



# Effets de cohérence en diffusion multiple de la lumière et intrication des états cohérents

Mohamed Taha Rouabah

► **To cite this version:**

Mohamed Taha Rouabah. Effets de cohérence en diffusion multiple de la lumière et intrication des états cohérents. Autre [cond-mat.other]. Université Nice Sophia Antipolis, 2015. Français. <NNT : 2015NICE4012>. <tel-01166030>

**HAL Id: tel-01166030**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01166030>**

Submitted on 22 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE NICE SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences  
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

## THESE

Pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**  
de l'UNIVERSITE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

Dicipline : Physique

Présentée et soutenue par  
**Mohamed Taha ROUABAH**

# EFFETS DE COHÉRENCE EN DIFFUSION MULTIPLE DE LA LUMIÈRE ET INTRICATION DES ÉTATS COHÉRENTS

Thèse dirigée par Robin Kaiser et Nouredine Mebarki  
soutenue le 09 Avril 2015

### Jury :

M. Achour Benslama	Professeur à l'univ. Frères Mentouri de Constantine	Président
M. Jean-Pierre Gazeau	Professeur émérite à l'université de Paris Diderot	Rapporteur
M. Jook Walraven	Professeur émérite à l'université d'Amsterdam	Rapporteur
M. Mohamed Benarous	Professeur à l'univ. Hassiba Benbouali de Chlef	Examineur
M. Nouredine Mebarki	Professeur à l'univ. Frères Mentouri de Constantine	Directeur de thèse
M. Robin Kaiser	Directeur de recherche CNRS, Nice	Co-directeur de thèse
Mme. Patrizia Vignolo	Professeur à l'université Nice-Sophia Antipolis	Invitée



*à mes grands parents*



# Remerciements

Je tiens à faire part de ma plus vive reconnaissance à mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours et ont su me guider vers le but que je me suis fixé.

Mes directeurs de thèse Nouredinne Mebarki et Robin Kaiser ont su me transmettre beaucoup de motivation, de bagage scientifique et surtout de la méthodologie. Je leurs adresse mes remerciements les plus distingués.

Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de collaborer pour la concrétisation de mes travaux de recherche. Un remerciement distingué à Nicola Piovella pour son accueil chaleureux lors de mes visites à Milan et pour le temps et l'attention qui m'a accordé. Je remercie également Romain Bachelard pour les échanges fructueux que nous avons pu avoir à Nice et à Sao Carlos. Les remarques toujours pertinentes de William Guerin ont eu un impact considérable sur mes travaux de recherche ainsi que sur mon manuscrit de thèse. Je le remercie pour ça disponibilité.

Je souhaite remercier mes collègues doctorants et post-doctorants avec qui j'ai pu passer des moments inoubliables tout au long de ces années de thèse, aussi bien dans le cadre scientifique que personnel. Patrizia Vignolo était mon premier contact à Nice et a joué un rôle important lors de mon arrivée au sein de la grande famille de l'INLN. Je tien à sincèrement la remercier. Je suis sincèrement reconnaissant à tout le personnel administratif du LPMS et de l'INLN pour avoir été aussi bien attentifs que efficaces.

Un grands merci à tous ceux et celles qui ont apporté de manière directe ou indirecte leurs précieuses contributions à l'accomplissement de ce travaille de thèse.



# Table des matières

Introduction	vii
<b>I Étude théorique des effets de cohérence en diffusion de la lumière</b>	<b>1</b>
<b>1 Modèles</b>	<b>3</b>
1.1 Modèle de dipôles couplés (CD)	5
1.1.1 Approche CD scalaire	7
1.1.2 Approche CD vectoriel	24
1.2 Développement en série de diffusion multiple (MSS)	26
1.2.1 Rayonnement par ordre de diffusion	27
1.2.2 Régime de convergence de la MSS	30
1.3 Multiple Scattering Series <i>vs</i> Coupled Dipoles	33
1.4 Conclusion	35
<b>2 Effets de cohérence en diffusion faible</b>	<b>37</b>
2.1 Premier et second ordre de diffusion	38
2.2 Rétrodiffusion cohérente (CBS)	41
2.3 Diffusion cohérente vers l'avant (CFS)	44
2.4 Interférence entre ordres de diffusion faible	48
2.5 Conclusion	50
<b>3 Effets coopératifs en diffusion multiple</b>	<b>51</b>
3.1 Modèle de marche au hasard du photon (RW)	52
3.2 Diagramme de rayonnement en diffusion multiple	55
3.3 Force de pression de radiation en diffusion multiple	58
3.3.1 Protocole et résultats expérimentaux	59
3.3.2 Expérience <i>vs</i> CD <i>vs</i> RW	61
3.4 Effet d'ombre en diffusion multiple	63
3.5 Conclusion	65



<b>4 Effets de synchronisation en diffusion multiple</b>	<b>69</b>
4.1 Cohérence de phases en diffusion multiple . . . . .	70
4.1.1 Paramètre d'ordre pour les dipôles couplés . . . . .	75
4.1.2 Synchronisation de phases en diffusion multiple! . . . . .	79
4.2 Probabilité d'intensité des dipôles en diffusion multiple . . . . .	84
4.3 Conclusion et perspectives . . . . .	84
<b>II Algèbre <math>q</math>-déformée et décohérence</b>	<b>89</b>
<b>5 Intrication quantique des états cohérents <math>q</math>-déformés</b>	<b>91</b>
5.1 Algèbre de Weyl-Heisenberg $q$ -déformée . . . . .	92
5.2 États Cohérents . . . . .	93
5.2.1 États cohérents de l'oscillateur harmonique . . . . .	94
5.2.2 États cohérents non-linéaires . . . . .	96
5.2.3 Interprétation non-linéaire de l'approche $q$ -déformée . . . . .	96
5.3 États cohérents déformés . . . . .	98
5.3.1 Construction des états cohérents déformés . . . . .	98
5.3.2 Intrication des états cohérents déformés . . . . .	100
5.4 Conclusion . . . . .	106
<b>Conclusion générale</b>	<b>109</b>
<b>Annexes</b>	<b>113</b>
<b>A Évolution temporelle d'un système de <math>N</math> dipôles couplés</b>	<b>115</b>
A.1 Équation d'évolution temporelle en approche classique . . . . .	115
A.2 Équation d'évolution temporelle en approche quantique . . . . .	118
<b>B Dérivation analytique de la section efficace de diffusion</b>	<b>121</b>
<b>C Dérivation de la force de pression de radiation intrinsèque (IRPF)</b>	<b>125</b>
C.1 IRPF en expérience . . . . .	125
C.2 IRPF en modèle CD . . . . .	126
C.3 IRPF en modèle RW . . . . .	129
<b>D Dérivation des états cohérents déformés</b>	<b>131</b>
<b>E Publications</b>	<b>137</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>

# Introduction

La description quantique de l'interaction lumière-atome suscite beaucoup d'intérêt depuis les débuts de la mécanique quantique. Le développement de l'optique quantique, à travers la quantification du champ lumineux, a permis l'émergence de l'électrodynamique quantique (*quantum electrodynamics* (QED)) au début des années 1960. Pendant plusieurs décennies l'interaction lumière-atome a été essentiellement étudiée dans le cadre de la QED pour un petit nombre d'atomes ou un atome unique [1]. Des progrès spectaculaires ont été réalisés en matière de manipulation d'un état quantique à travers, par exemple, le couplage d'un atome unique à une cavité haute finesse [2, 3].

Par ailleurs, le processus d'absorption et d'émission " collective " de photons par un ensemble de plusieurs atomes [4, 5] est au cœur de plusieurs phénomènes physiques d'actualité, notamment dans le domaine de l'information quantique sous ses différents aspects [6, 7]. Par exemple, dans une expérience réalisée sur des nuages contenant un grand nombre d'atomes, le champ lumineux incident, approximé à un état cohérent, est transféré en une superposition cohérente d'états atomiques. L'état stocké dans l'ensemble atomique est ensuite imprimé de manière cohérente de nouveau dans le champ lumineux [8]. De ce fait, l'état quantique est transféré entre la lumière et les atomes qui jouent le rôle de mémoires quantiques [9, 10]. Cette capacité de générer, manipuler, stocker puis récupérer un état quantique de la lumière – qui constitue un support naturel pour le transport de l'information à longues distances – est l'un des enjeux majeurs du traitement quantique de l'information [11], particulièrement pour la réalisation de véritables réseaux quantiques de communication [12, 13]. Cependant, la distribution de l'état quantique sur des distances appréciables dans l'objectif de la réalisation d'un réseau quantique étendu est freinée par les pertes associées à la diffusion, la diffraction et l'absorption de la lumière durant le transport. Par conséquent, une fois générée et traitée, l'information quantique doit être stockée localement dans des relais quantiques. Ces derniers permettent la distribution de paires de photons intriqués sur plusieurs mémoires quantiques positionnées le long du canal de transport [14]. L'amélioration des performances de ces dernières est un sujet de recherche éminent

et enregistre des progrès remarquables. Une étude très récente présente une mémoire quantique avec un temps de cohérence de six heures [15]. En outre, le rôle de l'intrication quantique, élément intrinsèque à la mécanique quantique [16, 17], est crucial aussi bien dans le transport cohérent, que dans différents protocoles relevant de l'information quantique [18, 19, 20]. La génération d'intrication quantique entre la lumière et les atomes permet, entre autre, d'intriquer des ensembles atomiques porteurs d'information quantique [8] et de téléporter l'état atomique d'un relai quantique à un autre [21]. Par conséquent, un des enjeux principaux de la communication quantique revient à générer des états intriqués aussi parfaits que possible entre deux photons et à assurer la distribution de ces derniers entre deux sites éloignés tel que leurs intrication soit le mieux que possible préservée. Ainsi, beaucoup de travaux ont pour objectif d'étudier le transport cohérent de l'information codée dans de la lumière à travers des réseaux quantiques complexes [22]. D'ailleurs, un des principaux challenges dans la quête d'une distribution efficace des états quantiques est d'atteindre un contrôle cohérent de l'interaction lumière-atomes à l'échelle du photon unique [23]. D'où l'intérêt grandissant à l'investigation des propriétés du transport de la lumière dans les milieux atomiques faiblement excités [24]. Les nuages d'atomes froids soumis à un champ lumineux de faible intensité constituent un outil idéal pour de telles investigations. De plus, ce système offre un milieu diffusant complètement désordonné. Il est alors largement utilisé pour l'étude du transport des ondes de lumière en milieux complexes, dont les applications sont autant importantes [25].

Dans ce contexte, mon projet de thèse s'intéresse d'une part aux effets de cohérence dans l'interaction entre la lumière et un ensemble d'atomes et, d'autre part, aux effets de décohérence dans des états cohérents intriqués. Cette thèse a été réalisée en cotutelle entre, d'un côté, le Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique (LPMS) de l'université de Constantine en Algérie et, de l'autre côté, l'Institut Non-Linéaire de Nice (INLN) de l'université de Nice Sophia-Antipolis en France.

Dans le cadre d'une compétence théorique au sein du LPMS et d'une volonté de mise en place d'une activité " Information Quantique ", nous avons étudié l'effet d'une déformation de l'algèbre sur l'intrication des états cohérents [26]. En effet, la décohérence subie par un système quantique peut être perçue d'un point de vue mathématique comme une modification de sa symétrie. Cette modification est modélisée par une déformation de l'algèbre décrivant l'évolution du système quantique [27]. L'étude de l'effet d'une telle déformation sur l'intrication des états cohérents pourrait avoir plusieurs applications dans différents procédés de transport quantique. Par ailleurs, les travaux de recherche réalisés à l'INLN, dans une équipe

---

essentiellement expérimentale, m'ont permis de développer mes compétences théoriques notamment sur le volet numérique, mais surtout d'être au contact de l'expérience. Durant cette moitié de thèse à Nice nous avons étudié le rôle et l'évolution des effets de cohérence en diffusion multiple de la lumière dans un nuage d'atomes froids, soumis à un champ laser de faible intensité. L'objectif de cette étude est de déterminer l'impact de la diffusion multiple et du désordre sur la cohérence collective dans l'ensemble atomique. Rappelons qu'un couplage efficace entre la lumière et l'ensemble atomique nécessite une grande épaisseur optique de ce dernier. En plus de son importance pour l'information quantique, l'investigation des effets de cohérence dans le transport des ondes en milieux désordonnés est au cœur de plusieurs phénomènes dans différents domaines de recherche. Nous pouvons citer à titre d'exemple le transport des électrons à travers les impuretés du milieu dans les supraconducteurs ou semi-conducteurs [28]. Dans de tels systèmes *many body*, l'interaction collective des électrons avec d'autres degrés de liberté (les phonons ou les photons) joue un rôle important dans le transport. Bien plus, les effets coopératifs dus à l'interaction des électrons entre eux même suscitent beaucoup d'attention.

Afin d'assurer la fluidité du manuscrit, nous aborderons en premier lieu l'étude des effets de cohérence en diffusion multiple. Nous traiterons par la suite la déformation de l'algèbre et son effet sur l'intrication quantique.

Dans le chapitre 1, nous présentons les outils théoriques dont nous ferons usage pour l'étude des effets de cohérence dans la suite du manuscrit. À l'encontre de la théorie de transfert radiatif (*radiation transfert equation* (RTE)), les modèles que nous présenterons dans le chapitre 1 considèrent l'aspect ondulatoire de la lumière. Ils incluent alors les effets d'interférences durant le processus de diffusion. Le premier modèle, que nous appellerons modèle des dipôles couplés (*coupled dipoles* (CD)), considère le nuage de diffuseurs comme un ensemble de dipôles atomiques couplés via le champ lumineux de faible intensité auquel ils sont soumis. Nous résolvons le problème *many body* par un traitement matriciel numérique. La deuxième méthode consiste en la description de la diffusion multiple comme une série d'évènements successifs de diffusion (*multiple scattering series* (MSS)). Elle permet de calculer le champ diffusé pour chaque ordre de diffusion par itération à partir du champ incident. Nous montrerons que cette méthode ne s'intéresse qu'à la lumière, contrairement au modèle CD. L'approche MSS est plus simple numériquement et aussi efficace pour la description des premiers ordres de diffusion dans des nuages de faible épaisseur optique.

Dans le chapitre 2, nous utiliserons la méthode MSS pour la description de la diffusion faible de la lumière. Nous développerons un formalisme analytique

qui nous permettra d'obtenir une formule pour la description de la rétrodiffusion cohérente. Nous montrerons que cette formule, qui ne considère que les deux premiers ordres de diffusion, est en très bon accord avec les résultats d'une expérience réalisée sur des atomes froids. Nous décrirons aussi, par une formule analytique, la diffusion cohérente vers l'avant pour les nuages dilués. Nous constaterons que les courbes données par nos formules analytiques se superposent très bien avec les résultats des simulations numériques. Nous montrerons que la description de la diffusion ordre par ordre permet de mettre en évidence une interférence destructive entre les champs diffusés aux premier et second ordres de diffusion. Les travaux de ce chapitre ont été réalisés à travers une forte collaboration avec Nicola Piovella (université de Milan - Italie) et Romain Bachelard (université de Sao Carlos, Sao Paulo - Brésil).

Le chapitre 3 est au cœur du travail réalisé au cours de cette thèse. Nous présenterons une expérience dans laquelle est mesurée la force de pression de radiation (*radiation pressure force* (RPF)) appliquée sur un nuage d'atomes froids par un champ laser à résonance. Cette expérience réalisée par Julien Chabé *et al.* mesure le déplacement du centre de masse du nuage sous l'effet du champ incident. Elle vient en suite d'une série d'expériences réalisées à la base du même principe avec des lasers sondes désaccordés hors résonance atomique. Dans ces expériences la réduction de la RPF pour une épaisseur optique à résonance croissante fut interprétée comme une signature des effets coopératifs dans le nuage. L'objectif de l'expérience réalisée à résonance est d'étudier le rôle et le comportement de ces effets coopératifs en diffusion multiple. Nous comparerons les résultats expérimentaux à deux modèles numériques. Le premier est le modèle des dipôles couplés CD sensé donner une description complète du phénomène en considérant les effets cohérents inclus dans l'expérience. Le second modèle consiste en un modèle de marche au hasard (*random walk* (RW)) décrit par la théorie du transfert radiatif. La comparaison des résultats de l'expérience et du modèle CD à ceux du modèle RW permettrait de mettre en évidence le rôle des effets de cohérence négligés par ce dernier.

Dans le chapitre 4, il sera discuté un surprenant effet de cohérence que nous avons observé sur la distribution des phases dans le nuage atomique. Nous tenterons de quantifier cette cohérence à travers un paramètre d'ordre que nous comparerons aux formules analytiques de la RTE. De même, nous comparerons la distribution de probabilité de l'intensité des dipôles dans l'ensemble atomique aux formules de la RTE. Nous présenterons à la fin du chapitre des travaux en cours.

Dans une deuxième partie, nous présentons une autre manière théorique astucieuse de sonder les effets de cohérence dans un système quantique intriqué à

travers la déformation de sa symétrie. Dans le chapitre 5, nous utiliserons une algèbre déformée d'un groupe de Lie (groupe de Weyl-Heisenberg) afin d'étudier les effets de décohérence sur des états cohérents intriqués. Nous nous intéresserons aux états cohérents ayant une intrication maximale dits *maximally entangled coherent states* (MECS). En analogie avec ces derniers, nous construirons des états cohérents intriqués déformés. Nous examinons les effets d'une telle déformation sur l'intrication du système à travers le calcul de la concurrence pour les états intriqués en question. Nous évoquerons à la fin de cette étude l'intrication bipartite des états cohérents déformés à trois modes. Ces derniers pourraient être moins sensibles à la déformation de l'algèbre par rapport aux états cohérents à deux modes.



## Première partie

# Étude théorique des effets de cohérence en diffusion de la lumière





# Chapitre 1

## Modèles

L'étude de l'interaction lumière-matière se concrétise dans notre cas par le traitement de la diffusion de la lumière d'un champ laser de faible intensité par un nuage atomique désordonné. L'échantillon diffuseur est composé de  $N$  atomes identiques de fréquence de résonance  $\omega_a$  et de taux d'émission  $\Gamma$ . Nous supposons que la réponse des atomes au champ lumineux incident  $\mathbf{E}_0$  traduite par le moment dipolaire induit  $\mathbf{p}$ , est linéaire, i.e.,  $\mathbf{p} \propto \mathbf{E}_0$ . Dans ce sens, notre étude sera restreinte à l'espace de Hilbert contenant au plus une excitation dans le système. Le nuage atomique sera décrit comme un système d'atomes à deux niveaux avec une énergie de transition  $E_e - E_g = \hbar\omega_a$  couplés grâce au champ incident d'amplitude  $E_0$  de longueur d'onde  $\lambda$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0 = (\omega/c)\hat{\mathbf{e}}_z$  [29]. En description vectorielle de la lumière, la transition atomique  $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$  est décrite par un état fondamental  $|g_j\rangle$  et un état excité composé de trois sous niveaux Zeeman  $|e_j^\alpha\rangle$ , où  $\alpha$  correspond à la composante dans la base cartésienne telle que  $\alpha = x, y, z$  [30]. En effet, l'étude de la diffusion de la lumière en trois dimensions requiert la prise en considération de la polarisation de la lumière. Cependant, le traitement de certains problèmes peut se contenter de la limite scalaire dans laquelle la transition atomique  $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$  est décrite par un état fondamental  $|g_j\rangle$  et un état excité  $|e_j\rangle$  [31, 32]. Cette approximation scalaire est valable pour l'étude des effets collectifs dans les régimes dilués  $\rho\lambda^3 \ll 1$  où  $\rho$  représente la densité spatiale et  $\lambda = \lambda/2\pi$ . Par contre, dans les régimes denses  $\rho\lambda^3 \gg 1$ , il est nécessaire de prendre en compte la nature vectorielle de la lumière afin de décrire correctement les effets de champ proche dans le couplage dipôle-dipôle. Dans de tels régimes ce terme de champ proche qui n'est pas inclus dans le modèle scalaire, peut avoir de l'influence sur la dynamique des  $N$  dipôles couplés.

Cette approche de dipôles couplés pour la description de la diffusion de la lumière par des particules diélectriques a été introduite par Purcell et Pennypacker

[33]<sup>i</sup>. Elle consiste à calculer l'amplitude du champ émis par le nuage à travers la somme des champs émis par tous les dipôles composant le nuage. En effet, à la position  $\mathbf{r}_j$  le dipôle  $j$  est soumis au champ extérieur incident et aussi aux champs diffusés par les autres dipôles dans le nuage. Ainsi, cette approche microscopique permet la description des effets de cohérence collectifs en diffusion multiple vu qu'elle prend en considération l'interaction entre les dipôles. Dans le cadre de cette approche de dipôles couplés, plusieurs méthodes sont utilisées pour résoudre ce problème à  $N$ -corps décrivant l'interaction entre la lumière incidente et le nuage atomique :

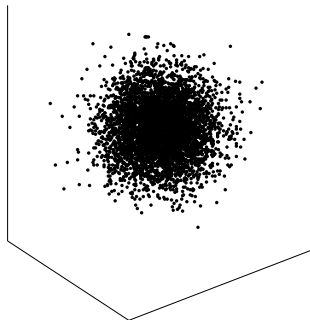
- La méthode de résolution matricielle qui consiste en la résolution de l'ensemble des  $N$  équations linéaires couplés décrivant le système par l'inversion de la matrice d'interaction [35].
- La méthode itérative pour le champ diffusé où la diffusion multiple collective apparait comme une séquence d'évènements de diffusion consécutifs [36].
- L'approche valeurs propres de l'Hamiltonien. Dans cette approche l'investigation des effets collectifs est réalisée à travers l'étude du spectre de l'Hamiltonien effectif décrivant l'interaction dipolaire entre le système des  $N$  atomes couplés [37]. Cette méthode a fait l'objet de travaux de thèse soutenue récemment au sein de notre groupe de recherche à Nice [38].

Dans la même référence, une étude détaillée compare les deux descriptions scalaire et vectorielle du problème de diffusion multiple collective. Cela ne fera donc pas l'objet d'étude dans ce manuscrit.

La première section de ce chapitre sera dédiée à l'introduction du modèle microscopique de dipôles couplés en approche scalaire. Nous présentons la méthode de résolution matricielle que nous noterons *coupled dipoles* (CD). Nous utiliserons cette méthode afin d'étudier, numériquement, la réponse de l'ensemble des  $N$  dipôles au champ incident à travers l'inversion de la matrice de couplage de dimension  $N \times N$ . Dans la seconde section du chapitre il sera question d'introduire la méthode itérative en champ diffusé pour la description de la diffusion multiple collective. Nous présenterons cette méthode en approche vectorielle afin de donner un bref aperçu sur la description vectorielle de l'approche des dipôles couplés. Bien que les deux méthodes traitent le même problème de dipôles couplés, nous réserverons cette appellation à la résolution matricielle du problème que nous noterons CD (pour *coupled dipoles*) le long de ce manuscrit. L'approche itérative sera notée MSS (pour *multiple scattering series*).

---

i. La description ondulatoire de la diffusion multiple dans les milieux désordonnés a été introduite par Foldy [34].



**Figure 1.1.** Nuage sphérique en distribution gaussienne de rayon r.m.s.  $k\sigma_R = 20$  composé de  $N = 1400$  atomes.  $b = \sqrt{2\pi}\sigma_R\rho_0\sigma_{sc}$ ,  $b_0 = 2N/(k\sigma_R)^2$  en scalaire et  $3N/(k\sigma_R)^2$  en vectoriel.  $l_{sc} = 1/\rho_0\sigma_{sc} = \sqrt{2\pi}\sigma_R/b$  est le libre parcours moyen au centre du nuage.

## 1.1 Modèle de dipôles couplés (CD)

Le modèle que nous présentons dans cette section est un modèle microscopique considérant le nuage de diffuseurs atomiques comme un ensemble de dipôles couplés. Partant de l'Hamiltonien d'interaction lumière-atomes, nous allons dériver les équations linéaires d'évolution temporelle des amplitudes de l'état excité. La résolution matricielle de ces équations nous permettra de calculer différentes observables décrivant le système dont les expressions sont données en fonction des amplitudes de l'état excité. Ce modèle a été largement utilisé pour l'étude de la diffusion de la lumière par des nuages atomiques [39] ainsi que pour l'étude des effets coopératifs entre les dipôles couplés [24].

### Description du système atomique

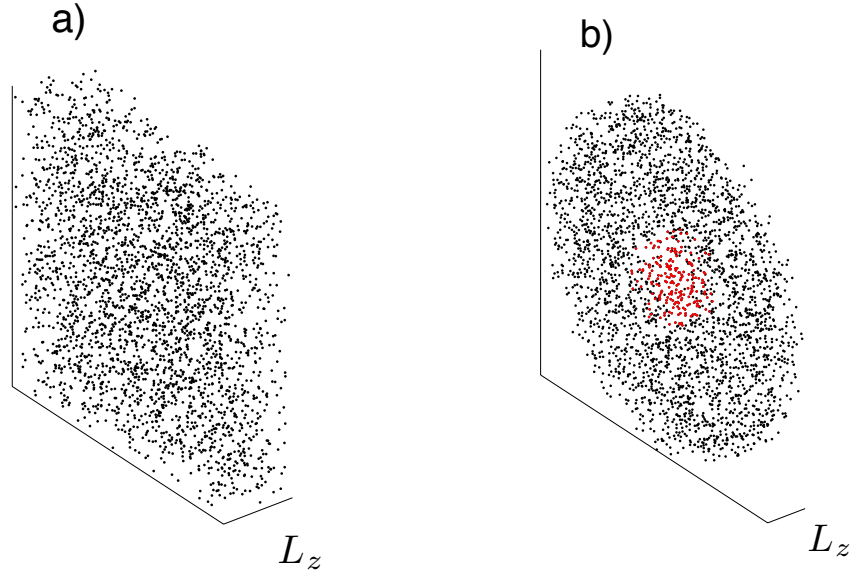
Le milieu diffusant consiste en un nuage de  $N$  atomes identiques. Théoriquement, l'échantillon de volume  $V$  peut aussi bien avoir une distribution atomique uniforme de densité  $\rho = N/V$ , qu'une distribution gaussienne de la forme

$$\rho(r) = \rho_0 \exp \left[ -r^2 / (2\sigma_R^2) \right] , \quad (1.1)$$

avec une densité au centre de  $\rho_0$  et un rayon r.m.s.  $\sigma_R$ . La section efficace de diffusion atomique est définie par

$$\sigma_{sc} = \sigma_0 / (1 + 4\delta^2) , \quad (1.2)$$

où  $\delta = \Delta/\Gamma$  avec  $\Delta = \omega - \omega_a$  le désaccord du laser par rapport à la fréquence de résonance atomique. La section efficace de diffusion à résonance s'écrit  $\sigma_0 = \lambda^2/\pi$



**Figure 1.2.** a) Distribution d'un nuage d'atome en géométrie slab d'épaisseur optique  $b_0 = 4\pi N / (k L_x k L_y)$  en scalaire. Sa densité atomique peut être exprimée en unité de la longueur d'onde au cube par  $\rho \lambda^3 = (2\pi)^3 N / (k^3 V)$  où  $V = L_x L_y L_z$  est le volume du slab. – b) Cylindre : de rayon  $R$  et d'une épaisseur longitudinale  $L_z$ .  $b_0 = 4N / (kR)^2$  en scalaire. La densité atomique est donnée par  $\rho \lambda^3 = (2\pi)^3 N / (k^3 V)$  avec  $V = \pi R^2 L_z$ . L'excitation au centre (zone en rouge sur le cylindre) est une technique qui nous permet d'éviter les effets de bords.

en modèle scalaire et  $\sigma_0 = 3\lambda^2 / 2\pi$  en modèle vectoriel de la lumière. L'épaisseur optique de l'échantillon est définie par la formule

$$b = \int \rho(0, 0, z) \sigma_{sc} dz , \quad (1.3)$$

que nous pouvons écrire sous la forme  $b = b_0 / (1 + 4\delta^2)$  avec

$$b_0 = \int \rho(0, 0, z) \sigma_0 dz , \quad (1.4)$$

l'épaisseur optique à résonance du nuage atomique. Le libre parcours moyen du photon à l'intérieur du nuage est donné par  $l_{sc} = 1 / \rho \sigma_{sc}$ .

Par ailleurs, dans notre expérience le système consiste en un nuage d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$  ( $\Gamma \simeq 2\pi \cdot 6.06$  MHz,  $\Gamma^{-1} \simeq 26.23$  ns pour la transition  $D_2$  [40]) soumis à un piègeage magnéto-optique par refroidissement Doppler. Une fois comprimé dans le piège, le nuage prend la forme d'une boule dense au centre et moins dense sur

les ailes. Par conséquent, dans nos calculs théoriques (analytiques et numériques) dont le but est de simuler le dispositif expérimental, nous considérons des nuages de distributions spatiales gaussiennes de formes sphériques avec un rayon r.m.s.  $k_0\sigma_R$  exprimée en unité de l'inverse du nombre d'onde. Cette géométrie sera utilisée dans les chapitres 2 et 3. Nous ferons également usage de distributions spatiales uniformes en forme d'une couche d'atomes (*slab*) d'épaisseur  $k_0L_z$  petite devant la taille transverse de la couche. Cette géométrie largement utilisée en tant que cas d'école nous permettra de comparer nos résultats à d'autres travaux théoriques traitant la diffusion collective de la lumière par des milieux désordonnés. Nous utiliserons cette géométrie dans le chapitre 4. Il est intéressant de mentionner que Manassah présente dans la ref. [41] une étude s'intéressant aux effets de la géométrie considérée sur le taux d'émission et le shift de fréquence en diffusion coopérative.

### 1.1.1 Approche CD scalaire

Dans cette approche nous assimilons la lumière à une onde scalaire en négligeant la polarisation du champ lumineux<sup>ii</sup>. D'autre part, nous assimilons les atomes à des diffuseurs ponctuels émettant la lumière de manière isotrope sous forme d'ondes sphériques. Dans ce cas, les dipôles oscillent entre l'état fondamental  $|g\rangle$  et l'état excité à une seule composante  $|e\rangle$ . Le modèle n'inclue que les interactions à longue portée négligeant ainsi les effets de champ proche de l'interaction dipôle-dipôle. Ainsi, ce modèle en dépit des approximations qu'il implique, constitue une bonne description de la diffusion de la lumière par des nuages atomiques dans les régimes dilués ( $\rho\lambda^3 \ll 1$ ).

### Hamiltonien d'interaction lumière-atomes

Dans cette section nous allons présenter dans l'approximation scalaire l'Hamiltonien d'interaction entre une onde plane incidente et un ensemble de dipôles atomiques induits de positions aléatoires. Dans le cadre de l'approximation dipolaire, nous considérons les atomes comme des diffuseurs ponctuels<sup>iii</sup>. Nous rappelons que nous faisons l'hypothèse d'une faible intensité du champ laser incident afin de rester dans le cadre de l'optique linéaire. Nous ferons aussi usage de l'approximation de Markov qui suppose qu'il n'y a pas d'effet de mémoire lors du processus de diffusion. Cette approximation Markovienne est valable dans le cas d'une désexcit-

---

ii. Les trois composantes du champ correspondant aux trois directions de l'espace sont remplacées par une seule.

iii. Cette approximation est valable si la distance entre l'électron et le centre de masse de l'atome est petite devant la longueur d'onde  $\lambda$  du champ lumineux extérieur. Ainsi le champ à la position de l'électron peut être approximé par celui au centre de masse de l'atome.

tation lente du système devant le temps de vol du photon dans le nuage<sup>iv</sup>. De plus, nous négligeons tous les degrés de liberté externes des atomes (vitesse, vibrations ...). Dans la représentation d'interaction et dans le référentiel de l'onde tournante l'interaction lumière-atomes est décrite par l'Hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2} \sum_j^N (\hat{\sigma}_j e^{i(\Delta t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)} + \hat{\sigma}_j^+ e^{-i(\Delta t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)}) + \hbar \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{\sigma}_j e^{-i\omega_a t} + \hat{\sigma}_j^+ e^{i\omega_a t}) \cdot \left( \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)} + \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)} \right), \quad (1.5)$$

avec  $\Omega = dE_0/\hbar$  la pulsation de Rabi décrivant le couplage du laser de l'état fondamental  $|g\rangle$  à l'état excité  $|e\rangle$  avec  $d$  l'élément réduit de la matrice de transition dipolaire associé à la transition entre l'état fondamental et l'état excité. L'hypothèse d'un champ laser de faible intensité correspond à  $\Omega \ll \Gamma$ . D'autre part  $\hat{\sigma}_j = |g_j\rangle\langle e_j|$  est l'opérateur de désexcitation (*lowering operator*) de l'atome  $j$ ,  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  est l'opérateur annihilation du photon de mode  $\mathbf{k}$  et  $g_{\mathbf{k}}$  est la constante de couplage atome-photon (fréquence de Rabi du photon unique) du mode  $\mathbf{k}$  donnée par [42] :

$$g_{\mathbf{k}} = \omega_a \frac{d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} V_{ph}}}, \quad (1.6)$$

avec  $V_{ph}$  le volume du photon. Il est à noter que nous considérons uniquement le cas scalaire. Par conséquent nous omettons les notations relatives à la polarisation du champ incident  $\epsilon_L$ , à celle du champ émis  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  et aussi aux composante en polarisation atomique  $\alpha$ . D'autre part, dans l'expression de l'Hamiltonien donnée par l'eq. (1.5), l'approximation de l'onde tournante (*Rotating Wave Approximation* (RWA)) a été faite pour le premier terme correspondant à l'interaction entre les atomes et le laser incident, mais n'a pas été appliquée sur le terme d'interaction entre les atomes et le rayonnement émis. Ainsi, les termes résonants aussi bien que les termes non-résonants sont inclus dans la partie relative à l'interaction matière-rayonnement. Cela permet de prendre en considération les effets liés à l'échange des photons virtuels [43, 44]. Plusieurs travaux discutent les répercussions de l'application de la RWA sur l'étude des effets collectifs à travers le rôle que jouent les termes non-résonants dans l'Hamiltonien donné par l'eq. (1.5) dans certains problèmes [45, 46]. Plus de détails sur l'Hamiltonien que nous venons de présenter (dans les deux approches scalaire et vectorielle) sont disponibles dans des travaux

---

iv. Autrement dit, cette approximation est valable lorsque le temps entre deux évènements successifs de diffusion du photon est grand par rapport au temps que met se dernier à traverser le nuage.

de thèses réalisés récemment au sein de notre groupe [47, 38].

Le cas spécifique dans lequel un seul photon est supposé être présent dans le système a été étudié dans les refs. [48, 23, 49]. Le cas du laser à faible intensité, que nous étudions dans ce manuscrit, a été introduit plus tard dans les refs. [32, 24]. En effet, la présence d'un faisceau incident sur le milieu crée une brisure de symétrie (axe de rayonnement privilégié selon le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  du champ laser). Cela peut jouer un rôle majeur dans la réponse physique de ce genre de systèmes.

Nous allons chercher une solution à l'équation de Schrödinger

$$\partial_t |\Psi(t)\rangle = -(i/\hbar) \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (1.7)$$

sous la forme [32] :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \alpha(t) |g_1 \dots g_N\rangle |0\rangle_{\mathbf{k}} \\ & + \exp(-i\Delta t) \sum_{j=1}^N \beta_j(t) |g_1 \dots e_j \dots g_N\rangle |0\rangle_{\mathbf{k}} \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \mu_{\mathbf{k}}(t) |g_1 \dots g_N\rangle |1\rangle_{\mathbf{k}} \\ & + \sum_{m,n=1}^N \sum_{\mathbf{k}} \nu_{m<n,\mathbf{k}}(t) |g_1 \dots e_m \dots e_n \dots g_N\rangle |1\rangle_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le premier terme dans l'eq. (1.8) correspond à l'état fondamental initial sans excitation et sans photon dans le mode du vide. Le deuxième constitue la somme sur tous les états dans lesquels un seul atome a été excité par le champ incident. Le troisième terme correspond à la relaxation de l'atome excité vers l'état fondamental en émettant un photon dans le mode  $\mathbf{k}$ . Tandis que le dernier terme représente la présence de deux atomes excités à l'intérieur du nuage ainsi qu'un photon virtuel. Ceci est dû aux termes non-résonants dans l'Hamiltonien (1.5) et disparaît si l'approximation de l'onde tournante est appliquée. La substitution de l'eq. (1.8) dans l'équation de Schrödinger donne le système d'équations différentielles couplées



suisant

$$\dot{\alpha} = -\frac{i}{2}\Omega \sum_{j=1}^N \beta_j e^{i\Delta t - i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j} , \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j &= -\frac{i}{2}\Omega \alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j} - i \sum_{\mathbf{k}} g_k \mu_k(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \\ &\quad - i \sum_{\mathbf{k}} g_k e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)t} \sum_{m=1, m \neq j}^N \nu_{jm, \mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} , \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\dot{\mu}_{\mathbf{k}} = -i g_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \sum_{j=1}^N \beta_j(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} , \quad (1.11)$$

$$\dot{\nu}_{jm, \mathbf{k}} = -i g_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)t} [\beta_m(t) e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} + \beta_j(t) e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m}] . \quad (1.12)$$

où  $\omega_{\mathbf{k}}$  représente la pulsation du photon émis dans le mode  $\mathbf{k}$ . En intégrant les eqs. (1.11) et (1.12) par rapport au temps avec les conditions initiales  $\mu_{\mathbf{k}}(0) = 0, \nu_{jm, \mathbf{k}}(0) = 0$ , nous obtenons

$$\mu_{\mathbf{k}}(t) = -i g_{\mathbf{k}} \int_0^t dt' \sum_{j=1}^N \beta_j(t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t' - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} , \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \nu_{jm, \mathbf{k}}(t) &= -i g_{\mathbf{k}} \int_0^t dt' \beta_m(t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)t' - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \\ &\quad + -i g_{\mathbf{k}} \int_0^t dt' \beta_j(t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)t' - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} . \end{aligned} \quad (1.14)$$

En substituant  $\mu_{\mathbf{k}}(t)$  et  $\nu_{jm, \mathbf{k}}(t)$  dans l'eq. (1.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j(t) &= -\frac{i}{2}\Omega \alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j} \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \sum_{m=1}^N \int_0^t dt' \beta_m(t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)(t' - t) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)} \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \sum_{m=1, m \neq j}^N \int_0^t dt' \beta_m(t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)(t' - t) - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)} \\ &\quad - (N - 1) \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 \int_0^t dt' \beta_j(t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)(t' - t)} . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ainsi, nous avons éliminé les degrés de liberté du champ lumineux et obtenu un système d'équations fermé pour les coefficients de l'état fondamental et l'état à

une seule excitation  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement. De plus, pour une faible saturation (régime linéaire) nous pouvons supposer que  $\alpha \approx 1$ . Ainsi, dans l'approximation de Markov [49] l'interaction lumière-atomes se réduit à l'équation différentielle du premier ordre suivante (voir annexe A.2) :

$$\dot{\beta}_j(t) = -\frac{i}{2}\Omega e^{ik_0 \mathbf{r}_j} + \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right) \beta_j(t) - \frac{\Gamma}{2} \sum_{m \neq j}^N \beta_m \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}, \quad (1.16)$$

où

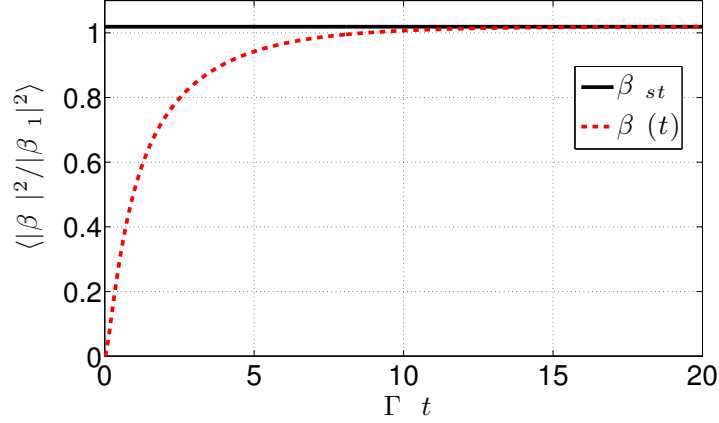
$$\Gamma = \frac{d^2 k_0^3}{2\pi \varepsilon_0 \hbar}, \quad (1.17)$$

est le taux de relaxation de l'atome vers l'état fondamental dérivé par l'approche quantique en modèle scalaire<sup>v</sup> [50].

L'eq. (1.16) exprime l'évolution temporelle du coefficient  $\beta_j$  correspondant à l'amplitude  $|\beta_j|^2$  de l'état dans lequel seul l'atome  $j$  est excité. Ainsi, toute la physique de l'interaction entre le champ incident et les dipôles induits à laquelle nous allons nous intéresser est incluse dans le système d'équations différentielles (1.16). Le premier terme de l'eq. (1.16) représente l'onde plane incidente et le second est relatif à l'évolution naturelle du dipôle  $j$  en réponse au champ lumineux extérieur. Ces deux termes suffisent pour la description d'un nuage très dilué sans effets collectifs. D'autre part, l'effet que subi le dipôle  $j$  à cause de la présence des autres dipôles du nuage (effet collectif) est inclus dans l'eq. (1.16) à travers le terme de couplage  $G_{jm} = \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}$ . Dans ce cas scalaire, cet effet collectif consiste en l'interaction longue portée à travers les ondes sphériques émises par les autres dipôles. Ces ondes décroissent de manière isotrope en  $1/r$ . Notons que les équations pour les coefficients  $\beta_j(t)$  peuvent aussi être dérivées à partir des équations de l'évolution temporelle des opérateurs atomiques et des opérateurs du champ lumineux [51]. Par ailleurs, les équations d'évolutions temporelles des coefficients  $\beta_j(t)$  peuvent aussi être dérivées par une approche classique. L'émission collective d'un ensemble d'atomes à deux niveaux et alors analogue à celle d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques pilotés par un champ extérieur de faible intensité. Nous présentons cette approche classique dans l'annexe A.1 où nous dérivons l'équation d'évolution des coefficients  $\beta_j(t)$  dans le cadre de l'optique linéaire à partir du modèle de l'électron élastiquement lié [32]. Notons que les deux approches donnent le même résultat uniquement dans la limite des faibles excitations.

---

v. Nous discuterons plus tard les corrections apportées à l'expression du taux de relaxation en modèle vectoriel de la lumière ainsi que dans le cas d'une approche classique du problème discutée dans l'annexe A.1.



**Figure 1.3.** Évolution temporelle du système de dipôles couplés vers l'état stationnaire représentée par la population moyenne de l'état excité (courbe rouge). La courbe noire représente la solution stationnaire pour le même jeu de paramètres. Simulations réalisées à résonance pour une sphère gaussienne d'épaisseur optique  $b = 10$  et de rayon r.m.s.  $\sigma_R = 10/k$  moyennées sur 100 réalisations. Les deux courbes sont normalisées par la population moyenne stationnaire dans le cas d'un nuage atomique très dilué.

La description physique du système des  $N$  dipôles couplés revient à la résolution du système d'équations linéaires couplées pour les coefficients  $\beta_j(t)$ <sup>vi</sup>. En effet, les différentes observables que nous utiliserons pour la description de la diffusion multiple collective du champ incident par le nuage atomique, seront exprimées en fonction des coefficients  $\beta_j$ . Nous avons ainsi développé un programme pour la résolution temporelle numérique de l'eq. (1.16) à travers l'inversion de la matrice d'interaction<sup>vii</sup> de dimension  $N \times N$ . Nous avons vérifié numériquement que la solution de l'eq. (1.16) évolue vers un état stationnaire ( $\dot{\beta}_j(t) = 0$ ) pour un temps  $t \gg \Gamma^{-1}$  à cause du pilotage laser comme le montre la fig. 1.3. La sur-excitation observée sur la population de l'état excité par rapport au cas très dilué revient au fait qu'en diffusion multiple coopérative chaque dipôle ressent les champs diffusés par les autres atomes en plus du champ incident. La diffusion multiple fait qu'une partie de la lumière est piégée dans le nuage.

Dans la suite de ce manuscrit nous allons décrire le comportement de notre système atomique en réponse à une excitation extérieure dans le régime stationnaire. Une fois les amplitudes  $\beta_j$  obtenues numériquement, nous pourrions calculer

vi. Les coefficients  $\beta_j(t)$  seront communément appelés " amplitudes des dipôles " dans la suite du manuscrit

vii. La matrice de couplage est de dimension  $N \times N$  en description scalaire de la lumière. Elle sera de dimension  $3N \times 3N$  dans le cas vectoriel.

différentes observables du système à travers lesquelles nous allons étudier les effets de cohérence en diffusion collective de la lumière par le nuage atomique. En effet, expérimentalement nous ne mesurons pas les amplitudes  $\beta_j$  mais les conséquences de leurs évolutions sur les observables mesurables. Ainsi, dans la suite de cette section nous allons dériver théoriquement les expressions du champ diffusé par le nuage, de sa section efficace de diffusion et de la force de pression de radiation appliquée sur le nuage par le champ incident.

### Champ émis en modèle CD scalaire

Nous allons maintenant dériver le champ électrique émis par les diffuseurs dans le nuage atomique. En représentation de Heisenberg l'opérateur d'annihilation du champs lumineux évolue selon l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{H}] , \\ &= -ig_k e^{i(\omega_k - \omega_a)t} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} , \end{aligned} \quad (1.18)$$

où nous avons négligé les termes non-résonants. Le champs émis est obtenu en faisant la somme sur tous les modes. L'opérateur champ électrique peut être décomposé en la somme de ses deux parties de fréquence positive et négative  $\hat{\mathbf{E}}_{\text{sc}} = \hat{\mathbf{E}}_{\text{sc}}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}_{\text{sc}}^{(-)}$  tel que

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{sc}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_k \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (1.19)$$

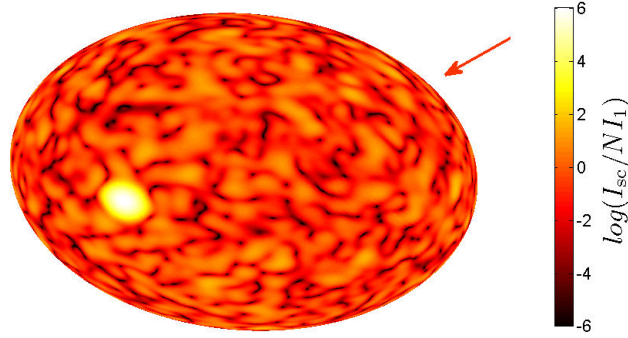
$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{sc}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (1.20)$$

où  $\mathcal{E}_k = (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V_{ph})^{1/2}$ . Dans cette section nous ne prenons pas en compte la polarisation du champ  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  (approximation scalaire) et nous considérons uniquement la partie positive en fréquence de l'opérateur champ électrique [52]

$$\hat{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_k \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} . \quad (1.21)$$

En intégrant l'eq. (1.18) par rapport au temps avec  $\hat{a}_{\mathbf{k}}(0) = 0$  et en l'insérant dans l'eq. (1.21) dans l'approximation de Markov habituelle, nous obtenons

$$\hat{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{dk_0^3}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega_a t} \sum_{j=1}^N \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}}{k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \hat{\sigma}_j(t) , \quad (1.22)$$



**Figure 1.4.** Speckle de l'intensité diffusée en champ lointain par un nuage de distribution atomique gaussienne de taille  $\sigma_R = 20/k$ . L'échantillon composé de  $N = 1600$  atomes a une épaisseur optique  $b = 8$ . Simulation réalisée à résonance ( $\delta = 0$ ) pour une seule configuration. Effectuer une moyenne sur plusieurs configurations annihile le speckle. La petite flèche rouge désigne la direction du champ incident.

L'application de cet opérateur champ électrique à l'état  $|\Psi(t)\rangle$  donné par l'eq. (1.8) donne

$$\hat{E}_{\text{sc}}|\Psi\rangle = E_{\text{sc}} \exp(-i\omega t)|g_1 \dots g_N\rangle, \quad (1.23)$$

avec

$$E_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar\Gamma}{2d} \sum_{j=1}^N \beta_j(t) \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}}{k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}, \quad (1.24)$$

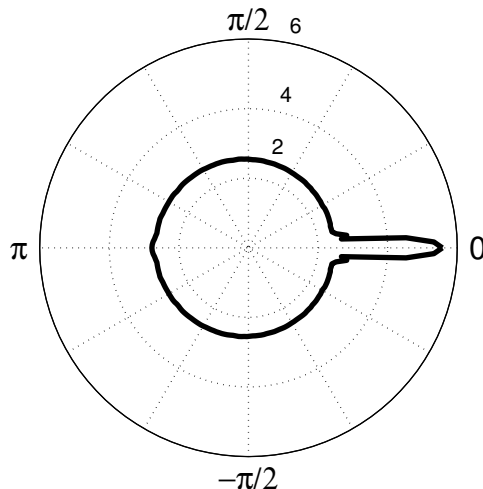
qui s'écrit en régime stationnaire

$$E_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar\Gamma}{2d} \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}}{k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}. \quad (1.25)$$

Par conséquent, le champ émis apparaît comme la somme des ondes sphériques émises par les  $N$  dipôles atomiques de positions  $\mathbf{r}_j$  et détecté à la distance  $\mathbf{r}$  au temps  $t$ . Dans la limite champs lointain (approximation de Fraunhofer) [53], nous avons  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| \approx r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j/r$ , ainsi  $k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| \approx k_0r - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j$ , avec  $\mathbf{k} = k_0(\mathbf{r}/r)$ . Le champ émis donné par l'eq. (1.25) dans la direction  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k_0$  s'écrit alors

$$E_{\text{sc}}^{(\text{far})}(r, \hat{\mathbf{k}}) \approx -\frac{\hbar\Gamma}{2d} \frac{e^{ik_0r}}{k_0r} \sum_{j=1}^N \beta_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}. \quad (1.26)$$

Les formules analytiques du champ données par les eqs. (1.25) et (1.26), nous permettent de calculer le diagramme d'émission du nuage atomique à partir des



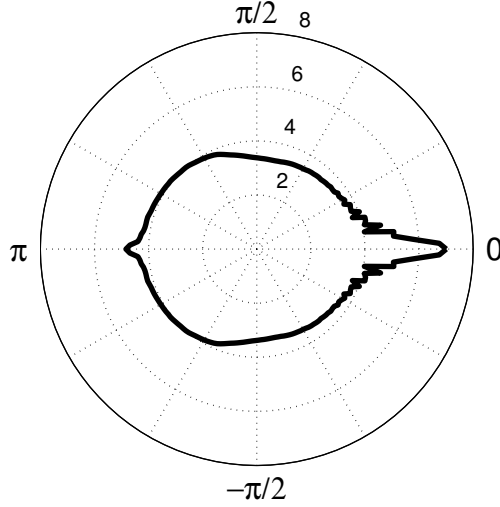
**Figure 1.5.** Diagramme d'émission représentant l'intensité diffusée en champ lointain par un nuage de distribution atomique gaussienne de taille  $\sigma_R = 20/k$ . L'échantillon composé de  $N = 1400$  atomes d'une épaisseur optique  $b = 7$  est soumis à une onde plane incident dans la direction  $\theta = 0$ . Simulation réalisée à résonance ( $\delta = 0$ ) et moyennée sur 200 configurations. La courbe est en échelle logarithmique.

coefficients  $\beta_j(t)$  sur plusieurs configurations sans pour autant perdre l'information sur la phase des dipôles (à travers celle du champ émis). Cela est d'une grande importance dans l'étude des effets de cohérence et de synchronisation entre nos dipôles atomiques. En effet, ceci permet à notre modèle de se distinguer des modèles diffusifs incohérents. Ces derniers s'intéressent uniquement à l'intensité diffusée perdant ainsi l'information sur la phase du champ émis par les dipôles.

L'intensité lumineuse diffusée par le nuage atomique dans une direction  $\mathbf{k}$  en régime stationnaire est donnée par

$$\begin{aligned}
 I_{\text{sc}}(r, \hat{\mathbf{k}}) &= \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left( \frac{\hbar \Gamma}{dk_0 r} \right)^2 \left| \sum_{j=1}^N \beta_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \right|^2, \\
 &= \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left( \frac{\hbar \Gamma}{dk_0 r} \right)^2 \left( \sum_{j=1}^N |\beta_j|^2 + \sum_{m \neq j}^N \beta_j \beta_m^* e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)} \right). \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

L'intensité diffusée donnée par l'eq. (1.27) est tracée sur la fig. 1.4 pour une boule gaussienne en fonction des angles sphériques  $(\theta, \phi)$  en champ lointain ( $r \gg \lambda$ ). Le profil speckle qu'exhibe cette image est une forte signature des effets de cohé-



**Figure 1.6.** Diagramme d'émission correspondant au champ diffusé par un nuage en forme de slab de distribution atomique uniforme illuminé par une onde plane. Simulation réalisée pour un slab de dimensions  $L_x = L_y = 80/k$ ,  $L_z = 20/k$ , d'épaisseur optique  $b = 6$  et de densité  $\rho\lambda^3 \sim 5$  à résonance, moyennée sur 50 configurations. Échelle logarithmique.

rence [54]. En fait, ce speckle est le résultat de l'interférence de plusieurs ondes lumineuses qui oscillent à la même fréquence avec des phases et des amplitudes différentes. De cela résultent des fluctuations sur l'intensité diffusée dépendant du fait que l'interférence soit constructive ou destructive à un point de mesure donné. Les diagrammes d'émissions en coordonnées polaires montrés sur la fig. 1.5 pour une sphère gaussienne et sur la fig. 1.6 pour un slab de densité spatiale uniforme, sont obtenus par l'intégration de  $I_{sc}(\theta, \phi)$  sur l'angle de symétrie du système  $\phi$ . Ces diagrammes nous permettent de voir une autre signature d'interférences qui est le cône de rétrodiffusion cohérente (*coherent back-scattering* (CBS)) [55, 56].

### Section efficace de diffusion

L'intégration de cette intensité sur toutes les directions (sur  $\theta$  et  $\phi$  en coordonnées sphériques) donne la puissance totale diffusée

$$P_{sc} = 2\pi\epsilon_0 c \left( \frac{\hbar\Gamma}{dk_0} \right)^2 \left( \sum_{j=1}^N |\beta_j|^2 + \sum_{m \neq j}^N \beta_j \beta_m^* \frac{\sin(k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} \right), \quad (1.28)$$

où nous avons utilisé la relation

$$\int d\hat{\mathbf{k}} e^{ik_0\hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m)} = 4\pi \frac{\sin(k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|)}{k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|}. \quad (1.29)$$

Ainsi, la section efficace de diffusion du nuage atomique donnée par  $\sigma_{sc}^c = P_{sc}/I_0$  s'écrit

$$\sigma_{sc}^c = \frac{4\pi}{k_0^2} \frac{\Gamma^2}{\Omega^2} \sum_j \sum_m \beta_j \beta_m^* \frac{\sin(k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|)}{k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|}, \quad (1.30)$$

avec

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left( \frac{\hbar\Omega}{d} \right)^2. \quad (1.31)$$

L'indice “  $c$  ” dans  $\sigma_{sc}^c$  revient à *cloud* afin de faire la différence entre la section efficace atomique (atome unique) définie par l'eq. (1.2) et la section efficace de tout le nuage donnée ci-dessous.

### Théorème optique

Nous discutons dans cette section la formulation du théorème optique dans le cadre de la diffusion collective de la lumière. Pour cela nous considérons un slab infini illuminé par une onde plane. En champ lointain, le champ total dans la direction  $\hat{\mathbf{k}}$  est

$$E(r, \hat{\mathbf{k}}) = \left[ \frac{E_0}{2} e^{ik_0 z} + E_{sc}^{(far)}(r, \hat{\mathbf{k}}) \right] e^{-i\omega t}, \quad (1.32)$$

$$= \frac{E_0}{2} \left[ e^{ik_0 z} - \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f(\hat{\mathbf{k}}) \right] e^{-i\omega t}, \quad (1.33)$$

où l'amplitude de diffusion  $f(\hat{\mathbf{k}})$  pour le champ diffusé est donnée par

$$f(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\Gamma}{\Omega} \sum_j \beta_j e^{-ik_0\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (1.34)$$

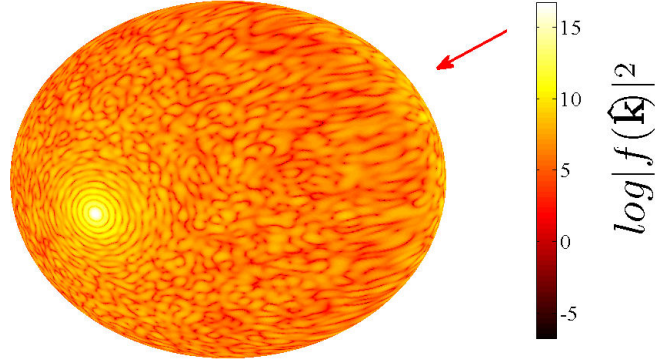
avec  $\mathbf{k} = k_0\hat{\mathbf{k}}$ . Par conséquent, l'intensité diffusée à une grande distance  $r$  du nuage s'écrit

$$I_{sc} = I_0 \frac{|f(\hat{\mathbf{k}})|^2}{k_0^2 r^2}. \quad (1.35)$$

La fig. 1.7 montre l'intensité émise par une couche d'atomes sous forme d'un cylindre de distribution spatiale uniforme illuminé par une onde plane à résonance. La section efficace de diffusion du nuage  $\sigma_{sc}^c$  donnée par l'eq. (1.30) peut être obtenue par l'intégration de l'eq. (1.35) sur tout l'angle solide

$$\sigma_{sc}^c = \frac{1}{k_0^2} \int d\hat{\mathbf{k}} |f(\hat{\mathbf{k}})|^2. \quad (1.36)$$





**Figure 1.7.** L'amplitude de diffusion  $|f(\hat{\mathbf{k}})|^2$  donnée par l'eq. (1.34) pour un nuage cylindrique d'épaisseur longitudinale  $L_z = 30/k$  et de rayon  $R = 90/k$  illuminé par une onde plane (dont la direction d'incidence est indiquée par une flèche). Le nombre de diffuseurs est de  $N = 20000$ , le désaccord  $\delta = 0$ . Le code-couleur représentant l'intensité diffusée est en échelle logarithmique. Nous pouvons clairement voir la forte émission vers l'avant du nuage rappelant la diffusion de Mie par des nuages grands par rapport à la longueur d'onde. Dans les autres directions le champ diffusé à une forme de speckle due au positionnement aléatoire des diffuseurs. Cela représente une signature des effets d'interférences dans l'émission spontanée du nuage. La réalisation d'une moyenne de configuration va atténuer ces fluctuations, mise à part vers la direction arrière où dans le régime de diffusion multiple le cône de rétrodiffusion cohérente apparaît. L'émission dans les dimensions transverses est réduite à cause de la géométrie quasi-unidimensionnelle de l'échantillon.

L'exposant "c" dans l'expression précédente revient à *cloud* afin de faire la différence entre la section efficace atomique définie par l'eq. (1.2) et la section efficace de tout le nuage. L'intégration analytique de l'eq. (1.36) présentée en détail dans l'annexe B, donne : Par ailleurs, la conservation d'énergie impose que

$$\sigma_{\text{ext}}^c = \sigma_{\text{sc}}^c + \sigma_{\text{abs}}^c, \quad (1.37)$$

où  $\sigma_{\text{ext}}$  et  $\sigma_{\text{abs}}$  sont les sections efficaces d'extinction et d'absorption respectivement. Dans notre modèle microscopique décrivant l'interaction lumière-atomes il n'y a pas d'absorption. Par conséquent,  $\sigma_{\text{abs}}^c = 0$ . La section efficace d'extinction quant à elle est obtenue par le théorème optique. Ce dernier relie l'amplitude de diffusion vers l'avant à la section efficace totale du nuage [53, 57]. Dans la direction avant le champ total s'écrit

$$E_{\text{fwd}}(\theta = 0) = \frac{E_0}{2} \left[ e^{ik_0 z} - \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f(0) \right] e^{-i\omega t}. \quad (1.38)$$

En configuration slab par exemple, le nuage rayonne essentiellement dans un lobe fin vers l'avant dont la largeur angulaire est donnée par l'inverse de la taille transverse du nuage. Ainsi, en observant le champ total dans le lobe d'émission vers l'avant sur un plan loin des atomes, le rayon peut être développé comme  $r \approx z + (x^2 + y^2)/2z$ . Nous obtenons

$$E_{\text{fwd}}(\theta = 0) \approx \frac{E_0}{2} \left[ 1 - \frac{f(0)}{k_0 z} e^{ik_0(x^2+y^2)/2z} \right] e^{i(k_0 z - \omega t)}. \quad (1.39)$$

L'intensité totale vers l'avant s'écrit donc

$$|E_{\text{fwd}}(\theta = 0)|^2 \approx \frac{|E_0|^2}{4} \left\{ 1 - \frac{2}{k_0 z} \text{Re} \left[ f(0) e^{ik_0(x^2+y^2)/2z} \right] \right\}, \quad (1.40)$$

où nous avons négligé le terme quadratique  $|E_{\text{sc}}^{\text{fwd}}|^2 = \frac{|f(0)|^2}{(kz)^2}$ . Dans l'eq. (1.40), l'intégration sur  $x, y$  donne un facteur  $2i\pi z/k_0$ , et nous obtenons

$$\sigma_{\text{ext}}^c = -\frac{4\pi}{k_0^2} \text{Im}[f(0)]. \quad (1.41)$$

Par conséquent, à partir de l'eq. (1.36) nous obtenons la relation

$$-\text{Im}[f(0)] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\hat{\mathbf{k}} |f(\hat{\mathbf{k}})|^2 + \frac{k_0^2}{4\pi} \sigma_{\text{abs}}^c. \quad (1.42)$$

La validité du théorème optique dans le cadre de notre modèle ainsi que le scaling de la section efficace de diffusion par rapport à la section efficace géométrique ont été étudiés dans la ref. [52]. Le paradoxe d'extinction faisant le lien entre la section efficace d'extinction du nuage  $\sigma_{\text{ext}}^c$  et sa section efficace géométrique, sera abordé dans le chapitre 3.

### Force de Pression de Radiation

L'opérateur de force de pression de radiation agissant sur l'atome  $j$  due au faisceau lumineux incident, peut être dérivé à partir de l'eq. (1.5) comme

$$\hat{\mathbf{F}}_j = -\nabla_{\mathbf{r}_j} \hat{H}, \quad (1.43)$$

que nous pouvons écrire sous la forme de deux contributions

$$\hat{\mathbf{F}}_j = \hat{\mathbf{F}}_{aj} + \hat{\mathbf{F}}_{ej}. \quad (1.44)$$

Nous associons la première contribution à l'absorption d'un photon du laser incident [24] :

$$\hat{\mathbf{F}}_{aj} = i\hbar \mathbf{k}_0 \frac{\Omega}{2} \left\{ \hat{\sigma}_j e^{i(\Delta t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)} - \text{h.c.} \right\}. \quad (1.45)$$

La seconde contribution peut être interprétée comme résultante de l'émission d'un photon dans une direction arbitraire  $\mathbf{k}$  :

$$\hat{\mathbf{F}}_{ej} = i\hbar \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} g_{\mathbf{k}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\sigma}_j e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_a)t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} - \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_a)t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \right\} . \quad (1.46)$$

Notons que dans l'eq. (1.46) les termes non-résonants proportionnels à  $e^{\pm i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_a)t}$  ont été négligés. Nous définissons la force de pression de radiation intrinsèque ressentie par chaque atome par la formule

$$\hat{\mathbf{F}} = (1/N) \sum_j \hat{\mathbf{F}}_j . \quad (1.47)$$

Si le nuage en considération présente une symétrie autour de l'axe du laser sonde, la force agissant sur le nuage sera de la même direction que le vecteur d'onde du champ incident  $\mathbf{k}_0 = k_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ . La composante suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$  de la force de pression de radiation intrinsèque ressentie par chaque atome est donnée par

$$F_z = (1/N) \sum_j F_j . \quad (1.48)$$

où  $F_j$  est la force agissant sur l'atome  $j$  suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$ .  $F_{\text{tot}} = \sum_j F_j$  représente ainsi la force totale agissant sur le nuage atomique suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$ . Concrètement, la force de pression de radiation intrinsèque que nous introduisons dans cette section peut être mesurée avec la technique de temps de vol dans une expérience d'atomes froids par exemple. Elle a été récemment utilisée comme signature des effets coopératifs dans les nuages atomiques [58] pour des faisceaux laser pousseurs hors résonance atomique. Nous présentons dans le chapitre 3 un protocole expérimental réalisé au sein de notre groupe à Nice dont l'objectif est de sonder de tels effets collectifs dans le régime de diffusion multiple [59]. L'expérience mesure le déplacement du centre de masse du nuage atomique dans le MOT sous l'effet du champ incident. La force de pression de radiation totale agissant sur tout le nuage suivant l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  mesure alors l'accélération du centre de masse du nuage

$$\mathbf{a}_{\text{cm}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{tot}} / m_a , \quad (1.49)$$

avec  $m_a$  la masse de l'atome. Ainsi,  $F_{\text{tot}}$  est  $N$  fois plus grande que la force intrinsèque que nous définissons par l'eq. (1.48).

En reprenant la décomposition introduite dans (1.44), la force d'absorption intrinsèque le long de l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  due au recul subit lors de l'absorption d'un photon du laser incident, s'écrit

$$\hat{F}_a = \frac{i}{2N} \hbar k_0 \omega \sum_{j=1}^N [\hat{\sigma}_j e^{i\Delta t - i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j} - \text{c.c.}] . \quad (1.50)$$

De même, la force d'émission intrinsèque est donnée par

$$\hat{\mathbf{F}}_e = (1/N) \sum_j \hat{\mathbf{F}}_{ej} . \quad (1.51)$$

En insérant l'expression de  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  à partir de l'eq. (1.18) dans l'eq. (1.46) et en approximant la somme discrète sur les modes  $\mathbf{k}$  par une intégrale, il est possible d'obtenir la formule suivante pour l'opérateur force d'émission intrinsèque suivant l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  :

$$\hat{F}_e = -\frac{\hbar k_0 \Gamma}{8\pi N} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \sum_{j,m=1}^N [e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m)} \hat{\sigma}_m^\dagger \hat{\sigma}_j + \text{c.c.}] . \quad (1.52)$$

Les valeurs moyennes (*expectation values*) des forces d'absorption et d'émission de l'état  $|\Psi\rangle$  donnés par l'eq. (1.8) sont

$$\langle \hat{F}_a \rangle = -\frac{\hbar k_0 \Omega}{N} \sum_{j=1}^N \text{Im} [\beta_j e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j}] , \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_e \rangle &= -\frac{\hbar k_0 \Gamma}{4\pi N} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \sum_{j,m=1}^N [\beta_j \beta_m^* e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m)}] , \\ &= -\frac{\hbar k_0 \Gamma}{N} \sum_{j,m=1}^N \frac{(z_j - z_m)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} j_1(k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|) \text{Im} (\beta_j \beta_m^*) , \end{aligned} \quad (1.54)$$

où nous avons utilisé la relation

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = 4\pi i \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} j_1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) , \quad (1.55)$$

avec  $j_1(z)$  la fonction de Bessel sphérique du premier ordre. Il est à noter que la décomposition de la force de pression de radiation en force d'absorption et d'émission est compatible avec l'expression classique de la force optique [60]. Dans ce cas, la force apparaît comme le gradient du produit entre le dipôle atomique et le champ total incluant le champ diffusé par les autres atomes [61].

D'autre part, la composante suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$  de la force de pression de radiation intrinsèque peut être dérivée depuis le diagramme de rayonnement. À partir des eqs. (1.34) et (1.41), en introduisant le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k_0 \hat{\mathbf{k}}(\theta, \phi)$ , nous obtenons la relation

$$-\frac{\Omega}{\Gamma} \sum_j \text{Im} [\beta_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sum_{j,m} [\beta_j \beta_m^* e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m)}] . \quad (1.56)$$

Par conséquent, en utilisant les équations (1.53) et (1.54) la force de pression de radiation intrinsèque le long de l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  s'écrit

$$F_z = \frac{\hbar k_0 \Gamma}{4\pi N} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos\theta) \sum_{j,m=1}^N [\beta_j \beta_m^* e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)}] . \quad (1.57)$$

Nous pouvons constater à partir de l'eq. (1.57) que la force de pression de radiation intrinsèque n'est pas simplement proportionnelle à la probabilité d'excitation  $\sum_j |\beta_j|^2$ . Elle est plutôt le résultat d'une interférence entre les différents dipôles atomiques exprimée par les coefficients  $\beta_j$ . La grandeur  $F_z / \sum_j |\beta_j|^2$  pourrait donc mettre en évidence le rôle des effets coopératifs dans la force de pression de radiation. Dans ce sens, nous explorons à travers le chapitre 3 l'hypothèse que la force de pression de radiation puisse ou non être une signature des effets de cohérence collectifs en diffusion multiple de la lumière. Pour un nuage d'atomes à deux niveaux soumis à un champ incident suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$ , la relation de la force de pression de radiation intrinsèque agissant sur le nuage à l'intensité rayonnée par ce dernier est donnée par

$$F_z = \frac{r^2}{Nc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos\theta) I_{\text{sc}}(\theta, \phi) , \quad (1.58)$$

où  $I_{\text{sc}}(\theta, \phi) \propto |E_{\text{sc}}(\theta, \phi)|^2$  est l'intensité diffusée en champ lointain donnée par l'eq. (1.27). Cette formule met en évidence le fait que la force de pression de radiation qui pousse les atomes le long de la direction du faisceau incident est proportionnelle au flux de l'intensité diffusée. Sachant que le nuage émet essentiellement dans la direction du champ incident comme le montre la fig. 1.7, les composantes de la force de pression de radiation en dehors de l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  seront nulles. Le nuage soumis au champ pousseur se déplace alors suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$ . Dans le cas d'une diffusion complètement isotrope (e.g. nuage très dilué de  $N$  atomes indépendants), l'intensité diffusée  $I_{\text{sc}} = NI_1$  est indépendante des angles et nous retrouvons ainsi la proportionnalité directe entre l'intensité diffusée et la force de pression de radiation intrinsèque appliquée sur chaque atome

$$F_1 = (4\pi r^2/c) I_1 . \quad (1.59)$$

La force de pression de radiation agissant sur un nuage très dilué composé de  $N$  diffuseurs atomiques indépendants, ou un nuage beaucoup plus petit que la longueur d'onde sera donc donnée par

$$F_{\text{ind}} = NF_1 . \quad (1.60)$$

Dans ce cas la composante de la force due à l'émission sera similaire dans toutes les directions et se moyenne à zéro. Par conséquent, un nuage très dilué ne subit que le déplacement dû à l'absorption de photons incidents. Une émission anisotrope dans une direction privilégiée est supposée alors diminuer se déplacement.

## Solution stationnaire timed Dicke

La solution timed Dicke (TD) est une approximation champ moyen à l'approche dipôles couplés pour la résolution du problème de la diffusion de la lumière. En effet, cette solution consiste à affecter à tous les dipôles la même amplitude et la même phase au facteur de propagation près. Cette approximation n'est valable que pour des nuages atomiques de très faible épaisseur optique  $b \ll 1$ . L'approche TD est ainsi une bonne approximation pour la description de la diffusion simple de la lumière par un nuage atomique désordonné.

Partant de l'approche CD et afin d'éliminer le déphasage imposé par le laser à travers le terme de propagation, il faut effectuer le changement de variable

$$\tilde{\beta}_j = \beta_j e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j} . \quad (1.61)$$

Ainsi, nous pouvons ré-écrire l'eq. (1.16) à l'état stationnaire ( $\dot{\beta}_j(t) = 0$ ) sous la forme

$$-\frac{i\Omega}{2} + \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right) \tilde{\beta}_j + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{m \neq j} \tilde{\beta}_m e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j)} \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} = 0 . \quad (1.62)$$

La sommation du système d'équation précédent nous permet d'obtenir une amplitude moyenne

$$\beta_{TD} = \langle \tilde{\beta}_j \rangle , \quad (1.63)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_j \tilde{\beta}_j , \quad (1.64)$$

$$= \frac{\Omega}{2(\Delta - \Delta_c) + i\Gamma_c} , \quad (1.65)$$

avec

$$\Gamma_c = \left(1 + \frac{1}{N} \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{\sin(k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|)}{k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)}\right) \Gamma , \quad (1.66a)$$

$$\Delta_c = -\frac{\Gamma}{2N} \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{\cos(k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|)}{k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)} , \quad (1.66b)$$

où  $\Gamma_c$  correspond à une largeur de résonance modifiée (élargissement spectral collectif) et  $\Delta_c$  à la fréquence de résonance déplacée (décalage collectif). La solution stationnaire du système d'équations (1.16) dans l'approximation TD est alors donnée par

$$\beta_j = \beta_{TD} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j} . \quad (1.67)$$

Cette approximation champ moyen n'est valable que pour les nuages de très faibles épaisseur optique  $b \ll 1$  et densité atomique ( $\rho\lambda^3 \ll 1$ ). Elle constitue une approche analytique simplifiée pour la description de la diffusion simple de la lumière par un nuage atomique. La solution TD a été abordée plus en détails dans des travaux de thèse précédents au sein de notre groupe pour l'étude des effets collectifs en régime de diffusion simple [47].

### 1.1.2 Approche CD vectoriel

La prise en considération de la nature vectorielle de la lumière en tenant compte de la polarisation du champ incident impose l'introduction des trois composantes de la polarisation atomique correspondantes aux trois sous-niveaux Zeeman de l'état excité  $|e_j^\alpha\rangle$ . Cela se traduit par l'introduction des trois composantes des amplitudes des dipôles :  $\beta_j \rightarrow \mathbf{b}_j(b_j^x, b_j^y, b_j^z)$ . Une des implications importantes de la description vectorielle de la lumière réside dans le changement du terme d'interaction dipôle-dipôle  $G_{jj'}$  par rapport à celui donné dans l'eq. (1.16). En plus de l'interaction à longue portée décrite par le modèle scalaire, ce modèle inclue l'interaction de champ proche entre les dipôles couplés. Ce traitement plus rigoureux du problème devient indispensable pour une bonne description des milieux denses avec  $\rho\lambda^3 \geq 1$ , où l'effet des interactions en champ proche devient important [39, 62]. Dans cette section nous présentons brièvement le modèle vectoriel des dipôles couplés sans entrer dans les détails du calcul. Ceci se fera à travers la présentation de l'équation des amplitudes  $\mathbf{b}_j$  et l'expression du champ diffusé  $\mathbf{E}_{sc}$  que nous aurons à utiliser dans la section suivante. Nous ne calculerons donc pas le reste des observables abordées dans le modèle scalaire car le but de cette section n'est pas de comparer les deux modèles scalaire et vectoriel. Une étude dans ce sens a été réalisée dans la ref. [38].

En modèle vectoriel où l'atome  $j$  subit une transition dipolaire électrique entre l'état fondamental  $|g_j\rangle$  et l'état excité dégénéré en triplet  $|e_j^\alpha\rangle$ , les  $|b_j^\alpha|^2$  représentent les amplitudes de probabilité de l'état à une seule excitation de la forme

$$\exp(-i\Delta t) \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=x,y,z} b_j^\alpha |g_1, \dots, e_j^\alpha, \dots, g_N\rangle. \quad (1.68)$$

Ainsi, la diffusion collective d'un faisceau lumineux monochromatique de composantes  $E_{in}^\alpha(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ , par une collection de  $N$  atomes de positions fixes et

aléatoires  $\mathbf{r}_j$ , est décrite par le système d'équations couplées suivant [39] :

$$\frac{db_j^\alpha}{dt} = -i(d/\hbar)E_{\text{in}}^\alpha(\mathbf{r}_j) + \left(i\Delta - \frac{\gamma}{2}\right)b_j^\alpha - \frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha'} \sum_{m \neq j} G_{\alpha, \alpha'}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) b_m^{\alpha'}, \quad (1.69)$$

où  $\gamma = d^2 k_0^3 / 3\pi \varepsilon_0 \hbar$  est le taux d'émission spontanée en modèle vectoriel. Remarquons le facteur 3/2 entre ce taux d'émission spontanée vectoriel et le taux d'émission spontanée scalaire donné par l'eq. (1.17)<sup>viii</sup>. De la même manière que le cas scalaire décrit par le système d'équations (1.16), le premier terme de l'eq. (1.69) correspond au champ du laser incident à la position de l'atome  $j$  et le second décrit la dynamique de l'atome  $j$ . Le dernier terme inexistant dans le cas des nuages très dilués, représente l'effet de l'interaction collective des  $N - 1$  autres dipôles du nuage avec le dipôle  $j$ . Les  $G_{\alpha, \alpha'}$  sont les composantes du tenseur symétrique

$$G_{\alpha, \alpha'}(\mathbf{r}) = \frac{3 e^{ik_0 r}}{2 i k_0 r} \{ [\delta_{\alpha, \alpha'} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_{\alpha'}] + [\delta_{\alpha, \alpha'} - 3\hat{n}_\alpha \hat{n}_{\alpha'}] [i/(k_0 r) - 1/(k_0 r)^2] \} \quad (1.70)$$

correspondant à la fonction de Green vectorielle avec  $r = |\mathbf{r}|$  et  $\hat{n}_\alpha$  les composantes du vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$ . Elle peut être déduite à partir de la fonction de Green scalaire  $G(r) = \exp(ik_0 r)/(ik_0 r)$  :

$$G_{\alpha, \alpha'}(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} \left[ \delta_{\alpha, \alpha'} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha'} \right] G(r). \quad (1.71)$$

Le terme d'interaction scalaire  $G(r)$  présente une invariance par rotation et ne considère qu'un désordre purement radial. Cela n'est pas le cas pour le terme d'interaction en modèle vectoriel  $G_{\alpha, \alpha'}(\mathbf{r})$  qui, avant d'être moyenné sur les orientations des paires d'atomes, présente à la fois un désordre radial et un désordre angulaire. À l'état stationnaire ( $db_j^\alpha/dt = 0$ ) le problème décrit par l'eq. (1.69) se réduit à un système linéaire d'équations pour les vecteurs complexes  $\mathbf{b}_j$  avec les composantes spatiales  $b_j^\alpha$  :

$$\mathbf{b}_j = \frac{1}{\Delta + i\gamma/2} \left[ \frac{d}{\hbar} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) - i\frac{\gamma}{2} \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{b}_m \right]. \quad (1.72)$$

Pour des positions  $\mathbf{r}_j$  et un champ incident  $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j)$  donnés, ce système d'équations peut être résolu numériquement en inversant la matrice symétrique  $3N \times 3N$  décrivant le système d'eqs. (1.72).

---

viii. Friedberg et Manassah présentent dans la ref. [63] une étude comparative entre les deux modèles scalaire et vectoriel dans le cadre de l'étude des effets coopératifs. Ils s'intéressent plus spécifiquement au taux d'émission spontané collectif et le shift de fréquence pour un nuage sphérique.



Le champ diffusé par le nuage atomique à la position  $\mathbf{r}$  en modèle vectoriel de la lumière est obtenu à partir des vecteurs  $\mathbf{b}_j$

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = -i \frac{dk_0^3}{6\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{b}_m . \quad (1.73)$$

À la position  $\mathbf{r}_j$  de l'atome  $j$  le champ diffusé  $\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)$  sera donné par

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j) = -i \frac{dk_0^3}{6\pi\epsilon_0} \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{b}_m . \quad (1.74)$$

où nous avons exclu le terme correspondant à  $m = j$  ayant une contribution divergente dans le terme d'interaction collective.

Le but de cette section n'étant pas d'établir de comparaison entre les deux modèles scalaire et vectoriel, nous ne calculerons pas le reste des observables abordées dans le modèle scalaire comme nous l'avons évoqué au début de cette section.

## 1.2 Développement en série de diffusion multiple (MSS)

Dans cette section nous allons aborder une autre méthode pour l'étude de la diffusion multiple de la lumière par une collection d'atomes. Cette méthode décrit la diffusion multiple de la lumière comme une séquence d'événements de diffusion du champ incident. Durant cette séquence le champs émis est exprimé par la somme des champs diffusés successivement. Le processus est ainsi décrit du point de vue du champ lumineux seulement plutôt que de celui des dipôles induits comme c'est le cas dans l'approche CD présentée dans la section précédente. L'approche récursive que nous allons présenter est d'une grande importance pour des milieux de faible densité optique. Dans de tels régimes, seulement quelques événements de diffusion sont nécessaires pour une description complète du système. En effet, le nombre d'ordres de diffusion requis est directement relié à la convergence de la série de diffusion multiple (*multiple scattering series* (MSS)) [64]. À travers cette approche MSS nous traitons la diffusion de la lumière *ab initio*, i.e., en considérant les atomes comme des diffuseurs ponctuels dans le vide. L'indice de réfraction du milieu apparaît *a posteriori* comme résultat du processus de diffusion multiple [65]. Cela va à l'encontre de l'approche plus commune dans laquelle le milieu diffusant est décrit par un indice de réfraction et un libre parcours moyen [66, 67]. Dans cette section nous avons opté pour une description vectorielle du problème, vu que

le formalisme mathématique est moins lourd que celui de la section précédente. Nous reprendrons la description scalaire dans les chapitres suivants du manuscrit.

### 1.2.1 Rayonnement par ordre de diffusion

Dans le modèle CD microscopique présenté dans la section précédente, le champ diffusé donné par l'éq. (1.73) est déterminé à partir des réponses individuelles des atomes représentées par les amplitudes des dipôles  $\mathbf{b}_j$ . Ces dernières sont obtenues par la résolution matricielle du système d'équations linéaires couplées donné par l'éq. (1.72). L'approche " série de diffusion multiple " (MSS) quant à elle, est basée sur une série d'équations récursive impliquant uniquement le champs de lumière. En effet, le champ diffusé par chaque atome dans le nuage est déterminé par une série récursive à partir du champ incident et des champs diffusés par les autres atomes " seulement ", sans avoir recours au degrés de liberté des atomes. Une fois le champs diffusé calculé pour un champ incident donné, nous pouvons obtenir les amplitudes  $\mathbf{b}_j$  des dipôles induits à partir de la relation (1.72) qui s'écrit

$$\mathbf{b}_j = \frac{d}{\hbar(\Delta_0 + i\gamma/2)} [\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)] . \quad (1.75)$$

Afin d'obtenir la série de diffusion multiple (MSS), nous substituons l'éq. (1.75) dans l'éq. (1.74). Nous obtenons alors l'équation du champs diffusé  $\mathbf{E}_{\text{sc}}$  agissant sur l'atome  $j$  sous la forme

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j) = \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot [\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_m) + \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_m)] , \quad (1.76)$$

avec  $\kappa(\delta) = 1/(2i\delta - 1)$  et  $\delta = \Delta_0/\gamma$  le désaccord du champ incident en unité du taux d'émission spontanée. Cette équation met en évidence la spécificité de l'approche MSS que nous avons évoquée auparavant. Cette spécificité consiste en le fait que le champ diffusé à la position  $\mathbf{r}_j$  est complètement décrit à partir du champ incident et des champs diffusés par les  $N - 1$  autres atomes du nuage seulement. L'approche MSS consiste à supposer que l'éq. (1.76) peut être résolue par itération à partir du champ incident, à travers une série de diffusion multiple. Cette hypothèse ne peut être valable que dans la limite de convergence de la série de diffusion multiple MSS que nous discuterons plus tard dans cette section. Ainsi, pour la résolution de l'éq. (1.76) nous introduisons le champ diffusé  $n$  fois (après  $n$  événements de diffusion) noté  $\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}$ . Il est obtenu par itération de sorte que

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}(\mathbf{r}_j) = \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n-1)}(\mathbf{r}_m) , \quad (1.77)$$

où  $n = 1, 2, \dots$  désigne l'ordre de diffusion. Le champ diffusé total au point  $\mathbf{r}_j$  représenté par l'éq. (1.76) correspond à la somme infinie de tous les champs diffusés mesurés au point  $\mathbf{r}_j$

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}(\mathbf{r}_j) . \quad (1.78)$$

Le champ incident correspond à l'ordre zéro de diffusion  $\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(0)}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j)$  et joue le rôle du terme initial (champ source). Ainsi, le champ total  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)$  ressenti par l'atome  $j$  à la position  $\mathbf{r}_j$  est composé de l'onde incidente  $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j)$  ainsi que les ondes diffusées par les autres atomes que regroupe  $\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)$ . Ainsi, dans l'hypothèse que ce dernier puisse être obtenu par l'éq. (1.78), le champ total  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)$  peut être développé en série récursive :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j) , \quad (1.79)$$

$$= \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}(\mathbf{r}_j) , \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_m) \\ &\quad + \kappa^2(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \sum_{l \neq m} \mathbf{G}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l) \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_l) , \quad (1.81) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Par ailleurs, le champ diffusé détecté à la position  $\mathbf{r}$  où il n'y a pas d'atome, est déterminé à travers  $\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)$  par l'application de la fonction de Green  $\mathbf{G}$  qui joue le rôle de propagateur :

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_{j=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot [\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)] . \quad (1.82)$$

La nature "diffusion multiple" de notre approche MSS est évidente à partir de l'éq. (1.82). En effet le premier terme

$$\kappa(\delta) \sum_{j=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) , \quad (1.83)$$

regroupe tous les événements de diffusions simples. D'autre part, pour l'atome  $j$  le terme  $\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)$  regroupe tous les ordres de diffusion mesurés au point  $\mathbf{r}_j$ . En commençant par l'ordre zéro  $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j)$ , il donne par l'application du propagateur

$\mathbf{G}$  la diffusion simple, double, triple et les ordres de diffusion supérieurs. Ainsi, le second terme de l'éq. (1.82)

$$\kappa(\delta) \sum_{j=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j), \quad (1.84)$$

représente la somme de toutes les diffusions multiples mesurées sur tous les atomes du nuage.

Dans la limite champ lointain ( $r \gg \lambda$ ) le champ diffusé peut être obtenu à partir de la forme asymptotique de la fonction de Green vectorielle pour  $r \gg r_j$  :

$$G_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \approx \frac{3}{2} \frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r} [\delta_{\alpha,\alpha'} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_{\alpha'}] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}, \quad (1.85)$$

où  $\mathbf{k} = k_0 \hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur d'onde du champ diffusé. Dans ce cas, le champ lointain diffusé  $\mathbf{E}_{\text{sc}}^{\text{far}}(\mathbf{r})$  est obtenu à partir de l'éq. (1.82) en utilisant la fonction de Green asymptotique ci-dessus. Il peut être décomposé sous la forme

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}^{\text{far}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1^{\text{far}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{ms}}^{\text{far}}(\mathbf{r}), \quad (1.86)$$

où  $\mathbf{E}_1^{\text{far}}(\mathbf{r})$  correspond à l'ordre de diffusion simple. Pour une onde plane incidente  $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \hat{\epsilon} E_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$  polarisée suivant  $\hat{\epsilon}$ , il s'écrit

$$\mathbf{E}_1^{\text{far}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) E_0 \frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\epsilon})] N S_N(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad (1.87)$$

où  $S_N(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = (1/N) \sum_j \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}_j]$  est le facteur de structure. En fait, l'éq. (1.87) n'est autre que l'expression de la diffusion de Rayleigh de la lumière par des diffuseurs plus petits que la longueur d'onde. Dans ce cas, chaque atome est éclairé seulement par le champ incident. Ainsi le champ diffusé par tout le nuage résulte de la superposition des champs diffusés par les  $N$  atomes qui le composent et est proportionnel au facteur de structure  $S_N$ . En utilisant l'éq. (1.78) la contribution de la partie diffusion multiple dans le rayonnement diffusé en champ lointain de l'éq. (1.86) est donnée par

$$\mathbf{E}_{\text{ms}}^{\text{far}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r} N \hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}(\mathbf{k})], \quad (1.88)$$

avec

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}. \quad (1.89)$$

Par ailleurs, nous tenons à souligner que la méthode MSS est valable au-delà de la diffusion simple. En effet, notre approche MSS est valide pour les régime de faible diffusion dans la limite de convergence de la série de diffusion multiple que nous discutons dans la section suivante. Ceci correspond à de faibles épaisseurs optiques  $b(\delta) \lesssim 1$ , à l'encontre de la diffusion simple qui se produit dans des nuages d'épaisseurs optiques très petites  $b(\delta) \ll 1$ .

## 1.2.2 Régime de convergence de la MSS

L'eq. (1.81) peut être écrite sous la forme matricielle

$$\mathbf{E} = (\mathbf{I} - \kappa(\delta)\mathbf{G})^{-1} \mathbf{E}_{\text{in}} , \quad (1.90)$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_{\text{in}}$  sont des vecteurs contenant les  $3N$  composantes du champ total et du champ incident respectivement agissant sur l'atome  $j$ .  $\mathbf{I}$  est la matrice unité de dimension  $3N \times 3N$  et  $\mathbf{G}$  est la matrice  $3N \times 3N$  contenant les fonctions de Green  $\mathbf{G}_{jm} = \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)$  dont les composantes sont données par l'eq. (1.70). L'hypothèse que le champ total puisse être obtenu à travers la série de diffusion multiple donnée par l'eq. (1.81) revient à ré-écrire l'eq. (1.90) avec le développement en série

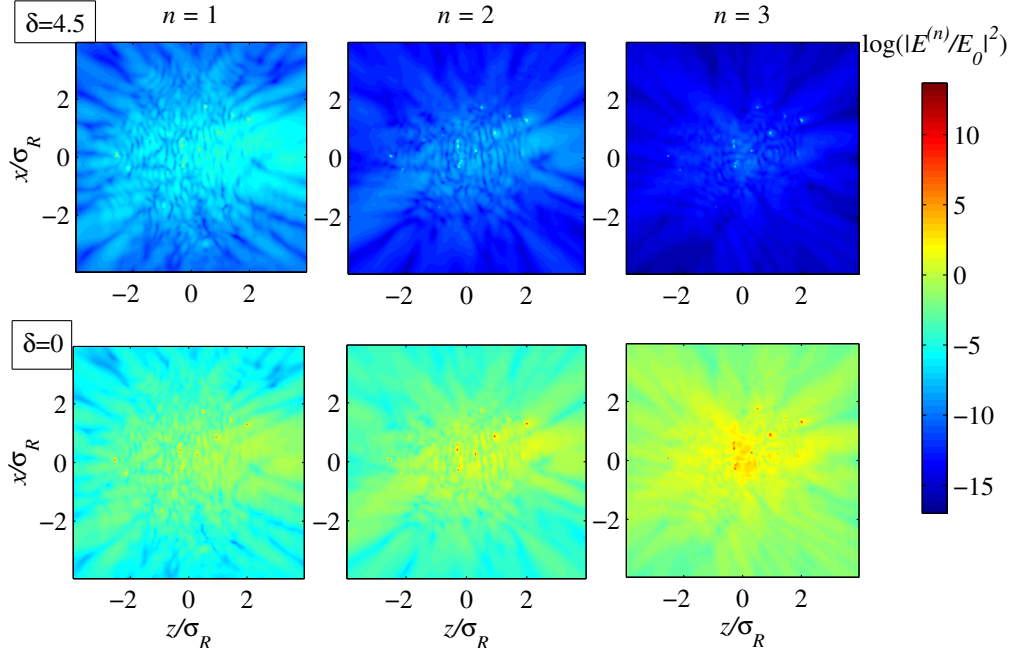
$$(\mathbf{I} - \kappa(\delta)\mathbf{G})^{-1} = \mathbf{I} + \kappa(\delta)\mathbf{G} + \kappa(\delta)^2\mathbf{G}^2 + \kappa(\delta)^3\mathbf{G}^3 + \dots \quad (1.91)$$

Cette série infinie converge uniquement si les valeurs propres de la matrice  $\kappa(\delta)\mathbf{G}$  ont des modules inférieurs à 1 [68, 69]. Quand cette condition est satisfaite l'approche MSS peut être utilisée pour calculer le champ diffusé par le nuage atomique. Dans le cas contraire où l'opérateur linéaire  $\kappa(\delta)\mathbf{G}$  admet des valeurs propres supérieures à l'unité, la série à l'eq. (1.78) et par conséquent celle donnée par l'eq. (1.81) ne convergent pas. Dans ce cas, chaque ordre de diffusion émet plus de lumière que l'ordre précédent et la série de diffusion multiple diverge. Une étude détaillée du spectre de l'opérateur linéaire  $\kappa(\delta)\mathbf{G}$  est proposée dans la ref. [70, 69]. Les auteurs de ces références montrent que la distribution des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{G}$  dans le plan complexe, est contenue dans un cercle de rayon  $\sqrt{b_0/2}$ . Dans notre cas, la série de diffusion multiple MSS converge si toutes les valeurs propres  $\mathcal{G}$  de la matrice  $\mathbf{G}$  satisfont la condition  $\kappa(\delta)\mathcal{G} < 1$ . Par conséquent,

$$\kappa(\delta)\mathcal{G} < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{b_0/2}}{2i\delta - 1} < 1 , \quad (1.92)$$

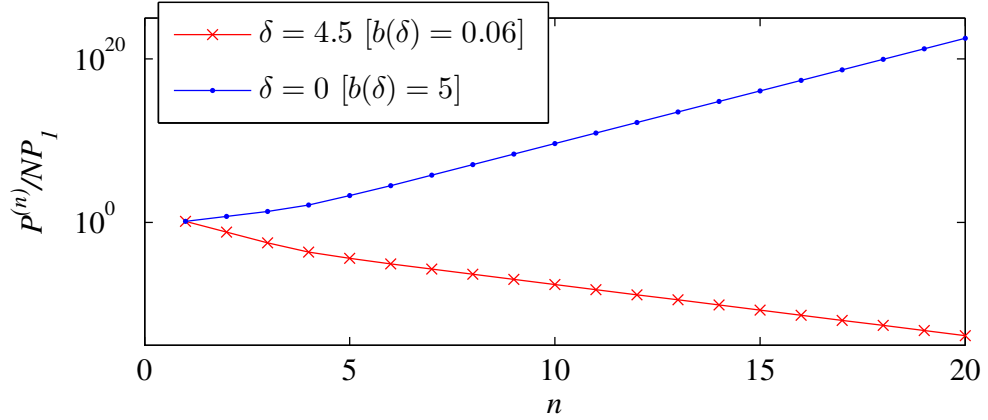
$$\Rightarrow \frac{b_0}{2(4\delta^2 + 1)} < 1 , \quad (1.93)$$

$$\Rightarrow b < 2 . \quad (1.94)$$



**Figure 1.8.** Profil du champ de radiation à l'intérieur d'un nuage gaussien  $\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_j \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n-1)}(\mathbf{r}_j)$  (eq. (1.82)) dans le plan  $y = 0$  pour différents ordres de diffusion  $n = 1, 2$  et  $3$  (de droite à gauche), pour deux différentes épaisseurs optiques. Dans le régime de diffusion faible (ligne supérieur) l'amplitude du champ diffusé décroît pour un ordre de diffusion croissant et la série de diffusion multiple converge. Pour un régime de diffusion multiple (ligne inférieur) la série de diffusion multiple diverge. Cette simulation a été réalisée pour un nuage Gaussien de  $N = 500$  atomes avec une épaisseur optique à résonance de  $b_0 = 5$  et un rayon r.m.s.  $\sigma_R = 17.32/k$  avec  $b_0 = 3N/(k\sigma_R)^2$ . Les images supérieures correspondent à un désaccord  $\delta = 4.5$  et une épaisseur optique  $b = 0.061$ , celles du bas correspondent au cas résonant  $\delta = 0$  et  $b = 5$ . La présence d'un champ diffusé local d'amplitude beaucoup plus importante que le champ incident est due à la divergence du champ diffusé au voisinage des atomes qui peuvent être arbitrairement proche du plan  $y = 0$ . Notez que numériquement, pour une distribution aléatoire des diffuseurs des atomes peuvent être placés tout près du plan  $y = 0$  mais aucun atome ne se trouve exactement sur ce plan  $y = 0$  ( $y_j \neq 0 \forall j$ ).

Ainsi, la limite de convergence de notre série MSS se traduit en terme d'épaisseur optique par la condition  $b < 2$ , correspondant à un régime de diffusion faible. Pour mettre en évidence ces régimes de convergence et de divergence de la série de diffusion, nous calculons le champ diffusé à l'intérieur et à l'extérieur de l'échantillon pour deux régimes de diffusion différents. Ces derniers sont déterminés à travers



**Figure 1.9.** Puissance diffusée par un nuage gaussien ( $b_0 = 5$  et  $\sigma_R = 17.32/k$ ) en champ lointain  $P^{(n)} = (\varepsilon_0 c/2) \int |\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}(\mathbf{r})|^2 dS$ . Cette puissance est mesurée sur une surface sphérique de rayon  $r \gg \lambda$ , pour un ordre de diffusion  $n$  croissant avec les mêmes paramètres que la fig. 1.8. Pour une faible diffusion ( $b = 0.061$ , crois rouges) la puissance diffusée diminue quand l'ordre de diffusion  $n$  augmente. Par contre, pour une diffusion multiple ( $b = 5$ , points bleus) la puissance diffusée diverge.  $P^{(n)}$  est normalisée par rapport à la puissance diffusée par une collection d'atomes indépendants  $NP_1$ , où  $P_1 = (4\pi I_0/k_0^2)/(1 + 4\delta^2)$  et  $I_0$  l'intensité incidente.

l'épaisseur optique du nuage<sup>ix</sup> : un régime de faible diffusion avec  $b \approx 0.06$  et un régime de diffusion multiple avec  $b = 5$ . Le profil local du champ électrique diffusé à l'intérieur du nuage atomique donné par

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_j \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n-1)}(\mathbf{r}_j), \quad (1.95)$$

est illustré dans la fig. 1.8 pour différents ordres de diffusion et pour les deux régimes de diffusion faible et forte. De même, la puissance totale diffusée en champ lointain à l'extérieur du nuage ( $r \gg \sigma_R$ ) donnée par

$$P^{(n)} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \int |\mathbf{E}_{\text{sc}}^{(n)}(\mathbf{r})|^2 dS, \quad (1.96)$$

est calculée pour deux différentes épaisseurs optiques et représentée dans la fig. 1.9. Les deux simulations ont été réalisées pour  $N = 500$  atomes avec  $b_0 = 5$  et  $\sigma_R = 17.32/k$ . Néanmoins, une des simulations a été réalisée pour un désaccord  $\delta = 4.5$  donnant une épaisseur optique  $b(\delta) = 0.061$ , alors que la seconde a été réalisée à résonance ( $\delta = 0$ ) pour une épaisseur optique  $b(\delta) = 5$ . Dans le

ix. Nous rappelons que  $b(\delta) = b_0/(1 + 4\delta^2)$ , où  $\delta = \Delta_0/\gamma$  et  $b_0 = 3N/(k\sigma_R)^2$  est l'épaisseur optique à résonance pour un nuage gaussien sphérique de rayon r.m.s.  $\sigma_R$  composé de  $N$  atomes.

cas d'une faible épaisseur optique ( $b = 0.061$ ) le champ diffusé décroît pour un ordre de diffusion croissant et la série de diffusion multiple MSS converge. Pour un milieu optiquement plus dense ( $b = 5$ ) les interactions dipôle-dipôle incluses dans la fonction de Green (terme d'interaction collective) agissent sur la dynamique du système. Cela se traduit par une (des) valeur(s) propre(s) de  $\kappa(\delta)\mathbf{G}$  de module plus grand que 1, ce qui fait que la série de diffusion multiple diverge. La construction du champ diffusé total à la base d'un nombre croissant d'évènements successifs de diffusion de l'onde incidente n'est plus possible. Dans ce cas, le champ diffusé total est plutôt le résultat d'une interaction globale avec le système.

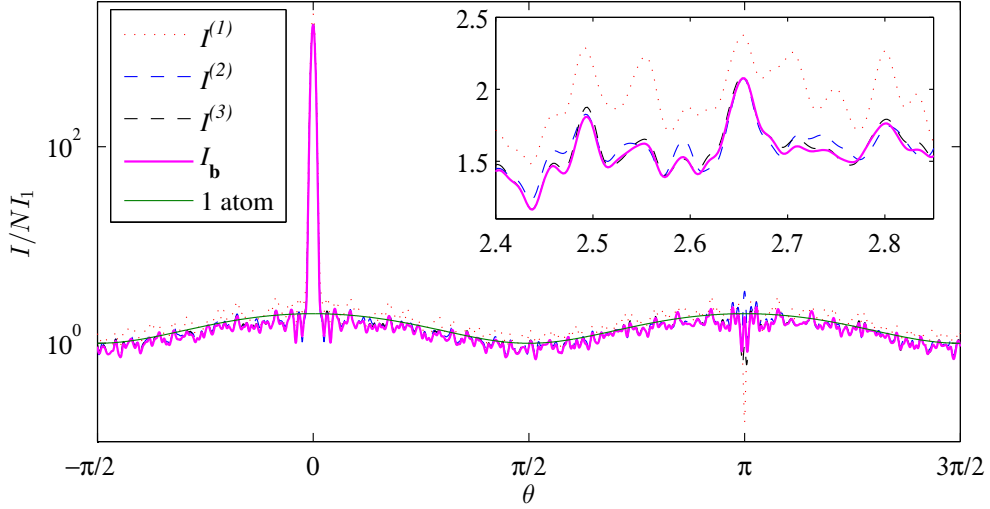
À la fin de cette section, nous tenons à souligner le fait que le critère de convergence de notre MSS qui consiste à la nécessité que les valeurs propres de  $\kappa(\delta)\mathbf{G}$  aient un module inférieur à l'unité (correspondant aux régimes de diffusion faible), est en parfaite accord avec les résultats de la ref. [36]. De plus, l'approche MSS nous permettra dans le chapitre suivant d'effectuer une analyse numérique et théorique du régime de diffusion double.

### 1.3 Multiple Scattering Series *vs* Coupled Dipoles

Les deux approches théoriques que nous avons présentées dans la première et la deuxième section de ce chapitre constituent des modèles cohérents pour la description de la diffusion de la lumière par un nuage atomique. En effet, l'approche CD aussi bien que le développement MSS traitent le problème à travers le champ complexe (amplitude et phase) et pas uniquement par l'intensité lumineuse. Cela permet la prise en considération de l'aspect cohérent du processus de diffusion de la lumière dans les différents régimes possibles : régime de diffusion simple, de faible diffusion et aussi le régime diffusif. Dans cette section nous allons exposer les avantages et les inconvénients de chaque approche par rapport à l'autre. Nous comparerons leurs résultats respectifs dans la limite des faibles épaisseurs optiques où la MSS converge.

Dans sa limite de convergence correspondant aux régimes de faible diffusion, l'approche MSS donne une solution complète pour le champ diffusé par le nuage atomique de faible épaisseur optique. Dans ce régime, l'approche MSS est entièrement équivalente au modèle CD. Ce dernier consiste au calcul du champ diffusé à travers la résolution du système des  $3N$  équations couplées défini par l'eq. (1.72) pour obtenir les amplitudes des dipôles  $\mathbf{b}_j$ . Le calcul de ces dernières pour un grand nombre de diffuseurs  $N$  nécessite un traitement matricielle numérique pour





**Figure 1.10.** Diagramme d'intensité diffusée  $I^{(n)} = (\varepsilon_0 c/2) |\sum_{l=1}^n \mathbf{E}_{\text{sc}}^{(l)}|^2$  en fonction de l'angle polaire  $\theta$ , après la moyenne sur l'angle azimutal  $\phi$ , pour  $n = 1, 2, 3$ , dérivée de l'eq. (1.82) (MSS), comparée à l'intensité diffusée par les dipôles  $I_{\mathbf{b}} = (\varepsilon_0 c/2) |\mathbf{E}_{\mathbf{b}}|^2$ , dérivée à partir de l'eq. (1.72) (CD) et contenant tous les ordres de diffusion. La ligne verte représente l'intensité de l'atome unique  $I_1(1 + \cos^2 \theta)$  où  $I_1 = I_0/[k_0^2 r^2](1 + 4\delta^2)$ . L'intensité est en unité  $N I_1$ . Simulation réalisée pour un nuage gaussien de  $N = 1000$  atomes avec une épaisseur optique à résonance de  $b_0 = 1$ , un désaccord  $\delta = 0$  et un rayon r.m.s.  $\sigma_R \approx 54.8/k$  donné par  $b_0 = 3N/(k\sigma_R)^2$ . L'image en inset est un zoom dans une direction arbitraire (en échelle linéaire).

l'inversion de la matrice d'interaction de dimension  $N \times N$  en description scalaire et  $3N \times 3N$  en description vectorielle de la lumière. Ainsi, la contrainte principale dans ce modèle CD est le nombre limité d'atomes  $N$  géré par l'ordinateur pour l'inversion de la matrice d'interaction. Cela revient à des raisons de capacités numériques requises pour la résolution du problème, notamment en terme de mémoire (RAM) mais aussi en temps de calcul (CPU). Cette contrainte limitant le nombre d'atomes dans le nuage ne se pose pas avec l'approche MSS. En effet, cette dernière consiste à calculer le champ diffusé directement à partir du champ incident par une méthode itérative plus simple qui ne requiert pas autant de ressources que l'approche CD. Cette approche est ainsi beaucoup moins coûteuse numériquement d'autant plus que dans le régime de convergence de la méthode ( $b \leq 1$ ) seul quelques ordres de diffusion sont nécessaires pour la description complète du système. Afin d'illustrer cela nous comparons sur la fig. 1.10 l'intensité  $I_{\mathbf{b}}$  calculée à partir des amplitudes  $\mathbf{b}_j$  du modèle CD et contenant tous les ordres de diffusion, à l'intensité de radiation émise jusqu'au  $n^{\text{ème}}$  ordre de diffusion (pour  $n = 1, 2$  et

3) définie par la méthode MSS comme

$$I^{(n)} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left| \sum_{l=1}^n \mathbf{E}_{sc}^{(l)} \right|^2 . \quad (1.97)$$

Dans cette relation  $I^{(1)}$  décrit la diffusion simple uniquement,  $I^{(2)}$  inclue la somme de la diffusion simple et la diffusion double ... etc. Ces simulations sont réalisées pour une épaisseur optique  $b(\delta) = 1$  ( $b_0 = 1, \delta = 0$ ). La convergence de la série de diffusion multiple vers la solution CD est relativement lente mais clairement visible sur la fig. 1.10. Nous avons pu vérifier que pour des épaisseurs optiques beaucoup plus faibles, la convergence est plus rapide et la physique de la diffusion simple contenue dans  $E^{(1)}$  décrit déjà très bien le champ diffusé total. Par ailleurs, en plus de sa commodité numérique, la méthode MSS est intégrable pour certaines distributions atomiques dans la limite de sa convergence. Nous étudions dans le chapitre suivant un cas de figure où la méthode MSS admet une solution analytique. Cependant, cette approche s'appuie sur une somme infinie qui limite sa validité aux seuls régimes de convergence de la série de diffusion multiple. Cela donne alors un grand avantage à l'approche microscopique CD. Cette dernière s'appuie sur une matrice finie dont la solution numérique reste valide pour n'importe quel régime et pour une distribution arbitraire des diffuseurs dans le vide. Nous aurons donc recours à cette approche CD pour l'étude des effets collectifs en régime de forte diffusion.

Il est intéressant d'attirer l'attention sur le fait que l'intensité diffusée en modèle vectoriel représentée sur la fig. 1.10, montre un profil de modulation du fond (background) en  $\cos^2 \theta$  où  $\theta$  est l'angle entre la direction d'incidence et celle de diffusion. Ce profil modulé est dû au fait que la section efficace différentielle de diffusion en modèle vectoriel de la lumière est proportionnelle à  $1/2(1 + \cos^2(\theta))$  [57]. Cette dernière caractérise la réponse individuelle des atomes au champ incident, polarisé linéairement dans notre cas. Pour un tel régime de faible diffusion, cette modulation n'apparaît pas sur le diagramme de rayonnement obtenu par un modèle scalaire. Nous pourrions constater cela sur la fig. 2.3 du chapitre suivant. Notons par ailleurs que dans les régimes de diffusion multiple une modulation du fond pourrait apparaître même en approximation scalaire.

## 1.4 Conclusion

L'objectif de cette première partie de la thèse étant l'étude des effets de cohérence en diffusion multiple, nous avons présenté dans ce chapitre deux méthodes pour la résolution du problème : le modèle CD (*coupled dipoles*) et l'approche MSS

(*multiple scattering series*). Elles offrent une description cohérente de la diffusion de la lumière par un nuage atomique désordonné pour différents régimes de diffusion. Dans la première section nous avons introduit l'approche CD dans la description scalaire de la lumière. Le speckle et le CBS observés sur le diagramme d'émission des nuages atomiques de différentes géométries constituent des signatures des effets d'interférences inclus dans le modèle à travers l'interaction dipôle-dipôle. Nous avons montré la validité du théorème optique dans notre modèle et présenté les formules de la force de pression de radiation appliquée sur le nuage par le champ incident. Nous avons pu constater que dans cette approche CD toute la physique est décrite à partir des amplitudes des dipôles atomiques. Après avoir tracé sur les degrés de liberté de la lumière, un traitement numérique est nécessaire pour les obtenir. Cela limite le nombre d'atomes dans les nuages décrits par cette approche à cause des ressources informatiques limitées dont nous disposons. D'autre part, l'approche MSS introduite dans la seconde section en description vectorielle, décrit la diffusion multiple comme une série de diffusions successives du champ incident dans le nuage désordonné. Elle offre une solution numériquement plus simple que le modèle CD, sauf que cette approche ne peut donner de solution exacte que dans une limite de convergence restreinte au régime de faible diffusion.

Ce chapitre regroupe l'essentiel des outils théoriques que nous allons utiliser dans la suite du manuscrit. Ainsi, nous disposons de deux méthodes qui nous permettront d'étudier les effets de cohérence en diffusion multiple de la lumière dans différents régimes de diffusion. L'approche MSS convergente pour les régimes de faible diffusion, offre une description analytique pertinente de la double diffusion cohérente. De son côté, l'approche CD valable pour tous les régimes de diffusion sera comparée à la théorie du transfert radiatif incohérent (RTE) pour l'étude des effets collectifs d'interférence et de synchronisation en régime de forte diffusion.

## Chapitre 2

# Effets de cohérence en diffusion faible

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux régimes de faibles diffusions de la lumière par des échantillons atomiques de petites densités optiques ( $b \ll 1$ ). Bien que les processus se produisant dans ce régime ne contiennent que quelques événements de diffusion, leurs interférences peuvent se révéler suffisantes pour l'apparition de phénomènes physiques de grande importance. La série de diffusion multiple (MSS) introduite dans le chapitre précédent constitue une très bonne approche pour l'étude des effets de cohérence dans les régimes de diffusions faibles. À travers cette approche MSS et dans la limite de son domaine de convergence, nous allons étudier la double diffusion cohérente d'un champ lumineux par une collection de  $N$  atomes en désordre. Nous procéderons à la dérivation des formules analytiques décrivant le cône de rétrodiffusion cohérente (*coherent backscattering* (CBS)) ainsi que celles décrivant le lobe de diffusion cohérente vers l'avant (*coherent forward scattering* (CFS)) pour une distribution atomique gaussienne. Nous comparerons ces résultats à des calculs numériques et à des données expérimentales. Pour une raison de simplicité nous supposons dans ce chapitre que les ondes de radiation sont scalaires. Nous considérons ainsi des échantillons dilués et négligeons la polarisation de la lumière et les effets de champ proche.

## 2.1 Premier et second ordre de diffusion

En approximation scalaire l'éq. (1.82) définissant le champ diffusé mesuré au point  $\mathbf{r}^i$  par l'approche MSS s'écrit

$$E_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_{j=1}^N G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) [E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + E_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)] . \quad (2.1)$$

avec  $\kappa(\delta) = 1/(2i\delta - 1)$  et  $\delta = \Delta/\Gamma$ . Afin de ne prendre en considération que les contributions de la diffusion simple et double, nous approximations le champ de diffusion multiple  $E_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j)$  au point  $\mathbf{r}_j$  par sa première contribution

$$E_{\text{sc}}(\mathbf{r}_j) \approx \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} G(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_m) . \quad (2.2)$$

Ainsi, dans la limite de la diffusion double, le champ diffusé mesuré au point  $\mathbf{r}$  est donné par

$$\begin{aligned} E_{\text{sc}}(\mathbf{r}) &= \kappa(\delta) \sum_{j=1}^N G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) \\ &+ \kappa^2(\delta) \sum_{m=1}^N \sum_{j \neq m} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|) G(|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le champ total mesuré au point  $\mathbf{r}$  donnée par l'éq. (1.81) du chapitre précédent sera, dans la limite de la double diffusion, donné par

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) &= E_{\text{in}}(\mathbf{r}) + E_{\text{sc}}(\mathbf{r}) , \\ &= E_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \kappa(\delta) \sum_{j=1}^N G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$+ \kappa^2(\delta) \sum_{m=1}^N \sum_{j \neq m} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|) G(|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) . \quad (2.5)$$

Le premier terme de l'éq. (2.5) correspond au champ incident mesuré au point  $\mathbf{r}$ . Le second terme regroupe les contributions de la diffusion simple de l'onde incidente par chaque atome du nuage. Pour un atome  $j$  donné, ce terme décrit la diffusion simple du champ incident par l'atome à la position  $\mathbf{r}_j$  suivit par sa propagation jusqu'au détecteur placé à  $\mathbf{r}$ . Le troisième terme correspond à la diffusion double. Le

---

i.  $\mathbf{r}$  peut correspondre à un point à l'intérieur ou à l'extérieur de l'échantillon.

champ incident est dans un premier temps diffusé par un atome à la position  $\mathbf{r}_j$  puis se propage vers  $\mathbf{r}_m$  où il subit une seconde diffusion avant d'être mesuré au point  $\mathbf{r}$ .

Nous allons montrer dans ce chapitre que la diffusion double est le premier ordre du processus de diffusion multiple qui contribue au CBS. Ce dernier est la conséquence de l'interférence entre l'onde diffusée à  $\mathbf{r}_j$  puis à  $\mathbf{r}_m$  et le chemin réciproque à travers lequel l'onde est diffusée par l'atome à la position  $\mathbf{r}_m$  puis par celui à  $\mathbf{r}_j$ . Cet effet peut être capté par l'estimation du champ diffusé en champ lointain dans la limite de la diffusion double. En utilisant la formule asymptotique de la fonction de Green scalaire en champ lointain

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) \approx \exp(ikr - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)/(ikr) , \quad (2.6)$$

le champ diffusé dans la limite d'une double diffusion donné par l'eq. (2.3) s'écrit

$$\begin{aligned} E_{sc}(\mathbf{r}) = & \kappa(\delta) \frac{e^{ikr}}{ikr} E_0 \sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} \\ & + \kappa^2(\delta) \frac{e^{ikr}}{ikr} E_0 \sum_{m=1}^N \sum_{j \neq m}^N G(|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j|) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m)} , \end{aligned} \quad (2.7)$$

où nous supposons que l'onde incidente est une onde plane de la forme  $E_{in}(\mathbf{r}) = E_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$ . Le premier terme de cette équation représente la diffusion simple et le second correspond à la diffusion double. Dans le chapitre précédent nous avons utilisé le facteur de structure  $S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$  pour décrire la diffusion simple en champ lointain dans l'eq. (1.87). Il est donné par

$$S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = (1/N) \sum_j \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}_j] , \quad (2.8)$$

En introduisant

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{N} \sum_m \sum_{j \neq m} G(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m)} , \quad (2.9)$$

nous pouvons écrire l'intensité diffusée jusqu'au deuxième ordre de diffusion sous la forme

$$I_{sc}(\mathbf{r}) = N^2 I_1 |S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \kappa(\delta) T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|^2 . \quad (2.10)$$

Dans cette équation  $I_1 = I_0/[k^2 r^2 (1 + 4\delta^2)]$  correspond à l'intensité diffusée par un atome unique et  $I_0$  est l'intensité de l'onde incidente.  $N I_1$  sera donc l'intensité diffusée par un nuage très dilué de  $N$  atomes indépendants. Dans l'eq. (2.10) le terme en  $S$  constitue la contribution de la diffusion simple à l'intensité diffusée, alors que

le terme en  $T$  regroupe les contributions de la diffusion double notamment vers l'avant et vers l'arrière par rapport à la direction du champ incident. Dans la suite, nous allons tenter d'explicitier la contribution de ces termes à l'intensité diffusée.

La moyenne de configuration permet d'extraire à partir du facteur de structure une contribution incohérente à l'intensité diffusée qui consiste à

$$|S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 = 1/N . \quad (2.11)$$

D'autre part, la contribution cohérente vers l'avant pour un grand nombre d'atomes  $N$  peut être écrite sous la forme d'une intégrale continue

$$S_\infty = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}] , \quad (2.12)$$

avec  $\rho(\mathbf{r})$  la densité atomique<sup>ii</sup>. De son côté, le terme  $|T|^2$  donne en plus d'une contribution incohérente, deux contributions cohérentes : une vers l'avant et une vers l'arrière. Les origines de ces deux contributions cohérentes sont en fait différentes. Prenons le module au carré de l'eq. (2.9) en considérant uniquement les paires d'atomes équivalentes  $(j, m)$  dans  $T$  et  $T^*$ . Nous obtenons

$$|T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|_{\text{pair}}^2 \approx \frac{1}{N^2} \sum_m \sum_{j \neq m} \frac{1 + \cos[(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)]}{k^2 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|^2} . \quad (2.13)$$

Le premier terme de l'eq. (2.13) (en  $1/(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|^2)$ ) apparaît quand la même paire d'atomes est considérée deux fois. Ce terme amplifie la partie incohérente de l'intensité diffusée. Le second terme (en cosinus) est le résultat du chevauchement (superposition) entre le chemin du champ diffusé par la paire  $(j, m)$  et son chemin réciproque  $(m, j)$ . Ce dernier terme est connu comme le terme CBS [71]. Il donne lieu à une amplification de la radiation cohérente vers la direction arrière par rapport à la direction du champ incident. En plus de ce terme de paires,  $T$  (donné par l'eq. (2.9)) fournit aussi une contribution cohérente à l'intensité diffusée vers l'avant. Cette contribution est due au processus d'interférences impliquant plus de deux atomes. Elle peut s'écrire dans la limite continue sous la forme

$$T_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r}_1 \rho(\mathbf{r}_1) \int d\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2)} , \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  correspondent aux positions du premier et deuxième atome respectivement (responsable du premier et deuxième événement de diffusion). En collectant les différentes contributions données par les eqs. (2.11), (2.12), (2.13) et (2.14),

ii. L'indice  $\infty$  sur  $S_\infty$  ou  $T_\infty$  désigne l'approximation de la distribution continue en densité.

l'intensité diffusée jusqu'à la diffusion double pour une densité atomique arbitraire  $\rho(\mathbf{r})$  est donnée par :

$$I_{\text{sc}}^{(2)}(\mathbf{r}) = NI_1 \left\{ 1 + \frac{N}{1 + 4\delta^2} |T|_{\text{pair}}^2 + N|F_\infty|^2 \right\}, \quad (2.15)$$

où  $F_\infty = S_\infty + \kappa(\delta)T_\infty$ . Le premier terme correspond à la contribution isotrope incohérente  $NI_1$  équivalente à l'intensité diffusée par un nuage dilué de  $N$  atomes indépendants. Le second terme amplifie le terme incohérent précédent et donne aussi le cône de rétrodiffusion cohérent CBS à travers le premier et le second terme de l'eq. (2.13) respectivement. En fin, le troisième terme de l'eq. (2.15) constitue le lobe de diffusion cohérent vers l'avant CFS. Ce dernier est le résultat de la somme des contributions à la diffusion cohérente vers l'avant de la diffusion simple proportionnelle à  $S_\infty$  et celle de la diffusion double proportionnelle à  $T_\infty$ .

## 2.2 Rétrodiffusion cohérente (CBS)

Le CBS dans notre description de diffusion double de la lumière par un milieu atomique désordonné ce révèle à travers les moyennes de configurations sur le terme de double diffusion entre les paires d'atomes dans l'eq. (2.13). Partant de ce terme, nous allons dériver la formule analytique du CBS que nous comparerons aux données expérimentales de Bidet *et al.* [72]. Pour cela, nous réalisons dans un premier temps la moyenne sur les directions aléatoires des vecteurs  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m$  en supposant une distribution atomique à supports infinis<sup>iii</sup>. Nous considérerons par la suite une distribution atomique gaussienne et nous réaliserons la moyenne sur les distances aléatoires entre les atomes.

### Moyenne sur le désordre angulaire

Cette première étape de notre approche consiste en une moyenne sur les variables angulaires entre les positions aléatoires des diffuseurs. Elle ne nécessite donc pas de détails à propos de la densité atomique du nuage. Nous rappelons que notre approche MSS est valable pour un profil de densité arbitraire. En effet, cela nous a permis de dériver la formule de l'intensité diffusée jusqu'au deuxième ordre de diffusion pour une densité quelconque. Dans le terme lié à la contribution de l'interférence des paires à la diffusion double donné par l'eq. (2.13), nous supposons que  $\mathbf{k}_0 = k(0, 0, 1)$  et  $\mathbf{k} = k(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  ainsi que

$$\mathbf{r}_{jm} = r_{jm}(\sin \theta_{jm} \cos \phi_{jm}, \sin \theta_{jm} \sin \phi_{jm}, \cos \theta_{jm}), \quad (2.16)$$

---

iii. La distribution gaussienne sphérique par exemple constitue une distribution infinie



où  $\mathbf{r}_{jm} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m$ . Par conséquent,

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}_{jm} = kr_{jm} [\sin \theta \sin \theta_{jm} \cos(\phi_{jm} - \phi) + (1 + \cos \theta) \cos \theta_{jm}] . \quad (2.17)$$

La moyenne sur  $\theta_{jm}$  et  $\phi_{jm}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \langle |T|_{\text{pair}}^2 \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{j,m \neq j} \frac{1}{k^2 r_{jm}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{jm} \int_0^\pi d\theta_{jm} \sin \theta_{jm} \right. \\ &\quad \left. \times \cos \{ kr_{jm} [\sin \theta \sin \theta_{jm} \cos(\phi_{jm} - \phi) + (1 + \cos \theta) \cos \theta_{jm}] \} \right\} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

En utilisant la relation

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos[a + b \cos(\phi - \phi')] = 2\pi \cos(a) J_0(b) , \quad (2.19)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0, l'intégration sur  $\phi_{jm}$  donne

$$\begin{aligned} \langle |T|_{\text{pair}}^2 \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_{m \neq j} \frac{1}{k^2 r_{jm}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_{jm} \sin \theta_{jm} \right. \\ &\quad \left. \times \cos [kr_{jm} (1 + \cos \theta) \cos \theta_{jm}] J_0 [kr_{jm} \sin \theta \sin \theta_{jm}] \right\} . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Puis nous utilisons l'expression

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos(a \cos \theta) J_0(b \sin \theta) = 2 \frac{\sin \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} , \quad (2.21)$$

pour obtenir

$$\langle |T|_{\text{pair}}^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_{m \neq j} \frac{1}{k^2 r_{jm}^2} \{ 1 + \text{sinc}[2kr_{jm} \cos(\theta/2)] \} , \quad (2.22)$$

avec  $\text{sinc}(z) = \sin(z)/z$ . Cette première moyenne sur les variables angulaires  $\theta_{jm}$  et  $\phi_{jm}$  donne alors

$$\langle |T|_{\text{pair}}^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_{m \neq j} \frac{1}{k^2 r_{jm}^2} \left\{ 1 + \frac{\sin[2kr_{jm} \cos(\theta/2)]}{2kr_{jm} \cos(\theta/2)} \right\} , \quad (2.23)$$

où  $\theta$  est l'angle du vecteur d'onde correspondant au photon diffusé dans le mode  $\mathbf{k}$  par rapport à  $\mathbf{k}_0$  correspondant au photon incident suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$ . Dans la limite d'une distribution continue, l'eq. (2.23) s'écrit

$$\langle |T|_{\text{pair}}^2 \rangle_\infty = \frac{1}{N^2} \int d\mathbf{r}_1 \rho(\mathbf{r}_1) \int d\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2) \frac{1}{k^2 r_{jm}^2} \left\{ 1 + \frac{\sin[2kr_{jm} \cos(\theta/2)]}{2kr_{jm} \cos(\theta/2)} \right\} . \quad (2.24)$$

Ainsi, nous avons réalisé la moyenne sur les variables angulaires entre les atomes. L'étape suivante consiste à réaliser la moyenne sur les distances entre les paires d'atomes  $r_{jm} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|$ . La distribution des distances et par conséquent l'accroissement de la radiation rétro-diffusée dépendent de la densité atomique de l'échantillon. Nous allons ainsi devoir utiliser une distribution atomique donnée afin de dériver la formule analytique du cône de rétrodiffusion cohérente CBS.

### Moyenne sur le désordre radial

Dans l'objectif d'obtenir une formule analytique pour le CBS en double diffusion à partir de l'eq. (2.24), il faudra compléter la moyenne réalisée sur les variables angulaires par la moyenne sur les distances aléatoires entre les atomes. Pour cela, nous allons considérer une distribution spécifique de densité atomique : une sphère gaussienne de rayon r.m.s.  $\sigma_R$ . Ce profil de densité peut être d'une grande utilité dans l'étude des systèmes ayant une géométrie et une densité similaire, telles que les expériences d'atomes froids par exemple.

Afin de dériver la formule analytique de la contribution à la diffusion cohérente vers l'arrière  $\langle |T|_{\text{pair}}^2 \rangle_\infty$  pour une distribution de densité gaussienne, nous allons estimer pour ce profil de densité l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int d\mathbf{r}_1 \rho(\mathbf{r}_1) \int d\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2) f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) . \quad (2.25)$$

En faisant un changement des variables d'intégrations  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  en  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  et  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , l'intégrale précédente devient

$$\mathcal{I} = \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{r}_{12} \rho(\mathbf{R} - \mathbf{r}_{12}/2) \rho(\mathbf{R} + \mathbf{r}_{12}/2) f(|\mathbf{r}_{12}|) . \quad (2.26)$$

Nous considérons maintenant une distribution atomique gaussienne de la forme  $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \exp(-r^2/2\sigma_R^2)$ . Sachant que

$$|\mathbf{R} + \mathbf{r}_{12}/2|^2 + |\mathbf{R} - \mathbf{r}_{12}/2|^2 = 2R^2 + r_{12}^2/2 , \quad (2.27)$$

l'intégrale de l'eq. (2.26) s'écrit en coordonnées polaires sous la forme

$$\mathcal{I} = \frac{2N^2}{\pi\sigma_R^6} \int_0^\infty dR R^2 e^{-R^2/\sigma_R^2} \int_0^\infty dr_{12} r_{12}^2 e^{-r_{12}^2/4\sigma_R^2} f(r_{12}) , \quad (2.28)$$

$$= \frac{4N^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} f(2\sigma_R x) . \quad (2.29)$$

Suivant l'eq. (2.24) nous considérons

$$f(r_{12}) = \frac{1}{k^2 r_{12}^2} \left\{ 1 + \frac{\sin[2kr_{12} \cos(\theta/2)]}{2kr_{12} \cos(\theta/2)} \right\} . \quad (2.30)$$

Par conséquent, l'intégrale  $\mathcal{I}$  donne

$$\mathcal{I} = \frac{N^2}{\sqrt{\pi}(k\sigma_R)^2} \int_0^\infty dx e^{-x^2} \left[ 1 + \frac{\sin(ax)}{ax} \right], \quad (2.31)$$

$$= \frac{N^2}{2(k\sigma_R)^2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{a} \operatorname{erf}(a/2) \right], \quad (2.32)$$

où  $a = 4(k\sigma_R) \cos(\theta/2)$ . Ainsi, nous avons dérivé à partir de l'eq. (2.24) la contribution de la diffusion double au cône de rétrodiffusion cohérente CBS pour un champ diffusé par une distribution atomique gaussienne. Cette contribution s'écrit

$$\langle |T(\theta)|_{\text{pair}}^2 \rangle = \frac{1}{2(k\sigma_R)^2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\operatorname{erf}[2(k\sigma_R) \cos(\theta/2)]}{2(k\sigma_R) \cos(\theta/2)} \right\}, \quad (2.33)$$

$$= \frac{\mathcal{E}(\theta)}{2(k\sigma_R)^2}. \quad (2.34)$$

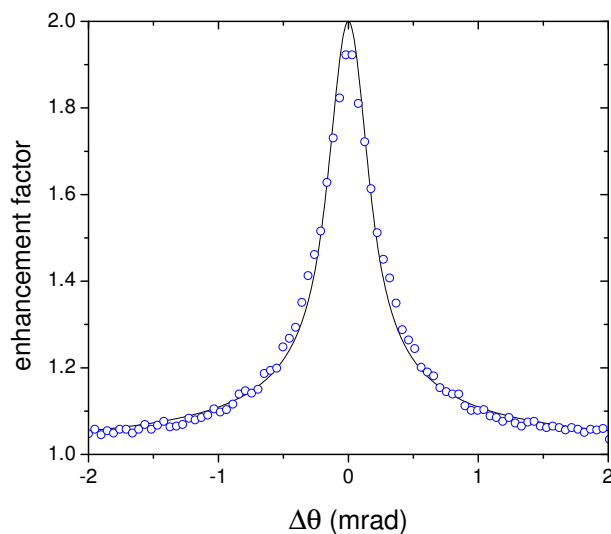
Nous avons constaté que le terme de l'amplification de la radiation cohérente rétrodiffusée donné par

$$\mathcal{E}(\theta) = 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\operatorname{erf}[2(k\sigma_R) \cos(\theta/2)]}{2(k\sigma_R) \cos(\theta/2)}, \quad (2.35)$$

a un maximum de 2 et une largeur angulaire à mi-hauteur (*angular FWHM*) de  $\Delta\theta = 2\sqrt{3}/(k\sigma_R) \approx 0.55(\lambda/\sigma_R)$  (voir fig. 2.1). Il s'avère que notre analyse est en parfait accord avec le travail expérimental réalisé par Bidet *et al.* [72] comme nous pouvons le constater sur la fig. 2.1. Les auteurs de cette référence ont étudié le cône de rétrodiffusion cohérente CBS pour un grand nuage atomique froid de Strontium ( $\sigma_R = 8098/k$ ) d'une épaisseur optique scalaire à résonance  $b_0 = 1.93$ . Ils ont mesuré une largeur angulaire du cône de  $0.50 \pm 0.04$  mrad. Ce résultat expérimental est en très bon accord avec la valeur théorique de 0.46 mrad obtenu à partir de l'eq. (2.34) pour les mêmes paramètres. Remarquons que la formule (2.35) décrivant le cône de rétrodiffusion cohérente, met en évidence le fait que la forme de ce dernier ne dépend que de la taille du nuage gaussien. Cela a été observé par Labeyrie *et al.* dans une expérience d'atomes froids [73]. Les auteurs remarquent également que les propriétés du CBS sont essentiellement déterminées par les premiers ordres de diffusion sur les couches externes aux bords du nuage.

## 2.3 Diffusion cohérente vers l'avant (CFS)

La contribution cohérente de la diffusion simple à l'intensité diffusée vers l'avant par rapport à la direction du champ incident est donnée par l'eq. (2.12) pour une



**Figure 2.1.** Observation expérimentale et théorique de l’amplification de la rétro-diffusion cohérente CBS pour un nuage gaussien de rayon r.m.s.  $\sigma_R = 8098/k$  à résonance ( $\delta = 0$ ). Les cercles bleus correspondent aux valeurs expérimentales rapportées par la fig. 2 de la ref. [72]. La ligne noire reproduit le résultat théorique à travers  $\mathcal{E}(\theta)$  donnée par l’eq. (2.34). Nous tenons à souligner que le seul paramètre libre est un ajustement de 3% sur le fond.

densité arbitraire  $\rho(\mathbf{r})$ . Pour une distribution atomique gaussienne cette contribution s’écrit [24]

$$S(\theta) = \exp[-2(k\sigma_R)^2 \sin^2(\theta/2)] . \quad (2.36)$$

Par ailleurs, la contribution cohérente vers l’avant du second ordre de diffusion dans la limite des grandes tailles du nuage atomique  $k\sigma_R \gg 1$ , est donnée par

$$T(\theta) \approx \frac{N}{4(k\sigma_R)^2} \exp[-4(k\sigma_R)^2 \sin^2(\theta/4)] . \quad (2.37)$$

$$\approx \frac{b_0}{8} \exp[-4(k\sigma_R)^2 \sin^2(\theta/4)] . \quad (2.38)$$

avec  $b_0 = 2N/(k\sigma_R)^2$  l’épaisseur optique à résonance pour une sphère gaussienne en modèle scalaire. Cette contribution de la diffusion double à la diffusion cohérente vers l’avant est obtenue à partir de l’eq. (2.14). Le passage de  $T_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  pour une distribution atomique quelconque à  $T(\theta)$  pour une distribution de densité gaussienne se fait comme suit : nous introduisons  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  et  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , tels que

$$T_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{ikN} \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{r}_{12} \rho(\mathbf{R} + \mathbf{r}_{12}/2) \rho(\mathbf{R} - \mathbf{r}_{12}/2) \\ \times \exp [(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R} + i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_{12}/2 + ikr_{12}] / r_{12} . \quad (2.39)$$

Pour une distribution gaussienne la double intégrale se factorise en

$$T_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\rho_0^2}{ikN} \int d\mathbf{R} e^{-R^2/\sigma_R^2 + i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} \\ \times \int d\mathbf{r}_{12} \exp \left[ -r_{12}^2/4\sigma_R^2 + i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_{12}/2 + ikr_{12} \right] / r_{12} . \quad (2.40)$$

En supposant que  $\mathbf{k} = k(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  et  $\mathbf{k}_0 = k(0, 0, 1)$ , la première intégrale donne :

$$\mathcal{I}_1 = \rho_0 \int d\mathbf{R} e^{-R^2/\sigma_R^2 + i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} \quad (2.41)$$

$$= \frac{N}{2\sqrt{2}} e^{-(k\sigma_R)^2(1 - \cos \theta)/2} . \quad (2.42)$$

Après intégration sur les variables angulaires, la deuxième intégrale de l'éq. (2.40) donne :

$$\mathcal{I}_2 = \frac{2N}{i\sqrt{2\pi}(k\sigma_R)^2 \cos(\theta/2)} \int_0^\infty dx e^{-x^2/4 + i(k\sigma_R)x} \sin[(k\sigma_R) \cos(\theta/2)x] , \quad (2.43)$$

où nous avons utilisé l'expression

$$\int_0^\infty dx e^{-x^2/4 + iax} \sin(bx) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ -e^{4ab} [\operatorname{erfi}(a - b) - i] \right. \\ \left. + \operatorname{erfi}(a + b) - i \right\} e^{-(a+b)^2} . \quad (2.44)$$

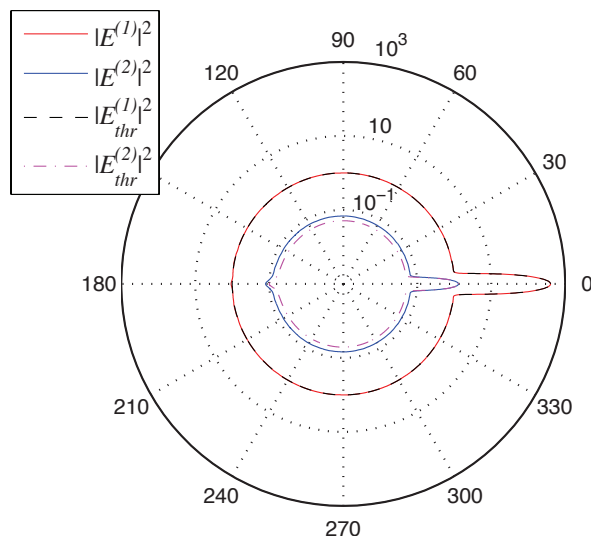
Ainsi, nous obtenons

$$T(\theta) = \frac{N e^{-2(k\sigma_R)^2(1 + \cos \theta/2)}}{4i(k\sigma_R)^2 \cos \theta/2} \left\{ \operatorname{erfi} [(k\sigma_R)(1 + \cos \theta/2)] \right. \\ \left. - e^{4(k\sigma_R)^2 \cos \theta/2} \operatorname{erfi} [(k\sigma_R)(1 - \cos \theta/2)] + i \left( e^{4(k\sigma_R)^2 \cos \theta/2} - 1 \right) \right\} . \quad (2.45)$$

Pour de grandes tailles ( $k\sigma_R$ ) et autour de la direction avant ( $\theta \sim 0$ ), nous arrivons à l'éq. (2.37). À travers cette dernière nous notons que la contribution de ce terme à la diffusion vers l'arrière donnée par

$$T(\pi) = \frac{N}{4(k\sigma_R)^2} \exp(-2(k\sigma_R)^2) , \quad (2.46)$$

se réduit à zéro pour  $k\sigma_R \gg 1$ .



**Figure 2.2.** Profil de radiation dans la limite champ lointain pour le premier et le deuxième ordre de diffusion ( $n = 1, 2$ ). Les courbes pleines traduisent les simulations numériques à partir des deux termes de l'eq. (2.7). La diffusion simple représentée par  $|E^{(1)}(\theta)|^2$  montre en plus du fond isotrope, un lobe de diffusion cohérente vers l'avant (pic pointant vers la droite, laser incident de la gauche vers la droite).  $|E^{(2)}(\theta)|^2$  représente l'intensité diffusée de la diffusion double seulement. Cette dernière donne lieu à un fond isotrope, au cône de rétrodiffusion (CBS) en plus d'un inattendu lobe vers l'avant. Les courbes théoriques (avec l'indice *thr*) sont obtenues à partir des eqs. (2.33), (2.36) et (2.37). L'accord entre simulation et théorie pour l'intensité diffusée par la seconde diffusion reste très bon bien qu'il soit moins parfait que celui constaté pour la diffusion simple. Les simulations ont été réalisées pour un nuage gaussien sphérique contenant  $N = 400$  atomes avec une épaisseur optique à résonance  $b_0 = 2N/(k\sigma_R)^2 = 1$ , un rayon r.m.s.  $\sigma_R \approx 28.3/k$ , un champ incident dans la direction  $\theta = 0$  (de gauche à droite) avec un désaccord  $\delta = 1$  et moyenné sur 1000 réalisations. L'amplitude du champ incident est de  $E_0 = 1$  et le rayon d'observation est de  $3 \cdot 10^4/k$ . Échelle logarithmique.

Ainsi, en ajoutant la contribution cohérente de la diffusion simple donnée par l'eq. (2.36) à celle de la diffusion double donnée par l'eq. (2.38), l'intensité cohérente vers l'avant jusqu'en diffusion double pour  $k\sigma_R \gg 1$  sera donnée par

$$F(\theta) = S(\theta) + \kappa(\delta)T(\theta) , \quad (2.47)$$

$$= e^{-2(k\sigma_R)^2 \sin^2(\theta/2)} - (1 + 2i\delta) \frac{b(\delta)}{8} e^{-4(k\sigma_R)^2 \sin^2(\theta/4)} , \quad (2.48)$$

où  $\kappa(\delta) = 1/(2i\delta - 1)$  et  $b(\delta) = b_0/(1 + 4\delta^2)$  est l'épaisseur optique de l'échantillon. Le lobe vers l'avant correspondant à la diffusion simple (voir fig. 2.2) est donné par

le premier terme de l'eq. (2.48). Il reflète la diffraction du champ incident par le nuage atomique. Le second terme dans l'eq. (2.48) donne un surprenant lobe vers l'avant comme contribution de la double diffusion. Le rapport entre le pic d'intensité de la diffusion double comparé à celui de la diffusion simple est toujours donné par  $b_0^2/64(1+4\delta^2)$ . Le rapport de leurs puissances est donné par  $b_0^2/32(1+4\delta^2)$  pour des échantillons de grandes tailles  $k\sigma_R \gg 1$ . Les deux rapports sont indépendants de la densité spatiale du nuage atomique. Nous constatons que l'augmentation de la taille du système à  $b_0$  et  $\delta$  constants, va induire une augmentation de l'amplitude du pic et de sa puissance pour le premier ainsi que le deuxième ordre de diffusion<sup>iv</sup>. Néanmoins, leurs rapports restent constants.

Ce lobe de double diffusion cohérente vers l'avant (CFS) dont nous venons de dériver la formule analytique, peut être comparé à celui obtenu dans les refs. [74, 75]. Dans ces deux études le CFS apparaît uniquement dans la limite des nuages atomiques denses, proche du régime de la localisation d'Anderson. Toutefois, nos résultats semblent indiquer que le CFS est aussi présent dans la limite des nuages à faibles densités atomiques.

Nous avons ainsi procédé à la dérivation des formules analytiques des différentes contributions dans les différentes directions à l'intensité diffusée au premier et au second ordre de diffusion. Nous remarquons que malgré le fait que notre procédure ne correspond pas parfaitement à une moyenne de configurations rigoureuse, elle nous permet de dériver des formules analytiques en très bon accord avec les résultats des moyennes de configurations numériques comme le montre la fig. 2.2. Nous pouvons aussi constater l'accord parfait entre la formule analytique décrivant la diffusion simple et la simulation numérique moyennée sur 1000 réalisations. L'accord pour le second ordre de diffusion est quantitativement moins bon mais reste qualitativement très satisfaisant.

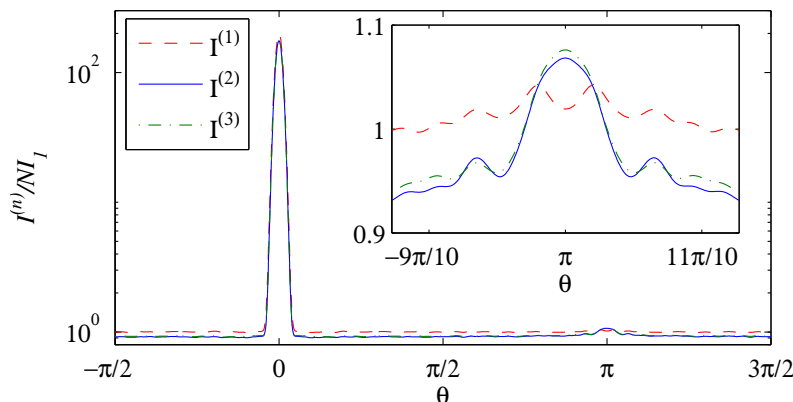
## 2.4 Interférence entre ordres de diffusion faible

En collectant les différentes contributions cohérentes et incohérentes données par les eqs. (2.11) à (2.14), l'eq. (2.15) regroupe l'apport de la diffusion simple et double à l'intensité diffusée par un nuage de densité atomique arbitraire. Pour une distribution gaussienne d'atomes, l'intensité totale diffusée jusqu'au second ordre de diffusion est donnée par

$$I_{sc}^{(2)}(\theta) = NI_1 \left\{ 1 + \frac{b(\delta)}{4} \mathcal{E}(\theta) + N|F(\theta)|^2 \right\}, \quad (2.49)$$

---

iv. Cela se traduit par le dernier facteur  $N$  dans l'eq. (2.49).



**Figure 2.3.** Intensité diffusé en champ lointain  $I^{(n)} = (\varepsilon_0 c/2) |\sum_{l=1}^n E^{(l)}|^2$ , en unité  $NI_1$  jusqu'au 1<sup>er</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> ordre de diffusion en fonction de  $\theta$  (échelle logarithmique). L'insert est un zoom sur la direction arrière (échelle linéaire). Simulations réalisés pour une distribution atomique en sphère gaussienne de taille  $\sigma_R = 20/k$ , contenant  $N = 200$  particules et d'épaisseur optique à résonance  $b_0 = 1$  avec un désaccord laser  $\delta = 0.5$ . L'intensité a été moyennée sur 1000 réalisations.

où  $\mathcal{E}(\theta)$  et  $F(\theta)$  sont donnés par les eqs. (2.35) et (2.48) respectivement.

Sur la fig. 2.3 nous traçons les résultats du calcul numérique des intensités diffusées jusqu'au premier, second et troisième ordres de diffusion calculé numériquement. Nous constatons une interférence destructive entre l'intensité lumineuse du second ordre de diffusion et celle du premier ordre de diffusion. Cela engendre une réduction du fond (background) de l'intensité totale  $I^{(2)}$  incluant le premier et deuxième ordre de diffusion par rapport à  $I^{(1)}$  qui représente la diffusion simple seulement. Analytiquement, cet effet d'interférence destructive est inclut dans l'expression mathématique du terme  $F(\theta)$  donné par l'eq. (2.48). Ce dernier est supposé être le terme dominant dans l'expression de  $I^{(2)}(\theta)$  mis à part dans la direction arrière. Dans cette direction c'est le terme  $\mathcal{E}(\theta)$  décrivant le CBS et donné par l'eq. (2.35) qui domine comme le montre l'insert sur la fig. 2.3.

Par ailleurs, il est intéressant de noter qu'à la différence du profil d'intensité obtenu en approche vectorielle dans le chapitre précédent, les courbes de l'intensité diffusée sur la fig. 2.3 affichent un fond plat. La modulation observée sur la fig. 1.10 en approche vectorielle étant due à la réponse atomique à un champ lumineux polarisé, disparaît en approximation scalaire.



## 2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un formalisme théorique pour la description de la diffusion faible de la lumière par des nuages atomiques de petites épaisseurs optiques, soumis à une excitation extérieure. Notre approche s'appuie sur la résolution itérative de la série de diffusion multiple (MSS) pour le premier et le second ordre de diffusion. Pour un nuage de densité atomique gaussienne, nous avons obtenu une formule analytique décrivant la rétrodiffusion cohérente (CBS). Bien qu'elle n'inclut que les deux premiers ordres de diffusion, cette formule donne un résultat en très bon accord avec celui obtenu à travers une expérience d'atomes froids [72]. Par ailleurs, le même formalisme nous a permis de calculer l'intensité diffusée dans la direction du champ incident. Un surprenant lobe de diffusion cohérente vers l'avant (CFS) apparaît au deuxième ordre de diffusion. Cela porte à croire que l'intensité totale dans le lobe de diffusion vers l'avant n'est pas uniquement due à la diffraction triviale du champ incident par le nuage atomique. D'autre part, nous avons vérifié que nos formules analytiques sont en bon accord avec les résultats obtenus par une résolution numérique de la série de diffusion multiple. En effet, la description du problème par ordres successifs de diffusion par le biais de la MSS, permet de mettre en évidence la contribution de chaque ordre de diffusion. Des effets de cohérence intéressants en découlent, que se soit à l'image du CFS observé en diffusion double ou l'interférence destructive entre les deux premiers ordres de diffusion. De tels effets cohérents ne sont décrits ni par la théorie du transfert radiatif ni par les méthodes numériques calculant tous les ordres de diffusion à la fois, comme l'approche microscopique CD.

En fin, ce formalisme peut être d'une grande utilité pour la description des premiers ordres de diffusion dans les nuages d'atomes froids illuminés par un faisceau laser. Il peut aussi être étendu d'une part à d'autre géométrie telle que les couches atomiques (*slab*) et d'autre part aux ordres de diffusion supérieurs.

# Chapitre 3

## Effets coopératifs en diffusion multiple

Nous présentons dans ce chapitre une expérience d'atomes froids réalisée à Nice peu avant le début de ma thèse au sein du groupe. Cette expérience consiste en la mesure du déplacement du centre de masse d'un nuage atomique dû à la force de pression de radiation (*radiation pressure force* (RPF)) appliquée sur ce dernier par un champ laser extérieur. L'échantillon consiste en un nuage d'atomes  $^{87}\text{Rb}$  dans un piège magnétooptique (*magneto-optical trap* (MOT)), illuminé par un faisceau laser à résonance. Cette expérience vient après une série d'expériences se basant sur le même principe et réalisées avec des lasers sondes hors résonance atomique [76, 58, 77]. La réduction de la force de pression de radiation observée dans ces expériences a été interprétée comme une signature des effets coopératifs<sup>i</sup>. L'objectif de l'expérience que nous présentons est d'illustrer si oui ou non les effets coopératifs observés auparavant en régime de diffusion faible ( $b \ll 1$  et  $b < 1$ ), persistent en régime de diffusion multiple de la lumière pour un nuage atomique dilué ( $\rho\lambda^3 \ll 1$ ).

Dans le chapitre précédent nous avons traité la diffusion cohérente de la lumière dans la limite de faible diffusion (diffusion simple et double). L'approche de la MSS nous a permis une étude numérique et analytique du système. Ainsi, pour des  $b_0$  modérés, nous avons travaillé hors résonance atomique pour garder une épaisseur optique faible ( $b \leq 1$ ). Pour des milieux optiquement plus denses nous nous attendons à des effets coopératifs plus importants d'une part (pour des  $b_0$  plus grands) et à une diffusion multiple plus forte d'autre part (pour des  $b(\delta)$  plus grands). Afin de se placer dans un régime de diffusion multiple, nous considérerons un champ lumineux incident en résonance avec la transition atomique des

---

i. Il a été observé dans ces expériences que la RPF décroît pour un nombre d'atome croissant.

diffuseurs. Cela augmente significativement la valeur de  $b$  pour un  $b_0$  donné<sup>ii</sup> et nous permet de passer du régime de diffusion simple au régime diffusif<sup>iii</sup>. Malgré l'apparente simplicité de la situation, aucun résultat analytique n'existe pour la description de la diffusion multiple de la lumière par un système désordonné de  $N$  dipôles couplés. La complexité du problème *many-body* nécessite un traitement numérique ou expérimental [78]. Ainsi, la partie théorique de ce chapitre consistera en l'étude de la diffusion multiple de la lumière par un nuage atomique à travers deux modèles numériques : le modèle des dipôles couplés (*coupled dipoles* (CD)) et un modèle de marche au hasard du photon (*random walk* (RW)) à l'intérieur d'une collection de diffuseurs désordonnés, décrite par la théorie du transfert radiatif (*radiation transfert equation* (RTE)). Cette dernière ne considère que l'aspect corpusculaire de la lumière et ne tient pas compte des effets d'interférences dans le processus de diffusion multiple. L'aspect cohérent est alors complètement perdu dans ce modèle. Dans ce sens, nous utiliserons souvent les adjectifs cohérent et incohérent pour désigner les modèles CD et RW respectivement. Cela revient à la prise en considération ou non des effets de cohérence durant le processus de diffusion dans chacun des deux modèles. La comparaison entre ces deux modèles permettra la mise en avant des effets de cohérences qui persisteraient en régime de diffusion multiple.

Notons que nous avons eu recours aux deux modèles numériques afin d'expliquer les résultats observés sur l'expérience. Néanmoins, pour faciliter la compréhension de ces résultats nous allons d'abord introduire la partie théorique de l'étude. Nous introduirons dans la sec. 3.1 le modèle RW. Puis nous allons comparer dans un premier temps le diagramme d'émission donnée par le modèle CD à résonance à celui obtenu par la simulation Monte Carlo du modèle incohérent RW. Une fois que nous aurons présenté l'expérience, nous comparerons la RPF mesurée dans cette dernière à celle calculée à partir des deux modèles numériques CD et RW.

### 3.1 Modèle de marche au hasard du photon (RW)

L'étude de la propagation de l'onde lumineuse en milieu diffusant pour un grand nombre de diffuseurs est complexe en raison de la difficulté à résoudre l'équation de Helmholtz correspondante. La diffusion multiple de la lumière par les milieux

ii. Nous rappelons que  $b = b_0/(1 + 4\delta^2)$ .

iii. Nous considérons les régimes au delà de la diffusion simple et double comme des régimes de diffusion multiple. Ce régime est aussi dit régime diffusif. Nous éviterons par contre l'appellation "régime de forte diffusion" souvent utilisée pour désigner les régimes proches de la localisation d'Anderson.

désordonnés a été alors longtemps étudiée en utilisant plusieurs approches pour la simplification du problème [79]. Dans ce sens, la théorie de transfert radiatif constitue le passage de l'équation de Helmholtz où la lumière est décrite comme une onde, à l'équation de diffusion où la nature ondulatoire de la lumière est perdue [80]. Depuis les travaux pionniers de Schuster en 1905 [81] et puis ceux de Chandrasekhar [82] près de 50 ans plus tard, la théorie du transfert radiatif a été utilisée pendant longtemps en astrophysique où le comportement diffusif est considéré comme une bonne description de la propagation de la lumière. Elle est largement employée pour la description du transport de la lumière dans les milieux ordonnés ou désordonnés, par un traitement classique dans lequel la nature ondulatoire de la particule incidente est négligée. En fait, bien qu'une étude rigoureuse de la propagation de la lumière dans un milieu de plusieurs diffuseurs requiert la prise en considération des effets d'interférences [34], ces effets de cohérence sont négligés dans plusieurs études. Par conséquent, l'équation de transfert radiatif constitue un modèle approximatif très souvent utilisé pour la description du régime de diffusion multiple dans les milieux optiquement denses. Dans de tels systèmes le photon subit un nombre important d'évènements de diffusion " indépendants " par des diffuseurs de positions aléatoires. Ainsi, l'interférence entre les différents processus de diffusion est supposée être brouillée par le désordre. Les propriétés du transport peuvent alors être considérées comme indépendantes de la nature ondulatoire de la lumière ainsi que de la nature des diffuseurs. Dans le cadre de ses approximations, ce modèle incohérent de marche au hasard du photon à l'intérieur de l'échantillon désordonné offre une bonne description de la diffusion multiple, en particulier en considérant la moyenne du signal sur plusieurs configurations.

## Simulation Monte Carlo

Pour cette marche au hasard incohérente nous réalisons une simulation Monte Carlo (MC) dans laquelle les photons subissent une diffusion isotrope après un libre parcours moyen  $l_{sc}$ . Partant du fait que l'objectif est de simuler le comportement de notre nuage d'atomes froids dans l'expérience, nous considérons une distribution spatiale de la forme

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r^2/(2\sigma_R^2)} , \quad (3.1)$$

décrivant une sphère gaussienne de taille  $\sigma_R$  et de densité  $\rho_0$  au centre du nuage. Ainsi, nous considérons dans la simulation MC une distribution du libre parcours moyen de la forme

$$l_{sc}(r) = 1/[\rho(r)\sigma_0] , \quad (3.2)$$

où  $\sigma_0$  représente la section efficace atomique. L'épaisseur optique le long d'une ligne d'observation à travers le centre du nuage est définie par

$$b = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(0, 0, z) \sigma_0 dz , \quad (3.3)$$

$$= \sqrt{2\pi} \rho_0 \sigma_0 \sigma_R , \quad (3.4)$$

$$= \sqrt{2\pi} \sigma_R / l_{sc}(r = 0) . \quad (3.5)$$

L'intégration de l'extinction sur les degrés de liberté transverses du nuage<sup>iv</sup> permet d'obtenir l'extinction totale d'un flux incident de photons. Cela correspond à une section efficace de diffusion totale du nuage atomique pour ce modèle de marche au hasard donnée par la formule

$$\sigma_{RW} = 2\pi\sigma_R^2 \text{Ein}(b) , \quad (3.6)$$

où  $\text{Ein}(b)$  représente la fonction entière de la forme

$$\text{Ein}(b) = \int_0^b (1 - e^{-t}) dt/t \underset{b \rightarrow 0}{\sim} b . \quad (3.7)$$

Du point de vue numérique, pour obtenir le diagramme d'émission  $I_{RW}(\theta)$  moyenné sur l'angle azimutale pour cette géométrie spécifique, nous simulons les trajectoires de  $10^5$  photons envoyés sur un échantillon d'épaisseur optique au centre  $b = 8$ . Il a été constaté qu'à partir d'une distance  $4.36\sigma_R$  du centre du nuage, l'épaisseur optique mesurée est nulle. Au-delà de ce rayon, les photons incidents ne subissent donc pas de diffusion. Ils n'auront alors aucun impact significatif dans le résultat. Ainsi, les photons sont envoyés suivant l'axe  $\hat{e}_z$  de sorte à former un disque uniforme de rayon  $4.36\sigma_R$ . La simulation montre qu'environ 28.2% de l'onde " plane " incidente est diffusée. Cela correspond à une section efficace de diffusion pour le nuage gaussien de

$$\sigma_{RW}^{num} \approx 16.8\sigma_R^2 . \quad (3.8)$$

Cette valeur numérique est très proche de la valeur analytique obtenue à partir de l'eq. (3.6) :

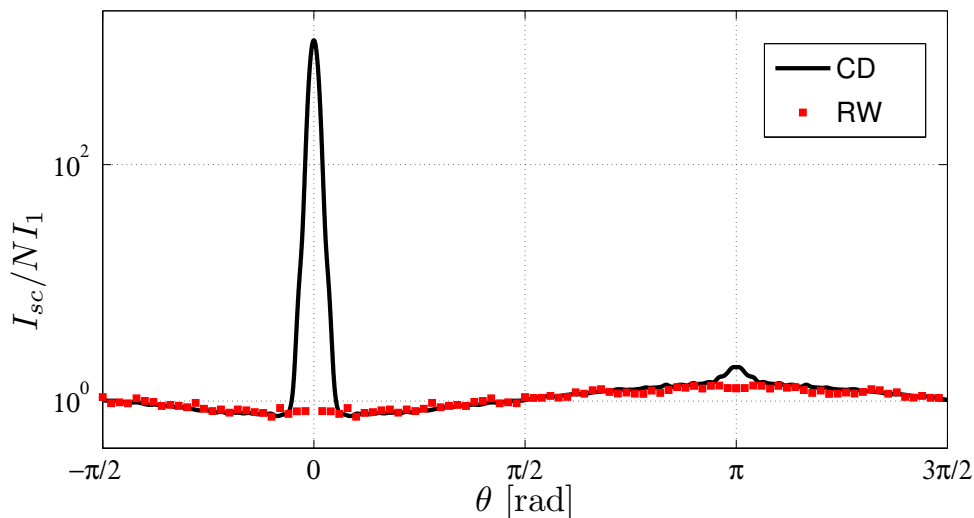
$$\sigma_{RW}^{an}(b = 8) = 2\pi\sigma_R^2 \text{Ein}(8) , \quad (3.9)$$

$$\approx 16.7\sigma_R^2 . \quad (3.10)$$

En enregistrant la direction d'émission de chaque photon diffusé nous obtenons l'histogramme d'émission angulaire  $I_{RW}(\theta)$  tracé sur la fig. 3.1.

---

iv. À travers l'intégrale  $\int dx dy e^{-b(x,y)}$ .



**Figure 3.1.** Intensité diffusée par un nuage atomique gaussien ( $I_{CD}$ ) donnée par le modèle CD (courbe noire), comparée à l’histogramme des photons diffusés ( $I_{RW}$ ) obtenu par la simulation Monte Carlo du modèle RW (carrés rouges).  $I_{CD}$  obtenue à travers une simulation à résonance pour un nuage de taille  $\sigma_R = 20/k_0$  et d’épaisseur optique  $b = 8$ , est normalisée par l’intensité  $NI_1$  diffusée par un nuage dilué de  $N$  atomes indépendants.  $I_{RW}$  est normalisée à partir de l’eq. (3.12). Échelle logarithmique. Notons que les fonds des deux courbes se superposent sans aucun paramètre ajustable. Les simulations numériques pour le modèle CD sont moyennées sur 20 configurations différentes.

## 3.2 Diagramme de rayonnement en diffusion multiple

Dans les deux chapitres précédents nous nous sommes largement intéressés à l’amplitude complexe du champ diffusé par le nuage atomique  $E_{sc}$ . Cette observable constitue une bonne signature des effets de cohérence inclus dans les modèles CD et MSS, à travers l’interaction dipôle-dipôle dans le premier et l’interférence entre les événements successifs de diffusion dans le second. En effet, l’aspect cohérent de ces modèles se concrétise sur le diagramme de l’intensité diffusée par le nuage  $I_{sc} \propto |E_{sc}|^2$  à travers, entre autres, le speckle et le cône de rétrodiffusion cohérente. Vu qu’elle néglige l’aspect ondulatoire du problème, la RTE s’intéresse directement à l’intensité du signal à travers l’histogramme des photons diffusés obtenu par les simulations MC du modèle RW. Dans l’objectif de mettre en avant le rôle des effets d’interférences en régime diffusif, nous allons comparer le diagramme de l’intensité diffusée donné par le modèle CD scalaire à résonance à l’histogramme des photons diffusés obtenu par l’approche de marche au hasard incohérente RW

que nous venons de présenter.

En régime stationnaire, l'intensité diffusée dans la direction  $\hat{\mathbf{k}}$  à une distance  $r$  en champ lointain donnée par le modèle CD à travers l'eq. (1.27), peut s'écrire sous la forme

$$4\pi r^2 I_{\text{sc}}(\hat{\mathbf{k}}) = \hbar\omega_{k_0} \Gamma \sum_{j,m=1}^N \beta_j \beta_m^* e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)}, \quad (3.11)$$

où  $\cos(\theta) = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ .

Dans la fig. 3.1 nous comparons le diagramme de rayonnement obtenu à partir du modèle CD cohérent traduisant  $I_{\text{CD}}(\theta)$  à l'histogramme des photons diffusés  $I_{\text{RW}}(\theta)$  obtenu à partir du modèle incohérent de marche au hasard RW. Nous normalisons le diagramme d'émission CD par rapport à l'intensité émise par un nuage très dilué de  $N$  atomes indépendants. Le diagramme d'émission du modèle RW est normalisé de telle sorte que

$$\frac{P_{\text{CD}}}{P_{\text{RW}}} = \frac{\sigma_{\text{CD}}}{\sigma_{\text{RW}}}, \quad (3.12)$$

où  $P_{\text{CD}}$  et  $P_{\text{RW}}$  représentent la puissance diffusée pour les modèles CD et RW respectivement pour la même intensité incidente. Il est important de souligner que la puissance totale émise est une grandeur aussi importante que la forme du diagramme d'émission. Elle peut dépendre de la forme mais aussi de l'opacité de l'échantillon. D'autre part,  $\sigma_{\text{CD}}$  et  $\sigma_{\text{RW}}$  représentent les sections efficaces de diffusion de l'échantillon en modèle CD et RW respectivement.  $P_{\text{CD}}$  est donnée par l'eq. (1.28) du chapitre 1 et la dérivation de  $\sigma_{\text{CD}}$  a été discutée dans la sec. 1.1.1 du même chapitre. Pour les paramètres de la fig. 3.1 ( $b = 8$ ,  $\sigma_R = 20/k_0$ ,  $\delta = 0$ ) nous obtenons  $\sigma_{\text{CD}} = 24.5\sigma_R^2$ . La section efficace totale du modèle de diffusion incohérente  $\sigma_{\text{RW}}$  peut être calculée analytiquement à travers l'eq. (3.6) et obtenue numériquement par les simulations MC. Pour une épaisseur optique  $b = 8$  la formule analytique et la simulation numérique donnent respectivement  $\sigma_{\text{RW}}^{\text{an}} = 16.7\sigma_R^2$  et  $\sigma_{\text{RW}}^{\text{num}} = 16.8\sigma_R^2$ . La différence entre les deux sections efficaces de diffusion totales  $\sigma_{\text{CD}}$  et  $\sigma_{\text{RW}}$  peut s'expliquer par le lobe vers l'avant dans le modèle cohérent CD (voir fig. 3.1), et peut aussi être vue comme étant à l'origine du paradoxe d'extinction [53]. Ce dernier stipule qu'un objet opaque de grande taille enlève d'un faisceau lumineux incident deux fois la quantité de lumière qu'il intercepte géométriquement. En effet, la lumière interceptée par la surface de l'objet (par absorption ou diffusion) sera équivalente à sa section efficace géométrique  $\sigma_g$ . De plus, la lumière diffractée par les bords sera aussi équivalente à  $\sigma_g$ . La section efficace d'extinction sera alors deux fois plus grande que la section efficace géométrique de

l'objet. Cet effet n'est pas pris en compte par le modèle incohérent RW<sup>v</sup>.

Sur la fig. 3.1 nous pouvons constater que le fond (*backgrounds*) de la courbe  $I_{CD}(\theta)$  montre un profil sinusoïdale qui coïncide exactement avec l'intensité  $I_{RW}(\theta)$  obtenue à travers la simulation MC. Cette modulation n'est donc pas l'implication d'un effet de cohérence. De plus, l'approche scalaire que nous utilisons fait qu'elle ne peut pas être non plus de la même nature que la modulation observée dans la fig. 1.10 du chapitre 1. Nous rappelons que les courbes tracées sur la fig. 1.10 dans le chapitre 1, représentent l'intensité diffusée calculée à travers une description vectorielle de la lumière, dans un régime de diffusion faible. La dépendance en  $1 + \cos^2 \theta$  de la section efficace différentielle de diffusion atomique, fait que le diagramme de rayonnement du nuage dans la fig. 1.10 affiche un fond modulé avec un minimum à  $\theta = \pi/2$  et un maximum à  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . En revanche la modulation sur la courbe  $I_{RW}$  et le fond de  $I_{CD}$  sur la fig. 3.1 atteint un minimum à  $\theta = 0$  et un maximum à  $\theta = \pi$ . L'aspect diffusif étant le principal point commun des deux modèles, cette modulation reviendrait plutôt à un effet de diffusion multiple qu'à un effet d'atome unique. Bien que nous n'arrivons pas encore à déterminer l'origine physique de cette modulation, nous avons pu déduire de manière empirique que l'histogramme des photons diffusés s'écrit sous la forme suivante

$$I_{RW}(\theta) \propto 1 - \frac{b}{18} \cos \theta . \quad (3.13)$$

Une autre remarque à prendre en considération est que la modulation décrite par la forme si dessus, fait que la diffusion en modèle RW aussi bien qu'en modèle CD n'est pas isotrope. Le diagramme de rayonnement est légèrement décalé vers l'arrière. La dépendance de  $I_{RW}(\theta)$  donnée par l'eq. (3.13) de l'épaisseur optique  $b$ , va dans le sens de l'hypothèse qu'une diffusion plus forte provoquera une modulation plus marquée et des diagrammes de rayonnement plus décalés vers l'arrière.

Par ailleurs, le cône de rétrodiffusion cohérente et le lobe de diffusion cohérente vers l'avant (de largeur angulaire  $1/k\sigma_R$ ) observés sur la fig. 3.1 à travers l'approche CD marquent la différence avec le modèle RW. Ils constituent des signatures fortes de la persistance de certains effets de cohérences en diffusion multiple. Cependant, la même fig. 3.1 montre clairement que le modèle incohérent RW se rapproche considérablement du modèle cohérent CD dans ce régime diffusif comme nous venons de l'évoquer. En effet, mis à part à  $\theta = \pi$  et  $\theta = 0$ , les deux modèles donnent une intensité similaire. Ainsi, les fonds (*backgrounds*) des deux courbes se superposent sans aucun paramètre ajustable. Ce bon accord quantitatif entre le

---

v.  $\sigma_{CD}$  correspond à la section efficace d'extinction alors que  $\sigma_{RW}$  est équivalente à la section efficace géométrique. La spécificité de la géométrie gaussienne fait que  $\sigma_{CD}$  n'est pas tout à fait égale à  $2\sigma_{RW}$ .



RW incohérent et le CD cohérent porte à croire que l'influence des interférences s'est effectivement annihilée sous l'effet de la diffusion multiple et des moyennes sur les configurations des positions des diffuseurs. On pourrait donc s'attendre à ne plus observer, à résonance, de réduction de la RPF, considérée jusque là comme signature des effets coopératifs.

### 3.3 Force de pression de radiation en diffusion multiple

Nous avons pu constater à travers la section précédente que la plus importante différence quantitative entre la diffusion multiple cohérente et incohérente dans le diagramme d'intensité diffusée, reste le lobe prononcé vers l'avant. Ce dernier est le plus susceptible de contenir une éventuelle signature d'effets coopératifs au-delà de la diffraction triviale de l'onde incidente. Cependant, du point de vue expérimental la détection de la lumière diffusée dans une direction proche de celle de la lumière incidente (faisceau laser incident) reste une mesure très difficile à réaliser. En effet, la majorité des protocoles de détection seront complètement saturés par l'important champ lumineux incident du laser sonde.

Une approche alternative consiste en la mesure de la force de pression de radiation (RPF). Cette force est induite par le champ de radiation incident sur le nuage atomique et celui diffusé par ce dernier. En effet, comme nous l'avons évoqué dans le premier chapitre, dans une collection d'atomes indépendants chaque atome émet un champ d'intensité  $I_1$  de façon isotrope. Ainsi, la composante due à l'émission dans la force agissant sur chaque atome se moyenne à zéro. Chaque atome (et par conséquent le centre de masse du nuage) subit une force qui le déplace dans la direction du champ pousseur due à l'absorption de photons du laser incident qui seront émis dans des directions aléatoires. Cette force sera réduite dans le cas d'une émission anisotrope due à des effets coopératifs entre les dipôles induits par le champ extérieur [23]. En effet, la conservation de la quantité de mouvement nous permet d'établir un lien direct entre le diagramme d'émission de l'échantillon en champ lointain et le transfert de la quantité de mouvement au centre de masse du nuage atomique via la RPF. Nous définissons la force de pression de radiation intrinsèque (*intrinsic radiation pressure force* (IRPF)) comme la force moyenne agissant sur chaque atome dans le nuage (voir sec. 3.3). La composante de cette IRPF le long de l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  notée  $F_z$  est donnée par la relation unique

$$\frac{F_z}{F_1} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{N\sigma_{\text{sc}}} \langle 1 - \cos(\theta) \rangle, \quad (3.14)$$

pour les deux modèles CD et RW.  $\theta$  correspond à l'angle entre la direction du photon émis et l'axe du laser incident ( $\cos\theta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ ) et  $\sigma_{sc} = 4\pi/k^2(1 + 4\delta^2)$  est la section efficace atomique. La IRPF est normalisée par la force appliquée sur UN atome dans un nuage très dilué de  $N$  atomes indépendants donnée par  $F_1 = \sigma_{sc}I_0/c$ . La section efficace totale de l'échantillon  $\sigma_{tot}$  dépend du modèle en considération et correspond à  $\sigma_{CD}$  et  $\sigma_{RW}$ . L'annexe C donne les détails du calcul pour arriver à la formule de la IRPF à partir du déplacement du centre de masse du nuage sur l'expérience, ainsi que pour les deux modèles théoriques.

### 3.3.1 Protocole et résultats expérimentaux

La force de pression de radiation a été utilisée comme senseur des effets coopératifs dans les nuages atomiques [76, 58, 77]. Dans la ref. [58] plus particulièrement<sup>vi</sup>, cette analyse a été établie dans un régime de diffusion faible à travers des mesures, à la base du même protocole que nous allons présenter dans cette section, avec un champ incident hors résonance atomique ( $b_0 > 1$ ,  $b < 1$ ). Dans cette référence, la réduction de la force de pression de radiation par rapport à la force appliquée sur une collection d'atomes indépendants pour un nombre d'atomes croissant, a été interprétée comme une signature des effets coopératifs. Il était alors intéressant d'élargir cette analyse aux régimes de diffusion multiple en utilisant un champ incident résonant ( $b = b_0 > 1$ ).

**Piège Magnéto Optique** — Nous chargeons un piège magnéto-optique (MOT) de  $3 \times 10^7$  atomes de  $^{87}\text{Rb}$  en 50 ms en utilisant le protocole décrit dans la ref. [58]. Nous appliquons par la suite durant 50 ms une période *dark* MOT temporel pendant laquelle l'intensité du laser repompeur est réduite par un facteur 10 et le laser de refroidissement est désaccordé à  $10\Gamma$  de la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  de la ligne  $D_2$ . Cela nous permet de comprimer le nuage et produire une distribution gaussienne des atomes. Pour contrôler l'épaisseur optique à la fin de la période *dark* MOT, le désaccord du repompeur est varié entre  $-7\Gamma$  et  $-2.5\Gamma$ . Nous pouvons ainsi contrôler le nombre d'atomes dans l'état  $F = 2$  sans modifier la taille de l'échantillon ( $\sigma_R = 270 \mu\text{m}$ ,  $k\sigma_R \approx 2 \times 10^3$ ), sa forme et sa température ( $\sim 20 \mu\text{K}$ ). Nous éteignons tous les lasers et les gradients de champ magnétique, laissant les atomes en chute libre. Puis nous appliquons sur le nuage un faisceau "pousseur" horizontal de polarisation circulaire désaccordé proche de la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  pendant  $50 \mu\text{s}$ . Le faisceau pousseur a un *waist*  $w_0 = 12 \text{ mm}$  et son intensité est soigneusement calibrée pour garder un paramètre de saturation constant à  $s = 8 \times 10^{-2}$ . Cela nous permet en effet de garder la physique à UN atome inchangée (voir l'annexe C) et par conséquent mettre en évidence le com-

vi. L'expérience présentée dans cette ref. a été réalisée au sein de notre groupe à Nice.

portement coopératif du système. Chaque atome dans  $F = 2$  diffuse en moyenne 80 photons. Un aussi faible nombre de diffusion nous évite tout effet de dépompage dans l'état  $F = 1$  durant le processus de poussée.

**Épaisseur optique effective** — La valeur expérimentale de l'épaisseur optique à résonance  $b_0$  est obtenue par imagerie d'absorption standard en utilisant un faisceau laser polarisé linéairement. Nous soulignons le fait qu'une telle mesure de transmission est idéalement décrite par des atomes en mélange statistique sur les différents sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental. Néanmoins, avec un coefficient de Clebsch-Gordan dont la valeur moyenne au carré est donnée par  $(2F' + 1)/3(2F + 1)$ , l'épaisseur optique résonante effective pour un nuage atomique gaussien distribué sur un mélange statistique des sous-niveaux Zeeman est alors donnée par<sup>vii</sup>

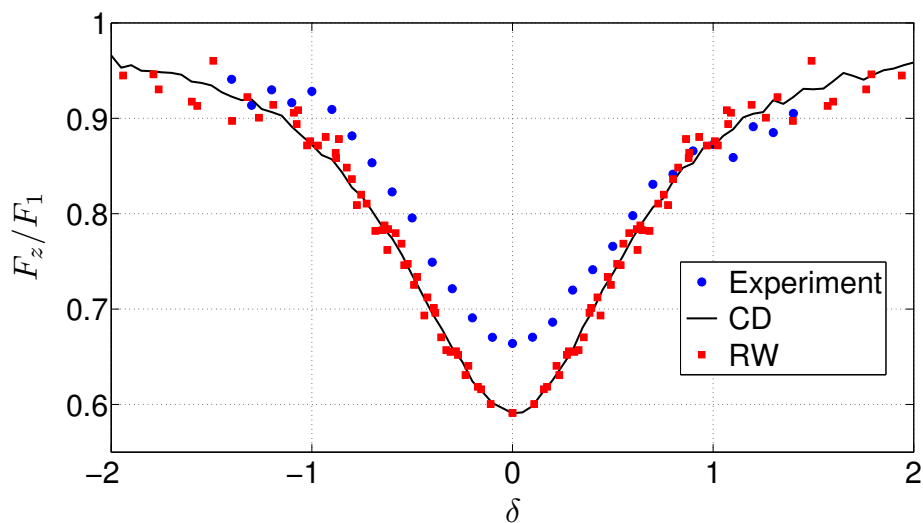
$$b_0 = \frac{(2F' + 1)}{3(2F + 1)} \frac{3N}{(k\sigma_R)^2}, \quad (3.15)$$

en contraste avec la situation où les atomes sont pompés avec un faisceau laser polarisé circulaire dans l'état étiré  $|F = 2, m_F = +2\rangle$ . Pour notre transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  nous obtenons  $(2F' + 1)/3(2F + 1) = 7/15$ .

**Mesure de la Force** — Après un temps de vol de 12 ms, nous prenons une image du nuage par imagerie d'absorption non-résonante ( $\delta \approx -2$ ). L'imagerie d'absorption indique la position du centre de masse du nuage après le temps de vol. La force de pression de radiation totale appliquée sur le nuage est ainsi déduite à partir du déplacement subi par le centre de masse de ce dernier. Chaque point expérimental sur la fig. 3.2 représente une moyenne sur 10 réalisations. Nous normalisons la force de pression de radiation intrinsèque (IRPF) mesurée, par la force  $F_1$  appliquée à un atome dans un nuage de diffuseurs indépendants. La IRPF est calculée sans aucun paramètre ajustable à partir de l'intensité mesurée du faisceau pousseur. Dans la fig. 3.2 nous montrons le résultat de la mesure expérimentale de la IRPF (cercles rouges) en fonction du désaccord du laser incident  $\delta$ . Nous remarquons une importante réduction de la force de pression de radiation intrinsèque autour de  $\delta = 0$ . Ce résultat est en quelque sorte surprenant, vu qu'il a été auparavant considéré comme synonyme de la présence d'effets coopératifs entre les atomes. Nous ne nous attendions alors pas à une telle réduction dans la mesure où nous croyions que ces effets coopératifs seraient annihilés par la diffusion multiple!

---

vii. Dans ce cas la section efficace à résonance est donnée par  $\sigma_0 = \frac{(2F'+1)}{3(2F+1)} \frac{3\lambda^2}{2\pi}$ .



**Figure 3.2.** Force de pression de radiation intrinsèque normalisée en fonction du désaccord du laser  $\delta = \Delta_0/\Gamma$ . Le résultat expérimental pour  $b_0 = 2.19$  (points bleus) est comparé au modèle cohérent CD ( $b_0 = 2.19$ , courbe bleue) et au modèle incohérent RW (carrés rouges) avec l'épaisseur optique correspondante  $b(\delta)$ . Paramètre de saturation  $s(\delta)$  constant. Les simulations numériques pour le modèle CD sont moyennées sur 20 configurations différentes.

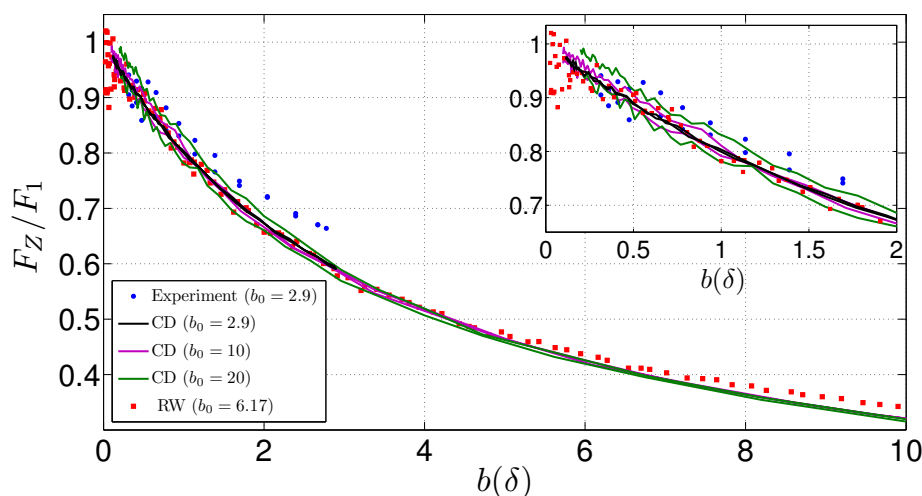
### 3.3.2 Expérience *vs* CD *vs* RW

Nous allons maintenant comparer les données expérimentales aux deux modèles théoriques, cohérent et incohérent. Les résultats numériques de la solution CD (courbe bleue) montrent une forte réduction de la IRPF autour de  $\delta = 0$ . À première vue, nous observons une réduction de la IRPF similaire à celle observées dans les expériences précédentes hors résonance. Néanmoins, les simulations MC du modèle RW (carrés rouges) donnent un résultat en assez bon accord avec le modèle cohérent CD et ainsi en bon accord avec les données expérimentales. Un aussi bon accord des résultats d'un modèle RW incohérent d'une part avec ceux d'un modèle numérique cohérent et des résultats expérimentaux d'autre part, fait qu'il est difficile d'adopter une interprétation similaire à celle de la ref. [58]. En effet, il n'est pas judicieux d'attribuer la réduction de la IRPF en régime de diffusion multiple aux effets coopératifs seulement. Ces derniers ne peuvent pas être à l'origine d'un effet décrit par la théorie du transfert radiatif. D'autant plus qu'une étude analytique plus rigoureuse du problème nous a permis de dériver la formule de la IRPF donnée par l'éq. (3.14). Cette expression unique pour les deux modèles nous donne la possibilité de formuler une interprétation plus simple et moins surprenante des résultats. Elle consiste à associer le terme  $\frac{\sigma_{\text{tot}}}{N\sigma_{\text{sc}}}$  de l'éq. (3.14) à un

effet “ d’ombre ” dû à la diffusion multiple. Ainsi, ce premier terme de la IRPF est obtenu par la simple prise en compte de l’atténuation du faisceau laser incident. Toutefois, cet effet d’ombre est différent entre les deux modèles car la section efficace  $\sigma_{\text{tot}}$  n’est pas identique ( $\sigma_{\text{sc}}^{\text{CD}} = 24.5\sigma_R^2$  et  $\sigma_{\text{sc}}^{\text{RW}} = 16.8\sigma_R^2$ ). La force de recul due au photon rediffusé est représentée par le second terme  $-\frac{\sigma_{\text{tot}}}{N\sigma_{\text{sc}}}\langle\cos(\theta)\rangle$ . Ce dernier est directement relié au diagramme d’émission des photons. De ce point de vu, le bon accord observé entre les diagrammes d’émission des deux modèles CD et RW dans la section précédente, se traduit à travers l’eq. (3.14) par un aussi bon accord sur les courbes de la IRPF. Cette “ similitude ” révélée par la fig. 3.2 peut s’expliquer par le fait qu’en dehors des deux angles  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , les diagrammes d’émissions tracés dans la fig. 3.1 ne présentent aucune différence significative. Dans la direction arrière, le CBS peut engendrer une “ petite ” augmentation de la IRPF dans le modèle cohérent par rapport au modèle incohérent à cause de la lumière rétro-diffusée. Cependant, le facteur d’accentuation du CBS est inférieur à 2 et sa largeur angulaire en  $1/kl_{\text{sc}}$  est petite dans le cas des nuages dilués. Cela fait que cette différence sur le diagramme d’émission est peu influente sur la force appliquée au nuage. En outre, l’intensité émise de manière plus marquée dans le lobe vers l’avant en modèle CD, n’engendre pas de changement significatif sur la IRPF.

D’autre part, nous avons constaté que l’accord des résultats expérimentaux avec les courbes des deux modèles CD et RW dans la fig. 3.2 est nettement meilleur quand nous considérons une épaisseur optique évaluée pour un mélange statistique des sous-niveaux Zeeman. La prise en considération de cette correction est supposée être une bonne approximation en régime de diffusion multiple quand la polarisation locale peut être considérée comme équivalent à un champ de polarisation aléatoire. Néanmoins, nous remarquons toujours une petite déviation des résultats expérimentaux comparés aux modèles CD et RW autour de la résonance ( $\delta \approx 0$ ) sur les figs. 3.2 et 3.3. Cette différence pourrait correspondre à un couplage lumière-atomes plus faible que ce qui est obtenu avec un mélange statistique d’atomes dans les sous-niveaux Zeeman, ce qui serait plutôt surprenant.

Dans la fig. 3.3 nous avons tracé la IRPF à partir des données expérimentales et les résultats des simulations CD en fonction de l’épaisseur optique  $b(\delta)$  pour différentes valeurs de  $b_0$ . La force dans le modèle RW étant par définition une fonction de  $b$ , elle est représentée par une seule courbe (carrés rouges). Une analyse approfondie des données expérimentales et celles obtenues à travers le modèle cohérent CD, montre une petite déviation par rapport au modèle RW pour de petites épaisseurs optiques  $b$ , visible sur l’insert dans la fig. 3.3. Cette déviation consiste en une asymétrie rouge / bleu par rapport au signe du désaccord  $\delta$  que

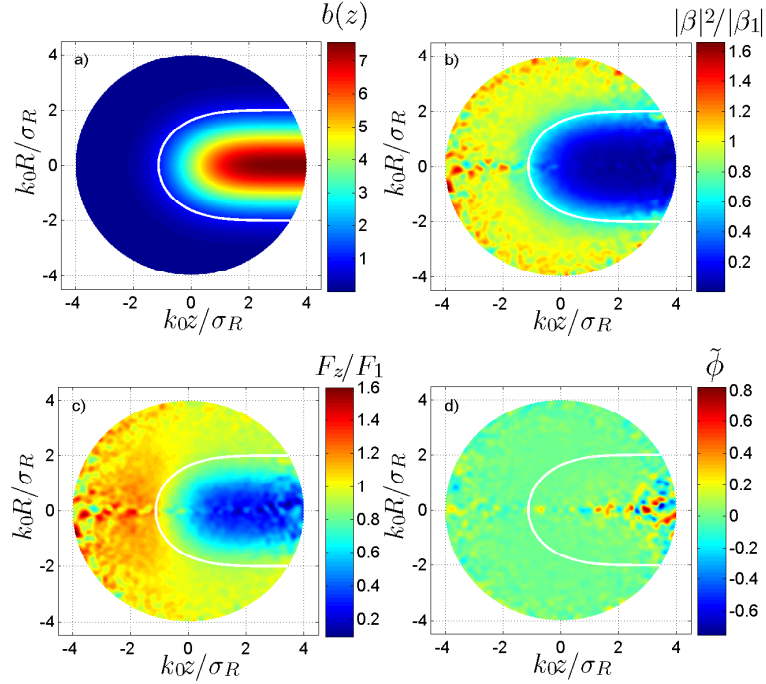


**Figure 3.3.** Force de pression de radiation intrinsèque normalisée en fonction de l'épaisseur optique. Les données expérimentales pour  $b_0 = 2.9$  (points bleus) sont comparées aux résultats des simulations CD pour  $b_0 = 2.9$  (ligne noire),  $b_0 = 10$  (ligne magenta) et  $b_0 = 20$  (ligne verte) ainsi qu'à celles du modèle RW (carrés rouges). Ce dernier n'a pas de dépendance en  $b_0$  mais uniquement en  $b$ . Toutes les courbes CD correspondant à des  $b_0$  différents se superposent révélant  $b(\delta)$  comme paramètre universel. Les simulations numériques pour le modèle CD sont moyennées sur 20 configurations différentes. À remarquer le décrochement de la courbe RW des courbes CD pour  $b > 8$ . L'insert met en évidence une asymétrie rouge/bleu (par rapport au signe du désaccord  $\delta$ ) qui apparaît sur les données expérimentales ainsi que sur les courbes CD pour de grands désaccords.

nous pouvons apercevoir sur la fig. 3.2. À ce stade nous n'avons pas d'explication pour cette asymétrie que le modèle RW n'inclut pas. Dans ce sens, un autre effet que le RW ne prend pas en considération consiste en les résonances de Mie prévues dans le modèle CD pour de grands  $b_0$  [65].

### 3.4 Effet d'ombre en diffusion multiple

Sur la fig. 3.4 nous illustrons l'effet d'ombre dominant le régime diffusif à travers différentes données obtenues par des simulations CD. Dans ces simulations nous utilisons le même échantillon sous forme de sphère gaussienne avec lequel nous avons calculé le diagramme d'émission. Ainsi, toutes les simulations sur cette figure sont réalisées à résonance  $\delta = 0$ , pour un rayon r.m.s.  $\sigma_R = 20/k$ , une épaisseur optique  $b = 8$  et sont moyennées sur 20 configurations.



**Figure 3.4.** a) Épaisseur optique locale  $b(z)$  vue par le champ laser qui se propage suivant  $\hat{e}_z$ . La ligne blanche correspond à  $b(z) = 1$  et représente la limite de la diffusion multiple. b) Amplitude d'excitation des dipôles atomiques comparée à la limite d'un atome indépendant  $|\beta|^2 / |\beta_1|^2$ . c) IRPF locale ressenti par chaque atome, comparée au cas d'atome indépendant  $F_z(z)/F_1$ . d) Phase des dipôles atomiques induits.  $\tilde{\phi} = 0$  correspond au retard de phase des dipôles par rapport à la phase du champ extérieur corrigée de sa propagation le long de  $\hat{e}_z$ . Toutes les données sont prises à résonance pour une sphère gaussienne avec  $b_0 = 8$ , intégré sur l'angle azimutal et moyennées sur 20 configurations.

La fig. 3.4(a) représente l'atténuation du champ laser incident le long de l'axe  $\hat{e}_z$  correspondant à une épaisseur optique locale donnée par la formule

$$b(z) = \int_{-\infty}^z \rho(x, y, z') \sigma_{sc} dz' . \quad (3.16)$$

La ligne blanche correspond à une épaisseur optique de  $b(z) = 1$ . Cette ligne délimite en quelque sorte une zone du nuage dans laquelle l'opacité de ce dernier impose un régime diffusif. La plupart des photons incidents n'atteignent donc pas la fin du nuage à cause de la diffusion multiple. Nous traçons dans la fig. 3.4(b) l'excitation des dipôles relative à celle d'un atome dans un nuages de diffuseurs indépendant  $|\beta|^2 / |\beta_1|^2$ . Chaque point sur la figure correspond à un dipôle de position  $\mathbf{r}_j$  dif-

fusant une intensité  $|\beta_j|^2$ . Pour une opacité  $b > 1$  au-delà de la ligne blanche, les atomes dans la zone d'ombre (partie obscure) sont significativement moins excités que ceux dans les premières couches de l'échantillon (par rapport au sens du laser incident, de gauche à droite suivant  $\hat{e}_z$ ). La fig. 3.4(c) représente la IRPF locale. Bien que les atomes à l'entrée du nuage soient soumis à une force plus grande que la force de l'atome unique, ceux dans la zone d'ombre ressentent une force moins importante. Par conséquent, la force totale appliquée sur le nuage est inférieure à la force appliquée sur un nuage d'atomes indépendants par le même champ incident. Cela va dans le sens des mesures expérimentales présentées par la fig. 3.3. Cette interprétation renforce l'hypothèse que la réduction de la IRPF est essentiellement due à un effet d'ombre (*shadow effect*) plutôt qu'à un effet coopératif entre les dipôles couplés. La fig. 3.4(d) représente la phase des dipôles atomiques induits par le champ incident. La quasi-totalité des dipôles ont une phase  $\tilde{\phi} = 0$  correspondant au retard de phase des dipôles par rapport à la phase du champ laser incident<sup>viii</sup>. En d'autres termes, presque tous les dipôles dans le nuage sont en cohérence de phase, même pour  $b > 1$ . Cela est en contradiction avec les prédictions de l'approche RW qui considère que dans un régime de diffusion multiple la phase devient complètement aléatoire après quelques événements de diffusion. Par conséquent, selon RTE les effets d'interférences sont complètement perdus à cause du désordre et des moyennes de configurations. Toutefois, ce résultat est en bon accord avec le théorème d'extinction d'Ewald-Oseen qui stipule que le champ émis par les atomes annihile le champ du laser incident et le remplace par un champ de vitesse  $c/n$ , où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu [83]. Les auteurs de cette référence avancent que non seulement les atomes des premières couches sont synchronisés, mais tous les atomes de l'échantillon participent à l'annihilation du champ incident. Si cela va dans le sens de travaux similaires [84, 85] où une composante cohérente persiste dans le champ diffusé vers l'avant, il reste complètement en désaccord avec les prédictions de l'approche RW qui prévoit une phase complètement aléatoire après un certain nombre d'évènements de diffusion. Cette cohérence de phase inattendue pourrait constituer la signature d'une probable synchronisation entre les dipôles couplés par le champ extérieur, dans le régime de diffusion multiple.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude visant à examiner les effets coopératifs en régime de diffusion multiple de la lumière. Cette étude a été motivée par l'observation dans des travaux précédents, d'une réduction de la force de pres-

viii. Sur la fig. 3.4(c) nous représentons la phase des nombres complexes  $\beta_j e^{-i(k_0 z_j - \pi/2)}$ .



sion de radiation appliquée sur le nuage, pour un nombre d'atomes croissant. Ce résultat interprété comme une signature des effets coopératifs en régime de diffusion faible, semblait être moins évident à imaginer en régime de diffusion multiple. En effet, dans un régime diffusif nous nous attendons à une suppression des effets d'interférences par le désordre et les moyennes sur les différentes configurations. Nous avons présenté une expérience mesurant la force de pression de radiation appliquée sur un nuage d'atomes froids par un laser incident en résonance. Une surprenante réduction de la IRPF autour de la résonance a été observée. Ce résultat a été comparé à deux modèles numériques. Le modèle des dipôles couplés (CD) incluant les effets d'interférences et une simulation Monte Carlo de marche au hasard du photon (RW). Cette dernière ne considérant que l'aspect corpusculaire de la lumière, ne tient pas compte des effets d'interférences durant le processus de diffusion multiple. Néanmoins, les résultats obtenus par les deux modèles s'avèrent en très bon accord. Aussi bien ceux mesurant l'intensité diffusée que la IRPF. Plus surprenant encore, ces résultats numériques sont en bon accord avec les données expérimentales. Ainsi, nous avons pu conclure que cette réduction de la force ne peut pas constituer une signature d'un effet de cohérence que le RW ne prend pas en considération. À résonance, cela n'est donc pas une signature des effets coopératifs. En effet, cette réduction est plutôt provoquée par un effet d'ombre dû à la diffusion multiple. Nous avons pu constater que les atomes dans les couches profondes du nuage opaque ne ressentent que très peu le champ laser incident. Par conséquent, la IRPF appliquée sur ces atomes est très faible comparée à la force subie par les atomes des premières couches du nuage. Ainsi, en régime diffusif, la force appliquée sur le nuage atomique est réduite par rapport à celle appliquée sur un nuage très dilué d'atomes indépendants, à cause de l'effet d'ombre.

À l'issue de cette étude, il s'avère alors que la force de pression de radiation ne permet pas de distinguer entre la diffusion multiple cohérente et incohérente. Plus important encore, la IRPF n'est pas la bonne observable pour jauger les effets coopératifs en régime de diffusion multiple. Dans ce régime, l'épaisseur optique  $b$  est le paramètre pertinent et c'est l'effet d'ombre qui implique la réduction de la IRPF à résonance. Il est donc plus judicieux de s'attendre à avoir une signature des effets coopératifs pour de grands  $b_0$  et très grand désaccord ( $b \ll 1$ ) dans un régime de diffusion simple [76]. En outre, même en régime de diffusion faible ( $b < 1$ ) à faible désaccord [58], l'épaisseur optique  $b$  est encore le paramètre pertinent et l'effet d'ombre pourrait aussi être l'effet dominant. À ce stade, la question qui se pose est : à partir de quel régime les effets coopératifs ne sont plus masqués ou annihilés par l'effet d'ombre ? La réponse à cette question revient à trouver le régime de paramètres ( $N, \sigma_R, \delta$ ) dans lequel la théorie du transfert radiatif, représentée par le modèle incohérent RW, n'est pas en mesure de donner les mêmes résultats que le modèle cohérent et que l'expérience.

D'autre part, la cohérence de phase des dipôles mise en avant dans la fig. 3.4(d), montre une forme de résistance de certains effets cohérents vis à vis de la diffusion multiple. Dans le chapitre suivant nous allons nous intéresser plus en détails à cette cohérence de phase. Elle pourrait suggérer l'apparition d'une forme de synchronisation non triviale entre les dipôles couplés par le champ extérieur, permettant de maintenir une cohérence de phase malgré le régime diffusif.



# Chapitre 4

## Effets de synchronisation en diffusion multiple

Dans notre système de nuage atomique piloté, le champ incident illuminant l'échantillon induit des dipôles électriques avec un certain retard de phase. Dans un échantillon optiquement dense la phase initiale des dipôles induits est supposée être complètement brouillée sous l'effet de la diffusion multiple dans le milieu désordonné. Le *speckle* observé sur le diagramme d'émission en champ lointain dans le chapitre 1 témoigne de l'aspect aléatoire de la phase du champ diffusé<sup>i</sup>. Cependant, la fig. 3.4(d) du chapitre précédent montre une cohérence inattendue entre les phases des dipôles induits, notamment dans la zone optiquement dense. Dans cette zone, à cause de l'effet d'ombre, les atomes ne ressentent que très peu le champ incident comparés aux atomes des premières couches du nuage (par rapport à la direction d'incidence du laser). Ainsi, dans un tel régime de diffusion multiple, en progressant à l'intérieur du nuage composé de diffuseurs désordonnés nous nous attendons à une variation de plus en plus importante des phases des dipôles par rapport à celles à l'entrée du nuage. Or, ce déphasage n'apparaît qu'à la sortie du nuage et avec une faible proportion (voir fig. 3.4(d)).

Cette cohérence persistante n'est pas forcément uniquement due au pilotage du laser. Elle provient probablement d'un effet coopératif entre les dipôles atomiques. Cela permettrait de maintenir un accord de phase collectif assez marqué dans la zone opaque du nuage. L'objectif de ce chapitre sera d'explorer plus en détails cette cohérence surprenante dans le nuage atomique désordonné. Nous nous focaliserons alors sur l'étude de l'évolution des phases des dipôles couplés durant le processus de diffusion multiple. Nous essayerons de quantifier cette cohérence à travers un

---

i. Le speckle étant le résultat de l'interférence de plusieurs ondes ayant la même fréquence mais des phases et des amplitudes différentes.

paramètre d'ordre. Cela nous permettra d'évaluer le degré de “ synchronisation ” entre les dipôles dans l'objectif de confirmer ou infirmer la présence d'une forme de cohérence non triviale en régime de diffusion multiple, autre que celle initialement imposée par le champ incident.

Ajoutons également que cette étude nous permet d'aborder un nouveau sujet dans le traitement des effets collectifs, concentré en général dans les travaux précédents sur la super/sous-radiance et la localisation d'Anderson. Cela nous donne la possibilité d'élargir nos interactions à une autre communauté s'intéressant plutôt aux effets de synchronisation collectifs.

## 4.1 Cohérence de phases en diffusion multiple

Rappelons que nos diffuseurs sont des dipôles atomiques induits par un champ électrique

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(-\omega t + k_0 z)} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (4.1)$$

avec des vecteurs moments dipolaires électriques

$$\mathbf{p}_j = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}(z_j, t), \quad j = 1 \dots N, \quad (4.2)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide et  $\alpha(\omega)$  la polarisabilité atomique. Ainsi

$$p_j = \varepsilon_0 |\alpha| E_0 e^{i(-\omega t + k_0 z_j + \phi_\alpha)}, \quad (4.3)$$

Chaque dipôle induit oscille à la fréquence du laser ( $\omega_j = \omega, \forall j$ ) avec un retard de phase  $\phi_\alpha$  par rapport au champ incident<sup>ii</sup>. Son moment dipolaire électrique peut s'écrire sous la forme

$$p_j = d_{eg} \beta_j, \quad (4.4)$$

où  $d_{eg}$  est l'élément de matrice dipôle électrique simplifié<sup>iii</sup>. Le coefficient complexe  $\beta_j$  que nous appellerons “ amplitude du dipôle  $j$  ” peut s'écrire sous la forme

$$\beta_j = |\beta_j| e^{i\phi_j}, \quad (4.5)$$

où  $\phi_j$  correspond à la phase du dipôle  $j$ . Pour un nuage très dilué d'atomes indépendants elle s'écrit

$$\phi_j = -\omega t + k_0 z_j + \phi_\alpha, \quad (4.6)$$

ii. La phase du laser à la position  $z$  est donnée par :  $\phi_0 = -\omega t + k_0 z$ .

iii. L'élément de matrice dipôle électrique simplifié  $d_{eg}$  caractérisant la transition entre l'état fondamental  $|g\rangle$  et l'état excité  $|e\rangle$  est défini tel que :  $\hbar\Omega = d_{eg}E_0$ , où  $\Omega$  représente la pulsation de Rabi.

avec

$$\phi_\alpha = \begin{cases} -\pi & \text{pour } \omega \ll \omega_{at} \quad (\delta \ll 0) , \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pour } \omega = \omega_{at} \quad (\delta = 0) , \\ 0 & \text{pour } \omega \gg \omega_{at} \quad (\delta \gg 0) . \end{cases}$$

Le changement de variable

$$\tilde{\beta}_j = \beta_j e^{-ik_0 z_j} , \quad (4.7)$$

$$= |\tilde{\beta}_j| e^{i\tilde{\phi}_j} , \quad (4.8)$$

nous permettra d'éliminer la partie triviale de la phase des dipôles correspondante à la dépendance en  $z_j$ . Ainsi,  $\tilde{\phi}_j$  constitue la phase du dipôle  $j$  sans la contribution relative à la position de ce dernier. Elle est donnée par

$$\tilde{\phi}_j = -\omega t + \phi_\alpha . \quad (4.9)$$

Il est à noter que le fait d'éliminer le facteur trivial  $e^{ik_0 z_j}$  ne correspond pas à éliminer la contribution de la diffusion simple. Cette dernière reste décrite par le déphasage  $\phi_\alpha$  imposé au dipôle par le champ incident.

### Indice de réfraction

Pour une bonne compréhension de la propagation d'un champ lumineux dans un milieu, il est utile dans certaines situations de prendre en considération l'indice de réfraction de ce dernier. Dans ce cas, le champ électrique à une position  $z_j$  à l'intérieur du milieu s'écrit

$$E(z_j, t) = E_0 e^{i(-\omega t + nk_0 z_j)} , \quad (4.10)$$

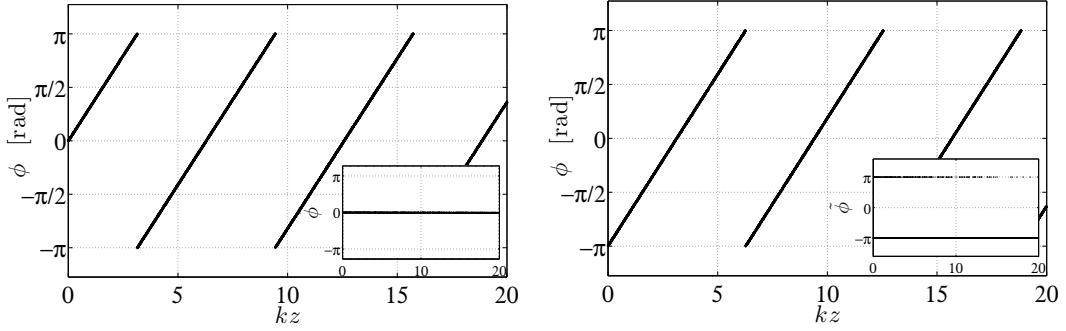
où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu donné par

$$n(\delta) = 1 + \frac{1}{2} \rho \alpha(\delta) , \quad (4.11)$$

pour un nuage dilué de densité  $\rho$ . Cet indice caractérise le changement de la vitesse de propagation de l'onde lumineuse passant de "  $c$  " à l'extérieur de l'échantillon à "  $c/n$  " à l'intérieur de ce dernier. En prenant  $n = n' + in''$  nous récrivons l'eq. (4.10) sous la forme

$$E(z_j, t) = \underbrace{E_0 e^{i(-\omega t + k_0 z_j)}}_A \underbrace{e^{i(n'-1)k_0 z_j}}_B \underbrace{e^{-n''k_0 z_j}}_C . \quad (4.12)$$

Le premier terme ( $A$ ) rappelle la propagation libre du champ électrique donnée par l'eq. (4.1) et correspond au champ incident. Ce dernier subira en passant



**Figure 4.1.** Évolution de la phase des dipôles à l'intérieur de l'échantillon (slab de taille longitudinale  $kL_z = 20$ ). Chaque point correspond à un atome  $j$  à la position  $z_j$  ayant une phase  $\phi_j$ . Le laser incident est désaccordé de  $\delta = 100$  sur l'image de gauche et  $\delta = -100$  sur celle à droite.  $b_0 = 8$  et  $b(\delta) \ll 1$ . Les inserts correspondent à l'évolution de la phase  $\tilde{\phi}_j$ .

par l'échantillon d'indice  $n$ , un retard de phase donné par le terme ( $B$ ) et son amplitude sera atténuée par le terme ( $C$ ). À la sortie de l'échantillon, l'intensité incidente sera atténuée d'un facteur  $e^{-2n''k_0L_z} = e^{-b}$ . Le délai de phase du champ diffusé par rapport au champ incident dû à l'indice du milieu implique un retard supplémentaire sur les phases des dipôles  $\tilde{\phi}_j$  :

$$\tilde{\phi}_j = -\omega t + (n' - 1)k_0z_j + \phi_\alpha . \quad (4.13)$$

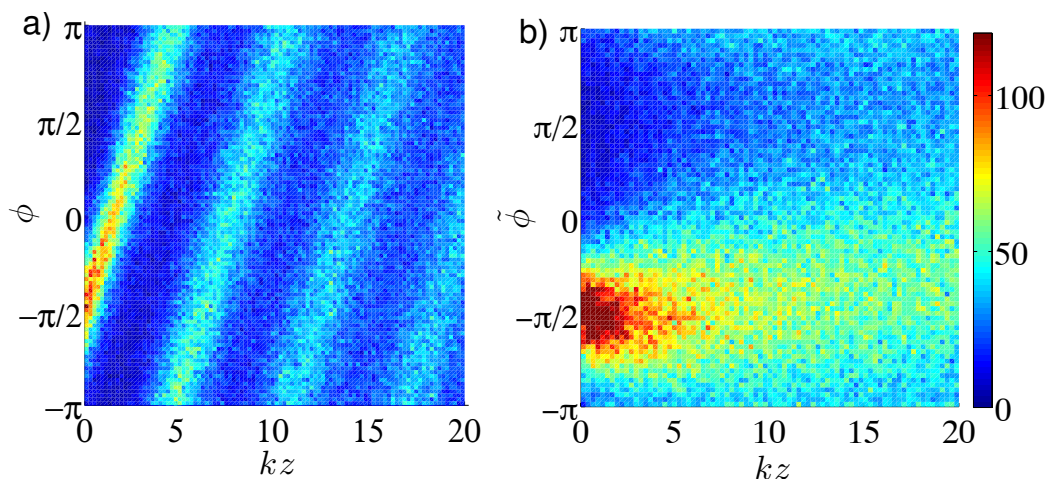
De ce fait, quand  $\delta \neq 0$  la phase du champ et par conséquent celles des dipôles, sont modifiées à cause de la partie réelle non nulle de la polarisabilité atomique et de l'indice<sup>iv</sup>  $n$ . En revanche, à résonance nous aurons  $n' = 1$  et  $n = 1 + n''$ .

### Champ incident hors résonance atomique

Nous allons étudier en régime stationnaire le profil des phases des dipôles placés dans un slab de taille longitudinale  $L_z = 20/k$ , de distribution spatiale homogène et d'épaisseur optique à résonance  $b_0 = 8$ . Comme première étape, nous allons utiliser un laser sonde très désaccordé hors résonance atomique. En régime stationnaire et pour  $|\delta| \gg 0$ , la phase des dipôles donnée par l'eq. (4.13) prend la forme

$$\tilde{\phi}_j = \phi_\alpha . \quad (4.14)$$

iv. Le retard de phase supplémentaire dû à la partie réelle de l'indice se traduit par une pente dans les histogrammes des phases  $\tilde{\phi}_j$  en fonction des positions  $z_j$  suivant l'axe de propagation. L'inclinaison de la pente dépend du signe du désaccord. Cependant, cet effet disparaît à résonance (le régime auquel nous nous intéressons principalement) où la polarisabilité est imaginaire pure et par conséquent  $n' - 1 = 0$ . La phase  $\tilde{\phi}_j$  reprend dans ce cas la forme de l'eq. (4.9). L'effet de la partie réelle de l'indice disparaît aussi pour des  $|\delta| \gg 0$  où  $n' \rightarrow 1$  tel que sur la fig. 4.1.



**Figure 4.2.** Histogrammes des phases  $\phi_j$  dans (a) et des phases réduites  $\tilde{\phi}_j$  dans (b), illustrant leur évolution à l'intérieur du slab de largeur  $kL_z = 20$  avec  $\delta = 0$  et  $b = b_0 = 8$ . Les simulations sont réalisées sur plusieurs configurations pour augmenter la statistique, sans effectuer de moyenne.

En effet, hors résonance atomique la section efficace de diffusion des atomes et par conséquent l'épaisseur optique du nuage<sup>v</sup> sont réduites. Le nuage atomique est alors similaire à une collection d'atomes indépendants. Par conséquent, le champ incident induit des dipôles électriques avec un retard de phase  $\phi_\alpha$  par un processus de diffusion simple. Chaque photon diffusé par un dipôle  $j$  sort du nuage optiquement dilué avant d'être rediffusé par un second dipôle ( $\sigma_{sc} \ll 1 \Rightarrow l_{sc} = 1/(\rho\sigma_{sc}) \gg L$ ). Dans ce cas, chaque atome ne voit que des photons en provenance de la source. Ce régime de diffusion simple permet la description du nuage atomique par une physique à atome unique. Les dipôles sont mutuellement indépendants et ne sont pas en mesure d'avoir un comportement coopératif. Par conséquent, dans tout l'échantillon les phases restent alignées sur le déphasage  $\phi_\alpha$  initialement imposé par le champ incident comme le montre la fig. 4.1. Nous allons voir par la suite que cela ne sera pas le cas à résonance ( $\delta = 0$ ) à cause de l'apparition de la diffusion multiple.

Notons que le changement de signe du désaccord implique un changement de la différence de phase initiale  $\phi_\alpha$  entre le champ laser et les dipôles induits. Cela est dû à la dépendance de la polarisabilité atomique  $\alpha(\delta)$  du signe du désaccord.



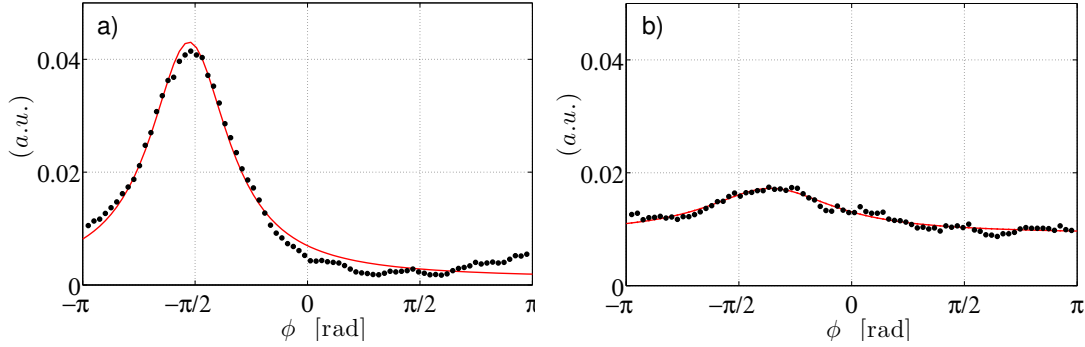
## Champ incident à résonance atomique

Nous réglons maintenant la fréquence du laser sur la fréquence de résonance atomique, i.e.,  $\delta = 0$ . L'opacité du nuage correspond alors à son épaisseur optique à résonance  $b = b_0 > 1$ . Dans ce cas, nous passons en régime de diffusion multiple où la plupart du champ incident est diffusée par le milieu à partir d'une profondeur  $l_{sc} = L_z/b$  correspondant au libre parcours moyen [83]. Les photons subissent alors plusieurs événements de diffusion avant de sortir de l'échantillon. Ceci altère significativement la direction de diffusion du photon et de même la phase initialement imposée par le champ incident. Dans ce régime le dipôle à la position  $\mathbf{r}_j$  ressent, en plus du champ extérieur incident, les champs diffusés par les autres dipôles dans le nuage de phases aléatoires. En effet, les positions  $z_j$  sont complètement désordonnées et l'angle  $\theta$  entre la direction de diffusion du photon et celle de son incidence est arbitraire à cause de l'aspect isotropique des diffuseurs ponctuels. Ceci explique qu'en régime de diffusion multiple nous envisageons que la phase du champ diffusé et par conséquent celles des dipôles induits, soit aléatoires notamment après un grand nombre de diffusion à la fin du nuage.

En allumant le laser sonde, les dipôles constituant la première couche du nuage ( $z_j \sim 0$ ) aperçoivent un champ de fréquence  $\omega$  et de phase  $\phi_0$ . Ils oscillent à sa fréquence et acquièrent un déphasage similaire<sup>vi</sup>. Les phases à l'entrée du nuage ( $z_j \sim 0$ ) correspondent ainsi à la différence de phase initiale ( $\tilde{\phi}_j \approx \phi_\alpha = -\pi/2$ ). Par la suite, le champ lumineux est sensé perdre sa phase initiale au fur et à mesure que le photon subit des événements de diffusions isotropes en se propageant dans l'échantillon. Dans les figs. 4.2(a) et 4.2(b) nous traçons l'histogramme des phases  $\phi_j$  et  $\tilde{\phi}_j$  respectivement, en fonction des positions longitudinales des dipôles  $z_j$  dans le slab. Cela permet d'estimer la densité d'oscillateurs à une phase donnée. Nous remarquons que la distribution des phases des dipôles initialement concentrée autour d'une valeur moyenne  $\phi_m = -\pi/2$  diffuse en avançant dans le nuage. Cette dispersion progressive est engendrée par la modification de la phase initiale de la radiation incidente à cause de la diffusion multiple. Dans ce régime diffusif les atomes des couches profondes du nuage aperçoivent un champ lumineux dont la phase est complètement aléatoire. Nous nous attendons dans ce cas à avoir une distribution uniforme des phases  $\tilde{\phi}_j$  pour les dipôles situés dans les dernières couches du nuage. En effectuant des coupes transversales à différentes positions suivant  $\hat{\mathbf{e}}_z$ , nous avons estimé la distribution des phases sur différentes couches du slab d'épaisseur  $\delta z = L_z/10$  chacune. Les figs. 4.3(a) et 4.3(b) représentent

v.  $\sigma_{sc} = \sigma_0/(1 + 4\delta^2)$  et  $b = b_0/(1 + 4\delta^2)$  respectivement.

vi. Il est important de noter que les atome dans la première couche aperçoive aussi de la lumière réfléchi par les couches plus profondes. Par conséquent, la distribution des phases à l'entrée du nuage est légèrement élargie ( $\tilde{\phi}_j \approx \phi_\alpha$ ) comparée à un régime de diffusion simple ( $\tilde{\phi}_j = \phi_\alpha$ ).



**Figure 4.3.** Fit gaussien (ligne rouge) de la distribution des phase  $\tilde{\phi}_j$  dans la première (à gauche) et la dernière (à droite) couche du slab de largeur  $L_z = 20/k$  avec  $\delta = 0$  et  $b = b_0 = 8$ .

les profils de distribution des phases  $\tilde{\phi}_j$  à l'entrée ( $z = 0 + \delta z$ ) et à la sortie ( $z = L_z - \delta z$ ) de l'échantillon respectivement. Nous pouvons constater que le fit gaussien des phases à la dernière couche de l'échantillon sur la fig. 4.3(b) montre une distribution non-uniforme. Les phases ne sont donc pas complètement aléatoires même à la fin du nuage malgré le régime de diffusion multiple imposé par l'opacité du milieu ( $b > 1$ ). Rappelons que dans le modèle classique de marche au hasard (RW), souvent utilisé pour la description de la diffusion de la lumière dans de tels régimes, les phases sont distribuées de manière uniforme dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et toutes les valeurs sont à probabilités égales.

Ces résultats rejoignent les observations faites à partir de la fig. 3.4(d) pour un nuage en forme de sphère gaussienne. Ils montrent clairement une cohérence de phase persistante en régime de forte diffusion à l'encontre de ce que prévoit un modèle diffusif incohérent. Cependant, il est indispensable de distinguer entre le résidu de la cohérence due au pilotage extérieur et une cohérence non triviale due à un comportement coopératif. Dans ce qui suit, nous allons essayer de déterminer les paramètres pertinents caractérisant cet effet afin de répondre à la question suivante : est ce que cette cohérence constitue un effet coopératif non trivial au delà de l'atténuation du champ incident dans le milieu ?

#### 4.1.1 Paramètre d'ordre pour les dipôles couplés

Dans cette section nous tentons de quantifier la cohérence de phase entre les dipôles observée dans la section précédente. Nous allons définir un paramètre d'ordre à la Kuramoto qui nous permettra d'étudier l'évolution de cette cohérence dans l'échantillon en fonction des différents paramètres du système.

## Modèle de Kuramoto

Le modèle de Kuramoto décrit une population de  $N$  oscillateurs couplés de phases  $\phi_i(t)$ . Les oscillateurs ont des fréquences naturelles  $\omega_i$  distribuées avec une certaine densité de probabilité  $g(\omega)$ . La dynamique du système est décrite par

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i), \quad i = 1 \dots N, \quad (4.15)$$

où  $K_{ij}$  représente la matrice de couplage entre les oscillateurs. Quand le couplage est faible les oscillateurs sont en décohérence de phase. Dès que le couplage atteint un certain seuil une synchronisation collective s'établit entre les oscillateurs de manière spontanée. Kuramoto a étudié la synchronisation dans le cas d'un couplage moyen  $K_{ij} = K/N > 0$  [86]. L'éq. (4.15) s'écrit dans ce cas

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j). \quad (4.16)$$

Il a défini un paramètre d'ordre complexe de la forme

$$r_s e^{i\phi_m} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}, \quad (4.17)$$

où  $\phi_m$  est la phase moyenne et  $r_s$  mesure la cohérence des phases des oscillateurs<sup>vii</sup> par rapport à  $\phi_m$  avec  $0 \leq r_s \leq 1$  tel que :

- $r_s = 0$  : décohérence totale entre les oscillateurs. Les phases de ces derniers sont complètement aléatoires.
- $0 < r_s < 1$  : synchronisation partielle. Une partie des oscillateurs ont la phase verrouillée sur la phase moyenne  $\phi_m$ . Les autres dipôles oscillent en déphasage par rapport à eux est constituent la partie incohérente du nuage.
- $r_s = 1$  : synchronisation globale. Tous les oscillateurs ont la même phase  $\phi_m$ .

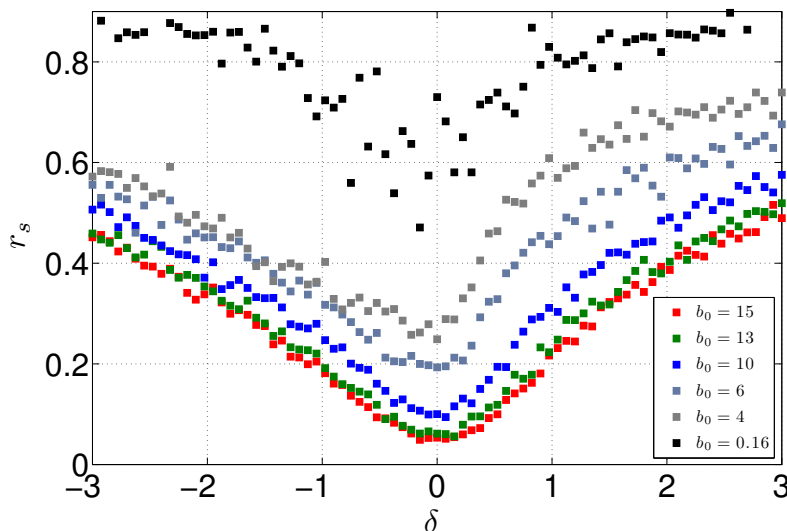
## Paramètre d'ordre en approche CD

Nous utilisons le même principe que le modèle de Kuramoto pour évaluer la cohérence de phase que nous avons observée entre nos dipôles couplés. À partir de notre modèle CD nous définissons le paramètre d'ordre suivant

$$r_s e^{i\phi_m} = \frac{\sum_j \tilde{\beta}_j}{\sum_j |\tilde{\beta}_j|}. \quad (4.18)$$

---

vii. L'indice  $s$  correspond à "synchronisation".



**Figure 4.4.** Paramètre d'ordre en fonction du désaccord  $\delta$  pour des échantillons avec différentes épaisseurs optiques. Simulations réalisées pour un cylindre de densité  $\rho\lambda^3 \sim 8$  et  $\mathcal{R} = 1/3$ . Remarquez que pour  $b_0 > 10$  les courbes atteignent le même minimum à résonance.

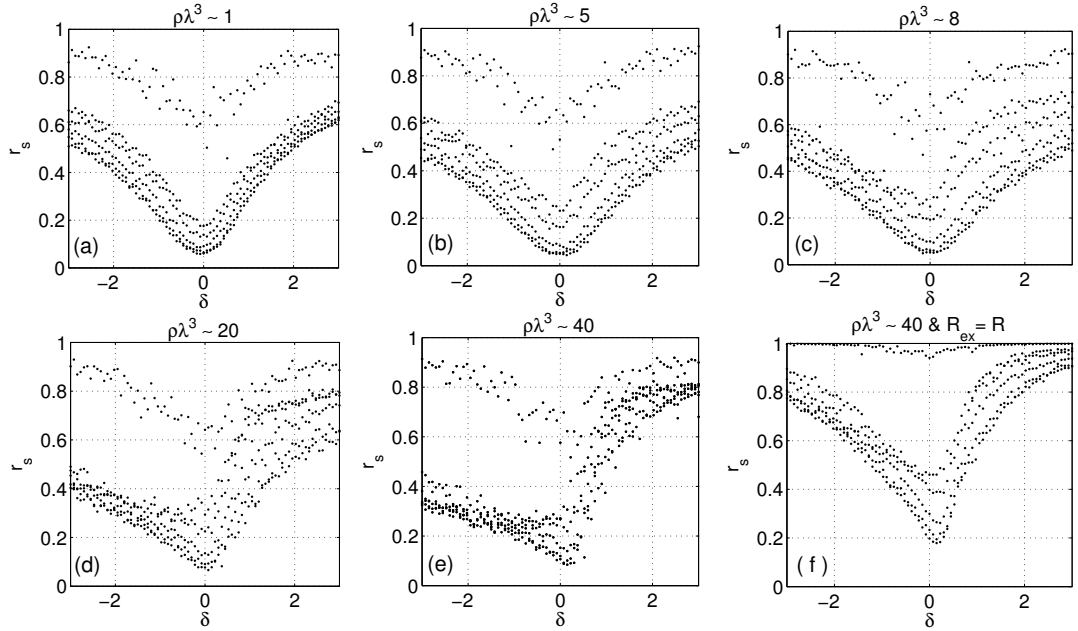
Ainsi, si tous les dipôles ont la même phase nous aurons  $r_s = 1$ . Tandis que pour un régime incohérent avec des phases complètement aléatoires le paramètre d'ordre sera nul. Il est important de souligner le fait que le paramètre d'ordre tel que nous le définissons dans l'éq. (4.18) exprime le degré de cohérence des phases entre les dipôles excités. Les oscillateurs qui ne sont pas excités et dont les amplitudes sont nulles n'ont donc aucun impact sur la valeur du paramètre d'ordre.

Nous considérons dans ce qui suit un échantillon sous forme d'un cylindre plat (camembert) de rayon transverse  $R$  et de taille longitudinale  $L_z$ . Nous excitons une partie de l'échantillon de rayon  $R_{ex} \leq R$  au centre du nuage en utilisant une onde plane tronquée.  $\mathcal{R} = R_{ex}/R$  représente le ratio de la partie initialement éclairée par rapport à la taille transverse du nuage (voir fig. 1.2).

Dans notre système de diffuseurs atomiques l'effet de la diffusion multiple peut être géré à travers l'épaisseur optique du nuage. Le nombre de diffusions que subi un photon dans l'échantillon étant proportionnel à  $b^2$ , un nuage plus opaque ( $b$  plus grand) est alors un milieu plus diffusif. Une bonne façon d'explorer l'évolution de  $r_s$  en fonction de la diffusion dans le nuage sera d'exploiter la dépendance de l'épaisseur optique au désaccord du laser exprimée par la formule

$$b(\delta) = b_0 / (1 + 4\delta^2) . \quad (4.19)$$

Ainsi, nous pouvons augmenter  $b$  en s'approchant de la résonance atomique pour



**Figure 4.5.** Évolution du paramètre d'ordre en fonction du désaccord laser pour différentes densités atomiques.. La densité est augmentée en réduisant  $L_z$ . Sur (f) l'échantillon est entièrement éclairé  $\mathcal{R} = 1$ . Sur toutes les autres images  $\mathcal{R} = 1/3$ . Les différentes courbes sur chaque image correspondent aux mêmes valeurs de  $b_0$  que celle sur la fig. 4.4.

un  $b_0$  constant. Pour un nuage d'une épaisseur optique à résonance  $b_0 > 1$ , nous passons donc d'un régime de diffusion simple quand  $|\delta| \gg 0$  à un régime de faible diffusion vers un régime diffusif pour  $\delta \rightarrow 0$ . L'avantage de cette méthode est que l'effet est purement optique vu que nous ne changeons ni la taille ni la densité atomique du nuage. Pour un très grand désaccord le nuage sera optiquement très dilué et tous les dipôles dans la zone éclairée ne ressentent que le champ lumineux incident. Dans ce régime de diffusion simple les dipôles oscillent tous avec la même phase et  $r_s \rightarrow 1$ . En se rapprochant de la résonance atomique nous nous attendons à voir l'aspect diffusif prendre peu à peu le dessus sur la cohérence du nuage. Cela se traduit sur la fig. 4.4 par la décroissance du paramètre d'ordre pour une épaisseur optique  $b$  croissante. Ceci signifie qu'il y a plus de diffusion dans le milieu et la phase du champ lumineux est de plus en plus aléatoire. À résonance, l'épaisseur optique atteint un maximum  $b = b_0 > 1$  et le nuage est en régime de diffusion multiple. La phase aléatoire du champ lumineux diffusé générée par le régime de diffusion multiple suscite une décohérence de phase entre les dipôles induits. Le paramètre d'ordre est au minimum.

Par ailleurs, nous avons pu remarquer que pour des échantillons à grandes densités atomiques l'évolution de  $r_s$  n'est pas symétrique des deux cotés rouge et bleu du désaccord. Le paramètre d'ordre croît plus lentement du côté rouge ( $\delta < 0$ ) que du côté bleu ( $\delta > 0$ ) comme le montrent les figs 4.5(d) et 4.5(e). Cependant, il faut noter que pour atteindre numériquement de grandes densités atomiques nous diminuons significativement la taille longitudinale du cylindre<sup>viii</sup>. Ainsi, nous nous retrouvons avec des cylindres quasi-plats d'épaisseurs  $L_z \sim \lambda$  voir même  $L_z < \lambda$ . De ce fait, l'étude de la diffusion multiple dans de tels échantillons rentre dans le cadre de la diffusion de la lumière par des nuages à deux dimensions [30] que nous n'allons pas aborder dans ce manuscrit. Nous signalons par contre le fait que lorsqu'un échantillon dense tel que celui sur la fig. 4.5(e) est entièrement éclairé ( $\mathcal{R} = 1$ ), l'asymétrie rouge/bleu devient significativement moins violente comme nous pouvons le voir sur la fig. 4.5(f). Ainsi, pour un rayon d'excitation plus grand, le nuage tend vers le régime de cohérence globale ( $r_s \rightarrow 1$ ) plus rapidement vis à vis de  $\delta$ . Dans ce sens, la fig. 4.6 montre l'évolution de  $r_s$  en fonction du rayon de la zone éclairée à résonance pour un nuage d'épaisseur optique  $b = 6$ . Nous pouvons constater que pour une taille constante, le nuage est plus cohérent pour un ratio  $\mathcal{R}$  plus grand. Un tel comportement n'est pas évident a priori. De plus, nous remarquons que même lorsque tout l'échantillon est éclairé par l'onde incidente ( $\mathcal{R} = 1$ ) le paramètre d'ordre calculé sur tous les dipôles dans le nuage sature vers une valeur  $r_s < 1$ . Ainsi, seule une partie des dipôles est synchronisée bien que tout le nuage est éclairé. Cela s'explique par la diffusion multiple de la lumière dans le milieu qui tend à rendre aléatoire les phases des dipôles induits et agir à l'encontre d'une cohérence globale dans le nuage.

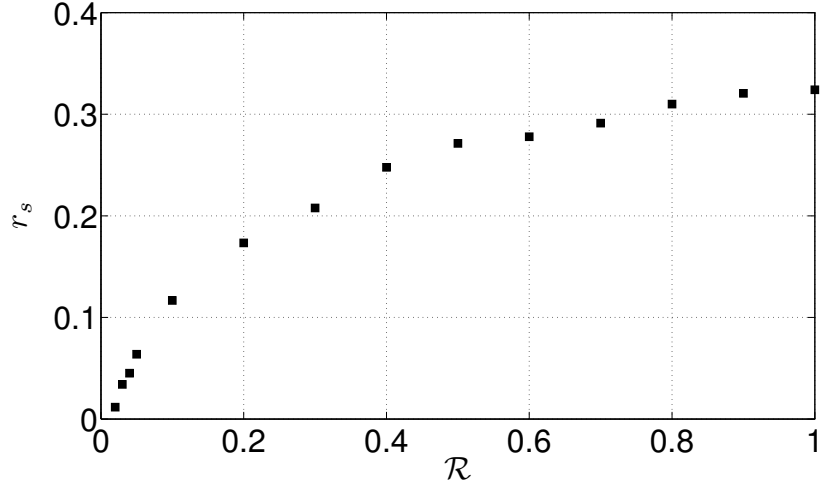
La diffusion multiple qui tente d'annihiler la cohérence des phase dans le nuage est caractérisée par l'épaisseur optique  $b$ . À résonance, un  $b \equiv b_0$  plus grand signifie un milieu plus diffusif avec des phases plus incohérentes. Nous illustrons cela sur la fig. 4.7 où nous traçons l'évolution de  $r_s$  en fonction de l'épaisseur optique du nuage pour des rayons d'excitation différent. Le paramètre d'ordre indique une décroissance de la cohérence dans le nuage pour des régimes de plus en plus diffusifs. Le comportement ne change pas dans le cas où une partie plus ou moins importante du nuage (suivant la valeur de  $\mathcal{R}$ ) est éclairée par le champ incident.

### 4.1.2 Synchronisation de phases en diffusion multiple !

Nous rappelons que le but de ce chapitre est de déterminer si la cohérence de phase observée en régime diffusif à travers notre modèle CD consiste en un

---

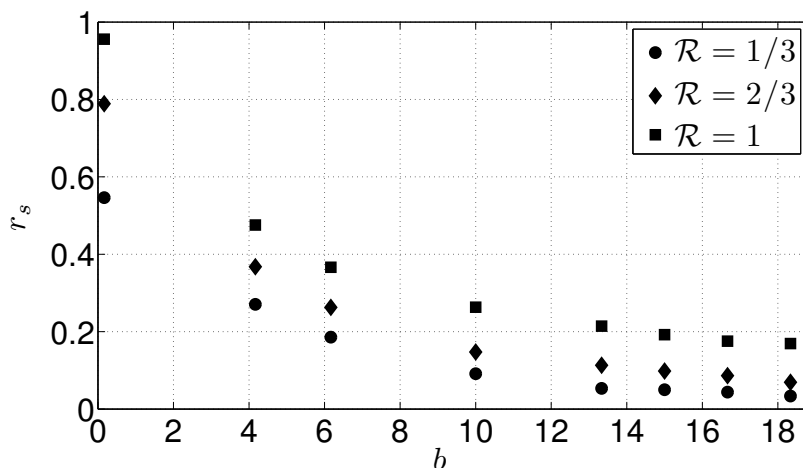
viii. Le nombre d'atome que nous pouvons atteindre étant numériquement limité pour cause de mémoire.



**Figure 4.6.** Paramètre d'ordre en fonction du ratio de la partie éclairée par le champ incident. L'échantillon à une forme cylindrique de taille longitudinale  $L_z = 10/k$ , d'épaisseur optique  $b = 6$ , de densité spatiale uniforme  $\rho\lambda^3 = 8$  et est éclairé par un champ lumineux à résonance  $\delta = 0$ .

effet trivial ou non. Jusque là, nous avons décrit la cohérence dans le nuage de manière globale à travers un paramètre d'ordre calculé sur tous les dipôles dans l'échantillon. Cependant, l'effet de décohérence dû à la diffusion multiple n'est pas homogène à l'intérieur du nuage. Sachant que la première couche d'atomes de l'échantillon est quasiment synchronisée par le champ laser incident, il sera intéressant de voir l'évolution de cette cohérence à l'intérieur du nuage. Notamment le long de l'axe de propagation du champ lumineux au fur et à mesure que le régime diffusif prend de l'effet. Nous tenterons dans cette section de distinguer entre cette synchronisation due au champ extérieur et une éventuelle synchronisation coopérative entre les dipôles couplés.

Nous traçons sur la fig. 4.8 le paramètre d'ordre (carrés noir) calculé sur plusieurs couches successives du nuage de taille  $\delta z = L_z/10$  chacune. Pour une épaisseur optique donnée, e.g.  $b = 8$ , le paramètre d'ordre  $r_s$  diminue en fonction de  $z$ . Cela s'explique par le fait que l'effet de la diffusion multiple de la lumière incidente par les dipôles désordonnés devient de plus en plus important en avançant dans l'échantillon. Ceci provoque la perte progressive de la cohérence de phase entre les dipôles induits par rapport à celle imposée à la première couche du nuage par le laser incident. Dans le cadre de la théorie du transfert radiatif (RTE) cette décohérence peut être décrite par le rapport  $I_{\text{coh}}(z)/I_{\text{dif}}(z)$ . Il représente la fraction de



**Figure 4.7.** Paramètre d'ordre en fonction de l'épaisseur optique à résonance du nuage pour différents rayons d'excitation.  $b(\delta = 0)$  est augmenté en ajoutant des couches d'atomes sur l'épaisseur  $L_z$  du nuage de rayon  $R = 60/k$  et de densité  $\rho\lambda^3 \sim 6$ .

l'intensité cohérente dans l'échantillon donnée par l'atténuation du champ incident

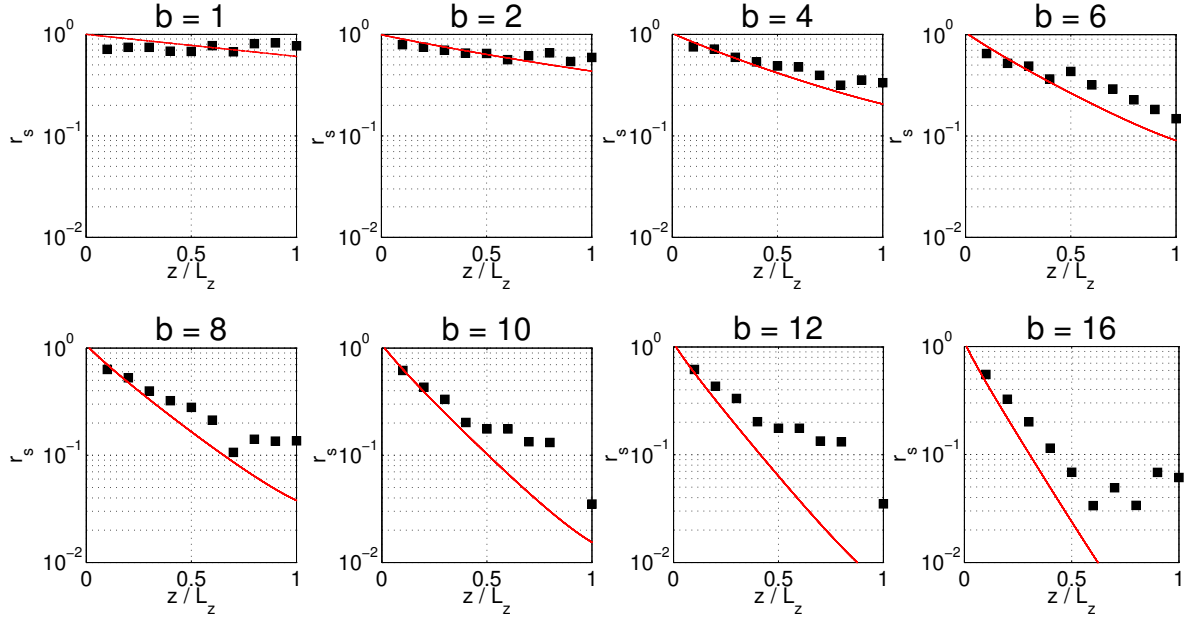
$$\frac{I_{\text{coh}}(z)}{I(0)} = e^{-z/l_{sc}}, \quad (4.20)$$

par rapport à l'intensité diffusée dans l'échantillon donnée par [87]

$$\frac{I_{\text{dif}}(z)}{I(0)} = 1 - \frac{z}{l_{sc}} \frac{(b_0 - 1)}{b_0^2} - \frac{3}{4\pi} e^{-z/l_{sc}}, \quad (4.21)$$

où  $l_{sc} = L_z/b$  représente le libre parcours moyen de diffusion dans notre modèle. Ainsi, nous comparons dans la fig. 4.8 le paramètre d'ordre – étant le rapport des phases cohérentes à celles incohérentes dans notre modèle – aux courbes  $[I_{\text{coh}}(z)/I_{\text{dif}}(z)]^{1/2}$  prédites par la RTE. Nous constatons que pour des échantillons à faibles épaisseurs optiques ( $b = 1$  et  $2$ ) le nuage est peu diffusif et la cohérence due au champ incident n'est pas significativement altérée. Par contre, pour des échantillons optiquement denses nous constatons un écart entre le paramètre d'ordre et les courbes théoriques de plus en plus évident pour des nuages de plus en plus opaques. La cohérence décrite par notre paramètre d'ordre diminue en avançant dans le nuage à cause de la diffusion multiple, mais moins vite que ce que prévoit la théorie de diffusion. Pour des nuages à fortes épaisseurs optiques  $r_s$  semble même bloqué à une valeur minimale sur les dernières couches des échantillons.





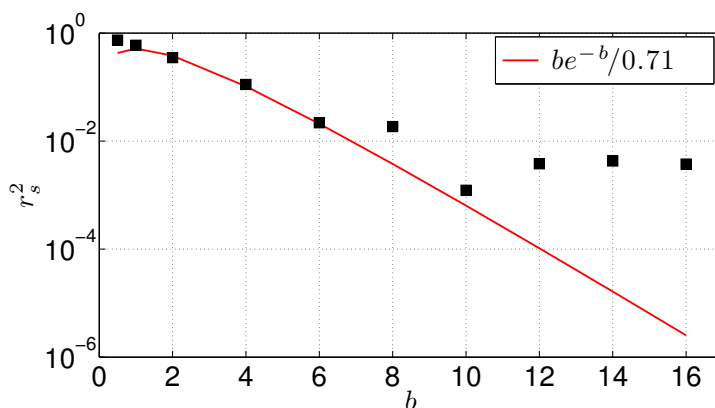
**Figure 4.8.** Paramètre d'ordre (carrés noirs) à l'intérieur du nuage pour différentes épaisseurs optiques, comparé à la prédiction de la théorie de diffusion  $[I_{\text{coh}}(z)/I_{\text{dif}}(z)]^{1/2}$  (courbe rouge). Toutes les simulations ont été faites à  $\delta = 0$  pour des nuages de densités atomiques  $\rho\lambda^3 = 10$  et entièrement éclairés ( $\mathcal{R} = 1$ ).

Pour mettre en évidence cet écart significatif à la fin des nuages atomiques opaques, nous calculons le paramètre d'ordre sur la dernière couche de l'échantillon  $L_z - \delta z < z < L_z$ , pour différentes épaisseurs optiques. Sur la fig. 4.9 nous comparons  $r_s^2$  au rapport entre la transmission cohérente donnée par la loi de Beer-Lambert et la transmission diffusée donnée par la loi d'Ohm en théorie du transfert radiatif [88] :

$$\frac{T_{\text{coh}}}{T_{\text{dif}}} = \frac{I_{\text{coh}}(z \sim L_z)}{I_{\text{dif}}(z \sim L_z)} = \frac{b}{0.71} e^{-b}. \quad (4.22)$$

Le paramètre d'ordre est en parfaite accord avec la théorie pour des épaisseurs optiques  $b < 8$ . Cependant, nous constatons que les valeurs de  $r_s^2$  décrochent de la courbe théorique pour des  $b \geq 8$ . D'autant plus que le paramètre d'ordre tend vers un plateau pour les régimes très diffusifs. Cela signifie qu'un certain taux de cohérence est maintenu dans le nuage même si son opacité continue d'augmenter.

Il est à noter que l'effet d'ombre pris comme argument pour l'explication de la réduction de la force de pression de radiation sur le centre de masse du nuage de densité gaussienne dans le chapitre précédent, ne peut pas être considéré comme tel pour expliquer le blocage du paramètre d'ordre observé sur les figs. 4.8 et 4.9.



**Figure 4.9.** Paramètre d'ordre (carrés noirs) sur la dernière couche de l'échantillon tel que  $L_z - \delta z < z_j < L_z$  ( $\delta z = L_z/10$ ), en fonction de l'épaisseur optique du nuage. La courbe rouge représente le rapport théorique  $T_{\text{coh}}/T_{\text{dif}} = (b/0.71) e^{-b}$ . Simulations faites à  $\delta = 0$  et  $kl_{sc} = 1.25$ , pour des nuages de densités atomiques  $\rho\lambda^3 = 10$  et entièrement éclairés ( $\mathcal{R} = 1$ ).

En effet, la densité d'énergie électromagnétique<sup>ix</sup> dans le nuage de forme slab, proportionnelle à  $|\beta|^2$  dans notre modèle et donnée par l'eq. (4.21) dans la RTE, n'est pas nulle à la fin de l'échantillon [88]. Ceci signifie que toutes les couches de l'échantillon contribuent au paramètre d'ordre même pour des nuages opaques.

Par ailleurs, nous nous sommes assuré que ce décrochement ne consiste pas en un quiproquo numérique. Le fait que nous calculions  $r_s$  sur des couches de l'échantillon qui contiennent un petit nombre d'atomes ( $\sim N/10$  chacune) pourrait induire un biais numérique conduisant à surestimer  $r_s$ . Dans ce cas ce dernier diminuerait pour un plus grand nombre d'atomes et moins de fluctuations. Nous avons vérifié en augmentant la taille des couches que le paramètre d'ordre ne dépend pas du nombre d'atomes dans la couche sur laquelle il est calculé. D'autre part, nous avons aussi pu constater que le paramètre d'ordre affiche le même comportement que celui sur la fig. 4.9 pour différentes densités atomiques plus ou moins importante que celle considéré sur cette figure. Le décrochement observé est donc bien un effet d'épaisseur optique.

Ces résultats indiquent la survie d'un certain effet de cohérence entre les dipôles couplés en régimes de diffusion multiple et sa persistance pour des échantillon de plus en plus diffusifs. Cette cohérence est plus importante que ce qui est prédit par la théorie de la diffusion et va donc au delà du simple résidu de l'atténuation du champ incident dans le milieu.

ix. Généralement dite intensité.

## 4.2 Probabilité d'intensité des dipôles en diffusion multiple

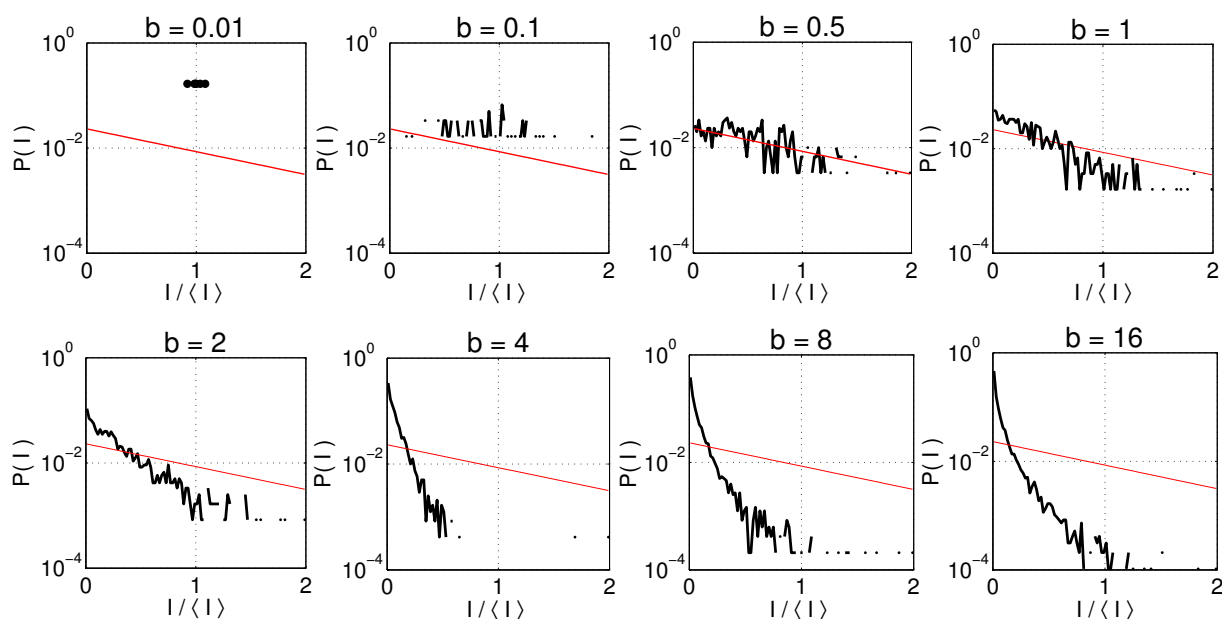
Dans la RTE la densité d'énergie électromagnétique à l'intérieur du milieu est une quantité importante pour la description du processus de diffusion multiple. Elle est plus communément désignée comme l'intensité diffusée dans le milieu et est donnée par l'éq. (4.21). Selon cette théorie la distribution de probabilité des intensités est une distribution de Rayleigh de la forme [54]

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-I/\langle I \rangle} . \quad (4.23)$$

D'autre part, dans le modèle cohérent CD, l'intensité diffusée par chaque dipôle est proportionnelle au carré de son amplitude  $|\beta_j|^2$ . Ainsi, en plus de l'analyse des phases des dipôles induits par le champ extérieur, nous pouvons explorer l'évolution de la cohérence dans le nuage à travers la distribution de probabilité de l'intensité diffusée à l'intérieur de ce derniers. Nous montrons sur la fig. 4.10 l'évolution de la distribution de probabilité de l'intensité dans le nuage à travers différents échantillons d'épaisseurs optiques croissantes. Nous comparons les histogrammes des intensités calculées numériquement avec le modèle CD (lignes noires) à la distribution de probabilité théorique  $P(I)$  donnée par l'éq. (4.23) (lignes rouges). Pour une épaisseur optique très faible ( $b = 0.01$ ) nous retrouvons une distribution d'intensité correspondante à celle d'un nuages très dilués d'atomes indépendant. Pour des échantillons un peu plus opaques ( $b = 0.5$  et  $1$ ), la distribution de l'intensité produit un profil *speckle* semblable en moyenne aux prédictions du modèle incohérent. Par contre, pour des régimes plus diffusifs la distribution d'intensité obtenue à travers le modèle CD est assez différente de la distribution exponentielle prédite par le modèle diffusif incohérent. Cela serait la cause d'un effet de cohérence inclut dans le modèle CD qui va au delà des prédictions de la RTE. De plus, nous obtenons la même distribution de probabilité pour des densités atomiques plus ou moins importantes que celle considérée dans la fig. 4.10. Cependant, il est important de noter que cette déviation par rapport aux prédictions de la RTE, pourrait être le résultat d'une pondération de la valeur moyenne de l'intensité par sa distribution non uniforme à l'intérieur du slab. Nous ne pouvons donc pas considérer ce résultat comme une signature pertinente d'un effet non trivial a ce stade de l'analyse.

## 4.3 Conclusion et perspectives

Dans un nuage atomique éclairé par un champ laser les dipôles induits oscillent tous à la fréquence du laser sonde. Par contre, chaque dipôle acquit une phase



**Figure 4.10.** Distribution de probabilité de l'intensité à l'intérieur de plusieurs échantillons de différentes épaisseurs optiques. Tous ont la même densité atomique  $\rho\lambda^3 = 10$  et sont entièrement éclairés ( $\mathcal{R} = 1$ ) par un champ incident en résonance ( $\delta = 0$ ). Les courbes numériques (noires) s'éloignent clairement de la forme exponentielle prévue par la RTE (lignes rouges) dans les régimes très diffusif ( $b = 4, 8, 16$ ).

en fonction de celle du champ lumineux qu'il ressent et de son désaccord. Après un grand nombre de diffusions dans le milieu désordonné et opaque, la phase du champ diffusé devient aléatoire. Ainsi, les dipôles induits par le champ extérieur et le champ diffusé à l'intérieur du nuage oscillent avec des phases incohérentes. Cependant, nous avons constaté que le profil des phases dans le nuage indique qu'un effet de cohérence surprenant persiste en régime de diffusion multiple. À travers le paramètre d'ordre que nous définissons dans la sec. 4.1.1, nous avons montré que cet effet persiste aussi dans des régimes très diffusifs ( $b > 10$ ) et dépasse l'atténuation triviale du champ incident. Par ailleurs, l'intensité diffusée à l'intérieur de l'échantillon donnée par notre modèle CD pour des régimes diffusifs, affiche une distribution de probabilité autre que celle prévue par la RTE. Un effet non-trivial dévoilé par notre modèle cohérent prend vraisemblablement place pour les régimes de diffusion multiple. Autrement dit, les résultats présentés dans cette section laissent présager un effet de synchronisation entre les dipôles couplés dans les nuages à grandes épaisseurs optiques. De ce fait, les dipôles couplés agissent de manière coopérative et spontanée afin de se mettre en cohérence de phase. Ils se synchronisent [89]. À l'image d'un groupe de lucioles (*fireflies*) émettant soudainement des flashes de lumière de manière complètement incohérente. Après une

certaine période, tout le groupe de lucioles se synchronise et émet des flashes à l'unisson [90]. Sauf que dans notre cas la forte diffusion multiple empêche une synchronisation globale.

Dans de tels systèmes opaques de dipôles atomiques soumis à une excitation extérieure à résonance, nous pensons assister à un triple duel :

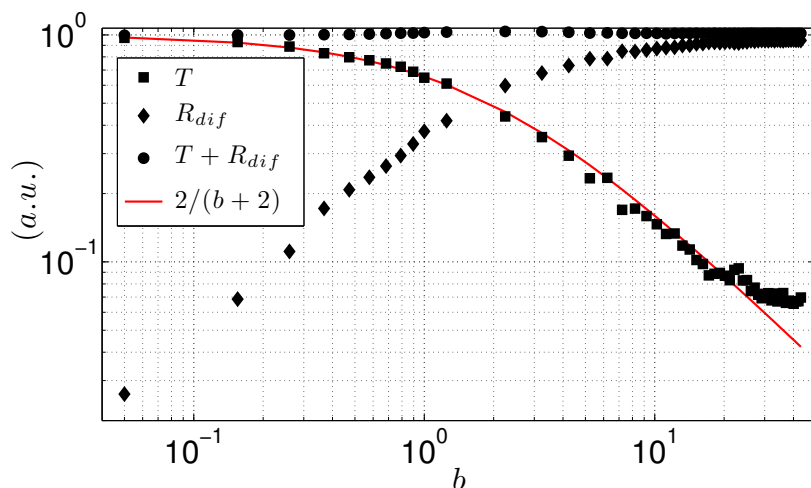
- Le champ incident induit des dipôles couplés avec une certaine phase. La cohérence entre les dipôles induits due au champ incident s'atténue exponentiellement dans l'échantillon.
- La diffusion multiple de la radiation incidente par les atomes désordonnés engendre un champ diffusé avec des phases aléatoires en fonction de l'épaisseur optique du nuage. Les dipôles induits par le champ diffusé auront ainsi des phases incohérentes.
- Un effet coopératif de synchronisation s'établit conjointement dans le nuage aspirant à instaurer une cohérence de phase entre les oscillateurs couplés. Ce comportement coopératif empêcherait une décohérence totale dans le nuage.

Ceci constituerait ainsi une signature des effets collectifs qui va au delà des prédictions d'un modèle diffusif incohérent dans un tel régime de diffusion multiple. Il reste désormais à confirmer que l'effet que nous observons consiste effectivement en une synchronisation spontanée entre les dipôles couplés ou est plutôt dû à un autre effet coopératif. Pour cela, nous menons plusieurs études afin de déterminer la nature et les causes de cette cohérence persistante en diffusion multiple. Parmi les pistes que nous jugeons intéressantes figure l'analyse de l'intensité de la lumière diffusée à travers le nuage ainsi que ses fluctuations.

**Transmission à travers le nuage atomique** – Au cours de ce chapitre, nous avons exploré les effets de cohérence en diffusion multiple à l'intérieur du nuage à travers la cohérence des phases. Nous avons comparé la cohérence décrite par le modèle CD aux formules analytiques de la RTE. Nous allons à présent s'intéresser au coefficient de transmission  $T$  décrivant la lumière transmise à travers le nuage atomique dans la direction du champ incident. En analogie avec l'analyse faite à travers le paramètre d'ordre, nous calculons  $T$  pour différentes épaisseurs optiques du nuage  $b$  à résonance. Nous montrons sur la fig. 4.11 le coefficient de transmission  $T$  ainsi que le coefficient de réflexion<sup>x</sup>  $R_{\text{dif}}$  normalisés tels que  $T + R_{\text{dif}} = 1$ . C'est derniers sont calculés à résonance pour un nuage sous forme de cylindre de rayon  $R = 40/k_0$  et de distribution atomique uniforme de densité  $\rho\lambda^3 = 12$  et  $k_0l = 1.6$  soumis à un faisceau gaussien de waist  $w_0 = 20/k_0$ . La densité atomique du nuage

---

x.  $R_{\text{dif}}$  décrit la lumière diffusée dans la direction arrière par rapport à la direction du champ incident.



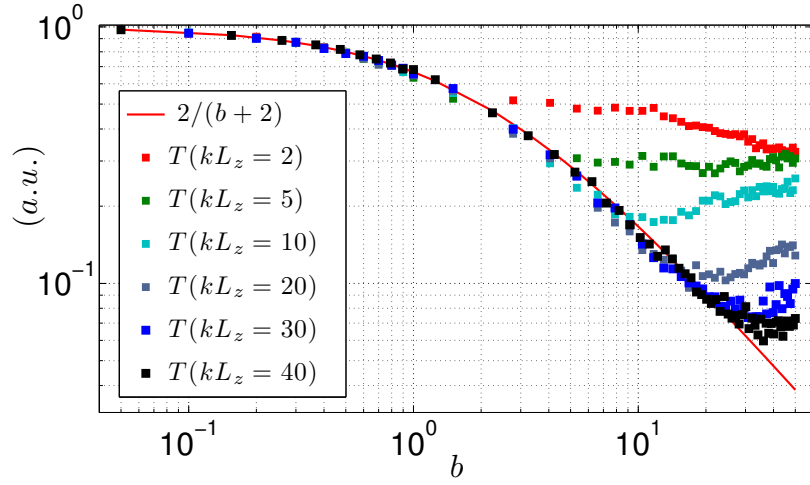
**Figure 4.11.** Coefficients de transmission (carrés noirs) et de réflexion (triangle bleus) pour une couche d'atome sous forme de cylindre de rayon transverse  $R = 40/k$  et de densité atomique  $\rho\lambda^3 = 12$  avec  $kl_{sc} = 1.6$  pour une épaisseur optique croissante. Cette dernière est augmentée en ajoutant des couches d'atomes sur l'épaisseur longitudinale du cylindre  $L_z$ . L'échantillon est éclairé par un faisceau gaussien à résonance avec un *waist*  $w_0 = 20/k$ . La ligne rouge correspond au coefficient de transmission donnée par la RTE pour  $z_e = 1$ .

est proche de celle sur la fig. 4.9. Nous comparons le coefficient de transmission  $T$  calculé par le modèle cohérent CD avec la formule analytique donnée par la RTE [88]

$$T = \frac{1 + z_e}{b + 2z_e}, \quad (4.24)$$

où  $z_e$  est la longueur d'extrapolation adimensionnelle. Nous observons une sorte de léger décrochement, ou un début de décrochement à  $b = 20$ . Nous refaisons la courbe pour des nuages avec des densités différentes. Pour un  $b$  donné nous augmentons la densité en réduisant la taille longitudinale  $L_z$  du nuage. Nous constatons sur la fig. 4.12 un décrochement systématique à  $kl_{sc} = L_z/b \sim 1$  sur toutes les courbes. À ce stade nous avons pas encore déterminé les raisons de ce décrochement. Est ce un effet de cohérence dans le nuage non inclut par la RTE qui est derrière ces résultats? Ce dernier rappelle le décrochement du paramètre d'ordre par rapport aux courbes de la RTE. Sauf que pour  $r_s$  nous avons vérifié que cela ne dépend pas de la densité considérée!

**Fluctuations de l'intensité rayonnée** – Romain Bachelard étudie les propriétés du speckle obtenu à partir du diagramme de rayonnement en champ lointain d'un nuage atomique en utilisant notre modèles CD. Ce speckle peut contenir des



**Figure 4.12.** Transmission à travers des nuages cylindrique de rayon transverse  $R = 50/k$  et de tailles longitudinales fixes  $L_z = 40/k, 30/k, 20/k, 10/k, 5/k, 2/k$ . Les nuages sont soumis à un faisceau laser à résonance de *waist*  $w_0 = 20/k$ . L'épaisseur optique est augmenté en ajoutant des atome à chaque nuage sans changé ses dimensions. La ligne rouge représente le coefficient de transmission donné par la RTE pour pour  $z_e = 1$ . Notons le décrochement des courbes CD par rapport à la courbe RTE à  $b \sim 40, 20, 30, 10, 5$  et  $2$  respectivement. Ce point de décrochement correspond à  $kl_{sc} \sim 1$  sur chaque courbe.

informations intéressantes sur la distribution des phases dans l'échantillon. Le but étant de chercher d'éventuelles signatures d'effets coopératifs et de synchronisation entre les dipôles couplés.

À ce stade des analyses en cours, nous ne sommes pas en mesure d'affirmer la cause ni la nature de la persistance de cohérence que nous constatons en régime de diffusion multiple.

Deuxième partie

Algèbre  $q$ -déformée et  
décohérence





# Chapitre 5

## Intrication quantique des états cohérents $q$ -déformés

La grande majorité des systèmes utilisés en information quantique interagissent avec leurs environnements [91]. Cette interaction n'est généralement pas sans conséquences sur leurs propriétés physiques. D'un point de vue mathématique nous pouvons modéliser les effets de décohérence que subi un système physique par une modification de sa symétrie. Nous formulons cela par une correction sur le formalisme mathématique du système. Cette correction consiste en une petite déformation que nous introduisons à la relation de commutation qui définit l'algèbre décrivant l'évolution du système.

La notion de la déformation est très familière pour les physiciens car assez récurrente dans l'histoire de la physique. En mécanique classique les transformations de Lorentz entre deux référentiels inertiels est une déformation de la transformation galiléenne avec  $\beta = \frac{v}{c}$  comme paramètre de déformation. La mécanique non-relativiste classique est retrouvée dans la limite  $\beta \rightarrow 0$ . Ainsi la relativité restreinte est une déformation de la relativité galiléenne. De même, la mécanique quantique est une déformation de la mécanique classique avec  $\hbar$  comme paramètre de déformation. Dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$  les résultats de la mécanique quantique sont équivalents aux résultats classiques. Depuis une vingtaine d'années la déformation de l'algèbre de l'oscillateur harmonique a fait l'objet de plusieurs travaux. Cette algèbre est connue comme l'algèbre du  $q$ -oscillateur ou l'algèbre  $q$ -déformée [92, 93, 94].

Dans ce chapitre nous introduisons une algèbre de Weyl-Heisenberg  $q$ -déformée. Nous utilisons cette algèbre pour construire des états cohérents déformés par l'application d'un opérateur de déplacement modifié sur le vide. Nous mettrons en évidence le lien des états cohérents déformés au états cohérents non-linéaires. Puis

nous essayerons d'observer les effets d'une telle déformation sur un système d'états cohérents déformés intriqués à travers le calcul de la concurrence [95, 96]. Nous nous intéresserons aux états connus pour avoir une intrication maximale dans le cas standard. Ces états sont dits *maximally entangled coherent states* (MECS).

## 5.1 Algèbre de Weyl-Heisenberg $q$ -déformée

Le groupe de Weyl-Heisenberg (WH) est un groupe de Lie d'une grande importance en mécanique quantique. Il décrit l'évolution de l'oscillateur harmonique dont l'algèbre est générée par les opérateurs  $\{Q, P, I\}$ . L'opérateur position  $Q$  et l'opérateur quantité de mouvement  $P$  satisfont la relation de commutation canonique

$$[Q, P] = i\hbar I, \quad (5.1)$$

où  $I$  est l'opérateur identité. Les opérateurs bosoniques de création et annihilation sont donnés par

$$a = \frac{m\omega Q + iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^+ = \frac{m\omega Q - iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}}. \quad (5.2)$$

Ils vérifient la relation de commutation

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = I. \quad (5.3)$$

Afin de simplifier la notation nous considérerons tout au long de ce chapitre

$$[a, a^+] = 1. \quad (5.4)$$

L'opérateur nombre de l'oscillateur harmonique s'écrit alors

$$\hat{n} = a^+a. \quad (5.5)$$

Ce modèle de l'oscillateur harmonique a été largement utilisé en mécanique quantique. En effet, sa solution analytique est bien connue et n'importe quel système autour de son point d'équilibre peut être modélisé par un oscillateur harmonique. Cependant, l'Hamiltonien obtenu à la base de l'algèbre de Weyl-Heisenberg donnée par l'éq. (5.4) ne sera plus adéquate pour la description du système hors de son équilibre. Une solution astucieuse consiste à maintenir la même structure algébrique de l'Hamiltonien avec une nouvelle définition des opérateurs de création et annihilation. Cette nouvelle définition ou déformation de l'algèbre doit être choisie de telle manière que l'Hamiltonien déformé ré-écrit en terme des nouveaux opérateurs, puisse décrire le comportement anharmonique du système. Tout l'enjeu

consiste donc à trouver la fonction de déformation adéquate au système.

Nous introduisons une algèbre de Weyl-Heisenberg déformée obtenue à partir des opérateurs de création et d'annihilation  $b$  et  $b^+$  respectivement, vérifiant la relation de commutation  $q$ -déformée suivante

$$[b, b^+]_q = bb^+ - q b^+b = 1 , \quad (5.6)$$

où  $q$  est un nombre réel. Dans notre étude nous posons  $q = 1 + \varepsilon$ . Ainsi, le commutateur standard entre les opérateurs déformés  $b$  et  $b^+$  sera donnée par

$$\begin{aligned} [b, b^+] &= bb^+ - b^+b \\ &= 1 + \varepsilon b^+b , \end{aligned} \quad (5.7)$$

où  $\varepsilon$  est le paramètre de déformation réel et infinitésimal. De cette manière, nous avons introduit une faible déformation à la forme standard du commutateur donnée par l'eq. (5.4) que nous retrouvons à partir de l'eq. (5.6) pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , i.e.,  $q \rightarrow 1$ . Dans tout ce qui suit nous appliquerons l'approximation de la faible déformation (*Weak Deformation Approximation* (WDA)) en considérant un paramètre de déformation  $\varepsilon \ll 1$ . Cette approximation nous permettra d'adopter une déformation au premier ordre en  $\varepsilon$  et négliger les ordres supérieurs. Dans ce sens, nous pouvons représenter les opérateurs déformés  $b$  et  $b^+$  sous la forme suivante :

$$b^+ = a^+ + \frac{1}{4}\varepsilon a^{\dagger 2}a + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \quad (5.8)$$

$$b = a + \frac{1}{4}\varepsilon a^+a^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \quad (5.9)$$

L'opérateur nombre déformé s'écrit alors

$$\begin{aligned} \hat{n}_d &= b^+b , \\ &= \hat{n} + \varepsilon(\hat{n} + \frac{1}{2}\hat{n}^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

## 5.2 États Cohérents

Après la grande évolution du sujet dans les années 1960-70, bon nombre de revues s'intéressant aux états cohérents ont vu le jour dont celle de Zhang et Gilmore en 1990 [97] et celle de Ali *et al.* en 1995 [98]. Beaucoup de livres ont aussi été publiés. Nous pouvons citer à titre d'exemple celui de Perelomov se concentrant sur l'aspect théorique relié aux groupes de Lie [99], celui de Ali-Antoine-Gazeau qui analyse la structure mathématique au-delà de la théorie des groupes [100].

Aussi, le livre publié par Dodonov et Man'ko plutôt orienté à l'optique quantique [101], celui de Gazeau que nous prenons comme référence et qui s'intéresse plus aux aspects physiques et probabilistes [102] et enfin le livre publié récemment par Robert [103].

### 5.2.1 États cohérents de l'oscillateur harmonique

Dès 1926 au tout début de la mécanique quantique, Schrödinger s'est intéressé à l'étude des états quantiques qui imitent leurs analogues classiques à travers l'évolution temporelle de l'opérateur position [104] :

$$Q(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} Q e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} . \quad (5.11)$$

Dans cette relation  $H = P^2/2m + V(Q)$  est l'Hamiltonien du système et  $P$  l'opérateur quantité de mouvement. Pour Schrödinger, le comportement classique sous-entendait que la valeur moyenne de l'opérateur

$$\bar{q}(t) = \langle \text{état cohérent} | Q(t) | \text{état cohérent} \rangle , \quad (5.12)$$

va satisfaire l'équation de mouvement classique

$$m\ddot{\bar{q}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial q} = 0 . \quad (5.13)$$

Schrödinger s'intéressait à l'oscillateur harmonique avec un potentiel  $V(q) = \frac{1}{2}m^2\omega^2q^2$  de constante  $k = m\omega^2$  et donc à l'Hamiltonien  $H = P^2/2m + m^2\omega^2Q^2/2$ . Les états paramétrés par le nombre complexe  $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$  sont notés  $|\alpha\rangle$  et définis de manière à retrouver la solution sinusoïdale connue

$$Q(t) = 2l_c|\alpha| \cos(\omega t - \varphi) . \quad (5.14)$$

où  $l_c = \sqrt{\hbar/m\omega}$  est la longueur caractéristique de l'oscillateur,  $m$  sa masse et  $\omega$  est sa pulsation.

Dans la représentation de Fock, les états cohérents de Schrödinger ont la forme suivante

$$|\alpha\rangle_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle , \quad (5.15)$$

donnant alors

$$\langle \alpha | \alpha \rangle_s = e^{-|\alpha|^2} , \quad (5.16)$$

où l'indice "s" fait référence à Schrödinger.

Les états cohérents standards "normalisés" ont été introduits par Klauder [105, 106], Glauber [107, 108, 109] et Sudarshan [110]. Ils sont obtenus à partir des états cohérents de Schrödinger en introduisant à ces derniers le facteur de normalisation Gaussien  $e^{-|\alpha|^2/2}$ . Ils s'écrivent alors sous la forme

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \quad (5.17)$$

avec

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 . \quad (5.18)$$

L'importance de ces états cohérents de Schrödinger-Klauder-Glauber, dit aussi "états cohérents canoniques" ou "états cohérents standards" est due à un bon nombre de propriétés. Les plus pertinentes parmi elles sont les suivantes [102] :

(i) L'état cohérent  $|\alpha\rangle$  minimise la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\langle\Delta Q\rangle_{\alpha}\langle\Delta P\rangle_{\alpha} = \frac{\hbar}{2} , \quad (5.19)$$

avec  $\langle\Delta Q\rangle_{\alpha} = \sqrt{\langle\alpha|Q^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|Q|\alpha\rangle^2}$ .

(ii) L'état cohérent  $|\alpha\rangle$  est un état propre de l'opérateur annihilation avec la valeur propre  $\alpha$  :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C} , \quad (5.20)$$

où  $a = \frac{m\omega Q + iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$ .

(iii) L'état cohérent  $|\alpha\rangle$  est obtenu à partir de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique  $|0\rangle$  avec une transformation unitaire du groupe de Weyl-Heisenberg  $D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a}$  dite opérateur de déplacement :

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a} |0\rangle . \quad (5.21)$$

(iv) Les états cohérents  $\{|\alpha\rangle\}$  constituent un ensemble complet de vecteurs dans l'espace de Hilbert des états de l'oscillateur harmonique

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d \operatorname{Re}(\alpha) d \operatorname{Im}(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| . \quad (5.22)$$

Ces quatre propriétés auxquelles nous pouvons ajouter

- (v) La probabilité d'être dans l'état  $|n\rangle$  ne dépend pas du temps et possède une distribution de Poisson.

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (5.23)$$

sont à la base des différentes généralisations de la notion canonique (standard) des états cohérents illustrées par l'ensemble  $\{|\alpha\rangle\}$ .

### 5.2.2 États cohérents non-linéaires

Les états cohérents standards n'étant pas en mesure de décrire l'évolution d'un oscillateur anharmonique, c'est les états cohérents dits non-linéaires qui prennent le relais dans ce cas. L'intérêt pour la construction des états cohérents généralisés pertinents aux potentiels non-linéaires a été exprimé dès le début des années 1970 [111, 112, 113]. Nieto et ses collaborateurs ont construit des états cohérents correspondants au potentiel de Pöschl-Teller à une dimension. Ils les ont défini comme étant des états minimisant la relation d'incertitude entre la coordonnée  $Q$  et la quantité de mouvement  $P$  [114]. Gazeau et Klauder ont proposé une généralisation aux systèmes à une dimension ayant un spectre discret et continu [115]. Les états cohérents correspondants aux potentiels trigonométrique et Pöschl-Teller modifié ont été dérivés dans la ref. [116] et ceux concernant le potentiel de Morse dans la ref. [117]. Man'ko *et al.* parallèlement à Matos Filho, ont introduit les états cohérents non-linéaires (*non-linear coherent states* (NCS)) comme les états propres de l'opérateur annihilation déformé [118, 119]. L'importance des NCS pour la description des états non-classiques du champ électromagnétique et le mouvement du centre de masse atomique a été mise en évidence dans plusieurs travaux [120, 121, 122].

### 5.2.3 Interprétation non-linéaire de l'approche $q$ -déformée

La plupart des études publiées sur la  $q$ -déformation de l'algèbre ne donnent pas d'idée claire sur l'importance physique des opérateurs de création et d'annihilation  $q$ -déformés. Pour cette raison, il est important de souligner que la relation liant la  $q$ -déformation à la non-linéarité constitue une des propriétés majeures qui font des  $q$ -oscillateurs des objets importants pour la physique [123].

Au début des années 1990 les  $q$ -oscillateurs ainsi que leurs généralisation les  $f$ -oscillateurs, ont été interprétés comme des oscillateurs non-linéaires [124]. Dans le cadre de l'étude des états cohérents non-linéaires, Man'ko a défini un oscillateur

déformé dont les opérateurs de création et d'annihilation sont définies par [118] :

$$\begin{aligned} A &= af(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1)a , \\ A^+ &= f(\hat{n})a^+ = a^+f(\hat{n} + 1) , \end{aligned} \quad (5.24)$$

avec  $\hat{n} = a^+a$ . Les commutateurs correspondants ont la forme

$$[\hat{n}, A] = -A , \quad (5.25)$$

$$[\hat{n}, A^+] = A^+ , \quad (5.26)$$

$$[A, A^+] = (\hat{n} + 1)f^2(\hat{n} + 1) - \hat{n}f^2(\hat{n}) , \quad (5.27)$$

et la fonction  $f(\hat{n})$  fixant la déformation se réduit à  $f(\hat{n}) = 1$  dans le cas harmonique.

Concernant notre algèbre  $q$ -déformée, et en suivant l'approche de Man'ko les eqs. (5.8) et (5.9) peuvent être écrites sous la forme

$$b = af(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1)a , \quad (5.28)$$

$$b^+ = f(\hat{n})a^+ = a^+f(\hat{n} + 1) , \quad (5.29)$$

avec

$$[\hat{n}, b] = -b , \quad (5.30)$$

$$[\hat{n}, b^+] = b^+ , \quad (5.31)$$

$$[b, b^+] = (\hat{n} + 1)f^2(\hat{n} + 1) - \hat{n}f^2(\hat{n}) . \quad (5.32)$$

Dans ce cas la fonction de déformation prend la forme

$$f(\hat{n}) = 1 + \frac{1}{4} \varepsilon (\hat{n} - 1) , \quad (5.33)$$

vérifiant la relation de commutation non-linéaire (5.32). Notons que  $f(\varepsilon \rightarrow 0) = 1$ . Nous retrouvons ainsi l'algèbre de Weyl-Heisenberg non-déformée pour un paramètre de déformation nul.

La déformation de la relation de commutation dans le sens de l'eq. (5.32) peut être interprétée à travers les eqs. (5.28) et (5.29), comme une modification du spectre associé à l'oscillateur. Cette interprétation spectrale de la déformation algébrique offre un modèle simple pour l'étude des systèmes à spectre non-uniforme. Dans la réf. [125], Récamier montre que le spectre de l'Hamiltonien obtenu à partir d'une telle déformation est similaire à celui des Hamiltoniens anharmoniques de Morse ou de Pöschl-Teller.



Les états cohérents que nous allons construire dans la section suivante à partir de l'algèbre déformée définie dans la sec. 5.1, auront donc un lien direct avec les états cohérents non-linéaires. Cette analogie permet de consolider l'interprétation physique que nous avons attribuer à notre  $q$ -déformation à travers l'interprétation spectrale des états cohérent non-linéaires. En effet, nous pouvons percevoir la petite déformation introduite dans la relation de commutation à l'eq. (5.7) comme un effet de décohérence agissant considérablement sur les propriétés du système et son spectre d'énergie.

## 5.3 États cohérents déformés

Dans cette section nous allons construire des états cohérents déformés du type DOCS (*displacement operator coherent states*) en partant de l'algèbre déformée introduite dans la sec. 5.1. Ensuite, nous discuterons l'effet d'une telle déformation sur la concurrence d'un système d'états cohérents déformés intriqués.

### 5.3.1 Construction des états cohérents déformés

Nous obtenons les états cohérents déformés  $|\alpha\rangle_d$  par l'application de l'opérateur déplacement déformé sur le vide bosonique

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_d &= D_d((\alpha)|0\rangle) , \\ &= \exp(\alpha b^+ - \bar{\alpha} b) |0\rangle . \end{aligned} \quad (5.34)$$

L'obtention des états cohérents à partir de l'opérateur déplacement a été généralisée aux oscillateurs déformés vers la fin des années 1990 avec l'inconvénient que l'opérateur déplacement déformé n'est pas unitaire [126]. Néanmoins, le problème majeur dans ce genre de construction consiste dans le fait que le commutateur entre les opérateurs bosoniques déformés  $b$  et  $b^+$  n'est pas un nombre. Par conséquent, l'opérateur déplacement obtenu en substituant les opérateurs standards  $a$  et  $a^+$  par leurs équivalents déformés ne peut pas être décomposé en produits. Pour contourner ce problème nous allons insérer le terme supplémentaire  $\exp(\bar{\alpha}b)$  dont l'action sur le vide bosonique  $|0\rangle$  est nulle<sup>i</sup>. Ce terme supplémentaire n'a donc aucune influence sur la définition de l'état  $|\alpha\rangle_d$  et l'eq. (5.34) s'écrit :

$$|\alpha\rangle_d = \exp(\alpha b^+ - \bar{\alpha} b) \exp(\bar{\alpha} b) |0\rangle . \quad (5.35)$$

---

i.  $b|0\rangle = b^n|0\rangle = 0 \Rightarrow e^{\bar{\alpha}b}|0\rangle = 1$ .

La formule BCH donnée par [127]

$$e^X e^Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] - \frac{1}{24}[Y, [X, [X, Y]]] + \dots\right), \quad (5.36)$$

nous permet de décomposer l'opérateur utilisé dans l'eq. (5.35) en produits d'opérateurs que nous appliquerons sur le vide  $|0\rangle$ . Cela permet de déduire les états cohérents déformés de l'opérateur déplacement. Ces derniers sont donnés par :

$$|\alpha\rangle_d = \left[1 + \varepsilon \left(\frac{|\alpha|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2}{6}\alpha a^+ + \frac{1}{8}\alpha^2 a^{+2}\right)\right] |\alpha\rangle, \quad (5.37)$$

où  $|\alpha\rangle$  est l'état cohérent non-déformé (standard). L'annexe (D) regroupe les détails du calcul permettant le passage de l'eq. (5.35) à l'eq. (5.37).

Une fois les états cohérents "déformés" (*deformed coherent states* (DCS)) obtenus, nous pouvons calculer le produit scalaire entre deux DCS :

$${}_d\langle\beta|\alpha\rangle_d = \left[1 + \varepsilon \left(\frac{|\alpha|^4 + |\beta|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{6}\bar{\beta}\alpha + \frac{1}{4}\bar{\beta}^2\alpha^2\right)\right] \langle\beta|\alpha\rangle, \quad (5.38)$$

où nous avons utilisé les formules

$$e^{\bar{\beta}a} a^+ = (a^+ + \bar{\beta})e^{\bar{\beta}a}, \quad (5.39)$$

$$a e^{\beta a^+} = e^{\beta a^+} (a + \beta). \quad (5.40)$$

À partir de l'eq. (5.38) nous pouvons déduire que

$${}_d\langle\alpha|\alpha\rangle_d = \langle\alpha|\alpha\rangle = 1. \quad (5.41)$$

Par conséquent, nos DCS sont normalisés sans constante de normalisation additionnelle, à l'encontre des états cohérents déformés connus dans la littérature [128, 129] .

D'autre part, le produit scalaire entre un état cohérent standard et un état cohérent déformé s'écrit

$$\langle\beta|\alpha\rangle_d = \left[1 + \varepsilon \left(\frac{|\alpha|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2}{6}\bar{\beta}\alpha + \frac{1}{8}\bar{\beta}^2\alpha^2\right)\right] \langle\beta|\alpha\rangle. \quad (5.42)$$

De même

$${}_d\langle\beta|\alpha\rangle = \left[1 + \varepsilon \left(\frac{|\beta|^4}{24} - \frac{|\beta|^2}{6}\bar{\beta}\alpha + \frac{1}{8}\bar{\beta}^2\alpha^2\right)\right] \langle\beta|\alpha\rangle. \quad (5.43)$$

Ces deux produits scalaires peuvent être utiles pour la composition d'états cohérents intriqués dans le cas où seulement certains systèmes intriqués sont représentés par un état cohérent déformé. En effet, dans une combinaison de plusieurs systèmes intriqués il est possible qu'un seul système subisse de la décohérence. Il sera alors le seul à avoir une symétrie déformée. Par exemple, dans le cas

$$|\alpha\rangle^{(1)} \otimes |\beta\rangle_d^{(2)} + |-\alpha\rangle^{(1)} \otimes |-\beta\rangle_d^{(2)}, \quad (5.44)$$

seul le système (2) est représenté par des états déformés.

### 5.3.2 Intrication des états cohérents déformés

L'apparition des états cohérents intriqués revient aux débuts des années 1960 selon la littérature. Cependant, le terme *entangled coherent states* (ECD) signifiant "états cohérents intriqués" fut introduit par Sanders en 1992 dans des travaux portant sur la construction des états en question en utilisant un interféromètre Mach-Zehnder non-linéaire [26]. Dans ce sens, des études ont montré qu'une non-linéarité est requise afin de générer des ECS. Il est donc impossible d'obtenir ces états à partir du seul biais de l'optique linéaire [130].

Peu après la création des ECS pour un champ à deux modes en propagation, un protocole d'électrodynamique quantique en cavité a été proposé pour l'intrication d'un état cohérent dans un mode avec le vide dans le second mode [131]. Les ECS se sont révélés comme des outils indispensables pour différents protocoles en information quantique suscitant un intérêt sans cesse croissant. Ainsi, la création des ECS a fait l'objet d'un bon nombre d'études depuis leurs apparition et reste au cœur de plusieurs travaux de recherche [132].

Après avoir construit les états cohérents déformés  $|\alpha\rangle_d$  dans la section précédente, nous allons les combiner de façon à composer des états cohérents intriqués déformés. Nous allons discuter l'effet de la déformation sur l'intrication des MECS.

#### Intrication bipartite des états cohérents déformés à deux modes

En analogie à l'état cohérent intriqué à deux modes

$$|\psi\rangle = \mu|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + \nu|\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle, \quad (5.45)$$

nous considérons l'état cohérent déformé intriqué suivant

$$|\psi\rangle_d = \mu|\alpha\rangle_d \otimes |\beta\rangle_d + \nu|\gamma\rangle_d \otimes |\delta\rangle_d, \quad (5.46)$$

où  $|\alpha\rangle_d, |\gamma\rangle_d$  (respectivement  $|\beta\rangle_d$  et  $|\delta\rangle_d$ ) sont les états cohérents déformés du système 1 (et du système 2 respectivement).  $\mu$  et  $\nu$  sont des coefficients complexes.

En suivant la ref. [133] nous définissons la base orthogonale  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  telle que :

$$|0\rangle = |\alpha\rangle_d, \quad |1\rangle = (|\gamma\rangle_d - p_1|\alpha\rangle_d)/N_1 \quad \text{pour le système 1,} \quad (5.47)$$

$$|0\rangle = |\beta\rangle_d, \quad |1\rangle = (|\delta\rangle_d - p_2|\beta\rangle_d)/N_2 \quad \text{pour le système 2,} \quad (5.48)$$

où

$$p_1 = {}_d\langle\alpha|\gamma\rangle, \quad N_1 = \sqrt{1 - |p_1|}, \quad (5.49)$$

$$p_2 = {}_d\langle\beta|\delta\rangle, \quad N_2 = \sqrt{1 - |p_2|}. \quad (5.50)$$

Une fois les matrices densités réduites  $\rho_{1(2)}$  (respectivement  $\rho_{2(1)}$ ) pour le système 1 (respectivement système 2) calculées [134], la concurrence  $\mathcal{C}$  prend la forme :

$$\mathcal{C} = \frac{2|\mu||\nu|\sqrt{1 - |p_1|^2}\sqrt{1 - |p_2|^2}}{|\mu|^2 + |\nu|^2 + \mu\nu^*p_1^*p_2 + \mu^*\nu p_1p_2^*}. \quad (5.51)$$

Pour des états dits *general bipartite nonorthogonal pure states* tel que l'état  $|\psi\rangle_d$  donné par l'eq. (5.46), les conditions nécessaires et suffisantes pour une intrication maximale ont été discutées par H. Fu *et al.* dans la ref. [135]. Pour le cas  $q$ -déformé  $|\psi\rangle_d$  les mêmes conditions restent valables pour l'obtention d'états cohérents (non-orthogonaux) d'intrication maximale. En effet, ces conditions sont :

$$\mu = \nu e^{i\theta}, \quad (\theta \in \mathbb{R}), \quad (5.52)$$

et

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 - 2\alpha^*\gamma = |\beta|^2 + |\delta|^2 - 2\beta^*\delta - 2i(\theta + \pi). \quad (5.53)$$

À partir des eqs. (5.51), (5.52) et (5.53) nous pouvons remarquer que les conditions requises pour une intrication maximale sont indépendantes du paramètre de déformation. Ainsi, si l'état cohérent intriqué  $|\psi\rangle$  a une intrication maximale alors son analogue déformé  $|\psi\rangle_d$  aura aussi une intrication maximale. Par conséquent, les états cohérents d'intrication maximale (*maximally entangled coherent states* (MECS)) sont robustes à la déformation de l'algèbre.

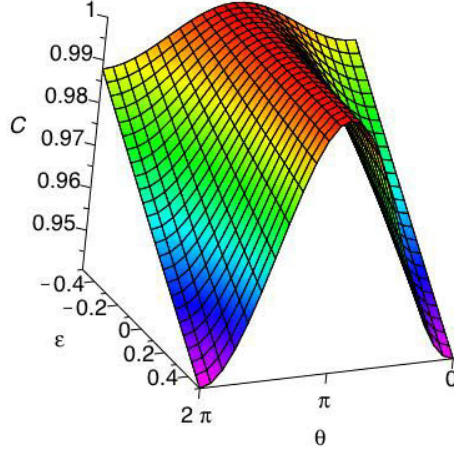
De plus, à partir des conditions que nous venons d'évoquer nous pouvons construire de nouveaux états cohérents déformés avec une intrication maximale. Par exemple, en plus des états

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d - |-\alpha\rangle_d \otimes |3\alpha\rangle_d, \quad (5.54)$$

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d - |i\alpha\rangle_d \otimes |i\alpha\rangle_d, \quad (5.55)$$

dont les analogue non-déformés sont connus pour avoir une intrication maximale avec  $\mathcal{C} = 1$  [135], nous pouvons avoir dans le cas déformé

$$|\varepsilon\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d - |-\alpha\rangle_d \otimes |\varepsilon\alpha\rangle_d, \quad (5.56)$$



**Figure 5.1.** La concurrence de l'état intriqué  $|\psi\rangle_d$  donnée par l'eq. (5.61) en fonction du paramètre de déformation  $\varepsilon$  et la phase  $\theta$  pour  $|\alpha| = 1$ .

et pour  $\alpha, z, z' \in \mathbb{R}$  nous avons

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha + z\varepsilon\rangle_d - |-\alpha + (z' - z)\varepsilon\rangle_d \otimes | - 3\alpha + z'\varepsilon\rangle_d, \quad (5.57)$$

ou encore pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $z, z' \in \mathbb{C}$

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha + z\varepsilon\rangle_d - |-i\alpha + (z' - z)\varepsilon\rangle_d \otimes |i\alpha + z'\varepsilon\rangle_d, \quad (5.58)$$

etc ...

Prenons maintenant  $\gamma = \alpha$ ,  $\delta = \beta$  et  $\mu = 1$  avec  $\nu = \mu e^{i\theta}$ . L'état déformé intriqué  $|\psi\rangle_d$  donné par l'eq. (5.46) devient

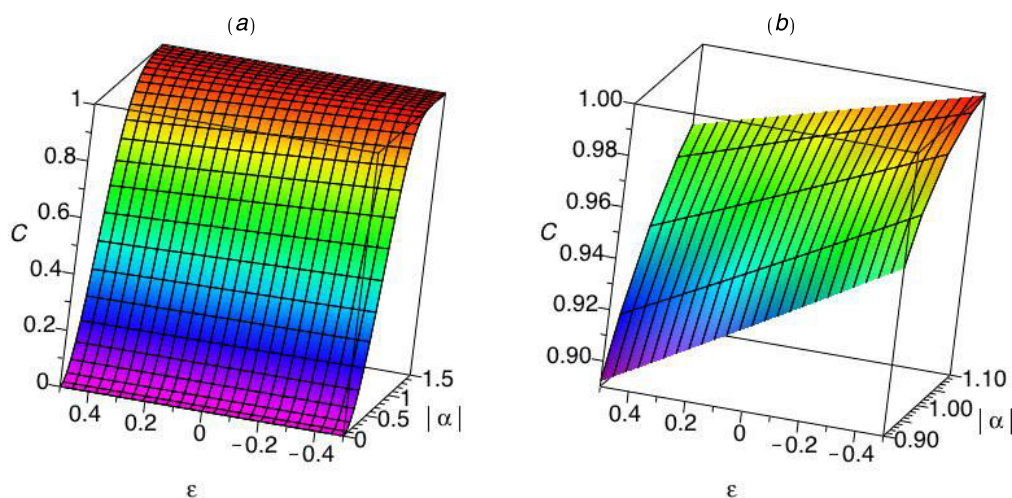
$$|\psi\rangle_d = |\alpha\rangle_d \otimes |\beta\rangle_d + e^{i\theta} |\beta\rangle_d \otimes |\alpha\rangle_d, \quad (5.59)$$

et la concurrence définie dans l'eq. (5.51) sera donnée par

$$\mathcal{C} = \frac{1 - |{}_d\langle\alpha|\beta\rangle_d|^2}{1 + \cos\theta |{}_d\langle\alpha|\beta\rangle_d|^2}. \quad (5.60)$$

Nous pouvons alors remarquer que l'état  $|\psi\rangle_d$  aurait un ebit d'intrication (*one ebit of entanglement*) si une des conditions suivantes est satisfaite :

- a) si l'état  $|\psi\rangle_d$  est antisymétrique, i.e.  $\theta = \pi$ , ainsi  $\mathcal{C} = 1$  indépendamment de  $\alpha$  et  $\beta$ .
- b) si  $|\alpha\rangle_d$  et  $|\beta\rangle_d$  sont orthogonaux, i.e.  ${}_d\langle\alpha|\beta\rangle_d \sim 0$  (pour  $\alpha, \beta > 1$ ), alors  $\mathcal{C} = 1$  indépendamment de la phase  $\theta$ .



**Figure 5.2.** (a) La concurrence de l'état symétrique  $|\psi\rangle_d(\theta = 0)$  en fonction de l'amplitude  $|\alpha|$  et le paramètre de déformation  $\varepsilon$ . (b) Zoom sur l'intervalle  $|\alpha| = [0.9, 1.1]$ .

Pour  $\beta = -\alpha$ , l'état  $|\psi\rangle_d$  devient

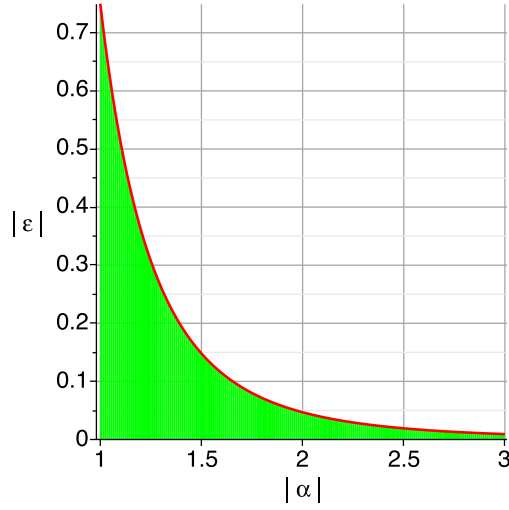
$$|\psi\rangle_d = |\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d + e^{i\theta} |-\alpha\rangle_d \otimes |\alpha\rangle_d, \quad (5.61)$$

et dans la limite WDA, la concurrence donnée par l'éq. (5.60) s'écrit

$$\mathcal{C} = \frac{1 - \left(1 + \frac{4}{3}|\alpha|^4\varepsilon\right) e^{-4|\alpha|^2}}{1 + \cos\theta \left(1 + \frac{4}{3}|\alpha|^4\varepsilon\right) e^{-4|\alpha|^2}}. \quad (5.62)$$

Le calcul numérique de la concurrence donnée ci-dessus en fonction de l'argument  $\alpha$ , la phase  $\theta$  et le paramètre de déformation  $\varepsilon$  confirme que les états MECS sont robustes à la déformation de l'algèbre. Ainsi, si un état cohérent a une intrication maximale elle reste maximale indépendamment de  $\varepsilon$ . En effet, la fig. 5.1 montre que pour  $\theta = \pi$  l'état antisymétrique  $|\psi\rangle_d$  a une concurrence  $\mathcal{C} = 1$  ( $\forall\varepsilon$ ). Cependant, quand  $\theta \neq \pi$  la concurrence décroît pour un paramètre de déformation plus grand. Par exemple, dans l'intervalle  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  la dépendance de  $\mathcal{C}$  à  $\varepsilon$  devient plus marquée pour une valeur plus grande de  $\theta$ . Pour  $\theta = 2\pi$  (ou  $\theta = 0$ ) nous pouvons constater sur la fig. 5.1 ( $|\alpha| = 1$ ) que lorsque  $\varepsilon$  varie dans l'intervalle  $[-0.4, 0.4]$ , la concurrence diminue de  $\Delta\mathcal{C} \simeq 4.7\%$ .

D'autre part, la fig. 5.2(a) montre que la concurrence croît pour un  $\alpha$  croissant jusqu'à atteindre une intrication maximale avec  $\mathcal{C} = 1$  à partir d'une valeur suffisamment grande de  $\alpha$  que nous noterons  $\alpha_{\text{thr}}(\varepsilon)$ . L'état  $|\psi\rangle_d$  préserve une intrication maximale indépendamment de  $\varepsilon$  quand  $|\alpha| > |\alpha_{\text{thr}}(\varepsilon)|$ . Avant cela, en



**Figure 5.3.** Valeurs possibles du paramètre de déformation  $\varepsilon$  (zone en couleur verte) pour un  $|\alpha|$  donné.

régime intermédiaire l'intrication des états cohérents déformés est significativement affectée par la déformation. Sur la fig. 5.2(b), pour  $|\alpha| = 1$  nous constatons une diminution de 4.7% de la concurrence donnée par l'eq. (5.62) quand le paramètre de déformation varie dans l'intervalle  $[-0.4, 0.4]$ . Dans le même intervalle, la concurrence diminue de 6.3% pour  $|\alpha| = 0.9$ , et de 3% pour  $|\alpha| = 1.1$ .

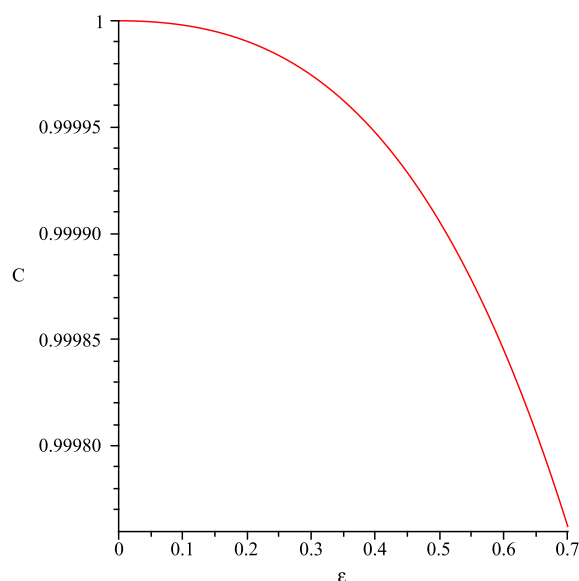
Nous pouvons remarquer sur la fig. 5.2(a) que la valeur de  $|\alpha_{\text{thr}}|$  dépend du paramètre de déformation. En effet, plus la déformation est importante et plus le seuil  $|\alpha_{\text{thr}}|$  requis pour une intrication maximale est grand.

La diminution de la concurrence due à la déformation peut être interprétée comme de la décohérence due à une perturbation du système quantique intriqué par l'environnement extérieur, comme nous l'avons mentionné auparavant. Ainsi,  $\varepsilon$  joue le rôle d'un paramètre de perturbation et de dissipation.

Notez que les valeurs du paramètre de déformation sont limitées par la contrainte  $\frac{4}{3}|\alpha^4\varepsilon| \ll 1$  que nous pouvons dériver à partir de l'eq. (5.62). Cette condition est nécessaire afin d'avoir une série perturbative convergente en  $\varepsilon$ .

### Intrication bipartite des états cohérents déformés à trois modes

Nous évoquons dans cette section des résultats préliminaires concernant l'étude de l'effet de la  $q$ -déformation sur l'intrication des états cohérents à trois modes. Ces derniers sont d'une grande utilité pour les processus de téléportation quan-



**Figure 5.4.** La concurrence de l'état  $q$ -déformé  $|\phi_d\rangle_{1(23)}^-$  en fonction du paramètre de déformation  $\varepsilon$  pour  $|\alpha| = 1$ .

tique par exemple. La déformation de l'algèbre peut être dans ce cas assimilée aux pertes subites par l'information transportée à travers un canal bruité [136].

Considérons l'état intriqué à trois modes

$$|\phi\rangle_{123} = \eta (|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2|\sigma\rangle_3 \pm |\gamma\rangle_1|\delta\rangle_2|\phi\rangle_3) , \quad (5.63)$$

où  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm P_1 P_2 P_3)}}$  avec

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle \alpha | \gamma \rangle , \\ P_2 &= \langle \beta | \delta \rangle , \\ P_3 &= \langle \sigma | \phi \rangle . \end{aligned} \quad (5.64)$$

La concurrence de l'état  $|\phi\rangle_{123}$  est donnée par [95] :

$$C_{123} = [C_{1(23)}C_{2(13)}C_{3(12)}]^{1/3} , \quad (5.65)$$

où la concurrence  $C_{1(23)}$  mesure l'intrication entre le système (1) et le système (23) composé des deux modes 2 et 3. Elle est donnée par

$$C_{1(23)} = \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\rho_1^2)]} . \quad (5.66)$$



Prenons l'état

$$|\phi\rangle_{123} = \eta(|\sqrt{2}\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_3 \pm |-\sqrt{2}\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3), \quad (5.67)$$

$$\text{avec } \eta = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-8|\alpha|^2})}}.$$

Pour le cas  $|\phi\rangle_{1(23)}$ , l'intrication du système (1) avec le système (23) est maximale [133]. Cet état a été utilisé comme canal quantique dans des processus de téléportation quantique [137]. Pour l'état  $q$ -déformé

$$|\phi_d\rangle_{123} = \eta(|\sqrt{2}\alpha\rangle_d|\alpha\rangle_d|\alpha\rangle_d \pm |-\sqrt{2}\alpha\rangle_d|-\alpha\rangle_d|-\alpha\rangle_d), \quad (5.68)$$

nous calculons numériquement la concurrence de l'état intriqué  $|\phi_d\rangle_{1(23)}$ . La fig. 5.4 montre une faible dépendance de l'intrication du système au paramètre de déformation. L'intrication de cet état semble alors être affectée par la déformation de l'algèbre malgré le fait que son intrication est maximale dans le cas non-déformé, même si la diminution de la concurrence n'est que de l'ordre de  $10^{-4}$ . Ces résultats préliminaires vont dans le sens des études faites dans le cadre de l'estimation de la probabilité de succès d'un processus de téléportation quantique. Au fait, une diminution de l'ordre de  $10^{-4}$  a été constatée sur la fidélité du système quantique utilisé dans un processus de téléportation quantique à travers un canal bruité [138].

D'autre part, la vérification ou non de la relation de monogamie [139] peut être un bon test pour l'investigation de l'effet de la déformation sur l'intrication des états cohérents à trois modes (en cours ...).

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une algèbre  $q$ -déformée pour modéliser la décohérence quantique. Dans l'approximation d'une faible déformation (WDA) nous avons construit des états cohérents déformés et nous avons évoqué la relation de ces derniers aux états cohérents non-linéaires. Cette analogie rend plus intuitive l'interprétation de la  $q$ -déformation comme une approche intéressante pour la description des systèmes anharmoniques. Nous avons étudié l'effet d'une telle déformation sur l'intrication des états cohérents. Il se révèle que cette déformation donne la possibilité d'obtenir de nouveaux états cohérents d'intrication maximale par rapport au cas non-déformé. D'autre part, la quantification de l'intrication par la concurrence permet de montrer que les états cohérents intriqués à deux modes ayant une intrication maximale sont robustes à la déformation de l'algèbre. De plus, mis à part le cas d'intrication maximale, la concurrence décroît en fonction du paramètre de déformation pour une phase  $\theta$  et un argument  $\alpha$  donnés. Par ailleurs, des résultats préliminaires permettent de constater que l'intrication bipartite pour

des états cohérents à trois modes est aussi affectée par la déformation, même dans le cas d'une intrication maximale. Ainsi, la  $q$ -déformation de l'algèbre peut être interprétée comme une modélisation de la décohérence agissant sur l'intrication du système et le paramètre de déformation  $\varepsilon$  peut être considéré comme un paramètre d'ordre pour la cohérence.

En perspectives, des études en cours ont pour objectifs de faire le lien entre les résultats de notre approche d'algèbre  $q$ -déformée et ceux de plusieurs études faites dans le cadre de la décohérence et la téléportation quantiques [140].

En fin, nous tenons à souligner que nous avons également abordées d'autres pistes dans le cadre de l'étude de l'intrication des états cohérents, telles que les effets de la déformation de l'algèbre ou la para-quantification sur les états connus par *intelligent and squeezed coherent states*. Les refs. [141, 142] jointes à l'annexe E regroupent les calculs réalisés dans ce sens.



# Conclusion générale

Nous avons étudiés dans la première partie de ce manuscrit les effets de cohérence en diffusion de la lumière par un nuage atomique, au-delà de la diffusion simple. Nous avons présenté des modèles théoriques pour le traitement de tels effets dans la diffusion double et multiple. Nous avons développé un formalisme analytique pour le traitement de la diffusion double et montré la domination de l'effet d'ombre en régime de diffusion multiple. En outre, nous avons mis en avant la persistance d'une surprenante cohérence de phase entre les dipôles couplés en régime diffusif. Dans une deuxième partie, nous avons étudié à travers l'approche de l'algèbre  $q$ -déformée l'effet de la déformation de la symétrie sur l'intrication des états cohérents. Nous avons montré que cette déformation pourrait avoir un impact non négligeable sur la concurrence des états cohérents bipartite intriqués.

Dans le chapitre 1 nous avons présenté deux méthodes théoriques qui offrent une description cohérente de la diffusion de la lumière par un nuage atomique : le modèle des dipôles couplés (CD) et l'approche de la série de diffusion multiple (MSS). Le modèle CD inclut les interactions entre les dipôles atomiques à l'origine des effets coopératifs auxquels nous nous intéressons. Il décrit la diffusion d'un champ incident de faible intensité par un nuage d'atome en désordre quelque soit le régime de diffusion. Cependant il s'avère limité numériquement. L'approche MSS offre une alternative simple et avérée en régime de diffusion faible (petite épaisseur optique). Elle permet de décrire l'interférence des champs diffusés par les ordres successifs de diffusion.

Dans le chapitre 2 nous avons utilisé le principe itératif de l'approche MSS pour développer un traitement analytique des premiers ordres de diffusion. La diffusion double s'avère suffisante pour une bonne description de la rétrodiffusion cohérente (CBS) pour un nuage de forme gaussienne et donne un résultat en accord avec une expérience d'atomes froids. Nous avons obtenu une formule analytique décrivant la diffusion cohérente dans la direction du champ incident pour un nuage dilué. Le champ diffusé au second ordre de diffusion donne lieu à un lobe de diffusion cohérent vers l'avant. Les formules analytiques de l'intensité rayonnée au premier

et second ordre de diffusion sont en bon accord avec les résultats de la résolution numérique de la MSS. Nous avons aussi pu observer une interférence destructive entre le premier et le second ordre de diffusion sur l'intensité diffusée par le nuage. Nous avons ainsi montré que MSS non seulement donne une bonne description de la faible diffusion mais aussi permet de mettre en avant l'importance de la contribution de chaque ordre de diffusion (notamment le second) à travers des effets d'interférence intéressants.

Nous avons présenté dans le chapitre 3 une expérience réalisée à Nice mesurant la force de pression de radiation (RPF) collective appliquée sur le centre de masse d'un nuage d'atomes froids, soumis à un champ laser résonant. Cette mesure vient comme suite à une série d'expériences similaires réalisées hors résonance atomique. Dans les expériences réalisés auparavant, la réduction de la RPF fut interprétée comme une signature des effets coopératifs dans le nuage atomique. La mesure à résonance devrait permettre de sonder les effets coopératifs en diffusion multiple où de tels effets cohérents sont sensés disparaître. En effet, les résultats montrent une réduction de la RPF. De plus cette réduction est bien décrite par le modèle CD. Par contre, il s'avère que le même résultat est prévu par les simulations Monte Carlo d'une marche au hasard de photons (RW). En fait, la réduction de la RPF est le résultat d'un effet d'ombre dû au régime diffusif. Elle ne peut donc pas constituer une signature des effets coopératifs, du moins dans les régimes de diffusion où l'effet d'ombre est déterminant. D'autre par nous avons remarqué que l'histogramme des photons diffusés obtenu à travers le modèle incohérent RW est quasi-identique au diagramme de l'intensité diffusée donnée par l'approche CD. Ceci n'empêche que certains effets cohérents survivent à la diffusion multiple. Notamment une surprenante cohérence de phase entre les dipôles induits.

Nous avons étudié dans le chapitre 4 l'évolution des phases d'une couche d'atomes (slab) en régime diffusif. Nous avons pu constaté qu'une certaine cohérence de phase subsiste malgré la diffusion multiple dans le nuage atomique. Nous avons quantifié cette cohérence par un paramètre d'ordre à la Kuramoto que nous avons comparé aux formules analytiques de la théorie du transfert radiatif (RTE). Un décrochement des courbes du paramètre d'ordre par rapport aux résultats analytiques indique une persistance de la cohérence en régime diffusif au delà des prédictions de la RTE. D'autre part, la distribution de probabilité de l'intensité des dipôles donnée par le modèle cohérent CD, montre vraisemblablement une déviation par rapport aux prévisions de la RTE pour de grandes épaisseurs optiques. Par conséquent, nous sommes enclin à croire qu'un effet de cohérence au delà de l'extinction triviale du champ incident survit à la diffusion multiple. Nous pensons qu'une sorte de synchronisation coopérative entre les dipôles pourrait agir à

l'encontre d'une décohérence totale dans le nuage. À ce stade, nous ne sommes pas encore en mesure de déterminer avec pertinence la nature et les raisons de cet effet. Nous espérons que les investigations en cours nous aideront à voir plus claire, notamment celles concernant le coefficient de transmission marquées par un décrochement systématique des courbes CD par rapport à la RTE.

Dans la deuxième partie du manuscrit nous avons étudié l'effet d'une déformation de l'algèbre de Weyl-Heisenberg sur l'intrication des états cohérents de l'oscillateur harmonique. Nous avons construit des états cohérents déformés et nous avons établi une analogie entre ces derniers et les états cohérents non-linéaires. Cette analogie nous a permis d'interpréter la  $q$ -déformation comme une signature d'une brisure de symétrie due à la décohérence du système à cause de son environnement. Nous avons calculer la concurrence pour les états cohérents déformés intriqués (EDCS). Il s'avère que les EDCS à deux modes ayant une intrication maximale sont robustes à la déformation de l'algèbre. En revanche, ceux avec une concurrence intermédiaire subissent une décohérence non négligeable pour un paramètre de déformation croissant. La  $q$ -déformation de l'algèbre pourrait ainsi être utilisée comme une modélisation mathématique de la décohérence. Le paramètre de déformation pourrait représenter un paramètre d'ordre de décohérence pour les états cohérents intriqués soumis à une perturbation extérieure. Nous avons évoqué la possibilité de l'élargissement de cette étude aux états cohérents à trois modes.

Les perspectives de ce travail sont à la fois théoriques et expérimentales. Expérimentalement, il sera intéressant de réfléchir à un protocole qui permettrait l'observation du lobe de diffusion cohérente vers l'avant sans la contribution triviale de la diffusion simple, dans des nuages optiquement dilués. Une autre expérience probablement difficile à réaliser consiste en la mesure des phases des dipôles dans le nuage atomique dans l'objectif d'observer la cohérence déconcertante aperçue théoriquement dans les régimes de diffusion multiple. Ceci pourrait constituer une signature des effets coopératifs dans les nuages atomiques soumis à une faible excitation. L'expérience en cours dans notre groupe à Nice pour l'observation de la sousradiane collective s'inscrit dans cette quête aux effets coopératifs. Du point de vu théorique, il sera intéressant d'élargir les calculs analytiques réalisés à travers l'approche MSS aux ordres de diffusion supérieurs d'une part et à la géométrie *slab* d'autre part. Suit aux résultats obtenus autour de la mesure de la RPF, l'enjeu principal sera de déterminer le régime dans lequel l'effet d'ombre ne domine pas le processus de diffusion. Un régime où les effets coopératifs ne devraient par être masqués par l'effet d'ombre dans le nuage. Cela se traduirait par trouver le jeu de paramètre adéquat avec lequel le modèle RW ne sera plus capable de décrire le processus et seul un modèle cohérent pourra donner un résultat en accord avec

les résultats expérimentaux. Il sera intéressant de faire le lien entre la limite de convergence de la série MSS et un tel régime. La détermination des causes et de la nature de la cohérence survivant au régime de diffusion multiple sera d'une grande utilité pour l'étude du duel entre la diffusion multiple et les effets coopératifs. Elle pourra être étendue pour l'étude de la duel entre la localisation d'Anderson et les effets coopératifs dans des nuages atomiques denses en régime de diffusion forte. Ceci permettra la compréhension de l'importance que pourraient avoir les effets coopératifs dans des phénomènes physiques importants tels que la supraconductivité à haute température critique. D'autre part, il est intéressant d'étudier l'intrication quantique entre les dipôles couplés via un champ de faible intensité, à l'image des états de Dicke intriqués. L'extension d'une telle étude dans le cadre de l'optique quantique au-delà du modèle d'atome à deux niveaux est aussi un sujet captivant. Dans ce sens il est envisageable de réaliser un mapping de l'approche algèbre  $q$ -déformée sur un tel système atomique. Cela pourrait avoir des applications intéressantes en transport quantique, notamment dans le cadre des mémoires atomiques. Parallèlement, le développement de l'approche  $q$ -déformation pour la modélisation de la décohérence dans les système quantique s'inscrit dans la suite d'une partie des travaux réalisés durant cette thèse. Cela aurait une utilité directe dans les protocoles de transport cohérent de l'information quantique.

# Annexes





# Annexe A

## Évolution temporelle d'un système de $N$ dipôles couplés

### A.1 Équation d'évolution temporelle en approche classique

Dans cette annexe nous montrons que la description quantique de l'émission collective d'un nuage de  $N$  atomes à deux niveaux soumis à une excitation faible présentée dans la section 1.1, est en bonne analogie avec la radiation d'un système de  $N$  oscillateurs harmoniques classiques [143].

Soit  $\mathbf{r}_j(t)$  la position de l'électron dans l'oscillateur  $j$  à deux états. L'équation de mouvement relative au déplacement de l'électron s'écrit

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_j(t)}{\partial t^2} + \omega_a^2 \mathbf{r}_j(t) = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j) , \quad (\text{A.1})$$

avec  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j)$  le champ électrique,  $e$  la charge de l'électron,  $m$  la masse de l'électron et  $\omega_a$  la fréquence de résonance de la transition atomique. Cette dernière caractérise l'oscillation de l'électron due à la force attractive coulombienne exercée par le noyau. La densité du courant électrique est donnée par

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = -e \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_j(t)}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) . \quad (\text{A.2})$$

En utilisant les équations de Maxwell microscopiques

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t} , \quad (\text{A.3})$$

nous obtenons ( $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ )

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

où  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$  sont respectivement la perméabilité et la permittivité du vide et  $c$  est la vitesse de lumière dans le vide. En utilisant  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$  et en supposant que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (la charge de l'électron étant compensée par celle du noyau) nous obtenons

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -e\mu_0 \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j(t)}{\partial t^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (\text{A.5})$$

Supposons que les électrons oscillent dans la même direction  $\hat{e}$  tel que  $\mathbf{r}_j(t) = r_j(t)\hat{e}$ . Nous pouvons chercher alors des solutions aux eqs. (A.1) et (A.5) sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{e} E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \hat{e} E_d(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}, \quad (\text{A.6})$$

$$r_j(t) = l_c \beta_j(t) e^{-i\omega t}, \quad (\text{A.7})$$

avec  $E_{sc}(\mathbf{r}_j, t)$  et  $\beta_j(t)$  des fonctions qui varient lentement sur une échelle de temps  $1/\omega_a$  et  $l_c = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_a}}$  est la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique. En substituant les eqs. (A.6) et (A.7) dans les eqs. (A.1) et (A.5) et en négligeant les dérivées d'ordre supérieur en  $t$  nous obtenons

$$-2i\omega l_c \frac{\partial \beta_j(t)}{\partial t} = (\omega^2 - \omega_a^2) l_c \beta_j(t) - \frac{e}{m} (E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} + E_{sc}(\mathbf{r}_j, t)), \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla^2 E_{sc} + k^2 E_{sc} = \omega^2 \mu_0 e l_c \sum_{j=0}^N \beta_j(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (\text{A.9})$$

avec  $k = \omega/c$ . L'eq. (A.9) a la forme d'une équation de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) E_{sc}(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}). \quad (\text{A.10})$$

En terme de la fonction de Green solution de l'équation

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{A.11})$$

la solution à l'eq. (A.10) est donnée par

$$E_{sc}(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (\text{A.12})$$

Afin de respecter le principe de causalité, on doit choisir la fonction de Green retardée

$$G^R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{A.13})$$

Ainsi,

$$E_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega\mu_0 e}{4\pi} \sum_{j=0}^N \beta_j(t) \int \delta(r - r_j) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (\text{A.14})$$

L'intégration sur  $\mathbf{r}'$  donne

$$E_{\text{sc}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2\mu_0 e}{4\pi} \sum_{j=0}^N \beta_j(t) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (\text{A.15})$$

En substituant cette solution dans l'eq. (A.8) et en introduisant le désaccord du laser  $\Delta = \omega - \omega_a$  et la pulsation de Rabi  $\Omega = l_c e E_0 / \hbar$ , nous obtenons

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial t} = -\frac{i\Omega}{2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \left(i\Delta - \frac{\Gamma_{cl}}{2}\right) \beta_j + i\frac{\Gamma_{cl}}{2} \sum_{m \neq j}^N \beta_m \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}, \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\Gamma_{cl} = \frac{\omega^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^3}, \quad (\text{A.17})$$

le taux d'émission " scalaire " des atomes en approche " classique ". Le premier terme de l'eq. (A.16) décrit le couplage des dipôles au laser incident. Le second représente l'évolution naturelle des dipôles en tenant compte de la durée de vie des niveaux excités et le dernier terme  $G_{jm} = \sum_{m \neq j}^N \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}$  décrivant les interactions dipôle-dipôle inclut tous les effets de cohérence auxquels nous allons nous intéresser. Notons que l'eq. (A.16) obtenue par l'approche classique est équivalente à l'eq. (1.16) dérivée dans le cadre de la mécanique quantique en prenant en considération les processus virtuels liés aux termes non-résonants de l'Hamiltonien atomes-rayonnement. Dans ce sens, l'expression du taux d'émission classique  $\Gamma_{cl}$  donnée par l'eq. (A.17), est similaire à celle obtenue quantiquement dans l'eq. (1.17) en remplaçant  $d$  par  $el_c/2$ . Ceci est équivalent à la relation donnée dans la ref. [50]

$$\Gamma = \Gamma_{cl} \frac{2m\omega_a d^2}{\hbar e^2}. \quad (\text{A.18})$$

Par conséquent, le comportement *many-body* de l'émission spontanée d'une collection de  $N$  atomes à deux niveaux peut être décrit par un modèle d'oscillateurs

harmoniques classiques. Cependant, cette analogie n'est possible que pour une faible excitation de l'ensemble atomique correspondant au régime de l'optique linéaire [144]. Dans la limite opposée l'émission collective peut être sensiblement différente dans l'approche classique par rapport au traitement quantique [145].

## A.2 Équation d'évolution temporelle en approche quantique

Nous allons présenter les détails de la dérivation de l'eq. (1.16) dans l'approche quantique considérée dans le chapitre 1. Dans le cadre de l'approximation de Markov nous supposons que  $\beta_j(t') \approx \beta_j(t)$  dans l'intégral de l'eq. (1.15). Cette approximation Markovienne est valable dans le cas d'une désexcitation lente du système devant le temps de vol du photon dans le nuage  $1/\Omega \gg L/c$  où  $L$  représente la taille du nuage. En effectuant l'intégrale sur  $t'$  et en remplaçant la somme sur  $\mathbf{k}$  par une intégrale  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V_{ph}}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}$  avec  $V_{ph}$  le volume de quantification du photon, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j(t) = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{iV_{ph}}{(2\pi)^3}\beta_j(t) \int d^3\mathbf{k} g_k^2 \left( \frac{1 - e^{-i\omega_k - \omega_a t}}{\omega_k - \omega_a} \right) \\ & + (N-1) \frac{iV_{ph}}{(2\pi)^3}\beta_j(t) \int d^3\mathbf{k} g_k^2 \left( \frac{1 - e^{-i(\omega_k + \omega_a)t}}{\omega_k + \omega_a} \right) \\ & + \frac{iV_{ph}}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \sum_{j'=1, j' \neq j}^N g_k^2 \left[ \left( \frac{1 - e^{-i\omega_k - \omega_a t}}{\omega_k - \omega_a} \right) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'})} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1 - e^{-i(\omega_k + \omega_a)t}}{\omega_k + \omega_a} \right) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'})} \right] \beta_{j'}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

L'intégration sur les directions de  $\mathbf{k}$  avec  $\omega_k = ck$  et  $k_0 = \omega_a/c$  donne

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j(t) = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{iV_{ph}}{2\pi^2 c}\beta_j(t) \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \left( \frac{1 - e^{-ic(k-k_0)t}}{k - k_0} \right) \\ & + (N-1) \frac{iV_{ph}}{2\pi^2 c}\beta_j(t) \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \left( \frac{1 - e^{-ic(k+k_0)t}}{k + k_0} \right) \\ & + \frac{iV_{ph}}{2\pi^2 c} \int_0^\infty dk k^2 \sum_{j'=1, j' \neq j}^N g_k^2 \left[ \left( \frac{1 - e^{-ic(k-k_0)t}}{k - k_0} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1 - e^{-ic(k+k_0)t}}{k + k_0} \right) \right] \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j'}|} \beta_{j'}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Nous remplaçons  $k_0$  par  $k_0 + i0$  et éliminons les facteurs exponentiels contenant  $t$ . Ces facteurs oscillent rapidement lors de l'intégration sur  $k$  et peuvent donc être négligés. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j(t) = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{iV_{ph}}{2\pi^2c}\beta_j(t) \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \left( \frac{1}{k - k_0 - i0} \right) \\ & + (N-1) \frac{iV_{ph}}{2\pi^2c}\beta_j(t) \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \left( \frac{1}{k + k_0 + i0} \right) \\ & + \frac{iV_{ph}}{2\pi^2c} \int_0^\infty dk k^2 \sum_{j'=1, j' \neq j}^N g_k^2 \left[ \left( \frac{1}{k - k_0 - i0} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{k + k_0 + i0} \right) \right] \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j'}|} \beta_{j'}(t) . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Les deux premiers termes de l'eq. (A.21) peuvent être ré-écrits en utilisant la relation

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x) , \quad (\text{A.22})$$

où  $\mathcal{P}$  est la valeur principale de Cauchy. En rappelant que  $g_k = \omega_a \frac{d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{\varepsilon_0 \omega V_{ph}}}$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j(t) = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{i\Gamma}{2\pi k_0}\beta_j(t) \int_0^\infty dk k \left( \mathcal{P} \frac{1}{k - k_0} + i\pi\delta(k - k_0) \right) \\ & + \frac{i\Gamma}{2\pi k_0} (N-1) \beta_j(t) \int_0^\infty dk k \left( \mathcal{P} \frac{1}{k + k_0} + i\pi\delta(k + k_0) \right) \\ & + \frac{i\Gamma}{2\pi k_0} \sum_{j' \neq j} \int_0^\infty dk \left[ \frac{1}{k - k_0 - i0} + \frac{1}{k + k_0 + i0} \right] \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|} \beta_{j'} , \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

avec  $\Gamma = \frac{k_0^3 d^2}{2\pi\varepsilon_0 \hbar}$  la largeur de raie atomique. L'intégrale sur  $k$  du dernier terme peut être transformée en une intégrale entre  $-\infty$  et  $\infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dk \left[ \frac{1}{k - k_0 - i0} + \frac{1}{k + k_0 + i0} \right] \sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|) \\ & = \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{k - k_0 - i0} \\ & = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty dk \left( \frac{e^{ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|}}{k - k_0 - i0} - \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|}}{k - k_0 - i0} \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

En fait, l'intégration sur  $k$  de l'eq. (A.24) est effectuée par la méthode des résidus. Pour le premier terme on choisit un contour dans le plan complexe supérieur et

pour le deuxième terme on choisit un contour dans le plan complexe inférieur. D'autre part, l'intégration du deuxième terme donne zero. l'eq. (A.23) devient

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j(t) = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{i\Gamma}{2\pi k_0}\beta_j(t) \int_0^\infty dk k \left[ \mathcal{P}\frac{1}{k-k_0} + \mathcal{P}\frac{N-1}{k+k_0} \right] \\ & - \frac{\Gamma}{2}\beta_j(t) + i\frac{\Gamma}{2} \sum_{j' \neq j}^N \beta_{j'} \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|} . \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Notons que le deuxième terme de l'eq. (A.25) correspond à un déplacement de fréquence d'une valeur identique pour tous les  $\beta_j$ . Ce shift constant sera négligé dans la suite. Nous obtenons alors un système fermé d'équations différentielles pour  $(\alpha, \beta_j)$

$$\dot{\alpha} = -\frac{i}{2}\Omega \sum_j \beta_j e^{i\Delta t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} , \quad (\text{A.26})$$

$$\dot{\beta}_j(t) = -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} - \frac{\Gamma}{2}\beta_j(t) + i\frac{\Gamma}{2} \sum_{j' \neq j}^N \beta_{j'} \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|} . \quad (\text{A.27})$$

À faible saturation (régime linéaire), le système est faiblement excité et nous supposons que  $\alpha \approx 1$ . Nous pouvons ainsi ce limiter à l'espace de Hilbert restreint à une seule excitation et négliger les niveaux contenant plusieurs excitations. En passant au référentiel tournant par le changement de variable  $\tilde{\beta} = e^{i\Delta t}\beta$ , l'eq. (A.27) s'écrit

$$\dot{\tilde{\beta}}_j(t) = -\frac{i}{2}\Omega e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \left( i\Delta - \frac{\Gamma}{2} \right) \tilde{\beta}_j(t) + i\frac{\Gamma}{2} \sum_{j' \neq j}^N \tilde{\beta}_{j'} \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|} . \quad (\text{A.28})$$

En omettant la notation tilde pour raison de simplification, nous obtenons finalement l'équation différentielle à laquelle ce réduit notre problème d'interaction lumière-atomes

$$\dot{\beta}_j(t) = -\frac{i}{2}\Omega e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \left( i\Delta - \frac{\Gamma}{2} \right) \beta_j(t) + i\frac{\Gamma}{2} \sum_{j' \neq j}^N \beta_{j'} \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)}{k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|} . \quad (\text{A.29})$$

Les coefficients  $\beta_j$  que nous appellerons " amplitudes des dipôles " seront à la base de la description physique du système.

# Annexe B

## Dérivation analytique de la section efficace de diffusion

En partant de l'expression de l'amplitude de diffusion donnée par l'eq. (1.34) nous allons dériver analytiquement la section efficace de diffusion définie par l'eq. (1.36)

$$\sigma_{sc}^c = \frac{1}{k_0^2} \int d\hat{\mathbf{k}} |f(\hat{\mathbf{k}})|^2, \quad (\text{B.1})$$

où  $\hat{\mathbf{k}}$  représente la direction du photon diffusé.

À partir de l'eq. (1.34) nous calculons

$$|f(\hat{\mathbf{k}})|^2 = \left(\frac{\Gamma}{\Omega}\right)^2 \sum_j \sum_m \beta_j \beta_m^* e^{-i\mathbf{k}_L \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)}, \quad (\text{B.2})$$

avec

$$\mathbf{k}(\theta, \phi) = k_0 \{\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)\}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m = r_{jm} \{\sin(\theta') \cos(\phi'), \sin(\theta') \sin(\phi'), \cos(\theta')\}, \quad (\text{B.4})$$

où  $\theta$  est l'angle entre l'axe du faisceau incident correspondant à l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  et la direction du photon diffusé définie par le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k_0(\hat{\mathbf{k}})$ .  $\phi$  est l'angle faisant la rotation autour de  $\hat{\mathbf{e}}_z$ , alors que  $\theta'$  et  $\phi'$  sont les coordonnées sphériques entre les positions de deux dipôles. En employant les formules données par les eqs. (B.3) et (B.4), le produit scalaire  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)$  peut être ré-écrit sous la forme

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) = k_0 r_{jm} \{\sin(\theta) \cos(\phi) \cdot \sin(\theta') \cos(\phi') + \sin(\theta) \sin(\phi) \cdot \sin(\theta') \sin(\phi') + \cos(\theta) \cdot \cos(\theta')\}. \quad (\text{B.5})$$



En utilisant

$$\cos(\phi - \phi') = \cos(\phi) \cos(\phi') - \sin(\phi) \sin(\phi') , \quad (\text{B.6})$$

nous pouvons simplifier l'expression donnée par l'eq. (B.5)

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) = k_0 r_{jm} \{ \sin(\theta) \cdot \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cdot \cos(\theta') \}. \quad (\text{B.7})$$

Nous nous intéressons à l'intégration de la partie exponentielle de l'eq. (B.2) sur les angle  $\theta$  et  $\phi$ .

## Intégration sur $\phi$

En utilisant la formule

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i \cos(\phi) \cdot x} , \quad (\text{B.8})$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0, nous pouvons écrire

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \times \exp \left( -i(k_0 r_{jm} \{ \sin(\theta) \cdot \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cdot \cos(\theta') \}) \right) \quad (\text{B.9})$$

$$= \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta J_0 \left[ k_0 r_{jm} \sin(\theta) \cdot \sin(\theta') \right] \times \exp \{ -i k_0 r_{jm} \cos(\theta') \cos(\theta) \} . \quad (\text{B.10})$$

Nous déduisons alors

$$|f(\theta)|^2 = \left( \frac{\Gamma}{\Omega} \right)^2 \sum_j \sum_m \beta_j \beta_m^* J_0 \left[ k_0 d_T \sin(\theta) \right] e^{-i k_0 (z_j - z_m) \cos(\theta)} , \quad (\text{B.11})$$

avec  $d_T = \sqrt{(x_j - x_m)^2 + (y_j - y_m)^2}$  la distance transverse entre les dipôles  $j$  et  $m$ . À ce stade et à partir de la forme de l'amplitude diffusion donnée par l'eq. (B.11) nous pouvons calculer le flux de l'intensité diffusée  $I_{sc}$  en utilisant

$$I_{sc}(\theta) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left( \frac{\hbar \Gamma}{d k_0 r} \right)^2 \sum_j \sum_m \beta_j \beta_m^* J_0 \left[ k_0 d_T \sin(\theta) \right] e^{-i k_0 (z_j - z_m) \cos(\theta)} , \quad (\text{B.12})$$

en calculant l'intégration sur  $\theta$  numériquement. Sinon, nous pouvons effectuer l'intégration sur  $\theta$  analytiquement aussi comme nous allons le montrer.

## Intégration sur $\theta$

En considérant  $x = \cos(\theta)$  nous pouvons faire le changement de variable suivant :

$$\int_0^\pi d\theta \sin(\theta) = \int_{-1}^1 dx . \quad (\text{B.13})$$

En injectant cela dans l'eq. (B.9) nous obtenons

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-1}^1 dx J_0 \left[ k_0 r_{jm} \sin(\theta') \cdot \sqrt{1-x^2} \right] \exp\{-ik_0 r_{jm} \cos(\theta') x\} , \\ = 2\pi \int_{-1}^1 dx J_0 \left[ k_0 r_{jm} \sin(\theta') \cdot \sqrt{1-x^2} \right] \cos\{-ik_0 r_{jm} \cos(\theta') x\} , \\ = 2\pi \int_{-1}^1 dx J_0 \left[ b \cdot \sqrt{1-x^2} \right] \cos\{cx\} , \\ = 4\pi \int_0^1 dx J_0 \left[ b \cdot \sqrt{1-x^2} \right] \cos\{cx\} , \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

où  $b = k_0 r_{jm} \cos(\theta')$  et  $c = k_0 r_{jm} \sin(\theta')$ . En utilisant l'intégrale [146]

$$\int_0^a dx J_0 \left[ b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right] \cos\{cx\} = \frac{\sin(a\sqrt{b^2 + c^2})}{\sqrt{b^2 + c^2}}; \quad b > 0 , \quad (\text{B.15})$$

nous obtenons à partir de l'eq. (B.14)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)} = 4\pi \int_0^1 dx J_0 \left[ b \cdot \sqrt{1-x^2} \right] \cos\{cx\} , \\ = 4\pi \frac{\sin(k_0 \cdot r_{jm})}{k_0 \cdot r_{jm}} . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta |f(\theta, \phi)|^2 = \left(\frac{\Gamma}{\Omega}\right)^2 \sum_j \sum_m \beta_j \beta_m^* e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)} , \\ = \left(\frac{\Gamma}{\Omega}\right)^2 \sum_j \sum_m \beta_j \beta_m^* 4\pi \frac{\sin(k_0 \cdot r_{jm})}{k_0 \cdot r_{jm}} . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Par conséquent, l'eq. (B.1) définissant la section efficace de diffusion du nuage atomique prend la forme

$$\sigma_{\text{sc}}^c = \frac{4\pi}{k_0^2} \frac{\Gamma^2}{\Omega^2} \sum_j \sum_m \beta_j \beta_m^* \frac{\sin(k_0 r_{jm})}{k_0 r_{jm}} . \quad (\text{B.18})$$



# Annexe C

## Dérivation de la force de pression de radiation intrinsèque (IRPF)

La conservation de la quantité de mouvement nous permet de directement lier le diagramme d'émission de l'échantillon atomique en champ lointain au transfert de la quantité de mouvement au centre de masse du nuage atomique. Dans cette annexe nous allons présenter la dérivation de la IRPF pour les deux modèles théoriques CD et RW reliant la force à l'intensité diffusée. Nous présenterons aussi la formule analytique qui fait le lien entre le déplacement du centre de masse du nuage atomique mesuré dans l'expérience et la IRPF. Afin de mettre en évidence le comportement collectif du nuage, nous allons normaliser cette force intrinsèque par la force agissant sur un atome dans un nuage d'atomes indépendants. Pour cela nous présenterons dans cette annexe un bref récapitulatif de la physique à un atome obtenue à travers le modèle CD.

### C.1 IRPF en expérience

Le déplacement du centre de masse du nuage  $\Delta x$  est mesuré par imagerie d'absorption [51] après un temps de vol (time of flight)  $t_{\text{tof}} \sim 12$  ms (voir sec. 3.3.1). Il peut être déduit à partir de la formule

$$\Delta x = \frac{1}{2}a_{\text{cm}}t_p^2 + v_{\text{cm}}t_{\text{tof}}, \quad (\text{C.1})$$

$$= a_{\text{cm}} \left[ \frac{1}{2}t_p^2 + t_p t_{\text{tof}} \right]. \quad (\text{C.2})$$

où  $v_{\text{cm}} = a_{\text{cm}}t_p$  est la vitesse du centre de masse du nuage et  $a_{\text{cm}}$  est l'accélération du centre de masse du nuage. Elle est acquise quand ce dernier est illuminé par le faisceau laser pousseur durant un temps de poussée (pushing time)  $t_p \sim 50\mu\text{s}$ .

Le lien entre le déplacement du centre de masse et la IRPF est fait à travers l'accélération du centre de masse et donné par

$$Nm_a a_{\text{cm}} = \sum_j F_j , \quad (\text{C.3})$$

où  $m_a$  est la masse atomique, et  $F_j$  est la force de pression de radiation ressenti par l'atome  $j$ . Nous définissons la force intrinsèque expérimentale appliquée sur chaque atome dans le nuage par

$$F^{\text{EX}} = \frac{\sum_j F_j}{N} , \quad (\text{C.4})$$

$$= m_a a_{\text{cm}} , \quad (\text{C.5})$$

$$= \frac{m_a \Delta x}{\frac{1}{2}t_p^2 + t_p t_{\text{tof}}} . \quad (\text{C.6})$$

De manière concrète, l'expérience mesure le déplacement du centre de masse du nuage  $\Delta x$ . La formule (C.6) permet de tracer les courbe de la force de pression de radiation intrinsèque appliquée sur chaque atome du nuage à partir des données expérimentales.

## C.2 IRPF en modèle CD

### Nuage atomique très dilué : atomes indépendants

Dans un nuage très dilué de  $N$  atome indépendants, les propriétés physiques de chaque atome ne sont pas affectées par la présence des autres atomes dans le nuage. L'aspect très dilué du nuage fait que les atomes ne se ressentent pas et n'interagissent pas. La physique décrivant chaque atome dans le nuage est exactement la même que celle décrivant un atome unique. Afin de normaliser la force de pression de radiation " intrinsèque " appliquée sur les atomes dans un nuage peut dilué, nous allons déduire la force agissant sur un atome indépendant.

Pour un seul atome de coordonnées  $r = (0, 0, 0)$ , le terme d'interaction collective de l'éq. (1.16) disparaît, ainsi que l'exponentiel dans le terme de pilotage. Nous obtenons alors dans le régime stationnaire

$$\left(i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2}\right)\beta_1 - i\frac{\Omega_0}{2} = 0 . \quad (\text{C.7})$$

Ainsi,

$$\beta_1 = \frac{i \frac{\Omega_0}{2}}{\left(i \Delta_0 - \frac{\Gamma}{2}\right)}, \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{\Omega_0}{\Gamma} \frac{1}{(2\delta + i)}. \quad (\text{C.9})$$

d'où

$$|\beta_1|^2 = \left(\frac{\Omega_0}{\Gamma}\right)^2 \frac{1}{(1 + 4\delta^2)}, \quad (\text{C.10})$$

avec  $\delta = \Delta_0/\Gamma$ . Sachant que l'eq. (1.27) donne

$$I_{\text{sc}}(\theta, \phi) = \frac{I_0}{k_0^2 r^2} |f(\theta, \phi)|^2, \quad (\text{C.11})$$

et à partir de l'eq. (1.34) nous déduisons l'intensité diffusée de manière *isotrope* par un atome unique

$$I_1 = \frac{1}{k_0^2 r^2} \frac{I_0}{1 + 4\delta^2}, \quad (\text{C.12})$$

avec  $I_0 = \varepsilon_0 c E_0^2 / 2$ . L'intensité diffusée par un nuage dilué de  $N$  atomes indépendants s'écrit alors

$$I_{\text{ind}} = N I_1. \quad (\text{C.13})$$

La force de pression de radiation agissant sur un seul atome dans un nuage de  $N$  atomes indépendants est alors donnée par

$$F_1 = \frac{4\pi r^2}{c} I_1 \quad (\text{C.14})$$

$$= \frac{4\pi}{k_0^2} \frac{1}{c} \frac{I_0}{(1 + 4\delta^2)} \quad (\text{C.15})$$

$$= \frac{\sigma_{\text{sc}} I_0}{c}, \quad (\text{C.16})$$

où  $\sigma_{\text{sc}} = \sigma_0 \frac{1}{1 + 4\delta^2} = \frac{4\pi}{k_0^2} \frac{1}{1 + 4\delta^2}$  est la section efficace de diffusion atomique. Et la force agissant sur le système dilué de  $N$  atomes indépendants est

$$F_{\text{ind}} = N F_1, \quad (\text{C.17})$$

$$= \frac{4\pi r^2}{c} N I_1, \quad (\text{C.18})$$

$$= N \frac{\sigma_{\text{sc}} I_0}{c}. \quad (\text{C.19})$$

Nous rappelons que dans notre procédé expérimental présenté dans la sec. 3.3.1, l'intensité du laser incident est ajustée de manière à garder le paramètre de saturation du nuage constant.

$$\begin{aligned} s(\delta) &= \frac{I_0/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta^2} , \\ &= \frac{2(\Omega/\Gamma)^2}{1 + 4\delta^2} . \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Notons que  $s(\delta) \propto |\beta_1|^2$ . Ainsi  $s(\delta)$  représente l'intensité effective vue par chaque atome indépendant provenant directement du laser incident. Par conséquent, fixer le paramètre de saturation à une valeur constante nous permet de garder la physique à UN atome, représenté par l'eq. (C.12), inchangée. Ceci afin d'être en mesure de normaliser la IRPF donnée par les trois approches par  $F_1$ .

## Nuage atomique dilué

Dans le modèle de dipôle couplés pour la diffusion collective, la composante de la force de pression de radiation intrinsèque ressentie par chaque atome, suivant  $\hat{e}$  est donnée par (voir sec. 3.3)

$$F^{\text{CD}} = \frac{r^2}{Nc} \int d\phi \sin(\theta) d\theta (1 - \cos \theta) I_{\text{sc}}(\theta, \phi) \quad (\text{C.21})$$

avec

$$I_{\text{sc}}(\theta, \phi) = \frac{I_0}{k_0^2 r^2} |f(\theta, \phi)|^2 , \quad (\text{C.22})$$

l'intensité diffusée. Nous normalisons la force intrinsèque agissant sur chaque atome par la force appliquée sur un atome dans le cas d'une collection atomes indépendants

$$\frac{F^{\text{CD}}}{F_1} = \left( \frac{r^2}{N\sigma_1 I_0} \right) \int d\phi \sin(\theta) d\theta [1 - \cos(\theta)] I_{\text{sc}}(\theta, \phi) , \quad (\text{C.23})$$

que nous écrivons sous la forme

$$\frac{F^{\text{CD}}}{F_1} = \frac{\sigma_{\text{CD}}}{N\sigma_1} \langle 1 - \cos(\theta) \rangle . \quad (\text{C.24})$$

où nous utilisons la formule de la section efficace de diffusion du nuage atomique en modèle CD

$$\sigma_{\text{CD}} = \frac{1}{k_0^2} \int d\Omega |f(\Omega)|^2 , \quad (\text{C.25})$$

et nous définissons la moyenne d'une fonction  $g(\Omega)$  par

$$\langle g(\Omega) \rangle = \frac{\int d\Omega g(\Omega) |f(\Omega)|^2}{\int d\Omega |f(\Omega)|^2}, \quad (\text{C.26})$$

où  $d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta$  est l'élément d'angle solide. Pour un grand désaccord, l'épaisseur optique  $b(\delta) = b_0/(1 + 4\delta^2)$  diminue. Le nuage tend alors vers le régime dilué et  $F^{\text{CD}} \rightarrow F_1$ .

### C.3 IRPF en modèle RW

La puissance diffusée totale dans le modèle incohérent de marche au hasard, est définie par

$$P_{\text{RW}} = \left( \frac{dN_{\text{sc}}}{dt} \right) \hbar\omega = \sigma_{\text{RW}} I_0, \quad (\text{C.27})$$

où  $\frac{dN_{\text{sc}}}{dt}$  est le nombre des photons diffusés par unité de temps et  $\sigma_{\text{RW}}$  est la section efficace de diffusion du nuage pour le modèle RW donnée par

$$\sigma_{\text{RW}} = 2\pi\sigma_R^2 \text{Ein}(b). \quad (\text{C.28})$$

La variation de la quantité de mouvement d'un photon diffusé est donnée par

$$\Delta p = \frac{dN_{\text{sc}}}{dt} \hbar k \langle 1 - \cos \theta \rangle t_p. \quad (\text{C.29})$$

Par conséquent, la force de pression de radiation intrinsèque (IRPF) appliquée sur chaque atome dans le nuage de  $N$  atomes identiques s'écrit

$$F^{\text{RW}} = \frac{1}{N} \frac{\Delta p}{t_p}, \quad (\text{C.30})$$

$$= \frac{\hbar k}{N} \frac{dN_{\text{sc}}}{dt} \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (\text{C.31})$$

$$= \frac{\hbar\omega}{Nc} \frac{dN_{\text{sc}}}{dt} \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (\text{C.32})$$

$$= \frac{\sigma_{\text{RW}} I_0}{Nc} \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (\text{C.33})$$

où  $\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{N_{\text{sc}}} \sum_j \cos \theta_j$ . La force de pression de radiation appliquée sur le centre de masse du nuage s'écrit alors

$$F_{\text{tot}}^{\text{RW}} = N F^{\text{RW}}. \quad (\text{C.34})$$



La normalisation de la IRPF par la force de pression de radiation ressenti par chaque atome d'un nuage d'atomes indépendants donne

$$\frac{F^{\text{RW}}}{F_1} = \frac{\sigma_{\text{RW}}}{N\sigma_1} \langle 1 - \cos(\theta) \rangle . \quad (\text{C.35})$$

Nous allons comparer cette IRPF donnée par la simulation Monte Carlo à la force obtenue par le modèle CD ainsi qu'à celle mesurée sur l'expérience afin de sonder une éventuelle présence d'effets coopératifs en régime de diffusion multiple.

# Annexe D

## Dérivation des états cohérents déformés

Dans cette annexe nous présentons les détails de la dérivation des états cohérents normalisés donnés par l'eq. (5.37), à travers l'application de l'opérateur déplacement déformé  $D_d(\alpha)$  sur le vide

$$|\alpha\rangle_d = D_d((\alpha)|0\rangle_d) , \quad (\text{D.1})$$

$$= \exp(\alpha b^+ - \bar{\alpha} b) |0\rangle_d , \quad (\text{D.2})$$

$$= \exp(\alpha b^+ - \bar{\alpha} b) \exp(\bar{\alpha} b) |0\rangle_d , \quad (\text{D.3})$$

où nous avons inséré le terme  $e^{\bar{\alpha}b}$  sachant que  $b|0\rangle_d = b^n|0\rangle_d = 0$  et par conséquent  $e^{\bar{\alpha}b}|0\rangle_d = 1$ .

Dans la suite de notre étude nous allons considérer l'état du vide déformé  $|0\rangle_d$  comme étant équivalent à son analogue non-déformé  $|0\rangle$  [147]. Cela peut être facilement vérifié en considérant  $|0\rangle_d = \kappa(|0\rangle + \varepsilon|\xi\rangle)$  où  $|\xi\rangle$  est un ket arbitraire et  $\kappa$  est une constante de normalisation. L'application de l'opérateur d'annihilation bosonique déformé sur le vide déformé donne

$$\begin{aligned} b|0\rangle_d &= \kappa \left( a + \frac{\varepsilon}{4} a^+ a^2 \right) (|0\rangle + \varepsilon|\xi\rangle) , \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Cela implique  $|0\rangle_d = \kappa(1 + \varepsilon)|0\rangle$ . En imposant la condition de normalisation  ${}_d\langle 0|0\rangle_d = 1$  nous arrivons à l'égalité

$$|0\rangle_d = |0\rangle . \quad (\text{D.5})$$

Afin de dériver les états cohérents déformés, nous aurons besoin de décomposer l'opérateur déplacement en produit d'opérateurs. Pour cela nous utilisons la

formule BCH :

$$\begin{aligned}
\ln(e^X e^Y) &= X + Y + \frac{1}{2!}[X, Y] \\
&+ \frac{1}{3!}[X, [X, Y]]/2 - \frac{1}{3!}[Y, [X, Y]]/2 - \frac{1}{4!}[Y, [X, [X, Y]]] \\
&+ \frac{1}{5!}(\ [[[X, Y], Y], ]Y], X) + \text{[[[[Y, X], X], X], Y]} \\
&+ \frac{1}{360}(\ [[[X, Y], X], ]Y], X) + \text{[[[[Y, X], Y], X], Y]} \\
&- \frac{1}{720}(\ [[[X, Y], Y], Y], Y) + \text{[[[[Y, X], X], X], X]} + \dots \quad (\text{D.6})
\end{aligned}$$

Dans l'eq. (D.3) nous définissons

$$X = \alpha b^+ - \bar{\alpha} b, \quad Y = \bar{\alpha} b, \quad (\text{D.7})$$

et nous calculons les opérateurs requit pour la formule BCH ci-dessus :

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= [\alpha b^+ - \bar{\alpha} b, \bar{\alpha} b], \\
&= (\alpha b^+ - \bar{\alpha} b) \cdot \bar{\alpha} b - \bar{\alpha} b \cdot (\alpha b^+ - \bar{\alpha} b), \\
&= -|\alpha|^2 [b, b^+], \\
&= -|\alpha|^2 (1 + \varepsilon b^+ b). \quad (\text{D.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X, [X, Y]] &= -|\alpha|^2 [\alpha b^+ - \bar{\alpha} b, 1 + \varepsilon b^+ b], \\
&= |\alpha|^2 \varepsilon (\alpha b^+ + \bar{\alpha} b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{D.9})
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  et nous avons négligé tous les termes au delà du premier ordre en  $\varepsilon$  dans le cadre de l'approximation WDA ( $\varepsilon \ll 1$ ).

$$\begin{aligned}
[Y, [X, Y]] &= [\bar{\alpha} b, -|\alpha|(1 + \varepsilon b^+ b)], \\
&= -|\alpha| \bar{\alpha} \varepsilon [b, b^+ b], \\
&= -|\alpha|^2 \bar{\alpha} \varepsilon b + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{D.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Y, [X, [X, Y]]] &= [\bar{\alpha} b, |\alpha|^2 \varepsilon (\alpha b^+ + \bar{\alpha} b)], \\
&= |\alpha|^4 \varepsilon [b, b^+], \\
&= |\alpha|^4 \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{D.11})
\end{aligned}$$

Remarquons que ce dernier commutateur représentant le sixième terme dans la formule BCH est un nombre (c-number). Par conséquent tous les commutateurs

suiuants serons nuls. En utilisant les relations de commutations calculées plus haut nous pouvons ré-écrire nos états cohérents déformés

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_d &= \exp(\alpha b^+ - \bar{\alpha} b) \exp(\bar{\alpha} b) |0\rangle, \\
&= \exp\left[\alpha b^+ - \bar{\alpha} b + \bar{\alpha} b - \frac{1}{2}|\alpha|^2(1 + \varepsilon b^+ b)\right], \\
&+ \frac{1}{12}|\alpha|^2\varepsilon(\alpha b^+ + \bar{\alpha} b) + \frac{1}{12}|\alpha|^2\bar{\alpha}\varepsilon b - \frac{1}{24}|\alpha|^4\varepsilon] |0\rangle, \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\varepsilon\frac{|\alpha|^4}{24}} \exp\left[\alpha b^+ + \varepsilon\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}b^+ b + \frac{|\alpha|^2}{12}\alpha b^+ + \frac{|\alpha|^2}{6}\bar{\alpha} b\right)\right] |0\rangle. \quad (\text{D.12})
\end{aligned}$$

Le développement en série du second exponentiel donne

$$\begin{aligned}
e^{-\varepsilon\frac{|\alpha|^4}{24}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\varepsilon\frac{|\alpha|^4}{24}\right)^n, \\
&= 1 - \varepsilon\frac{|\alpha|^4}{24} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{D.13})
\end{aligned}$$

Le développement du troisième exponentiel dans l'eq. (D.12) donne à son tour

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\alpha b^+ + \varepsilon\left(\frac{|\alpha|^2}{12}\alpha b^+ + \frac{|\alpha|^2}{6}\bar{\alpha} b - \frac{|\alpha|^2}{2}b^+ b\right)\right]^n}{n!} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A + \varepsilon B)^n}{n!} |0\rangle. \quad (\text{D.14})$$

avec  $A = \alpha b^+$  et  $B = \frac{|\alpha|^2}{2}b^+ b + \frac{|\alpha|^2}{12}\alpha b^+ + \frac{|\alpha|^2}{6}\bar{\alpha} b$ .

Nous rappelons que nous utilisons l'approximation de faible déformation (WDA) avec  $\varepsilon \ll 1$ . Cela nous permet de négliger les termes au-delà du premier ordre en  $\varepsilon$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_n \frac{1}{n!} (A + \varepsilon B)^n |0\rangle &= \sum_n \frac{1}{n!} (A^n + A^{n-1}\varepsilon B + A^{n-2}\varepsilon BA + \dots + \varepsilon BA^{n-1}) |0\rangle. \\
&= \left( \sum_n \frac{1}{n!} A^n + \sum_n \frac{1}{n!} A^{n-1}\varepsilon B + \sum_n \frac{1}{n!} A^{n-2}\varepsilon BA^1 \right. \\
&\quad \left. + \sum_n \frac{1}{n!} A^{n-3}\varepsilon BA^2 + \dots + \sum_n \frac{1}{n!} \varepsilon BA^{n-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) |0\rangle. \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} A^n |0\rangle + \sum_n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n!} A^{n-p-1} \varepsilon BA^p |0\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{D.15})
\end{aligned}$$

Le premier terme de l'eq. (D.15) ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned}
\sum_n \frac{A^n}{n!} |0\rangle &= \sum_n \frac{(\alpha b^+)^n}{n!} |0\rangle, \\
&= \sum_n \frac{\alpha^n (a^+ + \frac{\varepsilon}{4} a^{+2} a)^n}{n!} |0\rangle, \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} \alpha^n a^{+n} |0\rangle + \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n-1} a^{+n-p-1} \left( \frac{\varepsilon}{4} a^{+2} a \right) a^{+p} |0\rangle, \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} \alpha^n a^{+n} |0\rangle + \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n-1} p \frac{\varepsilon}{4} \alpha^n a^{+n} |0\rangle, \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} \alpha^n a^{+n} |0\rangle + \frac{\varepsilon}{4 \times 2} \alpha^2 a^{+2} \sum_n \frac{1}{(n-2)!} \alpha^{n-2} a^{+n-2} |0\rangle, \\
&= e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \left( 1 + \varepsilon \frac{1}{8} \alpha^2 a^{+2} \right) |\alpha\rangle, \tag{D.16}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations

$$a^n a^+ = n a^{(n-1)} + a^+ a^n, \tag{D.17}$$

$$a a^{+n} = n a^{+(n-1)} + a^{+n} a, \tag{D.18}$$

que nous déduisons à partir de la relation de commutation donnée par l'eq. (5.4) caractérisant l'algèbre de Weyl-Heisenberg. D'autre part, pour le second terme de l'eq. (D.15) nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}
&\sum_n \frac{1}{n!} A^{n-p-1} \varepsilon B A^p |0\rangle \\
&= \varepsilon \sum_n \frac{1}{n!} \left( \frac{|\alpha|^2}{12} (\alpha a^+)^n - p \frac{|\alpha|^2}{2} (\alpha a^+)^{n-1} + p \frac{|\alpha|^2}{6} (\alpha a^+)^{n-2} \right) |0\rangle. \tag{D.19}
\end{aligned}$$

Le second terme de l'eq. (D.15) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\sum_n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n!} A^{n-p-1} \varepsilon B A^p |0\rangle &= \varepsilon \sum_n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{|\alpha|^2}{12} (\alpha a^+)^n - p \frac{|\alpha|^2}{2} (\alpha a^+)^{n-1} + p \frac{|\alpha|^4}{6} (\alpha a^+)^{n-2} \right) |0\rangle, \\
&= \varepsilon \sum_n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{|\alpha|^2}{12} (\alpha a^+)^n - p \frac{|\alpha|^2}{2} (\alpha a^+)^{n-1} + p \frac{|\alpha|^4}{6} (\alpha a^+)^{n-2} \right) |0\rangle, \\
&= \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^2}{12} \sum_n n \frac{1}{n!} (\alpha a^+)^n - \frac{|\alpha|^2}{2} \sum_n \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n!} (\alpha a^+)^{n-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{|\alpha|^4}{6} \sum_n \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n!} (\alpha a^+)^{n-2} \right) |0\rangle, \\
&= \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^2}{12} \sum_n n \frac{1}{n(n-1)!} (\alpha a^+)^{n-1} \alpha a^+ \right. \\
&\quad \left. - \frac{|\alpha|^2}{2} \sum_n \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n(n-1)(n-2)!} (\alpha a^+)^{n-2} \alpha a^+ \right. \\
&\quad \left. + \frac{|\alpha|^4}{6} \sum_n \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n(n-1)(n-2)!} (\alpha a^+)^{n-2} \right) |0\rangle, \\
&= \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^2}{12} \alpha a^+ - \frac{|\alpha|^2}{4} \alpha a^+ + \frac{|\alpha|^4}{12} \right) e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha\rangle, \\
&= \varepsilon \left( -\frac{|\alpha|^2}{6} \alpha a^+ + \frac{|\alpha|^4}{12} \right) e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha\rangle. \tag{D.20}
\end{aligned}$$

En remplaçant des résultats donnés par les eqs. (D.13), (D.16) et (D.20) dans l'eq. (D.12) nous obtenons

$$|\alpha\rangle_d = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left( 1 - \varepsilon \frac{|\alpha|^4}{24} \right) \left( 1 + \varepsilon \frac{1}{8} \alpha^2 a^{+2} - \frac{|\alpha|^2}{6} \alpha a^+ + \frac{|\alpha|^4}{12} \right) e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha\rangle. \tag{D.21}$$

Ainsi, nos nouveaux états cohérents déformés prennent la forme finale

$$|\alpha\rangle_d = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2}{6} \alpha a^+ + \frac{1}{8} \alpha^2 a^{+2} \right) \right] |\alpha\rangle. \tag{D.22}$$

Estimons à présent le produit entre deux états cohérents déformés  ${}_d\langle\beta|\alpha\rangle_d$

$${}_d\langle\beta|\alpha\rangle_d = \langle\beta| \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\bar{\beta}|^4}{24} - \frac{|\bar{\beta}|^2}{6} \bar{\beta} a + \frac{1}{8} \bar{\beta}^2 a^2 \right) \right] \times \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2}{6} \alpha a^+ + \frac{1}{8} \alpha^2 a^{+2} \right) \right] |\alpha\rangle, \quad (\text{D.23})$$

$$= \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\bar{\beta}|^4 + |\alpha|^4}{24} - \bar{\beta} \alpha \frac{(|\bar{\beta}|^2 + |\alpha|^2)}{6} + \frac{1}{4} \bar{\beta}^2 \alpha^2 \right) \right] \langle\beta|\alpha\rangle, \quad (\text{D.24})$$

où nous avons employé les relations

$$e^{\bar{\beta} a} a^+ = (a^+ + \bar{\beta}) e^{\bar{\beta} a}, \quad (\text{D.25})$$

$$a e^{\beta a^+} = e^{\beta a^+} (a + \beta). \quad (\text{D.26})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} {}_d\langle\alpha|\alpha\rangle_d &= \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{2|\alpha|^4}{24} - \frac{2|\alpha|^4}{6} + \frac{|\alpha|^4}{4} \right) \right] \langle\alpha|\alpha\rangle, \\ &= \langle\alpha|\alpha\rangle, \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

# Annexe E

## Publications

- [140] **Bipartite entanglement of deformed coherent states**  
En préparation (2015).
  
- [59] **Coherent and incoherent multiple scattering**  
Phys. Rev. A, **89**, 043833 (2014).
  
- [64] **Coherence effect in scattering order expansion of light by atomic clouds**  
J. Opt. Soc. Am. A, **31**(5), 1031 (2014).
  
- [52] **Interplay between radiation pressure force and scattered light intensity in the cooperative scattering by cold atoms**  
J. Mod. Opt., **61**(1), (2014).
  
- [141] **Paraquantum entangled intelligent and squeezed states**  
8th International Conference On Progress in Theoretical Physics.  
AIP Conf. Proc. **1444**, 238 (2012).
  
- [142] **Q-deformed SU(1,1) and SU(2) squeezed and intelligent states and quantum entanglement.**  
8th International Conference On Progress in Theoretical Physics.  
AIP Conf. Proc. **1444**, 241 (2012).





# Bipartite Entanglement of Deformed Coherent States

(In preparation)

Mohamed Taha Rouabah<sup>1,2</sup> and Nouredine Mebarki<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique,  
Constantine University 1, Constantine 25017, Algeria*

<sup>2</sup>*Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS, Institut Non-Linéaire de Nice, UMR 7335, F-06560 Valbonne, France*

A  $q$ -deformed Weyl-Heisenberg (WH) algebra is used to define a deformed displacement operator giving rise to a naturally normalized nonlinear coherent states (NCS) type. Robust maximally entangled deformed coherent states (EDCS) are studied and the effect of such a deformation on the amount of the EDCS entanglement is discussed.

## I. INTRODUCTION

The notion of the deformation is very familiar to the physicist. In fact, the Lorentz transformations between two inertial frames are deformations of the Galilean ones with the Lorentz factor  $\beta$  considered as the deformation parameter. Thus special relativity is a deformation of Galilean relativity. Similarly, quantum mechanics is a deformation of classical mechanics with the Planck universal constant  $\hbar$  as the deformation parameter. In the limit  $\hbar \rightarrow 0$ , the results of quantum mechanics merge with the classical results.

Many studies devoted to the investigation of a deformed quantum oscillator algebra appeared as early as seventies, involving deformed creation and annihilation operators known as the  $q$ -oscillator algebra or the  $q$ -deformed algebra [1–7]. From a mathematical point of view, the  $q$ -oscillators ladder operators are shown to have a structure of a non-trivial Hopf algebra [8]. However, the physical relevance of  $q$ -deformed creation and annihilation operators is not always very transparent in the studies that have been published on the subject so far. Therefore it is important to emphasize that there are – from our point of view – at least, two main properties which make  $q$ -oscillators interesting objects for physics. The first is the fact that they constitute a fundamental tools of completely integrable theories [9]. The second, which is the point we are interested in, concerns the connection between the  $q$ -deformation and nonlinearity [10] in the context of coherent states (CS).

Since 1926, at the beginning of quantum mechanics, Schrödinger [11] was interested to the study of quantum states that mimic their classical analogs and defined CS as the states minimizing the Heisenberg uncertainty relation [12]. They were rediscovered by Kaluder at the beginning of 1960s [13, 14], then by Sudarshan [15] and Glauber in a series of papers [16–18] for the description of the coherence phenomenon in lasers. A decade later, Barut and Girardello have introduced coherent states defined as eigenstates of the annihilation operator [19], then Gilmore and Parelomov have constructed coherent states by the application of a displacement operator on the vacuum state [20].

In this paper, we use a weak deformation approximation (WDA) to construct a deformed CS displacement operator. In section 2, we present our mathematical formalism. In section 3, we discuss the bipartite concurrence of the maximally entangled deformed coherent states. Finally we draw our conclusions.

## II. MATHEMATICAL FORMALISM

In the Fock representation, Schrödinger-Klauder-Galauber CS called *standard coherent states* or also *canonical coherent states* are given by

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1)$$

where  $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$  is a complex parameter such that  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ . Quantum harmonic oscillator CS reproduce in averaging the same classical behavior. This unique specificity is due to numerous properties of CS:

- (i) The CS  $|\alpha\rangle$  minimizes the Heisenberg uncertainty relation:

$$\langle\Delta Q\rangle_\alpha \langle\Delta P\rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2}, \quad (2)$$

with  $\langle\Delta X\rangle_\alpha = \sqrt{\langle\alpha|X^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|X|\alpha\rangle^2}$ , ( $X = Q, P$ ) where  $Q$  and  $P$  are the oscillator position and momentum operators respectively.

- (ii)  $|\alpha\rangle$  is eigenstate of the annihilation operator  $a$  with eigenvalue  $\alpha$ :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

where  $a = \frac{m\omega Q + iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$  satisfies the commutation relation

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \quad (4)$$

- (iii) The CS  $|\alpha\rangle$  is obtained from the fundamental state  $|0\rangle$  with a unitary transformation of the Weyl-Heisenberg group  $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a}$  called displacement operator:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a} |0\rangle. \quad (5)$$

(iv) CS  $\{|\alpha\rangle\}$  form a complete set in Hilbert space, such that

$$I_d = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d \operatorname{Re}(\alpha) d \operatorname{Im}(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| . \quad (6)$$

where  $I_d$  stands for the identity operator.

(v) The probability to be in the number operator eigenstate  $|n\rangle$  is a time independent and has a Poisson distribution

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} . \quad (7)$$

Those properties was taken as a basis for all the generalization of the concept of standard coherent states.

The harmonic oscillator (HO) model was largely used in quantum mechanics. Indeed, its analytical solution is well known and any system around its equilibrium position can be modeled with a HO. However for more complicated systems, e.g., out of equilibrium systems, the harmonic description is no longer sufficient and additional terms need to be introduced in the position coordinates. An alternative consist on maintaining the same algebraic structure of the harmonic Hamiltonian and introducing a *deformed* creation and annihilation operators such that, when rewritten in term of those redefined operators, the new Hamiltonian reproduce the anharmonic behavior of the system. The challenge is then to find the adequate deformation function for the system.

In what follows we introduce a type of a deformation where the related creation and annihilation operators denoted by  $b$  and  $b^+$  respectively define a modified WH algebra satisfying the  $q$ -deformation commutation relation [5, 6]

$$[b, b^+]_q = bb^+ - q b^+b = 1 , \quad (8)$$

The deformation parameter  $q$  is taken to be real. In our approach, we use a WDA where  $q = 1 + \varepsilon$  with  $\varepsilon \ll 1$ , such that we recover the non-deformed case for  $\varepsilon \rightarrow 0$ . In this case one can show that up to  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ :

$$\begin{aligned} [b, b^+] &= bb^+ - b^+b , \\ &= 1 + \varepsilon b^\dagger b . \end{aligned} \quad (9)$$

As a representation of the deformed operators  $b$  and  $b^+$  satisfying the commutation relation (9) one has :

$$b^+ = a^+ + \frac{1}{4}\varepsilon a^{\dagger 2} a + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \quad (10)$$

$$b = a + \frac{1}{4}\varepsilon a^+ a^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \quad (11)$$

with the deformed number operator

$$\hat{n}_d = b^+b = \hat{n} + \varepsilon(\hat{n} + \frac{1}{2}\hat{n}^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \quad (12)$$

Here  $\hat{n} = a^+a$  is the non-deformed number operator.

It is worth to mention that the so called  $f$ -deformed oscillators (generalization of  $q$ -deformed oscillators), were interpreted as non-linear oscillators corresponding classically to a frequency dependence of the oscillation amplitude. In the framework of non-linear coherent states (NCS), Man'ko [10, 21, 22] defined an  $f$ -deformed oscillator with creation and annihilation operators

$$b = af(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1)a , \quad (13)$$

$$b^+ = f(\hat{n})a^+ = a^+f(\hat{n} + 1) , \quad (14)$$

satisfying :

$$\begin{aligned} [\hat{n}, b] &= -b, & [\hat{n}, b^+] &= b^+ , \\ [b, b^+] &= (\hat{n} + 1)f^2(\hat{n} + 1) - \hat{n}f^2(\hat{n}) . \end{aligned} \quad (15)$$

Comparing Eqs.(10),(11) and Eqs.(13),(14), one can show that in our case the  $f$ -deformation function has as expression

$$f(\hat{n}) = 1 + \frac{1}{4} \varepsilon (\hat{n} - 1) \quad (16)$$

(the non-deformed WH limit is recovered for  $f(\varepsilon \rightarrow 0) = 1$ ). Thus, the CS which we will construct starting from our deformed algebra could be interpreted as NCS. We remind the reader the major interest in NCS study for non-linear potentials systems where their non-classical state description of the electromagnetic field, quantum optics and the atomic center of mass displacement was successful [23–29].

In fact, the interest for the generalization of CS pertinent for the non-linear potentials starts since the beginning of 1970s [19, 20, 30]. Nieto and co-workers [31] constructed CS corresponding to the Pöschl-Teller one dimensional potential as the states minimizing the uncertainty relation between the canonical coordinates  $Q$  and  $P$ . Gazeau and Klauder [32] proposed a generalization to one dimensional systems with discrete and continue spectrum. The CS corresponding to the trigonometric and modified Pöschle-Teller potentials were derived in Ref.[33], those concerning the Morse potential in Ref.[34]. Man'ko *et al* [35] and Filho [36], have introduced NCS as eigenstates of the deformed annihilation operator whereas the displacement operator NCS were derived in Ref.[37, 38].

The derivation of CS from displacement operator was generalized to deformed oscillators at the end of 1990s. In the same sprite as in Ref.[39] we introduce a *deformed* displacement operator  $D_d((\alpha))$  such that :

$$D_d((\alpha)) = \exp(\alpha b^+ - \bar{\alpha} b) , \quad (17)$$

generating deformed coherent states (DCS)  $|\alpha\rangle_d$  defined as

$$|\alpha\rangle_d = D_d((\alpha)) |0\rangle_d . \quad (18)$$

where  $|0\rangle_d$  is the deformed vacuum state.

Using the fact that  $\exp(\bar{a}b)|0\rangle_d = |0\rangle_d$  and the BCH formula, straightforward simplifications lead to the following expression for Eq.(18)

$$|\alpha\rangle_d = \left[ 1 + \left( \frac{|\alpha|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2}{6}\alpha a^+ + \frac{1}{8}\alpha^2 a^{+2} \right) \right] |\alpha\rangle, \quad (19)$$

where  $|\alpha\rangle$  is the non-deformed CS (see appendix (A)).

Using the relations

$$e^{\bar{\beta}a} a^+ = (a^+ + \bar{\beta}) e^{\bar{\beta}a} \quad (20)$$

$$a e^{\beta a^+} = e^{\beta a^+} (a + \beta) \quad (21)$$

we derive the following overlaps :

$${}_d\langle\beta|\alpha\rangle_d = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^4 + |\beta|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{6}\bar{\beta}\alpha + \frac{1}{4}\bar{\beta}^2\alpha^2 \right) \right] \langle\beta|\alpha\rangle, \quad (22)$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle_d = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2}{6}\bar{\beta}\alpha + \frac{1}{8}\bar{\beta}^2\alpha^2 \right) \right] \langle\beta|\alpha\rangle, \quad (23)$$

$${}_d\langle\beta|\alpha\rangle = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\beta|^4}{24} - \frac{|\beta|^2}{6}\bar{\beta}\alpha + \frac{1}{8}\bar{\beta}^2\alpha^2 \right) \right] \langle\beta|\alpha\rangle, \quad (24)$$

where  $\langle\beta|\alpha\rangle = \exp[\frac{1}{2}(2\alpha\beta^* - |\alpha|^2 - |\beta|^2)]$ . Notice that from Eq.(22) one has

$${}_d\langle\alpha|\alpha\rangle_d = \langle\alpha|\alpha\rangle = 1. \quad (25)$$

that is our DCS are *naturally* normalized without any need to an additional normalization constant. This is a specific feature compared to many other constructions of DCS [25, 35, 37, 40].

It is very important to mention, as it is pointed out in Ref.[41], that the DCS constructed from deformed displacement operator and those constructed as annihilation operators eigenstates are not the same. Also, Heizenberg uncertainly relation depends on DCS except in the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

The analogy between our DCS and NCS reveals the physical interpretation of the algebra deformation introduced in the previous section. Indeed, we can understand the small correction introduced to the commutation relation (9), implying a symmetry deformation, as a decoherence effect due to the system environment and acting on its physical properties. In the next section, we will study the effect of such a deformation on some properties of a system of entangled coherent states.

### III. ENTANGLEMENT OF DEFORMED COHERENT STATES

The relevance of our DCS constructed from a deformed symmetry (deformed WH algebra) resides in their interpretation as NCS originated from a certain kind of

nonlinear potential describing an external environment action like. In other words, the weak  $q$ -deformation of the original symmetry can be explained as a small perturbation acting on the system (characterized by an order parameter  $\varepsilon$ ) and leading to a sort of a decoherence phenomena due to the environment (study of fidelity and related master equation are under investigation [42]) affecting the entanglement between physical states as it will be emphasized in what follows.

Moreover, entangled coherent states (ECS) continue to be of a large interest in quantum information processing [43] like quantum teleportation [44], superdense coding [45], quantum key distribution [46] and telecloning [47]. Recently, entangled nonorthogonal states have attracted much attention in quantum cryptography [48]. Bosonic [49–52],  $\text{su}(2)$  and  $\text{su}(1, 1)$  ECS [53] are typical examples of such states.

In what follows we study a bipartite entanglement of DCS quantified using the concurrence. Starting from a deformed state

$$|\psi\rangle_d = \mu|\alpha\rangle_d \otimes |\beta\rangle_d + \nu|\gamma\rangle_d \otimes |\delta\rangle_d \quad (26)$$

where  $|\alpha\rangle_d, |\gamma\rangle_d$  (resp.  $|\beta\rangle_d$  and  $|\delta\rangle_d$ ) are normalized deformed coherent states of system 1 (resp. system 2) with complex coefficients  $\mu$  and  $\nu$ . Following Ref. [54] we define a deformed orthogonal basis  $\{|0\rangle_d, |1\rangle_d\}$  as:

$$|0\rangle = |\alpha\rangle_d, \quad |1\rangle = (|\gamma\rangle_d - p_1|\alpha\rangle_d)/N_1 \quad \text{for system 1,} \quad (27)$$

$$|0\rangle = |\beta\rangle_d, \quad |1\rangle = (|\delta\rangle_d - p_2|\beta\rangle_d)/N_2 \quad \text{for system 2,} \quad (28)$$

where

$$p_1 = {}_d\langle\alpha|\gamma\rangle_d, \quad N_1 = \sqrt{1 - |p_1|^2}, \quad (29)$$

$$p_2 = {}_d\langle\beta|\delta\rangle_d, \quad N_2 = \sqrt{1 - |p_2|^2}. \quad (30)$$

After deriving the reduced density matrix  $\rho_{1(2)}$  (resp.  $\rho_{2(1)}$ ) for system 1 (resp. system 2) [55] the concurrence  $\mathcal{C}$  [56, 57] takes the well known form:

$$\mathcal{C} = \frac{2|\mu|\nu|\sqrt{1 - |p_1|^2}\sqrt{1 - |p_2|^2}}{|\mu|^2 + |\nu|^2 + \mu\nu^*p_1^*p_2 + \mu^*\nu p_1p_2^*}. \quad (31)$$

For general bipartite nonorthogonal pure states the necessary and sufficient conditions for a maximal entanglement have been found and discussed in details in Refs.[54, 58, 59]. For the case of our interest ( $q$ -deformation) one can show that the MES conditions hold too. That is, for the deformed state  $|\psi\rangle_d$  one has to have:

$$\mu = \nu e^{i\theta}, \quad (\theta \in \mathbb{R}), \quad (32)$$

and

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 - 2\alpha^*\gamma = |\beta|^2 + |\delta|^2 - 2\beta^*\delta - 2i(\theta + \pi). \quad (33)$$

From Eqs.(31),(32) and (33) it is very important to notice that:

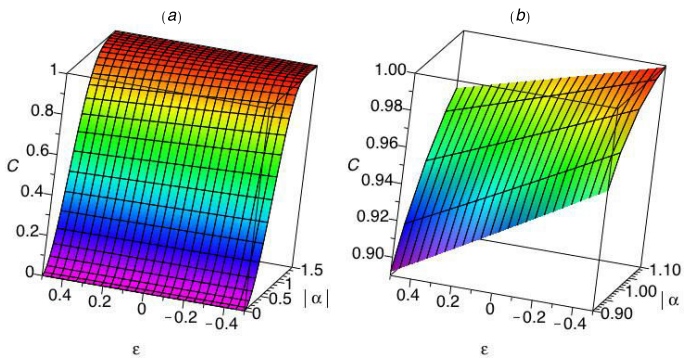


Figure 1: (a) concurrence of the symmetric state  $|\psi'\rangle_d(\theta = 0)$  as function of the coherence parameter  $\alpha$  for small negative and positive values of  $\varepsilon$ . (b) zoom on the interval  $|\alpha| = [0.9, 1.1]$ .

If non-deformed CS are maximally entangled states (MES) they remain MES in the deformed case. That is maximally entangled coherent states are robust against algebra deformation.

Furthermore, in comparison with the non-deformed case one can construct more maximally EDCS. As an example one has the states

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d - |-\alpha\rangle_d \otimes |3\alpha\rangle_d, \quad (34)$$

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d - |i\alpha\rangle_d \otimes |i\alpha\rangle_d, \quad (35)$$

$$|\varepsilon\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d - |-\alpha\rangle_d \otimes |\varepsilon\alpha\rangle_d, \quad (36)$$

and for  $\alpha, z, z' \in \mathbb{R}$ , one can find

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha + z\varepsilon\rangle_d - |-\alpha + (z' - z)\varepsilon\rangle_d \otimes |3\alpha + z'\varepsilon\rangle_d, \quad (37)$$

etc ...

#### IV. NUMERICAL STUDY

To understand the entanglement between two EDCS we consider states of the form

$$|\psi'\rangle_d = |\alpha\rangle_d \otimes |\beta\rangle_d + e^{i\theta} |\beta\rangle_d \otimes |\alpha\rangle_d, \quad (38)$$

for which the concurrence is given by

$$C = \frac{1 - |{}_d\langle\alpha|\beta\rangle_d|^2}{1 + \cos\theta |{}_d\langle\alpha|\beta\rangle_d|^2}. \quad (39)$$

Then, we remark that the state  $|\psi'\rangle_d$  satisfies one ebit of entanglement ( $C = 1$ ) if one of the following conditions is satisfied:

- a) the state  $|\psi'\rangle_d$  is an antisymmetric state, i.e.  $\theta = \pi$ , then  $C = 1$  independently from the parameters involved  $\alpha$  and  $\beta$ .

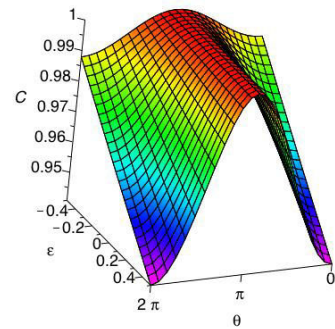


Figure 2: Concurrence of the state  $|\psi'\rangle_d$  given by Eq.(38) as function of the phase  $\theta$  for small negative and positive values of deformation parameter  $\varepsilon$  corresponding to an intermediate coherence parameter  $|\alpha| = 1$ .

- b)  $|\alpha\rangle_d$  and  $|\beta\rangle_d$  are almost orthogonal, i.e.  ${}_d\langle\alpha|\beta\rangle_d \sim 0$  (for large  $\alpha, \beta$ ), then  $C = 1$  independently from the phase  $\theta$ .

To be more explicit let us take the special case

$$|\alpha\rangle_d \otimes |-\alpha\rangle_d + e^{i\theta} |-\alpha\rangle_d \otimes |\alpha\rangle_d. \quad (40)$$

In the WDA limit Eq.(39) becomes

$$C = \frac{1 - \left(1 + \frac{4}{3}|\alpha|^4\varepsilon\right) e^{-4|\alpha|^2}}{1 + \cos\theta \left(1 + \frac{4}{3}|\alpha|^4\varepsilon\right) e^{-4|\alpha|^2}}. \quad (41)$$

Numerical calculations reveal that:

1. Maximally EDCS ( $C = 1$ ) are robust against algebra deformation, confirming the analytical calculations.

As a result, if non-deformed ECS ( $\varepsilon = 0$ ) has one ebit of entanglement, for antisymmetric states i.e.  $\theta = \pi$  ( $\forall \alpha$ ), as well as for  $\alpha \gg 1$  ( $\forall \theta$ ), it remains maximally entangled independently from  $\varepsilon$  (see Fig.1 and Fig.2).

2. There exists an intermediate regime ( $|\alpha| \sim 1$ ) where  $C$  increases with the coherence parameter  $|\alpha|$  and is sensitive to the symmetry deformation parameter  $\varepsilon$ .

In fact, Fig.1a shows that the concurrence increases until a sufficiently large  $\alpha$  (depending on the value of  $\varepsilon$ ), approaching a maximally entanglement with  $C = 1$ . Notice that for a given value of  $|\alpha|$  and before the concurrence saturation, entanglement between deformed coherent states is very sensitive to the deformation. Indeed, e.g. for  $|\alpha| = 1$ , we notice 4.7% decrease of the concurrence given by Eq.(41) and 6.3% decrease for  $|\alpha| = 0.9$ , if  $\varepsilon$  increases in the interval  $[-0.4, 0.4]$  (see Fig.1b).

3. As a function of the phase parameter  $\theta$  and the deformation parameter  $\varepsilon$ , the concurrence which has a maximum ( $C = 1$ ) at  $\theta = \pi$  for all  $\varepsilon$  decreases faster for larger values of  $\varepsilon$  for a given  $\theta \neq \pi$ .

From Fig.1 plotted for the case  $\theta = 0$  we notice that if  $\varepsilon$  lies in the interval  $[-0.4, 0.4]$ , the concurrence significantly decreases by an amount  $\Delta\mathcal{C} \simeq 6.3\%$  for  $|\alpha| = 0.9$ ,  $\Delta\mathcal{C} \simeq 4.7\%$  for  $|\alpha| = 1$  and  $\Delta\mathcal{C} \simeq 3\%$  for  $|\alpha| = 1.1$ . Similarly in Fig.2 we observe a reduction of  $\Delta\mathcal{C} \simeq 4.7\%$  if  $\varepsilon$  varies in the interval  $[-0.4, 0.4]$  at  $\theta = 2\pi$ .

The decrease of the concurrence as a function of the deformation parameter can be interpreted as an effect of the environment (decoherence) since  $\varepsilon$  plays the role of a perturbation and dissipation parameter as it is pointed out in Sec.III.

It is worth to mention that in order to have a convergent perturbation series with respect to  $\varepsilon$  and reliable conclusions one has from Eq.(39) the constraint  $\frac{4}{3}|\alpha^4\varepsilon| \ll 1$ . Fig.3 displays the allowed regime for the coherence and perturbation parameters  $\alpha$  and  $\varepsilon$  respectively.

## V. CONCLUSION

Through out this paper we have constructed a deformed coherent states in the weak deformation approximation and shown their relationship to the nonlinear harmonic oscillator analog. We have studied the effect of a such deformation on the entanglement. It turns out that in comparison with non-deformed case, the number of maximally bipartite deformed coherent states is larger (new MES). In this paper we have quantified the entanglement using the concurrence  $\mathcal{C}$  showing that the maximally EDCS are robust against the deformation. More over, the concurrence is a decreasing function of a given value of the phase and coherence parameters. This can be explained by the fact that  $\varepsilon$  can plays the role of the coherence order parameter. Numerical results reveal an important effect of the deformation on the entanglement. Further more, preliminary results show that with multipartite EDCS monogamy inequality [60] may be satisfied (under investigation [42]).

## VI. ACKNOWLEDGMENT

We are very grateful to the Algerian ministry of education and research for the financial support. M.T.R. is partially supported by an Averroes exchange program.

### Appendix A: Derivation of Eq.(19) for DCS

We define a *normalized* deformed coherent states by the application of the deformed displacement operator  $D_d(\alpha)$  upon the vacuum state

$$|\alpha\rangle_d = D_d(\alpha)|0\rangle_d \quad (\text{A1})$$

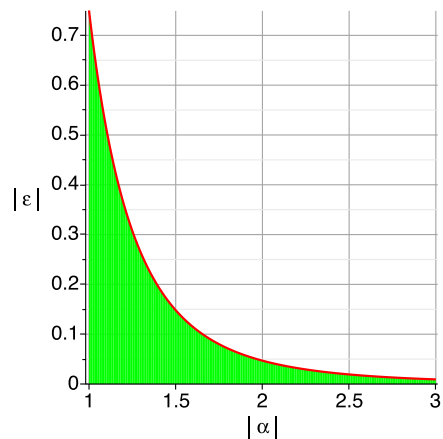


Figure 3: Possible values (green area) of the deformation and coherence parameter  $\varepsilon$  and  $\alpha$  respectively.

we then introduce an additional term  $\exp(\bar{\alpha}b)$  as it is specified in Sec.II Using the fact that  $e^{\bar{\alpha}b}|0\rangle_d = |0\rangle$ . Eq.(A1) can be rewritten as

$$|\alpha\rangle_d = \exp(\alpha b^+ - \bar{\alpha}b) \exp(\bar{\alpha}b) |0\rangle_d \quad (\text{A2})$$

We point out that the deformed and non-deformed vacuum states  $|0\rangle_d$  and  $|0\rangle$  are equivalent (see Ref.[61]). This can be checked easily in our case. Let us consider the state  $|0\rangle_d = \kappa(|0\rangle + \varepsilon|\xi\rangle)$  where  $|\xi\rangle$  is an arbitrary ket and  $\kappa$  is a normalization constant. Applying the deformed bosonic annihilation operator on the deformed bosonic vacuum states gives

$$b|0\rangle_d = \kappa \left( a + \frac{\varepsilon}{4} a^+ a^2 \right) (|0\rangle + \varepsilon|\xi\rangle) , \\ = 0 . \quad (\text{A3})$$

This leads to  $|0\rangle_d = \kappa(1 + \varepsilon)|0\rangle$ . Imposing the normalization condition  ${}_d\langle 0|0\rangle_d = 1$ , we deduce that

$$|0\rangle_d = |0\rangle \quad (\text{A4})$$

To derive the expression of the deformed displacement operator coherent state given by Eq.(19), we need to use the BCH formula

$$\log(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2!}[X, Y] + \frac{1}{3!}[X, [X, Y]]/2 \\ - \frac{1}{3!}[Y, [X, Y]]/2 - \frac{1}{4!}[Y, [X, [X, Y]]] \\ + \frac{1}{5!}(\[[[[X, Y], Y], ]Y], X + \[[[[Y, X], X], X], Y]) \\ + \frac{1}{360}(\[[[[X, Y], X], ]Y], X + \[[[[Y, X], Y], X], Y]) \\ - \frac{1}{720}(\[[[[X, Y], Y], Y], Y + \[[[[Y, X], X], X], X]) \\ + \dots \quad (\text{A5})$$

where

$$X = \alpha b^+ - \bar{\alpha}b , \quad Y = \bar{\alpha}b . \quad (\text{A6})$$

Straightforward but tedious calculations, give

$$[X, Y] = -|\alpha|^2(1 + \varepsilon b^+ b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A7})$$

$$[X, [X, Y]] = |\alpha|^2 \varepsilon (\alpha b^+ + \bar{\alpha} b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A8})$$

$$[Y, [X, Y]] = -|\alpha|^2 \bar{\alpha} \varepsilon b + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A9})$$

$$[Y, [X, [X, Y]]] = |\alpha|^4 \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A10})$$

where we used the identity  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  and neglected all terms of second and higher order in  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ).

Notice that the last commutator above corresponding to the 6<sup>th</sup> term in BCH formula is a “c-number”, that is, all next commutators vanish.

Using the commutation relations above, the DCS of Eq.(A2) becomes

$$|\alpha\rangle_d = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\varepsilon \frac{|\alpha|^4}{24}} \times \exp \left[ \alpha b^+ + \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^2}{12} \alpha b^+ + \frac{|\alpha|^2}{6} \bar{\alpha} b - \frac{|\alpha|^2}{2} b^+ b \right) \right] |0\rangle. \quad (\text{A11})$$

Using a Taylor series expansion of the third exponential in Eq.(A11) and the relations

$$a^n a^+ = n a^{(n-1)} + a^+ a^n \quad (\text{A12a})$$

$$a a^{+n} = n a^{+(n-1)} + a^{+n} a \quad (\text{A12b})$$

as well as

$$b^+ = a^+ + \frac{1}{4} \varepsilon a^{\dagger 2} a + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A13})$$

$$b = a + \frac{1}{4} \varepsilon a^+ a^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{A14})$$

direct simplifications lead to

$$|\alpha\rangle_d = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\varepsilon \frac{|\alpha|^4}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[A + \varepsilon B]^n}{n!} |0\rangle \quad (\text{A15})$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} A^n |0\rangle \quad (\text{A16})$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} \sum_n \frac{1}{n!} A^{n-p-1} \varepsilon B A^p |0\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

where  $A = \alpha b^+$  and  $B = \frac{|\alpha|^2}{2} b^+ b + \frac{|\alpha|^2}{12} \alpha b^+ + \frac{|\alpha|^2}{6} \bar{\alpha} b$ . Now it is easy to see that

$$\sum_n \frac{A^n}{n!} |0\rangle_d = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \left( 1 + \varepsilon \frac{1}{8} \alpha^2 a^{+2} \right) |\alpha\rangle \quad (\text{A17})$$

and

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_n \frac{1}{n!} A^{n-p-1} \varepsilon B A^p = \varepsilon \left( -\frac{|\alpha|^2}{6} \alpha a^+ + \frac{|\alpha|^4}{12} \right) e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha\rangle \quad (\text{A18})$$

Combining

$$e^{-\varepsilon \frac{|\alpha|^4}{24}} = 1 - \varepsilon \frac{|\alpha|^4}{24} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A19})$$

with results (A17) and (A18), our new CS take the form

$$|\alpha\rangle_d = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\alpha|^4}{24} - \frac{|\alpha|^2}{6} \alpha a^+ + \frac{1}{8} \alpha^2 a^{+2} \right) \right] |\alpha\rangle. \quad (\text{A20})$$

Using the relations

$$e^{\bar{\beta} a} a^+ = (a^+ + \bar{\beta}) e^{\bar{\beta} a} \quad (\text{A21})$$

$$a e^{\beta a^+} = e^{\beta a^+} (a + \beta) \quad (\text{A22})$$

the overlaps  ${}_d \langle \beta | \alpha \rangle_d$  writes

$${}_d \langle \beta | \alpha \rangle_d = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{|\bar{\beta}|^4 + |\alpha|^4}{24} - \bar{\beta} \alpha \left( \frac{|\bar{\beta}|^2 + |\alpha|^2}{6} + \frac{1}{4} \bar{\beta}^2 \alpha^2 \right) \right) \right] \langle \beta | \alpha \rangle \quad (\text{A23})$$

leading to

$${}_d \langle \alpha | \alpha \rangle_d = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{2|\alpha|^4}{24} - \frac{2|\alpha|^4}{6} + \frac{|\alpha|^4}{4} \right) \right] \langle \alpha | \alpha \rangle$$

$$= \langle \alpha | \alpha \rangle$$

$$= 1. \quad (\text{A24})$$

- 
- [1] M. Arik and D. D. Coon. Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states. *Journal of Mathematical Physics*, 17(4):524–527, 1976. [I](#)
- [2] P.P. Kulish and N.Yu. Reshetikhin. Quantum linear problem for the sine-gordon equation and higher representations. *Journal of Soviet Mathematics*, 23(4):2435–2441, 1983.
- [3] Michio Jimbo. Aq-difference analogue of u(g) and the yang-baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*,

- 10(1):63–69, 1985.
- [4] V. G. Drinfel'd. Quantum groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Berkeley, California USA*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [5] L C Biedenharn. The quantum group su q (2) and a q-analogue of the boson operators. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(18):L873, 1989. [II](#)
- [6] A J Macfarlane. On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group su(2) q. *Journal*

- of *Physics A: Mathematical and General*, 22(21):4581, 1989. [II](#)
- [7] T.L. Curtright and C.K. Zachos. Deforming maps for quantum algebras. *Physics Letters B*, 243(3):237 – 244, 1990. [I](#)
- [8] Alexios P. Polychronakos. A classical realization of quantum algebras. *Modern Physics Letters A*, 05(28):2325–2333, 1990. [I](#)
- [9] Michio Jimbo. A  $q$ -analogue of  $u(\mathfrak{gl}(n+1))$ , hecke algebra, and the yang-baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 11(3):247–252, 1986. [I](#)
- [10] V I Man’ko and R Vilela Mendes. On the nonlinearity interpretation of  $q$ - and  $f$ -deformation and some applications. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(28):6037, 1998. [I](#), [II](#)
- [11] E. Schrödinger. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14(28):664–666, 1926. [I](#)
- [12] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. [I](#)
- [13] John R. Klauder. Continuius-representation theory. i. postulates of ontinuius-representation theory. *Journal of Mathematical Physics*, 4(8):1055–1058, 1963. [I](#)
- [14] John R. Klauder. ontinuius-representation theory. ii. generalized relation between quantum and classical dynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 4(8):1058–1073, 1963. [I](#)
- [15] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10:277–279, Apr 1963. [I](#)
- [16] Roy J. Glauber. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 10:84–86, Feb 1963. [I](#)
- [17] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130:2529–2539, Jun 1963.
- [18] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131:2766–2788, Sep 1963. Cited 2994. [I](#)
- [19] A.O. Barut and L. Girardello. New “coherent” states associated with non-compact groups. *Communications in Mathematical Physics*, 21(1):41–55, 1971. [I](#), [II](#)
- [20] A.M. Perelomov. Coherent states for arbitrary lie group. *Communications in Mathematical Physics*, 26(3):222–236, 1972. [I](#), [II](#)
- [21] V. I. Man’ko, G. Marmo, S. Solimeno, and F. Zaccaria. Physical nonlinear aspect of classical and quantum  $q$ -oscillators. *International Journal of Modern Physics A*, 08(20):3577–3597, 1993. [II](#)
- [22] V.I. Man’ko, G. Marmo, S. Solimeno, and F. Zaccaria. Correlation functions of quantum  $q$ -oscillators. *Physics Letters A*, 176(3–4):173 – 175, 1993. [II](#)
- [23] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1796–1799, Mar 1996. [II](#)
- [24] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland. A “schrödinger cat” superposition state of an atom. *Science*, 272(5265):1131–1136, 1996.
- [25] V. Man’ko, G. Marmo, A. Porzio, S. Solimeno, and F. Zaccaria. Trapped ions in laser fields: a benchmark for deformed quantum oscillators. *Phys. Rev. A*, 62:053407, Oct 2000. [II](#)
- [26] S Sivakumar. Studies on nonlinear coherent states. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2(6):R61, 2000.
- [27] V Sunilkumar, B A Bambah, R Jagannathan, P K Panigrahi, and V Srinivasan. Coherent states of nonlinear algebras: applications to quantum optics. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2(2):126, 2000.
- [28] Z. Kis, W. Vogel, and L. Davidovich. Nonlinear coherent states of trapped-atom motion. *Phys. Rev. A*, 64:033401, Aug 2001.
- [29] Dagoberto S. Freitas and M. C. Nemes. Preparation of schrödinger cat states of a cavity field via coupling to a superconducting charge qubit. *Modern Physics Letters B*, 28(10):1450082, 2014. [II](#)
- [30] S. M. Roy and Virendra Singh. Generalized coherent states and the uncertainty principle. *Phys. Rev. D*, 25:3413–3416, Jun 1982. [II](#)
- [31] Michael Martin Nieto and L. M. Simmons. Coherent states for general potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 41:207–210, Jul 1978. [II](#)
- [32] Jean Pierre Gazeau and John R Klauder. Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(1):123, 1999. [II](#)
- [33] O de los Santos-Sanchez and J Recamier. Nonlinear coherent states for nonlinear systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(14):145307, 2011. [II](#)
- [34] O de los Santos-Sánchez and J Récamier. Phase space picture of morse-like coherent states based upon the wigner function. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(41):415310, 2012. [II](#)
- [35] V I Man’ko, G Marmo, E C G Sudarshan, and F Zaccaria.  $f$ -oscillators and nonlinear coherent states. *Physica Scripta*, 55(5):528, 1997. [II](#), [II](#)
- [36] R. L. de Matos Filho and W. Vogel. Nonlinear coherent states. *Phys. Rev. A*, 54:4560–4563, Nov 1996. [II](#)
- [37] B Roy and P Roy. New nonlinear coherent states and some of their nonclassical properties. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2(1):65, 2000. [II](#), [II](#)
- [38] B Roy and P Roy. Phase properties of a new nonlinear coherent state. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2(4):505, 2000. [II](#)
- [39] P Aniello, V Man’ko, G Marmo, S Solimeno, and F Zaccaria. On the coherent states, displacement operators and quasidistributions associated with deformed quantum oscillators. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2(6):718, 2000. [II](#)
- [40] J. Récamier, M. Gorayeb, W.L. Mochán, and J.L. Paz. Nonlinear coherent states and some of their properties. *International Journal of Theoretical Physics*, 47(3):673–683, 2008. [II](#)
- [41] N. Boucerredj, N. Mebarki, and A. Benslama. Some aspects of a weak weyl-heisenberg algebra deformation. *Canadian Journal of Physics*, 83:929–939, 2005. [II](#)
- [42] M. T. Rouabah and N. Mebarki. Monogamy and decoherence from algebra  $q$ -deformation. (in preparation). [III](#), [V](#)
- [43] K. Berrada, S. Abdel-Khalek, H. Eleuch, and Y. Hassenouni. Beam splitting and entanglement generation: excited coherent states. *Quantum Information Processing*, 12(1):69–82, 2013. [III](#)
- [44] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*,



- 70:1895–1899, Mar 1993. [III](#)
- [45] Charles H. Bennett and Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881–2884, Nov 1992. [III](#)
- [46] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, Aug 1991. [III](#)
- [47] M. Murao, D. Jonathan, M. B. Plenio, and V. Vedral. Quantum telecloning and multiparticle entanglement. *Phys. Rev. A*, 59:156–161, Jan 1999. [III](#)
- [48] Christopher A. Fuchs. Nonorthogonal quantum states maximize classical information capacity. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1162–1165, Aug 1997. [III](#)
- [49] Barry C. Sanders. Entangled coherent states. *Phys. Rev. A*, 45:6811–6815, May 1992. [III](#)
- [50] S. J. van Enk and O. Hirota. Entangled coherent states: Teleportation and decoherence. *Phys. Rev. A*, 64:022313, Jul 2001.
- [51] Osamu Hirota, Steven J. van Enk, Kazuo Nakamura, Masaki Sohma, and Kentaro Kato. Entangled nonorthogonal states and their decoherence properties. [quant-ph/0101096v1](#), Jan 2001.
- [52] H. Jeong, M. S. Kim, and Jinhyoung Lee. Quantum-information processing for a coherent superposition state via a mixedentangled coherent channel. *Phys. Rev. A*, 64:052308, Oct 2001. [III](#)
- [53] Xiaoguang Wang, Barry C Sanders, and Shao hua Pan. Entangled coherent states for systems with  $su(2)$  and  $su(1,1)$  symmetries. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(41):7451, 2000. [III](#)
- [54] Xiaoguang Wang. Bipartite entangled non-orthogonal states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(1):165, 2002. [III](#), [III](#)
- [55] A. Mann, B. C. Sanders, and W. J. Munro. Bell’s inequality for an entanglement of nonorthogonal states. *Phys. Rev. A*, 51:989–991, Feb 1995. [III](#)
- [56] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5022–5025, Jun 1997. [III](#)
- [57] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998.
- [58] Hongchen Fu, Xiaoguang Wang, and Allan I. Solomon. Maximal entanglement of nonorthogonal states: classification. *Physics Letters A*, 291(2–3):73 – 76, 2001. [III](#)
- [59] Xiaoguang Wang. Quantum teleportation of entangled coherent states. *Phys. Rev. A*, 64:022302, Jul 2001. [III](#)
- [60] Tobias J. Osborne and Frank Verstraete. General monogamy inequality for bipartite qubit entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 96:220503, Jun 2006. [V](#)
- [61] G. Vinod, K. Babu Joseph, and V. C. Kuriakose. Coherent states and squeezed states of real  $q$ -deformed quantum oscillators. *Pramana*, 42(4):299–309, 1994. [A](#)

**Coherent and incoherent multiple scattering**Julien Chabé,<sup>1,2</sup> Mohamed-Taha Rouabah,<sup>1,3</sup> Louis Bellando,<sup>1</sup> Tom Bienaimé,<sup>1,4</sup> Nicola Piovella,<sup>5</sup>  
Romain Bachelard,<sup>6</sup> and Robin Kaiser<sup>1</sup><sup>1</sup>*Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS, Institut Non-Linéaire de Nice, UMR 7335, F-06560 Valbonne, France*<sup>2</sup>*Laboratoire Lagrange, UMR7293, Université de Nice Sophia-Antipolis, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, Parc Valrose, Bâtiment H. FIZEAU, 06108 Nice, France*<sup>3</sup>*Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique, Université Constantine 1, Route Ain El Bey, 25017 Constantine, Algeria*<sup>4</sup>*Laboratoire Kastler Brossel, CNRS, ENS, UPMC, 24 rue Lhomond, F-75005 Paris, France*<sup>5</sup>*Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Milano, Via Celoria 16, I-20133 Milano, Italy*<sup>6</sup>*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 13560-970 São Carlos, São Paulo, Brazil*

(Received 12 February 2014; published 21 April 2014)

We compare two different models of transport of light in a disordered system with a spherical Gaussian distribution of scatterers. A coupled dipole model, taking into account all interference effects, is compared to an incoherent model, using a random walk of particles. Besides the well-known coherent backscattering effect and a well pronounced forward lobe, the incoherent model reproduces extremely well all scattering features. In an experiment with cold atoms, we use the momentum recoil imparted on the center of mass of the sample as a partial probe of the light-scattering properties. We find that the force acting on the center of mass of the atoms is not well suited to exhibit the coherence effects in light propagation under multiple-scattering conditions.

DOI: [10.1103/PhysRevA.89.043833](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.043833)

PACS number(s): 42.50.Nn, 42.25.Bs, 03.65.Yz, 32.80.Qk

**I. INTRODUCTION**

Coherence effects in the transport of wave in disordered systems are at the heart of many phenomena in various areas of research. In this work, we focus on light propagation, even though many if not most features could be extended to different types of waves, be it acoustic waves, plasmons, heat, antennas, or matter waves such as electrons or ultracold atoms. In mesoscopic physics, coherences are fundamental for weak [1,2] and strong localization of light [3–11]. Coherences are also at work in the universal conductance fluctuations [12], modifications of the local density of states [13], or extraordinary optical transmission [14]. Cooperative emission of light as discussed by Dicke in the 1950s [15] and the response of a cloud of cold atoms excited by an external laser [16] are also based on coherence effects, such as quantum memories using electromagnetic induced transparency in three-level systems [17]. The recent development of ultrastable atomic clocks also relies on optical transitions in the presence of many atoms [18] where the impact of residual multiple scattering deserves particular attention.

Whereas a rigorous investigation of light propagation in the presence of many scatterers requires taking into account the effects of interferences, in most situations interference effects can be neglected and a radiative transfer equation is thus often used in optics, allowing a practical approach to scattering of light in complex media. In this work, we compare an approximate model, based on such an incoherent random walk of photons, to a more rigorous approach, based on a microscopic coupled dipole model. Cold atoms provide an excellent medium to study these fundamental effects. This ensemble of resonant point scatterers are free of defects and absorption and the coupled dipole model is expected to provide an excellent description of the scattering properties of this sample (despite some limitations, which will be discussed at the end of the work). We stress that despite the apparent simple situation, no analytical result is available for a disordered

system of  $N$  coupled dipoles. This problem has the full complexity of a true many-body problem [19] and one thus needs to resort to numerical or experimental answers to this question. Indeed, if the amplitudes of  $N$  coupled dipoles are to be found, this amounts to solving  $N$  coupled equations, even though this can be considered as a linear optics problem described by the propagation of a low intensity or single photon field.

This paper is constructed as follows. First we present the results of numerical simulations using both a random walk of photons (RW) and a coupled dipole approach (CD), where the many-body problem is solved by tracing over the photon degrees of freedom. Then we compare the numerical results from both the RW and CD models to experimental data obtained by monitoring the radiation pressure force on the center of mass of the atomic cloud as a probe of the emission diagram.

**II. RANDOM-WALK MODEL**

The radiative transfer equation [20,21] is a very useful and often used model to describe the multiple-scattering regime that takes place in optically thick media. In such a system one photon undergoes a large amount of independent scattering events from randomly positioned particles and therefore interferences between different paths are supposed to be smeared out by the disorder. Then, the transport properties are mostly independent from the wave nature of light and from the particular nature of the scatterers. Such an incoherent model of multiple scattering of photons undergoing a random walk inside the sample provides a good description of these systems, in particular when considering configuration averaged signals. For this incoherent random-walk model, we perform a Monte Carlo simulation where photons are isotropically scattered after a distance  $l_{sc}(r) = 1/[n(r)\sigma_{sc}]$ , where  $\sigma_{sc}$  is the scattering cross section and  $n(r) = n_0 e^{-r^2/(2\sigma_R^2)}$  is the spatial density distribution of the cold atom cloud

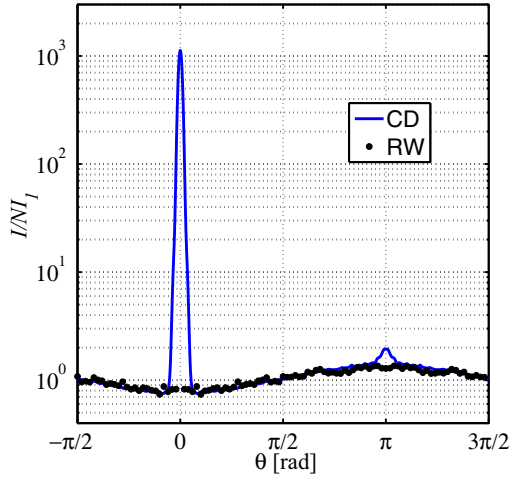


FIG. 1. (Color online) Emission diagram (log scale) normalized to the independent  $N$  atom case, for the RW approach (black points) and the CD model (blue line) with  $b = 8$ .

considered in this work, well described by a spherical Gaussian distribution of size  $\sigma_R$  and center density  $n_0$ . The optical thickness along one line of sight across the center of the cloud is defined as  $b = \int n(0,0,z)\sigma_{sc}dz = \sqrt{2\pi}n_0\sigma_{sc}\sigma_R = \sqrt{2\pi}\sigma_R/l_{sc}(r=0)$ . By integrating the extinction over the whole transverse size of the cloud ( $\int dx dy e^{-b(x,y)}$ ), it is possible to obtain the total extinction of an incident flux of photons, corresponding to a total scattering cross section for this random-walk model given by  $\sigma_{RW} = 2\pi\sigma_R^2 Ein(b)$ , where  $Ein(b)$  is the entire function  $Ein(b) = \int_0^b (1 - e^{-t})dt/t \xrightarrow{b \rightarrow 0} b$ . To compute the emission diagram, averaged over the azimuthal angle  $\phi$ ,  $I(\theta)$  for this specific geometry, we simulated the trajectories of  $10^5$  photons arrived along the  $z$  axis, over a uniform disk of radius  $R = 4.36\sigma_R$  for a sample of  $b = 8$ . With  $\approx 28.2\%$  of this “plane” wave diffused, this corresponds to a scattering cross section for the Gaussian cloud  $\sigma_{RW} \approx 16.8\sigma_R^2$ , very close to the analytical value  $2\pi\sigma_R^2 Ein(8) \approx 16.7\sigma_R^2$ . For each photon, we record the direction of emission obtaining the angular emission diagram  $I_{RW}(\theta)$  (see Fig. 1).

### III. COUPLED DIPOLE MODEL

We now compare this random-walk approach to a model of coupled dipoles that accounts for the interference between the radiation of all the atoms. Even though light scattering in three dimensions requires to take into account the polarization as well as the near-field dipole-dipole coupling, a better comparison to our isotropic random-walk approach is obtained using a scalar model for the dipole-dipole coupling. In the steady-state regime, the  $N$  dipoles with amplitudes  $\beta_j$  and position  $\mathbf{r}_j$ , illuminated by a quasiresonant plane wave with wave vector  $\mathbf{k}_0 = k_0\hat{z}$ , obey the equation [16]

$$\left(i\delta - \frac{\Gamma}{2}\right)\beta_j = i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{\Gamma}{2}\sum_{m \neq j} \beta_m \frac{\exp(i k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{i k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}, \quad (1)$$

where  $\omega_a$  is the resonance frequency,  $\delta = \omega_a - \omega_{k_0}$  is the laser detuning,  $\Gamma$  is the atomic transition linewidth,  $\Omega_0 = dE_0/\hbar$  is the Rabi frequency, and  $d$  is the dipole matrix element. This many-body problem with interference has been derived from a quantum formalism where a single photon is shared between all atoms through a superposition of states [16], but also from a classical approach where the atoms are considered as oscillators [22]. The relevant parameters to describe light scattering in dilute clouds of two-level systems is the resonant optical thickness of the cloud, which is given by  $b_0 = 2N/(k_0\sigma_R)^2$  with an on-resonant scattering cross section for a single atom given in the scalar model by  $\sigma_{sc} = \lambda^2/\pi$ . The detuning dependent optical thickness then reads  $b = b(\delta) = b_0/(1 + 4\delta^2/\Gamma^2)$ . From (1), the far-field intensity in a direction  $\mathbf{k}$  and at a distance  $r$  can be calculated using [23]

$$4\pi r^2 I(\hat{\mathbf{k}}) = \hbar\omega_{k_0}\Gamma \sum_{j,m=1}^N \beta_j \beta_m^* e^{-i k_0 \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)}. \quad (2)$$

All numerical CD results data shown in this paper have been obtained using an average over 20 different configurations of the atomic distribution. We point out that the interferences are not only present in the emission term (2) (Rayleigh scattering), but already in the steady-state value of the atomic dipoles (1). We can now compare the angular emission diagrams obtained from the coherent CD equations to those from the incoherent RW model. In Fig. 1 we have normalized the emission diagram of the CD model to the emission diagram of  $N$  independent atoms (obtained by using a very large sample size with vanishing optical thickness). The emission diagram of the RW model has been normalized such that

$$\frac{P_{CD}}{P_{RW}} = \frac{\sigma_{CD}}{\sigma_{RW}}, \quad (3)$$

where  $P_{CD}$  (respectively  $P_{RW}$ ) is the scattered power of the CD (respectively RW) model for the same incident intensity.  $P_{CD}$  and  $\sigma_{CD}$  can be obtained from integration of the emission diagram  $\int I(\hat{\mathbf{k}})d\hat{\mathbf{k}}$  or also from  $\sigma_{CD} = -\frac{4\pi}{k_0^2} \frac{\Gamma}{\Omega_0} \text{Im}[\sum_j \beta_j e^{-i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_j}]$  [23]. The total cross section for the incoherent scattering  $\sigma_{RW}$  is obtained from the analytical expression given above. For the parameters in Fig. 1 ( $b = 8$ ,  $\sigma_R = 20/k_0$ ,  $\delta = 0$ ), we obtain  $\sigma_{CD} = 24.5\sigma_R^2$  and  $\sigma_{RW} = 16.7\sigma_R^2$ . The difference in these total scattering cross sections is mainly explained by the additional strong forward lobe in the CD (see Fig. 1), and can also be understood as the origin of the extinction paradox [23].

As one can clearly see in Fig. 1, the RW model in this multiple-scattering regime is very close to the coherent CD model, except for the coherent backscattering cone and the forward lobe, with an angular width given by the inverse size of the sample. The quantitative agreement between the RW and the CD model in all angles except the forward and backward direction suggests that interferences indeed appear washed out under multiple-scattering conditions, as naively expected. We note however that interferences might nevertheless be relevant in multiple scattering, when spatially dense samples are considered and one expects to approach the Anderson localization transition or when going beyond the average emission diagram in steady state.

#### IV. EXPERIMENTAL RESULTS

The differences between coherent and incoherent scattering have been addressed in the past, including experiments on cold atoms, with the possibility to exploit the detuning as a relevant control parameter. The enhanced backscattering cone, visible only in the CD model and absent in the RW model, has been extensively studied more than ten years ago [24]. The most important difference between coherent and incoherent multiple scattering with a Gaussian-shaped sample is the pronounced forward lobe. Detecting light scattered in a direction close to the incident radiation is notoriously difficult as most detecting schemes will be saturated by the large incident radiation. An elegant technique has been used in [25] but has not been implemented so far with atomic clouds. An alternative approach to indirect probe features of cooperative scattering by laser cooled atoms has been used in the single-scattering limit in [26], where the modification of the atomic motion induced by light scattering has been used as a measure of cooperative scattering. It is therefore interesting to investigate how the radiation pressure force on the center of mass of the atoms extends into the multiple-scattering limit.

We have therefore used the same experimental setup and protocol as in [26], and used values of the laser frequency around the atomic resonance ( $\delta \approx 0$ ), thus entering the multiple-scattering limit. We apply the following experimental procedure to probe the coherence of the multiple-scattering regime in our cold atom cloud. First, we load a magneto-optical trap (MOT) with  $3 \times 10^7$  atoms of  $^{87}\text{Rb}$  in 50 ms using the setup described in [26]. We then apply a 50-ms temporal dark MOT period where the intensity of the repumping laser is reduced by a factor of 10 and the cooling laser is tuned to  $-10\Gamma$  from the  $F = 2 \rightarrow F' = 3$   $D_2$  line. This allows us to compress the cloud and to produce a smooth Gaussian-shaped distribution of atoms. To control the optical thickness at the end of this dark MOT period, the repumper detuning is varied between  $-7\Gamma$  and  $-2.5\Gamma$ , keeping the desired amount of atoms in the  $F = 2$  state without affecting size ( $\sigma_R = 270 \mu\text{m}$ ,  $k\sigma_R \approx 2 \times 10^3$ ), shape, and temperature ( $\sim 20 \mu\text{K}$ ) of the cloud. Here we focus on moderate values of optical thickness, as this allowed for more systematic data without drifts of the relevant parameters. We then switch off all laser beams and magnetic-field gradients, leaving the atoms in free fall. We then apply a horizontal, circularly polarized “pushing” beam, tuned close to the  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  transition for 50  $\mu\text{s}$ . The pushing beam has a waist  $w_0 = 12 \text{ mm}$  and its carefully calibrated intensity is adjusted to have a saturation parameter  $s = 8 \times 10^{-2}$ . Each atom in the  $F = 2$  state scatters on average 80 photons. Such a small number of scattered photons prevents any depumping effect into the  $F = 1$  state during the pushing process. After a time-of-flight expansion of 12 ms, we image the position of the atomic cloud via standard off-resonant (detuning  $\delta \approx -2\Gamma$ ) absorption scheme. The absorption image gives the position of the center of mass of the atomic cloud after time of flight and thus the average radiation pressure force. Each experimental point (see Fig. 2) is an average over ten realizations. We normalize the measured average radiation pressure force by the single atom force  $F_1$ , where  $F_1$  is computed without any adjustable parameter from the measured intensity of the pushing beam (known within

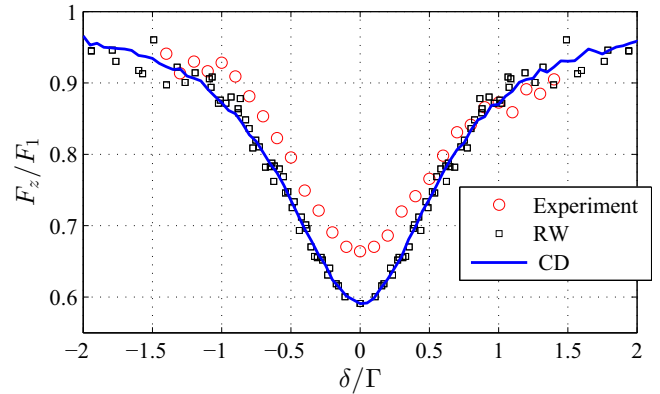


FIG. 2. (Color online) Normalized radiation pressure force acting on the center of mass of the atomic cloud as a function of the laser detuning  $\delta$  (in unit of  $\Gamma$ ), at constant saturation parameter  $s(\delta)$ . The experimental result for  $b_0 = 2.19$  (red circles) are compared to the coherent CD model ( $b_0 = 2.19$ , blue line) and incoherent RW model (black squares) with corresponding optical thickness  $b(\delta)$ .

5% accuracy and taking into account losses by the vacuum windows). The experimental value of the optical thickness  $b_0$  is obtained by standard absorption imaging, using a linearly polarized laser beam. We note that such a transmission measurement is best described by atoms in a statistical mixture of the Zeeman sublevels in the ground state, with a corresponding average squared Clebsch-Gordon coefficient of  $(2F' + 1)/3(2F + 1) = 7/15$ . The effective resonant optical thickness for a spherical Gaussian cloud of atoms distributed in a statistical mixture of the Zeeman sublevels is thus given by  $b_0 = \frac{2F'+1}{3(2F+1)} \frac{3N}{k\sigma_R}$ , in contrast to a situation where all atoms would be pumped with a circularly polarized laser beam into the stretched state  $|F = 2, m_F = +2\rangle$ .

In Fig. 2, we show the experimental result of the intrinsic radiation pressure force, proportional to the displacement of the center of mass of the atomic cloud (red spheres) as a function of the pushing beam detuning  $\delta$ , where we keep the saturation parameter  $s = s_0/(1 + 4\delta^2/\Gamma^2)$  constant. We clearly see an important reduction of the intrinsic radiation pressure force around the resonance. Note that with this experimental protocol, the mass of the atomic sample to be displaced as well as the single atom response are kept constant, allowing us to highlight the collective behavior.

We now turn to the comparison between the experimental data and our coherent and incoherent models. Momentum conservation arguments allow us to directly connect the far-field emission diagram of a sample to the momentum transfer to the center of mass of the sample. We stress that it is important not only to consider the shape of the emission diagram, but also the total scattered power, which can depend on the shape and opacity of the sample. Defining the intrinsic radiation pressure force along  $\hat{e}_z$  by  $F_z = (1/N) \sum_j F_j$ , where  $F_j$  is the force acting on atom  $j$  [16], we obtain the following relation:

$$\frac{F_z}{F_1} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{N\sigma_1} \langle 1 - \cos(\theta) \rangle, \quad (4)$$

where  $\cos \theta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  is the angle of the direction of emitted photon with the laser axis. We note that this relation holds

both for the incoherent RW and coherent CD model. In (4),  $F_1$  is the radiation pressure force for a single atom, and  $\sigma_{\text{tot}}$  is the total scattering of the sample, which is different in the RW and the CD model. One can see from (4) that the emission diagram associated with the total power scattered from the incident beam allows us to predict the intrinsic force, proportional to the acceleration of the center of mass of the sample. The numerical results of our CD solution (blue line) also show a strong reduction of the force. To come forward with a simple interpretation of these results, one can associate the term corresponding to  $\frac{\sigma_{\text{tot}}}{N\sigma_1}$  as a “shadow” effect, where that part of the force is obtained with only taking into account the attenuation of the incident laser beam. The recoil due to the rescattered photons is then properly taken into account by the last term of (4):  $-\frac{\sigma_{\text{tot}}}{N\sigma_1} \langle \cos(\theta) \rangle$ , related to the emission diagram of the photons. As shown in Fig. 2 the experimental result compares reasonably well both the CD and RW model when using the optical thickness evaluated for a statistical mixture of Zeeman sublevels, assumed to be a good approximation under multiple-scattering conditions, when the local polarization is well approximated by a field with random polarization.

## V. DISCUSSION

In order to probe coherence effects under multiple-scattering conditions, it is important to check to what extent an incoherent model also explains similar features. When looking at the prediction of the incoherent model, we find that there is no significant difference in the regime of parameters studied. This very close match between the incoherent and coherent models can be explained by the fact that the emission diagram only differs at two angles. In the backward direction, the coherent backscattering cone should result in a small increase of the intrinsic radiation pressure force in the coherent model compared to an incoherent model. However, the enhancement factor in the backward direction is less than 2 and the angular range of enhanced backscattering is very small for a dilute sample of atoms. On the other hand, the more important emission intensity in the forward lobe does not result in a significant change in the intrinsic radiation pressure force, as in this direction ( $\theta \approx 0$ ) the momentum transfer to the atoms is vanishing:  $\langle 1 - \cos(\theta) \rangle \approx 0$ . It thus turns out that under these conditions, the intrinsic radiation pressure force is not a good measure to detect differences between coherent and incoherent scattering. We further investigate the range of validity of the RW model in Fig. 3, where we plot the intrinsic force extracted from the experimental data for various  $b_0$ , the RW simulation, and the CD simulation as a function of  $b(\delta)$ . The RW simulation is by definition a function of  $b(\delta)$  only. A close inspection of the experimental and CD result shows small deviations from the RW model, including a red or blue asymmetry, visible at small  $b(\delta)$ . The origin of this asymmetry remains unknown. However, we observed it on CD data for much higher  $b_0$  than experimentally measured. When looking for coherence effects, one does indeed expect to find cooperative signatures for large  $b_0$  and large detunings, where a mean-field approach is assumed to be valid [26]. Another feature not included in the RW model are Mie resonances expected in the CD model for large  $b_0$  [27]. We also note a small deviation of the experimental results compared to both the RW and CD model

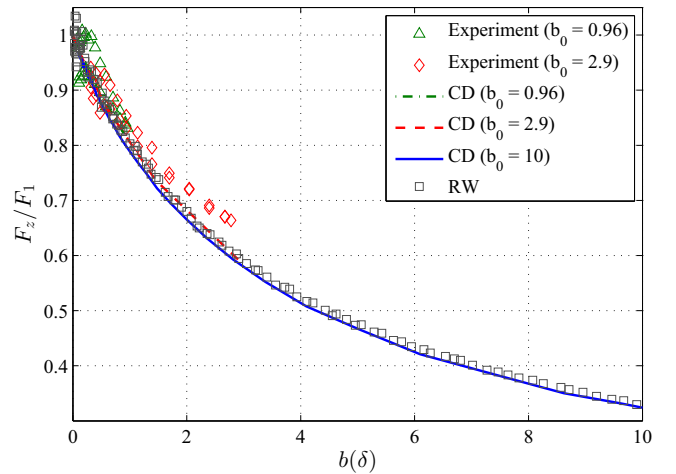


FIG. 3. (Color online) Normalized radiation pressure force as a function of the optical thickness. The experimental data for  $b_0 = 0.96$  (green triangles) and  $b_0 = 2.9$  (red diamonds) are compared to the results of the CD simulations, obtained for  $b_0 = 0.96$  (green dash-dotted line),  $b_0 = 2.9$  (red dotted line), and  $b_0 = 10$  (blue plain line), and of the RW model (gray squares). For the experimental data and the CD model,  $b(\delta)$  is varied at fixed  $b_0$  by changing the detuning. The CD data are superimposed as  $b(\delta)$  appears as a universal parameter, and fluctuations are very small.

close to resonance ( $\delta = 0$ ) (see Figs. 2 and 3). This difference would correspond to a slightly smaller atom-light coupling than obtained from a statistical mixture of atoms in the Zeeman sublevels, which would however be rather surprising.

Finally, we plotted in Fig. 4 various data extracted from our CD simulation using the same Gaussian sphere that gives the emission diagram plotted in Fig. 1. Figure 4(a) represents the attenuation  $e^{-b_0}$  of the incident laser field at the position  $\hat{e}_z$  and along the transverse direction  $\hat{e}_r$ . Figure 4(b) represents the dipole excitation relative to the single atom limit  $|\beta_j|^2/|\beta_1|^2$ . For an integrated opacity  $b_0 > 1$  (white line), one expects the atomic dipoles to be less excited by the incident laser field. Those atoms in the shadow are indeed significantly less excited. Figure 4(c) represents the phase of the atomic dipoles. Most of the atomic cloud has a phase  $\phi = 0$  corresponding to the laser field. In other words, almost the entire cloud is synchronized with the incident laser field even for  $b_0 > 1$ . This is somewhat in contradiction to what one would expect from a RW hypothesis, where in the multiple-scattering regime the phase is randomized after few scattering events and interference effects are smeared out by the disorder. This result is however in good agreement with the Ewald-Oseen extinction theorem [28] which specifies that the radiation from the atoms exactly cancels the electromagnetic field of the incident laser beam and replaces it by a field with a speed  $c/n$  where  $n$  is the index of refraction of the medium. As shown in [28], not only is the surface layer of the atomic cloud synchronized but the entire cloud participates to the cancellation of the incident field. This is in contrast with the common belief that optically thick samples are well described by the RW approach where the phase of a photon is randomized after few diffusion events, but is in agreement with related work [29,30] where a small persisting coherent component in the forward scattered

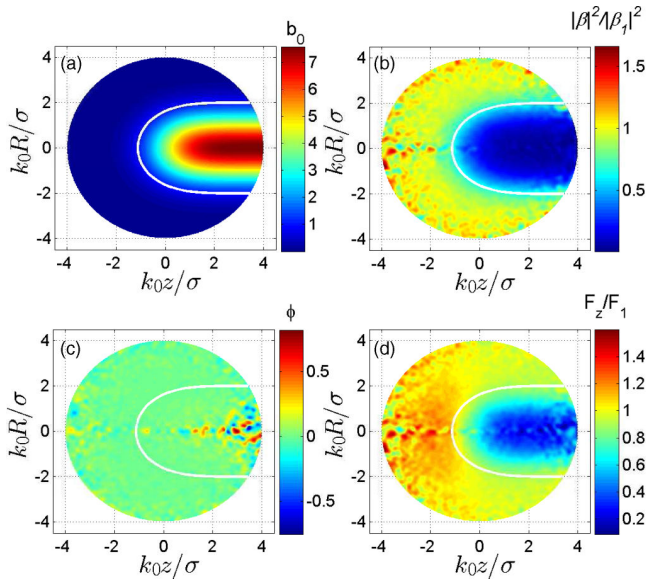


FIG. 4. (Color online) (a) Local optical thickness  $b_0$  seen by the laser field propagating along the direction  $\hat{e}_z$ . The white line represents the multiple-scattering limit  $b_0 = 1$ . (b) Excitation amplitude of the atomic dipole compared to the single atom limit  $|\beta_j|^2/|\beta_1|^2$ . (c) Phase of the atomic dipole  $\phi_j$ .  $\phi = 0$  corresponds to the laser field phase corrected from its propagation along  $\hat{e}_z$ . (d) Local force compared to the single atom case  $F_z/F_1$ . All data are computed for a Gaussian sphere with  $b_0 = 8$ .

field has been reported. Figure 4(d) represents the local force. Although the atoms at the entrance of the cloud undergo a force larger than the single-atom force, those in the shadow are subjected to a lower force, resulting in a total force below the single-atom one, in agreement with the measurement reported in Fig. 3.

## VI. CONCLUSION

In summary, we have compared an incoherent and a coherent model for multiple scattering. The most prominent differences are the well-known coherent backscattering cone and an important forward lobe. We have compared the predictions of these two models to the experimental result of the intrinsic radiation pressure force acting on the center of mass of the atomic cloud and found that this force is not a good candidate to detect coherence effects in multiple scattering. Using an effective coupling strength for the atom light coupling in multiple scattering, we find a satisfactory quantitative agreement between the experiment and the numerical model. It would be interesting to study how these results compare to previous theoretical and experimental results, where a mean-field approach in terms of single-photon superradiance has been used. A precise experimental study of how multiple scattering sets in and to what extent a RW model can explain the whole range from large to small optical thickness is a complex task, as one needs to take into account the various Zeeman sublevels of the rubidium atoms. We expect that alternative observables beyond average values of the center-of-mass displacement of the cloud, such as correlations in the scattered light or heating of the cloud, might be good candidates to look for features of cooperativity in scattering of light by cold atoms.

## ACKNOWLEDGMENTS

R.K. acknowledges valuable discussions with D. Delande. We acknowledge financial support from IRSES project COSCALI, from USP/COFECUB (Project No. Uc Ph 123/11), and from GDRI nanomagnetism, spin electronics, quantum optics, and quantum technologies. M.T.R. was supported by an Averroès exchange program. R.B. acknowledges support from the Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

- 
- [1] M. P. Van Albada and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
  - [2] P.-E. Wolf and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
  - [3] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, *Nature (London)* **390**, 671 (1997).
  - [4] R. T. F. Scheffold, R. Lenke, and G. Maret, *Nature (London)* **398**, 206 (1999).
  - [5] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, *Nature (London)* **398**, 207 (1999).
  - [6] A. Lagendijk, B. van Tiggelen, and D. S. Wiersma, *Phys. Today* **62**(8), 24 (2009).
  - [7] T. Sperling, W. Buehrer, C. M. Aegerter, and G. Maret, *Nat. Photon.* **7**, 48 (2012).
  - [8] F. Scheffold and D. Wiersma, *Nat. Photon.* **7**, 934 (2013).
  - [9] G. Maret, T. Sperling, W. Buehrer, A. Lubatsch, R. Frank, and C. M. Aegerter, *Nat. Photon.* **7**, 934 (2013).
  - [10] B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, *J. Phys.: Condens. Matter* **2**, 7653 (1990).
  - [11] T. Karpiuk, N. Cherroret, K. L. Lee, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 190601 (2012).
  - [12] F. Scheffold and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5800 (1998).
  - [13] V. Krachmalnicoff, E. Castanié, Y. De Wilde, and R. Carminati, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 183901 (2010).
  - [14] H. Liu and P. Lalanne, *Nature (London)* **452**, 728 (2008).
  - [15] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
  - [16] P. W. Courteille, S. Bux, E. Lucioni, K. Lauber, T. Bienaimé, R. Kaiser, and N. Piovella, *Eur. Phys. J. D* **58**, 69 (2010).
  - [17] J. Hald, J. L. Sørensen, C. Schori, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1319 (1999).
  - [18] B. J. Bloom, T. L. Nicholson, J. R. Williams, S. L. Campbell, M. Bishof, X. Zhang, W. Zhang, S. L. Bromley, and J. Ye, *Nature (London)* **506**, 71 (2014).
  - [19] P. de Vries, D. V. van Coevorden, and A. Lagendijk, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 447 (1998).
  - [20] R. Pierrat, B. Grémaud, and D. Delande, *Phys. Rev. A* **80**, 013831 (2009).
  - [21] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1960).
  - [22] A. A. Svidzinsky, J. T. Chang, and M. O. Scully, *Phys. Rev. A* **81**, 053821 (2010).
  - [23] T. Bienaimé, T. Bachelard, J. Chabé, M. T. Rouabah, L. Bellando, P. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser, *J. Mod. Opt.* **61**, 18 (2014).

- [24] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5266 (1999).
- [25] G. G. Padmabandu, C. Oh, and E. S. Fry, *Opt. Lett.* **17**, 169 (1992).
- [26] T. Bienaimé, S. Bux, E. Lucioni, P. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 183602 (2010).
- [27] R. Bachelard, P. W. Courteille, R. Kaiser, and N. Piovella, *Europhys. Lett.* **97**, 14004 (2012).
- [28] V. C. Ballenegger and T. A. Weber, *Am. J. Phys.* **67**, 599 (1999).
- [29] C. Yang, K. An, L. T. Perelman, R. R. Dasari, and M. S. Feld, *J. Opt. Soc. Am. A* **16**, 866 (1999).
- [30] D. Mackowski and M. Mishchenko, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **123**, 103 (2013).

# Coherence effects in scattering order expansion of light by atomic clouds

Mohamed-Taha Rouabah,<sup>1,2</sup> Marina Samoylova,<sup>3</sup> Romain Bachelard,<sup>4</sup>  
Philippe W. Courteille,<sup>4</sup> Robin Kaiser,<sup>1</sup> and Nicola Piovella<sup>3,\*</sup>

<sup>1</sup>Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS, Institut Non-Linéaire de Nice, UMR 7335, F-06560 Valbonne, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique, Université Constantine 1, Route Ain El Bey, 25017 Constantine, Algeria

<sup>3</sup>Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Milano, Via Celoria 16, I-20133 Milano, Italy

<sup>4</sup>Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 13560-970 São Carlos, SP, Brazil

\*Corresponding author: nicola.piovella@unimi.it

Received January 21, 2014; revised March 11, 2014; accepted March 12, 2014;  
posted March 19, 2014 (Doc. ID 204932); published April 11, 2014

We interpret cooperative scattering by a collection of cold atoms as a multiple-scattering process. Starting from microscopic equations describing the response of  $N$  atoms to a probe light beam, we represent the total scattered field as an infinite series of multiple-scattering events. As an application of the method, we obtain analytical expressions of the coherent intensity in the double-scattering approximation for Gaussian density profiles. In particular, we quantify the contributions of coherent backward and forward scattering. © 2014 Optical Society of America

OCIS codes: (290.4210) Multiple scattering; (020.1335) Atom optics; (020.1670) Coherent optical effects.  
<http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.31.001031>

## 1. INTRODUCTION

Multiple scattering of light in disordered media has been investigated for a long time using different approaches [1–3]. Some of them use coupled dipole methods to describe light scattering by dielectric particles [4], while other approaches interpret multiple scattering as a random walk of particle-like photons where interference is neglected. This random walk is described by a radiative transfer equation [5–7], which has been used for decades in astrophysics, where the diffusive behavior is considered as a good description of the light propagation. However, this approach must be corrected when the scattered light wave emerges from the medium in the backward direction. In this case, constructive interferences arises and must be taken into account in order to explain the enhancement of the backscattered intensity with respect to the classical prediction [8–11]. This coherent backscattering (CBS) has been observed for light waves in a variety of media, such as powder suspensions, biological tissues, or Saturn's rings, as well as for laser-cooled atomic gases [12–14]. The latter systems provide an opportunity to observe cooperative effects in the light scattering due to the absence of Doppler broadening.

Recently, a microscopic model of cooperative scattering by cold atoms was proposed [15–19], which accounts for the interference effects. Signatures of cooperativity have been observed in the reduction of the radiation pressure force exerted on the center of mass of the atomic cloud [20,21]. The microscopic model provides an exact description of the scattering of a probe light beam by  $N$  atoms, i.e., taking into account interferences. It assumes the incident light beam to be weak enough to neglect nonlinear effects, but naturally embeds the multiple-scattering process of the incoming photons bouncing

among the atoms, since the single-atom response is proportional to the sum of the incident field and the field scattered by the other atoms.

The aim of this paper is to characterize the multiple-scattering nature of cooperative scattering, describing it not from the point of view of the atoms, but of the scattered field. Under this view, cooperative scattering appears as a sequence of multiple-scattering events in which the emitted field is expressed as the sum of successively scattered fields. This approach is of particular importance for two reasons. First, scattering in optically dilute systems is very well described by a few scattering events. The number of these events necessary to reconstruct the solution is directly connected to the convergence of the multiple-scattering series. Second, it happens that the multiple-scattering expansion diverges in the optically dense regime. This suggests that the interpretation of multiple scattering as photons wandering from one atom to another one starts to be incomplete. In such a regime, we can only talk about global scattering by the entire cloud, and we lose track of the light propagating in the cloud at different orders of scattering. As a consequence, the scattered field seen by each atom cannot be obtained as the coherent sum over all the light trajectories, but it must result from a global approach, determining either the single-atom response to the total scattered field [22] or the eigenmodes of the system [23].

Let us outline that we treat the light scattering *ab initio*, i.e., considering point-like atoms in the vacuum. This is different from the common approach resorting to an effective Green's function, where the average atomic medium is described by a refractive index, which implies the introduction of a mean free path [5,11,24]. On the contrary, in our model the refractive



index emerges *a posteriori* as a result of the multiple light scattering process [25].

The paper is organized as follows. In Section 2 we review the cooperative scattering model using the more general vectorial model, and show how the atomic response builds up as a reaction to both the incident and scattered fields. The multiple-scattering approach is presented in Section 3. In Section 4 we discuss CBS in the double-scattering approximation, deriving analytical expressions for a Gaussian sphere. We also demonstrate how coherent multiple-scattering theory allows us to obtain corrections to the single-scattering forward emission.

## 2. MICROSCOPIC APPROACH TO THE COOPERATIVE SCATTERING

The cooperative scattering by  $N$  atoms with fixed positions  $\mathbf{r}_j$  and illuminated by a monochromatic light beam with electric field components  $E_{\text{in}}^\alpha(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$  is described by the following set of coupled equations [16,17]:

$$\begin{aligned} \frac{db_j^\alpha}{dt} = & (i\Delta - \gamma/2)b_j^\alpha - i(d/\hbar)E_{\text{in}}^\alpha(\mathbf{r}_j) \\ & - (\gamma/2) \sum_{\alpha'} \sum_{m \neq j} G_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) b_m^{\alpha'}, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $d$  is the electric dipole matrix element,  $\Delta = \omega - \omega_a$  is the detuning of the incident light frequency  $\omega = ck$  from the atomic resonance frequency  $\omega_a$ , and  $\gamma = d^2 k^3 / 3\pi\epsilon_0 \hbar$  is the spontaneous decay rate. In the right-hand side of Eq. (1), the first term describes the single-atom dynamics, the second term corresponds to the external field, and the last term describes the radiation of all other atoms on the  $j$ th atom. Equation (1) is derived from a quantum approach modeling the scattering of a single photon as being scattered in a mode tailored by the spatial atomic distribution [15,26,27], but also from a classical approach in which the atoms are considered as oscillating dipoles induced by a classical laser field described by the Maxwell equations [16]. The  $j$ th atom experiences electric dipole transitions between the single ground state  $|g_j\rangle$  and the degenerate triplet excited state  $|e_j^\alpha\rangle$ , where  $\alpha = x, y, z$  and  $b_j^\alpha$  are the probability amplitudes of the single-excitation atomic state  $|\Psi\rangle_e = \exp(-i\Delta t) \sum_j \sum_\alpha b_j^\alpha |g_1, \dots, e_j^\alpha, \dots, g_N\rangle$ .  $G_{\alpha,\alpha'}$  are the components of the symmetric tensor:

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{r}) = & \frac{3}{2} \frac{e^{ikr}}{ikr} \{ [\delta_{\alpha,\alpha'} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_{\alpha'}] \\ & + [\delta_{\alpha,\alpha'} - 3\hat{n}_\alpha \hat{n}_{\alpha'}] [i/(kr) - 1/(kr)^2] \} \end{aligned} \quad (2)$$

with  $r = |\mathbf{r}|$  and  $\hat{n}_\alpha$  being the components of the unit vector  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$ . The vectorial Green's function (2) can be obtained from the scalar Green's function  $G(r) = \exp(ikr)/(ikr)$ :

$$G_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} \left[ \delta_{\alpha,\alpha'} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha'} \right] G(r). \quad (3)$$

The steady-state problem of Eq. (1) boils down to a linear one for the complex vectors  $\mathbf{b}_j$  with spatial components  $b_j^\alpha$ :

$$\mathbf{b}_j = \frac{1}{\Delta + i\gamma/2} \left[ \frac{d}{\hbar} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) - i \frac{\gamma}{2} \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{b}_m \right]. \quad (4)$$

Giving the atomic positions  $\mathbf{r}_j$  and incident field  $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j)$ , it can be solved numerically by inverting a  $3N \times 3N$  symmetric matrix.

The scattered field at a position  $\mathbf{r}$  is derived from  $\mathbf{b}_j$  using the microscopic Maxwell equations for sources of polarization  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = -d \sum_j \mathbf{b}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ . The result, as demonstrated in Appendix A, reads

$$\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}) = -i \frac{dk^3}{6\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{b}_m. \quad (5)$$

The scattered field  $\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}_j)$  at the atomic position  $\mathbf{r}_j$  has a divergent contribution in the term  $m = j$  of the sum in Eq. (5). This is a well-known problem of the self-field, i.e., the field generated by the atom acting on the atom itself. Usually, in multiple-scattering theories this problem is circumvented by introducing a cut-off length of the order of the size of the real physical scatterer [24]. However, in the present approach the self-field does not play any role. In fact, calling  $\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}_j)$  the self-field of the atom  $j$ , Eq. (5) turns into

$$\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}_j) - i \frac{dk^3}{6\pi\epsilon_0} \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{b}_m. \quad (6)$$

Combining Eqs. (4) and (6), one can obtain

$$\mathbf{b}_j = \frac{d}{\hbar(\Delta + i\gamma/2)} [\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j)], \quad (7)$$

where  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}_j) - \mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}_j)$  is the electric field acting on the  $j$ th atom without the self-field contribution.  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j)$  is introduced to describe the field at the atomic positions and avoid the divergence problem present in Eq. (5). The electric dipole moment of each atom  $\mathbf{p}_j = -d\mathbf{b}_j$  is directly proportional to the sum of the incident field and the one scattered by all other atoms, as assumed in the cooperative scattering description (4).

## 3. MULTIPLE-SCATTERING SERIES

In the microscopic approach of cooperative scattering presented in Section 2, the radiation field is determined from the knowledge of the individual atomic responses  $\mathbf{b}_j$ , which are themselves derived from the linear problem Eq. (4). On the contrary, the multiple-scattering approach is based on a recursive set of equations for the sole radiation field. It is obtained by inserting Eq. (7) back into Eq. (6), leading to an implicit equation for the scattered field  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j)$  acting on the  $j$ th atom:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j) = \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot [\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_m) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_m)], \quad (8)$$

where  $\kappa(\delta) = 1/(2i\delta - 1)$  and  $\delta = \Delta/\gamma$ . Introducing the total field  $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tot}}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j)$ , the above equation can also be written in a matrix form

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tot}} = (\mathbf{I} - \mathcal{G})^{-1} \mathbf{E}_{\text{in}}, \quad (9)$$

where  $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tot}}$  and  $\mathbf{E}_{\text{in}}$  are vectors containing the  $3N$  components of the effective electric field acting on the  $j$ th atom (without the self-field contribution) and the incident field, respectively;

$I$  is the  $3N \times 3N$  unit matrix, and  $\mathcal{G} = \kappa(\delta)\mathbf{G}$  is a  $3N \times 3N$  matrix containing the Green's function  $\mathbf{G}_{jm} = \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)$  whose components are given by Eq. (2).

The multiple-scattering approach consists in solving Eq. (8) by iteration. Introducing the scattered field  $\bar{\mathbf{E}}^{(n)}$  after  $n$  scattering events, the following recurrence relation is obtained from Eq. (9):

$$\bar{\mathbf{E}}^{(n)}(\mathbf{r}_j) = \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \cdot \bar{\mathbf{E}}^{(n-1)}(\mathbf{r}_m), \quad (10)$$

where  $n = 1, 2, \dots$  and the incident field  $\bar{\mathbf{E}}^{(0)}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j)$  plays the role of the seed. The total scattered field (8) corresponds to the infinite sum of all scattered fields,

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}^{(n)}(\mathbf{r}_j), \quad (11)$$

provided the series is converging. The effective field felt by the scatterer at  $\mathbf{r}_j$  consists of the incident wave  $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j)$  and the wave scattered from the other atoms in the cloud (except the self-field of the atom at  $\mathbf{r}_j$ ) given by Eq. (11) and resulting from an increasing number of scattering events of the incident field. Equation (9) can be extended as a series:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_{\text{tot}}(\mathbf{r}_j) &= \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_m) \\ &+ \kappa^2(\delta) \sum_{m \neq j} \mathbf{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m) \sum_{l \neq m} \mathbf{G}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l) \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_l) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

The infinite series (11) converges only if all eigenvalues of  $\mathcal{G}$  have their modulus less than unity [28]. When this condition is satisfied, the multiple-scattering expansion can be used to calculate the radiated field.

Note that convergence of the series (11) or of the sum (12) is not tied to the existence of a solution for the field. Indeed Eq. (8) always admits a solution, whereas the linear operator  $\mathcal{G}$  of the recurrence Eq. (10) may admit eigenvalues of modulus larger than unity, in which case Eq. (11) does not converge. In that case each scattering order radiates more light than the previous one, and the multiple-scattering expansion diverges. In order to illustrate this point, the electric field profile inside a Gaussian cloud  $\mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_j \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \bar{\mathbf{E}}^{(n-1)}(\mathbf{r}_j)$  and the far-field radiated power  $P^{(n)} = (\epsilon_0 c / 2) \int |\mathbf{E}^{(n)}|^2 dS$  are plotted for different orders  $n$  in Figs. 1 and 2, respectively. Both quantities have been obtained for two different optical thicknesses  $b(\delta) = b_0 / (1 + 4\delta^2)$ , where  $b_0 = 3N / (k\sigma_R)^2$  is the on-resonant optical thickness for a Gaussian cloud with rms size  $\sigma_R$ . The two simulations have been realized for  $N = 500$  atoms with  $b_0 = 5$ ,  $\sigma_R = 17.32/k$  and for two different detunings,  $\delta = 4.5$  and  $\delta = 0$ , corresponding to  $b(\delta) = 0.061$  and  $b(\delta) = 5$ , respectively. For the case of small optical thickness ( $b(\delta) = 0.061$ ), the field decreases as the scattering order  $n$  increases, and the series (11) converges. For the case of larger optical thickness ( $b(\delta) = 5$ ), the presence of eigenvalues of modulus larger than unity makes the multiple-scattering series diverge. Hence, in the presence of above-unity eigenvalues of  $\mathcal{G}$ , the multiple-scattering description loses its validity: for sufficiently dense media, due to the long-range interaction of the Green's function, the build-up of the scattered radiation field

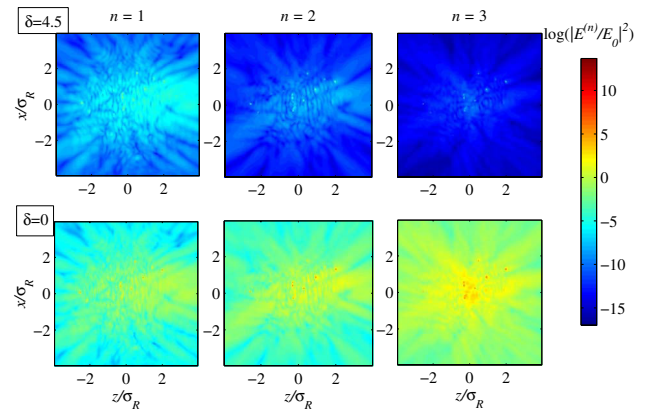


Fig. 1. Profile of the radiation field inside a Gaussian cloud,  $\mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_j \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \bar{\mathbf{E}}^{(n-1)}(\mathbf{r}_j)$ , in the  $y = 0$  plane for different orders  $n$  (from left to right) and two different optical thicknesses (top and bottom). For small optical thickness ( $b(\delta) = 0.061$ , top line), the field decreases as the scattering order  $n$  increases, and the series (10) converges. For larger optical thickness ( $b(\delta) = 5$ , bottom line), the presence of eigenvalues of modulus larger than unity makes the multiple-scattering series diverge. In both cases, the presence of local fields much stronger than the incident one is due to the divergent field radiated in the vicinity of the atoms, which can be arbitrary close to the  $y = 0$  plane. Simulations realized for a Gaussian cloud of  $N = 500$  atoms with an on-resonant optical thickness  $b_0 = 5$  and standard deviation  $\sigma_R = 17.32/k$ , where  $b_0 = 3N / (k\sigma_R)^2$ ; top pictures correspond to  $\delta = 4.5$  and  $b(\delta) = 0.061$ , bottom pictures to the resonant case  $\delta = 0$  and  $b(\delta) = 5$ .

cannot be seen as the sum of interactions involving an increasing number of atoms, and the local iteration of the scattering event described by Eq. (10) is no longer possible. Instead, the total scattered field is a result of a global interaction with the entire sample. Let us remark that the criterion of all eigenvalues having modulus below unity for the convergence of the series is in agreement with the results of Ref. [29]. A detailed study of the typical spectrum of the linear operator in Eq. (10) has been proposed in [30], yet it is important to mention that the spectrum exhibits strong fluctuations from one realization to another. Since the multiple-scattering process corresponds to a geometric series, the radiated power grows or decreases as a power law of the largest eigenvalue of the linear operator in Eq. (10) for large  $n$ .

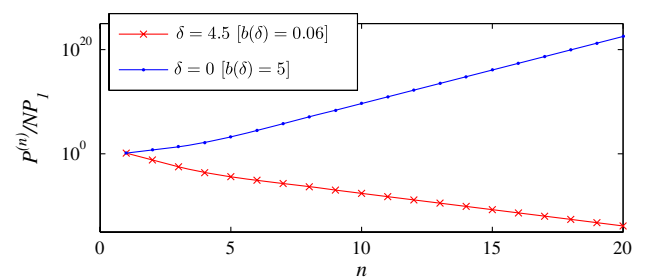


Fig. 2. Far-field power  $P^{(n)} = (\epsilon_0 c / 2) \int |\mathbf{E}^{(n)}|^2 dS$  radiated by the atomic cloud (measured on a spherical surface of radius  $r \gg 1/k$ ) versus the scattering order  $n$  for the same parameters as in Fig. 1. For small optical thickness ( $b(\delta) = 0.061$ , red crosses), the scattered power decreases as the scattering order  $n$  increases, whereas for larger optical thickness ( $b(\delta) = 5$ , blue dots), the power diverges.  $P^{(n)}$  is in units of the independent-atom power  $NP_1$ , where  $P_1 = (4\pi I_0 / k^2) / (1 + 4\delta^2)$  and  $I_0$  is the incident intensity.

Once obtained from Eq. (11)  $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j)$ , using Eqs. (5) and (7) the scattered field in position  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j$  is fully determined as

$$\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_{j=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot [\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j)]. \quad (13)$$

The multiple-scattering nature of the field detected at  $\mathbf{r}$  is evident from Eq. (13): the first term in the sum represents all the single scattering, and the second term collects all the multiple scattering. The  $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j)$  term, which contains all scattering orders starting from the first [see Eq. (11)], yields the double and higher scattering orders in Eq. (13) after applying  $G$ .

We point out that the solution for the scattered field [given by the infinite series of Eqs. (11) and (13)] is fully equivalent to solving Eq. (4) for  $\mathbf{b}_j$  and then calculating the field using Eq. (5). Equation (4) can be solved exactly by numerical inversion of this linear problem. The only constraint we deal with is the limited number  $N$  of scatterers that can be handled by the computer capacities. From the perspective of computing the scattered field, the microscopic approach has a clear advantage over the multiple-scattering one, which requires the evaluation of an infinite sum. The numerical solution of the microscopic approach provides a solution valid for arbitrary distributions of scatterers in the vacuum using only finite matrices. Finally, it treats light as a complex field, not only as an intensity, so that it naturally embeds the coherence of the multiple-scattering process.

In the far-field limit, the scattered field can be derived using the asymptotic form of the vectorial Green's function for  $r \gg r_j$ :

$$G_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \approx \frac{3}{2} \frac{e^{ikr}}{ikr} [\delta_{\alpha,\alpha'} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_{\alpha'}] e^{-ik\mathbf{r}_j}, \quad (14)$$

where  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$ . For an incident plane wave with  $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_0 E_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$ , where  $\hat{\mathbf{e}}_0$  is the unit polarization vector, the scattered far field derived from Eq. (13) is

$$\mathbf{E}_{\text{sca}}^{\text{far}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1^{\text{far}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{ms}}^{\text{far}}(\mathbf{r}), \quad (15)$$

where

$$\mathbf{E}_1^{\text{far}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) E_0 \frac{e^{ikr}}{ikr} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}_0)] N S_N(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (16)$$

corresponds to the single-scattering order and  $S_N(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = (1/N) \sum_j \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}_j]$  is the structure factor. Equation (16) is the well-known expression for the Rayleigh scattering by particles with size much smaller than the optical wavelength when each atom is excited by the incident field only. Then the scattered field results from a coherent superposition of the field amplitudes generated by each atom and is proportional to the structure factor. The multiple-scattering contribution to the far field of Eq. (15) is, using Eq. (11),

$$\mathbf{E}_{\text{ms}}^{\text{far}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \frac{e^{ikr}}{ikr} N \hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}(\mathbf{k})], \quad (17)$$

where

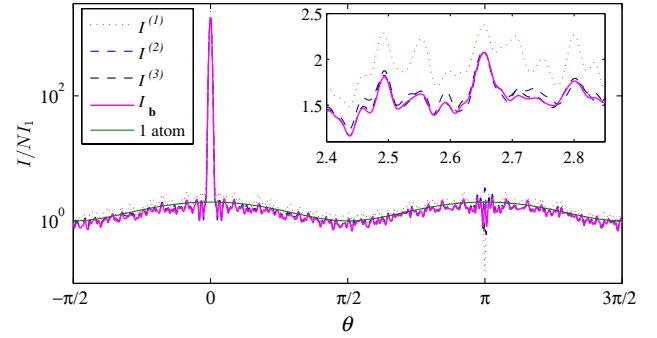


Fig. 3. Intensity diagram,  $I^{(n)} = (\epsilon_0 c/2) |\sum_{j=1}^n \mathbf{E}^{(j)}|^2$ , versus the polar angle  $\theta$ , for  $n = 1, 2, 3$ , derived from Eq. (13). The intensity scattered by the dipoles,  $I_b = (\epsilon_0 c/2) |\mathbf{E}_b|^2$ , is derived from Eq. (4) and contains all the scattering orders. The modulation of the background is due to the vectorial nature of the light (linearly polarized light): the single-atom intensity  $I_1(1 + \cos^2 \theta)$  is plotted as a plain green line, where  $I_1 = I_0/[k^2 r^2(1 + 4\delta^2)]$ . The inset shows a zoom of the radiation (linear scale). Simulations have been realized for a Gaussian cloud of  $N = 1000$  atoms with on-resonance optical thickness  $b_0 = 1$ , detuning  $\delta = 0$ , and rms size  $\sigma_R \approx 54.8/k$  given by  $b_0 = 3N/(k\sigma_R)^2$ . The intensity is averaged over the azimuthal angle  $\phi$  and is in units of  $N I_1$ .

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j) e^{-ik\mathbf{r}_j}. \quad (18)$$

We stress that our approach is valid beyond the single-scattering limit. The single-scattering approximation holds when the optical thickness  $b(\delta) = b_0/(1 + 4\delta^2)$  is much smaller than unity. In contrast, our multiple-scattering approach is valid for finite values of  $b(\delta) < 1$ : the convergence of the series of Eq. (11) guarantees the validity of our multiple-scattering expansion [31,32].

Finally, we emphasize that if the infinite sum in Eq. (11) converges, it gives the *exact* solution for the collective scattering problem given by Eqs. (4) and (5). To illustrate this point, we compare the intensity radiated up to the  $n$ th order  $I^{(n)} = (\epsilon_0 c/2) |\sum_{j=1}^n \mathbf{E}^{(j)}|^2$  for  $n = 1, 2, 3$ , as well as the intensity  $I_b$  provided by the dipole amplitudes  $\mathbf{b}_m$  derived from Eq. (4) and containing all the scattering orders. In particular,  $I^{(1)}$  describes the single scattering only,  $I^{(2)}$  the sum of single and double scattering, etc. For an optical thickness  $b(\delta)$  equal to unity ( $b_0 = 1$ ,  $\delta = 0$ ), the convergence is relatively slow, but clearly visible in Fig. 3. For optical thickness much smaller than unity, the convergence is very fast and the single-scattering physics contained in  $\mathbf{E}^{(1)}$  describes already very well the total scattered field (not shown here).

We note in Fig. 3 that the coupled dipole equation predicts a background radiation lower than  $N$  times that of a single atom. This suggests a reduction of the background radiation, in favor of the coherent forward radiation, under the effects of cooperativity. This effect will be the subject of a future dedicated study.

#### 4. COHERENT BACKWARD AND FORWARD SCATTERING

As an application of the multiple-scattering approach, we investigate CBS and coherent forward scattering (CFS) from a collection of  $N$  atoms. For the sake of simplicity, we assume that the radiation waves are scalar, neglecting polarization and near-field effects. In the scalar radiation theory, the three

components  $b_j^a$  in Eq. (1) are replaced by a single value  $\beta_j$ , the vectorial kernel  $G_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{r})$  is substituted by the scalar Green's function  $G(r) = \exp(ikr)/(ikr)$ , and the decay constant  $\gamma$  is replaced by  $\Gamma = (3/2)\gamma$  [18,33,34]. Then, the scalar equivalent of Eq. (13) is

$$E_{\text{sca}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \sum_{j=1}^N G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) [E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \tilde{E}(\mathbf{r}_j)]. \quad (19)$$

We approximate the multiple-scattering field  $\tilde{E}(\mathbf{r}_j)$  by its first contribution:

$$\tilde{E}(\mathbf{r}_j) \approx \kappa(\delta) \sum_{m \neq j} G(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_m), \quad (20)$$

which is equivalent to considering single- and double-scattering events only:

$$E_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = E_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \kappa(\delta) \sum_{j=1}^N G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j) + \kappa^2(\delta) \sum_{m=1}^N \sum_{j \neq m}^N G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|) G(|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j|) E_{\text{in}}(\mathbf{r}_j). \quad (21)$$

The second term in Eq. (21) describes the single scattering of the incident wave by each atom in position  $\mathbf{r}_j$ , followed by its propagation toward  $\mathbf{r}$ . The third term corresponds to the double-scattering contribution; i.e., the photons are first scattered by the atoms in  $\mathbf{r}_j$ , then propagate to  $\mathbf{r}_m$ , where they are scattered again and reach position  $\mathbf{r}$ . As it can be observed in Fig. 4, the double scattering is the first of the multiple-scattering processes that contributes to CBS. It results from the interference between the wave that is first scattered in  $\mathbf{r}_j$  and then in  $\mathbf{r}_m$ , and the reciprocal path, when the wave is first scattered in  $\mathbf{r}_m$  and then in  $\mathbf{r}_j$ . This effect can be captured by calculating the scattered field in the far-field limit, approximating the Green's function as  $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) \approx \exp(ikr - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)/(ikr)$ :

$$E_{\text{sca}}(\mathbf{r}) = \kappa(\delta) \frac{e^{ikr}}{ikr} E_0 \sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} + \kappa^2(\delta) \frac{e^{ikr}}{ikr} E_0 \sum_{m=1}^N \sum_{j \neq m}^N G(|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j|) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m)}, \quad (22)$$

where we assume that the incident field is a plane wave  $E_{\text{in}}(\mathbf{r}) = E_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$ . Introducing the factor

$$T_N(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{N} \sum_m \sum_{j \neq m} G(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m)}, \quad (23)$$

the scattered intensity up to the second scattering order can be written as

$$I_{\text{sca}}(\mathbf{r}) = I_1 N^2 |S_N(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \kappa(\delta) T_N(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|^2, \quad (24)$$

where  $I_1 = I_0/[k^2 r^2 (1 + 4\delta^2)]$  is the single-atom scattered intensity and  $I_0$  is the intensity of the incident wave. Upon configuration averaging, the structure factor gives an incoherent contribution,  $|S_N(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 = 1/N$ , while the

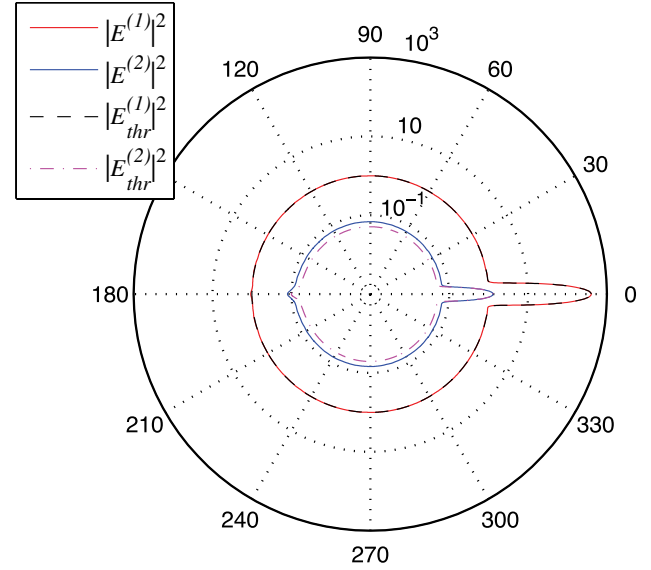


Fig. 4. Radiation profile  $|E^{(n)}(\theta)|^2$  in the far-field limit for scattering orders  $n = 1, 2$ . The single-scattering order  $E^{(1)}$  exhibits only a forward contribution (peaks pointing to the right) and a homogeneous background. The double-scattering contribution  $E^{(2)}$  shows both forward and backward (CBS) patterns (peaks pointing to the left) in addition to the background. The theoretical curves (thr) are derived from Eqs. (30), (31), and (32). Simulations are realized for a Gaussian spherical cloud consisting of  $N = 400$  atoms with resonant optical thickness  $b_0 = 2N/(k\sigma_R)^2 = 1$ , standard deviation  $\sigma_R \approx 28.3/k$ , and detuning  $\delta = 1$ , and averaged over 1000 realizations. The incoming field is unity  $E_0 = 1$ , and the radius of observation is  $3 \cdot 10^4/k$ . Scale is logarithmic.

coherent contribution in the forward direction for large  $N$  can be written as a continuous integral:

$$S_\infty = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}], \quad (25)$$

where  $\rho(\mathbf{r})$  is the atomic density.  $|T_N|^2$  yields an incoherent contribution plus two coherent contributions, which, however, have different origins. Taking the square modulus of Eq. (23) and considering only equal pairs of atoms ( $j, m$ ) in  $T_N$  and  $T_N^*$ , we obtain

$$|T_N(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|_{\text{pair}}^2 \approx \frac{1}{N^2} \sum_m \sum_{j \neq m} \frac{1 + \cos[(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)]}{k^2 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|^2}. \quad (26)$$

The first incoherent term emerges when the same pair of atoms is considered twice [ $1/k^2 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|^2$  term in Eq. (26)], whereas the second term results from the pair ( $j, m$ ) crossed with its reciprocal path ( $m, j$ ) (cosine term). The latter is known as the CBS term [8], since it also yields a backward coherent radiation. In the diagrammatic approach, the first term in Eq. (26) corresponds to the first 'ladder' term, and the second one to the 'most-crossed term' [24]. Besides these pair terms,  $T_N$  also gives a coherent contribution to the forward intensity due to the processes involving more than two atoms. This contribution in the continuous density limit can be written as

$$T_{\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r}_1 \rho(\mathbf{r}_1) \int d\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \times e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2)}. \quad (27)$$

Collecting the different contributions, the scattered intensity up to the double-scattering order reads

$$I_{\text{sca}} = I_1 N \left\{ 1 + \frac{N}{1 + 4\delta^2} |T_N|_{\text{pair}}^2 + N|F|^2 \right\}, \quad (28)$$

where  $F = S_{\infty} + \kappa(\delta)T_{\infty}$ . The first term is the isotropic incoherent contribution  $NI_1$  of  $N$  independent atoms. The second term enhances the previous incoherent term and also provides the CBS cone [second term in Eq. (26)]. Finally, the third term in Eq. (28) contributes to the coherent forward emission as the sum of the single- and double-scattering contributions.

The CBS cone reveals itself upon averaging over the pair double-scattering term (26). We first average over the direction of the vector  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m$ , assuming an atomic distribution with infinite boundaries, as, for instance, the Gaussian one, which is easy to parametrize. Moreover, there is no need to know the details about the density of the cloud, since we deal with angular variables only. We note that although the procedure does not correspond to a rigorous configuration average, it allows for analytical results and compares well with numerical results obtained by configuration averages (see Fig. 4).

This first averaging results in (see Appendix B for details)

$$\langle |T_N|_{\text{pair}}^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_{m \neq j} \frac{1}{k^2 r_{jm}^2} \times \left\{ 1 + \frac{\sin[2kr_{jm} \cos(\theta/2)]}{2kr_{jm} \cos(\theta/2)} \right\}, \quad (29)$$

where  $\theta$  refers to the angle of  $\mathbf{k}$  with respect to the direction of  $\mathbf{k}_0$ . The average over the pair distance  $r_{jm} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|$  is the next step, and the resulting backscattering enhancement depends on the atomic distribution. In the next section, we discuss the CBS for Gaussian spheres.

### A. Gaussian Sphere Density Profile

As discussed previously, our multiple-scattering approach is valid for arbitrary geometries, including inhomogeneous media. Let us illustrate this on a Gaussian sphere of standard deviation  $\sigma_R$ , for which the contribution of double scattering to CBS enhancement reads (see Appendix C)

$$\langle |T_N(\theta)|_{\text{pair}}^2 \rangle = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}[2\sigma \cos(\theta/2)]}{2 \cos(\theta/2)} \right\} = \frac{E(\theta)}{2\sigma^2} \quad (30)$$

with  $\sigma = k\sigma_R$ .  $E(\theta)$  has a maximum enhancement of 2 (see Fig. 6) and an angular FWHM of  $\Delta\theta = 2\sqrt{3}/\sigma \approx 0.55(\lambda/\sigma_R)$ .

For a Gaussian sphere, the single-scattering forward contribution gives (see Ref. [17], Eq. (25))

$$S_{\infty}(\theta) = \exp[-2\sigma^2 \sin^2(\theta/2)], \quad (31)$$

while the second-order forward contribution, in the limit of large spheres  $\sigma \gg 1$ , is

$$T_{\infty}(\theta) \approx \frac{N}{4\sigma^2} \exp[-4\sigma^2 \sin^2(\theta/4)]. \quad (32)$$

The exact expression and its derivation are given in Appendix D. The total scattered intensity for a Gaussian sphere, up to the second scattering order [see Eq. (28)], reads

$$I_{\text{sca}}(\mathbf{r}) = I_1 N \left\{ 1 + \frac{b(\delta)}{4} E(\theta) + N|F(\theta)|^2 \right\}, \quad (33)$$

where the forward contribution is given by

$$F(\theta) = e^{-2\sigma^2 \sin^2(\theta/2)} - (1 + 2i\delta) \frac{b(\delta)}{8} e^{-4\sigma^2 \sin^2(\theta/4)}, \quad (34)$$

and  $b(\delta) = b_0/(1 + 4\delta^2)$  with  $b_0 = 2N/\sigma^2$  being the resonant optical thickness for scalar light. Equation (34) highlights the fact that the multiple-scattering expansion is performed in orders of  $b(\delta) = \sqrt{2\pi}(\sigma_R/\ell)$ , i.e., in orders of inverse scattering mean free path  $\ell = 1/[\rho_0 \sigma_{\text{sc}}(\delta)]$ , where  $\sigma_{\text{sc}}(\delta) = 4\pi/[k^2(1 + 4\delta^2)]$  is the scattering cross section.

The background second-order scattering is observed to interfere destructively with the background first-order scattering in Fig. 5, leading to an overall reduction of the background radiation. This effect is already present in the mathematical expression of the forward contribution given by Eq. (34), which is expected to be the dominant term except for the backward direction.

*Coherent Backscattering.* Our analysis is in excellent agreement with the experimental results of Bidet and coworkers [13]; see Fig. 6. These authors probed the CBS cone for a large cloud ( $\sigma = 8098$ ) of scalar optical thickness  $b_0 = 1.93$  at resonance, and measured an angular width of the cone of  $0.50 \pm 0.04$  mrad. This result is in accord with the theoretical value of 0.46 mrad derived from Eq. (30).

*Coherent Forward Scattering.* —The single-scattering forward lobe is given by the first term in Eq. (34), and reflects the diffraction from the sample. Surprisingly, we also observe a forward lobe for the double-scattering contribution, given by the second term in Eq. (34). The ratio between the peak intensity of the double scattering compared to that of single scattering is always given by  $b_0^2/64(4\delta^2 + 1)$ , and the ratio of

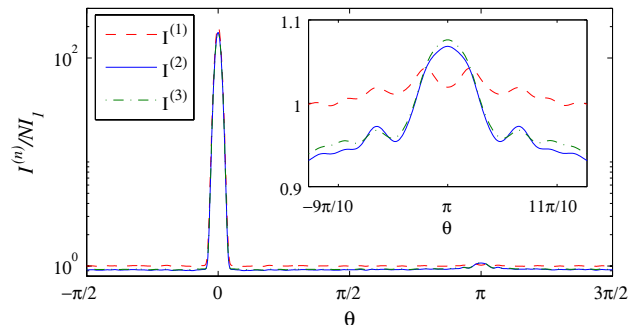


Fig. 5. Far-field scattered intensity versus  $\theta$  up to the first, second, and third scattering orders, i.e.,  $I^{(n)} = (e_0 c/2) |\sum_{j=1}^n E^{(j)}|^2$ , in units of  $NI_1$ . The inset is a zoom of the backscattering region (linear scale). Simulations realized for a Gaussian spherical cloud of on-resonant optical thickness  $b_0 = 1$ ,  $N = 200$  particles, scaled size  $\sigma = 20$ , and laser detuning  $\delta = 0.5$ . The intensity has been averaged over 1000 realizations.

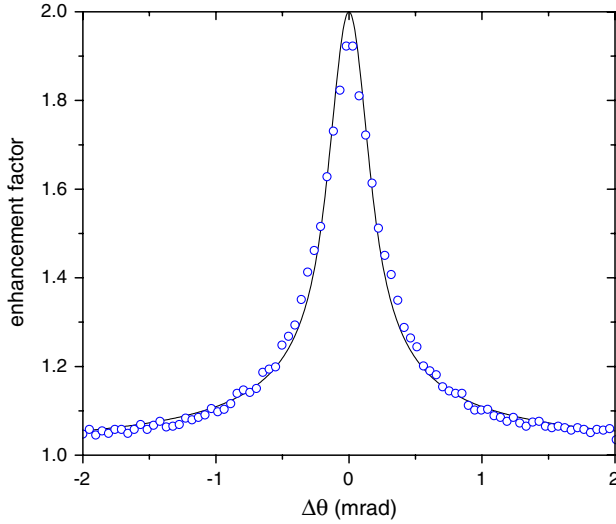


Fig. 6. Experimental and theoretical CBS enhancement  $E(\theta)$  for a Gaussian sphere of normalized standard deviation  $\sigma = 8098$  and  $\delta = 0$ . The circles correspond to the experimental values reported in Fig. 2 of Ref. [13], while the plain curve reproduces Eq. (33). It must be noted that the only free parameter is a 3% adjustment of the background.

their power by  $b_0^2/32(4\delta^2 + 1)$  for  $\sigma \gg 1$ , independently of spatial density.

We, however, note that increasing the system size at constant  $b_0$  and  $\delta$  will increase the peak amplitude and power for both the first and second scattering orders [last  $N$  factor in Eq. (33)], yet their ratio remains constant. This CFS lobe could be compared to that of Refs. [35,36]. In both these works, the forward lobe appears only in the high spatial density limit close to the Anderson localization threshold, whereas in our case, the lobe is also present in the low-density limit.

## 5. CONCLUSION

We have proposed an iterative multiple-scattering approach, where the radiation field at each scattering order is obtained from the field at the atomic positions calculated at the previous order. Provided all the eigenvalues of the iterative scattering operator have below-unity eigenvalues, it provides a converging solution for the multiple-scattering problem. In the opposite case, the picture of waves being scattered at one atom after the other collapses, and the multiple-scattering series becomes divergent. A limitation of the approach is that the derivation of the  $n$ th scattering order involves  $n - 1$  integrals over the cloud distribution, which practically limits the efficiency of the method to the first scattering orders for non-trivial geometries.

On the other hand, the series permits us to link observable phenomena to particular scattering orders, thus deepening our understanding of their physical origin. As an example, for arbitrary distributions we calculate the double-scattering contributions to backward coherent radiation, the so-called CBS cone.

Finally, the multiple-scattering approach presented in this paper may find applications in other many-body scattering problems. One such example is the elucidation of the relationship between Bragg scattering and the phenomenon of photonic bandgaps, the first one occurring in the single- and the second one in the multiple-scattering regime.

## APPENDIX A: DERIVATION OF EQ. (5)

The radiation field can be obtained from Maxwell equations in the presence of a polarization  $\mathbf{P}$ . The equations for the Fourier component at the frequency  $\omega = ck$  are

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}, \quad (\text{A1})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0(\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}), \quad (\text{A2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -(1/\epsilon_0)\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{A3})$$

Taking the curl of Eq. (A1) and using Eq. (A2),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = (\omega^2/c^2)[\mathbf{E} + (1/\epsilon_0)\mathbf{P}], \quad (\text{A4})$$

where  $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$  is the vacuum speed of light. Using the identity  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$  and Eq. (A3), we obtain

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = -\frac{k^2}{\epsilon_0} \left[ \mathbf{P} + \frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) \right]. \quad (\text{A5})$$

The solution of Eq. (A5) is easily obtained using the scalar Green's function  $G(r) = \exp(ikr)/(ikr)$  as

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \frac{k^3}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left[ \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')) \right] \quad (\text{A6})$$

or, for each component,

$$E_\alpha(\mathbf{r}) = i \frac{k^3}{4\pi\epsilon_0} \sum_\beta \int d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \times \left[ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} \right] P_\beta(\mathbf{r}'). \quad (\text{A7})$$

By integrating by parts and using Eq. (3), we obtain

$$E_\alpha(\mathbf{r}) = i \frac{k^3}{6\pi\epsilon_0} \sum_\beta \int d\mathbf{r}' G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') P_\beta(\mathbf{r}'). \quad (\text{A8})$$

Taking a discrete distribution of electric dipoles, with  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = -d \sum_{j=1}^N \mathbf{b}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ , we obtain

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i \frac{dk^3}{6\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{b}_m. \quad (\text{A9})$$

## APPENDIX B: AVERAGE OVER RANDOM ANGULAR VARIABLES FOR THE CBS CONTRIBUTION

Assuming in the double-scattering contribution of Eq. (26)  $\mathbf{k}_0 = k(0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{k} = k(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , and  $\mathbf{r}_{jm} = r_{jm}(\sin \theta_{jm} \cos \phi_{jm}, \sin \theta_{jm} \sin \phi_{jm}, \cos \theta_{jm})$ , where  $\mathbf{r}_{jm} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m$ , then

$$(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}_{jm} = kr_{jm} [\sin \theta \sin \theta_{jm} \cos(\phi_{jm} - \phi) + (1 + \cos \theta) \cos \theta_{jm}]. \quad (\text{B1})$$

By averaging over  $\theta_{jm}$  and  $\phi_{jm}$ , we obtain

$$\begin{aligned} \langle |T_N|_{\text{pair}}^2 \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{j,m \neq j} \frac{1}{k^2 r_{jm}^2} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{jm} \int_0^\pi d\theta_{jm} \sin \theta_{jm} \right. \\ &\times \cos\{kr_{jm}[\sin \theta \sin \theta_{jm} \cos(\phi_{jm} - \phi) \\ &\left. + (1 + \cos \theta) \cos \theta_{jm}]\} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Using the expression  $\int_0^{2\pi} d\phi \cos[a + b \cos(\phi - \phi')] = 2\pi \cos(a)J_0(b)$ , the integration over  $\phi_{jm}$  gives

$$\begin{aligned} \langle |T_N|_{\text{pair}}^2 \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_{m \neq j} \frac{1}{kr_{jm}^2} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_{jm} \sin \theta_{jm} \right. \\ &\times \cos[kr_{jm}(1 + \cos \theta) \cos \theta_{jm}] \\ &\left. \times J_0[kr_{jm} \sin \theta \sin \theta_{jm}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Using the expression

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos(a \cos \theta) J_0(b \sin \theta) = 2 \frac{\sin \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (\text{B4})$$

we obtain

$$\langle |T_N|_{\text{pair}}^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_j \sum_{m \neq j} \frac{1}{kr_{jm}^2} \{1 + \text{sinc}[2kr_{jm} \cos(\theta/2)]\}, \quad (\text{B5})$$

where  $\text{sinc}(z) = \sin(z)/z$ .

### APPENDIX C: DERIVATION OF EQ. (30)

Let us consider the integral

$$I = \int d\mathbf{r}_1 \rho(\mathbf{r}_1) \int d\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2) f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (\text{C1})$$

Changing integration variables from  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$  to  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  and  $\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,

$$I = \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{s} \rho(\mathbf{R} - \mathbf{s}/2) \rho(\mathbf{R} + \mathbf{s}/2) f(|\mathbf{s}|). \quad (\text{C2})$$

Assuming a Gaussian distribution,  $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \exp(-r^2/2\sigma_R^2)$ , since  $|\mathbf{R} + \mathbf{s}/2|^2 + |\mathbf{R} - \mathbf{s}/2|^2 = 2R^2 + s^2/2$ , in polar coordinates the integral (C1) becomes

$$\begin{aligned} I &= \frac{2N^2}{\pi\sigma_R^6} \int_0^\infty dR R^2 e^{-R^2/\sigma_R^2} \int_0^\infty ds s^2 e^{-s^2/4\sigma_R^2} f(s) \\ &= \frac{4N^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} f(2\sigma_R x). \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

Taking

$$f(s) = \frac{1}{k^2 s^2} \left\{ 1 + \frac{\sin[2ks \cos(\theta/2)]}{2sk \cos(\theta/2)} \right\}, \quad (\text{C4})$$

the integral is

$$I = \frac{N^2}{\sigma^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x e^{-x^2} \left[ 1 + \frac{\sin(ax)}{ax} \right] = \frac{N^2}{2\sigma^2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{a} \text{erf}(a/2) \right], \quad (\text{C5})$$

where  $\sigma = k\sigma_R$  and  $a = 4\sigma \cos(\theta/2)$ .

### APPENDIX D: DERIVATION OF EQ. (32)

Let us consider the coherent contribution  $T_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  of Eq. (27) and introduce  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  and  $\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , so that

$$\begin{aligned} T_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &= \frac{1}{ikN} \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{s} \rho(\mathbf{R} + \mathbf{s}/2) \rho(\mathbf{R} - \mathbf{s}/2) \\ &\times s^{-1} e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R} + i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{s}/2 + iks}. \end{aligned} \quad (\text{D1})$$

For a Gaussian distribution the double integral factorizes,

$$\begin{aligned} T_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &= \frac{\rho_0^2}{ikN} \int d\mathbf{R} e^{-R^2/\sigma_R^2 + i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} \\ &\times \int d\mathbf{s} s^{-1} e^{-s^2/4\sigma_R^2 + i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{s}/2 + iks}. \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

Assuming  $\mathbf{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  and  $\mathbf{k}_0 = k(0, 0, 1)$ , the first integral yields

$$I_1 = \rho_0 \int d\mathbf{R} e^{-R^2/\sigma_R^2 + i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} = \frac{N}{2\sqrt{2}} e^{-\sigma^2(1 - \cos \theta)/2},$$

where  $\sigma = k\sigma_R$ . The second integral of Eq. (D2), after integration over the angular variables, yields

$$I_2 = \frac{2N}{i\sqrt{2\pi}\sigma^2 \cos(\theta/2)} \int_0^\infty dx x e^{-x^2/4 + iax} \sin[\sigma \cos(\theta/2)x].$$

Using the expression

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dx x e^{-x^2/4 + iax} \sin(bx) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \{-e^{4ab} [\text{erfi}(a - b) - i] + \text{erfi}(a + b) - i\} e^{-(a+b)^2} \end{aligned} \quad (\text{D3})$$

we obtain, from the above equations

$$\begin{aligned} T_\infty(\theta) &= \frac{N e^{-2\sigma^2(1 + \cos \theta/2)}}{4i\sigma^2 \cos \theta/2} \{\text{erfi}[\sigma(1 + \cos \theta/2)] \\ &- e^{4\sigma^2 \cos \theta/2} \text{erfi}[\sigma(1 - \cos \theta/2)] + i(e^{4\sigma^2 \cos \theta/2} - 1)\}. \end{aligned} \quad (\text{D4})$$

Notice that  $T_\infty(\pi) = N \exp(-2\sigma^2)$ . For large  $\sigma$  and near the forward direction, we get

$$T_\infty(\theta) \approx \frac{N}{4\sigma^2} e^{-4\sigma^2 \sin^2(\theta/4)} \approx \frac{b_0}{8} e^{-4\sigma^2 \sin^2(\theta/4)}. \quad (\text{D5})$$

### ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge financial support from the Research Executive Agency (Program COSCALL, grant No. PIRSES-GA-2010-268717), from USP/COFECUB (project Uc Ph 123/11),

and from GDRI “NANOMAGNETISM, SPIN ELECTRONICS, QUANTUM OPTICS AND QUANTUM TECHNOLOGIES.” M.T.R. is supported by an Averroès exchange program. R. B. and Ph. W. C. acknowledge support from the Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

## REFERENCES

1. M. C. W. van Rossum and T. M. Nieuwenhuizen, “Multiple scattering of classical waves: microscopy, mesoscopy, and diffusion,” *Rev. Mod. Phys.* **71**, 313–371 (1999).
2. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Multiple Scattering of Light by Particles: Radiative Transfer and Coherent Backscattering* (Cambridge University, 2006).
3. E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*, 1st ed. (Cambridge University, 2007).
4. E. M. Purcell and C. R. Pennypacker, “Scattering and absorption by nonspherical dielectric grains,” *Astrophys. J.* **186**, 705–714 (1973).
5. A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media and Rough Surfaces*, Vol. 2 (Academic, 1978).
6. A. Ishimaru, “Wave propagation and scattering in random media and rough surfaces,” *Proc. IEEE* **79**, 1359–1366 (1991).
7. H. C. van de Hulst and R. Stark, “Accurate eigenvalues and exact extrapolation lengths in radiative transfer,” *Astron. Astrophys.* **235**, 511–520 (1990).
8. E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard, “Coherent backscattering of light by disordered media: analysis of the peak line shape,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1471–1474 (1986).
9. P.-E. Wolf and G. Maret, “Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media,” *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696–2699 (1985).
10. M. P. V. Albada and A. Lagendijk, “Observation of weak localization of light in a random medium,” *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692–2695 (1985).
11. M. B. van der Mark, M. P. van Albada, and A. Lagendijk, “Light scattering in strongly scattering media: multiple scattering and weak localization,” *Phys. Rev. B* **37**, 3575–3592 (1988).
12. G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser, “Coherent backscattering of light by cold atoms,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5266–5269 (1999).
13. Y. Bidet, B. Klappauf, J. C. Bernard, D. Delande, G. Labeyrie, C. Miniatura, D. Wilkowski, and R. Kaiser, “Coherent light transport in a cold strontium cloud,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 203902 (2002).
14. G. Labeyrie, D. Delande, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser, “Coherent backscattering of light by an inhomogeneous cloud of cold atoms,” *Phys. Rev. A* **67**, 033814 (2003).
15. O. Morice, Y. Castin, and J. Dalibard, “Refractive index of a dilute bose gas,” *Phys. Rev. A* **51**, 3896–3901 (1995).
16. A. A. Svidzinsky, J.-T. Chang, and M. O. Scully, “Cooperative spontaneous emission of  $n$  atoms: many-body eigenstates, the effect of virtual lamb shift processes, and analogy with radiation of  $n$  classical oscillators,” *Phys. Rev. A* **81**, 053821 (2010).
17. P. W. Courteille, S. Bux, E. Lucioni, K. Lauber, T. Bienaimé, R. Kaiser, and N. Piovella, “Modification of radiation pressure due to cooperative scattering of light,” *Eur. Phys. J. D* **58**, 69–73 (2010).
18. T. Bienaimé, M. Petruzzo, D. Bigerni, N. Piovella, and R. Kaiser, “Atom and photon measurement in cooperative scattering by cold atoms,” *J. Mod. Opt.* **58**, 1942–1950 (2011).
19. R. Bachelard, N. Piovella, and P. W. Courteille, “Cooperative scattering and radiation pressure force in dense atomic clouds,” *Phys. Rev. A* **84**, 013821 (2011).
20. T. Bienaimé, S. Bux, E. Lucioni, P. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser, “Observation of a cooperative radiation force in the presence of disorder,” *Phys. Rev. Lett.* **104**, 183602 (2010).
21. H. Bender, C. Stehle, S. Slama, R. Kaiser, N. Piovella, C. Zimmermann, and P. W. Courteille, “Observation of cooperative mie scattering from an ultracold atomic cloud,” *Phys. Rev. A* **82**, 011404 (2010).
22. T. Bienaimé, R. Bachelard, J. Chabé, M. T. Rouabah, L. Bellando, P. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser, “Interplay between radiation pressure force and scattered light intensity in the cooperative scattering by cold atoms,” *J. Mod. Opt.* **61**, 18–24 (2014).
23. I. M. Sokolov, M. D. Kupriyanova, D. V. Kupriyanov, and M. D. Havey, “Light scattering from a dense and ultracold atomic gas,” *Phys. Rev. A* **79**, 053405 (2009).
24. T. M. Nieuwenhuizen, A. Lagendijk, and B. A. van Tiggelen, “Resonant point scatterers in multiple scattering of classical waves,” *Phys. Lett. A* **169**, 191–194 (1992).
25. R. Bachelard, P. W. Courteille, R. Kaiser, and N. Piovella, “Resonances in Mie scattering by an inhomogeneous atomic cloud,” *EPL* **97**, 14004 (2012).
26. R. Friedberg, S. Hartmann, and J. Manassah, “Frequency shifts in emission and absorption by resonant systems of two-level atoms,” *Phys. Rep.* **7**, 101–179 (1973).
27. J. T. Manassah, “Cooperative radiation from atoms in different geometries: decay rate and frequency shift,” *Adv. Opt. Photon.* **4**, 108–156 (2012).
28. V. N. Fadeeva, *Computational Methods of Linear Algebra* (Dover, 1959).
29. S. B. Singham and C. F. Bohren, “Light scattering by an arbitrary particle: the scattering-order formulation of the coupled-dipole method,” *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 1867–1872 (1988).
30. A. Goetschy and S. E. Skipetrov, “Non-Hermitian Euclidean random matrix theory,” *Phys. Rev. E* **84**, 011150 (2011).
31. E. Akkermans, A. Gero, and R. Kaiser, “Photon localization and dicke superradiance in atomic gases,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 103602 (2008).
32. S. E. Skipetrov and A. Goetschy, “Eigenvalue distributions of large euclidean random matrices for waves in random media,” *J. Phys. A* **44**, 065102 (2011).
33. M. O. Scully, E. S. Fry, C. H. R. Ooi, and K. Wódkiewicz, “Directed spontaneous emission from an extended ensemble of  $n$  atoms: timing is everything,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 010501 (2006).
34. A. A. Svidzinsky, J.-T. Chang, and M. O. Scully, “Dynamical evolution of correlated spontaneous emission of a single photon from a uniformly excited cloud of  $n$  atoms,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 160504 (2008).
35. T. Karpiuk, N. Cherroret, K. L. Lee, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura, “Coherent forward scattering peak induced by anderson localization,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 190601 (2012).
36. B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, “Multiple-scattering effects for the propagation of light in 3D slabs,” *J. Phys. Condens. Matter* **2**, 7653–7677 (1990).





## Interplay between radiation pressure force and scattered light intensity in the cooperative scattering by cold atoms

T. Bienaimé<sup>a</sup>, R. Bachelard<sup>b</sup>, J. Chabé<sup>a</sup>, M.T. Rouabah<sup>a,c</sup>, L. Bellando<sup>a</sup>, Ph.W. Courteille<sup>b</sup>, N. Piovella<sup>d</sup> and R. Kaiser<sup>a\*</sup>

<sup>a</sup>Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS, Institut Non-Linéaire de Nice, UMR 7335, F-06560 Valbonne, France; <sup>b</sup>Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 13560-970 São Carlos, SP, Brazil; <sup>c</sup>Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique, Université Constantine 1, Constantine 25000, Algeria; <sup>d</sup>Dipartimento di Fisica, Università Degli Studi di Milano, Via Celoria 16, I-20133 Milano, Italy

(Received 19 March 2013; final version received 20 July 2013)

The interplay between the superradiant emission of a cloud of cold two-level atoms and the radiation pressure force is discussed. Using a microscopic model of coupled atomic dipoles driven by an external laser, the radiation field and the average radiation pressure force are derived. A relation between the far-field scattered intensity and the force is derived, using the optical theorem. Finally, the scaling of the sample scattering cross-section with the parameters of the system is studied.

**Keywords:** cold atoms; Dicke superradiance; cooperative scattering

### 1. Introduction

Cooperative effects occur when the behavior of a many body system is determined by their collective interactions with each other and thus manifest themselves in a large variety of physical systems. In this paper, we focus on the specific case of a collection of atoms illuminated by a laser. In this situation, the electro-magnetic field mediates resonant dipole–dipole interactions between the atoms, leading to a cooperative response of the system, which quantitatively differs from the single atom response. Such effects are imprinted on physical observables that can be experimentally measured such as e.g. the emission diagram or the radiation pressure force acting on the cloud.

When a single atom is illuminated by a laser, the scattering process results in a force proportional to the number of scattered photons. Indeed, as an atom absorbs a photon from the laser of wave vector  $\mathbf{k}_0$ , it acquires a momentum  $\hbar\mathbf{k}_0$ , but the average momentum change during the emission process is zero.

For a collection of atoms, the picture changes drastically as it was first noticed in a pioneering work by Dicke [1] where he showed enhanced spontaneous emission decay rates in small and large samples due to constructive interferences of collective emission. In the situation of an incident laser scattering on a cloud of atoms, the atoms cooperate to scatter the light leading to a directional emission. This phenomenon is due to the synchronization of the atomic dipoles with the laser. The collective effects become even

stronger as the atomic medium becomes optically dense and the radiation of the atoms starts to alter significantly the wave propagation. Among the other collective effects that arise, one can mention the collective Lamb shift [2,3], Mie resonances [4], subradiance [5], the refractive index of a dilute Bose gas [6] as well as a reduction of the radiation pressure force [7,8].

Since the radiated light results from the interference of the waves emitted by each dipole, the simple relation between emitted photon and atomic recoil is lost. For example, a striking feature of cooperativity is the modification of the atomic recoil due to the presence of the neighboring atoms [9,10], an effect that cannot be deduced from single-atom physics.

We here discuss the particular relation between the directional superradiant emission, and the reduction of the radiation pressure force. The atomic cloud is described as a microscopic ensemble of coupled atomic dipoles, and both the radiated field and the force are expressed as a function of these dipoles. The optical theorem is derived in this framework, and is shown to lead to a direct relation between intensity scattered and radiation pressure force for the cloud center-of-mass.

### 2. Cooperative scattering model

The atomic cloud is described as a system of two-level ( $g$  and  $e$ ) atoms, with resonant frequency  $\omega_a$  and position

\*Corresponding author. Email: robin.kaiser@inln.cnrs.fr

$\mathbf{r}_j$ , that are driven by an uniform laser beam with electric field amplitude  $E_0$ , frequency  $\omega_0$  and wave vector  $\mathbf{k}_0 = (\omega_0/c)\hat{\mathbf{e}}_z$ . The laser-atom interaction is described by the following Hamiltonian:

$$H = \frac{\hbar\Omega_0}{2} \sum_{j=1}^N [\hat{\sigma}_j \exp[i(\Delta_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)] + \text{h.c.}] + \hbar \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \left( \hat{\sigma}_j \exp(-i\omega_a t) + \hat{\sigma}_j^\dagger \exp(i\omega_a t) \right) \times \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp[i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)] + \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)] \right], \quad (1)$$

where  $\Omega_0 = dE_0/\hbar$  is the Rabi frequency of the incident laser field and  $\Delta_0 = \omega_0 - \omega_a$  is the detuning between the laser and the atomic transition. In Equation (1)  $\hat{\sigma}_j = |g_j\rangle\langle e_j|$  is the lowering operator for the  $j$ -atom,  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  is the photon annihilation operator and  $g_{\mathbf{k}} = (d^2\omega_{\mathbf{k}}/2\hbar\epsilon_0 V)^{1/2}$  is the single-photon Rabi frequency, where  $d$  is the electric-dipole transition matrix element and  $V$  is the photon mode volume. The special case where a single photon (mode  $\mathbf{k}$ ) can be assumed to be present in the system, was extensively investigated in [2,11,12], and later extended to include a low-intensity laser in [7,13,14]. The system atoms+photons is then described by a state of the form [15]:

$$|\Psi\rangle = \alpha(t)|g_1 \dots g_N\rangle|0\rangle_{\mathbf{k}} + \exp(-i\Delta_0 t) \sum_{j=1}^N \beta_j(t)|g_1 \dots e_j \dots g_N\rangle|0\rangle_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}(t)|g_1 \dots g_N\rangle|1\rangle_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{m,n=1}^N \epsilon_{m<n,\mathbf{k}}(t)|g_1 \dots e_m \dots e_n \dots g_N\rangle|1\rangle_{\mathbf{k}}, \quad (2)$$

The first term in Equation (2) corresponds to the initial ground state without photons, the second term is the sum over the states where a single atom has been excited by the classical field. The third term corresponds to the atoms that returned to the ground state having emitted a photon in the mode  $\mathbf{k}$ , whereas the last one corresponds to the presence of two excited atoms and one virtual photon with ‘negative’ energy. It is due to the counter-rotating terms in Hamiltonian (1) and this disappears when the rotating wave approximation is made. In the linear regime  $\alpha \approx 1$  and in the Markov approximation, valid if the decay time is larger than the photon time-of-flight through the atomic cloud, the scattering problem reduces to the following differential equation [13,14,16]

$$\dot{\beta}_j = \left( i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2} \right) \beta_j - i\frac{\Omega_0}{2} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j) - \frac{\Gamma}{2} \sum_{m \neq j} \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{ik_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} \beta_m \quad (3)$$

with initial condition  $\beta_j(0) = 0$ , for  $j = 1, \dots, N$ . Here,  $\Gamma = Vg_k^2 k_0^2 / \pi c = d^2 k_0^3 / 2\pi\epsilon_0\hbar$  is the single-atom spontaneous decay rate. The kernel in the last term of Equation (3) has a real component,  $-(\Gamma/2)\sum_{m \neq j} [\sin(x_{jm})/x_{jm}]$  (where  $x_{jm} = k_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|$ ), describing the collective atomic decay, and an imaginary component,  $i(\Gamma/2)\sum_{m \neq j} [\cos(x_{jm})/x_{jm}]$ , describing the collective Lamb shift [16–18]. Notice that while Equation (3) is here deduced from a quantum mechanical model, it can also be obtained classically, treating the two-level atoms as weakly excited classical harmonic oscillators [15,19].

### 3. Radiated field

The radiation field operator  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  evolves according to the following Heisenberg equation

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{H}] = -ig_{\mathbf{k}} \exp[i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_a)t] \sum_{m=1}^N \hat{\sigma}_m \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m), \quad (4)$$

where the fast oscillating term proportional to  $\exp[i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_a)t]$  has been neglected. The scattered field is obtained by performing the sum over all the modes, considering only the positive-frequency part of the electric field operator

$$\hat{E}_s(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}}t), \quad (5)$$

where  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = (\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2}$ . Integrating Equation (4) with respect to time, with  $a_{\mathbf{k}}(0) = 0$ , inserting it in Equation (5), and assuming the usual Markov approximation, one obtains [14]

$$\hat{E}_s(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{dk_0^3}{4\pi\epsilon_0} \exp(-i\omega_a t) \sum_{m=1}^N \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|)}{k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \hat{\sigma}_m(t). \quad (6)$$

When applied on the state (2), neglecting virtual transitions, it yields  $\hat{E}_s|\Psi\rangle = E_s \exp(-i\omega_0 t)|g_1 \dots g_N\rangle$ , with

$$E_s(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar\Gamma}{2d} \sum_{m=1}^N \beta_m(t) \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|)}{k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|}. \quad (7)$$

Hence, the radiated field appears as a sum of spherical waves radiated by the atomic dipoles. In the far-field limit, one has  $k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m| \approx k_0 r - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m$ , with  $\mathbf{k} = k_0(\mathbf{r}/r)$ , so the field (7) radiated in a direction  $\mathbf{k}$  reads

$$E_s^{(\text{far})}(\mathbf{k}, t) \approx -\frac{\hbar\Gamma}{2d} \frac{\exp(ik_0 r)}{k_0 r} \sum_{m=1}^N \beta_m(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m). \quad (8)$$

The scattered intensity in a direction  $\mathbf{k}$  is then derived as

$$I_s(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon_0 c \hbar^2 \Gamma^2}{2(dk_0 r)^2} \left| \sum_{m=1}^N \beta_m(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m) \right|^2 \quad (9)$$

$$= \frac{\epsilon_0 c \hbar^2 \Gamma^2}{2(dk_0 r)^2} \times \left( \sum_{m=1}^N |\beta_m|^2 + \sum_{j \neq m} \beta_j \beta_m^* \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)] \right). \quad (10)$$

Integrating this intensity over all directions leads to the total scattered power

$$P_r = \frac{d^2 k_0^4 c}{2\pi \epsilon_0} \left( \sum_{m=1}^N |\beta_m|^2 + \sum_{m \neq j} \beta_j \beta_m^* \frac{\sin(k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} \right), \quad (11)$$

where we have used the equality

$$\int d\hat{\mathbf{k}} e^{ik_0 \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} = 4\pi \frac{\sin(k_0 |d|)}{k_0 |d|}. \quad (12)$$

In Equation (11), the first term corresponds to the *incoherent* sum of the single atom radiated power. The second term is an interference term; in the limit of a cloud small compared to the wavelength, the dipole moments have the same phase and this latter term is responsible for a superradiant build-up of the radiated power  $\propto N^2$  (see, e.g. [1]).

#### 4. Radiation pressure force

As for the radiation force operator acting on the  $j$ th atom, it is derived from Equation (1) as

$$\hat{\mathbf{F}}_j = -\nabla_{\mathbf{r}_j} \hat{H} = \hat{\mathbf{F}}_{aj} + \hat{\mathbf{F}}_{ej}. \quad (13)$$

A first contribution associated with the absorption of photons of the pump appears [7,13]:

$$\hat{\mathbf{F}}_{aj} = i\hbar k_0 \frac{\Omega_0}{2} \{ \hat{\sigma}_j \exp[i(\Delta_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)] - \text{h.c.} \}, \quad (14)$$

whereas the second contribution comes from the emission of the photons in any direction  $\mathbf{k}$ :

$$\hat{\mathbf{F}}_{ej} = i\hbar \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} g_{\mathbf{k}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\sigma}_j \exp[i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_a)t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j] - \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_a)t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j] \right\}. \quad (15)$$

In Equation (15), the counter-rotating terms proportional to  $\exp[\pm i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_a)t]$  were neglected.

As we are interested in comparing the radiation pressure force to the single-atom case, we define the average radiation force  $\hat{\mathbf{F}} = (1/N) \sum_j \hat{\mathbf{F}}_j = (F_{\text{tot}}/N) \hat{\mathbf{e}}_z$  that measures acceleration of the cloud center-of-mass given by  $\mathbf{a}_{\text{CM}} = \hat{\mathbf{F}}/m$ , with  $m$  the single-atom mass. Note that this average force is  $N$  times smaller than the total force  $F_{\text{tot}}$  acting on the whole cloud of atoms. Since we consider clouds

with rotational symmetry around the laser axis, this force is in the same direction as the incident field wave vector  $\mathbf{k}_0 = k_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ . This average force is measured by time-of flight techniques in cold atomic clouds released, for instance, from magneto-optical traps (MOTs) and has recently revealed cooperative effects in the scattering by extended atomic samples [8,20]. Like the scattered radiation, this force is an observable that contains signatures of the cooperative scattering by the atoms [7,8]. The average absorption force along the  $z$ -axis, resulting from the recoil received upon absorption of a photon from the incident laser, reads

$$\hat{F}_a = \frac{i}{2N} \hbar k_0 \Omega_0 \sum_{j=1}^N [\hat{\sigma}_j \exp(i\Delta_0 t - i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j) - \text{h.c.}]. \quad (16)$$

Similarly, the average emission force writes  $\hat{\mathbf{F}}_e = (1/N) \sum_j \hat{\mathbf{F}}_{ej}$ . Inserting the expression for  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  from Equation (4) into Equation (15), and approximating the discrete sum over the modes  $\mathbf{k}$  by an integral, it is possible to obtain, as was done for the radiation field operator  $\hat{E}_S$  of Equation (7), the following expression for the average emission force along the  $z$ -axis [7]:

$$\hat{F}_e = -\frac{\hbar k_0 \Gamma}{8\pi N} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \times \sum_{j,m=1}^N \left[ \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)] \hat{\sigma}_m^\dagger \hat{\sigma}_j + \text{h.c.} \right]. \quad (17)$$

Neglecting virtual photon contributions, the expectation values of the absorption and emission forces for state (2) are

$$\langle \hat{F}_a \rangle = -\frac{\hbar k_0 \Omega_0}{N} \sum_{j=1}^N \text{Im} [\beta_j \exp(-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)], \quad (18)$$

$$\langle \hat{F}_e \rangle = -\frac{\hbar k_0 \Gamma}{4\pi N} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \times \sum_{j,m=1}^N (\beta_j \beta_m^* \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)])$$

$$= -\frac{\hbar k_0 \Gamma}{N} \sum_{j,m=1}^N \frac{(z_j - z_m)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} j_1(k_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|) \text{Im} (\beta_j \beta_m^*), \quad (19)$$

where we used the identity

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = 4\pi i \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} j_1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (20)$$

$j_1(z)$  here refers the first-order spherical Bessel function. Note that the decomposition into absorption (18) and emission (19) forces is fully compatible with classical expressions of the optical force [21], where the force arises as the product between the atomic dipole and the *total* field [22] (i.e. including the radiation from the other atoms).

## 5. Optical theorem

Let us now discuss the formulation of the optical theorem in the framework of collective scattering. To that purpose, we consider an infinite slab illuminated by a plane wave. In the far-field limit, the field in a direction  $\hat{\mathbf{k}}$  is

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) &= \left[ \frac{E_0}{2} \exp(ik_0z) + E_s^{(\text{far})}(r, \hat{\mathbf{k}}) \right] \exp(-i\omega_0t) \\ &= \frac{E_0}{2} \left[ \exp(ik_0z) - \frac{\exp(ik_0r)}{k_0r} f(\hat{\mathbf{k}}) \right] \exp(-i\omega_0t), \end{aligned} \quad (21)$$

where the scattering amplitude for the scattered field  $f$  is given by

$$f(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\Gamma}{\Omega_0} \sum_j \beta_j \exp(-ik_0\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_j). \quad (22)$$

As a consequence, the scattered intensity at a large distance  $r$  from the cloud is

$$I_s = I_0 \frac{|f(\hat{\mathbf{k}})|^2}{k_0^2 r^2}, \quad (23)$$

while the total scattering cross-section is obtained by integrating over all the solid angle

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{1}{k_0^2} \int d\hat{\mathbf{k}} |f(\hat{\mathbf{k}})|^2. \quad (24)$$

To simulate numerically the slab illuminated by a plane wave, we consider a cylinder of transverse size large

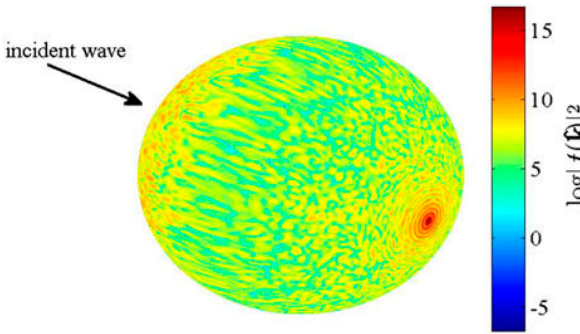


Figure 1. Scattering amplitude  $|f(\hat{\mathbf{k}})|^2$  as given by Equation (22) for a cylindrical cloud of thickness  $30/k_0$  and radius  $90/k_0$ , illuminated by a plane wave. The direction of the incoming wave is indicated by an arrow. The number of scatterers is  $N = 20,000$ , the detuning  $\Delta_0 = 0$ . The color-coded intensity is represented in log-scale. One can clearly see in red the strong forward emission of the sample, reminiscent of Mie scattering by large clouds compared to the wavelength. In the other directions, the scattered field is speckle-like due to the randomly positioned two-level scatterers, and describes the spontaneous emission by the cloud. Performing configuration averages would smooth out these fluctuations, except in the backward direction where, in the multiple scattering regime, the well-known coherent backscattering cone is recovered [23,24]. Finally, the emission in the transverse dimension is reduced due to the quasi-one-dimensional geometry. (The color version of this figure is included in the online version of the journal.)

compared to its thickness and to the wavelength, with a random homogeneous distribution of atoms. Figure 1 shows the emission diagram of the scattered field for resonant excitation and a cylindrical cloud of atoms. The energy conservation imposes that

$$\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{sca}} + \sigma_{\text{abs}}, \quad (25)$$

where  $\sigma_{\text{ext}}$  and  $\sigma_{\text{abs}}$  are the cross-sections for extinction and absorption, respectively. The extinction cross-section is then obtained from the optical theorem. In the forward direction the total field is

$$E_{\text{fwd}}(\theta = 0) = \frac{E_0}{2} \left[ \exp(ik_0z) - \frac{\exp(ik_0r)}{k_0r} f(0) \right] \exp(-i\omega_0t). \quad (26)$$

In the slab configuration, the cloud radiates mainly in a narrow forward cone – the angle of the cone of emission is given by the inverse of the cloud transverse size. Hence, observing the field in a plane far from the atoms and within the forward cone of emission, the radius expands as  $r \approx z + (x^2 + y^2)/2z$ , and one obtains

$$\begin{aligned} E_{\text{fwd}}(\mathbf{r}) &\approx \frac{E_0}{2} \left[ 1 - \frac{f(0)}{k_0z} \exp[ik_0(x^2 + y^2)/2z] \right] \\ &\times \exp[i(k_0z - \omega_0t)]. \end{aligned} \quad (27)$$

So the intensity reads

$$|E_{\text{fwd}}(\mathbf{r})|^2 \approx \frac{|E_0|^2}{4} \left\{ 1 - \frac{2}{k_0z} \text{Re} \left[ f(0) \exp[ik_0(x^2 + y^2)/2z] \right] \right\}, \quad (28)$$

since we have neglected the quadratic term  $|E_s|^2$ . The measured intensity is the incident intensity minus the extinction intensity. In Equation (28), the integration over  $x, y$  yields a factor  $2i\pi z/k_0$ , and one gets

$$\sigma_{\text{ext}} = -\frac{4\pi}{k_0^2} \text{Im}[f(0)]. \quad (29)$$

Hence, from Equation (24) one obtains the relation

$$-\text{Im}[f(0)] = \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\mathbf{k}} |f(\hat{\mathbf{k}})|^2 + \frac{k_0^2}{4\pi} \sigma_{\text{abs}}. \quad (30)$$

In our microscopic description of the light–atom interaction there is no absorption, so that  $\sigma_{\text{abs}} = 0$ . An illustration of the validity of the optical theorem is given in Figure 2 for resonant light scattering by a slab containing two-level scatterers with a uniform density distribution. From Equations (22) and (29), and introducing the wavevector  $\mathbf{k} = k_0\hat{\mathbf{k}}(\theta, \phi)$ , we obtain the relation

$$\begin{aligned} &-\frac{\Omega_0}{\Gamma} \sum_j \text{Im} [\beta_j \exp(-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \\ &\times \sum_{j,m} [\beta_j \beta_m^* \exp[-ik_0\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)]]. \end{aligned} \quad (31)$$

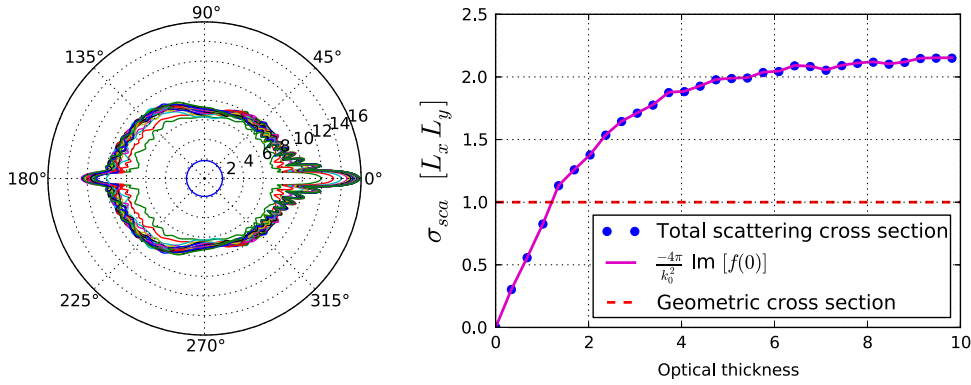


Figure 2. Illustration of the optical theorem. Left: the scattered intensity integrated along  $\phi$ , i.e.  $g(\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi |f(\theta, \phi)|^2$ , is shown for resonant light  $\Delta_0 = 0$  and a slab geometry with a uniform density distribution. The number of atomic scatterers is varied between 1 and 5000 (from inside to outside curves). The transverse size of the slab is  $L_{x,y} = 80/k_0$  and the longitudinal size is varied such that  $L_z = (20/k_0)N/5000$ . This procedure allows us to vary the optical thickness  $b_0 = 4\pi N/(k_0^2 L_x L_y)$  between  $3 \times 10^{-3}$  and 10 while maintaining the atomic density constant. We would like to insist on the fact that the optical thickness is computed for the scattering of a scalar field which leads to an unusual resonant cross-section for light  $\sigma_0 = \lambda^2/\pi$  (different from the well-known resonant cross-section  $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$  for vectorial light). The incident field is coming from the left and the intensity is plotted in log-scale. In addition to the forward Mie-like lobe, a lobe is also observed in the backward direction which we attribute to light reflection due to the sharp variation of optical index when the light hits the slab. Right: the blue circles represent the total scattering cross-section obtained by integrating the emission diagram over  $\theta$  and  $\phi$ , i.e.  $\sigma_{sca} = 1/k_0^2 \times \int_0^\pi d\theta \sin(\theta)g(\theta)$ . In our microscopic model, there is no absorption so that  $\sigma_{abs} = 0$ , leading to  $\sigma_{ext} = \sigma_{sca}$ . The optical theorem Equation (29) can thus be written as  $\sigma_{sca} = -(4\pi/k_0^2)\text{Im}[f(0)]$ , which is plotted in magenta. The good agreement between the two curves illustrates the validity of the optical theorem. (The color version of this figure is included in the online version of the journal.)

Consequently, using Equations (18) and (19), the average force along the  $z$ -axis reads:

$$F_z = \frac{\hbar k_0 \Gamma}{4\pi N} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos\theta) \times \sum_{j,m=1}^N \left( \beta_j \beta_m^* \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)] \right). \quad (32)$$

We observe from Equation (32) that the average radiation pressure force is not merely proportional to the excitation probability, i.e.  $\sum_j |\beta_j|^2$ , but it is the result of an interference between the different atomic dipoles  $\beta_j$ . For this reason a measurement of the force captures the coherence properties of the scattering process as well as the detection of the light intensity. To make this point more explicit, using Equation (9), it is possible to write the force as

$$F_z = \frac{r^2}{Nc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos\theta) I_s(\theta, \phi), \quad (33)$$

where the scattered far-field intensity is  $I_s(\theta, \phi) = 2c\epsilon_0 |E_s(\theta, \phi)|^2$ . This highlights the fact that the radiation pressure force, that pushes the atoms along the direction of the incident beam, is proportional to the net radiation flux of the scattered intensity.

In the case of an isotropic emission (e.g. single-atom case, or cloud much smaller than the wavelength), the scattered intensity  $I_s$  is independent of the angle and we get  $F_z = (4\pi r^2/(Nc))I_s$ : the direct proportionality between scattered power and radiation pressure force is recovered.

The cooperative effect of light scattering in such small samples is then encoded in the total scattered intensity  $I_s$ . In the case of superradiant scattering for larger samples, a pronounced emission into the forward direction decreases the radiation force, as observed for example in [8].

## 6. Scaling of the scattering cross-section

In this section we are interested in understanding how the scattering cross-section scales with the parameters of the system. We consider the case of a slab with uniform density distribution. The slab contains  $N$  atoms and its size along the  $x, y, z$  axes is denoted by  $L_x, L_y, L_z$  respectively. The numerical simulations presented in Figure 3 show how the scattering cross-section depends on the optical thickness of the cloud  $b_0 = 4\pi N/(k_0^2 L_x L_y)$ . For dilute clouds of atoms we find:

$$\sigma_{sca} = 2.15 \times L_x L_y \left[ 1 - \exp\left(-\frac{b_0}{2.15}\right) \right]. \quad (34)$$

When the slab is optically thick, i.e.  $b_0 \gg 1$ , we observe that the cross-section appears to approach  $2 \times L_x L_y$ . This factor of two corresponds to the well-known 'extinction paradox' [25,26] for which the extinction cross-section is twice as large as the one predicted by geometrical optics due to the diffraction contribution. The residual deviations from the factor of 2 between the scattering and geometrical cross-sections might be associated with a still moderate size of our sample [27], or to dipole blockade effects [28,29]. For spherical dielectric spheres,  $\sigma_{ext}$  shows an oscillatory behavior

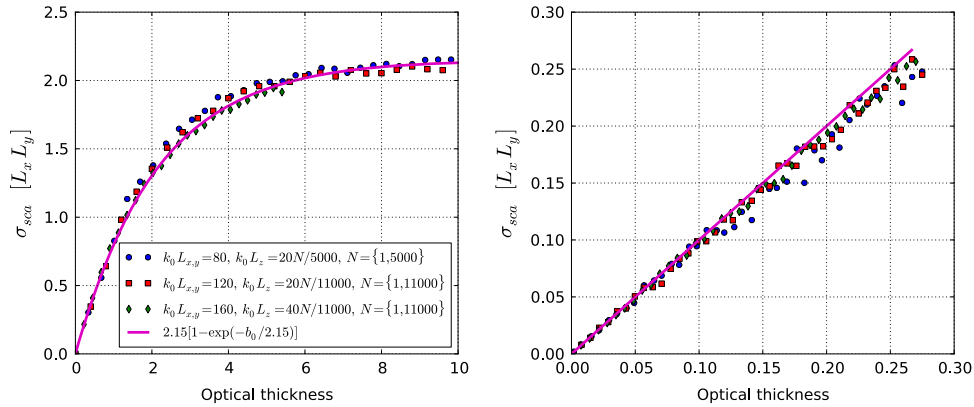


Figure 3. Scaling of the scattering cross-section. Left plot: following the same procedure as the one described in Figure 2, we compute the scattering cross-sections for different slab geometries. The results are shown in a scatter plot with different colors. The parameters of the simulations are reported in the legend of the figure. By fitting the data, constraining the slope in the limit  $b_0 \rightarrow 0$  (right plot), we obtain a scattering cross-section that scales with the optical thickness  $b_0$  of the slab according to Equation (34) (magenta full line). (The color version of this figure is included in the online version of the journal.)

around  $2\sigma_{\text{geo}}$  ( $\sigma_{\text{geo}} = L_x L_y$  for our square geometry), which is damped for increasing sizes of the sphere [30,31]. When  $b_0 \ll 1$  the scattering cross-section can be written as  $\sigma_{\text{sca}} = (L_x L_y)b_0 = N\sigma_0$ , where  $\sigma_0 = \lambda^2/\pi$  is the resonant scattering cross-section for a single atom in the scalar wave description (it differs from the well-known cross-section for vectorial light  $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$ ). In this limit, the interpretation is clear: at low optical thickness the cooperative effects are negligible and the scattering of light is given by the response of  $N$  independent atoms. We refer the reader to [32] for a study of the areal scaling of the light scattering by varying the size of a dense, cold atomic cloud.

Before concluding, we would like to underline the importance of the role of diffraction. Since we are using a microscopic description of the system, diffraction effects for the scattered field are already included in our model. However, free propagation of the incident field needs to be added for a fully consistent description. In this respect, the incident plane wave considered so far in the paper is a peculiar case. We will focus on these aspects in forthcoming studies to precisely understand the role of diffraction. This will naturally lead us to compare our coherent microscopic model of coupled dipoles to stochastic incoherent models commonly used to describe photon propagation in random media. Understanding coherent light propagation in disordered resonant scatterers is of prime importance for both the atomic physics and the waves in complex media communities.

## 7. Conclusion

We here discussed the superradiant emission of a cloud of cold atoms, when the interference of the waves radiated by the atomic dipoles builds up a coherent emission. Despite the fact that the simple relation between absorbed photons

and radiation pressure force existing in the single-atom case was lost, the optical theorem allowed one to recover a simple relation between the total scattered intensity and the displacement of the cloud center-of-mass. The measure of the force of the center of mass of the atomic cloud contains (partial) information on the scattered intensity, even for large values of optical thickness of the cloud. We have computed the total scattering cross-section which approaches a value close to twice the geometrical cross-section of the sample, in line with the well-known extinction paradox. Finally, understanding the role of diffraction paves the way for further studies to compare our coherent microscopic model to well-established stochastic incoherent models describing photon propagation in random media.

## Acknowledgements

We acknowledge financial support from IRSES project COSCALI and from USP/COFECUB (project Uc Ph 123/11). R.B. and Ph.W.C. acknowledge support from the Fundação de Amparo Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). M.T.R. is supported by an Averoës exchange program.

## References

- [1] Dicke, R.H. *Phys. Rev.* **1954**, *93*, 99–110.
- [2] Friedberg, R.; Hartman, S.R.; Manassah, J.T. *Phys. Rep.* **1973**, *7*, 101–179.
- [3] Keaveney, J.; Sargsyan, A.; Krohn, U.; Hughes, I.G.; Sarkisyan, D.; Adams, C.S. *Phys. Rev. Lett.* **2012**, *108*, 173601.
- [4] Bachelard, R.; Courteille, Ph. W.; Kaiser, R.; Piovella, N. *Europhys. Lett.* **2012**, *97*, 14004.
- [5] Bienaimé, T.; Piovella, N.; Kaiser, R. *Phys. Rev. Lett.* **2012**, *108*, 123602.
- [6] Morice, O.; Castin, Y.; Dalibard, J. *Phys. Rev. A* **1995**, *51*, 3896–3901.
- [7] Courteille, Ph.W.; Bux, S.; Lucioni, E.; Lauber, K.; Bienaimé, T.; Kaiser, R.; Piovella, N. *Eur. Phys. J. D* **2010**, *58*, 69–73.

- [8] Bienaimé, T.; Bux, S.; Lucioni, E.; Courteille, Ph.W.; Piovella, N.; Kaiser, R. *Phys. Rev. Lett.* **2010**, *104*, 183602.
- [9] Campbell, G.K.; Leanhardt, A.E.; Mun, J.; Boyd, M.; Streed, E.W.; Ketterle, W.; Pritchard, D.E. *Phys. Rev. Lett.* **2005**, *94*, 170403.
- [10] Bachelard, R.; Bender, H.; Courteille, Ph. W.; Piovella, N.; Stehle, C.; Zimmermann, C.; Slama, S. *Phys. Rev. A* **2012**, *86*, 043605.
- [11] Scully, M.O.; Fry, E.; Ooi, C.H.R.; Wodkiewicz, K. *Phys. Rev. Lett.* **2006**, *96*, 010501.
- [12] Svidzinsky, A.A.; Chang, J.T.; Scully, M.O. *Phys. Rev. Lett.* **2008**, *100*, 160504.
- [13] Bachelard, R.; Piovella, N.; Courteille, Ph.W. *Phys. Rev. A* **2011**, *84*, 013821.
- [14] Bienaimé, T.; Petruzzo, M.; Bigerni, D.; Piovella, N.; Kaiser, R. *J. Mod. Opt.* **2011**, *58*, 1942–1950.
- [15] Svidzinsky, A.A.; Chang, J.T.; Scully, M.O. *Phys. Rev. A* **2010**, *81*, 053821.
- [16] Scully, M.O.; Svidzinsky, A.A. *Phys. Lett. A* **2009**, *373*, 1283–1286.
- [17] Scully, M.O.; Svidzinsky, A.A. *Science* **2010**, *328*, 1239–1241.
- [18] Röhlberger, R.; Schlage, K.; Sahoo, B.; Couet, S.; Ruffer, R. *Science* **2010**, *328*, 1248–1251.
- [19] Prasad, S.; Glauber, R.J. *Phys. Rev. A* **2010**, *82*, 063805.
- [20] Bender, H.; Stehle, C.; Slama, S.; Kaiser, R.; Piovella, N.; Zimmermann, C.; Courteille, Ph.W. *Phys. Rev. A* **2010**, *82*, 011404.
- [21] Piovella, N.; Bachelard, R.; Courteille, Ph.W. *J. Plasma Phys.* **2013**, 413–419 [also available on Cambridge Journals Online doi:10.1017/S0022377813000275].
- [22] Gordon, J.P.; Ashkin, A. *Phys. Rev. A* **1980**, *21*, 1606–1617.
- [23] van Albada, M.P.; Lagendijk, A. *Phys. Rev. Lett.* **1985**, *55*, 2692–2695.
- [24] Wolf, P.-E.; Maret, G. *Phys. Rev. Lett.* **1985**, *55*, 2696–2699.
- [25] Van de Hulst, H.C. *Light Scattering by Small Particles*; Dover: New York, 1981.
- [26] Bohren, C.F.; Huffman, D.R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*; Wiley: New York, 1983; pp 107–111.
- [27] Chomaz, L.; Corman, L.; Yefsah, T.; Desbuquois, R.; Dalibard, J. *New J. Phys.* **2012**, *14*, 055001.
- [28] Ott, J.R.; Wubs, M.; Lodahl, P.; Mortensen, N.A.; Kaiser, R. *Phys. Rev. A* **2013**, *87*, 061801(R).
- [29] Bienaimé, T.; Bachelard, R.; Courteille, Ph.W.; Piovella, N.; Kaiser, R. *Fortschr. Phys.* **2013**, *61*, 377–392.
- [30] Kargl, S.G.; Marston, P.L. *J. Acoust. Soc. Am.* **1990**, *88*, 1103–1113.
- [31] Berg, M.J.; Sorensen, C.M.; Chakrabarti, A. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **2011**, *112*, 1170–1181.
- [32] Sokolov, I.M.; Kuraptsev, A.S.; Kupriyanov, D.V.; Havey, M.D.; Balik, S. *J. Mod. Opt.* **2013**, *60*, 50–56.





# Paraquantum Squeezed and Coherent States: New Type of Entanglement

M.F.Ghiti<sup>a</sup>, N.Mebarki<sup>a</sup> and M.T.Rouabah<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique,  
Mentouri University, Constantine, Algeria.*

**Abstract.** Using the paraquantization formalism, generalized squeezed and coherent states are derived. A possible new type of entanglement is discussed.

**Keywords:** Generalized intelligent states, Paraquantization, Squeezed state, Coherent state.

**PACS:** 03.67.Lx, 03.65.Ud, 03.67.-a

## INTRODUCTION

The generalized intelligent states for the harmonic oscillators are very important in quantum information [1,2], derived essentially from a minimization of Robertson-Schrödinger uncertainty relation [3,4]. It is to be noted that for the intelligent states [5,6,7] we use the Cauchy-Schwartz inequality [5]. It is worth to mention also that the generalized intelligent states are known only for the ordinary Dirac canonical quantization. During the last few years, many interest has been devoted to the generalization of the quantization procedure [8]-[16]. According to Wigner [8], the idea of paraquantization is that the canonical commutation relation  $[x, p] = i$  is a solution of the Heisenberg equation but this is by no means the only one. There is a general solution characterized by an order parameter  $Q$ . The mathematical formalism of paraquantization is more complicated where for example the annihilation and creation operators do not satisfy a bilinear commutation relation  $aa^+ - a^+a = 1$ , but a trilinear commutation relation  $aaa^+ - a^+aa = 2a$ . The goal of this paper is to construct the paraquantum intelligent state and discuss a possible new type of entanglement.

## PARAQUANTUM INTELLIGENT STATE

A generalized intelligent state is a state such that the equality of the Robertson-Schrödinger uncertainty relation is verified [9]:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} (\langle G \rangle^2 + \langle F \rangle^2) \quad (1)$$

where the operators  $A$  and  $B$  satisfy the commutation relation:

$$[A, B] = iG \quad (2)$$

The eigenvalue equation of the intelligent state (IS) is given by [17]:

$$(A + i\lambda B)|\psi\rangle = Z\sqrt{2}|\psi\rangle \quad (3)$$

Depending on the value of  $\lambda$  ( $\lambda = 1$  and  $\lambda \neq 1$ ), one has the coherent and squeezed states. In paraquantum mechanics, the momentum operator has as a representation:

$$p = -i\frac{d}{dx} + i\frac{c}{x}R \quad (4)$$

where  $R$  is a unitary operator ( $R = R^{-1} = R^+$ ) defined as:

$$R\psi(x) = \psi(-x) \quad (5)$$

Here  $c = (Q - 1)/2$ , where  $Q$  is a real paraquantization order parameter. One can show easily that the annihilation and creation operators  $a$  and  $a^+$  have the following expressions:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x - \frac{c}{x}R\right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x + \frac{c}{x}R\right) \quad (6)$$

Thus, the paraquantum IS verify the modified equation:

$$x\psi^\pm(x) + i\lambda\left(-i\frac{d}{dx} \pm i\frac{c}{x}\right)\psi^\pm = Z\sqrt{2}\psi^\pm(x) \quad (7)$$

where  $\psi'^\pm$  are the even and odd eigenstates of the operator  $R$ . The solution is:

$$\psi^\pm(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda} \pm \frac{c}{x^2} + \frac{Z\sqrt{2}}{\lambda}x\right) \quad (8)$$

## CONCLUSION

We have derived explicit expressions of the paraquantum intelligent states (squeezed and coherent). As a perspective, based on a remarkable property of a paraquantum bipartite composite system is the existence of a natural entangled structure for a non-classical value of the paraquantization order parameter ( $Q \neq 1$ ). It appears to be interesting to extend the study of the entangled non orthogonal states so as to incorporate paraquantum systems. Composite paraquantum systems such as anyons for instance, are natural candidates.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank the Algerian Ministry of education and research, DGRSDT and ANDRU for the financial support.

## REFERENCES

1. A.H.ElKinani, M.Daoud, *J.Phys.A:Math.Gen.***34**, 5373-5387 (2001).
2. D.A.Trifonov, , *J.Math.Phys.*,**35**, 2297-2308. (1994).
3. E.Schrödinger, *Phys. Math. Klasse* **19**, 296-303 (1930).
4. H P. Robertson, *Phys. Rev. A* **35** ,667-667 (1930); *ibid*, *Phys. Rev.* **46** ,794-801 (1936).
5. G.M.Abd El-Kader and A-S. F. Obada, , *Phys.Scr.* **78**,035401 (2007).
6. A.K. Pati, *Phys. Lett.A*, **262**, 296-301. (1999).
7. M.K.Tavassoly and A.Parsaiean ,*J. Phys. A:Math. Theor.* **40**, 2297-2308 (2007)
8. E.P.Wigner,*Phys.Rev.***77**, 711-712 (1950).
2. O.Klein,*J.Phys.Radium* **9**, 1-12 (1938).
3. Y.Ohnuki, S.Kamefuchi, *Phys.Rev.***170**, 1279-1293 (1968)
4. K.V.Kademova, M.M.Karaev, *Phys.Lett.B* **34**, 147-148 (1971).
5. M.Omote,Y.Ohnuki,and S.Kamefuchi, *Prog.Theor.Phys.* **56**, 1948-1964 (1976)
6. Y.Ohnuki, T.Kashiwa, *Prog.Theor.Phys.* **60**, 548-564 (1978).
7. Y.Ohnuki, S.Kamefuchi, *J.Math.Phys.***21**, 601-636 (1980).
8. K.V.Kademova, M.M.Karaev, *Nucl.Phys.B* **26**, 342-48 (1971).
9. L.D. Faddeev, N.Yu. Reshetikhin and L.A. Takhtajan, *Algebra and Analysis* **1**, 178-206 (1989).
- 10.N. Mebarki, N. Belaloui, M.H. Traikia, *Turk.J.Phys.***19**, 1101-1112 (1995).
- 11.N Mebarki, F. Benrachi, H. Aissaoui, A. Boudine, *Turk.J.Phys.* **21**, 235-240 (1997).
- 12.N Mebarki, N. Belaloui, M. Haouchine, *Czech.J.Phys.* **47**, 173-181 (1997).
- 13.N. Mebarki, M. Haouchine, N. Belaloui ,*Acta Phys.Polon.B* **28**, 2017-2026 (1997).
- 14.N. Mebarki, M. Haouchine, N. Belaloui, *Acta Phys.Polon.B* **28**,1997-2006 (1997).
- 15.N. Mebarki, N. Belalui, M.H. Traikia, *Acta Phys.Polon.B* **23**, 1203-1221 (1992).
- 16.N. Mebarki, M.H.Traikia, M. Maamache, N. Rahem *Turk.J.Phys.* **21**,1189-1198(1997).
17. M.Jafarpour et al, *Adv.studiesTheor.Phys* **4**, 599-608 (2010)



# Q-Deformed SU(1,1) and SU(2) Squeezed and Intelligent States and Quantum Entanglement

M. T. Rouabah<sup>a</sup>, N. Mebarki<sup>a</sup> and M. F. Ghiti<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique,  
Mentouri University, Constantine 25000, Algeria.*

**Abstract.** The intelligent states associated with the  $su_q(1,1)$  and  $su_q(2)$   $q$ -deformed Lie algebra are investigated. The eigenvalue problem is also discussed.

**Keywords:** Intelligent states, Squeezed states, Quantum groups, Entanglement.

**PACS:** 42.50.Dv, 03.65.Fd, 02.20.Hj, 02.20.Uw.

## INTRODUCTION

Intelligent states (IS) are quantum states which minimize uncertainty relations for non-commuting quantum observables [1–5]. In the last years there exists a great interest in various properties, applications and generalizations of intelligent states [5–12]. One of the reasons for this interest is the close relationship between intelligent states and squeezing. A generalization of squeezed states for an arbitrary dynamical symmetry group leads to the intelligent states for the group generators [6-9]. In particular, the concept of squeezing can be naturally extended to the intelligent states associated with the SU(2) and SU(1,1) Lie groups. An important possible application of squeezing properties of the SU(2) and SU(1,1) intelligent states is the reduction of the quantum noise in spectroscopy [10] and interferometry [7-12] and hence improving measurement precisions. On the other hand, quantum groups are a generalization of symmetry groups which have been used successfully in physics. A general feature of spaces carrying a quantum group structure is that they are noncommutative and inherit a well-defined mathematical structure from quantum group symmetries. In this paper we consider a  $q$ -deformation of  $su(1,1)$  and  $su(2)$  Lie algebras and their IS using the Dyson [13] realization.

## SU<sub>q</sub>(1,1) INTELLIGENT STATES

The  $su(1,1)$  Lie algebra is spanned by the three generators  $K_1$ ,  $K_2$  and  $K_3$  which satisfy the following commutation relations:

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad , \quad [K_+, K_-] = -2K_0 \quad (1)$$

The Casimir operator for any irreducible representation is  $K^2 = k(k-1)I$ . Thus a representation of  $su(1,1)$  is determined by the parameter  $k$  called the Bergman index. The corresponding Hilbert space is spanned by a complete orthonormal basis  $|n, k\rangle$ . Since  $SU(1,1)$  is a noncompact group, all irreducible representation are of infinite dimensions. Here we shall only deal with the representation known as the positive discrete series in which:

$$\begin{aligned} K_0|n, k\rangle &= (n+k)|n, k\rangle, \quad K_+|n, k\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2k)}|n+1, k\rangle, \\ K_-|n, k\rangle &= \sqrt{n(n+2k-1)}|n-1, k\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

On the other hand, the uncertainty relation limits the precise knowledge of conjugate physical quantities of a system. The state which minimize the uncertainty relation can describe the quantum system as precisely as possible. First for a given two self-adjoint operators  $A$  and  $B$ , one can obtain, using the Cauchy-Schwartz inequality, the uncertainty relation:

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 \quad (3)$$

where the variance and expectation value are given by  $\Delta A = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$  and  $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$ , respectively. A state is called intelligent if it satisfy the strict inequality in Eq.(3). It is well known [2] that such state, or IS, must satisfy the eigenvalue equation

$$(A + i\lambda B)|\psi\rangle = \eta|\psi\rangle \quad (4)$$

where  $\lambda$  is a positive real parameter and  $\eta$  a complex number. The  $SU(1,1)$  intelligent states (IS) can be derived by considering the special case of Eq.(4), where  $|\psi\rangle$  are solutions of the eigenvalue problem

$$(K_1 - i\lambda K_2)|\psi\rangle = \eta|\psi\rangle \quad (5)$$

It is convenient to rewrite equation (5) in term of  $K_{\pm}$  as

$$(\alpha K_- + \beta K_+)|\psi\rangle = 2\eta|\psi\rangle \quad (6)$$

where  $\alpha = 1 + \lambda$  and  $\beta = 1 - \lambda$ . We expand the state  $|\psi\rangle$  on the basis  $|n, k\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) |n, k\rangle \quad (7)$$

and apply Eq.(6) to obtain the following recurrence relation [14]

$$\alpha\sqrt{(n+1)(n+2k)}c_{n+1} + \beta\sqrt{n(n+2k-1)}c_{n-1} = 2\eta c_n, \quad (8)$$

The  $q$ -deformed algebra  $su_q(1,1)$  is given as [15]

$$[Q_0, Q_{\pm}] = \pm Q_{\pm} \quad [Q_+, Q_-] = -[2Q_0]_q, \quad (9)$$

where the  $q$ -deformation is defined as

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad (10)$$

Following refs.[16] and [17] using Dyson realization, we can show that:

$$Q_0 = K_0 = N + k, \quad Q_- = K_- \sqrt{\frac{[N]_q}{N}}, \quad Q_+ = \sqrt{\frac{[N]_q [N+2k-1]_q}{N (N+2k-1)}} K_+, \quad (11)$$

Such that:

$$Q_- |n, k\rangle = \sqrt{[n]_q (n+2k-1)} |n-1, k\rangle,$$

$$Q_+ |n, k\rangle = \sqrt{[n+1]_q (n+2k) \frac{[n+2k]_q}{n+2k}} |n+1, k\rangle, \quad (12)$$

Here  $N$  is the number operator and  $k$  is a positive integer or half integer number. The  $su_q(1,1)$  IS are solutions of the following eigenvalue equation:

$$(\alpha Q_- + \beta Q_+) | \psi \rangle_q = 2\eta | \psi \rangle_q, \quad (13)$$

Straightforward calculations lead to the recurrence relation:

$$\alpha \sqrt{[n+1]_q (n+2k)} c_{n+1} + \beta \sqrt{[n]_q (n+2k-1) \frac{[n+2k-1]_q}{n+2k-1}} c_{n-1} = 2\eta c_n, \quad (14)$$

If we set  $c_n = (\beta_q / \alpha_q)^{\frac{n}{2}} d_n$  with  $\alpha_q = \alpha \sqrt{\frac{[n+1]_q}{n+1}}$ , and  $\beta_q = \beta \sqrt{\frac{[n]_q [n+2k-1]_q}{n (n+2k-1)}}$ , one has:

$$\frac{1}{2} \sqrt{(n+1)(n+2k)} d_{n+1} + \frac{1}{2} \sqrt{n(n+2k-1)} d_{n-1} - z d_n = 0, \quad (15)$$

where  $z^{(q)} = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\alpha}{q} \frac{\beta}{q}}}$ . This leads to the solution [18-20]:

$$d_n = P_n(z^{(q)}, k) = (i)^n \left( \frac{\Gamma[n+2k]}{n! \Gamma[2k]} \right)^{n/2} {}_2F_1(-n, k + iz^{(q)}; 2k; 2), \quad (16)$$

Here  $P_n(z^{(q)}, k)$  the Pollaczek polynomials. Thus, the  $su_q(1,1)$  IS has the form:

$$| \psi \rangle_q = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \left( \frac{(1-\lambda)\Gamma[n+2k]}{n!(1+\lambda)\Gamma[2k]} \right)^{n/2} {}_2F_1(-n, k + iz^{(q)}; 2k; 2) |n, k\rangle \quad (17)$$

where the normalization factor  $c_0$  reads:

$$|c_0|^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \left( \frac{(1-\lambda)\Gamma[n+2k]}{n!(1+\lambda)\Gamma[2k]} \right)^{n/2} \left| {}_2F_1(-n, k + iz^{(q)}; 2k; 2) \right|^2 \quad (18)$$



## SU<sub>q</sub>(2) INTELLIGENT STATES

Similar study can be done with the  $su(2)$  algebra. The generators satisfy the algebra[2]:

$$[Q_0, Q_{\pm}] = \pm Q_{\pm}, \quad [Q_+, Q_-] = [2Q_0]_{q^2}, \quad (19)$$

Following refs.[3] and [4] and using Dyson realization, we get:

$$Q_0 = J_0 = j - N, \quad Q_- = J_- \sqrt{\frac{[N]_q}{N}}, \quad Q_+ = \sqrt{\frac{[N]_q}{N}} \frac{[j-N+1]_q}{j-N+1} J_+, \quad (20)$$

Such that:

$$Q_- |j, n-j\rangle = \sqrt{[n]_q (2j-n+1)} |j, n-j-1\rangle, \\ Q_+ |j, n-j\rangle = \sqrt{[n+1]_q (2j-n)} \frac{[2j-n]_q}{2j-n} |j, n-j+1\rangle, \quad (21)$$

where  $N$  is the number operator and  $J_0, J_{\pm}$  are the generators of the  $su(2)$  algebra. The  $su_q(2)$  IS are solution of the following eigenvalue equation:

$$(\alpha Q_- + \beta Q_+) | \psi \rangle_q = 2\eta | \psi \rangle_q, \quad (22)$$

Let us now consider the eigenvalue problem. After straightforward calculations, we obtain the following recurrence relation:

$$\alpha \sqrt{[n+1]_q (2j-n)} c_{n+1} + \beta \sqrt{[n]_q (2j-n+1)} \frac{[2j-n+1]_q}{2j-n+1} c_{n-1} = 2\eta c_n, \quad (28)$$

setting  $c_n = (\beta'_q / \alpha'_q)^{\frac{n}{2}} d_n$  with  $\alpha'_q = \alpha \sqrt{\frac{[n+1]_q}{n+1}}$ , and

$\beta'_q = \beta \sqrt{\frac{[n]_q (2j-n+1)}{n(n+2j+1) [2j-n+1]_q}}$ , we obtain:

$$\frac{1}{2} \sqrt{(n+1)(n+2j)} d_{n+1} + \frac{1}{2} \sqrt{n(n+2j+1)} d_{n-1} - z' d_n = 0, \quad (29)$$

where  $z^{(q)} = \frac{\eta}{\sqrt{\alpha'_q \beta'_q}}$ . This leads to the result[5-7]:

$$d_n = P_n(z^{(q)}, k) = (i)^n \left( \frac{\Gamma[n+2j]}{n! \Gamma[2j]} \right)^{n/2} {}_2F_1(-n, j + iz^{(q)}; 2j; 2), \quad (30)$$

Thus, the final expression of the  $su_q(1,1)$  IS  $| \psi \rangle_q$  is:

$$| \psi \rangle_q = c_0 \sum_{n=0}^{2j} (i)^n \left( \frac{(1-\lambda)\Gamma[n+2j]}{n!(1+\lambda)\Gamma[2j]} \right)^{n/2} {}_2F_1(-n, j + iz'^{(q)}; 2j; 2) | j, n-j+1 \rangle, \quad (31)$$

The normalization factor  $c_0$  has the form

$$|c_0|^{-2} = \sum_{n=0}^{2j} (i)^n \left( \frac{(1-\lambda)\Gamma[n+2j]}{n!(1+\lambda)\Gamma[2j]} \right)^{n/2} \left| {}_2F_1(-n, j + iz'^{(q)}; 2j; 2) \right|^2 |j, n-j+1\rangle$$

## CONCLUSION

We have derived explicit expressions of the  $su_q(1,1)$  and  $su_q(2)$  intelligent and squeezed states. As a perspective, based on a remarkable property of a  $q$ -deformed bipartite composite system is the existence of a natural entangled structure for a non-classical value of the  $q$ -deformation parameter ( $q \neq 1$ ). It appears to be useful for extending the horizon of studies on entangled non orthogonal states so as to incorporate systems with quantum algebraic symmetries [15]. Composite systems with quantum symmetries, such as anyons for instance, are natural candidates.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We are very grateful to the Algerian Ministry of education and research, DGRSDT and ANDRU for the financial support.

## REFERENCES

1. R. Jackiw, *J. Math. Phys.* **9**, 339-346 (1968).
2. C. Aragone, G. Guerri, S. Salamo and J. L. Tani, *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen.* **7**, L149-L151 (1974).
3. C. Aragone, E. Chalboud and S. Salamo *J. Math. Phys.* **17**, 1963-1971 (1976).
4. G. Vandenberghe and H. De Meyer *J. Phys. A: Math. Gen.* **11**, 1569-1578 (1978).
5. K. Wódkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am. B2*, 458-466 (1985).
6. M.M. Nieto and D.R. Truax, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2843-2846 (1993).
7. M. Hillery and L. Mlodinow, *Phys. Rev. A* **48**, 1548-1558 (1993).
8. D. Yu and M Hillery, *Quantum Opt.* **6**, 37-56 (1994).
9. D. A. Trifonov, *J. Math. Phys.* **35**, 2297-2308 (1994).
10. G. S. Agarwal and R. R. Puri, *Phys. Rev. A* **49**, 4968-4971 (1994).
11. C. Brif and Y Ben-Aryeh *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 8185-8195 (1994).
12. C. C. Gerry and R. Grobe, *Phys. Rev. A* **51**, 4123-4131 (1995).
13. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **102**, 1217-1230 (1956).
14. G. M. Abd Al-Kader and A-S F Obada *Phys. Scr.* **78** 035401, 1-10 (2008).
15. M. Jimbo, *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*, Singapore, World Scientific, 1989, pp. 234-299.
16. T. L. Curtright and C. K. Zachos, *Phys. Lett. B* **243**, 237-244 (1990).
17. P. Oh and C. Rim, *J. Korean, Phys. Soc.* **30**, 157-164 (1997).
18. A. Erdélyi "The Hypergeometric Function" in *Higher Transcendental Functions* vol 1, New York, McGraw-Hill, 1953, p. 103 (31); A. Erdélyi 1953 "Orthogonal Polynomials" in *Higher Transcendental Functions* vol 2, New York, McGraw-Hill, 1953, p. 220.
19. B. Nagel, quant-ph/9711018.
20. M. Hillery, *Phys. Rev. A* **36**, 3796-3802 (1987).



# Bibliographie

- [1] P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche. Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 50 :1903–1906, Jun 1983.
- [2] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, 73 :565–582, Aug 2001.
- [3] R Miller, T E Northup, K M Birnbaum, A Boca, A D Boozer, and H J Kimble. Trapped atoms in cavity qed : coupling quantized light and matter. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 38(9) :S551, 2005.
- [4] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93 :99–110, Jan 1954.
- [5] M. Gross and S. Haroche. Superradiance : An essay on the theory of collective spontaneous emission. *Physics Reports*, 93(5) :301 – 396, 1982.
- [6] Michael A. Nielsen and L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2000.
- [7] Dirk Bouwmeester, Artur Ekert, and Anton Zeilinger. *The Physics of Quantum Information*. Berlin : Springer, 2000.
- [8] Brian Julsgaard, Alexander Kozhekin, and Eugene S. Polzik. Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects. *Nature*, 413(6854) :400–403, 09 2001.
- [9] T. Chaneliere, D. N. Matsukevich, S. D. Jenkins, S. Y. Lan, T. A. B. Kennedy, and A. Kuzmich. Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories. *Nature*, 438(7069) :833–836, 12 2005.
- [10] Alexander I. Lvovsky, Barry C. Sanders, and Wolfgang Tittel. Optical quantum memory. *Nat Photon*, 3(12) :706–714, 12 2009.
- [11] D. J. Wineland, C. Monroe, D. Leibfried W. M. Itano, B. E. King, and D. M. Meekhof. Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* 103, 259 (1998), 103(3), 1998.

- 
- [12] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi. Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :3221–3224, Apr 1997.
- [13] H. J. Kimble. The quantum internet. *Nature*, 453(7198) :1023–1030, 06 2008.
- [14] H.-J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac, and P. Zoller. Quantum repeaters : The role of imperfect local operations in quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :5932–5935, Dec 1998.
- [15] Manjin Zhong, Morgan P. Hedges, Rose L. Ahlefeldt, John G. Bartholomew, Sarah E. Beavan, Sven M. Wittig, Jevon J. Longdell, and Matthew J. Sellars. Optically addressable nuclear spins in a solid with a six-hour coherence time. *Nature*, 517(7533) :177–180, 01 2015.
- [16] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47 :777–780, May 1935.
- [17] J. S. Bell. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [18] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :1895–1899, Mar 1993.
- [19] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :661–663, Aug 1991.
- [20] M. Murao, D. Jonathan, M. B. Plenio, and V. Vedral. Quantum telecloning and multiparticle entanglement. *Phys. Rev. A*, 59 :156–161, Jan 1999.
- [21] Félix Bussières, Nicolas Sangouard, Mikael Afzelius, Hugues de Riedmatten, Christoph Simon, and Wolfgang Tittel. Prospective applications of optical quantum memories. *Journal of Modern Optics*, 60(18) :1519–1537, 2013.
- [22] L. M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller. Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. *Nature*, 414(6862) :413–418, 11 2001.
- [23] Marlan O. Scully, Edward S. Fry, C. H. Raymond Ooi, and Krzysztof Wódkiewicz. Directed spontaneous emission from an extended ensemble of  $n$  atoms : Timing is everything. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :010501, Jan 2006.
- [24] Ph. W. Courteille, S. Bux, E. Lucioni, K. Lauber, T. Bienaimé, R. Kaiser, and N. Piovella. Modification of radiation pressure due to cooperative scattering of light. *The European Physical Journal D*, 58(1) :69–73, 2010.
- [25] A. Lagendijk. *Can light be localised?* International Commission for Optics Current Trends in Optics, (London, Academic), 1994.

- 
- [26] Barry C. Sanders. Entangled coherent states. *Phys. Rev. A*, 45 :6811–6815, May 1992.
- [27] N. Boucerredj, N. Mebarki, and A. Benslama. Some aspects of a weak weyl-heisenberg algebra deformation. *Canadian Journal of Physics*, 83 :929–939, 2005.
- [28] Tobias Brandes. Coherent and collective quantum optical effects in mesoscopic systems. *Physics Reports*, 408(5–6) :315 – 474, 2005.
- [29] N B Delone, V P Kraĭnov, and V A Khodovoĭ. The two-level system in a strong light field. *Soviet Physics Uspekhi*, 18(9) :750, 1975.
- [30] L Chomaz, L Corman, T Yefsah, R Desbuquois, and J Dalibard. Absorption imaging of a quasi-two-dimensional gas : a multiple scattering analysis. *New Journal of Physics*, 14(5) :055001, 2012.
- [31] F. A. Pinheiro, M. Rusek, A. Orłowski, and B. A. van Tiggelen. Probing anderson localization of light via decay rate statistics. *Phys. Rev. E*, 69 :026605, Feb 2004.
- [32] Anatoly A. Svidzinsky, Jun-Tao Chang, and Marlan O. Scully. Cooperative spontaneous emission of n atoms : Many-body eigenstates, the effect of virtual lamb shift processes, and analogy with radiation of n classical oscillators. *Phys. Rev. A*, 81 :053821, May 2010.
- [33] E. M. Purcell and C. R. Pennypacker. Scattering and absorption by nonspherical dielectric grains. *Astrophys. J.*, 186 :705–714, December 1973.
- [34] Leslie L. Foldy. The multiple scattering of waves. i. general theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.*, 67 :107–119, Feb 1945.
- [35] Shermila B. Singham and Gary C. Salzman. Evaluation of the scattering matrix of an arbitrary particle using the coupled dipole approximation. *The Journal of Chemical Physics*, 84(5) :2658–2667, 1986.
- [36] Shermila Brito Singham and Craig F. Bohren. Light scattering by an arbitrary particle : the scattering-order formulation of the coupled-dipole method. *J. Opt. Soc. Am. A*, 5(11) :1867–1872, Nov 1988.
- [37] Anatoly Svidzinsky and Jun-Tao Chang. Cooperative spontaneous emission as a many-body eigenvalue problem. *Phys. Rev. A*, 77 :043833, Apr 2008.
- [38] Louis Bellando de Castro. *Localisation de la lumière et effets coopératifs dans des nuages d’atomes froids*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2013.
- [39] Olivier Morice, Yvan Castin, and Jean Dalibard. Refractive index of a dilute bose gas. *Phys. Rev. A*, 51 :3896–3901, May 1995.

- 
- [40] Daniel A. Steck. Rubidium 87 d line data. revision 2.1.4, 23 December 2010.
- [41] Jamal T. Manassah. Cooperative radiation from atoms in different geometries : decay rate and frequency shift. *Adv. Opt. Photon.*, 4(2) :108–156, Jun 2012.
- [42] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [43] Richard Friedberg and Jamal T. Manassah. Effects of including the counter-rotating term and virtual photons on the eigenfunctions and eigenvalues of a scalar photon collective emission theory. *Physics Letters A*, 372(14) :2514 – 2521, 2008.
- [44] Anatoly A. Svidzinsky and Marlan O. Scully. Evolution of collective n atom states in single photon superradiance : Effect of virtual lamb shift processes. *Optics Communications*, 282(14) :2894 – 2897, 2009.
- [45] Yong Li, Jörg Evers, Hang Zheng, and Shi-Yao Zhu. Collective spontaneous emission beyond the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. A*, 85 :053830, May 2012.
- [46] Yong Li, Jörg Evers, Wei Feng, and Shi-Yao Zhu. Spectrum of collective spontaneous emission beyond the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. A*, 87 :053837, May 2013.
- [47] Tom Bienaimé. *Effets coopératifs dans les nuages d’atomes froids*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2012.
- [48] R. Friedberg, S.R. Hartmann, and J.T. Manassah. Frequency shifts in emission and absorption by resonant systems of two-level atoms. *Physics Reports*, 7(3) :101 – 179, 1973.
- [49] Anatoly A. Svidzinsky, Jun-Tao Chang, and Marlan O. Scully. Dynamical evolution of correlated spontaneous emission of a single photon from a uniformly excited cloud of n atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :160504, Apr 2008.
- [50] C. C. Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d’interaction entre photons et atomes*. EDP Scineces, CNRS Éditions, 2001.
- [51] T. Bienaimé, M. Petruzzo, D. Bigerni, N. Piovella, and R. Kaiser. Atom and photon measurement in cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 58(21) :1942–1950, 2011.
- [52] T. Bienaimé, R. Bachelard, J. Chabé, M.T. Rouabah, L. Bellando, Ph.W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Interplay between radiation pressure force and scattered light intensity in the cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 61(1) :18–24, 2014.
- [53] H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publications, Inc., 1981.

- 
- [54] J. W. Goodman. *Statistical Optics*. John Wiley & Sons, 1985.
- [55] Meint P. Van Albada and Ad Lagendijk. Observation of weak localization of light in a random medium. *Phys. Rev. Lett.*, 55 :2692–2695, Dec 1985.
- [56] Pierre-Etienne Wolf and Georg Maret. Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 55 :2696–2699, Dec 1985.
- [57] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1999. 3rd Edition, pp 452.
- [58] T. Bienaimé, S. Bux, E. Lucioni, Ph. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Observation of a cooperative radiation force in the presence of disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :183602, May 2010.
- [59] Julien Chabé, Mohamed-Taha Rouabah, Louis Bellando, Tom Bienaimé, Nicola Piovella, Romain Bachelard, and Robin Kaiser. Coherent and incoherent multiple scattering. *Phys. Rev. A*, 89 :043833, Apr 2014.
- [60] N. Piovella, R. Bachelard, and PH. W. Courteille. Fluid description of the cooperative scattering of light by spherical atomic clouds. *Journal of Plasma Physics*, 79 :413–419, 8 2013.
- [61] J. P. Gordon and A. Ashkin. Motion of atoms in a radiation trap. *Phys. Rev. A*, 21 :1606–1617, May 1980.
- [62] Wei Feng, Yong Li, and Shi-Yao Zhu. Cooperative spontaneous emission of three identical atoms. *Phys. Rev. A*, 88 :033856, Sep 2013.
- [63] Richard Friedberg and Jamal T. Manassah. Analytic expressions for the initial cooperative decay rate and cooperative lamb shift for a spherical sample of two-level atoms. *Physics Letters A*, 374(15–16) :1648 – 1659, 2010.
- [64] Mohamed-Taha Rouabah, Marina Samoylova, Romain Bachelard, Philippe W. Courteille, Robin Kaiser, and Nicola Piovella. Coherence effects in scattering order expansion of light by atomic clouds. *J. Opt. Soc. Am. A*, 31(5) :1031–1039, May 2014.
- [65] R. Bachelard, Ph. W. Courteille, R. Kaiser, and N. Piovella. Resonances in mie scattering by an inhomogeneous atomic cloud. *EPL (Europhysics Letters)*, 97(1) :14004, 2012.
- [66] Martin B. van der Mark, Meint P. van Albada, and Ad Lagendijk. Light scattering in strongly scattering media : Multiple scattering and weak localization. *Phys. Rev. B*, 37 :3575–3592, Mar 1988.
- [67] Theo M. Nieuwenhuizen, Ad Lagendijk, and Bart A. van Tiggelen. Resonant point scatterers in multiple scattering of classical waves. *Physics Letters A*, 169(3) :191 – 194, 1992.
- [68] Nikolaevna Fadeeva, Vera. *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover, New York,, 1959.



- 
- [69] S E Skipetrov and A Goetschy. Eigenvalue distributions of large euclidean random matrices for waves in random media. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44(6) :065102, 2011.
- [70] A. Goetschy and S. E. Skipetrov. Non-hermitian euclidean random matrix theory. *Phys. Rev. E*, 84 :011150, Jul 2011.
- [71] E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard. Coherent backscattering of light by disordered media : Analysis of the peak line shape. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1471–1474, Apr 1986.
- [72] Y. Bidet, B. Klappauf, J. C. Bernard, D. Delande, G. Labeyrie, C. Miniatura, D. Wilkowski, and R. Kaiser. Coherent light transport in a cold strontium cloud. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :203902, May 2002.
- [73] Guillaume Labeyrie, Dominique Delande, Cord A. Müller, Christian Miniatura, and Robin Kaiser. Coherent backscattering of light by an inhomogeneous cloud of cold atoms. *Phys. Rev. A*, 67 :033814, Mar 2003.
- [74] B A van Tiggelen, A Lagendijk, and A Tip. Multiple-scattering effects for the propagation of light in 3d slabs. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 2(37) :7653, 1990.
- [75] T. Karpiuk, N. Cherroret, K. L. Lee, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura. Coherent forward scattering peak induced by anderson localization. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :190601, Nov 2012.
- [76] S. Bux, E. Lucioni, H. Bender, T. Bienaimé, K. Lauber, C. Stehle, C. Zimmermann, S. Slama, Ph.W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 57(19) :1841–1848, 2010.
- [77] H. Bender, C. Stehle, S. Slama, R. Kaiser, N. Piovella, C. Zimmermann, and Ph. Courteille. Observation of cooperative mie scattering from an ultracold atomic cloud. *Phys. Rev. A*, 82 :011404, Jul 2010.
- [78] Pedro de Vries, David V. van Coevorden, and Ad Lagendijk. Point scatterers for classical waves. *Rev. Mod. Phys.*, 70 :447–466, Apr 1998.
- [79] Melvin Lax. Multiple scattering of waves. *Rev. Mod. Phys.*, 23 :287–310, Oct 1951.
- [80] Akira Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media and Rough Surfaces*, volume 2. Academic Press, Inc, London, 1978.
- [81] Arthur Schuster. Radiation through a foggy atmosphere. *Astrophysical Journal*, 21, 1905.
- [82] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover, New York, 1960.

- 
- [83] Vincent C. Ballenegger and T. A. Weber. The ewald–oseen extinction theorem and extinction lengths. *American Journal of Physics*, 67(7) :599–605, 1999.
- [84] Changhuei Yang, Kyungwon An, Lev T. Perelman, Ramachandra R. Dasari, and Michael S. Feld. Spatial coherence of forward-scattered light in a turbid medium. *J. Opt. Soc. Am. A*, 16(4) :866–871, Apr 1999.
- [85] D.W. Mackowski and M.I. Mishchenko. Direct simulation of extinction in a slab of spherical particles. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 123(0) :103 – 112, 2013. Peter C. Waterman and his scientific legacy.
- [86] Yoshiki Kuramot. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin : Springer, 1984.
- [87] Johannes F. de Boer. *Optical fluctuations on the transmission and reflection of mesoscopic systems*. PhD thesis, FOM Institute for Atomic and Molecular Physics, Universiteit van Amsterdam, 1995.
- [88] D. J. Durian. Influence of boundary reflection and refraction on diffusive photon transport. *Phys. Rev. E*, 50 :857–866, Aug 1994.
- [89] Steven H. Strogatz. *Sync : the emerging science of spontaneous order*. New York : Hyperion, 2003.
- [90] John Buck and Elisabeth Buck. Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies : Fireflies of southeast asia may use anticipatory time-measuring in synchronizing their flashing. *Science*, 159(3821) :1319–1327, 1968.
- [91] Raisa I. Karasik, Karl-Peter Marzlin, Barry C. Sanders, and K. Birgitta Whaley. Multiparticle decoherence-free subspaces in extended systems. *Phys. Rev. A*, 76 :012331, Jul 2007.
- [92] V. G. Drinfel’d. Quantum groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Berkeley, California USA*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [93] L C Biedenharn. The quantum group  $su_q(2)$  and a  $q$ -analogue of the boson operators. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(18) :L873, 1989.
- [94] A J Macfarlane. On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $su(2)_q$ . *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(21) :4581, 1989.
- [95] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :5022–5025, Jun 1997.
- [96] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :2245–2248, Mar 1998.

- 
- [97] Wei-Min Zhang, Da Hsuan Feng, and Robert Gilmore. Coherent states : Theory and some applications. *Rev. Mod. Phys.*, 62 :867–927, Oct 1990.
- [98] S. Twareque Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, and U.A. Mueller. Coherent states and their generalizations : A mathematical overview. *Reviews in Mathematical Physics*, 07(07) :1013–1104, 1995.
- [99] Perelomov A M. *Generalized Coherent States and Their Applications*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1986.
- [100] S. Twareque Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau. *Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.
- [101] Dodonov V. V. and V. I. Man’ko. *Theory of Nonclassical States of Light*. London, New York : Taylor & Francis, 2003.
- [102] Jean-Pierre Gazeau. *Coherent States in Quantum Physics*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2009.
- [103] Combescure M and Robert D. *Coherent States and Applications in Mathematical Physics*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.
- [104] E. Schrödinger. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14(28) :664–666, 1926.
- [105] John R. Klauder. Continuius-representation theory. i. postulates of ontinuius-representation theory. *Journal of Mathematical Physics*, 4(8) :1055–1058, 1963.
- [106] John R. Klauder. ontinuius-representation theory. ii. generelized relation between quantum and classical dynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 4(8) :1058–1073, 1963.
- [107] Roy J. Glauber. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 10 :84–86, Feb 1963.
- [108] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130 :2529–2539, Jun 1963.
- [109] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131 :2766–2788, Sep 1963. Cited 2994.
- [110] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10 :277–279, Apr 1963.
- [111] A.O. Barut and L. Girardello. New “coherent” states associated with non-compact groups. *Communications in Mathematical Physics*, 21(1) :41–55, 1971.
- [112] A.M. Perelomov. Coherent states for arbitrary lie group. *Communications in Mathematical Physics*, 26(3) :222–236, 1972.

- 
- [113] S. M. Roy and Virendra Singh. Generalized coherent states and the uncertainty principle. *Phys. Rev. D*, 25 :3413–3416, Jun 1982.
- [114] Michael Martin Nieto and L. M. Simmons. Coherent states for general potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 41 :207–210, Jul 1978.
- [115] Jean Pierre Gazeau and John R Klauder. Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 32(1) :123, 1999.
- [116] O de los Santos-Sanchez and J Recamier. Nonlinear coherent states for nonlinear systems. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44(14) :145307, 2011.
- [117] O de los Santos-Sánchez and J Récamier. Phase space picture of morse-like coherent states based upon the wigner function. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(41) :415310, 2012.
- [118] V I Man’ko, G Marmo, E C G Sudarshan, and F Zaccaria. f-oscillators and nonlinear coherent states. *Physica Scripta*, 55(5) :528, 1997.
- [119] R. L. de Matos Filho and W. Vogel. Nonlinear coherent states. *Phys. Rev. A*, 54 :4560–4563, Nov 1996.
- [120] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland. A “schrödinger cat” superposition state of an atom. *Science*, 272(5265) :1131–1136, 1996.
- [121] Z. Kis, W. Vogel, and L. Davidovich. Nonlinear coherent states of trapped-atom motion. *Phys. Rev. A*, 64 :033401, Aug 2001.
- [122] Dagoberto S. Freitas and M. C. Nemes. Preparation of schrödinger cat states of a cavity field via coupling to a superconducting charge qubit. *Modern Physics Letters B*, 28(10) :1450082, 2014.
- [123] V. I. Man’ko, G. Marmo, S. Solimeno, and F. Zaccaria. Physical nonlinear aspect of classical and quantum q-oscillators. *International Journal of Modern Physics A*, 08(20) :3577–3597, 1993.
- [124] V I Man’ko and R Vilela Mendes. On the nonlinearity interpretation of q - and f -deformation and some applications. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31(28) :6037, 1998.
- [125] J. Récamier, M. Gorayeb, W.L. Mochán, and J.L. Paz. Nonlinear coherent states and some of their properties. *International Journal of Theoretical Physics*, 47(3) :673–683, 2008.
- [126] P Aniello, V Man’ko, G Marmo, S Solimeno, and F Zaccaria. On the coherent states, displacement operators and quasidistributions associated with deformed quantum oscillators. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, 2(6) :718, 2000.

- 
- [127] K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [128] B Roy and P Roy. New nonlinear coherent states and some of their nonclassical properties. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, 2(1) :65, 2000.
- [129] V. Man'ko, G. Marmo, A. Porzio, S. Solimeno, and F. Zaccaria. Trapped ions in laser fields : a benchmark for deformed quantum oscillators. *Phys. Rev. A*, 62 :053407, Oct 2000.
- [130] Bing He and János A. Bergou. Coherent-states engineering with linear optics : Possible and impossible tasks. *Phys. Rev. A*, 77 :053818, May 2008.
- [131] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Quantum switches and nonlocal microwave fields. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :2360–2363, Oct 1993.
- [132] K. Berrada, S. Abdel-Khalek, H. Eleuch, and Y. Hassouni. Beam splitting and entanglement generation : excited coherent states. *Quantum Information Processing*, 12(1) :69–82, 2013.
- [133] Xiaoguang Wang. Bipartite entangled non-orthogonal states. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 35(1) :165, 2002.
- [134] A. Mann, B. C. Sanders, and W. J. Munro. Bell's inequality for an entanglement of nonorthogonal states. *Phys. Rev. A*, 51 :989–991, Feb 1995.
- [135] Hongchen Fu, Xiaoguang Wang, and Allan I. Solomon. Maximal entanglement of nonorthogonal states : classification. *Physics Letters A*, 291(2–3) :73 – 76, 2001.
- [136] S. J. van Enk and O. Hirota. Entangled coherent states : Teleportation and decoherence. *Phys. Rev. A*, 64 :022313, Jul 2001.
- [137] Xiaoguang Wang. Quantum teleportation of entangled coherent states. *Phys. Rev. A*, 64 :022302, Jul 2001.
- [138] H Prakash, N Chandra, R Prakash, and Shivani. Effect of decoherence on fidelity in teleportation using entangled coherent states. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 40(8) :1613, 2007.
- [139] Tobias J. Osborne and Frank Verstraete. General monogamy inequality for bipartite qubit entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :220503, Jun 2006.
- [140] M. T. Rouabah and N. Mebarki. Bipartite entanglement of deformed coherent states. (in preparation).
- [141] M. F. Ghiti, N. Mebarki, and M. T. Rouabah. Paraquantum squeezed and coherent states : New type of entanglement. *AIP Conference Proceedings*, 1444(1) :238–240, 2012.

- 
- [142] M. T. Rouabah, N. Mebarki, and M. F. Ghiti. Q-deformed  $su(1,1)$  and  $su(2)$  squeezed and intelligent states and quantum entanglement. *AIP Conference Proceedings*, 1444(1) :241–245, 2012.
- [143] David C. Burnham and Raymond Y. Chiao. Coherent resonance fluorescence excited by short light pulses. *Phys. Rev.*, 188 :667–675, Dec 1969.
- [144] L. Allen and J. H. Eberly. *Optical resonance and two-level atoms*. Wiley, New York, 1987.
- [145] Eyob A. Sete, Anatoly A. Svidzinsky, Hichem Eleuch, Z. Yang, Robert D. Nevels, and Marlan O. Scully. Correlated spontaneous emission on the danube. *Journal of Modern Optics*, 57(14-15) :1311–1330, 2010.
- [146] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Inc, seventh edition, 2007. p. 722.
- [147] G. Vinod, K. Babu Joseph, and V. C. Kuriakose. Coherent states and squeezed states of real q-deformed quantum oscillators. *Pramana*, 42(4) :299–309, 1994.

## RÉSUMÉ

Ce travail de thèse traite d'une part des effets de cohérence en diffusion multiple de la lumière par un nuage atomique et, d'autre part, de l'intrication quantique des états cohérents déformés.

L'interaction entre la lumière et un nuage atomique désordonné et dilué donne lieu à des effets de cohérence collectifs dus à l'interaction des dipôles induits par le biais du champ lumineux. L'influence de tels effets de cohérence en diffusion multiple suscite beaucoup d'intérêt. Nous présentons deux modèles théoriques qui décrivent ces effets de cohérence dans différents régimes de diffusion. Le traitement du processus à travers un développement en ordres successifs de diffusion nous permet de mettre en évidence la contribution du premier et second ordres ainsi que l'interférence entre les champs diffusés qui en résultent. Dans le régime de diffusion multiple, nous montrons que la force de pression de radiation n'est pas une bonne observable pour sonder les effets coopératifs. Par ailleurs, nous mettons en évidence une surprenante cohérence de phase qui suggère une persistance des effets coopératifs en diffusion multiple. Cela pourrait être le résultat d'une synchronisation entre les dipôles atomiques couplés.

Dans une deuxième partie, nous étudions l'effet d'une déformation de l'algèbre de Weyl-Heisenberg sur l'intrication des états cohérents. Une telle approche permet de décrire la décohérence dans des systèmes quantiques intriqués soumis à une perturbation extérieure. Nous construisons des états cohérents déformés intriqués et nous calculons leurs concurrence. Nous montrons que la déformation de l'algèbre pourrait avoir un impact non négligeable sur la qualité de l'intrication bipartite des états cohérents, si cette dernière n'est pas maximale.

## MOTS CLÉS

OPTIQUE QUANTIQUE - EFFETS COOPÉRATIFS - ATOMES FROIDS - INTRICATION QUANTIQUE  
- ÉTATS COHÉRENTS - DIFFUSION DE LA LUMIÈRE.

---

## ABSTRACT

This work is devoted on the one hand to the investigation of coherence effects in multiple scattering of light by an atomic cloud and on the other hand to the entanglement of a deformed coherent states.

The interaction between light and a dilute disordered atomic cloud gives rise to collective coherent effects due to the interaction of the induced dipoles *via* the external field. The behavior of such coherent effects in multiple scattering regime is an important question for various physical systems. We present two theoretical models describing those coherence effects in different scattering regimes. The scattering order expansion treatment of light scattering allows us to highlight the role of the first and second scattering orders as well as the interference between the resulting scattered fields. In the multiple scattering regime we show that the radiation pressure force is not a good observable to probe cooperative effects. Furthermore, we discover a surprising phase coherence that hints that collective effects may survive in multiple scattering regime. That could be due to a synchronization between the induced atomic dipoles.

In a second part, we study the effect of an algebra deformation on entangled coherent states. Such an approach allows to describe decoherence in perturbed entangled quantum systems. We construct a deformed coherent states and calculate their concurrence. We show that algebra deformation could have a non negligible impact on bipartite entangled coherent states if those later are not maximally entangled.

## KEY WORDS

QUANTUM OPTICS - COOPERATIVE EFFECTS - COLD ATOMS - QUANTUM ENTANGLEMENT  
- COHERENT STATES - LIGHT SCATTERING