. De ce fait, il faut traiter l'ensemble atomes plus champ comme un seul système et le problème ne pourra donc jamais se ramener à celui d'un seul atome couplé au champ quantique.

Pour circonscrire la première difficulté et atteindre le régime de champ fort, une possibilité est de confiner le champ électromagnétique dans une cavité augmentant son intensité. C'est la technique la plus courante mise en place notamment au LKB à Paris. Il a alors été possible de visualiser les oscillations de Rabi quantiques [21] par exemple ainsi que la décohérence progressive de chats de Schrödinger [22]. Ces travaux ont été récompensés par le prix Nobel 2012 décerné à S. Haroche et D. Wineland. Une autre méthode de confinement –partiel– est basée sur l'utilisation de guide d'onde unidimensionnel. Le champ est alors limité aux modes axiaux du guide et le régime de couplage fort peut être obtenu avec un atome placé au sein du guide. Cette configuration a aussi l'avantage de permettre d'étudier la dynamique du système en distinguant les champs réfléchi et transmis. C'est ce cas-ci que nous retiendrons pour étudier la déformation d'un paquet à un photon résonnant se propageant dans un guide d'onde contenant un ou deux atomes (chapitre 3) ainsi que le cas d'une impulsion multimodes non-résonnante (chapitre 4). Enfin, une dernière méthode, développée dans le chapitre 2 consiste à utiliser une cavité optique en configuration micro-maser : l'atome traverse transversalement une cavité optique remplie d'un champ monomode et son couplage est transitoire. Dans cette situation, le profil de l'impulsion est remplacé par le profil transverse du champ confiné dans la cavité.

La deuxième difficulté –incontournable– nous amène à restreindre nos études dans un premier temps à certaines situations réalistes. Nous avons traité dans cette thèse uniquement le cas de un ou deux atomes interagissant avec le champ. Des tentatives théoriques [23, 24] ont été développées pour traiter ce problème dans le cas particulier de régime de champ faible mais le cas général (combinant milieu épais et régime de champ fort) est encore hors de portée.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante :

Dans le chapitre un, nous donnerons les éléments de base permettant de comprendre l'interaction entre un système à deux niveaux et un champ électromagnétique. En régime semi-classique, on décrira la possibilité de réaliser des

transitions non-adiabatiques à l'aide d'impulsions non-résonnantes en régime de couplage fort ainsi que la propagation d'impulsions lumineuses dans un ensemble atomique, conduisant au théorème de McCall et Hahn. En régime tout quantique, on introduira aussi le modèle de Jaynes-Cummings décrivant l'interaction entre un champ quantique monomode et un système à deux niveaux.

Dans le chapitre deux, nous étudierons la dynamique d'un atome traversant une cavité micro-maser monomode non-résonnante. Dans cette situation, il n'y a pas d'impulsion mais un couplage transitoire, dépendant du profil du mode de la cavité, entre l'atome et le champ. Cette configuration a déjà fait l'objet de plusieurs études [25–29] qui ont montré que lorsque l'énergie cinétique de l'atome est du même ordre de grandeur que l'énergie d'interaction, il est nécessaire de traiter quantiquement le mouvement du centre de masse de l'atome. Nous verrons qu'il est possible de réaliser des transitions optiques non-adiabatiques significatives lors de la traversée de la cavité et que ces dernières dépendent du profil transverse du champ contenu dans le micro-maser. Notre étude se focalisera sur le régime dit intermédiaire, où l'énergie cinétique de l'atome est du même ordre de grandeur que l'énergie d'interaction et nous relierons les effets opto-mécaniques et les transitions non-adiabatiques.

Dans le chapitre trois, nous étudierons la diffusion d'un paquet d'onde à un photon par un puis deux atomes à deux niveaux contenus dans un guide d'onde unidimensionnel. Cette configuration a l'avantage de confiner le champ aux modes axiaux du guide et d'obtenir ainsi un régime de couplage fort entre un photon unique et un atome. Cette situation a déjà été étudiée précédemment [30–32], mais ces études ont toutes été faites dans l'approximation de l'onde tournante (RWA). Cette approximation néglige les effets des photons virtuels qui sont pourtant indispensables à un traitement correct de l'interaction. La nécessité de prendre en compte ces contributions hors-RWA a été établie lors des travaux sur la super-radiance [33–35]. Cette approximation ne sera alors pas réalisée dans ce chapitre et nous montrerons que la nature, réelle ou virtuelle, des photons influe grandement sur la dynamique du système. Nous verrons alors que la dynamique des champs peut être comprise à l'aide des états de Dicke retardés, utilisés dans les théories de super-radiance. Nous montrerons qu'il existe un théorème équivalent à celui de McCall et Hahn contraignant la forme du champ lors de sa propagation.

Dans le dernier chapitre nous développerons une méthode générale pour traiter l'interaction entre un champ quantique multimodes non-résonnant et un système atomique à deux niveaux contenu dans un guide d'onde. L'originalité de cette méthode repose sur la définition de nouveaux états adiabatiques globaux, similaires à ceux utilisés dans les modèles semi-classiques. Afin de déterminer ces nouveaux états adiabatiques, nous définirons les états du flux électromagnétique en nous basant sur la quantification du vecteur de Poynting. Dans le cas semi-classique, les états adiabatiques sont constitués de séries de deux branches couplées entre elles. Dans le cas tout quantique, nous montrerons que chacune de ces branches se décompose en une famille de branches formant une bande. Nous distinguerons alors les couplages intra-bandes et inter-bandes et étudierons leur rôle respectif. Cette méthode sera par la suite illustrée dans le cas où le champ est composé de deux modes. Nous étudierons la convergence de ce modèle vers

le modèle semi-classique lorsque le champ est composé d'états cohérents à grand nombre de photons. Nous étudierons ensuite la situation où le champ comporte peu de photons et ne peut donc plus être assimilé à un champ classique.

# Chapitre 1

## Systeme à deux niveaux

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Modèle semi-classique</b>	<b>7</b>
1.1.1	Atome à deux niveaux	7
1.1.2	Base adiabatique	9
1.1.3	Cas résonnant : oscillations de Rabi	9
1.1.4	Cas non-résonnant : transitions non-adiabatiques	11
<b>1.2</b>	<b>Ensemble atomique</b>	<b>15</b>
<b>1.3</b>	<b>Modèle de Jaynes-Cummings</b>	<b>17</b>
1.3.1	Hamiltonien de Jaynes-Cummings	17
1.3.2	Base adiabatique	19
1.3.3	Évolution du système	19
1.3.4	Oscillations de Rabi quantiques	20

---



## 1.1 Modèle semi-classique

Dans ce chapitre nous présenterons les bases théoriques permettant d'étudier l'interaction de systèmes à deux niveaux avec des champs classiques et quantiques.

L'approche semi-classique consiste à traiter l'atome quantiquement en le considérant, dans notre cas, composé de deux états discrets mais de conserver une description classique pour le champ électromagnétique.

Nous présenterons dans un premier temps le modèle semi-classique. Nous décrirons la base adiabatique qui permet de comprendre aisément la dynamique des populations. Nous verrons alors qu'il est possible de réaliser des sauts non-adiabatiques conduisant à des transferts significatifs de populations. Toujours avec un modèle semi-classique, nous présenterons ensuite la propagation d'une impulsion dans un ensemble atomique.

Dans un second temps nous présenterons le modèle de Jaynes-Cummings. Ce modèle permet un traitement tout quantique de l'interaction entre un champ électromagnétique monomode et un système à deux niveaux. Nous verrons comment s'exprime la base adiabatique dans ce modèle. Afin d'avoir un exemple d'utilisation de l'hamiltonien de Jaynes-Cumming, nous traiterons finalement le cas des oscillations de Rabi.

### 1.1.1 Atome à deux niveaux

On considère un atome à deux niveaux,  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , d'énergie 0 et  $\hbar\omega_0$  respectivement. L'atome interagit avec un champ classique monomode d'expression :

$$E_c(t) = \epsilon(t)e^{-i\omega_c t} + cc \quad (1.1)$$

avec  $\epsilon(t)$  l'amplitude du champ et  $cc$  désigne le complexe conjugué. Pour un champ réel on a alors  $E_c(t) = 2\epsilon(t)\cos(\omega_c t)$ . Le désaccord fréquentiel entre le champ et la transition atomique est  $\Delta = \omega_0 - \omega_c$ .

Dans l'approximation dipolaire, l'hamiltonien du système est donné par :

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \hat{d}E_c(t) \quad (1.2)$$

où  $\hat{d} = d(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})$  est l'opérateur dipolaire électrique.  $d = \langle b|\hat{d}|a\rangle$  est l'élément de matrice de la transition dipolaire.  $\sigma = |a\rangle\langle b|$  ( $\sigma^\dagger$ ) est l'opérateur de désexcitation (excitation) de l'atome. L'hamiltonien (1.2) est donné dans la jauge de Göppert-Mayer. Dans la jauge de Coulomb, le terme d'interaction  $-\hat{d}E_c(t)$  est remplacé par  $A\hat{p}$  où  $A$  est le potentiel vecteur.

Le terme d'interaction  $-\hat{d}E_c(t)$  s'écrit alors :

$$-\hat{d}E_c(t) = -\hbar\frac{\Omega(t)}{2}(e^{-i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t})(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}) \quad (1.3)$$

où  $\Omega(t) = \frac{d\epsilon(t)}{\hbar}$  est la fréquence de Rabi.

Dans ces conditions l'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \frac{\hbar\Omega(t)}{2}(e^{-i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t})(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}). \quad (1.4)$$



Cet hamiltonien peut être réécrit pour faire explicitement apparaître le désaccord  $\Delta$  :

$$\hat{H} = \hbar\omega_c\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hbar\Delta\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \frac{\hbar\Omega(t)}{2}(e^{-i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t})(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}). \quad (1.5)$$

Cette dernière forme de l'hamiltonien permet de passer de la représentation de Schrödinger ( $S$ ) vers la représentation d'interaction ( $I$ ). Le changement de représentation est effectué grâce à la transformation unitaire  $\hat{U}_0 = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$  avec  $\hat{H}_0 = \hbar\omega_c\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$ . Les observables, dont l'hamiltonien, se transforment selon  $\hat{O}_I = \hat{U}_0^\dagger\hat{O}_S\hat{U}_0$ . La fonction d'onde devient  $|\psi\rangle_I = \hat{U}_0^\dagger|\psi\rangle_S$ . Les indices  $I$  et  $S$  indiquent quelle représentation est utilisée.

Ici, le passage en représentation d'interaction revient à se mettre dans un repère tournant avec le champ à une fréquence  $\omega_c$ .

On obtient alors l'hamiltonien en représentation d'interaction :

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(I)} &= \hbar\Delta\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \frac{\hbar\Omega(t)}{2}(e^{-i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t})(\hat{\sigma}^\dagger e^{-i\omega_c t} + \hat{\sigma} e^{+i\omega_c t}) \\ &= \hbar\Delta\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \frac{\hbar\Omega(t)}{2}(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger e^{-2i\omega_c t} + \hat{\sigma} e^{+2i\omega_c t}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Cette dernière forme fait apparaître deux termes avec une fréquence double  $\pm 2\omega_c$ . Ces deux termes sont fortement oscillants et peuvent alors être négligés lorsque l'on moyenne sur une période optique. Il s'agit de l'approximation de l'onde tournante (ou séculaire, ou RWA pour *Rotating Wave Approximation* en anglais). Cette approximation sera couramment utilisée dans ce manuscrit, sauf dans le chapitre 3 où le traitement correct du problème l'interdit.

On a finalement l'hamiltonien suivant :

$$\hat{H}^{(I)} = \hbar\Delta\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \frac{\hbar\Omega(t)}{2}(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}). \quad (1.7)$$

La fonction d'onde générale du système, en représentation d'interaction, s'écrit alors :

$$|\psi\rangle_I(t) = A_a(t)|a\rangle + A_b(t)e^{-i\Delta t}|b\rangle \quad (1.8)$$

où  $A_{a,b}(t)$  sont les amplitudes de probabilité de trouver l'atome dans l'état  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  à l'instant  $t$  respectivement, avec la condition de normalisation  $|A_a(t)|^2 + |A_b(t)|^2 = 1$ .

L'évolution de système est décrite par l'équation de Schrödinger dépendante du temps :  $i\hbar\frac{d|\psi\rangle_S(t)}{dt} = H^{(S)}|\psi\rangle_S(t)$ . En substituant  $|\psi\rangle_S(t)$  par  $\hat{U}_0|\psi\rangle_I(t)$ , on a :

$$\begin{aligned} i\hbar\left(\frac{d\hat{U}_0}{dt}|\psi\rangle_I(t) + \hat{U}_0\frac{d|\psi\rangle_I(t)}{dt}\right) &= \hat{H}^{(S)}\hat{U}_0|\psi\rangle_I(t) \\ \Leftrightarrow i\hbar\hat{U}_0\frac{d|\psi\rangle_I(t)}{dt} &= (\hat{H}^{(S)} - \hat{H}_0)\hat{U}_0|\psi\rangle_I(t) \\ \Leftrightarrow i\hbar\frac{d|\psi\rangle_I(t)}{dt} &= \hat{U}_0^\dagger(\hat{H}^{(S)} - \hat{H}_0)\hat{U}_0|\psi\rangle_I(t). \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation de Schrödinger dans la représentation d'interaction :

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle_I(t)}{dt} = \hat{H}^{(I)} |\psi\rangle_I(t) \quad (1.9)$$

avec  $\hat{H}^{(I)} = \hat{U}_0^\dagger (\hat{H}^{(S)} - \hat{H}_0) \hat{U}_0 = \hbar\Delta \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} - \frac{\hbar\Omega(t)}{2} (\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})$ .

À partir de maintenant, et dans toute la suite de ce chapitre, nous resterons en représentation d'interaction. Par souci de clarté l'indice  $I$  sera donc omis.

En appliquant l'équation (1.9) sur la fonction d'onde (1.8), on obtient le système d'équations différentielles couplées sur les amplitudes de probabilité suivant :

$$\partial_t A_a(t) = \frac{i\Omega(t)}{2} e^{-i\Delta t} A_b(t) \quad (1.10a)$$

$$\partial_t A_b(t) = \frac{i\Omega(t)}{2} e^{i\Delta t} A_a(t). \quad (1.10b)$$

### 1.1.2 Base adiabatique

Une méthode efficace permettant de résoudre le système est de se placer dans la base adiabatique. La base adiabatique est définie comme étant celle qui diagonalise l'hamiltonien (1.7). Cette diagonalisation ne pose pas de problème particulier et on obtient les états adiabatiques suivants :

$$|+\rangle = \cos \theta(t) |b\rangle - \sin \theta(t) |a\rangle \quad (1.11a)$$

$$|-\rangle = \sin \theta(t) |b\rangle + \cos \theta(t) |a\rangle. \quad (1.11b)$$

L'énergie des états adiabatiques est donnée par :

$$E_\pm(t) = \frac{1}{2} \left( \hbar\Delta \pm \sqrt{(\hbar\Delta)^2 + (\hbar\Omega(t))^2} \right) \quad (1.12)$$

où  $\theta(t)$  est défini par  $\tan(2\theta(t)) = \frac{\Omega(t)}{\Delta}$  avec  $0 \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}$ . La base adiabatique correspond à une rotation de la base atomique, dont l'angle de rotation,  $\theta(t)$ , dépend de l'interaction. Ces nouveaux états sont une superposition des états de l'atome pendant l'interaction. Quand  $\Delta \neq 0$  et sans interaction on a  $\Omega(t) = 0$ , soit  $\theta(t) = 0$ , les états adiabatiques coïncident alors avec les états atomiques :

$$|+\rangle_{\Omega=0} = |b\rangle$$

$$|-\rangle_{\Omega=0} = |a\rangle.$$

### 1.1.3 Cas résonnant : oscillations de Rabi

On considère ici la situation où le le champ et la transition atomique sont résonnants ( $\Delta = 0$ ). Dans ce cas là, les états adiabatiques sont donnés par :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\rangle - |a\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\rangle + |a\rangle)$$

et l'énergie de ces états :  $E_{\pm}(t) = \pm \frac{\hbar\Omega(t)}{2}$ . En dehors de l'interaction, les deux états adiabatiques sont dégénérés :  $E_{\pm}(|t| \gg \tau) = 0$ . Cela signifie que si l'atome est initialement dans l'état  $|b\rangle$  ou  $|a\rangle$ , il est automatique dans une superposition d'états adiabatiques  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$ . Au cours de l'interaction, les énergies adiabatiques ne sont plus dégénérées. Le schéma énergétique est représenté sur la figure 1.1 dans le cas où l'amplitude du champ est prise gaussienne :  $\epsilon(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}}e^{-(t/\tau)^2}$ , où  $\tau$  est la durée de l'impulsion et  $\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t)dt = 1$ .

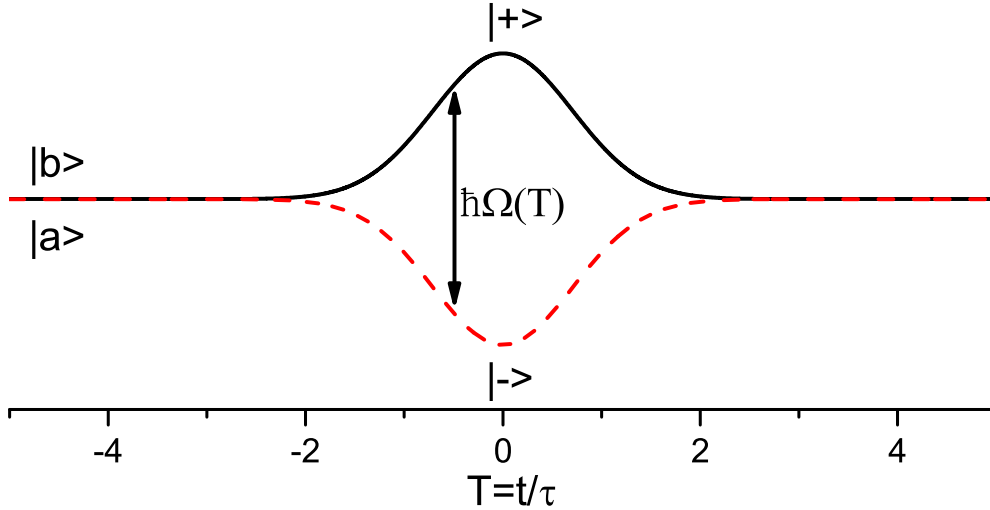


FIGURE 1.1 – Niveaux énergétiques des états adiabatiques lorsque le champ est résonnant avec la transition atomique, dans la représentation d'interaction. L'enveloppe du champ est gaussienne :  $\epsilon(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}}e^{-(t/\tau)^2}$  avec  $\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t)dt = 1$ . Avant et après l'interaction, lorsque  $\epsilon(t) = 0$ , les états adiabatiques sont dégénérés et confondus avec les états atomiques. Durant l'interaction, lorsque  $\epsilon(t) \neq 0$ , les états adiabatiques sont séparés de  $\hbar\Omega(t)$ .

La fonction d'onde, dans la base adiabatique, est simplement donnée par :

$$|\psi\rangle(t) = A_+(t)|+\rangle + A_-(t)|-\rangle. \quad (1.15)$$

Dans le cas résonnant, l'hamiltonien (1.7) devient :

$$\hat{H}^{(I)} = -\frac{\hbar\Omega(t)}{2}(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}). \quad (1.16)$$

L'évolution du système est obtenue en utilisant l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$\partial_t A_+(t) = i\frac{\Omega(t)}{2}A_+(t) \quad (1.17a)$$

$$\partial_t A_-(t) = -i\frac{\Omega(t)}{2}A_-(t). \quad (1.17b)$$

Soit :

$$A_{\pm}(t) = A_{\pm}(t \rightarrow -\infty)e^{\pm i \int_{-\infty}^t \frac{\Omega(t')}{2} dt'}. \quad (1.18)$$

Si l'atome est initialement dans l'état fondamental  $|a\rangle$ , on a  $A_{\pm}(t \rightarrow -\infty) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$ . L'amplitude de probabilité d'être dans l'état excité à l'instant  $t$  est donnée par :

$$\begin{aligned} A_b(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+(t) + A_-(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \int_{-\infty}^t \frac{\Omega(t')}{2} dt'} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \int_{-\infty}^t \frac{\Omega(t')}{2} dt'} \right) \\ &= -i \sin \left( \int_{-\infty}^t \frac{\Omega(t')}{2} dt' \right). \end{aligned}$$

La probabilité d'être dans l'état excité est donc de :

$$P_b(t) = |A_b(t)|^2 = \sin^2 \left( \int_{-\infty}^t \frac{\Omega(t')}{2} dt' \right). \quad (1.19)$$

La population possède donc un comportement oscillatoire dans un premier temps. Ces oscillations sont les oscillations bien connues de Rabi. Aux temps longs ( $t \gg \tau$ ), la population dans l'état excité sature à une valeur déterminée par l'aire de l'impulsion  $\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t') dt'$ .

De cette façon, une impulsion dite  $\pi$  conduira à un transfert complet de population. Une impulsion d'aire zéro laissera par contre la population inchangée après interaction, tandis qu'une impulsion d'aire  $\frac{\pi}{2}$  projettera la moitié de la population dans l'état excité.

Le cas d'une impulsion d'aire  $15\pi$  est représenté sur la figure 1.2. L'atome est initialement dans l'état fondamental. Pendant l'interaction, la population effectue des oscillations de Rabi entre les états atomiques. Après l'interaction, la population sature à 1, ce qui correspond à une impulsion d'aire  $\pi$  (modulo  $2\pi$ ).

#### 1.1.4 Cas non-résonnant : transitions non-adiabatiques

Dans le cas où le champ et la transition atomique ne sont pas résonnants, les états adiabatiques sont donnés par les relations (1.11). Les énergies des états adiabatiques sont représentées sur la figure 1.3. Cette fois les états adiabatiques ne sont pas dégénérés. En dehors de l'interaction ( $\epsilon(t) = 0$ ) ils restent séparés d'une valeur  $\hbar\Delta$ . L'état  $|+\rangle$  est alors confondu avec l'état atomique excité  $|b\rangle$  et l'état  $|-\rangle$  avec l'état fondamental  $|a\rangle$ . Pendant l'interaction, les états adiabatiques sont une superposition des états atomiques et sont séparés de  $\hbar\sqrt{\Delta^2 + \Omega(t)^2}$ . La fonction d'onde dans cette base s'écrit :

$$|\psi\rangle(t) = A_+(t) |+\rangle(t) + A_-(t) |-\rangle(t). \quad (1.20)$$

Les états adiabatiques dépendent du temps à travers  $\theta(t)$ , leurs dérivés valent :

$$\partial_t(|+\rangle) = -\partial_t(\theta(t)) |-\rangle \quad (1.21a)$$

$$\partial_t(|-\rangle) = \partial_t(\theta(t)) |+\rangle. \quad (1.21b)$$

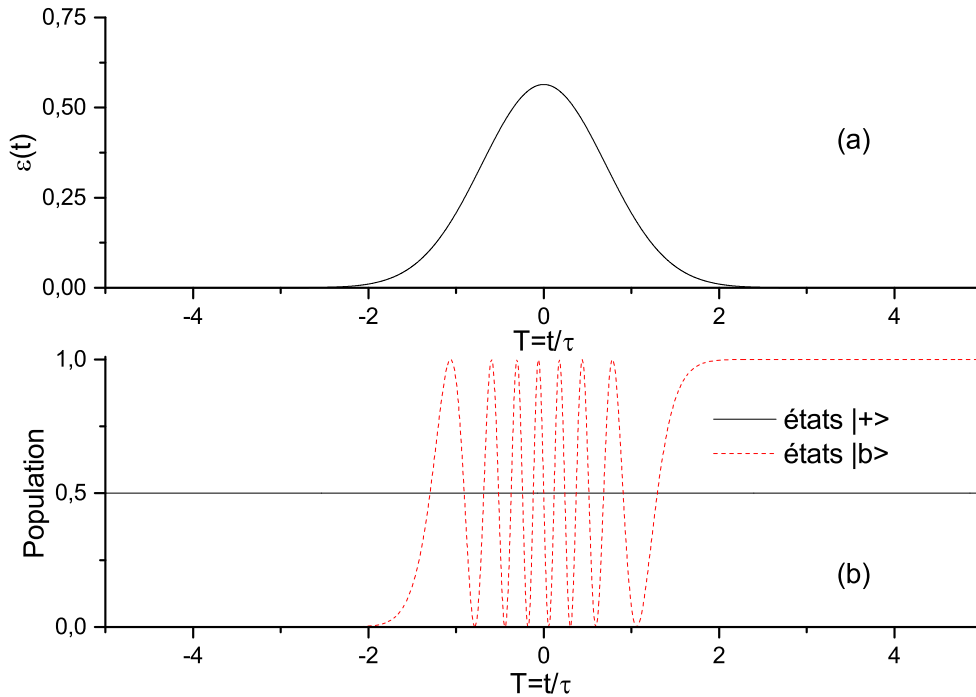


FIGURE 1.2 – Évolution temporelle du système dans le cas résonnant. (a) L'enveloppe du champ est gaussienne :  $\epsilon(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}}e^{-(t/\tau)^2}$  avec  $\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t)dt = 1$ . (b) Dynamique des populations adiabatique (trait plein noir) et atomique (pointillés rouges). L'aire de l'impulsion  $\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t')dt'$  vaut  $15\pi$ . Dans le cas résonnant l'évolution est adiabatique, la population dans l'état  $|+\rangle$  reste constante. L'atome est initialement dans l'état  $|a\rangle$ . La population dans l'état  $|b\rangle$  oscille lors du passage de l'impulsion, puis sature à 1.

En appliquant l'équation (1.9) sur la fonction d'onde (1.20), on obtient le système d'évolution des amplitudes de probabilité d'être dans les états adiabatiques suivants :

$$\partial_t A_+(t) = -i \frac{E_+(t)}{\hbar} A_+(t) - \frac{V(t)}{2} A_-(t) \quad (1.22a)$$

$$\partial_t A_-(t) = -i \frac{E_-(t)}{\hbar} A_-(t) + \frac{V(t)}{2} A_+(t). \quad (1.22b)$$

Contrairement au cas précédent, les états adiabatiques sont cette fois couplés entre eux à travers le couplage  $V(t) = 2\partial_t(\theta(t))$ , ce qui va induire des transitions.

Si l'on reprend l'impulsion gaussienne utilisée dans le cas résonnant, le couplage  $V(t)$  reste faible et les transitions non-adiabatiques sont négligeables. Considérons alors l'enveloppe suivante :

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{(t+t_0)^2}{\tau^2}} - e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}} \right). \quad (1.23)$$

Cette enveloppe est une double gaussienne dont la seconde gaussienne est inversée de sorte que son aire totale soit nulle. Le couplage non-adiabatique  $V(t)$

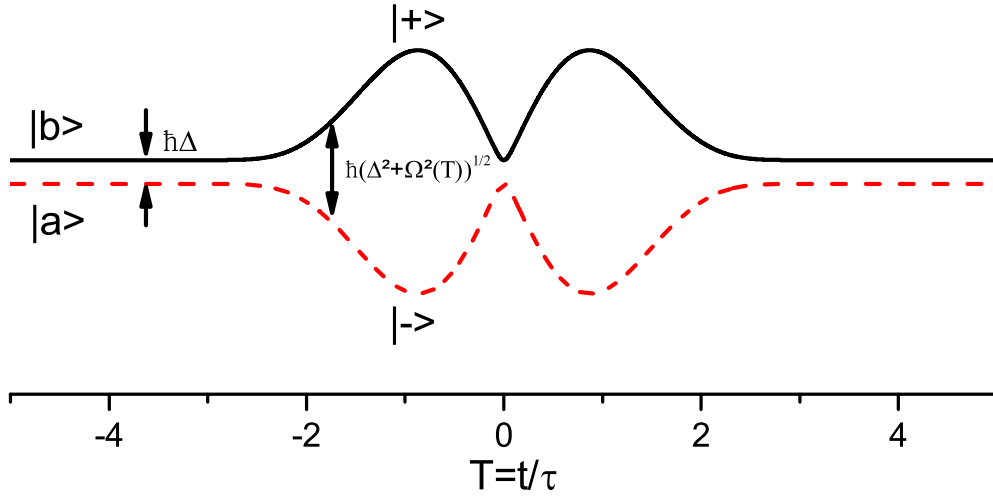


FIGURE 1.3 – Niveaux énergétiques des états adiabatiques lorsque le champ est non-résonnant avec la transition atomique, dans la représentation d'interaction. L'enveloppe du champ est une double gaussienne :  $\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( e^{-\left(\frac{t+t_0}{\tau}\right)^2} - e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2} \right)$  d'aire totale nulle. Avant et après l'interaction, lorsque  $\epsilon(t) = 0$ , les états adiabatiques sont séparés de  $\hbar\Delta$  et  $|+\rangle$  ( $|t| \gg \tau$ ) =  $|b\rangle$ ,  $|-\rangle$  ( $|t| \gg \tau$ ) =  $|a\rangle$ . Durant l'interaction, lorsque  $\epsilon(t) \neq 0$ , les états adiabatiques sont séparés de  $\hbar\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(t)}$ .

s'exprime :

$$V(t) = \frac{\Omega_0/\Delta \partial_t \epsilon(t)}{(\Omega_0/\Delta \epsilon(t))^2 + 1}. \quad (1.24)$$

L'enveloppe  $\epsilon(t)$  ainsi que le couplage  $V(t)$  sont représentés sur la figure 1.4. Le terme de couplage présente un minimum à  $t = 0$  :  $V(t=0) = \frac{2\Omega_0}{\Delta} \left( \partial_t \epsilon(t) \right)_{t=0}$  et retombe à 0 à  $t = \pm t_1$ . Les temps  $\pm t_1$  correspondent aux instants où la dérivée du champ s'annule, soit lorsque l'amplitude du champ est maximale. Cela correspond aussi à la séparation maximale entre les états adiabatiques. Le terme de couplage non-adiabatique présente deux autres maxima non-négligeables à  $t = \pm t_2$ .

Le pic à  $t = 0$  du terme de couplage non-adiabatique peut être caractérisé par son aire  $A_{na}$  et sa largeur  $\delta T$ , qui peut être approximée à  $\delta T \simeq A_{na}/V(t=0)$ . Son aire est donnée par :

$$A_{na} = \int_{-t_1}^{t_1} V(t) dt = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\Omega_0}{\Delta} \epsilon(t_1) \right). \quad (1.25)$$

Dans la limite d'un couplage infini  $\frac{\Omega_0}{\Delta} \rightarrow \infty$ , on a :

$$\begin{aligned} A_{na} &\rightarrow \pi \\ \delta T &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le terme de couplage non-adiabatique se comporte alors comme une impulsion delta d'aire  $\pi$ . Autour de  $t = 0$  (sur une largeur de quelques  $\delta T$ ), la séparation entre les états adiabatiques est minimum et vaut environ  $\hbar\Delta$  et l'impulsion peut

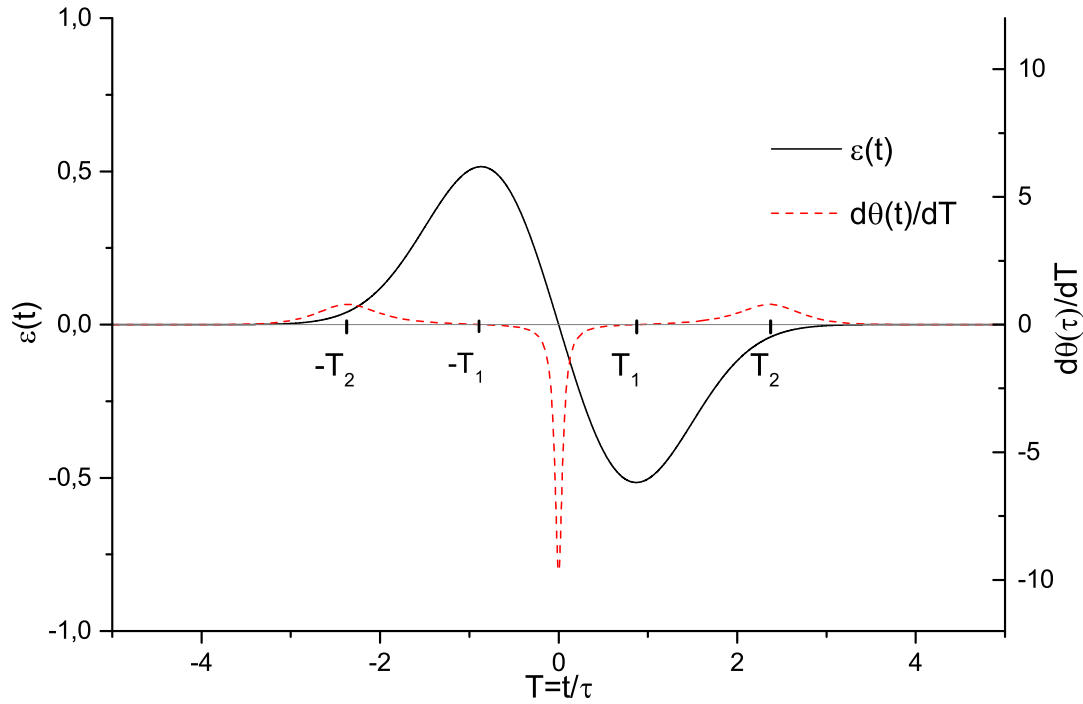


FIGURE 1.4 – Enveloppe du champ et couplage non-adiabatique. L'enveloppe du champ est une double gaussienne :  $\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{t+t_0}{\tau}} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right)$ . Le terme de couplage présente un extremum principal à  $T = 0$ , redevient nul à  $T = \pm T_1$  et possède deux maxima à  $T = \pm T_2$ .

être approximée résonnante dans la limite  $\frac{\Omega_0}{\Delta} \rightarrow \infty$ . On retrouve alors, localement, la situation du paragraphe précédent.

Cette situation est représentée sur la figure 1.5. Le champ utilisé est celui de la figure 1.4. La population adiabatique effectue un transfert de population presque complet à  $t = 0$ , qui correspond à une impulsion d'aire  $\pi$ . Cependant, les deux autres maxima du terme de couplage à  $t = \pm t_2$  produisent des transferts de population non-négligeables. Ces transferts expliquent le fait que la population finale n'est pas complètement inversée. À  $T = -T_2$ , une partie de la population est transférée dans l'état  $|+\rangle$ . Cette population modifie le saut en  $t = 0$  et pour finir un autre transfert de population est effectué en  $t = t_2$ . Afin d'avoir un transfert de population complet, il faut limiter ces phénomènes et avoir une évolution adiabatique sur les ailes de l'impulsion.

Cet exemple montre clairement l'importance des transitions non-adiabatiques. On a montré, dans le paragraphe précédent que, sans celles-ci, une impulsion d'aire nulle laisse le système atomique inchangé. L'utilisation d'un champ au profil temporel spécifique permet cependant de réaliser des transitions non-adiabatiques capables d'inverser complètement la population du système.

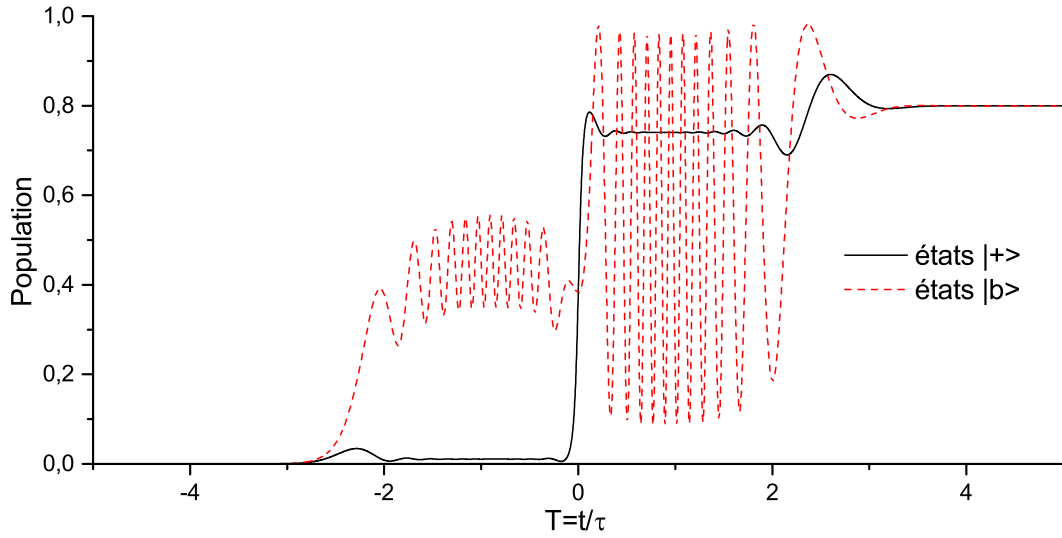


FIGURE 1.5 – Dynamique des populations adiabatique (trait plein noir) et atomique (pointillés rouges). L'atome est initialement dans l'état  $|a\rangle$  qui correspond à l'état adiabatique  $|-\rangle$  avant l'interaction. La population adiabatique réalise un transfert de population à  $T = 0$ , lorsque le couplage  $V(T)$  est sur son extremum. À  $T = \pm T_2$ , la population adiabatique effectue de légers sauts, dus aux deux maxima de  $V(t)$  (voir figure 1.4). La population atomique  $|b\rangle$  oscille (oscillations de Rabi) au cours de l'interaction et sature à 0.8. Les paramètres sont  $\Delta\tau = 1$  et  $\Omega\tau = 20\pi$ .

## 1.2 Ensemble atomique

On considère dans cette partie la propagation d'une impulsion résonnante dans un milieu atomique. Le champ est défini de la sorte :

$$E(z, t) = \epsilon_i f(z, t) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{cc} \quad (1.26)$$

où  $\epsilon_i$  et  $f(z, t)$  sont l'amplitude et l'enveloppe du champ, cc signifie le complexe conjugué. À l'entrée du milieu le champ a une enveloppe gaussienne de largeur temporelle  $\tau$  :

$$f(z = 0, t) = \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}} e^{-(t/\tau)^2}. \quad (1.27)$$

La fonction d'onde du système s'écrit :

$$|\psi\rangle(t) = A_a(z, t) |a\rangle + A_b(z, t) e^{-i\omega_0 t} |b\rangle. \quad (1.28)$$

On obtient à l'aide de l'équation de Schrödinger, l'évolution des amplitudes :

$$\partial_t A_a(t) = i\Theta_0 \tau^{-1} f(z, t) A_b(z, t) \quad (1.29a)$$

$$\partial_t A_b(t) = i\Theta_0 \tau^{-1} f(z, t) A_a(z, t) + ikv_z A_b(t), \quad (1.29b)$$

où  $\Theta_0 = \frac{d\epsilon_i \tau}{\hbar}$  et  $-kv_z$  est le décalage Doppler. L'équation de propagation est donnée par [36] :

$$\frac{df(z, t)}{dz/L} = i \frac{e_{disp}}{\Theta_0} \langle A_a^* A_b \rangle. \quad (1.30)$$



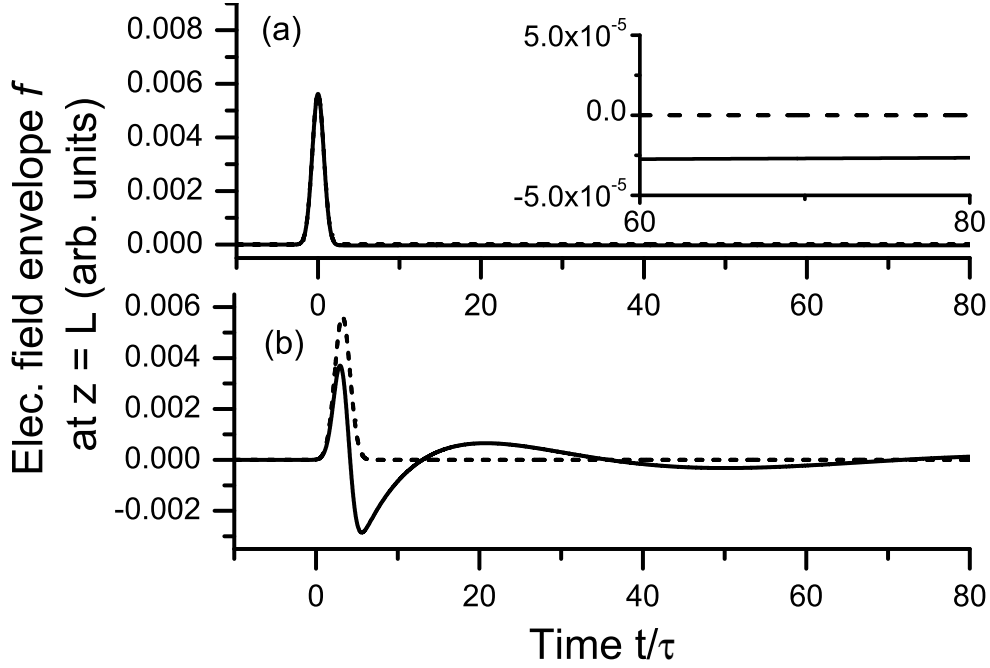


FIGURE 1.6 – *Figure extraite de Delagnes et al [36].* Comportement temporel de l'impulsion transmise pour  $\Delta_D = 0.6$  GHz,  $\tau = 100$  fs,  $\Theta_0 = 0.01$  et (a)  $\alpha_0 L = 100$ ,  $e_{disp} = 0.006$  (b)  $\alpha_0 L = 16500$ ,  $e_{disp} = 1$ . Le champ incident est représenté en pointillés, et le champ transmis en trait plein. (a) le champ est très faiblement déformé mais possède une longue queue négative qui permet d'avoir une aire totale nulle. (b) le champ est fortement déformé et possède plusieurs oscillations. L'aire totale est nulle.

Le coefficient  $e_{disp} = \frac{N d^2 \omega_0}{2 c \epsilon_0 \hbar} L \tau$  caractérise la dispersion du milieu, avec  $N$  la densité atomique et  $L$  la longueur de l'échantillon. Afin de prendre en compte la largeur Doppler, due au déplacement des centres de masse atomique dans l'échantillon, la cohérence optique  $A_a^* A_b$  est moyennée :

$$\langle A_a^* A_b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A_a^* A_b g(\Delta) d\Delta \quad (1.31)$$

avec  $g(\delta) = \frac{1}{2\pi\Delta_d} e^{-\frac{1}{4\pi}(\frac{\delta}{\Delta_d})^2}$  la distribution Doppler et  $\Delta_d$  la largeur Doppler. L'aire de l'impulsion est définie par :

$$\Theta(z) = \Theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) dt / \tau. \quad (1.32)$$

À partir des équations (1.29) et (1.30) on obtient l'équation d'évolution de l'aire de l'impulsion [36] :

$$\frac{d^2\Theta(z)}{dz} = -\frac{\alpha_0}{2} \sin(2\Theta(z)) \quad (1.33)$$

dont la solution est :

$$\tan(\Theta(z)) = \tan \Theta_0 e^{-\alpha_0 z / 2} \quad (1.34)$$

où  $\alpha_0 L = \frac{e_{disp}}{\Delta_d \tau}$  est l'épaisseur optique du milieu.

Lorsque le milieu est optiquement dense ( $\alpha_0 L \gg 1$ ), l'aire de l'impulsion sature et on a  $\tan(\Theta(s)) \simeq 0$  pour  $z > \alpha_0^{-1}$ . Dans ces conditions, l'aire de l'impulsion sature à  $\Theta(z > \alpha_0^{-1}) = p\pi$  où  $p$  est un entier.

Dans un régime de couplage faible, on a  $\tan \Theta(z) \simeq \Theta(z) \xrightarrow{z \gg \alpha_0^{-1}} 0$ , l'aire algébrique de l'impulsion devient nulle. Le profil de l'impulsion est alors déformé, faisant apparaître des parties négatives. Cette distorsion est représentée sur la figure 1.6. On observe que le champ est modifié et possède soit (a) quand  $e_{disp} = 0.006 \ll 1$ , une faible distorsion avec une faible partie négative sur les temps longs, soit (b) quand  $e_{disp} = 1$ , un caractère fortement oscillatoire.

L'équation (1.32) permet de relier l'aire de l'impulsion à la composante de Fourier résonnante de l'impulsion :

$$\Theta(z) = \Theta_0 \tilde{f}(z, \omega = \omega_0) \quad (1.35)$$

où  $\tilde{f}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$ . On en déduit que lorsque l'aire de l'impulsion devient nulle, la fréquence résonnante de l'impulsion est complètement absorbée.

## 1.3 Modèle de Jaynes-Cummings

### 1.3.1 Hamiltonien de Jaynes-Cummings

On considère dans cette partie un atome à deux niveaux soumis à un champ monomode. La situation est la même que dans la partie 1.1, sauf que cette fois le champ est traité quantiquement. L'hamiltonien du système se décompose en trois parties correspondant à l'atome, au champ et à l'interaction :

$$\hat{H} = \hat{H}_{atome} + \hat{H}_{champ} + \hat{H}_{inter} \quad (1.36)$$

avec

$$\hat{H}_{atome} = \hbar \omega_0 \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \quad (1.37a)$$

$$\hat{H}_{champ} = \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.37b)$$

$$\hat{H}_{inter} = -\hat{d} \hat{E}. \quad (1.37c)$$

Les opérateurs  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$  sont les opérateurs de création et d'annihilation de photons dans le mode  $\omega_c$  du champ.  $\hat{d} = d(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger)$  est l'opérateur dipolaire électrique et  $\hat{E} = E_0 \epsilon(t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$  est l'opérateur du champ avec  $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_c}{2\epsilon_0 V}}$ ,  $V$  étant le volume du mode.  $\epsilon(t)$  est une enveloppe temporelle réelle permettant de prendre en compte un couplage transitoire entre l'atome et le champ monomode.  $\hat{\sigma} = |a\rangle \langle b|$  et  $\hat{\sigma}^\dagger = |b\rangle \langle a|$  sont les opérateurs de désexcitation et d'excitation de l'atome. L'hamiltonien d'interaction peut alors s'écrire :

$$\hat{H}_{inter} = -\hbar g(t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger) \quad (1.38)$$

avec  $g(t) = \frac{E_0 d}{\hbar} \epsilon(t)$ .

Dans l'expression (1.38), les termes  $\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger$  et  $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}$  correspondent aux processus d'excitation de l'atome par absorption d'un photon, et d'émission d'un photon par désexcitation de l'atome. Les termes restants,  $\hat{a}\hat{\sigma}$  et  $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^\dagger$ , correspondent à des processus hors résonance, d'absorption de photon par désexcitation de l'atome et d'émission de photon par excitation de l'atome. Ces deux derniers termes seront négligés par la suite. Cela correspond à faire l'approximation RWA de la partie 1.1. Nous verrons dans le chapitre 3 une situation où ces termes hors-RWA ne peuvent pas être négligés.

L'hamiltonien 1.38 se simplifie alors en :

$$\hat{H}_{inter} = -\hbar g(t)(\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}), \quad (1.39)$$

ce qui amène à l'hamiltonien total du système :

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hbar g(t)(\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}), \quad (1.40)$$

avec  $\Delta = \omega_0 - \omega_c$ .

De la même façon que pour le cas semi-classique étudié précédemment, il est utile de passer en représentation d'interaction. Pour cela on réécrit l'hamiltonien (1.40) :

$$\hat{H} = \hbar\omega_c(\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hat{a}^\dagger\hat{a}) + \hbar\Delta\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \hbar g(t)(\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}). \quad (1.41)$$

La procédure générale pour passer en représentation d'interaction est détaillée dans la partie 1.1. On prend cette fois  $\hat{H}_0 = \hbar\omega_c(\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hat{a}^\dagger\hat{a})$ . On obtient alors pour l'hamiltonien en représentation d'interaction :

$$\hat{H}^{(I)} = \hbar\Delta\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \hbar g(t)(\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}). \quad (1.42)$$

On peut noter ici, que si l'on avait conservé les termes hors-RWA, on aurait :

$$\begin{aligned} \hat{U}_0^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}\hat{U}_0 &= \hat{a}\hat{\sigma}e^{-2i\omega_c t} \\ \hat{U}_0^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^\dagger\hat{U}_0 &= \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^\dagger e^{2i\omega_c t}. \end{aligned}$$

On retrouve dans ces expressions, le fait que ces termes ont une fréquence double  $\pm 2\omega_c$ .

La fonction d'onde générale du système, en représentation Schrödinger, est donnée par :

$$|\psi\rangle_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{a,n+1}(t)e^{-i(n+1)\omega_c t} |a, n+1\rangle + A_{b,n}e^{-i(\omega_0+n\omega_c)t} |b, n\rangle \quad (1.43)$$

où  $|a, n+1\rangle = |a\rangle \otimes |n+1\rangle$  et  $|b, n\rangle = |b\rangle \otimes |n\rangle$  correspondent aux états où l'atome est dans le fondamental avec  $n+1$  photons dans le champ et l'état où l'atome est excité avec  $n$  photons dans le champ, respectivement.  $|n\rangle$  est un état de Fock, ou état nombre de photon, qui contient  $n$  photons dans le mode du champ. L'action des opérateurs du champ sur ces états est définie de la sorte :

$$\begin{aligned} \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \end{aligned}$$

On a alors  $\hat{H}_{champ} |n\rangle = n(\hbar\omega_c) |n\rangle$ , où  $\hbar\omega_c$  est l'énergie d'un seul photon.

En représentation d'interaction, on a :

$$|\psi\rangle_I(t) = \hat{U}_0^\dagger |\psi\rangle_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{a,n+1}(t) |a, n+1\rangle + A_{b,n}(t) e^{-i\Delta t} |b, n\rangle. \quad (1.44)$$

Comme précédemment, on se placera systématiquement par la suite en représentation d'interaction, et les indices  $S$  et  $I$  seront alors omis.

### 1.3.2 Base adiabatique

De la même manière que pour le modèle semi-classique, la dynamique du système peut se comprendre plus facilement dans la base adiabatique pour le modèle quantique. Dans l'approximation RWA, l'hamiltonien  $\hat{H}$  ne couple que les états  $|a, n+1\rangle$  et  $|b, n\rangle$ . On peut alors restreindre l'étude à l'espace vectoriel  $\{|a, n+1\rangle, |b, n\rangle\}$ . Dans cet espace, l'hamiltonien s'exprime :

$$\hat{H}_n = -\hbar g(t) \sqrt{n+1} (|b, n\rangle \langle a, n+1| + |a, n+1\rangle \langle b, n|) + \hbar \Delta |b, n\rangle \langle b, n|. \quad (1.45)$$

Les états adiabatiques, notés  $|\pm, n\rangle$  sont alors ceux qui diagonalisent cet hamiltonien. La procédure est similaire à celle utilisée dans le modèle semi-classique, on obtient :

$$|+, n\rangle = \cos \theta_n(t) |b, n\rangle - \sin \theta_n(t) |a, n+1\rangle \quad (1.46a)$$

$$|-, n\rangle = \sin \theta_n(t) |b, n\rangle + \cos \theta_n(t) |a, n+1\rangle \quad (1.46b)$$

et

$$E_{\pm, n} = \frac{1}{2} \left( \hbar \Delta \pm \sqrt{(\hbar \Delta)^2 + (2g(t)\sqrt{n+1})^2} \right) \quad (1.47)$$

avec  $\theta_n(t)$  défini tel que  $\tan(2\theta_n(t)) = \frac{2g(t)\sqrt{n+1}}{\Delta}$ .

### 1.3.3 Évolution du système

L'évolution des amplitudes de probabilités des états adiabatiques s'obtient à partir de l'équation de Schrödinger en représentation d'interaction, réduite à l'espace  $\{|a, n+1\rangle, |b, n\rangle\}$ . On obtient un système similaire au cas semi-classique :

$$\partial A_{+,n}(t) = -i \frac{E_{+,n}(t)}{\hbar} A_{+,n}(t) - \partial_t(\theta_n(t)) A_{-,n}(t) \quad (1.48a)$$

$$\partial A_{-,n}(t) = -i \frac{E_{-,n}(t)}{\hbar} A_{-,n}(t) + \partial_t(\theta_n(t)) A_{+,n}(t). \quad (1.48b)$$

Les états adiabatiques  $|\pm, n\rangle$  sont couplés entre eux à travers  $\partial_t(\theta_n(t))$  mais pas avec les autres états adiabatiques  $|\pm, n' \neq n\rangle$ . Chaque *famille* de branches adiabatiques évolue alors séparément.

Cette structure en branches indépendantes a une conséquence sur les observables. En effet, la population dans l'état excité de l'atome s'exprime :

$$P_b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle b | \langle n | \psi(t) \rangle|^2. \quad (1.49)$$

Cette population est donnée comme la somme des populations de chaque paire de branches adiabatiques, évoluant indépendamment les unes des autres au cours de l'interaction.

### 1.3.4 Oscillations de Rabi quantiques

On considère un couplage constant ( $\epsilon(t) = \epsilon$ ), l'atome est initialement dans son état fondamental  $|a\rangle$  et le champ est dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , dit de Glauber [37], tel que :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.50)$$

Le champ  $|\alpha\rangle$  est une superposition cohérente d'états nombres  $|n\rangle$ , avec un nombre moyen de photons  $|\alpha|^2$ .

On a alors :

$$|\psi(t=0)\rangle = |a\rangle \otimes |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |a, n\rangle. \quad (1.51)$$

En utilisant les relations (1.46) on obtient l'expression de la fonction d'onde initiale dans la base adiabatique :

$$|\psi\rangle(t=0) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{n!}} (-\sin\theta_n |+, n\rangle + \cos\theta_n |-, n\rangle). \quad (1.52)$$

Le système à l'instant  $t$  est alors décrit par :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle(t) &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi\rangle(0) \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left( -\sin\theta_n e^{-iE_{+,n}t/\hbar} |+, n\rangle + \cos\theta_n e^{-iE_{-,n}t/\hbar} |-, n\rangle \right) \end{aligned}$$

La population dans l'état excité est donnée par :

$$\begin{aligned} P_b(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle b, n | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} 2\cos^2\theta_n \sin^2\theta_n (1 - \cos(\sqrt{\Delta^2 + (2g\sqrt{n+1})^2}t)). \end{aligned}$$

Cette population est une somme de termes oscillants. Chacun de ces termes correspond à une oscillation de Rabi dans un champ contenant  $n$  photons. La population dans l'état excité est représentée sur la figure 1.7 pour un champ contenant un nombre moyenne de photons  $|\alpha|^2 = 20$ . On observe alors un début d'oscillations de Rabi qui disparaissent très rapidement (*collapse*) et réapparaissent plus tard (*revival*). Ce comportement est dû au déphasage des différentes composantes oscillantes de la probabilité  $P_b(t)$ . La réapparition des oscillations correspond au moment où ces composantes se remettent en phase. Ce comportement est dû au caractère discret du champ électromagnétique, il s'agit d'une signature de la nature quantique du champ.

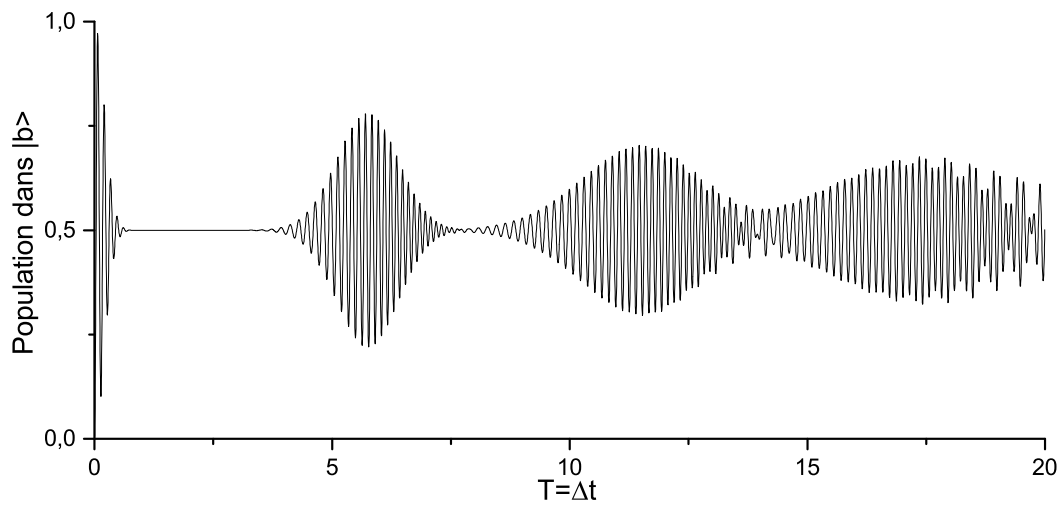


FIGURE 1.7 – Dynamique de la population dans l'état excité  $|b\rangle$  de l'atome. Le champ contient en moyenne 20 photons et  $\frac{2g}{\Delta} = 10$ . L'atome est initialement dans l'état fondamental  $|a\rangle$ . Les *collapses* et *revivals* de la population sont une signature de la nature quantique du champ.



# Chapitre 2

## Effets transitoires dans un micro-mazer

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèle</b>	<b>26</b>
<b>2.3</b>	<b>Base adiabatique</b>	<b>28</b>
<b>2.4</b>	<b>Évolution du système : différents régimes</b>	<b>29</b>
2.4.1	Cas résonnant	29
2.4.2	Cas non-résonnant	31
<b>2.5</b>	<b>Évolution indépendante du temps</b>	<b>32</b>
<b>2.6</b>	<b>Régimes chaud et intermédiaire</b>	<b>33</b>
<b>2.7</b>	<b>Régime chaud : influence de la forme de <math>u(z)</math></b>	<b>34</b>
<b>2.8</b>	<b>Régime intermédiaire</b>	<b>39</b>
2.8.1	Interprétation temporelle	39
2.8.2	Discussion	39
2.8.3	Modèle simplifié : schéma d'interférence	42
<b>2.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>45</b>

---





## 2.1 Introduction

La réalisation d'excitations transitoires est habituellement effectuée à l'aide d'une impulsion lumineuse se propageant vers un atome immobile. Il est toutefois possible d'utiliser une configuration différente, qui inverse les rôles de l'atome et du champ. Dans cette situation, le champ est contenu dans une cavité micro-maser qui est traversée transversalement par un atome. Ce n'est alors plus le champ qui possède un caractère transitoire, mais directement le terme de couplage. L'atome est transitoirement excité au cours de sa traversée de la cavité, et complètement découplé du champ en dehors. Cette configuration permet par ailleurs d'obtenir un régime de couplage fort entre l'atome et le champ, condition difficilement réalisable dans le cas d'un atome libre dans l'espace en trois dimensions interagissant avec une impulsion lumineuse.

Historiquement, le maser a été l'ancêtre du laser pour émettre un faisceau micro-onde cohérent. La cavité est alors traversée par un jet d'atomes excités qui amplifient le champ de la cavité en déposant un photon, lorsqu'ils se dés excitent par émission stimulée. Meschede et Whalther [38] ont réalisé le premier micro-maser traversé par un seul atome à la fois, et ont ainsi démontré l'intérêt de cette configuration pour étudier l'interaction entre un système à deux niveaux et un champ monomode. Cette configuration a alors été utilisée pour sonder le champ de la cavité à l'aide d'un atome unique [39–43] ou encore pour réaliser des portes logiques quantique [44]. Par la suite, Scully, Meyer et Whalther [25] ont montré que lorsque l'énergie cinétique de l'atome incident est de l'ordre de l'énergie d'interaction, la quantification du mouvement du centre de masse est nécessaire et donne lieu à un nouveau type d'émission stimulée. Afin de différencier ce mécanisme du processus habituel d'émission stimulée, le terme maser est alors remplacé par mazer (*microwave amplification via z-motion-induced emission of radiation*), où  $z$  est la direction transverse de la cavité selon laquelle le mouvement de l'atome est quantifié. La théorie complète du mazer, dans le cas résonnant, a été détaillée dans une série de trois papiers [26–28] où les modes mesa,  $\text{sech}^2$  et sinusoïdaux ont été utilisés pour le champ électromagnétique. Le cas d'un mode sinusoïdal a été raffiné par Retamal *et al* [45]. Bastin et Solano [46] ont proposé une méthode numérique permettant de traiter des modes de formes arbitraires. Löffler *et al* [47] ont alors montré que ce mécanisme peut servir de filtre de vitesses, permettant d'obtenir un jet d'atomes avec une faible dispersion en vitesse. Le concept a été généralisé dans le cas de transition à deux photons [48], d'atomes à trois niveaux [49] et lorsque l'atome traverse deux cavités [50]. Ces précédentes études ont toutes été réalisées dans le cas où la transition atomique est résonnante avec le champ monomode contenu dans la cavité. La généralisation au cas non-résonnant, pour un profil mesa, a été réalisée par Bastin et Martin [29], où il a été montré que l'atome peut être accéléré ou ralenti en fonction du désaccord. Gillot et Bouchène [10] ont montré que dans ce dernier cas, l'évolution de l'atome au cours de sa traversée peut être non-adiabatique. Ces transitions non-adiabatiques peuvent alors entraîner une inversion totale de la population atomique.

Dans cette partie, nous étudierons la situation d'un atome à deux niveaux, traversant une cavité monomode non-résonnante dans le régime où l'énergie ci-

nétique de l'atome est du même ordre de grandeur que l'énergie d'interaction. Le mouvement du centre de masse de l'atome est quantifié afin de correctement traiter les couplages opto-mécaniques induits par l'interaction. Nous montrerons que la possibilité d'effectuer des transitions non-adiabatiques est fortement dépendante du profil du mode du champ électromagnétique. Nous verrons qu'en fonction de l'énergie cinétique de l'atome, différents régimes peuvent être obtenus. L'atome pourra alors être totalement réfléchi par la cavité, ou suivre une trajectoire classique. Nous nous focaliserons sur le régime intermédiaire, où les transitions non-adiabatiques propagent le système atomique dans une superposition d'états. Nous verrons qu'il est alors possible de réaliser un interféromètre de type Ramsey.

## 2.2 Modèle

On considère un atome à deux niveaux, noté  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  d'énergies propres 0 et  $\hbar\omega_0$  respectivement, se déplaçant dans la direction  $+z$  vers une cavité micro-mazer, représenté sur le schéma 2.1. La cavité ne contient qu'un seul mode, de

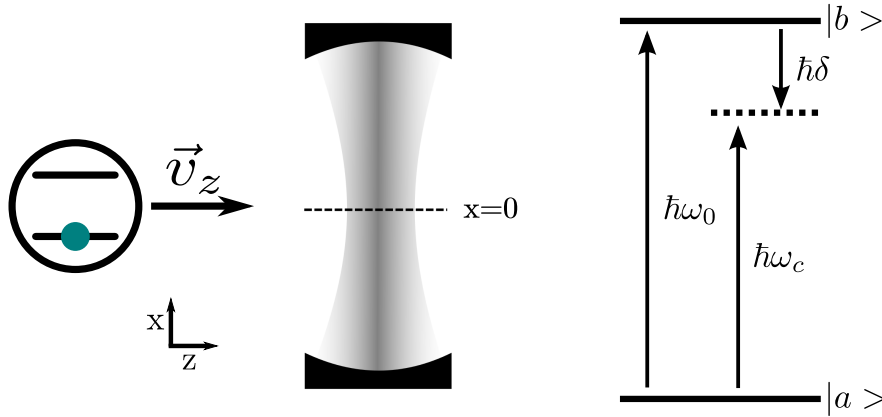


FIGURE 2.1 – Schéma d'un atome à deux niveaux traversant un micro-mazer

fréquence  $\omega_c$ , désaccordé de  $\delta = \omega_0 - \omega_c$  par rapport à la transition atomique. Le déplacement du centre de masse de l'atome est traité quantiquement, afin de prendre en compte la variation d'énergie cinétique induite par l'émission ou l'absorption de photons. Dans ces conditions, l'hamiltonien du système se décompose en trois parties :

$$\hat{H} = \hat{H}_{atome} + \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{int} \quad (2.1)$$

avec

$$\hat{H}_{atome} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hbar\omega_0 |b\rangle \langle b| \quad (2.2a)$$

$$\hat{H}_{cav} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.2b)$$

$$\hat{H}_{int} = \hbar g u(z) (|a\rangle \langle b| + |b\rangle \langle a|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.2c)$$

les hamiltoniens de l'atome, du champ contenu dans la cavité et de l'interaction respectivement.  $\hat{p}$  est l'opérateur impulsion du centre de masse,  $m$ , de l'atome le

long de l'axe  $z$ ,  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  sont les opérateurs annihilation et création de photons dans le mode de la cavité.  $g$  est le paramètre de couplage entre l'atome et le champ et  $u(z)$  est le profil transverse de ce champ à l'intérieur de la cavité de dimension caractéristique  $L$ . Les fréquences  $\omega_0$  et  $\omega_c$  étant les plus élevées du système, on peut réaliser l'approximation RWA et simplifier l'hamiltonien d'interaction :

$$\hat{H}_{int} \stackrel{\text{RWA}}{\simeq} \hbar g u(z) \left( |a\rangle \langle b| \hat{a}^\dagger + |b\rangle \langle a| \hat{a} \right). \quad (2.3)$$

L'étude de la dynamique du système en terme d'évolutions adiabatiques et de transitions non-adiabatiques est simplifiée en se plaçant en représentation d'interaction. Pour cela on sépare l'hamiltonien (2.1) en une partie,  $\hat{H}_0$ , contenant les descriptions du champ seul et des degrés de liberté interne de l'atome, et une seconde partie,  $\hat{H}_1$ , contenant les termes de couplages ainsi que les degrés de liberté externes de l'atome (impulsion du centre de masse). On a alors :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

avec

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_c \left( |b\rangle \langle b| + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \quad (2.4a)$$

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hbar \delta |b\rangle \langle b| + \hbar g u(z) \left( |a\rangle \langle b| \hat{a}^\dagger + |b\rangle \langle a| \hat{a} \right). \quad (2.4b)$$

Le changement de représentation est alors effectué grâce à la transformation unitaire  $\hat{U}_0 = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$ . La fonction d'onde devient  $|\psi\rangle_I = \hat{U}_0^\dagger |\psi\rangle_S$  et les observables se transforment selon  $\hat{O}_I = \hat{U}_0^\dagger \hat{O}_S \hat{U}_0$ . Les indices  $I$  et  $S$  indiquent quelle représentation est utilisée. L'équation de Schrödinger devient dans la nouvelle représentation :

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle_I}{dt} = H_{int}^{(I)} |\psi\rangle_I \quad (2.5)$$

avec l'hamiltonien en représentation interaction :

$$\hat{H}_{int}^{(I)} = \hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hbar \delta |b\rangle \langle b| + \hbar g u(z) \left( |a\rangle \langle b| \hat{a}^\dagger + |b\rangle \langle a| \hat{a} \right). \quad (2.6)$$

Les indices  $I$  seront par la suite omis.

La fonction d'onde générale du système s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \psi_{n+1}^a(z, t) |a, n+1\rangle + \psi_n^b(z, t) |b, n\rangle \right] |z\rangle dz \quad (2.7)$$

où  $\psi_{n+1}^a(z, t) = \langle a, n+1 | \langle z | \psi(t) \rangle$  est l'amplitude de probabilité que l'atome, à la position  $z$ , soit dans l'état fondamental avec  $n+1$  photons dans la cavité ( $|a, n+1\rangle = |a\rangle \otimes |n+1\rangle$ ) et  $\psi_n^b(z, t) = \langle b, n | \langle z | \psi(t) \rangle$  celle que l'atome, à la position  $z$ , soit excité avec  $n$  photons dans la cavité. L'état où l'atome est dans le fondamental avec zéro photon dans la cavité ( $|a, 0\rangle$ ) n'est pas possible dans (2.7), conformément aux conditions initiales utilisées par la suite.

## 2.3 Base adiabatique

La base adiabatique permet de suivre de manière simple la dynamique du système, en différenciant les évolutions adiabatiques où le système, après interaction avec la cavité retrouve son état initial, et celles non-adiabatiques où des transferts permanents de population peuvent s'effectuer. Les états propres instantanés de la base adiabatique sont ceux qui diagonalisent l'hamiltonien d'interaction correspondant aux degrés de libertés internes du système  $\hat{H}'(z) = \hbar\delta |b\rangle\langle b| + \hbar g u(z)(|a\rangle\langle b| \hat{a}^\dagger + |b\rangle\langle a| \hat{a})$  lorsque l'atome est à la position  $z$ . Ce sont des superpositions des états de la base sans couplage  $|a, n+1\rangle$  et  $|b, n\rangle$  et ils sont définis par :

$$|+, n\rangle(z) = \cos(\theta_n(z)) |b, n\rangle + \sin(\theta_n(z)) |a, n+1\rangle \quad (2.8a)$$

$$|-, n\rangle(z) = -\sin(\theta_n(z)) |b, n\rangle + \cos(\theta_n(z)) |a, n+1\rangle \quad (2.8b)$$

avec

$$\hat{H}'(z) |\pm, n\rangle(z) = E_\pm(z) |\pm, n\rangle(z) \quad (2.9a)$$

$$E_\pm(z) = \frac{1}{2} \left( \hbar\delta \pm \sqrt{(\hbar\delta)^2 + (2\hbar g u(z) \sqrt{n+1})^2} \right). \quad (2.9b)$$

$E_\pm(z)$  est l'énergie des états adiabatiques dépendant de la position  $z$  de l'atome.  $\theta_n(z)$  est l'angle de rotation entre la base sans couplage et la base adiabatique, défini par :

$$\tan(2\theta_n(z)) = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta} u(z). \quad (2.10)$$

En dehors de la cavité, lorsque  $|z| \gg \frac{L}{2}$ , la base adiabatique se confond avec la base non couplée :

$$|+, n\rangle(z \rightarrow \pm\infty) = |b, n\rangle \quad (2.11a)$$

$$|-, n\rangle(z \rightarrow \pm\infty) = |a, n+1\rangle. \quad (2.11b)$$

La situation résonnante ( $\delta = 0$ ) doit faire l'objet d'une attention particulière. Dans ce cas, on a quelque soit  $z$  :

$$\begin{aligned} \theta_n &= \frac{\pi}{4} \\ |+, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|b, n\rangle + |a, n+1\rangle) \\ |-, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|b, n\rangle + |a, n+1\rangle) \end{aligned}$$

et  $E_\pm(z) = \pm \hbar g \sqrt{n+1} u(z)$ .

La fonction d'onde (2.7) peut être réécrite dans la base adiabatique :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_n^+(t, z) |+, n\rangle(z) + \psi_n^-(t, z) |-, n\rangle(z)] |z\rangle dz \quad (2.12)$$

avec  $\psi_n^\pm(t, z) = (\langle \pm, n | \langle z |) |\psi(t)\rangle$ .

La fonction d'onde exprimée dans ce système va nous permettre de suivre les populations  $|\psi_n^\pm(t, z \rightarrow \infty)|^2$  des états adiabatiques et ainsi d'étudier l'influence des couplages opto-mécaniques sur les transitions non-adiabatiques vues dans le chapitre 1.

## 2.4 Évolution du système : différents régimes

L'évolution des amplitudes dans la base adiabatique est obtenue en appliquant l'équation de Schrödinger sur la fonction d'onde (2.12) avec l'Hamiltonien (2.6). On obtient :

$$i\hbar\partial_t\psi_n^\pm(z, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_\pm(z) \right] \psi_n^\pm(z, t) \pm \hat{W}(z)\psi_n^\mp(z, t) \quad (2.13)$$

avec

$$V_\pm(z) = E_\pm(z) + \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z} \right)^2 \quad (2.14a)$$

$$\hat{W} = \frac{\hbar^2}{2M} \left( 2 \frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2\theta_n(z)}{\partial z^2} \right). \quad (2.14b)$$

Le premier terme (entre crochets) de l'équation (2.13) correspond à l'évolution adiabatique des amplitudes, tandis que le second correspond aux couplages non-adiabatiques.

### 2.4.1 Cas résonnant

Dans le cas résonnant ( $\delta = 0$ ), le terme de couplage non-adiabatique  $\hat{W}$  est nul ( $\frac{\partial^2\theta_n(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z} = 0$ ) et  $V_\pm(z) = E_\pm(z)$ . L'interaction se réduit alors à un simple problème de diffusion de particules sur des potentiels et l'équation (2.13) se simplifie en :

$$i\hbar\partial_t\psi_n^\pm(z, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_\pm(z) \right] \psi_n^\pm(z, t). \quad (2.15)$$

La composante  $\psi_n^+(z, t)$  est diffusée par la barrière de potentiel  $V_+(z)$ , tandis que la composante  $\psi_n^-(z, t)$  rencontre un puits de potentiel  $V_-(z)$ .

En fonction de l'énergie cinétique initiale  $E_{cin}$  de l'atome et des maxima  $V_\pm^0$  de ces potentiels, trois régimes de diffusion peuvent être séparés.

#### Régime chaud (classique)

Le régime chaud, lorsque  $E_{cin} \gg V_+^0$ , est représenté schématiquement sur la figure 2.2. Dans ce cas, les composantes  $\psi_n^\pm(z, t)$  se propagent sur les potentiels  $V_\pm(z)$ . Au cours de leur propagation, l'angle  $\theta_n(z)$  évolue alors que les populations adiabatiques restent les mêmes. Dans ce cas, les atomes suivent une trajectoire classique à vitesse constante qui ne nécessite pas un traitement quantique du centre de masse.

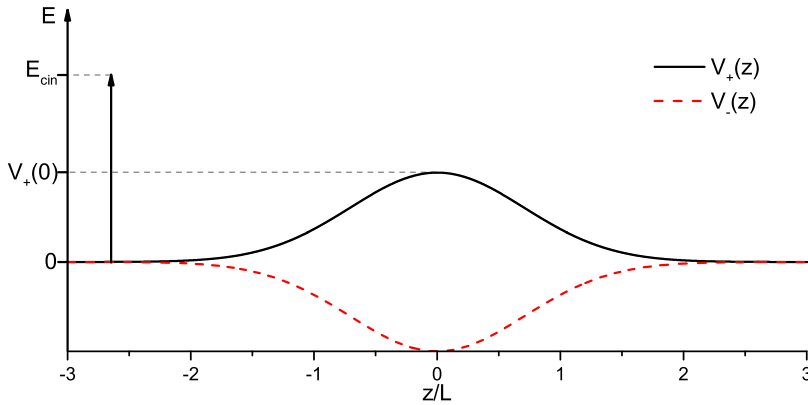


FIGURE 2.2 – Énergies des états adiabatiques lors de la traversée de la cavité en  $x = 0$ , dans le cas résonnant ( $\delta = 0$ ) et dans le régime chaud ( $E_{cin} \gg V_+(0)$ ).

### Régime froid

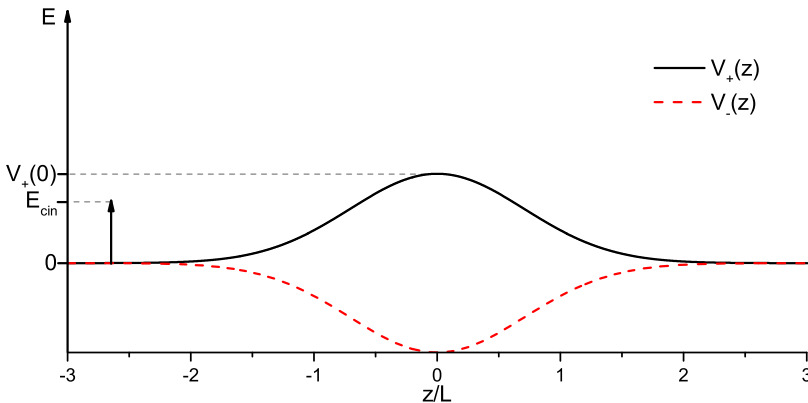


FIGURE 2.3 – Énergies des états adiabatiques lors de la traversée de la cavité en  $x = 0$ , dans le cas résonnant ( $\delta = 0$ ) et dans le régime froid ( $E_{cin} \ll V_+(0)$ ).

Le régime froid, lorsque  $E_{cin} \ll V_+^0$ , est représenté schématiquement sur la figure 2.3. Dans ce cas, la composante  $\psi_n^+(z, t)$  ne peut pas traverser la barrière de potentiel  $V_+(z)$  et est réfléchiée. La composante  $\psi_n^-(z, t)$  peut se propager dans le puits de potentiel  $V_-(z)$ . Scully *et al* [25] ont montré que cette situation conduit à un nouveau type d'émission induite par la cavité.

### Régime intermédiaire

Finalement, le régime intermédiaire, où  $E_{cin}$  et  $V_+^0$  sont du même ordre de grandeur est représenté schématiquement sur la figure 2.4. Dans ce cas, les deux composantes  $\psi_n^\pm(z, t)$  se propagent mais à des vitesses différentes. Contrairement au cas du régime chaud, cette différence est significative dans le régime intermédiaire.

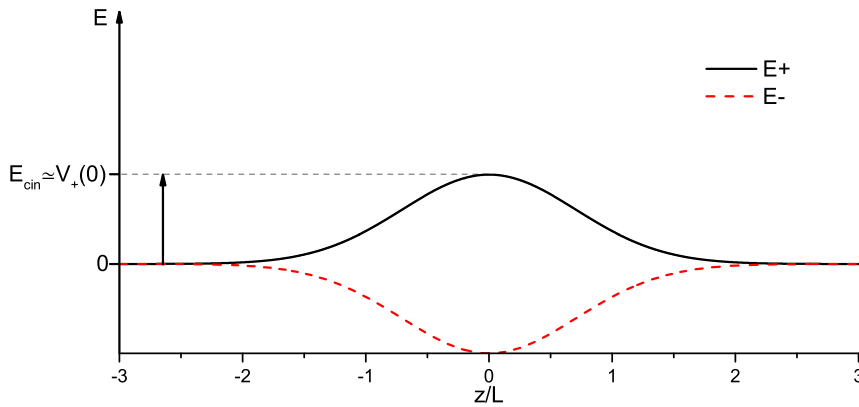


FIGURE 2.4 – Énergies des états adiabatiques lors de la traversée de la cavité en  $x = 0$ , dans le cas résonnant ( $\delta = 0$ ) et dans le régime intermédiaire ( $E_{cin} \gtrsim V_+(0)$ )

Dans les cas des régimes froid et intermédiaire, la modification de leur énergie cinétique induite par les potentiels n'est plus négligeable, et un traitement correct, quantique, du mouvement du centre de masse de l'atome est indispensable.

## 2.4.2 Cas non-résonnant

En dehors du cas résonnant ( $\delta \neq 0$ ), le schéma simple de diffusion de particules par des potentiels n'est plus valable. En effet le terme  $\hat{W}$  de couplage non-adiabatique n'est plus nul et peut entraîner des transferts de population entre les différents états adiabatiques  $|\pm, n\rangle$ . La probabilité d'effectuer une transition non-adiabatique est fonction des première et seconde dérivées spatiales de  $\theta_n(z)$  et dépend donc très fortement de la forme  $u(z)$  du mode de la cavité. Une conséquence importante est que les transitions non-adiabatiques vont être localisées aux endroits où  $u(z)$  subit de fortes variations spatiales. Le schéma précédent de diffusion de particules par des potentiels reste alors toujours utilisable en dehors de ces zones.

Une autre différence avec le cas résonnant est que l'énergie cinétique de l'atome est modifiée lors des transitions entre ses états fondamental et excité. En effet, l'atome absorbe ou émet un photon non-résonnant. La différence d'énergie est alors prise ou ajoutée à l'énergie cinétique de l'atome. Pour un désaccord  $\delta$  positif (négatif), l'énergie cinétique de l'atome est diminuée (augmentée) d'une valeur  $\hbar\delta$ . Si cette variation n'est pas négligeable par rapport à l'énergie cinétique (cas des régimes froid et intermédiaire), le traitement quantique du centre de masse de l'atome est nécessaire.

En dehors de la cavité ( $|z| \gg \frac{L}{2}$ ), la base adiabatique coïncide avec la base sans couplage, et le système d'équations d'évolution se simplifie :



$$i\hbar\partial_t\psi_n^b(z,t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hbar\delta \right] \psi_n^b(z,t) \quad (2.16a)$$

$$i\hbar\partial_t\psi_n^a(z,t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_n^a(z,t). \quad (2.16b)$$

Les équations (2.16) décrivent alors une situation de propagation de particules libres.

## 2.5 Évolution indépendante du temps

L'hamiltonien (2.6) étant indépendant du temps, on peut séparer les parties temporelle et spatiale de  $\psi_n^\pm(z,t)$  :

$$\psi_n^\pm(z,t) = e^{-i\frac{E_{cin}}{\hbar}t} \phi_n^\pm(z). \quad (2.17)$$

En insérant (2.17) dans l'équation d'évolution (2.13), on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} \phi_n^+(z) \\ \phi_n^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{cin} - V_+(z) & -\widehat{W}(z) \\ \widehat{W}(z) & E_{cin} - V_-(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n^+(z) \\ \phi_n^-(z) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

dans la cavité, et

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} \phi_n^b(z) \\ \phi_n^a(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{cin} - \hbar\delta & 0 \\ 0 & E_{cin} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n^b(z) \\ \phi_n^a(z) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

en dehors, avec  $\psi_n^{a,b}(z,t) = e^{-i\frac{E_{cin}}{\hbar}t} \phi_n^{a,b}(z)$ . Le système d'équations (2.19) nous permet d'établir les formes asymptotiques (lorsque  $|z| \gg \frac{L}{2}$ ) des solutions :

$$\begin{cases} \phi_n^b(z) = A_b^n e^{ik_b z} + r_b^n e^{-ik_b z} \\ \phi_n^a(z) = A_a^{n+1} e^{ik_a z} + r_a^{n+1} e^{-ik_a z} \end{cases} \quad \text{pour } z \ll \frac{-L}{2} \quad (2.20)$$

et

$$\begin{cases} \phi_n^b(z) = t_b^n e^{ik_b z} \\ \phi_n^a(z) = t_a^{n+1} e^{ik_a z} \end{cases} \quad \text{pour } z \gg \frac{L}{2} \quad (2.21)$$

avec

$$\begin{cases} k_a = k = \sqrt{\frac{2mE_{cin}}{\hbar^2}} \\ k_b = \sqrt{\frac{2m(E_{cin} - \hbar\delta)}{\hbar^2}} = \sqrt{k^2 - k_\delta^2} \\ k_\delta = \sqrt{\frac{2m\delta}{\hbar}} \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $A_i^j$ ,  $r_i^j$ , et  $t_i^j$  sont les amplitudes de probabilité de trouver respectivement un atome incident, réfléchi et transmis, dans son état  $i$  ( $i = a, b$ ) avec le champ dans

l'état  $j$ . Ces coefficients sont reliés par les matrices de transmission  $\bar{t}$  et réflexion  $\bar{r}$  :

$$\begin{pmatrix} t_a^{n+1} \\ t_b^n \end{pmatrix} = \bar{t} \begin{pmatrix} A_a^{n+1} \\ A_b^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} r_a^{n+1} \\ r_b^n \end{pmatrix} = \bar{r} \begin{pmatrix} A_a^{n+1} \\ A_b^n \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Cette méthode, valable quel que soit le régime d'interaction, jette les bases des méthodes numériques utilisées pour calculer les paquets transmis et réfléchi. Cependant, elle ne permet pas de faire ressortir les phénomènes physiques sous-jacents. Nous développerons alors, dans les parties suivantes, des approches permettant de comprendre les processus mis en jeu dans les régimes chaud et intermédiaire.

## 2.6 Régimes chaud et intermédiaire

Dans le cas du régime intermédiaire ou du régime chaud, plusieurs approximations peuvent être réalisées pour simplifier le modèle. On peut tout d'abord négliger les réflexions à l'intérieur de la cavité. Cette approximation est raisonnable lorsque la longueur d'onde de De Broglie  $\lambda_{DB} = \frac{\hbar}{p}$  est petite devant les variations spatiales du mode électromagnétique  $u(z)$  de la cavité. Un ordre de grandeur possible, dans le régime intermédiaire, pour  $\lambda_{DB}$ , est le micromètre tandis que les variations du profil  $u(z)$  sont typiquement de l'ordre du millimètre. On a alors :

$$\begin{aligned} \phi_n^\pm(z) &= \tilde{\phi}_n^\pm(z) e^{i \int_{-\infty}^z k_n^\pm(z') dz'} \\ k_n^\pm(z) &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E_{cin} - V_\pm(z))}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

On peut ensuite réaliser l'approximation de l'enveloppe lentement variable. En effet, on a :

$$\lambda_{DB} \ll L. \quad (2.25)$$

Si l'on considère alors que les variations spatiales sont de l'ordre de grandeur de la cavité,  $\partial_z \phi_n^\pm(z) \sim \phi_n^\pm(z)/L$ , on a

$$|\partial_z \tilde{\phi}_n^\pm(z)| \ll |k_n^\pm \tilde{\phi}_n^\pm(z)|. \quad (2.26)$$

De même,

$$|\partial_z^2 \tilde{\phi}_n^\pm(z)| \ll |k_n^\pm \partial_z \tilde{\phi}_n^\pm(z)|. \quad (2.27)$$

On peut alors négliger le terme  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  devant  $k \frac{\partial}{\partial z}$ . On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_n^\pm(z) &= \left( \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_n^\pm(z)}{\partial z^2} + i \frac{\partial k_\pm(z)}{\partial z} \tilde{\phi}_n^\pm(z) + 2i k_n^\pm(z) \frac{\partial \tilde{\phi}_n^\pm(z)}{\partial z} - k_n^{\pm 2}(z) \tilde{\phi}_n^\pm(z) \right) e^{i \int_{-\infty}^z k_n^\pm(z') dz'} \\ &\simeq \left( 2i k_n^\pm(z) \frac{\partial \tilde{\phi}_n^\pm(z)}{\partial z} - k_n^{\pm 2}(z) \tilde{\phi}_n^\pm(z) \right) e^{i \int_{-\infty}^z k_n^\pm(z') dz'} \\ &= 2i k_n^\pm(z) \frac{\partial \phi_n^\pm(z)}{\partial z} + k_n^{\pm 2}(z) \phi_n^\pm(z) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où on a aussi négligé le terme  $\frac{\partial k_{\pm n}(z)}{\partial z}$  en supposant les variations du potentiel suffisamment lentes. Avec ces approximations, les potentiels adiabatiques et le terme de couplage non-adiabatique deviennent :

$$\begin{cases} V_{\pm}(z) = E_{\pm}(z) \\ \widehat{W} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 2 \frac{\partial \theta_n(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (2.29)$$

et le système d'équations (2.18) devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \phi_n^+(z) \\ \phi_n^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_n^+(z) & \frac{\partial \theta_n(z)}{\partial z} \left( \frac{k_n^-(z)}{k_n^+(z)} \right) \\ -\frac{\partial \theta_n(z)}{\partial z} \left( \frac{k_n^+(z)}{k_n^-(z)} \right) & ik_n^-(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n^+(z) \\ \phi_n^-(z) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Les termes de couplage non-adiabatique dans (2.30) sont asymétriques et semblent favoriser une transition par rapport à l'autre. Cet effet reste cependant très faible, étant donné que le rapport  $\frac{k_n^{\pm}(z)}{k_n^{\mp}(z)}$  est différent de 1 seulement dans les régions où  $\frac{\partial \theta_n(z)}{\partial z}$  tend vers 0. Ce rapport est représenté sur la figure 2.5 ainsi que  $\frac{\partial \theta_n(z)}{\partial z}$ . Sur cette figure,  $\kappa$  est la racine carrée du rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie d'interaction. Dans le régime intermédiaire ( $\kappa = 1$ ), le rapport  $\frac{k_n^{\pm}(z)}{k_n^{\mp}(z)}$  vaut au minimum 0.9, mais tend toujours vers 1 au niveau des transitions non-adiabatiques (extrema de  $\frac{\partial \theta_n(z)}{\partial z}$ ). Ces positions correspondent aux endroits où l'écart entre les niveaux adiabatiques est minimum. La différence entre  $k_n^+(z)$  et  $k_n^-(z)$  est alors aussi minimale. Lorsque l'on se rapproche du régime classique ( $\kappa = 10$ ), le rapport  $\frac{k_n^{\pm}(z)}{k_n^{\mp}(z)}$  tend à valoir 1 quelle que soit la position. Des simulations numériques avec  $\frac{k_n^{\pm}(z)}{k_n^{\mp}(z)}$  fixé à 1 ou laissé à sa vraie valeur, n'ont pas mis en évidence de différences significatives.

## 2.7 Régime chaud : influence de la forme de $u(z)$

Dans le régime chaud, on a  $\frac{k_n^+(z)}{k_n^-(z)} \simeq 1$ . Le système (2.30) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} \psi_n^+(T) \\ \psi_n^-(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\hbar} E_+(T) & \frac{\partial \theta_n(z)}{\partial T} \\ -\frac{\partial \theta_n(z)}{\partial T} & \frac{-i}{\hbar} E_-(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n^+(T) \\ \psi_n^-(T) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où  $T = \frac{z}{v}$  et  $\psi_n^{\pm}(T) = \phi_n^{\pm} e^{-i \frac{2E_{cin} T}{\hbar}}$ . On retrouve ici les mêmes équations d'évolution que si l'on avait traité dès le début le centre de masse classiquement. Ces équations sont équivalentes au système (1.22) traité dans le chapitre 1 où une impulsion non-résonnante était envoyée sur un atome à deux niveaux. De la même manière, la possibilité de réaliser des transitions non-adiabatiques significatives va dépendre du profil de champ. Il est important de remarquer que dans le régime chaud, classique, l'énergie cinétique n'intervient qu'à travers la modification de

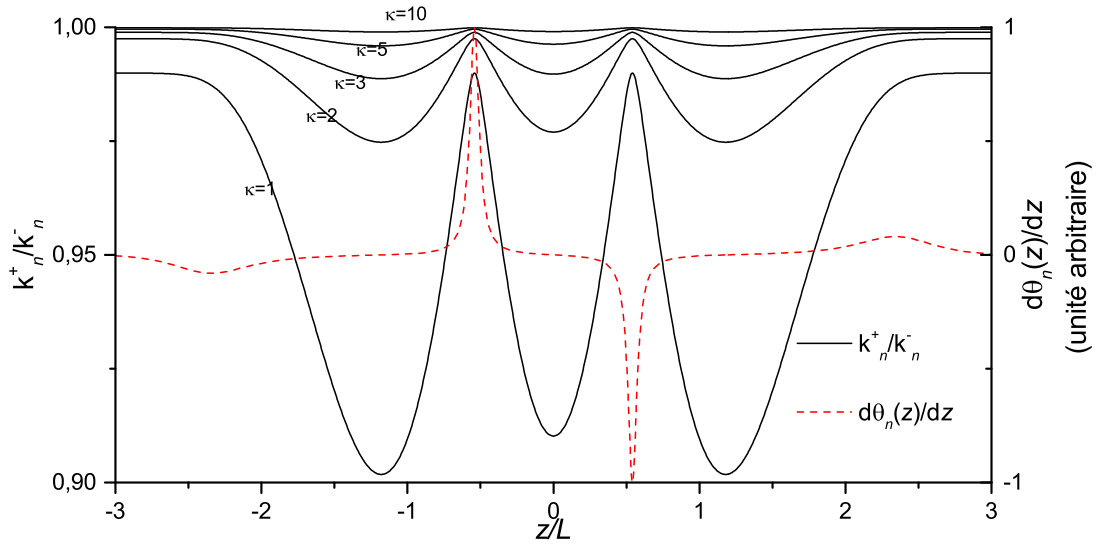


FIGURE 2.5 – Rapport  $\frac{k_n^+(z)}{k_n^-(z)}$  (trait plein noir) et  $\frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z}$  (pointillés rouges). Le rapport est tracé pour différents régimes, allant du cas intermédiaire ( $\kappa = 1$ ) vers le cas chaud ( $\kappa = 10$ ). Le terme  $\frac{\partial\theta_n(z)}{\partial z}$  est le même quel que soit le régime.

la durée de l'impulsion ressentie par l'atome. On considère le mode électromagnétique transverse fondamental  $TEM_{00}$  :

$$\Re\{TEM_{00}(x, z)\} = \frac{L}{w(x)} e^{-\frac{z^2}{w(x)^2}} \cos(\phi_{00}(x, z)) \quad (2.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_{00}(x, z) &= kx - \arctan \frac{x}{x_R} + \frac{kz^2}{2R(x)} \\ R(x) &= x \left(1 + \left(\frac{x_R}{x}\right)^2\right) \\ w(x) &= L \sqrt{\left(1 + \left(\frac{x_R}{x}\right)^2\right)} \\ x_R &= \frac{kL}{2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $L$  est le *waist* et  $R(x)$  le rayon de courbure. La taille du waist est choisie telle que  $L/\lambda_c = 1$ , avec  $\lambda_c$  la longueur d'onde du mode dans la cavité.

### Traversée en $x = 0$

Lorsque l'atome traverse au centre ( $x = 0$ ) le  $TEM_{00}$  correspond au profil gaussien habituel. Dans ce cas, le terme de couplage  $\frac{\partial\theta_n}{\partial z}$  est faible. Cette situation est représentée sur le schéma 2.6. L'atome initialement dans son état fondamental évolue adiabatiquement sur la branche  $|-, n\rangle$  et ressort de la cavité dans son état initial.

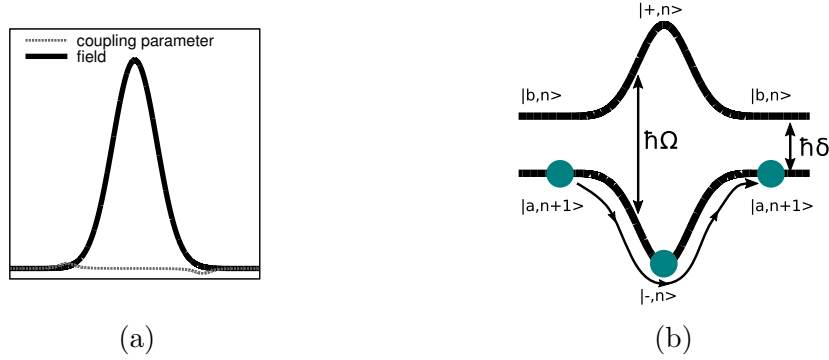


FIGURE 2.6 – Schéma du champ et des niveaux énergétiques correspondants lors de la traversée de la cavité en  $x = 0$ . (a) Le champ est gaussien, le couplage non-adiabatique est faible. (b) L'atome évolue adiabatiquement et ressort de la cavité dans son état initial.

### Traversée en $x \neq 0$

Sur le schéma 2.7, nous avons repris les mêmes conditions initiales pour l'atome, mais cette fois la traversée de la cavité se fait en dehors du centre ( $x \neq 0$ ). Le profil est alors modulé, faisant apparaître deux endroits (flèches rouges, lorsque  $u(z)$  change de signe) où des transitions non-adiabatiques sont possibles et où le couplage  $\frac{\partial\theta_n}{\partial z}$  non-adiabatique est non-nul. L'atome réalise un premier saut non-adiabatique qui le projette sur une superposition d'états adiabatiques. Il se propage ensuite dans cette superposition et réalise enfin un second transfert non-adiabatique. L'atome ressort alors de la cavité dans une superposition d'états, différente de son état initial.

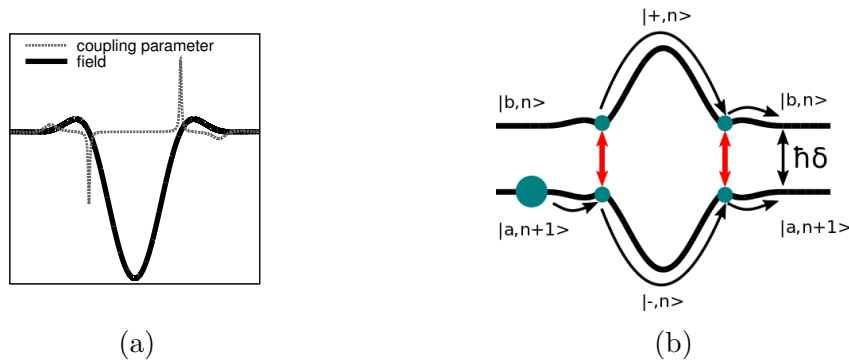


FIGURE 2.7 – Schéma du champ et des niveaux énergétiques correspondants lors de la traversée de la cavité en  $x \neq 0$ . (a) Le profil gaussien du champ est modulé, faisant apparaître deux positions où le couplage non-adiabatique  $\frac{\partial\theta_n}{\partial z}$  est non-nul. (b) L'atome peut réaliser des transitions non-adiabatiques (flèches rouges), et ressort dans la cavité dans une superposition d'états différente de son état initial.

La position de ces transitions dépend fortement de l'endroit où l'atome traverse la cavité. Cette sensibilité est illustrée sur la figure 2.8, où est représentée la population dans l'état excité de l'atome à la sortie de la cavité, en fonction du

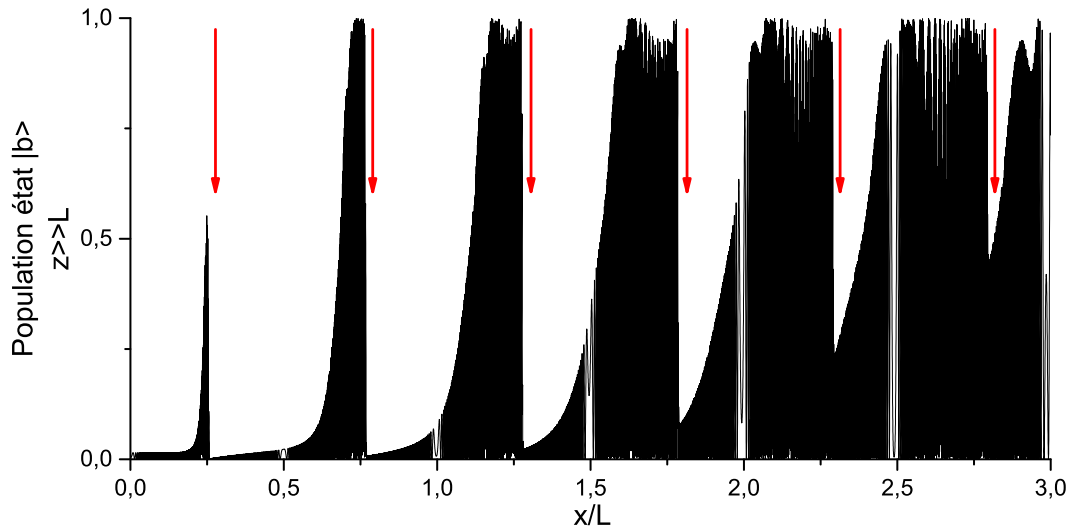


FIGURE 2.8 – Population excitée à la sortie de la cavité, en fonction du point de traversé de l’atome.

point de traversée de la cavité. Les oscillations rapides sont dues aux variations périodiques des intensités de couplages non-adiabatiques. Les variations abruptes (flèches rouges sur la figure) correspondent aux situations où les deux transitions non-adiabatiques se rapprochent suffisamment pour s’annuler. Plus précisément, les deux modulations du champ électrique, de signe opposées, créant les transitions se produisent au même point, laissant finalement le champ inchangé et l’évolution adiabatique. Les détails des oscillations autour d’une de ces variations abruptes sont représentés sur la figure 2.9.

La disparition abrupte des transitions non-adiabatiques est illustrée sur la figure 2.10 où on a représenté la forme du champ, l’intensité de couplage non-adiabatique et la population dans l’état excité à la sortie de la cavité pour plusieurs points de traversée. Pour  $x/L = 1.261$ , le champ est fortement modulé et donne lieu à deux transitions non-adiabatiques. La population de l’atome, initialement dans l’état fondamental réalise un saut non-adiabatique sur chacune de ces transitions et la population atomique est quasiment inversée à la sortie de la cavité. Lorsque le point de traversée est modifié ( $x/L = 1.275$  puis  $1.280$ ), les deux modulations du champ se rapprochent l’une de l’autre, ainsi que la position des sauts non-adiabatiques associés. On atteint finalement un point ( $x/L = 1.300$ ) où les deux modulations se font au même endroit et s’annulent mutuellement. La population atomique n’a alors plus la possibilité de réaliser des transitions non-adiabatiques et évolue adiabatiquement.

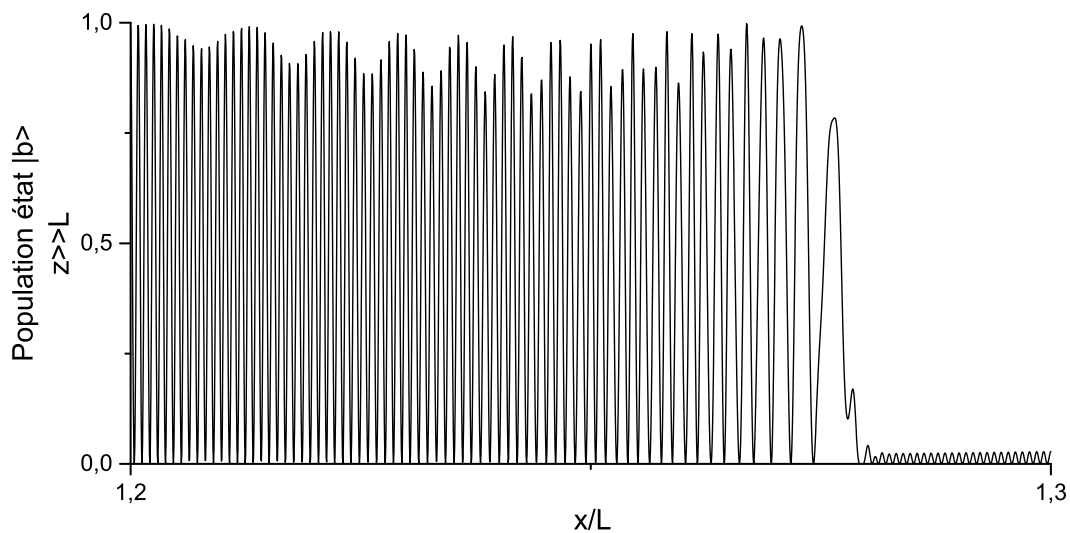


FIGURE 2.9 – Population excitée à la sortie de la cavité, en fonction du point de traversée de l'atome. Détails de la figure 2.8 autour de la variation abrupte à  $x/L \simeq 1.275$ .

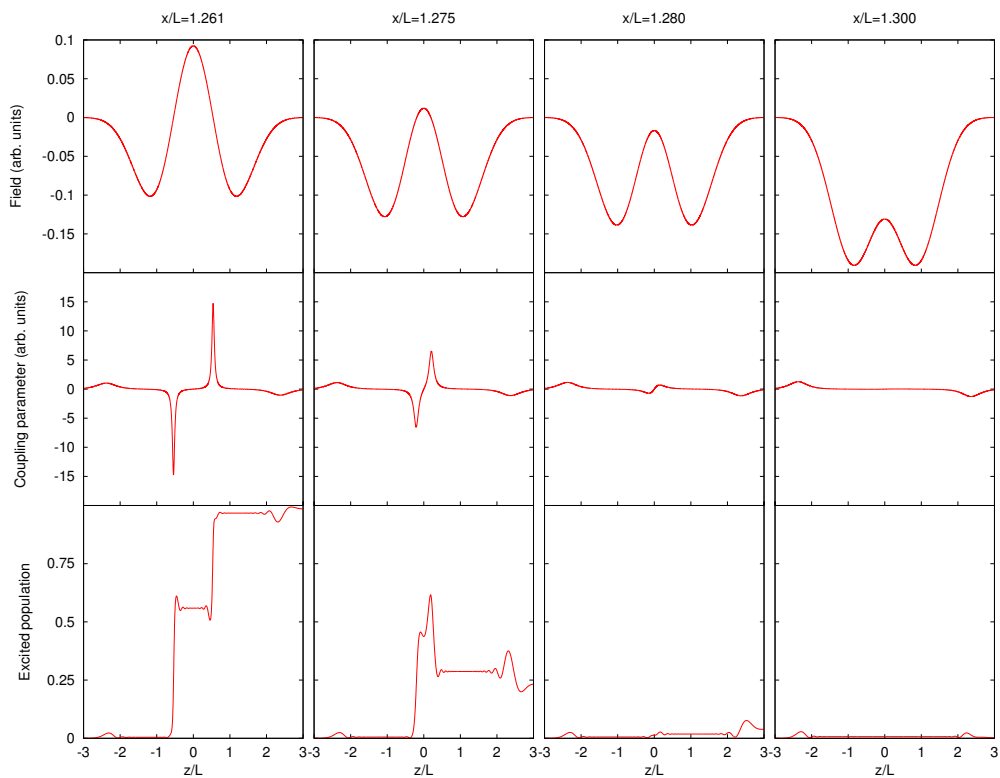


FIGURE 2.10 – (a) Évolution de la modulation du champ pour différents points de traversée de la cavité. (b) intensité du terme de couplage non-adiabatique associé à ces différents points. (c) Population dans l'état excité à la sortie de la cavité

## 2.8 Régime intermédiaire

### 2.8.1 Interprétation temporelle

Dans le régime intermédiaire, on ne peut plus faire l'approximation précédente,  $\frac{k_n^+(z)}{k_n^-(z)} \simeq 1$  et on n'a plus  $T = \frac{z}{v} = \frac{mz}{\hbar k}$ . Afin de conserver une interprétation temporelle de la dynamique, on définit un temps associé au déplacement de l'atome dans la cavité en fonction des branches adiabatiques :

$$t_n^\pm = \int_{z_0}^z \frac{m}{\hbar k_n^\pm(z')} dz' \quad \Leftrightarrow \quad dt_n^\pm = \frac{m}{\hbar k_n^\pm(z)} dz \quad (2.34)$$

$t_n^\pm(z)$  représente la durée nécessaire pour qu'une composante se propageant adiabatiquement sur les branches  $|\pm, n\rangle$  atteigne le point  $z$ . Contrairement à la situation classique (régime chaud), la dynamique fait ici intervenir deux temps, chacun associé à la propagation sur une branche adiabatique spécifique. Le système (2.30) peut alors être réécrit en fonction de  $t_n^\pm(z)$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_n^+} \phi_n^+(z) \\ \frac{\partial}{\partial t_n^-} \phi_n^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2i}{\hbar} (E_{cin} - E_+(z)) & \frac{\partial \theta_n(z)}{\partial t_n^-} \\ -\frac{\partial \theta_n(z)}{\partial t_n^+} & \frac{2i}{\hbar} (E_{cin} - E_-(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n^+(z) \\ \phi_n^-(z) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Pour chaque composante  $\phi_n^\pm(z)$  le terme de couplage non-adiabatique est en  $\frac{\partial \theta_n(z)}{\partial t_n^\mp}$  et fait intervenir un temps différent. Ce décalage est la conséquence des différentes vitesses de propagation  $v_n^\pm = \frac{\hbar k_n^\pm}{m}$  des composantes  $\psi_n^\pm(z)$  associées aux branches adiabatiques  $|\pm, n\rangle(z)$ . Par exemple, si la composante  $\psi_n^-(z)$  effectue une transition à l'instant  $t_0$  et à la position  $z_0$ , il est peu probable que la composante  $\psi_n^+(z)$  qui se propage simultanément atteigne la même position au même moment. Cet effet a pour conséquence de séparer partiellement le paquet initial en un train de plusieurs paquets.

### 2.8.2 Discussion

On a représenté sur la figure 2.11 la population dans l'état excité de l'atome en sortie de la cavité. L'atome est initialement dans son état fondamental. Les paramètres adimensionnés en abscisse et en ordonnée représentent respectivement la racine carrée de l'énergie d'interaction maximale (prise en  $u(z=0)$ ) et celle de l'énergie cinétique initiale de l'atome, avec :

$$k_0 = \frac{\sqrt{2mg\sqrt{n+1}}}{\hbar}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE_{cin}}}{\hbar}.$$

On définit de la même façon :  $k_\delta = \sqrt{\frac{2m\delta}{\hbar^2}}$ . Le rapport  $\kappa = \frac{k}{k_0}$  permet de savoir dans quel régime on se trouve. Pour  $\kappa \gg 1$ , on est dans le régime chaud et pour  $\kappa \ll 1$  dans le régime froid. La limite  $\kappa = 0.83$  sur la figure 2.11 correspond à la limite



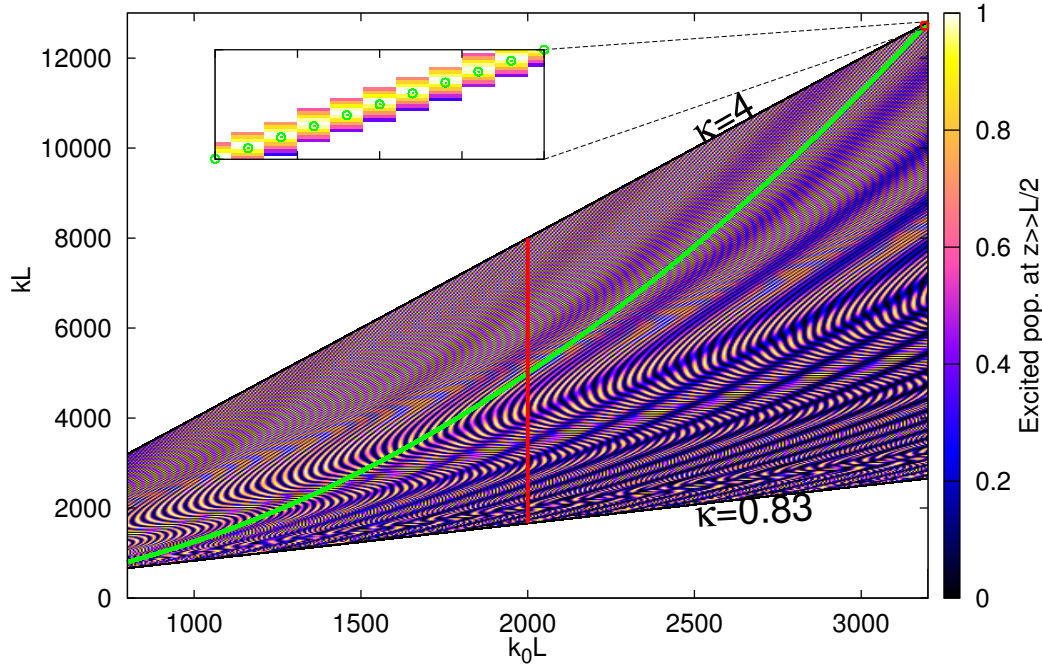


FIGURE 2.11 – Population excitée en sortie de la cavité en fonction de l'énergie cinétique incidente (ordonnée) et de l'énergie d'interaction (abscisse). La cavité est traversée en  $x/L = 2.623$  et  $\kappa_\delta = \frac{k_\delta}{k_0} = 0.14$ .

du régime froid ( $E_{cin} = E_+(0)$ ), où l'énergie cinétique de l'atome est trop faible devant l'énergie d'interaction pour qu'il puisse se propager sur la branche  $|+, n\rangle$ . La cavité est traversée en  $x/L = 2.623$ , ce qui correspond dans le régime chaud à un transfert complet de population à l'aide de deux sauts non-adiabatiques, chacun transférant la moitié de la population.

La figure 2.11 présente un schéma complexe d'interférences. Nous allons considérer deux situations particulières pour le comprendre. La première (en rouge sur la figure), où pour une cavité donnée ( $k_0L = 2000$  fixé) l'atome a une énergie cinétique croissante. La deuxième (en vert sur la figure), où l'atome a une vitesse croissante, mais la cavité est modifiée de sorte que le  $2g\sqrt{n+1}\tau$ , avec  $\tau = \frac{L}{v}$ , le temps de passage classique reste constant.

### Cas $k_0l$ constant

La section tracée en rouge sur la figure 2.11 est représentée sur la figure 2.12. Cette figure représente la population excitée après avoir traversé la cavité pour un atome ayant une vitesse initiale de plus en plus grande. L'énergie d'interaction est fixée tel que  $k_0L = 2000$  et l'énergie cinétique varie de sorte que  $kL \in [1660, 8000]$ . Le désaccord entre le champ et la transition atomique est tel que  $k_\delta L = 282$ .

On observe deux types de structures sur cette figure. Tout d'abord les oscillations rapides, qui sont des oscillations de Rabi, obtenues par variation du temps de passage de l'atome. En effet, plus l'atome va lentement plus ce temps est long,

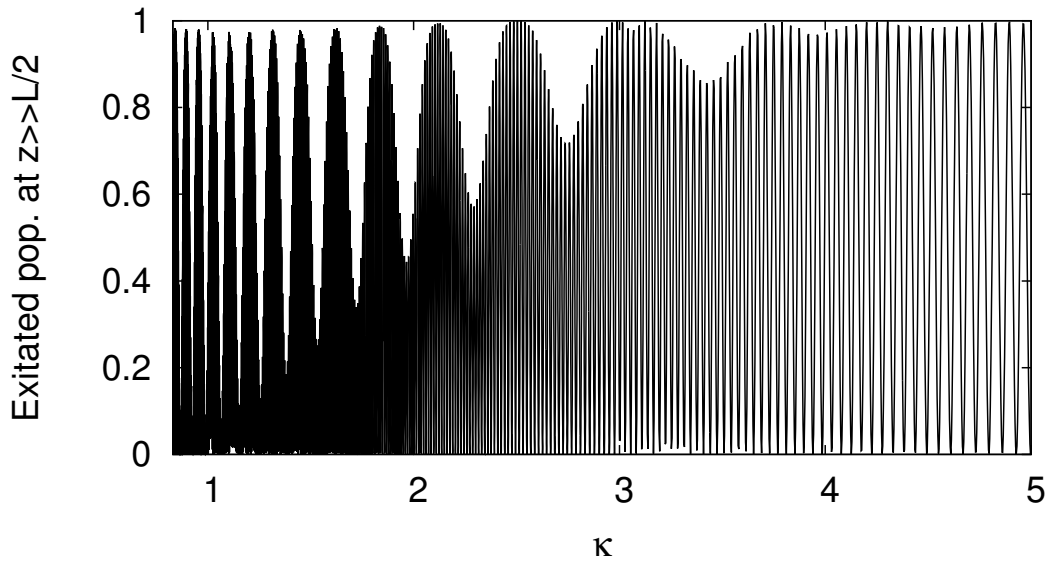


FIGURE 2.12 – Population excitée en sortie de cavité ( $z \gg L/2$ ). L'énergie d'interaction est fixée à  $k_0 L = 2000$  et la vitesse de l'atome varie de la limite du régime froid ( $\kappa = 0.83$ ) vers le régime chaud ( $\kappa = 5$ ). Le champ contient 20 photons. Le désaccord entre la transition atomique et le champ est telle que  $\kappa_\delta = \frac{k_\delta}{k_0} = 0.14$

et donc le nombre d'oscillations de Rabi effectuées durant l'interaction augmente. Il en résulte des oscillations de plus en plus serrées dans la population excitée finale.

La seconde structure est la modulation qui apparaît pour  $\kappa < 3$ . Dans ces conditions, le système se trouve en régime intermédiaire et cette modulation est le signe du couplage opto-mécanique. En effet, contrairement à la situation sur la figure 2.10, la modulation n'est pas due à la disparition des transitions non-adiabatiques, leurs positions restant les mêmes tant que le profil  $u(z)$  est maintenu inchangé. La figure 2.13 montre l'évolution de la population adiabatique dans les cas où la population excitée en sortie de cavité est de 0.99 ( $\kappa = 2.12$ ) et de 0.70 ( $\kappa = 2.29$ ) respectivement. Les deux sauts non-adiabatiques sont bien présents. Cependant, dans le cas  $\kappa = 2.29$  (pointillés rouges), le premier saut ne transfère pas la moitié de la population mais les trois quarts, le deuxième saut ne peut alors pas conduire à une inversion totale de population. Cette modification des intensités des transitions non-adiabatiques explique la modulation du contraste pour  $\kappa < 3$ . On notera aussi la présence de transitions à  $z/L = \pm 2.7$ , dues aux ailes du profil  $u(z)$ .

### Cas $2g\sqrt{n+1}\tau$ et $\delta\tau$ constants

La section tracée en vert sur la figure 2.11 est représentée sur la figure 2.14. Cette figure représente la population excitée après avoir traversé la cavité pour un atome ayant une vitesse initiale de plus en plus grande et une énergie d'interaction ajustée telle que  $2g\sqrt{n+1}\tau$  soit constant.  $\tau$  est le temps de passage si l'on considère que la vitesse de l'atome n'est pas modifiée au cours de l'interaction. La

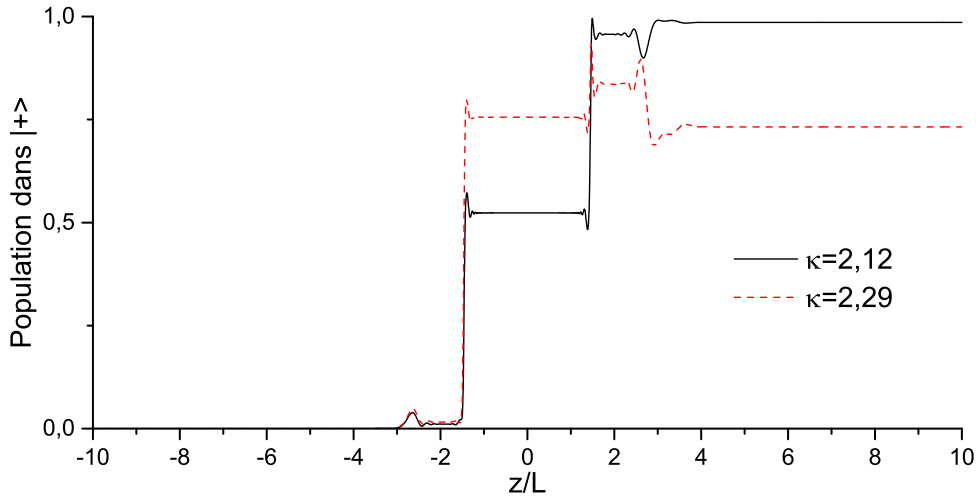


FIGURE 2.13 – Population excitée au cours de la traversée de la cavité. La situation est celle de la figure 2.12 pour les points  $\kappa = 2.12$  (trait plein noir) et  $\kappa = 2.29$  (pointillés rouges). La vitesse initiale de l’atome est croissante, l’énergie d’interaction est fixée telle que  $k_0 L = 2000$  et le rapport  $\kappa_\delta = \frac{k_\delta}{k_0}$  vaut 0.14

quantité  $\delta\tau$  est maintenue constante afin d’avoir la même intensité de couplage non-adiabatique lorsque la vitesse augmente.

Dans le cas classique (régime chaud), on s’attend alors à avoir toujours la même population dans l’état excité en sortie de la cavité, dépendante de la valeur de  $2g\sqrt{n+1}\tau$  et de  $\delta\tau$ . En effet, dans ce cas-là, l’intensité des transitions non-adiabatiques reste la même quelle que soit la vitesse de l’atome.

On observe cependant sur la figure 2.14, quand on baisse l’énergie cinétique de l’atome, un résultat différent avec une modulation de la population excitée lorsque  $\kappa < 3$ . Cette modulation est due aux termes de couplages opto-mécaniques qui modifient la vitesse de l’atome au cours de la traversée. Lorsque  $\kappa > 3$ , on retrouve le cas du régime chaud, où la population dans l’état excité ne varie plus.

### 2.8.3 Modèle simplifié : schéma d’interférence

Nous allons dans cette partie considérer un modèle simplifié capable d’expliquer qualitativement les résultats précédents. La dynamique des populations peut idéalement être vue comme le résultat d’un interféromètre de type Ramsey. En effet, on peut supposer, pour simplifier, que chaque transition non-adiabatique réalise un transfert entre les états adiabatiques de la moitié de la population. Dans ce cas, le premier saut non-adiabatique joue le rôle de la lame séparatrice tandis que le second celui de la recombinaison. Dans le régime chaud, lorsque  $\delta\tau$  et  $2g\sqrt{n+1}\tau$  sont maintenus constants, le résultat de cette interférence est constant quelle que soit la valeur de l’énergie cinétique de l’atome. On observe une modulation de ce résultat dans le régime intermédiaire qui traduit l’apparition d’une nouvelle phase, absente dans le régime chaud, due à la présence de différents temps dans les sauts non-adiabatiques en fonction de la branche sur

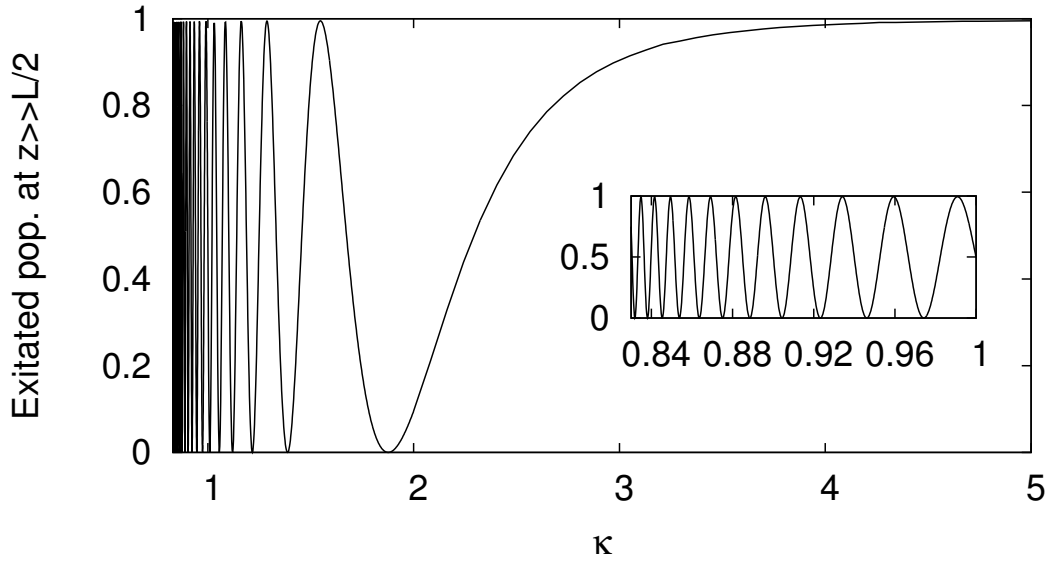


FIGURE 2.14 – Population excitée en sortie de cavité ( $z \gg L/2$ ). La vitesse initiale de l'atome est croissante et l'énergie d'interaction est continuellement ajusté telle que  $2g\sqrt{n+1}\tau = 87$  et le rapport  $\kappa_\delta = \frac{k_\delta}{k_0}$  est fixé 0.14

laquelle se propage l'atome. En effet, la phase accumulée dans ce cas est :

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi_Q &= \int_{t_1^+}^{t_2^+} \frac{2E^+}{\hbar} dt^+ - \int_{t_1^-}^{t_2^-} \frac{2E^-}{\hbar} dt^- \\
 &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\hbar(k_n^+)^2}{2m} \frac{2m}{\hbar k^+} dz - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\hbar(k^-)^2}{2m} \frac{2m}{\hbar k_n^-} dz \\
 &= \int_{z_1}^{z_2} (k_n^+ - k_n^-) dz
 \end{aligned}$$

avec

$$k_n^\pm = \sqrt{k^2 - \frac{m}{\hbar} \left( (\delta) \pm \sqrt{(\delta)^2 + 4(g\sqrt{n+1}u(z))^2} \right)}.$$

Dans cette situation, la population dans l'état excité à la sortie de la cavité est simplement donnée par  $P_b(t) = \cos^2(\Delta\phi_Q/2)$ . On a représenté cette population sur les figures 2.15 et 2.16 en reprenant les conditions des figures 2.12 et 2.14 respectivement. On retrouve le résultat qualitatif de la figure 2.14. Les différences sont dues à la simplification du modèle. En effet, dans ce dernier, on considère que le terme de couplage non-adiabatique revient à deux impulsions d'aire  $\frac{\pi}{2}$ . Ce cas est idéal et ne prend pas en compte les effets dus aux ailes du profil  $u(z)$ , qui réalise de légers mais non-négligeables transferts de populations. Cela explique que le modèle simplifié ne donne pas exactement la bonne saturation sur la figure 2.16. Les modulations à  $\kappa < 3$  sur la figure 2.12 sont dues à la modification des couplages non-adiabatiques, qui ne correspondent alors plus à des impulsions  $\frac{\pi}{2}$ . Il est alors normal de ne pas les reproduire dans le cadre du modèle simplifié.

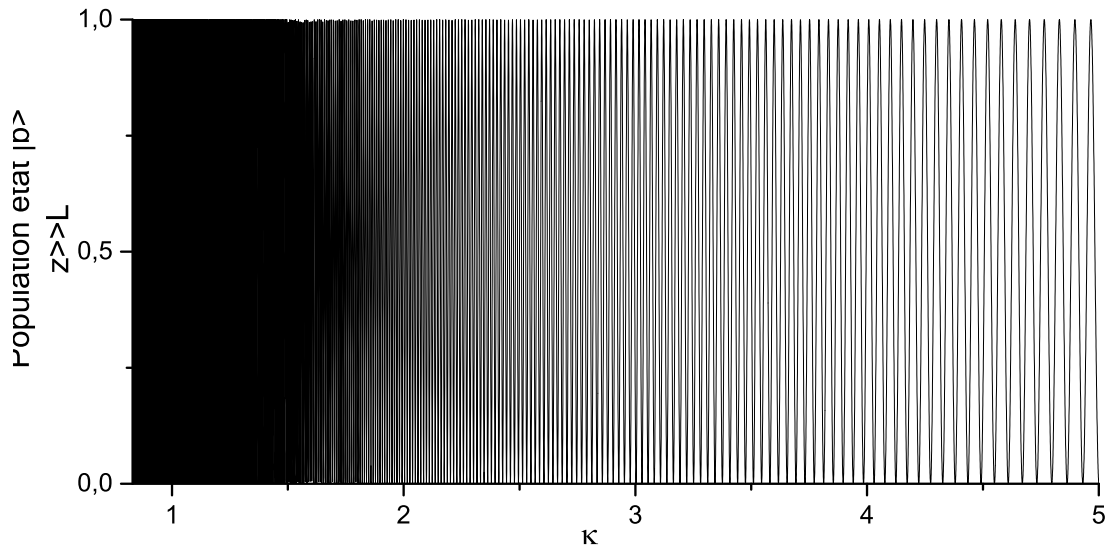


FIGURE 2.15 – Population excitée en sortie de cavité ( $z \gg L/2$ ) en utilisant le modèle simplifié. L'énergie d'interaction est fixée à  $k_0L = 2000$  et la vitesse de l'atome varie de la limite du régime froid ( $\kappa = 0.83$ ) vers le régime chaud ( $\kappa = 5$ ). Le champs contient 20 photons. Le désaccord entre la transition atomique et le champ est tel que  $\kappa_\delta = \frac{k_\delta}{k_0} = 0.14$

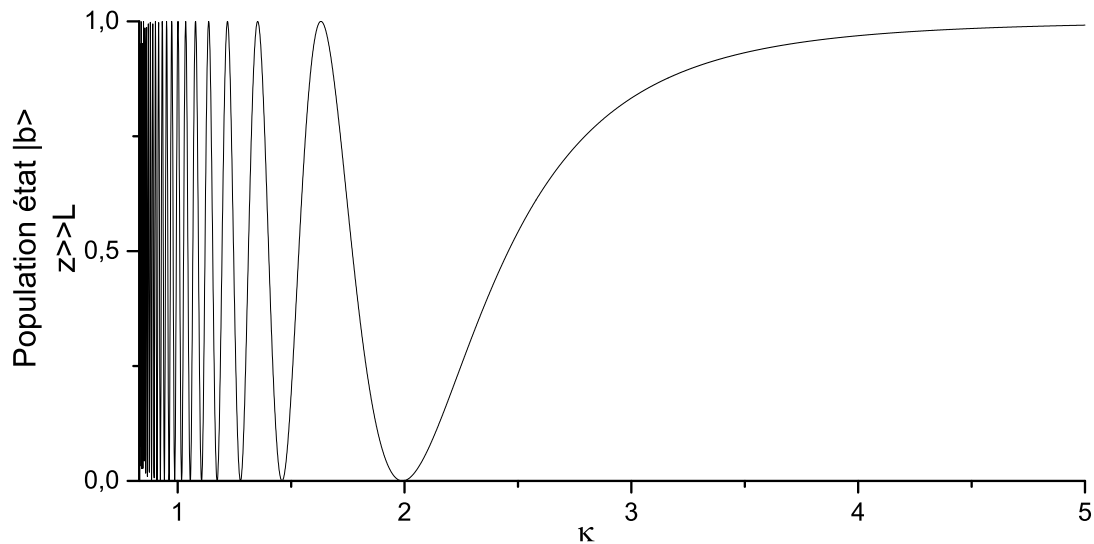


FIGURE 2.16 – Population excitée en sortie de cavité ( $z \gg L/2$ ) en utilisant le modèle simplifié. La vitesse initiale de l'atome est croissante et l'énergie d'interaction est continuellement ajustée telle que  $2g\sqrt{n+1}\tau = 87$ . Le rapport  $\kappa_\delta = \frac{k_\delta}{k_0}$  vaut 0.14

## 2.9 Conclusion

Nous avons étudié dans cette partie l'interaction d'un atome à deux niveaux lors de la traversée d'un micro-mazer. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux sauts non-adiabatiques. Afin de traiter correctement l'influence des couplages opto-mécaniques lorsque l'énergie cinétique de l'atome est du même ordre de grandeur que l'énergie d'interaction, nous avons quantifié le mouvement du centre de masse de l'atome.

Nous avons alors distingué trois cas, le régime chaud lorsque l'énergie cinétique est beaucoup plus grande que celle d'interaction, le régime intermédiaire lorsque ces deux énergies sont du même ordre de grandeur et le régime froid, lorsque l'énergie cinétique est plus faible que l'énergie d'interaction.

Nous avons alors montré que lorsque l'atome traverse la cavité en dehors de son centre, les modulations du profil du champ permettent de réaliser deux sauts non-adiabatiques. Le système se comporte dans ce cas comme un interféromètre atomique.

Dans le cas du régime chaud, nous avons vu que l'interférence est due à la propagation sur des branches adiabatiques d'énergies différentes. Nous avons montré que dans cette limite on retrouve les résultats d'un modèle ne quantifiant pas le centre de masse de l'atome.

Dans les régimes intermédiaire et froid, la situation se complexifie et fait apparaître deux temps en fonction de la branche adiabatique considérée. Les transitions non-adiabatiques dans un sens ( $|\pm, n\rangle$  vers  $|\mp, n\rangle$ ) se produisent alors à un temps différent que celle dans le sens inverse ( $|\mp, n\rangle$  vers  $|\pm, n\rangle$ ). Nous avons montré que le déphasage accumulé pendant l'interaction est alors différent de celui dans le régime chaud.



# Chapitre 3

## Diffusion d'un paquet d'onde à un photon par des atomes dans un guide d'onde

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>3.2</b>	<b>Interaction d'un photon unique avec un atome unique dans un guide d'onde</b>	<b>50</b>
3.2.1	Formalisme	50
3.2.2	Évolution temporelle	51
3.2.3	Champ électrique effectif	52
3.2.4	Aire du pulse	53
3.2.5	Simulations numériques	54
<b>3.3</b>	<b>Interaction d'un photon unique avec deux atomes dans un guide d'onde</b>	<b>57</b>
3.3.1	Modèle théorique	57
3.3.2	Couplage entre atomes	60
3.3.3	Chemins quantiques	62
3.3.4	Photons réels et virtuels	64
3.3.5	Importance des termes hors-RWA	64
3.3.6	Signal photo-électrique	66
3.3.7	Champs transmis et réfléchi - Théorème de l'aire	67
3.3.8	Solutions exactes pour les populations et le champ	70
3.3.9	Discussion	72
3.3.10	Équivalence de jauges	76
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>81</b>

---





## 3.1 Introduction

La compréhension et la maîtrise des interactions entre la lumière et la matière sont particulièrement importantes dans le domaine de l'information quantique où l'on souhaite stocker de l'information dans des *qubits* (quantum bits) et la transmettre entre eux. Souvent, on réalise des *qubits* grâce à des systèmes atomiques à deux niveaux et la transmission est réalisée par échange de photons. Une condition nécessaire à la réalisation de tels systèmes est la possibilité d'atteindre des régimes de couplage fort entre un photon unique et un atome. Ces régimes ont pu être expérimentalement atteints pour la première fois à l'aide de cavités en électrodynamique quantique [51, 52]. Dans le cas d'un atome libre dans l'espace en trois dimensions, l'intensité du couplage est limitée par la faible proportion de lumière qui est effectivement couplée à l'atome. En effet, suite à la focalisation du faisceau sur l'atome, la polarisation spatiale est fortement dispersée, réduisant ainsi le couplage effectif avec le moment dipolaire de l'atome. Cependant, certains résultats ont pu être obtenus, tel que la réalisation d'un miroir à un seul atome [53, 54] ou une excitation parfaite de l'atome à l'aide d'un photon incident dont le profil temporel correspond à celui de l'émission spontanée, retourné dans le temps [55].

Une autre possibilité d'obtenir un couplage fort entre l'atome et le champ est de confiner ce dernier. Cela peut être obtenu en utilisant un guide d'onde unidimensionnel où seuls les modes axiaux du guide sont conservés [32, 56, 57].

L'étude de la diffusion de photons par deux atomes à deux niveaux dans un guide d'onde unidimensionnel, a déjà fait l'objet de plusieurs études [30–32]. Les cas d'atomes à trois niveaux [58] ou de chaîne atomique [59–64] ont aussi été traités. Cependant, toutes ces précédentes études ont été réalisées pour des régimes où l'approximation RWA est valable, et seul l'aspect spectral a été exploré. Les contributions hors-RWA sont néanmoins cruciales pour un traitement correct de l'interaction et la compréhension du rôle des photons virtuels sur la dynamique du système. Ces effets sont bien connus dans le domaine de la super-radiance depuis les travaux de Friedberg, Hartmann et Manassah [33, 34], Milonni et Knight [35] qui ont poursuivi le travail pionnier de Dicke [65]. L'influence des photons virtuels sur l'émission collective spontanée d'un nuage dense d'atome, a récemment reçu beaucoup d'intérêt [66, 67]. Ce problème est particulièrement riche en nouveaux effets quantiques tels que le décalage de Lamb collectif, l'encodage collectif, l'intrication et l'émission directive de photons [23, 68–70]. L'échange de photons virtuels est associé à un décalage des niveaux atomiques, capable de modifier la dynamique de large système.

Nous présentons dans cette partie une étude détaillée de la diffusion d'un paquet d'onde à un photon par un ou deux atomes dans un guide d'onde infini sans perte. L'approximation RWA n'est pas utilisée, ce qui nous permet de prendre en compte l'effet des photons virtuels. Nous montrerons que la dynamique du système dépend clairement de la nature des photons échangés par les atomes (réelle ou virtuelle) et nous clarifierons le rôle de chacun. Nous verrons que le champ peut être compris grâce aux états de Dicke retardés, intervenant habituellement dans les théories de super-radiance, et nous retrouverons le résultat important

de la réflexion systématique de la fréquence résonnante de paquet d'onde, même en présence des termes hors-RWA. Nous présenterons aussi une approche temporelle du phénomène, permettant de relier la réflexion de la fréquence centrale de l'impulsion avec la déformation de son aire algébrique.

Nous verrons dans un premier temps comment l'interaction avec un atome unique contraint la forme temporelle de l'impulsion transmise ainsi que sa partie spectrale.

Nous mettrons ensuite en évidence les processus d'échanges de photons qui apparaissent, lorsqu'il y a cette fois-ci deux atomes dans le guide d'onde. Le rôle de chacun de ces processus ainsi que la nature, réelle ou virtuelle, des photons mis en jeux seront décrits.

## 3.2 Interaction d'un photon unique avec un atome unique dans un guide d'onde

### 3.2.1 Formalisme

On considère un système à deux niveaux, notés  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , d'énergie propre 0 et  $\hbar\omega_0$  respectivement, en interaction avec une impulsion contenant un photon unique et se propageant selon la direction  $+z$  d'un guide d'onde infini sans perte. La fréquence centrale du paquet d'onde est résonnante avec la transition atomique du système. La section transverse du guide d'onde est inférieur à  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ . De cette façon l'atome ne peut émettre que selon les directions longitudinales du guide et reste uniforme au cours de sa propagation.

L'Hamiltonien du système peut alors être écrit comme :

$$\hat{H} = \hat{H}_{atome} + \hat{H}_{champ} + \hat{H}_{inter} \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{H}_{atome} &= \hbar\omega_0 |b\rangle \langle b| \\ \hat{H}_{champ} &= \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N \hbar\omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \\ \hat{H}_{inter} &= \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N g_l \left( \hat{a}_l^\dagger |a\rangle \langle b| + \hat{a}_l |b\rangle \langle a| \right). \end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $l$  représente le mode du champ électromagnétique avec la fréquence  $\omega_l = \omega_0 + (|l| - l_0)\delta_0$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}_l = \frac{l}{|l|} \frac{\omega_l}{c} \vec{e}_z$  où  $l_0$  est le mode central (résonnant) et  $\delta_0$  l'écart entre modes.  $N$  est le nombre total de modes discrétisés autorisés dans le guide d'onde.  $\hat{a}_l$  et  $\hat{a}_l^\dagger$  sont les opérateurs annihilation et de création associés au mode  $l$ . Le signe de  $l$  correspond à la direction de propagation. Le couplage entre l'atome et le champ est donné par  $g_l = g_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_l}} \sqrt{\delta_0}$  avec  $g_0 = \sqrt{\frac{\omega_0}{\epsilon_0 \hbar c A}} d_{ab}$  où  $A$  est la section transverse du guide et  $d_{ab}$  le moment dipolaire de l'atome. La limite continue est obtenue en faisant tendre  $\delta_0 \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$  tout en maintenant  $N\delta_0$ , la bande passante du guide, constant. La

fréquence centrale  $\omega_0$  étant la plus élevée du système, l'approximation de l'onde tournante (RWA) a été réalisée, nous permettant ainsi d'omettre les termes non-résonnants dans l'hamiltonien d'interaction.

Initialement, l'atome est dans l'état fondamental  $|a\rangle$  et le champ ne contient qu'un seul photon. La fonction d'onde du système total ne contient alors qu'un état d'excitation peut être écrite de la sorte :

$$|\psi\rangle(t) = A_b(t)e^{-i\omega_0 t}|b, 0\rangle + \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N A_{a,l}(t)|a, 1_l\rangle \quad (3.2)$$

où  $|a, 1_l\rangle = |a\rangle \otimes |1_l\rangle$  représente l'état avec un photon dans le mode  $l$  et l'atome dans le fondamental, et  $|b, 0\rangle$  représente l'atome dans l'état excité et aucun photon dans le champ.  $|A_b(t)|^2$  est alors la probabilité que l'atome soit dans l'état excité à l'instant  $t$ , et  $|A_{a,l}|^2$  celle qu'il soit dans l'état fondamental avec un photon dans le mode  $l$ . Ces coefficients respectent la condition de normalisation :  $|A_b(t)|^2 + \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N |A_{a,l}|^2 = 1$ .

Initialement, le photon se propage dans la direction des  $z$  positifs, on a donc :  $A_{a,l}(-\infty) = 0$  pour  $l < 0$ .

### 3.2.2 Évolution temporelle

L'évolution du système est gouvernée par l'équation de Schrödinger dépendante du temps :  $i\hbar \frac{d|\psi\rangle(t)}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle(t)$ . On obtient alors les équations d'évolution pour les amplitudes de probabilités :

$$\partial_t A_{a,l}(t) = -ig_l e^{-i\delta_l t} A_b(t) \quad (3.3a)$$

$$\partial_t A_b(t) = -i \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N g_l A_{a,l}(t) e^{i\delta_l t} \quad (3.3b)$$

avec  $\delta_l = \omega_0 - \omega_l$ .

Le système d'équation (3.3) peut être résolu formellement. Pour cela, on intègre formellement l'équation (3.3a) :

$$A_{a,l}(t) = A_{a,l}(-\infty) - ig_l \int_{-\infty}^t A_b(t') e^{-ig_l t'} dt' \quad (3.4)$$

et on l'injecte dans l'équation (3.3b) :

$$\partial_t A_b(t) = -i \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N g_l A_{a,l}(-\infty) e^{i\delta_l t} - \int_{-\infty}^t \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N g_l^2 A_b(t') e^{-i\delta_l(t'-t)} dt'. \quad (3.5)$$

La largeur spectrale  $\Delta$  de l'impulsion étant bien plus petite que la bande passante de guide d'onde, on peut utiliser la technique standard d'élimination du continuum [71] et remplacer  $A_b(t')$  par  $A_b(t)$  dans l'équation (3.5).

On a de plus :

$$\Re\left(\int_{-\infty}^t \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N g_l^2 e^{-i\delta_l(t'-t)} dt'\right) = \pi g_0^2. \quad (3.6)$$

La partie imaginaire de  $\int_{-\infty}^t \sum_l g_l^2 e^{-i\delta_l(t'-t)} dt'$  correspond au décalage de Lamb de l'état excité de l'atome. Ce décalage peut être ignoré en le ré-intégrant dans la définition du niveau d'énergie de l'état excité.

On obtient finalement l'équation d'évolution pour l'amplitude de probabilité d'être dans l'état excité :

$$\partial_t A_b(t) = -\Gamma A_b(t) - i \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N g_l A_{a,l}(-\infty) e^{i\delta_l t} \quad (3.7)$$

avec  $\Gamma = 2\pi g_0^2$  correspondant à la relaxation de l'état excité.

L'amplitude de population dans l'état excité de l'atome met donc deux termes en compétition. Un premier terme source,  $-i \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N g_l A_{a,l}(-\infty) e^{i\delta_l t}$ , qui tend à peupler l'état excité par absorption du photon incident et un second terme de dissipation,  $-\Gamma A_b(t)$ , qui tend à ramener l'atome dans l'état fondamental en émettant un photon dans le continuum de modes du guide d'onde.

Le facteur déterminant de cette compétition est le paramètre de couplage  $g_0$ . Le terme source est proportionnel à  $g_0$  tandis que le terme de dissipation l'est à  $g_0^2$ . Le terme source est donc le terme dominant lorsque le couplage est faible, l'atome peut alors être peuplé dans l'état excité sur une durée relativement grande. Dans le cas d'un couplage fort, la relaxation domine la dynamique et l'atome ne peut être excité que de manière transitoire.

### 3.2.3 Champ électrique effectif

La grandeur permettant de suivre l'évolution temporelle de l'impulsion est l'intensité moyenne du champ :

$$I(t, z) = \langle \psi(t) | \hat{E}^{(-)}(z) \hat{E}^{(+)}(z) | \psi(t) \rangle = |\hat{E}^{(+)}(z) | \psi(t) \rangle|^2 \quad (3.8)$$

où  $\hat{E}^{(\pm)}(z) = \pm i \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N \epsilon_l \hat{a}_l e^{\pm i \frac{\omega_l}{c} z}$  sont les opérateurs du champ électrique de fréquences positives et négatives respectivement, avec  $\epsilon_l$  le champ électrique du vide du mode  $l$ . On associe un champ électrique effectif classique associé à cette intensité tel que :

$$I(t, z) = |E_{eff}(t, z)|^2.$$

En utilisant la définition (3.2) de la fonction d'onde, on obtient l'expression du champ effectif en fonction des amplitudes de population :

$$E_{eff}(t, z) = \sum_{l=1}^N \epsilon_l \left( A_{a,l}(t) e^{-i\omega_l(t - \frac{z}{c})} + A_{a,-l}(t) e^{-i\omega_l(t + \frac{z}{c})} \right). \quad (3.9)$$

Le champ effectif dans le régime classique se présente alors comme la somme de deux champs. Le premier terme de l'équation (3.9) se propage vers les  $z$  positifs et correspond à la somme du champ incident et du champ transmis. Le second terme se propage vers les  $z$  négatifs et correspond donc au champ réfléchi.

### 3.2.4 Aire du pulse

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement du champ effectif. Nous montrerons que les déformations temporelles de l'impulsion incidente peuvent être comprises à partir du comportement de l'aire de l'impulsion. Pour cela nous commencerons par déterminer l'expression du champ effectif (3.9) en fonction de  $\partial_t A_b(t)$ .

Nous ferons à partir de maintenant l'hypothèse que, dans le régime RWA, le terme de couplage  $g_l$  et le champ du vide  $\epsilon_l$  ne dépendent plus de la fréquence  $\omega_l$  mais uniquement de  $\omega_0$ . Cette hypothèse est raisonnable à condition que  $\omega_0$  soit la fréquence la plus haute du système, supérieure à la bande-passante  $N\delta_0$  du guide, à la largeur spectrale de l'impulsion  $\Delta$  et à la fréquence caractéristique de la relaxation  $\Gamma$  :  $\omega_0 \gg N\delta_0 \gg \Gamma, \Delta$ .

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} g_l &\simeq g = g_0 \sqrt{\delta_0} \\ \epsilon_l &= \epsilon. \end{aligned}$$

En injectant l'expression (3.4) dans (3.9) et à l'aide de l'approximation  $\delta_0 \sum_{l=1}^N e^{-i\delta_l(t-t')} \simeq 2\pi\delta(t' - t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E_{eff}(t, z) &= \epsilon_{inc}(t, z) e^{-i\omega_0(t - \frac{z}{c})} h_0(-z) \\ &\quad + \epsilon_{refl}(t, z) e^{-i\omega_0(t + \frac{z}{c})} h_0(-z) \\ &\quad + \epsilon_{trans}(t, z) e^{-i\omega_0(t - \frac{z}{c})} h_0(0z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \epsilon_{inc} &= \epsilon \sum_{l=1}^N A_{a,l}(-\infty) e^{i\delta_l(t - \frac{z}{c})} \\ \epsilon_{refl} &= -\epsilon i \frac{\Gamma}{g} A_b(t + \frac{z}{c}) \\ \epsilon_{trans} &= \epsilon_{inc}(t, z) - \epsilon i \frac{\Gamma}{g} A_b(t - \frac{z}{c}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

$h_0(z)$  est la fonction de Heaviside, définie tel que :

$$h_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à substituer  $A_b(t)$  par sa dérivée  $\partial_t A_b(t)$  grâce à la relation (3.7) où  $g_l$  est remplacé par  $g$  :

$$\partial_t A_b(t) = -\frac{1}{\Gamma} A_b(t) - i \frac{g}{\Gamma} \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N A_{a,l}(-\infty) e^{i\delta_l t}. \quad (3.12)$$

On obtient ainsi l'expression des champs incident, réfléchi et transmis :

$$\begin{aligned}\epsilon_{inc} &= \epsilon \sum_{l=1}^N A_{a,l}(-\infty) e^{i\delta_l(t-\frac{z}{c})} \\ \epsilon_{refl} &= -\epsilon_{inc}(t + \frac{z}{c}) + i\frac{\epsilon}{g}\partial_t A_b(t + \frac{z}{c}) \\ \epsilon_{trans} &= i\frac{\epsilon}{g}\partial_t A_b(t - \frac{z}{c}).\end{aligned}\tag{3.13}$$

L'aire de l'impulsion est définie comme :

$$S_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_\alpha dt = c^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_\alpha dz$$

avec  $\alpha = inc, refl, trans$ .

Étant donné que l'atome est initialement dans l'état fondamental, on a  $A_b(-\infty) = 0$  et donc :

$$S_{trans} = i\frac{\epsilon}{g}A_b(\infty).\tag{3.14}$$

Dans la relation (3.7) décrivant l'évolution de la population, le terme source devient nul pour les temps longs. Il ne reste alors que le terme dissipatif qui ramène inéluctablement la population dans l'état fondamental, quel que soit le régime de couplage. On a alors  $A_b(\infty) = 0$ , et donc :

$$S_{trans} = 0.\tag{3.15}$$

Ce résultat explique la distorsion subie par l'impulsion lors de son interaction avec l'atome. L'impulsion transmise est déformée, jusqu'à ce que son aire algébrique soit nulle.

### 3.2.5 Simulations numériques

Ce résultat important est illustré sur la figure 3.1 où est représentée l'impulsion transmise en fonction du temps retardé  $\Delta(t - \frac{z}{c})$ .

Nous avons utilisé dans ces simulations un continuum de  $N = 500$  modes, avec un écart relatif entre modes de  $\frac{\delta_0}{\Delta} = 0.1$ . La largeur spectrale  $\Delta$  est définie pour une impulsion Gaussienne avec  $A_{a,l}(-\infty) = \frac{1}{\sqrt{\sum_l e^{-2(\delta_l/\Delta)^2}}} e^{-(\delta_l/\Delta)^2}$  ( $l > 0$ ).

Le champ est représenté pour des valeurs croissantes du rapport  $\frac{g_0}{\Delta^{1/2}} = \sqrt{\Gamma/2\pi}$ .

Le champ, initialement Gaussien, est d'autant plus déformé que l'intensité de couplage est élevée. En effet, afin de respecter la condition d'aire nulle (3.15), l'atome émet vers l'avant un champ d'aire négative qui vient compenser l'aire du champ incident. Il est important de noter que, même dans le cas d'un régime de couplage très faible ( $\frac{g_0}{\Delta^{1/2}} = 0.01$ ) où le champ n'est quasiment pas déformé, l'aire de l'impulsion transmise est quand même nulle. On peut en effet voir, dans l'encart de la figure 3.1, l'apparition d'une longue traînée négative, tendant lentement vers zéro, permettant de compenser la partie positive sur les temps longs.

La présence de cette traînée dans le cas d'un couplage très faible met en évidence la sensibilité du phénomène. La condition d'aire nulle est ainsi un outil

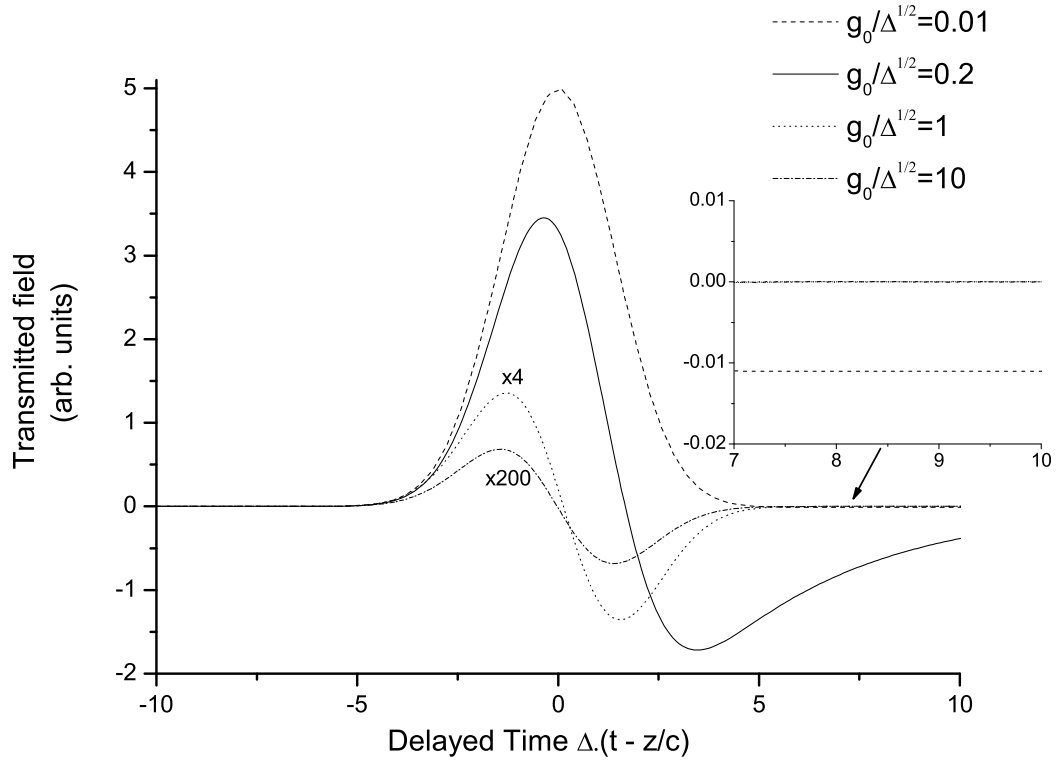


FIGURE 3.1 – *Figure extraire de Derouault et al. [72].* Profil temporel du champ transmis  $\epsilon_{trans}(t - z/c)$  pour différentes valeurs  $g_0/\Delta^{1/2}$  ( $g_0$  est la valeur du couplage et  $\Delta$  la largeur spectrale de l'impulsion incidente). L'impulsion gaussienne initiale se déforme de sorte que son aire algébrique soit nulle (pour toutes les courbes). L'encart fait apparaître une traînée négative pour  $g_0/\Delta^{1/2} = 0.01$  permettant d'obtenir une aire nulle. Les autres paramètres sont  $N = 500$  et  $\delta_0/\Delta = 0.01$ .

puissant permettant de détecter de légers effets pouvant facilement passer inaperçus.

La figure 3.2 représente la dépendance spatiale des impulsions incidente, réfléchie et transmise pour deux intensités de couplage. Dans les deux cas l'impulsion, initialement Gaussienne, est déformée et présente une partie négative annulant son aire. On observe aussi que lorsque le couplage augmente, l'intensité de l'impulsion transmise diminue et l'impulsion incidente est réfléchie sans déformation autre qu'une inversion du signe du champ électrique. L'atome se comporte alors comme un miroir. On retrouve ici un important résultat présent dans de précédentes études [53, 54].

En effet, on voit à partir de la relation (3.4) que  $A_{a,l}(\infty) = A_{a,l}(-\infty) = -A_{a,-l}(-\infty)$ . L'interaction inverse le signe du paquet d'onde et joue donc le rôle d'un déphaseur  $\pi$ .

La contrainte d'aire nulle a d'importantes conséquences pour des impulsions de formes complexes. En effet, si l'impulsion incidente possède déjà une aire nulle, sa déformation sera faible voire inexistante, comparée à celle d'une impulsion d'aire non nulle. C'est ce qui est représenté sur la figure 3.3. Les deux amplitudes initiales (en pointillé sur la figure) sont : (a)  $\epsilon_{inc}(t, 0) = \epsilon_0 e^{-(t/\tau)^2} \sin \frac{t}{10\tau}$  et (b)



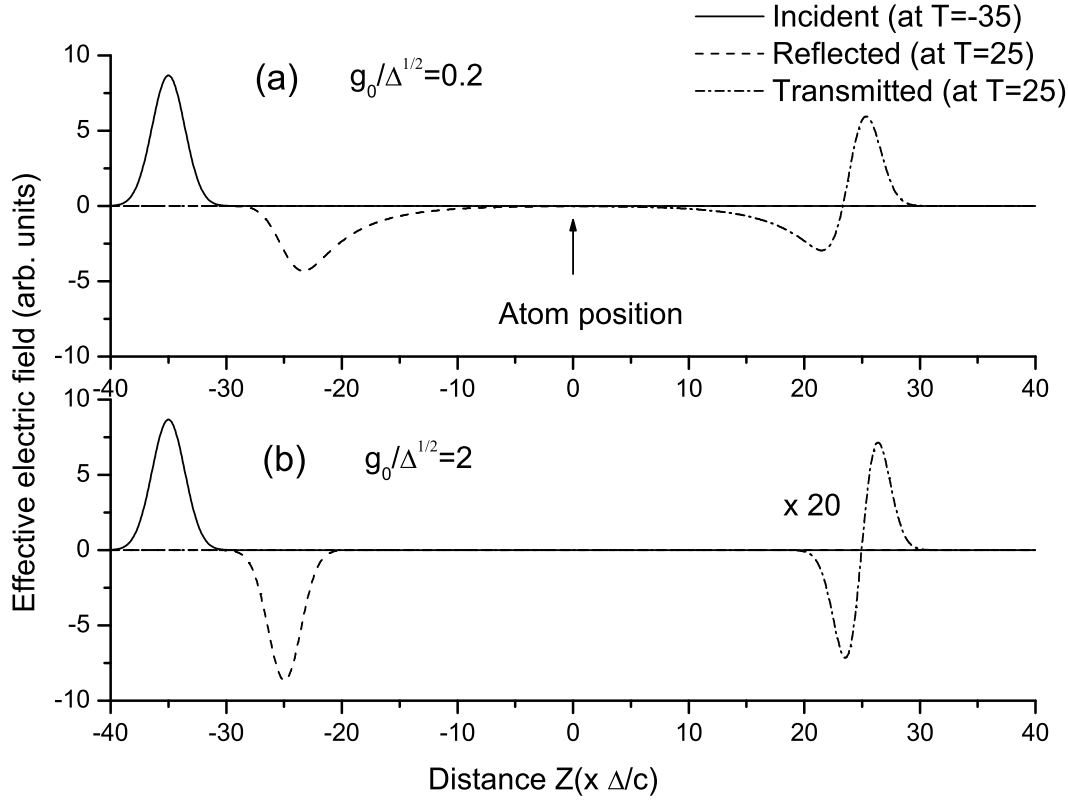


FIGURE 3.2 – *Figure extraire de Derouault et al. [72].* Dépendance spatiale du champ électrique pour deux valeurs de  $g_0/\Delta^{1/2}$ . L'impulsion transmise obéit à la contrainte de l'aire du pulse. (b) Le champ réfléchi est inversé sans déformation.

$\epsilon_{inc}(t, 0) = \epsilon_0 e^{-(t/\tau)^2} \sin^2 \frac{t}{10\tau}$ . La première est d'aire nulle et n'est quasiment pas modifiée par l'interaction (trait plein sur la figure) tandis que la seconde, d'aire non-nulle, l'est fortement.

Une importante analogie avec le régime semi-classique peut être faite, où il existe aussi une contrainte sur l'aire de l'impulsion au cours de sa propagation dans un milieu optique dense [14, 15, 36] (théorème de McHall et Hahn). Ce théorème stipule que l'aire de l'impulsion converge au cours de sa propagation dans le milieu. Dans le cas d'un couplage faible, l'aire converge vers zéro, et la distorsion du champ est due à l'absorption de photons résonnants [73, 74].

Cependant, la comparaison ne peut pas être poussée plus loin. Pour des régimes de couplage plus fort, l'aire du pulse ne converge plus vers zéro et de nouveaux phénomènes apparaissent tels que de la transparence auto-induite et la propagation de solitons [7, 75]. Dans notre cas, la contrainte d'aire nulle est valide quelle que soit l'intensité de couplage (dans la limite de la RWA).

D'autre part, dans le cas de l'optique semi-classique, la distorsion entraîne de fortes oscillations du profil temporel du champ. Cet effet est dû à la présence de nombreux atomes distribués spatialement. Chaque partie de l'échantillon rayonne alors un champ opposé au champ incident, provoquant un effet de cascades dont résultent les fortes oscillations observées. Dans notre cas, la distorsion du champ n'est due qu'à l'interaction avec un seul atome et cet effet de cascade est inexis-

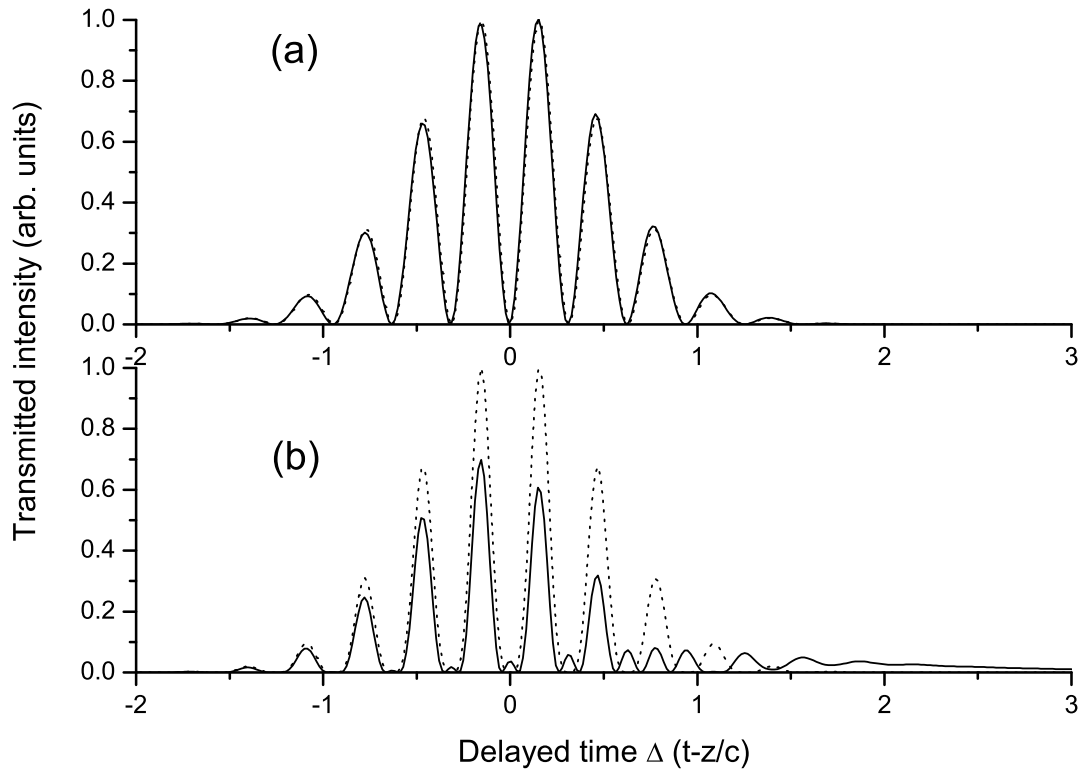


FIGURE 3.3 – *Figure extraire de Derouault et al. [72].* Dépendance temporelle pour l'intensité  $I(t-z/c)$  pour des impulsions d'amplitudes initiales (a)  $\epsilon_{inc}(t, 0) = \epsilon_0 e^{-(t/\tau)^2} \sin(t/10\tau)$  et (b)  $\epsilon_{inc}(t, 0) = \epsilon_0 e^{-(t/\tau)^2} \sin^2(t/10\tau)$ . Les courbes en traits pointillés et pleins représentent respectivement les impulsions initiale et transmise. Les paramètres sont  $g_0/\Delta^{\frac{1}{2}} = 0.3, N = 500$  et  $\delta_0/\Delta = 0.01$ .

tant.

### 3.3 Interaction d'un photon unique avec deux atomes dans un guide d'onde

#### 3.3.1 Modèle théorique

On considère ici deux atomes identiques interagissant avec un paquet d'onde à un photon se propageant dans la direction  $+z$  d'un guide d'onde infini sans perte (figure 3.4(a)). La section transverse du guide  $d$  est supposée plus petite que la longueur d'onde résonnant des atome  $\lambda_0$  et la distance inter-atomique  $l$  :  $d \ll \lambda_0, l$ . Une conséquence importante de cette condition est que l'interaction électrostatique dipôle-dipôle entre les atomes est inhibée dans le guide d'onde, et pourra donc être négligée par la suite [76, 77]. De plus, les atomes ne peuvent rayonner que dans les directions longitudinales et le champ reste uniforme au cours de sa propagation [30, 58]. Le confinement de champ permet aussi d'obtenir un régime de couplage fort entre le photon et les atomes.

Les deux atomes sont notés  $j = 1, 2$  et sont chacun modélisé par un système à

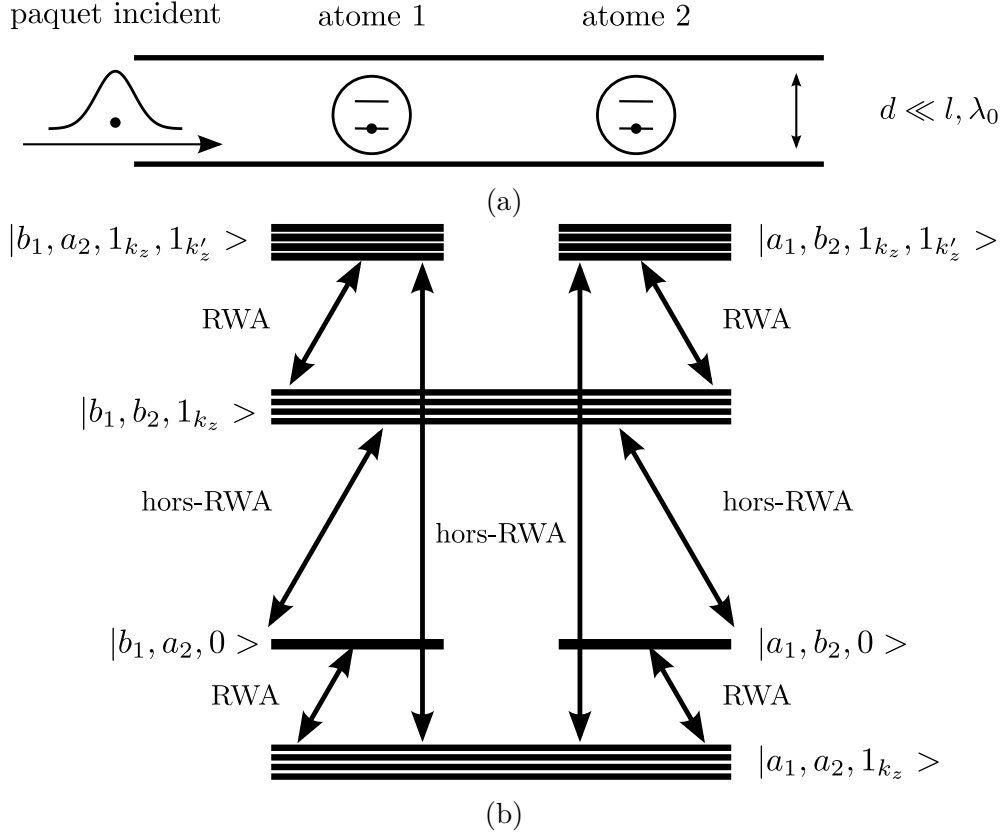


FIGURE 3.4 – (a) Configuration des atomes et du photon incident dans le guide d'onde. La dimension transverse du guide est  $d$ . Les atomes sont dans leur état fondamental et sont séparés par une distance  $l$ . La transition atomique est  $\lambda_0$ . (b) Schéma des niveaux atomes+champs impliqués dans l'interaction. La nature RWA ou hors-RWA des couplages est précisée.

deux niveaux (état fondamental  $|a_j\rangle$  et état excité  $|b_j\rangle$  d'énergie propre 0 et  $\hbar\omega_0$  respectivement). Dans notre formalisme, l'hamiltonien peut être séparé en trois termes :  $\hat{H} = \hat{H}_{atomes} + \hat{H}_{champ} + \hat{H}_{inter}$ , avec :

$$\hat{H}_{atomes} = \sum_{j=1}^2 \hbar\omega_0 |b_j\rangle \langle b_j| \quad (3.16a)$$

$$\hat{H}_{champ} = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar\omega_k \hat{a}_{k_z}^\dagger \hat{a}_{k_z} dk_z \quad (3.16b)$$

$$\hat{H}_{inter} = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hbar g_k \left( \hat{a}_{k_z}^\dagger e^{-ik_z z_j} + \hat{a}_{k_z} e^{ik_z z_j} \right) \left( \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j^\dagger \right) \quad (3.16c)$$

les hamiltoniens des atomes libres, du champ libre et de l'interaction respectivement.  $\hat{a}_{k_z}$  ( $\hat{a}_{k_z}^\dagger$ ) est l'opérateur annihilation (création) du mode  $k_z$  avec  $\omega_z = c|k_z|$  et la relation habituelle de commutation bosonique  $[\hat{a}_{k_z}, \hat{a}_{k'_z}^\dagger] = \delta(k_z - k'_z)$ .  $z_j$  est la position de l'atome  $j$  avec  $z_2 - z_1 = l$  la distance inter-atomique.  $\sigma_j = |a_j\rangle \langle b_j|$  ( $\hat{\sigma}_j^\dagger$ ) est l'opérateur de désexcitation (d'excitation) de l'atome  $j$ . Dans la jauge de Coulomb le terme de couplage s'écrit  $g_k = \frac{\omega_0 d_{ab}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar \omega_k A}}$  avec  $d_{ab}$  le moment dipolaire de l'atome et  $A$  la section transverse du guide d'onde. Il est important

de noter que le terme de couplage  $g_k$  diverge dans l'infrarouge et ne décroît que lentement dans l'ultra-violet. Dans ces conditions, il est impossible de négliger ces fréquences et l'approximation RWA ne peut pas être réalisée.

Initialement, les deux atomes sont dans leur état fondamental et le champ contient un photon. Au second ordre de l'hamiltonien, la fonction d'onde du système complet,  $|\psi\rangle(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{k_z}(t) e^{-i\omega_k t} |a_1, a_2, 1_{k_z}\rangle dk_z \\
&+ \sum_{j=1}^2 \beta_j(t) e^{-i\omega_0 t} |a_{j' \neq j}, b_j, 0\rangle \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{k_z}(t) e^{-i(2\omega_0 + \omega_k)t} |b_1, b_2, 1_{k_z}\rangle dk_z \\
&+ \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \eta_{j, k_z, k'_z}(t) e^{-i(\omega_k + \omega_{k'} + \omega_0)t} |a_{j' \neq j}, b_j, 1_{k_z}, 1_{k'}\rangle.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Les deux premiers termes représentent des états avec un nombre d'excitation égal à un. L'état  $|a_1, a_2, 1_{k_z}\rangle$  correspond à un photon dans le mode  $k_z$  et les deux atomes dans leur niveau fondamental.  $|a_{j' \neq j}, b_j, 0\rangle$  correspond à l'atome  $j$  excité, l'atome  $j'$  dans son fondamental et aucun photon dans le champ. Les deux derniers termes de la fonction d'onde (3.17) correspondent à un nombre d'excitation de trois. Le troisième terme correspond à un état où les deux atomes sont excités et un photon dans le champ. Le quatrième terme correspond à un atome excité et deux photons dans le champ.

Ces deux derniers états sont obtenus au second ordre de l'hamiltonien d'interaction et sont nécessaires pour un traitement correct des photons virtuels et du décalage de Lamb collectif [66, 67]. Ces états sont schématiquement représentés sur la figure 3.4(b).

L'évolution du système est gouvernée par l'équation de Schrödinger dépendante du temps  $i\hbar \frac{d|\psi\rangle(t)}{dt} = \hat{H} |\psi\rangle(t)$  avec pour conditions initiales :

$$\begin{aligned}
\beta_j(t \rightarrow -\infty) &= 0 \\
\eta_{j, k_z, k'_z}(t \rightarrow -\infty) &= 0 \\
\gamma_{j, j', k_z}(t \rightarrow -\infty) &= 0 \\
\alpha_{k_z}(t \rightarrow -\infty) &= 0 \quad \text{si } k_z < 0 \\
\alpha_{k_z}(t \rightarrow -\infty) &= \sqrt{\frac{c}{\Delta}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\left(\frac{\omega_k - \omega_0}{\Delta}\right)^2} \quad \text{si } k_z > 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où  $\Delta$  est la largeur spectrale du paquet d'onde incident. On obtient alors le

système d'équations suivant pour les amplitudes :

$$i\partial_t \alpha_{k_z}(t) = \sum_{j=1}^2 \left\{ g_k [\beta_j(t) e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-ik_z z_j}] + \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} g_{k'} \eta_{j, k_z, k'_z}(t) e^{-i(\omega_0 + \omega_{k'})t} e^{ik'_z z_j} dk'_z \right] \right\} \quad (3.19a)$$

$$i\partial_t \beta_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_k \left\{ [\alpha_{k_z}(t) e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{ik_z z_j}] + [\gamma_{k_z}(t) e^{-i(\omega_0 + \omega_k)t} e^{ik_z z_{j'}}] \right\} dk_z \quad (j' \neq j) \quad (3.19b)$$

$$i\partial_t \gamma_{k_z}(t) = g_k \sum_{j=1}^2 \beta_j(t) e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} e^{-ik_z z_{j'}} + 2 \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} g_{k'} \eta_{j, k_z, k'_z}(t) e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t} e^{-k'_z z_{j'}} dk'_z \quad (3.19c)$$

$$i\partial_t \eta_{j, k_z, k'_z}(t) = \frac{1}{2} \left\{ g_{k'} [\alpha_{k_z}(t) e^{i(\omega_0 + \omega_{k'})t} e^{-ik'_z z_j}] + g_{k'} [\gamma_{k_z}(t) e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t} e^{-ik'_z z_{j'}}] + (k_z \leftrightarrow k_{z'}) \right\} \quad (j' \neq j). \quad (3.19d)$$

Ces équations montrent que les états avec un nombre d'excitation de un ( $|a_1, a_2, 1_{k_z}\rangle$  et  $|a_{j' \neq j}, b_j, 0\rangle$ ) sont couplés par des termes RWA (opérateurs  $\hat{a}_{k_z}^\dagger \hat{\sigma}_j$  et  $\hat{a}_{k_z} \hat{\sigma}_j^\dagger$ ) tandis que les états avec un nombre d'excitation de trois ( $|b_1, b_2, 1_{k_z}\rangle$  et  $|a_{j' \neq j}, b_j, 1_{k_z}, 1_{k_{z'}}\rangle$ ) sont couplés à  $|a_{j' \neq j}, b_j, 0\rangle$  et  $|a_1, a_2, 1_{k_z}\rangle$ , respectivement, par les termes hors-RWA de l'hamiltonien (opérateurs  $\hat{a}_{k_z} \hat{\sigma}_j$  et  $\hat{a}_{k_z}^\dagger \hat{\sigma}_j^\dagger$ ). Finalement dans (3.19c) et (3.19d) les états avec un nombre d'excitation de trois sont couplés entre eux par les termes RWA, ces derniers conservant le nombre d'excitation.

### 3.3.2 Couplage entre atomes

Le système d'équation (3.19) peut être grandement simplifié grâce au continuum de modes. Nous montrons dans l'annexe A.1 que lorsque la condition  $\omega_0, \frac{c}{l} \gg \Gamma, \Delta$  est vérifiée, nous pouvons réaliser une approximation markovienne [71, 78] permettant d'obtenir l'équation fondamentale d'évolution des amplitudes  $\beta_j(t)$  :

$$\partial_t \beta_j(t) = S_{0,j}(t) - \Gamma \beta_j(t) - M \beta_{j' \neq j}(t) \quad (3.20)$$

où  $\Gamma = \frac{2\pi}{c} \frac{g_k^2 \omega_k}{\omega_0}$  est un terme de relaxation (indépendant de la pulsation  $\omega_l$ ) identique au cas à un atome et  $S_{0,j}(t) = -i \sqrt{\frac{\Gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{c \frac{\omega_0}{\omega_k}} \alpha_{k_z}(t \rightarrow -\infty) e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{ik_z z_j} dk_z$  est un terme source dû au photon incident. L'équation (3.20) possède un troisième terme, qui correspond au couplage effectif entre les deux atomes à travers le continuum de modes du champ. Ce terme fait intervenir un paramètre  $M$  qui est la somme de quatre contributions  $M = \sum_{i=1}^4 M_i$ , chacune représentant un chemin

quantique différent comme il sera expliqué plus loin.

$$M_1 = \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{i(\omega_0-\omega)\tau} e^{ik_z l}}{\omega} d\omega d\tau \quad (3.21a)$$

$$M_2 = \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-i(\omega_0+\omega)\tau} e^{ik_z l}}{\omega} d\omega d\tau \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= M_1(l \leftrightarrow -l) \\ &= \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{i(\omega_0-\omega)\tau} e^{-ik_z l}}{\omega} d\omega d\tau \end{aligned} \quad (3.21c)$$

$$\begin{aligned} M_4 &= M_2(l \leftrightarrow -l) \\ &= \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-i(\omega_0+\omega)\tau} e^{-ik_z l}}{\omega} d\omega d\tau. \end{aligned} \quad (3.21d)$$

À l'aide des relations mathématiques suivantes,

$$\int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)T} dT = \pi\delta(\omega - \omega_0) + i\text{Pv} \left( \frac{1}{\omega - \omega_0} \right) \quad (3.22a)$$

$$\int_0^\infty e^{i(\omega+\omega_0)T} dT = \pi\delta(\omega + \omega_0) + i\text{Pv} \left( \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) \quad (3.22b)$$

où Pv désigne la valeur principale de Cauchy, on obtient :

$$M_1 = \frac{\Gamma e^{ik_0 l}}{2} + i \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \text{Pv} \left( \int_0^\infty \frac{e^{i\omega \frac{l}{c}} d\omega}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\omega} \right) \quad (3.23a)$$

$$M_2 = -i \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega \frac{l}{c}} d\omega}{\omega_0 + \omega} \frac{1}{\omega} \quad (3.23b)$$

$$M_3 = \frac{\Gamma e^{-ik_0 l}}{2} + i \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \text{Pv} \left( \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega \frac{l}{c}} d\omega}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\omega} \right) \quad (3.23c)$$

$$M_4 = -i \frac{\Gamma\omega_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega \frac{l}{c}} d\omega}{\omega_0 + \omega} \frac{1}{\omega}. \quad (3.23d)$$

avec  $k_0 = \frac{\omega_0}{l}$ . Les intégrales apparaissant dans (3.23) peuvent être évaluées à l'aide des fonctions Cosinus intégral (Ci) et Sinus intégral (Si) définies par :

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt. \quad (3.24)$$

Pour des arguments réels, ces fonctions sont respectivement paire et impaire et ont pour valeurs asymptotiques :

$$\begin{aligned} \text{Ci}(x \gg 1) &= 0 & \text{Si}(x \gg 1) &= \frac{\pi}{2} \\ \text{Ci}(0) &= \infty & \text{Si}(0) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$M_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} e^{i\omega_0 l/c} + \frac{\Gamma}{2} \left[ e^{i\omega_0 l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2} + i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) - G_+ \right] \quad (3.25a)$$

$$M_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ e^{-i\omega_0 l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) - \frac{\pi}{2} - i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) + G_+ \right] \quad (3.25b)$$

$$M_3 = \frac{\Gamma}{2} e^{-i\omega_0 l/c} + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ -e^{i\omega_0 l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2} - i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) - G_- \right] \quad (3.25c)$$

$$M_4 = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ -e^{i\omega_0 l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) - \frac{\pi}{2} + i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) + G_- \right]. \quad (3.25d)$$

$G_{\pm}$  est une constante donnée par  $G_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2} + i \text{Ci}(\epsilon l/c \rightarrow 0)$  dont la partie imaginaire diverge ( $\epsilon$  est une coupure infrarouge artificielle). Ce dernier résultat n'est pas surprenant étant donné que le couplage entre l'atome et le photon est selon  $g_k \propto \omega_k^{-1/2}$  et diverge dans l'infrarouge. Cependant, seule la somme de ces quatre contributions intervient dans (3.20) et converge vers :

$$M = \sum_{i=1}^4 = \Gamma e^{ik_0 l}. \quad (3.26)$$

Le terme de couplage est dépendant de la distance inter-atomique à travers le terme de phase  $e^{ik_0 l}$ . Ainsi le couplage entre atomes est périodique et ne décroît pas avec la distance inter-atomique, contrairement au cas de l'atome libre en trois dimensions. Cela est dû au fait que dans notre situation (un guide d'onde unidimensionnel) les photons qui se propagent sont confinés selon l'axe du guide laissant inchangé le flux d'énergie entre les atomes. Dans le cas de l'espace libre où les vecteurs d'onde autre que longitudinaux sont autorisés, la probabilité d'échange de photons entre les atomes diminue en fonction de  $1/l$  pour l'émission isotrope et  $1/l^2$  et  $1/l^3$  pour l'émission anisotrope [33–35].

La divergence infra-rouge est elle aussi spécifique au cas unidimensionnel où la densité est proportionnelle à la fréquence  $\omega_k$ . Dans le cas 3D, la densité est proportionnelle à  $\omega_k^2$  et compense ainsi la contribution de  $g_k^2$  proportionnelle à  $\frac{1}{\omega_k}$ . Dans ce dernier cas, on a alors une divergence ultra-violette [66–68, 79, 80].

### 3.3.3 Chemins quantiques

La dynamique du champ et des atomes peut être comprise à partir de l'équation (3.20) en terme d'échanges de photons. Les différents chemins quantiques possibles dans l'équation (3.20) sont représentés sur la figure 3.5, qui met en évidence les processus d'émission et d'absorption de photons associés. Sur ces figures, pour davantage de clarté, nous avons seulement considéré l'évolution de l'état excité du premier atome. Le premier terme dans l'équation (3.20) (terme source) est représenté en (a) et correspond à l'absorption du photon par l'atome initialement dans son état fondamental, conduisant ainsi au peuplement de l'état excité. Le second terme est représenté sur (b) et correspond à la relaxation de l'état excité de l'atome induite par la présence du continuum de mode dans le guide d'onde. Les photons sont alors émis dans les deux directions du guide (réflexion et transmission). Ces deux premiers chemins sont aussi valables dans la situation décrite en 3.2 où un seul atome est présent dans le guide.

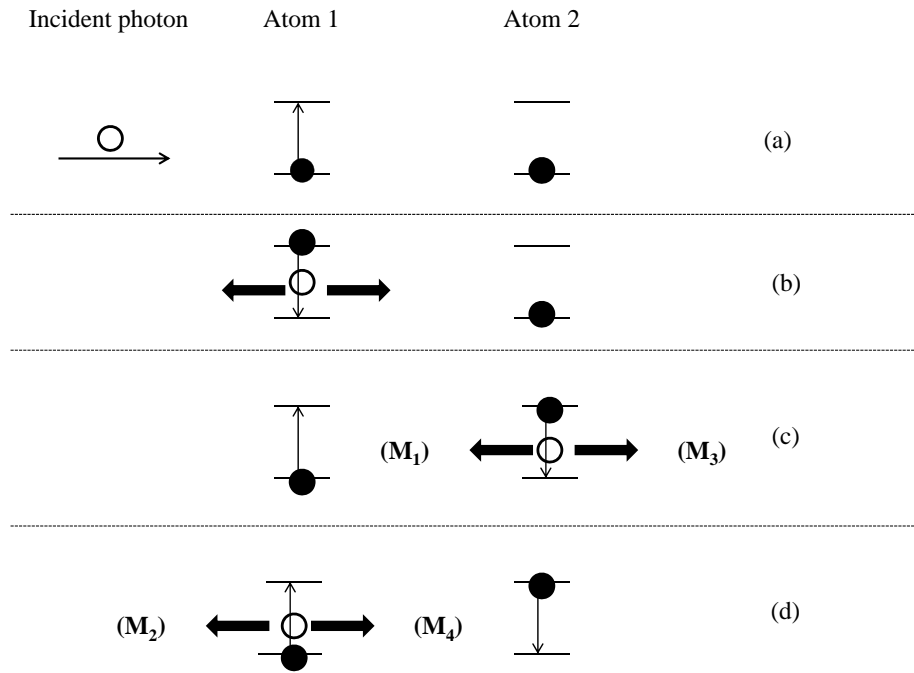


FIGURE 3.5 – Chemins quantiques conduisant à la modification de l'amplitude  $\beta_1$  de l'état excité du premier atome. Ces chemins sont associés à (a) absorption du photon incident, (b) relaxation de l'atome 1 avec émission d'un photon vers l'avant ou vers l'arrière, (c) relaxation de l'atome 2 avec émission d'un photon vers l'arrière ( $M_1$ ) ou l'avant ( $M_3$ ) et qui interagit ensuite avec l'atome 1 (terme RWA), (d) excitation de l'atome 2 avec émission d'un photon vers l'arrière ( $M_2$ ) ou l'avant ( $M_4$ ) et qui interagit ensuite avec l'atome 2 (terme hors-RWA). Des schémas similaires existent pour l'amplitude  $\beta_2$  du second atome.

Les termes restants correspondent à des échanges de photons entre les deux atomes. Le cas (c) représente la relaxation de l'état excité du deuxième atome par émission de photon et correspond à un processus RWA. Le photon émis dans la direction arrière interagit alors avec le premier atome, modifiant l'amplitude de son état excité. Ce photon est associé au chemin  $M_1$ . Le photon émis vers l'avant correspond, quant à lui, au chemin  $M_3$ . Le cas (d) correspond aux échanges dus aux termes hors-RWA. Le chemin  $M_4$  correspond à la situation où le premier atome effectue une transition depuis son état fondamental vers l'excité en émettant un photon ( $\hat{a}_{k_z}^\dagger \hat{\sigma}^\dagger$ ). Le photon émis vers l'avant est alors absorbé par le second atome, qui effectue une transition de son état excité vers le fondamental ( $\hat{a}_{k_z} \hat{\sigma}$ ). Le chemin  $M_2$  est similaire au  $M_4$ , sauf que le second atome absorbe le photon émis vers l'arrière. Il est important de voir que pour les contributions  $M_3$  et  $M_2$ , même si le photon se propage dans la direction opposée à celle de l'atome qui l'absorbe, il peut toujours interagir avec ce dernier, état donné que le couplage diverge avec les grandes longueurs d'onde.



### 3.3.4 Photons réels et virtuels

Le terme de couplage associé aux contributions  $M_i$  peut aussi être associé à la nature réelle ou virtuelle des photons impliqués dans le processus. Selon la définition communément admise, les photons réels sont ceux issus des processus physiques résonnants ne modifiant par l'énergie sans couplage du système (c'est à dire l'énergie des atomes plus champ sans interaction), tandis que les photons virtuels sont ceux créés par des processus ne conservant pas cette énergie [81]. Dans notre cas, les photons réels proviennent des processus résonnants des termes RWA ( $M_1$  et  $M_3$ ). Ils conservent en effet l'énergie sans couplage durant l'ensemble du processus. Les photons virtuels correspondent alors aux processus non-résonnants RWA ( $M_1$  et  $M_3$ ) ainsi qu'à tous les échanges hors-RWA ( $M_2$  et  $M_4$ ), ces derniers ne conservant clairement pas l'énergie sans couplage dans les états intermédiaires du système (états ayant un nombre d'excitation de trois). Chacun de ces photons influe sur la dynamique du système, mais de manière différente comme nous allons le voir. Nous nous baserons sur les relations (3.23) pour comprendre ces différentes contributions. Nous voyons tout d'abord que la contribution des photons réels provient de la fonction de Dirac (contribution résonnante) des termes  $M_1$  ( $\frac{\Gamma e^{-ik_0 l}}{2}$ ) et  $M_3$  ( $\frac{\Gamma e^{ik_0 l}}{2}$ ). Leur somme donne la partie réelle du couplage  $\Gamma \cos(k_0 l)$  dans l'équation (3.20). Les photons virtuels proviennent des termes restants et conduisent à la partie imaginaire pure  $i\Gamma \sin(k_0 l)$  du couplage. Ainsi, la partie réelle modifie la population des atomes (c'est à dire correspond aux transitions atomiques) tandis que la partie virtuelle induit des décalages des niveaux atomiques.

### 3.3.5 Importance des termes hors-RWA

Les expressions (3.25) montrent clairement que les contributions hors-RWA peuvent être aussi importantes que celles RWA bien qu'on ait supposé l'inégalité  $\Gamma \ll \omega_0$  pour utiliser l'approximation adiabatique. Afin d'assurer l'importance des termes hors-RWA et de déterminer dans quelles situations l'approximation RWA est valable, nous considérons plusieurs situations :

Si l'approximation RWA était effectuée, le terme de couplage entre atomes se simplifierait en  $M^{\text{RWA}} = M_1 + M_3$  et vaudrait :

$$M^{\text{RWA}} = \Gamma \cos(\omega_0 l/c) + i \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \sin(\omega_0 l/c) \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2} \right) + \cos(\omega_0 l/c) \text{Ci}(\omega_0 l/c) - \text{Ci}(\epsilon l/c \rightarrow 0) \right]. \quad (3.27)$$

Seulement la partie réelle de (3.27) est correcte par rapport au terme  $M$  calculé précédemment tandis que la partie imaginaire diverge. Les contributions hors-RWA sont donc nécessaires pour la convergence du paramètre de couplage, sans avoir à ajouter de coupures de fréquence artificielles. Cependant, ce n'est pas le seul apport des termes hors-RWA. En effet, ces derniers rajoutent aussi une partie imaginaire supplémentaire à travers  $M_2$  et  $M_4$ ,  $\frac{\Gamma}{\pi} [\sin(\omega_0 l/c) (-\text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega_0 l/c)]$ , ce qui donne le bon décalage en fréquence,  $\Gamma \sin(\omega_0 l/c)$ , dans  $M$ .

Une autre situation intéressante est le cas où  $\omega_0 l/c \gg 1$ . On a alors  $\text{Ci}(\omega_0 l/c) \approx 0$  et  $\text{Si}(\omega_0 l/c) \approx \pi/2$ . L'approximation RWA donne alors le bon résultat si on introduit une coupure infra-rouge  $\epsilon$  tel que  $\epsilon \gg l/c$ . Dans ce cas  $\text{Ci}(\epsilon l/c) \approx 0$  et  $M^{\text{RWA}} \approx M = \Gamma e^{i\omega_0 l/c}$ .

Comme vu précédemment, le modèle correct n'a pas besoin de coupure infra-rouge et peut donner une interprétation physique à la situation où  $\omega l/c \gg 1$ . En effet, il est possible de séparer dans ce cas les contributions non-résonnantes de (3.23a) et (3.23c) en deux parties. La première correspondant aux photons quasi-résonnants compris dans un domaine  $\delta \gg l/c$  autour de  $\omega_0$  (avec  $\omega_0 \gg \delta$ ) et une seconde contenant les photons restants. Dans cette situation, si l'on regarde les contributions  $M_1$  et  $M_3$ , nous avons :

$$\begin{aligned} i \frac{\Gamma \omega_0}{2\pi} \text{Pv} \int_{\omega_0 - \delta/2}^{\omega_0 + \delta/2} \frac{e^{i\omega l/c}}{\omega_0 - \omega} \frac{d\omega}{\omega} &\approx \frac{\Gamma e^{ik_0 l}}{2} \quad \text{pour } M_1 \\ i \frac{\Gamma \omega_0}{2\pi} \text{Pv} \int_{\omega_0 - \delta/2}^{\omega_0 + \delta/2} \frac{e^{-i\omega l/c}}{\omega_0 - \omega} \frac{d\omega}{\omega} &\approx -\frac{\Gamma e^{-ik_0 l}}{2} \quad \text{pour } M_3. \end{aligned}$$

La somme de ces contributions donne la partie imaginaire  $\Gamma \sin(k_0 l)$  du couplage. Cela signifie que seul les photons quasi-résonnants participent au couplage entre atomes. Le rôle des photons restants (fortement non-résonnants dans  $M_1$  et  $M_3$ ) est d'annihiler la contribution des photons hors-RWA ( $M_2$  et  $M_4$ ). Ce résultat résout le problème du caractère non-causal de ces photons. En effet, selon la relation d'incertitude temps-énergie, les photons hors-RWA ne peuvent être présents que sur une durée  $(\omega + \omega_0)^{-1} \leq \omega_0^{-1}$  et ainsi ne peuvent pas se propager sur une distance supérieure à  $\lambda_0 = c/\omega_0$  selon le principe de causalité (propagation à une vitesse  $c$  finie). Cependant, la divergence infra-rouge du terme de couplage amène à une interaction efficace entre les atomes séparés d'une distance  $l > \lambda_0$ , violant ainsi le principe de causalité. Ces contributions doivent donc être nécessairement compensées dans l'expression de quantités physiques mesurables afin de respecter le principe de causalité.

Une autre situation fréquemment rencontrée est celle où l'approximation RWA est utilisée et la dépendance du couplage  $g_\omega$  est négligée ( $g_\omega(\omega) = g_\omega(\omega_0)$ , approximation utilisée dans la partie 3.2). Dans ce cas, les mêmes calculs mènent à la substitution de  $\frac{1}{\omega}$  par  $\frac{1}{\omega_0}$  dans les intégrales (3.21a), (3.21c), (3.25a) et (3.25c). On obtient alors la nouvelle expression du paramètre de couplage entre atomes :

$$M_{g_{cts}}^{\text{RWA}} = \Gamma \cos(\omega_0 l/c) + i \frac{\Gamma}{c} \left[ \sin(\omega_0 l/c) \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2} \right) + \cos(\omega_0 l/c) \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right] \quad (3.28)$$

Cette expression correspond à  $M^{\text{RWA}}$  sans les termes divergents. Cependant, à part pour la situation où  $\omega_0 l/c \gg 1$ , ce modèle ne permet pas de retrouver le paramètre de couplage correct  $M = \Gamma e^{i\omega_0 l/c}$ .

Finalement, une autre méthode utilisée par plusieurs auteurs [82] est d'effectuer l'approximation RWA mais en étendant le domaine d'intégration aux fréquences négatives dans les intégrales (3.25a) et (3.25a), ce qui permet de retrouver le bon paramètre de couplage entre atomes. Cette procédure a été utilisée dans de

précédents papiers [83] afin de préserver le principe de causalité dans les processus de photodétection et trouve sa justification ici.

### 3.3.6 Signal photo-électrique

La grandeur pertinente pour suivre l'évolution du champ est l'intensité moyenne mesurée par un photodétecteur situé à une distance  $z$  du premier atome. On suppose que le photodétecteur est suffisamment rapide pour résoudre les variations temporelles du champ. Dans la théorie de Glauber de la photodétection (où l'approximation RWA est faite pour le détecteur) le signal de photodétection est donné par :

$$I(t, z) = s \langle \psi(t) | \hat{A}^{(-)}(z) \hat{A}^{(+)}(z) | \psi(t) \rangle \quad (3.29)$$

où  $s$  est une constante ( $s = 1$  par souci de simplicité) et  $\hat{A}^{(\pm)}$  sont les opérateurs propagatif et contra-propagatif respectivement. Il sont donnés par :

$$\hat{A}^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \hat{a}_{k_z} e^{\pm i k_z z} dk_z$$

avec  $\epsilon_k$  le champ du vide du mode  $k$  et  $B(\omega_k)$  l'acceptance spectrale du détecteur tel que :

$$B(\omega_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_1 < \omega_k < \omega_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\omega_{2,1} = \omega_0 \pm \frac{\Delta_0}{2}$  et  $\Delta_0 = \omega_2 - \omega_1$  est la bande passante du détecteur. Afin d'assurer que le photodétecteur collecte l'ensemble des photons, sa bande passante vérifie la condition :  $\Delta_0 \gg \Delta, \Gamma$ . On suppose aussi que les conditions  $|z - z_j| \gg c\Gamma^{-1}, c\Delta^{-1}$  de sorte que les processus d'émissions soient terminés avant l'entrée dans le photodétecteur. À l'aide des définitions précédentes et de l'expression (3.17) de la fonction d'onde, on obtient l'expression suivante pour l'intensité :

$$I(t, z) = I_1 + I_2 + I_3$$

avec

$$I_1(t, z) = |A_{eff}(t, z)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{\omega_k} B(\omega_k) \alpha_{k_z}(t) e^{-i\omega_k(t - \text{sign}(k_z)z/c)} dk_z \right|^2 \quad (3.30a)$$

$$I_2(t, z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{\omega_k} B(\omega_k) \gamma_{k_z}(t) e^{-i\omega_k(t - \text{sign}(k_z)z/c)} dk_z \right|^2 \quad (3.30b)$$

$$I_3(t, z) = 2 \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_{k'}}{\omega_{k'}} B(\omega_{k'}) \eta_{j, k_z, k'_z}(t) e^{-i\omega_{k'}(t - \text{sign}(k'_z)z/c)} dk'_z \right|^2. \quad (3.30c)$$

$I_1$  représente l'intensité due au champ incident et au champ rayonné par les atomes lors des processus RWA. Cette intensité est similaire à celle obtenue dans le régime classique à partir d'un potentiel vecteur effectif  $A_{eff}$ .  $I_2$  et  $I_3$  sont associés aux champs rayonnés au cours de processus hors-RWA, et sont donc exclusivement dus aux photons virtuels. On montre dans l'annexe A.2 que  $I_2 \approx I_3 \approx 0$  dès que

$|z| \gg c/\omega_1$  et  $z < 0$  (détecteur à gauche du premier atome) ou  $|z - l| \gg c/\omega_1$  et  $z > 0$  (détecteur à droite). Ces conditions sont automatiquement remplies dans notre cas, grâce à la condition précédente  $|z - z_j| \gg c\Gamma^{-1}, c\Delta^{-1}$ . La disparition des termes  $I_2$  et  $I_3$  est due au fait que les photons virtuels, issus des processus hors-RWA, restent localisés dans un domaine de l'ordre de leur longueur d'onde autour de l'atome. Comme  $c/\omega_1$  correspond à la longueur d'onde maximum acceptée par le détecteur, aucun de ces photons ne peut agir sur le détecteur lorsque celui-ci est positionné à une distance supérieure. Dans le régime de champ proche, lorsque le détecteur est placé à une distance plus faible que  $c/\omega_1$ , la théorie de la photodétection doit être modifiée pour prendre en compte les processus hors-RWA qui apparaissent alors dans le détecteur [83, 84].

Le champ effectif  $A_{eff}$  qui apparaît dans la relation (3.30) peut être relié aux amplitudes  $\beta_j$  des états excités. On montre dans l'annexe A.3 que ce champ effectif peut être décomposé en trois parties :

$$\begin{aligned} A_{eff}(t, z) = & h(-z)A_{inc}(t - z/c)e^{-i\omega_0(t-z/c)} \\ & + h(-z)A_{refl}(t + z/c)e^{-i\omega_0(t+z/c)} \\ & + h(z - l)A_{trans}(t - z/c)e^{-i\omega_0(t-z/c)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec

$$A_{inc}(t - z/c) = \int_0^\infty B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \alpha_{kz}(-\infty) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-z/c)} dk_z \quad (3.32a)$$

$$A_{trans}(t - z/c) = A_{inc}(t - z/c) - i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{j=1}^2 e^{-i\frac{\omega_0}{c} z_j} \beta_j(t - (z - z_j)/c) \quad (3.32b)$$

$$A_{refl}(t + z/c) = -i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{j=1}^2 e^{i\frac{\omega_0}{c} z_j} \beta_j(t + (z - z_j)/c). \quad (3.32c)$$

$A_{inc}$ ,  $A_{trans}$  et  $A_{refl}$  sont respectivement les champs incident transmis et réfléchi et  $h(z)$  est la fonction de Heaviside.

Une autre grandeur intéressante est la distribution spectrale de l'intensité  $\tilde{I}_\alpha(\omega) = |\tilde{A}_\alpha(\omega)|^2$  ( $\alpha = inc, refl, trans$ ). Ces distributions sont reliées aux champs par une simple transformée de Fourier :

$$\tilde{A}_\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^\infty A_\alpha(\tau) e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau. \quad (3.33)$$

### 3.3.7 Champs transmis et réfléchi - Théorème de l'aire

On considère dans cette partie la situation où le photon est collectivement diffusé par les deux atomes. Nous nous concentrerons particulièrement sur l'aspect temporel des champs transmis et réfléchi. Nous montrerons que le théorème établi précédemment pour un atome (partie 3.2) stipulant que l'aire algébrique du champ transmis tend vers zéro quelque soit les valeurs du couplage  $\Gamma$  et de la largeur de l'impulsion initiale  $\Delta$  reste valable. Les champs transmis et réfléchi sont donnés par les relations (3.32b) et (3.32c), et pour  $z = z_j = 1, 2$ , nous avons :

$$A_{trans}(t - z_j/c) = A_{inc}(t - z_j/c) - i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{j'=1}^2 e^{-i \frac{\omega_0}{c} z_j} \beta_{j'}(t - (z - z_{j'})/c) \quad (3.34a)$$

$$A_{refl}(t + z_j/c) = -i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{j'=1}^2 e^{i \frac{\omega_0}{c} z_{j'}} \beta_{j'}(t + (z - z_{j'})/c). \quad (3.34b)$$

En introduisant la constante  $G_{0,j} = \frac{g_k \omega_k}{\epsilon_k} e^{ik_0 z_j}$  (indépendante de  $\omega_k$ ) et en se plaçant dans l'approximation markovienne,  $\beta_j(t \pm l/c) \approx \beta_j(t)$  et  $A_{inc}(t - l/c) \approx A_{inc}(t)$ , on trouve que les variations  $\partial_t \beta_j(t)$  des amplitudes d'être dans les états excités donnés par (3.20) sont directement reliées aux champs se propageant dans le guide :

$$i \partial_t \beta_1(t) = G_{0,1}(A_{inc}(t) + A_{refl}(t)) \quad (3.35a)$$

$$i \partial_t \beta_2(t) = G_{0,2} A_{trans}(t). \quad (3.35b)$$

Seuls les champs causaux se propageant, évalués à la position de l'atome, modifient sa population dans l'état excité. Ceci est une conséquence de la compensation des photons virtuels issus des processus hors-RWA par ceux issus des processus RWA mais situés à l'extérieur d'une étroite bande passante autour de la résonance, comme vu dans la partie 3.3.5.

L'aire de l'impulsion est définie telle que  $S_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} A_\alpha(\tau = t - z/c) d\tau$ , avec ( $\alpha = inc, trans, refl$ ). On obtient, pour le champ transmis et en intégrant l'équation (3.35b) :

$$S_{trans} = i G_{0,2} (\beta_2(t \rightarrow \infty) - \beta_2(t \rightarrow -\infty)). \quad (3.36)$$

Les valeurs asymptotiques de  $\beta_j(t)$  peuvent être déduites de l'équation (3.20). La présence du terme de relaxation impose  $\beta_j(t \rightarrow \infty) = 0$ , l'atome retourne irrémédiablement dans son état fondamental sur les temps longs. Puisque qu'initialement on a  $\beta_j(t \rightarrow -\infty) = 0$ , on obtient  $S_{trans} = 0$ . De la même façon, on a  $\int_{-\infty}^{\infty} (A_{inc} + A_{refl})(\tau = t - z/c) d\tau = 0$ . Ces résultats conduisent à deux résultats importants :

$$S_{trans} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{trans}(\tau = t - z/c) d\tau = 0 \quad (3.37a)$$

$$S_{refl} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{refl}(\tau = t - z/c) d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} A_{inc}(\tau = t - z/c) d\tau = -S_{inc}. \quad (3.37b)$$

Ces résultats sont valides quelle que soit la valeur du couplage  $\Gamma$ , de la largeur spectrale initiale  $\Delta$  ou de la distance inter-atomique  $l$ . Le théorème de l'aire peut être retrouvé dans le domaine spectral à partir du spectre à résonance. Les équations (3.37) signifient alors que la fréquence centrale de l'impulsion incidente (résonnante avec la transition atomique) est toujours réfléchiée. De plus, les atomes rayonnent dans les deux directions du guide mais l'interférence, pour la fréquence résonnante, est toujours destructive vers l'avant et constructive vers l'arrière.

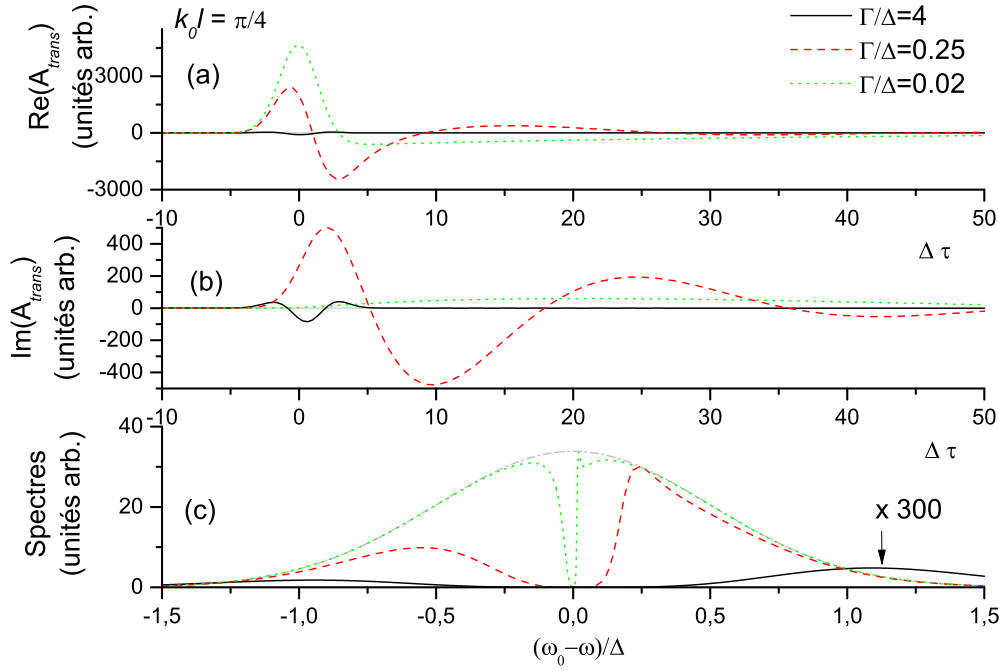


FIGURE 3.6 – Comportement temporel de (a) la partie réelle et (b) la partie imaginaire du champ transmis pour différente valeur du ratio  $\Gamma/\Delta$ . La distance inter-atomique est telle que  $k_0 l = \frac{\pi}{4}$ . L'aire de l'impulsion transmise est nulle pour toutes les valeurs du couplage. (c) Spectres correspondants aux champs transmis. Le spectre du champ incident est représenté en pointillés gris. La fréquence centrale n'est jamais transmise.

Une remarque importante est que le théorème de l'aire n'est vrai que lorsque les relations (3.35) sont vérifiées. C'est ici le cas, car les photons virtuels hors-RWA compensent ceux issus des processus RWA fortement hors-résonants. C'est pour cela que le théorème de l'aire existe aussi dans un modèle RWA qui exclut arbitrairement les fréquences loin de la résonance atomique [59–63].

En dehors de la fréquence de résonance, les photons virtuels conduisent à des effets différents. Ces résultats sont illustrés sur la figure 3.6 où sont représentés les profils temporels et spectraux de l'impulsion transmise pour des valeurs de couplage relatif  $\frac{\Gamma}{\Delta}$  croissantes et une valeur fixée de la distance inter-atomique  $l$ . Dans tous les cas, les parties imaginaire et réelle du champ présentent à la fois une partie positive et une négative permettant d'avoir une aire totale nulle. La déformation de l'impulsion est d'autant plus prononcée que la valeur du couplage est intense. Cette déformation est accompagnée par une diminution de l'intensité de l'impulsion transmise. Ce résultat est en accord avec l'équation (3.35b). Lorsque  $\Gamma$  croît,  $G_{0,2}$  décroît et  $A_{trans}(t - l/c) = -iG_{0,2}^{-1}\partial_t\beta_2(t)$  tend vers zéro. De la même manière, on obtient que  $A_{refl}(t) \simeq -A_{inc}(t)$  pour une valeur élevée du paramètre  $\frac{\Gamma}{\Delta}$ . On a représenté sur la figure 3.6(c) le spectre du champ transmis pour les mêmes valeurs de couplage. On observe que la fréquence centrale n'est jamais

transmise et est donc réfléchi. Les spectres présentent un creux à la résonance, dont la largeur augmente avec l'intensité de couplage. Ces spectres possèdent une autre caractéristique : leur déformation est asymétrique contrairement au cas où un seul atome est impliqué. Cette particularité est une conséquence de la présence des photons virtuels et sera expliqué dans le paragraphe 3.3.8. La distance inter-atomique est choisie de sorte que l'interaction implique simultanément des photons réels et virtuels ( $k_0l = \frac{\pi}{4}$ ).

### 3.3.8 Solutions exactes pour les populations et le champ

Afin d'obtenir les expressions des champs transmis et réfléchi, nous avons besoin de l'expression des populations  $\beta_j$ . Cela peut être réalisé en résolvant l'équation (3.20). Pour cela, nous introduisons ici les états super-radiant  $|\beta_+\rangle$  et sub-radiant  $|\beta_-\rangle$  de Dicke :

$$|\beta_{\pm}\rangle = \frac{|b_1, a_2, 0\rangle \pm |a_1, b_2, 0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.38)$$

avec les amplitudes :  $\beta_{\pm} = (\beta_1 \pm \beta_2)/\sqrt{2}$ . Dans cette nouvelle représentation, les états de Dicke sont découplés et nous obtenons alors à partir de (3.20) les équations d'évolution de leur amplitude :

$$\partial_t \beta_{\pm}(t) = S_{0,1}(t) \left( \frac{1 \pm e^{ik_0l}}{\sqrt{2}} \right) - \Gamma(1 \pm e^{ik_0l}) \beta_{\pm}(t). \quad (3.39)$$

Nous obtenons la solution exacte pour les états de Dicke en intégrant (3.39) :

$$\beta_{\pm}(t) = \frac{1 \pm e^{ik_0l}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^t S_{0,1}(t') e^{-\Gamma(1 \pm e^{ik_0l})(t-t')} dt'. \quad (3.40)$$

Les états de Dicke sont donc décalés par rapport à la résonance de  $\pm\Gamma \sin(k_0l)$  respectivement, et retournent à leur état fondamental avec un taux de relaxation de  $\Gamma(1 \pm \cos(k_0l))$ . Ces états sont peuplés depuis leur fondamental par le terme source  $S_{0,1}(t)(1 \pm e^{ik_0l})/\sqrt{2}$ . Ainsi, en fonction de la valeur du facteur de phase  $k_0l$ , la dynamique des atomes et les profils des champs de rayonnés peuvent être significativement modifiés.

Le champ rayonné vers l'avant est donné par  $A_{RT} = A_{trans} - A_{inc}$  et celui vers l'arrière par  $A_{RR} = A_{refl}$ . Nous obtenons leurs expressions à partir des relations (3.32) :

$$A_{RR} = -iA_0 \beta_R^{(\text{retardé})}(\tau) \quad (3.41a)$$

$$A_{RT} = -iA_0 \beta_T^{(\text{retardé})}(\tau). \quad (3.41b)$$

Avec  $\tau = t - z/c$  le temps retardé et  $A_0 = 2\sqrt{2}\pi g_k \epsilon_k / (c\omega_0)$  une constante. Nous avons introduit ici les états retardés de Dicke :

$$|\beta_T^{(\text{retardé})}\rangle = \frac{|b_1, a_2, 0\rangle + |a_1, b_2, 0\rangle e^{-ik_0l}}{\sqrt{2}} \quad (3.42a)$$

$$|\beta_R^{(\text{retardé})}\rangle = \frac{|b_1, a_2, 0\rangle + |a_1, b_2, 0\rangle e^{+ik_0l}}{\sqrt{2}}. \quad (3.42b)$$

Pour  $k_0l = 0, \pi$  ces états sont les mêmes que les états de Dicke précédemment définis, mais pour d'autres valeurs du facteur de phase ils sont différents. Les états retardés de Dicke ne forment pas une nouvelle base et le facteur de phase permet de prendre en compte le délai entre les deux atomes lorsque qu'un photon est émis. De plus, les champs rayonnés dans les directions de transmission (indice  $T$ ) et de réflexion (indice  $R$ ) proviennent de l'interférence entre les champs rayonnés par chaque atome ( $\propto \beta_j$ ) avec le facteur de phase correspondant ( $e^{\pm ik_0l}$ ). Les amplitudes des champs transmis peuvent être facilement déduites à partir des amplitudes des états de Dicke (3.40) et des définitions ci-dessus. Nous pouvons de plus séparer, dans les champs rayonnés (états retardés de Dicke), les contributions provenant des états super- et sub-radiants. Nous avons alors :

$$A_{RR} = A_{RR}^{(+)} + A_{RR}^{(-)} \quad (3.43a)$$

$$A_{RT} = A_{RT}^{(+)} + A_{RT}^{(-)} \quad (3.43b)$$

avec

$$A_{RR}^{(\pm)}(t) = -i \frac{A_0}{2}(t) (1 \pm e^{ik_0l}) \beta_{\pm}(t) \quad (3.44a)$$

$$A_{RT}^{(\pm)}(t) = -i \frac{A_0}{2}(t) (1 \pm e^{-ik_0l}) \beta_{\pm}(t) \quad (3.44b)$$

qui correspondent aux contributions des états super- et sub-radiants rayonnés dans les deux directions. Ces amplitudes peuvent être réécrites en utilisant l'équation (3.40) :

$$A_{RR}(t) = -2\Gamma e^{ik_0l} A_{inc}(t) * \left[ \cos^2(k_0l/2) R_+ - \sin^2(k_0l/2) R_- \right](t) \quad (3.45a)$$

$$A_{RT}(t) = -2\Gamma e^{ik_0l} A_{inc}(t) * \left[ \cos^2(k_0l/2) R_+ + \sin^2(k_0l/2) R_- \right](t) \quad (3.45b)$$

où  $*$  représente le produit de convolution et avec  $R_{\pm}(k_0l, t) = h(t) e^{-\Gamma(1 \pm e^{ik_0l})}$  deux fonctions réponses effectives, correspondant aux deux états de Dicke ( $h(t)$  est la fonction de Heaviside). Même si les deux états de Dicke sont impliqués avec le même poids, le facteur de phase n'est pas le même pour le champ transmis et celui réfléchi. Cette différence est importante pour comprendre le comportement spectral pour différentes valeurs de ce facteur de phase. Les spectres des champs rayonnés peuvent être déduits des expressions (3.45) :

$$\tilde{A}_{RR}(\omega) = -2\Gamma e^{ik_0l} \tilde{A}_{inc}(\omega) \left[ \cos^2(k_0l/2) \tilde{R}_+ - \sin^2(k_0l/2) \tilde{R}_- \right](\omega) \quad (3.46a)$$

$$\tilde{A}_{RT}(\omega) = -2\Gamma e^{ik_0l} \tilde{A}_{inc}(\omega) \left[ \cos^2(k_0l/2) \tilde{R}_+ + \sin^2(k_0l/2) \tilde{R}_- \right](\omega) \quad (3.46b)$$

où  $\tilde{R}_{\pm}(k_0l, \omega) = \left[ \Gamma(1 \pm \cos(k_0l)) - i(\omega - (\omega_0 \pm \Gamma \sin(k_0l))) \right]^{-1}$ . Il apparaît aussi ici deux fonctions de réponses spectrales qui impliquent une subtile superposition des champs rayonnés par les états de Dicke. Cependant, quels que soient les paramètres  $\Gamma$  et  $k_0l$ , on obtient toujours  $\tilde{A}_{RR}(\omega_0) = \tilde{A}_{RT}(\omega_0) = -\tilde{A}_{inc}(\omega_0)$ , ce qui permet d'assurer la validité du théorème de l'aire. La fréquence centrale est en effet systématiquement réfléchi.



### 3.3.9 Discussion

Afin de mettre en évidence la dépendance entre le profil du champ et la nature des photons échangés (réelle ou virtuelle), on étudie par la suite l'influence de la distance inter-atomique  $l$ . En effet, même si le photodétecteur est sensible aux photons qui se propagent et non à ceux qui sont échangés entre les atomes, ces derniers influent grandement sur la dynamique, et donc sur les champs rayonnés.

On représente sur les figures 3.7, 3.8 et 3.9 plusieurs grandeurs en fonction de différents facteurs de phase  $k_0l$  et pour un couplage fixé à  $\frac{\Gamma}{\Delta} = 0.25$ . Nous avons choisis trois facteurs de phase différents :  $k_0l = \pi$  sur la figure 3.7,  $k_0l = \pi/2$  sur la figure 3.8 et  $k_0l = \pi/4$  sur la figure 3.9. Dans le premier cas, seuls les photons réels contribuent à l'interaction tandis que dans le second ce sont les photons virtuels. Les deux types de photons contribuent dans le troisième cas. Sur chaque figure, nous avons représenté en (a) le comportement temporel des populations  $|\beta_j(t)|^2$  des états excités ainsi que celui des états de Dicke  $|\beta_{\pm}(t)|^2$ . En (b) sont représentés les champs rayonnés vers l'avant ( $A_{RT}$ ) et l'arrière ( $A_{RR}$ ), et en (c) les spectres correspondants. Nous avons rajouté sur chacune de ces figures un schéma représentant les niveaux d'énergie dans la base de Dicke, avec les différents termes de relaxation, de couplage avec le photon incident (terme source) ainsi que les décalages du niveau des états.

Pour  $k_0l = \pi$  (figure 3.7), on a  $\beta_+ = 0$ ,  $\beta_1 = -\beta_2 = \beta_-/\sqrt{2}$  et  $\beta_T^{(\text{retardé})} = \beta_R^{(\text{retardé})} = \beta_-$ . Les amplitudes rayonnées sont alors :  $A_{RT} = A_{RT}^{(-)} = A_{RR} = A_{RR}^{(-)} = -iA_0\beta_-$  et on a aussi  $\tilde{A}_{RR}(\omega) = \tilde{A}_{RT}(\omega) = -2\Gamma\tilde{A}_{inc}(\omega)\tilde{R}_-(\pi, \omega)$  avec  $\tilde{R}_-(\pi, \omega) = [2\Gamma - i(\omega - \omega_0)]^{-1}$ . Cette situation est résumée sur le schéma rajouté sur la figure. Seul un des états de Dicke est peuplé ( $\beta_-$ ), la situation est alors équivalente à celle d'un *super-atome* en interaction avec le photon incident. Seuls des photons réels sont échangés entre les deux atomes, il n'y a donc pas de décalage des niveaux d'énergie des états de Dicke. De plus, le couplage entre atomes fait apparaître un nouveau terme de couplage  $\Gamma$  conduisant ainsi à une relaxation totale du super-atome avec un taux de  $2\Gamma$ , qui est alors le double de celle impliquée dans le cas d'un atome unique. Malgré le fait que les atomes soient spatialement séparés et que l'impulsion atteigne d'abord le premier atome, l'interaction produit exactement la même excitation sur les deux atomes. Cela s'explique par l'étendue spatiale de l'impulsion ( $c\Delta^{-1} \gg l$  dans l'approximation markovienne). Les deux atomes sont donc excités simultanément. Les champs rayonnés reproduisent le comportement des populations et sont réels. On remarque aussi que les champs rayonnés vers l'avant et vers l'arrière sont identiques. Cette caractéristique est due aux relations (3.41) et (3.42) où l'on voit que les seuls cas où  $A_{RR} = A_{RT}$  sont les situations avec  $k_0l \ll 1$  ou  $k_0l = \pi$  correspondant aux échanges de photons uniquement réels. De plus, le système atomique se comporte ici comme un atome unique qui, une fois excité, ne fait pas la différence entre les directions d'émission. En (c), les spectres rayonnés dans les deux directions sont identiques pour les mêmes raisons que les champs rayonnés. À la fréquence de résonance, le champ rayonné correspond exactement au champ incident (à une inversion de signe près). Cela explique pourquoi la fréquence centrale n'est pas transmise, étant donné que le champ transmis correspond à la somme du champ incident

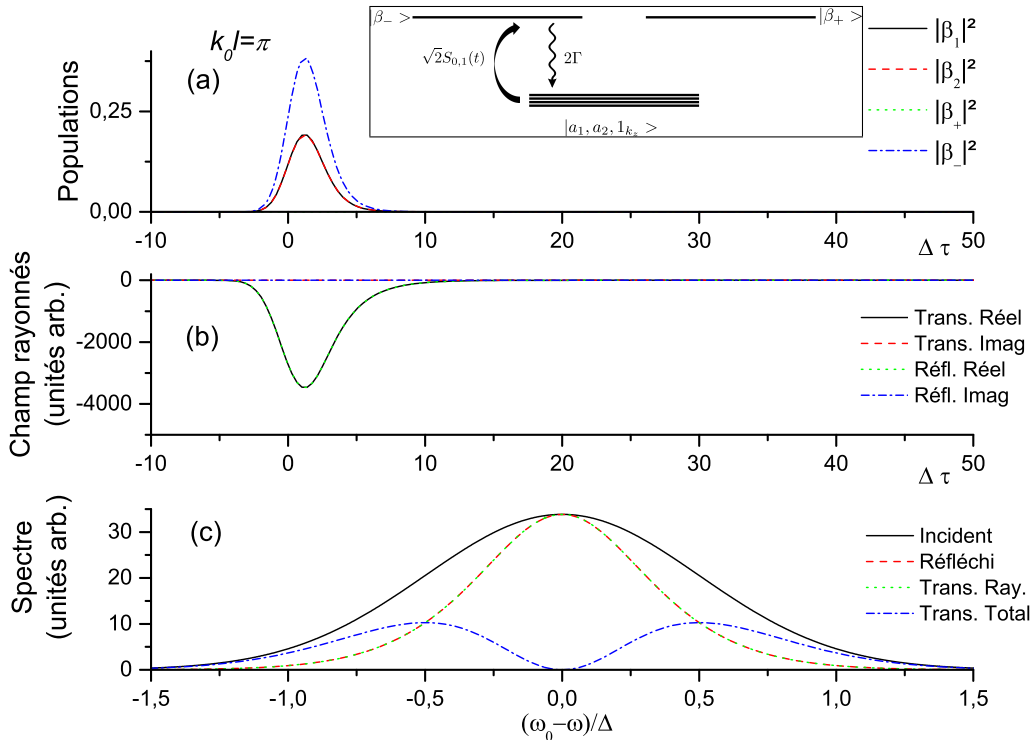


FIGURE 3.7 – Nous avons représenté en (a) l'évolution temporelle des populations des états excités  $|\beta_j(t)|^2$  et des états de Dicke  $|\beta_{\pm}(t)|^2$ . En (b), les champs rayonnés vers l'arrière  $A_{RR}$  et vers l'avant  $A_{RT}$ . Les spectres correspondants ( $|\tilde{A}_{RR}|^2$  et  $|\tilde{A}_{RT}|^2 = |\tilde{I}_{refl}|^2$ ) sont représentés en (c) ainsi que l'impulsion incidente ( $|\tilde{I}_{inc}|^2$ ) et transmise ( $|\tilde{I}_{trans}|^2$ ). Le couplage est tel que  $\frac{\Gamma}{\Delta} = 0.25$ . L'encart décrit les niveaux d'énergie dans la base des états de Dicke ainsi que les couplages associés. Le facteur de phase est fixé à  $k_0 l = \pi$

et de celui rayonné vers l'avant. La situation où  $k_0 l \ll 1$  conduit à une situation symétrique avec  $\beta_- = 0$  et  $\beta_+ \neq 0$ .

Pour  $k_0 l = \pi/2$  (figure 3.8), on a  $\beta_+ = -\beta_-^*$ ,  $\beta_1 = i\sqrt{2}\Im(\beta_+)$ ,  $\beta_2 = \sqrt{2}\Re(\beta_+)$ . Les amplitudes rayonnées vers l'arrière et l'avant sont  $A_{RR} = \sqrt{2}A_0(\Re(\beta_+) + \Im(\beta_+))$  et  $A_{RT} = \sqrt{2}A_0(\Re(\beta_+) - \Im(\beta_+))$ . Où  $\Re$  et  $\Im$  désignent les parties réelle et imaginaire respectivement. Les deux états de Dicke,  $|\beta_+\rangle$  et  $|\beta_-\rangle$ , sont peuplés et participent aux processus d'émissions. Le système atomique n'est plus équivalent à un super-atome. Comme représenté sur le schéma inséré à la figure, les deux états de Dicke jouent un rôle symétrique. Ils possèdent le même taux de relaxation  $\Gamma$  et ont tous les deux leur niveau excité décalé de  $\Gamma$ , mais en un sens opposé. Le couplage avec le photon incident est le même au facteur de phase  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  près. La relaxation est associée ici à celle d'un atome unique, tandis que les décalages des niveaux d'énergies est une conséquence directe de la présence d'échanges de photons virtuels entre les deux atomes. Comme les deux états de Dicke agissent de façon symétrique, le comportement de leur population est le même. Cependant, les populations des atomes qui résultent de l'interférence entre les états de Dicke sont cette fois très différentes. L'effet de ces interférences est constructif

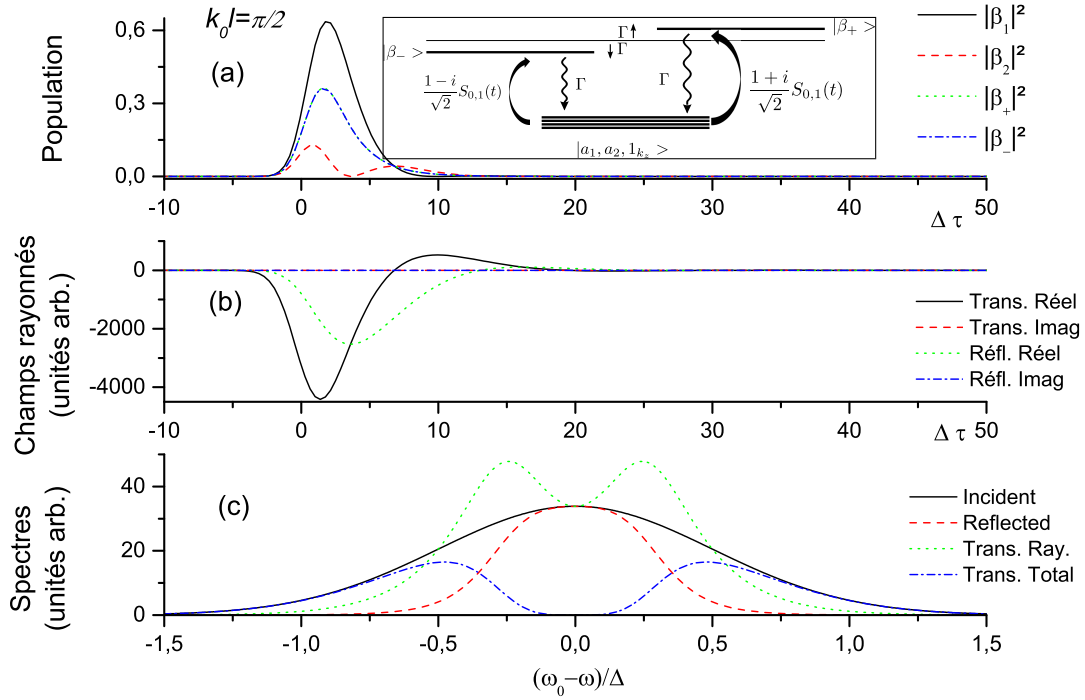


FIGURE 3.8 – Nous avons représenté (a) l'évolution temporelle des populations, des états excités  $|\beta_j(t)|^2$  et des états de Dicke  $|\beta_{\pm}(t)|^2$ . En (b), les champs rayonnés vers l'arrière  $A_{RR}$  et vers l'avant  $A_{RT}$ . En (c), les spectres correspondants ( $|\tilde{A}_{RR}|^2$  et  $|\tilde{A}_{RT}|^2 = |\tilde{I}_{refl}|^2$ ) ainsi que l'impulsion incidente ( $|\tilde{I}_{inc}|^2$ ) et transmise ( $|\tilde{I}_{trans}|^2$ ). Le couplage est tel que  $\frac{\Gamma}{\Delta} = 0.25$ . L'encart décrit les niveaux d'énergie dans la base des états de Dicke ainsi que les couplages associés. Le facteur de phase est fixé à  $k_0 l = \frac{\pi}{2}$

pour le premier atome, qui atteint un population maximum de 0.65, alors qu'il est destructif pour le second atome conduisant à une population bien plus faible. Les champs rayonnés dans les deux directions sont réels. Ils possèdent une partie négative importante permettant de satisfaire le théorème de l'aire. En effet, le champ rayonné vers l'avant possède forcément une partie négative, nécessaire à la compensation du champ incident positif. Dans la direction arrière, le signe du champ est inversé, conformément à l'équation (3.37b). Contrairement à la situation  $k_0 l = \pi$  où seuls des photons réels sont échangés, la situation  $k_0 l = \pi/2$  (où des photons virtuels sont échangés) présente des champs rayonnés différents selon la direction de propagation. Les spectres de ces champs permettent de comprendre davantage la différence entre les deux directions de propagation. En effet, dans la direction vers l'avant, le spectre possède une structure à deux pics, avec des maxima localisés à  $\frac{\omega - \omega_0}{\Delta} = 0.25$ , ce qui correspond aux décalages  $\pm \Gamma$  des niveaux d'énergie des états de Dicke (on a  $\frac{\Gamma}{\Delta} = 0.25$ ). La forme symétrique de ces pics est due aux rôles symétriques joués par les deux états de Dicke dans la situation  $k_0 l = \pi/2$ . Le champ rayonné vers l'arrière ne possède pas de structure en pics bien que les deux pics centrés à  $\omega_0 \pm \Gamma$  jouent un rôle. Cela peut être expliqué à partir

des relations (3.46). Le champ rayonné provient d'une interférence subtile entre les champs rayonnés par les états de Dicke. En effet, pour  $k_0 l = \frac{\pi}{2}$ , nous avons  $\tilde{A}_{RR}(\omega) = -i\Gamma\tilde{A}_{inc}(\omega)(\tilde{R}_+ - \tilde{R}_-)(\frac{\pi}{2}, \omega)$  et  $\tilde{A}_{RT}(\omega) = -\Gamma\tilde{A}_{inc}(\omega)(\tilde{R}_+ + \tilde{R}_-)(\frac{\pi}{2}, \omega)$ . Les deux fonctions de réponses sont respectivement centrées autour de  $\omega_0 \pm \Gamma$ , avec des profils de type dispersion et absorption pour les parties réelle et imaginaire respectivement. Comme les largeurs de ces réponses sont du même ordre de grandeur que le décalage ( $\Gamma$ ), les champs rayonnés par les états de Dicke se superposent de sorte que l'effet de lissage se produit sur les pics et qu'une courbe lisse est obtenue pour le champ réfléchi. Pour le champ transmis, les pics sont combinés à un profil d'absorption. Enfin, on a  $(\tilde{R}_+ + \tilde{R}_-)(\frac{\pi}{2}, \omega) = 1/\Gamma$  et  $(\tilde{R}_+ - \tilde{R}_-)(\frac{\pi}{2}, \omega) = -i/\Gamma$  et donc  $\tilde{A}_{RR}(\omega_0) = \tilde{A}_{RT}(\omega_0) = -\tilde{A}_{inc}(\omega_0)$ . À la résonance, le spectre du champ rayonné vers l'avant est donc l'exact opposé de celui du champ incident, annulant ainsi la transmission de la fréquence centrale.

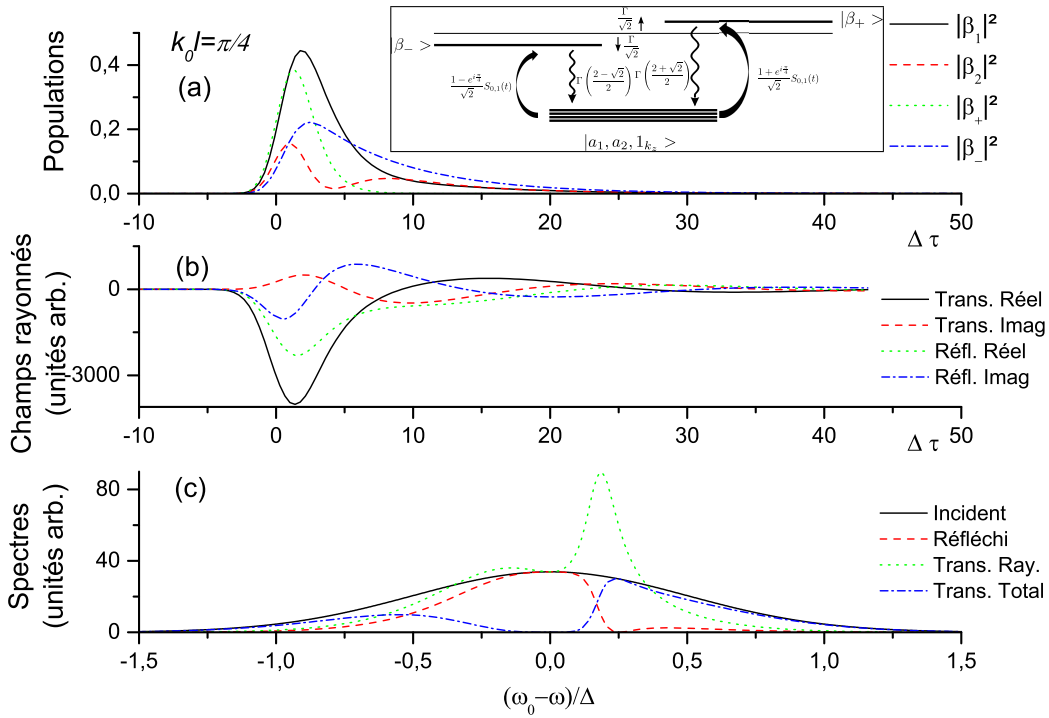


FIGURE 3.9 – Nous avons représenté (a) l'évolution temporelle des populations des états excités  $|\beta_j(t)|^2$  et des états de Dicke  $|\beta_{\pm}(t)|^2$ . En (b), les champs rayonnés vers l'arrière  $A_{RR}$  et vers l'avant  $A_{RT}$ . En (c), les spectres correspondants ( $|\tilde{A}_{RR}|^2$  et  $|\tilde{A}_{RT}|^2 = \tilde{I}_{refl}$ ) ainsi que les impulsions incidente ( $|\tilde{I}_{inc}|^2$ ) et transmise ( $|\tilde{I}_{trans}|^2$ ). Le couplage est tel que  $\frac{\Gamma}{\Delta} = 0.25$ . L'encart décrit les niveaux d'énergie dans la base des états de Dicke ainsi que les couplages associés. Le facteur de phase est fixé à  $k_0 l = \frac{\pi}{4}$

Pour  $k_0 l = \pi/4$  (figure 3.9) tous les états sont peuplés ( $\beta_{\pm} \neq 0$ ,  $\beta_{1,2} \neq 0$ ) de manière différentes. Il n'y a pas de relation remarquable entre eux. Les populations (a) montrent un comportement transitoire et l'état de Dicke  $|\beta_+ \rangle$  est davantage peuplé que  $|\beta_- \rangle$ . En effet, selon ce qui est représenté sur le schéma, les

états de Dicke  $|\beta_{\pm}\rangle$  ont un terme source d'amplitude  $(2 \pm \sqrt{2})S_{0,1}$  et un terme de relaxation  $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\Gamma$  respectivement. La valeur supérieure du terme source pour  $|\beta_{+}\rangle$  conduit à une population plus importante que pour l'état  $|\beta_{-}\rangle$  et une relaxation plus importante induit un signal temporel plus étroit pour  $|\beta_{-}\rangle$ . Les champs rayonnés (b) possèdent une caractéristique intéressante, étant donné que leurs parties imaginaires sont non-nulles cette fois-ci. Ces parties présentent alors un comportement oscillant permettant de maintenir l'aire totale strictement nulle. Les spectres, dans (c), permettent de confirmer les caractéristiques présentes sur le schéma en (a). L'implication simultanée d'échanges de photons réels et virtuels, conduit à des profils asymétriques contrastant avec les situations précédentes (échanges de photons purement réels ou purement virtuels). Le spectre du champ rayonné vers l'avant possède toujours deux pics, placés de façon quasi-symétrique par rapport à la fréquence centrale, mais qui ont cette fois des amplitudes et des largeurs spectrales différentes. Le pic décalé vers le rouge est plus important, de sorte que le champ transmis est équivalent au champ incident et que le champ réfléchi est nul autour de cette fréquence (la valeur exacte est donnée plus loin). Cet effet est spectaculaire car le champ est complètement réfléchi à la résonance, ce qui conduit à une variation très abrupte dans la région entre la résonance et le pic décalé vers le rouge. Le caractère asymétrique du spectre peut être compris à partir du schéma inséré dans la figure 3.9. Les deux états sont décalés de manière symétrique par rapport à la fréquence centrale et se trouvent à  $\omega = \omega_0 \pm \Gamma/\sqrt{2}$ , mais leur terme source et leur terme de relaxation sont différents. Cela conduit à une différence dans l'intensité et la largeur des pics ainsi qu'une légère différence sur leur position ( $-0.188$  et  $+0.15$  pour les pics décalés vers le bleu et le rouge respectivement au lieu des valeurs attendues  $\pm\Gamma/\sqrt{2} = \pm 0.175$ ). Le creux dans le spectre du champ réfléchi peut être compris à partir des équations (3.46). En effet, on a trouvé que pour  $k_0l \neq \pi[\pi]$  ou  $\pi/2[\pi]$ , l'amplitude  $\tilde{A}_{RR}$  tend vers zéro pour une fréquence telle que  $\omega - \omega_0 = \Gamma \tan(k_0l)$ . Ici,  $k_0l = \pi/4$  et donc le décalage est exactement  $\Gamma$  en accord avec la figure 3.9 pour laquelle le spectre réfléchi est nul pour  $\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta} \approx 0.25$ .

### 3.3.10 Équivalence de jauges

Nous nous intéressons dans cette partie, à l'interprétation physique de l'échange photons entre les deux atomes en utilisant la jauge de Coulomb et celle de Goëppert-Mayer. On montrera que les termes de couplage associés aux différents chemins quantiques possèdent des contributions indépendantes de la jauge utilisée et auxquelles on peut attribuer un sens physique à l'aide de la relation d'incertitude temps-énergie. On démontrera aussi que les termes restants, dépendants de la jauge utilisée, se compensent lorsque l'on se place dans des conditions physiquement réalisables.

On reprend pour cela l'hamiltonien précédant (3.16) :

$$\hat{H} = \hat{H}_{atome} + \hat{H}_{champ} + \hat{H}_{inter} \quad (3.47)$$

avec

$$\hat{H}_{atomes} = \sum_{j=1}^2 \hbar\omega_0 |b_j\rangle \langle b_j| \quad (3.48a)$$

$$\hat{H}_{champ} = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar\omega_k \hat{a}_{k_z}^\dagger \hat{a}_{k_z} dk_z. \quad (3.48b)$$

Les hamiltoniens des atomes et du champ ne dépendent pas de la jauge utilisée contrairement à l'hamiltonien d'interaction. Ce dernier s'écrit alors :

$$\hat{H}_{inter} = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hbar g_k \left( \tilde{i} \hat{a}_{k_z}^\dagger e^{-ik_z z_j} + \tilde{i}^* \hat{a}_{k_z} e^{ik_z z_j} \right) (\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j^\dagger) \quad (3.49)$$

où  $\tilde{i}$  est un paramètre dépendant de la jauge utilisée. Pour la jauge de Coulomb, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= 1 \\ g_k &= g_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_k}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

et pour celle de Goëppert-Mayer :

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= -i \\ g_k &= g_0 \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_0}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

La fonction d'onde du système est donnée par la relation (3.17) :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{k_z}(t) e^{-i\omega_k t} |a_1, a_2, 1_{k_z}\rangle dk_z \\ &+ \sum_{j=1}^2 \beta_j(t) e^{-i\omega_0 t} |a_{j' \neq j}, b_j, 0\rangle \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{k_z}(t) e^{-i(2\omega_0 + \omega_k)t} |b_1, b_2, 1_{k_z}\rangle dk_z \\ &+ \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \eta_{j, k_z, k'_z}(t) e^{-i(\omega_k + \omega_{k'} + \omega_0)t} |a_{j' \neq j}, b_j, 1_{k_z}, 1_{k'_z}\rangle. \end{aligned} \quad (3.52)$$

On considère cette fois qu'un des deux atomes est initialement dans l'état excité tandis que le deuxième est dans son état fondamental. Il n'y a initialement aucun photon dans le champ. De la même façon que dans la partie 3.3.2, on obtient l'équation fondamentale des amplitudes des états excités :

$$\partial_t \beta_j(t) = -\Gamma \beta_j(t) - \beta_{j' \neq j}(t) \int_{-\infty}^t \bar{M}(t-t') dt'. \quad (3.53)$$

Le premier terme correspond à la relaxation de l'atome tandis que le second représente le couplage entre les deux atomes. Il n'y a, cette fois, pas de terme

source, étant donné que le champ ne contient initialement aucun photon.  $\bar{M}(t-t')$  est une fonction mémoire qui est la somme de quatre termes  $\bar{M} = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_i$  :

$$\bar{M}_1(t-t') = \int_0^\infty g_\omega^2 e^{i\omega l/c} e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} dt' \quad (3.54a)$$

$$\bar{M}_2(t-t') = \int_0^\infty g_\omega^2 e^{i\omega l/c} e^{-i(\omega_0 + \omega_k)(t-t')} dt' \quad (3.54b)$$

$$\bar{M}_3(t-t') = \int_0^\infty g_\omega^2 e^{-i\omega l/c} e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} dt' \quad (3.54c)$$

$$\bar{M}_4(t-t') = \int_0^\infty g_\omega^2 e^{-i\omega l/c} e^{-i(\omega_0 + \omega_k)(t-t')} dt' \quad (3.54d)$$

avec  $g_\omega = g_k/\sqrt{c}$ . On a :

$$M = \int_{-\infty}^t \bar{M}(t-t') dt' = \Gamma e^{i\omega_0 l/c} \quad (3.55)$$

et on obtient :

$$\partial_t \beta_j(t) = -\Gamma \beta_j(t) - \Gamma e^{i\omega_0 l/c} \beta_{j' \neq j}(t). \quad (3.56)$$

Le terme de couplage entre les deux atomes est indépendant de la jauge utilisée. Cependant, chacune des contributions  $M_i = \int_{-\infty}^t \bar{M}_i dt'$  correspondant à un chemin quantique particulier, dépend de la jauge utilisée et diverge même pour celle de Coulomb. Ces contributions sont données par :

$$M_1 = \pi g_\omega^2(\omega_0) e^{i\omega_0 l/c} + i \text{Pv} \int_0^\infty g_\omega^2(\omega) \frac{e^{i\omega l/c}}{\omega_0 - \omega} d\omega \quad (3.57a)$$

$$M_2 = -i \int_0^\infty g_\omega^2(\omega) \frac{e^{i\omega l/c}}{\omega_0 + \omega} d\omega \quad (3.57b)$$

$$M_3 = \pi g_\omega^2(\omega_0) e^{-i\omega_0 l/c} + i \text{Pv} \int_0^\infty g_\omega^2(\omega) \frac{e^{-i\omega l/c}}{\omega_0 - \omega} d\omega \quad (3.57c)$$

$$M_4 = -i \int_0^\infty g_\omega^2(\omega) \frac{e^{-i\omega l/c}}{\omega_0 + \omega} d\omega. \quad (3.57d)$$

On peut évaluer les intégrales apparaissant dans (3.57) :

$$i \text{Pv} \int_0^\infty g_\omega^2(\omega) \frac{e^{\pm i\omega l/c}}{\omega_0 - \omega} d\omega = g_\omega^2(\omega_0) \left[ \pm e^{\pm i\omega_0 l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2} \pm i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) - G_\pm \right] \quad (3.58a)$$

$$-i \int_0^\infty g_\omega^2(\omega) \frac{e^{\pm i\omega l/c}}{\omega_0 + \omega} d\omega = g_\omega^2(\omega_0) \left[ \pm e^{\mp i\omega_0 l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) - \frac{\pi}{2} \pm i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) + G_\pm \right]. \quad (3.58b)$$

Ci et Si sont les fonctions cosinus et sinus intégrales (définitions (3.24)).  $G_\pm$  est une constante dépendante de la jauge utilisée avec :

$$G_\pm = \begin{cases} \mp c/l & \text{jauge de Goëppert-Mayer} \\ \pm \frac{\pi}{2} + i \text{Ci}(\epsilon \rightarrow 0) & \text{jauge de Coulomb.} \end{cases} \quad (3.59)$$

Dans la jauge de Coulomb, ces intégrales divergent à cause du comportement infra-rouge ( $g_\omega \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ ). Les différents éléments de couplage peuvent être réécrits à l'aide des relations (3.58) et (3.57) :

$$M_1 = \pi g_\omega^2(\omega_0) e^{i\omega_0 l/c} + g_\omega^2(\omega_0) \left[ e^{i\omega l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2} + i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) - G_+ \right] \quad (3.60a)$$

$$M_2 = g_\omega^2(\omega_0) \left[ e^{-i\omega l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) - \frac{\pi}{2} - i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) + G_+ \right] \quad (3.60b)$$

$$M_3 = \pi g_\omega^2(\omega_0) e^{-i\omega_0 l/c} + g_\omega^2(\omega_0) \left[ -e^{-i\omega l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) + \frac{\pi}{2} - i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) - G_- \right] \quad (3.60c)$$

$$M_4 = g_\omega^2(\omega_0) \left[ -e^{i\omega l/c} \left( \text{Si}(\omega_0 l/c) - \frac{\pi}{2} + i \text{Ci}(\omega_0 l/c) \right) + G_- \right]. \quad (3.60d)$$

Chaque terme de couplage  $M_i$  est la somme d'un terme ne dépendant pas de la jauge utilisée et d'une constante qui, elle, en dépend. Cependant, une interprétation est possible, en se basant sur le fait que les parties indépendantes de la jauge sont identiques à celles prises pour les termes de couplage, si  $g_\omega(\omega)$  était constant :

$$(M_i)_{G_\pm=0} = (M_i)_{g_\omega(\omega)=g_\omega(\omega_0)}; \quad i = 1, 3 \quad (3.61a)$$

$$(M_i)_{G_\pm=0} = (M_i)_{g_\omega(\omega)=g_\omega(-\omega_0)} = -(M_i)_{g_\omega(\omega)=g_\omega(\omega_0)}; \quad i = 2, 4. \quad (3.61b)$$

Pour les contributions RWA ( $M_1$  et  $M_3$ ) les termes de couplages indépendants de la jauge sont obtenus en prenant le paramètre de couplage constant pour toutes les fréquences et égal à celui associé à la fréquence centrale  $\omega_0$ . Pour les contributions hors-RWA ( $M_2$  et  $M_4$ ) la même égalité est valable au signe moins près.

Certaines situations concrètes peuvent alors être expliquées à partir de cette propriété. Lorsque  $\omega_0 l/c \gg 1$  (soit  $l \gg \lambda_0$ ), les contributions hors-RWA disparaissent et donc  $(M_i)_{G_\pm=0} = (M_i)_{g_\omega(\omega)=g_\omega(-\omega_0)} = 0$  ( $i = 2, 4$ ). Pour les contributions RWA, on a :

$$(M_3)_{G_\pm=0} = (M_3)_{g_\omega(\omega)=g_\omega(\omega_0)} = 0$$

$$(M_1)_{G_\pm=0} = (M_1)_{g_\omega(\omega)=g_\omega(\omega_0)} = \Gamma e^{i\omega_0 l/c}.$$

Seul l'échange de photons, représenté sur la figure 3.5 (c), où un photon est émis directement vers son voisin, subsiste. Ce comportement peut être compris grâce à la relation d'incertitude temps-énergie. En effet, un photon n'existe que pendant une durée  $|\omega - \omega_0|^{-1}$  (processus RWA associés à  $M_1$  et  $M_3$ ) ou  $|\omega + \omega_0|^{-1}$  (processus hors-RWA associés à  $M_2$  et  $M_4$ ). Mis à part les photons résonnants ( $\omega = \omega_0$ ) cette durée de vie est limitée dans le temps. Tous les autres photons ne peuvent alors se propager que sur une distance de l'ordre de  $c|\omega - \omega_0|^{-1}$  (photons RWA) ou  $c|\omega + \omega_0|^{-1}$  (photons hors-RWA). Étant donné que l'on a  $|\omega + \omega_0|^{-1} \leq \omega_0^{-1}$ , on s'attend à



ce que les photons hors-RWA ne peuvent être échangés si la distance inter-atomique  $l$  est plus grande que  $\lambda_0 = c/\omega_0$  (i.e  $(M_i)_{G_{\pm}=0} = (M_i)_{g_{\omega}(\omega)=g_{\omega}(-\omega_0)} = 0$  ( $i = 2, 4$ )) et que seulement les photons RWA proches de la résonance,  $|\omega - \omega_0|^{-1} < l/c$  sont impliqués dans l'interaction. Dans ce dernier cas, les photons proches de la résonance apportent une contribution opposée à celle des photons non-résonnants. En effet, dans (3.60c), si l'on ne tient pas compte de  $G_-$ , le premier terme est annulé par le second. On a donc  $(M_3)_{G_{\pm}=0} = (M_3)_{g_{\omega}(\omega)=g_{\omega}(\omega_0)} = 0$ .

Ce résultat est en accord avec ce que l'on peut déduire de la figure 3.5b où l'on voit que le photon émis par le processus  $M_3$  s'éloigne du second atome. On s'attend alors à ce que la contribution de ce photon soit nulle si la distance entre les atomes est supérieure à  $\lambda$  (extension vers l'arrière du champ électrique associé à ce photon). Pour obtenir une contribution significative, on doit avoir  $c|\omega_0 - \omega|^{-1} > l$  et donc  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$  lorsque  $\omega_0 l/c \gg 1$ . Les fréquences participant à l'interaction sont alors telles que  $\omega \approx \omega_0$  et les photons impliqués ont une extension spatiale de l'ordre de  $\lambda \approx \lambda_0 \ll l$ . Ces photons ne peuvent pas alors atteindre le second atome, la contribution de  $M_3$  est donc nulle.

Lorsque la dépendance en fréquence du terme de couplage  $g_{\omega}(\omega)$  est prise en compte, l'interprétation à partir de la relation d'incertitude temps-énergie n'est plus valable. En effet, le temps de vie du photon ne représente alors plus qu'une valeur moyenne, et le taux d'échange entre les atomes ne dépend plus seulement de ce temps de vie, mais aussi de la valeur du couplage  $g_{\omega}$ . Ce dernier paramètre peut atteindre de fortes valeurs et même diverger lorsque  $\omega \rightarrow 0$  (jauge de Coulomb) ou  $\omega \rightarrow \infty$  (jauge de Goëppert-Mayer). Cela conduit à l'apparition des constantes  $G_{\pm}$  qui présentent une partie divergente dans le cas de la jauge de Coulomb. Cependant, puisque ces termes dépendant de la jauge s'annulent entre eux lorsque l'on prend la somme des quatre contributions, nous pouvons considérer que l'interprétation en terme de la relation d'incertitude temps-énergie est valable dans un sens effectif.

Un autre résultat intéressant peut être obtenu à condition de regrouper différemment les contributions  $M_i$ . En effet, pour  $i = 1, 2$  les termes dépendant de la jauge sont opposés (ainsi que pour  $i = 3, 4$ ). La quantité  $(M_1 + M_2)$  est donc indépendante de la jauge utilisée et correspond à une situation réalisable. En effet si on rajoute une éventuelle diode optique dans le guide qui ne permet que la propagation des photons vers l'arrière ( $k_z < 0$ ), le couplage se réduit à  $(M_1 + M_2)$  et est nécessairement indépendant de la jauge. De plus, en utilisant les équations (3.60a) et (3.60b), nous obtenons :

$$(M_1 + M_2) = g_{\omega}^2(\omega_0)[\cos(\omega_0 l/c)(2 \text{Si}(\omega_0 l/c) + \pi) + i \sin(\omega_0 l/c)(2\pi + \text{Ci}(\omega_0 l/c))]. \quad (3.62)$$

Lorsque  $\omega_0 l/c \gg 1$ , on a  $\text{Si}(\omega_0 l/c) \approx \pi/2$  et  $\text{Ci}(\omega_0 l/c) \approx 0$ . On obtient finalement  $(M_1 + M_2) = \Gamma e^{i\omega_0 l/c}$  qui est exactement la même valeur que dans la situation où les deux directions du guide sont possibles.

## 3.4 Conclusion

Nous avons étudié dans cette partie, la diffusion d'une impulsion multimodes contenant un photon unique par un ou deux atomes confinés dans un guide d'onde unidimensionnel. Afin de traiter correctement les effets dus aux photons virtuels, l'approximation RWA n'a pas été réalisée.

Nous avons, dans un premier temps, considéré la situation où un seul atome interagit avec le photon incident. Nous avons alors démontré un important théorème régissant le profil temporel de l'impulsion transmise. Le champ transmis est déformé par l'interaction de sorte que l'aire algébrique de son amplitude soit strictement nulle. Ce théorème est valable quel que soit le régime de couplage et a pour corollaire le fait que la fréquence résonnante de l'impulsion incidente est systématiquement réfléchiée. Nous avons aussi montré que dans le cas d'un régime de couplage fort, l'intensité du paquet d'onde transmis diminue drastiquement (mais son aire est toujours nulle) et l'impulsion est totalement réfléchiée sans déformation, exception faite du changement de signe. On retrouve ici un comportement connu de miroir atomique [53, 54].

Dans un second temps, nous avons étudié la situation où deux atomes sont contenus dans le guide d'onde. Nous avons montré que les champs rayonnés par le système sont directement reliés aux états super- et sub-radiants retardés de Dicke. Dans ce cas, le traitement correct des photons virtuels est crucial. En effet, l'échange de photons virtuels entre les atomes conduit à une modification des niveaux d'énergies des états retardés de Dicke et, de ce fait, à une déformation des spectres rayonnés. L'échange de photons réels, quant à lui, modifie le taux de relaxation de ces états. Nous avons montré que le théorème de l'aire contraint toujours la déformation du champ transmis.



# Chapitre 4

## Diffusion d'une impulsion multimodes non-résonnante par un atome. État de flux

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>85</b>
<b>4.2</b>	<b>Modèle théorique</b>	<b>86</b>
4.2.1	Hamiltonien	86
4.2.2	États de flux	88
4.2.3	Base adiabatique	91
4.2.4	Équations d'évolutions	93
4.2.5	Conditions initiales	95
<b>4.3</b>	<b>Situation à deux modes</b>	<b>96</b>
4.3.1	Construction des états de flux	96
4.3.2	Termes de couplage	97
4.3.3	Conditions initiales	97
<b>4.4</b>	<b>Modèle semi-classique</b>	<b>99</b>
<b>4.5</b>	<b>Discussion</b>	<b>100</b>
4.5.1	Cas semi-classique	100
4.5.2	Limite semi-classique	100
4.5.3	Influence du nombre de photon à $\chi$ fixé	101
4.5.4	Influence du nombre de photon à $g_0$ fixé	102
4.5.5	Influence des couplages inter- et intra-bandes	103
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>111</b>

---



## 4.1 Introduction

Les configurations étudiées dans les chapitres précédents ont révélé l'intérêt d'un traitement tout quantique du champ et de l'atome pour étudier leur interaction. Nous nous sommes jusqu'à présent limités à un champ ne contenant qu'un seul mode quantifié (chapitre 2), ou plusieurs modes mais un seul photon (chapitre 3) et nous avons vu que ces situations étaient déjà riches en effets remarquables. La question de l'interaction avec des champs non-classiques multimodes se pose alors. Un grand nombre d'études sur les champs multimodes a été réalisé dans le cadre de l'information quantique [85–88] mais peu d'entre elles ont concerné l'interaction avec des systèmes atomiques en régime arbitrairement intense. Cela est dû à la complexité des calculs dans ces configurations.

Une des premières études de l'interaction entre une impulsion multimodes et un atome à deux niveaux a été réalisée par Seke [89] dans le cas où l'impulsion a une bande passante très étroite. L'interaction avec un champ non-classique a été d'abord étudiée avec des états comprimés à deux modes. Gou [90], Joshi *et al* [91] puis Abdel-Hafez [92] ont étudié l'effet de ces états de champs comprimés sur les oscillations de Rabi. Par la suite, Blow *et al* [93] ont développé une méthode basée sur un traitement continu des modes du champ électromagnétique en une dimension, en utilisant le vecteur de Poynting plutôt que l'énergie du champ. Des méthodes à base de transformations unitaires de l'hamiltonien, permettant de déterminer les états atome plus champ dans le cas multimodes, ont été proposées par Lo [94] et Li [95]. Treps *et al* [96] ont montré, à l'aide d'une approche multimodes, que le bruit induit par la nature quantique du champ dans un signal de photodétection peut être réduit en utilisant des états comprimés. La probabilité d'exciter un atome dans l'espace en trois dimensions par une impulsion multimodes contenant un seul photon a été étudiée par Wang [97] en utilisant une équation d'Heisenberg-Langevin. La diffusion d'une impulsion de quelques photons par un atome dans un guide d'onde a été étudiée par Domokos [30]. Cette dernière étude a permis de mettre en avant le caractère fortement non-linéaire de cette interaction.

Dans ce chapitre, nous allons développer une méthode permettant d'étudier l'interaction entre un champ quantique multimodes et un système atomique à deux niveaux placé dans un guide d'onde.

Cette méthode permet de se concentrer sur les aspects temporels de l'interaction. Elle permet en particulier de suivre les modifications de l'enveloppe temporelle d'une impulsion incidente, induites par l'interaction. Cette méthode s'appuie sur la définition d'états de flux du champ électromagnétique à partir du vecteur de Poynting exprimé en seconde quantification. Ces états permettent de définir des états adiabatiques globaux, similaires à ceux utilisés dans les modèles semi-classiques.

Afin d'illustrer cette méthode, celle-ci sera appliquée dans une situation où le champ est composé de deux modes. Nous mettrons tout d'abord en évidence la convergence de ce modèle vers la situation semi-classique en utilisant des états cohérents à grand nombre de photons et en comparant directement les résultats avec un modèle semi-classique. Nous utiliserons ensuite un champ quantique

contenant seulement quelques photons, afin de déterminer la dynamique de ces nouveaux états adiabatiques.

## 4.2 Modèle théorique

### 4.2.1 Hamiltonien

Le système étudié est composé d'un atome à deux niveaux et d'un champ multimodes. L'atome et le champ sont contenus dans un guide d'onde dont la section transverse est inférieure à  $\lambda_0^2$  où  $\lambda_0$  est la transition entre les deux niveaux de l'atome. De cette façon, le système est réduit à une seule dimension et le champ est composé d'un continuum de modes confinés dans l'axe du guide, noté  $z$ . L'atome ne peut alors rayonner que suivant la direction  $\pm z$  et le champ reste uniforme au cours de sa propagation le long de cet axe.

Par simplicité, notre méthode s'appuie sur une discrétisation des modes du champ électromagnétique. La limite continue peut être obtenue en faisant tendre l'écart entre modes vers zéro,  $\delta \rightarrow 0$ , le nombre de mode vers l'infini,  $N_m \rightarrow \infty$ , tout en maintenant le produit  $\delta N_m$  constant.

L'interaction entre un atome unique à deux niveaux et un champ monomode est décrite par le modèle de Jaynes-Cummings. L'extension de ce modèle à  $N$  modes est immédiate et conduit à l'hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^\dagger\sigma + \sum_{\substack{l=-N_m \\ l \neq 0}}^{N_m} \hbar\omega_l\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \sum_{\substack{l=-N_m \\ l \neq 0}}^{N_m} \hbar g_l(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger). \quad (4.1)$$

Cet hamiltonien est composé de trois termes représentant respectivement, l'atome, le champ et l'interaction.  $\sigma$  ( $\sigma^\dagger$ ) est l'opérateur de désexcitation (d'excitation) de l'atome,  $a_l$  ( $a_l^\dagger$ ), l'opérateur d'annihilation (de création) d'un photon dans le mode  $l$ ,  $\omega_l$  la fréquence centrale du champ et  $g_l$  le couplage entre l'atome et le champ dépendant de la fréquence  $\omega_l$ . Les modes avec  $l > 0$  ( $l < 0$ ) correspondent à une propagation vers l'avant (l'arrière).

Le terme d'interaction peut être simplifié à l'aide de l'approximation de l'onde tournante. Cette approximation permet de négliger les termes  $\hat{\sigma}\hat{a}_l$  et  $\hat{\sigma}^\dagger\hat{a}_l^\dagger$ . En effet, ces termes oscillent à des fréquences  $\omega_l + \omega_0 \gg \omega_l - \omega_0$ . Ces oscillations sont alors moyennées sur le temps caractéristique  $\omega_0^{-1}$ , ce qui permet de négliger les termes associés. Le couplage  $g_l$  peut alors être considéré comme constant,  $g_l \simeq g_0$ . Nous avons alors :

$$\sum_{\substack{l=-N_m \\ l \neq 0}}^{N_m} \hbar g_l(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger) \stackrel{\text{RWA}}{\simeq} \sum_{\substack{l=-N_m \\ l \neq 0}}^{N_m} \hbar g_0(\hat{a}_l\hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}_l^\dagger\hat{\sigma}).$$

La comparaison de cet hamiltonien avec celui du cas semi-classique peut être directement effectuée à condition de passer de la représentation de Schrödinger à celle d'interaction. Pour cela, l'hamiltonien doit être réécrit comme une somme d'un premier hamiltonien,  $\hat{H}_0$ , contenant la description des systèmes séparés et

d'un deuxième,  $\hat{H}_{int}$ , contenant l'interaction.

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_l \hbar\omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \hbar\omega_L \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\hbar\Delta \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \sum_l \hbar g_0 (\hat{a}_l^\dagger \hat{\sigma} + \hat{a}_l \hat{\sigma}^\dagger)}_{\hat{H}_{int}} \quad (4.2)$$

où  $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ .

Le changement de représentations est alors effectué grâce à la transformation unitaire  $\hat{U}_0 = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$ . La fonction d'onde devient  $|\psi\rangle_I = \hat{U}_0^\dagger |\psi\rangle_S$  et les observables se transforment selon  $\hat{O}_I = \hat{U}_0^\dagger \hat{O}_S \hat{U}_0$ . Les indices  $I$  et  $S$  indiquent quelle représentation est utilisée. L'équation de Schrödinger devient :

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle_I}{dt} = H_{int}^{(I)} |\psi\rangle_I \quad (4.3)$$

avec l'hamiltonien en représentation interaction :

$$\hat{H}_{int}^{(I)} = \hbar\Delta \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar g_0 \sqrt{N_m} (\hat{b}^\dagger \hat{\sigma} + \hat{b} \hat{\sigma}^\dagger). \quad (4.4)$$

Où on a introduit dans (4.4) les opérateurs de création et annihilation réduits,  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$ , définis tel que :

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{N_m}} \sum_l \hat{a}_l e^{-i\Delta_l t} \\ \hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_m}} \sum_l \hat{a}_l^\dagger e^{i\Delta_l t} \end{cases} \quad (4.5)$$

avec  $\Delta_l = \omega_l - \omega_L$ .

L'opérateur  $\hat{b}$  peut être relié à l'opérateur du champ électrique  $\hat{E} = i\epsilon \sum_l \hat{a}_l e^{-i\omega_l t}$

$$\hat{b} = \frac{-i}{\epsilon\sqrt{N_m}} e^{i\omega_L t} \hat{E} \quad (4.6)$$

avec  $\epsilon = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 V}}$ .

L'hamiltonien (4.4) peut être utilisé pour obtenir l'équivalent semi-classique en effectuant la correspondance :

$$\hat{a}_l \rightarrow \alpha_l$$

où les  $\alpha_l$  sont les coordonnées normales du mode  $l$  du champ. Nous avons alors :

$$\hat{b} = \frac{2}{\sqrt{N_m}} \sum_l \alpha_l e^{-i\Delta_l t},$$

ce qui nous amène à l'hamiltonien semi-classique :

$$\hat{H}_{int}^{sc} = \hbar\Delta \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar g_0 (\xi(t) \hat{\sigma}^\dagger + \xi^*(t) \hat{\sigma}) \quad (4.7)$$

avec  $\xi(t) = \sum_l \alpha_l e^{-i\Delta_l t}$  et  $\xi + \xi^*$  le champ classique.



## 4.2.2 États de flux

### Construction des états de flux

L'hamiltonien du système construit, nous devons déterminer une base pertinente pour l'utiliser. Définissons l'opérateur flux  $\hat{F}$  :

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &= \frac{1}{N_m} \sum_l \sum_{l'} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l'} e^{i(\omega_l - \omega_{l'})t}.\end{aligned}$$

La mesure du flux électromagnétique classique se fait grâce au vecteur de Poynting  $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ . L'opérateur flux défini ci-dessus correspond à la version de ce vecteur en seconde quantification. En effet, pris dans l'ordre normal, nous avons (cf. démonstration B.5) :

$$: \hat{S} := 2c\epsilon_0^3 N_m \hat{b}^\dagger \hat{b} \propto \hat{F}. \quad (4.8)$$

Nous pouvons alors définir les états de flux, états propres de  $\hat{F}$  tel que :

$$\hat{F} |m\rangle = m |m\rangle \quad (4.9)$$

où  $m$  est le *quanta de flux*.

D'autre part, les opérateurs  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  respectent la relation de commutation habituelle des bosons :

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1. \quad (4.10)$$

Cette relation impose que le quanta de flux  $m$  est un entier positif (cf. annexe B.6) et définit l'action des opérateurs  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  sur l'état de flux :

$$\hat{b}^\dagger |m\rangle = (m+1) |m+1\rangle \quad (4.11a)$$

$$\hat{b} |m\rangle = m |m-1\rangle \text{ if } m > 1 \quad (4.11b)$$

$$\hat{b} |0\rangle = 0. \quad (4.11c)$$

On peut déterminer une relation de récurrence à partir des équations (4.11) pour construire l'état de flux  $|m\rangle$  :

$$|m\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle. \quad (4.12)$$

Le champ peut aussi être caractérisé par son nombre de photons via l'opérateur nombre  $\hat{N} = \sum_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$ . Les états propres de  $\hat{N}$  sont les états nombres, définis dans la base de Fock tel que :

$$\hat{N} \left( \bigotimes_l |n_l\rangle_l \right) = \sum_l n_l \left( \bigotimes_l |n_l\rangle_l \right) \quad (4.13)$$

où  $|n_l\rangle_l$  représente un état avec  $n_l$  photons dans le mode  $l$  et  $\bigotimes_l$  est le produit tensoriel sur l'ensemble des modes.

Ces deux opérateurs mesurent deux quantités différentes du champ, mais sont liés par la relation suivante :

$$\hat{F} = \hat{N} + \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l,l' \\ l \neq l'}} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l'} e^{i(\omega_l - \omega_{l'})t}. \quad (4.14)$$

De plus, ces deux opérateurs commutent :  $[\hat{N}, \hat{F}] = 0$  (cf annexe B.7). Il est alors possible de définir une base commune. Définissons  $|m, n, \{p\}\rangle$ , états propres de  $\hat{F}$  et  $\hat{N}$  tel que :

$$\begin{cases} \hat{F} |m, n, \{p\}\rangle = m |m, n, \{p\}\rangle \\ \hat{N} |m, n, \{p\}\rangle = n |m, n, \{p\}\rangle \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $m$  est le quanta de flux,  $n$  le nombre de photons et  $\{p\}$  un ensemble d'indices décrivant la dégénérescence de ces états.

Il est alors possible d'écrire une relation de récurrence pour ces états, similaire à (4.12) :

$$|m, n, \{p\}\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0, n - m, \{p\}\rangle. \quad (4.16)$$

L'état fondamental ne contient que  $n - m$  photons et non  $n$ , car chaque application de  $\hat{b}^\dagger$  augmente à la fois le nombre de photon et celui de quanta de flux de un.

La relation (4.16) implique que l'application de  $\hat{b}^\dagger$  ne modifie pas la dégénérescence  $\{p\}$ . Cette propriété est due au fait que l'application des opérateurs  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  sur les états  $|m, n, \{p\}\rangle$  préserve l'orthogonalité entre les différents  $\{p\}$  possibles. Cette propriété est démontrée en annexe B.8.

Finalement, la base de projection utile est réduite à l'ensemble des états  $|0, n, \{p\}\rangle$ , où les différents  $n$  à prendre en compte sont déterminés par les conditions initiales.

### État de flux nul

Étant donné que le problème de la construction des états de flux est réduit à la détermination des états de flux fondamentaux, avec  $m = 0$ , il convient de leur porter une attention particulière. Ces états sont définis par la relation suivante :

$$\hat{b} |0, n, \{p\}\rangle = 0. \quad (4.17)$$

Ces états correspondent à une situation où le flux est nul mais peuvent être différents de l'état du vide de photon. L'état de vide de photon ne signifie pas  $m = 0$  mais revient à mettre tous les  $n_l$  à zéro dans la relation (4.13).

Afin d'illustrer cette différence, prenons la situation d'un champ composé de deux modes et ne contenant qu'un seul photon. La fonction d'onde de ce système s'écrit :  $|\phi\rangle = C_1 |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + C_2 |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux nombres

complexes tel que  $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ . On a :

$$\begin{aligned} b|\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{-i\Delta_1 t} + a_2 e^{-i\Delta_2 t})(C_1 |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + C_2 |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 e^{-i\Delta_1 t} + C_2 e^{-i\Delta_2 t}) |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nous obtenons donc une solution,  $C_1 = -C_2 e^{i(\Delta_1 - \Delta_2)t}$ , où le flux est bien nul mais le nombre de photon est lui différent de zéro. Cette opération est réalisable quel que soit le nombre de photons. L'état fondamental du flux peut alors être composé d'un grand nombre de photons comme d'aucun.

### Dégénérescence des états de flux

L'exemple précédent a la particularité de ne pas être dégénéré, il y a une unique façon de relier  $C_1$  et  $C_2$ . Cette particularité est due au fait que le champ ne contient que deux modes. On peut généraliser la fonction d'onde précédente dans le cas d'un champ à  $N_m$  modes. Par souci de clarté mais sans perte de généralité, on se limite au cas où le champ ne contient qu'un seul photon :

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{N_m} C_i |0\rangle_1 \cdots |1\rangle_i \cdots |0\rangle_{N_m}$$

où on a toujours  $\sum_i |C_i|^2 = 1$  et  $|0\rangle_1 \cdots |1\rangle_i \cdots |0\rangle_{N_m}$  correspond à un état avec un photon dans le mode  $i$  et zéro dans tous les autres. Dans ces conditions, la relation (4.17) ne permet plus d'obtenir une relation unique entre les coefficients  $C_i$ .

Dans le cas général, si l'on note  $n$  le nombre de photons,  $N_m$  le nombre de modes et  $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$  le coefficient binomial, il existe  $\binom{n+N_m-1}{n}$  coefficients  $C_i$  à déterminer. Chaque coefficient  $C_i$  décrit une manière différente de répartir les  $n$  photons dans les  $N_m$  modes. Or, la relation (4.17) ne fournit que  $\binom{n+N_m-2}{n-1}$  équations indépendantes.

Le nombre de dégénérescence de l'état de flux nul est alors donné par :

$$\binom{n+N_m-1}{n} - \binom{n+N_m-2}{n-1} = \binom{n+N_m-2}{n}.$$

Cette dégénérescence correspond aux différentes façons d'arranger les  $n$  photons dans les  $N_m$  modes, c'est-à-dire aux différents champs possibles, respectant la condition (4.17).

Dans le cas où le champ est composé de deux modes, on retrouve bien  $\binom{n+N_m-2}{n} = \binom{n}{n} = 1$ , l'état n'est pas dégénéré.

En prenant en compte cette dégénérescence, le nombre de possibilités pour l'état de flux nul augmente considérablement avec le nombre de modes et de photons.

Cependant, étant donné que les opérateurs  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  ne permettent pas de passer d'un état dégénéré à un autre, seul les états dégénérés initialement occupés sont à considérer. Il suffit ainsi de choisir les conditions initiales afin être dans un état dégénéré donné pour restreindre la base à considérer.

### 4.2.3 Base adiabatique

Dans un modèle semi-classique, la base adiabatique est celle dans laquelle l'hamiltonien d'interaction (4.4) est diagonal. Les états propres et énergies propres du système évoluent alors au cours de l'interaction. Cette représentation permet de distinguer facilement les couplages adiabatiques et non-adiabatiques difficilement identifiables dans la base sans couplage ( $|\text{atome}\rangle \otimes |\text{champ}\rangle$ ).

Nous nous proposons ici d'établir une base adiabatique reprenant cette définition, mais adaptée au traitement du champ en seconde quantification.

Pour cela, nous utilisons une superposition d'états génériques :

$$|\phi\rangle = |a\rangle \otimes |u\rangle + |b\rangle \otimes |v\rangle \quad (4.19)$$

où  $|u\rangle$  et  $|v\rangle$  sont des états du champ.

Nous introduisons ici l'opérateur nombre d'excitation  $\hat{N}_{exc} = \hat{N} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ . Le nombre d'excitation correspond au nombre de photon si l'atome est dans l'état fondamental et au nombre de photon plus un, si l'atome est dans l'état excité. Ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{N}_{exc} |g\rangle &= 0 \\ \hat{N}_{exc} |b\rangle &= 1 |b\rangle \\ \hat{N}_{exc} |m, n, \{p\}\rangle &= n |m, n, \{p\}\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De plus, nous pouvons montrer que l'opérateur nombre d'excitation commute avec l'hamiltonien d'interaction donné en (4.4) (cf. annexe B.1) :

$$[\hat{N}_{exc}, H_{int}] = 0. \quad (4.21)$$

L'équation (4.21) signifie que le nombre d'excitation est conservé au cours de l'interaction. On en déduit que si l'état  $|u\rangle$  dans (4.19) contient  $n$  photons, l'état  $|v\rangle$  doit en contenir  $n - 1$ . Ainsi, les états  $|a\rangle \otimes |u\rangle$  et  $|b\rangle \otimes |v\rangle$  contiennent tous les deux  $n$  quanta d'excitation.

En résolvant l'équation de Schrödinger indépendante du temps,  $\hat{H}_{int} |\phi\rangle = E |\phi\rangle$ , nous pouvons obtenir l'action des opérateurs  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  sur les états du champ :

$$\begin{cases} \hat{b} |u\rangle = \frac{E - \hbar\Delta}{\hbar g_0} |v\rangle \\ \hat{b}^\dagger |v\rangle = \frac{E}{\hbar g_0} |u\rangle \end{cases} \quad (4.22)$$

et par suite, l'action de l'opérateur flux  $\hat{F} = \hat{b}\hat{b}^\dagger$  :

$$\begin{cases} \hat{F} |u\rangle = \frac{E(E - \hbar\Delta)}{\hbar g_0} |u\rangle \\ \hat{F} |v\rangle = \left( \frac{E(E - \hbar\Delta)}{\hbar g_0} - 1 \right) |v\rangle. \end{cases} \quad (4.23)$$

Les états  $|u\rangle$  et  $|v\rangle$  sont donc des états propres de l'opérateur flux  $\hat{F}$ , auquel on associe le quanta de flux  $m$  :

$$m = \frac{E(E - \hbar\Delta)}{\hbar g_0}. \quad (4.24)$$

L'état  $|u\rangle$  contient  $m$  quanta de flux, et l'état  $|v\rangle$ ,  $m - 1$ . Nous pouvons alors les identifier avec les états construits dans la section précédente :

$$\begin{aligned} |u\rangle &\propto |m, n, \{p\}\rangle \\ |v\rangle &\propto |m - 1, n - 1, \{p\}\rangle. \end{aligned} \quad (4.25)$$

À partir de (4.24), nous obtenons l'expression de l'énergie des états adiabatiques :

$$E_{\pm, m} = \frac{\hbar}{2} (\Delta \pm \Omega_m) \quad (4.26)$$

avec

$$\Omega_m = \sqrt{\Delta^2 + \kappa_m^2} \quad (4.27a)$$

$$\kappa_m = 2g_0\sqrt{m} \quad (4.27b)$$

où  $\kappa_m$  et  $\Omega_m$  sont les fréquences simple et généralisée de Rabi.

Grâce à l'identification (4.25), nous pouvons exprimer les états adiabatiques sous la forme :

$$|\pm, m, n, \{p\}\rangle = \alpha_{\pm} |g\rangle \otimes |m, n, \{p\}\rangle + \beta_{\pm} |e\rangle \otimes |m - 1, n - 1, \{p\}\rangle. \quad (4.28)$$

En utilisant de nouveau l'équation de Schrödinger indépendante du temps,  $\hat{H}_{int} |\pm, m, n, \{p\}\rangle = E_{\pm, m} |\pm, m, n, \{p\}\rangle$ , nous déterminons les coefficients  $\alpha_{\pm}$  et  $\beta_{\pm}$ , à partir desquels on obtient l'expression des états adiabatiques (démonstration en annexe B.2) :

$$\begin{cases} |+, m, n, \{p\}\rangle = \cos \theta_m |b\rangle |m - 1, n - 1, \{p\}\rangle + \sin \theta_m |a\rangle |m, n, \{p\}\rangle \\ |- , m, n, \{p\}\rangle = -\sin \theta_m |b\rangle |m - 1, n - 1, \{p\}\rangle + \cos \theta_m |a\rangle |m, n, \{p\}\rangle \end{cases} \quad (4.29)$$

avec

$$\theta_m = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \frac{2g_0\sqrt{m}}{\Delta} & \text{si } \Delta \neq 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } \Delta = 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

La base adiabatique correspond à une rotation de la base sans couplage d'un angle  $\theta_m$ . Ci dessous, quelques relations utiles :

$$\begin{aligned} \cos(2\theta_m) &= \frac{\Delta}{\Omega_m} & \sin(2\theta_m) &= \frac{\kappa_m}{\Omega_m} \\ \cos(\theta_m) &= \sqrt{\frac{\Omega_m + \Delta}{2\Omega_m}} & \sin(\theta_m) &= \sqrt{\frac{\Omega_m - \Delta}{2\Omega_m}}. \end{aligned}$$

La fonction d'onde du système s'écrit alors dans la base adiabatique :

$$|\psi\rangle = \sum_{m, n, \{p\}} \left( A_{+, m, n, \{p\}} |+, m, n, \{p\}\rangle + A_{-, m, n, \{p\}} |- , m, n, \{p\}\rangle \right) \quad (4.31)$$

avec  $\sum_{m, n, \{p\}} |A_{+, m, n, \{p\}}|^2 + |A_{-, m, n, \{p\}}|^2 = 1$ .

#### 4.2.4 Équations d'évolutions

Dans cette section, nous souhaitons suivre au cours du temps l'évolution des amplitudes de probabilités  $A_{\pm, m, n, \{p\}}$  définies dans la relation (4.31).

Nous avons vu dans la section 4.2.2 que la dégénérescence  $\{p\}$  peut être sélectionnée par les conditions initiales, et que seules les dégénérescences initialement occupées jouent un rôle au cours de l'interaction. Nous pouvons alors supposer sans perte de généralité qu'une seule dégénérescence est initialement sélectionnée, ce qui nous permet d'abandonner à partir de maintenant l'indice  $\{p\}$  dans les notations.

En insérant la fonction d'onde (4.31) dans l'équation (4.3), nous obtenons un système d'équations différentielles sur les amplitudes de probabilité.

$$\begin{aligned}
\partial_t A_{+, m, n} &= -i \frac{E_{+, m}}{\hbar} A_{+, m, n} - \sum_{m', n'} \langle +, m, n | \partial_t (|+, m', n'\rangle) A_{+, m', n'} \\
&\quad - \sum_{m', n'} \langle +, m, n | \partial_t (|-, m', n'\rangle) A_{-, m', n'} \\
\partial_t A_{-, m, n} &= -i \frac{E_{-, m}}{\hbar} A_{-, m, n} - \sum_{m', n'} \langle -, m, n | \partial_t (|+, m', n'\rangle) A_{+, m', n'} \\
&\quad - \sum_{m', n'} \langle -, m, n | \partial_t (|-, m', n'\rangle) A_{-, m', n'}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

#### Théorème adiabatique

Les éléments de couplage peuvent être réécrits à l'aide du théorème adiabatique (démonstration en annexe B.3) :

$$\langle \pm, m, n | \partial_t (|\pm, m', n'\rangle) = \frac{\langle \pm, m, n | \partial_t (\hat{H}_{int}) | \pm, m', n'\rangle}{E_{\pm, m'} - E_{\pm, m}}. \tag{4.33}$$

La relation précédente exprime les éléments de couplage en fonction des éléments de matrice de la dérivée de l'hamiltonien d'interaction. Or, on peut montrer que le nombre d'excitation commute avec la dérivée de l'hamiltonien d'interaction (cf. annexe B.4) :

$$[\hat{N}_{exc}, \partial_t (\hat{H}_{int})] = 0. \tag{4.34}$$

Cela signifie que seuls les couplages entre états ayant le même nombre d'excitation sont non-nuls. Dans le cas des états adiabatiques, ce nombre correspond au nombre de photons  $n$  :

$$\hat{N}_{exc} |\pm, m, n\rangle = n |\pm, m, n\rangle.$$

On obtient donc :

$$\langle \pm, m, n | \partial_t (|\pm, m', n'\rangle) = \langle \pm, m, n | \partial_t (|\pm, m', n\rangle) \delta_{n, n'}$$

où  $\delta_{n, n'}$  est le symbole de Kronecker.

Nous pouvons alors appliquer le théorème adiabatique pour réécrire les éléments de couplage :

$$\begin{aligned}
\langle +, m, n | \partial_t (|+, m', n\rangle) \rangle_{m' \neq m} &= \frac{g_0}{4(\Omega_{m'} - \Omega_m)} \left( \sqrt{\frac{(\Omega_{m'} + \Delta)(\Omega_m - \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m, n | \partial_t \hat{b}^\dagger | m' - 1, n + 1 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{(\Omega_m + \Delta)(\Omega_{m'} - \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m - 1, n + 1 | \partial_t \hat{b} | m', n \rangle \right) \\
\langle -, m, n | \partial_t (|-, m', n\rangle) \rangle_{m' \neq m} &= \frac{-g_0}{4(\Omega_{m'} - \Omega_m)} \left( \sqrt{\frac{(\Omega_m - \Delta)(\Omega_{m'} + \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m, n | \partial_t \hat{b}^\dagger | m' - 1, n + 1 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{(\Omega_{m'} - \Delta)(\Omega_m + \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m - 1, n + 1 | \partial_t \hat{b} | m', n \rangle \right) \\
\langle +, m, n | \partial_t (|-, m', n\rangle) \rangle &= \frac{-g_0}{4(\Omega_{m'} + \Omega_m)} \left( -\sqrt{\frac{(\Omega_m - \Delta)(\Omega_{m'} - \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m, n | \partial_t \hat{b}^\dagger | m' - 1, n + 1 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{(\Omega_{m'} + \Delta)(\Omega_m + \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m - 1, n + 1 | \partial_t \hat{b} | m', n \rangle \right) \\
\langle -, m, n | \partial_t (|+, m', n\rangle) \rangle &= \frac{g_0}{4(\Omega_{m'} + \Omega_m)} \left( \sqrt{\frac{(\Omega_m + \Delta)(\Omega_{m'} + \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m, n | \partial_t \hat{b}^\dagger | m' - 1, n + 1 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{(\Omega_{m'} - \Delta)(\Omega_m - \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m'}}} \langle m - 1, n + 1 | \partial_t \hat{b} | m', n \rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Les deux premiers termes de couplage ci-dessus doivent être traités séparément dans le cas  $m = m'$ . En utilisant la relation (4.16) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\langle m, n | \partial_t (|m, n\rangle) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle m, n | \partial_t ((\hat{b}^\dagger)^m |0, n - m\rangle) \\
&= m \langle 0, n - m | \hat{b} \partial_t (\hat{b}^\dagger) |0, n - m\rangle + \langle 0, n - m | \partial_t (|0, n - m\rangle) \rangle.
\end{aligned}$$

Dans cette expression le premier terme est nul car  $[\hat{b}, \partial_t \hat{b}^\dagger] = 0$  (cf. annexe B.9) et  $\hat{b} |0, n - m\rangle = 0$ . Nous obtenons finalement :

$$\langle m, n | \partial_t (|m, n\rangle) \rangle = \langle 0, n - m | \partial_t (|0, N - m\rangle) \rangle \tag{4.36}$$

et donc :

$$\langle +, m, n | \partial_t (|+, m, n\rangle) \rangle = \langle -, m, n | \partial_t (|-, m, n\rangle) \rangle = \langle 0, n - m | \partial_t (|0, n - m\rangle) \rangle. \tag{4.37}$$

### Réduction des éléments de couplage

Afin de déterminer les éléments de matrice de  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  intervenant dans (4.35), réécrivons les termes de couplage.

$$\langle m - 1, n - 1 | \partial_t \hat{b} | m', n \rangle = \sqrt{\binom{m-1}{m'}} \langle m - m' - 1, n - m' - 1 | \partial_t \hat{b} |0, n - m'\rangle.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \langle m - m' - 2, n - m' - 2 | [\hat{b}, \partial_t \hat{b}] | 0, n - m' \rangle &= 0 \quad \text{car } [\hat{b}, \partial_t \hat{b}] = 0 \\ &= \sqrt{m - m' - 1} \langle m - m' - 1, n - m' - 1 | \partial_t \hat{b} | 0, n - m' \rangle. \end{aligned}$$

La seule possibilité dans cette dernière expression pour que le dernier terme soit non-nul est d'avoir  $m' = m - 1$ . De la même manière,  $\langle m, n | \partial_t \hat{b}^\dagger | m' - 1, n - 1 \rangle$  ne peut être non-nul que si  $m' = m + 1$ . On obtient finalement :

$$\langle m - 1, n - 1 | \partial_t \hat{b} | m', n \rangle = \langle 0, n - m | \partial_t \hat{b} | 0, n - m + 1 \rangle \delta_{m', m-1} \quad (4.38a)$$

$$\langle m, n | \partial_t \hat{b}^\dagger | m' - 1, n - 1 \rangle = \langle 0, N - m | \partial_t \hat{b}^\dagger | 0, N - m - 1 \rangle \delta_{m', m+1}. \quad (4.38b)$$

Le problème est ici aussi réduit à la détermination des états fondamentaux de flux ( $m = 0$ ). Les équations d'évolution (4.32) peuvent être simplifiées :

$$\begin{aligned} \dot{A}_{+,m,n} &= f_1(m, \Delta) A_{+,m,n} + f_2^*(m+1) A_{+,m+1,n} - f_2(m) A_{+,m-1,n} \\ &\quad + f_3^*(m+1, \Delta) A_{-,m+1,N} - f_3(m, -\Delta) A_{-,m-1,N} \\ \dot{A}_{-,m,n} &= f_1(m, -\Delta) A_{-,m,n} - f_2^*(m+1) A_{-,m+1,n} + f_2(m) A_{-,m-1,n} \\ &\quad - f_3^*(m+1, -\Delta) A_{+,m+1,n} + f_3(m, \Delta) A_{+,m-1,n} \end{aligned} \quad (4.39)$$

où les coefficients  $f_i$  sont donnés par :

$$f_1(m, \Delta) = -\frac{i}{2} (\Omega_m + \Delta) - \langle 0, N - m | \partial_t (|0, N - m\rangle) \quad (4.40a)$$

$$f_2(m) = \frac{g_0}{4(\Omega_{m-1} - \Omega_m)} \sqrt{\frac{(\Omega_{m-1} - \Delta)(\Omega_m + \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m-1}}} \langle 0, N - m | \partial_t b | 0, N - m + 1 \rangle \quad (4.40b)$$

$$f_3(m, \Delta) = \frac{g_0}{4(\Omega_{m-1} + \Omega_m)} \sqrt{\frac{(\Omega_{m-1} - \Delta)(\Omega_m - \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m-1}}} \langle 0, N - m | \partial_t b | 0, N - m + 1 \rangle. \quad (4.40c)$$

La situation est ainsi grandement simplifiée grâce aux règles de sélection pour les couplages. En effet, chaque état est seulement couplé à quatre autres états. Ces couplages peuvent se distinguer en deux grandes catégories : les premiers, que nous appellerons *intra-bandes*, qui correspondent à des couplages entre différents états de flux, mais sur la même branche adiabatique (+ ou -). Les seconds, *inter-bandes*, qui permettent de sauter entre les branches adiabatiques. Ces deux catégories sont respectivement décrites par les coefficients  $f_2$  et  $f_3$ .

Un autre point important est que le nombre d'excitation est conservé au cours de l'évolution. Ainsi les branches adiabatiques ayant un nombre d'excitation différent évoluent séparément. Cet aspect est particulièrement important pour le traitement numérique qui sera effectué dans les parties suivantes.

### 4.2.5 Conditions initiales

Nous considérons la situation où l'atome est initialement dans l'état fondamental et le champ dans une superposition cohérente multimodes. Initialement,



l'atome et le champ sont deux systèmes séparés, la fonction d'onde peut alors s'écrire comme un produit tensoriel :  $|\psi_0\rangle = |a\rangle \otimes |\alpha\rangle$ . L'état du champ  $|\alpha\rangle$  correspond à une superposition multimode d'états cohérents  $|\alpha_l\rangle = e^{-\frac{|\alpha_l|^2}{2}} e^{\alpha_l \hat{a}_l^\dagger} |0\rangle_l$  tel que  $b|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ . Cette fonction d'onde peut aussi se décomposer selon l'expression (4.31) :

$$|\psi_0\rangle = \sum_{m,n,\{p\}} \left( A_{+,m,n,\{p\}}^0 |+, m, n, \{p\}\rangle + A_{-,m,n,\{p\}}^0 |-, m, n, \{p\}\rangle \right). \quad (4.41)$$

Nous pouvons choisir une dégénérescence  $\{p\}$  lors des conditions initiales. En effet, cette dégénérescence correspond à un choix de phase entre les différents états de Fock qui composent le champ cohérent conduisant à un flux nul (équation (4.18)). Les autres possibilités n'interviennent plus, et la somme  $\sum_{\{p\}}$  disparaît. En posant la condition  $\langle b|\psi_0\rangle = 0$  on obtient :

$$\begin{aligned} A_{+,m,n}^0 &= \sin(\theta'_m) P_{n,m} \\ A_{-,m,n}^0 &= \cos(\theta'_m) P_{n,m} \end{aligned}$$

où  $|P_{n,m}|^2$  est la population initiale dans l'état  $|g\rangle \otimes |m, n\rangle$ .

En utilisant la relation  $b|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , on obtient :

$$P_{n,m} = \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle 0, n - m | \alpha \rangle \quad (4.42)$$

De la même manière que pour les termes de couplage, le calcul des conditions initiales ne nécessite pas l'expression de l'ensemble des états de flux, mais seulement de l'état fondamental ne contenant aucun quanta de flux ( $m = 0$ ).

## 4.3 Situation à deux modes

Dans cette section, nous nous intéresserons à la situation particulière où le champ ne contient que deux modes. L'étude de cette situation est motivée par la possibilité offerte par le faible nombre de modes, de pouvoir traiter des champs contenant un grand nombre de photons. De cette manière, il sera possible de retrouver les résultats obtenus avec un modèle semi-classique éprouvé, ce qui représentera un test de validité de la méthode développée ci-dessus.

### 4.3.1 Construction des états de flux

Les états de flux sont construits par récurrence à partir de l'état de flux nul (équation (4.16)). Ce dernier est construit à partir de la relation (4.17). L'état ne contenant aucun quanta de flux et  $N$  photons peut se décomposer sur la base de Fock de la sorte :

$$|0, N\rangle = \sum_{n=0}^N B_n |N - n, n\rangle_{\mathcal{F}} \quad (4.43)$$

où  $|N - n, n\rangle_{\mathcal{F}} = |N - n\rangle \otimes |n\rangle$  représente un état contenant  $N - n$  photons dans le premier mode et  $n$  dans le second. À partir de la relation (4.17) et de la condition de normalisation  $\sum_{n=0}^N |B_n|^2 = 1$  nous obtenons :

$$B_n = (-1)^n 2^{-\frac{N}{2}} e^{-in\delta t} \sqrt{\binom{N}{n}} \quad (4.44)$$

où  $\delta = \Delta_1 - \Delta_2$  est le désaccord entre les deux modes.

Il est possible, à partir de ces états, de reconstruire n'importe quel état de flux  $|m, N\rangle$  en utilisant (4.16) :

$$|m, n\rangle = \sum_{r=0}^n D_r^{n,m} |n - r, r\rangle_{\mathcal{F}}$$

$$D_r^{n,m} = (-1)^r e^{-i(2r-m)\frac{\delta t}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} \binom{n}{m}^{\frac{1}{2}} \binom{n}{r}^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=\max(0, r-(n-m))}^{\min(r,m)} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{n-m}{r-k}.$$

### 4.3.2 Termes de couplage

Nous avons montré dans la section 4.2.4 que les termes de couplage ne dépendent que de l'état de flux fondamental, à travers  $\langle 0, N - m | \partial_t (|0, N - m\rangle)$  et des éléments de matrices  $\langle 0, N - m | \partial_t b | 0, N - m + 1\rangle$  et  $\langle 0, N - m | \partial_t b^\dagger | 0, N - m - 1\rangle$ . En utilisant la décomposition sur la base de Fock obtenue précédemment, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle 0, n - m | \partial_t (|0, n - m\rangle) &= 0 \\ \langle 0, n - m | \partial_t b | 0, n - m + 1\rangle &= -i\delta \sqrt{n + 1 - m} \\ \langle 0, n - m | \partial_t b^\dagger | 0, n - m - 1\rangle &= i\delta \sqrt{n - m}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

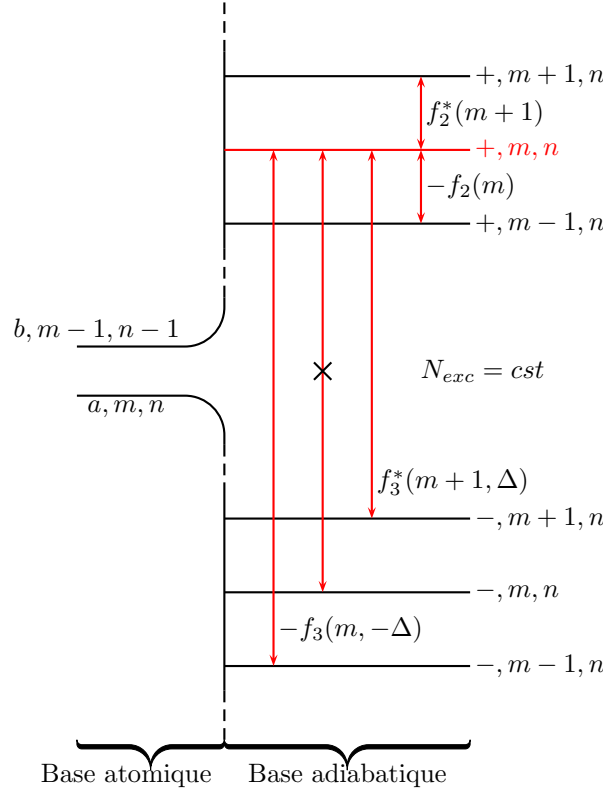
Ces couplages sont schématiquement représentés sur la figure 4.1. Les termes de couplage sont finalement donnés par :

$$\begin{aligned} f_1(m, \Delta) &= -\frac{i}{2}(\Omega_m + \Delta) \\ f_2(m) &= \frac{-i\kappa_{n+1-m}}{4(\Omega_{m-1} - \Omega_m)} \sqrt{\frac{(\Omega_{m-1} - \Delta)(\Omega_m + \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m-1}}} \\ f_3(m, \Delta) &= \frac{-i\kappa_{n+1-m}}{4(\Omega_{m-1} + \Omega_m)} \sqrt{\frac{(\Omega_{m-1} - \Delta)(\Omega_m - \Delta)}{\Omega_m \Omega_{m-1}}}. \end{aligned}$$

### 4.3.3 Conditions initiales

Nous avons vu dans la section 4.2.5 que les conditions initiales dépendent de la projection  $\langle 0, N - m | \alpha\rangle$ . Pour deux modes, on a :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}{2}} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}}{n_1! n_2!} |n_1, n_2\rangle_{\mathcal{F}}. \quad (4.46)$$

FIGURE 4.1 – Base nue et adiabatique — Couplage de l'état  $|+, m, n\rangle$ 

Nous obtenons alors, à l'instant initial  $t = 0$  :

$$\langle 0, n - m | \alpha \rangle (t = 0) = \frac{e^{-\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}{2}}}{\sqrt{(n - m)!}} 2^{-\frac{n-m}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)^{N-m}. \quad (4.47)$$

Ce terme doit en principe être calculé pour chaque  $n$  et  $m$  tel que  $0 < n < \infty$  et  $0 < m < n$ . Nous pouvons cependant nous limiter aux états effectivement occupés initialement et négliger les états ayant une occupation quasi-nulle. Étant donné que le couplage n'intervient pas entre branches ayant des niveaux d'excitation différents, les états initialement inoccupés le resteront au cours de l'interaction. La répartition de la population s'effectue selon une distribution de Poisson, centrée sur les états ayant un nombre d'excitation, et donc de photon,  $N_{exc} = n = |\alpha|^2$  avec une variation standard  $\sigma = |\alpha|$ .

## 4.4 Modèle semi-classique

Dans cette partie nous établirons le modèle semi-classique pour la situation à deux modes. La principale différence avec la section précédente est que le champ sera traité comme un champ classique. Nous montrerons, de plus, que le modèle quantique et le modèle semi-classique convergent lorsque on prend un champs cohérent avec  $\alpha \gg 1$ .

Dans le contexte semi-classique, le champ contient suffisamment de photons pour que l'interaction avec l'atome ne le modifie pas. Le système peut alors être décrit par la fonction d'onde générique :  $|\psi\rangle = C_a |a\rangle + C_b |b\rangle$  où  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  sont les états fondamental et excité de l'atome et  $|C_a|^2 + |C_b|^2 = 1$ . L'hamiltonien d'interaction (4.4) est modifié :

$$H_{int} = \hbar\Delta\sigma^\dagger\sigma + \hbar\frac{\kappa_{sc}(t)}{2}(\sigma + \sigma^\dagger). \quad (4.48)$$

Les états et énergies adiabatiques deviennent alors :

$$|+\rangle = \cos(\theta) |b\rangle + \sin(\theta) |e\rangle \quad (4.49a)$$

$$|-\rangle = -\sin(\theta) |b\rangle + \cos(\theta) |e\rangle \quad (4.49b)$$

$$E_\pm = \frac{\hbar}{2}(\Delta \pm \Omega_{sc}) \quad (4.49c)$$

avec

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \sqrt{\frac{\Omega_{sc} + \Delta}{2\Omega_{sc}}} \\ \sin(\theta) &= \sqrt{\frac{\Omega_{sc} - \Delta}{2\Omega_{sc}}} \\ \Omega_{sc} &= \sqrt{\Delta^2 + \kappa_{sc}^2} \\ \kappa_{sc} &= 4\chi \cos\left(\frac{\delta t}{2}\right) \\ \tan(2\theta) &= \frac{\kappa_{sc}}{\Delta}. \end{aligned}$$

La fonction d'onde générique du système, dans la base adiabatique, est donnée par :

$$|\psi\rangle = C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle \quad (4.50)$$

où  $C_+$  et  $C_-$  sont les amplitudes de probabilité de se trouver dans la branche adiabatique  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  respectivement, avec  $|C_+|^2 + |C_-|^2 = 1$ .

En utilisant l'équation de Schrödinger, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_t C_+ &= \frac{-i}{2}(\Delta + \Omega_{sc})C_+ + C_+ \langle + | \partial_t (|+\rangle) + C_- \langle + | \partial_t (|-\rangle) \\ \partial_t C_- &= \frac{-i}{2}(\Delta - \Omega_{sc})C_- + C_+ \langle - | \partial_t (|+\rangle) + C_- \langle - | \partial_t (|-\rangle). \end{aligned}$$

Or, à partir de (4.49), nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t(|+\rangle) &= \partial_t\theta|-\rangle \\ \partial_t(|-\rangle) &= -\partial_t\theta|+\rangle.\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement le système d'équations d'évolution dans la cas semi-classique :

$$\begin{aligned}\partial_t C_+ &= \frac{-i}{2}(\Delta + \Omega_{sc})C_+ - \partial_t(\theta)C_- \\ \partial_t C_- &= \frac{-i}{2}(\Delta + \Omega_{sc})C_- + \partial_t(\theta)C_+.\end{aligned}$$

L'intensité des couplages non-adiabatiques est donc donnée par  $\partial_t(\theta)$ .

## 4.5 Discussion

### 4.5.1 Cas semi-classique

Nous avons représenté sur la figure 4.2 le cas semi-classique, où l'atome est traité quantiquement, mais où le champ est classique. Le champ est composé de deux modes séparés de  $\delta = \omega_1 - \omega_2$ . La transition atomique est désaccordée avec la fréquence centrale  $\omega_L = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  de  $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ . Nous avons représenté sur la figure 4.2a l'intensité du champ au cours de l'interaction. Celle-ci n'est pas modifiée est reste en  $\cos(\delta t/2)^2$ . En effet, dans un modèle semi-classique, le champ contient un nombre suffisamment élevé de photons pour qu'il ne soit pas modifié par l'interaction avec l'atome.

La population dans l'état adiabatique  $|+\rangle$  est représentée sur la figure 4.2b. Nous observons ici une série de sauts non-adiabatiques chaque fois que l'intensité du champ passe par un minimum. Ces sauts correspondent au moment où le terme de couplage  $\partial_t\theta(t)$  est maximum. Ces transitions non-adiabatiques sont suffisamment importantes pour transférer une part importante de la population ( $\simeq 0.5$ ) de l'état  $|-\rangle$  vers l'état  $|+\rangle$ . Le comportement de la population dans la base sans couplage, la base atomique, est représenté sur la figure 4.2c. L'effet des sauts adiabatiques est nettement moins compréhensible dans cette base. Entre chaque saut, lorsque la population adiabatique est constante, l'atome subit des oscillations de Rabi dont l'amplitude dépend de la répartition sur les branches adiabatiques. Nous voyons ici l'intérêt de la base adiabatique pour comprendre le comportement de l'atome au cours de l'interaction avec le champ.

### 4.5.2 Limite semi-classique

Le modèle quantique développé dans la partie 4.2.1 doit permettre de retrouver les résultats du modèle semi-classique, dans le cas où le champ est dans un état cohérent avec un grand nombre de photons. Nous avons représenté cette situation sur la figure 4.3 où le champ est composé de deux champs cohérents sur

chaque mode avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = 30$ . Dans ces conditions, le champ total possède un nombre moyen de photons égal à 1800. Nous avons représenté sur cette figure, les cas quantique et semi-classique. Le terme de couplage semi-classique  $\chi$  est ajusté de sorte à avoir la même valeur que le terme de couplage quantique :  $\chi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{2}} g_0$ . Nous observons sur la figure 4.3a que les deux champs coïncident parfaitement. Le nombre de photons utilisés dans le cas quantique est donc suffisamment important pour que le champ ne soit pas modifié par l'interaction avec l'atome. Cependant, l'évolution des populations adiabatiques sur la figure 4.3b n'est pas la même dans les deux cas. Le modèle quantique reproduit bien les sauts adiabatiques au niveau des minima de l'intensité, mais l'intensité de ces sauts n'est pas celle du cas semi-classique. La situation est similaire pour les populations atomiques, représentées sur la figure 4.3b. Le cas quantique reproduit de manière qualitative celui semi-classique. Nous observons bien des oscillations de Rabi entre chaque saut non-adiabatique, mais ces oscillations ne sont pas quantitativement reproduites. Cette situation s'explique par le caractère fortement non-linéaire de l'interaction. Le nombre de photons est suffisamment élevé pour que le champ ne soit pas modifié par l'interaction, mais insuffisamment pour reproduire la dynamique du système atomique. En effet, lorsque la branche  $|-\rangle$  semi-classique est peuplée, les branches  $|\pm, m, n\rangle$  correspondant pour le cas quantique sont occupées. Si nous faisons la somme sur  $m$  et  $n$  de la population dans les branches  $|+, m, n\rangle$  nous obtenons alors une population adiabatique  $P_+$  légèrement différente de zéro. La dynamique étant fortement non-linéaire autour des sauts non-adiabatiques, cet écart se fait ressentir dès le premier saut, rendant impossible la reproduction exacte des résultats semi-classiques à l'aide du modèle quantique. Nous avons représenté sur la figure 4.4 l'évolution des populations dans le cas où le champ contient 5000 photons en moyenne ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 50$ ). Nous voyons que la situation converge très lentement avec le nombre moyen de photons. Le nombre d'états adiabatiques à prendre en compte dans les simulations numériques augmentant très rapidement avec le nombre de photons, il nous est impossible d'arriver à une situation où les deux modèles convergent parfaitement.

### 4.5.3 Influence du nombre de photon à $\chi$ fixé

Nous nous intéressons maintenant à la situation où, pour une valeur fixée du couplage semi-classique  $\chi$ , nous faisons varier le nombre de photons. Dans ces conditions, le terme de couplage quantique  $g_0$  est ajusté suivant la relation :

$$g_0 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \chi.$$

Nous avons représenté ces situations sur les figures 4.5 et 4.6, avec respectivement 200 ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ ) et 2 ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ) photons en moyenne dans le champ. Dans les deux cas, le désaccord est de  $\Delta/\delta = 3$  et le couplage semi-classique  $\chi/\delta = 10$ . Nous avons alors dans le cas quantique,  $g_0/\delta = 0.7$  pour la figure 4.5 et  $g_0/\delta = 7$  pour la figure 4.6. Dans le deuxième cas, la forte valeur du couplage compense alors le faible nombre de photons.

Nous observons sur la figure 4.5 une situation similaire à celle décrite dans la partie 4.5.2. Le champ contient un nombre suffisant de photons pour reproduire la

situation du champ semi-classique et provoquer des transitions non-adiabatiques, mais pas assez pour reproduire fidèlement l'évolution des populations. Lorsque nous diminuons le nombre de photons sur la figure 4.6, la situation change radicalement. En (a), le champ quantique est fortement modifié par rapport à la situation semi-classique. En effet, le champ ne contient alors que 2 photons en moyenne et est donc très sensible à l'absorption ou l'émission d'un photon par l'atome. Nous observons en (c) que les sauts non-adiabatiques ont disparu dans le cas quantique, la population adiabatique n'évolue pas et reste dans son état initial. De la même façon, la population dans l'état excité de l'atome en (c) subit des variations d'amplitude très faibles.

#### 4.5.4 Influence du nombre de photon à $g_0$ fixé

Nous nous intéressons ici à la situation où cette fois, le terme de couplage quantique  $g_0$  est maintenu constant lorsque nous faisons varier le nombre de photon. Le terme de couplage semi-classique  $\chi$  est alors ajusté pour avoir un couplage équivalent dans les deux modèles suivant :

$$\chi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{2}} g_0.$$

Nous repartons pour cela de la figure 4.5 qui contient en moyenne 200 ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ ) photons, puis sur la figure 4.7 nous descendons le nombre de photons moyen à 2 ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ). Dans les deux cas, le désaccord est de  $\Delta/\delta = 3$  et le couplage quantique  $g_0$  est maintenu tel que  $g_0/\delta = 0.7$  en ajustant la valeur de  $\chi$ . Nous avons alors dans le cas semi-classique,  $\chi/\delta = 10$  pour la figure 4.5 et  $\chi/\delta = 1$  pour la figure 4.7.

Les conclusions de la figure 4.5 sont données dans le paragraphe précédent (4.5.3) : le nombre de photons est suffisamment grand pour obtenir qualitativement les mêmes résultats avec les modèles semi-classique et quantique. La situation sur la figure 4.7 change complètement, mais différemment que pour la figure 4.6. Cette fois, le champ quantique sur la figure 4.7a reproduit quasiment le champ classique malgré un faible nombre de photon. Cela s'explique par la faible valeur du couplage  $g_0/\delta = 0.7$ . Le champ comporte peu de photons, et chacun de ces photons est faiblement couplé avec l'atome. Le champ est alors très peu modifié par l'interaction, contrairement à la figure 4.6a où le champ contenait aussi très peu de photons, mais l'intensité de couplage était dix fois plus élevée.

En (b), nous observons qu'il n'y a plus de saut non-adiabatique, que ce soit pour la situation semi-classique ou quantique. Pour la situation semi-classique cela s'explique par la faible valeur du couplage. Il faut atteindre un régime de couplage fort pour pouvoir réaliser des transitions non-adiabatiques. La population atomique correspondante en (c) suit alors les variations d'intensité avec de légères modifications dues aux faibles variations de la population adiabatique. Pour la situation quantique la situation est sensiblement la même. La modification des oscillations de la population dans l'état excité de l'atome est cependant nettement plus marquée dans ce cas. Nous retrouvons ici le caractère très sensible du cas quantique où, pour un faible nombre de photons, la moindre variation du

nombre du photons (et donc de la population atomique) affecte l'évolution du système complet.

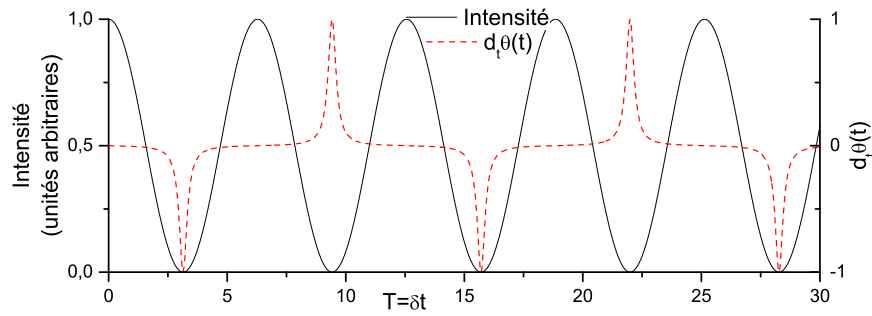
### 4.5.5 Influence des couplages inter- et intra-bandes

Contrairement au cas classique qui ne comporte que deux branches adiabatiques, le cas quantique possède des familles de branches  $|\pm, m, n\rangle$ . Nous avons alors précédemment fait la distinction entre les couplages intra-bandes ( $|\pm, m, n\rangle$  avec  $|\pm, m \pm 1, n \pm 1\rangle$ ) et inter-bandes ( $|\pm, m, n\rangle$  avec  $|\mp, m \pm 1, n \pm 1\rangle$ ). Nous nous proposons ici d'étudier l'importance de ces couplages en réalisant pour le même jeu de paramètres, trois simulations : une première servant de référence où tous les termes de couplages sont présents, une seconde où les couplages intra-bandes sont supprimés et une troisième où cette fois les couplages inter-bandes sont supprimés. Les résultats de ces simulations sont présentés sur la figure 4.8.

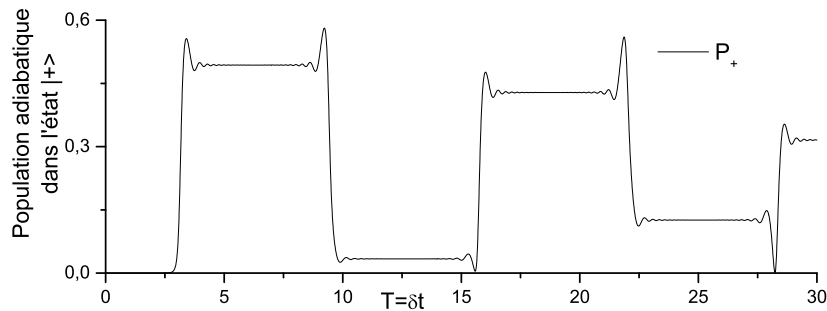
En (b), nous observons que les transitions non-adiabatiques ont disparu lorsque un des deux types de couplage est supprimé. Cela se comprend aisément dans le cas où ce sont les couplages inter-bandes qui sont supprimés. Dans ce cas, les transitions entre états adiabatiques sont autorisées, mais seulement à l'intérieur de leur bande. Initialement seul la branche  $|-\rangle$  est occupée, il ne peut donc pas y avoir de transfert sur la branche  $|+\rangle$ .

Dans le cas où ce sont les couplages intra-bandes qui sont supprimés, la situation est moins évidente, les populations devraient pouvoir effectuer des transitions non-adiabatiques. Supprimer le terme intra-bande revient à prendre  $f_2(m) = 0$  dans les relations (4.40). Cependant, la seule façon de rendre  $f_2(m)$  nul est d'avoir  $\partial_t b = 0$  dans (4.40b), ce qui revient à supprimer les oscillations du champ. Sans ces oscillations,  $f_3(m, \Delta)$  est forcément nul aussi et il n'y a plus de possibilité de réaliser des transitions non-adiabatiques.

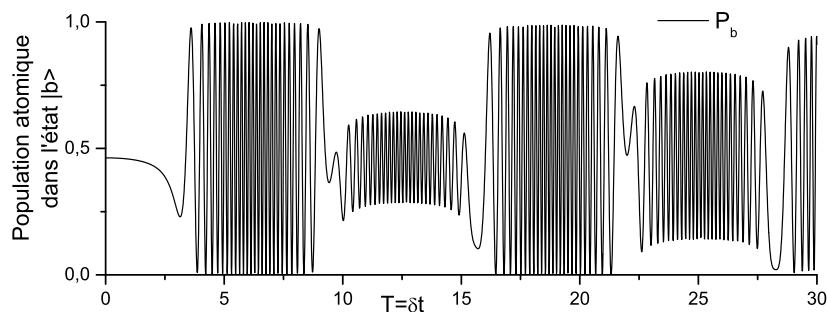




(a) Intensité du champ classique (trait plein noir) et valeur du couplage (pointillés rouges).

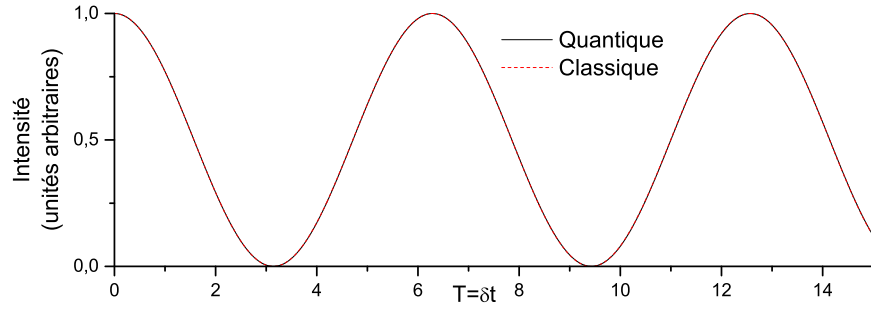


(b) Population dans la branche adiabatique  $|+\rangle$

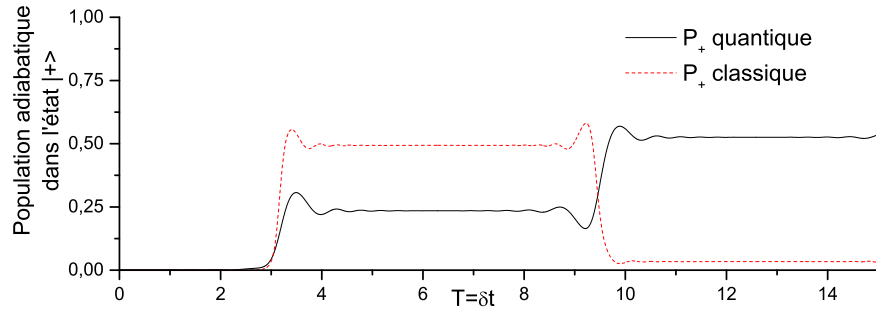


(c) Population dans l'état excité  $|b\rangle$  de l'atome.

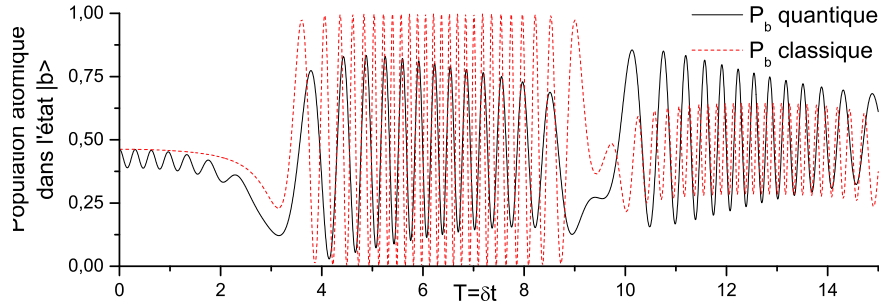
FIGURE 4.2 – Comportement temporel (a) du champ et des populations (b) adiabatique et (c) atomique. Le système est initialement dans l'état adiabatique  $|-\rangle$ . Les paramètres de la simulation sont  $\Delta/\delta = 3$  et  $\chi/\delta = 10$



(a) Intensités des champs classique (traits pleins noirs) et quantique (pointillés rouges).

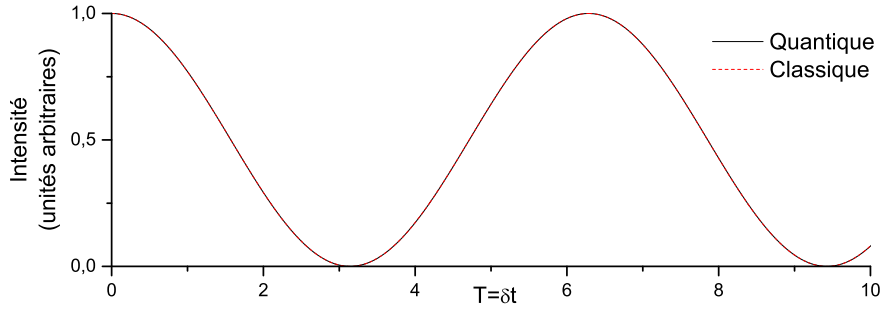


(b) Populations dans l'état adiabatique  $|+\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs). Dans le cas quantique, il s'agit de la somme, sur  $m$  et  $n$ , des populations des états  $|+, m, n\rangle$ .

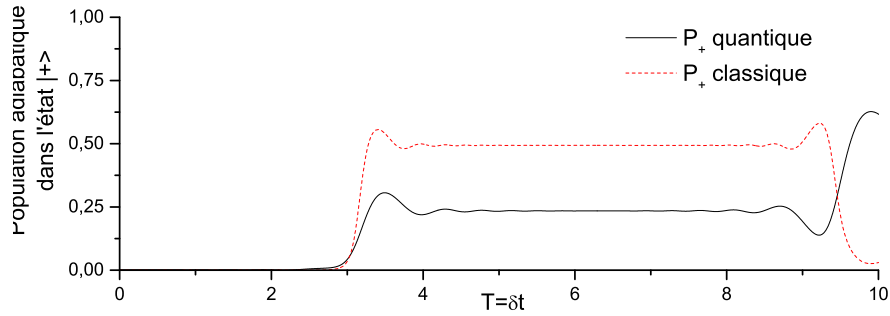


(c) Populations dans l'état atomique excité  $|b\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs)

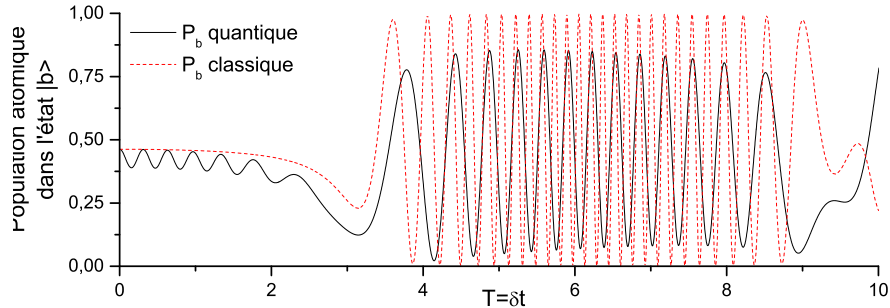
FIGURE 4.3 – Comportements temporels (a) des champs et des populations (b) adiabatique et (c) atomique. Le système semi-classique est initialement dans l'état adiabatique  $|-\rangle$ . Les différents états adiabatiques  $|\pm, m, n\rangle$  dans le cas quantique, sont occupés selon la relation (4.47) où les populations initiales des états atomiques sont celles du cas semi-classique correspondant. Les paramètres de la simulation semi-classique sont  $\Delta/\delta = 3$  et  $\chi/\delta = 10$ . Pour la simulation quantique, le désaccord est le même et le couplage  $g_0$  est calculé pour avoir la même intensité de couplage que dans le cas classique, avec  $g_0/\delta = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \chi/\delta = 0.24$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 30$ .



(a) Intensités des champs classique (traits pleins noirs) et quantique (pointillés rouges).

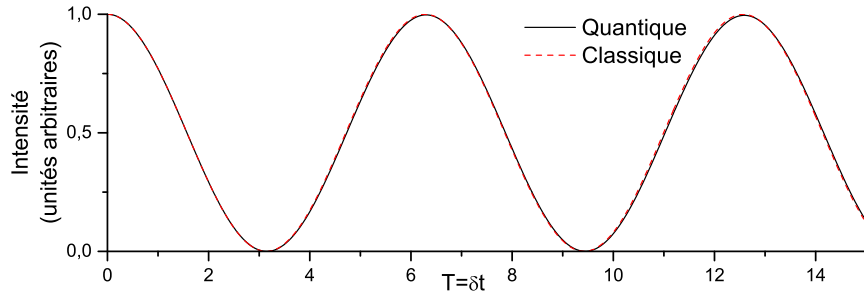


(b) Populations dans l'état adiabatique  $|+\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs). Dans le cas quantique, il s'agit de la somme, sur  $m$  et  $n$ , des populations des états  $|+, m, n\rangle$ .

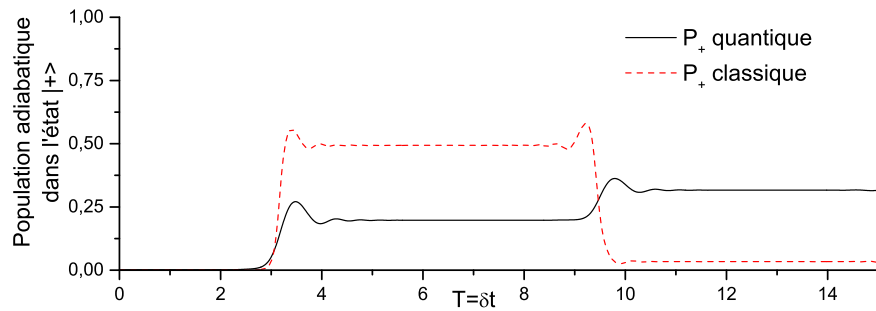


(c) Populations dans l'état atomique excité  $|b\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs)

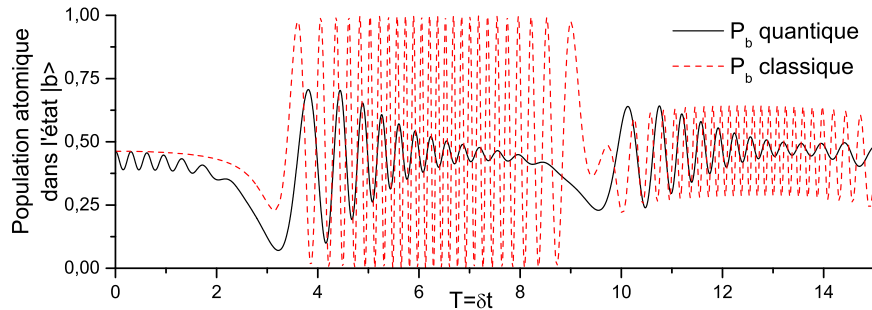
FIGURE 4.4 – Comportements temporels (a) des champs et des populations (b) adiabatique et (c) atomique. Le système semi-classique est initialement dans l'état adiabatique  $|-\rangle$ . Les différents états adiabatiques  $|\pm, m, n\rangle$  dans le cas quantique, sont occupés selon la relation (4.47) où les populations initiales des états atomiques sont celles du cas semi-classique correspondant. Les paramètres de la simulation semi-classique sont  $\Delta/\delta = 3$  et  $\chi/\delta = 10$ . Pour la simulation quantique, le désaccord est le même et le couplage  $g_0$  est calculé pour avoir la même intensité de couplage que dans le cas classique, avec  $g_0/\delta = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \chi/\delta = 0.14$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 50$ .



(a) Intensités des champs classique (traits pleins noirs) et quantique (pointillés rouges).

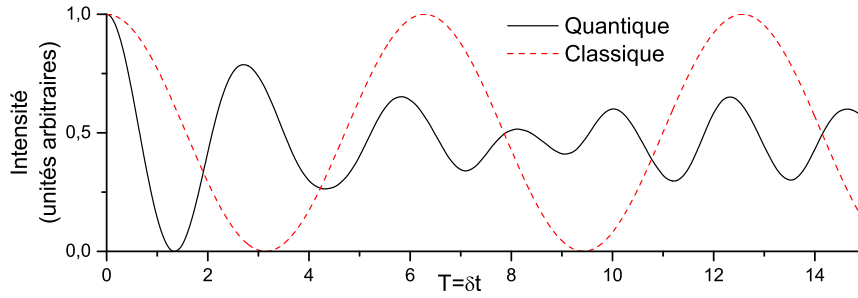


(b) Populations dans l'état adiabatique  $|+\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs). Dans le cas quantique, il s'agit de la somme, sur  $m$  et  $n$ , des populations des états  $|+, m, n\rangle$ .

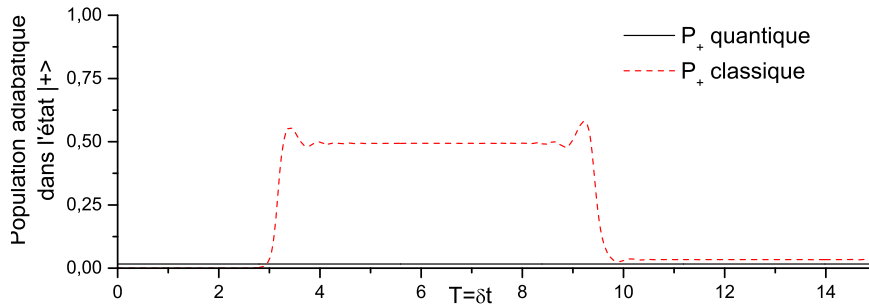


(c) Populations dans l'état atomique excité  $|b\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs)

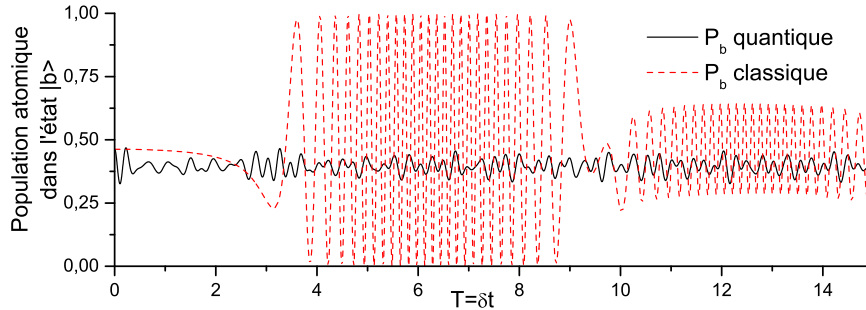
FIGURE 4.5 – Comportements temporels (a) des champs et des populations (b) adiabatique et (c) atomique. Le système semi-classique est initialement dans l'état adiabatique  $|-\rangle$ . Les différents états adiabatiques  $|\pm, m, n\rangle$  dans le cas quantique, sont occupés selon la relation (4.47) où les populations initiales des états atomiques sont celles du cas semi-classique correspondant. Les paramètres de la simulation semi-classique sont  $\Delta/\delta = 3$  et  $\chi/\delta = 10$ . Pour la simulation quantique, le désaccord est le même et le couplage  $g_0$  est calculé pour avoir la même intensité de couplage que dans le cas classique, avec  $g_0/\delta = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \chi/\delta = 0.7$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ .



(a) Intensités des champs classique (traits pleins noirs) et quantique (pointillés rouges).

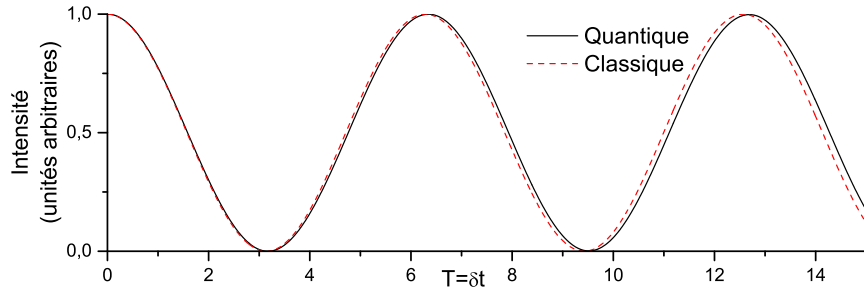


(b) Populations dans l'état adiabatique  $|+\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs). Dans le cas quantique, il s'agit de la somme, sur  $m$  et  $n$ , des populations des états  $|+, m, n\rangle$ .

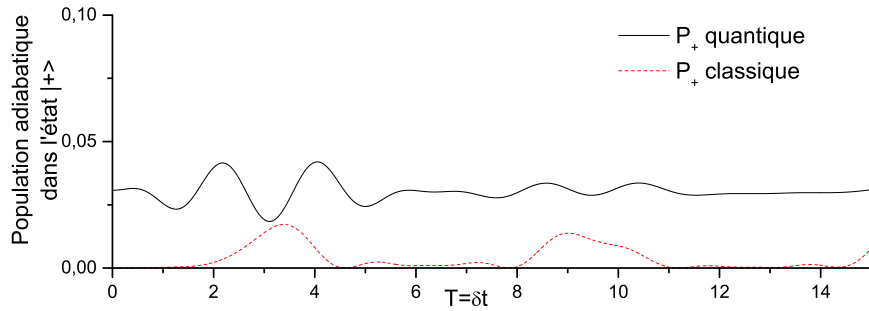


(c) Populations dans l'état atomique excité  $|b\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs)

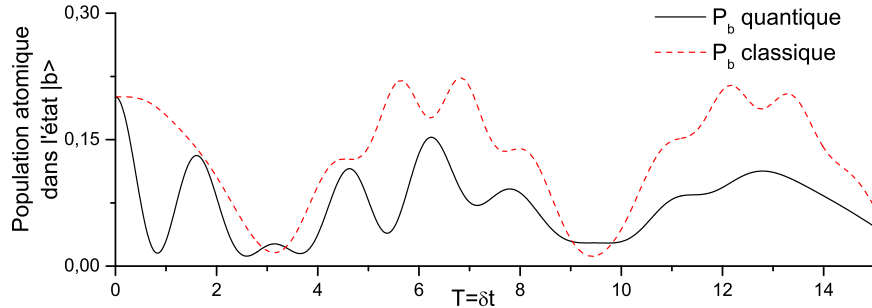
FIGURE 4.6 – Comportements temporels (a) des champs et des populations (b) adiabatique et (c) atomique. Le système semi-classique est initialement dans l'état adiabatique  $|-\rangle$ . Les différents états adiabatiques  $|\pm, m, n\rangle$  dans le cas quantique, sont occupés selon la relation (4.47) où les populations initiales des états atomiques sont celles du cas semi-classique correspondant. Les paramètres de la simulation semi-classique sont  $\Delta/\delta = 3$  et  $\chi/\delta = 10$ . Pour la simulation quantique, le désaccord est le même et le couplage  $G_0$  est calculé pour avoir la même intensité de couplage que dans le cas classique, avec  $g_0/\delta = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \chi/\delta = 7$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .



(a) Intensités des champs classique (traits pleins noirs) et quantique (pointillés rouges).

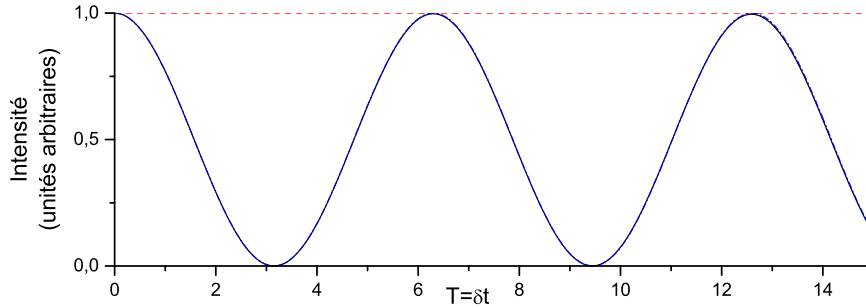


(b) Populations dans l'état adiabatique  $|+\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs). Dans le cas quantique, il s'agit de la somme, sur  $m$  et  $n$ , des populations des états  $|+, m, n\rangle$ .

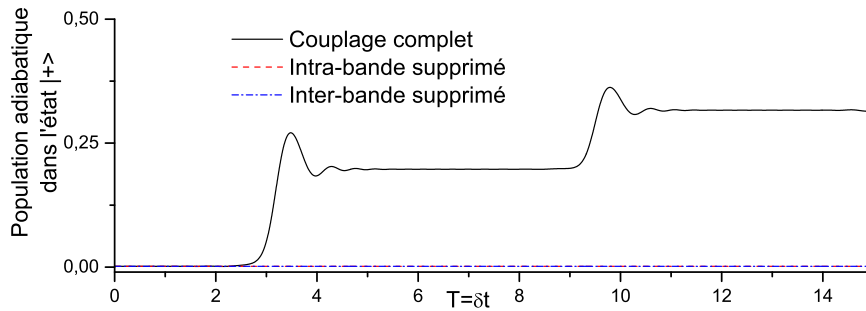


(c) Populations dans l'état atomique excité  $|b\rangle$  pour les modèles semi-classique (pointillés rouges) et quantique (traits pleins noirs)

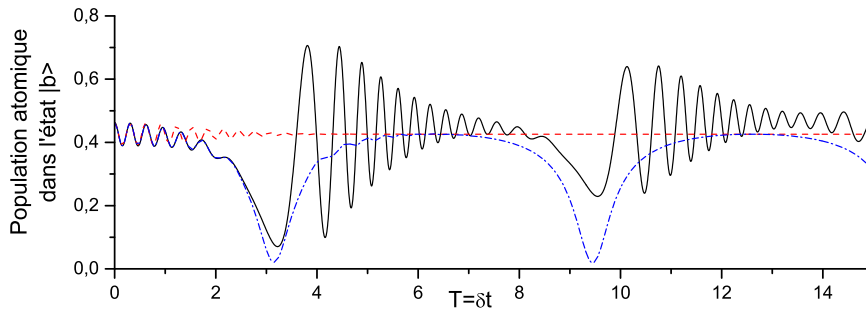
FIGURE 4.7 – Comportements temporels (a) des champs et des populations (b) adiabatique et (c) atomique. Le système semi-classique est initialement dans l'état adiabatique  $|-\rangle$ . Les différents états adiabatiques  $|\pm, m, n\rangle$  dans le cas quantique, sont occupés selon la relation (4.47) où les populations initiales des états atomiques sont celles du cas semi-classique correspondant. Les paramètres de la simulation sont pour le cas quantique  $\Delta/\delta = 3$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  et  $G_0/\delta = 0.7$ . Pour la simulation semi-classique, le désaccord est le même et le couplage  $\chi$  est calculé pour avoir la même intensité de couplage que dans le cas quantique, avec  $\chi/\delta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{2}} g_0/\delta = 1$ .



(a) Intensités des champs quantique dans les cas où (trait plein noir) tous les couplages sont pris en comptes, (pointillés rouges) seuls les couplages inter-bandes sont conservés et (pointillés bleus) seuls les couplages intra-bandes sont conservés.



(b) Somme, sur  $m$  et  $n$ , des populations des états  $|+, m, n\rangle$  dans les trois cas.



(c) Populations dans l'état excité de l'atome dans les trois cas.

FIGURE 4.8 – Influence des différents termes du couplage sur les comportements temporels (a) des champs et des populations (b) adiabatique et (c) atomique. (trait plein noir) tous les couplages sont pris en compte ; (pointillés rouges) seuls les termes inter-bandes sont conservés, les intra-bandes sont supprimés ; (pointillés bleus) situation inverse, les inter-bandes sont supprimés et les intra-bandes conservés. Les paramètres des simulations sont  $\Delta/\delta = 3$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$  et  $g_0/\delta = 0.7$  ( $\Leftrightarrow \chi = 10$ ).

## 4.6 Conclusion

Nous avons étudié dans cette partie l'interaction entre un atome à deux niveaux dans un guide d'onde contenant un champ arbitraire. Dans le cas semi-classique cette situation est bien connue et peut être comprise simplement en se plaçant dans la base adiabatique.

Nous avons alors voulu établir un formalisme permettant d'utiliser une base adiabatique généralisée, permettant de faire facilement le lien avec la situation semi-classique. Nous avons pour cela développé une méthode se basant sur les états de flux du champ. Nous avons alors montré que le flux est quantifié et nous avons caractérisé ses états. Un résultat important est que la construction de ces états se fait par récurrence, de manière similaire aux états nombre de photons du champ, et qu'il est donc suffisant dans notre méthode de connaître l'expression de l'état de flux nul. Ces états de flux nous ont alors permis de construire une base adiabatique généralisée correspondant à la base classique dans la limite d'un grand nombre de photons. Dans cette nouvelle base, chaque branche adiabatique classique se décompose en une série de branches où le quanta de flux et le nombre de photons changent, mais où le nombre d'excitation reste constant. Ces nouvelles structures permettent alors de faire la distinction entre des couplages intra-bande et inter-bande.

Nous avons ensuite appliqué cette méthode au cas où le champ est composé de deux modes. Nous avons d'abord montré qu'il était possible de converger vers la situation semi-classique en utilisant des champs cohérents contenant un grand nombre de photons. La convergence parfaite est cependant difficilement atteignable à cause de la forte non-linéarité de l'interaction non-adiabatique. Le nombre de photons à prendre en compte devient alors trop élevé pour pouvoir être traité numériquement. Nous avons ensuite étudié plusieurs situations mettant en avant le caractère non-linéaire de l'interaction. Finalement nous avons étudié le rôle des couplages intra-bandes et inter-bandes dans l'interaction, à l'aide de simulations où l'un puis l'autre des couplages a été supprimé.





# Conclusion

Nous avons développé dans cette thèse une approche temporelle des phénomènes en optique quantique. Le cas modèle est celui de l'interaction entre une impulsion quantifiée et un système quantique contenant un ou plusieurs atomes. Le problème général est extrêmement complexe par rapport au cas semi-classique. Dans ce cas, le problème se réduit à l'étude de la dynamique d'un seul atome soumis à un champ externe, inchangé par l'interaction (milieu optiquement dilué). Dans notre cas, comme nous l'avons vu, un tel traitement est impossible. En effet, pour un échantillon quelconque, les dynamiques du champ et des atomes sont étroitement liées par deux effets : l'intrication qui oblige à prendre en compte le système dans son ensemble et la modification significative du champ (contenant peu de photons) lors des échanges avec les atomes. Ainsi, le milieu doit être considéré comme optiquement épais, même s'il ne contient qu'un seul atome, et le système champ plus atomes doit être traité comme un système quantique unique. Devant cette complexité, nous avons abordé plusieurs situations originales permettant de simplifier le problème et de mettre en avant les phénomènes physiques sous-jacents.

Dans le chapitre deux, nous avons étudié le cas d'un atome traversant transversalement une cavité optique contenant un champ monomode quantifié. L'atome ressent au cours de sa traversée un champ transitoire équivalent à une impulsion lumineuse pour un atome immobile. Dans ce cas, c'est le couplage entre l'atome et le champ qui est transitoire et non le champ lui-même. Afin de prendre en compte d'éventuels couplages opto-mécaniques, nous avons quantifié la quantité de mouvement associée à l'atome. Nous avons alors étudié la dynamique du système en fonction du désaccord en fréquence entre la transition atomique et le champ de la cavité, de l'intensité du champ (ou le nombre de photons contenus dans la cavité) et de l'énergie cinétique de l'atome. Nous avons vu qu'il existe différents régimes en fonction de ces paramètres. Pour des valeurs suffisamment élevées de l'énergie cinétique, nous avons retrouvé le comportement semi-classique de l'interaction. En effet, les modifications de l'énergie cinétique, par l'émission et l'absorption de photons non-résonnants, sont faibles par rapport à l'énergie cinétique totale, et le centre de masse peut alors être traité classiquement. Nous avons alors retrouvé la possibilité d'effectuer des sauts non-adiabatiques entraînant des transferts de population permanents, déjà étudiés sans quantification du centre de masse atomique [10].

Pour des valeurs d'énergie cinétique faible, ou de l'ordre de l'énergie d'interaction, nous avons montré que le traitement quantique du centre de masse est indispensable. En effet, les modifications de l'énergie cinétique ne sont plus

négligeables, et les paquets atomiques se propagent à des vitesses différentes en fonction de la branche adiabatique qu'ils suivent. Nous avons vu qu'il est possible d'utiliser ce comportement pour créer un interféromètre atomique dans ce régime. Les lames séparatrice et recombinaison sont réalisées à l'aide de transitions non-adiabatiques obtenues par la modulation du champ de la cavité.

Dans le chapitre trois, nous avons considéré la diffusion d'un paquet d'onde multimode à un seul photon se propageant dans un guide d'onde à une dimension contenant un ou deux atomes. Nous avons utilisé le cas concret d'un guide d'onde dont la section transverse est suffisamment réduite pour que le rayonnement et la propagation des photons ne puissent se faire que selon les deux directions axiales du guide. Nous avons considéré les cas où un, puis deux atomes résonnants avec l'impulsion initiale sont présents dans le guide d'onde. Ici, les dynamiques du champ et des atomes sont intimement liées. Nous avons étudié les caractéristiques spectrales et temporelles des impulsions transmises et réfléchies, ainsi que la dynamique des atomes.

Dans le cas où un seul atome est présent, les champs rayonnés par ce dernier dans les deux directions du guide sont identiques. Le champ émis vers l'avant interfère avec le champ incident et cette interférence a la propriété d'être totalement destructrice pour la fréquence résonnante. La fréquence de résonance est donc réfléchi, quel que soit le régime de couplage. Dans le domaine temporel, cet effet se traduit par une forte contrainte sur la forme du champ transmis qui voit son aire algébrique s'annuler, quel que soit la valeur des paramètres de l'interaction (théorème de l'aire). L'enveloppe du champ subit alors une forte distorsion temporelle, lui conférant un aspect oscillatoire.

Dans le cas où deux atomes sont présents et séparés d'une distance  $l$  arbitraire, mais grande devant la dimension transverse du guide, le problème n'est correctement traité que si l'échange de photons virtuels entre les atomes est pris en compte. Cela revient à tenir compte des termes hors-RWA, même si un traitement perturbatif est toujours valable (approximation adiabatique). Ainsi, le système émet dans les deux directions du guide des photons dont le spectre est étroitement centré autour de la fréquence de résonance, mais les deux atomes s'échangent des photons appartenant à toute la gamme de fréquence. Nous avons distingué dans ces échanges, les photons réels (issus de processus résonnants) des photons virtuels (issus des processus non-résonnants). L'interférence des photons virtuels issus des processus RWA non-résonnants et de ceux issus des processus hors-RWA permet d'assurer une valeur finie du couplage entre les atomes. La contribution des photons virtuels permet aussi de justifier la validité du théorème de l'aire pour le cas à deux atomes. Le champ transmis possède toujours un caractère oscillant. Nous avons montré que les champs rayonnés sont reliés aux états de Dicke retardés, tandis que la dynamique atomique fait intervenir les états super- et sub-radiants de Dicke habituels. L'étude du comportement spectral a permis de faire une corrélation directe entre la nature, réelle ou virtuelle, des photons échangés et la forme des spectres rayonnés par les atomes.

Finalement, dans le chapitre quatre, nous avons étudié la diffusion d'une impulsion quantifiée multimodes, éventuellement non-résonnante, dans un état quantique quelconque, contenant un nombre arbitraire de photons par un atome

dans un guide d'onde unidimensionnel. Le pendant semi-classique (le champ est traité classiquement, l'atome quantiquement) de cette situation fait intervenir la représentation adiabatique de l'atome. Nous avons choisi de rester le plus proche possible de cette description, tout en traitant quantiquement l'ensemble du système. Nous avons alors identifié les états de champ (états du flux d'intensité) comme ceux étant le plus adaptés pour une description adiabatique globale du système. Dans cette description, contrairement au cas semi-classique où seulement deux états adiabatiques apparaissent, nous avons obtenu pour chaque état de flux deux bandes bien séparées et contenant chacune plusieurs états adiabatiques. La dynamique du système fait alors intervenir des transitions entre ces états où nous avons distingué les transitions intra-bandes et inter-bandes. Dans la limite classique (champ cohérent contenant un grand nombre de photons), ces différentes bandes fusionnent pour la valeur de flux moyen, ce qui permet de retrouver la forme en double branche classique. Nous avons illustré cette méthode pour un champ contenant deux modes et nous avons montré numériquement que la forte non-linéarité des transitions non-adiabatiques peut conduire à un comportement non-classique, même pour des états cohérents contenant un grand nombre de photons.

Les différentes études que nous avons menées dans cette thèse constituent une première étape importante pour aborder les phénomènes d'optique quantique sous un aspect temporel. Les différentes configurations étudiées ont révélé leurs spécificités : rôle du couplage opto-mécanique pour le mazer, l'obligation de traiter correctement les photons virtuels quand plusieurs atomes interagissent avec une impulsion ou encore la quasi-obligation de travailler en dimension réduite (guide d'onde) pour pouvoir atteindre un régime de couplage fort. Ces contraintes ont été bien cernées au cours de cette thèse. Ce travail ouvre la voie à une deuxième étape : l'étude systématique de l'interaction pour des champs de formes variées. En particulier, la méthode développée dans le chapitre quatre pour le traitement d'une impulsion quantifiée multimodes arbitraire devrait révéler des phénomènes nouveaux pour des impulsions à faible nombre de photons mais de plusieurs modes. Le cas à deux modes est aussi intéressant. Un objectif à court terme est d'étudier les comportements adiabatique et non-adiabatique de l'interaction quand le champ d'entrée est dans un état non classique (états comprimés) ou dans un état cohérent mis en forme (dérive de fréquence). Ce dernier cas permettrait d'avoir le pendant classique du phénomène de passage adiabatique.



# Annexe A

## Annexes du chapitre 3

### A.1 Équation fondamentale pour les populations

Le jeu d'équations (3.19) peut être simplifié afin d'obtenir une équation sur l'amplitude des états excités  $\beta_j(t)$ . Premièrement, les parties pertinentes des amplitudes relatives aux états hautement excités dans (3.19a) et (3.19b) peuvent être obtenues en intégrant formellement (3.19c) et (3.19d) et en utilisant l'approximation :

$$\int_{-\infty}^t dt' f(t') e^{i(\omega_0 + \omega_k)t'} \approx f(t) \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\omega_0 + \omega_k)t'} \approx \frac{f(t)}{i(\omega_0 + \omega_k)}$$

où  $f(t) = \alpha_{k_z}(t)$  ou  $\beta_j(t)$ .

Nous obtenons :

$$\gamma_{k_z} \approx -\frac{g_k}{\omega_0 + \omega_k} \sum_{\substack{j=1,2 \\ j' \neq j}} \beta_j(t) e^{-ik_z z_{j'}} e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \quad (\text{A.1a})$$

$$\eta_{j,k_z,k_{z'}} \approx -\frac{g_k}{\omega_0 + \omega_k} [\alpha_{k_z}(t) e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} e^{-ik'_k z_j}]. \quad (\text{A.1b})$$

En injectant (A.1b) dans (3.19b) nous obtenons l'équation suivante pour  $\alpha_{k_z}(t)$  :

$$i\partial_t \alpha_{k_z}(t) = g_k \sum_{j=1}^2 \beta_j(t) e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-ik_z z_j} - \alpha_{k_z}(t) \int \frac{2g_{k'}^2}{\omega_0 + \omega_{k'}} dk'_z. \quad (\text{A.2})$$

L'ajout des états à deux photons ( $|a_{j' \neq j}, b_j, 1_{k_z}, 1_{k'_z}\rangle$ ) dans la dynamique du système, conduit à un décalage des niveaux fondamentaux (facteur 2 dans (A.5) dû à la somme sur  $j$ ). Ce décalage correspond au décalage de Lamb habituel causé dans le vide par des cycle d'absorption/émission de photons virtuels par les atomes dans leur niveau fondamental.

Nous réécrivons ensuite  $\gamma_{k_z}(t)$  :

$$\gamma_{k_z}(t) \simeq -\frac{g_k}{\omega_0 + \omega_k} \beta_j(t) e^{-ik_z z_{j'}} e^{-i(\omega_0 + \omega_k)t} - ig_k \int_{-\infty}^t \beta_{j'}(t') e^{-ik_z z_j} e^{-i(\omega_0 + \omega_k)t'} \quad (\text{A.3})$$

où sépare  $\gamma_{k_z}$  dans (A.1a) en conservant la forme intégrale pour  $\beta_{j'}$  provenant de (3.19c)). En insérant cette expression dans (3.19b), nous avons :

$$\begin{aligned} i\partial_t\beta_j(t) = & \int dk_z \left\{ g_k[\alpha_{k_z}(t)e^{i(\omega_0-\omega_k)t}e^{ik_z z_j}] \right. \\ & + \left. \left( -ig_k^2 \int_{-\infty}^t \beta_{j'}(t')e^{ik_z(z_{j'}-z_j)}e^{i(\omega_0+\omega_k)(t'-t)}dt' \right) \right\} \\ & - \beta_j(t) \int \frac{g_k^2}{\omega_0 + \omega_k} dk_z \quad (j' \neq j). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'état excité possède aussi un décalage qui est la moitié de celui de l'état fondamental. En décalant l'énergie totale du système par la valeur de décalage de l'état fondamental et en intégrant formellement (A.2), nous obtenons :

$$\alpha_{k_z}(t) = \alpha_{k_z}(t \rightarrow -\infty)ig_k e^{-ik_z z_l} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^t dt' \beta_j(t')e^{-i(\omega_0-\omega_k)t'}. \quad (\text{A.5})$$

En utilisant cette expression dans (A.4) et à l'aide de l'élimination adiabatique du continuum [71] pour le premier terme de l'intégral :  $\int g_k^2 dk_z \int_{-\infty}^t \beta_j(t')e^{-i(\omega_0-\omega_k)(t'-t)} \approx \beta_j(t) \int_{-\infty}^t \int g_k^2 dk_z e^{-i(\omega_0-\omega_k)(t'-t)} dt'$ , nous obtenons :

$$\partial_t\beta_j(t) = S_{0,j}(t) - (\Gamma - i\delta_0)\beta_j(t) - \Gamma\omega_0 \int_{-\infty}^t \beta_{j'}(t')\bar{M}(t'-t)dt' \quad (\text{A.6})$$

avec  $\Gamma = 2\pi g_0^2$  ( $g_0 = \frac{g_k}{\sqrt{c}}\sqrt{\omega_k/\omega_0}$ ) et

$$S_{0,j}(t) = -i\sqrt{\frac{\Gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{c\frac{\omega_0}{\omega_k}} \alpha_{k_z}(t \rightarrow -\infty) e^{i(\omega_0-\omega_k)t} e^{ik_z z_j} dk_z.$$

$\bar{M} = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_i$  est la fonction mémoire, et les contributions  $\bar{M}_i$  sont définies par :

$$\bar{M}_1(t'-t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i(\omega_0-\omega_k)(t-t')}}{\omega_k} e^{ik_z l} d\omega_k \quad (\text{A.7a})$$

$$\bar{M}_2(t'-t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i(\omega_0+\omega_k)(t-t')}}{\omega_k} e^{ik_z l} d\omega_k \quad (\text{A.7b})$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_3(t'-t) = & \bar{M}_1(t'-t, l \leftrightarrow -l) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i(\omega_0-\omega_k)(t-t')}}{\omega_k} e^{-ik_z l} d\omega_k \end{aligned} \quad (\text{A.7c})$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_4(t'-t) = & \bar{M}_2(t'-t, l \leftrightarrow -l) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i(\omega_0+\omega_k)(t-t')}}{\omega_k} e^{-ik_z l} d\omega_k, \end{aligned} \quad (\text{A.7d})$$

où  $\delta_0 = \int \frac{g_k^2}{\omega_0+\omega_k} dk_z + \text{Pv} \int \frac{g_k^2}{\omega_k-\omega_0} dk_z$  est le décalage résultant de l'état excité et peut être incorporé dans la définition de la transition  $\omega_0$ . Un cas important est la situation markovienne où les atomes sont suffisamment proches pour pouvoir considérer l'interaction (les échanges de photons) comme instantanée devant la

dynamique atomique. C'est le cas lorsque le temps de vol du photon  $l/c$  et la période résonnante  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  sont bien inférieurs que le temps caractéristique de variation des amplitudes de populations  $\beta_j(t)$ , à savoir  $\Gamma^{-1}$  et  $\Delta^{-1}$ . Ces conditions sont obtenues pour  $l, \lambda_0 \ll c\Gamma^{-1}, c\Delta^{-1}$  (mais  $l < \lambda_0$  ou  $l > \lambda_0$  possibles). Dans ce cas on peut substituer  $\beta_j(t')$  par  $\beta_j(t)$  dans (A.6). Nous avons finalement :

$$\partial_t \beta_j(t) = S_{0,j}(t) - \Gamma \beta_j(t) - M \beta_{j' \neq j}(t) \quad (\text{A.8})$$

avec  $M = \int_{-\infty}^t \bar{M}(t-t')$  et  $M_i = \int_{-\infty}^t \bar{M}_i(t-t')$ .

## A.2 Contributions des termes hors-RWA au signal photo-électrique

Nous considérons ici l'intensité  $I_2(t, z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{\omega_k} B(\omega_k) \gamma_{kz}(t) e^{-i\omega_k(t - \text{sign}(kz)z/c)} dk_z \right|^2$ .

Nous intégrons formellement l'équation (3.19c) ((A.1a)), et nous l'insérons dans l'expression de  $I_2(t, z)$ . En utilisant la technique d'élimination adiabatique du continuum, Nous obtenons :

$$I_2(t, z) = \left| 2 \sum_{j=1}^2 \beta_j(t) \int_0^{\infty} d(\omega_k/c) B(\omega_k) \frac{\epsilon_k g_k}{\omega_k(\omega_0 + \omega_k)} \cos(\omega_k |z - z_j|/c) \right|^2. \quad (\text{A.9})$$

L'intégration sur  $\omega_k$  peut être faite analytiquement étant donné que  $\epsilon_k g_k$  est constant (indépendant de  $\omega_k$ ). Nous avons :

$$\int_0^{\infty} d(\omega_k/c) B(\omega_k) \frac{\cos(\omega_k |z - z_j|/c)}{\omega_k(\omega_0 + \omega_k)} = f(\omega_2, \omega_0, a) - f(\omega_1, \omega_0, a) \quad (\text{A.10})$$

avec :

$$f(\omega, \omega_0, a) = \frac{1}{c\omega_0} (-\cos(\omega_0 a) \text{Ci}((\omega + \omega_0)a) + \text{Ci}(\omega a) - \sin(\omega_0 a) \text{Si}((\omega + \omega_0)a)) \quad (\text{A.11})$$

et  $a = |z - z_j|/c$ . Ci et Si sont les fonctions cosinus et sinus intégrales (définitions (3.24)). Pour des arguments réels, ces fonctions sont respectivement paire et impaire et ont pour valeurs asymptotiques  $\text{Ci}(x \gg 1) = 0$  et  $\text{Si}(x \gg 1) = \frac{\pi}{2}$ . Nous déduisons de ces propriétés que  $f(\omega_2, \omega_0, a) - f(\omega_1, \omega_0, a)$  tend vers zéro lorsque  $\omega_1 |z - z_j|/c \gg 1$  (et donc automatiquement  $\omega_2 |z - z_j|/c \gg 1$ ). La contribution de  $I_2(t, z)$  à l'intensité totale est donc nulle.

Nous considérons maintenant le troisième terme de l'intensité :

$$I_3(t, z) = 2 \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_{k'}}{\omega_{k'}} B(\omega_{k'}) \eta_{j,k_z,k'_z}(t) e^{-i\omega_{k'}(t - \text{sign}(k'_z)z/c)} dk'_z \right|^2. \quad (\text{A.12})$$

En injectant l'expression (A.1b) dans  $I_3(t, z)$ , nous obtenons :

$$I_3(t, z) = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_z |D_{k_z,j}|^2 \quad (\text{A.13})$$



avec :

$$D_{k_z, j} = -\sqrt{2}\alpha_{k_z}(t) \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega_{k'} \frac{g_{k'} \epsilon_{k'}}{c\omega_{k'}(\omega_0 + \omega_{k'})} B(\omega_{k'}) \cos(\omega_{k'}(z - z_j)) \\ - i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{g_k e^{i(\omega_0 + \omega_k)t}}{2(\omega_0 + \omega_k)} e^{-ik_z z_j} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \frac{\epsilon_{k'}}{\omega_{k'}} B(\omega_{k'}) \alpha_{k'_z}(t) e^{i(k'_z z - \omega_{k'} t)}. \quad (\text{A.14})$$

Si  $\omega_2|z - z_j|/c \gg 1$  le cosinus de la première intégrale de (A.14) oscille rapidement, rendant l'intégrale totale nulle.

Nous reconnaissons dans le second terme de (A.14) l'expression de  $A_{eff}(t, z)$  donnée en (3.30a). Il en résulte :

$$I_3(z) \approx I_1(t, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_k^2}{2(\omega_0 + \omega_k)^2} dk_z. \quad (\text{A.15})$$

À partir de l'expression  $g_k = \sqrt{\frac{\Gamma c \omega_0}{2\pi \omega_k}}$  et de la relation  $\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)^2} \approx \ln(\epsilon)$ , on trouve :

$$I_3(t, z) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\omega_0} \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right) I_1(t, z) \quad (\text{A.16})$$

où  $\omega_c$  est une fréquence de coupure basse. Étant donné la variation lente du terme logarithmique et la condition  $\Gamma/\omega_0 \ll 1$ , nous avons  $I_3 \ll I_1$ .

Ce dernier résultat conclut la démonstration de  $I_2, I_3 \approx 0$  pour  $\omega_1|z - z_j|/c \gg 1$ .

### A.3 Relation entre les champs et les amplitudes de populations

Nous nous intéressons ici au champ effectif :

$$A_{eff}(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{\omega_k} B(\omega_k) \alpha_{k_z}(t) e^{-i\omega_k(t - \text{sign}(k_z)z/c)} dk_z. \quad (\text{A.17})$$

Considérons tout d'abord la situation  $z < 0$ . L'intégration sur  $k_z$  peut être séparée en deux intégrales ayant pour intervalles  $[0, \infty]$  et  $[-\infty, 0]$ . Alors :

$$A_{eff}(t, z) = A_-(t, z) e^{-i\omega_0(t-z/c)} + A_+(t, z) e^{-i\omega_0(t+z/c)} \quad (\text{A.18})$$

avec

$$A_-(t, z) = \int_0^{\infty} B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \alpha_{k_z}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-z/c)} dk_z \quad (\text{A.19a})$$

$$A_+(t, z) = \int_0^{\infty} B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \alpha_{-k_z}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-z/c)} dk_z. \quad (\text{A.19b})$$

Nous montrons que le premier terme de (A.18) correspond au paquet incident si  $\omega_1|z|/c \gg 1$  tandis que le second correspond au paquet réfléchi si  $\Delta_0|z|/c \gg 1$ . En effet, en utilisant l'équation (A.5), nous obtenons :

$$A_-(t, z) = \int_0^{\infty} B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \alpha_{k_z}(t \rightarrow -\infty) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-z/c)} \\ - i \int_0^{\infty} B(\omega_k) \frac{\epsilon_k g_k}{\omega_k} e^{-ik_z z_j} \left( \sum_{j'=1}^2 \int_{-\infty}^t dt' \beta_{j'}(t') e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t'} e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-z/c)} \right) dk_z. \quad (\text{A.20})$$

Nous allons maintenant montrer que la deuxième intégrale dans (A.20) est nulle pour  $\omega_1|z|/c \gg 1$ . Nous réalisons tout d'abord l'intégration sur  $k_z$  qui fait apparaître :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{e^{-i\omega_k T}}{\omega_k} dk_z = g(\omega_2) - g(\omega_1) \quad (\text{A.21})$$

avec

$$g(\omega) = \text{Ci}(\omega T) - i \text{Si}(\omega T) \quad (\text{A.22})$$

et  $T = t - t' - (z - z_j)/c$ . Ci et Si sont les fonctions cosinus et sinus intégrales (définitions (3.24)) La valeur minimum pour  $T$  est obtenue lorsque  $t' = t$  et vaut alors  $-(z - z_j)/c > 0$ . À partir des valeurs asymptotiques des fonctions Ci et Si nous trouvons que l'intégrale tend vers zéro tant que  $\omega_1|z|/c \gg 1$ . Ainsi, l'amplitude de  $A_-(t, z)$  correspond bien au paquet incident :

$$A_-(t, z) = A_{inc}(t - z/c). \quad (\text{A.23})$$

La dernière étape consiste à identifier le second terme de (A.18) au champ réfléchi, c'est à dire à un champ se propageant avec une dépendance en  $t + z/c$ . Nous utilisons l'équation (A.5) pour  $\alpha_{-k_z}$  avec les conditions initiales  $\alpha_{-k_z}(t \rightarrow -\infty) = 0$  et en réalisant l'élimination adiabatique du continuum, nous obtenons :

$$A_+(t, z) = -i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \sum_{j=1}^2 \beta_j(t + (z - z_j)/c) e^{i \frac{\omega_0}{c} z_j} \left( \frac{\pi}{\omega_0} - i \text{Pv} \int B(\omega_k) d\omega_k \frac{e^{-i \frac{\omega - \omega_0}{c} (z - z_j)}}{\omega_k (\omega_k - \omega_0)} \right) \quad (\text{A.24})$$

où Pv désigne la valeur principale de Cauchy. L'expression du champ rayonné peut être davantage simplifié en utilisant la relation :

$$\text{Pv} \int B(\omega_k) d\omega_k \frac{e^{-i \frac{\omega - \omega_0}{c} (z - z_j)}}{\omega_k (\omega_k - \omega_0)} = f_+(\omega_2, -\omega_0, -(z - z_j)/c) - f_+(\omega_1, -\omega_0, -(z - z_j)/c) \quad (\text{A.25})$$

où la fonction  $f_+$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f_+(\omega, \omega_0, a) &= \frac{1}{\omega_0} (-\cos(\omega_0 a) \text{Ci}((\omega + \omega_0)a) + \text{Ci}(\omega a) - \sin(\omega_0 a) \text{Si}((\omega + \omega_0)a)) \\ &\quad + \frac{i}{\omega_0} (\sin(\omega_0 a) \text{Ci}((\omega + \omega_0)a) + \text{Si}(\omega a) - \cos(\omega_0 a) \text{Si}((\omega + \omega_0)a)). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

De plus, pour  $|z - z_j| \gg c/\omega_1$  (et donc  $|z - z_j| \gg c/\omega_2$ ), on a :

$$\text{P} \int B(\omega_k) d\omega_k \frac{e^{-i \frac{\omega}{c} (z - z_j)}}{\omega_k (\omega_k - \omega_0)} \approx i \frac{2}{\omega_0} e^{-i \frac{\omega_0}{c} (z - z_j)} \text{Si}(\Delta_0(z - z_j)/2c) \quad (\text{A.27})$$

avec  $\Delta_0 = \omega_2 - \omega_1$ . Étant donné  $\Delta_0 \gg \Gamma$ ,  $\Delta \gg c/|z - z_j|$  (et donc  $\Delta_0|z - l|/c \gg 1$ ), il en résulte :

$$\text{Si}(\Delta_0(z - z_j)/2c) \approx -\frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.28})$$

Nous obtenons finalement pour l'équation (A.24) :

$$A_+(t, z) = A_{refl}(t + z/c) \quad (\text{A.29})$$

avec :

$$A_{refl}(t + z/c) = -i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{j=1}^2 \beta_j(t + (z - z_j)/c). \quad (\text{A.30})$$

Ce champ possède une dépendance en  $t + z/c$  et peut être identifié au champ réfléchi qui se propage forcément vers les  $z$  négatifs.

Pour  $z > 0$ , la même démonstration peut être effectuée, avec la différence qu'il n'y a pas de champ incident pour  $z > l$ . Nous séparons de nouveau le champ effectif en deux parties :

$$A_{eff}(t, z) = A_-(t, z)e^{-i\omega_0(t-z/c)} + A_+(t, z)e^{-i\omega_0(t+z/c)} \quad (\text{A.31})$$

avec :

$$A_-(t, z) = \int_0^\infty B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \alpha_{kz}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-z/c)} dk_z \quad (\text{A.32a})$$

$$A_+(t, z) = \int_0^\infty B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \alpha_{-kz}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t+z/c)} dk_z. \quad (\text{A.32b})$$

En utilisant l'équation (A.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_+(t, z) &= \int_0^\infty B(\omega_k) \frac{\epsilon_k}{\omega_k} \alpha_{-kz}(t \rightarrow -\infty) e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t+z/c)} dk_z \\ &\quad - i \int_0^\infty B(\omega_k) \frac{\epsilon_k g_k}{\omega_k} e^{-ik_z z_j} \left( \sum_{j'=1}^2 \int_{-\infty}^t dt' \beta_{j'}(t') e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t'} e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t+z/c)} \right) dk_z. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

La première intégrale dans (A.33) est nulle car nous avons initialement  $\alpha_{-kz}(t \rightarrow -\infty) = 0$ . L'intégration sur  $dk_z$  est réalisée en premier et amène à l'intégrale :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{e^{-i\omega_k T}}{\omega_k} = g(\omega_2) - g(\omega_1) \quad (\text{A.34})$$

où  $g(\omega)$  est la même fonction que celle utilisée dans le cas  $z < 0$ , mais cette fois  $T = t - t' + (z - z_j)/c$ . Le minimum pour  $T$  est obtenu lorsque  $t' = t$  et vaut  $(z - z_j)/c > 0$ . En utilisant les valeurs asymptotiques des fonctions Ci et Si, nous trouvons que dans le cas où  $\omega_1 |z - l|/c \gg 1$  la contribution de  $A_+(t, z)$  tend vers zéro.

Nous montrons maintenant que les vecteurs d'ondes positifs contribuent au champ transmis, se propageant avec une dépendance en  $t - z/c$ . Nous utilisons l'équation (A.5) pour  $\alpha_{-kz}$  et en réalisant l'élimination adiabatique du continuum, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_-(t, z) &= A_{inc}(t, z) \\ &\quad - i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \sum_{j=1}^2 \beta_j(t - (z - z_j)/c) e^{-i \frac{\omega_0}{c} z_j} \left( \frac{\pi}{\omega_0} - i\text{P} \int B(\omega_k) d\omega_k \frac{e^{i \frac{\omega - \omega_0}{c} (z - z_j)}}{\omega_k (\omega_k - \omega_0)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Le champ transmis est alors la somme du champ incident et du champ rayonné qui est donné par le second terme de l'équation (A.35). Ce dernier peut être simplifié à l'aide de la relation :

$$\text{PV} \int B(\omega_k) d\omega_k \frac{e^{i\frac{\omega-\omega_0}{c}(z-z_j)}}{\omega_k(\omega_k - \omega_0)} \approx -i \frac{2}{\omega_0} \text{Si}(\Delta_0(z - z_j)/c) \quad (\text{A.36})$$

Comme nous avons  $\Delta_0 \gg \Gamma$ ,  $\Delta \gg c/|z - z_j|$ , il en résulte  $\text{Si}(\Delta_0(z - z_j)/c) \approx \frac{\pi}{2}$ . Finalement nous retrouvons :

$$A_-(t, z) = A_{trans}(t - z/c). \quad (\text{A.37})$$

Le champ transmis étant relié aux populations à travers la relation :

$$A_{trans}(t - z/c) = A_{inc}(t - z/c) - i \frac{g_k \epsilon_k}{c} \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{j=1}^2 e^{-i\frac{\omega_0}{c} z_j} \beta_j(t - (z - z_j)/c). \quad (\text{A.38})$$

Nous obtenons donc bien une dépendance en  $t - z/c$ , ce qui nous permet d'identifier ce champ au champ transmis se propageant vers les  $z$  positifs.



# Annexe B

## Annexes du chapitre 4

### B.1 Démonstration de $[\hat{N}_{exc}, H_{int}] = 0$

Démontrons que  $[\hat{N}_{exc}, H_{int}] = 0$ , avec

$$\hat{N}_{exc} = \hat{N} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$$

$$\hat{H}_{int} = \hbar\Delta\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hbar g_0\sqrt{N_m}(\hat{b}^\dagger\hat{\sigma} + \hat{b}\hat{\sigma}^\dagger).$$

Alors :

$$[\hat{N}_{exc}, \hat{H}_{int}] = [\hat{N}, \hat{H}_{int}] + [\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}, \hat{H}_{int}].$$

Or :

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{H}_{int}] &= \hbar\Delta[\hat{N}, \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}] + \hbar g_0\sqrt{N_m}([\hat{N}, \hat{b}^\dagger\hat{\sigma}] + [\hat{N}, \hat{b}\hat{\sigma}^\dagger]) \\ &= \hbar g_0\sqrt{N_m}([\hat{N}, \hat{b}^\dagger]\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger[\hat{N}, \hat{b}]) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{b}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{N_m}}[\sum_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l, \sum_\nu \hat{a}_\nu^\dagger e^{i\Delta\nu t}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_m}} \sum_l e^{i\Delta l t} [\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_m}} \sum_l e^{i\Delta l t} \hat{a}_l^\dagger \\ &= \hat{b}^\dagger. \end{aligned}$$

Nous avons de même  $[\hat{N}, \hat{b}] = -\hat{b}$ .

Alors :

$$[\hat{N}, \hat{H}_{int}] = \hbar g_0\sqrt{N_m}(\hat{b}^\dagger\hat{\sigma} - \hat{b}\hat{\sigma}^\dagger).$$

De plus :

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}, \hat{H}_{int}] &= \hbar g_0(\hat{b}^\dagger[\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}, \hat{\sigma}] + \hat{b}[\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^\dagger]) \\ &= \hbar g_0\sqrt{N_m}(\hat{b}^\dagger[\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}]\hat{\sigma} + \hat{b}\hat{\sigma}^\dagger[\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^\dagger]) \\ &= -\hbar g_0\sqrt{N_m}(\hat{b}^\dagger\hat{\sigma} - \hat{b}\hat{\sigma}^\dagger). \end{aligned}$$

Finalement Nous obtenons :  $[\hat{N}_{exc}, H_{int}] = 0$

## B.2 Établissement de la base adiabatique

Les états adiabatiques peuvent se décomposer sur la base nue de la façon suivante :

$$|\pm, m, n, \{p\}\rangle = \alpha_{\pm} |a\rangle \otimes |m, n, \{p\}\rangle + \beta_{\pm} |b\rangle \otimes |m-1, n-1, \{p\}\rangle \quad (\text{B.1})$$

Nous déterminons les coefficients  $\alpha_{\pm}$  et  $\beta_{\pm}$  en résolvant l'équation de Schrödinger indépendante du temps,  $\hat{H}_{int} |\pm, m, n, \{p\}\rangle = E_{\pm, m} |\pm, m, n, \{p\}\rangle$  avec

$$H_{int} = \hbar\Delta\hat{\sigma}^{\dagger}\hat{\sigma} + \hbar g_0\sqrt{N_m}(\hat{b}^{\dagger}\hat{\sigma} + \hat{b}\hat{\sigma}^{\dagger}).$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\hbar\Delta\beta_{\pm} + \hbar g_0\alpha_{\pm}\sqrt{m}) |b\rangle \otimes |m-1, n-1, \{p\}\rangle + \hbar g_0\beta_{\pm}\sqrt{m} |a\rangle \otimes |m, n, \{p\}\rangle = \\ E_{\pm}\alpha_{\pm} |a\rangle \otimes |m, n, \{p\}\rangle + E_{\pm}\beta_{\pm} |b\rangle \otimes |m-1, n-1, \{p\}\rangle \\ \Rightarrow \frac{\alpha_{\pm}}{\beta_{\pm}} \stackrel{\Delta \neq 0}{=} \frac{\hbar g_0\sqrt{m}}{\frac{\hbar\Delta}{2}(1 \pm \sqrt{1 + (\frac{2g_0\sqrt{m}}{\Delta})^2})}. \end{aligned}$$

En posant  $\tan(2\theta_m) = \frac{g_0\sqrt{m}}{\Delta}$  nous avons :

$$\frac{\alpha_+}{\beta_+} = \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_-}{\beta_-} = -\frac{\cos \theta_m}{\sin \theta_m}$$

soit :

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \sin \theta_m & \beta_+ &= \cos \theta_m \\ \alpha_- &= \cos \theta_m & \beta_- &= -\sin \theta_m. \end{aligned}$$

La transformation de la base nue vers la base adiabatique est finalement donnée par (4.29)

$$\begin{cases} |+, m, n, \{p\}\rangle = \cos \theta_m |b\rangle |m-1, n-1, \{p\}\rangle + \sin \theta_m |a\rangle |m, n, \{p\}\rangle \\ |-, m, n, \{p\}\rangle = -\sin \theta_m |b\rangle |m-1, n-1, \{p\}\rangle + \cos \theta_m |a\rangle |m, n, \{p\}\rangle. \end{cases}$$

Si  $\Delta = 0$ , nous avons  $\theta_m = \frac{\pi}{4}$  et :

$$\begin{cases} |+, m, n, \{p\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle |m-1, n-1, \{p\}\rangle + |a\rangle |m, n, \{p\}\rangle) \\ |-, m, n, \{p\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|b\rangle |m-1, n-1, \{p\}\rangle + |a\rangle |m, n, \{p\}\rangle). \end{cases}$$

## B.3 Démonstration du théorème adiabatique

Nous démontrons ici la relation (4.33) :

$$\langle \pm, m, n | \partial_t (|\pm, m', n'\rangle) = \frac{\langle \pm, m, n | \partial_t (\hat{H}_{int}) | \pm, m', n'\rangle}{E_{\pm, m'} - E_{\pm, m}}.$$

Partons de l'équation propre des états adiabatiques :

$$\hat{H}_{int} |\pm, m, n\rangle = E_{\pm, m} |\pm, m, n\rangle.$$

En dérivant cette relation par rapport au temps nous voyons que :

$$\partial_t(\hat{H}_{int}) |\pm, m, n\rangle + \hat{H}_{int} \partial_t(|\pm, m, n\rangle) = E_{\pm, m} \partial_t(|\pm, m, n\rangle).$$

Projetons ensuite sur  $\langle \pm, m', n' |$  :

$$\begin{aligned} \langle \pm, m', n' | \partial_t(\hat{H}_{int}) |\pm, m, n\rangle + E_{\pm, m'} \langle \pm, m', n' | \partial_t(|\pm, m, n\rangle) &= E_{\pm, m} \langle \pm, m', n' | \partial_t(|\pm, m, n\rangle) \\ \Rightarrow \langle \pm, m', n' | \partial_t(|\pm, m, n\rangle) &= \frac{\langle \pm, m', n' | \partial_t(\hat{H}_{int}) |\pm, m, n\rangle}{E_{\pm, m} - E_{\pm, m'}} \\ \Leftrightarrow \langle \pm, m, n | \partial_t(|\pm, m', n'\rangle) &= \frac{\langle \pm, m, n | \partial_t(\hat{H}_{int}) |\pm, m', n'\rangle}{E_{\pm, m'} - E_{\pm, m}}. \end{aligned}$$

## B.4 Démonstration de $[\hat{N}_{exc}, \partial_t(\hat{H}_{int})] = 0$

Démontrons que  $[\hat{N}_{exc}, \partial_t(\hat{H}_{int})] = 0$  avec :

$$\begin{aligned} \hat{N}_{exc} &= \hat{N} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \\ \partial_t(\hat{H}_{int}) &= \hbar g_0 \sqrt{m} (\partial_t(\hat{b}^\dagger) \hat{\sigma} + \partial_t(\hat{b}) \hat{\sigma}^\dagger) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{cases} \partial_t(\hat{b}) = \frac{-i}{\sqrt{N_m}} \sum_l \Delta_l a_l e^{-i\Delta_l t} \\ \partial_t(\hat{b}^\dagger) = \frac{i}{\sqrt{N_m}} \sum_l \Delta_l a_l^\dagger e^{i\Delta_l t}. \end{cases}$$

Nous avons :

$$[\hat{N}_{exc}, \partial_t(\hat{H}_{int})] = [\hat{N}, \partial_t(\hat{H}_{int})] + [\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}, \partial_t(\hat{H}_{int})]$$

De la même façon qu'en B.1, nous avons :  $[\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}, \partial_t(\hat{H}_{int})] = -\hbar g_0 \sqrt{N_m} (\partial_t(\hat{b}^\dagger) \hat{\sigma} - \partial_t(\hat{b}) \hat{\sigma}^\dagger)$  Ensuite :

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \partial_t(\hat{H}_{int})] &= \hbar g_0 \sqrt{N_m} ([\hat{N}, \partial_t(\hat{b}^\dagger) \hat{\sigma}] + [\hat{N}, \partial_t(\hat{b}) \hat{\sigma}^\dagger]) \\ &= \hbar g_0 \sqrt{N_m} ([\hat{N}, \partial_t(\hat{b}^\dagger)] \hat{\sigma} + [\hat{N}, \partial_t(\hat{b})] \hat{\sigma}^\dagger). \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \partial_t(\hat{b}^\dagger)] &= \frac{i}{\sqrt{N_m}} [\sum_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l, \sum_{l'} \Delta_{l'} \hat{a}_{l'}^\dagger e^{i\Delta_{l'} t}] \\ &= \frac{i}{\sqrt{N_m}} \sum_l \Delta_l e^{i\Delta_l t} [\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger] \\ &= \frac{i}{\sqrt{N_m}} \sum_l \Delta_l e^{i\Delta_l t} \hat{a}_l^\dagger \\ &= \partial_t(\hat{b}^\dagger). \end{aligned}$$



De même :  $[\hat{N}, \partial_t(\hat{b})] = -\partial_t(\hat{b})$  et donc :

$$[\hat{N}, \partial_t(\hat{H}_{int})] = \hbar g_0 \sqrt{N_m} (\partial_t(\hat{b}^\dagger)\hat{\sigma} - \partial_t(\hat{b})\hat{\sigma}^\dagger).$$

Finalement nous trouvons :  $[\hat{N}_{exc}, \partial_t(\hat{H}_{int})] = 0$

## B.5 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting en seconde quantification est donné par [98, 99] :

$$\hat{S} = c^2 \epsilon_0 (\hat{E}^{(-)} \hat{B}^{(+)} + \hat{B}^{(-)} \hat{E}^{(+)}) \quad (\text{B.2})$$

où  $\hat{E}^{(\pm)}$  et  $\hat{B}^{(\pm)}$  sont les parties de fréquences positives et négatives des opérateurs champ électrique et champ magnétique respectivement. Dans l'approximation RWA, on a :

$$\hat{E}^{(+)} = i\epsilon_0 \sum_l \hat{a}_l e^{-i\omega_l t} \quad (\text{B.3a})$$

$$\hat{B}^{(+)} = i \frac{\epsilon_0}{c} \sum_l \hat{a}_l e^{-i\omega_l t}. \quad (\text{B.3b})$$

Nous pouvons alors identifier ces opérateurs à  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  :

$$\hat{E}^{(+)} = i\epsilon_0 \sqrt{N_m} \hat{b} e^{-i\omega_L t} \quad (\text{B.4a})$$

$$\hat{B}^{(+)} = i \frac{\epsilon_0 \sqrt{N_m}}{c} \hat{b} e^{-i\omega_L t}. \quad (\text{B.4b})$$

Nous injectons alors ces expressions dans (B.2) :

$$\begin{aligned} \hat{S} &= c^2 \epsilon_0 (\hat{E}^{(-)} \hat{B}^{(+)} + \hat{B}^{(-)} \hat{E}^{(+)}) \\ &= c^2 \epsilon_0 N_m \left( \frac{\epsilon_0^2}{c} \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\epsilon_0^2}{c} \hat{b}^\dagger \hat{b} \right) \\ &= 2c\epsilon_0^3 N_m \hat{b}^\dagger \hat{b}. \end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons  $\hat{S} \propto \hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{F}$ . L'opérateur flux correspond au vecteur de Poynting.

## B.6 Démonstration $m$ entier positif

Nous démontrons ici que les valeurs propres  $m$  de l'opérateur flux  $\hat{F} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$  sont des entiers positifs.

### Les valeurs propres $m$ de $\hat{F}$ sont positives ou nulles

Prenons un vecteur propre  $|\phi_m\rangle$  quelconque de  $\hat{F}$  associé à la valeur propre  $m$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \|\hat{b}|\phi_m\rangle\|^2 &\geq 0 \\ &= \langle\phi_m|\hat{b}^\dagger\hat{b}|\phi_m\rangle \\ &= \langle\phi_m|\hat{F}|\phi_m\rangle \\ &= m\langle\phi_m|\phi_m\rangle. \end{aligned}$$

Comme  $\langle\phi_m|\phi_m\rangle$  est positif, nous avons nécessairement  $m \geq 0$ .

### Vecteurs $\hat{b}|\phi_m\rangle$

Nous avons vu que  $\|\hat{b}|\phi_m\rangle\|^2 = m\langle\phi_m|\phi_m\rangle$ . La norme du vecteur  $\hat{b}|\phi_m\rangle$  est donc nulle si  $m = 0$  :  $\hat{b}|\phi_0\rangle = 0$ . Nous obtenons alors :

$$\hat{b}^\dagger\hat{b}|\phi_0\rangle = \hat{F}|\phi_0\rangle = 0.$$

Le vecteur  $|\phi_0\rangle$  est donc bien un vecteur propre de  $\hat{F}$  associé à la valeur propre 0. Il s'agit de l'état de flux nul ( $m = 0$ ).

Si maintenant  $m$  est strictement positif, la norme du vecteur  $\hat{b}|\phi_m\rangle$  est non-nulle. Cela donne :

$$\begin{aligned} [\hat{F}, \hat{b}]|\phi_m\rangle &= [\hat{b}^\dagger\hat{b}, \hat{b}]|\phi_m\rangle \\ &= [\hat{b}^\dagger, \hat{b}]\hat{b}|\phi_m\rangle \quad \text{car } [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \\ &= -\hat{b}|\phi_m\rangle \end{aligned}$$

et

$$[\hat{F}, \hat{b}]|\phi_m\rangle = \hat{F}\hat{b}|\phi_m\rangle - \hat{b}\hat{F}|\phi_m\rangle.$$

Nous obtenons en combinant les deux dernières relations :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{b}|\phi_m\rangle) &= [\hat{F}, \hat{b}]|\phi_m\rangle + \hat{b}\hat{F}|\phi_m\rangle \\ &= -\hat{b}|\phi_m\rangle + \hat{b}m|\phi_m\rangle \\ &= (m-1)(\hat{b}|\phi_m\rangle). \end{aligned}$$

Le ket  $(\hat{b}|\phi_m\rangle)$  est donc un vecteur propre de  $\hat{F}$  avec la valeur propre  $m-1$ .

### Vecteurs $\hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle$

Nous avons :

$$\begin{aligned} [\hat{F}, \hat{b}^\dagger]|\phi_m\rangle &= \hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle \\ &= \hat{F}\hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle - \hat{b}^\dagger\hat{F}|\phi_m\rangle \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{F}(\hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle) &= [\hat{F}, \hat{b}^\dagger]|\phi_m\rangle + \hat{b}^\dagger\hat{F}|\phi_m\rangle \\ &= \hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle + \hat{b}^\dagger m|\phi_m\rangle \\ &= (m+1)(\hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle).\end{aligned}$$

Le ket  $(\hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle)$  est donc un vecteur propre de l'opérateur  $\hat{F}$  avec la valeur propre  $m+1$ .

### $m$ est un entier positif

Prenons un vecteur propre  $|\phi_m\rangle$  non-nul de  $\hat{F}$  associé avec la valeur propre positive  $m$ . Supposons que  $m$  n'est pas un entier, nous avons alors :

$$n < m < n + 1 \quad (\text{B.5})$$

où  $n$  est un entier positif. Considérons maintenant la suite de vecteurs  $(\hat{b})^p|\phi_m\rangle$  avec  $0 < p < n$ . Chacun de ces vecteurs est vecteur propre de l'opérateur  $\hat{F}$  avec la valeur propre  $m-p$ . Ainsi  $(\hat{b})^n|\phi_m\rangle$  est vecteur propre de  $\hat{F}$ , avec la valeur propre  $m-n$  qui est strictement positive d'après (B.5). De même  $(\hat{b})^{n+1}|\phi_m\rangle$  doit être un vecteur propres de  $\hat{F}$  avec la valeur propre  $m-n-1$ . Or, d'après (B.5) nous avons  $m-n-1 < 0$ , ce qui est impossible. L'hypothèse que  $m$  n'est pas un entier est donc fausse.

Considérons maintenant que  $m = n$  entier positif ou nul. Dans ce cas  $(\hat{b})^n|\phi_m\rangle = 0$ .  $(\hat{b})^n|\phi_{m=n}\rangle$  correspond alors à l'état de flux nul.

Nous avons démontré que le spectre de valeurs propres de l'opérateur flux  $\hat{F}$  est composé d'entiers positifs ou nuls.

Les vecteurs propres de l'opérateur flux sont finalement  $|\phi_m\rangle = |m\rangle$  avec  $\hat{F}|m\rangle = m|m\rangle$  ou  $m$  est un entier positif. On identifie aussi  $\hat{b}|\phi_m\rangle$  au ket  $|m-1\rangle$  et  $\hat{b}^\dagger|\phi_m\rangle$  à  $|m+1\rangle$ . De plus, ils suivent les relations suivantes :

$$\hat{b}|m\rangle = m|m-1\rangle \quad (\text{B.6a})$$

$$\hat{b}^\dagger|m\rangle = (m+1)|m+1\rangle. \quad (\text{B.6b})$$

Ce qui nous permet d'utiliser la relation de récurrence :

$$|m\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}}|0\rangle. \quad (\text{B.7})$$

## B.7 Démonstration $[\hat{N}, \hat{F}] = 0$

L'opérateur flux  $\hat{F}$  est relié à l'opérateur nombre de photons de la sorte (équations (4.14)) :

$$\hat{F} = \hat{N} + \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l,l' \\ l \neq l'}} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l'} e^{i(\omega_l - \omega_{l'})t}. \quad (\text{B.8})$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
[\hat{N}, \hat{F}] &= [\hat{N}, \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l, l' \\ l \neq l'}} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l'} e^{i(\omega_l - \omega_{l'})t}] \\
&= \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l, l', l'' \\ l' \neq l''}} e^{i(\omega_{l'} - \omega_{l''})t} [\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l, \hat{a}_{l'}^\dagger \hat{a}_{l''}^\dagger] \\
&= \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l, l', l'' \\ l' \neq l''}} e^{i(\omega_{l'} - \omega_{l''})t} \left( a_l^\dagger [a_l, a_{l'}^\dagger a_{l''}^\dagger] + [a_l^\dagger, a_{l'}^\dagger a_{l''}^\dagger] a_l \right) \\
&= \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l, l', l'' \\ l' \neq l''}} e^{i(\omega_{l'} - \omega_{l''})t} \left( a_l^\dagger [a_l, a_{l'}^\dagger] a_{l''}^\dagger + a_{l'}^\dagger [a_l^\dagger, a_{l''}^\dagger] a_l \right) \\
&= \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l, l', l'' \\ l' \neq l''}} e^{i(\omega_{l'} - \omega_{l''})t} \left( a_l^\dagger a_{l''}^\dagger \delta_{ll'} - a_{l'}^\dagger a_l \delta_{ll''} \right) \quad \text{car } [a_l, a_{l'}^\dagger] = \delta_{ll'} \\
&= \frac{1}{N_m} \sum_{\substack{l, l', l'' \\ l' \neq l''}} e^{i(\omega_{l'} - \omega_{l''})t} \underbrace{\left( a_{l'}^\dagger a_{l''}^\dagger - a_{l'}^\dagger a_{l''}^\dagger \right)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$[\hat{N}, \hat{F}] = 0 \quad (\text{B.9})$$

## B.8 Orthogonalité des états $|m, n, \{p\}\rangle$

Nous démontrons dans cette annexe que l'application des opérateurs  $\hat{b}$  et  $\hat{b}^\dagger$  maintient l'orthogonalité des états  $|m, n, p\rangle$ .

### Opérateur $\hat{b}^\dagger$

Considérons deux états de flux  $|m_1, n_1, \{p_1\}\rangle$  et  $|m_2, n_2, \{p_2\}\rangle$  où  $\{p_1\}$  et  $\{p_2\}$  sont deux jeux d'indices de dégénérescences différents de sorte que :

$$\langle m_1, n_1, \{p_1\} | m_2, n_2, \{p_2\} \rangle = \delta_{m_1, m_2} \delta_{n_1, n_2} \delta_{\{p_1\}, \{p_2\}}. \quad (\text{B.10})$$

Nous obtenons par application de  $\hat{b}^\dagger$  :

$$\begin{aligned}
\hat{b}^\dagger |m_1, n_1, \{p_1\}\rangle &\propto |m_1 + 1, n_1 + 1, \{p'_1\}\rangle \\
\hat{b}^\dagger |m_2, n_2, \{p_2\}\rangle &\propto |m_2 + 1, n_2 + 1, \{p'_2\}\rangle
\end{aligned}$$

où les  $\{p'_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) peuvent être a priori différents des  $\{p_i\}$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\langle m_1 + 1, n_1 + 1, \{p'_1\} | m_2 + 1, n_2 + 1, \{p'_2\} \rangle &\propto \langle m_1, n_1, \{p_1\} | \hat{b} \hat{b}^\dagger | m_2, n_2, \{p_2\} \rangle \\
&\propto m_1 \underbrace{\langle m_1, n_1, \{p_1\} | m_2, n_2, \{p_2\} \rangle}_{\delta_{\{p_1\}, \{p_2\}}}.
\end{aligned}$$

Les deux états obtenus par application de  $\hat{b}^\dagger$  sont donc bien orthogonaux.

### Opérateur $\hat{b}$

Nous appliquons cette fois l'opérateur  $\hat{b}$  sur les kets  $|m_1, n_1, \{p_1\}\rangle$  et  $|m_2, n_2, \{p_2\}\rangle$  (avec  $m_1, m_2 > 0$ ) :

$$\begin{aligned}\hat{b}|m_1, n_1, \{p_1\}\rangle &\propto |m_1 - 1, n_1 - 1, \{p'_1\}\rangle \\ \hat{b}|m_2, n_2, \{p_2\}\rangle &\propto |m_2 - 1, n_2 - 1, \{p'_2\}\rangle\end{aligned}$$

où les  $\{p'_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) peuvent être à priori différents des  $\{p_i\}$ . Alors :

$$\begin{aligned}\langle m_1 - 1, n_1 - 1, \{p'_1\} | m_2 - 1, n_2 - 1, \{p'_2\} \rangle &\propto \langle m_1, n_1, \{p_1\} | \hat{b}^\dagger \hat{b} | m_2, n_2, \{p_2\} \rangle \\ &\propto m_2 \underbrace{\langle m_1, n_1, \{p_1\} | m_2, n_2, \{p_2\} \rangle}_{\delta_{\{p_1\}, \{p_2\}}}.\end{aligned}$$

Les deux états obtenus par application de  $\hat{b}$  sont donc bien orthogonaux.

## B.9 Démonstration de $[\hat{b}, \partial_t \hat{b}^\dagger] = 0$

Nous montrons dans cette annexe la relation :  $[\hat{b}, \partial_t \hat{b}^\dagger] = 0$ , avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{N_m}} \sum_l \hat{a}_l e^{-i\Delta_l t} \\ \hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_m}} \sum_l \hat{a}_l^\dagger e^{+i\Delta_l t} \\ \partial_t \hat{b}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{N_m}} \sum_l \Delta_l \hat{a}_l^\dagger e^{+i\Delta_l t}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(B.13a)} \\ \text{(B.13b)} \\ \text{(B.13c)} \end{array}$$

Alors :

$$\begin{aligned}[\hat{b}, \partial_t \hat{b}^\dagger] &= \frac{i}{N_m} \sum_{l, l'} e^{-i(\Delta_l - \Delta_{l'})t} \Delta_{l'} [a_l, a_{l'}^\dagger] \\ &= \frac{i}{N_m} \sum_{l, l'} e^{-i(\Delta_l - \Delta_{l'})t} \Delta_{l'} \delta_{ll'} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nous obtenons bien :

$$[\hat{b}, \partial_t \hat{b}^\dagger] = 0 \quad \text{(B.14)}$$

# Bibliographie

- [1] I. I. Rabi. Space Quantization in a Gyating Magnetic Field. *Phys. Rev.*, 51(8) :652–654, 1937.
- [2] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes. Molecular Microwave Oscillator and New Hyperfine Structure in the Microwave Spectrum of NH<sub>3</sub>. *Phys. Rev.*, 95(1) :282–284, 1954.
- [3] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes. The Maser—New Type of Microwave Amplifier, Frequency Standard, and Spectrometer. *Phys. Rev.*, 99(4) :1264–1274, 1955.
- [4] Theodore H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. 1960.
- [5] E. B. Treacy. Adiabatic inversion with light pulses. *Physics Letters A*, 27(7) :421–422, 1968.
- [6] C. L. Tang and H. Statz. Optical analog of the transient nutation effect. 10(5) :145–147, 1967.
- [7] L. Allen, J. H. Eberly, and Physics. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Dover Publications, 1987.
- [8] N. A. Kurnit, I. D. Abella, and S. R. Hartmann. Observation of a Photon Echo. *Phys. Rev. Lett.*, 13(19) :567–568, 1964.
- [9] G. S. Vasilev and N. V. Vitanov. Complete population transfer by a zero-area pulse. *Phys. Rev. A*, 73(2) :023416, 2006.
- [10] J. Gillot and M. A. Bouchene. Complete population transfer induced by transient nonadiabatic effects in a strongly detuned micromaser. *J. Opt. Soc. Am. B*, 28(5) :1324–1327, 2011.
- [11] Peter W. Milonni. Controlling the speed of light pulses. 35(6) :R31–R56, 2002.
- [12] T. Chanelière, D. N. Matsukevich, S. D. Jenkins, S.-Y. Lan, T. a. B. Kennedy, and A. Kuzmich. Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories. *Nature*, 438(7069) :833–836, 2005.
- [13] H. Schmidt and A. Imamoglu. Giant Kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency. *Opt. Lett.*, 21(23) :1936–1938, 1996.
- [14] S. L. McCall and E. L. Hahn. Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light. *Phys. Rev. Lett.*, 18(21) :908–911, 1967.
- [15] S. L. McCall and E. L. Hahn. Self-Induced Transparency. *Phys. Rev.*, 183(2) :457–485, 1969.

- [16] H. M. Gibbs and R. E. Slusher. Peak Amplification and Breakup of a Coherent Optical Pulse in a Simple Atomic Absorber. *Phys. Rev. Lett.*, 24(12) :638–641, 1970.
- [17] J. H. Eberly, S. R. Hartmann, and A. Szabo. Propagation narrowing in the transmission of a light pulse through a spectral hole. *Phys. Rev. A*, 23(5) :2502–2506, 1981.
- [18] M. A. Bouchène, A. Débarre, J.-C. Keller, J.-L. Le Gouët, and P. Tchénio. Observation of  $0\pi$ -pulse formation with incoherent light. *J. Opt. Soc. Am. B*, 9(2) :281–289, 1992.
- [19] S. J. van Enk and H. J. Kimble. Strongly focused light beams interacting with single atoms in free space. *Phys. Rev. A*, 63(2) :023809, 2001.
- [20] S. J. van Enk. Atoms, dipole waves, and strongly focused light beams. *Phys. Rev. A*, 69(4) :043813, 2004.
- [21] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche. Quantum Rabi Oscillation : A Direct Test of Field Quantization in a Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11) :1800–1803, 1996.
- [22] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, 73(3) :565–582, 2001.
- [23] Anatoly A. Svidzinsky, Jun-Tao Chang, and Marlan O. Scully. Dynamical Evolution of Correlated Spontaneous Emission of a Single Photon from a Uniformly Excited Cloud of N Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 100(16) :160504, 2008.
- [24] P. R. Berman and J.-L. Le Gouët. Quantum-information storage : A Schrödinger-picture approach. *Phys. Rev. A*, 79(4) :042314, 2009.
- [25] Mo Scully, Gm Meyer, and H Walther. Induced emission due to the quantized motion of ultracold atoms passing through a micromaser cavity. 76(22) :4144–4147, 1996.
- [26] Georg M. Meyer, Marlan O. Scully, and Herbert Walther. Quantum theory of the mazer. I. General theory. *Phys. Rev. A*, 56(5) :4142–4152, 1997.
- [27] Markus Löffler, Georg M. Meyer, Michael Schröder, Marlan O. Scully, and Herbert Walther. Quantum theory of the mazer. II. Extensions and experimental considerations. *Phys. Rev. A*, 56(5) :4153–4163, 1997.
- [28] Michael Schröder, Karl Vogel, Wolfgang P. Schleich, Marlan O. Scully, and Herbert Walther. Quantum theory of the mazer. III. Spectrum. *Phys. Rev. A*, 56(5) :4164–4174, 1997.
- [29] Thierry Bastin and John Martin. Detuning effects in the one-photon mazer. 67(5), 2003.
- [30] Peter Domokos, Peter Horak, and Helmut Ritsch. Quantum description of light-pulse scattering on a single atom in waveguides. *Phys. Rev. A*, 65(3) :033832, 2002.
- [31] J. T. Shen and Shanhui Fan. Coherent photon transport from spontaneous emission in one-dimensional waveguides. *Opt. Lett.*, 30(15) :2001–2003, 2005.

- [32] Darrick E. Chang, Anders S. Sørensen, Eugene A. Demler, and Mikhail D. Lukin. A single-photon transistor using nanoscale surface plasmons. *Nat Phys*, 3(11) :807–812, 2007.
- [33] R. Friedberg, S. R. Hartmann, and J. T. Manassah. Frequency shifts in emission and absorption by resonant systems of two-level atoms. *Physics Reports*, 7(3) :101–179, 1973.
- [34] Jamal T. Manassah. Statistical quantum electrodynamics of resonant atoms. *Physics Reports*, 101(6) :359–427, 1983.
- [35] P. W. Milonni and P. L. Knight. Retardation in the resonant interaction of two identical atoms. *Phys. Rev. A*, 10(4) :1096–1108, 1974.
- [36] J. C. Delagnes and M. A. Bouchene. Beyond the pulse-area theorem : Role of the absorption and the dispersion in the propagation of weak ultrashort resonant pulses. *Optics Communications*, 281(23) :5824–5829, 2008.
- [37] Roy J. Glauber. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Phys. Rev.*, 131(6) :2766–2788, 1963.
- [38] D. Meschede, H. Walther, and G. Müller. One-Atom Maser. *Phys. Rev. Lett.*, 54(6) :551–554, 1985.
- [39] P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre. Theory of a microscopic maser. *Phys. Rev. A*, 34(4) :3077–3087, 1986.
- [40] L. A. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther. Connection between microscopic and macroscopic maser theory. *Phys. Rev. A*, 36(2) :740–743, 1987.
- [41] P. Meystre, G. Rempe, and H. Walther. Very-low-temperature behavior of a micromaser. *Opt. Lett.*, 13(12) :1078–1080, 1988.
- [42] Imrana Ashraf, J. Gea-Banacloche, and M. S. Zubairy. Theory of the two-photon micromaser : Photon statistics. *Phys. Rev. A*, 42(11) :6704–6712, 1990.
- [43] Marlan O. Scully, H. Walther, G. S. Agarwal, Tran Quang, and W. Schleich. Micromaser spectrum. *Phys. Rev. A*, 44(9) :5992–5996, 1991.
- [44] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Coherent Operation of a Tunable Quantum Phase Gate in Cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 83(24) :5166–5169, 1999.
- [45] J. C Retamal, E Solano, and N Zagury. Ultracold atoms interacting with a sinusoidal mode of a high Q cavity. *Optics Communications*, 154(1–3) :28–34, 1998.
- [46] T. Bastin and E. Solano. Numerical computation of one-photon maser resonances for arbitrary field modes. *Computer Physics Communications*, 124(2–3) :197–203, 2000.
- [47] M. Löffler, G. M. Meyer, and H. Walther. Velocity selection for ultracold atoms using a micromaser. *EPL*, 41(6) :593, 1998.
- [48] M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy, L. Davidovich, and S. Haroche. Realization of a two-photon maser oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 59(17) :1899–1902, 1987.



- [49] Fam Le Kien, Georg M. Meyer, Marlan O. Scully, Herbert Walther, and Shi-Yao Zhu. Two-mode micromaser operating on three-level atoms. *Phys. Rev. A*, 49(2) :1367–1377, 1994.
- [50] Zhi-Ming Zhang, Sheng-Wu Xie, Ying-Li Chen, Yu-Xing Xia, and Shi-Kang Zhou. Velocity selection for ultracold three-level atoms using two micromaser cavities. *Phys. Rev. A*, 60(4) :3321–3323, 1999.
- [51] Herbert Walther, Benjamin T. H. Varcoe, Berthold-Georg Englert, and Thomas Becker. Cavity quantum electrodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 69(5) :1325, 2006.
- [52] Jean-Michel Raimond and Serge Haroche. *Exploring the quantum*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [53] G. Zumofen, N. M. Mojarad, V. Sandoghdar, and M. Agio. Perfect reflection of light by an oscillating dipole. 101(18) :180404, 2008.
- [54] G. Hétet, L. Slodička, M. Hennrich, and R. Blatt. Single atom as a mirror of an optical cavity. 107(13) :133002, 2011.
- [55] M. Stobińska, G. Alber, and G. Leuchs. Perfect excitation of a matter qubit by a single photon in free space. *EPL*, 86(1) :14007, 2009.
- [56] Huaixiu Zheng, Daniel J. Gauthier, and Harold U. Baranger. Waveguide-QED-Based Photonic Quantum Computation. *Phys. Rev. Lett.*, 111(9) :090502, 2013.
- [57] Peter Bermel, Alejandro Rodriguez, Steven G. Johnson, John D. Joannopoulos, and Marin Soljačić. Single-photon all-optical switching using waveguide-cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A*, 74(4) :043818, 2006.
- [58] D. Witthaut and A. S. Sørensen. Photon scattering by a three-level emitter in a one-dimensional waveguide. *New J. Phys.*, 12(4) :043052, 2010.
- [59] Yong Xu, Yi Li, Reginald K. Lee, and Amnon Yariv. Scattering-theory analysis of waveguide-resonator coupling. *Phys. Rev. E*, 62(5) :7389–7404, 2000.
- [60] T. S. Tsoi and C. K. Law. Quantum interference effects of a single photon interacting with an atomic chain inside a one-dimensional waveguide. *Phys. Rev. A*, 78(6) :063832, 2008.
- [61] Xiao Fei Zang, Tao Zhou, Bin Cai, and Yi Ming Zhu. Controlling single-photon transport properties in a waveguide coupled with two separated atoms. *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.*, 46(14) :145504, 2013.
- [62] Jin-Feng Huang, Jie-Qiao Liao, and C. P. Sun. Photon blockade induced by atoms with Rydberg coupling. *Phys. Rev. A*, 87(2) :023822, 2013.
- [63] Yao-Lung L. Fang, Huaixiu Zheng, and Harold U. Baranger. One-dimensional waveguide coupled to multiple qubits : photon-photon correlations. 1(1) :3, 2014.
- [64] Kevin Lalumière, Barry C. Sanders, A. F. van Loo, A. Fedorov, A. Wallraff, and A. Blais. Input-output theory for waveguide QED with an ensemble of inhomogeneous atoms. *Phys. Rev. A*, 88(4) :043806, 2013.

- [65] R. H. Dicke. Coherence in Spontaneous Radiation Processes. *Phys. Rev.*, 93(1) :99–110, 1954.
- [66] Richard Friedberg and Jamal T. Manassah. Effects of including the counter-rotating term and virtual photons on the eigenfunctions and eigenvalues of a scalar photon collective emission theory. *Physics Letters A*, 372(14) :2514–2521, 2008.
- [67] Richard Friedberg and Jamal T. Manassah. Eigenfunctions and eigenvalues in superradiance with translational symmetry. *Physics Letters A*, 372(16) :2787–2801, 2008.
- [68] Marlan O. Scully, Edward S. Fry, C. H. Raymond Ooi, and Krzysztof Wódkiewicz. Directed Spontaneous Emission from an Extended Ensemble of N Atoms : Timing Is Everything. *Phys. Rev. Lett.*, 96(1) :010501, 2006.
- [69] Marlan O. Scully. Collective Lamb Shift in Single Photon Dicke Superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 102(14) :143601, 2009.
- [70] Ralf Röhlsberger, Kai Schlage, Balaram Sahoo, Sebastien Couet, and Rudolf Ruffer. Collective Lamb Shift in Single-Photon Superradiance. *Science*, 328(5983) :1248–1251, 2010. PMID : 20466883.
- [71] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloë. Quantum Mechanics, Volume 2. 1977.
- [72] S. Derouault and M. A. Bouchene. One-photon wavepacket interacting with a two-level atom in a waveguide : Constraint on the pulse shape. *Physics Letters A*, 376(46) :3491–3494, 2012.
- [73] M. D. Crisp. Propagation of small-area pulses of coherent light through a resonant medium. 1(6) :1604, 1970.
- [74] Joshua E. Rothenberg, D. Grischkowsky, and A. C. Balant. Observation of the Formation of the  $0\pi$  Pulse. *Phys. Rev. Lett.*, 53(6) :552–555, 1984.
- [75] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [76] Minhaeng Cho and Robert J. Silbey. Suppression and enhancement of van der Waals interactions. 104(21) :8730–8741, 1996.
- [77] Minhaeng Cho. Confinement-induced enhancement or suppression of the resonant dipole–dipole interaction. 110(11) :4998–5010, 1999.
- [78] Anatoly A. Svidzinsky. Nonlocal effects in single-photon superradiance. *Phys. Rev. A*, 85(1) :013821, 2012.
- [79] Marlan O. Scully and Anatoly A. Svidzinsky. The Super of Superradiance. *Science*, 325(5947) :1510–1511, 2009. PMID : 19762635.
- [80] Anatoly A. Svidzinsky, Jun-Tao Chang, and Marlan O. Scully. Cooperative spontaneous emission of N atoms : Many-body eigenstates, the effect of virtual Lamb shift processes, and analogy with radiation of N classical oscillators. *Phys. Rev. A*, 81(5) :053821, 2010.
- [81] David L. Andrews and David S. Bradshaw. Virtual photons, dipole fields and energy transfer : a quantum electrodynamical approach. *Eur. J. Phys.*, 25(6) :845, 2004.

- [82] Huaixiu Zheng and Harold U. Baranger. Persistent Quantum Beats and Long-Distance Entanglement from Waveguide-Mediated Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 110(11) :113601, 2013.
- [83] P. W. Milonni, D. F. V. James, and H. Fearn. Photodetection and causality in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 52(2) :1525–1537, 1995.
- [84] Marco del Rey, Carlos Sabín, and Juan León. Short-time quantum detection : Probing quantum fluctuations. *Phys. Rev. A*, 85(4) :045802, 2012.
- [85] Giuseppe Patera. Propriété quantiques des impulsions ultra courtes générées par oscillateurs paramétriques optiques pompés en mode synchrone : compression des fluctuations et intrication multi-modes, 2008.
- [86] V Delaubert. Imagerie quantique à petit nombre de modes transverses, 2007.
- [87] Benoît Chalopin. Optique quantique multimode : des images aux impulsions, 2009.
- [88] Alex(Institut d’Optiques) Ourjountsev. Étude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d’états intriqués non-gaussiens de la lumière, 2007.
- [89] J. Seke. Extended Jaynes-Cummings model. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2(6) :968–970, 1985.
- [90] Shih-Chuan Gou. Quantum behavior of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity. *Phys. Rev. A*, 40(9) :5116–5128, 1989.
- [91] Amitabh Joshi and R. R. Puri. Characteristics of Rabi oscillations in the two-mode squeezed state of the field. *Phys. Rev. A*, 42(7) :4336–4342, 1990.
- [92] A. M. Abdel-Hafez. Degenerate and nondegenerate two-mode normal squeezing in a two-level atom and two-mode system. 45(9) :6610, 1992.
- [93] K. J. Blow, Rodney Loudon, Simon J. D. Phoenix, and T. J. Shepherd. Continuum fields in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 42(7) :4102–4114, 1990.
- [94] C. F. Lo. Canonical dressing in the multimode two-quantum Jaynes-Cummings model. *Eur. Phys. J. D*, 1(1) :93–95, 1998.
- [95] Heng-Mei Li and Hong-Yi Fan. Exactly solving the general non-degenerate multimode multiphoton Jaynes-Cummings model with field nonlinearity. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 42(38) :385304, 2009.
- [96] N. Treps, V. Delaubert, A. Maître, J. M. Courty, and C. Fabre. Quantum noise in multipixel image processing. *Phys. Rev. A*, 71(1) :013820, 2005.
- [97] Yimin Wang, Jiří Minář, Lana Sheridan, and Valerio Scarani. Efficient excitation of a two-level atom by a single photon in a propagating mode. *Phys. Rev. A*, 83(6) :063842, 2011.
- [98] Rodney Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 2000.
- [99] B. Huttner, S. Serulnik, and Y. Ben-Aryeh. Quantum analysis of light propagation in a parametric amplifier. *Phys. Rev. A*, 42(9) :5594–5600, 1990.