



# Conjonction de données et de modèles pour la datation des forages profonds d'Antarctique et du Groenland

Bénédicte Lemieux-Dudon

► **To cite this version:**

Bénédicte Lemieux-Dudon. Conjonction de données et de modèles pour la datation des forages profonds d'Antarctique et du Groenland. Planète et Univers [physics]. Grenoble 1 UJF - Université Joseph Fourier, 2009. Français. <NNT : 20004208>. <tel-01171550>

**HAL Id: tel-01171550**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01171550>**

Submitted on 10 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **Science de la Terre et de l'Environnement**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Bénédicte LEMIEUX-DUDON**

Thèse dirigée par **Dominique RAYNAUD** et **Frédéric PARRENIN**

préparée au sein du  
**Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement**  
et de l'École Doctorale  
**Terre, Univers, Environnement**

**Conjonction de données et de modèles pour la datation des forages profonds d'Antarctique et du Groenland**

Soutenue le **4 mai 2009**,  
devant le jury composé de :

**M. Eric BLAYO**

Professeur, Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble, Président

**Mme Valérie MASSON-DELMOTTE**

Chercheur, CEA-Laboratoire des Sciences du Climat et de l'Environnement, Saclay, Rapporteur

**M. Marc BOCQUET**

Professeur, Centre d'Enseignement et de Recherche en Environnement Atmosphérique, Marne-la-Vallée, Rapporteur

**Mme Claire WAELBROECK**

Chercheur, Laboratoire des Sciences du Climat et de l'Environnement, Gif-sur-Yvette, Examinatrice

**M. Eric WOLFF**

Professeur, British Antarctic Survey, Cambridge, Examineur

**M. Dominique RAYNAUD**

Chercheur, Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement, Grenoble, Directeur de thèse

**M. Frédéric PARRENIN**

Chercheur, Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement, Grenoble, Co-Encadrant de thèse





# Résumé

Les relations de phase entre augmentation de la concentration des gaz à effet de serre et augmentation de la température constitue un enjeu sociétal. Pour affiner notre compréhension des mécanismes climatiques sur la Terre, une datation précise des enregistrements climatiques du passé (carotte de glace, carotte de sédiments marins, spéléothèmes) est indispensable. En échelle relative, les datations permettent d'évaluer les relations de phase des variations climatiques en différents points du globe. En échelle absolue, les liens entre changements de l'orbite terrestre et réponse climatique peuvent être étudiés. Les carottes de glace d'Antarctique et du Groenland constituent des archives uniques à l'échelle des grands cycles glaciaire-interglaciaire. Elles offrent de nombreux marqueurs stratigraphiques pour la datation relative (méthane, couches de cendre...). Les échelles d'âge de ces carottes peuvent en outre être calculées grâce à des modèles numériques simulant la déformation des calottes, l'évolution de la température et des précipitations, ainsi que les caractéristiques du névé polaire. Toutefois les incertitudes sur ces datations modélisées demeurent considérables, notamment sur la datation relative des signaux de température enregistrés dans la glace solide et des signaux de composition de l'atmosphère enregistrés dans les bulles d'air piégées dans la glace. Le gaz et la glace à une même profondeur n'ont en effet pas le même âge. Au cours de ce travail de thèse, un code d'assimilation de données a été développé afin de réduire les incertitudes sur les chronologies. Ce code permet de calculer simultanément les datations gaz et glace de plusieurs forages glaciaires en réalisant un compromis entre les informations chronologiques fournies par les modèles glaciologiques et celles apportées par les contraintes stratigraphiques issues des mesures dans la glace et le gaz. La méthode repose sur une inférence Bayésienne formulée à l'aide d'une fonction coût. Cette formulation met en jeu des matrices de covariance d'erreur qui rendent compte des incertitudes sur les données ainsi que sur les sorties des modèles fournissant la première ébauche de datation. Elle permet de proposer des échelles d'âge optimisées ainsi que des intervalles de confiance. Dans ce manuscrit, on présente les premières expériences de datation réalisées avec l'outil numérique. En particulier, la datation simultanée des forages de North GRIP (Groenland), Vostok, Epica Dôme C et Epica Dronning Maud Land (Antarctique) montre le potentiel de cet outil pour construire les futures échelles d'âge des forages profonds.



# Abstract

We are hereby presenting a new dating method based on inverse techniques, which aims at calculating consistent gas and ice chronologies for several ice cores. The proposed method yields new dating scenarios simultaneously for several cores by making a compromise between the chronological information brought by glaciological modeling (i.e., ice flow model, firn densification model, accumulation rate model), and by gas and ice stratigraphic constraints. This method enables us to gather widespread chronological information and to use regional or global markers (i.e., methane, volcanic sulfate, Beryllium-10, tephra layers, etc.) to link the core chronologies stratigraphically. Confidence intervals of the new dating scenarios can be calculated thanks to the probabilistic formulation of the new method, which takes into account both modeling and data uncertainties. We apply this method simultaneously to one Greenland (NGRIP) and three Antarctic (EPICA Dome C, EPICA Dronning Maud Land, and Vostok) ice cores, and refine existent chronologies. Our results show that consistent ice and gas chronologies can be derived for depth intervals that are well-constrained by relevant glaciological data. In particular, we propose new and consistent dating of the last deglaciation for Greenland and Antarctic ice and gas records.

**Keywords :** Data assimilation, Inverse modelling, Ice cores, Age scales, Chronology, Glaciology, Paleoclimate.



# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Dominique Raynaud. C'est grâce à lui que j'ai fait mes tout premiers pas de le monde des carottes de glace, en travaillant sur un sujet qui lui est très cher la teneur en air. C'est aussi grâce à Dominique que j'ai engagé cette thèse co-dirigée par Frédéric Parrenin, au cours de laquelle j'ai eu l'énorme opportunité de développer des compétences en assimilation de données, ceci dans le but de les appliquer à la datation des carottes de glace. Je remercie vivement Dominique et Frédéric qui m'ont fait pleinement confiance tout au long du développement du code de datation qui a donné le jour à l'outil Datice et je tiens à souligner combien le rapprochement avec l'équipe-projet MOISE (Inria) dirigée par Eric Blayo a été profitable pour mener à bien ces travaux. Je voudrais à ce titre remercier Eric Blayo dont les éclairages en assimilation de données ont été décisifs à quelques moments précis au cours de ce travail. Je voudrais aussi remercier chaleureusement Jean-Robert Petit qui a fait une relecture attentive des chapitres d'introduction de ma thèse et dont les conseils et commentaires ont été très précieux pour développer ma culture imparfaite des sciences des paléoclimats. Je voudrais de plus remercier Catherine Ritz et Claire Waelbroeck qui se sont intéressées à mes premières applications du code et qui m'ont en particulier fortement encouragée au cours de la rédaction du papier Lemieux-Dudon et al, QSR 2010. Leurs corrections et commentaires, ajoutés à ceux de Jean-Marc Barnola, Jean Robert Petit et Anders Svensson ont largement contribué à la qualité de l'article. Par ailleurs, cette thèse a été aussi l'occasion de partager une petite fenêtre de ma vie avec moult personnes au LGGE. Ils m'ont chacun à leur manière apporté un petit grain de sel non seulement pour mon travail mais aussi et surtout pour nourrir toutes les dimensions de ma vie. Aussi, à vous tous qui m'avez accompagnée dans cette drôle d'aventure, je vous dis très chaleureusement merci.





# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>Contexte</b>	<b>18</b>
1.1	L'intérêt des archives polaires . . . . .	18
1.2	Dater les archives polaires . . . . .	21
1.3	Les modèles glaciologiques pour dater la glace et le gaz . . . . .	25
1.4	La modélisation inverse pour dater la glace . . . . .	26
1.5	Les limites des modèles glaciologiques pour dater la glace et le gaz : l'erreur modèle . . . . .	27
1.6	Le prérequis des datations cohérentes pour interpréter les enregistrements des forages . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Buts poursuivis et organisation du manuscrit</b>	<b>33</b>
2.1	Objectif : chronologies gaz et glace cohérentes entre forages . . . . .	33
2.2	Grandeurs glaciologiques importantes . . . . .	34
2.2.1	Taux d'accumulation, fonction d'amincissement, épaisseur de la couche annuelle . . . . .	34
2.2.2	Age de la glace . . . . .	35
2.2.3	Age du gaz, delta-age et delta-depth . . . . .	35
2.3	Organisation du manuscrit . . . . .	36
<b>II</b>	<b>Information chronologique issue des modèles et des observa- tions</b>	<b>38</b>
<b>3</b>	<b>Introduction</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>Les modèles glaciologiques de datation des forages</b>	<b>40</b>
4.1	Modèles pour reconstruire les paleo-températures . . . . .	41
4.1.1	Le thermomètre isotopique . . . . .	41
4.1.2	Inversion du profil de température le long de forage . . . . .	47
4.2	Modèle pour reconstruire les paléo-accumulation . . . . .	48
4.2.1	Modèles basés sur les isochrones . . . . .	48
4.2.2	Modèles basés sur la pression de vapeur saturante . . . . .	49

4.2.3	Modèles basés sur la teneur isotopique . . . . .	50
4.2.4	Limites des modèles d'accumulation . . . . .	50
4.2.5	Flux d'aérosols comme indicateur du taux d'accumulation passé . . .	52
4.3	Modèle d'écoulement de la glace . . . . .	53
4.3.1	Généralités . . . . .	53
4.3.2	Loi de comportement de la glace polycristalline . . . . .	54
4.3.3	Loi de comportement de la chaleur, de l'énergie de déformation et de l'énergie interne . . . . .	59
4.3.4	Equations locales de conservation : problème Full-Stokes . . . . .	59
4.3.5	Conditions aux limites . . . . .	61
4.3.6	Equation de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur de la calotte	63
4.3.7	Approximation de la couche mince . . . . .	63
4.3.8	Modèles d'écoulement pour dater la glace . . . . .	69
4.4	Modèles de densification de la colonne neige-névé . . . . .	76
4.4.1	Modèles de densification Arnaud <i>et al.</i> (2000) . . . . .	80
4.4.2	Modèles de densification Goujon <i>et al.</i> (2003) . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Les observations apportant de l'information chronologique</b>	<b>85</b>
5.1	Introduction . . . . .	85
5.2	Les observations issues de mesures sur les carottes de glace . . . . .	86
5.2.1	Proxy des cycles saisonniers, comptage et épaisseur des couches annuelles	86
5.2.2	Couches de cendre ou téphra . . . . .	91
5.2.3	Sulfate, charge acide et conductivité de la glace . . . . .	92
5.2.4	Méthane et isotope de l'oxygène atmosphérique $\delta^{18}O_{atm}$ . . . . .	94
5.2.5	Isotopes de l'argon et de l'azote atmosphérique . . . . .	95
5.2.6	Isotopes cosmogéniques : $^{10}Be$ . . . . .	99
5.2.7	Autres marqueurs stratigraphiques . . . . .	99
5.3	Comparaison des archives polaires à d'autres archives datées . . . . .	100
5.3.1	Archives terrestres . . . . .	100
5.3.2	Archives marines . . . . .	101
5.4	Calage orbital . . . . .	102
5.4.1	Historique et développement . . . . .	102
5.4.2	Teneur en air . . . . .	102
5.5	Classification des observations pour préparer l'assimilation . . . . .	103

5.5.1	Marqueurs d'âge glace ou gaz . . . . .	103
5.5.2	Liens stratigraphiques gaz et glace . . . . .	103
5.5.3	Marqueur de grandeurs . . . . .	103
5.6	Conclusion . . . . .	104
<b>III Nouvelle approche inverse pour dater le gaz et la glace des forages</b>		<b>107</b>
<b>6</b>	<b>Introduction</b>	<b>108</b>
<b>7</b>	<b>Quelques éléments d'inversion</b>	<b>110</b>
7.1	Généralités . . . . .	110
7.2	Approches stochastiques . . . . .	112
7.2.1	Les différents états d'information . . . . .	112
7.2.2	La conjonction des états d'information . . . . .	113
7.3	Contrôle optimal . . . . .	115
7.4	Fonction coût dérivée de l'inférence bayésienne ou de la conjonction d'états d'information . . . . .	116
7.5	Critère d'optimalité : le maximum de vraisemblance . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Formulation du problème inverse : paramétrer l'erreur modèle</b>	<b>119</b>
8.1	Ajuster les grandeurs glaciologiques en sortie des modèles . . . . .	119
8.1.1	Champ de corrections . . . . .	119
8.1.2	Contrainte de positivité . . . . .	121
8.2	Formulation du problème inverse . . . . .	121
8.2.1	Discretisation du problème . . . . .	122
8.2.2	Du maximum de vraisemblance à la fonction coût . . . . .	124
8.3	Information a priori sur le vecteur de correction $X$ . . . . .	126
8.3.1	Hypothèses et variable de contrôle . . . . .	126
8.3.2	Vecteur d'ébauche . . . . .	128
8.3.3	Matrice de covariance d'erreur d'ébauche . . . . .	129
8.3.4	Terme d'ébauche de la fonction coût . . . . .	131
8.4	Information expérimentale et théorique . . . . .	133
8.4.1	Vecteur d'observation : formalisme . . . . .	133
8.4.2	Incertitudes liées aux observations : hypothèses . . . . .	135

8.4.3	Opérateur d'observation : formalisme . . . . .	136
8.4.4	Opérateur d'observation et incertitudes sur le modèle théorique associé aux observations : hypothèses . . . . .	138
8.4.5	Propriétés des espaces des observations $Y$ et des corrections $X$ . . . . .	138
8.4.6	Observations $Y$ . . . . .	138
8.4.7	Terme d'observation de la fonction coût . . . . .	144
8.5	Terme régularisant de la fonction coût : information facultative . . . . .	146
8.6	En résumé . . . . .	148
<b>9</b>	<b>Identifier les corrections optimales</b>	<b>150</b>
9.1	Les méthodes de descentes . . . . .	150
9.1.1	Généralités . . . . .	150
9.1.2	Le quasi-newton <code>m1qn3</code> . . . . .	150
9.2	Gradient de la fonction coût . . . . .	151
9.2.1	Gradient du terme d'ébauche $J^b$ . . . . .	151
9.2.2	Gradient du terme régularisant $J^r$ . . . . .	152
9.2.3	Gradient du terme d'observation $J^o$ . . . . .	153
<b>10</b>	<b>Intervalles de confiance a posteriori</b>	<b>154</b>
10.1	Intervalles de confiance sur les corrections analysées . . . . .	154
10.1.1	Matrice de covariance d'erreur d'ébauche a posteriori . . . . .	154
10.1.2	Intervalle de confiance sur le vecteur de contrôle analysé . . . . .	155
10.1.3	Intervalle de confiance sur le vecteur d'état analysé . . . . .	156
10.2	Intervalles de confiance sur les grandeurs glaciologiques analysées . . . . .	157
10.3	Intervalles de confiance les chronologies analysées . . . . .	158
<b>11</b>	<b>Optimisation du problème : identifier les perturbations optimales</b>	<b>160</b>
11.1	Généralités sur les méthodes de descentes . . . . .	160
11.1.1	Fonction quadratique . . . . .	160
11.1.2	Fonction plus complexe . . . . .	161
11.1.3	Les méthodes de gradient . . . . .	161
11.1.4	Les méthodes de Newton . . . . .	161
11.1.5	Les méthodes de quasi-newton . . . . .	161
11.2	Le quasi-newton <code>m1qn3</code> . . . . .	161
11.3	Gradient de la fonction coût . . . . .	162

11.3.1	Gradient de $J^b$ . . . . .	162
11.3.2	Gradient de $J^r$ . . . . .	163
11.3.3	Gradient du terme d'observation $J^o$ . . . . .	164
<b>IV</b>	<b>Applications</b>	<b>176</b>
<b>12</b>	<b>Introduction</b>	<b>177</b>
<b>13</b>	<b>Article sous presse dans le <i>Proceedings of the 2nd International Workshop on Physics of Ice Core Records</i></b>	<b>178</b>
<b>14</b>	<b>Sensibilité de la solution à l'ébauche</b>	<b>192</b>
14.1	Description des expériences numériques . . . . .	192
14.1.1	Sensibilité à l'ébauche de l'âge glace analysé . . . . .	193
14.1.2	Sensibilité à l'ébauche de la correction sur l'amincissement . . . . .	195
14.2	Résultats . . . . .	197
14.3	Discussion . . . . .	203
14.3.1	Sensibilité à l'ébauche de l'âge glace analysé . . . . .	203
14.3.2	Sensibilité à l'ébauche de la correction sur l'amincissement . . . . .	203
14.4	Conclusion . . . . .	204
<b>15</b>	<b>Article soumis au <i>Quaternary Science Reviews</i></b>	<b>205</b>
<b>16</b>	<b>Inversion sur 4 sites</b>	<b>246</b>
16.1	Simulation améliorée . . . . .	246
16.1.1	Retour sur les observations . . . . .	246
16.1.2	Retour sur les scénarios d'ébauches . . . . .	248
16.2	Résultats . . . . .	248
16.3	Discussion . . . . .	253
16.3.1	Nouvelles chronologies et bascule du climat pendant le dernier interglaciaire . . . . .	253
16.3.2	Nouvelle chronologie gaz à NGRIP . . . . .	254
16.3.3	Scénario de taux d'accumulation à EDML . . . . .	254
16.3.4	Reconstruction de codie . . . . .	254

<b>V</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>256</b>
<b>17</b>	<b>Conclusions</b>	<b>257</b>
17.1	Développements . . . . .	257
17.2	Applications . . . . .	259
<b>18</b>	<b>Perspectives</b>	<b>260</b>
18.1	Perspectives de développement . . . . .	260
18.1.1	Assimilation de données d'épaisseurs de couches annuelles . . . . .	260
18.1.2	Acquérir de l'information a priori sur les variances et covariances d'erreur modèle . . . . .	260
18.1.3	Vérification d'hypothèses pour valider l'estimation des erreurs a posteriori . . . . .	261
18.1.4	Couplage des modèles inverses d'écoulement et de la méthode développée dans ce travail . . . . .	261
18.2	Perspectives d'applications . . . . .	264
18.2.1	Confronter les nouveaux scénario glaciologiques à des données indépendantes . . . . .	264
18.2.2	Multiplier les contraintes sur le delta-age et le delta-depth . . . . .	265
18.2.3	Forcer les modèles de densification avec les nouveaux scénario d'accumulation . . . . .	265
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>267</b>
<b>A</b>	<b>Approximation hydrostatique ou glaciostatique</b>	<b>268</b>
<b>B</b>	<b>Modèle de Lliboutry pour une nappe de glace froide</b>	<b>270</b>
<b>C</b>	<b>Calcul du delta-depth</b>	<b>273</b>
<b>D</b>	<b>Densité volumique de probabilité, densité homogène de probabilité</b>	<b>274</b>
D.1	Invariance d'une solution au sens d'un critère d'optimalité . . . . .	274
D.2	Grandeur $\tilde{X}$ distribuée lognormalement et sa transformée $X = \exp \tilde{X}$ . . . . .	274
D.3	Mode d'une distribution lognormale et maximum de vraisemblance . . . . .	276
D.4	Densité volumique de probabilité . . . . .	276
D.5	Densité homogène de probabilité . . . . .	278
D.6	Règle d'invariance . . . . .	279

<b>E Transformation d'une distribution lognormale en distribution gaussienne : les avantages</b>	<b>280</b>
<b>F Observations</b>	<b>281</b>
F.1 Marqueurs d'âge glace et marqueurs d'âge gaz . . . . .	281
F.1.1 Densité de probabilité . . . . .	281
F.1.2 Opérateur d'observation . . . . .	281
F.1.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\Psi,K}$ . . . . .	282
F.2 Marqueurs d'âge gaz . . . . .	283
F.2.1 Densité de probabilité . . . . .	283
F.2.2 Opérateur d'observation . . . . .	283
F.2.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\chi,K}$ . . . . .	285
F.3 Marqueurs d'accumulation . . . . .	286
F.3.1 Densité de probabilité . . . . .	286
F.3.2 Opérateur d'observation . . . . .	287
F.3.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\alpha,K}$ . . . . .	287
F.4 Marqueurs d'amincissement . . . . .	288
F.4.1 Densité de probabilité . . . . .	288
F.4.2 Opérateur d'observation . . . . .	288
F.4.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\tau,K}$ . . . . .	289
F.5 Marqueurs de delta-depth . . . . .	289
F.5.1 Densité de probabilité . . . . .	289
F.5.2 Opérateur d'observation . . . . .	290
F.5.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\delta,K}$ . . . . .	290
F.6 Liens stratigraphiques glace . . . . .	291
F.6.1 Densité de probabilité . . . . .	291
F.6.2 Opérateur d'observation . . . . .	291
F.6.3 Opérateurs linéaires tangents $H^{\Psi,J,K1}$ et $H^{\Psi,J,K2}$ . . . . .	292
F.7 Liens stratigraphique gaz . . . . .	293
F.7.1 Densité de probabilité . . . . .	293
F.7.2 Opérateur d'observation . . . . .	294
F.7.3 Opérateurs linéaires tangents $H^{\chi,J,K1}$ et $H^{\chi,J,K2}$ . . . . .	295



---

<b>G Opérateurs généralisés : formalisme</b>	<b>298</b>
G.1 Opérateur linéaire tangent généralisé $H$ associé aux observations . . . . .	298
G.2 Matrice de covariance d'erreur d'observation généralisée $R$ . . . . .	299
G.3 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche généralisée $B$ . . . . .	300
<b>H Opérateurs linéaires tangents associés aux modèles d'âge glace et gaz</b>	<b>301</b>
H.1 Opérateurs linéaires tangents généralisés . . . . .	301
H.1.1 Modèle d'âge glace . . . . .	301
H.1.2 Modèle d'âge gaz . . . . .	302
H.2 Opérateur linéaire tangent associé au modèle d'âge glace . . . . .	302
H.3 Opérateur linéaire tangent associé au modèle d'âge gaz . . . . .	303

---

<b>Annexes</b>	<b>267</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>307</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>319</b>



# Première partie

## Introduction

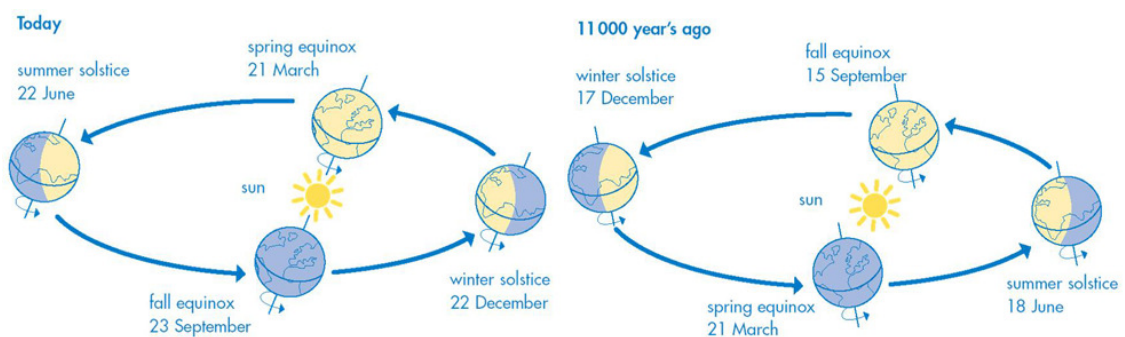
## 1.1 L'intérêt des archives polaires

Au cours du dernier million d'années, la terre a connu une succession de changements climatiques importants avec en particulier des cycles glaciaire-interglaciaire asymétriques (entrées en glaciation lente et déglaciations rapides) d'une durée de l'ordre de 100 ka (i.e., 100 000 ans). Ces cycles ont été mis en évidence dans de nombreux enregistrements : carottes de sédiments marins (Hays *et al.*, 1976a,b; Bassinot *et al.*, 1994; Lisiecki et Raymo, 2005), carottes de glace (Petit *et al.*, 1999; EPICA Community Members, 2004), carottes continentales (Kukla et An, 1989). Pendant les périodes glaciaires, des changements climatiques plus rapides ont aussi été observés (Heinrich, 1988). Les mécanismes qui contrôlent ces différents changements font encore débats aujourd'hui. La théorie astronomique relie l'alternance des périodes glaciaire-interglaciaire aux modifications lentes de l'insolation sur Terre qui s'opèrent selon la latitude et la saison, modifications gouvernées en particulier par les variations de la précession des équinoxes (périodicité 19 et 23 kilo-années, noté ka) et de l'obliquité de l'axe de la Terre (périodicité 41ka) (voir figure 1.1). Les variations d'énergie solaire engendrées par les changements d'excentricité de l'orbite de la Terre (100 et 400ka) restent quant-à elles très faibles. Pourtant, la cyclicité de 100ka est retrouvée dans de nombreux enregistrements paléo-climatiques et ceci reste encore une énigme. Si le forçage radiatif est vraisemblablement un initiateur des changements climatiques, il existe de nombreux mécanismes de rétroaction qui atténuent ou amplifient la réponse du système climatique terrestre. Le système climatique de la Terre est complexe et comprend une multitude de sous-systèmes couplés dont l'océan, l'atmosphère, la cryosphère et la biosphère. Chacun de ces sous-systèmes amplifie ou atténue un forçage donné, avec une échelle de temps qui lui est propre.

Durant la dernière période glaciaire, l'Amérique du Nord, l'Eurasie étaient recouvertes d'énormes calottes glaciaires ; aujourd'hui il ne subsiste que deux grandes calottes aux pôles : le Groenland et l'Antarctique. Ces grandes calottes sont des acteurs importants du système climatique. Elles constituent un réservoir d'eau douce et de frigidité. Elles participent au bilan

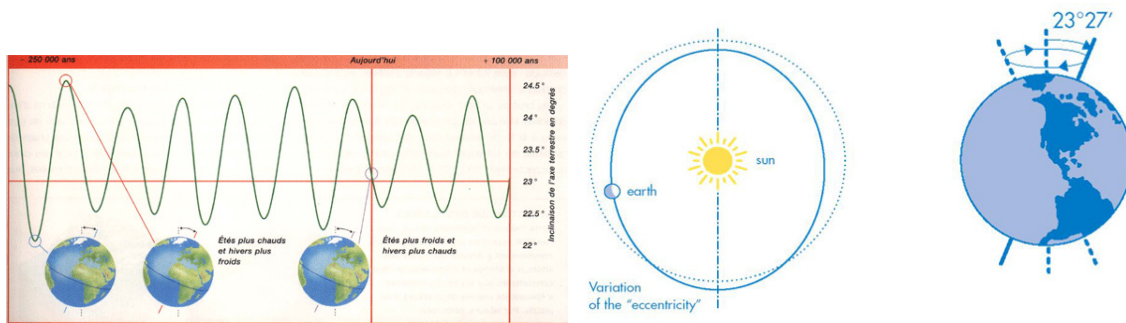
radiatif de la Terre et leur bilan de masse est intimement lié au niveau des mers. La stabilité des calottes est par ailleurs toute relative et la présence d'eau à l'interface calotte-socle peut entraîner la décharge massive d'icebergs dans l'océan et modifier la circulation thermohaline. Les sédiments de l'Atlantique-Nord ont gardé la mémoire de tels événements qui se sont produits notamment pendant la dernière période glaciaire. A ces événements correspondent des changements climatiques et océaniques : la circulation de l'océan Atlantique est modifiée, donnant lieu à un phénomène de bascule avec un hémisphère Nord chaud et un hémisphère Sud froid et inversement (Stocker, 1998; EPICA Community Members, 2006). Les calottes glaciaires sont sensibles au climat et dans le contexte actuel du réchauffement climatique, elles font partie des préoccupations du groupe d'expert de IPCC (2007)<sup>1</sup>.

Au delà de leur rôle d'acteur du climat, les calottes polaires sont aussi de formidables archives des climats passés. Elles ont en effet piégé au fil des dépôts successifs de neige, enfouis puis transformés en glace, des échantillons de l'atmosphère mais aussi d'une multitude d'autres éléments et composés chimiques venus avec les aérosols. La couverture neigeuse des calottes fait office de grand réceptacle de l'atmosphère où on retrouve les impuretés transportées par la circulation atmosphérique telles celles provenant des continents (poussières), des volcans (téphra, acide sulfurique), de l'océan (embruns marins,...), de l'activité biologique (acides organiques, gaz) ou de l'activité humaine (pollution).



(a) Orbite terrestre configurée selon la precession des équinoxes aujourd'hui. (b) Orbite terrestre configurée selon la precession des équinoxes il y a 11ka (kilo-années).

1. Intergovernmental Panel on Climate Change.



(c) Variation de l'obliquité de l'axe de rotation de la Terre au cours du temps. (d) Variation de l'excentricité de l'orbite terrestre et obliquité de l'axe de rotation de la Terre.

FIGURE 1.1 – Variations principales des paramètres orbitaux de la Terre : excentricité (100ka et 400ka), obliquité (41ka) et précession (19 et 23ka).

Au fur et à mesure des perfectionnements techniques, les forages profonds dans la glace des calottes permettent de faire des reconstructions du climat et de l'environnement passés de plus en plus complètes, précises et détaillées. Les forages du Groenland (plus de 3000m de glace) apportent une vue détaillée sur le climat de l'hémisphère Nord mais sur des fenêtres temporelles ne dépassant pas 120ka. Les taux d'accumulation de la neige y sont élevés (10-20 cm d'eau par an) ce qui permet le comptage des couches annuelles par les indicateurs saisonniers (structure de la neige, poussières, chimie,...).

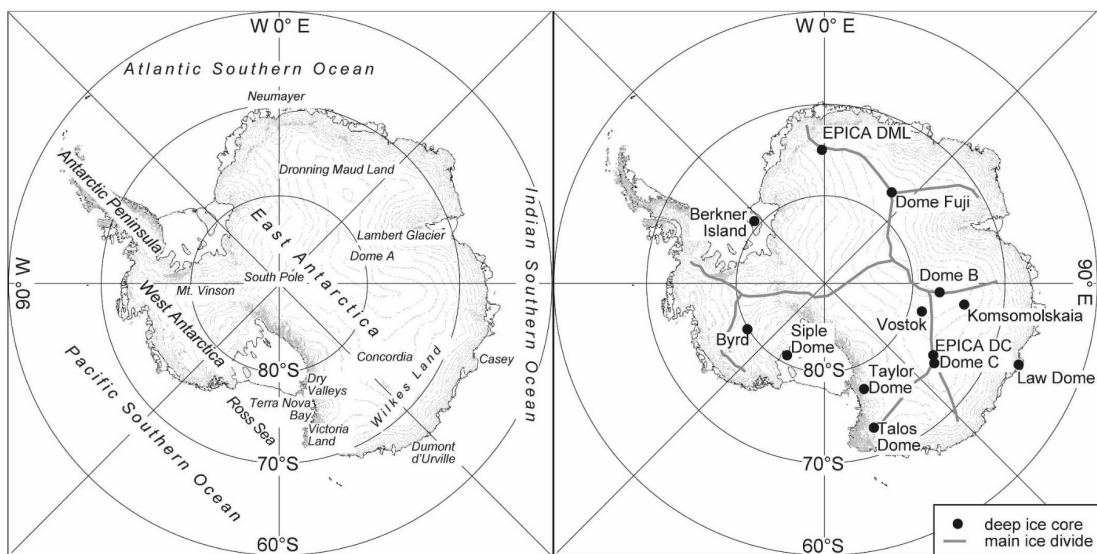


FIGURE 1.2 – L'Antarctique ; de gauche à droite : (A) les principaux secteurs géographiques, (B) les principaux forages et les principales lignes de partage (crêtes). Extrait de Masson-Delmotte *et al.* (2008).

Aujourd'hui grâce à l'analyse physique et chimique de ces nombreuses carottes de glace,

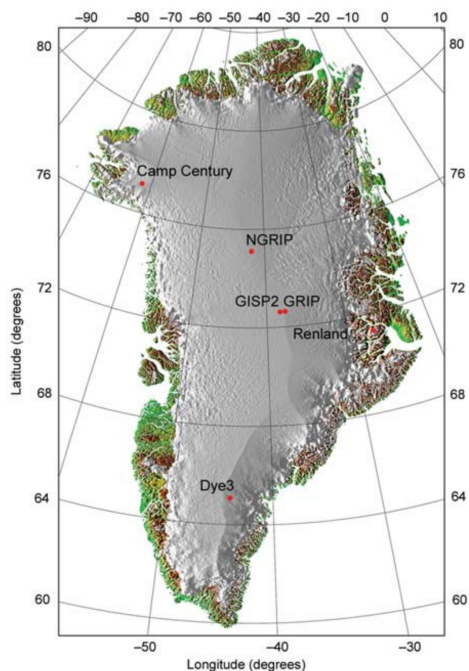


FIGURE 1.3 – Les forages du Groenland. Extrait de North Greenland Ice Core Project members (2004).

on dispose d'une multitude d'indicateurs climatiques à la fois au Groenland et en Antarctique :  $CH_4$ ,  $CO_2$ , isotopes de l'eau et de l'air, sulfates, poussières, téphra,...etc. Chacun d'eux est susceptible d'apporter des informations qui lui sont propres sur les conditions climatiques et environnementales du passé. Cependant pour donner une vue cohérente de ces conditions passées, il est nécessaire de réaliser un délicat travail d'inter-comparaison de ces enregistrements, de confrontation avec d'autres archives paléoclimatiques : les carottes de sédiments marins, les spéléothèmes, les enregistrements de pollens, les cernes d'arbres,...etc. Cette confrontation vise à reconstruire la séquence des évènements climatiques qui se sont produits dans les différentes régions du globe afin de mieux comprendre la dynamique du climat. Pour reconstruire cette séquence, une étape incontournable est la datation des archives et pour ce qui nous concerne la datation des carottes de glace.

## 1.2 Dater les archives polaires

Les carottes de glace ont la particularité de poser une double énigme de datation : le gaz piégé n'a pas le même âge que la matrice de glace qui l'entoure. En effet, le piégeage du gaz s'opère plusieurs dizaines de mètres (entre 80 et 120m) sous la surface de la calotte dans la zone dite de fermeture des pores (notée communément COD, pour *Close-Off Depth*). A partir de cette zone, le névé jusqu'à là poreux et ouvert sur l'atmosphère se transforme en glace imperméable et bulleuse (voir Figure 1.5). Le gaz piégé est donc plus jeune que la



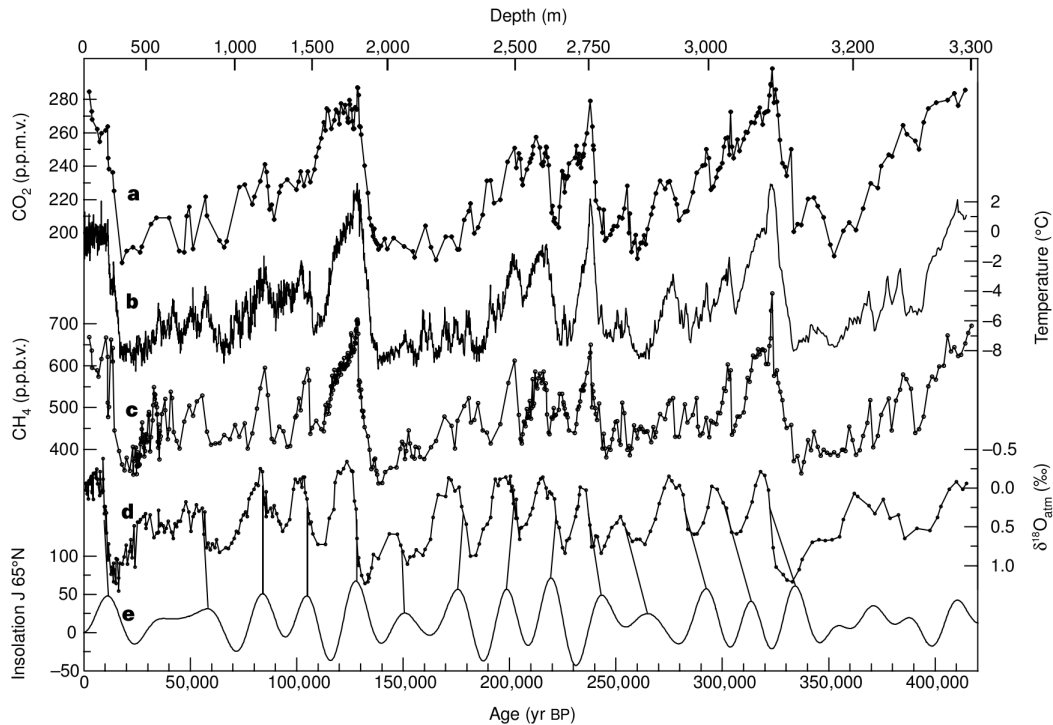


FIGURE 1.4 – Forage de Vostok : enregistrements du climat et des gaz à effet de serre et comparaison de la datation GT4 avec avec l’insolation. De haut en bas sont tracés en fonction du temps (positif avant 1950) avec l’échelle d’âge GT4 : (A)  $\text{CO}_2$  atmosphérique, (B) reconstruction de la température en moyenne annuelle du site de Vostok, (C)  $\text{CH}_4$  atmosphérique, (D) teneur isotopique en  $\delta^{18}\text{O}_{atm}$  du di-oxygène atmosphérique piégé dans la glace, (D) Série temporelle de l’insolation journalière à  $65^\circ\text{N}$  pour la mi-juin. Le  $\delta^{18}\text{O}_{atm}$  contient une fréquence temporelle proche de la précession, le décalage des maxima  $\delta^{18}\text{O}_{atm}$ -insolation suggère que la chronologie glace GT4 peut être raffinée. Extrait de Petit *et al.* (1999).

glace qui l’entoure. Cette différence d’âge est appelée le *delta-age* et elle varie de quelques centaines d’années pour les sites chauds à forte accumulation du Groenland jusqu’à quelques milliers d’années pour les sites froids à faible accumulation d’Antarctique<sup>2</sup>. Pour interpréter les enregistrements polaires, on doit donc estimer deux chronologies : l’échelle d’âge glace et l’échelle d’âge gaz.

2. Cette différence est contrôlée en particulier par les conditions de température et d’accumulation qui contrôlent la vitesse de densification du névé.

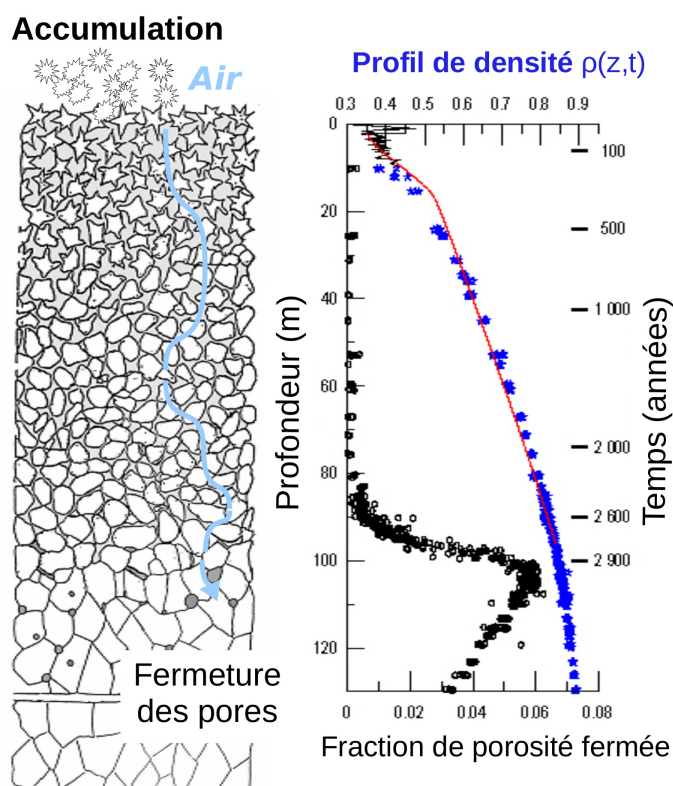


FIGURE 1.5 – Piégeage du gaz en profondeur conduisant à un gaz plus jeune que la glace. (A) à gauche la colonne de neige-névé qui se densifie et piège le gaz dans la zone de fermeture des pores ; (B) à droite le profil de densité de la glace et la fraction de porosité fermée en fonction de la profondeur (axe Y de gauche) ou du temps (axe de droite) ; cet exemple est tiré de mesures et modélisation faites à Vostok (Jean-Marc Barnola, communication personnelle).

La datation des paléo-archives est une discipline en soit. Si les techniques radiométriques (i.e.,  $^{14}\text{C}$ ,  $U - Th, \dots$ ) sont aujourd'hui très largement utilisées pour dater les enregistrements continentaux et marins, elles ne s'appliquent cependant pas sur la glace. La datation de la glace et du gaz reposent donc sur des stratégies autres qui vont impliquer au mieux toutes les mesures physiques et chimiques réalisées le long des carottes. On peut citer cinq stratégies de datation couramment utilisées :

1. le comptage des couches annuelles soit visuellement tant que le contraste entre couches le permet (e.g., couches d'hiver plus sombres que couches d'été), soit à l'aide de traceurs géochimiques des variations saisonnières ;
2. la reconnaissance d'horizons datés avec principalement les éruptions volcaniques du dernier millénaire ; on utilise aussi les âges des couches de cendre volcanique (i.e., *téphra*) et des isotopes cosmogéniques (ces-derniers enregistrant les événements paléo-

- magnétiques, comme par exemple le  $^{10}\text{Be}$ );
3. la synchronisation des carottes de glace entre elles avec :
    - des *marqueurs globaux* qui en première approximation varient simultanément dans toutes les régions du globe ; le  $\text{CH}_4$  permet de synchroniser la phase gaz des carottes, les isotopes cosmogéniques permettent de synchroniser la phase glace,
    - des *marqueurs régionaux* qui affectent simultanément une région géographique restreinte (e.g., Antarctique) comme les pics de sulfate et les *téphra*;
  4. la synchronisation des enregistrements polaires sur d'autres archives paléoclimatiques datées indépendamment (spéléothèmes, carottes de sédiments marins,...etc) ;
  5. le calage orbital est appliqué aux enregistrements dans lesquels les fréquences orbitales de la Terre sont présentes, en les synchronisant sur les séries temporelles d'insolation (calculées très précisément par des modèles astronomiques (Berger, 1978; Laskar *et al.*, 2004)).

Il faut noter que toutes ces stratégies sont complémentaires. Par exemple, la synchronisation des enregistrements polaires à l'aide de *marqueurs globaux* ou *régionaux* ne permet pas d'estimer l'âge "absolu" des événements climatiques ; elle permet par contre de caler les enregistrements sur une échelle d'âge commune et cohérente<sup>3</sup>. A l'opposé, le comptage des couches annuelles est à même de fournir une échelle d'âge "absolu" qui peut-être de surcroît très précise (on peut citer GICC05, la chronologie stratigraphique du forage de NGRIP dont l'incertitude n'est que de 100 ans ( $2\sigma$ ) vers 12ka b2k<sup>4</sup>). Cette technique a cependant des limites et ne s'applique que lorsque les couches annuelles le long de la carotte sont peu amincies. Elle est donc plus adaptée à des sites où l'accumulation est importante et elle est limitée à la partie haute des forages. Quant-au calage orbital, il a l'avantage de s'appliquer sur toute la longueur d'une carotte mais l'incertitude sur l'âge "absolu" reste importante (i.e., plusieurs kilo-années) car les mécanismes qui amènent une grandeur à enregistrer les variations d'insolation à une latitude donnée restent qualitatifs et imprécis. Du côté des horizons datés, si leur identification permet de disposer de marqueurs d'âge "absolu"<sup>5</sup> ils sont en nombre limité le long des carottes. Enfin, les stratégies basées sur la comparaison des enregistrements polaires à d'autres paléo-archives datées impliquent généralement des hypothèses sur l'origine (commune) et sur la phase des événements climatiques que l'on synchronisent.

---

3. Il s'agit d'information chronologique relative.

4. On utilisera dans la suite *BP* pour *Before Present* qui signifie avant 1950 et *b2k* pour avant 2000.

5. On entend par marqueur d'âge l'estimation de l'âge - et son incertitude - associé à une profondeur *Z* le long de la carotte.

## 1.3 Les modèles glaciologiques pour dater la glace et le gaz

La modélisation glaciologique permet d'une part d'établir une échelle d'âge glace à l'aide de modèles d'écoulement de la glace, et d'autre part d'estimer le *delta-age* (i.e., la différence d'âge entre la glace et le gaz à une même profondeur) grâce aux modèles de densification de la colonne de névé.

Les modèles pour dater la glace sont en général implémentés sur de petites échelles (une échelle suffisante pour couvrir le trajet suivi par toutes les particules de la glace le long du forage depuis le moment où elles ont été déposées sous forme de neige à la surface de la calotte.). Leur complexité est limitée et représente un compromis car elle doit permettre de simuler dans des temps raisonnables, l'écoulement sur une longue durée (plusieurs centaines de kilo-années) avec une résolution spatiale et temporelle assez fine (on date un forage environ tous les mètres, à la dizaines d'années près dans le haut des forages). Ces modèles d'écoulement basés sur une équation de bilan de masse, nécessitent la connaissance de l'évolution dans le passé du taux d'accumulation en surface et de l'épaisseur de la calotte. L'évolution de ces deux grandeurs est estimée par des modèles indépendants : i) d'une part des modèles pour reconstruire les paléo-accumulations et ii) d'autres part des modèles grande échelle qui permettent de reconstruire la géométrie de la calotte au cours du temps.

Comme les modèles d'écoulement, les modèles de densification sont implémentés sur des petites échelles. En première approximation la vitesse de densification de la neige et du névé et donc le *delta-age*, dépendent essentiellement de la charge (i.e, l'accumulation successive des couches de neige) et de la température. Les modèles de densification s'appuient donc comme les modèles d'écoulement sur des modèles de reconstruction des paléo-accumulations mais aussi sur des modèles de reconstruction des paléo-températures.

Du fait des temps caractéristiques associés à l'écoulement des calotte et à la densification de la neige et du névé, il est difficile de calibrer les modèles à partir d'observations expérimentales de laboratoire. Par ailleurs, si les observations faites in situ gardent en mémoire les conditions du passé<sup>6</sup>, ces observations doivent être en général déconvoluées pour être interprétées. Aussi, il est important de noter que les modèles glaciologiques sont encore caractérisés par des incertitudes modèle importantes Ritz (1992).

---

6. Le profil de température dans le trou des forages, grâce à l'advection de la chaleur garde en mémoire les variations de température passée à la surface de la calotte.

## 1.4 La modélisation inverse pour dater la glace

Une approche naturelle en présence de modèles mal contraints consiste à mettre en oeuvre des techniques inverses ; l'objectif étant de contraindre les paramètres des modèle avec des observations (voir figure 1.6). Dans le domaine de le glaciologie, si la modélisation glaciologique s'est développée depuis une trentaine d'années, la modélisation inverse n'a pris son essort que vers la fin des années 1990, notamment avec Rommelaere *et al.* (1997); Salamatin *et al.* (1998); Dahl-Jensen *et al.* (1998). Dans le cadre de la datation des forages, les travaux de Parrenin *et al.* (2001) et de Grinsted et Dahl-Jensen (2002) ont permis d'optimiser à l'aide de maqueurs d'âge et par méthode d'échantillonnage Monte-Carlo<sup>7</sup>, les paramètres des modèles d'écoulement dédiés à la datation de la glace (par exemple le glissement et le taux de fusion à la base de la calotte). A ce jour cependant, aucun modèle inverse de densification n'a été développé.

A la suite des travaux de Parrenin *et al.* (2001) et de Grinsted et Dahl-Jensen (2002), les chronologies glace de nombreux forages ont été optimisées par modélisation inverse<sup>8</sup>. On peut citer la chronologie Vn-FGT1 (Parrenin *et al.*, 2004) pour le forage de Vostok, les chronologies EDC2 et EDC3model (EPICA Community Members, 2004; Parrenin *et al.*, 2007a) pour le forage EDC mais aussi plusieurs chronologies pour le forage de Dome Fuji calculées par différents auteurs (Watanabe *et al.*, 2003; Hondoh *et al.*, 2004; Parrenin *et al.*, 2007a).

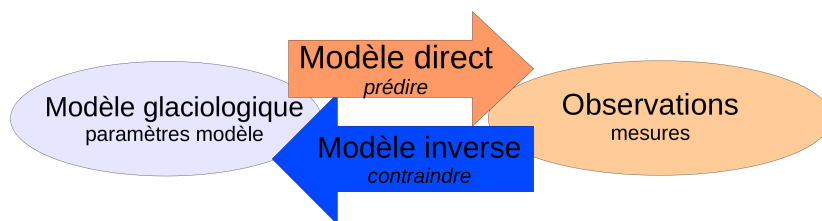


FIGURE 1.6 – Schématisation simpliste de la différence entre modèle direct et modèle inverse. Le modèle direct est utilisé pour prédire des observations. Les paramètres d'un modèle inverse sont contraints par des observations afin d'optimiser les prédictions de ce modèle.

7. Plus précisément, une méthode de Monte Carlo Markov Chain ou MCMC.

8. On utilisera fréquemment le terme chronologies optimisées dès lors qu'elles ont été estimées par modélisation inverse.

## 1.5 Les limites des modèles glaciologiques pour dater la glace et le gaz : l'erreur modèle

Ces approches inverses rencontrent néanmoins certains obstacles. En premier lieu, lorsqu'on confronte les datations optimisées par modélisation inverse associées à différents forages, on observe des incohérences chronologiques malgré la contrainte des marqueurs d'âge. On donne pour exemple la chronologie Vk-FGT1 à Vostok et la chronologie EDC3model à EDC (Parrenin *et al.*, 2007a). Comme mentionné plus haut, EDC et Vostok sont deux sites froids du plateau d'Antarctique de l'Est situés à 600 km l'un de l'autre et qui ont des conditions de température et d'accumulation actuelles relativement voisines. Les paléo-glaciologues attendent lors des grandes variations climatiques, des changements de température moyenne annuelle relativement synchrones pour ces deux sites<sup>9</sup>. La figure 1.7 compare sur 420ka un traceur des températures mesurés le long des deux forages<sup>10</sup>. On constate sur cette figure où l'on retrouve les cycles glaciaires-interglaciaires, la présence de déphasage temporelle important entre les deux enregistrements (notamment vers 250 ka). Ces désaccords pourraient résulter de l'usage de marqueurs d'âge incohérents pour contraindre ces deux datations mais il s'avère que la source du problème est plus délicate et qu'elle est intimement liée à l'importance de l'incertitude attachée aux modèles glaciologiques directes.

---

9. Une synchronicité au moins à l'échelle séculaire.

10. Il s'agit de la composition isotopique de l'eau en deutérium D ou en  $^{18}\text{O}$  pris comme indicateur de la température.

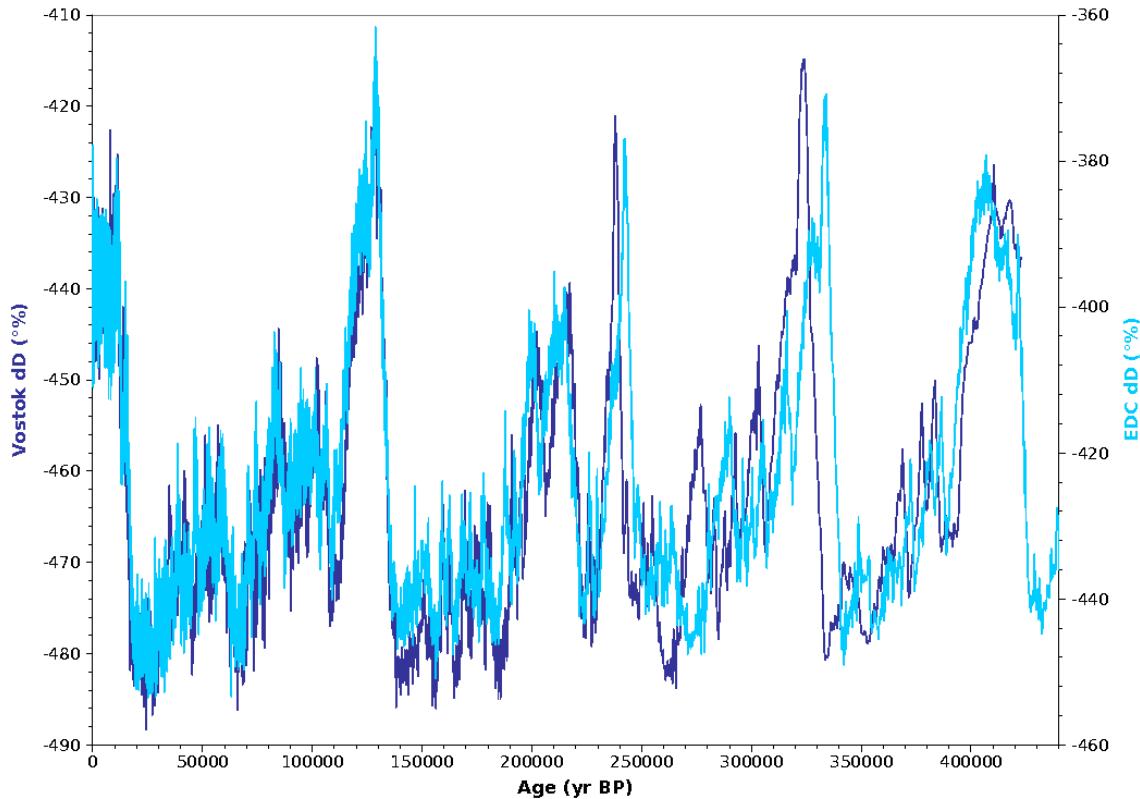


FIGURE 1.7 – Comparaison des profils climatiques de Vostok et Dome C (EDC) mettant en exergue les limites des modèles glaciologiques de datation. Variations du deutérium de la glace indicateur des paléo-températures à Vostok (axe Y de gauche) et Dome C (axe Y de droite) en fonction des échelles d’âge modélisées et optimisées (Parrenin *et al.*, 2004, 2007a) par méthode de Monte Carlo : entre 240 et 420ka les variations de températures n’apparaissent pas synchrones et les écarts peuvent atteindre plus d’une dizaine de kilo-années.

Les modélisateurs ont souligné dans la littérature, les domaines de validité des différentes approximations pour décrire l’écoulement de la glace (on reviendra sur cette question section 4.3). On peut citer en particulier la difficulté de représenter la complexité de l’écoulement de la glace près du socle rocheux. Les travaux de Dreyfus *et al.* (2007) sont venus corroborer une des limites attendue par les modélisateurs : près du socle (donc dans le fond des forages) les approximations sur lesquelles reposent les modèles ne sont pas à même de reproduire le comportement complexe de l’écoulement (notamment à cause des irrégularités du socle). En s’appuyant sur des techniques de calage orbital, Dreyfus *et al.* (2007) ont dérivé des marqueurs d’âge à partir d’enregistrements de la teneur isotopique en  $^{16}\text{O}^{18}\text{O}$  du di-oxygène atmosphérique (notée  $^{18}\text{O}_{atm}$ ) dans le fond du forage EDC<sup>11</sup>. Ils ont montré en particulier

11. Le  $^{18}\text{O}_{atm}$  est comme le méthane un *marqueur global* dans l’atmosphère et il est en outre fortement modulé par les cycles de précession des équinoxes et sert donc à dériver des marqueurs d’âge le long des carottes avec des techniques de calage orbital.

que le modèle d'écoulement appliqué à Dome C, même après optimisation des paramètres par méthode inverse, ne permettait pas d'estimer une chronologie qui respectent les marqueurs d'âge dérivés du  $^{18}O_{atm}$ . La figure 1.8 illustre cette problématique en présentant la chronologie optimisée par méthode inverse EDC3model (Parrenin *et al.*, 2007a) et les marqueurs d'âge  $^{18}O_{atm}$  qu'elle n'est pas à même de respecter. Cette problématique mise à jour, Parrenin *et al.* (2007b) ont entrepris un travail de correction local de la chronologie EDC3model afin qu'elles respectent un certain nombre de marqueurs d'âge avant 41.2 ka et après 400 ka.

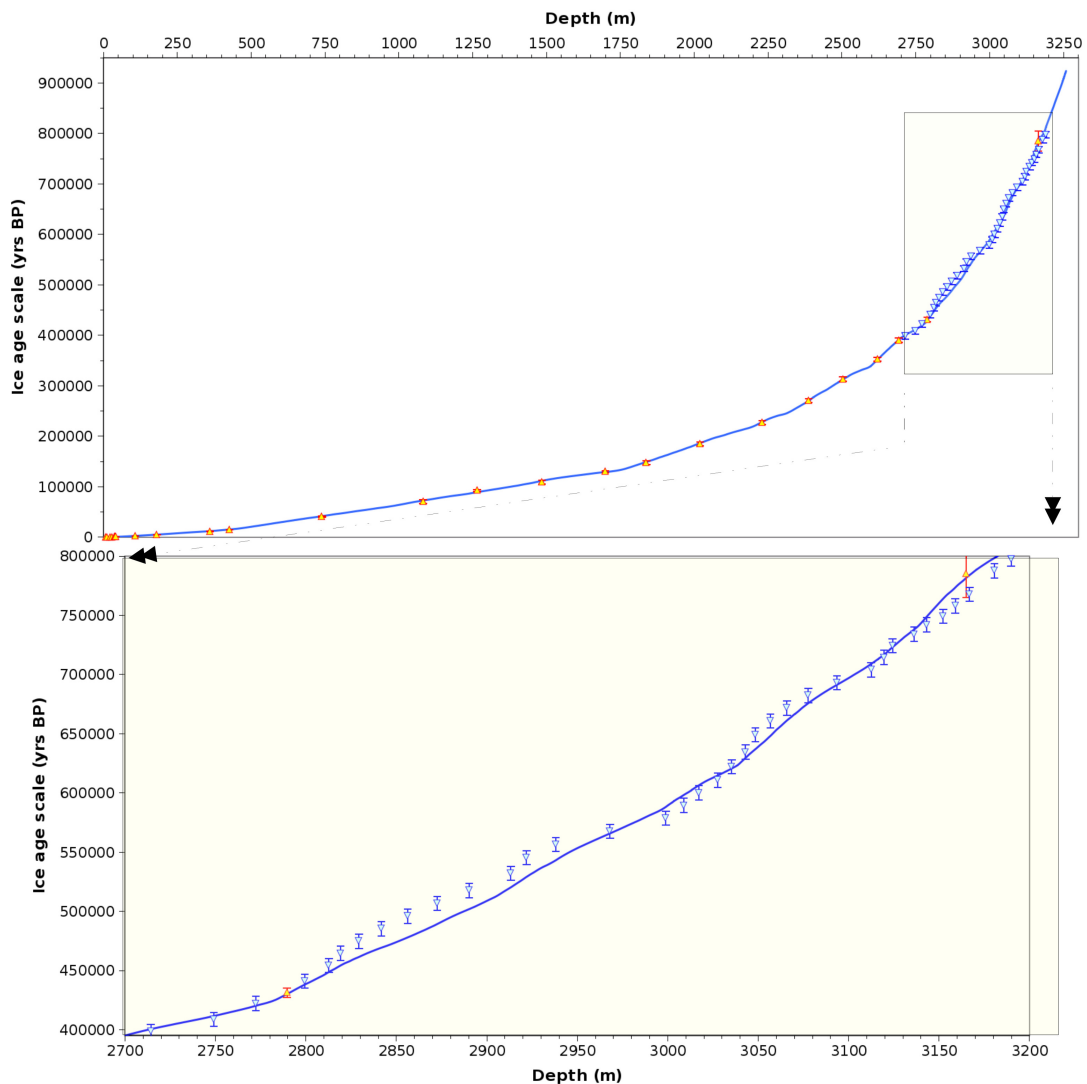


FIGURE 1.8 – Echelle d'âge glace EDC3model (Parrenin *et al.*, 2007a) optimisée par méthode inverse et les marqueurs d'âge avec leur barre d'erreur pour contraindre les paramètres du modèle d'écoulement. Les triangles bleus (sommet tourné vers le bas) sont les marqueurs de  $^{18}O_{atm}$  qui n'ont pu être respectés avec le modèle d'écoulement et la méthode d'optimisation utilisée. (A) En haut, EDC3model sur toute la profondeur du forage EDC; (B) En bas, EDC3model avec un zoom sur l'intervalle de profondeur 2700-3200m.



## 1.6 Le prérequis des datations cohérentes pour interpréter les enregistrements des forages

Les efforts pour corriger les chronologies optimisées par modèle inverse s'inscrivent dans un objectif plus général qui consiste à construire des datations cohérentes pour différents forages, et notamment pour les forages d'Antarctique et du Groenland. Les chronologies de différents forages sont reconnues comme cohérentes, lorsque les paléo-événements enregistrés par les *marqueurs globaux* (e.g.,  $\text{CH}_4$ ) et les *marqueurs régionaux* (e.g., sulfate volcanique, téphra) sont en phase. Par exemple lors de la dernière déglaciation, l'augmentation du  $\text{CH}_4$  enregistré au Groenland doit apparaître synchronisée avec l'augmentation du  $\text{CH}_4$  enregistré en Antarctique. Cette condition remplie, on peut alors interpréter la séquence des événements climatiques entre le Nord et le Sud.

La datation d'un forage est une entreprise d'envergure. Une stratégie consiste à produire une datation de référence qui est ensuite transférée sur d'autres forages à l'aide des *marqueurs globaux* et *régionaux*. En Antarctique, ce travail de synthèse a été mené notamment par Parrenin *et al.* (2007b) avec la mobilisation des paléo-glaciologues de la communauté EPICA, l'objectif étant de produire une chronologie glace de référence pour le forage de Dome C (Parrenin *et al.*, 2007b). La nouvelle chronologie de référence nommée EDC3 a été transférée sur différents forages et en particulier sur le forage d'EPICA Dronning Maud Land (EDML). Le transfert de EDC3 sur le forage EDML s'est appuyé sur des marqueurs d'éruptions volcaniques et a permis de construire la chronologie glace EDML1 (Udisti *et al.*, 2004; Ruth *et al.*, 2007).

Pour la période récente qui inclut la dernière déglaciation (0-20ka BP), une chronologie glace de référence a été construite au Groenland dans le cadre du *Greenland Ice Core Chronologies 2005 Initiative*. Cette chronologie nommée GICC05 est une chronologie dite stratigraphique, c'est-à-dire estimée par le comptage des couches annuelles sur plusieurs forages à la fois : ce comptage a tour à tour ou simultanément impliqué les forages de DYE-3, GRIP et NGRIP avec des étapes de synchronisation de ces trois forages sur des événements volcaniques (voir section 5.2.1).

Ces efforts importants pour dater la glace récente au Groenland et en Antarctique, on été doublés d'efforts pour estimer le *delta-age* (on rappelle que l'âge du gaz est égal à l'âge de la glace moins le delta-age). Le marqueur global le plus communément utilisé pour synchroniser les enregistrements polaire du Nord et du Sud est le  $\text{CH}_4$ , ce qui justifie en soi l'intérêt

d'estimer avec précision le delta-age. En Antarctique, Louergue *et al.* (2007) ont proposé des scénarios de datation du gaz pour les forages de EDML et de EDC, scénarios calculés à l'aide du modèle de densification de Goujon *et al.* (2003). Dans ce travail, Louergue *et al.* (2007) ont constaté que les scénarios existants pour les échelles d'âge glace, le taux d'accumulation et la température (EPICA Community Members, 2006; Ruth *et al.*, 2007; Parrenin *et al.*, 2007b) menaient à des incohérences entre les enregistrements de CH<sub>4</sub> à EDC et EDML. Dans l'objectif d'améliorer la cohérence des scénarios, Louergue *et al.* (2007) ont alors proposé un nouveau scénario nommé sp4, en diminuant le taux d'accumulation durant la dernière période glaciaire. Cependant, même avec ce nouveau scénario sp4, des incohérences persistent d'une part entre les enregistrements CH<sub>4</sub> de EDC et EDML et d'autre part entre ces enregistrements d'Antarctique et le CH<sub>4</sub> du Groenland (voir figure 1.9).

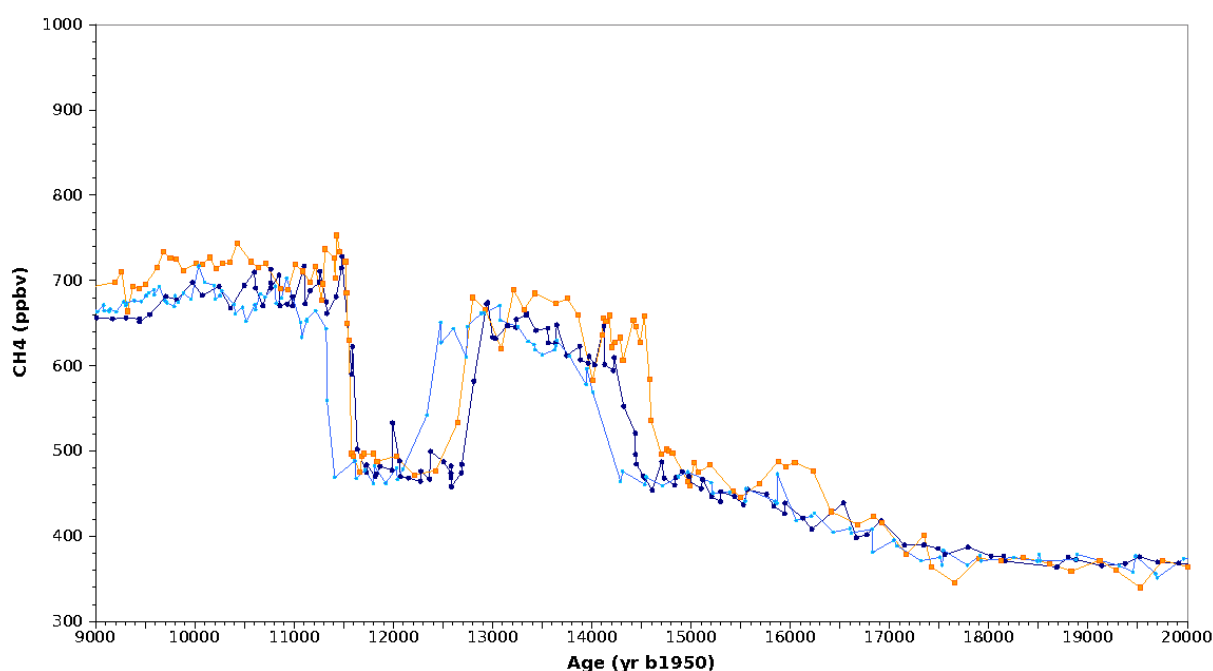


FIGURE 1.9 – Comparaison des enregistrements de méthane au Groenland et en Antarctique. CH<sub>4</sub> à EDC (bleu clair), à EDM (bleu foncé) et à NGRIP (orange). Les déphasages temporels entre ces enregistrements pendant la dernière déglaciation soulignent les incohérences des modèles de datation.

Les obstacles rencontrés dans la construction de datations cohérentes pour plusieurs forages ont mis en exergue le problème de l'erreur des modèles glaciologiques. L'origine de cette erreur modèle reste à déterminer. Les reconstructions de l'évolution passée du taux d'accumulation, de la température ou de l'épaisseur de la calotte peuvent être en cause en tant que champs de forçage des modèles d'écoulement et de densification. Il se peut aussi que certains

mécanismes clés qui contrôlent l'écoulement ou les processus de densification ne soient pas décrits dans les modèles. L'erreur des modèles d'écoulement n'est à priori pas de nature paramétrique car l'optimisation des paramètres par méthode inverse n'a pas permis de produire des chronologies glace à même de respecter les différentes observations pertinentes.

# Buts poursuivis et organisation du manuscrit

---

## 2.1 Objectif : chronologies gaz et glace cohérentes entre forages

Comme on l’a souligné précédemment, la communauté des paléoclimatologues attend des datations gaz et glace précises et cohérentes entre forages. On a défini dans la section précédente, le critère de cohérence qui s’appuie sur les *marqueurs stratigraphiques globaux et régionaux*. Si l’on souhaite que les modèles estiment des chronologies cohérentes, une méthode consiste à réaliser des simulations simultanément sur plusieurs forages afin d’utiliser ces marqueurs stratigraphiques pour inter-contraindre les chronologies des différents forages et optimiser les paramètres des différents modèles directs associés. Cependant dans le contexte des méthodes inverses utilisées jusqu’à présent pour la datation, l’erreur modèle est un obstacle pour calculer la chronologie glace d’un seul forage. Evidemment, des modèles glaciologiques directs “moins faux” permettraient de dépasser cet obstacle. Ce travail de thèse se situe cependant en amont de l’amélioration des modèles glaciologiques.

On va plutôt s’attacher à prendre en compte l’erreur modèle, afin d’assouplir les modèles glaciologiques de datation de sorte qu’ils puissent respecter les observations pertinentes tels que les *marqueurs d’âge* et les *marqueurs stratigraphiques* gaz ou glace. On va introduire l’erreur modèle sous forme de paramètres (des fonctions de la profondeur) qui vont corriger les scénarios de trois grandeurs glaciologiques clés estimées par les modèles :

1. le taux d’accumulation  $A(Z)$ ,
2. la fonction d’amincissement  $T(Z)$ ,
3. la profondeur de fermeture des pores mesurée en *mètres équivalent glace*  $C(Z)$ .

Comme on va le voir ci-dessous, lorsque ces grandeurs sont connues alors on peut en déduire les chronologies gaz et glace associées.

A l’aide de techniques inverses, on va identifier l’erreur modèle introduite de sorte de calculer de nouveaux scénarios glaciologiques  $A(Z)$ ,  $T(Z)$  et  $C(Z)$ . Cette identification aura

pour objectif de réaliser le meilleur compromis entre l'information chronologique issue d'une part des données paléo et d'autre part des modèles glaciologiques de datation. Par ailleurs, elle sera réalisée simultanément sur plusieurs forages afin de construire des chronologies (gaz et glace) cohérentes entre forages. On développera parallèlement une approche pour estimer l'erreur sur les nouvelles chronologies estimées.

## 2.2 Grandeurs glaciologiques importantes

Dans le cadre de la méthode développée au cours de cette thèse, les grandeurs glaciologiques importantes pour la datation sont  $A(Z)$ ,  $T(Z)$  et  $C(Z)$ . On explicite ci-dessous leur lien avec les chronologies gaz et glace, à savoir avec :

1. l'âge gaz noté  $\chi(Z)$ ,
2. l'âge glace noté  $\Psi(Z)$ .

mais aussi avec trois grandeurs que l'on va définir :

- l'épaisseur de la couche annuelle  $L(Z)$ ,
- le delta-age  $\Delta\chi(Z)$ ,
- le delta-depth  $\Delta\Lambda(Z)$ .

Ces liens nous serviront tout au long du manuscrit. On définit à l'aplomb d'un forage donné, un repère où l'axe  $Z$  est orienté le long de la verticale vers le bas avec une origine à la surface de la calotte.

### 2.2.1 Taux d'accumulation, fonction d'amincissement, épaisseur de la couche annuelle

Le long de l'axe  $Z$  sont repérées des "particules" de glace réparties de haut en bas. Chacune de ces particules a été dans le passé une couche annuelle de neige qui s'est déposée. Cette couche annuelle de neige est par définition le *taux d'accumulation* que l'on note  $A(Z)$  et que l'on mesure en *mètre d'équivalent glace par an*, ce qui signifie que l'on ramène l'épaisseur de neige de densité  $\rho$  à l'épaisseur qu'elle aurait s'il s'agissait de glace de densité  $\rho_i$ .

Entre le moment où la couche  $A(Z)$  s'est déposée et le présent où elle se trouve à la profondeur  $Z$  le long du forage, cette couche a subi avec l'écoulement de la glace, un amincissement total  $T(z)$ . Elle a donc aujourd'hui une épaisseur moindre notée  $L(Z)$  et que l'on

appelle l'épaisseur de la couche annuelle :

$$L(Z) = T(Z)A(Z) \quad (2.1)$$

L'épaisseur de la couche annuelle  $L(Z)$  est aussi mesurée en *mètre équivalent glace par an*, unité que l'on note dans la suite du manuscrit *m-ie an<sup>-1</sup>*. La fonction d'amincissement  $T(Z)$  est en particulier le rapport entre l'épaisseur de la couche annuelle à la profondeur  $Z$  et l'épaisseur de cette couche au moment de son dépôt.

### 2.2.2 Age de la glace

Si l'épaisseur de la couche annuelle  $L(Z)$  est connue (ou de façon équivalente si  $A(Z)$  et  $T(Z)$  sont connus) alors l'âge de la glace  $\Psi(Z)$  est connu :

$$\Psi(Z) = \int_{\zeta=0}^Z \frac{D(\zeta)}{T(\zeta)A(\zeta)} d\zeta \quad (2.2)$$

où  $D(Z)$  est la densité relative du matériau neige/névé/glace le long du forage par rapport à la densité de la glace  $\rho_i$  :

$$D(Z) = \frac{\rho(Z)}{\rho_i} \quad (2.3)$$

### 2.2.3 Age du gaz, delta-age et delta-depth

Considérons une particule de glace à la profondeur  $Z$  le long du forage et son âge  $\Psi(Z)$  (voir 2.1). Cette particule de glace contient du gaz qui est plus jeune. On note cet âge  $\chi(Z)$ . De plus, on note  $\Delta\chi(Z)$  le delta-age, c'est-à-dire la différence d'âge entre la glace et le gaz à la même profondeur  $Z$  :

$$\Delta\chi(Z) = \Psi(Z) - \chi(Z) \quad (2.4)$$

Au temps  $\chi(Z)$  du passé, la particule de glace en  $Z$  in situ, se trouvait dans la zone de close-off et était séparée de la surface par une colonne de névé d'épaisseur égale à la profondeur de fermeture des pores notée  $COD(Z)$  et donnée en mètres réels.

On note que les âges des particules de glace occupant la base et le sommet de la colonne de névé, sont respectivement  $\Psi(Z)$  et  $\chi(Z)$  et que l'âge du gaz à la base de la colonne est égal à l'âge de la glace au sommet soit  $\chi(Z)$  (voir figure 2.1).

On peut transformer la profondeur  $COD(Z)$  en mètres équivalent glace, entité que nous notons  $C(Z)$ . Pour ce faire, il faut connaître le profil de densité  $\rho(z', t)$  de la colonne de névé à l'instant  $\chi(Z)$  :

$$C(Z) = \int_{z'=0}^{COD(Z)} \frac{\rho(t, z')}{\rho_i} dz' \quad (2.5)$$

$C(Z)$  est communément appelée *codie* par les paléo-glaciologues pour *Close-Off Depth in meters of Ice Equivalent*. Tout comme l'épaisseur de la couche annuelle  $A(Z)$ , cette épaisseur  $C(Z)$  va s'amincir au cours de l'écoulement. On appelle *delta-depth* l'épaisseur  $C(Z)$  après amincissement, telle qu'elle se présente in situ aujourd'hui et on note cette-dernière  $\Delta\Lambda(Z)$ . En première approximation on a (voir annexe C pour une expression plus rigoureuse) :

$$\Delta\Lambda(Z) \approx T(Z)C(Z) \quad (2.6)$$

Tout comme pour la colonne  $COD(Z)$  (voir figure 2.1), les particules de glace du sommet et de la base de la colonne  $\Delta\Lambda(Z)$  ont respectivement l'âge  $\chi(Z)$  et  $\Psi(Z)$  et par ailleurs le gaz piégé à la base de la colonne a l'âge de la glace au sommet, soit  $\chi(Z)$ . Or, l'âge de la glace au sommet de la colonne  $\Delta\Lambda(Z)$  peut aussi s'écrire  $\Psi(Z - \Delta\Lambda(Z))$ . Cette dernière remarque permet de relier l'âge du gaz en  $Z$  à l'âge de la glace en  $Z - \Delta\Lambda(Z)$  :

$$\chi(Z) \approx \Psi(Z - \Delta\Lambda(Z)) \quad (2.7)$$

## 2.3 Organisation du manuscrit

Dans la première partie, on présente les modèles glaciologiques de datation puis les observations réalisées sur les carottes et sur d'autres archives paléoclimatiques dans le but de décrire l'information chronologique issue des modèles et des données. Dans la seconde partie, on présente la nouvelle méthode de datation qui a été développée au cours de cette thèse et qui est basée sur le formalisme de l'inférence bayésienne. Dans la troisième partie, on présente les applications sous la forme de deux articles soumis autour desquels s'articulera une discussion de la méthode et des résultats.

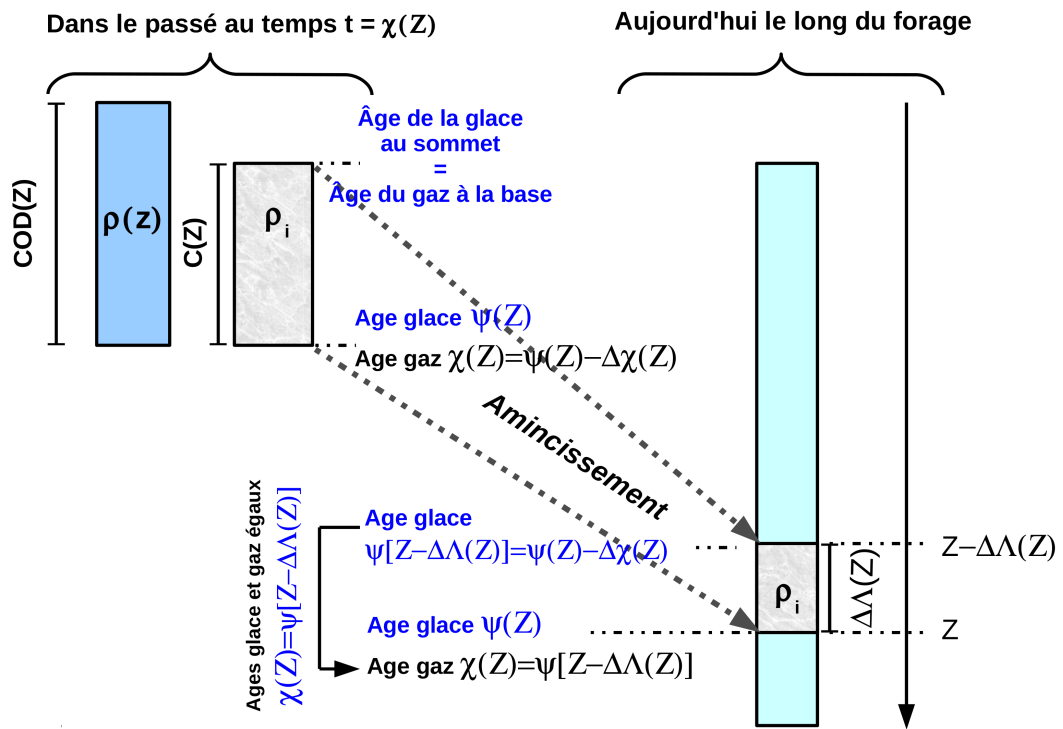


FIGURE 2.1 – Relation entre l'âge glace  $\Psi(Z)$ , l'âge gaz  $\chi(Z)$ , le delta-age  $\Delta\chi(Z)$  et le delta-depth  $\Delta\Lambda(Z)$



## Deuxième partie

### Information chronologique issue des modèles et des observations

## CHAPITRE 3

# Introduction

---

Cette première partie vise à décrire les modèles glaciologiques et les données qui contribuent à estimer les échelles d'âge gaz et glace des forages. Cette description a l'objectif de souligner les sources d'erreur attachées à la fois aux modèles et aux données. On verra que la distinction entre modèle et donnée n'est pas toujours nette comme dans toute discipline.

Le premier chapitre décrit les principaux modèles glaciologiques : i) modèles de reconstruction des paléo-températures ; ii) modèles de reconstruction des paléo-accumulations ; iii) modèles d'écoulement de la glace et enfin iv) modèles de densification de la colonne de névé.

Dans le second chapitre, on présente les observations susceptibles d'apporter de l'information chronologique avec : dans un premier temps i) un ensemble de mesures réalisées sur les carottes de glace puis ii) des observations qui impliquent la comparaison d'enregistrements polaires à d'autres paléo-archives. Pour clore ce chapitre, on proposera une classification de l'information chronologique issue des observations, classification qui nous servira dans la partie **III** à l'étape d'assimilation des données.

# Les modèles glaciologiques de datation des forages

---

Dater un forage consiste à déterminer pour chaque profondeur  $z$  le long de la carotte, d'une part l'âge de la glace et d'autre part la différence d'âge entre la glace et le gaz (on rappelle que cette différence d'âge est appelée le delta-age). L'âge de la glace et le delta-age peuvent être estimés à l'aide de modèles glaciologiques. On distingue les modèles d'écoulement de la glace qui permettent d'estimer l'âge de la glace et les modèles de densification de la colonne de neige-névé qui permettent d'estimer le delta-age. Des modèles pour reconstruire l'évolution temporelle de la température et des taux d'accumulation sont en outre nécessaires. En effet, température et accumulation sont des champs de forçage pour les modèles de densification. Les modèles d'écoulement pour dater la glace sont en général des modèles petite échelle qui s'articulent autour d'une équation de bilan de masse intégrée sur l'épaisseur de la calotte. Cette dernière équation fait intervenir le taux d'accumulation en surface, le taux de fusion à la base de la calotte et l'évolution temporelle de  $H$  l'épaisseur de la calotte. Les modèles d'écoulement pour dater la glace peuvent être plus ou moins complexes. Deux types de modèles sont rapportés dans la littérature : i) des modèles à géométrie imposée qui utilisent l'histoire des paléo-épaisseurs  $H$  préalablement calculées par des modèles d'écoulement grande échelle thermo-mécaniquement couplés (modèle visant à reconstruire l'évolution de la géométrie de la calotte) et ii) des modèles petit échelle "couplés" à un modèle grande échelle.

Le but de ce chapitre est de présenter les modèles glaciologiques de datation en essayant de rapporter les études qui montrent les limites de ces modèles. On présente tout d'abord dans les sections 4.1 et 4.2, les modèles pour reconstruire respectivement les paléo-températures et les paléo-accumulations. On aborde ensuite dans la section 4.3 les modèles d'écoulement en rappelant dans un premier temps les concepts essentiels : i) les lois de comportements mécanique et thermique de la glace ; ii) les équations de conservation ; iii) les équations aux limites à la surface de la calotte et à l'interface calotte-socle. On aborde ensuite l'équation du bilan de masse intégré sur l'épaisseur de la calotte ainsi que l'approximation de la couche

mince qui vise à simplifier le système d'équations de conservation Full-Stokes. Enfin, on décrit les modèles d'écoulement pour dater la glace avec : i) les modèles à géométrie imposée et ii) les modèles couplés grande échelle-petite échelle. Puis, dans la section 4.4 on présente les modèles de densification de la colonne de neige-névé.

## 4.1 Modèles pour reconstruire les paleo-températures

La première approche permettant de reconstruire les paléo-températures repose sur une relation empirique entre le contenu isotopique de la glace (que nous allons définir) et la température en moyenne annuelle en surface. On désigne communément cette approche par thermomètre isotopique. La seconde technique que nous allons décrire consiste à reconstruire les températures passées à partir du profil de température mesuré dans le trou de forage aujourd'hui.

### 4.1.1 Le thermomètre isotopique

La relation empirique qui relie le contenu isotopique de la glace à la température en moyenne annuelle en surface a été établie empiriquement en Antarctique d'une part et au Groenland d'autre part. L'interprétation physique de cette relation repose sur les phénomènes de fractionnement des formes isotopiques de la molécule d'eau, fractionnement qui s'opèrent lors des changements de phase et donc lors des précipitations. Après un bref rappel sur le fractionnement isotopique et les modèles de distillation, on présente les relations empiriques et leur extrapolation dans le passé.

#### 4.1.1.1 Fractionnement isotopique

La forme isotopique la plus abondante pour la molécule d'eau comporte deux atomes d'hydrogène  $^1H$  et un atome d'oxygène  $^{16}O$ . Dans la nature, on retrouve les formes isotopiques plus lourdes avec en particulier  $HDO$  et  $H_2^{18}O$  qui comportent respectivement un atome de deutérium et un atome d'oxygène 18. Les teneurs des eaux météoriques en  $HDO$  ou  $H_2^{18}O$  sont mesurées par les rapports des fractions molaires des isotopes lourds ( $n_D$  ou  $n_{18O}$ ) sur les fractions molaires des isotopes légers ( $n_H$  et  $n_{16O}$ ). On note ces rapports  $R_D^{sample}$  ou  $R_{18O}^{sample}$  et on a :

$$\begin{aligned} R_D^{sample} &= \frac{n_D}{n_H} \\ R_{18O}^{sample} &= \frac{n_{18O}}{n_{16O}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

La notation  $\delta$  permet de comparer les teneurs  $R_D^{sample}$  ou  $R_{18O}^{sample}$  par rapport aux standards de référence SMOW ou *Vienna Standard Mean Ocean Water*, notés  $R_D^{SMOW}$  et  $R_{18O}^{SMOW}$  :

$$\delta D = 1000 \left( \frac{R_D^{sample}}{R_D^{SMOW}} - 1 \right) \text{‰} \quad (4.2)$$

$$\delta^{18O} = 1000 \left( \frac{R_{18O}^{sample}}{R_{18O}^{SMOW}} - 1 \right) \text{‰} \quad (4.3)$$

#### 4.1.1.2 Modèles de distillation

Lors du cycle atmosphérique de l'eau on observe deux types de fractionnement lors d'un changement de phase :

1. **Un fractionnement à l'équilibre** : aux formes isotopiques lourdes  $HDO$  et  $H_2^{18O}$  sont associées des pressions de vapeur saturante inférieures à celles de la forme légère ( $H_2O$ ) ce qui entraîne à l'équilibre, une phase condensée (liquide ou solide) enrichie en isotopes lourds par rapport à la phase diluée. Le fractionnement à l'équilibre ne dépend que de la température et du changement de phase considéré. Il est 8 à 10 fois plus important pour la forme isotopique  $HDO$  que pour son homologue  $H_2^{18O}$ .
2. **Un fractionnement cinétique** : la géométrie des formes isotopiques lourdes diffèrent de la géométrie des formes légères. De ce fait, pendant les processus hors équilibre qui s'opèrent lors des changements de phase, les formes isotopiques lourdes diffusent moins vite dans l'air que les formes légères. L'effet du fractionnement cinétique est du même ordre de grandeur pour les deux formes isotopiques lourdes.

Lors du cycle atmosphérique de l'eau, les deux processus de fractionnement se combinent et la forme isotopique lourde  $H_2^{18O}$  est davantage contrôlée par le fractionnement cinétique que son homologue  $HDO$ .

Une partie des précipitations au-dessus des calottes résulte du transport à partir des basses latitudes, de masses d'air chaud et chargé en vapeur d'eau. Au cours de leur trajet, ces masses d'air se refroidissent progressivement et engendrent des précipitations successives. Plus la masse d'air s'est refroidie plus sa teneur en formes isotopiques lourdes diminue. En notation  $\delta$ , ceci correspond à des teneurs de plus en plus négatives. Les modèles dits de distillation permettent d'estimer l'appauvrissement des masses d'air en isotopes lourds au cours de leur trajet ainsi que la composition isotopique des précipitations successives. Au premier ordre, le degré de distillation est contrôlé par le refroidissement subit par la

masse d'air. C'est ce que décrit le modèle de distillation de Rayleigh (Merlivat et Jouzel, 1979). En faisant des hypothèses sur la température de condensation des précipitations en Antarctique, les modèles de distillation permettent de reconstruire la composition isotopique de la neige. Cependant faute de mesures, on connaît mal la température de condensation des précipitations au-dessus des calottes. On lui substitue couramment la température dans la couche d'inversion qui correspond la zone atmosphérique où les températures jusque là décroissantes avec l'altitude commencent à croître. Ceci implique une hypothèse sur la nature des précipitations ; on suppose qu'elles se forment au niveau de la couche d'inversion où des masses d'air chaud advecté au-dessus de l'Antarctique surplombent des masses d'air plus froid.

#### 4.1.1.3 Relations empiriques

Les travaux de Craig (1961b,a); Dansgaard (1964) ont mis en évidence les relations empiriques suivantes aux moyennes et hautes latitudes :

1. une relation linéaire entre les valeurs moyennes de  $\delta D$  ou  $\delta^{18}O$  des eaux météoriques et la température moyenne annuelle de l'air  $\theta_s$  du site qui reçoit les précipitations (pour  $\theta_s < 15^\circ\text{C}$ ). On appelle dans la suite ce type de relation  $\delta - \theta_s$ .
2. une relation linéaire entre  $\delta D$  et  $\delta^{18}O$  dans les eaux météoriques :

$$\delta D = 8\delta^{18}O + 10 \text{ ‰} \quad (4.4)$$

En Antarctique, le long de la traverse reliant Dumont d'Urville et Dome C, Lorius et Merlivat (1977) obtiennent la relation empirique suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\delta D &= a \times \Delta\theta_s + b \\ &\text{avec une pente } a = 6.04 \text{ ‰}^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned}$$

où :

- $\theta_s$  est la température moyenne annuelle du site qui est donnée par la température mesurée à 10 m de profondeur (profondeur à partir de laquelle l'onde saisonnière est complètement amortie par diffusion de la chaleur),
- $\Delta\delta D$  et  $\Delta\theta_s$  sont prises en général les déviations par rapport à deux valeurs de référence  $\delta D_0$  et  $\theta_{s,0}$  qui sont proches des valeurs de la période actuelle :

$$\begin{aligned} \Delta\delta D &= \delta D - \delta D_0 \\ \Delta\theta_s &= \theta_s - \theta_{s,0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Au Groenland, Johnsen *et al.* (1989) la relation empirique  $\delta - \theta_s$  est exprimée en fonction de  $\delta^{18}O$  avec :

$$\delta^{18}O = 0.67 \times \theta_s(^{\circ}C) - 13.7 \text{ ‰} \quad (4.6)$$

#### 4.1.1.4 Extrapolation dans le passé

On qualifie traditionnellement les relations (4.5) et (4.6) de *relations spatiales*. En adoptant ces relations, on est en principe capable de traduire en terme de variations de température les écarts de composition isotopique d'une couche ancienne. Le thermomètre isotopique repose sur l'hypothèse que les relations spatiales observées aujourd'hui restent valables dans le passé. Sous cette hypothèse, on reconstruit en Antarctique et au Groenland les températures du passé à partir de la mesure de la teneur isotopique des échantillons de glace le long des forages.

#### 4.1.1.5 Limites du thermomètre isotopique

Les relations empiriques sur lesquelles reposent le thermomètre isotopique reflètent une tendance spatiale moyenne. Des études mettent en évidence la variabilité spatiale de la relation  $\delta - \theta_s$ . Des facteurs géographiques et climatiques sont susceptibles de générer cette variabilité. Dans le passé, ces facteurs géographiques et climatiques ont pu être modifiés en impliquant une variabilité temporelle de la relation  $\delta - \theta_s$ .

**Variabilité géographique de la relation empirique** Masson-Delmotte *et al.* (2008) ont étudié en Antarctique, la variabilité spatiale de la relation empirique  $\delta - \theta_s$  à partir d'une compilation de données de teneur isotopique de la neige et de taux d'accumulation. En réalisant une régression linéaire sur l'ensemble de la base de données, les auteurs observent pour la relation  $\delta - \theta_s$ , une pente de  $6.34 \pm 0.09 \text{ ‰}^{\circ}C^{-1}$ , c'est-à-dire une pente très proche de la relation empirique native (4.5). Cependant, ils constatent que cette pente varie avec la situation géographique des sites. Ils estiment<sup>1</sup> des pentes "régionales" sur des échantillons de 200 sites localisés dans un périmètre inférieur à 400km. Ils rapportent les tendances suivantes :

- une variabilité locale de la pente qui peut dépasser 20%,

---

1. Les auteurs mentionnent que les pentes locales sont calculées sans prendre en compte la topographie potentiellement variée du périmètre étudié, ce qui amène à mélanger des sites ayant des bassins de drainage différents ou sous l'influence d'humidité d'origine différente.

- des pentes inférieures à la moyenne notamment dans la partie centrale de l’Antarctique de l’Ouest et dans la région de Dronning Maud land (l’utilisation de la pente moyenne sous-estime a priori les variations de température associées à une variation de teneur isotopique donnée),
- des pentes supérieures à la moyenne dans certaines régions du plateau d’Antarctique de l’Est ainsi que pour le bassin ouest du Lambert glacier.

Les auteurs rapportent les différents facteurs à même de générer la variabilité géographique observée, avec d’une part les facteurs intervenant au cours du processus de dépôt (origine des masses d’air et trajectoire) et d’autre part les facteurs impliqués dans les mécanismes post-dépôts (topographie, pente, vents dominants saisonniers ou catabatiques).

**Variabilité temporelle de la relation empirique** L’extrapolation dans le passé de la relation  $\delta - \theta_s$  repose sur des hypothèses de stationnarité de nombreux phénomènes qui participent à la composition isotopique de la neige :

### 1. Saisonnalité des précipitations :

La température de condensation à laquelle se forme un évènement météorologique contrôle la composition isotopique de la neige formée. La composition isotopique en moyenne annuelle reflète donc un échantillonnage des températures de condensation selon la répartition saisonnière des précipitations. Or il n’est pas exclu que la répartition saisonnière des précipitations ait changé au cours des variations climatiques. Des études Krinner *et al.* (1997) montrent à l’aide de modèle de circulation général (GCM, *General Circulation Model*) que la saisonnalité des précipitations est a priori restée stable dans le passé pour l’Antarctique mais aurait en revanche subi des changements importants au Groenland.

### 2. Nature des précipitations

La température de condensation dépend de la nature des précipitations. Ekaykin *et al.* (2004) montrent en particulier que 75% des évènements neigeux surviennent par temps clair<sup>2</sup> à Vostok. Son étude valide néanmoins l’usage de la température d’inversion comme température de condensation. Selon Delphine Six (communication personnelle), aujourd’hui la couche d’inversion se situe à une altitude de moins de 50m à Dome C. Est-ce que les observations Ekaykin *et al.* (2004) seraient inchangées si l’altitude de la couche d’inversion changeait ? Est-ce que la nature des précipitations est restée stable

---

2. Les précipitations par temps clair sont appelées *clear sky precipitations* ou *diamond dust*



dans le passé ?

### 3. Vents dominants et topographie de surface

Certaines études (Ekaykin *et al.*, 2002; Goosse *et al.*, 2004) montrent que la composition isotopique de la neige et la température en moyenne annuelle sont deux grandeurs décorréées sur des échelles de temps séculaires. En particulier, Ekaykin *et al.* (2002) attribuent une partie de la variabilité isotopique à ces échelles temporelles, à la présence d'ondulations de surface donnant un relief mobile dans le temps. Ils mentionnent une redistribution organisée des accumulations par le vent selon les saisons. Les processus post-dépôts (sublimation, érosion, transport) contrôlés en particulier par les vents dominants peuvent ainsi perturber la relation  $\delta - \theta_s$  de la neige.

### 4. Conditions initiales, origine et trajectoire des masses d'air advectée au-dessus des pôles

Avec les changements climatiques, l'influence des masses d'air peut changer au-dessus des différents secteurs de l'Antarctique (ou du Groenland) avec des masses d'air advectées qui peuvent avoir une origine et une trajectoire différentes.

Un test du thermomètre isotopique a été possible pour les enregistrements du Groenland. Un taux d'accumulation important a permis de reconstruire les paléo-températures par modélisation inverse à partir du profil de température mesuré dans le trou de forage (voir section 4.1.2). Ces reconstructions suggèrent que le thermomètre isotopique (équation 4.6) sous-estimerait d'un facteur 2, la variation de température entre la période actuelle et le dernier maximum glaciaire (LGM, *Last Glacial Maximum*).

#### 4.1.1.6 Le thermomètre isotopique corrigé

Vimeux *et al.* (2002) ont proposé une nouvelle paramétrisation afin de corriger le signal isotopique en Antarctique des variations de la température et de la teneur isotopique de la source marine à l'origine des masses d'air advectées. Cette paramétrisation fait intervenir les variations de composition isotopique de la source sur la base des enregistrements de  $\delta^{18}O$  marin. Elle utilise en outre  $d$ , le deutérium excess qui entre en jeu dans les processus de distillation au deuxième ordre (i.e., fractionnement cinétique). Il reflèterait notamment les variations de température de la source (Vimeux *et al.*, 2001) :

$$d = \delta D - 8\delta^{18}O \text{ ‰} \quad (4.7)$$

Cette correction s'écrit :

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \alpha \Delta \delta D_{cor} \\ \Delta \delta D_{cor} &= \Delta \delta D + a \Delta d + b \Delta \delta^{18}O_m\end{aligned}\tag{4.8}$$

où :

- la relation (4.8) n'est valable que pour de petites variations isotopiques,
- $a$  et  $b$  sont des paramètres ajustés par méthode de Monte Carlo (Vimeux *et al.*, 2001),
- $\delta^{18}O_m$  est la teneur isotopique en oxygène 18 de l'océan<sup>3</sup>,
- $\Delta \delta D$ ,  $\Delta d$  et  $\Delta \delta^{18}O_m$  désignent les déviations par rapport aux valeurs actuelles.

En particulier, Huybrechts *et al.* (2007); Parrenin *et al.* (2007a) utilisent  $\Delta \delta D_{cor}$  étude dans leur modélisation destinée à dater la glace.

### 4.1.2 Inversion du profil de température le long de forage

On peut estimer l'histoire de la température en surface  $\theta_s$  en s'appuyant sur la mesure du profil de température le long des trous de forage. En effet, ces profils de température gardent en mémoire les variations de température à la surface grâce au mécanisme d'advection de la chaleur qui s'opère avec l'enfouissement et l'écoulement des couches successives de neige-névé-glace. Cette méthode nécessite un taux d'accumulation important afin de limiter la destruction du signal de température par diffusion de la chaleur. Les sites du Groenland sont donc favorables. Parmi les travaux :

- Johnsen *et al.* (1995) ont paramétrisé la température de surface  $\theta_s$  en fonction de la teneur isotopique de la glace  $\delta^{18}O_{ice}$  avec une équation du second degré :

$$\theta_s = a + b \delta^{18}O_{ice} + c \delta^{18}O_{ice}^2\tag{4.9}$$

Avec un modèle d'écoulement de la glace (voir section 4.3) 1D couplé à un modèle de diffusion-advection de la chaleur qui permet de reconstruire l'évolution temporelle du profil de température  $\theta(z, t)$  dans la calotte, ils ont identifié (par essais et erreurs) le meilleur scénario pour les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  (donc le meilleur scénario pour l'évolution temporelle de la température  $\theta_s$ ) avec pour critère de reconstruire au mieux le profil de température  $\theta(Z, t = 0)$  mesuré aujourd'hui le long du forage de GRIP. Une modélisation de l'évolution de l'épaisseur de la calotte, leur permet de déduire

---

3. La teneur isotopique en oxygène 18 de l'océan varie d'une part avec la formation des grandes calottes qui "pompent" les formes isotopiques légères de l'océan et d'autre part avec la température des océans profonds qui contrôle l'incorporation du  $\delta^{18}O$  dans la calcite  $CaCO_3$  des foraminifères benthiques des eaux profondes.

l'évolution du "climat" (i.e. température de surface corrigée des effets des variations d'altitude) dans la région sommitale du Groenland. Ils ont déduits, en accord avec une étude de Cuffey *et al.* (1995), une variation de température (climatique) de l'ordre de 20°C entre la période actuelle et la précédente période glaciaire, résultat en désaccord d'un facteur 2 plus élevé avec les reconstructions du thermomètre isotopique.

- Salamatin *et al.* (1998) ont développé une approche similaire (avec modèles d'écoulement et de diffusion-advection de la température) pour le forage de Vostok. Cependant ils n'ont pas paramétré la température de surface en fonction de la teneur isotopique le long du forage. Ils ont choisis de développer l'évolution temporelle de la température  $\theta_s(t)$  en séries d'harmoniques des fréquences orbitales de la terre (excentricité de période 100ka, obliquité de période 41ka et précession de périodes 23 et 19ka). L'hypothèse sous-jacente est donc que la température répond directement aux fréquences orbitales de la Terre ; il s'agit d'une hypothèse forte car le climat de la Terre peut contenir des modes qui lui sont propres. Avec une technique inverse de type variationnelle (minimisation d'une fonction coût, voir section 7.2), ils ont identifié les meilleurs coefficients du développement en harmoniques permettant le meilleur accord entre  $\theta_{mod}(Z, t)$  le profil de température modélisé et  $\theta_{obs}(Z, t)$  le profil mesuré le long du forage. Leur travaux ont notamment suggéré une variation de température entre la période actuelle et la dernière période glaciaire, 30% plus importante que ne le prévoit le thermomètre isotopique à Vostok. Rommelaere (1997) reformule ce problème inverse en forçant l'équation d'advection-diffusion de la chaleur par la température  $\theta_s$  reconstruite à partir du thermomètre isotopique. Son étude suggère que pour les sites à faibles taux d'accumulation, les techniques d'inversion basée sur le profil de température dans le trou de forage ne permettent pas d'apporter plus d'information que le thermomètre isotopique.

## 4.2 Modèle pour reconstruire les paléo-accumulation

### 4.2.1 Modèles basés sur les isochrones

Les isochrones sont des couches internes dans la calotte identifiées par échos radar. Les facteurs de nature physique et chimique à l'origine de la réflexion des ondes radar sont partiellement connus : densité de la glace, acidité, nature de la fabrication, poussières...etc. On interprète les isochrones comme des couches d'âge égal compte-tenu de l'homogénéité de

certaines de leurs propriétés. Dans le haut des forages, avec un modèle de densification, on peut utiliser des isochrones datées par des horizons repères (éruptions volcaniques du dernier millénaire) pour en déduire le taux d'accumulation. Pour les couches plus profondes avec des effets d'advection horizontale de la glace (Marie Rousselot, communication personnelle), il est nécessaire d'utiliser un modèle d'écoulement soit direct soit inverse (Buchardt et Dahl-Jensen (2007)).

### 4.2.2 Modèles basés sur la pression de vapeur saturante

Robin (1977) a été le premier à associer les données spatiales d'accumulation, à la température et à la vapeur d'eau. Dans le cadre des modèles glaciologiques de datation, la reconstruction des paléo-accumulations a dans un premier temps consisté à représenter les précipitations qui se forment dans la couche d'inversion. Dans ce schéma, on assimile la température de condensation des précipitations à la température de la couche d'inversion et on en déduit la quantité de vapeur d'eau disponible avec la pression de vapeur saturante  $P_s(\theta_I)$ .

En utilisant un modèle de masse d'air circulant dans la couche advective pour les régions centrales d'Antarctique, Ritz (1992) a proposé une relation notée  $A-\theta_I$  permettant d'estimer le taux d'accumulation  $A$  connaissant la température d'inversion  $\theta_I$  :

$$A = A_0 \frac{f(\theta_I)}{f(\theta_{I,0})} (1 + \beta(\theta_I - \theta_{I,0})) \quad (4.10)$$

où :

1.  $\theta_{I,0}$  et  $A_0$  sont une température d'inversion et un taux d'accumulation de référence (e.g., les moyennes annuelles des valeurs correspondant à la période actuelle),
2. La fonction  $f$  est donnée par :

$$f(\theta_I) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{P_s(\theta)}{\theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_I} \quad (4.11)$$

avec  $P_s(\theta)$  la pression de vapeur saturante est donnée par la relation empirique (les valeurs de  $A_s$  et  $B_s$  peuvent-être trouvées dans Parrenin *et al.* (2004)) :

$$P_s(\theta) = A_s \exp -\frac{B_s}{\theta} \quad (4.12)$$

3.  $\beta$  est une constante qui permet de tenir compte des mécanismes d'accumulation non gouvernés par la pression de vapeur saturante dans la couche d'inversion.

Par ailleurs, Connolley (1996) a établi une relation empirique entre  $\theta_s$ , la température en moyenne annuelle d'un site et  $\theta_I$ , la température d'inversion :

$$\theta_I = 0.63 \times \theta_s(^{\circ}\text{C}) - 2.1 \quad (4.13)$$

En s'appuyant sur le thermomètre isotopique (4.5), la relation  $\theta_I - \theta_S$  (4.13) et le modèle d'accumulation basée sur la pression de vapeur saturante (4.10), on peut donc reconstruire les taux d'accumulation du passé à partir de la teneur isotopique mesurée dans la glace le long des forages.

### 4.2.3 Modèles basés sur la teneur isotopique

Aujourd'hui, certains auteurs (Watanabe *et al.*, 2003; Hondoh *et al.*, 2004; Salamatin *et al.*, 2004; Parrenin *et al.*, 2007a) utilisent une paramétrisation simplifiée du modèle d'accumulation qui s'affranchit des paramètres physiques de l'équation (4.10). On note cette paramétrisation  $A - \delta$  et elle s'écrit :

$$A = A_0 \exp(\beta \Delta \delta D) \quad (4.14)$$

où  $\Delta \delta D$  est la déviation du deutérium mesuré dans la glace par rapport à une référence  $\delta D_0$  et  $A_0$  correspond au taux d'accumulation mesuré associé à  $\delta D_0$  (en général deux mesures réalisées pour la période actuelle).

Si de façon sous-jacente, on considère que la paramétrisation (4.14) repose toujours sur le contrôle du taux d'accumulation par la température de condensation, on peut alors raffiner cette dernière. On a souligné qu'une partie du signal isotopique contient de l'information sur la composition isotopique et la température de la source des masses d'air à l'origine des précipitations. De ce fait, (Parrenin *et al.*, 2007a) a utilisé  $\delta D_{corr}$ , un signal de deutérium corrigé tel que rapporté section 4.1.1.6 par l'équation (4.8). Aussi, puisqu'il a été montré qu'en dessous de 50 ans (Ekaykin *et al.*, 2002), les variabilités observées de la température et de l'isotope sont décorrélés, Parrenin *et al.* (2007a) ont aussi lissé le signal  $\delta D_{corr}$ .

### 4.2.4 Limites des modèles d'accumulation

Taux de précipitation et taux d'accumulation sont deux grandeurs différentes. Les mécanismes post-dépôt (érosion-transport-sublimation) souvent lié à la topographie de surface (pentes, ondulations de surface), aux vents dominants (saisonniers, catabatiques) sont susceptibles de décorréler teneurs isotopiques et taux d'accumulation.

Masson-Delmotte *et al.* (2008) ont analysé une compilation de données isotopiques et de taux d'accumulation mesurés en Antarctique. Cette analyse montre d'une part que la variabilité spatiale du coefficient  $\beta$  (équation (4.14)) est importante à travers l'Antarctique mais aussi que la relation  $A - \delta$  n'est pas une simple exponentielle (voir figure 4.1). Masson-Delmotte *et al.* (2008) montrent qu'il est possible d'ajuster une loi exponentielle si l'on sélectionne uniquement les sites d'altitude supérieures à 2754m (c'est-à-dire des sites froids). Les auteurs soulignent que cette loi exponentielle ne peut probablement pas être utilisée pour des conditions plus chaudes.

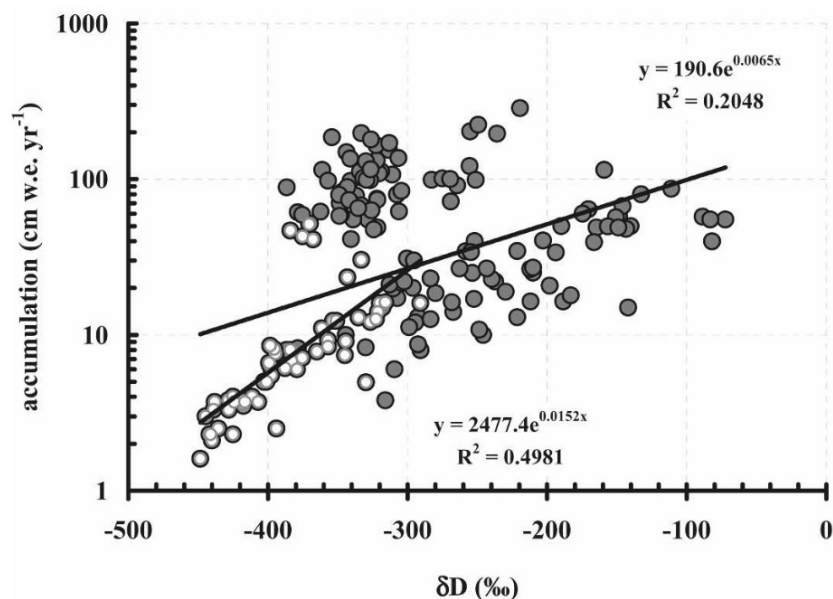


FIGURE 4.1 – En Antarctique, compilation de données de  $\delta D$  et de taux d'accumulation (cm d'équivalent eau an<sup>-1</sup>) ; extrait de Masson-Delmotte *et al.* (2008).

Cependant, le travail de Magand *et al.* (2007) montrent que les mesures de taux d'accumulation sont de qualité très inégales. Les auteurs ont fait un filtrage des données sur le secteur 90–180°C E de l'Antarctique qui réduit notamment le biais entre taux d'accumulation modélisés par les GCM et taux d'accumulation mesurés. Cette approche est sans doute nécessaire pour estimer proprement les limites des modèles d'accumulation basés sur la pression de vapeur saturante et/ou le contenu isotopique de la neige.

Pour un site donné, dans les modèles glaciologiques de datation, la valeur de  $\beta$  associée à une carotte de glace est prise constante dans le temps (EPICA Community Members, 2006, 2004; Parrenin *et al.*, 2007a). Il faut souligner que le choix de la valeur de  $\beta$  conditionne fortement les chronologies gaz et glace modélisées<sup>4</sup>. La variabilité spatiale observée de  $\beta$  en

4. Les processus d'écoulements de la glace sont contrôlés entre autre par la charge et donc par le taux

Antarctique suggère que  $\beta$  a pu varier au cours des différents régimes climatiques, ce qui est une source d'incertitude pour l'accumulation modélisée.

En admettant que la composition isotopique  $\delta D$  est un bon proxy de la température (de la couche d'inversion ou de la surface), il est possible de tester la validité de l'approche basée sur l'équation (4.14) à l'aide de modèles de circulation atmosphérique. Lors d'une expérience numérique de changement climatique, on connaît en effet l'accumulation et la température à deux périodes différentes, et on peut donc calculer la distribution spatiale de  $\beta$ . Gregory et Huybrechts (2006) ont montré que dans le cadre du changement climatique attendu au cours de ce siècle,  $\beta$  n'est pas uniforme sur le continent antarctique, mais la distribution spatiale de  $\beta$  suggérée par plusieurs modèles de circulation générale montre des similitudes. Une analyse par Krinner *et al.* (2008) montre une distribution spatiale similaire entre les changements futurs d'accumulation (pour être plus précis, précipitation) et température de surface. Cette même étude montre que les structures spatiales du changement relatif de précipitation et du changement de la température de l'air pondérée par la précipitation  $\theta_P$  se ressemblent beaucoup, ou en tout cas plus que les structures spatiales du changement relatif de précipitation et du changement de la température de l'air *non* pondérée par la précipitation. Ces résultats fournissent un certain support pour les modèles d'accumulation utilisés pour la datation des carottes de glace. Par contre, l'analyse conjointe de simulations paléoclimatiques et de prévisions du climat futur dans le cadre des projets internationaux PMIP2 et CMIP3 ne supporte pas l'hypothèse d'une faible variabilité temporelle de  $\beta$  (Gerhard Krinner, communication personnelle).

#### 4.2.5 Flux d'aérosols comme indicateur du taux d'accumulation passé

En Antarctique, les aérosols amenés par la circulation atmosphérique sont inclus dans la neige sous forme de dépôt sec. C'est le cas également des aérosols cosmogéniques tel que le  $^{10}\text{Be}$  issus de l'action des rayons cosmiques sur l'atmosphère. Les variations de flux de cet élément cosmogénique dans la glace d'Antarctique, peuvent servir d'indicateur de changement d'accumulation. Ainsi pendant la période glaciaire, le flux deux fois plus élevé observé peut correspondre à une accumulation deux fois plus faible (Yiou *et al.*, 1985).

---

d'accumulation qui avec la fonction d'amincissement fixe la valeur de l'épaisseur de la couche annuelle mesurée aujourd'hui le long des forages.

## 4.3 Modèle d'écoulement de la glace

### 4.3.1 Généralités

On travaille dorénavant dans un repère orthonormé direct défini par les vecteurs de base  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$ . Le vecteur  $\mathbf{e}_z$  définit la verticale et est orienté vers le haut. On désigne par  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{v}$  les vecteurs de position et de vitesse. Leurs coordonnées sont données respectivement par  $x$ ,  $y$  et  $z$  et par  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  dans le repère défini ci-dessus. Les équations  $z = b(x, y, t)$  et  $z = h(x, y, t)$  décrivent respectivement l'évolution temporelle de l'interface calotte-socle et de la surface de la calotte.

Décrire l'écoulement de la glace d'une calotte ou d'un glacier consiste à déterminer l'évolution du champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  au cours du temps sur un domaine donné. Le système d'équations à résoudre est plus ou moins complexe. Il s'articule toujours autour des équations locales de continuité de la masse et de conservation de la quantité de mouvement. La dépendance au champ de température de certaines grandeurs (comme la viscosité de la glace), peut amener à prendre en compte l'équation locale de conservation de l'énergie. On a alors un système thermo-mécaniquement couplé.

Le système formé par ces équations locales de conservation est sous-déterminé. Pour le résoudre, des équations dites de fermeture sont nécessaires. Ces équations de fermeture sont données par des lois de comportement qui sont propres au matériau glace. En particulier, il faut impérativement définir la relation mécanique entre la vitesse de déformation d'un élément de volume de glace et la contrainte appliquée sur ce dernier. Dans le cas d'un système thermo-dynamiquement couplé, il faut de surcroît définir les relations qui existent entre la température et le flux de chaleur d'une part et entre la température et l'énergie interne d'autre part.

Dans les sections qui suivent, on présente dans un premier temps les lois de comportements puis le système des équations locales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie interne. On décrit les conditions aux limites classiquement adoptées ainsi que l'équation de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur  $H(x, y, t)$  de la calotte.

Le système formé par l'ensemble de ces équations constitue le problème Full-Stokes et le résoudre sans avoir recours à des approximations requière d'importantes ressources numériques (mémoire et temps de calcul). Pour reconstruire l'évolution d'une calotte sur des durées importantes et notamment sur de grande échelle ou bien avec une résolution spatiale



fine, on a en général recours à des approximations. On présente en particulier, les résultats importants de l'approximation de la couche mince.

On décrit ensuite les modèles d'écoulement pour dater la glace avec : i) les modèles à géométrie imposée et ii) les modèles couplés grande échelle/petite échelle.

### 4.3.2 Loi de comportement de la glace polycristalline

Afin d'introduire les lois de comportements de la glace polycristalline, on rappelle quelques notions préliminaires.

#### 4.3.2.1 Monocristal, polycristal

Le cristal de glace est anisotrope et présente un plan de glissement privilégié, le plan dit basal qui est perpendiculaire à l'axe optique du cristal appelé aussi axe  $\mathbf{c}$ . Un échantillon de glace prélevé sur un glacier ou une calotte renferme en général un grand nombre de cristaux (leur taille varie du mm au cm) : il s'agit de glace polycristalline. Un échantillon de glace polycristalline est un matériau dont le comportement peut devenir anisotrope selon la distribution des orientations des axes  $\mathbf{c}$  des différents cristaux qui le composent : si cette distribution n'est pas isotrope, l'échantillon de glace présente alors des directions de déformation privilégiées.

#### 4.3.2.2 Tenseur des contraintes, tenseur des vitesses de déformation

Pour décrire la déformation d'un échantillon de glace, on utilise le tenseur des vitesses de déformation ainsi que le tenseur des contraintes.

**Tenseur des vitesses de déformation  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$**  Le tenseur des vitesses de déformation est donné par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v}) \quad (4.15)$$

On le note alors  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$  et il est aussi appelé tenseur du taux de déformation. On définit ses composantes comme suit dans le repère  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.17)$$

**Tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$**  Le tenseur des contraintes est lui noté  $\boldsymbol{\tau}$ . Si l'on considère au sein du matériau glace, une surface plane virtuelle orientée par son vecteur normal  $\mathbf{n}$ , on peut définir le vecteur de contrainte  $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}, t)$  qui s'exerce sur cette surface de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \quad (4.18)$$

Dans la base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

On note par ailleurs qu'en l'absence de contraintes assimilables à des couples au sein du matériau, le tenseur des contraintes est symétrique (ce résultat est en principe obtenu grâce à l'équation locale de conservation du moment d'inertie mais nous ne l'aborderons pas). La figure 4.2 explicite les différentes composantes de la contrainte s'exerçant sur les 6 faces d'un élément virtuel cubique au sein du matériau où :

- $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  et  $\tau_{zz}$  sont les contraintes normales, positives en traction et négatives en compression et on les note parfois  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  ;
- $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont les contraintes de cisaillement.

En particulier,  $\boldsymbol{\tau}_z(\mathbf{x}, t)$  est le vecteur de contrainte qui s'exerce sur une surface orientée perpendiculaire à  $\mathbf{e}_z$  au point  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$  ; il est donné par :

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{e}_z}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_z = \tau_{xz} \mathbf{e}_x + \tau_{yz} \mathbf{e}_y + \tau_{zz} \mathbf{e}_z \quad (4.20)$$

Comme pour tout tenseur symétrique de rang 2, on peut associer à  $\boldsymbol{\tau}$  trois invariants par changement repère, invariants qui sont indépendants. Le premier invariant  $I_1 = \text{tr } \boldsymbol{\tau}$  et il permet d'explicitier la pression isotrope notée  $p(\mathbf{x}, t)$  :

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{3} (\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \quad (4.21)$$

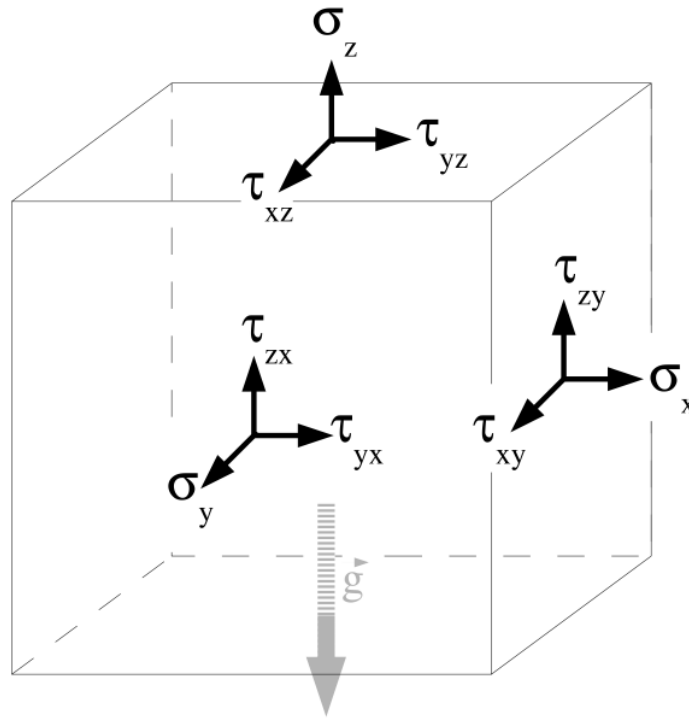


FIGURE 4.2 – Contraintes s'exerçant sur les faces d'un cube élémentaire.

On note que du fait de la dynamique, les composantes normales  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  et  $\tau_{zz}$  sont différentes de la pression isotrope  $p$ .

#### 4.3.2.3 Fluide visqueux non linéaire

**Essais mécaniques** Des essais mécaniques en laboratoire sur une glace polycristalline *isotrope* montrent que sous une contrainte de type cisaillement simple  $\tau_{xz}$ , le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  s'écrit :

$$\dot{\gamma} = 2D_{xz} = \frac{1}{\eta(\theta, \theta_m, |\tau_{xz}|)} \tau_{xz} \quad (4.22)$$

où  $\eta$  est la *viscosité*.

Ces essais mécaniques montrent que  $\eta$  dépend en particulier de la norme de la contrainte appliquée, de la température  $\theta$  et de la température de fusion  $\theta_m$ . Il s'agit d'une loi de comportement de type fluide visqueux non linéaire (i.e., non Newtonien).

**Généralisation** Pour décrire l'écoulement de la glace soumise à un mode de contrainte et de déformation quelconque, on généralise cette loi. Pour ce faire, il est approprié de

décomposer  $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, t)$  en deux termes :

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, t) = -p(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}^d(\boldsymbol{x}, t) \quad (4.23)$$

avec :

- le champ de pression isotrope  $p(\boldsymbol{x}, t)$  (voir section 4.3.2.2) duquel ne peut résulter aucune déformation puisque la glace est considérée comme incompressible,
- le tenseur du déviateur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}^d(\boldsymbol{x}, t)$ <sup>5</sup>.
- le second invariant de  $\boldsymbol{\tau}^d$  noté  $I_2^{\tau^d}$  :

$$I_2^{\tau^d} = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^{d2}) \quad (4.24)$$

On introduit ensuite  $\sigma$ , la *scission efficace* qui est une mesure de la contrainte effective et qui généralise  $|\tau_{xy}|$  dans le facteur  $\eta$  de la loi (4.22).  $\sigma$  doit être un invariant par changement de repère et le second invariant  $I_2^{\tau^d}$  de  $\boldsymbol{\tau}^d$  est une grandeur appropriée pour la décrire :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_d^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\tau_{xx} - p)^2 + (\tau_{yy} - p)^2 + (\tau_{zz} - p)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \end{aligned}$$

On définit de la même façon  $d$ , à partir du second invariant du tenseur des vitesses de déformation :

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(D^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [D_{xx}^2 + D_{yy}^2 + D_{zz}^2] + D_{xy}^2 + D_{xz}^2 + D_{yz}^2} \end{aligned}$$

Enfin, on écrit la loi de comportement mécanique généralisée :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta(\theta, \theta_m, \sigma)} \boldsymbol{\tau}^d \quad (4.25)$$

avec  $1/\eta$  la *fluidité* qui est le produit de deux facteurs :

$$\frac{1}{\eta} = 2A_\theta f(\sigma) \quad (4.26)$$

---

5. la densité de la glace  $\rho$  étant approximée comme constante,  $\boldsymbol{\tau}^d$  et  $p$  sont deux grandeurs indépendantes.

- $A_\theta$  est fonction de la température  $\theta$  selon une loi d'Arrhénius où intervient la température de fusion de la glace  $\theta_m$  qui elle-même dépend de la pression  $p$  et donc d'état de contrainte<sup>6</sup> :

$$A_\theta = A_0 \exp \left[ \frac{E_a}{R\theta} \left( \frac{1}{\theta_m} - \frac{1}{\theta} \right) \right] \quad (4.27)$$

où :

- $E_a$  une énergie d'activation en  $kJmol^{-1}$ ,
- $R$  est la constante des gaz parfait.
- $f(\sigma)$  la fonction de fluage ou *creep function* qui est une loi puissance faisant intervenir l'exposant  $n$  appelé exposant de Glen :

$$f_\sigma = \sigma^{n-1} \quad (4.28)$$

Finalement, la loi de comportement de la glace s'écrit sous sa forme classique appelée loi de Glen en glaciologie :

$$\mathbf{D} = A_\theta \sigma^{n-1} \boldsymbol{\tau}^d \quad (4.29)$$

où de façon équivalente :

$$\boldsymbol{\tau}^d = 2\eta(\theta, d)\mathbf{D} \quad (4.30)$$

avec :

$$\eta(\theta, d) = \frac{1}{2} A_\theta d^{(1/n-1)} \quad (4.31)$$

Les valeurs de l'exposant de Glen  $n$ , de l'énergie d'activation  $E_a$  ainsi que du paramètres  $A_0$  varient avec les gammes de contraintes et de température car les mécanismes de fluage mis en jeu sont différents. En Antarctique, on a en général une pression efficace inférieure ou égale à 1 bar pour laquelle on attend un mécanisme de fluage secondaire (dislocation avec recristallisation). L'exposant de Glen est alors fixé à 1. Plus près socle, lorsque la température dépasse les  $-10^\circ\text{C}$  on peut avoir de la recristallisation dynamique et  $n = 3$  est plus adapté. Aujourd'hui encore il n'y a pas de consensus sur la valeur de  $n$ . Pour des contraintes déviatoriques faibles (ordre de grandeur), la valeur 1 semble plus appropriée.

---

6. On observe une diminution de la température de fusion de l'ordre  $0.9K$  (ou  $^\circ\text{C}$ ) par kilomètre d'épaisseur de glace

Certains auteurs proposent de développer en série la loi de Glen (Pettit et Waddington, 2003) pour être à même de rendre compte de tous les régimes de fluage qui s'opèrent au sein de la calotte.

### 4.3.3 Loi de comportement de la chaleur, de l'énergie de déformation et de l'énergie interne

Dans la section précédente, on a vu que la viscosité  $\eta$  dépend de la température. Or le champ de température dans une calotte n'est pas uniforme : en particulier la température croît de la surface vers le socle en réponse à l'action du flux géothermique. Les modèles d'écoulement les plus évolués calculent l'évolution du champ de température à partir de l'équation de conservation de l'énergie interne. Dans ce cas dit thermo-mécaniquement couplé, on décrit :

- le comportement de  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  le flux de chaleur dans la glace avec une loi de Fourier où intervient la conductivité thermique de la glace  $\kappa(\theta)$  :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\kappa(\theta) \text{grad } \theta \quad (4.32)$$

- l'énergie due à la déformation interne s'écrit en tenant compte des équations (4.23), (4.30) et (4.25) :

$$\text{tr } \mathbf{T}\mathbf{D} = 4\eta d^2 \quad (4.33)$$

- l'énergie interne  $u$  comme proportionnelle à la température  $\theta$  avec la chaleur spécifique de la glace  $c(\theta)$  comme coefficient de proportionnalité :

$$u = c(\theta)\theta \quad (4.34)$$

### 4.3.4 Equations locales de conservation : problème Full-Stokes

En tenant compte des caractéristiques du matériau glace telles qu'elles ont été décrites dans les deux sections précédentes, les équations locales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie interne prennent la forme que l'on présente dans les 3 paragraphes qui suivent. Ce système d'équations auquel on ajoute des conditions aux limites à la surface de la calotte et à l'interface calotte-socle, constitue le problème Full-Stokes.

#### 4.3.4.1 Continuité de la masse

L'équation de continuité de la masse a la forme suivante car la glace est considérée comme un matériau incompressible :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.35)$$

s'écrit :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0 \quad (4.36)$$

#### 4.3.4.2 Conservation locale de la quantité de mouvement

L'écoulement de la glace des calottes est avec une bonne approximation quasi-statique. En effet, les valeurs caractéristiques des grandeurs physiques de l'écoulement permettent de négliger les accélérations ainsi que les termes de convections. En notant  $\mathbf{g}$  le champ de gravitation, l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (4.37)$$

En insérant dans cette dernière équation, la loi de comportement mécanique donnée par l'équation (4.30), on obtient :

$$-\operatorname{grad} p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T) \cdot \operatorname{grad} \eta + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (4.38)$$

#### 4.3.4.3 Conservation locale de l'énergie interne

En tenant compte des lois de comportements du flux de chaleur, de l'énergie interne et de la chaleur due à la déformation décrites section 4.3.3, l'équation de conservation de l'énergie interne s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \kappa \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}}{\partial z} \\ &\quad - \rho c \left( v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 4\eta d^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

### 4.3.5 Conditions aux limites

Les équations locales de conservation ne sont valables qu'au sein de la calotte. On doit définir les conditions aux limites attachées à chacune de ces équations, notamment à la surface de la calotte et l'interface calotte-socle.

#### 4.3.5.1 Surface de la calotte

- Si on note  $\dot{b}(x, y, t)$  le taux d'accumulation à la surface de la calotte ( $m.an^{-1}$ ), l'équation de la surface  $h(x, y, t)$  de la calotte vérifie alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = \dot{b}(x, y, t) \quad (4.40)$$

- Par ailleurs, pour l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement, la condition aux limites de contrainte nulle est appliquée :

$$\boldsymbol{\tau} = 0 \quad (4.41)$$

Celle-ci se justifie car la contrainte due à l'atmosphère (pression, vent) ainsi que le terme d'advection (la surface n'est pas matérielle) sont tous deux négligeables par rapport aux contraintes existantes au sein de la glace.

- Enfin, pour l'équation local de conservation de l'énergie interne, le champ de température  $\theta(h, t)$  est imposé par la température de surface  $\theta_s$ .

#### 4.3.5.2 Base de la calotte

- Si on note  $\dot{f}(x, y, t)$  le taux de fusion de la glace ( $m.an^{-1}$ ) à la base de la calotte, l'équation de l'interface calotte-socle  $b(x, y, t)$  vérifie alors :

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} - v_z = \dot{f}(x, y, t) \quad (4.42)$$

- Par ailleurs, pour l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement, la condition aux limites appliquée à l'interface calotte-socle est :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{lith} \quad (4.43)$$

où  $\boldsymbol{\tau}_{lith}$  représente le champ de contraintes dans la lithosphère pour lequel on ne dispose en général pas d'information.



En l'absence d'information sur ce champ, on modélise le frottement basal par une loi de glissement de type Weertman qui impose en fonction des contraintes basale, la vitesse tangentielle à l'interface calotte-socle notée  $\mathbf{v}_b$ . La vitesse tangentielle à la base dépend de  $\theta_b$  la température à la base de la calotte. En particulier, il n'y a pas de glissement si  $\theta_b$  est inférieure à la température de fusion  $\theta_m$  car la glace est a priori ancrée par les rugosités du socle :

$$\mathbf{v}_b = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_b \leq \theta_m \\ C_b \frac{\tau_b^p}{p_{\text{eff}}^q} & \text{si } \theta_b = \theta_m \end{cases} \quad (4.44)$$

Cette loi fait intervenir  $C_b$  une constante, la pression efficace  $p_{\text{eff}}$  qui consiste en la différence entre la pression à la base de la calotte  $p_b$  et la pression de l'eau sous-glaciaire  $p_w$  avec en particulier une puissance  $q$  de la pression  $p_{\text{eff}}$  au dénominateur et une puissance  $p$  de la contrainte de cisaillement basale  $\tau_b$  au numérateur. La contrainte  $\tau_b$  est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_b &= \tau_b \cdot \mathbf{n} \\ &= \tau_b \mathbf{n}_b \end{aligned} \quad (4.45)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale au plan tangentielle à l'interface calotte-socle et  $\mathbf{n}_b$  est le vecteur unitaire dans la direction de la contrainte tangentielle  $\tau_b$ . On note que tout comme l'exposant de la loi de Glen, les deux exposants  $p$  et  $q$  sont des paramètres de l'écoulement mal connus et pour lesquels il n'y a pas aujourd'hui de consensus.

— Ensuite, pour l'équation de conservation locale de l'énergie interne, on distingue une fois de plus deux cas suivant la valeur de  $\theta_b$  :

1. Pour une base froide, c'est-à-dire pour  $\theta_b \leq \theta_m$ , le taux de fusion  $\dot{f}$  est nul et on a une condition aux limites de type Neumann pour la chaleur :

$$\kappa (\text{grad } \theta \cdot \mathbf{n}) = q_{geo} \quad (4.46)$$

2. Pour une base tempérée, on connaît la température  $\theta$  qui est égale à la température de fusion et on a alors une conditions aux limites de type Dirichlet qui permet de déterminer le taux de fusion  $\dot{f}$  connaissant le flux géothermique  $q_{geo}$  et la vitesse de glissement  $\mathbf{v}_b$  :

$$\dot{f} = \frac{q_{geo} - \kappa (\text{grad } \theta \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{v}_b \cdot \boldsymbol{\tau}_b}{\rho L} \quad (4.47)$$

où  $L$  est la chaleur latente de fusion.

### 4.3.6 Equation de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur de la calotte

L'équation de continuité de la masse peut-être intégrée sur l'épaisseur  $H(x, y, t) = h(x, y, t) - b(x, y, t)$  de la calotte en utilisant les conditions aux limites (4.40) et (4.42), on a :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial H\bar{U}_x}{\partial x} - \frac{\partial H\bar{U}_y}{\partial y} + \dot{b} - \dot{f} \quad (4.48)$$

où  $\bar{U}_x$  et  $\bar{U}_y$  sont les flux moyen des vitesses  $v_x$  et  $v_y$  à travers la ligne verticale définie par l'épaisseur  $H(x, y, t) = h - b$  de la calotte :

$$\begin{aligned} \bar{U}_x &= \frac{1}{H} \int_b^h v_x dz \\ \bar{U}_y &= \frac{1}{H} \int_b^h v_y dz \end{aligned}$$

$\bar{U}_x$  et  $\bar{U}_y$  sont généralement appelées vitesses de bilan. Si elles sont connues, alors on peut en déduire d'évolution de l'épaisseur  $H(x, y, t)$ . A l'inverse si l'évolution des épaisseurs est connue, on peut alors remonter aux flux des vitesses.

### 4.3.7 Approximation de la couche mince

L'approximation de la couche mince a été largement utilisée dans différentes branches de la mécanique des fluides. En glaciologie, cette approximation est souvent notée SIA (i.e., *Shallow Ice Approximation*) et permet de modéliser l'évolution de grande calotte sur des durées importantes.

#### 4.3.7.1 Généralités

L'extension horizontale des grandes calottes est nettement plus importante que leur épaisseur. On mesure cette dissymétrie à l'aide du rapport d'aspect noté  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \frac{H}{L} \quad (4.49)$$

où  $[L]$  et  $[H]$  sont respectivement les dimensions caractéristiques horizontales et verticales des calottes.

Le rapport d'aspect vaut environ  $10^{-3}$  pour les grandes calottes. La SIA s'appuie sur ce rapport d'aspect, pour simplifier les termes des équations du problème Full-Stokes. Ces approximations peuvent être réalisées de façon rigoureuse (Hutter, 1983, Morland, 1984) et

conduisent alors à des équations de conservations qui sont développées en série du rapport d'aspect. On peut alors réaliser une approximation à l'ordre 0, appelée aussi SIA0 ou encore des approximations aux ordres supérieurs<sup>7</sup>. Dans la suite, sans réaliser un développement rigoureux on décrit les équations de la SIA0.

#### 4.3.7.2 Approximation de la couche mince à l'ordre 0

Cette approximation correspond à un régime d'écoulement laminaire avec un régime de cisaillement simple qui est parallèle à la surface de la calotte et qui s'applique dans des configurations où la pente de surface est très faible et approximativement égale à celle du socle (qui ne doit donc être lisse). On aboutit alors à des expressions explicites des vitesses  $v_x$  et  $v_y$ . On montre dans ce qui suit, quelques étapes du développement et les résultats essentiels de la SIA0.

L'équation quasi-statique de conservation de la quantité de mouvement (4.37) se développe :

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (4.52)$$

On considère que toutes les contraintes normales sont égales à l'opposé de la pression "glaciostatique"  $p$  ce qui revient à négliger les contraintes déviatoriques  $\tau_{xx}^d, \tau_{yy}^d, \tau_{zz}^d$  :

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p \quad (4.53)$$

Ce qui donne :

---

7. Un développement rigoureux des équations SIA nécessite de re-écrire les équations de conservation avec des grandeurs adimensionnalisées, ayant subi un changement de coordonnées en faisant intervenir  $\epsilon$  ; ces grandeurs transformées sont alors développées en série de  $\epsilon$  et introduites dans les équations de conservation qui sont alors simplifiables à un ordre donné en  $\epsilon$ .

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (4.56)$$

De plus sur la base du faible rapport d'aspect  $\epsilon$ , pour une grandeur quelconque du problème, on néglige ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées horizontales ( $x$  ou  $y$ ) devant sa dérivée partielle par rapport à la coordonnée vertical ( $z$ ). Ceci amène à ne considérer que les dérivées partielles par rapport à  $z$  des contraintes  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (4.59)$$

Avec la condition aux limites en surface (voir équation (4.41)) et avec l'approximation (4.53), l'équation 4.59 s'intègre et on a :

$$\tau_{zz} = -p = -\rho g (h - z) \quad (4.60)$$

Cette dernière équation insérée dans le système (4.58,4.59,4.59) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= -\rho g (h - z) = -p \end{aligned} \quad (4.61)$$

On note par ailleurs que, par hypothèse, la pente de la surface  $h(x, y, t)$  est très faible, de l'ordre de grandeur du rapport d'aspect  $\epsilon$ , ceci compte-tenu de la géométrie :

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \sim \frac{[H]}{[L]} \quad (4.62)$$

En particulier,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface  $h(x, y, t)$  est donc proche de  $\mathbf{e}_z$ , ce qui permet d'écrire les équations aux limites en surface (voir équation (4.41)) :

$$p|_{z=h} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z=h} = 0 \quad (4.63)$$

Avec ces trois dernières égalités, on intègre les équations (4.61), (4.61) et (4.61) :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\rho g (h - z) \frac{\partial h}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= -\rho g (h - z) \frac{\partial h}{\partial y} \\ p &= \rho g (h - z) \end{aligned} \quad (4.64)$$

La cission efficace  $\sigma$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho g (h - z) \sqrt{\frac{\partial h}{\partial x}^2 + \frac{\partial h}{\partial y}^2} \\ &= \rho g (h - z) |\text{grad } h| \end{aligned}$$

De même les composantes  $D_{xz}$  et  $D_{yz}$  du tenseur des déformation s'écrivent :

$$\begin{aligned} D_{xz} &\sim \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ D_{yz} &\sim \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.65)$$

En tenant compte de cette simplification et en insérant l'équation (4.65) donnant la scission efficace, dans l'équation de Glen 4.29, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial z} &= -2A_\theta (\rho g (h - z))^n |\text{grad } h|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -2A_\theta (\rho g (h - z))^n |\text{grad } h|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.66}$$

Que l'on peut intégrer, en notant  $v_{b,x}$  et  $v_{b,y}$  les composantes horizontales de la vitesse à la base :

$$\begin{aligned}v_x &= v_{b,x} - 2(\rho g)^n |\text{grad } h|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z dz' (h - z')^n A_\theta \\ v_y &= v_{b,y} - 2(\rho g)^n |\text{grad } h|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z dz' (h - z')^n A_\theta\end{aligned}\tag{4.67}$$

On suppose que les pente à la base et en surface sont du même ordre de grandeur. Plan horizontal et plan tangent au vecteur vitesse à la base sont alors confondus et  $v_{b,x}$  et  $v_{b,y}$  sont donc aussi les composantes de la vitesse de glissement. De même le vecteur contrainte tangentielle  $\boldsymbol{\tau}_b$  a pour norme  $\tau_b = \rho g H |\text{grad } h|$  et s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_b = -\rho g H \left( \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{e}_y \right)\tag{4.68}$$

En notant que la pression efficace s'écrit  $p_{\text{eff}} = \rho g H - p_w$ , le vecteur vitesse de glissement  $\mathbf{v}_{b,x}$  est horizontale et s'écrit (voir équation (4.44)) :

- nul si  $\theta_b \leq \theta_m$ ,
- égal à si  $\theta_b = \theta_m$  :

$$\mathbf{v}_{b,x} = -C_b \frac{(\rho g H)^p}{(\rho g H - p_w)^q} |\text{grad } h|^{p-1} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{e}_y \right)\tag{4.69}$$

Par ailleurs, si on note le vecteur vitesse horizontale  $\mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t)$  de composante  $v_x$  et  $v_y$ , et en insérant les composantes de la vitesse de glissement (équation (4.69)) dans l'équation (4.67) on a :

$$\mathbf{v}_h = -C \text{grad } h(x, y, t)\tag{4.70}$$

où  $C$  s'écrit :

— si  $\theta_b \leq \theta_m$  :

$$C = 2(\rho g)^n |\text{grad } h|^{n-1} \int_b^z dz' (h - z')^n A_\theta \quad (4.71)$$

— si  $\theta_b = \theta_m$  :

$$C = C_b \frac{(\rho g H)^p}{(\rho g H - p_w)^q} |\text{grad } h|^{p-1} + 2(\rho g)^n |\text{grad } h|^{n-1} \int_b^z dz' (h - z')^n A_\theta \quad (4.72)$$

Enfin, on ne donne pas l'expression développée de la vitesse vertical  $v_z$  ; celle-ci se déduit de l'intégration de l'équation d'incompressibilité (4.36) de la base  $b$  jusqu'en  $z$  et de l'équation (4.70) donnant les composantes  $v_x$  et  $v_y$  :

$$v_z = v_{b,z} - \int_b^z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' \quad (4.73)$$

où  $v_{b,z}$  se déduit de l'équation aux limites à la base (4.42).

### Résultats importants concernant la SIA0

- On note que dans le cadre des hypothèses de la SIA0 :
  - Quelque soit la profondeur  $z$  l'écoulement se fait dans la direction de la plus grande pente.
  - L'équation (4.70) ne s'intègre analytiquement que pour des calottes isothermes, ce qui représente une approximation grossière puisque la température croît avec la profondeur du fait du flux géothermique à la base. De plus, si l'on choisit la température basale comme représentative de la température sur tout le profil, ceci entraîne des déformations trop importantes dans le haut de la calotte.
- Par ailleurs, la SIA à l'ordre zéro n'est pas valable dans plusieurs cas :
  - à l'aplomb des dômes et des lignes de partage qui se caractérisent par des contraintes de cisaillement dans les plans horizontaux  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  qui sont nulles.
  - au voisinage du socle qui ne présente pas forcément les mêmes pentes que la surface avec notamment une rugosité qui peut être importante à des échelles incompatible avec la SIA0.
  - au voisinage des côtes où les pentes de la calotte deviennent trop importantes,
  - au niveau des glaciers émissaires (i.e., ice streams) dont la géométrie (la configuration de leur lit) ne permet pas d'ignorer les composantes des contraintes de cisaillement dans les plans verticaux (c.f., frottement latéral ou *latéral drag*).

- au niveau de la *grounding line* qui est la zone de jonction entre glacier émissaire (i.e., ice-stream) et plateformes de glace flottante (i.e., ice-shelves) où s'opère un changement de mode de déformation (la déformation des ice-shelves se fait essentiellement au travers de contraintes normales dans le plan horizontale).
- au niveau des plateformes de glace flottante qui se déforment en traction principalement.

### 4.3.8 Modèles d'écoulement pour dater la glace

On présente deux types de modèles pour dater la glace. Ils ont en commun d'être d'abord des modèles petite échelle (les domaines spatiales couverts correspondent au trajet de la glace depuis son dépôt jusqu'à la profondeur qu'elle occupe le long du forage aujourd'hui). Ces modèles petites échelles doivent par ailleurs recevoir de l'information de type conditions aux limites calculées par des modèles d'écoulement grande échelle qui sont thermo-mécaniquement couplés et ont pour objectif de reconstruire l'évolution de la géométrie de la calotte. On va présenter d'abord les modèles dits à *géométrie imposées* qui sont totalement découplés des modèles grande échelle tout en étant forcés par les sorties de ces derniers. On présente ensuite des modèles plus complexes où s'opèrent un "couplage" entre le modèle petite échelle et le modèle grande échelle.

#### 4.3.8.1 Modèles à géométrie imposée

Les modèles d'écoulement à géométrie imposée pour dater la glace s'articulent autour de l'équation de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur (4.48) et ils reposent sur des descriptions simplifiées de l'écoulement : i) la SIA0 ou bien ii) des écoulements 1D pour les dômes. Ces modèles d'écoulement sont dits à géométrie imposée pour deux raisons. Tout d'abord ils sont forcés sans être couplés à des modèles d'évolution de la calotte qui fournissent l'évolution des paléo-épaisseurs  $H(x, y, t)$  au cours du temps. L'évolution de ces paléo-épaisseurs (tout comme l'évolution des taux d'accumulation en surface et du taux de fusion à la base), est nécessaire pour résoudre l'équation (4.3.6) du bilan de masse intégré sur l'épaisseur de la calotte, ceci afin d'en déduire les vitesses de bilan  $\bar{U}_x$  et  $\bar{U}_y$ . Par ailleurs, ils sont dits à géométrie imposée parce connaissant les vitesses de bilan on impose le profil de vitesse (par exemple  $v_x(z)$ ). Ce profil est en particulier imposé au travers d'une approximation réalisée sur le profil de température dans la calotte que l'on choisit stationnaire et linéaire avec la profondeur. En effet, comme ces modèles ne sont pas thermo-mécaniquement couplés, ils



ne permettent pas de calculer l'évolution temporelle du profil de température dans la calotte. Or un tel profil est nécessaire pour résoudre les équations (4.66) et (4.66) qui donnent  $v_x(z)$  et  $v_y(z)$  dans le cadre de la SIA0.

Nous présentons dans la suite l'approche développée par Ritz (1992) basée sur le modèle Lliboutry (1979) pour une nappe de glace froide. On distingue le modèle qui traite l'écoulement dans une zone de pente douce, du modèle permettant de modéliser l'écoulement unidimensionnel à l'aplomb d'un dôme.

**Modèle à géométrie imposée : Ritz (1992)** Comme ce modèle est basé sur la SIA0, il n'est donc valable que dans les zones où les pentes de surface et du socle sont faibles. La direction de l'écoulement suit la ligne de plus grande pente quelque soit la profondeur (équation (4.70)). Dans le modèle Ritz (1992), la coordonnée  $x$  est une abscisse curviligne qui définit une ligne de courant le long de la ligne de plus grande pente (la caractéristique quasi-statique du mouvement permet de s'affranchir des problèmes de référentiel non inertiel). La divergence-convergence des lignes de courant est prise en compte grâce à une variable  $Y(x)$  qui décrit la largeur d'un tube de courant dont les frontières sont définies par les deux lignes de courant adjacentes à  $x$  (voir figure 4.3). On introduit dès à présent  $\xi$ , la coordonnée verticale réduite qui servira ultérieurement :

$$\xi = \frac{h - z}{H} \quad (4.74)$$

**Vitesse de bilan** L'équation de conservation de la masse permet d'écrire le bilan du flux de glace :

$$\frac{\partial H \bar{U}_x Y}{\partial x} = Y \left( \dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (4.75)$$

Ce qui peut se re-écrire :

$$\frac{\partial H \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{H}{Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \bar{U}_x = Y \left( \dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (4.76)$$

En identifiant cette dernière équation avec l'équation de continuité intégrée sur les épaisseurs (4.48) et en notant que sur la largeur  $Y(x)$ ,  $H$  ne dépend pas de  $y$ , on obtient :

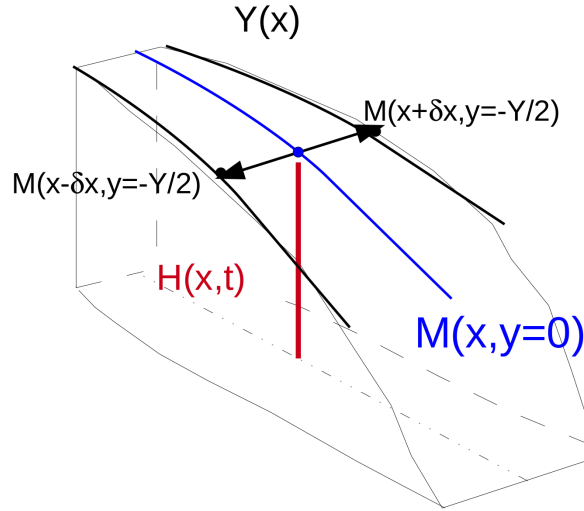


FIGURE 4.3 – La ligne de courant principale repérée par l’abscisse curviligne  $x$  et les deux lignes adjacentes  $x + \delta x$  et  $x - \delta x$  séparées par une largeur  $Y(x)$ ; l’échelle horizontale du schéma devrait être dilatée pour que la portion de calotte circonscrite par les deux “plan” de courant soit en accord avec les hypothèses sur la pente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial x} &= \frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \bar{U}_x \\ &= \frac{1}{R_c} \bar{U}_x \end{aligned}$$

où  $R_c(x)$  est le rayon de courbure des lignes de niveau (qui sont perpendiculaires à la ligne de plus grande pente).

Le rayon de courbure des lignes de niveau peut-être déduit par la topographie de surface actuelle. Si l’on impose l’évolution de l’épaisseur  $H(x, y, t)$  et si l’on connaît l’historique des paléo-accumulations et de la fusion basale, alors on peut résoudre numériquement l’équation (4.76) ce qui permet de connaître la vitesse dite de bilan  $\bar{U}_x$ .

**Profil de vitesse imposé** Cette étape consiste à réaliser des approximations qui permettent de remonter aux vitesses  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ <sup>8</sup> à partir des vitesses de bilan  $\bar{U}_x$  et  $\bar{U}_y$ . Il est indifférent d’imposer le profil de vitesse horizontal ou vertical compte-tenu de l’incompressibilité.

8. La vitesse  $v_y$  est nulle sur la ligne de courant repérée par l’abscisse curviligne  $x$ .

Comme mentionné en introduction dans la section 4.3.8.1, le modèle n'étant pas thermo-mécaniquement couplé, on ne connaît pas l'évolution du profil de température le long de  $z$ . Il est en premier lieu imposé un profil stationnaire. Par ailleurs, le profil isotherme est rejeté pour les raisons énoncées section 4.3.7.2 (on n'a donc pas de solution analytique donnant la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ). Il est choisi un profil linéaire de température dont la pente est fixée par le flux géothermique et ce choix permet de simplifier la loi d'Arrhénius  $A_\theta$  (voir équation (4.27)). Cette approximation est appelée *première approximation près du socle* et basée sur le modèle de Lliboutry (1979) pour une nappe de glace froide (on en développe quelques étapes en annexe B).

**Vitesse  $v_x$**  Dans le modèle de Lliboutry (1979) pour une nappe de glace froide et dans sa généralisation à une base tempérée, c'est le profil de la vitesse horizontale  $v_x$  qui est imposé et qui est contrôlé par la fonction de forme  $\Psi(\xi)$  :

$$v_x = \Psi(\xi)\bar{U}_x \quad (4.77)$$

avec ;

$$\Psi(\xi) = s + (1 - s)\frac{m + 2}{m + 1} (1 - \xi^{m+1}) \quad (4.78)$$

où la forme de  $\Psi(\xi)$  est définie au travers de deux paramètres :

- $s$  le taux de glissement à la base qui est le rapport entre la vitesse basale  $v_{b,x}$  et la vitesse de bilan  $\bar{U}_x$ ,
- l'exposant  $m$  qui contient de l'information sur la loi de comportement choisie au travers de l'exposant de Glen  $n$  ainsi que sur l'approximation réalisée sur  $A_\theta$  (*première approximation près du socle*) ; Cette approximation impose notamment un profil linéaire de température où la pente du profil est le gradient géothermique  $G_0^\circ\text{C}.m^{-1}$  et  $m$  s'écrit :

$$m = n + kG_0H \text{ avec } k = \frac{E_a}{R\theta_b^2} \quad (4.79)$$

Ritz (1992) souligne que la *première approximation près du socle* entraîne des températures trop froides dans le haut de la calotte ce qui amène à sous-estimer les déformations dans le haut de la calotte ; on s'en accommode puisque la déformation est concentrée dans le bas de la calotte. Par ailleurs, pour tenir compte de la production de chaleur due à la déformation interne dans les couches basales, Lliboutry (1979) propose plutôt :

$$m = n - 1 + kG_0H \quad (4.80)$$

**Vitesse  $v_y$**  La SIA0 assure que la direction des vitesses horizontales est imposée par la pente de surface quelque soit la profondeur, le vecteur vitesse est donc dans le même plan vertical tangent à la ligne de courant considérée, ce qui implique :

$$\frac{v_y \bar{U}_y(x, y)}{v_x \bar{U}_x} \quad (4.81)$$

et enfin :

$$v_y(x, y, z) = \Psi(\xi) \bar{U}_y(x, y) \quad (4.82)$$

**Vitesse  $v_z$  et taux de déformation  $D_{zz}$**  On utilise l'équation d'incompressibilité (4.36) se qui permet d'obtenir la vitesse de déformation  $D_{zz}$  le long de l'axe  $z$  et avec l'équation (4.77) on a :

$$\begin{aligned} D_{zz} &= -\frac{\partial \Psi(\xi) \bar{U}_x}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(\xi) \bar{U}_y(x, y)}{\partial y} \\ &= -\bar{U}_x \frac{\partial \Psi(\xi)}{\partial x} - \Psi(\xi) \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} - \Psi(\xi) \frac{1}{Rc(x)} \bar{U}_y \end{aligned}$$

On obtient la vitesse  $v_z$  en intégrant l'équation précédente depuis la surface jusqu'en  $z$  en utilisant l'équation aux limites en surface 4.40 :

$$\begin{aligned} v_z(x, z) &= \left( \dot{b} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \left[ 1 - \int_0^\xi \Psi(\xi') d\xi' \right] + \bar{U}_x \Psi(\xi) \left[ \xi \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\ &\quad - \bar{U}_x H \left[ \frac{\partial s}{\partial x} \int_0^\xi \frac{\partial \Psi(\xi')}{\partial s} d\xi' + \frac{\partial m}{\partial x} \int_0^\xi \frac{\partial \Psi(\xi')}{\partial m} d\xi' \right] + \int_0^\xi \Psi(\xi') d\xi' - \frac{\partial b}{\partial t} \end{aligned}$$

Les différents termes de cette équation s'intègrent analytiquement et on renvoie le lecteur vers Ritz (1992) (ou encore Parrenin *et al.* (2004) qui ont repris ces équations.

**Modèle à géométrie imposée, cas des dômes : Ritz (1992)** A l'aplomb d'une ligne de partage ou d'un dôme, les vitesses horizontales sont nulles ainsi que la contrainte  $\tau_{xz}$ . On ne peut plus négliger les contraintes longitudinales  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{zz}$  devant  $\tau_{xz}$ . Plusieurs auteurs ont traité ce problème avec des approches et des approximations différentes (Ritz, 1980; Raymond, 1983; Dahl-Jensen, 1989). Leurs résultats montrent que la déformation est prépondérante dans le haut de la calotte contrairement à l'écoulement à l'aplomb d'une pente douce. Cependant, ce problème particulièrement complexe ne peut être résolu rigoureusement que dans le cadre des équations Full-Stokes. Ritz (1992) remarque qu'il est inutile d'avoir un modèle spécifique aux dômes dans le cadre des modèles d'évolution car les dômes et les lignes de partage sont des configurations marginales sur l'ensemble de la calotte. En revanche, dans le cadre de la datation des forages situés à l'aplomb d'un dôme, un modèle spécifique est essentiel<sup>9</sup>.

Le modèle Ritz, 1992 se borne à reprendre les équations développées dans le cadre de l'écoulement à l'aplomb d'une pente douce, c'est-à-dire les équations (4.83) et (4.83) donnant la vitesse  $v_z$  et le taux de déformation  $D_{zz}$ . Cependant, pour tenir compte du régime de déformation particulier aux dômes, Ritz (1992) donne une valeur plus faible à l'exposant  $m$  de la fonction de forme afin de forcer un amincissement plus important dans le haut du forage.

**Datation des forages avec les modèles à géométrie imposée** Les modèles à géométrie imposée présentés dans les deux derniers paragraphes ont été appliqués à la datation des forages profonds. Parrenin *et al.* (2001) ont développé une technique inverse basée sur un échantillonnage de Monte Carlo (Monte Carlo Markov Chain), permettant d'identifier les paramètres mal contraints de ces modèles à géométrie imposée. Ce travail a permis dans un premier temps de produire la datation Vn-FGT1 pour le forage de Vostok (Parrenin *et al.*, 2004) sur la base des équations de l'écoulement développées dans le paragraphe 4.3.8.1. Ultérieurement, la technique inverse (Parrenin *et al.*, 2001) a été adaptée aux forages à l'aplomb d'un dôme sur la base des équations de l'écoulement développées dans le paragraphe 4.3.8.1. Ce travail a été utilisé pour produire la datation EDC2 du forage d'EPICA Dome C (EDC) (EPICA Community Members, 2004). Par la suite, avec un formalisme légèrement modifié mais toujours sur la même base d'équations, Parrenin *et al.* (2007a) ont optimisé par méthode inverse, les datations des forages de Dome Fuji (DF) et de EDC.

---

9. Les configurations de type dôme sont particulièrement recherchées afin d'obtenir des enregistrements polaires qui remontent le plus loin possible dans le passé.

Connaissant le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  ou le champ du tenseur des vitesses de déformation, la datation des particules le long du forage se fait alors par rétro-trajectoires. On peut distinguer deux approches :

- Pour dater les particules de glace  $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$  positionnées en  $\mathbf{r}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^T$  le long du forage aujourd'hui à  $t = t_0$ , une première technique consiste à suivre les rétro-trajectoires de ces particules jusqu'à ce qu'elles rencontrent la surface  $h(x, y, t)$ . En effet, à  $t - dt$  la particule en  $\mathbf{r}_0$  aujourd'hui se trouve en  $\mathbf{r}_0 - d\mathbf{r}$  avec :

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)dt \quad (4.83)$$

Le temps que met la particule à rencontrer la surface correspond à l'âge de la particule en  $Z_0$  le long du forage  $\Psi(Z_0)$ . On obtient donc au final le profil d'âge des particules le long du forage. A partir de ce dernier, on déduit l'épaisseur des couches annuelles  $L(Z)$  et à l'aide d'un modèle d'accumulation donnant  $A(Z)$  (voir section 4.2), on reconstruit la fonction d'amincissement  $T(Z)$ .

- Une méthode alternative consiste à reconstruire la fonction d'amincissement  $T(Z)$  en utilisant le champ du tenseur des vitesses de déformation  $D_{zz}$  (par exemple équation (4.83)) et en notant que si l'épaisseur de la particule de glace en  $\mathbf{r}_0 = (X_0, Y(0), Z_0)^T$  le long du forage aujourd'hui à  $t = t_0$  est  $\Delta Z(t_0)$ , alors à  $t - dt$  son épaisseur est :

$$\Delta Z(t_0 - dt) = \Delta Z(t_0) \times (1 + D_{zz}dt) \quad (4.84)$$

Connaissant la fonction d'amincissement  $T(Z)$  et à l'aide d'un modèle d'accumulation donnant  $A(Z)$  (voir section 4.2), on reconstruit le profil d'âge  $\Psi(Z)$  le long du forage.

### La nécessité d'un modèles d'évolution de la calotte pour reconstruire $H(x, y, t)$

Il ne faut pas perdre à l'esprit que les modèles à géométrie imposée que nous avons décrits utilisent les sorties d'un modèle 3D thermo-mécaniquement couplé développé par Ritz *et al.* (2001). Néanmoins, pour s'affranchir du modèle Ritz (1992) qui est coûteux en temps de calcul, Parrenin *et al.* (2007a) a développé un modèle phénoménologique qui calcule des variations d'épaisseurs calées sur les sorties du modèle Ritz *et al.* (2001). Pour plus de détail, on renvoie le lecteur intéressé à ces références.

### 4.3.8.2 Modèles couplés grande échelle petite échelle pour dater la glace

Huybrecht et Wolde, 1999 et Huybrechts (2002) ont développé un modèle 3D grande échelle thermo-mécaniquement couplé calotte de glace-plateformes flottantes-lithosphère qui est forcé par les changements de niveau des mers et tient compte des modes de déformation différents pour la glace posée (approximation SIA0) et pour la glace flottante (contrainte normales dans le plan horizontale). On le note LSM pour *Large Scale Model*. Parallèlement, Pattyn (2003) a développé un modèle d'écoulement 3D thermo-mécaniquement basé sur l'approximation SIA d'ordre supérieur (ordre 2). On le note FSM pour *Fine Scale Model*. En particulier, dans l'approximation hydrostatique (parfois appelée glaciostatique, voir annexe A) les termes suivants ne sont pas négligés :

- les gradients horizontaux des contraintes déviatoriques normales  $\tau_{xx}^d, \tau_{yy}^d$ ,
- les gradients horizontaux des contraintes de cisaillement  $\tau_{xy}$  (agissant sur les plans verticaux).

Cette approche doit permettre de modéliser plus fidèlement, les vitesses : i) aux dômes, ii) au niveau des ligne de partage, iii) dans les zones où les pentes de surface sont fortes (par exemple près des marges) et iv) dans les zones avec un socle présentant des reliefs importants.

Huybrechts *et al.* (2007) ont “couplé” le modèle grande échelle LSM et le modèle petite échelle FSM afin de dater le forage de EPICA Dronning Maud Land. Cette approche se justifie car la région de Dronning Maud Land est caractérisée par des pentes importantes et des perturbations prononcées au niveau du socle (Rotschky *et al.*, 2004) avec des particules de glace qui ont fait un trajet de plus de 200 km pour les plus vieilles (Huybrechts, 2002). Le FSM calcule uniquement les champs de vitesses 3D  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  par une méthode itérative (puisque'il est couplé thermo-mécaniquement). Le couplage entre le LSM et le FSM ne se fait que dans une direction<sup>10</sup> et il consiste à la transmission des grandeurs suivantes :  $\theta(x, y, z, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $h(x, y, t)$ ,  $H(x, y, t)$  ainsi que les vitesses horizontales aux niveau des limites latérales du domaine associé au FSM.

## 4.4 Modèles de densification de la colonne neige-névé

On rappelle que la neige et le névé sont des milieux poreux ouvert sur l'atmosphère. Les modèles de densification ont pour objectif de reconstruire le profil de densité  $\rho(Z)$  dans la

---

10. Le terme couplé est probablement impropre puisque l'échange d'information ne se fait que du modèle grande échelle vers le modèle petit échelle.

colonne de neige-névé et d'estimer l'âge de la glace à la profondeur de fermeture des pores, c'est-à-dire à peu près l'âge du gaz piégé.

Sowers *et al.* (1992) distingue trois zones dans la colonne de neige-névé (voir figure 4.4)

1. Une *zone convective* où les gaz subissent des phénomènes de “brassage”.
2. Une *zone diffusive* où les mouvements d'ensemble du gaz cessent et la diffusion moléculaire assure la majorité des échanges entre l'atmosphère et le gaz au sein des pores ouverts. Dans cette zone, s'opère également une stratification des gaz en fonction de leur masse moléculaire sous l'effet de la gravitation : les molécules les plus lourdes se trouvant préférentiellement dans le fond de la colonne diffusive. A ce fractionnement gravitationnel peut enfin s'ajouter un fractionnement thermique lorsqu'un gradient de température s'établit entre la surface et le fond de la colonne diffusive (ceci suite à une brusque variation de température en surface ; le temps caractéristique de la variation devant être inférieur au temps caractéristique de diffusion de la chaleur dans la matrice de neige-névé). Les molécules les plus lourdes s'accumulent alors dans la zone la plus froide de la colonne diffusive.
3. Une *zone non diffusive* où les mécanismes de diffusion moléculaire cessent. Le bas de cette zone correspond à la profondeur de *fermeture des pores théorique* communément appelée *close-off depth* et notée COD. Cette profondeur marque la transition entre le névé et la glace. La COD s'étend a priori de 50 et 120m suivant les conditions d'accumulation et de température.

Le terme de *zone convective* semble impropre et il est préférable d'employer le terme de *zone de mélange* car les phénomènes de convection n'ont pas été clairement mis en évidence. Le brassage des gaz en surface peut avoir plusieurs origines dont deux clairement identifiées (Laurent Arnaud, communication personnelle) :

1. brassage par convection thermique liée aux gradients de température journaliers importants (sur une épaisseur de l'ordre de 1 mètre) ainsi qu'aux gradients de température saisonniers (sur une épaisseur de quelques mètres) ;
2. brassage par action mécanique du vent sur les rugosités de surface (phénomènes de *wind pumping*) (Colbeck, 1989).

Les effets réels de ces processus sur les couches d'air sont difficiles à modéliser. Cette zone est encore mal caractérisée. Certains travaux suggèrent qu'elle peut varier de 0m (EDC) à une dizaine de mètres (Vostok, Dome Fuji) et notamment varier avec les régimes climatiques



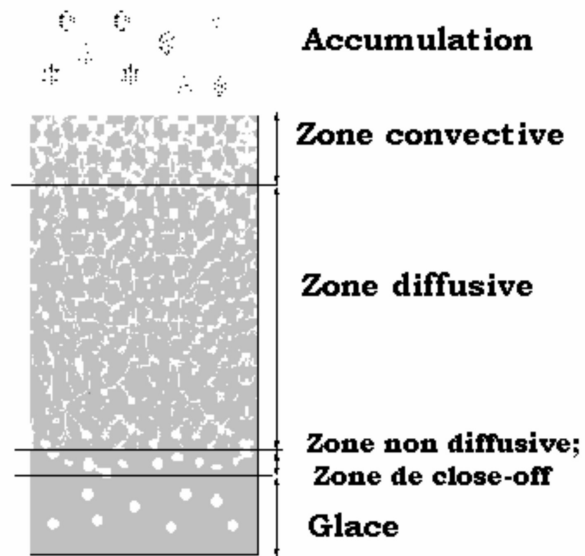


FIGURE 4.4 – Colonne de névé et les trois zones définies par Sowers *et al.* (1992).

Landais *et al.* (2006a) (voir figure 4.5). De la même façon, l'épaisseur de la zone *non diffusive* est variable notamment en fonction des conditions de température et d'accumulation (voir figure 4.5).

Dans le cadre des modèles glaciologiques de datation du gaz, c'est la COD qui nous intéresse car c'est le processus de fermeture des pores sous la surface de la calotte qui est à l'origine du *delta-age*. Les modèles de densification définissent la COD sur un critère de densité du névé. On peut estimer la densité relative  $D_c$  (où la densité absolue  $\rho_c$ ) de la matrice de névé lorsque les pores se sont fermés (il s'agit d'une densité moyenne). Cette estimation repose sur la porosité à la fermeture des pores (ou *porosité au close-off*) notée de  $V_c$  qui est le volume des pores par unité de masse de glace. On peut estimer  $V_c$  de deux manières :

1. soit à partir d'une relation empirique établie par Martinerie *et al.* (1999) entre la porosité au close-off  $V_c$  et la température du site  $\theta_s$  :

$$V_c = 6.95 \times 10^{-4} \theta_s (\text{K}) - 0.043 (\text{cm}^3 \text{g}^{-1}) \quad (4.85)$$

2. soit à partir de la *teneur en air*  $V$  que l'on mesure sur les échantillons de glace et qui est le volume des pores par unité de masse de glace ramené à des conditions standards de pression et de température (notées  $P_0$  et  $T_0$ ). La mesure de  $V$  nécessite cependant de connaître  $P_c$  et  $T_c$  la pression et la température en moyenne au moment de la fermeture

des pores<sup>11</sup>. A cette condition, on peut alors écrire (relation des gaz parfaits) :

$$V_c = \frac{P_0 T_c}{P_c T_0} V \quad (4.86)$$

Finalement, avec  $\rho_{ice}$  la densité de la glace, on obtient  $D_c$  par :

$$D_c = \frac{1}{V_c \rho_{ice} + 1} \quad (4.87)$$

Il est plus juste de parler d'une zone de fermeture de pores plutôt que d'une profondeur de fermeture des pores. Les nombreux pores que renferme un échantillon de glace ne se sont ni fermés simultanément, ni à la même profondeur, ni à la même densité  $\rho$ <sup>12</sup>. Le delta-age calculé par les modèles de densification est donc un âge moyen. Par ailleurs, si l'épaisseur de la zone non-diffusive est importante, l'incertitude sur le delta-age augmente car les modèles de densification calcule une COD qui se trouve entre le sommet et la base de la zone non-diffusive.

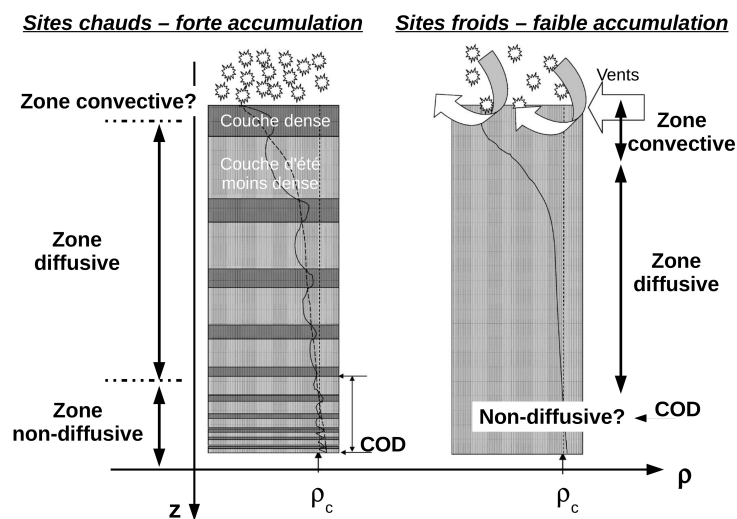


FIGURE 4.5 – Colonne de névé et les trois zones définies par Sowers *et al.* (1992).

La densification de la colonne neige-névé s'effectue sous l'action conjointe de la *température* et de la *pression* due à la charge. Ces modèles distinguent deux régimes de densification. Le premier opère dans la partie dite "*neige*" ou *névé non consolidé* avec des processus de

11. Si le thermomètre isotopique permet d'estimer  $T_c$  sur des hypothèses de transfert de chaleur instantané entre le haut et le bas de la colonne de névé, l'estimation de  $P_c$  est relativement complexe puisqu'elle dépend à la fois des changements de pression climatique mais surtout des changements de pression dus aux variations d'altitude dans le passé.

12. On note aussi que les processus de diffusion des molécules dans la colonne de neige-névé ne sont pas instantanés.

glissement-réarrangement des grains jusqu'à une densité relative de l'ordre de  $D \sim 0.6$ . Le second régime opère dans la partie dite *névé* qui est défini à partir du moment où les mécanismes de glissement-réarrangement des grains sont bloqués et où les processus de déformation plastique des grains deviennent prépondérant. A la transition névé-glace correspond, la densité relative atteint la valeur  $D_c$  de l'ordre de 0.8.

Herron et Langway (1980) ont développé un modèle empirique qui décrit les profils de densité de toute la colonne de neige-névé-glace. Piementa et al, 1987 ont décrit mécaniquement la déformation viscoplastique de la couche de glace entourant les porosités (cylindriques dans la zone de *close-off* puis sphériques dans la glace). Ces travaux ont permis une modélisation physique de la densification du névé et de la glace. Cependant, la description de la géométrie du milieu et de son évolution dans le névé très poreux reste complètement empirique (et donc adaptée aux conditions climatiques actuelles : accumulation, température). Arnaud *et al.* (2000) ont amélioré le modèle de Piementa et al, 1987 en incorporant une description physique de l'évolution de la structure du névé pendant sa densification. Cette description de la structure (ou géométrie) est issue des modélisations du frittage sous pression des céramiques. L'intérêt d'avoir des modèles physiques de densification réside dans la possibilité d'obtenir des profils de densité pour des conditions climatiques différentes de la période actuelle (Laurent Arnaud, communication personnelle). Goujon *et al.* (2003) a ajouté au modèle Arnaud *et al.* (2000) les processus de transfert de chaleur (advection et diffusion) qui ont un impact sur la densification en particulier lors des variations rapides de température. Enfin, récemment Salamatin *et al.* (2007) a proposé un modèle proche de celui de Goujon *et al.* (2003) qui fait coexister simultanément de la surface jusqu'à la fermeture des pores, les régimes de glissement-réarrangement et de déformation plastique des grains. Le point faible des modèles de densification actuels reste la zone de neige proche de la surface où les processus de métamorphose des grains de neige (notamment sous l'action des gradients de température) conditionnent la géométrie initiale du milieu et par ce biais la densification dans cette zone (Laurent Arnaud, communication personnelle). Dans la suite, on décrit le modèle de Arnaud *et al.* (2000) section 4.4.1 puis le modèle de Goujon *et al.* (2003) section 4.4.2.

#### 4.4.1 Modèles de densification Arnaud *et al.* (2000)

Arnaud *et al.* (2000) a développé un modèle de densification de la colonne de neige-névé qui s'appuie sur les connaissances du frittage des poudres métalliques ou céramiques. Ce

modèle est développé pour des conditions stationnaires de température et d'accumulation et il y décrit deux stades de densification :

- **Le glissement des grains et réarrangement de l'empilement** : i) après dépôt de la neige sans cohésion, les grains s'arrondissent sous l'effet du vent et des différences d'énergie de surface; il y a un transport de matière sous l'effet de la sublimation-condensation dans le gradient thermique dès les premiers mètres; il y a déjà création de joints inter-grains (zone de contact); ii) Sous l'effet du poids de la neige qui s'accumule, il y a tassement par glissement des grains; la densité du matériau augmente. Arnaud (1997) note qu'à la différence des poudres, la pression réelle au niveau des points de contact entre grain est déjà importante car ce tassement s'effectue déjà à haute température (par rapport au point de fusion de glace) et en conséquence des mécanismes de frittage commencent avant que l'empilement ait atteint sa compacité maximale théorique.
- **La déformation plastique au niveau des points de contact** : à une densité relative  $D$  voisine de 0.6 (ce qui correspond à une densité  $\rho$  de  $0.55 \text{ g.cm}^{-3}$ ) le réarrangement par glissement devient impossible car le nombre de coordination est proche de 6 (nombre de voisins en contact avec un grain donné). La pression effective au niveau des joints de grains devient très importante du fait de la charge croissante et les joints de grains se déforment alors plastiquement avec un déplacement de matière par glissement des dislocations. Ce mécanisme de déformation est non linéaire avec la charge. La limite inférieure du névé est atteinte quand toutes les porosités du matériau qui étaient ouvertes sur l'atmosphère se referment.

Ces deux stades sont décrits en suivant l'évolution de la densité relative  $D(t) = \rho(t)/\rho_i$  au cours du temps :

1. Alley (1987) ont proposé pour décrire les mécanismes de glissement-réarrangement des grains de neige, une vitesse de densification linéaire avec la charge :

$$\frac{dD}{dt} = \gamma \frac{\dot{b}gt}{D^2} \left(1 - \frac{D}{D_1}\right) \quad (4.88)$$

où :

- $t$  est le temps (par exemple en années),
- $\dot{b}$  est le taux d'accumulation (par exemple en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{an}^{-1}$ ) et  $\dot{b}gt$  est la pression due à la charge,
- $\gamma = (2\lambda R)/(15vr^2)$ , où  $R$  et  $r$  sont respectivement les diamètres des grains et des

joints de grains ,  $v$  est la viscosité des joints de grains et  $\lambda$  l'épaisseur de la liaison visqueuse entre les grains,

- $D_1$  est la densité relative maximale obtenue dans le cas d'un empilement parfait de sphères.

2. Artz (1982) propose une fonction décrivant l'évolution de la géométrie pendant la densification. Cette fonction est incorporée à un mécanisme de déformation viscoplastique des zones de contact (entre grains) pour aboutir à la vitesse de densification suivante (non linéaire avec la charge) :

$$\frac{dD}{dt} = 5.3A(D^2 D_0)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{P^*}{3\sigma_0}\right)^n \quad (4.89)$$

où :

- $A$  une loi d'Arrhenius où  $Q$ ,  $\theta$  et  $R$  sont l'énergie d'activation, la température et la constante des gaz parfaits :

$$A = 7.89 \times 10^3 \exp\left(\frac{-Q}{R\theta}\right) \quad (4.90)$$

- $P^*$  est la pression effective qui s'applique une surface de contact d'aire moyen  $a$  (par unité de  $l^2$ ,  $l$  étant le rayon initial de la particule considérée),  $P$  étant la pression due à la colonne de glace,  $Z$  le nombre de coordination à la densité  $D$  :

$$P^* = \frac{4\pi P}{aZD} \quad (4.91)$$

- $n$  est l'exposant de la contrainte supposé égal à 3,
- $Z$  et  $a$  sont calculés en fonction de  $D$  à partir d'équations définies dans Artz (1982).

La transition entre les régimes de densification de type "neige" et de type "névé" est défini avec une valeur de densité critique notée  $D_0$  qui correspond à un changement global du mécanisme de densification prépondérant : passage du réarrangement par glissement à la déformation viscoplastique des zones de contact entre grains. Localement les deux mécanismes coexistent et la transition est progressive. On note que les asymptotes de ces deux régimes sont différentes, ce qui génère une discontinuité de la densité  $D$  qui pourrait être évitée en faisant coexister localement dans la partie "neige", les deux mécanisme de densification.

La densité critique  $D_0$  peut-être estimée sur la base de la relation empirique observée par Arnaud (1997) avec la température en moyenne annuelle du site  $\theta_s$  :

$$D_0 = 2.26 \times 10^{-3} \theta_s \text{°C} + 0.03 \quad (4.92)$$

La transition névé-glace s'opère lorsque la densité  $D$  atteint la densité au close-off  $D_c$  qui peut être estimée empiriquement sur la base de l'équation (4.87).

Arnaud (1997) mentionne bien la coexistence des mécanismes de déformation par frittage pendant le régime de glissement-réarrangement. Certains auteurs Salamatin *et al.* (2007) ont modélisé des vitesses de densification mettant en jeu la loi de Artz et de Alley simultanément ; si ceci résout le problème de la discontinuité de  $D$ , il n'est pas certain que l'asymptote commune soit pour autant une valeur physique. Si l'on souhaitait modéliser rigoureusement la coexistence des deux régimes de densification lors du premier stade, il faudrait mettre en place un modèle micro-macro qui définisse une population de grains dans un état initial, population dont on suivrait l'évolution de la microstructure (nombre de coordination, surface des points contact, pression effective au point de contact,...) au cours du temps. Les grandeurs macro seraient alors déduites sur la base de statistiques (communication personnelle, Laurent Arnaud). En effet, lors du premier régime chaque grain expérimente alternativement des mécanismes de densification par glissement-réarrangement et des mécanismes de densification par déformation plastique. Au cours de ce premier régime, il se forment entre grains des zones de contact de faible superficie et sur lesquelles s'appliquent alors des pressions effectives importantes ; ces zones de contact subissent en réponse une déformation plastique qui en augmente la superficie de la zone de contact et réduit alors la pression effective ; le grain est alors libéré et peut reprendre son cycle de glissement-réarrangement. Cette alternance a lieu jusqu'à ce que le glissement soit bloqué par un nombre de coordination élevé (i.e., un nombre de coordination proche de 6).

#### 4.4.2 Modèles de densification Goujon *et al.* (2003)

Le modèle de densification de Goujon *et al.* (2003) repose sur la mécanique de densification décrite dans le modèle Arnaud *et al.* (2000) mais adapte ce dernier à des conditions non stationnaires de température et de taux d'accumulation avec une prise en compte des phénomènes d'advection-diffusion de la chaleur qui s'opèrent entre la surface et la base de la calotte. Ceci permet de calculer le profil de température la colonne de névé et de regarder en particulier l'impact d'une variation de température en surface sur le processus de densification. A la description Lagrangienne qui suit la densité relative  $D(t)$  attachée à un volume matériel de neige-névé, s'adjoint donc un problème thermo-mécaniquement couplé avec une description eulérienne 1D de la vitesse vertical  $v_z(z, t)$  et de la température  $\theta(z, t)$  sur toute l'épaisseur de la calotte depuis la surface jusqu'au socle. L'équation de la chaleur est une ver-

sion simplifiée du modèle de transfert de la chaleur développée par Ritz et al, 1989. Seul les transports de chaleur verticaux y sont décrit (diffusion et advection) et la chaleur produite par déformation est omise :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}}{\partial z} - \rho c v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (4.93)$$

Le profil de vitesse  $v_z$  est décrit à partir du modèle Lliboutry (1979) pour des nappes de glace froide et adapté dans la partie névé grâce au facteur inverse de la densité relative  $D = \rho/\rho_i$  :

$$v_z = \frac{\rho}{\rho_i} \left[ v_{h,z} - (v_{h,z} - v_{b,z}) \left( \frac{m+2}{m+1} \xi \right) \left( 1 - \frac{(\xi)^{m+1}}{m+2} \right) \right] \quad (4.94)$$

Ce modèle est forcé par l'historique du taux d'accumulation et de la température en surface (voir section ). La température et le taux d'accumulation sont reconstruits à partir de la teneur isotopique de la glace (voir sections 4.1 et 4.2). Le modèle est donc dépendant d'une chronologie glace  $\Psi$ . Ce modèle calcule en particulier.

1. le delta-age  $\Delta\chi(t)$ ,
2. la profondeur de fermeture des pores notée  $COD(t)$ ,
3. le profil de densité  $\rho(z, t)$
4. la teneur des isotopes stables  $^{15}N$  et  $^{40}Ar$  piégés dans les pores en implémentant les équations de fractionnement gravitationnel et thermique (voir section 5.2.5.1).

**Désaccord entre observations et sorties des modèles de densification** On peut citer les désaccords suivants entre observations et sorties des modèles de densification.

- Lors des transitions climatiques rapides, si le profil simulé du  $^{15}N$  est en bon accord avec les profils mesurés au Groenland ça n'est pas le cas en Antarctique. On reviendra sur cette question dans la section 5.2.5.
- En période climatique stable, les modèles de densification prédisent une augmentation de la COD entre périodes glaciaires et périodes interglaciaires. Ceci n'est pas en accord avec les mesures de  $^{15}N$  qui au travers de l'équation barométrique (5.1) présentée section 5.2.5 suggèrent une diminution de la hauteur de la colonne diffusive (Landais *et al.*, 2006a). Ce désaccord pourrait être attribué aux variations d'épaisseur des zones non-diffusives ou convectives.

# Les observations apportant de l'information chronologique

---

## 5.1 Introduction

Les observations susceptibles d'apporter de l'information sur la chronologie gaz ou glace d'un forage d'Antarctique ou du Groenland sont de nature très variée. Différentes grandeurs physico-chimiques sont mesurées le long des carottes de glace, sur la phase solide comme sur la phase gazeuse et ces mesures sont à l'origine des nombreux enregistrements polaires dont on dispose aujourd'hui. Ces enregistrements pris isolément ne suffisent pas pour dater une carotte de glace mais grâce à la confrontation avec d'autres paléo-archives, il est possible d'extraire de l'information chronologique. L'inter-comparaison des enregistrements polaires est une première source d'information chronologique. Deux sources d'information complémentaires, sont la comparaison des enregistrements polaires avec d'autres types d'archives du passé (archives marines, terrestres,...) ainsi que la technique du calage orbital, c'est-à-dire la comparaison des enregistrements avec les séries temporelles d'insolation. On peut noter que les observations présentées peuvent à la fois servir pour contraindre les modèles glaciologiques de datation mais aussi pour valider les reconstructions de ces modèles.

Dans ce qui suit (section 5.2), on présentera un inventaire non-exhaustif des grandeurs physico-chimiques mesurées le long des carottes de glace à partir desquelles il est possible d'extraire de l'information chronologique. On soulignera les qualités et limites de chacune de ces mesures. Pour ce faire, on s'attachera à spécifier : i) la nature de l'information chronologique pouvant être extraite (s'agit-il d'un âge gaz ou d'un âge glace, d'une mesure d'âge "absolu" ou bien d'âge "relatif"), ii) les hypothèses associées à cette information chronologique et iii) les domaines des carottes de glace où les mesures sont possibles et où les hypothèses restent raisonnables. On montrera au passage qu'on peut extraire de l'information chronologique de différente nature à partir d'un même type d'observation.

Dans la section 5.3, on exposera les stratégies communément utilisées de confrontation des enregistrements polaires à d'autres paléo-archives, puis dans la section 5.4, on présentera la technique du calage orbital.



Enfin on terminera ce chapitre avec la section 5.5, où on proposera une classification ad hoc des données sur laquelle on s'appuiera dans la partie III, lorsque l'on présentera l'approche inverse développée au cours de cette thèse.

## 5.2 Les observations issues de mesures sur les carottes de glace

L'inventaire présenté reflète les connaissances acquises au cours de mon travail de thèse et il n'est pas exhaustif. Certaines des observations décrites serviront dans la partie III à l'étape d'assimilation des données. Pour ces données en particulier, on rapporte l'information de la littérature qui nous paraît pertinente pour estimer les qualités et les limites des données assimilées.

### 5.2.1 Proxy des cycles saisonniers, comptage et épaisseur des couches annuelles

Dans des sites favorables, au Groenland principalement, les cycles saisonniers sont enregistrés le long des carottes de glace. Ceci permet par comptage des couches annuelles de dater la glace mais aussi de connaître l'évolution de l'épaisseur des couches annuelles. Le comptage visuel est la technique la plus simple, la glace d'hiver est en général plus sombre que la glace d'été.

Pour appliquer cette technique de comptage, l'épaisseur des couches annuelles doit être suffisamment importante d'une part au regard de la résolution spatiale de l'appareil qui mesure les cycles (e.g., l'oeil pour le comptage visuel) et d'autre part au regard des phénomènes de diffusion qui affectent les espèces tracées (dans la colonne de neige-névé puis dans la glace solide<sup>1</sup>). Cette condition est remplie pour les forages qui présentent un bon compromis entre un taux d'accumulation important et des caractéristiques d'écoulement qui limitent l'amincissement des couches avec la profondeur. Un fort taux d'accumulation garantit une épaisseur de couche annuelle importante dans le haut des forages et limite les problèmes dus au lissage du signal par diffusion ; en revanche, dans les sections plus profondes des forages, il peut induire un amincissement rapide des couches avec la profondeur. Les sites groenlandais avec des taux d'accumulation plus importants que leurs homologues d'Antarctique sont plus adaptés à cette technique de datation stratigraphique.

---

1. Des techniques de déconvolution du signal saisonnier sont utilisées pour restaurer les cycles lissés par les phénomènes de diffusion.

On note que la technique de datation stratigraphique amène les informations chronologiques suivantes :

1. une estimation “absolu” de l’âge  $\Psi(z)$  à laquelle est néanmoins attachée une *erreur cumulative avec la profondeur*;
2. une estimation du nombre d’années  $\Delta\Psi$  associée à une couche d’épaisseur donnée  $\Delta z$ , estimation pour laquelle *l’erreur n’est pas cumulative avec la profondeur*.

Aujourd’hui, dans le sillage de la datation MeeseSowers à GISP2 (Alley *et al.*, 1997) et la récente datation GICC05 (*Greenland Ice Core Chronology 2005*), le comptage s’opère en confrontant différents traceurs physiques et chimiques des cycles saisonniers : on peut citer en particulier l’oxygène-18 de la glace  $^{18}O_{ice}$ , l’acidité, la conductivité, la concentration en poussières insolubles, certaines espèces chimiques ( $Na^+$ ,  $Ca^{2+}$ ,  $SO_4^{2-}$ ,  $NH_4^+$ ...etc).

Après l’achèvement du forage de NGRIP (North Greenland Ice Core Project members, 2004), le Greenland Ice Core Chronologies 2005 initiative a produit la datation stratigraphique appelée GICC05 impliquant les sites groenlandais DYE-3, GRIP et NGRIP ( Svensson, A. and Andersen, K.K. and Bigler, M. and Clausen, H.B. and Dahl-Jensen, D. and Davies, S.M. and Johnsen, S. J. and Muscheler, R. and Parrenin, F. and Rasmussen, S.O. and Röthlisberger, R. and others , 2008). Cette chronologie qui remonte à 60ka b2k en arrière (i.e., avant 2000, *before 2000*) repose sur un comptage multi-proxy des couches annuelles ainsi que sur une synchronisation des chronologies de DYE-3, GRIP et NGRIP, sur des événements volcaniques identifiés par ECM (i.e., Electro-Conductivity Method). Le comptage des couches a été réalisé par sections, sur le ou les forages qui présentaient les meilleures caractéristiques accumulation-amincissement ; la datation résultante a été ensuite transférée sur les autres forages (Vinther, B.M. and Clausen, H.B. and Johnsen, S.J. and Rasmussen, S.O. and Andersen, K.K. and Buchardt, S.L. and Dahl-Jensen, D. and Seierstad, I.K. and Siggaard-Andersen, M.L. and Steffensen, J.P. and others, 2006).

En particulier avant 8ka b2k, le comptage a porté sur l’enregistrement  $^{18}O_{ice}$  de DYE-3, ceci du fait du fort taux d’accumulation sur ce site et aussi du fait que cette période temporelle correspond à la zone fragile (i.e., *brittle zone*) de GRIP et NGRIP où la stratigraphie n’est plus applicable<sup>2</sup>. Au delà de 8ka b2k, un comptage multi-proxy a été réalisé sur les sites de GRIP et NGRIP avec les méthodes : *Visual Stratigraphy* ou VS (i.e., comptage visuel),

---

2. La *brittle zone* est l’intervalle de profondeurs avant la formation de clathrates où le gaz est encore piégé à forte pression dans les pores de la glace, ce qui génère des micro fractures dans la carotte remontée à pression atmosphérique.

ECM et CFA (i.e., Continuous Flow Analysis qui permet notamment de mesurer la concentration d'ions soluble  $[NH_4^+]$ ,  $[Ca^{2+}]$ ). Enfin de la transition YD-PB (Younger Dryas vers Pré-Boréal) jusqu'à 60 ka b2k, le comptage multi-proxy a été mené sur la carotte de NGRIP (Svensson, A. and Andersen, KK. and Bigler, M. and Clausen, HB. and Dahl-Jensen, D. and Davies, SM. and Johnsen, S. J. and Muscheler, R. and Parrenin, F. and Rasmussen, SO. and Röthlisberger, R. and others, 2008; Andersen *et al.*, 2006) qui offre des conditions optimales : le taux de fusion basale élevé (7 mm ice yr<sup>-1</sup>, (North Greenland Ice Core Project members, 2004)) limite en profondeur l'amincissement des couches annuelles.

GICC05 est susceptible d'apporter une information très précise en *âge relatif* et donc sur la *durée des événements* (Svensson *et al.*, 2006). La chronologie glace GICC05 fait aujourd'hui référence. On discute néanmoins ci-dessous les incertitudes qui lui sont attachées. Elles sont de source multiples :

- une rupture de la séquence stratigraphique suite à des phénomènes post-dépôts (érosion du manteau neigeux par le vent, sublimation, fonte) ou bien à l'irrégularité des précipitations ;
- une perte de glace lors des étapes de carottage, de découpe, d'échantillonnage ;
- une résolution des couches insuffisante même après déconvolution des signaux ;
- une interprétation erronée des signaux saisonniers conduisant à un biais sur l'âge absolu, si elle est systématique.

Pour l'Holocène, Vinther, BM and Clausen, HB and Johnsen, SJ and Rasmussen, SO and Andersen, KK and Buchardt, SL and Dahl-Jensen, D. and Seierstad, IK and Siggaard-Andersen, ML and Steffensen, JP and others (2006) rapportent que l'erreur due à une mauvaise interprétation des enregistrements est prépondérante sur l'incertitude associée à la rupture de la séquence stratigraphique ou à la perte de données. Les auteurs mettent en évidence l'absence de biais sur cette période en confrontant la datation GICC05 avec des horizons volcaniques datées indépendamment. Entre 15 et 42ka Andersen *et al.* (2006) signalent que les problèmes de résolution des couches et de mauvaise interprétation des signaux sont plus importants pendant les périodes glaciaires et proposent d'explorer le biais à l'aide d'horizons repères ou bien par confrontation de la datation GICC05 avec d'autres chronologies.

Les auteurs proposent une estimation de l'incertitude sur la datation GICC05 qui repose sur la comptabilisation des couches annuelles ambiguës. Ils introduisent une grandeur appelée *Maximum Counting error* ou erreur maximale de comptage (MCE, Rasmussen *et al.* (2006); Andersen *et al.* (2006)) où toute couche incertaine est comptabilisée comme  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$  année.

Cette approche implique par exemple une MCE de 1450 années à 38.2 ka (début du DO8 c'est-à-dire l'évènement Dansgaard-Oeschger numéro 8), ce qui signifie un décompte de 36750 couches annuelles certaines contre 2900 couches incertaines. Andersen *et al.* (2006) proposent de considérer la MEC comme une incertitude normale de  $2\sigma$  bien que la MCE permette plutôt de dériver une valeur minimale et maximale de l'âge d'une couche. Rasmussen *et al.* (2006); Andersen *et al.* (2006) montrent que la MCE surestime probablement une véritable erreur normale de  $2\sigma$  mais soulignent la difficulté de la quantifier du fait que la *corrélacion d'erreur* affectant des couches incertaines successives reste mal connue. Ils observent néanmoins que plus ces corrélacions d'erreur (positives) s'opèrent sur une large période temporelle plus la MCE s'approche d'une véritable erreur normale de  $2\sigma$ .

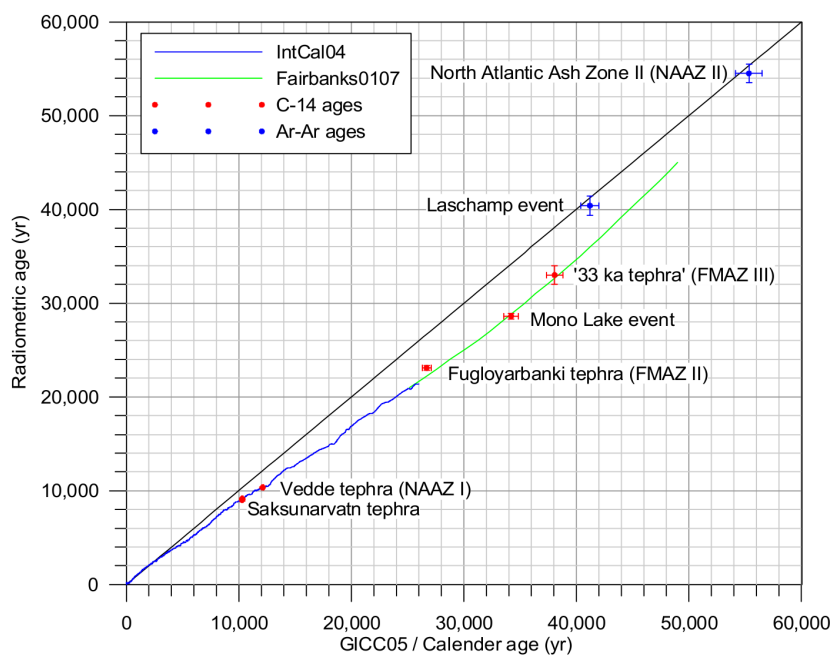


FIGURE 5.1 – Comparaison des âges GICC05 d'horizons volcaniques et géomagnétiques (identifiés le long de la carotte de NGRIP) avec les âges de ces mêmes évènements datés indépendamment par méthode radiométrique  $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$  (horizons Laschamp et NAAZ II) ou  $^{14}\text{C}$  (les autres horizons). Les âges  $^{14}\text{C}$  sont issus de la calibration IntCal04 (Reimer *et al.*, 2004) and Fairbanks0107 (Fairbanks *et al.*, 2005). Les barres d'erreur sont  $1\sigma$ . Si la datation GICC05 est en accord avec les âges  $^{14}\text{C}$  calibrés alors les horizons doivent être sur la courbe de calibration. Si la datation GICC05 est en accord avec les âges radiométriques  $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$  alors les horizons doivent être sur la droite de pente 1. Extrait de Svensson, A. and Andersen, K.K. and Bigler, M. and Clausen, H.B. and Dahl-Jensen, D. and Davies, S.M. and Johnsen, S. J. and Muscheler, R. and Parrenin, F. and Rasmussen, S.O. and Röthlisberger, R. and others (2008).

Svensson *et al.* (2006); Svensson, A. and Andersen, KK. and Bigler, M. and Clausen, HB. and Dahl-Jensen, D. and Davies, SM. and Johnsen, S. J. and Muscheler, R. and Parrenin, F. and Rasmussen, SO. and Röthlisberger, R. and others (2008) ont comparé l'échelle d'âge GICC05 avec des horizons repères et des chronologies calculées indépendamment de sorte d'explorer un biais potentiel. Le travail de Svensson *et al.* (2006); Svensson, A. and Andersen, KK. and Bigler, M. and Clausen, HB. and Dahl-Jensen, D. and Davies, SM. and Johnsen, S. J. and Muscheler, R. and Parrenin, F. and Rasmussen, SO. and Röthlisberger, R. and others (2008) semble confirmer que la MCE surestime une véritable erreur normale de  $2\sigma$  :

1. Les horizons repères sont représentés par des couches de cendre et les événements géomagnétiques de Laschamp et de Mono Lake identifiés notamment dans des archives marines. Ces horizons repères sont datés par méthode radiométrique ( $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$  ou  $^{14}\text{C}$ ) (voir Figure 5.1).
2. Les datations indépendantes auxquelles GICC05 est comparée sont :
  - l'échelle d'âge GRIP SFCP04 (Shackleton *et al.*, 2004),
  - l'échelle d'âge GISP2 Meese-Sowers,
  - les échelles d'âge dérivés de spéléothèmes (Wang *et al.*, 2001),
  - l'échelle d'âge de NGRIP modélisée (North Greenland Ice Core Project members, 2004).

GICC05 et son incertitude  $1\sigma = \text{MCE}/2$  s'avère être cohérente avec ces datations à l'exception de la datation GRIP SFCP04 entre le DO3 et le DO1 et la datation GISP2 au-delà de 40ka b2k, datations qui seraient moins précises.

Avant que GICC05 soit estimée, Southon (2004) a exploré la pertinence d'une calibration  $^{14}\text{C}$  au moyen de la datation stratigraphique de GISP2 par rapport à une calibration  $^{14}\text{C}$  basée sur le comptage des cernes d'arbres (i.e., dendrochronologie). La constitution d'une couche annuelle de glace étant le résultat de plusieurs épisodes de dépôt à l'inverse de la formation d'une cerne d'arbre, Southon (2004) conclut que les incertitudes de comptage des cycles saisonniers sont vraisemblablement importantes dans le cas des carottes de glace. Mais ces conclusions sont sans doute à revoir, car GICC05 constitue une amélioration par rapport à GISP2. De plus, au-delà de 12 ka la dendrochronologie n'est plus en mesure de contraindre la calibration des âges radiométriques  $^{14}\text{C}$ , faute d'arbres assez vieux (Reimer *et al.*, 2004). Il faut alors faire référence aux datations des sédiments marins impliquant cette fois-ci des hypothèses (et potentiellement des erreurs) sur les âges réservoirs.

### 5.2.2 Couches de cendre ou téphra

On retrouve parfois dans la glace, la trace de certains évènements volcaniques sous la forme de couches de cendre (i.e. : les téphra) constituées de verre volcanique et d'éléments minéralogiques. La signature géochimique des téphra permet quelque fois d'identifier la source ou la province volcanique (Basile *et al.*, 2001; Narcisi *et al.*, 2005). Si le volcan en question a été étudié et si des datations de l'évènement sont disponibles, l'information chronologique peut-être transférée à la glace. Il est important de noter que les méthodes radiochronologiques ne peuvent pas être réalisées sur la glace car le matériel (e.g. cendres) est peu abondant. Cette confrontation d'archives donne lieu à :

1. de l'*information chronologique relative* lorsque la signature géochimique d'une même éruption est identifiée au sein de plusieurs carottes (polaires, marines ou sédimentaires) ; on dispose alors de *liens stratigraphiques* (i.e., marqueurs régionaux) qui permettent de synchroniser les enregistrements.
2. de l'*information chronologique "absolue"* lorsque certaines éruptions volcaniques documentées géochimiquement sont de surcroît datées par méthodes radiochronologiques (comme la méthode  $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ ), dans ces conditions si la signature géochimique de l'éruption est retrouvée le long d'une carotte de glace alors on dispose de véritables *marqueurs d'âge*.

On peut citer pour exemple les travaux de Narcisi *et al.* (2005). Ils ont étudié les téphra des forages de Dome Fuji (DF), de EDC et de Vostok et réalisé un inventaire des éruptions. En particulier, leurs travaux ont mis en évidence le lien stratigraphique 1265.1 m et 1361.89 m entre EDC et DF et attribué au Mt Berlin (volcan de la province Marie Byrd Land). Ultérieurement, les géologues ont daté cet évènement à  $92 \pm 2$  ka, apportant ainsi un âge "absolu" à la glace.

On notera par ailleurs l'intérêt de la province volcanique du Marie Byrd Land (MBL) située en Antartique de l'Ouest. Cette province héberge le site du Mount Moulton qui constitue à lui seul un catalogue à ciel ouvert des éruptions passées du Mont Berlin. En effet, la topographie du site qui entrave en pleine zone d'ablation l'écoulement vers les marges, a ramené à la surface de la glace bleue comportant d'épaisses couches de cendre. Certaines de ces couches ont été datées par Dunbar *et al.* (2008).

Un évènement associé au Mont Berlin a récemment permis de proposer un nouveau marqueur d'âge glace pour le forage de Vostok. Sur la base d'étude géochimique (Basile

*et al.* (2001); Narcisi *et al.* (2005) et Narcisi non-publié), il est proposé que la couche de cendre à 2003.90 m corresponde à la couche de cendre datée par Dunbar *et al.* (2008) à  $135 \pm 0.9$  ka avec une méthode  $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ .

### 5.2.3 Sulfate, charge acide et conductivité de la glace

Les volcans explosifs émettent des quantités importantes de  $\text{SO}_2$  dans l'atmosphère. Le  $\text{SO}_2$  se retrouve dans la neige et la glace polaires, après oxydation et transport dans la stratosphère sous forme d'acide sulfurique ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ). Si le volcan est connu (éruption du dernier millénaire), ces événements peuvent constituer des *marqueurs d'âge* "absolu". Dans le cas contraire, ces événements peuvent constituer des *liens stratigraphiques* entre forages (e.g., marqueurs régionaux). Les pics d'acidité sont détectés directement sur la glace par méthodes électriques (ECM ou *Electro-Conductivity Method* pour la conductivité, DEP ou *Dielectric Profiling* pour les propriétés diélectriques) ou par analyse chimique (chromatographie ionique).

La glace renferme du sulfate d'origine non-volcanique : la première source étant le sulfate issu des sels de mer (on peut néanmoins le quantifier grâce à la concentration de  $\text{Na}^+$  dans la glace), la seconde source étant biogénique (photoxydation du phyto-plancton). On reconnaît le sulfate d'origine volcanique parce qu'il se présente sous forme de pics au dessus d'un bruit de fond.

Au Groenland dans le cadre de GICC05, on a déjà souligné les travaux de Vinther, BM and Clausen, HB and Johnsen, SJ and Rasmussen, SO and Andersen, KK and Buchardt, SL and Dahl-Jensen, D. and Seierstad, IK and Siggaard-Andersen, ML and Steffensen, JP and others (2006) qui ont synchronisé par la mesure de pics de conductivité, les échelles d'âge glace des forages DYE-3, GRIP et NGRIP, cette méthode de synchronisation ayant été en plus associée par un comptage des couches annuelles entre deux pics de conductivité successifs.

Pour l'Antarctique, parmi les travaux qui sont d'intérêt pour notre thématique, Udisti *et al.* (2004) ont établi 126 liens stratigraphiques avec des pics de sulfate et 19 liens ECM entre les carottes de EDC et de Vostok. Par ailleurs, Severi *et al.* (2007) ont réalisé une synchronisation basée sur le sulfate entre les forages EDC et EDML sur une période de 52 ka BP, et ils ont vérifié la cohérence entre les événements éruptifs récents (e.g. : le Krakataua en 1884, le Tambora en 1815,...) et la chronologie par comptage des couches annuelles. Les auteurs discutent par ailleurs la fiabilité de la synchronisation suivant les fenêtres temporelles.

La période de l'Holocène est intéressante et propice à la détection et l'appariement de pics car le background de sulfate est stable. Ce n'est plus le cas lors de la dernière déglaciation où seuls 3 pics de sulfate adjacents permettent de synchroniser les échelles d'âge EDC et EDML (voir figure 5.2). Ces trois événements ont également servi à synchroniser le "sulfate" entre EDC et Vostok.

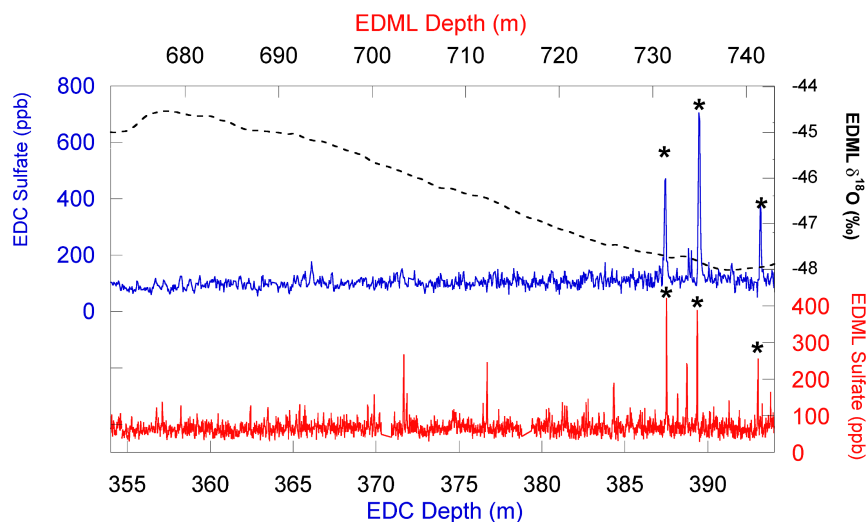


FIGURE 5.2 – Profils de sulfate obtenus à EDC et EDML pour la transition LGM-Holocène avec le profil isotopique de EDML. On note qu'il y peu d'éruptions volcaniques détectées pendant la transition climatique. Trois éruptions majeures (marquées d'un astérisque) sont présentes en début de transition et permettent de réaliser un calage. Extrait de Severi *et al.* (2007).

La datation EDML1 de la carotte de EDML proposée par Ruth *et al.* (2007) s'appuie sur les liens stratigraphiques volcaniques rapportés par Severi *et al.* (2007) qui ont permis de transférer l'échelle d'âge EDC3 (Parrenin *et al.*, 2007b) sur le forage de EDML. On note que la synchronisation entre EDC et EDML via les pics de sulfate volcanique n'est faisable que jusqu'à 52ka BP ; au delà, la corrélation s'appuie sur des mesures de conductivité (Severi *et al.*, 2007). Au delà de 128ka, à cause des processus de diffusion des espèces chimiques dans la glace, la synchronisation est faite grâce aux poussières et aux profils isotopiques.

Il est important de relever les limites de la synchronisation des échelles d'âge glace par les événements volcaniques tracés par le sulfate. On a vu en premier lieu que le sulfate volcanique n'a pas vocation à constituer un marqueur temporel car contrairement aux téphra, il est impossible de déterminer la source volcanique à l'origine du pic de sulfate (excepté pour



la période récente). On peut mentionner ensuite différentes causes rendant ambiguë l'appariement de deux pics de sulfate volcanique. Par exemple, l'amplitude d'un évènement sulfate enregistré dans un forage ne constitue pas un critère d'appariement car c'est le résultat de nombreux facteurs tels que la localisation du forage, la variabilité du transport atmosphérique ou encore le ratio entre dépôt sec et dépôt humide (Severi *et al.*, 2007). Par ailleurs, le dépôt de sulfate volcanique dans la neige peut être affecté par des remaniements du manteau neigeux compromettant les possibilités de synchronisation même pour des forages très proches (Traufetter *et al.*, 2004). Il faut aussi signaler qu'en général, l'amplitude des pics de sulfate volcanique reste faible en regard de l'amplitude du bruit de fond du sulfate biogénique (i.e., en moyenne un rapport 2). Enfin, la synchronisation inter-hémisphérique n'est que très rarement possible (excepté pour la période récente) du fait de la fréquence des pics de sulfate régionaux (Severi *et al.*, 2007).

#### 5.2.4 Méthane et isotope de l'oxygène atmosphérique $\delta^{18}O_{atm}$

Lorsque les pores du névé se ferment, ils piègent un échantillon de gaz dont la composition est très proche de celle de l'atmosphère au moment de la fermeture, composition qui renferme du  $CH_4$  et de l'oxygène-18 (i.e., di-oxygène  $^{18}O^{16}O$ ) noté  $^{18}O_{atm}$ .

Le temps caractéristique de résidence du méthane dans l'atmosphère (10 ans) au regard de son temps de mélange inter-hémisphérique (1 an) en font un *marqueur global* (on notera cependant qu'il existe un gradient inter-hémisphérique car les sources de méthane sont principalement situées dans l'hémisphère Nord). D'autre part, il s'agit d'un gaz à effet de serre qui est impliqué dans le bilan radiatif terrestre et donc dans les variations de température de la surface du globe. Le  $CH_4$  résulte principalement des émissions par les fermentations et se trouve intimement lié au climat (Louergue *et al.*, 2008). Sa courte durée de vie dans l'atmosphère permet en particulier d'étudier des évènements climatiques rapides. Pendant la dernière période glaciaire, on retrouve dans les enregistrements de  $CH_4$  la variabilité du climat associée aux évènements de Dansgaard-Oeschger (EPICA Community Members, 2006).

La teneur en  $^{18}O_{atm}$  est comme le  $CH_4$  un *marqueur global* mais avec des caractéristiques différentes. Son temps de résidence dans l'atmosphère est plus important (de l'ordre de 1000 ans), ce qui le rend adapté au suivi des variations climatiques lentes (Capron *et al.*, 2008). Le  $^{18}O_{atm}$  est modulé par l'activité biogénique marine (d'où provient une grande partie de l'oxygène), cette-dernière dépendant de l'insolation aux basses latitudes. Les enregistrements de  $^{18}O_{atm}$  transportent un signal de précession (19 et 23ka) ce qui leur donnent en outre un

potentiel pour le calage orbital (voir section 5.4)

En Antarctique, on relie les variations de méthane au contenu isotopique de la glace des forages du Groenland. Ceci permet de synchroniser les enregistrements polaires Nord et Sud. Ainsi, on a notamment transféré la datation de NGRIP sur les forages d'Antarctique et mis en évidence la relation de phase pour les températures entre le Nord et le Sud, confirmant en outre les mécanismes de bascule du climat au cours de la dernière période glaciaire (EPICA Community Members, 2006). Il faut noter que ce type de synchronisation implique d'une part un enregistrement mesuré dans la matrice de glace (i.e., l'isotope  $^{18}O_{ice}$ ) et d'autre part un enregistrement mesuré dans la phase gazeuse (i.e.,  $CH_4$ ), aussi les incertitudes sur le delta-age se propagent sur les phases temporelles estimées ; on recherche de ce fait des sites d'Antarctique présentant un petit delta-age afin de minimiser cette source d'incertitude.

## 5.2.5 Isotopes de l'argon et de l'azote atmosphérique

### 5.2.5.1 Processus de fractionnement dans la colonne de neige-névé

L'azote et l'argon sont peu réactifs et sur les échelles de temps des forages, leur composition isotopique ( $^{15}N/^{14}N$  et  $^{40}Ar/^{36}Ar$ ) sont donc restées stables dans l'atmosphère. Dans la zone diffusive de la colonne de névé, les mécanismes de diffusion moléculaire s'opèrent et l'étude de la teneur en formes isotopiques lourdes de l'azote et l'argon peut apporter des informations chronologiques.

**Fractionnement gravitationnel** Sous l'effet du champ de gravitation, les molécules lourdes ont tendance à s'accumuler dans le fond de la colonne diffusive avec en particulier un fractionnement gravitationnel des formes isotopiques d'une même molécule. L'enrichissement est fonction de  $\Delta m$  la différence de masse des espèces isotopiques considérées et de l'épaisseur  $z$  de la colonne diffusive. L'équation barométrique en notation  $\delta(\text{‰})$  est la suivante :

$$\delta(\text{‰}) = 1000 \left[ \exp \left( \frac{\Delta m g z}{R \theta} \right) - 1 \right] \quad (5.1)$$

où  $g$  est l'accélération gravitationnelle,  $R$  est la constante des gaz parfaits et  $\theta$  la température dans la colonne diffusive (proche de la température de surface en moyenne annuelle).

L'azote et l'argon permettent (Caillon *et al.*, 2001) d'obtenir une information sur la hauteur de la colonne diffusive (*Diffusive Column Height* ou DCH) qui correspond à la COD retranchée de l'épaisseur des zones convective et de non-diffusive. Le rapport des différences

de masse affectant les deux couples d'isotope  $^{15}N/^{14}N$  et  $^{40}Ar/^{36}Ar$ , implique que l'enrichissement en  $\delta^{15}N$  et en  $\delta^{40}Ar/4$  doit être identique :

$$\delta^{15}N \cong \frac{\delta^{40}Ar}{4} \quad (5.2)$$

**Fractionnement thermique** Un second type de fractionnement dit thermique s'opère dans la colonne diffusive, lorsque les conditions de température en surface changent. Les processus de diffusion des gaz sont environ 10 fois plus rapides que les processus de diffusion de la chaleur dans le névé. Le temps caractéristique de diffusion de la chaleur entre le sommet et le fond de la colonne névé est de l'ordre de quelques centaines d'années ; aussi on peut observer un fractionnement cinétique si les changements de température en surface sont abruptes. Lors d'un fractionnement thermique, les molécules les plus lourdes s'accumulent dans les zones les plus froides. Ce mécanisme est modélisé par une anomalie isotopique  $\delta_{\Delta\theta}(\text{‰})$  proportionnelle à la différence de température entre le haut et le bas de la colonne diffusive  $\Delta\theta$  :

$$\delta_{\Delta\theta} \cong \Omega\Delta\theta \quad (5.3)$$

où  $\Omega$  est le paramètre de sensibilité à la diffusion thermique en  $\text{‰}(\text{°C})^{-1}$  ou  $\text{‰.K}^{-1}$ .

Le paramètre  $\Omega$  dépend des molécules considérées (en particulier de leur masse) et à 213K il est estimé à  $0.014\text{‰}(\text{°C})^{-1}$  pour le  $\delta^{15}N$  contre  $0.036\text{‰}\text{°C}^{-1}$  pour  $\delta^{40}Ar$  (Caillon *et al.*, 2001). De ce fait, un fractionnement cinétique dans la colonne diffusive peut entraîner une anomalie dans l'équation barométrique (5.2) ; cette anomalie est mesurée avec le  $\delta^{15}N_{excess}$  (Huber *et al.*, 2006) :

$$\delta^{15}N_{excess} = \delta^{15}N - \frac{\delta^{40}Ar}{4} \quad (5.4)$$

Il faut noter qu'on observe des profondeurs de fermeture des pores plus petites pour des sites plus chauds car les vitesses de densification augmentent avec la température<sup>3</sup>. Une augmentation abrupte de température peut donc s'accompagner d'un amincissement de la DCH et donc d'une diminution de l'intensité de l'enrichissement gravitationnel. On attend donc lors de réchauffement abrupt, une compétition entre le processus de fractionnement

---

3. Une augmentation de température s'accompagne aussi en général d'une augmentation du taux d'accumulation ; cette augmentation accélère l'advection des couches et tend à augmenter la profondeur de fermeture des pores.

gravitationnel qui diminue le  $\delta$  et le processus de fractionnement thermique qui l'augmente le  $\delta$ .

### 5.2.5.2 Information chronologiques : delta-age, delta-depth, DHC et COD

En période climatique stable (accumulation et température stationnaires), l'équation barométrique permet d'estimer la DCH. Les incertitudes sur les épaisseurs des zones convectives et non-diffusives Landais *et al.* (2006b) ne permettent pas de déduire la COD. Le fractionnement des isotopes de l'air peut être en revanche utilisé pendant les changements climatiques en particulier au Groenland.

Pour les forages du Groenland, des mesures de  $\delta^{15}N$  et/ou de  $\delta^{40}Ar$  permettent destimer soit l'amplitude des changements de température de surface à partir du  $\delta^{15}N_{excess}$  (Huber *et al.*, 2006), soit le delta-age (Severinghaus *et al.*, 1998) ou encore le delta-depth.

Une méthode alternative pour estimer les changements de température de surface constitue une information importante pour les modèles glaciologique de datation. Elle permet de tester les modèles de température existants.

Le *delta-age* a été déterminé précisément sur la carotte de GISP2 par Severinghaus *et al.* (1998) qui ont utilisé le  $\delta^{15}N$  comme un marqueur dans la phase gaz de l'augmentation de température à la fin du Younger-Dryas; ils ont ensuite compté les couches annuelles séparant ce marqueur gaz du signal d'augmentation de température enregistré dans la phase glace ( $\delta^{18}O_{ice}$ , voir figure 5.3).

Caillon *et al.* (2001) ont étudié la transition 5d/5c à Vostok (qui est assez rapide  $0.4^{\circ}C/100$  ans) et réalisent une estimation de la *COD*. Ils prédisent et constatent que l'anomalie isotopique est très faible (i.e., fractionnement thermique) et ne permet pas de reconstruire la variation de température de la transition. Ils observent néanmoins un signal  $\delta^{15}N$  et  $\delta^{40}Ar$  conforme à la théorie du fractionnement et *en accord avec l'augmentation de la COD lors d'un réchauffement* tel que prédit par les modèles de densification. Ils mesure le *delta-age* le long de la carotte qui sépare :

- le marqueur stratigraphique de réchauffement enregistré dans la phase glace avec le  $\delta D$ ,
- et plus bas le marqueur stratigraphique de réchauffement enregistré dans la phase gaz par le  $\delta^{15}N$  et  $\delta^{40}Ar$ .

Avec la densité relative moyenne d'une colonne de névé prédite par les modèles de densification (i.e., 0.71) ainsi que la fonction d'amincissement  $T$  calculée par les modèles d'écou-

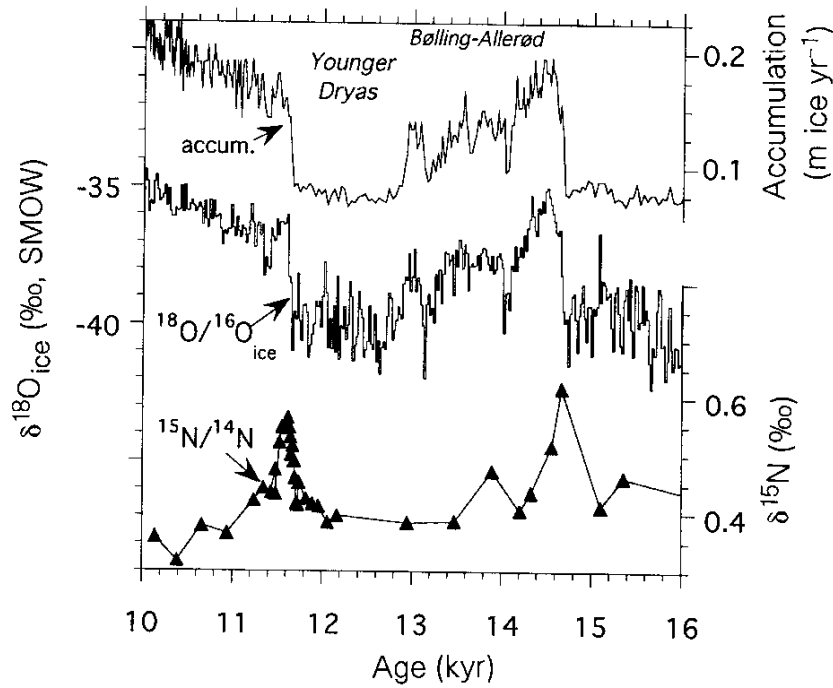


FIGURE 5.3 – Carotte de GISP2 au Groenland : détermination du delta-age pour la transition climatiques du Younger-Dryas vers le Pré-Boreal. Isotope de la glace  $\delta^{18}\text{O}_{ice}$ , isotope du gaz  $\delta^{15}\text{N}$ . Extrait de Severinghaus *et al.* (1998).

lement, ils obtiennent la COD par la relation :

$$COD = \frac{\Delta\Lambda}{0.71 \times T} \quad (5.5)$$

Caillon *et al.* (2003) étudient ultérieurement la Termination III (TIII) à l'aide du  $\delta^{40}\text{Ar}$ . Ils constatent que le réchauffement climatique rapide n'est pas accompagné d'un fractionnement plus important en  $\delta^{40}\text{Ar}$ . Ce comportement va à l'encontre de la diminution attendue de l'épaisseur de la zone diffusive (DHC).

Cette contradiction est confirmée pour les sites froids d'Antarctique de l'Est par Landais *et al.* (2006a) qui explorent les hypothèses pour expliquer ce comportement :

- variation d'épaisseur de la zone non diffusive et/ou de la zone convective ;
- modèles de densification mal calibrés pour les conditions du LGM (i.e dernier maximum glaciaire) puisqu'il n'existe pas de site suffisamment froid aujourd'hui ;
- un fractionnement thermique différent en période glaciaire du fait d'un équilibre déplacé entre flux géothermique et advection réduite de la température compte-tenu d'une accumulation plus faible ;

- des scénarios inadéquats de température et d'accumulation utilisés comme forçage des modèles de densification.

L'utilisation du signal isotopique  $\delta^{15}N$  et  $\delta^{40}Ar$  est donc délicat en Antarctique, mais s'il est avéré comme un marqueur stratigraphique du réchauffement dans la phase gaz, il est alors particulièrement intéressant pour contraindre les valeurs de delta-depth.

### 5.2.6 Isotopes cosmogéniques : $^{10}Be$

Les isotopes cosmogéniques sont produits dans la haute atmosphère sous l'action du flux cosmogénique. Leur taux de production est modulé par l'activité solaire et les variations du champ géomagnétique de la Terre. Leur intérêt pour la datation réside en particulier dans l'existence d'évènements paléomagnétiques (modification importante du champ magnétique de la Terre, qui laissent leur signature notamment dans le flux de  $^{10}Be$  enregistré dans les carottes de glace.

L'incursion géomagnétique de Laschamps a été identifiée dans les carottes de GRIP (Yiou *et al.*, 1997), de EDC (Raisbeck *et al.*, 2007) et de Vostok (Raisbeck, 1987 ; Yiou *et al.* (1997)). Cet évènement magnétique qui a affecté les laves des volcans, a été daté indépendamment par des méthodes radiométriques (Guillou *et al.*, 2004). Pour la période Holocène, les variations de flux du  $^{10}Be$  dans la glace et celles du  $^{14}C$  reconstruites et datées par dendrochronologie ont permis à Raisbeck *et al.* (1998) de construire une échelle d'âge glace à Vostok. Par ailleurs, l'inversion magnétique de Brunhes-Matuyama ( $\approx 780$ ka BP) a été reconnue dans la carotte EDC (Raisbeck *et al.*, 2006).

### 5.2.7 Autres marqueurs stratigraphiques

#### 5.2.7.1 Poussières

Les enregistrements de poussières d'origine éolienne peuvent servir à synchroniser des carottes de glace lors des transitions glaciaire-interglaciaire. En période glaciaire, l'aridité continentale est généralisée et les concentrations de poussière sont augmentées d'un facteur 50 par rapport aux périodes interglaciaires (Lambert *et al.*, 2008).

#### 5.2.7.2 Profils isotopiques

Les synchronisations peuvent être faites par les enregistrements isotopiques de la glace. Elles doivent être faites avec prudence et impliquer des sites géographiquement proches l'un

de l'autre (par exemple Vostok et Dome C). Sur le plateau Antarctique, on attend des changements climatiques de même amplitude et pratiquement synchrones.

## 5.3 Comparaison des archives polaires à d'autres archives datées

On décrit succinctement dans les sections qui suivent, les techniques de comparaison des enregistrements polaires aux autres paléo-archives.

### 5.3.1 Archives terrestres

#### 5.3.1.1 Dendrochronologie

La dendrochronologie consiste à compter les cernes des arbres qui se forment annuellement. Toute mesure isotopique menée en parallèle permet d'obtenir un indicateur climatique daté. En particulier, on réalise des mesures de  $^{14}\text{C}$  sur les arbres. La dendrochronologie permet de calibrer l'âge  $^{14}\text{C}$  avec une très grande précision (Reimer *et al.*, 2004). Le  $^{14}\text{C}$  est un isotope cosmogénique formé comme le  $^{10}\text{Be}$  par spallation des rayons cosmiques. Cependant, le carbone est lié à la biosphère qui lui impose son propre cycle. Les travaux de Raisbeck *et al.* (1998) ont permis une comparaison des enregistrements de  $^{10}\text{Be}$  à Vostok et des enregistrements de  $^{14}\text{C}$  datés par dendrochronologie, pendant la période de l'Holocène

#### 5.3.1.2 Spéléothèmes

Les spéléothèmes sont des concrétions calcaires qui se forment dans les grottes. On réalise des mesures de la teneur  $\delta^{18}\text{O}$  de la calcite inorganique  $\text{CaCO}_3$ . Ces mesures reflètent la teneur en  $\delta^{18}\text{O}$  des précipitations locales et le mécanisme de fractionnement à l'équilibre lors de la formation du stalagmite. Les spéléothèmes de type calcite inorganique peuvent être datés précisément<sup>4</sup> par des méthodes radiométriques  $^{234}\text{U}/^{230}\text{Th}$ .

Parmi les séries, on peut citer les enregistrements en Chine, de la grotte de Hulu (Wang *et al.*, 2001), de la grotte de Dongge (Kelly *et al.*, 2006), de la grotte de Sanbao (Wang *et al.*, 2008). Au Brésil, on a des enregistrements dans l'état de Bahia (Wang *et al.*, 2004). En France, on peut citer les stalagmites de la grotte de Villars (Genty *et al.*, 2003).

---

4. La précision de la méthode radiométrique dépend de l'âge à estimer au regard de la période radioactive ; la précision globale dépend néanmoins aussi du taux de précipitation de la calcite (en mm/an) dans le passé, taux qui conditionne la résolution temporelle plus ou moins bonne, le long du stalagmite.

Au cours de la dernière période glaciaire (mais aussi de l'avant dernière période glaciaire pour la grotte de Sanbao) sont retrouvés dans ces enregistrements des événements rapides (d'une durée de 1 à 3 ka) signant des précipitations météoritiques intenses. Ces événements rapides ont été systématiquement comparés aux enregistrements des Dansgaard-Oeschger<sup>5</sup> dans les carottes du Groenland.

En Chine, les enregistrements de  $\delta^{18}O$  sont interprétés comme un traceur de l'intensité de la mousson et Wang et al, (2008) soulignent le bon accord avec l'insolation d'été de l'Hémisphère Nord. Les mécanismes climatiques assurant la connexion entre les réchauffements abrupts enregistrés dans les carottes du Groenland et l'intensité de la mousson restent à quantifier : i) contrôle orbital (i.e., insolation), ii) changement d'élévation du niveau des mers qui modifie la surface d'échange des bassins océaniques, iii) changements de circulation océaniques et atmosphériques (Wang *et al.*, 2001). De ce fait, il est délicat de transférer les datations des spéléothèmes de Chine sur les carottes du Groenland car le déphasage temporelle est mal connu.

La connexion climatique entre intensité de la mousson et concentration en méthane de l'atmosphère a été explorée par Louergue *et al.* (2008) ; cette approche permettant de transférer les âges datés radiométriquement des spéléothèmes de Chine sur les chronologies gaz d'Antarctique (Parrenin *et al.*, 2007b).

### 5.3.2 Archives marines

Les carottes sédimentaires marines sont datées soit par calage orbital soit par datation radiométrique  $^{14}C$  en deça de 12 ka. La datation  $^{14}C$  implique les étapes suivantes :

1. Les âges  $^{14}C$  radiométriques doivent être convertis en âges  $^{14}C$  calendaires. C'est l'étape de calibration. En effet, l'âge radiométrique repose sur des hypothèses d'un flux de production constant dans l'atmosphère, or le flux est modulé avec l'activité solaire et les variations du champ géomagnétique terrestre. D'autre part, il ne tient pas compte des variations du cycle du carbone sur Terre. Cette étape de calibration s'appuie sur la dendrochronologie (INTCAL04, (Reimer *et al.*, 2004)).
2. L'âge réservoir qui tient compte des échanges océan-atmosphère doit être estimé<sup>6</sup>.

---

5. Les Dansgaard-Oeschger sont aussi appelés GIS pour *Greenland Inter Stadial* et correspondent à des événements de réchauffements brefs mais amples de l'ordre d'une dizaine de degrés pendant la dernière période glaciaire.

6. La teneur en  $^{14}C$  de l'atmosphère n'est pas la teneur en  $^{14}C$  de l'océan de surface ou de l'océan profond.



Parmi les travaux où des âges "marins" ont été transférés sur des carottes de glace, on peut citer Shackleton *et al.* (2004). Ils ont dérivé la datation SFCP04 pour les forages de GISP2 et GRIP par synchronisation des évènements DO 3,4,5,6 et 8 enregistrés d'une part dans l'isotope de la glace et d'autre part dans l'isotope  $\delta^{18}O$  des foraminifères planctoniques de la carotte marine MD95-2042, la conversion des âges  $^{14}C$  en âges calendaires reposant sur la calibration par la méthode  $^{230}Th$  (Fairbanks *et al.*, 2005).

## 5.4 Calage orbital

### 5.4.1 Historique et développement

On retrouve dans de nombreux enregistrements paléoclimatiques les fréquences des paramètres orbitaux de la Terre : précession (environ 19ka et 23ka), obliquité (environ 41ka) et excentricité (environ 100ka et 400ka). Les séries temporelles d'insolation sont calculées avec une très grande précision sur environ 10 million d'années en arrière (Laskar *et al.*, 2004; Berger, 1978). Les géologues ont été les premiers à l'appliquer aux sédiments marins (Martinson *et al.*, 1987).

Dans les carottes de sédiments marins, la teneur en isotope  $^{18}O$  des foraminifères planctoniques et benthiques, comporte un fort signal de précession. Les calottes de glace contiennent préférentiellement les formes isotopiques légères de la molécule d'eau. L'océan est enrichi en formes isotopiques lourdes. L'enrichissement se répercute sur la composition isotopique du di-oxygène de l'air (un *marqueur global* voir section 5.2.4) et est enregistré dans le gaz des piégé dans la glace ( $^{18}O_{atm}$ ). A l'effet Dole près, les enregistrements polaires de  $\delta^{18}O_{atm}$  reflètent le  $\delta^{18}O_{marin}$  avec un délai de l'ordre de 1 ka selon Shackleton (2000)<sup>7</sup>. Le signal de  $\delta^{18}O_{atm}$  comporte donc aussi un fort signal de précession et on le cale en général sur l'insolation aux faibles latitudes (Dreyfus *et al.*, 2007).

### 5.4.2 Teneur en air

Les enregistrements de teneur en air  $V$  en Antarctique contiennent les fréquences orbitales de la Terre. L'obliquité est la fréquence dominante. Raynaud *et al.* (2007) ont analysé le potentiel des enregistrements  $V$  pour contraindre les chronologies des carottes par synchronisation sur une série temporelle d'insolation. Les auteurs ont exploré les liens entre  $V$

7. L'effet Dole est l'enrichissement en  $\delta^{18}O$  de l'atmosphère par rapport au marin compte-tenu de la respiration d'organismes marins et de la photosynthèse qui privilégie l'absorption des formes isotopiques de l'oxygène les plus légères.

et l'insolation locale, cependant les mécanismes physiques responsables de l'empreinte des paramètres orbitaux dans l'enregistrement de  $V$  ne sont pas encore élucidés.

## 5.5 Classification des observations pour préparer l'assimilation

Pour préparer le travail d'assimilation de données de la partie III, nous définissons ci-dessous des catégories d'observation à partir de l'information chronologique variée que nous avons décrite dans les sections précédentes. Ces catégories sont associées aux grandeurs glaciologiques importantes que nous avons définies dans l'introduction section 2.2.

### 5.5.1 Marqueurs d'âge glace ou gaz

On appellera *marqueurs d'âge glace ou gaz* toute mesure susceptible de fournir pour une profondeur donnée d'un forage, un âge "absolu" soit pour la matrice glace soit pour la phase gaz. Des observations de nature très diverses sont susceptibles d'apporter de tels marqueurs. Par exemple, un marqueur d'âge glace peut-être issu d'une couche de téphra datée et un marqueur d'âge gaz peut être dérivé d'enregistrement de  $\delta^{18}O$  atmosphérique par calage orbital sur une série d'insolation datée.

### 5.5.2 Liens stratigraphiques gaz et glace

On appellera *liens stratigraphiques glace ou gaz* toute observation susceptible de définir la différence d'âge qui existent entre les profondeurs  $z_1$  et  $z_2$  de deux forages distincts. En particulier, les marqueurs globaux ou régionaux sont des liens stratigraphiques qui attribuent le même âge (gaz ou glace suivant les types de marqueurs) aux profondeurs  $z_1$  et  $z_2$  de deux forages distincts. Par exemple, le  $CH_4$  permet de dériver des liens stratigraphiques gaz entre forages d'Antarctique et/ou du Groenland. Des couches de téphra géochimiquement identiques retrouvées dans deux forages distincts permettent de dériver des liens stratigraphiques glace.

### 5.5.3 Marqueur de grandeurs

On appellera *marqueur de grandeur* toute observation susceptible de fournir une estimation du taux d'accumulation  $A(Z)$ , de la fonction d'amincissement  $T(Z)$ , du delta-depth  $\Delta\Lambda(Z)$ , de la profondeur de fermeture des pores  $C(Z)$  mesurée en m-ie et l'épaisseur d'une

couche annuelle  $L(Z)$ . Les équations (2.1), (2.2), (2.6) et (2.7) de la section 2.2 montrent que l'on peut contraindre les chronologies  $\Psi(Z)$  et  $\chi(Z)$  des carottes si l'on connaît la valeur prise par l'une de ces grandeurs à une profondeur donnée.

### 5.5.3.1 Exemple de marqueur de taux d'accumulation

On peut utiliser la reconstruction des taux d'accumulations à partir des isochrones mises en évidence par les échos radar.

### 5.5.3.2 Exemple de marqueur de delta-depth

Une estimation du delta-depth lors des transitions climatiques rapides, peut être déduite des variations de  $\delta^{15}N$  et d'isotope respectivement enregistrées dans la phase gaz et dans la matrice glace. Siegenthaler *et al.* (2005) ont appliqué la même hypothèse de synchronicité pour les transitions climatiques enregistrées dans le  $CO_2$  et dans l'isotope. Cependant, le déphasage entre l'isotope et le  $CO_2$  peut a priori atteindre le millier d'années (Amaëlle Landais, communication personnelle) ceci qui ne permet pas de dériver des estimations précises de delta-depth.

### 5.5.3.3 Marqueur d'épaisseur de couche annuelle

Le comptage des couches annuelles le long d'une carotte permet de d'estimer l'épaisseur de la couche annuelle  $L(Z)$  en moyenne sur une épaisseur  $\Delta Z$  ou localement en  $Z$ . Cette mesure est particulièrement intéressante parce qu'on s'affranchit alors de l'erreur cumulative attachée à l'âge glace des chronologies de type stratigraphique.

## 5.6 Conclusion

Nous avons présenté une série de grandeurs mesurées sur les carottes de glace. Nous avons vu que la datation glace ou gaz d'une carotte pouvait être transférée sur une autre carotte à l'aide de certains *marqueurs globaux* ou de *marqueurs régionaux*. Dans la deuxième section, on a décrit les techniques utilisées pour contraindre la datation des carottes de glace en les comparant à d'autres archives paléo-climatiques datées ou par calage orbital. On note néanmoins que la synchronisation d'évènements enregistrés dans deux archives différentes nécessite une certaine prudence. En général, ces archives proviennent de lieux géographiques différents (e.g., les spéléothèmes de Chine et les carottes du Groenland ou de l'Antarctique). Les questions incontournables sont :

1. Est-ce que les évènements que l'on synchronise sont le résultat d'un mécanisme commun ou au moins d'une chaîne commune de mécanismes connus ?
2. Est-ce ce mécanisme (ou cette chaîne de mécanismes) est susceptible de générer des effets différés dans les différentes régions du globe et donc entraîner des déphasages entre les évènements observés dans les archives ?



## Troisième partie

### Nouvelle approche inverse pour dater le gaz et la glace des forages

## CHAPITRE 6

# Introduction

---

L'objectif de la méthode que nous allons présenter, est d'estimer une chronologie gaz et glace précise et commune à plusieurs forages d'Antarctique et du Groenland en s'appuyant à la fois sur l'information chronologique issue des modèles et des données. On a vu dans l'introduction de ce manuscrit, que les méthodes inverses actuelles appliquées à la datation des forages ne sont pas en mesure d'atteindre cet objectif. La principale cause est l'erreur importante et non-paramétrique attachée aux modèles glaciologiques directs (erreur que nous avons tenté de mettre en exergue en décrivant les modèle glaciologique dans la partie 16.1.1.2). On a illustré les conséquences de cette erreur modèle, en montrant comment dans le cadre d'une inversion sur la chronologie glace d'un seul forage, l'échelle d'âge optimisée ne respecte pas certaines observations bien qu'elles aient été assimilées. D'autre part, dans ce contexte on note qu'il est difficile d'estimer des intervalles de confiance fiables sur les chronologies optimisées. Aussi, il paraît peu réaliste d'envisager l'optimisation couplée des chronologies gaz et glace sur plusieurs forages, car ce type de traitement nécessite d'assimiler des observations nombreuses et de nature différente, avec en particulier des liens stratigraphiques gaz et glace.

On distingue deux stratégies pour dépasser cet obstacle. On a vu en effet, que l'erreur non-paramétrique des modèles glaciologiques est prépondérante parce que les modèles omettent de décrire certains mécanismes physiques qui contrôlent l'accumulation passée, la densification du névé et l'écoulement de la glace. Ces mécanismes clés ne sont pas décrits parce qu'ils sont soit trop complexes, soit mal connus. On peut donc envisager un effort de travail expérimental et théorique afin d'enrichir les modèles. Il s'agit évidemment d'une entreprise de longue haleine; aussi une stratégie moins ambitieuse consiste à travailler en amont en assouplissant les modèles existants par la prise en compte de l'incertitude modèle dans le processus d'inversion.

C'est cette deuxième option qui est choisie dans le cadre de cette thèse. Pour ce faire, on se propose de paramétriser l'incertitude modèle sous forme de corrections qui s'appliquent pour chaque forage en fonction de la profondeur, sur trois grandeurs glaciologiques calculées par les modèles directs : le taux d'accumulation  $A(z)$ , la fonction d'amincissement  $T(z)$  et la profondeur de close-off mesurée en équivalent glace  $C(z)$ . Comme présenté en introduction

de ce manuscrit, la connaissance de ces trois grandeurs glaciologiques permet de déduire les échelles d'âge glace et gaz. Les modèles directes (optimisés ou non) fournissent des ébauches pour ces grandeurs et l'objectif est d'améliorer leur estimation en utilisant un nombre important d'observations paléo comme contrainte. On formule donc un problème inverse basé sur une approche bayésienne afin d'identifier les meilleures corrections, formulation que l'on traduit en terme de fonction coût en appliquant le maximum de vraisemblance.

Dans le premier chapitre, on présente quelques éléments du formalisme développé par Mosegaard et Tarantola (2002) qui revisitent le théorème de Bayes car c'est sur ce formalisme qu'on s'est appuyé pour poser le problème inverse. Dans le second chapitre on introduit la paramétrisation de l'erreur modèle et on formule le problème inverse. Dans le troisième chapitre, on décrit succinctement l'étape d'optimisation qui s'opère via une méthode de quasi-newton. Enfin, dans le dernier chapitre on propose une estimation de l'incertitude sur les chronologies et les grandeurs glaciologiques analysées.



# Quelques éléments d'inversion

---

## 7.1 Généralités

Toute approche inverse repose sur l'existence d'un modèle théorique direct qui permet de prédire une observation  $Y$  connaissant  $X$ , les paramètres du modèle. La théorie peut-être exacte ou bien entachée d'erreur. En règle général le modèle direct est représenté analytiquement par un opérateur  $h$  appelé *opérateur d'observation*, qui s'applique de l'espace des paramètres modèle  $\mathcal{M}$  dans l'espace des données  $\mathcal{D}$  et on écrit alors :

$$\begin{aligned} h : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ x &\longmapsto y = h(x) + \eta \end{aligned}$$

où la grandeur  $\eta$  représente l'écart entre la prédiction de la mesure  $h(X)$  et la mesure elle-même. Cet écart résulte à la fois de l'erreur de mesure et de l'incertitude sur le modèle théorique direct. Comme illustré sur le schéma 7.1, l'approche inverse consiste à estimer les paramètres modèle  $X$  compte tenu de l'information expérimentale  $Y$ .

La résolution d'un problème d'inversion est plus ou moins délicate selon les caractéristiques respectives du modèle direct et des données expérimentales. En particulier, la manière de formuler le problème inverse ainsi que les techniques de résolution choisies dépendent de ces caractéristiques. Les problèmes d'inversion peuvent être sous-déterminés, sur-déterminés ou encore mixtes. En glaciologie, les problèmes inverses sont en général sous-déterminés (ou mixtes) parce que l'on dispose rarement d'un nombre de données suffisant par rapport au nombre de paramètres modèle à identifier. En conséquence, il existe la plupart du temps plusieurs modèles capables d'expliquer les données. Autour de la fréquente non-unicité de la solution d'un problème inverse, s'articule un point conceptuel important. Snieder et Trampert (1999) mettent en exergue la notion d'*ébauche* des paramètres comme un élément visant essentiellement à lever la multiplicité des solutions si c'est nécessaire. L'*ébauche* consiste à apporter de l'information supplémentaire sur les paramètres modèle de façon à lever la non-unicité de la solution. Cette étape est communément appelée *régularisation* et elle conditionne la forme de la solution. On peut par exemple imposer aux paramètres cherchés d'être

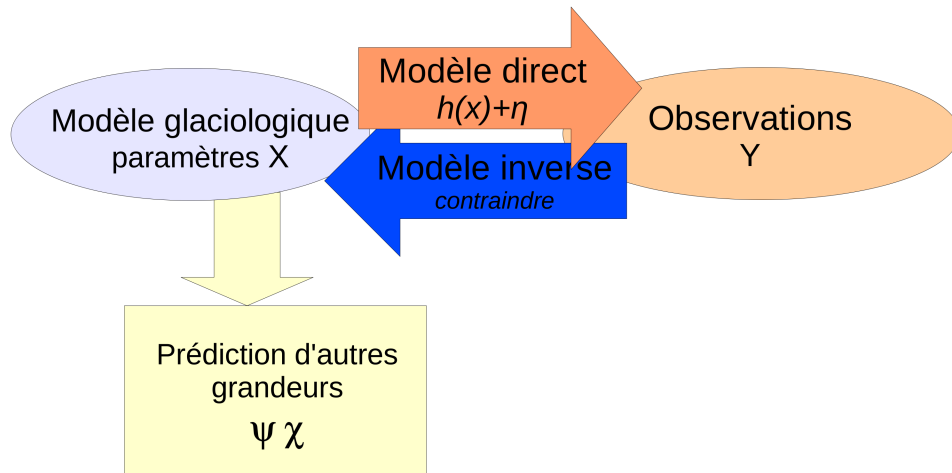


FIGURE 7.1 – Modèle théorique direct avec l’opérateur d’observation  $h(X)$  qui permet de prédire l’observation  $Y$  ;  $\eta$  est l’incertitude due à la fois à l’erreur modèle et à l’erreur d’observation. L’approche inverse consiste à estimer les paramètres modèle  $X$  compte tenu de l’information expérimentale  $Y$ . Ceci permet de calibrer un modèle et de mieux prédire d’autres grandeurs : par exemple  $\Psi$  et  $\chi$ .

de norme minimale ou encore, si ces paramètres sont des fonctions de l’espace ou du temps, on peut imposer des critères sur les dérivées premières ou secondes pour obtenir des fonctions “lisses”.

A l’opposé, les approches stochastiques du type *inférence bayésienne* incluent systématiquement de l’information régularisante que le problème soit sous-déterminé ou non. Cette information régularisante est une *ébauche* de nature probabiliste qui est généralement appelée *information a priori sur le modèle théorique*.

Les frontières entre ces deux approches conceptuelles ne sont pas toujours très nettes. Dans les approches de type bayésienne, l’information a priori sur le modèle direct peut-être relativement pauvre et issue de choix subjectifs qui conditionneront plus ou moins arbitrairement la forme de la solution.

On oppose souvent deux approches dans le cadre de l’identification de paramètres : i) les approches issues des théories du *contrôle optimal*; ii) les approches dites *stochastiques*.

La régularisation basée sur une *ébauche* des paramètres de nature non probabiliste est une technique issue du contrôle optimal. Au contraire, l'usage d'*information a priori* de nature probabiliste est associée aux approches stochastiques. Dans la pratique ce sont des axes complémentaires qui s'appliquent à tour de rôle suivant les données du problème. Dans ce travail sur la datation, on choisit une approche stochastique mais on sera amené à utiliser des techniques appartenant aux deux familles mentionnées ci-dessus.

Dans la section 7.2, on présente l'inférence bayésienne (approches stochastiques) avec la formulation de Mosegaard et Tarantola (2002). Dans la section 7.3, on explicite très brièvement le contexte du contrôle optimal afin d'introduire la notion de *fonction coût*. Enfin dans la section 7.4, on montre comment traduire le problème stochastique en terme *variationnel*, c'est-à-dire avec une fonction coût.

## 7.2 Approches stochastiques

On pourrâit présenter l'inversion stochastique comme il est fait classiquement en partant du théorème de Bayes. Cependant, on adopte l'approche et le vocabulaire introduits par Mosegaard et Tarantola (2002) essentiellement parce que c'est cette littérature qui nous a servi de point de départ au début de cette thèse. Mosegaard et Tarantola (2002) parlent non pas d'inversion Bayésienne mais d'inversion au sens de la *conjonction d'états d'information*. On développe cette approche dans la section 7.2.1 qui sous les *hypothèses classiques de l'inférence bayésienne* aboutit à une formulation de la *densité de probabilité a posteriori sur les paramètres modèle* équivalente à celle du théorème de Bayes. Dans la section 7.4, on montre qu'à partir de cette *densité de probabilité a posteriori*, on peut dériver une *fonction coût* en appliquant le *critère d'optimalité du maximum de vraisemblance*.

### 7.2.1 Les différents états d'information

Si les données  $Y$  ainsi que les paramètres modèle  $X$  sont des grandeurs physiques ce sont aussi des variables aléatoires. Alors que l'objectif des démarches expérimentales et de la modélisation théorique directe est d'approcher la valeur vraie de  $Y$ , les modèles inverses ont eux pour objectif d'approcher la valeur vraie de  $X$ . Comme à tout couple de variables aléatoires, on peut associer au couple  $(X, Y)$  une densité de probabilité jointe. La connaissance de cette densité de probabilité constitue ce que Mosegaard et Tarantola (2002) appellent un *état d'information*.

**Densité de probabilité homogène** Une telle densité de probabilité traduit le contexte où l'on ne dispose ni de mesure, ni d'a priori et ni de la connaissance d'un quelconque lien entre les deux variables  $X$  et  $Y$ . En particulier, le contenu informatif de cette densité de probabilité ne doit privilégier aucun domaine  $\mathcal{A}$  de l'espace  $\mathcal{M} \times \mathcal{D}$  et doit donc engendrer une mesure de probabilité sur ce domaine proportionnelle au volume  $V_{\mathcal{A}}$  de ce domaine. Mosegaard et Tarantola (2002) qualifient de *densité de probabilité homogène* une telle fonction de distribution et on la note  $\mu_{X,Y}^h$ .

**Modèle théorique** La connaissance d'un modèle théorique reliant le comportement de  $X$  et de  $Y$  constitue aussi un état d'information. Mosegaard et Tarantola (2002) proposent de formaliser cet état d'information au travers d'une densité de probabilité jointe que l'on note  $\Theta(Y, X)$ . Cette formulation décrit les corrélations entre données  $Y$  et paramètres  $X$  à l'avantage de décrire les incertitudes attachées au modèle théorique de façon "symétrique" (Tarantola, 2005, page 20-23).

**Information a priori et information expérimentale** Une expertise préalable, tout comme des mesures expérimentales antérieures, permettent d'avoir une idée de la valeur des paramètres modèle recherchés. Il s'agit là encore un état d'information. Dans un premier temps, Mosegaard et Tarantola (2002) englobent l'information expérimentale sur  $Y$  dans la notion d'*information a priori* (notion traditionnellement réservée à l'expertise qu'on a sur les seuls paramètres du modèle  $X$ ). Cet état d'information a priori est transcrit au travers de la densité de probabilité jointe  $\rho_{X,Y}^b(X, Y)$ <sup>1</sup>. Cette formulation a l'avantage d'autoriser une dépendance entre l'information a priori sur  $X$  et l'information expérimentale sur  $Y$  ce qui permet de se placer dans un cadre moins restrictif que celui classiquement attaché à l'inférence bayésienne. Il n'est en effet pas exclu qu'une partie du jeu de données  $Y$  ait contribué à inférer la valeur d'ébauche des paramètres du modèle.

### 7.2.2 La conjonction des états d'information

On a survolé dans la section précédente, les différents états d'information qui interviennent dans la formulation d'un problème inverse selon Mosegaard et Tarantola (2002). Pour conjuguer ces états d'information, Mosegaard et Tarantola (2002) s'appuient sur l'opération de *conjonction de probabilité* afin de définir ce qu'ils nomment la *conjonction des états*

1. On emploie de l'indice  $b$  qui fait référence au terme anglais de *background* signifiant ébauche et caractérisant l'information a priori.

*d'information théorique, a priori et expérimentale.* Cette opération de conjonction permet d'aboutir à l'expression de l'état *d'information a posteriori*. On note cet état  $\rho_{X,Y}^a$ <sup>2</sup> et son expression est la suivante :

$$\rho_{X,Y}^a(X, Y) = k \frac{\Theta(X, Y) \rho_{X,Y}^b(X, Y)}{\mu_{X,Y}^h(X, Y)} \quad (7.1)$$

où  $k$  est une constante de normalisation (la probabilité sur tout l'espace  $\mathcal{M} \times \mathcal{D}$  vaut 1).

Comme on l'a déjà signalé, le cadre de cette expression est plus large que le cadre de l'inférence bayésienne. En effet à ce stade, les espace  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{M}$  sont encore traités de façon totalement symétriques. En particulier, on peut intervertir les rôles de  $X$  et de  $Y$  sans modifier l'expression de  $\rho_{X,Y}^a$ . On va maintenant poser les hypothèses qui permettent de se restreindre au cadre de l'inférence Bayésienne :

- Il s'agit en premier lieu de traduire la disymétrie des rôles joués par  $X$  et  $Y$  dans un modèle théorique direct. Le qualificatif "direct" signifie qu'à chaque modèle caractérisé par une valeur donnée de  $X$ , on associe une probabilité d'avoir une mesure  $Y$ , ce que l'on peut traduire par la densité de probabilité conditionnelle :

$$\Theta(X, Y) = \Xi(Y|X) \mu_X^h(X) \quad (7.2)$$

où  $\mu_X^h$  est la *densité de probabilité homogène* sur  $X$ . On remarque un élément de disymétrie dans cette formulation "directe" du modèle : si l'incertitude sur la théorie est toujours contenue dans cette écriture elle ne se "propage" que vers les données expérimentales  $Y$ .

- En second lieu, il s'agit de traduire l'hypothèse classique de l'inversion bayésienne qui consiste en l'*indépendance de l'information a priori et de l'information expérimentale*. On introduit pour ce faire les loi marginales  $\rho_Y$  et  $\rho_X^b$  permettant de décrire respectivement les densités de probabilité associées aux données et à l'ébauche des paramètres du modèle. Compte-tenu de l'hypothèse d'indépendance, la loi jointe  $\rho_{X,Y}^b(X, Y)$  s'écrit :

$$\rho_{X,Y}^b(X, Y) = \rho_X^b(X) \rho_Y(Y) \quad (7.3)$$

---

2. On emploie l'indice <sup>a</sup> qui fait référence au terme d'*analyse* qui permet de spécifier qu'il s'agit d'une grandeur après analyse par opposition à la grandeur a priori ou d'*ébauche*.

— Enfin, il s'agit d'écrire la densité de probabilité homogène d'avoir  $X$  et  $Y$  car toute opération de conjonction de probabilité fait intervenir les densités de probabilité homogènes (Tarantola, 2005, page 10-14). Mosegaard et Tarantola (2002) utilisent la limite homogène de l'équation (7.3) ci-dessus ce qui permet de décomposer  $\mu_{X,Y}^h$  en deux densités de probabilité homogènes  $\mu_X^h$  et  $\mu_Y^h$  dans l'espace des paramètres et des données respectivement :

$$\mu_{X,Y}^h(X, Y) = \mu_X^h(X) \mu_Y^h(Y) \quad (7.4)$$

Sous les *hypothèses de l'inversion Bayésienne*, l'équation donnant l'état d'information a posteriori devient :

$$\rho_{X,Y}^a(X, Y) = k \frac{\Xi(Y|X) \rho_X^b(X) \rho_Y(Y)}{\mu_Y^h(Y)} \quad (7.5)$$

Enfin, en intégrant cette équation sur  $\mathcal{D}$ , on déduit l'expression de l'*information a posteriori sur les paramètres  $X$*  du modèle :

$$\begin{aligned} \rho_X^a(x) &= \int_{\mathcal{D}} \rho_{X,Y}^a(X, Y) \, dY \\ &= k \rho_X^b(X) \int_{\mathcal{D}} dY \frac{\rho_Y(Y) \Xi(Y|X)}{\mu_Y^h(Y)} \end{aligned} \quad (7.6)$$

On peut ré-écrire celle-ci en introduisant  $L(X)$  la *vraisemblance* qui mesure la capacité du modèle  $X$  à expliquer les données  $Y$  :

$$\rho_X^a(X) = k \rho_X^b(X) L(X) \quad (7.7)$$

avec :

$$L(X) = \int_{\mathcal{D}} dY \frac{\rho_Y(Y) \Xi(Y|X)}{\mu_Y^h(Y)} \quad (7.8)$$

## 7.3 Contrôle optimal

Le contrôle optimal consiste à construire une *fonction coût* notée  $J$ , qui dépend du paramètre  $X$  que l'on souhaite contrôler. Ce peut être directement un paramètre du modèle ou

bien une grandeur dérivée (voire une condition initiale si on se place dans le cadre plus vaste de l'assimilation de données). La fonction  $J$  doit traduire analytiquement les contraintes que le problème impose à  $X$  de respecter. Dans le cadre de la modélisation, une contrainte évidente est de maximiser la capacité des paramètres modèle  $X$  à expliquer un jeu de données  $Y$ . La fonction  $J$  mesure donc en particulier “une distance” entre la donnée  $Y$  et la prédiction que fait le modèle  $h(X)$  pour la valeur de  $Y$ . Dans le cas d'un problème sous-déterminé, la fonction coût doit aussi inclure les contraintes correspondant aux critères de *régularisation* choisis.

## 7.4 Fonction coût dérivée de l'inférence bayésienne ou de la conjonction d'états d'information

La *formulation du problème inverse* est une étape essentielle. Dans les approches stochastiques, ceci mène à l'expression de  $\rho_X^a(X)$ , la densité de probabilité a posteriori sur  $X$ . Dans les approches dérivées du contrôle optimal ceci mène à l'expression de la fonction coût  $J(X)$ . La seconde étape est la recherche de la solution du problème inverse.

Dans le cadre des approches stochastiques, l'expression de  $\rho_X^a(X)$  est en général complexe et on peut avoir recours à des techniques numériques d'échantillonnage de Monte Carlo permettant de reconstruire  $\rho_X^a(X)$  dans l'espace des paramètres. Cette reconstruction constitue en soit la solution du problème car on peut alors dériver toute caractéristique statistique associée à  $\rho_X^a(X)$ . Cette approche est particulièrement intéressante par exemple dans le cas de distribution multimodale (i.e., avec plusieurs extrema).

Une méthode alternative, dans le cadre des approches stochastiques, est de dériver la fonction coût  $J(X)$  à partir de la densité de probabilité a posteriori  $\rho_X^a(X)$ . Pour ce faire, il faut d'arrêter un *critère d'optimalité*. C'est cette approche que nous utiliserons dans notre travail de thèse et nous en développons ci-dessous les étapes.

## 7.5 Critère d'optimalité : le maximum de vraisemblance

Mosegaard et Tarantola (2002) appliquent le critère de *maximum de vraisemblance* sur la densité de probabilité a posteriori  $\rho_X^a(X)$ , ce qui permet d'identifier la valeur optimale de  $X$  au sens de ce critère :

$$\arg \max_X \frac{\rho_X^a}{\mu_X^h}(X) \quad (7.9)$$

Ils soulignent l'importance au dénominateur de  $\mu_X^h$  la densité de probabilité homogène qui permet de rechercher le mode non pas de la densité de probabilité mais de ce qu'ils appellent une *densité volumique de probabilité*. Cette distinction n'a aucune importance lorsqu'on travaille sur des espaces  $\mathcal{M}$  dotés d'une métrique euclidienne et d'un système de coordonnées cartésiennes, car dans ce cas  $\mu_X^h$  est alors une constante. En revanche, si la métrique n'est pas euclidienne,  $\mu_X^h$  n'est plus une constante (voir l'annexe D). On va rencontrer ce problème dans la partie III, lorsqu'on formulera notre problème inverse.

La solution au sens du critère d'optimalité peut être estimée par des techniques variationnelles<sup>3</sup>. Elles s'appliquent lorsque le critère d'optimalité sur  $\rho_X^a$  peut se traduire par la recherche du minimum d'une fonction, la fonction coût. Ce sont des méthodes moins coûteuses en temps de calcul qui n'explorent pas "tout" l'espace des paramètres  $X$  et qui ne reconstruisent pas la distribution  $\rho_X^a(X)$ . Elles sont indiquées quand l'espace des paramètres est de grande dimension et que le calcul de  $\rho_X^a$  est coûteux; mais elles sont mal adaptées pour les distributions multimodales.

En particulier, le critère d'optimalité du *maximum de vraisemblance*, permet de dériver une fonction fonction coût  $J$  telle que :

$$J(X) = -\ln \frac{\rho_X^a}{\mu_X^h}(X) \quad (7.10)$$

Avec la formulation de la fonction coût, on a alors transformé le *problème stochastique* en *problème variationnel*. On recherche la solution  $X^a$  non pas comme le maximum de la densité volumique de probabilité a posteriori mais de façon équivalente comme le minimum de la fonction  $J$  :

$$X^a = \arg \min_X J(X) \quad (7.11)$$

Cette optimisation repose sur des méthodes numériques dites de descentes. Ces-dernières évoluent vers un minimum de  $J$  (unique dans le meilleur des cas) en un certain nombre

---

3. La solution au sens du critère d'optimalité peut bien sûr être estimée avec des techniques d'échantillonnage de Monte Carlo.



d'itérations, en empruntant un chemin de descente dans l'espace des paramètres. Ce chemin de descente est défini pas-à-pas à partir du calcul local du gradient voire du *Hessien* de  $J$  (ou quasi-hessien pour des méthodes moins coûteuse numériquement). Il faut garder en tête que ces méthodes de descentes peuvent être mises en échec en aboutissant à un minimum local et non le minimum global.

# Formulation du problème inverse : paramétrer l'erreur modèle

---

## 8.1 Ajuster les grandeurs glaciologiques en sortie des modèles

On peut appréhender l'incertitude des modèles glaciologiques de datation de différentes manières. Dans ce travail, on se propose de regarder la propagation de cette incertitude sur trois grandeurs de sortie des modèles glaciologiques : le taux d'accumulation, la fonction d'amincissement et la profondeur de fermeture des pores mesurée en m-ie (appelée *codie*, voir section 2.2 de la partie I). Compte-tenu de l'imperfection des modèles, on considère ces trois grandeurs modélisées comme des *grandeurs glaciologiques d'ébauche*. L'objectif est d'améliorer leur estimation par méthode inverse en paramétrant l'erreur commise par les modèles. On explicite dans la suite la nature de cette paramétrisation.

### 8.1.1 Champ de corrections

On se place dans le contexte d'une inversion simultanée sur un ensemble de  $N$  forages. On note  $M^K$  le modèle glaciologique associé au forage indicé  $K$ . Chaque modèle  $M^K$  permet d'estimer  $A^{b,K}$ ,  $T^{b,K}$  et  $C^{b,K}$  les trois grandeurs glaciologiques d'ébauches que sont respectivement le taux d'accumulation, la fonction d'amincissement et la *codie*.

On cherche  $A^K$ ,  $T^K$  et  $C^K$  de nouvelles estimations. Pour ce faire, on décide d'exprimer ces nouvelles estimations en fonction d'une part des grandeurs d'ébauche et d'autre part de trois fonctions  $\alpha^K(z)$ ,  $\tau^K(z)$  et  $\gamma^K(z)$  :

$$A^K(z) = \alpha^K(z) A^{b,K}(z) \quad (8.1)$$

$$T^K(z) = \tau^K(z) T^{b,K}(z) \quad (8.2)$$

$$C^K(z) = \gamma^K(z) C^{b,K}(z) \quad (8.3)$$

On introduit donc un triplet de fonctions pour chaque forage  $K$ , qui constitue la paramétrisation de l'erreur d'estimation commise chaque modèle  $M^K$ . Les fonctions  $\alpha^K$ ,  $\tau^K$  et

$\gamma^K$  dépendent de la profondeur  $z$  le long du forage auquel elles se réfèrent et on les appelle *corrections des grandeurs d'ébauche* ou plus simplement *corrections*.

L'objectif à ce stade est de formuler un problème inverse qui permette d'identifier simultanément pour chacun des  $N$  forages  $\alpha^{a,K}$ ,  $\tau^{a,K}$  et  $\gamma^{a,K}$  les trois *corrections optimales* qui s'appliquent respectivement sur  $A^{b,K}$ ,  $C^{b,K}$  et  $T^{b,K}$ . Dans la section 8.2, le qualificatif *optimal* sera précisé.

Il est important de noter qu'à partir de la connaissance des *corrections optimales* le long de chaque forage  $K$ , on peut dériver un ensemble de grandeurs dites *analysées* (i.e., optimisées) :

- les valeurs “analysées”  $A^{a,K}$ ,  $T^{a,K}$  et  $C^{a,K}$  relatives aux taux d'accumulation, à la fonction d'amincissement et à la *codie* :

$$A^{a,K}(z) = \alpha^{a,K}(z) A^{b,K}(z) \quad (8.4)$$

$$T^{a,K}(z) = \tau^{a,K}(z) T^{b,K}(z) \quad (8.5)$$

$$C^{a,K}(z) = \gamma^{a,K}(z) C^{b,K}(z) \quad (8.6)$$

- les valeurs “analysées”  $\Delta\Lambda^{a,K}(z)$  et  $L^{a,K}(z)$  relatives à la profondeur de *delta-depth* et à l'épaisseur de la couche annuelle (voir section 2.2) :

$$\Delta\Lambda^{a,K}(z) = T^{a,K}(z)C^{a,K}(z) \quad (8.7)$$

$$L^{a,K}(z) = T^{a,K}(z)A^{a,K}(z) \quad (8.8)$$

- les *chronologies glace et gaz optimales*  $\chi^{a,K}(z)$  et  $\Psi^{a,K}(z)$  :

$$\chi^{a,K}(z) = \int_0^z \frac{D^K(z')}{L^{a,K}(z')} dz' \quad (8.9)$$

$$\Psi^{a,K}(z) \approx \chi^{a,K}(z - \Delta\Lambda^{a,K}(z)) \quad (8.10)$$

Afin de synthétiser l'écriture, on introduit pour chaque forage  $K$ , le champ vectoriel  $X^K(z)$  dont les composantes sont les corrections des grandeurs d'ébauche :

$$X^K(z) = \begin{bmatrix} \alpha^K(z) \\ \gamma^K(z) \\ \tau^K(z) \end{bmatrix}$$

On regroupe ensuite dans une seule variable  $X(z)$  les champs vectoriels  $X^K(z)$  des  $N$  forages impliqués dans l'inversion :

$$X(z) = \begin{bmatrix} X^1(z) \\ X^2(z) \\ \dots \\ X^N(z) \end{bmatrix}$$

### 8.1.2 Contrainte de positivité

On assimile le champ vectoriel des corrections  $X(z)$  à la *variable d'état* du problème inverse que l'on va définir. Notre objectif de développer une formulation stochastique de ce problème inverse, amène une remarque qui découle de la nature des grandeurs taux d'accumulation, fonction d'amincissement et *codie*. En effet, la description adoptée au travers des deux équations eulériennes (8.10) et (8.10), ne permet pas d'appréhender des configurations où les grandeurs  $A^K$ ,  $C^K$  et  $T^K$  prendraient des valeurs autres que strictement positives. Par exemple, il est impossible de prendre en compte des évènements où suite à des phénomènes d'érosion par le vent, le taux d'accumulation  $A^K$  serait nul voire négatif. De la même façon, on ne peut pas utiliser une représentation algébrique des grandeurs glaciologiques, pour traiter des phénomènes tels que des retournements de couches de glace au cours de l'écoulement. Cette contrainte sur les grandeurs glaciologiques se propage évidemment sur les corrections  $\alpha^K$ ,  $\tau^K$  et  $\gamma^K$ . Les composante du vecteur  $X(z)$  sont donc toutes strictement positives. Sur la base des travaux de Jeffrey, Mosegaard et Tarantola (2002) qualifient de *variables de Jeffrey* ce type de grandeur physique. Comme on le verra dans la section suivante, cette caractéristique doit être prise en compte au moment de traduire en terme probabiliste, l'information a priori sur  $X(z)$  pour formuler le problème inverse.

## 8.2 Formulation du problème inverse

On s'attache maintenant à formuler le problème inverse qui permet d'estimer les corrections analysées  $\alpha^{a,K}$ ,  $\tau^{a,K}$  et  $\gamma^{a,K}$  simultanément pour les  $N$  forages impliqués dans l'inversion. On choisit de poser le problème en terme de *conjonction d'états d'information* au sens de Mosegaard et Tarantola (2002) (voir introduction sur le sujet section 7.2 partie

III)<sup>1</sup>. On introduit pour ce faire  $f_X^a$  la densité de probabilité a posteriori sur  $X$  le champ vectoriel de corrections. On rappelle que sous les hypothèses classiques de l'inversion (voir section 7.2 partie III), celle-ci s'écrit :

$$f_X^a(X) = C^{te} f_X^b(X) L(X) \quad (8.11)$$

où  $f_X^b$  et  $L$  sont respectivement la densité de probabilité a priori sur  $X$  et la vraisemblance. Pour construire les expressions de  $f_X^b$  et  $L$ , il faut donc définir d'une part *l'état d'information a priori sur  $X$*  (c'est-à-dire l'ébauche) et d'autre part *les états d'information expérimentale et théorique* (c'est-à-dire définir les observations et les modèles directs associés).

### 8.2.1 Discrétisation du problème

On rappelle que les grandeurs physiques que l'on cherche à optimiser se déclinent chacune en une variable indéterminée, une variable d'ébauche et une variable analysée. Dans la suite, afin de représenter l'une ou l'autre de ces trois formes prises par une même grandeur  $G$ , on utilise la notation  $G^{..K}$ .

La résolution numérique du problème impose de définir une grille de profondeurs discrètes pour chacun des  $N$  forages. Pour chaque forage  $K$ , on définit un axe  $z^K$  orienté verticalement et vers le bas le long du forage. Sur chaque axe  $z^K$ , on définit une grille constituée de  $n^K$  intervalles notés  $dz_i^K$  et délimités par les points de grille  $z_{i-1}^K$  et  $z_i^K$  où  $i \in \{1, \dots, n^K\}$ . On repère la surface et le fond du forage respectivement par  $z_0^K$  et  $z_{n^K}^K$ . Toutes les grandeurs physiques impliquées dans le problème sont discrétisées sur l'une des  $N$  grilles  $z^K$ .

Au regard de la définition des grilles du problème, on peut classer en deux catégories les grandeurs physiques associées à l'un quelconque des forages  $K$  (voir figure 8.1) :

1. La première catégorie est constituée des grandeurs attachées aux  $n^K$  intervalles de profondeurs notés  $dz_i^K$  qui représentent des couches élémentaires de glace, avec :
  - le taux d'accumulation et la correction associée,  $A_i^{..K}$ <sup>2</sup> et  $\alpha_i^{..K}$ ,
  - la fonction d'amincissement et la correction associée,  $T_i^{..K}$  et  $\tau_i^{..K}$ ,
  - l'épaisseur de la couche annuelle  $L_i^{..K}$ <sup>3</sup>,
  - et enfin la densité relative par rapport à la glace pure  $D_i^K$ .

1. Avec les commentaires de personnes éclairées, je dirai aujourd'hui "poser le problème sous l'angle bayésien".

2. On rappelle que le taux d'accumulation est mesuré en m-ie.an<sup>-1</sup>

3. On rappelle que l'épaisseur de la couche annuelle est mesurée en m-ie.an<sup>-1</sup>

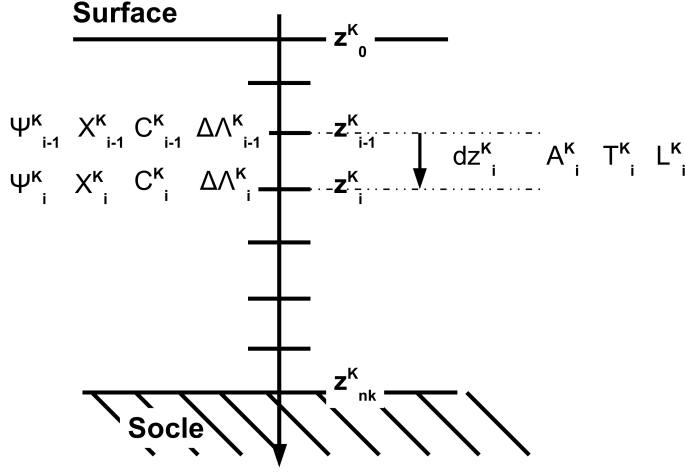


FIGURE 8.1 – Discrétisation des profondeurs pour le forage  $K$  avec les deux types de grandeurs du problème : (a) celles associées à la couche de glace  $dz_i^K$  :  $A_i^K$ ,  $T_i^K$  et  $L_i^K$ ; (b) celles associées à la profondeur  $z_i^K$  :  $\Psi_i^K$ ,  $\chi_i^K$ ,  $C_i^K$  et  $\Delta\Lambda_i^K$ .

En particulier, on décrit maintenant les corrections  $\alpha^K$ ,  $\tau^K$  et  $\gamma^K$  par des vecteurs :

$$\begin{aligned}\alpha^K &= [\alpha_1^K \alpha_2^K \dots \alpha_{n^K}^K]^T \\ \tau^K &= [\tau_1^K \tau_2^K \dots \tau_{n^K}^K]^T \\ \gamma^K &= [\gamma_1^K \gamma_2^K \dots \gamma_{n^K}^K]^T\end{aligned}\tag{8.12}$$

2. La seconde catégorie est constituée des grandeurs directement rattachées aux  $n^K + 1$  point de la grille  $z^K$ , avec pour  $p \in \{0, \dots, n^K\}$  :

- la *codie* et la correction associée,  $C_p^{:,K}$  et  $\gamma_p^{:,K}$ ,
- l'épaisseur du *delta-depth*  $\Delta\Lambda_p^{:,K}$ ,
- l'âge de la glace  $\Psi_p^K$  (voir équation continue (2.2)) :

$$\Psi_p^{:,K} = \sum_{i=0}^p \frac{D_i^K}{L_i^{:,K}} dz_i^K\tag{8.13}$$

- en particulier,  $\Psi_p^K$  et  $\Psi_p^{a,K}$  les âges glaces respectivement recherché et optimal s'écrivent :

$$\Psi_p^K = \sum_{i=0}^p \frac{\exp(-\tilde{\alpha}_i^K) \exp(-\tilde{\tau}_i^K)}{L_i^{b,K}} D_i^K dz_i^K\tag{8.14}$$

$$\Psi_p^{a,K} = \sum_{i=0}^p \frac{\exp(-\tilde{\alpha}_i^{a,K}) \exp(-\tilde{\tau}_i^{a,K})}{L_i^{b,K}} D_i^K dz_i^K\tag{8.15}$$

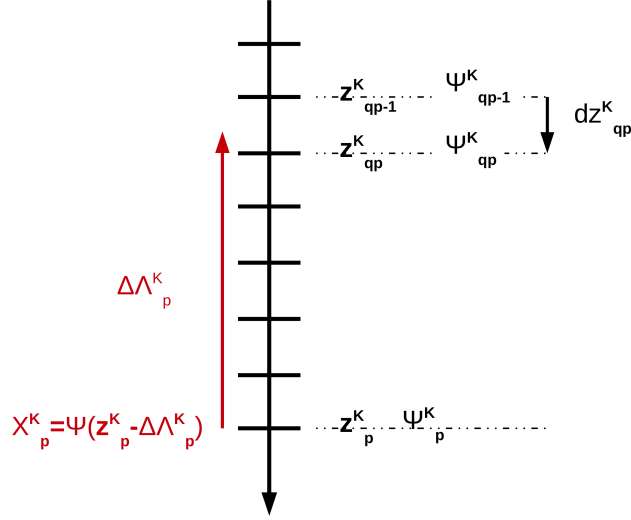


FIGURE 8.2 – Egalité entre l'âge du gaz  $\chi_p^K$  attaché à la profondeur  $z_p^K$  et l'âge de la glace attaché à la profondeur  $z_p^K - \Delta\Lambda_p^K$ .

— l'âge du gaz  $\Psi_p^K$  (voir équation continue (2.7)) :

$$\begin{aligned}\chi_p^K &= \Psi_{q_p-1}^K + \frac{z_p^K - \Delta\Lambda_p^K - z_{q_p}^K}{z_{q_p-1}^K - z_{q_p}^K} \left( \Psi_{q_p}^K - \Psi_{q_p-1}^K \right) \\ &= \Psi_{q_p-1}^K + \frac{z_p^K - \Delta\Lambda_p^K - z_{q_p}^K}{z_{q_p-1}^K - z_{q_p}^K} \frac{d\Psi_{q_p}^K}{L_{q_p}^K} dz_{q_p}^K\end{aligned}\quad (8.16)$$

L'équation (8.17) traduit simplement l'égalité entre l'âge du gaz  $\chi_p^K$  attaché à la profondeur  $z_p^K$  et l'âge de la glace attaché à la profondeur  $\zeta = z_p^K - \Delta\Lambda_p^K$  (voir 2.2 partie I). Cet âge glace  $\Psi(\zeta)$  est alors estimé par interpolation linéaire entre les points de grille  $z_{q_p-1}^K$  et  $z_{q_p}^K$  qui encadrent  $\zeta$ .

— en particulier,  $\chi_p^K$  et  $\chi_p^{a,K}$  les âges gaz recherché et optimal s'écrivent respectivement :

$$\chi_p^K = \Psi_{q_p-1}^K + \frac{z_p^K - \Delta\Lambda_p^K - z_{q_p}^K}{z_{q_p-1}^K - z_{q_p}^K} \frac{\exp(-\tilde{\alpha}_{q_p}^K) \exp(-\tilde{\tau}_{q_p}^K)}{L_{q_p}^{b,K}} dz_{q_p}^K \quad (8.17)$$

$$\chi_p^{a,K} = \Psi_{q_p-1}^{a,K} + \frac{z_p^K - \Delta\Lambda_p^{a,K} - z_{q_p}^K}{z_{q_p-1}^K - z_{q_p}^K} \frac{\exp(-\tilde{\alpha}_{q_p}^{a,K}) \exp(-\tilde{\tau}_{q_p}^{a,K})}{L_{q_p}^{b,K}} dz_{q_p}^K \quad (8.18)$$

## 8.2.2 Du maximum de vraisemblance à la fonction coût

Un calcul rapide montre que la dimension du système à inverser peut facilement atteindre une taille importante. Dans l'hypothèse où l'on inverse sur 4 forages ayant chacun une grille

de 2000 points, la dimension du vecteur d'état atteint alors 24000 points. On décide donc de ne pas échantillonner par des techniques de *Monte Carlo* la densité de probabilité a posteriori et on opte plutôt pour une "traduction" variationnelle du problème.

Ce choix implique d'arrêter un *critère d'optimalité* et on décide d'appliquer le critère du *Maximum de vraisemblance*. Comme développé dans la section 7.5,  $X^a$  la solution optimale au sens de ce critère est aussi la solution qui minimise  $J$  la fonction coût donnée par :

$$J(X) = -\ln \left( \frac{f_X^a}{\mu_X^h} \right) (X) \quad (8.19)$$

où :

1.  $f_X^a(X)$  est la densité de probabilité a posteriori sur  $X$ ,
2.  $\mu_X^h$  est la densité homogène de probabilité au sens de Mosegaard et Tarantola (2002) (voir section 7.2.1 et éventuellement l'annexe D).

Compte-tenu des *hypothèses de l'inversion Bayésienne* (en particulier, absence de corrélation entre les erreurs d'observations et les erreurs d'ébauche), l'expression de  $J$  se simplifie en une somme de deux termes  $J^b$  et  $J^o$  :

$$J(X) = J^b(X) + J^o(X) \quad (8.20)$$

On appelle  $J^b$  et  $J^o$  respectivement :

1. le *terme d'ébauche*,
2. le *terme d'observation*.

L'expression de chacun de ces deux termes se développe à partir des équations (8.11) et (8.19) et ceci donne à une constante près (que nous omettons car elle n'a pas d'impact sur le résultat de la minimisation de la fonction coût) :

$$J^b(X) = -\ln \frac{f_X^b}{\mu_X^h} (X) \quad (8.21)$$

$$J^o(X) = -\ln L(X) \quad (8.22)$$



### 8.3 Information a priori sur le vecteur de correction $X$

La distribution  $f_X^b$  doit rassembler l'*information a priori* que l'on a sur le vecteur des corrections  $X$ . Il est important de noter que  $f_X^b$  traduit la confiance que l'on a dans les grandeurs glaciologiques d'ébauche  $A^{b,K}$ ,  $T^{b,K}$  et  $C^{b,K}$ . Ceci est trivial si on regarde  $f_X^b$  non pas comme la densité de probabilité a priori sur les corrections mais comme la densité de probabilité a priori sur les valeurs relatives suivantes :

$$\begin{aligned} A_i^K / A_i^{b,K} &= \alpha_i^K \\ T_i^K / T_i^{b,K} &= \tau_i^K \\ C_i^K / C_i^{b,K} &= \gamma_i^K \end{aligned} \quad (8.23)$$

Il s'agit de garder en mémoire ce commentaire sur lequel repose le travail de définition de la distribution  $f_X^b$ .

#### 8.3.1 Hypothèses et variable de contrôle

Si on exclut l'éventualité que certains mécanismes systématiquement omis dans tous les modèles  $M^K$  génèrent des corrélations d'erreur sur l'estimation des grandeurs d'ébauche  $A^{b,K}$ ,  $T^{b,K}$  et  $C^{b,K}$ , on peut alors faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.** *Quels que soient deux forages distincts indicés  $K1$  et  $K2$  parmi les  $N$  forages impliqués dans l'inversion, les informations a priori sur les vecteurs de corrections  $X^{K1}$  et  $X^{K2}$  sont indépendantes.*

Ceci est une hypothèse faible, en particulier si les grandeurs glaciologiques d'ébauche des différents forages sont estimées à partir de modèles glaciologiques différents. Elle a l'avantage de permettre de décomposer la densité  $f_X^b$  en produit de densités marginales notées  $f_{X^K}^{b,K}$ , représentant pour un forage  $K$  donné la densité de probabilité a priori sur le vecteur de correction  $X^K$  :

$$f_X^b(X) = \prod_{K=1}^N f_{X^K}^{b,K}(X^K) \quad (8.24)$$

La seconde hypothèse que l'on développe ci-dessous va nous amener à définir une *variable de contrôle*, c'est-à-dire la variable par rapport à laquelle on va exprimer et minimiser la fonction coût. Dans la section 8.1.2, on a explicité pourquoi  $X^K$  sont des *vecteurs de Jeffrey*. Mosegaard et Tarantola (2002) montrent à partir de considérations topologiques, que seules

les densités de probabilité lognormales sont susceptibles de décrire de façon cohérente les variables de Jeffrey. On adopte cette approche et on suppose que :

**Hypothèse 2.** Les densités de probabilité  $f_{X^K}^{b,K}$  pour tout forage  $K$  sont des distributions lognormales multivariées :

$$f_{X^K}^{b,K}(X^K) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n^K}{2}} |B^K|^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^{n^K} \frac{1}{X_i^K} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \ln X^K - \ln X^{b,K} \right)^T B^{K-1} \left( \ln X^K - \ln X^{b,K} \right) \right]$$

où le vecteur  $X^{b,K}$  et la matrice  $B^K$  sont respectivement deux paramètres statistiques de la distribution.

**Remarque 1.** Tarantola (2005) étend aux distributions lognormales généralisées au sens de la norme  $L^p$  la caractéristique de pouvoir représenter adéquatement la statistique associée aux variables de Jeffrey. Ceci suggère l'exploration d'une hypothèse moins restrictive qui consiste à décrire les densités de probabilité  $f_{X^K}^{b,K}$  de la section 8.3.1 par des lognormales généralisées au sens de la norme  $L^p$  (on reviendra sur cet aspect lorsqu'on abordera les perspectives de développement).

La suite du propos va nous amener à clarifier les deux paramètres statistiques  $X^{b,K}$  et  $B^K$  que l'on peut assimiler à la médiane<sup>1</sup> pour le premier et à une mesure de dispersion pour le second.

On introduit  $\tilde{X}$  le vecteur du logarithme des corrections que l'on définit comme la *variable de contrôle* du problème ainsi que  $\tilde{X}^{b,K}$  tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \ln X \\ \tilde{X}^{b,K} &= \ln X^{b,K} \end{aligned} \tag{8.25}$$

Ce changement de variable permet de travailler avec des densités de probabilité gaussiennes (voir annexe E) notées  $f_{\tilde{X}^K}^{b,K}$  :

$$\begin{aligned} f_{\tilde{X}^K}^{b,K}(\tilde{X}^K) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n^K}{2}} |B^{b,K}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \tilde{X}^K - \tilde{X}^{b,K} \right)^T B^{K-1} \left( \tilde{X}^K - \tilde{X}^{b,K} \right) \right] \end{aligned} \tag{8.26}$$

---

1. Dans un espace à une dimension, il n'y a pas d'ambiguïté sur la médiane d'une densité de probabilité lognormale; cependant, dans le cas des densités de probabilité lognormale multivariées alors il y a non-unicité de la médiane car il y a moult façon d'obtenir une probabilité de 0.5 par intégration dans un espace multi-dimensionnel.

A ce stade, on dispose de la forme analytique de la densité de probabilité a priori  $f_{\tilde{X}}^b$  exprimée dans l'espace de contrôle (avec l'équation (8.24)) :

$$f_{\tilde{X}}^b(X) = \prod_{K=I}^N f_{\tilde{X}^K}^{b,K}(\tilde{X}^K) \quad (8.27)$$

Conformément à l'information a priori dont on dispose, il s'agit maintenant de fixer les valeurs des deux paramètres statistiques associés à chaque distribution normale  $f_{\tilde{X}^K}^{b,K}$  :

- le vecteur  $\tilde{X}^{b,K}$  appelé *vecteur d'ébauche* et qui est la moyenne, la médiane et le mode de chaque distribution  $f_{\tilde{X}^K}^{b,K}$  ;
- la matrice de covariance  $B^K$  appelée *matrice de covariance d'erreur d'ébauche*<sup>4</sup>.

### 8.3.2 Vecteur d'ébauche

On peut arrêter une valeur pour le vecteur d'ébauche  $\tilde{X}^{b,K}$  en s'intéressant plutôt au vecteur  $X^{b,K}$  puisqu'ils sont reliés par la transformation (8.25). Fixer une valeur pour l'un ou l'autre des vecteurs nécessite de comprendre sa signification statistique. On note que le vecteur  $\tilde{X}^{b,K}$  est sans ambiguïté la valeur la plus probable des distributions gaussiennes  $f_{\tilde{X}^K}^{b,K}$ . Avant d'aller plus loin, on énonce la propriété suivante :

**Propriété 1.** *La solution au sens d'un critère d'optimalité doit être invariante par un changement de variable opéré sur la densité de probabilité qui décrit le problème.*

Compte-tenu de la propriété 1, on doit aussi accepter que  $X^{b,K}$  est la valeur la plus probable des distributions  $f_{\tilde{X}^K}^{b,K}$  (ce qui n'a rien d'évident car le mode des distributions lognormales  $f_{X^K}^{b,K}$  n'est pas  $X^{b,K}$  voir annexe D).

Les équations (8.23), (8.23) et (8.23), nous amènent à nous intéresser plutôt au vecteur  $X^{b,K}$  puisqu'elles nous enseignent qu'arrêter un choix pour  $X^{b,K}$  peut se faire au travers de l'information a priori dont on dispose sur les valeurs relatives des grandeurs glaciologiques.

A ce stade néanmoins, on ne dispose d'aucune information de "biais" sur les modèles glaciologiques  $M^K$ . Cette absence de "biais" connu nous amène à considérer que les sorties des modèles  $A^{b,K}$ ,  $T^{b,K}$  et  $C^{b,K}$  sont les valeurs a priori les plus probables pour les grandeurs  $A^K$ ,  $T^K$  et  $C^K$ . Ceci se traduit par :

$$X_i^{b,K} = 1 \text{ pour } i = 1, \dots, n^K \quad (8.28)$$

---

4. Les paramètres statistiques des distributions lognormales  $f_{X^K}^{b,K}$  sont clairs à présent.

Dans l'espace de contrôle, ceci signifie qu'il faut définir un vecteur d'ébauche dont les composantes sont toutes nulles :

$$\tilde{X}_i^{b,K} = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n^K \quad (8.29)$$

On remarque ici l'importance de la propriété 1. Elle confirme l'importance des distributions volumiques de probabilité (voir annexe D) car il peut être au premier abord déroutant de considérer le vecteur  $X^{b,K}$  comme la valeur la plus probable des distributions lognormales  $f_{X^K}^{b,K}$ . En effet, la valeur la plus probable associée à la densité de probabilité lognormale  $f_{X^K}^{b,K}$  n'est non pas son mode mais sa médiane. Cette apparente contradiction est levée si l'on précise que le vecteur  $X^{b,K}$  ne maximise pas la densité de probabilité  $f_{X^K}^{b,K}$  mais la densité volumique de probabilité qui lui est associée :

$$\begin{aligned} f_{X^K}^{b,K} / \mu_{X^K}^K (X^K) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n^K}{2}} |B^{b,K}|^{\frac{1}{2}}} \\ \exp \frac{1}{2} (\ln(X^K) - \ln(X^{b,K}))^T B^{K-1} (\ln(X^K) - \ln(X^{b,K})) \end{aligned} \quad (8.30)$$

### 8.3.3 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Les matrices  $B^K$  mesurent les variances et les covariances d'erreur a priori attachées au choix de l'ébauche  $\tilde{X}^{b,K}$ . Elles pondèrent toute déviation de  $\tilde{X}^K$  par rapport à  $\tilde{X}^{b,K}$  et permettent par là même d'estimer la probabilité a priori d'observer une déviation donnée. En toute rigueur la construction de ces matrices doit reposer sur une analyse statistique. On pourrait par exemple décrire statistiquement l'écart entre les grandeurs en sortie des modèles  $M^K$  et ces mêmes grandeurs en sortie de modèles glaciologiques enrichis. Cependant, l'étude nécessaire dépasse le cadre de ce travail de thèse. Aussi, nous allons construire ces matrices sur la base de considérations simples à la fois physiques et expérimentales. Nous testerons ensuite ces matrices dans la partie expériences numériques.

On précise dès maintenant, le formalisme sur lequel on s'appuiera pour construire ces matrices. Comme la description du problème fait intervenir pour chaque forage  $K$  trois vecteurs de correction de natures distinctes, ceci nous suggère de découper en blocs matriciels chaque matrice  $B^K$  <sup>5</sup> :

5. Si les vecteurs  $\alpha$  et  $\tau$  ont la même dimension,  $\gamma$  est un vecteur de dimension inférieure.

$$\begin{pmatrix} B_{\alpha}^K & B_{\alpha\gamma}^K & B_{\alpha\tau}^K \\ B_{\alpha\gamma}^{K^T} & B_{\gamma}^K & B_{\gamma\tau}^K \\ B_{\alpha\tau}^{K^T} & B_{\gamma\tau}^{K^T} & B_{\tau}^K \end{pmatrix}$$

On remarque que :

- les blocs diagonaux  $B_{\alpha}^K$ ,  $B_{\tau}^K$  et  $B_{\gamma}^K$  rendent compte des covariances d'erreur respectivement sur  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  ;
- les blocs non-diagonaux  $B_{\alpha\gamma}^K$ ,  $B_{\alpha\tau}^K$  et  $B_{\gamma\tau}^K$  rendent compte des covariances d'erreur croisées entre  $\tilde{\alpha}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  d'une part,  $\tilde{\alpha}^K$  et  $\tilde{\tau}^K$  d'autre part et  $\tilde{\gamma}^K$  et  $\tilde{\tau}^K$  enfin.

Bien que par essence chaque matrice  $B^K$  doit être définie non négative, dans le cadre de cette étude on se restreint à des matrices  $B^K$  inversibles en faisant l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.** *Quel que soit le forage  $K$ , la matrice de covariance d'erreur d'ébauche  $B^K$  est définie strictement positive.*

On exclut donc des configurations où :

1. une variance d'erreur d'ébauche nulle pour une composante quelconque du vecteur de correction  $\tilde{X}^K$  ;
2. une corrélation d'erreur d'ébauche égale à 1 entre deux composantes distinctes du vecteur de correction.

On se propose de modéliser les matrices  $B^K$  en tenant compte dans un premier temps de la remarque suivante :

**Remarque 2.** *1. les corrections  $\alpha^K$  et  $\gamma^K$  sont sans ambiguïté des fonctions non pas de la profondeur mais de l'âge ; en effet elles corrigent respectivement le taux d'accumulation et la codie, qui sont toutes deux des grandeurs physiques dont les valeurs sont fixées dans un intervalle de temps précis du passé en fonction des conditions climatiques qui prévalent alors ;*

2. *les corrections  $\tau^K$  sont traitées comme des fonctions de la profondeur, bien que ce choix soit contestable. La fonction d'amincissement  $T(z)$  appréhendée aujourd'hui le long du forage est l'état mécanique final d'une trajectoire d'amincissement attachée à chaque particule de glace depuis son dépôt en surface jusqu'à son enfouissement à la profondeur  $z$ . C'est donc une grandeur intégrée le long de chaque trajectoire. Sa valeur résulte de multiples forçages répartis dans le temps, le long de cette trajectoire. On peut illustrer cet aspect avec trois exemples de forçage :*

- *au début de la trajectoire d'amincissement, le contenu en poussière de la neige déposée limite ultérieurement la croissance normale des grains (mécanisme d'épinglage) et cette caractéristique de la microstructure conditionne la déformation de la glace : il s'agit donc d'un forçage qui dépend non pas de la profondeur mais du temps et qui est fixé par les conditions environnementales et climatiques au moment du dépôt ;*

- parallèlement, dans le fond du forage la rugosité du socle peut conditionner les contraintes qui prévalent à la profondeur  $z$  et donc les mécanismes de déformation : il s'agit là d'un forçage indépendant du temps et strictement attaché à une profondeur ;
- enfin, durant la trajectoire de chaque particule de glace, l'évolution temporelle du taux d'accumulation contrôle la charge subie par ces particules et influence donc leur trajectoire d'amincissement.

On anticipe sur la partie expérimentale de ce manuscrit, où on sera amené à tester différentes formes pour les matrices  $B^K$ . Dans cette optique, on se propose d'introduire les matrices de corrélation d'erreur d'ébauche notées  $\rho^{\zeta\zeta',b,K}$  ainsi que les vecteurs de déviation standard notés  $\sigma^{\zeta,b,K}$  et  $\sigma^{\zeta',b,K}$  pour définir les différents blocs de chacune des matrices  $B^K$  :

$$B_{ii}^{\zeta\zeta',K} = \sigma_i^{\zeta,K} \sigma_j^{\zeta',b,K} \rho_{ij}^{\zeta\zeta',b,K} \quad (8.31)$$

où les  $\zeta$  et  $\zeta'$  représentent l'une des variables  $\alpha$ ,  $\tau$  ou  $\gamma$ .

Dans la partie expérimentale, on définira alors :

- les profils de déviation standard en donnant des valeurs aux composantes  $\sigma_i^{\alpha,b,K}$ ,  $\sigma_i^{\tau,b,K}$  et  $\sigma_i^{\gamma,b,K}$  pour  $i \in \{1, \dots, n^K\}$  ;
- les profils d'"auto-corrélation" en donnant des valeurs aux composantes  $\rho_{ij}^{\alpha,b,K}$ ,  $\rho_{ij}^{\tau,b,K}$  et  $\rho_{ij}^{\gamma,b,K}$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n^K\}$ , ceci afin de construire les blocs diagonaux  $B^{\alpha,K}$ ,  $B^{\tau,K}$  et  $B^{\gamma,K}$  ;
- les profils de corrélation en donnant des valeurs aux composantes  $\rho_{ij}^{\alpha\gamma,b,K}$ ,  $\rho_{ij}^{\alpha\tau,b,K}$  et  $\rho_{ij}^{\gamma\tau,b,K}$  pour construire les blocs non diagonaux  $B^{\alpha\gamma,K}$ ,  $B^{\alpha\tau,K}$  et  $B^{\gamma\tau,K}$ .

Pour définir ces profils, on s'appuiera :

- soit sur des enregistrements issus des forages,
- soit sur une paramétrisation au travers de fonctions dépendantes :
  - de  $z_i^K$  ou  $\Psi_i^K$  pour les profils de déviation standard ;
  - de  $|z_i^K - z_j^K|$  ou  $|\Psi_i^K - \Psi_j^K|$  pour les profils de corrélation.

### 8.3.4 Terme d'ébauche de la fonction coût

Compte-tenu de l'hypothèse 1,  $f_{\tilde{X}}^b$  la densité de probabilité a priori sur  $\tilde{X}$  s'écrit :

$$f_{\tilde{X}}^b(\tilde{X}) = \prod_{i=1}^N f_{\tilde{X}^K}^{b,K}(\tilde{X}^K) \quad (8.32)$$

Par ailleurs, on s'appuie sur le formalisme développé par Mosegaard et Tarantola (2002); Tarantola (2005), pour définir les densités de probabilité homogène  $\mu_{\tilde{X}^K}^K$ . Comme les composantes  $\tilde{X}^K$  font partie d'un espace doté d'un système de coordonnées cartésiennes et d'une métrique euclidienne, les densités de probabilité homogène  $\mu_{\tilde{X}^K}^K$  sont des constantes :

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{X}}(\tilde{X}) &= \prod_{i=1}^N \mu_{\tilde{X}^K}^K(\tilde{X}^K) \\ &= C^{te}\end{aligned}$$

On insère ces deux dernières équations dans l'expression (8.22) du terme d'ébauche  $J^b$  tout en tenant compte de l'équation (8.27) qui donne l'expression des distributions  $f_{\tilde{X}^K}^K$  comme une somme de termes que l'on note  $J^{b,K}$  :

$$J^b(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^K J^{b,K}(\tilde{X}^K) \quad (8.33)$$

termes qui se rapportent chacun à un forage donné  $K$  et qui s'écrivent :

$$J^{b,K}(\tilde{X}^K) = \frac{1}{2}(\tilde{X}^K - \tilde{X}^{b,K})^T B^{K-1}(\tilde{X}^K - \tilde{X}^{b,K}) \quad (8.34)$$

En tenant compte de la structure des matrices de covariance d'ébauche  $B^K$ , structure spécifiée par l'équation (8.31), chaque terme  $J^{b,K}$  se décompose alors en six termes :

$$J^{b,K}(\tilde{X}^K) = J_{\alpha}^{b,K} + J_{\tau}^{b,K} + J_{\gamma}^{b,K} + J_{\alpha\tau}^{b,K} + J_{\alpha\gamma}^{b,K} + J_{\tau\gamma}^{b,K} \quad (8.35)$$

dont :

— trois termes sont indépendants des covariances d'erreur entre les trois corrections  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  :

$$J_{\alpha}^{b,K} = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K})^T B_{\alpha}^{K-1}(\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) \quad (8.36)$$

$$J_{\tau}^{b,K} = \frac{1}{2}(\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K})^T B_{\tau}^{K-1}(\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \quad (8.37)$$

$$J_{\gamma}^{b,K} = \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K})^T B_{\gamma}^{K-1}(\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \quad (8.38)$$

On les regroupe dans la fonction  $J_1^{b,K}$  telle que :

$$J_1^{b,K}(\tilde{X}) = J_{\alpha}^{b,K} + J_{\tau}^{b,K} + J_{\gamma}^{b,K} \quad (8.39)$$

— trois termes rendent compte de ces covariances d'erreur :

$$J_{\alpha\tau}^{b,K} = \left(\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}\right)^T B_{\alpha\tau}^{K-1} \left(\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}\right) \quad (8.40)$$

$$J_{\alpha\gamma}^{b,K} = \left(\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}\right)^T B_{\alpha\gamma}^{K-1} \left(\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}\right) \quad (8.41)$$

$$J_{\tau\gamma}^{b,K} = \left(\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}\right)^T B_{\tau\gamma}^{K-1} \left(\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}\right) \quad (8.42)$$

On les regroupe dans la fonction  $J_2^{b,K}$  telle que :

$$J_2^{b,K}(\tilde{X}) = J_{\alpha\tau}^{b,K} + J_{\alpha\gamma}^{b,K} + J_{\tau\gamma}^{b,K} \quad (8.43)$$

## 8.4 Information expérimentale et théorique

L'objectif est de construire  $L(\tilde{X})$  la vraisemblance afin de dériver le terme  $J^o(\tilde{X})$  de la fonction coût qui mesure la "distance" entre les observations  $Y$  et ce que prédit le modèle théorique associé. Pour ce faire, Il faut :

- rassembler l'*information expérimentale* sur le vecteur des observations  $Y$  afin de définir  $f_Y(Y)$  la densité de probabilité décrivant l'incertitude attachée aux observations  $Y$  ;
- rassembler l'*information théorique* correspondante afin de définir  $\Xi(Y|\tilde{X})$  le modèle théorique direct (voir section 7.2.1). On verra section 8.4.4 que  $\Xi(Y|\tilde{X})$  fait intervenir les opérateurs d'observations  $h(X)$  et nous allons donc les définir.

On note que les expressions de  $\Xi$  et  $L$  sont dorénavant exprimées en fonction de la variable de contrôle  $\tilde{X}$  adoptée dans la section précédente.

### 8.4.1 Vecteur d'observation : formalisme

Dans le chapitre 5 partie 16.1.1.2 du manuscrit, nous avons décrit les caractéristiques d'un ensemble d'observations qui contiennent de l'information chronologique. Nous allons maintenant formaliser cette information. Pour ce faire, on scinde tout d'abord cet ensemble d'observations en deux groupes :

1. les observations de type lien stratigraphique qui impliquent nécessairement un couple de forage ;
2. les observations de type marqueurs d'âge ou marqueurs de grandeurs (taux d'accumulation, fonction d'amincissement, épaisseur de *delta-depth*) qui n'impliquent qu'un seul forage à la fois.



Afin de représenter ces deux groupes, on sépare le vecteur d'observation  $Y$  en deux composantes  $Y^*$  et  $\Delta Y$ ,  $Y^*$  représentant les observations spécifiques à un seul forage et  $\Delta Y$  représentant les observations se rapportant à un couple de forages :

$$Y = \begin{bmatrix} Y^* \\ \Delta Y \end{bmatrix}$$

On détaille maintenant la structure et le contenu des deux vecteurs  $Y^*$  et  $\Delta Y$ . Le vecteur  $Y^*$  est constitué de composantes vectorielles notées  $Y^K$  où chaque entier  $K$  se rapporte à un forage parmi les  $N$  :

$$Y^* = \begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ \dots \\ Y^N \end{bmatrix}$$

Chacunes des composantes vectorielles  $Y^K$  regroupe par ailleurs les observations suivantes :

- les marqueurs d'âge glace  $Y^{\Psi,K}$ ,
- les marqueurs d'âge gaz  $Y^{\chi,K}$ ,
- les marqueurs de taux d'accumulation  $Y^{\alpha,K}$ ,
- les marqueurs de fonction d'amincissement  $Y^{\tau,K}$ ,
- les marqueurs de *delta-depth*  $Y^{\delta,K}$ .

Le vecteur  $\Delta Y$  est constitué des composantes vectorielles notées  $\Delta Y^J$  où chaque entier  $J$  identifie un couple de forages parmi les  $C_N^2$  couples (à savoir les  $C_N^2$  combinaisons de 2 forages parmi  $N$ ) :

$$\Delta Y = \begin{bmatrix} \Delta Y^1 \\ \dots \\ \Delta Y^J \\ \dots \\ \Delta Y^{C_N^2} \end{bmatrix}$$

Chaque vecteur  $\Delta Y^J$  regroupe les observations suivantes :

- les liens stratigraphiques glace  $\Delta Y^{\Psi,J}$ ,
- les liens stratigraphiques gaz  $\Delta Y^{\chi,J}$ .

On désignera parfois le couple indicé  $J$  par la notation  $(K1, K2)$  qui spécifie les forages impliqués (avec  $K1$  et  $K2 \in \{1, 2, \dots, N\}$  et  $K1 \neq K2$ ). Parallèlement, on utilisera alternativement la notation concise  $\Delta Y^J$  ou bien la notation équivalente  $\Delta Y^{K1, K2}$ .

### 8.4.2 Incertitudes liées aux observations : hypothèses

Les conventions d'écriture ayant été spécifiées pour  $Y$ , on précise maintenant les hypothèses relatives aux incertitudes expérimentales sur lesquelles repose la formulation du problème inverse (on discutera ces hypothèses lors des applications) :

**Hypothèse 4.** *L'espace des observations noté  $\mathcal{D}$  est doté d'une métrique euclidienne et d'un système de coordonnées cartésiennes.*

**Hypothèse 5.** *Les distributions gaussiennes décrivent "correctement" les densités de probabilité associées aux incertitudes de mesure.*

**Hypothèse 6.** *Si  $K1$  et  $K2$  désignent deux forages distincts parmi les  $N$ , les incertitudes respectives sur  $Y^{K1}$  et  $Y^{K2}$  sont indépendantes.*

**Hypothèse 7.** *Si  $J1$  et  $J2$  désignent deux couples distincts parmi les  $C_N^2$  couples, les incertitudes respectives sur  $\Delta Y^{J1}$  et  $\Delta Y^{J2}$  sont indépendantes.*

**Hypothèse 8.** *Si  $K$  désigne un forage quelconque parmi les  $N$  et si  $J$  désigne un couple quelconque parmi les  $C_N^2$  couples, les incertitudes respectives sur  $Y^K$  et  $\Delta Y^J$  sont indépendantes.*

**Hypothèse 9.** *Quel que soit le forage  $K$  parmi les  $N$  forages impliqués dans l'inversion, les incertitudes respectives sur  $Y^{\Psi, K}$ ,  $Y^{\chi, K}$ ,  $Y^{\alpha, K}$ ,  $Y^{\tau, K}$  et  $Y^{\delta, K}$  sont indépendantes.*

**Hypothèse 10.** *Quel que soit le couple  $J$  parmi les  $C_N^2$  couples impliqués dans l'inversion, les incertitudes respectives sur  $\Delta Y^{\Psi, J}$  et  $\Delta Y^{\chi, J}$  sont indépendantes.*

Les conséquences des 6 hypothèses précédentes sont les suivantes :

1. Compte-tenu des hypothèses 6, 7 et 8, la densité de probabilité  $f_Y$  se décompose en un produit de  $N$  densités marginales notées  $f_{Y^K}^K$  et de  $C_N^2$  densités marginales notées  $f_{\Delta Y^J}^J$  :

$$f_Y(Y) = \prod_{K=1}^N f_{Y^K}^K(Y^K) \prod_{J=1}^{C_N^2} f_{\Delta Y^J}^J(\Delta Y^J) \quad (8.44)$$

où  $f_{Y^K}^K$  et  $f_{\Delta Y^J}^J$  sont les densité de probabilité associées aux incertitudes respectivement sur  $Y^K$  et sur  $\Delta Y^J$ .

2. Compte-tenu de l'hypothèse 9, pour chaque forage  $K$  parmi les  $N$ , la distribution associée  $f_{Y^K}^K$  se décompose en produit de 5 densités de probabilité marginales :

$$f_{Y^K}^K(Y^K) = f_{Y^{\Psi,K}}^K(Y^{\chi,K}) f_{Y^{\Psi,K}}^K(Y^{\Psi,K}) f_{Y^{\alpha,K}}^K(Y^{\alpha,K}) f_{Y^{\tau,K}}^K(Y^{\tau,K}) f_{Y^{\delta,K}}^K(Y^{\delta,K}) \quad (8.45)$$

où  $f_{Y^{\cdot,K}}^K$  sont les densités de probabilité associées aux différentes observations.

3. Enfin compte-tenu de l'hypothèse 10, pour chaque couple de forages  $J$ , la distribution associée  $f_{\Delta Y^J}^J$  se décompose en produit de 2 densités de probabilité marginale :

$$f_{\Delta Y^J}^J(\Delta Y^J) = f_{\Delta Y^{\Psi,J}}^J(\Delta Y^{\chi,J}) f_{\Delta Y^{\Psi,J}}^J(\Delta Y^{\Psi,J}) \quad (8.46)$$

où :

- $f_{\Delta Y^{\Psi,J}}^J$  est la densité de probabilité associée aux liens stratigraphiques glace,
- $f_{\Delta Y^{\chi,J}}^J$  est la densité de probabilité associée aux liens stratigraphiques gaz.

On fait enfin une dernière hypothèse :

**Hypothèse 11.** *Les incertitudes sur les profondeurs auxquelles sont effectuées les différentes mesures sont supposées négligeables devant l'incertitude sur la mesure elle-même.*

Nous allons revenir sur ces hypothèses dans les différentes sections qui suivent et qui sont dédiées à la description des grandeurs et opérateurs associés à chaque type de mesure.

### 8.4.3 Opérateur d'observation : formalisme

On note  $h(\tilde{X})$  l'opérateur d'observation généralisé qui, étant donnée une valeur pour le vecteur de contrôle  $\tilde{X}$ , permet de prédire le vecteur d'observation  $Y$  moyennant une erreur  $\eta$  :

$$Y = h(\tilde{X}) + \eta \quad (8.47)$$

De façon cohérente avec la structure du vecteur d'observation  $Y$  détaillée section 8.4.1, on décompose l'opérateur  $h$  en deux opérateurs  $h^*$  et  $\Delta h$  :

$$h = \begin{bmatrix} h^* \\ \Delta h \end{bmatrix}$$

Les opérateurs  $h^*$  et  $\Delta h$  permettent de prédire respectivement les observations  $Y^*$  et  $\Delta Y$ , moyennant les erreurs théoriques associées  $\eta$  et  $\eta'$  :

$$Y^* = h^*(\tilde{X}) + \eta \quad (8.48)$$

$$\Delta Y = \Delta h(\tilde{X}) + \eta' \quad (8.49)$$

En particulier :

**Opérateur  $h^*$**  L'opérateur  $h^*$  regroupe  $N$  opérateurs d'observation  $h^K$  :

$$h^* = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^N \end{bmatrix}$$

Chaque opérateur  $h^K$  permet de prédire la composante du vecteur  $Y^*$  se rapportant au forage  $K$ , c'est-à-dire  $Y^K$  :

$$\begin{aligned} h^K : \mathcal{M}^K &\longrightarrow \mathcal{D}^K \\ \tilde{X}^K &\longmapsto Y^K = h^K(\tilde{X}^K) + \eta^K \end{aligned}$$

où :

- le vecteur  $\tilde{X}^K$  appartient à l'espace  $\mathcal{M}^K$  ;
- les vecteurs  $\tilde{Y}^K$  et  $\eta^K$  appartiennent à l'espace  $\mathcal{D}^K$ .

**Opérateur  $\Delta h$**  L'opérateur  $\Delta h$  regroupe les opérateurs d'observation  $\Delta h^J$  où  $J \in \{1, 2, \dots, C_N^2\}$  :

$$\Delta h^J = \begin{bmatrix} \Delta h^I \\ \vdots \\ \Delta h^{C_N^2} \end{bmatrix}$$

Chaque opérateur  $\Delta h^J$  permet de prédire le vecteur d'observation  $\Delta Y^J$  composante du vecteur  $\Delta Y$ , qui se rapporte au couple de forage  $(K1, K2)$ , couple aussi indicé par l'entier  $J$  ( $\Delta h^J$  est l'écriture concise équivalente) :

$$\begin{aligned} \Delta h^J : \mathcal{M}^{K1} \times \mathcal{M}^{K2} &\longrightarrow \mathcal{D}^J \\ (\tilde{X}^{K1}, \tilde{X}^{K2}) &\longmapsto \Delta Y^J = \Delta h(\tilde{X}^{K1}, \tilde{X}^{K2}) + \eta'^J \end{aligned}$$

où les vecteurs  $\Delta Y^J$  et  $\eta'^J$  appartiennent à l'espace  $\mathcal{D}^J$ .

### 8.4.4 Opérateur d'observation et incertitudes sur le modèle théorique associé aux observations : hypothèses

On fait l'hypothèse qui suit :

**Hypothèse 12.** *Les incertitudes théoriques associées au modèle directe  $\Xi(Y|\tilde{X})$  sont négligeables par rapport aux incertitudes de mesures.*

Dans l'équation de la vraisemblance (7.8) donnée chapitre 7, on peut traduire l'hypothèse 12 en utilisant un delta dirac à la place de  $\Xi(Y|X)$ <sup>1</sup>, ce qui donne :

$$L(X) = \int_{\mathcal{D}} dY \frac{\rho_Y(Y) \delta(Y - h(\tilde{X}))}{\mu_Y^h(Y)} \quad (8.50)$$

### 8.4.5 Propriétés des espaces des observations Y et des corrections X

Suite aux hypothèses des sections 8.4.2 et 8.4.4, on note les points suivants :

- $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{M}} = \left(\cup_{K=1}^N \tilde{\mathcal{M}}^K\right)$ ;
- $Y \in \tilde{\mathcal{D}} = \left(\cup_{K=1}^N \tilde{\mathcal{D}}^K\right) \cup \left(\cup_{J=1}^{C_N^2} \tilde{\mathcal{D}}^J\right)$ ;
- Quels que soient deux forages distincts  $K1$  et  $K2 \in \{1, 2, \dots, N\}$  :  $\tilde{\mathcal{D}}^{K1} \cap \tilde{\mathcal{D}}^{K2} = \emptyset$  et  $\tilde{\mathcal{M}}^{K1} \cap \tilde{\mathcal{M}}^{K2} = \emptyset$ ;
- Quels que soient deux couples distincts de forage  $J1$  et  $J2 \in \{1, 2, \dots, C_N^2\}$  :
  - $\tilde{\mathcal{D}}^{J1} \cap \tilde{\mathcal{D}}^{J2} = \emptyset$ ;
  - et si ces deux couples implique un même forage  $K$  alors  $\tilde{\mathcal{M}}^{J1} \cap \tilde{\mathcal{M}}^{J2} \neq \emptyset$ ;
- Quels que soient le couple de forage indicé  $J$  et le forage indicé  $K1$   $\tilde{\mathcal{D}}^{K1} \cap \tilde{\mathcal{D}}^J = \emptyset$ ;
- Soit un couple de forage indicé  $J$  qui représente le couple  $(K1, K2)$  alors  $\tilde{\mathcal{M}}^{K1} \cap \tilde{\mathcal{M}}^J \neq \emptyset$ .

### 8.4.6 Observations Y

#### 8.4.6.1 Marqueurs d'âge glace et marqueurs d'âge gas

#### Discussion des hypothèses

---

1. On peut faire une hypothèse moins brutale en supposant des incertitudes théoriques normalement distribuées. (Tarantola, 2005, page 35) montre cependant que les incertitudes expérimentales et théoriques sont alors additives et impossible à distinguer l'une de l'autre dans l'expression de  $f_Y$ .

- Les observations d'âges gaz et glace appréhendés sont des grandeurs positives compte-tenu de l'axe des âges positif vers le passé dont l'origine est l'année 1950<sup>6</sup>. On pourrait être tenté de traduire cette contrainte de positivité avec une distribution lognormale. Cependant, l'erreur relative attendue sur l'âge glace ou gaz d'ébauche est relativement faible (de l'ordre de 10%<sup>7</sup>). Cette dernière caractéristique donnerait une distribution lognormale très proche d'une gaussienne compte-tenu du faible ratio variance sur médiane. L'hypothèse 5 de gaussianité est donc une hypothèse faible et nous l'adoptons.
- Les hypothèses 6, 8 et 9 d'indépendance statistique des erreurs d'observation (quand elles sont de type différent) doivent être étudiées au cas par cas et ceci ne peut-être fait que lors de l'étape d'application.
- L'incertitude sur les profondeurs associées à tout marqueur d'âge (on prend une valeur de 20 cm pour cette incertitude), implique pour le forage EDC, une incertitude sur l'âge glace de l'ordre de 20 et 350 ans respectivement à 300 et 3200m de profondeur. Ces valeurs sont négligeables en comparaison de l'erreur absolue sur les marqueurs d'âge gaz et glace impliqués dans ce travail (à l'exception des horizons volcaniques datées à quelques années près pour le dernier millénaire dans le haut du forage). L'hypothèse 11 est donc justifiée pour ce type de données.

**Notations** Dans le tableau 8.1, sont spécifiées les notations utilisées pour décrire les marqueurs d'âges gaz et glace associés à un des forage  $K$  parmi les  $N$ , avec en particulier pour chaque marqueur : i) la variable aléatoire associée, ii) les valeurs les plus probables de l'âge des marqueurs et leur profondeur, iii) l'opérateur d'observation (modèle théorique direct), iv) la matrice de covariance d'erreur d'observation.

---

6. Ceci peut-être faux pour des observations localisées au niveau de la colonne de névé mais cette-dernière représente à peine 4% de la toute l'épaisseur d'un forage et en général les âges névé sont bien contraints.

7. On a par exemple une erreur absolue de l'ordre de 20ka à 800ka BP pour le forage de EDC.

	Marqueurs d'âge glace	Marqueurs d'âge gaz
Nombre d'observations	$n_{\Psi,K}$	$n_{\chi,K}$
Profondeur	$\hat{z}^{\Psi,K}$	$\hat{z}^{\chi,K}$
Variable aléatoire	$Y^{\Psi,K}$	$Y^{\chi,K}$
Age le plus probable	$\hat{Y}^{\Psi,K}$	$\hat{Y}^{\chi,K}$
Densité de probabilité	$f_{Y^{\Psi,K}}$	$f_{Y^{\chi,K}}$
Distribution	$\mathcal{N}(\hat{Y}^{\Psi,K}, R^{\Psi,K})$	$\mathcal{N}(\hat{Y}^{\chi,K}, R^{\chi,K})$
Matrice de corrélation d'erreur	$\rho_{ij}^{\Psi,K}$	$\rho_{ij}^{\chi,K}$
Vecteur de variance d'erreur	$\sigma^{\Psi,K}$	$\sigma^{\chi,K}$
Opérateur d'observation	$h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K)$	$h^{\chi,K}(\tilde{X}^K)$

TABLEAU 8.1 – Grandeurs associées aux observations de type marqueurs d'âge glace et gaz pour le forage  $K$ . La matrice de corrélation d'erreur d'observation est définie de façon discrète avec  $i, j \in \{1, \dots, n_{*,K}\}$  où  $*$  représente  $\Psi$  ou  $\chi$  et  $\rho_{ij}^{*,K}$  représente les corrélations d'erreur entre les mesures d'âge aux profondeurs  $\hat{z}_i^{*,K}$  et  $\hat{z}_j^{*,K}$ .

### Expression des opérateurs d'observation pour les marqueurs d'âge glace et gaz

Pour le forage  $K$ , on a :

1. **Opérateur d'observation des marqueurs d'âge glace** :  $h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K)$  permet de prédire le jeu de marqueurs d'âge glace  $\hat{Y}^{\Psi,K}$  et cet opérateur n'est fonction que des corrections  $\tilde{\alpha}^K$  et  $\tilde{\tau}^K$  :

$$h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K) = \int_{\zeta^K=0}^{\hat{z}^{\Psi,K}} \frac{\exp[-\tilde{\alpha}^K(\zeta^K)] \exp[-\tilde{\tau}^K(\zeta^K)]}{A^{b,K}(\zeta^K) T^{b,K}(\zeta^K)} D^K(\zeta^K) d\zeta^K \quad (8.51)$$

2. **Opérateur d'observation des marqueurs d'âge gaz** :  $h^{\chi,K}(\tilde{X}^K)$  permet de prédire le jeu de mesures  $\hat{Y}^{\chi,K}$  et il est fonction des corrections  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  :

$$h^{\chi,K}(\tilde{X}^K) = \int_{\zeta^K=0}^{\hat{z}^{\chi,K} - \Delta\Lambda^K(\hat{z}^{\chi,K})} \frac{\exp[-\tilde{\alpha}^K(\zeta^K)] \exp[-\tilde{\tau}^K(\zeta^K)]}{A^{b,K}(\zeta^K) T^{b,K}(\zeta^K)} D^K(\zeta^K) d\zeta^K \quad (8.52)$$

avec :

$$\Delta\Lambda^K(\hat{z}^{\chi,K}) = \tau^K(\hat{z}^{\chi,K}) \gamma^K(\hat{z}^{\chi,K}) T^{b,K}(\hat{z}^{\chi,K}) C^{b,K}(\hat{z}^{\chi,K}) \quad (8.53)$$

Dans l'annexe F section F.1, on trouve une description plus détaillée des différents opérateurs associés aux marqueurs d'âge glace et gaz avec notamment l'expression discrète des opérateurs d'observation  $h^{\Psi,K}$  et  $h^{\chi,K}$ .

### 8.4.6.2 Marqueurs de grandeurs

On présente les marqueurs d'accumulation, d'amincissement et de delta-depth dans cette section. On a énoncé la contrainte de positivité section 8.1.2 qui s'applique sur les grandeurs  $T^K$ ,  $A^K$ ,  $C^K$  et leur fonction de correction respective. Cette contrainte ne s'applique pas forcément sur les observations de type marqueur de grandeur, car la distribution des erreurs d'observation est propre au processus de "mesure". On a cependant fait le choix d'appliquer tout de même cette contrainte de positivité sur les observations de type marqueur de grandeur parce que les modèles d'observation associés sont formulés pour prédire des grandeurs positives. On suppose par ailleurs que la densité de probabilité associée à tout marqueur de grandeur  $Y^{*,K}$  est lognormale (avec  $*$  =  $\alpha, \tau$  ou  $\delta$ ). On réalise le même changement de variable défini section 8.3.1) pour le vecteur de correction  $X$  afin de travailler avec des densités de probabilité gaussiennes :

$$\tilde{Y}^{*,K} = \ln Y^{*,K} \quad (8.54)$$

**Notations** Dans le tableau 8.2, sont spécifiées les notations utilisées pour décrire les marqueurs de grandeur avec en particulier pour chaque forage  $K$  : i) la variable aléatoire associée, ii) les valeurs les plus probables et leur profondeur, iii) l'opérateur d'observation et iv) la matrice de covariance d'erreur d'observation.

**Expression des opérateurs d'observation des marqueurs de grandeurs** On a pour le forage  $K$  :

1. **Opérateur d'observation des marqueurs d'accumulation** :  $h^{\alpha,K}(\tilde{X}^K)$  permet de prédire le jeu de mesures  $\hat{\tilde{Y}}^{\alpha,K}$  et il n'est fonction que de la correction  $\tilde{\alpha}^K$  :

$$h^{\alpha,K}(\tilde{\alpha}^K) = \tilde{\alpha}^K(\hat{\tilde{z}}^{\alpha,K}) \quad (8.55)$$

2. **Opérateur d'observation des marqueurs de fonction d'amincissement** :  $h^{\tau,K}(\tilde{X}^K)$  permet de prédire le jeu de mesures  $\hat{\tilde{Y}}^{\tau,K}$  et il n'est fonction que de la correction  $\tilde{\tau}^K$  :

$$h^{\tau,K}(\tilde{\tau}^K) = \tilde{\tau}^K(\hat{\tilde{z}}^{\tau,K}) \quad (8.56)$$

3. **Opérateur d'observation des marqueurs de delta-depth** :  $h^{\delta,K}(\tilde{X}^K)$  permet de prédire le jeu de mesures  $\hat{\tilde{Y}}^{\delta,K}$  et il est fonction des corrections  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  :

$$h^{\delta,K}(\tilde{\tau}^K, \tilde{\gamma}^K) = \tilde{\tau}^K(\hat{\tilde{z}}^{\delta,K}) + \tilde{\gamma}^K(\hat{\tilde{z}}^{\delta,K}) \quad (8.57)$$



	Accumulation	Amincissement	Ddelta-depth
Nombre d'observations	$n_{\alpha,K}$	$n_{\tau,K}$	$n_{\delta,K}$
Profondeur	$\hat{z}^{\alpha,K}$	$\hat{z}^{\tau,K}$	$\hat{z}^{\delta,K}$
Variable aléatoire	$Y^{\alpha,K}$	$Y^{\tau,K}$	$Y^{\delta,K}$
Densité de probabilité	lognormal	lognormal	lognormal
Médiane de la lognomale	$\hat{Y}^{\alpha,K}$	$\hat{Y}^{\tau,K}$	$\hat{Y}^{\delta,K}$
Transformation (8.54)	$Y^{\alpha,K} \rightarrow \tilde{Y}^{\alpha,K}$	$Y^{\tau,K} \rightarrow \tilde{Y}^{\tau,K}$	$Y^{\delta,K} \rightarrow \tilde{Y}^{\delta,K}$
Valeur la plus probable	$\hat{\hat{Y}}^{\alpha,K}$	$\hat{\hat{Y}}^{\tau,K}$	$\hat{\hat{Y}}^{\delta,K}$
Densité de probabilité	$f_{\hat{\hat{Y}}^{\alpha,K}}^{\alpha,K}$	$f_{\hat{\hat{Y}}^{\tau,K}}^{\tau,K}$	$f_{\hat{\hat{Y}}^{\delta,K}}^{\delta,K}$
Distribution	$\mathcal{N}(\hat{\hat{Y}}^{\alpha,K}, R^{\alpha,K})$	$\mathcal{N}(\hat{\hat{Y}}^{\tau,K}, R^{\tau,K})$	$\mathcal{N}(\hat{\hat{Y}}^{\delta,K}, R^{\delta,K})$
Matrice de corrélation d'erreur	$\rho_{ij}^{\alpha,K}$	$\rho_{ij}^{\tau,K}$	$\rho_{ij}^{\delta,K}$
Vecteur de variance d'erreur	$\sigma^{\alpha,K}$	$\sigma^{\tau,K}$	$\sigma^{\delta,K}$
Opérateur d'observation	$h^{\alpha,K}(\tilde{X}^K)$	$h^{\tau,K}(\tilde{X}^K)$	$h^{\delta,K}(\tilde{X}^K)$

TABLEAU 8.2 – Grandeurs associées aux observations de type marqueurs de grandeurs pour le forage  $K$ . La matrice de corrélation d'erreur d'observation est définie de façon discrète avec  $i, j \in \{1, \dots, n_{*,K}\}$  où  $*$  représente  $\alpha$ ,  $\tau$  ou  $\delta$  et  $\rho_{ij}^{*,K}$  représente les corrélations d'erreur entre les observations  $\hat{\hat{Y}}_i^K$  et  $\hat{\hat{Y}}_j^K$ .

Dans l'annexe F sections F.3, F.4 et F.5, on trouve une description plus détaillée des différents opérateurs associés aux marqueurs de grandeur avec notamment l'expression discrète des opérateurs d'observation  $h^{\alpha,K}$ ,  $h^{\tau,K}$  et  $h^{\delta,K}$ .

### 8.4.6.3 Marqueurs de liens stratigraphiques glace et gaz

On travaille maintenant avec les observations de type lien stratigraphique glace ou gaz. Elles impliquent un couple de forage ( $K1, K2$ ) que l'on indice avec l'entier  $J$ . Ces mesures mettent en jeu deux vecteurs de profondeurs notées  $z^{*,J,K1}$  et  $z^{*,J,K2}$  de dimension  $n^{*,J}$ , qui se rapportent respectivement aux forages  $K1$  et  $K2$  (avec l'indice  $*$  qui se réfère soit à  $\Psi$  soit à  $\chi$  suivant qu'il s'agit d'un lien glace ou gaz). L'observation du  $i^{eme}$  lien stratigraphique, implique la connaissance de la différence d'âge (glace ou gaz) entre les strates de glace repérées respectivement par les profondeurs  $z_i^{*,J,K1}$  du forage  $K1$  et  $z_i^{*,J,K2}$  du forage  $K2$ <sup>1</sup>. On rassemble la mesure de ces  $n^{*,J}$  différences d'âge dans le vecteur noté  $\Delta\hat{Y}^{*,J}$  (écriture condensée de  $\Delta\hat{Y}^{*,K1,K2}$ ).

**Notations** Dans le tableau 8.3, on spécifie les notations utilisées pour décrire les liens stratigraphiques glace ou gaz associés au couple de forage ( $K1, K2$ )  $\leftrightarrow J$ , avec en particulier

1. Un lien stratigraphique entre deux forages correspond en général à un même évènement enregistré de façon concomitante dans chacun des deux forages, aussi la différence d'âge est a priori nulle.

pour chaque marqueur : i) la variable aléatoire correspondante, ii) les valeurs les plus probables des différences d'âge et leur profondeur associée, iii) l'opérateur d'observation et iv) la matrice de covariance d'erreur d'observation.

	Liens stratigraphiques glace	Liens stratigraphiques gaz
Nombre d'observations	$n_{\Psi,J}$	$n_{\chi,J}$
Couple de profondeurs	$(\hat{z}^{\Psi,J,K1}, \hat{z}^{\Psi,J,K2})$	$(\hat{z}^{\chi,J,K1}, \hat{z}^{\chi,J,K2})$
Variable aléatoire	$\Delta Y^{\Psi,K}$	$\Delta Y^{\chi,K}$
Différence d'âge la plus probable	$\Delta \hat{Y}^{\Psi,K}$	$\Delta \hat{Y}^{\chi,K}$
Densité de probabilité	$f_{\Delta Y^{\Psi,J}}^{\Psi,J}$	$f_{\Delta Y^{\chi,J}}^{\chi,J}$
Distribution	$\mathcal{N}(\Delta \hat{Y}^{\Psi,J}, R^{\Psi,J})$	$\mathcal{N}(\Delta \hat{Y}^{\chi,K}, R^{\chi,K})$
Matrice de corrélation d'erreur	$\rho_{ij}^{\Psi,J}$	$\rho_{ij}^{\chi,J}$
Vecteur de variance d'erreur	$\sigma^{\Psi,J}$	$\sigma^{\chi,J}$
Opérateur d'observation	$\Delta h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K)$	$\Delta h^{\chi,K}(\tilde{X}^K)$

TABLEAU 8.3 – Grandeurs associées aux observations de type liens stratigraphiques glace et gaz reliant le couple de forages  $(K1, K2)$  indicé par l'entier  $J$ . Les matrices de covariance et de corrélation d'erreur d'observation ainsi que les vecteurs de variance d'erreur sont définis de façon discrète avec  $i, j \in \{1, \dots, n_{*,J}\}$  où  $*$  représente  $\Psi$  ou  $\chi$  et  $\rho_{ij}^{*,J}$  représente les corrélations d'erreur entre les différences d'âge  $\Delta Y_i^{*,J}$  et  $\Delta Y_j^{*,J}$  associées respectivement au  $i^{\text{ème}}$  et au  $j^{\text{ème}}$  couple de profondeurs reliées stratigraphiquement (soit  $(\hat{z}_i^{*,J,K1}, \hat{z}_i^{*,J,K2})$  et  $(\hat{z}_i^{*,J,K1}, \hat{z}_i^{*,J,K2})$ ).

### Expression des opérateurs d'observation des liens stratigraphiques glace ou gaz

On a pour chaque couple de forage  $(K1, K2) \leftrightarrow J$  :

1. **Opérateur d'observation des liens stratigraphique glace** : le modèle d'observation théorique est noté  $\Delta h^{\Psi,J}(\tilde{X})$  qui est une écriture condensée pour  $\Delta h^{\Psi,K1,K2}(\tilde{X})$ . Il implique de calculer deux âges glace, respectivement attachés aux forages  $K1$  et  $K2$ , puis d'en faire la différence. On introduit donc deux opérateurs  $h^{\Psi,J,K1}$  et  $h^{\Psi,J,K2}$ , qui mesurent respectivement les âges glace des forages  $K1$  et  $K2$  aux profondeurs rassemblées dans les vecteurs  $\hat{z}^{\Psi,J,K1}$  et  $\hat{z}^{\Psi,J,K2}$ . L'opérateur  $\Delta h^{\Psi,J}(\tilde{X})$  s'écrit alors :

$$\Delta h^{\Psi,J}(\tilde{X}) = h^{\Psi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\Psi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \quad (8.58)$$

L'opérateur  $h^{\Psi,J,K1}$  est fonction des corrections  $\tilde{\alpha}^{K1}$  et  $\tilde{\tau}^{K1}$  alors que  $h^{\Psi,J,K2}$  est fonction des corrections  $\tilde{\alpha}^{K2}$  et  $\tilde{\tau}^{K2}$ . On ne donne l'expression que de l'opérateur associé au forage  $K1$ , l'expression de  $h^{\Psi,J,K2}$  s'obtient en substituant  $K2$  à  $K1$  :

$$h^{\Psi,J,K1}(X^{\tilde{K}1}) = \int_{\zeta^{K1}=0}^{\hat{z}^{\Psi,J,K1}} \frac{\exp[-\tilde{\alpha}^{K1}(\zeta^{K1})] \exp[-\tilde{\tau}^{K1}(\zeta^{K1})]}{A^{b,K1}(\zeta^{K1})T^{b,K1}(\zeta^{K1})} D^{K1}(\zeta^{K1}) d\zeta^{K1} \quad (8.59)$$

2. **Opérateur d'observation des liens stratigraphique gaz** : le modèle d'observation théorique direct noté  $\Delta h^{\chi,J}(\tilde{X})$  implique là encore de calculer deux âges (cette fois-ci des âges gaz), puis d'en faire la différence. Ce modèle d'observation se décompose donc aussi en deux opérateurs  $h^{\chi,J,K1}$  et  $h^{\chi,J,K2}$  permettant de prédire l'âge gaz aux profondeurs rassemblées respectivement dans les vecteurs  $\hat{z}^{\chi,J,K1}$  et  $\hat{z}^{\chi,J,K2}$  :

$$\Delta h^{\chi,J}(\tilde{X}) = h^{\chi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\chi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \quad (8.60)$$

L'opérateur  $h^{\chi,J,K1}$  est fonction des corrections  $\tilde{\alpha}^{K1}$ ,  $\tilde{\tau}^{K1}$  et  $\tilde{\gamma}^{K1}$  alors que  $h^{\chi,J,K2}$  est fonction des corrections  $\tilde{\alpha}^{K2}$ ,  $\tilde{\tau}^{K2}$  et  $\tilde{\gamma}^{K2}$ . On ne donne l'expression que de l'opérateur associé au forage  $K1$ , l'expression de  $h^{\chi,J,K2}$  se déduit en substituant  $K2$  à  $K1$  :

$$h_i^{\chi,J,K1}(X^{\tilde{K}1}) = \int_{\zeta^{K1}=0}^{\hat{z}^{\chi,J,K1} - \Delta\Lambda^K(\hat{z}^{\chi,J,K1})} \frac{\exp[-\tilde{\alpha}^{K1}(\zeta^{K1})] \exp[-\tilde{\tau}^{K1}(\zeta^{K1})]}{A^{b,K1}(\zeta^{K1})T^{b,K1}(\zeta^{K1})} D^{K1}(\zeta^{K1}) d\zeta^{K1} \quad (8.61)$$

### 8.4.7 Terme d'observation de la fonction coût

Compte-tenu de l'hypothèse 12 qui stipule que l'on travaille avec des modèles d'observation théoriques qui sont exacts alors :

1. en insérant dans l'expression de la vraisemblance (8.50) les densités de probabilité marginales associées à chaque type d'observation qui sont gaussiennes comme explicité section 8.4.6<sup>8</sup>,
2. puis en réalisant les intégrations nécessaires sur les différentes composantes de la variable d'observation  $Y$  dans l'équation résultante<sup>9</sup>,

alors on peut dériver l'expression de la vraisemblance :

8. Les équations correspondant aux densités de probabilité marginales sont rapportées en annexe par les équations (F.2), (F.10), (F.24), (F.31), (F.38), (F.45) et (F.54).

9. L'équation résultante comporte un produit de delta dirac de type.

$$\begin{aligned}
L(\tilde{X}) &= \prod_{K=I}^N [f_{Y^{\Psi,K}}^{\Psi,K}(h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K))] \prod_{K=I}^N [f_{Y^{\chi,K}}^{\chi,K}(h^{\chi,K}(\tilde{X}^K))] \\
&\times \prod_{K=I}^N [f_{Y^{\alpha,K}}^{\alpha,K}(h^{\alpha,K}(\tilde{X}^K))] \prod_{K=I}^N [f_{Y^{\tau,K}}^{\tau,K}(h^{\tau,K}(\tilde{X}^K))] \prod_{K=I}^N [f_{Y^{\delta,K}}^{\delta,K}(h^{\delta,K}(\tilde{X}^K))] \\
&\times \prod_{J=I}^{C_N^2} [f_{\Delta Y^{\Psi,J}}^{\Psi,J}(\Delta h^{\Psi,J}(\tilde{X}))] \prod_{J=I}^{C_N^2} [f_{\Delta Y^{\chi,J}}^{\chi,J}(\Delta h^{\chi,J}(\tilde{X}))]
\end{aligned} \tag{8.62}$$

Ensuite, à partir de l'expression  $L(\tilde{X})$  et conformément à l'équation (8.22) donnant le terme d'observation de la fonction coût, on peut écrire  $J^o$  sous la forme de 7 termes qui se réfèrent chacun à un des types d'observation impliqués dans l'inversion :

$$\begin{aligned}
J^o(\tilde{X}) &= \\
&J_{\Psi}^o(\tilde{X}) + J_{\chi}^o(\tilde{X}) + J_{\alpha}^o(\tilde{X}) + J_{\tau}^o(\tilde{X}) + J_{\delta}^o(\tilde{X}) + J_{\Delta\Psi}^o(\tilde{X}) + J_{\Delta\chi}^o(\tilde{X})
\end{aligned} \tag{8.63}$$

où avec les équations donnant  $f_{Y^{\Psi,K}}^{\Psi,K}$ ,

— le terme  $J_{\Psi}^o$  relatif aux observations de type marqueur d'âge glace s'écrit (voir équation (F.2) de  $f_{Y^{\Psi,K}}^{\Psi,K}$  en annexe) :

$$\begin{aligned}
J_{\Psi}^o(\tilde{X}) &= \\
&\sum_{K=I}^N \frac{1}{2} (Y^{\Psi,K} - h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K))^T R^{\Psi,K-1} (Y^{\Psi,K} - h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K))
\end{aligned} \tag{8.64}$$

— le terme  $J_{\chi}^o$  relatif aux observations de type marqueur d'âge gaz s'écrit (voir équation (F.10) de  $f_{Y^{\chi,K}}^{\chi,K}$  en annexe) :

$$\begin{aligned}
J_{\chi}^o &= \\
&\sum_{K=I}^N \frac{1}{2} (Y^{\chi,K} - h^{\chi,K}(\tilde{X}^K))^T R^{\chi,K-1} (Y^{\chi,K} - h^{\chi,K}(\tilde{X}^K))
\end{aligned} \tag{8.65}$$

— le terme  $J_{\alpha}^o$  relatif aux observations de type marqueur d'accumulation s'écrit (voir équation (F.24) de  $f_{Y^{\alpha,K}}^{\alpha,K}$  en annexe) :

$$\begin{aligned}
J_{\alpha}^o(\tilde{X}) &= \\
&\sum_{K=I}^N \frac{1}{2} (\tilde{Y}^{\alpha,K} - h^{\alpha,K}(\tilde{\alpha}^K))^T R^{\alpha,K-1} (\tilde{Y}^{\alpha,K} - h^{\alpha,K}(\tilde{\alpha}^K))
\end{aligned} \tag{8.66}$$

- le terme  $J_\tau^o$  relatif aux observations de type marqueur d'amincissement s'écrit (voir équation (F.31) de  $f_{Y^\tau, K}^{\tau, K}$  en annexe) :

$$J_\tau^o(\tilde{X}) = \sum_{K=I}^N \frac{1}{2} \left( \tilde{Y}^{\tau, K} - h^{\tau, K}(\tilde{\tau}^K) \right)^T R^{\tau, K-1} \left( \tilde{Y}^{\tau, K} - h^{\tau, K}(\tilde{\tau}^K) \right) \quad (8.67)$$

- le terme  $J_\delta^o$  relatif aux observations de type marqueurs de delta-depth s'écrit (voir équation (F.38) de  $f_{Y^\delta, K}^{\delta, K}$  en annexe) :

$$J_\delta^o(\tilde{X}) = \sum_{K=I}^N \frac{1}{2} \left( \tilde{Y}^{\delta, K} - h^{\delta, K}(\tilde{\tau}^K, \tilde{\gamma}^K) \right)^T R^{\delta, K-1} \left( \tilde{Y}^{\delta, K} - h^{\delta, K}(\tilde{\tau}^K, \tilde{\gamma}^K) \right) \quad (8.68)$$

- le terme  $J_{\Delta^\Psi}^o$  relatif aux observations de type liens stratigraphiques "glace" s'écrit (voir équation (F.45) de  $f_{\Delta Y^\Psi, K}^{\Psi, K}$  en annexe) :

$$J_{\Delta^\Psi}^o(\tilde{X}) = \sum_{J=I}^{C_N^2} \frac{1}{2} \left( \Delta Y^{\Psi, J} - \Delta h^{\Psi, J}(\tilde{X}) \right)^T R^{\Psi, J-1} \left( \Delta Y^{\Psi, J} - \Delta h^{\Psi, J}(\tilde{X}) \right) \quad (8.69)$$

- le terme  $J_{\Delta^\chi}^o$  relatif aux observations de type liens stratigraphiques "gaz" s'écrit (voir équation (F.45) de  $f_{\Delta Y^\chi, K}^{\chi, K}$  en annexe) :

$$J_{\Delta^\chi}^o = \sum_{J=I}^{C_N^2} \frac{1}{2} \left( \Delta Y^{\chi, J} - \Delta h^{\chi, J}(\tilde{X}) \right)^T R^{\chi, J-1} \left( \Delta Y^{\chi, J} - \Delta h^{\chi, J}(\tilde{X}) \right) \quad (8.70)$$

## 8.5 Terme régularisant de la fonction coût : information facultative

On a souligné dans l'introduction que choisir l'inférence bayésienne pouvait se révéler inadapté notamment lorsque qu'on dispose de trop peu d'information a priori sur les paramètres du modèle. Il existe alors une alternative si les paramètres du modèle sont des fonctions du temps ou de l'espace, ce qui est le cas des corrections qui nous intéressent. Un des avantages est la sélection d'une classe bien définie de solutions contrairement à la sélection opérée au travers des matrices de covariance d'erreur d'ébauche qui peut être opaque. Les critères de régularisation les plus communément utilisés minimisent :

- soit la norme de la solution ;
- soit la norme de sa dérivée première ;
- soit la norme de sa dérivée seconde.

Dans la partie **IV**, on testera cette approche. Pour cette raison, on introduit le formalisme nécessaire. Afin de sélectionner des corrections "régulières", on ajoute à la fonction coût, le terme  $J^r$  constitué de  $N$  termes  $J^{r,K}$  qui mesurent chacun le degré de "rugosité" de  $X^K$  :

$$J^r = \sum_{K=I}^N J^{r,K} \quad (8.71)$$

$$(8.72)$$

Afin de définir les  $N$  termes  $J^{r,K}$ , on introduit  $N$  opérateurs linéaires notés  $S^K$ . Quelle que soit la nature de la régularisation (norme de  $X^K$ , norme de la dérivée première ou seconde de  $X^K$ ,... etc), on introduit les opérateurs  $S^K$  basés sur des schémas de différences finies :

$$\begin{aligned} J^{r,K} &= \|S^K X^K\|^2 \\ &= X^{K^T} S^{K^T} S^K X^K \end{aligned} \quad (8.73)$$

La mesure de "régularité" s'applique indépendamment sur les trois composantes de chaque vecteur  $X^K$ , les opérateurs  $S^K$  sont donc de type diagonal bloc :

$$\begin{pmatrix} S^{\alpha,K} & 0 & 0 \\ 0 & S^{\gamma,K} & 0 \\ 0 & 0 & S^{\tau,K} \end{pmatrix}$$

où  $S^{\alpha,K}$ ,  $S^{\gamma,K}$  et  $S^{\tau,K}$  s'appliquent respectivement sur  $\alpha^K$ ,  $\tau^K$  et  $\gamma^K$ . On peut donc développer l'équation (8.74) en trois termes indépendants :

$$J^{r,K} = \alpha^{K^T} S^{\alpha,K^T} S^{\alpha,K} \alpha^K + \tau^{K^T} S^{\tau,K^T} S^{\tau,K} \tau^K + \gamma^{K^T} S^{\gamma,K^T} S^{\gamma,K} \gamma^K \quad (8.74)$$

### 8.5.0.1 Choix du critère de régularisation

On choisit de travailler avec des opérateurs de dérivée seconde qui limitent les changements de pente trop "rapides". La remarque 2 de la section 8.3.3, nous amène à définir

1.  $S^{\alpha,K}$ ,  $S^{\gamma,K}$  comme des opérateurs discrets de dérivée seconde par rapport à la coordonnée âge glace :

$$\begin{aligned} S_{ij}^{\zeta,K} &= \delta_{i,i} \frac{2 d\Psi_{i+1}^{b,K}}{d\Psi_{i+1}^{b,K} + d\Psi_{i+2}^{b,K}} + \delta_{i,i+1} \frac{2 d\Psi_{i+1}^{b,K}}{d\Psi_i^{b,K} + d\Psi_{i+1}^{b,K}} \\ &- \delta_{i,i+2} \left( \frac{d\Psi_{i+1}^{b,K}}{d\Psi_{i+1}^{b,K} + d\Psi_{i+2}^{b,K}} + \frac{d\Psi_{i+1}^{b,K}}{d\Psi_i^{b,K} + d\Psi_{i+1}^{b,K}} \right) \end{aligned} \quad (8.75)$$

avec  $\zeta = \alpha$  ou  $\gamma$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n^K - 2\}$  et  $d\Psi_i^{b,K} = \Psi_i^{b,K} - \Psi_{i-1}^{b,K}$ ;

2.  $S_{\tau}^K$  comme un opérateur discret de dérivée seconde par rapport à la coordonnée de profondeur :

$$\begin{aligned} S_{ij}^{\tau,K} &= \delta_{i,i} \frac{2 dz_{i+1}^{b,K}}{dz_{i+1}^{b,K} + dz_{i+2}^{b,K}} + \delta_{i,i+1} \frac{2 dz_{i+1}^{b,K}}{dz_i^{b,K} + dz_{i+1}^{b,K}} \\ &- \delta_{i,i+2} \left( \frac{dz_{i+1}^{b,K}}{dz_{i+1}^{b,K} + dz_{i+2}^{b,K}} + \frac{dz_{i+1}^{b,K}}{dz_i^{b,K} + dz_{i+1}^{b,K}} \right) \end{aligned} \quad (8.76)$$

avec  $i \in \{1, 2, \dots, n^K - 2\}$  et  $dz_i^K = z_i^K - z_{i-1}^K$ .

## 8.6 En résumé

Dans ce chapitre, on a introduit l'erreur de  $N$  modèles glaciologiques  $M^K$  pour lesquels on sait que l'incertitude théorique est avant tout non-paramétrique. L'objectif est d'améliorer l'estimation des chronologies gaz et glace  $\chi^{b,K}$  et  $\Psi^{b,K}$  estimées par les modèles  $M^K$  en identifiant simultanément cette erreur pour les  $N$  forages. La paramétrisation de l'erreur est réalisée au moyen de  $N$  vecteurs  $X^K$  (regroupé dans le vecteur  $X$ ) qui comportent chacun trois composantes vectorielles  $\alpha^K$ ,  $\tau^K$  et  $\gamma^K$  discrétisées sur les grilles de profondeur  $z^K$ . Ces trois fonctions sont appelées corrections car leurs composantes opèrent comme facteurs multiplicatifs appliqués sur trois grandeurs glaciologiques d'ébauche en sortie des modèles  $M^K$ . Ces trois grandeurs glaciologiques d'ébauche sont le taux d'accumulation  $A^{b,K}$ , la fonction d'amincissement  $T^{b,K}$  et la *codie* (profondeur de fermeture des pores mesurée en m d'équivalent glace)  $C^{b,K}$ . La connaissance de ces trois grandeurs suffit à calculer les chronologies glace et gaz recherchées. Pour identifier l'erreur modèle  $X^K$ , on a formulé un problème inverse sur la base du théorème de Bayes revisité par Mosegaard et Tarantola (2002) comme une *conjonction d'états d'information a priori, théorique et expérimentale*. On a défini l'information a priori (ébauche) amenée par les modèles  $M^K$  ainsi que l'information expérimentale et théorique (les observations et les opérateurs d'observation). On note que l'inversion sur

plusieurs forages nécessite en particulier de faire intervenir des observations de type liens stratigraphiques (ce que l'on a appelé dans la partie 16.1.1.2 marqueurs globaux ou régionaux) qui relient par la donnée d'une différence d'âge (en général nulle) les profondeurs de 2 forages distincts. Par ailleurs, afin de manipuler des densités de probabilité gaussiennes, on travaille avec la variable de contrôle  $\tilde{X}$  qui est le logarithme des composantes du vecteur de correction global  $X$ . La probabilité a posteriori qui découle de cette *conjonction d'états d'information* (au sens de Mosegaard et Tarantola (2002)) a été transformée en une fonction coût  $J$  en appliquant le maximum de vraisemblance. On a proposé deux formulations pour  $J$  :

1. une formulation issue de l'approche purement probabiliste par conjonction d'information et qui donne lieu à une fonction coût ayant un terme d'observation  $J^o$  et un terme d'ébauche purement bayésien  $J^b$  :

$$J(\tilde{X}) = J^b(\tilde{X}) + J^o(\tilde{X}) \quad (8.77)$$

2. une formulation mixte qui comporte en plus du terme d'ébauche bayésien  $J^b$ , un terme régularisant supplémentaire  $J^r$  :

$$J(\tilde{X}) = J^b(\tilde{X}) + J^r(\tilde{X}) + J^o(\tilde{X}) \quad (8.78)$$



# Identifier les corrections optimales

---

Dans le chapitre 8 nous avons formulé le problème inverse sous la forme d'une fonction coût  $J$  dont la variable de contrôle est  $\tilde{X}$ . Dans ce chapitre, après un bref rappel sur les techniques d'optimisation, on décrit la méthode du quasi-newton à mémoire limitée sur laquelle repose le minimiseur `m1qn3` que l'on a choisi. Comme cette méthode de descente s'appuie sur la connaissance du gradient de la fonction coût  $\nabla_{\tilde{X}} J$ , on développe ensuite l'expression des gradients des différents termes de  $J$ .

## 9.1 Les méthodes de descentes

### 9.1.1 Généralités

Les méthodes de descente s'appliquent aux problèmes où on souhaite minimiser une fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto f(X) \end{aligned}$$

Suivant la nature de la fonction  $f$ , il existe des algorithmes plus ou moins adaptés et efficaces. Les méthodes de descente sont des méthodes itératives basées sur l'algorithme suivant :

1. à l'itération  $k$ , le vecteur est  $X = X_k$  et la fonction à minimiser vaut  $f(X_k)$  :
  - choix d'une direction de descente  $d_k$ ,
  - choix d'un pas de descente  $\rho_k$ ,
2. calcul du nouveau vecteur  $X_{k+1} = X_k + \rho_k d_k$ ;

### 9.1.2 Le quasi-newton `m1qn3`

La description et l'utilisation du minimiseur `m1qn3` est détaillé dans le document technique Gilbert et Lemarechal (1993). Il s'agit d'un quasi-newton (i.e., qui approxime le Hessien de  $f$ ) à mémoire limitée et il est développé pour traiter des problèmes de minimisation sans

contrainte de dimension importante. La mise en oeuvre du couplage entre le minimiseur `m1qn3` et un code qui comprend une fonction coût  $J$  à optimiser nécessite de coder une routine à même de calculer pour toute valeur  $X = x$  explorée au cours de la méthode de descente, la valeur en ce point de la fonction coût  $J$  et de son gradient  $\nabla J$ .

## 9.2 Gradient de la fonction coût

On se place dans le cadre le plus général de notre étude avec la fonction coût  $J$  qui comporte alors trois termes : i)  $J^b$  le terme d'ébauche purement bayésien ; ii)  $J^o$  le terme d'observation ; iii)  $J^r$  le terme de régularisation supplémentaire. On note  $\nabla J$  le gradient de la fonction coût par rapport à la variable de contrôle  $\tilde{X}$  et dans ce contexte il s'écrit :

$$\nabla J(\tilde{X}) = \nabla J^b(\tilde{X}) + \nabla J^r(\tilde{X}) + \nabla J^o(\tilde{X}) \quad (9.1)$$

On détaille l'expression des gradients  $\nabla J^b$ ,  $\nabla J^r$  et  $\nabla J^o$  dans les trois sections qui suivent.

### 9.2.1 Gradient du terme d'ébauche $J^b$

On s'appuie sur les équations (8.33), (8.35), (8.39) et (8.43) développées section 8.3.4 pour formuler  $\nabla J^b$  de la façon suivante :

$$\nabla J^b(\tilde{X}) = \sum_{K=1}^N \nabla J_1^{b,K} + \nabla J_2^{b,K} \quad (9.2)$$

On rappelle les qualités attachées aux deux termes intervenant sous le signe somme de l'expression ci-dessus :

- le terme  $\nabla J_1^{b,K}$  regroupe les termes qui ne mettent pas en jeu les covariances d'erreur entre les trois corrections  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  (voir équation (8.39)) ;
- le terme  $\nabla J_2^{b,K}$  regroupe les termes qui mettent en jeu les covariances d'erreur entre les corrections  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  (voir équation (8.43)).

Ces deux gradients  $\nabla J_1^{b,K}$  et  $\nabla J_2^{b,K}$  n'ont de composantes non nulles que lorsque la différentiation s'opère par rapport à  $\tilde{X}^K$  et les expressions suivantes suffisent donc à les définir :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_1^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_1^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_1^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\alpha^{K-1} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) \\ B_\tau^{K-1} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \\ B_\gamma^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

On poursuit avec le gradient  $\nabla J_2^{b,K}$  :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_2^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_2^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_2^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_2^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

$$= \begin{pmatrix} B_{\alpha\tau}^{K-1} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) + B_{\alpha\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ B_{\alpha\tau}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) + B_{\tau\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ B_{\alpha\gamma}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) + B_{\tau\gamma}^{K-T} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

En prévision des expériences numériques à venir, on détaille les différents termes qui contribuent à l'expression de  $\nabla J_2^{b,K}$  (voir l'expression de  $J_2^{b,K}$  équation (8.43)) :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_{\alpha\tau}^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{\alpha\tau}^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\tau}^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\tau}^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\alpha\tau}^{K-1} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \\ B_{\alpha\tau}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_{\alpha\gamma}^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{\alpha\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\alpha\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ 0 \\ B_{\alpha\gamma}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_{\tau\gamma}^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{\tau\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_{\tau\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_{\tau\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{\tau\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ B_{\tau\gamma}^{K-T} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

## 9.2.2 Gradient du terme régularisant $J^r$

L'équation (8.74) permet de dériver la contribution à  $\nabla J^r(\tilde{X})$  de chaque forage indicé  $K$  :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} \nabla J^{r,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J^{r,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J^{r,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J^{r,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2S^{\alpha,K^T} S^{\alpha,K} \alpha^K \\ 2S^{\tau,K^T} S^{\tau,K} \tau^K \\ 2S^{\gamma,K^T} S^{\gamma,K} \gamma^K \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

### 9.2.3 Gradient du terme d'observation $J^o$

L'équation (8.64) a montré que  $J^o$ , le terme d'observation de la fonction coût est constitué de 7 composantes notée  $J_*^o$  avec  $*$  =  $\Psi, \chi, \alpha, \tau, \delta, \Delta\Psi$  ou  $\Delta\chi$ . Le gradient  $\nabla J_*^o$  associé à chacune de ces composantes peut prendre deux formes :

1. Pour les termes se rapportant aux observations de type marqueur d'âge ou de type marqueur de grandeur,  $\nabla J_*^o$  s'écrit avec  $*$  =  $\Psi, \chi, \alpha, \tau$  ou  $\delta$  :

$$\nabla J_*^o(\tilde{X}) = \sum_{K=I}^N -H^{*,K^T} R^{*,K^{-1}} (Y^{*,K} - h^{*,K}(\tilde{X}^K)) \quad (9.10)$$

où  $H^{*,K}$  est l'opérateur linéaire tangent associé à l'opérateur d'observation  $h^{*,K}$ , dont les expressions discrètes sont données en annexe F.1, F.2, F.3, F.4 et F.5.

2. Pour les termes se rapportant aux observations de type lien stratigraphique (gaz ou glace)  $\nabla J_*^o$  s'écrit avec  $*$  =  $\Psi$  ou  $\chi$  :

$$\begin{aligned} \nabla J_{\Delta*}^o &= \sum_{J=I}^{C_N^2} \\ &- H^{*,J,K2^T} R^{\Delta*,J^{-1}} (h^{*,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{*,J,K2}(\tilde{X}^{K2})) \\ &+ H^{*,J,K1^T} R^{\Delta*,J^{-1}} (h^{*,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{*,J,K2}(\tilde{X}^{K2})) \end{aligned} \quad (9.11)$$

où  $H^{*,J,K2}$  et  $H^{*,J,K1}$  sont les opérateurs linéaires tangents associés respectivement aux opérateurs d'observation  $h^{*,J,K1}$  et  $h^{*,J,K2}$ , dont les expressions discrètes sont donnée dans les annexes F.6 F.7.

# Intervalles de confiance a posteriori

---

On présente dans ce chapitre l'approche choisie pour estimer les incertitudes sur les grandeurs analysées. On y explicite le calcul d'incertitude d'abord sur les corrections optimales section 10.1, puis sur les grandeurs glaciologiques optimales section 10.2 et enfin sur les chronologies optimales section 10.3.

## 10.1 Intervalles de confiance sur les corrections analysées

### 10.1.1 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche a posteriori

On fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 13.** *L'opérateur d'observation généralisé  $h$  est "faiblement" non linéaire.*

On note  $P^a$  la matrice de covariance d'erreur a posteriori sur  $\tilde{X}^a$  le vecteur  $\tilde{X}$  après analyse. Compte-tenu de l'hypothèse 13, on peut, comme rappeler par Tarantola (2005) approximer  $P^a$  avec :

$$P^a \simeq \left( \hat{H}^T \tilde{R}^{-1} \hat{H} + \tilde{B}^{-1} \right)^{-1} \quad (10.1)$$

où :

1.  $\hat{H}$  est l'opérateur linéaire tangent associé à l'opérateur d'observation généralisé  $h$  (voir annexe G.1),
2.  $R$  est la matrice de covariance d'erreur d'observation généralisée (voir annexe G.2)
3.  $B$  est la matrice de covariance d'erreur d'ébauche généralisée (voir annexe G.3).

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche a posteriori  $P^a$  peut se décomposer en  $N + 2C_N^2$  blocs matriciels :

$$P^a = \begin{bmatrix} P_{11}^a & P_{12}^a & P_{13}^a & P_{14}^a & \vdots \\ P_{12}^{aT} & P_{22}^a & P_{23}^a & P_{24}^a & \vdots \\ P_{13}^{aT} & P_{23}^{aT} & P_{33}^a & P_{34}^a & \vdots \\ P_{14}^{aT} & P_{24}^{aT} & P_{34}^{aT} & P_{44}^a & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

où :

1. Les  $N$  blocs diagonaux notés  $P_{KK}^a$  sont les matrices de covariances d'erreur a posteriori associées au vecteur de corrections  $\tilde{X}^{a,K}$  pour  $K \in 1, 2, \dots, N$ ;
2. les  $C_N^2$  blocs non-diagonaux et indépendants notés  $P_{K1,K2}^a$  sont les matrices de covariances d'erreur a posteriori entre les vecteurs de corrections  $\tilde{X}^{a,K1}$  et  $\tilde{X}^{a,K2}$  pour  $K1$  et  $K2 \in 1, 2, \dots, N$ .

En particulier, à partir des blocs diagonaux  $P_{KK}^a$ , on extrait l'expression de  $\tilde{\sigma}^{a,K}$  le vecteur des *déviances standards a posteriori* associé au vecteur de contrôle  $\tilde{X}^K$ . Les composantes de  $\tilde{\sigma}^{a,K}$  s'écrivent pour  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  :

$$\boxed{\tilde{\sigma}_i^{a,K} \simeq \sqrt{P_{ii}^{a,K}}} \quad (10.3)$$

### 10.1.2 Intervalle de confiance sur le vecteur de contrôle analysé

On rappelle que le vecteur de contrôle optimal est  $\tilde{X}^a$  et que ces composantes sont les vecteurs  $\tilde{X}^{a,K}$  qui ont eux-mêmes pour composantes :

$$\tilde{X}^{a,K} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{a,K} \\ \tilde{\tau}^{a,K} \\ \tilde{\gamma}^{a,K} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

Conformément à la structure des vecteurs  $\tilde{X}^{a,K}$ , on introduit les composantes des vecteurs  $\Delta X_{95\%}^{a,K}$  qui définissent les *intervalles de confiance a posteriori et à 95%* sur les vecteurs optimaux  $\tilde{X}^{a,K}$  :

$$\Delta \tilde{X}_{95\%}^{a,K} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\alpha}^{a,K} \\ \Delta \tilde{\tau}^{a,K} \\ \Delta \tilde{\gamma}^{a,K} \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

Compte-tenu de l'approximation (10.3) et en admettant que l'hypothèse 13 n'est pas trop forte, ces *intervalles de confiance a posteriori et à 95%* s'écrivent en fonction du vecteur de déviation standard  $\tilde{\sigma}^{a,K}$  (on rappelle que  $n^K$  est la dimension de la grille associée au forage  $K$ ) :

$$\Delta \tilde{\alpha}_{95\%}^{a,K T} \simeq \left( \tilde{\sigma}_1^{a,K}, \dots, \tilde{\sigma}_{n^K}^{a,K} \right)^T \quad (10.6)$$

$$\Delta \tilde{\tau}_{95\%}^{a,K T} \simeq \left( \tilde{\sigma}_{n^K+1}^{a,K}, \dots, \tilde{\sigma}_{2n^K}^{a,K} \right)^T \quad (10.7)$$

$$\Delta \tilde{\gamma}_{95\%}^{a,K T} \simeq \left( \tilde{\sigma}_{2n^K+1}^{a,K}, \dots, \tilde{\sigma}_{3n^K}^{a,K} \right)^T \quad (10.8)$$

On définit ensuite les bornes des *intervalles de confiance a posteriori et à 95%* sur  $\tilde{X}^{a,K}$  qui sont :

$$\tilde{\alpha}_{95\%,\pm}^{a,K} = \tilde{\alpha}^{a,K} \pm \Delta \tilde{\alpha}_{95\%}^{a,K} \quad (10.9)$$

$$\tilde{\tau}_{95\%,\pm}^{a,K} = \tilde{\tau}^{a,K} \pm \Delta \tilde{\tau}_{95\%}^{a,K} \quad (10.10)$$

$$\tilde{\gamma}_{95\%,\pm}^{a,K} = \tilde{\gamma}^{a,K} \pm \Delta \tilde{\gamma}_{95\%}^{a,K} \quad (10.11)$$

Au final, on a 5% de chance de faire une erreur en affirmant l'une ou l'autre des propositions ci-dessous :

- $\tilde{\alpha}^{a,K}$  optimale  $\in \left[ \tilde{\alpha}_{95\%,-}^{a,K}, \tilde{\alpha}_{95\%,+}^{a,K} \right]$  ;
- $\tilde{\tau}^{a,K}$  optimale  $\in \left[ \tilde{\tau}_{95\%,-}^{a,K}, \tilde{\tau}_{95\%,+}^{a,K} \right]$  ;
- $\tilde{\gamma}^{a,K}$  optimale  $\in \left[ \tilde{\gamma}_{95\%,-}^{a,K}, \tilde{\gamma}_{95\%,+}^{a,K} \right]$  ;

### 10.1.3 Intervalle de confiance sur le vecteur d'état analysé

Ces intervalles de confiance se rapportent à la *variable de contrôle* du problème. On s'intéresse maintenant aux intervalles de confiance sur la solution optimale dans l'espace de la variable d'état  $X$ . On rappelle que  $X^a$  possède  $N$  composantes  $X^{a,K}$  qui se décompose chacune comme suit :

$$X^{a,K} = \begin{bmatrix} \alpha^{a,K} \\ \tau^{a,K} \\ \gamma^{a,K} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

On s'appuie sur la propriété 1 pour estimer les *intervalles de confiance lognormaux* à 95%. On transforme conformément à la relation 8.25 qui lie chaque composante  $X^{a,K}$  aux composantes  $\tilde{X}^{a,K}$ , les bornes des *intervalles de confiance a posteriori et à 95%* données par les équations (10.10), (10.11) et (10.11) :

$$\alpha_{95\%,\pm}^{a,K} = \exp(\tilde{\alpha}_{95\%,+/-}^{a,K}) = \exp(\tilde{\alpha}^{a,K}) \exp(\pm\Delta\tilde{\alpha}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.13)$$

$$\tau_{95\%,\pm}^{a,K} = \exp(\tilde{\tau}_{95\%,+/-}^{a,K}) = \exp(\tilde{\tau}^{a,K}) \exp(\pm\Delta\tilde{\tau}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.14)$$

$$\gamma_{95\%,\pm}^{a,K} = \exp(\tilde{\gamma}_{95\%,+/-}^{a,K}) = \exp(\tilde{\gamma}^{a,K}) \exp(\pm\Delta\tilde{\gamma}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.15)$$

Finalement, les bornes des *intervalles de confiance lognormaux a posteriori et à 95%* s'écrivent :

$$\alpha_{95\%,\pm}^{a,K} = \alpha^{a,K} \exp(\pm\Delta\tilde{\alpha}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.16)$$

$$\tau_{95\%,\pm}^{a,K} = \tau^{a,K} \exp(\pm\Delta\tilde{\tau}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.17)$$

$$\gamma_{95\%,\pm}^{a,K} = \gamma^{a,K} \exp(\pm\Delta\tilde{\gamma}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.18)$$

Au final, on 5% de chance de faire une erreur en affirmant l'une ou l'autre des propositions ci-dessous :

- $\alpha^{a,K}$  optimale  $\in [\alpha_{95\%,-}^{a,K}, \alpha_{95\%,+}^{a,K}]$  ;
- $\tau^{a,K}$  optimale  $\in [\tau_{95\%,-}^{a,K}, \tau_{95\%,+}^{a,K}]$  ;
- $\gamma^{a,K}$  optimale  $\in [\gamma_{95\%,-}^{a,K}, \gamma_{95\%,+}^{a,K}]$  ;

## 10.2 Intervalles de confiance sur les grandeurs glaciologiques analysées

Les grandeurs glaciologiques  $A^K$ ,  $T^K$  et  $C^K$  sont reliées à leur vecteur de corrections respectifs  $\alpha^K$ ,  $\tau^K$  et  $\gamma^K$  par une relation linéaire impliquant les grandeurs glaciologiques d'ébauche  $A^{b,K}$ ,  $T^{b,K}$  et  $C^{b,K}$  qui sont des vecteurs constants. On peut donc encore une



fois s'appuyer sur la propriété 1 d'une part pour remarquer que les densités de probabilité associées aux grandeurs  $A^K$ ,  $T^K$  et  $C^K$  sont des distributions lognormales et d'autre part pour estimer les *intervalles de confiance lognormaux à 95%* sur  $A^K$ ,  $T^K$  et  $C^K$  à partir des *intervalles de confiance lognormaux à 95%* sur  $\alpha^K$ ,  $\tau^K$  et  $\gamma^K$  en appliquant simplement la relation linéaire qui relie les deux système de variable. Ceci donne :

$$A_{95\%,\pm}^{a,K} = A^{b,K} \exp(\pm \Delta \tilde{\alpha}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.19)$$

$$T_{95\%,\pm}^{a,K} = T^{b,K} \exp(\pm \Delta \tilde{\tau}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.20)$$

$$C_{95\%,\pm}^{a,K} = C^{b,K} \exp(\pm \Delta \tilde{\gamma}_{95\%}^{a,K}) \quad (10.21)$$

Au final, on 5% de chance de faire une erreur en affirmant l'une ou l'autre des propositions ci-dessous :

- $A^{a,K}$  optimale  $\in [A_{95\%,-}^{a,K}, A_{95\%,+}^{a,K}]$  ;
- $T^{a,K}$  optimale  $\in [T_{95\%,-}^{a,K}, T_{95\%,+}^{a,K}]$  ;
- $C^{a,K}$  optimale  $\in [C_{95\%,-}^{a,K}, C_{95\%,+}^{a,K}]$  ;

### 10.3 Intervalles de confiance les chronologies analysées

L'incertitude sur l'âge résulte a priori de nombreux facteurs. Si ces facteurs ont la bonne idée d'être statistiquement indépendants alors l'hypothèse ci-dessous est faible.

**Hypothèse 14.** *Les incertitudes sur les  $N$  chronologies optimales  $\Psi^{a,K}$  sont correctement décrites par des gaussiennes.*

On adopte l'hypothèse 14 et on introduit  $Q^a$  la matrice de covariance d'erreur a posteriori associée au vecteur  $\Psi^a$  donnant les chronologies glace optimale que l'on estime par l'équation ci-dessous :

$$Q^a \simeq \nabla \Psi^{aT} P^a \nabla \Psi^a \quad (10.22)$$

où  $\nabla \Psi^a$  est l'opérateur linéaire tangent du modèle d'âge glace donné en annexe (l'équation (H.1)). On précise quelques points concernant cette estimation dans l'annexe A, de l'article Lemieux-Dudon *et al.* (2009) chapitre 13, partie IV.

La matrice  $Q^a$  se décompose en  $N \times N$  blocs matriciels que l'on écrit  $Q_{K1,K2}^a$  avec  $K1$  et  $K2 \in \{1, \dots, N\}$ . Elle est symétrique et déterminée à partir de l'expression des blocs  $Q_{K1,K2}^a$  tels que  $K2 > K1$  :

$$Q_{K1,K2}^a = \left[ \frac{\partial \Psi^{K1}}{\partial \tilde{X}^{K1}} \right]^T P_{K1,K2}^a \left[ \frac{\partial \Psi^{K2}}{\partial \tilde{X}^{K2}} \right] \quad (10.23)$$

Ceci nécessite de définir les opérateurs linéaires tangents sur les modèle d'âge  $\Psi^{K1}$  et  $\Psi^{K2}$ , opérateurs développés en annexe section H.2.

Par ailleurs, on note que :

1. les blocs diagonaux  $Q_{K1,K1}^a$  se rapporte au forage  $K1$  et leurs éléments notés  $[Q_{K1,K1}^a]_{ij}$  estiment la covariance d'erreur entre les âges glace estimés aux points de grille  $z_i^{K1}$  et  $z_j^{K1}$ , à savoir  $\Psi_i^{K1,a}$  et  $\Psi_j^{K1,a}$  ;
2. les blocs non diagonaux  $Q_{K1,K2}^a$  se rapportent aux forages distincts  $K1$  et  $K2$  et leurs éléments  $[Q_{K1,K2}^a]_{ij}$  estiment la covariance d'erreur entre  $\Psi_i^{K1,a}$  et  $\Psi_j^{K2,a}$  des âges glace de forages distincts estimés aux points de grille  $z_i^{K1}$  et  $z_j^{K2}$ .
3. Pour estimer les intervalles de confiance sur chaque vecteur  $\Psi^{a,K}$  de chronologie glace optimale, il suffit de considérer les éléments diagonaux de chaque bloc diagonal. On définit pour  $i \in \{1, 2, \dots, n^K\}$ , la déviation standard  $\sigma^{\Psi,K}$  associée à l'estimation de l'âge glace à la profondeur  $z_i^K$  de la grille du forage  $K$  :

$$\sigma_i^{\Psi,K} = [Q_{K,K}^a]_{ii} \quad (10.24)$$

# Optimisation du problème : identifier les perturbations optimales

---

Dans le chapitre 8 nous avons formulé le problème inverse qui nous intéresse sous la forme d'une fonction coût  $J$  dont la variable de contrôle est  $\tilde{X}$ . Dans ce chapitre, après un bref rappel sur les techniques d'optimisation section 11.1, on décrit la méthode du quasi-newton à mémoire limitée sur laquelle repose le minimiseur `fmincon` que l'on a choisi. Comme cette méthode de descente s'appuie sur la connaissance du gradient de la fonction coût  $\nabla_{\tilde{X}} J$ , on développe ensuite 11.3 l'expression des gradients des différents termes qui constituent la fonction  $J$ .

## 11.1 Généralités sur les méthodes de descentes

Les méthodes de descentes s'appliquent à de nombreux problèmes où il existe une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qu'il s'agit de minimiser. Suivant la nature de la fonction  $f$ , il existe des algorithmes plus ou moins adaptés et efficaces. On va s'intéresser dans cette section, aux méthodes qui s'appliquent à la minimisation de  $f$  en l'absence de contrainte.

### 11.1.1 Fonction quadratique

Si  $f$  est une forme quadratique pure, alors l'existence et l'unicité de la solution est assurée par des conditions nécessaires d'optimalité (les spécifier + notions de convexité).

### 11.1.2 Fonction plus complexe

### 11.1.3 Les méthodes de gradient

### 11.1.4 Les méthodes de Newton

### 11.1.5 Les méthodes de quasi-newton

## 11.2 Le quasi-newton m1qn3

La description et l'utilisation du minimiseur m1qn3 développé par XXXcite est parfaitement détaillé dans le document technique XXXcite. Il s'agit d'un quasi-newton à mémoire limitée et est développé pour traiter les problèmes de minimisation sans contrainte de dimension importante :

$$\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (11.1)$$

où la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continûment différentiable.

La mise en oeuvre du couplage entre le minimiseur m1qn3 et un code qui comprend une fonction coût  $J$  à optimiser nécessite de coder une routine appelée *simulator* à même de calculer pour toute valeur  $X = x$  explorée au cours de la méthode de descente, la valeur en ce point de la fonction coût  $J$  et de son gradient  $\nabla J$ .

Le minimiseur m1qn3 possède deux modes d'utilisation qui sont représentés par les schémas XXX :

- le mode *direct*,
- le mode *reverse*.

Dans le mode *direct* la boucle d'optimisation est gérée par m1qn3 qui fait appel à la routine *simulator* lorsqu'elle en a besoin. Dans le mode *reverse* la boucle d'optimisation est gérée par une routine appelée *driver* qui est écrite par l'utilisateur et qui appelle elle-même la routine *simulator*. Le mode *direct* n'est de ce fait pas adapté à un problème d'assimilation pour lequel on chercherait à contrôler la conditions initiales. En effet, ce type de problème impose de faire tourner le modèle directe de nombreuses fois au cours de la descente afin de calculer les opérateurs linéaires tangents du modèle dynamique directe nécessaires au calcul de  $\nabla J$ . Le mode *direct* est en revanche bien adapté à des problèmes inverses où le gradient  $\nabla J$  n'implique qu'un modèle statique directe simple. Cependant, si le modèle statique directe est complexe il peut-être judicieux d'utiliser le mode *reverse*.

Dans ce travail, on a choisit le mode *reverse* pour les raisons suivantes :

- la matrice de covariance d'erreur d'ébauche  $B$  dépend de la chronologie glace et gaz qui varie au cours de la descente ; or ceci implique des calculs importants ;
- les développements futurs pourraient être le couplage d'une méthode de Monte Carlo sur les paramètres physiques du modèle et d'une méthode de descente pour les perturbations.

### 11.3 Gradient de la fonction coût

On se place dans le cadre d'une inversion mixte - cadre le plus général de notre étude -. La fonction coût comporte alors trois termes : 1)  $J^b$  le terme d'ébauche ; 2)  $J^o$  le terme d'observation ; 3)  $J^r$  le terme de rugosité. On note  $\nabla J$  le gradient de la fonction coût par rapport à la variable de contrôle  $\tilde{X}$  et dans ce contexte il s'écrit :

$$\nabla J(\tilde{X}) = \nabla J^b(\tilde{X}) + \nabla J^r(\tilde{X}) + \nabla J^o(\tilde{X}) \quad (11.2)$$

On détaille l'expression des gradients  $\nabla J^b$ ,  $\nabla J^r$  et  $\nabla J^o$  dans les trois sections qui suivent.

#### 11.3.1 Gradient de $J^b$

On s'appuie sur les équations 8.33, 8.35, 8.39 et 8.43 développées section ?? pour formuler  $\nabla J^b$  de la façon suivante :

$$\nabla J^b(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^K \nabla J_1^{b,K} + \nabla J_2^{b,K} \quad (11.3)$$

On rappelle les qualités attachées aux deux termes intervenant sous le signe somme de l'expression ci-dessus :

- le terme  $\nabla J_1^{b,K}$  regroupe les termes qui ne mettent pas en jeu les covariances d'erreur entre les trois perturbations  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  (voir équation 8.39) ;
- le terme  $\nabla J_2^{b,K}$  regroupe les termes qui ne mettent pas en jeu les covariances d'erreur entre les perturbations  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  (voir équation 8.43).

Ces deux gradients  $\nabla J_1^{b,K}$  et  $\nabla J_2^{b,K}$  n'ont bien entendu de composantes non nulles que lorsque la différentiation s'opère par rapport à  $\tilde{X}^K$ . Aussi les expressions suivantes suffisent à les définir :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_1^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_1^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_1^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\alpha}^{K-1} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) \\ B_{\tau}^{K-1} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \\ B_{\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

On poursuit avec le gradient  $\nabla J_2^{b,K}$  :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_2^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_2^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_2^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_2^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

$$= \begin{pmatrix} B_{\alpha\tau}^{K-1} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) + B_{\alpha\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ B_{\alpha\tau}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) + B_{\tau\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ B_{\alpha\gamma}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) + B_{\tau\gamma}^{K-T} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

En prévision des expériences numériques à venir, on détaille les différents termes qui contribuent à l'expression de  $\nabla J_2^{b,K}$  (voir l'expression de  $J_2^{b,K}$  équation 8.43) :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_{\alpha\tau}^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{\alpha\tau}^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\tau}^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\tau}^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\alpha\tau}^{K-1} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \\ B_{\alpha\tau}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_{\alpha\gamma}^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{\alpha\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_{\alpha\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\alpha\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ 0 \\ B_{\alpha\gamma}^{K-T} (\tilde{\alpha}^K - \tilde{\alpha}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

$$\nabla_{\tilde{X}^K} J_{\tau\gamma}^{b,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{\tau\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J_{\tau\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J_{\tau\gamma}^{b,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{\tau\gamma}^{K-1} (\tilde{\gamma}^K - \tilde{\gamma}^{b,K}) \\ B_{\tau\gamma}^{K-T} (\tilde{\tau}^K - \tilde{\tau}^{b,K}) \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

### 11.3.2 Gradient de $J^r$

On s'appuie sur l'équation 8.74 pour dériver la contribution à  $\nabla J^r(\tilde{X})$  de chaque forage indicé  $K$ . Ceci permet d'écrire :

$$\nabla_{\tilde{X}^K} \nabla J^{r,K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J^{r,K}}{\partial \tilde{\alpha}^K} \\ \frac{\partial J^{r,K}}{\partial \tilde{\tau}^K} \\ \frac{\partial J^{r,K}}{\partial \tilde{\gamma}^K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2S^{\alpha,K^T} S^{\alpha,K} \alpha^K \\ 2S^{\tau,K^T} S^{\tau,K} \tau^K \\ 2S^{\gamma,K^T} S^{\gamma,K} \gamma^K \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

### 11.3.3 Gradient du terme d'observation $J^o$

L'équation 8.64 a montré que  $J^o$ , le terme d'observation de la fonction coût est constitué dans notre étude de sept composantes. On détaille le gradient de chacune de ces composantes dans les sections qui suivent.

#### 11.3.3.1 Contribution des marqueurs d'âge glace

**Gradient  $J_\chi^o$**  Le terme  $J_\chi^o$  est donné par l'équation 8.65. Il est le résultat de la sommation sur  $K$  des  $N$  termes  $J_\chi^{o,K}$  impliqués dans l'inversion :

$$J_\chi^{o,K} = \frac{1}{2} \left( Y^{\chi,K} - h^{\chi,K}(\tilde{X}^K) \right)^T R^{\chi,K^{-1}} \left( Y^{\chi,K} - h^{\chi,K}(\tilde{X}^K) \right) \quad (11.11)$$

Chaque terme  $J_\chi^{o,K}$  dépend de la composante  $\tilde{X}^K$  au travers de l'opérateur d'observation  $h^{\chi,K}$  (voir équation 8.51). Le calcul de  $\nabla J_\chi^o$  fait donc intervenir l'opérateur linéaire tangent de  $h^{\chi,K}$  que l'on note  $H^{\chi,K}$  et que l'on détaille dans le paragraphe suivant :

$$\nabla J_\chi^o(\tilde{X}) = \sum_{K=1}^N -H^{\chi,K^T} R^{\chi,K^{-1}} \left( Y^{\chi,K} - h^{\chi,K}(\tilde{X}^K) \right) \quad (11.12)$$

**Opérateur linéaire tangent  $H^{\chi,K}$**  Son expression générale est la suivante :

$$H_{ij}^{\chi,K^T} = \frac{\partial h_i^{\chi,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (11.13)$$

Pour permettre de développer des équations plus concises par la suite, on introduit une variable intermédiaire notée  $f_j^K$  qui s'écrit comme suit pour tout  $j \in \{1, \dots, n^K\}$  :

$$f_j^K = \frac{\exp -\tilde{\alpha}_j^K \exp -\tilde{\tau}_j^K}{L_j^{b,K}} d_j^K \quad (11.14)$$

On rappelle par ailleurs que l'indice  $m_i^{x,K}$  et le facteur  $\lambda_i^{x,K}$  qui interviennent dans l'expression de  $h^{x,K}$  ont été définis précédemment dans la section 8.4.6.1 (l'indice sélectionne la profondeur de grille la plus proche par valeur supérieure de la profondeur de mesure  $\hat{z}_i^{x,K}$  alors que le facteur  $\lambda_i^{x,K}$  permet de réaliser une interpolation linéaire).

Ces deux points étant spécifiés, on développe ci-dessous l'expression des composantes  $H^{x,K^T}_{ij}$  pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n^{x,K}\}$  mais en distinguant 3 cas selon que l'indice  $j$  appartient à l'intervalle  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$  (intervalles qui déterminent si l'on différencie par rapport aux composantes de  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  ou  $\tilde{\gamma}^K$ ) :

— Lorsque  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$H^{x,K}_{ij} = \frac{\partial h_i^{x,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \quad (11.15)$$

$$\begin{cases} -f_j^K dz_j^K & 1 \leq j \leq m_i^{x,K} - 1 \\ -\lambda_i^{x,K} f_{m_i^{x,K}}^K dz_{m_i^{x,K}}^K & j = m_i^{x,K} \\ 0 & m_i^{x,K} < j \leq n^K \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$H^{x,K}_{ij} = \frac{\partial h_i^{x,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \quad (11.16)$$

$$\begin{cases} -f_{n^K-j}^K dz_{n^K-j}^K & n^K + 1 \leq j \leq n^K + m_i^{x,K} - 1 \\ -\lambda_i^{x,K} f_{m_i^{x,K}}^K dz_{m_i^{x,K}}^K & j = n^K + m_i^{x,K} \\ 0 & n^K + m_i^{x,K} < j \leq 2n^K \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$H^{x,K}_{ij} = \frac{\partial h_i^{x,K}}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} \quad (11.17)$$

$$= 0$$

### 11.3.3.2 Contribution des marqueurs d'âge gaz

**Gradient  $J_\psi^o$**  Le terme  $J_\psi^o$  est donné par l'équation 8.66. Il est lui aussi le résultat d'une sommation sur  $K = \{1, \dots, N\}$  des termes  $J_\psi^{o,K}$  :

$$J_\psi^{o,K} = \frac{1}{2} \left( Y^{\psi,K} - h^{\psi,K}(\tilde{X}^K) \right)^T R^{\psi,K^{-1}} \left( Y^{\psi,K} - h^{\psi,K}(\tilde{X}^K) \right) \quad (11.18)$$



Chacun de ces termes dépend de  $\tilde{X}^K$  au travers de l'opérateur d'observation  $h^{\psi,K}$ . Le calcul du gradient de  $J_\psi^o$  fait donc intervenir l'opérateur linéaire tangent de  $h^{\psi,K}$ , opérateur noté  $H^{\psi,K}$ . Avant de définir les composantes de cet opérateur, on donne l'expression de  $J_\psi^o$  :

$$\nabla J_\psi^o(\tilde{X}) = \sum_{K=1}^N -H^{\psi,K T} R^{\psi,K^{-1}} (Y^{\psi,K} - h^{\psi,K}(\tilde{X}^K)) \quad (11.19)$$

**Opérateur linéaire tangent  $H^{\psi,K}$**  Son expression générale est la suivante :

$$H_{ij}^{\psi,K} = \frac{\partial h_i^{\psi,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (11.20)$$

Avant d'aller plus loin, on rappelle tout d'abord l'expression du delta-depth estimé à la profondeur  $z_j^K$  (voir détails section ) en fonction des perturbations :

$$\Delta d_j^K = \frac{\Delta d_j^{K,b}}{\exp -\tilde{\tau}_j^K \exp -\tilde{\gamma}_j^K} \quad (11.21)$$

Pour simplifier l'écriture, on utilise à nouveau la variable  $f_j^K$  donnée par l'équation F.5 et on introduit aussi une seconde variable intermédiaire notée  $g_j^K$  qui en dépend :

$$g_j^K = (1 - \lambda_i^{\psi,K}) f_{j-1}^K + \lambda_i^{\psi,K} f_j^K \quad (11.22)$$

On rappelle que les indices  $p_i^{\psi,K}$  et  $m_i^{\psi,K}$  ainsi que les facteurs  $\mu_i^{\psi,K}$  et  $\lambda_i^{\psi,K}$  ont été définis pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n^{\psi,K}\}$  dans la section ???. Ceci permet d'exprimer les composantes  $H^{\psi,K T}_{ij}$  selon 3 cas de figure. Ces 3 cas se distinguent comme précédemment par l'intervalle d'entier auquel l'indice  $j$  appartient tout en autorisant toute valeur parmi  $\{1, \dots, n^{\psi,K}\}$  pour l'indice  $i$ .

— Quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\psi,K} = \frac{\partial h_i^{\psi,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \quad (11.23)$$

$$\begin{cases} -f_j^K dz_j^K & 1 \leq j \leq m_i^{\psi,K} - 1 \\ -\lambda_i^{\psi,K} f_j^K dz_j^K & j = m_i^{\psi,K} \\ 0 & m_i^{\psi,K} < j \leq n^K \end{cases}$$

— Quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\psi,K} = \frac{\partial h_i^{\psi,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \quad (11.24)$$

$$\begin{cases} -f_{j-n^K}^K dz_{j-n^K}^K & n^K + 1 \leq j \leq n^K + m_i^{\psi,K} - 1 \\ -\lambda_i^{\psi,K} f_{j-n^K}^K dz_{j-n^K}^K & j = n^K + m_i^{\psi,K} \\ 0 & n^K + m_i^{\psi,K} < j < n^K + p_i^{\psi,K} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\psi,K}) \Delta d_{j-n^K}^K g_{m_i^{\psi,K}}^K & j = n^K + p_i^{\psi,K} - 1 \\ -\mu_i^{\psi,K} \Delta d_{j-n^K}^K g_{m_i^{\psi,K}}^K & j = n^K + p_i^{\psi,K} \\ 0 & n^K + p_i^{\psi,K} < j \leq 2n^K \end{cases}$$

— Quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\psi,K} = \frac{\partial h_i^{\psi,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \quad (11.25)$$

$$\begin{cases} 0 & 2n^K + 1 \leq j < 2n^K + p_i^{\psi,K} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\psi,K}) \Delta d_{j-2n^K}^K g_{m_i^{\psi,K}}^K & j = 2n^K + p_i^{\psi,K} - 1 \\ -\mu_i^{\psi,K} \Delta d_{j-2n^K}^K g_{m_i^{\psi,K}}^K & j = 2n^K + p_i^{\psi,K} \\ 0 & 2n^K + p_i^{\psi,K} < j \leq 3n^K \end{cases}$$

### 11.3.3.3 Contribution des marqueurs d'accumulation

**Gradient  $J_\alpha^o$**  Le terme  $J_\alpha^o$  est donné par l'équation 8.67. Il est lui aussi le résultat d'une sommation sur  $K = \{1, \dots, N\}$  des termes  $J_\alpha^{\alpha,K}$  :

$$J_\alpha^{\alpha,K} = \frac{1}{2} \left( Y^{\alpha,K} - h^{\alpha,K}(\tilde{\alpha}^K) \right)^T R^{\alpha,K-1} \left( Y^{\alpha,K} - h^{\alpha,K}(\tilde{\alpha}^K) \right) \quad (11.26)$$

Cette fois, chaque terme  $J_\alpha^{\alpha,K}$  ne dépend que de la composante  $\tilde{\alpha}^K$  au travers de l'opérateur d'observation  $h^{\alpha,K}$ . Là encore l'opérateur linéaire tangent de  $h^{\alpha,K}$  que l'on note  $H^{\alpha,K}$  est nécessaire afin de calculer  $J_\alpha^o$  :

$$\nabla J_\alpha^o(\tilde{X}) = \sum_{K=1}^N -H^{\alpha,K T} R^{\alpha,K-1} \left( Y^{\alpha,K} - h^{\alpha,K}(\tilde{X}^K) \right) \quad (11.27)$$

**Opérateur linéaire tangent  $H^{\alpha,K}$**  Son expression générale est la suivante :

$$H_{ij}^{\alpha,K} = \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (11.28)$$

On rappelle là encore que l'indice  $m_i^{\alpha,K}$  ainsi que le facteur  $\lambda_i^{\alpha,K}$  ont été tous deux définis dans la section ???. En distinguant les 3 cas selon que l'indice  $j$  appartient aux intervalles d'entier  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$ , on écrit ci-dessous l'expression des composantes  $H_{ij}^{\alpha,K}$  valable quelque soit l'indice  $i \in \{1, \dots, n^{\alpha,K}\}$  :

— quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\alpha,K} = \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \quad (11.29)$$

$$\begin{cases} 0 & 1 \leq j < m_i^{\alpha,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\alpha,K}) & j = m_i^{\alpha,K} - 1 \\ \lambda_i^{\alpha,K} & j = m_i^{\alpha,K} \\ 0 & m_i^{\alpha,K} < j \leq n^K \end{cases}$$

— quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\alpha,K} &= \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.30)$$

— quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\alpha,K} &= \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.31)$$

### 11.3.3.4 Contribution des marqueurs d'amincissement

**Gradient  $J_\tau^o$**  Le terme  $J_\tau^o$  est donné par l'équation 8.68. Il est lui aussi le résultat d'une sommation sur  $K = \{1, \dots, N\}$  des termes  $J_\tau^{o,K}$  :

$$J_\tau^{o,K} = \frac{1}{2} \left( Y^{\tau,K} - h^{\tau,K}(\tilde{\tau}^K) \right)^T R^{\tau,K-1} \left( Y^{\tau,K} - h^{\tau,K}(\tilde{\tau}^K) \right) \quad (11.32)$$

Chaque terme  $J_\tau^{o,K}$  dépend au travers de l'opérateur d'observation  $h^{\tau,K}$ , de la composante vectorielle  $\tilde{\tau}^K$  du vecteur  $\tilde{X}^K$ . Là encore l'opérateur linéaire tangent de  $h^{\tau,K}$  que l'on note  $H^{\tau,K}$  est nécessaire afin de calculer  $J_\tau^o$  :

$$\begin{aligned} \nabla J_\tau^o(\tilde{X}) = & \\ \sum_{K=I}^N -H^{\tau,K T} R^{\tau,K^{-1}} (Y^{\tau,K} - h^{\tau,K}(\tilde{X}^K)) & \end{aligned} \quad (11.33)$$

**Opérateur linéaire tangent**  $H^{\tau,K}$  Son expression générale est :

$$H_{ij}^{\tau,K} = \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (11.34)$$

On rappelle là encore que l'indice  $m_i^{\tau,K}$  et le facteur  $\lambda_i^{\tau,K}$  ont été définis préalablement dans la section ???. On distingue toujours les 3 cas selon la valeur de l'indice  $j$  afin de donner l'expression des composantes  $H_{ij}^{\tau,K T}$  valable quelque soit l'indice  $i \in \{1, \dots, n^{\tau,K}\}$  :

— quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\tau,K} &= \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.35)$$

— quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\tau,K} &= \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &\begin{cases} 0 & n^K + 1 \leq j < n^K + m_i^{\tau,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\tau,K}) & j = n^K + m_i^{\tau,K} - 1 \\ \lambda_i^{\tau,K} & j = n^K + m_i^{\tau,K} \\ 0 & n^K + m_i^{\tau,K} < j \leq 2n^K \end{cases} \end{aligned} \quad (11.36)$$

— quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\alpha,K} &= \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.37)$$

### 11.3.3.5 Contribution des marqueurs de delta-depth

**Gradient**  $J_\delta^o$  Le terme  $J_\delta^o$  est donné par l'équation 8.69. Il est lui aussi le résultat d'une sommation sur  $K = \{1, \dots, N\}$  des termes  $J_\delta^{o,K}$  :

$$J_\delta^{o,K} = \frac{1}{2} (Y^{\delta,K} - h^{\delta,K}(\tilde{X}^K))^T R^{\delta,K^{-1}} (Y^{\delta,K} - h^{\delta,K}(\tilde{X}^K)) \quad (11.38)$$

Chaque terme  $J_\delta^{o,K}$  dépend au travers de l'opérateur d'observation  $h^{\delta,K}$ , des deux composantes vectorielles  $\tilde{\tau}^K$  et  $\tilde{\gamma}^K$  du vecteur  $\tilde{X}^K$ . Là encore l'opérateur linéaire tangent de  $h^{\delta,K}$  que l'on note  $H^{\delta,K}$  est nécessaire afin de calculer  $J_\delta^o$  :

$$\nabla J_\delta^o(\tilde{X}) = \sum_{K=I}^N -H^{\delta,K T} R^{\delta,K^{-1}} (Y^{\delta,K} - h^{\delta,K}(\tilde{X}^K)) \quad (11.39)$$

**Opérateur linéaire tangent  $H^{\delta,K}$**  Son expression générale est :

$$H_{ij}^{\delta,K} = \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (11.40)$$

On rappelle là encore que l'indice  $m_i^{\delta,K}$  et le facteur associé  $\lambda_i^{\delta,K}$  ont été définis dans la section ?? . On distingue toujours les 3 cas selon la valeur de l'indice  $j$  afin de donner l'expression des composantes  $H_{ij}^{\delta,K T}$  valable quelque soit l'indice  $i \in \{1, \dots, n^{\delta,K}\}$  :

— quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\delta,K} &= \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.41)$$

— quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\delta,K} &= \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &\begin{cases} 0 & n^K + 1 \leq j < n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\delta,K}) & j = n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ \lambda_i^{\delta,K} & j = n^K + m_i^{\delta,K} \\ 0 & n^K + m_i^{\delta,K} < j \leq 2n^K \end{cases} \end{aligned} \quad (11.42)$$

— quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\delta,K} &= \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} \\ &\begin{cases} 0 & 2n^K + 1 \leq j < 2n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\delta,K}) & j = 2n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ \lambda_i^{\delta,K} & j = 2n^K + m_i^{\delta,K} \\ 0 & 2n^K + m_i^{\delta,K} < j \leq 3n^K \end{cases} \end{aligned} \quad (11.43)$$

### 11.3.3.6 Contribution des liens stratigraphiques glace

**Gradient**  $J_{\Delta_X}^o$  Le terme  $J_{\Delta_X}^o$  est donné par l'équation 11.50. Il résulte lui aussi d'une somme de termes que l'on note  $J_{\Delta_X}^{o,J}$ , cependant la sommation s'opère cette fois sur l'indice  $J \in \{1, \dots, C_N^2\}$  puisque l'on traite ici de liens stratigraphiques :

$$J_{\Delta_X}^{o,J} = \frac{1}{2} \left( \Delta Y^{\chi,J} - \Delta h^{\chi,J}(\tilde{X}) \right)^T R^{\chi,J^{-1}} \left( \Delta Y^{\chi,J} - \Delta h^{\chi,J}(\tilde{X}) \right) \quad (11.44)$$

On rappelle que l'opérateur  $\Delta h^{\chi,J}$  s'écrit comme la différence des opérateurs  $h^{\chi,J,K1}$  et  $h^{\chi,J,K2}$ , opérateurs qui dépendent respectivement de  $\tilde{X}^{K1}$  et  $\tilde{X}^{K2}$ . Le calcul du gradient  $\nabla J_{\Delta_X}^{o,K}$  fait donc intervenir deux opérateurs linéaires tangents, celui associé à  $h^{\chi,J,K1}$  que l'on note  $H^{\chi,J,K1}$  ainsi que celui associé à  $h^{\chi,J,K2}$  que l'on note  $H^{\chi,J,K2}$ . Avant de détailler les composantes de ces deux opérateurs, on écrit l'expression du gradient  $J_{\Delta_X}^o$  :

$$\begin{aligned} \nabla J_{\Delta_X}^o &= \sum_{J=1}^{C_N^2} \\ &- H^{\chi,J,K2T} R^{\Delta_X,J^{-1}} \left( h^{\chi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\chi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \right) \\ &+ H^{\chi,J,K1T} R^{\Delta_X,J^{-1}} \left( h^{\chi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\chi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \right) \end{aligned} \quad (11.45)$$

**Opérateurs linéaires tangents**  $H^{\chi,J,K1}$  et  $H^{\chi,J,K2}$  Les expressions générales de  $H^{\chi,J,K1}$  et  $H^{\chi,J,K2}$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} H^{\chi,J,K1} &= \frac{\partial h^{\chi,J,K1T}}{\partial \tilde{X}^{K1}} \\ H^{\chi,J,K2} &= \frac{\partial h^{\chi,J,K2T}}{\partial \tilde{X}^{K2}} \end{aligned} \quad (11.46)$$

On s'intéresse d'abord à l'opérateur  $H^{\chi,J,K1T}$ . On rappelle que l'indice  $m_i^{\chi,J,K1}$  ainsi que le facteur  $\lambda_i^{\chi,J,K1}$  ont été précédemment définis dans la section ???. On utilise à nouveau la variable intermédiaire  $f_j^K$  en prenant  $K = K1$  qui a été définie par l'équation F.5.

On donne ci-dessous les expressions des composantes  $H^{\chi,J,K1T}_{ij}$  valables pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n^{\chi,J}\}$  (indice ciblant un lien stratigraphique glace donné) mais on distingue là encore 3 cas selon que l'indice  $j$  appartienne à l'intervalle d'entier  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$ .

— Lorsque  $j \in \{1, 2, \dots, n^{K1}\}$  :

$$H_{ij}^{\chi, J, K1} = \frac{\partial h_i^{\chi, J, K1}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \quad (11.47)$$

$$\begin{cases} -f_j^{K1} dz_j^{K1} & 1 \leq j \leq m_i^{\chi, J, K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\chi, K1} f_{m_i^{\chi, J, K1}}^{K1} dz_{m_i^{\chi, J, K1}}^{K1} & j = m_i^{\chi, J, K1} \\ 0 & m_i^{\chi, J, K1} < j \leq n^{K1} \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{n^{K1} + 1, \dots, 2n^{K1}\}$  :

$$H_{ij}^{\chi, J, K1} = \frac{\partial h_i^{\chi, J, K1}}{\partial \tilde{\tau}_j^{K1}} \quad (11.48)$$

$$\begin{cases} -f_{n^{K1}-j}^{K1} dz_{n^{K1}-j}^{K1} & n^{K1} + 1 \leq j \leq n^{K1} + m_i^{\chi, J, K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\chi, K1} f_{m_i^{\chi, J, K1}}^{K1} dz_{m_i^{\chi, J, K1}}^{K1} & j = n^{K1} + m_i^{\chi, J, K1} \\ 0 & n^{K1} + m_i^{\chi, J, K1} < j \leq 2n^{K1} \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{2n^{K1} + 1, \dots, 3n^{K1}\}$  :

$$H_{ij}^{\chi, J, K1} = \frac{\partial h_i^{\chi, J, K1}}{\partial \tilde{\gamma}_j^{K1}} \quad (11.49)$$

$$= 0$$

L'expression de  $H^{\chi, J, K2}$  est analytiquement similaire à l'expression de  $H^{\chi, J, K1}$ . On l'obtient en remplaçant l'indice  $K1$  par l'indice  $K2$  dans les 6 équations qui précèdent.

### 11.3.3.7 Contribution des liens stratigraphiques gaz

**Gradient**  $J_{\Delta\chi}^o$  Le terme  $J_{\Delta\psi}^o$  est donné par l'équation 11.50 section ?? . Il résulte lui aussi d'une somme de termes que l'on note  $J_{\Delta\psi}^{o, J}$  (cependant la sommation s'opère sur l'indice  $J \in \{1, \dots, C_N^2$  puisque l'on traite ici de liens stratigraphiques) :

$$J_{\Delta\psi}^{o, J} = \frac{1}{2} \left( \Delta Y^{\psi, J} - \Delta h^{\psi, J}(\tilde{X}) \right)^T R^{\psi, J-1} \left( \Delta Y^{\psi, J} - \Delta h^{\psi, J}(\tilde{X}) \right) \quad (11.50)$$

On rappelle que l'opérateur  $\Delta h^{\psi, J}$  s'écrit comme la différence des opérateurs  $h^{\psi, J, K1}$  et  $h^{\psi, J, K2}$ , opérateurs qui dépendent respectivement de  $\tilde{X}^{K1}$  et  $\tilde{X}^{K2}$ . Le calcul du gradient  $\nabla J_{\Delta\psi}^{o, K}$  fait donc intervenir deux opérateurs linéaires tangents, celui associé à  $h^{\psi, J, K1}$  que l'on note  $H^{\psi, J, K1}$  ainsi que celui associé à  $h^{\psi, J, K2}$  que l'on note  $H^{\psi, J, K2}$ . Avant de détailler les composantes de ces deux opérateurs, on écrit l'expression du gradient  $J_{\Delta\psi}^o$  :

$$\begin{aligned}
\nabla J_{\Delta\psi}^o &= \sum_{J=1}^{C_N^2} \\
&- H^{\psi,J,K2^T} R^{\Delta\psi,J^{-1}} \left( h^{\psi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\psi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \right) \\
&+ H^{\psi,J,K11^T} R^{\Delta\psi,J^{-1}} \left( h^{\psi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\psi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \right)
\end{aligned} \tag{11.51}$$

**Opérateurs linéaires tangents  $H^{\psi,J,K1}$  et  $H^{\psi,J,K2}$**  Les expressions générales de  $H^{\psi,J,K1}$  et  $H^{\psi,J,K2}$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}
H^{\psi,J,K1} &= \frac{\partial h^{\psi,J,K1^T}}{\partial \tilde{X}^{K1}} \\
H^{\psi,J,K2} &= \frac{\partial h^{\psi,J,K2^T}}{\partial \tilde{X}^{K2}}
\end{aligned} \tag{11.52}$$

On développe tout d'abord l'expression de  $H^{\psi,J,K1^T}$ . En prenant  $K = K1$ , on utilise une fois de plus  $f_j^K$  la variable intermédiaire définie par l'équation F.5 et on introduit une troisième variable intermédiaire notée  $g_j^{J,K1}$  :

$$g_j^{J,K1} = (1 - \lambda_i^{\psi,J,K1}) f_{j-1}^{K1} + \lambda_i^{\psi,J,K1} f_j \tag{11.53}$$

On rappelle par ailleurs que les indices  $m_i^{\psi,J,K1}$  et  $p_i^{\psi,J,K1}$  ainsi que les facteurs  $\lambda_i^{\psi,J,K1}$  et  $\mu_i^{\psi,J,K1}$  sont définis dans la section F.7.

On donne ci-dessous les expressions des composantes  $H_{ij}^{\psi,J,K1^T}$  valables pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n^{\psi,J}\}$  (indice ciblant un lien stratigraphique glace donné) mais on distingue là-encore 3 cas selon que l'indice  $j$  appartienne à l'intervalle d'entier  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$ .

— Quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$\begin{aligned}
H_{ij}^{\psi,J,K1} &= \frac{\partial h_i^{\psi,J,K1}}{\partial \tilde{\alpha}_j^{K1}} \\
\begin{cases} -f_j^{K1} dz_j^{K1} & 1 \leq j \leq m_i^{\psi,J,K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\psi,J,K1} f_j^{K1} dz_j^{K1} & j = m_i^{\psi,J,K1} \\ 0 & m_i^{\psi,J,K1} < j \leq n^{K1} \end{cases}
\end{aligned} \tag{11.54}$$

— Quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :



$$H_{ij}^{\psi,K} = \frac{\partial h_i^{\psi,J,K1}}{\partial \bar{\tau}_j^{K1}} \quad (11.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -f_{j-n^{K1}}^{K1} dz_{j-n^{K1}}^{K1} & n^{K1} + 1 \leq j \leq n^{K1} + m_i^{\psi,J,K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\psi,J,K1} f_{j-n^{K1}}^{K1} dz_{j-n^{K1}}^{K1} & j = n^{K1} + m_i^{\psi,J,K1} \\ 0 & n^{K1} + m_i^{\psi,J,K1} < j < n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\psi,J,K1}) \Delta d_{j-n^{K1}}^{K1} g_{m_i^{\psi,J,K1}}^{J,K1} & j = n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} - 1 \\ -\mu_i^{\psi,J,K1} \Delta d_{j-n^{K1}}^{K1} g_{m_i^{\psi,J,K1}}^{J,K1} & j = n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} \\ 0 & n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} < j \leq 2n^{K1} \end{array} \right.$$

— Quand  $j \in \{2n^{K1} + 1, \dots, 3n^{K1}\}$  :

$$H_{ij}^{\psi,J,K1} = \frac{\partial h_i^{\psi,J,K1}}{\partial \bar{\gamma}_j^{K1}} \quad (11.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & 2n^{K1} + 1 \leq j < 2n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\psi,J,K1}) \Delta d_{j-2n^{K1}}^{K1} g_{m_i^{\psi,J,K1}}^{J,K1} & j = 2n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} - 1 \\ -\mu_i^{\psi,J,K1} \Delta d_{j-2n^{K1}}^{K1} g_{m_i^{\psi,J,K1}}^{J,K1} & j = 2n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} \\ 0 & 2n^{K1} + p_i^{\psi,J,K1} < j \leq 3n^{K1} \end{array} \right.$$



# Quatrième partie

## Applications

## CHAPITRE 12

# Introduction

---

Dans cette partie, on présente les applications réalisées avec la nouvelle méthode de datation développée au cours de cette thèse. Deux articles vont être le support de la discussion qui va suivre. Le premier article sous presse a été soumis en février 2008 dans la publication associée au *2nd International Workshop on Physics of Ice Core Records* (PICR2). Le second article a été soumis en février 2009 au *Journal Quaternary Science Reviews* (QSR) dans le cadre d'un *Special issue* consacré aux forages EPICA. On présente respectivement ces deux papiers dans les chapitres 1 et 2.

Dans l'article PICR2, on applique la nouvelle méthode de datation afin de reconstruire la chronologie glace du forage EDC en estimant des intervalles de confiances. Il n'y a pas de travail de sélection des observations assimilées car la vocation de cette publication est de montrer les capacités de la méthode nouvelle méthode dans un cadre simple où l'inversion n'implique qu'un seul site et sa chronologie glace. On s'appuie sur les travaux de l'article PICR2 pour présenter dans le chapitre 2, une étude de la sensibilité de la solution et des intervalles de confiance aux variances et covariances d'erreur d'ébauche. On compare aussi l'âge glace et la fonction d'amincissement analysés obtenues d'une part avec le terme régularisant  $J_r$  de la fonction coût (information a priori non probabiliste) et d'autre part avec le terme d'ébauche  $J_b$  (information a priori non probabiliste).

Dans l'article QSR, on applique la nouvelle méthode simultanément sur les chronologies gaz et glace de quatre sites : EDC, EDML, Vostok et NGRIP. L'objectif de ce papier est de présenter l'outil à la communauté paléo mais aussi d'améliorer la cohérence des datations gaz et glace des forages dans les fenêtres temporelles où la contrainte apportée par les données est importante (i.e., la dernière déglaciation). On traite néanmoins les sites sur toute la profondeur des forages (sauf pour le forage de NGRIP). Le cinquième chapitre, permet d'étayer la discussion autour des résultats rapportés dans le papier QSR.

# Article sous presse dans le *Proceedings of the 2nd International Workshop on Physics of Ice Core Records*

---

On présente dans ce chapitre, l'article sous presse du *Proceedings of the 2nd International Workshop on Physics of Ice Core Records*. Il s'agit d'une application a minima qui opère uniquement sur le forage de EDC. Le premier objectif est de montrer que la nouvelle méthode de datation permet de corriger automatiquement le scénario EDC3model estimé par modélisation inverse (Parrenin *et al.*, 2007a), sans avoir à mettre en oeuvre un processus manuel d'essai et d'erreur pour corriger localement le scénario EDC3model sur les intervalles de profondeur où certaines observations pertinentes ne sont pas respectées (Parrenin *et al.*, 2007b). Le second objectif est d'étudier le comportement de la nouvelle solution et des intervalles de confiance associés, en fonction des hypothèses arrêtées sur les variances et covariances d'erreur attachées au scénario d'ébauche EDC3model. Dans cet article, on note que les conventions d'écriture sont modifiées. En effet, les fonctions de correction sur  $A(z)$  et  $T(z)$  sont notées  $\alpha$  et  $\beta$  (à la place de  $\alpha$  et  $\tau$ ) et l'âge glace à la profondeur  $z_i$  s'écrit  $\chi_i$  (à la place de  $\Psi(z)$ ). Par ailleurs, les composantes des vecteurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont reliées à  $\alpha$  et  $\tau$  (voir partie III) par les transformations suivantes :

Partie III	Chapitres 12 et 13
$\alpha_i$	$\longrightarrow \frac{1}{\alpha_i}$
$\tau_i$	$\longrightarrow \frac{1}{\beta_i}$
$\tilde{\alpha}_i = \ln(\alpha_i)$	$\longrightarrow -\tilde{\alpha}_i$
$\tilde{\tau}_i = \ln(\tau_i)$	$\longrightarrow -\tilde{\beta}_i$
$\Psi_i$	$\longrightarrow \chi_i$

# Probabilistic Method to Construct an Optimal Ice Chronology for Ice Cores

Benedicte Lemieux-Dudon,<sup>1</sup> Parrenin Frederic,<sup>1</sup> Eric Blayo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *LGGE CNRS, BP 96, F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France, lemieux@lgge.obs.ujf-grenoble.fr*

<sup>2</sup> *LJK, BP 53, F-38041 Grenoble Cedex, France*

**Abstract:** Accurate ice chronologies are needed for the interpretation of paleoclimate reconstructions inferred from ice cores. Several methods are used to provide chronological information: identification of dated horizons along ice cores, synchronization to other dated paleoclimatic records, counting of annual layers or modelling of the ice flow. These methods are relevant for different parts of the core and enable to reach various levels of accuracy. We present a probabilistic approach based on inverse techniques which aims at building an optimal ice core chronology by using all the available chronological information. It consists in identifying the accumulation rate and the thinning function along the core 1) which are as close as possible to the flow model simulations and 2) that the corresponding ice chronology is as close as possible to independent dating information. This probabilistic approach enables to evaluate confidence intervals on the optimal age scale as well as on the accumulation rate and the thinning estimates. We test the new method on the Vostok ice core. The necessary prior accumulation rate and thinning function as well as a set of dated horizons are provided by a previous work aiming at the Vostok age scale reconstruction. We further discuss the sensitivity of the obtained optimal solution with respect to the necessary prior information. This probabilistic approach could be used in the future to build a common and optimal chronology for several ice cores simultaneously.

**Keywords:** Inverse Methods, Ice Core Chronology, Paleoclimate.

## Introduction

Deep ice cores extracted from Antarctica or Greenland recorded a wide range of past climatic events [8, 9]. Physico-chemical measurements on the core material provide many types of record. For instance the past temperature changes are inferred from ice isotopes and the past atmospheric composition is deduced from the analysis of trapped air bubbles. These records are valuable archives to understand past climatic mechanisms at hand on Earth. To achieve such a goal, accurate ice core chronologies (e.g. a depth-age relationship) are neces-

sary.

For that purpose, one may distinguish the accuracy on "absolute ages" attached to specific events from the accuracy on "event durations". Both types of accuracy are required and they are of course strongly linked but one must keep in mind that an accurate age scale in event duration may misjudge the timing of some events and vice versa. For instance, dating methods providing a precise estimate of event duration may induce an age scale with cumulative errors with depth. On the other hand, some other methods providing an age scale with a good accuracy on absolute ages may imply some distortions on short time intervals.

The currently used methods aiming at ice core dating may fall into four groups: (1) the wiggle matching on other dated time series, (2) the use of dated horizons, (3) the counting of annual layers and (4) the ice flow modelling. We hereafter bring details on each group on the basis of examples.

In the first group one can mention the orbital tuning which consists in the comparison of ice core records to insolation variations [7]. It can apply to the whole core as long as the stratigraphy is preserved [1]. The accuracy in terms of event duration as well as in terms of absolute age is limited because the orbital tuning procedure relies on the assumption of a constant phase between climate (recorded in ice cores) and insolation. One advantage is however that the achieved accuracy does not diminish with depth (assuming steady underlying mechanisms) and it is therefore the currently most precise method to date the bottom of deep ice cores. In this first group, one can also mention the comparison of ice core records to paleoclimatic archives dated with radiochronologic techniques as for instance the U-Th dated speleothems [21]. On the contrary, this later technique is rather relevant for recent periods where radiometric methods apply.

In the second group, one can mention volcanic horizons which provide very accurate age markers in terms of absolute age. This is the case for the last millennium [20], but beyond that limit, accurate absolute ages are associated to very few eruptions [12].

The third group refers to layer-counted chronologies which rely on the recognition of seasonal variations in various records. The new GICC05 chronology for Greenland [18] uses an improved multi-parameters counting

approach, and currently extends back to around 42 kyr with a maximum counting error of 4 to 7% during the glacial period. If this technique is very accurate for estimating the event durations the error on absolute ages never increases with depth.

The last group consists in dating the cores with ice flow modelling. This later method is based on the estimate of  $D(z)$ , the snow accumulation rate at the deposition time at the ice-sheet surface (expressed in cm of pure ice per year) as well as on the estimate of  $T(z)$ , the so-called thinning function which is the ratio of a layer thickness at depth  $z$  to its initial thickness at the surface. It enables to determine  $\chi(z)$  the age of the ice, by depth-integrating the number of annual layers per meter from the surface to depth  $z$ :

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{D(z')}{S(z')T(z')} dz' \quad (1)$$

where  $D(z)$  is the relative density with respect to pure ice. The parameter  $D(z)$  is usually well-known because it is measured with high precision along the drilled ice core<sup>1</sup>. The accumulation rate  $S(z)$  is generally inferred from a sedimentation model which uses temperature reconstructions obtained from isotopic analysis of the ice [14]. Finally, the thinning function  $T(z)$  is usually estimated by local flow description [14]. However, some poorly known parameters of the flow model within which is incorporated the accumulation model (e.g. basal conditions like the sliding or the melting at the ice/bedrock interface) makes the modelling exercise less accurate with increasing depth and the simplified description most often fails to reproduce the flow behavior along the core (especially near the bedrock).

To put together all these different chronological information, Parrenin et al. [15] developed an inverse approach which has been used to construct age scales for the East Antarctic and the Greenland ice cores [4, 16, 17]. This inverse approach is solved by a Monte Carlo sampling method (see Mosegaard and Tarantola [18] or Tarantola [19]) which optimally identifies the poorly known parameters of the flow models by the use of data constraint (e.g. dated horizons).

The previous method however suffers from a strong restriction precisely because the involved flow models, apart from their poorly-known parameters are supposed to be perfect. In other words, the modelling uncertainty due to undescribed or unknown physical mechanisms is not considered (e.g. changes of ice mechanical properties, uncertainty in lateral boundary conditions,...etc.). The consequence is that even after appropriate tuning, the model is sometimes unable to capture complex flow behavior and to reproduce the observations, especially for glacial ice where the flow becomes more irregular and the model approximations less applicable [1, 13]. Another drawback of the above mentioned restriction concerns the confidence intervals on the optimized age scale. They cannot be properly estimated because the sources of un-

certainties which are linked to the model imperfections are neglected.

The EDC3 age scale may be taken as an illustration. It was partially built with the above described inverse approach [13] but because of the depicted restriction, the Monte Carlo optimized age scale could not fit all the available age markers. A subset of them was therefore subjectively chosen for constraining the flow parameters [13] and an a posteriori correction was finally applied on a portion of the optimized age scale to circumvent the problem [1, 13]. At last, the EDC3 age scale confidence intervals were only roughly estimated on the basis of the quality of the surrounding age markers.

The current methodological article describes a rigorous method which enables to derive an optimal ice chronology without any a posteriori corrections and where the poorly-known physical mechanisms are statistically considered by the mean of correction functions. The aim is to identify the best corrections on the accumulation rate and on the thinning function which are on one hand consistent with the flow model simulations and on the other hand which induce an age scale and flow entities in best agreement with independent observations. This method moreover enables to rigorously estimate the confidence intervals on the optimized chronology.

In section 2, we describe this new method. Section 3 is devoted to validate the method with experiments on the EPICA DOME C core (hereafter EDC). We construct an optimal age scale by integrating the same elements used for building the EDC3 age scale (i.e. flow model simulation and age markers) and we estimate the associated confidence intervals. We then test the sensitivity of the method with respect to the prior information which is necessary to run the method and finally we discuss the results after the application section.

## 2 Method

The accumulation rate  $S$  and the thinning function  $T$ , are key entities of flow models because they enable to calculate the ice chronology with equation (1). Several modelling works targeting a particular drilling site already allowed to estimate these flow entities [14, 5]. Taking the EDC3 age scale as illustration, we underlined in the introduction that these estimates may fail to reproduce some flow irregularities and are at the root of inaccurate ice age reconstructions, mainly because some physical mechanisms are not described in the flow models. This study does not propose itself to enrich the flow description in order to improve these estimations but it is rather a pragmatic approach that aims by the use of data constraints, at identifying the best perturbations on already estimated accumulation rates and thinning functions. The searched perturbations are hereafter called *correction functions* and designated by  $X$ . They have the vocation to encompass all sources of modelling uncertainties. In other words, they can either account for errors

<sup>1</sup>  $D(z)$  is quickly increasing from around 0.35 for light snow at surface to around 1 at 200 m.

physical parameters that are already included in the flow modelling or also account for errors due to omitted physical mechanisms.

Inverse techniques provide the rigorous framework to identify  $X$ . In the current study, we opt for a *Bayesian* approach [19, 11, 6]. We further decide to use the *Maximum Likelihood* [19] as *optimality criterion* which we investigate by the mean of a variational technique [6] rather than the use of a Monte Carlo method [10, 19, 11]<sup>2</sup>. The *Bayes theorem* [19, 11, 6] enables to operate a conjunction of the statistical information brought by: 1) the prior knowledge on  $X$  which is provided by the flow modelling and (2) some independent observations<sup>3</sup> named  $Y$  and their adequacy with the predictions operated by the *observation model*  $h(X)$ . The *cost function*  $J(X)$  is finally derived from the model and data probability conjunction which is applied the optimality criterion. At last, the cost function is optimized and provides  $X = \hat{X}$  the "optimal" perturbations on  $T$  and  $S$ .

In the next sections, we first define precisely what are searched correction functions and second we give all elements to build the  $J$  cost function.

### Correction functions

Let us designate by  $S^b$  and  $T^b$ , the necessary first guesses on the accumulation rate and on the thinning function which are provided by direct or already optimized flow model simulations.  $X$  may be split into two correction functions  $\alpha$  and  $\beta$  which target  $S^b$  for the former and  $T^b$  for the latter:

$$X = (\alpha, \beta)^T \quad (2)$$

The  $\alpha(z)$  and  $\beta(z)$  correction functions are chosen as multiplicative factors:

$$\alpha(z) = \frac{S^b(z)}{S(z)} \quad (3)$$

$$\beta(z) = \frac{T^b(z)}{T(z)} \quad (4)$$

It must be emphasized that both must be strictly positive. This positive constraint is prescribed by the Eulerian formulation of the age model (1) where neither the thinning function nor the sedimentation rate can be negative or zero, at the risk of producing a discontinuity. Such non-negative physical entities are called Jeffrey's variables (see Mosegaard and Tarantola [11] or Tarantola [10]) and it is worth mentioning that they cannot admit any type of error probability distribution function (pdf hereafter). The normal pdf is for instance not appropriate. In the next sections, we will encounter  $\alpha$  and  $\beta$  prior estimates,  $\beta$  measurements and finally  $\alpha$  and  $\beta$  optimal estimates. They all refer to the same physical entities (the correction functions) which are *Jeffrey's variables*. We will hereafter to describe their error statistics with the

<sup>2</sup>The reason being the size of  $X$ .

<sup>3</sup>Dated horizons,...

*lognormal pdf* and this hypothesis is referred to as **H1**. This choice relies on the wide use of the lognormal pdf when handling positive variables but also essentially on the property attached to the above variable change:

$$\tilde{X} = \ln X \quad (5)$$

If the  $X$  error statistics is *lognormal* then the  $\tilde{X}$  error statistic is *normal* [11, 19]. In the framework of the Maximum Likelihood criterion and because of the assumption H1, such property justifies to develop the problem and optimize the  $J$  cost function with respect to  $\tilde{X}$ :

$$\tilde{X} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T = (\ln \alpha, \ln \beta)^T \quad (6)$$

$\tilde{X}$  is hereafter called the *control variable* or equivalently the correction function in the *control space*. The above described strategy will lead us to the well-known least-squares structure for the  $J$  cost function. At last, the ice age may now be expressed with respect to  $\tilde{X}$ :

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{D(z') \exp \tilde{\alpha}(z') \exp \tilde{\beta}(z')}{S^b(z') T^b(z')} dz' \quad (7)$$

### 2.2 Discretized problem

The numerical treatment requires discretized depths which are designated by  $z_i$  with index  $i$  running from 1 to  $n$ , the size of the grid. To each ice layer lying between  $z_{i-1}$  and  $z_i$  are associated the above physical entities:

- its thickness  $dz_i = z_i - z_{i-1}$ ,
- its relative density  $D_i$  (with respect to pure ice),
- the first guess values  $S_i^b$  and  $T_i^b$ ,
- the related searched correction functions  $\alpha_i$  and  $\beta_i$ ,
- the related searched flow entities  $S_i$  and  $T_i$ ,
- the corresponding control variable components  $\tilde{\alpha}_i$  and  $\tilde{\beta}_i$ ,

The discretization of the equation (7) leads to:

$$\chi_p(z_p) = \sum_{i=1}^p \frac{D_i \exp \tilde{\alpha}_i \exp \tilde{\beta}_i}{S_i^b T_i^b} dz_i \quad (8)$$

where  $\chi_p$  is the ice age of the  $p^{\text{th}}$  discrete depth  $z_p$  and involves the corrected flow entities  $T$  and  $S$  by the mean of their respective correction functions  $\exp \tilde{\alpha}$  and  $\exp \tilde{\beta}$  (6).



## Cost function $J$

The  $J$  function makes a trade-off between the prior knowledge and the data constraint. We describe in the next sections the elements of this trade-off: 1) the prior information on  $X$  which is embodied first by a prior guess or *background vector*  $X^b$  and second by the *background error covariance matrix*  $B$ , 2) the observation model  $h(X)$  which enables to predict the observations  $Y$ . The very classical assumption referred to as **H2** is made hereafter. It consists of no error correlation between the background and the observations. In this case, the cost function precisely splits in two terms [19]:

$$J(\tilde{x}) = J^{obs}(\tilde{x}) + J^b(\tilde{x}) \quad (9)$$

The first term  $J^{obs}$  measures the distance between the observations  $Y$  and the model predictions  $h(X)$  while the second term  $J^b$  measures the distance between the observed and the prior correction functions  $X$  and  $X^b$ . We now detail the hypothesis and information necessary to derive the  $J^b$  and  $J^{obs}$  terms.

### 3.1 Background term $J^b$

The  $X^b$  vector is a part of the so-called *background* information which may be derived on the basis of the following rough statements. The background term aims during the optimization process at constraining  $T$  and  $S$  to remain "not too far from"  $T^b$  and  $S^b$ . In other words,  $J^b$  aims at maintaining the  $X$  vector "not too far from" 1) the equations (3) and (4) and this can be summarized with the above equation:

$$X^b = 1 \quad (10)$$

The true flow entities  $s^t$  and  $t^t$  and their associated correction function  $x^t$  are unknowns. One obviously makes an error assuming that  $S^b$ ,  $T^b$  and  $X^b$  are adequate estimates<sup>4</sup>. This error is the *background error* and we must now determine its nature.

The  $X^b$  vector being nothing else than a prior guess for  $X$  on the basis of assumption H1 we apply the variable change of equation (5) to  $X^b$  and  $x^t$ . It introduces  $\tilde{X}^b$  and  $\tilde{x}^t$  from which one can reformulate the background choice (10) and define the *background error* in the *control space*  $\tilde{\epsilon}^b$ :

$$\tilde{X}^b = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{\epsilon}^b = \tilde{X}^b - \tilde{x}^t \quad (12)$$

During the optimization process, the data constraint may drive away the  $\tilde{X}$  value from the background vector

<sup>4</sup>Flow models are imperfect.

<sup>5</sup>The  $B$  matrix is priorly involved in the gaussian pdf which measures the prior probability for  $\tilde{X}$  to equate  $\tilde{x}$  and from which with the Bayes theorem, we derived the  $J^b$  term.

<sup>6</sup> $E[\cdot]$  is the expected value.

<sup>7</sup>One can mention the models that take account of: the anisotropy of the poly-crystalline ice, the horizontal shear for ice divide configurations, simulation events not driven by water vapor amount dependence to temperature...

<sup>8</sup> $\tilde{\epsilon}_\alpha^b$  and  $\tilde{\epsilon}_\beta^b$  are the background errors on each  $\tilde{X}^b$  components which is to say  $\tilde{\alpha}^b$  and  $\tilde{\beta}^b$ .

choice (11) which therefore induces the so-called *background deviation*. The  $J^b$  term accounts for the cost of such *background deviation* by the mean of the  $B$  matrix which weighs each deviation component according to the confidence<sup>5</sup> attached to the background choice (11).

$$J^b(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (\tilde{x} - \tilde{X}^b)^T B^{-1} (\tilde{x} - \tilde{X}^b) \quad (13)$$

The  $B$  matrix is defined with the  $B = E[(\tilde{\epsilon}^b)(\tilde{\epsilon}^b)^T]$  statistics<sup>6</sup>. This statistical analysis may be performed for instance on more complex flow modelling<sup>7</sup>. This important work is however not in the scope of this study which purpose is essentially to describe and test this new dating method.

We therefore confine us to a very preliminary shaping on which will rely the numerical experiments shown in section 3. It requires to detail the block structure of the  $B$  matrix which relies on the two components  $\tilde{\epsilon}_\alpha^b$  and  $\tilde{\epsilon}_\beta^b$ <sup>8</sup> of the background error (12):

$$\begin{pmatrix} B_\alpha & B_{\alpha\beta} \\ B_{\alpha\beta}^T & B_\beta \end{pmatrix}$$

where  $B_\alpha$  and  $B_\beta$  are the auto-covariance matrices related to  $\tilde{\epsilon}_\alpha^b$  for the former and to  $\tilde{\epsilon}_\beta^b$  for the latter, while  $B_{\alpha\beta}$  is the cross-covariance matrix between  $\tilde{\epsilon}_\alpha^b$  and  $\tilde{\epsilon}_\beta^b$ . On this basis, we assume first uncorrelated  $\tilde{\epsilon}_\alpha^b$  and  $\tilde{\epsilon}_\beta^b$  uncertainties which is hereafter referred to as assumption **H3**. The consequence is a null  $B_{\alpha\beta}$  sub-matrix. This assumption is justified taking account of Parrenin et al. [14], who show that the total thinning function is only weakly sensitive to accumulation changes. This latter assumption greatly simplifies the  $J^b(\tilde{x})$  expression which can split into two independent terms:

$$J^b(\tilde{x}) = J_\alpha^b(\tilde{\alpha}) + J_\beta^b(\tilde{\beta}) \quad (14)$$

where, when taking account of (11),  $J_\alpha^b(\tilde{\alpha})$  and  $J_\beta^b(\tilde{\beta})$  are given by:

$$J_\alpha^b(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^T B_\alpha^{-1} \tilde{\alpha} \quad (15)$$

$$J_\beta^b(\tilde{\beta}) = \frac{1}{2} \tilde{\beta}^T B_\beta^{-1} \tilde{\beta} \quad (16)$$

The shaping secondly consists to set independently the standard deviations (hereafter *std*) and the correlations:

$$[B_\alpha]_{ij} = [\sigma_\alpha^b]_i [\sigma_\alpha^b]_j [\rho_\alpha^b]_{ij} \quad (17)$$

$$[B_\beta]_{ij} = [\sigma_\beta^b]_i [\sigma_\beta^b]_j [\rho_\beta^b]_{ij} \quad (18)$$

where  $\sigma_\alpha^b$  and  $\sigma_\beta^b$  are the *std vectors* and  $\rho_\alpha^b$  and  $\rho_\beta^b$  are *correlation matrices* related to  $B_\alpha$  and  $B_\beta$ . The pre-e std and correlation settings will be defined in section

## 2 Observation term $J^{obs}$

Experiments involve two types of observation designated as *age markers* and *correction markers*. We refer to them as the *assimilated observation set*. We call age markers any measurement enabling to associate an age to a given ice layer along the core. Correction markers are specific data enabling to infer corrections on the thinning function. They are estimated from the comparison of observed and modelled  $\Delta depth$  which is the distance along the core separating concomitant gas and event<sup>9</sup>. The  $\Delta depth$  can be estimated as the product of the thinning function  $T(z)$  by the *codie* ( $z$ ) which is the initial thickness of the snow-firn column measured in meters of ice equivalent. In the bottom part of the core, we assume that the disagreements between the modelled and the observed  $\Delta depth$  are due to errors on the thinning function rather than on the *codie*. This is a strong assumption hereafter referred to as **H5**.

In the next two paragraphs, we describe the observational components of the cost function. Because of the assumption (referred to as **H6**) of no error correlation between age markers and correction markers,  $J^{obs}$  reduces to a sum of two distinct terms  $J^a$  and  $J^c$ , related to age markers for the former and to correction markers for the latter:

$$J^{obs} = J^a + J^c \quad (19)$$

The H6 hypothesis is rather strong; in a more in-depth study, a careful examination of the origin of each data could be carried.

**Age markers** In order to detail the entities involved in the  $J^a$  term, we describe the age markers by a set of  $n_a$  triplets  $(z_i^a, y_i^a, \sigma_i^a)$  with  $i$  running from 1 to  $n_a$  and where  $z_i^a$  is the depth for which the age  $y_i^a$  is observed with the  $\sigma_i^a$  std. The  $J^a$  term measures the distance between the observation vector  $y^a$  and  $h^a(\tilde{x})$ , the age marker *observation operator*<sup>10</sup>. Assuming normally distributed age marker errors,  $J^a$  can be written as follows:

$$J^a(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (y^a - h^a(\tilde{x}))^T R_a^{-1} (y^a - h^a(\tilde{x})) \quad (20)$$

where  $R^a$  is the age observation *error covariance matrix* which is defined on one hand with the  $\sigma^a$  std vector and on the other hand with the  $\rho^a$  correlation matrix<sup>11</sup>:

$$[R_a]_{ij} = [\sigma^a]_i [\sigma^a]_j [\rho^a]_{ij} \quad (21)$$

<sup>10</sup>At a given depth the gas trapped in the bubbles is younger than the surrounding ice.

<sup>11</sup>The  $h^a$  operator enables to predict  $y^a$  measurements.

No error correlations being provided, the  $\rho^a$  matrix is therefore the identity.

The  $i^{th}$  component of  $h^a(\tilde{x})$  is given by the following equation:

$$h_i^a(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{m_i^a-1} \frac{\exp \tilde{\alpha}_j \exp \tilde{\beta}_j}{T_j^b S_j^b} D_j dz_j \quad (22)$$

$$+ \lambda_i^a \frac{\exp \tilde{\alpha}_{m_i^a} \exp \tilde{\beta}_{m_i^a}}{T_{m_i^a}^b S_{m_i^a}^b} D_{m_i^a} dz_{m_i^a}$$

The  $m_i^a$  index selects the  $z_{m_i^a}$  depth which is the closest upper grid point to  $z_i^a$  (the depth axis being oriented toward the bedrock). Equation (22) involves a sum which runs from index 1 to index  $m_i^a - 1$  and where the  $j^{th}$  term is the contribution of the  $j^{th}$  ice layer to the  $h_i^a$  value. The last term operates a linear interpolation between the depths  $z_{m_i^a-1}$  and  $z_{m_i^a}$  through the  $\lambda_i^a$  factor:

$$\lambda_i^a = \frac{z_i^a - z_{m_i^a-1}}{z_{m_i^a-1} - z_{m_i^a}} \quad (23)$$

**Correction markers** The thinning correction markers are depicted by the set of  $n_c$  triplets  $(z_i^c, y_i^c, \sigma_i^c)$  with  $i$  running from 1 to  $n_c$  and where  $y_i^c$  is the observed thinning correction for the  $z_i^c$  depth with an std estimate of  $\sigma_i^c$ . A correction marker being nothing else than the measurement for a specific depth of the thinning correction, it is also a Jeffrey's variable and on the basis of assumption H1 we apply the variable change of equation (5):

$$\tilde{y}_i^c = \ln(y_i^c) \quad (24)$$

where  $\tilde{y}_i^c$  is the transformed  $i^{th}$  correction marker and has normally distributed errors. In this context, the correction markers induce a cost function term given by equation:

$$J^c(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (\tilde{y}^c - h^c(\tilde{x}))^T R_c^{-1} (\tilde{y}^c - h^c(\tilde{x})) \quad (25)$$

where  $h^c(\tilde{x})$  and  $R_c$  are the *observation operator* and *error covariance matrix* associated to the correction markers. The  $i^{th}$  component of  $h^c$  operator is:

$$h_i^c(\tilde{\beta}) = \sum_{j=1}^n \delta_{j,m_i^c} \tilde{\beta}_j \quad (26)$$

where,  $\delta_{i,j}$  is the Kronecker symbol (which equals 1 when  $i = j$  and zero otherwise) and the  $m_i^c$  index is such that  $z_{m_i^c}$  is the closest upper grid point to  $z_i^c$ . Here again,  $R_c$  can be written in terms of the  $\rho^c$  correlation matrix and the  $\sigma^c$  std vector:

$$[R_c]_{ij} = [\sigma^c]_i [\sigma^c]_j [\rho^c]_{ij} \quad (27)$$

### 3 Generalized observation operator and covariance matrix

In order to simplify the developments of section 2.4, we now define the *generalized observation operator*  $h(\tilde{x})$ :

$$h(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} h^a(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & h^c(\tilde{x}) \end{pmatrix} \quad (28)$$

According to H6, we also define  $R$  the *generalized observation error covariance matrix* which is diagonal-block:

$$R = \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_c \end{pmatrix} \quad (29)$$

At last,  $H(\tilde{x}) = \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}}$  designates the *tangent linear operator* of the generalized observation operator.

#### Optimal solution and confidence intervals

The optimization of the cost function is performed with the `m1qn3` minimizer developed by Gilbert and Marechal [3] which is based on a limited memory quasi-newton algorithm [2]. Let us designate  $\hat{x}$  the optimized control variable. Assuming that the  $h(\tilde{x})$  operator is only weakly non-linear (hypothesis **H7**), the confidence intervals on  $\hat{x}$  can be estimated by the *posterior error covariance matrix*  $\hat{P}$  [19] where  $\hat{H}$  is the tangent linear operator estimated at the optimum  $\hat{x}$ :

$$\hat{P} \simeq \left( \hat{H}^T \tilde{R}^{-1} \hat{H} + \tilde{B}^{-1} \right)^{-1} \quad (30)$$

Let us write:

- $\hat{\chi} = \chi(\hat{x})$ , the optimized ice chronology,
- $\nabla \hat{\chi}^T$ , the related tangent linear operator calculated at the optimal point  $\hat{x}$ .

We now assume (hypothesis **H8**) that a normal pdf correctly approximates the uncertainties on  $\hat{\chi}$  and we define:

$$Q = \nabla \hat{\chi} \tilde{P} \nabla \hat{\chi}^T \quad (31)$$

where the  $Q$  matrix is an approximation of the *posterior error covariance matrix* associated to the optimized ice chronology. The matrix diagonal elements consequently provide the confidence intervals on  $\hat{\chi}$  (see appendix 5).

### Applications: the EDC ice core

In this section we present numerical experiments on the EDC core, in order to test the new dating method. The first experiment consists in: 1) building an optimal age scale for the EDC core with the same elements used by Parrenin et al. [13] but in a more rigorous way 2) calculating the associated uncertainty. The two next experiments enable to investigate the sensitivity of the optimal age scale, the correction functions and the related confidence intervals to the shaping of the  $B$  matrix.

### 3.1 Standard experiment: EDC age scale construction

In order to construct an optimal age scale for the EDC core, we assimilate the whole set of age markers described in table 1 of Parrenin et al. [13], particularly the age markers of the core bottom which could not be respected with the Monte Carlo method (see introduction). We moreover use the optimized flow model simulations of Parrenin et al. [14] which provide us the prior guesses  $S^b$  and  $T^b$ . No correction markers are used for the current experiment.

The age marker std which are required to determine the  $R^a$  matrix are also taken from table 1 of Parrenin et al. [13]. No correlation between age observation errors were reported in [13] and we adopt this assumption. The  $R^a$  matrix is therefore diagonal. This can be a strong assumption in particular for age markers derived from an orbital tuning procedure like for instance the  $\delta^{18}O$  data ( $O_2$  isotope) which are used to derive the EDC3 age scale [13, 1]. The constant phase usually assumed in the tuning procedure may be wrong and therefore lead to a systematic bias.

As already detailed in section 2.3.1, a proper shaping of the  $B_\alpha$  and  $B_\beta$  matrices would require a detailed statistical analysis. In this preliminary study we only propose some simplistic covariance modelling which are to a certain extent arbitrary and which we address in the next paragraph.

We first of all define the  $B_\alpha$  covariances as functions of *age differences* while the  $B_\beta$  covariances are set as functions of *depth differences*. This separation is due to the distinct dependence of  $S^b$  and  $T^b$  either on age or on depth. Changes in the accumulation rate are not linked to the drilling depth but more naturally to the paleoclimate change through time whereas the thinning of an ice layer observed today along the core is more intrinsically a mechanical state attached to the depth of the layer.

Let us secondly focus on the specific  $B_\alpha$  settings. The error variance on  $\tilde{\alpha}$  is assumed to be constant through time and for that purpose we set each  $\sigma_\alpha^b$  vector components to 0.17. We do not expect the discrepancy between the "true" and the modelled accumulation to get worse in the past. We can however expect the model to better estimate the accumulation rates of the inter-glacial stages because the sedimentation model is derived from a present-day spatial parameterization linking the mean annual temperature with the ice deuterium content. We ignore this point in this preliminary study. In addition, the correlation matrix  $\rho_\alpha^b$  is defined as a gaussian function of  $\chi^b$  with  $L_\alpha^b$ , a correlation length parameter in time unit which is set to 9 kyr (1 kyr = 1000 years):

$$[\rho_\alpha^b]_{ij} = \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{\chi_i^b - \chi_j^b}{L_\alpha^b} \right)^2 \quad (32)$$

Let us at last detail the  $B_\beta$  settings. Referring to the  $\tilde{\beta}$  error variance, its shape is chosen taking into account the two forward model characteristics: 1) the longer the ice particle trajectories, the greater the error of the forward

del is, 2) when dealing with a 1D flow model and depending on the amount of basal melting, the thinning correction may become artificially very close to zero near the base; the potential result is a largely over-estimated age. In the light of this comment, one can control the magnitude of the error variance with the growth of the ice and one candidate for the  $\sigma_\beta^b$  vector components can therefore be a growing function of the inverse of  $T_i^b$ , the total thinning experienced by the ice layer between  $z_{i-1}$  and  $z_i$ :

$$[\sigma_\beta^b]_i = \frac{\sigma_\beta^{b,0}}{H} \sum_{k=1}^i \frac{dz_k}{T_k^b} \quad (33)$$

where  $H$  is the total ice thickness and  $\sigma_\beta^{b,0}$  a parameter which is set to 0.425. The related correlation profile were again chosen as a gaussian function depicted with the corresponding correlation length parameter  $L_\beta^b$  set to 1000 m:

$$[\rho_\beta^b]_{i,j} = \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{z_i - z_j}{L_\beta^b} \right)^2 \quad (34)$$

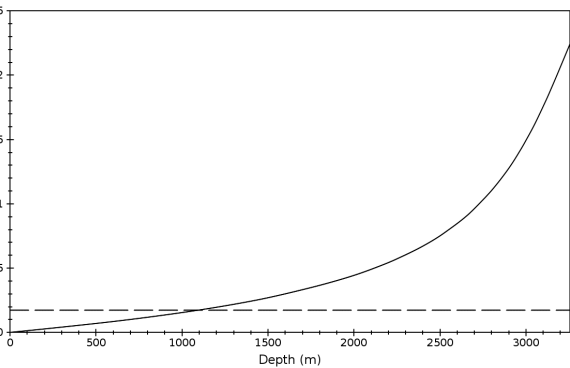


Figure 1: Depth profiles for the background variances  $(\sigma_\alpha^b)^2$  (black dashed line) and  $(\sigma_\beta^b)^2$  (black solid line).

These settings serve our numerical experiments. They induce a reversal of trend around 1000 m which is illustrated on Figure 1 with the  $\sigma_\alpha^b$  and  $\sigma_\beta^b$  depth profiles. Below 1000 m because  $\sigma_\beta^b > \sigma_\alpha^b$ , the  $J$  function is more sensitive to a  $T$  deviation from its background  $T^b$  than to a  $S$  deviation from its background  $S^b$  while above 1000 m the opposite configuration takes place. As a result, if corrections are necessary they will rather affect  $\tilde{\alpha}$  below 1000 m and  $\tilde{\beta}$  above.

The optimization of the cost function leads to the solution displayed on figure 2. On the top panel of the figure is plotted  $\hat{\chi} - \chi^b$ , the age difference between the optimized and the background age scale (black line) with the assimilated set of age markers and their uncertainty (black circles with error bars). The bottom panel operates a zoom in the depth interval lying between 2700 and 3255 m where the disagreement between the two ice chronologies is blazing. On this panel is directly compared the

behavior of the two age scales with  $\chi^b$  in grey dashed line and  $\hat{\chi}$  in black solid line. Moreover, the uncertainty on the  $\hat{\chi}$  optimized age scale is shown with a semi dashed red line on both panels.

### 3.2 Sensitivity experiment through covariance length changes

In order to investigate the sensitivity of the solution to the shaping of the error covariance matrices, we modify the  $B_\beta$  covariances by reducing the  $L_\beta$  value from 150 to 50 m (this affects the  $J^b$  terms and their weighing factors). We do not modify the other settings. The 1<sup>st</sup> sensitivity experiment operates on the set of observations described above in the standard experiment whereas the 2<sup>nd</sup> sensitivity experiment assimilates also thinning correction markers (see section 2.3.2). The aim of this latter experiment is to study how the  $\beta$  thinning correction and its confidence intervals behave in the neighborhood of  $\beta$  measurements. For that purpose, we use the  $\Delta_{depth}$  data discrepancies of table 2 in Dreyfus et al. [1] and we stick to the assumption H5 made in section 2.3.2. The observed  $\Delta_{depth}$  are deduced from warming or cooling events which are simultaneously recorded in the gas bubbles (greenhouse gases) and in the ice phase (through water isotope of ice which is a proxy of the temperature). Here again, we assume no correlation between correction marker errors. The  $R^c$  matrix is therefore diagonal. This may be a strong assumption if for instance the hypothesis of concomitant variations of the greenhouse and the temperature, reveals itself to be wrong.

In order to describe the results of the 1<sup>st</sup> sensitivity experiment, we designate by  $\hat{\chi}_{L_\beta=150}$  and  $\hat{\chi}_{L_\beta=50}$  the two age scale solutions. Figure 3 compares their behavior. The set of age markers are still plotted as black circles with error bars. As for the standard experiment, we show on the top panel the two resulting age differences  $\hat{\chi}_{L_\beta=150} - \chi^b$  (black dashed line) and  $\hat{\chi}_{L_\beta=50} - \chi^b$  (grey solid line). The bottom panel operates a zoom below 2700 m and directly shows  $\hat{\chi}_{L_\beta=150}$  and  $\hat{\chi}_{L_\beta=50}$ . On both panels are plotted the calculated uncertainties associated to each age scale, in red dashed line for  $\hat{\chi}_{L_\beta=150}$  and in yellow solid line for  $\hat{\chi}_{L_\beta=50}$ .

Figure 4 displays the result of the 2<sup>nd</sup> sensitivity experiment. The top and bottom panels show the  $\hat{\beta}$  thinning correction function respectively for  $L_\beta = 150$  and  $L_\beta = 50$  m. The black squares with error bars are the thinning correction markers, the black line is the thinning correction function solution while the dashed black lines are the confidence intervals.

## 4 Discussion

On the two panels of figure 2, one can see how the optimized chronology does captures the necessary change of slope in order to respect the age markers. The general trend of the uncertainty on  $\hat{\chi}$  is a growth (errors cumulate) on which are superimposed several drops localized in the neighborhood of age markers. These drops

markedly occur where the age marker uncertainty is below the uncertainty attached to the background age scale. This behavior can be observed for instance, between 2000 and 2700 m where 6 ages markers are assimilated with a 100-yr uncertainty (see table 1 in Parrenin et al. [13]). This illustrates the expected spreading of the information brought by observations in their neighborhood. Further in an area with high density of observations, the estimated age scale uncertainty is more or less steady but below the mean level of the related age marker uncertainty<sup>12</sup>: this feature can be clearly observed below 2700

On the top panel of figure 3, the comparison of the  $\hat{\chi}_{L_\beta=150}$  and  $\hat{\chi}_{L_\beta=50}$  solutions shows a slight sensitivity of the age scales to  $L_\beta$  changes (in the investigated range). A smaller covariance length however leads to a chronology with smoother curvatures in the neighborhood of age markers. This feature can be observed on the two solutions  $\hat{\chi}_{L_\beta=150}$  and  $\hat{\chi}_{L_\beta=50}$ , for the dated horizons lying at 1265.10, 1838.09 and 2620.23 m depth. It is meanwhile clear on both panels, that the uncertainty on the optimized age scale is strongly sensitive to  $L_\beta$  changes. One can expect that higher covariance lengths result in lower age scale uncertainty. This is however a little more complex because of two opposite driving forces. A greater covariance length: 1) causes the errors to cumulate faster with depth but 2) induces a wider diffusion of the information brought by an age marker. The latter statement is exclusively true when the age marker is in the range of action of the covariance length. An illustration of this point can be observed below and above 2300 m. Below 2300 m, the uncertainty on  $\hat{\chi}_{L_\beta=150}$  is first higher than the one related to  $\hat{\chi}_{L_\beta=50}$  but then turns smaller downwards. Below 2300 m moreover, the depth interval separating two successive age markers is too large compared to the magnitude of the covariance length: the erosion/accretion dominates and the uncertainty on the age estimation is higher for  $L_\beta = 150$  m<sup>13</sup>. Above 2300 m, the depth interval becomes sufficiently small compared to the magnitude of the covariance length: the spreading of data information dominates and the uncertainty on the solution is lower for  $L_\beta = 150$  m. This interpretation may be slightly blurred because in this experiment two covariance lengths operate at the same time:  $L_\beta$  and  $B_\alpha$ . But above 2700 m the impact of the  $B_\alpha$  covariances can be neglected regarding the respective magnitudes of: 1)  $\sigma_\alpha$  and  $\sigma_\beta$  std, 2)  $L_\alpha$  and  $L_\beta$  converted in age units<sup>14</sup>. Moreover the depth interval lying above 2700 m, characterized itself by uncertainties on age markers that are below the uncertainty attached to the background age scale which ensures a strong inflexion of the uncertainty curve.

On figure 4, the expected behavior for the  $\hat{\beta}$  solution and its confidence intervals<sup>15</sup> can be seen. At each cor-

<sup>12</sup>If some error correlations would have been taken into account between age markers, the observed uncertainty drop would not occur so markedly.

<sup>13</sup>More precisely, this comment holds above 500 m and below 2300 m.

<sup>14</sup>Around 2700 m,  $L_\beta$  becomes 2 (8) times larger than  $L_\alpha$  for  $L_\beta = 50$  (150) m while the  $\sigma_\beta$  std is 6 times larger than the  $\sigma_\alpha$  std.

<sup>15</sup>The confidence intervals are absolute uncertainties. They are however not symmetric with respect to the solution because they are calculated by the mean of the estimated relative uncertainty attached to the posterior lognormal error distribution.

rection marker depth, the uncertainty drops and the confidence intervals converge very close to the value of the uncertainty attached to the correction marker. The comparison of the two panels of figure 4 shows the impact of  $L_\beta$  changes: the larger the covariance length the further the uncertainty information brought by the correction marker data diffuses. One comment is necessary in order to explain the non smooth behavior of the solution at some particular depth, despite we do take into account correlations for the background errors. A detailed analysis shows that this behavior is observed when age marker constraint conflicts with a correction marker constraint, the former constraint requiring for instance an older ice age while the latter constraint pushes toward the opposite: this is precisely the case for the correction marker which is at 2785.75 m depth and the three age markers which are successively at 2789.58, 2799.36 and 2812.69 m depths (see tables 1 and 2 of Dreyfus et al. [13] and table 1 of Parrenin et al. [13]).

## 5 Conclusion

This paper detailed the technical frame of a new pragmatic inverse approach which optimally estimates the ice chronology of a given ice core. This inverse approach is new because it takes into account the ice flow model uncertainties. These latter cannot be ignored in the context of the simplified flow models currently used for inverse dating purpose, unless to enrich the flow models in order that they better describe the flow irregularities. The model uncertainty is introduced in a pragmatic way by the mean of correction functions targetting the total thinning function and the accumulation rate, two entities previously calculated with direct or already optimized dating simulations and which serve the purpose of prior guesses (or background) for the new inverse approach. A cost function is derived in a Bayesian framework which describes in a probabilistic way, the competition between the distance to the background knowledge and the distance to a set of observations. The optimization of the cost function enables to identify these correction functions and provides new estimates of the thinning function and the accumulation rate. Finally, these new flow entities lead to an optimal estimate of the ice age scale. In the Bayesian framework, the calculation of the solution confidence intervals can be performed under certain hypothesis.

We successfully applied this new dating method to construct the age scale of the EDC core with the use of the official set of age markers [13]. No a posteriori correction in the core bottom was needed: the new method enables in particular to respect the constraint of the  $\delta^{18}O$  age markers which was not the case for the dating simulation optimized with a Monte Carlo technique. Besides,

confidence interval associated to the new ice age scale behaves as expected: it increases with the distance to the rest age marker.

Preliminary sensitivity tests confirm the well-known impact of the background error covariance matrices on the solution and especially on the estimated confidence interval: the larger the correlation lengths the further the information brought by a given observation propagates. The important task to do in future works is to shape such relevant physical information those background error matrices. A traditional but time consuming approach is to perform statistics on the outputs provided by some more complex flow modelling (full Stokes or higher order models). Another approach would consist in working on small time intervals carefully chosen with a large number of observations and searching the most unfavorable cases for the background error matrices which would never still respect the data set.

Some of the assimilated observations (i.e. data used to constrain the model) reveal our intent in a very close future, to inverse at the same time on the ice and on the ice age scale (correction markers are more rigorously depth markers which are straightforwardly related to close-off depth and  $\delta^{18}O$  are gas rather than ice age markers). Here again, the idea is to use a prior guess from the *codie* and to calculate an optimal correction function in best agreement with the data and the background knowledge. Moreover, the ability of the method to assimilate large set of observations brings the perspective of inverse chronologies of several cores simultaneously using ice and gas stratigraphic links. This method will certainly provide a tool to the paleo-community, enabling to construct a common and optimal age scale for deep ice cores of Greenland and Antarctica.

## Acknowledgements

This work was supported by the Agence Nationale de Recherche (projects ANR-05-BLAN-0165-01). We are grateful to Michel Sacchetti for his technical help.

## Appendix A : Confidence intervals on the optimal ice age

Let us call  $X$ , the model parameter vector to be identified in the framework of an inverse problem. Let us suppose we solve the problem with a variational approach through the minimization of  $J$ , the cost function of the problem. Let us call  $g$ , an additional observation model defined as an operator that maps the model space  $\mathcal{M}$  into the observation space  $\mathcal{D}$ :

$$g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D} \quad (35)$$

$$x \mapsto y = g(x)$$

Let us suppose that both  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{D}$  are linear spaces. Let  $X = x^t$  is the true but unknown optimal solution and

if  $X = \hat{x}$  is the estimated solution, one can define  $\epsilon_x$  the analysis error as (assuming it to be normally distributed):

$$\epsilon_x = x^t - \hat{x} \quad (36)$$

with the associated  $P$  error covariance matrix:

$$P = \langle \epsilon_x \epsilon_x^T \rangle \quad (37)$$

The true but unknown observation model can therefore be written as:

$$y^t = g(x^t) \quad (38)$$

while the estimated model is:

$$\hat{y} = g(\hat{x}) \quad (39)$$

The error made when estimating the true observation model to be  $\hat{y} = g(\hat{x})$  is given by  $\epsilon_y$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= y^t - \hat{y} \\ &= g(x^t) - g(\hat{x}) \end{aligned} \quad (40)$$

Let us suppose that  $\epsilon_x = x^t - \hat{x}$  is small enough to write:

$$g(\hat{x} + \epsilon_x) - g(\hat{x}) = \hat{G}^T \epsilon_x + o(\|\epsilon_x\|) \quad (41)$$

where  $\hat{G}^T$  is the tangent linear operator calculated at  $X = \hat{x}$ :

$$\hat{G}^T = \left[ \frac{\partial g}{\partial X} \right]_{X=\hat{x}} \quad (42)$$

Equation (41) may be re-written using  $\epsilon_y$  which is a random function:

$$\epsilon_y = \hat{G}^T \epsilon_x + o(\|\epsilon_x\|) \quad (43)$$

Further on, assuming that  $\epsilon_y$  is normally distributed, one can calculate  $Q$ , the error covariance matrix which measures the error made on  $y^t$  estimate:

$$\begin{aligned} Q &= \langle \epsilon_y \epsilon_y^T \rangle \\ &= \langle \hat{G}^T \epsilon_x \epsilon_x^T \hat{G}^T \rangle \\ &= \hat{G}^T \langle \epsilon_x \epsilon_x^T \rangle \hat{G}^T \\ &= \hat{G}^T P \hat{G}^T \end{aligned} \quad (44)$$

## References

- [1] G. B. Dreyfus, F. Parrenin, B. Lemieux-Dudon, G. Durand, V. Masson-Delmotte, J. Jouzel, J.-M. Barnola, L. Panno, R. Spahni, A. Tisserand, U. Siegenthaler, and M. Leuenberger. Anomalous flow below 2700 m in the EPICA Dome C ice core detected using  $\delta^{18}O$  of atmospheric oxygen measurements. *Climate of the Past*, 3(2):341–353, 2007.

- ] J.C. Gilbert and C. Lemarechal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45(1):407–435, 1989.
- ] JC Gilbert and C. Lemarechal. The modules M1QN3 and N1QN3. *Program documentation, INRIA*, 1993.
- ] A. Grinsted and D. Dahl-Jensen. A Monte Carlo-tuned model of the flow in the NorthGRIP area. *Annals of Glaciology*, 35(1):527–530, 2002.
- ] P. Huybrechts, O. Rybak, F. Pattyn, U. Ruth, and D. Steinhage. Ice thinning, upstream advection, and non-climatic biases for the upper 89% of the EDML ice core from a nested model of the Antarctic ice sheet. *Climate of the Past*, 3(4):577–589, 2007.
- ] A.C. Lorenc. Analysis methods for numerical weather prediction. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 112(474):1177–1194, 1986.
- ] DG Martinson, NG Pisias, JD Hays, J. Imbrie, TC Moore, and NJ Shackleton. Age dating and the orbital theory of the ice ages: development of a high-resolution 0 to 300,000-year chronostratigraphy. *Quaternary Research*, 27(1):29, 1987.
- ] EPICA Community Members. Eight glacial cycles from an Antarctic ice core. *Nature*, 429:623–628, 2004.
- ] EPICA Community Members. One-to-one coupling of glacial climate variability in Greenland and Antarctica. *Nature*, 444:195–198, 2006.
- ] K. Mosegaard and A. Tarantola. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *J. Geophys. Res.*, 100(B7):12–431, 1995.
- ] K. Mosegaard, A. Tarantola, et al. Probabilistic Approach to Inverse Problems. *International Handbook of Earthquake & Engineering Seismology, Part A*, pages 237–265.
- ] B. Narcisi, JR Petit, and M. Tiepolo. A volcanic marker (92 kyr) for dating deep East Antarctic cores. *Quat. Sci. Rev.*, 25:2682–2687, 2006.
- ] F. Parrenin, J.-M. Barnola, J. Beer, T. Blunier, E. Castellano, J. Chappellaz, G. Dreyfus, H. Fischer, S. Fujita, J. Jouzel, K. Kawamura, B. Lemieux-Dudon, L. Loulergue, V. Masson-Delmotte, B. Narcisi, J.-R. Petit, G. Raisbeck, D. Raynaud, U. Ruth, J. Schwander, M. Severi, R. Spahni, J. P. Steffensen, A. Svensson, R. Udisti, C. Waelbroeck, and E. Wolff. The EDC3 chronology for the EPICA Dome C ice core. *Climate of the Past*, 3(3):485–497, 2007.
- [14] F. Parrenin, G. Dreyfus, G. Durand, S. Fujita, O. Gagliardini, F. Gillet, J. Jouzel, K. Kawamura, N. Lhomme, V. Masson-Delmotte, C. Ritz, J. Schwander, H. Shoji, R. Uemura, O. Watanabe, and N. Yoshida. 1-D-ice flow modelling at EPICA Dome C and Dome Fuji, East Antarctica. *Climate of the Past*, 3(2):243–259, 2007.
- [15] F. Parrenin, J. Jouzel, C. Waelbroeck, C. Ritz, and J.M. Barnola. Dating the Vostok ice core by an inverse method. *Journal of Geophysical Research. D. Atmospheres*, 106:31, 2001.
- [16] F. Parrenin, F. Remy, C. Ritz, M.J. Siebert, and J. Jouzel. New modeling of the Vostok ice flow line and implication for the glaciological chronology of the Vostok ice core. *J. Geophys. Res.*, 109, 2004.
- [17] A.N. Salamatin, E.A. Tsyganova, V.Y. Lipenkov, and J.R. Petit. Vostok (Antarctica) ice-core time-scale from datings of different origins. *Annals of Glaciology*, 39(1):283–292, 2004.
- [18] A. Svensson, K. K. Andersen, M. Bigler, H. B. Clausen, D. Dahl-Jensen, S. M. Davies, S. J. Johnsen, R. Muscheler, F. Parrenin, S. O. Rasmussen, R. R??thlisberger, I. Seierstad, J. P. Steffensen, and B. M. Vinther. A 60 000 year Greenland stratigraphic ice core chronology. *Climate of the Past*, 4(1):47–57, 2008.
- [19] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation* (Philadelphia, PA: SIAM). 2005.
- [20] F. Traufetter, H. Oerter, H. Fischer, R. Weller, and H. Miller. Spatio-temporal variability in volcanic sulphate deposition over the past 2 kyr in snow pits and firn cores from Amundsenisen, Antarctica. *Journal of Glaciology*, 50(168):137–146, 2004.
- [21] YJ Wang, H. Cheng, RL Edwards, ZS An, JY Wu, C.C. Shen, and JA Dorale. A High-Resolution Absolute-Dated Late Pleistocene Monsoon Record from Hulu Cave, China. *Science*, 294(5550):2345, 2001.

Figure 2: Standard experiment: ice chronology of the EDC core and its confidence interval calculated with the new dating method. The top panel covers the whole chronology while the bottom panel operates a zoom between 2700 m and the core bottom. The ages are measured in kyr (1000 years). The age difference between the new and the background chronology is shown in solid black line on the top panel while the bottom panel directly shows the new and the background age scales using the same color code (related Y-axis on the left); on both panels, in red dashed line is plotted the related estimated scale uncertainty (related Y-axis on the right) as well as the assimilated age markers in black circles with error bars.

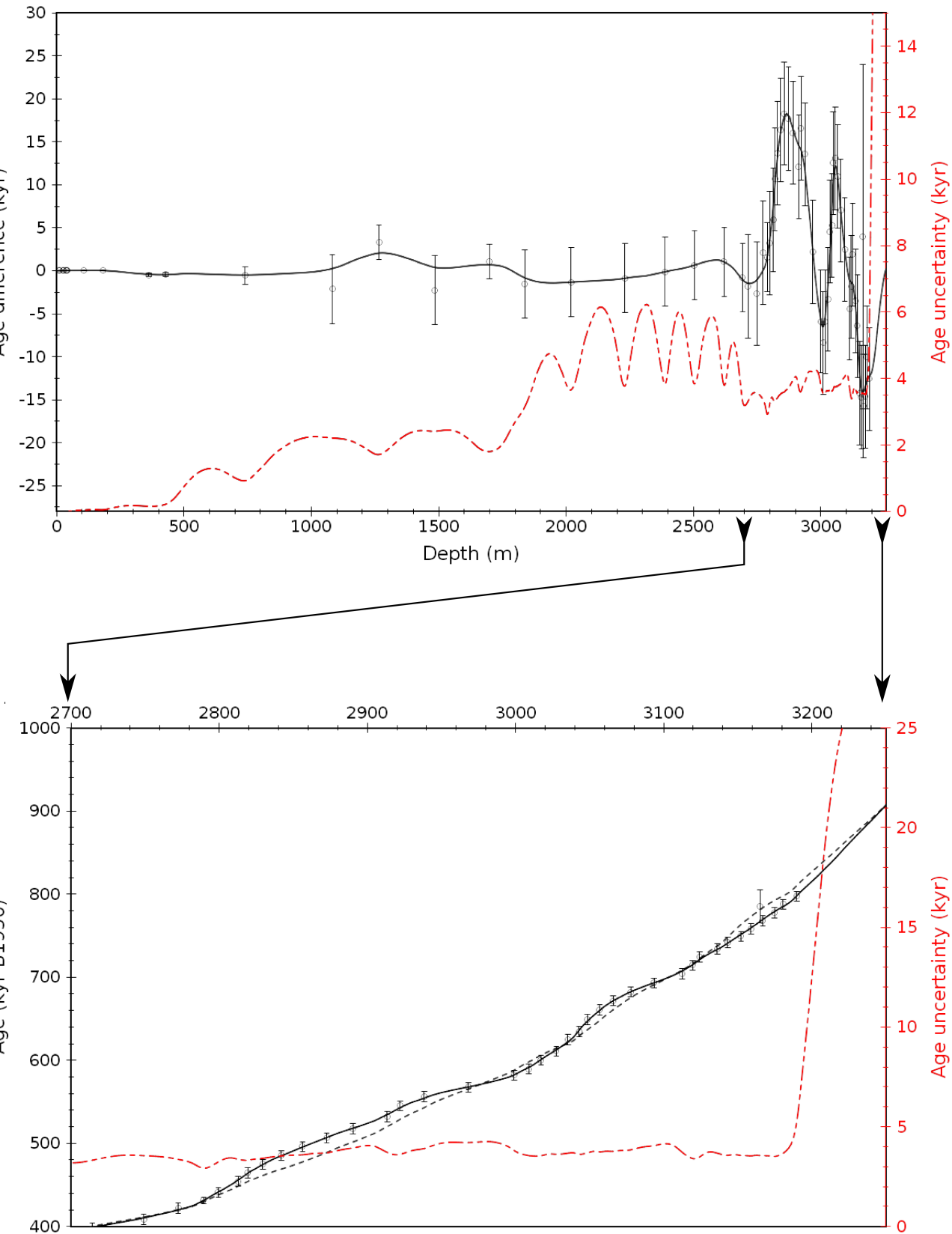




Figure 3: 1<sup>st</sup> sensitivity experiment: EDC ice chronologies and their related uncertainties calculated with two covariance lengths  $L_\beta = 150$  and  $L_\beta = 50$  m. The top panel covers the whole chronology while the bottom panel operates a zoom between 2700 m and the core bottom. The ages are measured in kyr (1000 years). The age differences between the new and the background chronologies are shown on the top panel, for both covariance length  $L_\beta = 150$  m (black dashed line) and  $L_\beta = 50$  m (grey solid line) while the bottom panel directly shows both age scales using the same color code (related Y-axis on the left); on both panels, in red dashed line and yellow solid line are plotted the estimated age scale uncertainties respectively for  $L_\beta = 150$  and  $L_\beta = 50$  m (related Y-axis on the right) while black circles with error bars are the assimilated age markers.

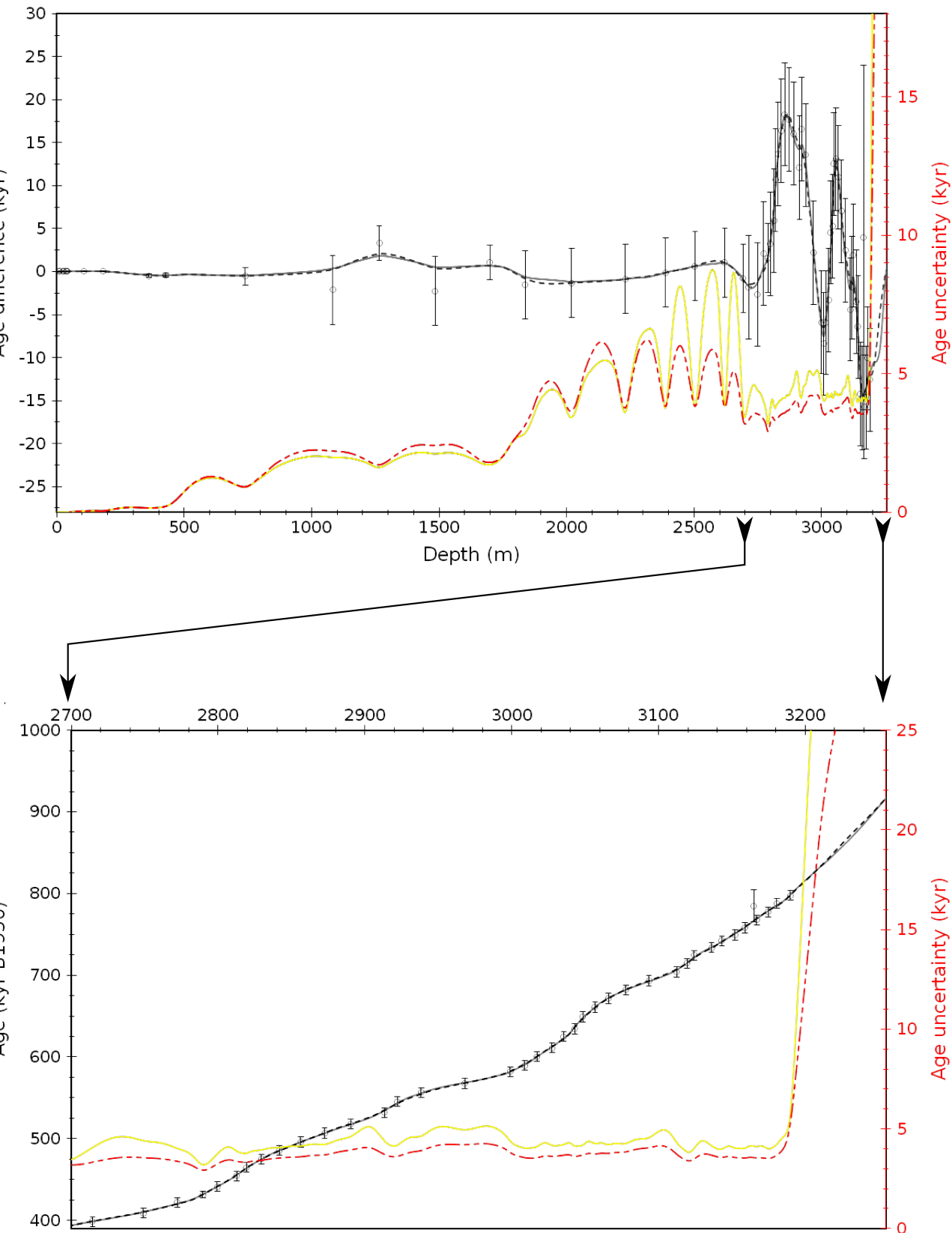
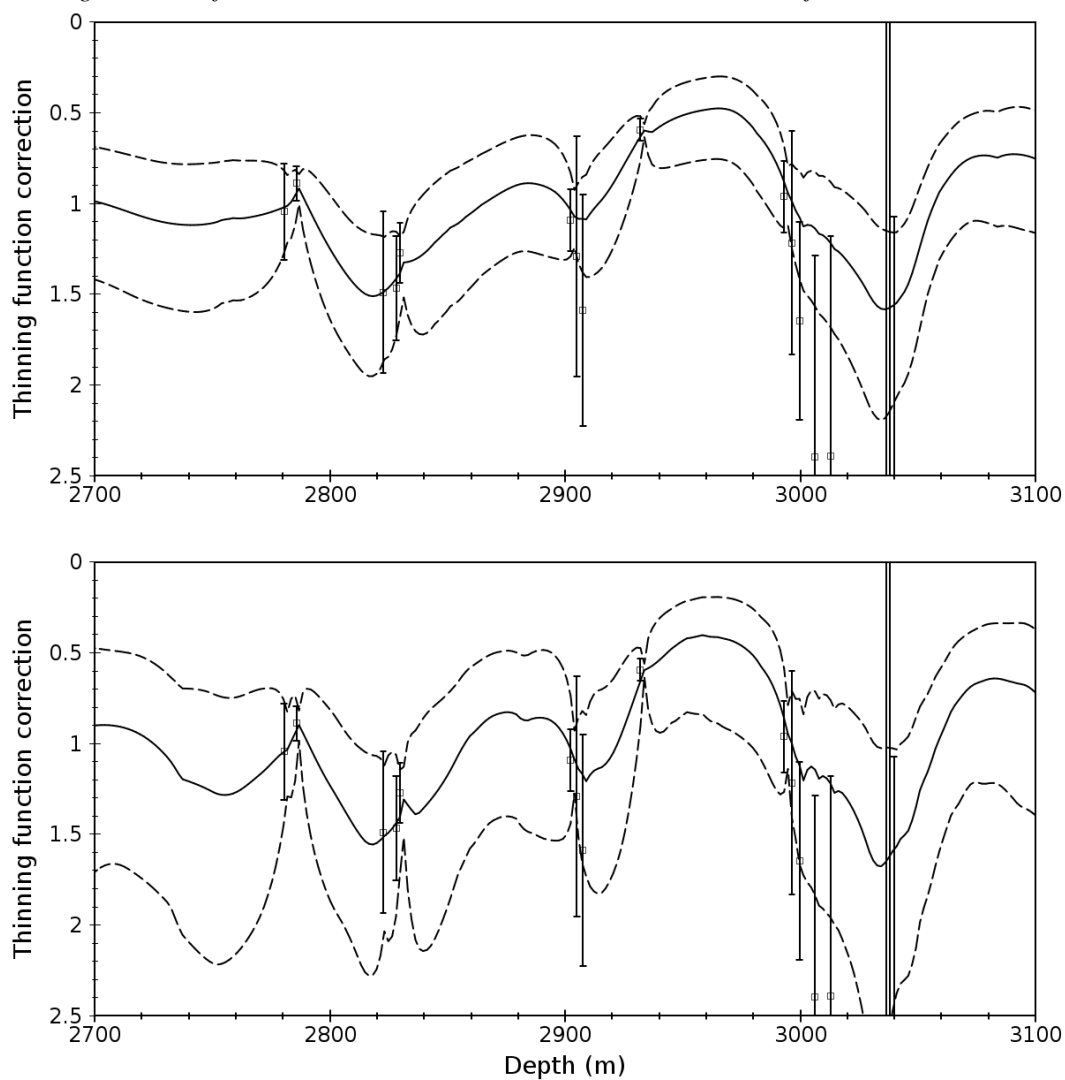


Figure 4: 2<sup>nd</sup> sensitivity experiment: thinning function correction calculated for two covariance lengths  $L_\beta = 150$  and  $L_\beta = 50$  m. On the top panel,  $L_\beta = 150$  m while on the bottom panel  $L_\beta = 50$  m. The squared markers with error bars are the thinning correction observations (the correction markers) and their uncertainty. The black solid line is the estimated thinning correction function while the black dotted lines are the related confidence intervals.



# Sensibilité de la solution à l'ébauche

---

Dans le prolongement du travail présenté dans l'article PICR2, on étaye dans ce chapitre l'étude de la sensibilité de la solution et des intervalles de confiance aux variances et covariances d'erreur arrêtées sur les scénarios glaciologiques d'ébauche. On présente de nouvelles expériences numériques dont le cadre est identique à celui explicité dans l'article PICR2 : la méthode est appliquée sur le forage EDC pour lequel on a le même scénario d'ébauche EDC3model (Parrenin *et al.*, 2007a) ainsi que le même jeu de données. En revanche, on modifie la forme des matrices de covariances d'erreur d'ébauche. On conserve les conventions d'écriture présentées dans chapitre 13 (voir équations (13.1) qui donne les transformations élémentaires appliquées sur les fonctions de correction).

## 14.1 Description des expériences numériques

On se place dans un cadre simple où l'on assimile uniquement des marqueurs d'âge glace. Les expériences numériques sont volontairement réalisées avec des matrices de covariance d'erreur d'ébauche simplifiées. On limite les paramètres qui contrôlent les variances et covariances d'erreur modèle avec les hypothèses suivantes :

1. Les variances d'erreur associées à la fois aux fonctions de correction  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  sont supposées constantes, c'est-à-dire quel que soit l'âge de la glace et/ou la profondeur du forage, on considère que l'erreur modèle est la même (on note que ceci est peu réaliste, en particulier pour la fonction  $\tilde{\beta}$  qui corrige l'amincissement  $T(z)$ ). En notation discrète,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , on a :

$$\begin{aligned} [\sigma_{\alpha}^b]_i &= C^{te} \\ [\sigma_{\beta}^b]_i &= C^{te} \end{aligned}$$

2. La variance d'erreur modèle sur le scénario d'accumulation est négligeable par rapport à la variance d'erreur modèle sur le scénario d'amincissement (ceci est peu réaliste si on considère le problème sur toute la profondeur du forage) et on adopte  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$[\sigma_{\beta}^b]_i = 10^3 [\sigma_{\alpha}^b]_i \tag{14.1}$$

Tout comme dans l'article PICR2, on décrit la covariance d'erreur à l'aide des matrices de corrélation d'erreur  $\rho_\beta^b$  et  $\rho_\alpha^b$ . Compte-tenu de l'hypothèse (14.1), on ne s'intéresse qu'à la corrélation d'erreur sur la fonction d'amincissement. Le profil de corrélation est choisi gaussien et il est contrôlé par la longueur de corrélation  $L_\beta^b$  :

$$[\rho_\beta^b]_{i,j} = \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{z_i - z_j}{L_\beta^b} \right)^2 \quad (14.2)$$

On distinguera deux types d'expériences numériques selon les termes intégrés dans la fonction coût :

1. *Premier type d'expériences* : la fonction coût ne comprend pas de terme régularisant  $J^r$  mais simplement le terme d'ébauche de nature probabiliste  $J^b$  :

$$J = J^a + J^b \quad (14.3)$$

L'objectif de ces expériences est d'étudier la sensibilité de la solution  $\beta^a$  et  $\chi^a$  aux paramètres  $L_\beta^b$  et  $\sigma_\beta$  qui définissent la matrice  $B_\beta$  et donc les variances et covariances d'erreur sur l'ébauche  $T^b$ .

2. *Second type d'expériences* : on ajoute le terme régularisant  $J^r$  à la fonction coût :

$$J = J^a + J^b + J^r \quad (14.4)$$

Dans ce type d'expériences, on prend une longueur de corrélation  $L_\beta^b$  nulle ;  $B_\beta$  est donc une matrice diagonale. L'objectif est de comparer l'impact de l'opérateur de lissage attaché au terme  $J^r$  (voir section 8.5) par rapport à l'impact des corrélations d'erreur d'ébauche.

### 14.1.1 Sensibilité à l'ébauche de l'âge glace analysé

Le tableau 14.1 décrit une série d'expériences où ne sont assimilés que des marqueurs d'âge glace. On définit dans ce tableau, deux groupes d'expériences associés respectivement à deux jeux de marqueurs d'âge glace différents, nommés jeu I et jeu II. Le groupe II comporte moins de marqueurs d'âge dans le fond du forage. Ceux-ci sont donc séparés par des distances plus importantes.

**Remarque 3.** On utilise un facteur devant le terme régularisant  $J^r$  pour fixer le poids de ce terme par rapport aux autres termes de la fonction coût. Ce facteur noté  $\lambda_r$  est formulé à partir d'une longueur caractéristique  $L_r$  et d'une amplitude caractéristique  $A_r$  :

$$\lambda_r = \left( \frac{L_r^2}{\pi^2 A_r} \right)^2 \quad (14.5)$$

Jeu de données	Nom	$\sigma_\beta$	$L_\beta^b$ (m)	$J^r$
Jeu I	I.a	2.	0	✓
	I.b	2.	0	non
	I.c	2.	15	non
	I.d	2.	50	non
	I.e	2.	100	non
Jeu II	II.b	2.	0	non
	II.d	2.	50	non
	II.e	2.	100	non
	II.f	2.	600	non

TABLEAU 14.1 – Expériences numériques pour tester la sensibilité de l'âge glace analysé et des intervalles de confiances à l'erreur d'ébauche.

*Dans l'expérience Ia, on choisit  $A_r = \sigma_\beta^b$  et  $L_r = 50m$ .*

Profondeur (m)	Age (ans)	Incertitude (ans)	jeu I	jeu II	jeu III
8.35	66	1.00	✓	✓	✓
12.34	134	0.25	✓	✓	✓
23.20	349	1.00	✓	✓	✓
29.27	492	5.00	✓	✓	✓
38.12	691	5.00	✓	✓	✓
39.22	722	6.00	✓	✓	✓
41.52	779	6.00	✓	✓	✓
107.83	2716	50	✓	✓	✓
181.12	5280	50	✓	✓	✓
361.50	11650	180	✓	✓	✓
427.20	15000	240	✓	✓	✓
740.08	41200	1000	✓	✓	✓
1082.34	70600	4000	✓	✓	✓
1265.10	92500	2000	✓	✓	✓
1484.59	109400	4000	✓	✓	✓
1698.91	130100	2000	✓	✓	✓
1838.09	147600	4000	✓	✓	✓
2019.73	185300	4000	✓	non	✓
2230.71	227300	4000	✓	non	✓
2387.95	270400	4000	✓	✓	✓
2503.74	313400	4000	✓	non	✓
2620.23	352400	4000	✓	non	✓
2692.69	390500	4000	✓	✓	non
2772.27	422000	6000	✓	non	non
2872.56	506600	6000	✓	non	non
2968.08	567600	6000	✓	✓	non
3065.93	671700	6000	✓	non	non
3124.27	724400	6000	✓	non	non
3165.00	785000	20000	✓	✓	non
3189.83	797500	6000	✓	✓	non

TABLEAU 14.2 – Marqueurs d'âge glace utilisés dans les groupes d'expérience I,II et III.

### 14.1.2 Sensibilité à l'ébauche de la correction sur l'amincissement

Dans cette série d'expériences, on assimile à la fois des marqueurs d'âge glace et des marqueurs d'amincissement mais sur des intervalles de profondeurs distincts afin de séparer leur impact respectif. On utilise les 22 premiers marqueurs d'âge du groupe II (c'est-à-dire les marqueurs du tableau 14.1 de la surface jusqu'à 2620.23m). Les marqueurs de correction sont rapportés dans le tableau 14.4. Comme explicité dans l'article PICR2, l'estimation de ces marqueurs d'amincissement provient de la comparaison lors des transitions climatiques

rapides des variations de CO<sub>2</sub> et de l'isotope de la glace. Cependant, le déphasage entre l'isotope et le CO<sub>2</sub> peut a priori atteindre le millier d'années (Amaëlle Landais, communication personnelle) ceci qui ne permet pas de dériver des estimations précises de correction sur l'amincissement. Les expériences sont explicitées dans le tableau 14.3.

Expérience	$\sigma_\beta$	$L_\beta^b$ (m)	$J^r$
IIIa	1.	0	✓
IIIb	1.	0	non
IIIc	1.	30	non
IIId	1.	50	non
IIIe	1.	100	non

TABLEAU 14.3 – Expériences numériques pour tester la sensibilité de la correction sur l'amincissement à l'erreur d'ébauche.

Profondeur (m)	$Y^\beta$	Incertitude
2775.30	1.30	0.25
2780.53	1.04	0.29
2785.75	0.89	0.10
2822.60	1.49	0.44
2828.10	1.47	0.29
2829.75	1.27	0.17
2842.40	1.00	0.10
2902.35	1.09	0.17
2904.97	1.29	0.73
2907.60	1.59	0.70
2932.05	0.59	0.06
2939.20	0.96	0.15
2993.10	0.96	0.20
2996.40	1.22	0.68
2999.70	1.65	0.55
3006.30	2.40	1.11
3007.40	1.13	0.42
3010.70	1.95	0.72
3012.90	2.39	1.21
3036.60	3.57	3.97
3038.22	3.49	6.53
3039.85	3.47	2.64
3051.95	1.78	2.13

TABLEAU 14.4 – Marqueurs de correction sur l'amincissement utilisés dans le groupe d'expérience III. Données extraites des travaux de Dreyfus *et al.* (2007); Siegenthaler *et al.* (2005).

## 14.2 Résultats

La figure 14.1 présente l'âge glace analysé et l'intervalle de confiance associé, pour les expériences Ib, Id et Ie. L'échelle en ordonnée ne permet pas de s'intéresser aux différences de comportement de l'âge  $\chi^a(z)$ , différences sur lesquelles nous reviendront ultérieurement. Comme souligné dans l'article PICR2, l'erreur sur l'âge glace est cumulative et donc croissante avec la profondeur. L'information apportée par les observations permet de réduire localement l'incertitude sur la chronologie analysée. On constate en premier lieu que l'absence de corrélation d'erreur d'ébauche sur  $\beta^b$  (c'est-à-dire  $L_\beta = 0$  et  $B_\beta$  diagonale) limite le cumul des erreurs avec la profondeur, excepté au voisinage des marqueurs d'âge (lorsque l'incertitude associée à ces-derniers est plus faible que l'incertitude sur l'âge d'ébauche). Ce résultat est attendu car le cumul des erreurs est majoré en présence de corrélation positive d'erreur. En second lieu, on remarque deux comportements distincts pour l'incertitude sur l'âge analysé :

1. Sur certains intervalles de profondeur entre les marqueurs d'âge, cette incertitude est plus grande lorsque la corrélation d'erreur augmente (c'est-à-dire pour  $L_\beta = 100\text{m}$  par rapport à  $L_\beta = 50\text{m}$ ) ; ceci est en particulier visible entre 500 et 1700m ou encore entre 1900 et 2400m (figure 14.1) .
2. Sur d'autres intervalles de profondeur, cette incertitude est plus faible entre les marqueurs d'âge lorsque la corrélation d'erreur diminue (c'est-à-dire pour  $L_\beta = 50\text{m}$  par rapport à  $L_\beta = 100\text{m}$ ) ; ceci est en particulier vrai à partir de 2400m dans le fond du forage.

La figure 14.2 présente tout comme la figure 1, l'âge glace analysé et l'intervalle de confiance associé mais cette fois-ci pour les expériences IIb, IIc, IIe et IIc. Ces expériences correspondent au jeu de marqueurs d'âge II qui est moins dense à partir de 2000m. Avec ce jeu de marqueurs, on n'observe plus le changement de comportement de l'incertitude sur l'âge analysé au-delà de 2400m. En particulier, l'incertitude est majorée lorsque  $L_\beta$  passe de 50 à 100m. Cependant, l'expérience IIe qui correspond à une longueur de corrélation supérieure avec  $L_\beta = 600\text{m}$  montre une tendance opposée : l'incertitude sur l'âge analysé diminue par rapport aux incertitudes estimées pour les longueurs  $L_\beta = 50$  et 100m.

La figure 14.3 présente un zoom sur l'intervalle 800 et 1500m qui permet de s'intéresser aux différences de comportement de l'âge analysé  $\chi^a(z)$ . Les expériences présentées sont Ia (terme régularisant), Ib ( $L_\beta^b = 0\text{m}$ ), Ic ( $L_\beta^b = 15\text{m}$ ) et Ie ( $L_\beta^b = 100\text{m}$ ). On ne présente pas



l'incertitude pour l'expérience Ia car le terme régularisant étant de nature non probabiliste, il ne participe pas au calcul d'incertitude (on aurait de ce fait la même incertitude que pour l'expérience Ib).

Les figures 14.5, 14.6, 14.7 et 14.8 montrent pour l'intervalle de profondeur 2700-3100m (donc en présence de marqueurs d'amincissement), les solutions obtenues pour  $\beta^a(z)$  dans le cadre des expériences IIa, IIIb, IIIc et IIIe. La figure 14.4 montre  $\beta^a(z)$  sur l'intervalle 0-2000m (donc en l'absence de marqueurs d'amincissement).

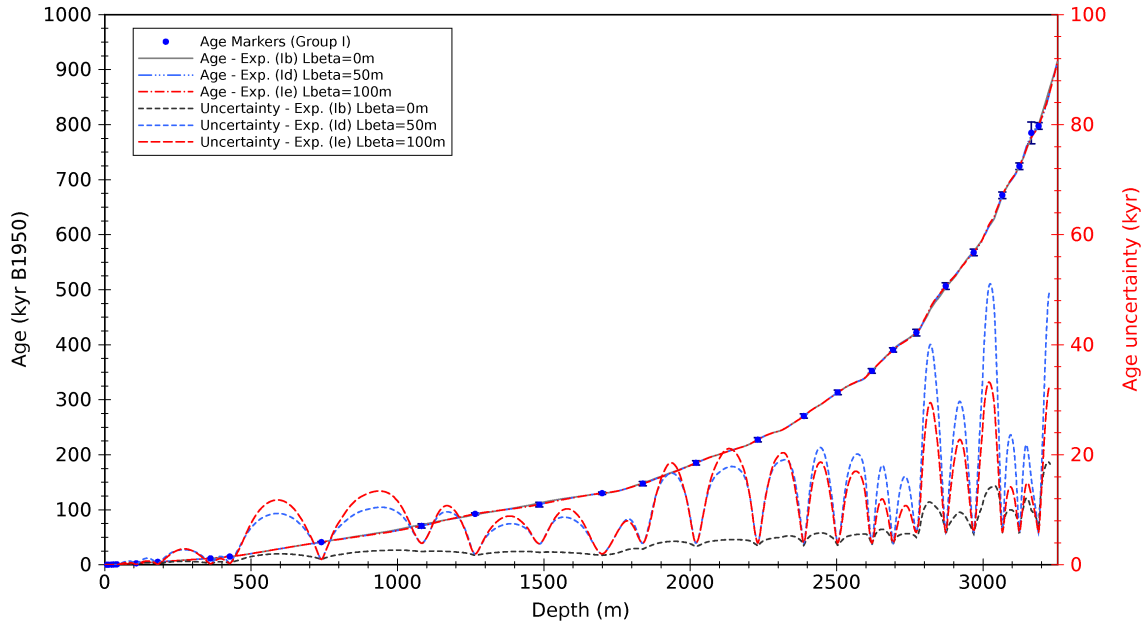


FIGURE 14.1 – Age glace analysé et incertitude associée pour les expériences Ib ( $L_{\beta}^b = 0\text{m}$ ), Id ( $L_{\beta}^b = 50\text{m}$ ) et Ie ( $L_{\beta}^b = 100\text{m}$ ) avec le jeu I de marqueurs d'âge glace.

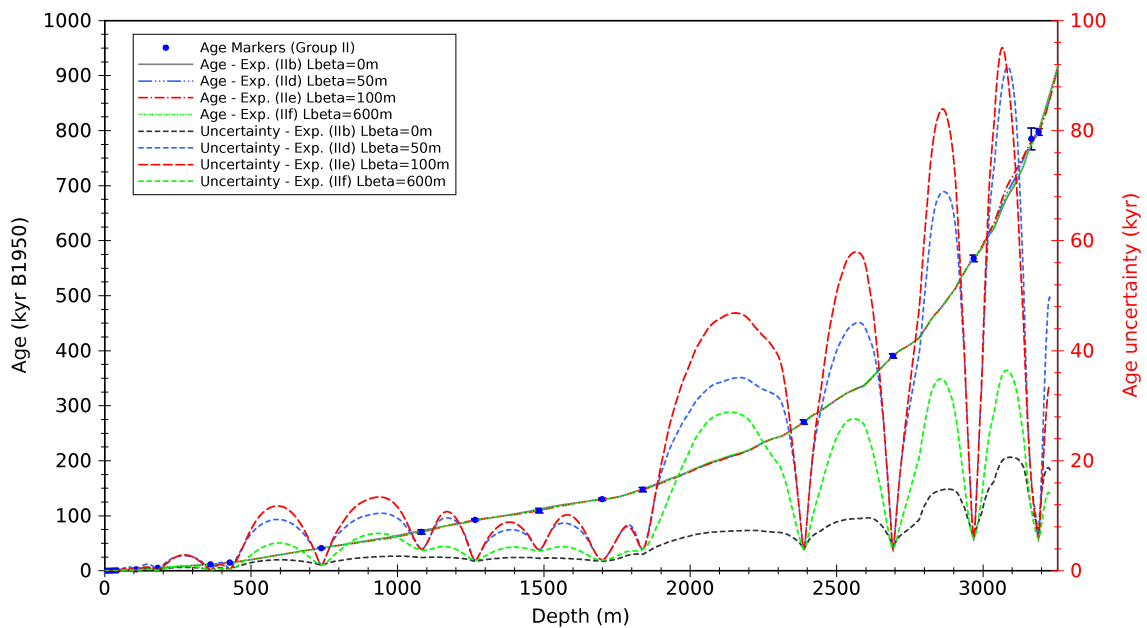


FIGURE 14.2 – Age glace analysé et incertitude associée pour les expériences IIb ( $L_{\beta}^b = 0\text{m}$ ), IIId ( $L_{\beta}^b = 50\text{m}$ ), IIe ( $L_{\beta}^b = 100\text{m}$ ) et IIIf ( $L_{\beta}^b = 600\text{m}$ ) avec le jeu II de marqueurs d'âge glace.

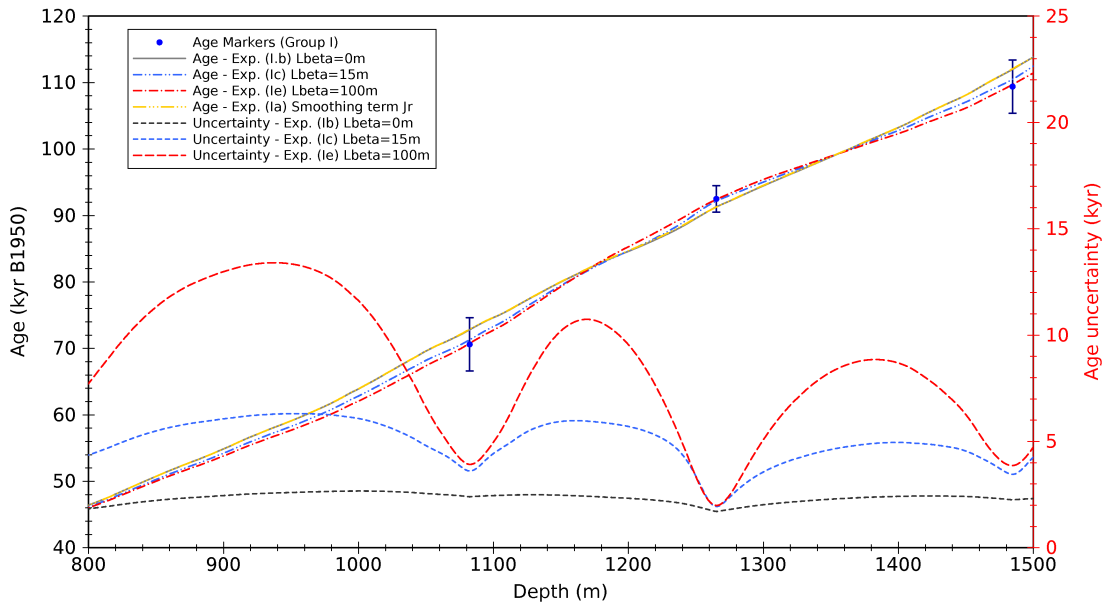


FIGURE 14.3 – Age glace analysé et incertitude associée pour les expériences Ia (terme  $J^r$  "lissant" non probabiliste), Ib ( $L_\beta^b = 0\text{m}$ ), Ic ( $L_\beta^b = 15\text{m}$ ) et Ie ( $L_\beta^b = 100\text{m}$ ) en fonction de l'intervalle de profondeur 800-1500m.

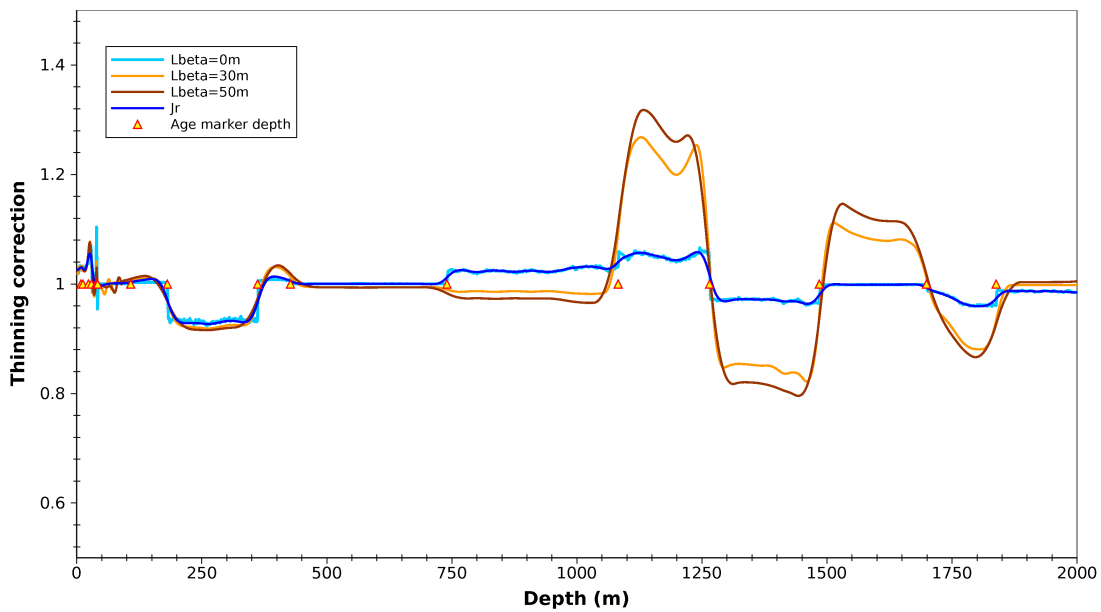


FIGURE 14.4 – Correction  $\beta^a$  sur l'amincissement après analyse sur l'intervalle 0-2000m (qui ne comprend pas de marqueurs d'amincissement) pour les expérience IIIa (terme  $J^r$  "lissant" non probabiliste), IIIb ( $L_\beta^b = 0\text{m}$ ), IIIc ( $L_\beta^b = 30\text{m}$ ) et IIId ( $L_\beta^b = 50\text{m}$ ).

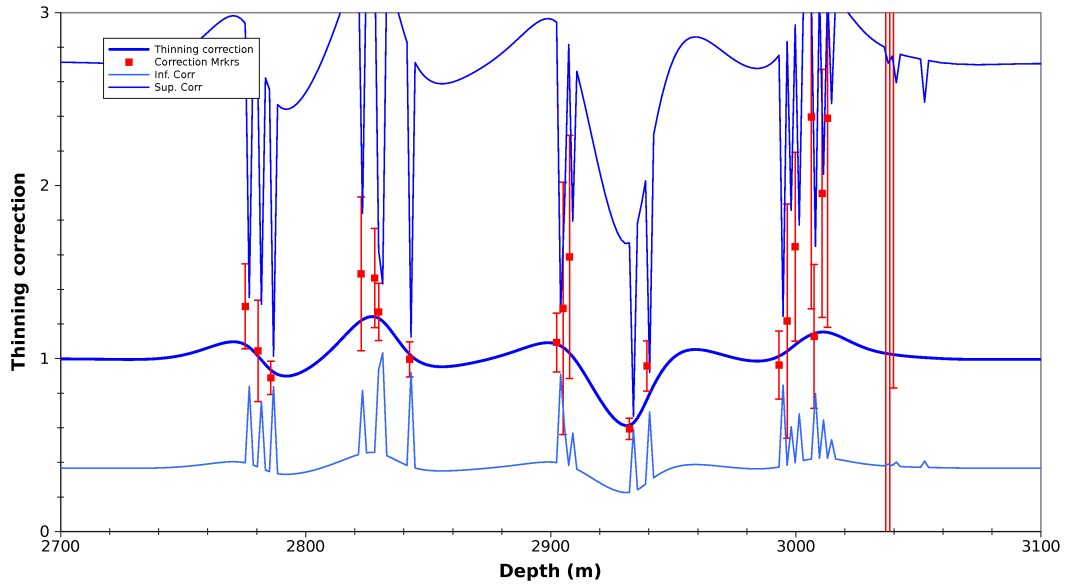


FIGURE 14.5 – Expérience IIIa avec terme de régularisation "lissant"  $J_r$  et  $L_\beta^b = 0m$  : la correction sur l'amincissement est la ligne épaisse bleu foncé (ses intervalles de confiance sont en bleu plus clair et ne tiennent pas compte du terme non probabiliste  $J_r$ ) ; les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge.

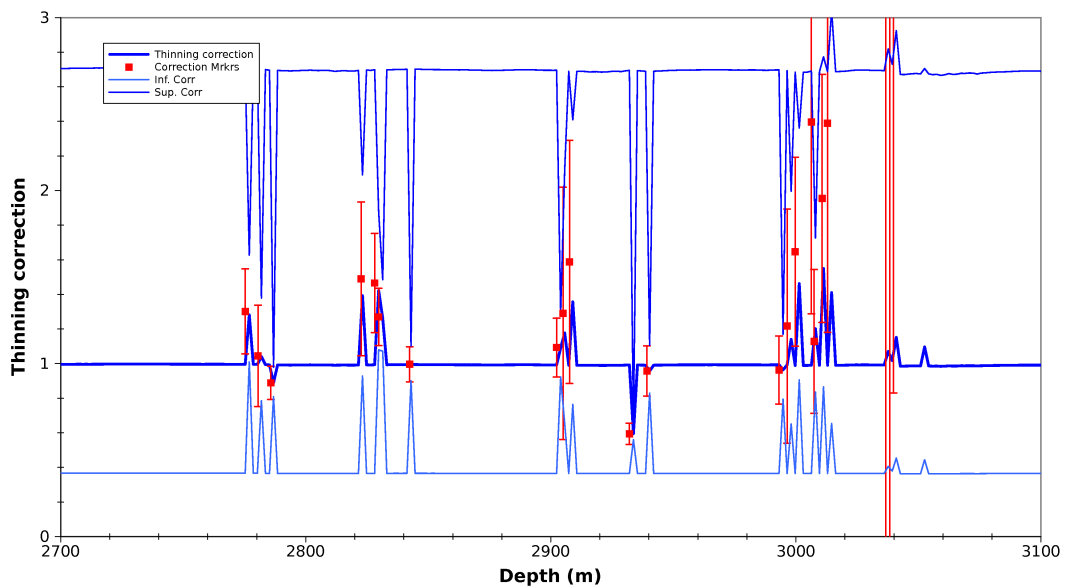


FIGURE 14.6 – Expérience IIIb avec  $L_\beta^b = 0m$  : sensibilité à l'erreur d'ébauche de la correction sur l'amincissement après analyse (ligne épaisse bleu foncé) et de ses intervalles de confiance (lignes bleu plus clair). Les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge.

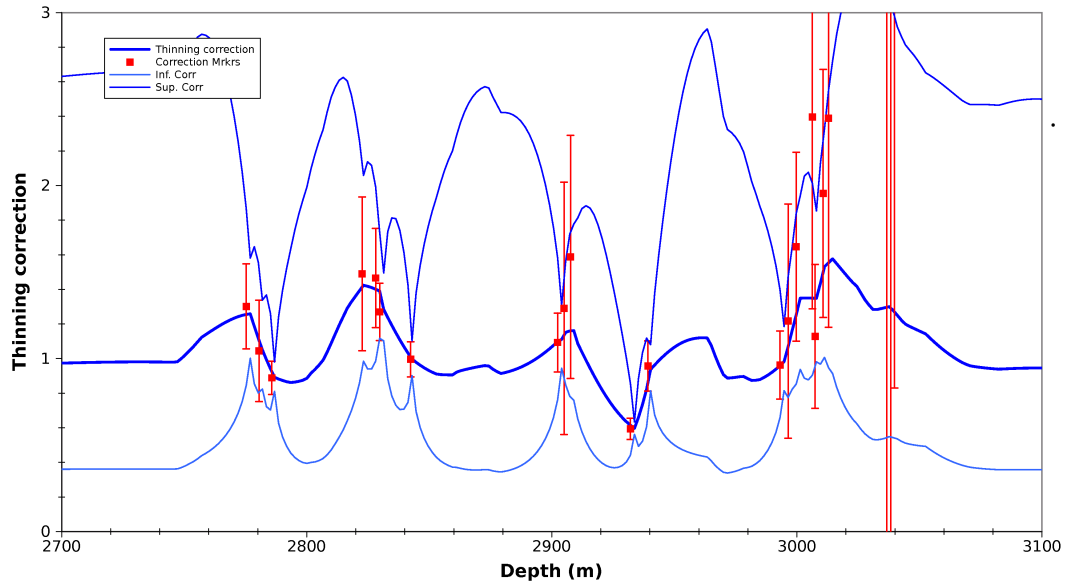


FIGURE 14.7 – Expérience IIIc avec  $L_\beta^b = 30\text{m}$  : sensibilité à l'erreur d'ébauche de la correction sur l'amincissement après analyse (ligne épaisse bleu foncé) et de ses intervalles de confiance (lignes bleu plus clair). Les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge.

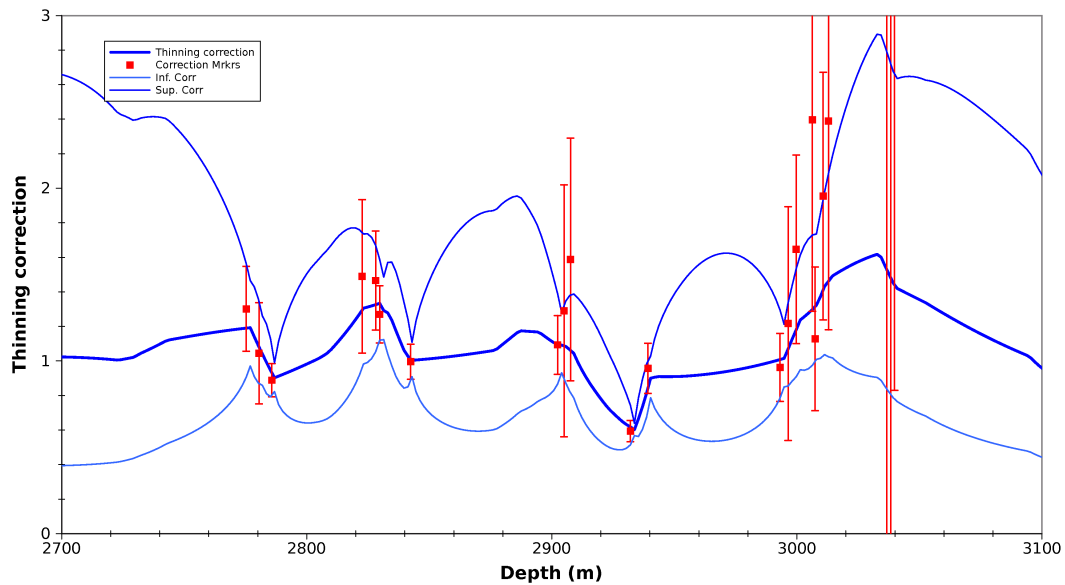


FIGURE 14.8 – Expérience IIIe avec  $L_\beta^b = 100\text{m}$  : sensibilité à l'erreur d'ébauche de la correction sur l'amincissement après analyse (ligne épaisse bleu foncé) et de ses intervalles de confiance (lignes bleu plus clair). Les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge.

## 14.3 Discussion

### 14.3.1 Sensibilité à l'ébauche de l'âge glace analysé

L'analyse des figures 14.1 et 14.2 montrent qu'une plus grande longueur de corrélation  $L_\beta^b$  majore le cumule de l'erreur d'ébauche, mais en contre-partie elle propage aussi plus loin l'information apportée par une donnée et son incertitude. L'impact sur l'incertitude attachée à l'âge glace analysé, de l'information apportée par une donnée est notamment contrôlé par la distance qui sépare deux marqueurs d'âge glace successifs<sup>1</sup> :

- Quand l'intervalle de profondeur entre deux marqueurs d'âge successifs est petit devant  $L_\beta^b$ , alors une plus grande longueur de corrélation induira entre les marqueurs une plus petite incertitude sur l'âge analysé. C'est ce qu'on observe au delà de 2400m sur la figure 14.1, où l'incertitude sur l'âge analysé de l'expérience Ie ( $L_\beta^b = 100\text{m}$ ) est inférieure à l'incertitude associée à l'expérience Id ( $L_\beta^b = 50\text{m}$ ).
- Cette tendance n'est plus observée sur la figure 14.2, car l'intervalle de profondeur entre les marqueurs du groupe II est grand devant  $L_\beta^b$ .
- On voit néanmoins avec l'expérience IIf, qu'il suffit d'augmenter la longueur de corrélation ( $L_\beta^b = 600\text{m}$ ) par rapport à la distance entre les données pour induire une incertitude sur l'âge analysée plus faible.

Par ailleurs, l'analyse de la figure 14.3 confirme les deux points suivant :

- Plus la longueur de corrélations d'erreur d'ébauche est grande, plus la présence d'une donnée à respecter à un impact à longue distance sur la forme de la solution. On voit que les changements de courbure de l'âge analysé sont plus importants et s'opèrent davantage à distance pour l'expérience Ie ( $L_\beta^b = 100\text{m}$ ) en comparaison de l'expérience Ic ( $L_\beta^b = 15\text{m}$ ).
- En revanche, une longueur de corrélation faible par rapport à la distance entre les données, voire une longueur nulle (expériences Ic et Ib avec  $L_\beta^b = 15$  ou  $0\text{m}$ ) engendre une solution qui respectera moins "strictement" une donnée de marqueur d'âge.

### 14.3.2 Sensibilité à l'ébauche de la correction sur l'amincissement

On a déjà commenté dans l'article PICR2, des résultats similaires à ceux présentés sur les figures 14.5, 14.6, 14.7 et 14.8. Si l'opérateur régularisant  $J_r$  amène une solution parfaitement lisse (expérience IIIa et figure 14.5), il ne participe pas au calcul de l'incertitude ; on a donc

---

1. Elle est aussi contrôlée par l'incertitude attachée aux données.

les mêmes intervalles de confiance que pour la solution de l'expérience IIIb (14.6). L'ébauche de "type probabiliste" (de forme ad hoc) permet aussi d'obtenir des solutions similaires bien qu'elles soient "un peu moins lisses" (voir les figures 14.7 et 14.8, expériences IIIc et IIIe). L'impact de la longueur de corrélation d'erreur d'ébauche est plus simple à interpréter que dans le cas de l'âge glace, car l'erreur associée à  $\beta^a(z)$  n'est pas cumulative. Si on augmente  $L_\beta^b$  alors l'incertitude sur la solution diminue.

## 14.4 Conclusion

Ce chapitre a rappelé la grande sensibilité des solutions vis-à-vis de l'erreur d'ébauche. Le peu d'information dont on dispose pour l'instant sur les matrices de covariance d'erreur d'ébauche, justifie le choix d'une double formulation du problème inverse, à la fois bayésienne mais aussi à l'aide du terme régularisant  $J^r$  non probabiliste.

Dans le cadre de la formulation probabiliste, ce chapitre rappelle l'importance de la modélisation des matrices de covariance d'erreur d'ébauche. L'erreur des modèles glaciologiques de datation étant essentiellement non paramétrique, on peut envisager de réaliser un travail statistique avec des modèles glaciologiques plus évolués qui décrivent de façon plus détaillée l'écoulement de la glace et la densification du névé. Cependant il faut garder en tête, d'une part que chaque forage est particulier (topographie de surface, topographie du socle, nature de l'interface socle-glace,...) et d'autre part qu'il existe différents types de modèles glaciologiques de datation et donc différentes origines pour l'erreur modèle. Ceci suggère la modélisation de plusieurs matrices  $B$ , chacune étant propre à un forage et un modèle donnés.

On note que la formulation probabiliste peut être appliquée sans modélisation approfondie des matrices  $B$ , à condition d'assimiler de nombreuses données pertinentes (et de qualité!) afin que la solution ne soit pas trop fortement contrainte par le choix potentiellement subjectif de la forme des matrices  $B$ .

# Article soumis au *Quaternary Science Reviews*

---

Dans ce chapitre, on présente l'article soumis au journal *Quaternary Science Reviews*. L'application consiste en une inversion simultanée sur 4 forages. Ce chapitre est suivi d'une simulation améliorée et d'une discussion des résultats. On reprend dorénavant les conventions d'écriture adoptées dans la partie **IV** du manuscrit.



# Consistent dating for Antarctic and Greenland ice cores

Lemieux-Dudon Bénédicte<sup>a</sup> Blayo Eric<sup>b</sup> Petit Jean-Robert<sup>a</sup>  
Waelbroeck Claire<sup>c</sup> Svensson Anders<sup>d</sup> Ritz Catherine<sup>a</sup>  
Barnola Jean-Marc<sup>a</sup> Narcisi Bianca Maria<sup>e</sup> Parrenin Frédéric<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*CNRS/Université Joseph Fourier - Grenoble 1, LGGE 38402, St Martin d'Hères cedex, France.*

<sup>b</sup>*LJK, BP 53, F-38041 Grenoble Cedex, France*

<sup>c</sup>*LSCE/IPSL, Laboratoire CNRS-CEA-UVSQ, Domaine du CNRS, 91198 Gif-sur-Yvette, France.*

<sup>d</sup>*Ice and Climate Group, Niels Bohr Institute, Copenhagen, Denmark*

<sup>e</sup>*ENEA Rome, Italy*

---

## Abstract

We present a new dating method based on inverse techniques, which aims at calculating consistent gas and ice chronologies for several ice cores. The method yields new dating scenarios simultaneously for several cores by making a compromise between the chronological information brought by glaciological modeling (i.e., ice flow model, firn densification model, accumulation rate model), and by gas and ice stratigraphic constraints. This method enables to gather widespread chronological information and to use regional or global markers (i.e., methane, volcanic sulfate, Beryllium-10, tephra layers, etc.) to link the core chronologies stratigraphically. Confidence intervals of the new dating scenarios can be calculated thanks to the probabilistic formulation of the new method, which takes into account both modeling and data uncertainties. We apply this method simultaneously to one Greenland (NGRIP) and three Antarctic (EPICA Dome C, EPICA Dronning Maud Land, and Vostok) ice cores, and refine existent chronologies. Our results show that consistent ice and gas chronologies can be derived for depth intervals that are well-constrained by relevant glaciological data. In particular, we propose a new consistent dating of the last deglaciation for Greenland and Antarctic ice and gas records.

*Key words:* ice cores, chronologies, last deglaciation, glaciology, inverse method

---

# 1 Introduction

The reconstruction of past climates is an important step to understand future climate changes. Past climatic events were fortunately recorded in numerous paleo-archives: trees, speleothems, terrestrial cores, marine cores and ice cores. A consistent dating of paleo-archives (i.e., a dating that enables to compare the timing and the duration of events recorded in the different archives) is a prerequisite for the construction and interpretation of climatic scenarios. This remains a complex issue, and we here focus on deep ice cores and the consistency of their dating.

One specific issue related to ice core dating is the age difference (hereafter delta-age) between the trapped gas and the surrounding ice matrix: gas is trapped several tens of meters below the ice-sheet surface, where it is surrounded by ice that was deposited as surface snow hundreds or thousands of years earlier. This feature causes a twofold dating puzzle: for each drilling, the dating of both the gas and ice records must be assessed.

Numerous strategies are currently applied for dating the ice matrix and the gas phase along ice cores: (i) wiggle matching of ice core records to insolation time series (i.e., orbital tuning), (ii) wiggle matching of ice core records to other dated paleo-archives (ice, marine or terrestrial cores...), (iii) identification of dated volcanic horizons (e.g., tephra layers, sulfate spikes for the last millennium), (iv) counting of annual layers and (v) ice flow modeling for dating the ice, combined with firn densification modeling to estimate the delta-age.

Some dating strategies only provide a single temporal constraint (e.g., tephra layers) while others help to constrain the entire core (e.g., ice flow modeling or orbital tuning). The accuracy of a dating constraint may decrease with depth (as is the case for annual layer counting and ice flow modeling), or remain rather steady but be poor or questionable (e.g., orbital tuning, matched paleo-events with a poor understanding of their link through the climatic system).

One special feature of glaciological models, is a large model error due to unresolved physics and errors on the forcing fields, which affects the quality of the inferred dating scenarios <sup>1</sup>. Inverse modeling is therefore particularly relevant for the improvement of ice core dating. Parrenin et al. (2001) and Grinsted and Dahl-Jensen (2002) applied inverse modeling techniques to simple ice flow models in order to constrain several poorly-known parameters (i.e., glacial-interglacial change in accumulation rate, prescribed velocity profiles,

---

<sup>1</sup> In this text, a glaciological model refers to the combination of models which enable to estimate the gas and ice chronologies of an ice core: in addition to ice flow and firn densification models, are therefore included the models that provide the forcing fields (paleo temperature, accumulation rate and ice sheet thickness history,...).

basal sliding and melting, etc.). Such methods have been used to construct age models for East Antarctic and Greenland ice cores (EPICA Community Members, 2004; Parrenin et al., 2004, 2007b).

The dating of a single ice core involves extensive work (e.g., measurements, modeling and synthesis). For that reason, one strategy consists in obtaining a reference chronology for a given ice core, which is then wiggle matched to several other cores (Ruth et al., 2007; Rasmussen et al., 2008). Common paleo-events that are recorded on two or more ice cores, enable the wiggle matching. Such common events are referred to as regional or global stratigraphic markers. For the ice matrix, one can mention tephra layers (Basile et al., 2001; Narcisi et al., 2005, 2006) or volcanic sulfate spikes (Traufetter et al., 2004; Udisti et al., 2004; Severi et al., 2007; Rasmussen et al., 2008). For the gas phase, one can mention methane (EPICA Community Members (2006)) and oxygen-18 isotopic ratio of O<sub>2</sub> (hereafter designated with the delta notation  $\delta^{18}\text{O}_{\text{atm}}$ , see Capron et al., this issue, Landais et al. (2006b)).

Recently, two reference chronologies have become available for Greenland and Antarctic ice cores, respectively: (i) the GICC05 chronology built in the framework of the Greenland Ice Core Chronology 2005 initiative (hereafter GICC05 chronology) and (ii) the EDC3 chronology built for the EPICA Dome C core (hereafter EDC). GICC05 is a layer counted age scale, unified for the DYE-3, GRIP and NGRIP cores (Andersen et al., 2006; Rasmussen et al., 2006; Svensson et al., 2006, 2008), which currently extends back to 60 kyr b2k (i.e., 1000 years before the year 2000 AD). Conversely, EDC3 is partly built with an inverse 1D flow model (Parrenin et al., 2007b), but local corrections were subsequently applied on the modeled chronology (referred to as EDC3model), in order to solve discrepancies with a number of stratigraphic markers (Parrenin et al., 2007a). Several Antarctic ice core chronologies have further been matched to EDC3. In particular, EDC3 was transferred on the EPICA Dronning Maud Land core (hereafter EDML) by the mean of volcanic markers (Severi et al., 2007), which lead to the EDML1 ice chronology (Ruth et al., 2007). Associated to ice chronologies are the gas age scales and delta-age estimates. Delta-age is usually calculated by the mean of densification models (Pimienta, 1987; Arnaud et al., 2000; Goujon et al., 2003). In particular, associated with EDML1 and EDC3, Louergue et al. (2007) simulated the EDML1gas.a and EDC3gas.a gas chronologies that are also referred to as the sp4 scenario, by application of the Goujon et al. (2003) densification model. The sp4 scenario consists in a reduced glacial accumulation rate for both EDC and EDML, compared to the reference accumulation scenarios related to EDML1 and EDC3. Among several other temperature and accumulation rate scenarios tested by Louergue et al. (2007), the sp4 scenario leads to the best agreement between the EDC and EDML methane records.

These recent studies however still raise questions. First, while methane is a

global marker, the Antarctic and Greenland CH<sub>4</sub> records are out of phase during the last deglaciation transitions, as illustrated on the panel A in Figure 1, where the EDC, EDML and Greenland methane records are plotted against the sp4 scenario and the NGRIP gas age scale (Blunier et al., 2007), respectively. Accordingly, the timing between the Antarctic and Greenland ice isotopic records is questionable during the Bolling-Allerod transition (see panel B of Figure 1, where the records are plotted against EDC3, EDML1 and GICC05). This could lead to misinterpretation of the last deglaciation triggering mechanisms, in particular whether the climate deglacial transition was initiated in the Southern or in the Northern hemisphere (Alley et al., 2002; Clark et al., 2004). Moreover, the modeling error attached to the glaciological age models, is still too large: (i) the construction of EDC3, including the stratigraphy based corrections (Parrenin et al., 2007a,b), revealed that the forward ice flow models (aiming at calculating ice age scales) omit important physical mechanisms: the uncertainty attached to forward ice flow models may either be due to inaccurate forcing fields, which encompass the accumulation rate, temperature and ice sheet thickness histories, or be the result of inadequately described physical or mechanical processes in the ice flow, (ii) the EDC reference ice and gas chronologies (i.e., EDC3 and EDC3gas\_a gas) rely on two different accumulation rate scenarios, which is inconsistent, (iii) the persistent mismatch between the EDC and EDML CH<sub>4</sub> records, even with the sp4 scenario, calls into question either the reconstructed accumulation rate and temperature histories (i.e., the forcing fields for the densification models), or the densification model itself. Finally, the spreading of chronological information and the complexity of chronologies, have prevented the construction of robust confidence intervals, especially when the chronologies are model based.

Here we propose a new dating method which aims at bringing solutions to the above mentioned issues. This method is a probabilistic approach based on inverse techniques. It estimates new dating scenarios by making the “best” compromise between model based dating scenarios and chronological information from data. It operates on several cores at the same time and possibly covering the full depth intervals of the cores. The use of regional or global stratigraphic markers (related to the gas or ice phases), in addition to gas or ice age markers, enables to cross-constrain the chronologies. The probabilistic formulation provides a mean to estimate confidence intervals of the new dating scenario. In section 2, we present the methodology and in section 3, we propose an application which involves the full ice cores of Vostok, EDC, EDML and the upper part of the NGRIP core. In section 4, we present the overall new dating scenarios, and we focus the discussion on the 0-50 kyr time interval where the type and density of data ensure a good confidence. As intended, our new dating scenarios resolve the dating inconsistencies between Greenland and Antarctica, in particular during the last deglaciation.

## 2 Methodology

Let us suppose we are interested in  $N$  ice cores for which we wish to simultaneously calculate and cross-constrain their age scales that we write  $\chi^k$  for the gas and  $\psi^k$  for the ice,  $\forall k = 1, \dots, N$ . The new dating method handles three key glaciological entities that vary along the core: (i)  $A^k$  the accumulation rate measured in meters of ice equivalent per year (hereafter m-ie/yr), (ii)  $T^k$  the total thinning function and (iii)  $C^k$  the close-off depth measured in meters of ice equivalent (hereafter m-ie).  $T^k$  is the ratio between  $L^k$ , the in situ annual layer thickness as measured today in m-ie/yr, and the initial annual layer thickness at the time of snow deposition (i.e.,  $A^k$ ).  $C^k$  can be deduced from the close-off depth in meters of firn material (i.e, the depth where the porous firn turns into ice and traps samples of air), by assessing  $D^k$ , the relative density profile between the core material and pure ice.

When  $A^k$ ,  $T^k$  and  $C^k$  are known at any depth  $z^k$  of the core  $k$ , one can infer  $L^k$  as well as  $\Delta\lambda^k$ , the delta-depth. The delta-depth is the depth interval in situ, that separates a past climatic event simultaneously recorded in the ice matrix and in the gas phase. In other words,  $\Delta\lambda^k$  is the result of the thinning of the  $C^k$  column during its trajectory from the surface to the depth  $z^k$ :

$$L^k(z^k) = T^k(z^k)A^k(z^k) \quad (1)$$

$$\Delta\lambda^k(z^k) \approx T^k(z^k)C^k(z^k) \quad (2)$$

The two following equations show that the knowledge of  $A^k$ ,  $T^k$  and  $C^k$  is sufficient to deduce  $\chi^k$  and  $\psi^k$ , which are the gas and ice age scales associated with the core  $k$ , respectively ( $\zeta^k$  and  $z^k$  both represent depth coordinates along the core  $k$ ):

$$\psi^k(z^k) = \int_0^{z^k} \frac{D^k(\zeta^k)}{L^k(\zeta^k)} d\zeta^k \quad (3)$$

$$\chi^k(z^k) \approx \psi^k(z^k - \Delta\lambda^k(z^k)) \quad (4)$$

Numerical models describing the ice flow and the firn densification can provide glaciological scenarios for  $A^k$ ,  $T^k$  and  $C^k$ . Both ice flow and firn densification models rely on two empirical relationships that relate to the isotopic content of the ice, the mean annual accumulation rate as well as the mean annual temperature. Experimental evidences suggest that the forward (or inverse) glaciological models and/or the empirical relationships on which they rely, are

inaccurate (Landais et al., 2006a; Durand et al., 2007; Dreyfus et al., 2007; Parrenin et al., 2007a). For that reason, we regard in this work the dating scenarios based on forward or inverse glaciological models, as prior or background scenarios that must be improved. For the core  $k$ , we denote the background scenario  $A^{b,k}$ ,  $T^{b,k}$ ,  $C^{b,k}$ , and the associated gas and ice chronologies  $\chi^{b,k}$  and  $\psi^{b,k}$ .

The new dating method is a probabilistic inverse approach based on a Bayesian inference. It aims at calculating an improved dating scenario  $A^k$ ,  $T^k$ ,  $C^k$  for every core  $k$  involved in the dating process. The new scenario must be close to the background dating scenario, and at the same time in best agreement with the glaciological data (and especially with any conflicting evidence). For that purpose, we apply the Bayesian theorem and formulate a probabilistic compromise between the two previous constraints. To simplify the notation, we use the  $Y$  vector to describe the full set of glaciological data and we introduce  $X$  and  $X^b$  to represent the searched and the background dating scenarios (i.e., respectively  $A^k$ ,  $T^k$ ,  $C^k$  and  $A^{k,b}$ ,  $T^{k,b}$ ,  $C^{k,b}$  for all the cores). The Bayesian inference measures the posterior probability  $p_a(X)$  attached to any possible dating scenario  $X$  according to the prior modeling knowledge and the data constraint:

$$p_a(X) \propto p_o(Y|X)p_b(X) \quad (5)$$

where  $p_b$  is usually called the prior or background probability density function (hereafter pdf) and  $p_o$  is the conditional pdf of measuring  $Y$  given  $X$ .

The  $p_b$  pdf describes the modeling error (i.e., the error on  $X^b$ ), whereas the  $p_o$  pdf describes the ‘‘observation’’ error (i.e., the error on data  $Y$ ). In the present work, we assume that the probabilities in equation (5) are all normally distributed (or lognormally distributed, but in that case they are transformed into normal probabilities by a logarithmic change of variable).  $p_b$  therefore relates to  $X - X^b$ , the distance to the background dating scenario, while  $p_o$  relates to  $Y - h(X)$ , the distance between  $Y$  and  $h(X)$ , where  $h$  is the observation model and  $h(X)$  predicts the data  $Y$ ,  $X$  being given.

We assume that the ‘‘best’’ dating scenario, written  $X^a$  (i.e.,  $A^{a,k}$ ,  $T^{a,k}$ ,  $C^{a,k}$   $\forall k = 1, \dots, N$ ), satisfies the maximum likelihood criterion, which means that  $X = X^a$  maximises the posterior pdf  $p_a(X)$ . We derive  $J$ , the misfit function of the problem (i.e.,  $J = -\ln p_a$ ), in order to solve the inverse problem according to the maximum likelihood. The  $J$  function, which is optimised with the m1qn3 minimizer (Gilbert and Lemarechal, 1993), splits into two terms, respectively the observation term and the background term:

$$J(X) = \frac{1}{2} (Y - h(X)) R^{-1} (Y - h(X))^T + \frac{1}{2} (X - X^b) B^{-1} (X - X^b)^T \quad (6)$$

where  $B$  is the background error covariance matrix and  $R$  is the observation error covariance matrix.

The  $B$  matrix accounts for the uncertainties on  $X^b$  the background dating scenario, i.e., the modeling uncertainties. The  $R$  matrix accounts for the uncertainties attached to the data used to constrain the problem. The inverse matrices,  $B^{-1}$  and  $R^{-1}$ , weigh the distances  $X - X^b$  and  $Y - h(X)$  respectively, and determine the relative contribution of these two distances, in the misfit function. The best dating scenario, i.e.,  $X^a$  which minimises  $J$ , is set as soon as  $B$  and  $R$  are set. For that reason, data and glaciological modeling errors must be carefully analysed for each dating problem. It however remains difficult to shape the  $B$  matrix because the errors attached to the glaciological models are poorly known. We give details on the shaping in Appendix A.

Moreover, we use the approach proposed by Lemieux-Dudon et al. (2009), to assess confidence intervals of the best dating scenario  $A^{k,a}$ ,  $T^{k,a}$ ,  $C^{k,a}$  and on the associated ice chronologies  $\psi^{a,k}$ .

### 3 Application

We applied the new dating method to the EDC, EDML, Vostok and NGRIP cores, to which we assigned indexes  $k = 1, 2, 3$ , and 4, respectively. In the next sections, we describe the background dating scenarios (section 3.1) and the glaciological data (section 3.2).

#### 3.1 Background scenarios

We made use of already published dating scenarios (except for the NGRIP gas age scale as described in section 3.1.4). The scenarios are based on either direct or inverse glaciological modeling or on annual layer counting and direct modeling (e.g. NGRIP). The background scenarios based on inverse modeling are already constrained by ice age markers. Strictly speaking, these age markers should not be used again in our application, otherwise we break the classical assumption associated to the Bayesian theorem (i.e., statistical independence between background and observation errors). Nevertheless, we have reused those age markers because they are not numerous compared to the full

set of data constraints. The status of the NGRIP background scenario can be seen as distinct from the other cores because the ice chronology relies on annual layer counting.

### 3.1.1 *Vostok background scenario*

The Vostok background scenario is denoted  $A^{b,1}$ ,  $T^{b,1}$  and  $C^{b,1}$ . The flow part consists in an inverse local flow model for which the flow parameters are optimised with a Monte Carlo sampling method (Parrenin et al., 2001). The model (Parrenin et al., 2004) enables to calculate a 2D local velocity field and a Lagrangian backtracing method leads to the background ice age estimate  $\psi^{b,1}$  (Vk-FGT1 ice age scale). The local flow model is forced by an ice sheet thickness history, which is estimated with the Ritz et al. (2001) 3D thermo-mechanical model. The background accumulation rate  $A^{b,1}$  is inferred from three empirical relationships linking: (i) the precipitation rate to the inversion temperature, (ii) the inversion temperature to the mean annual temperature and finally (iii) the mean annual temperature to the isotopic content of ice. Equation (3) enables to deduce the background thinning function  $T^{b,1}$ , from the background accumulation rate  $A^{b,1}$  and ice age  $\psi^{b,1}$ . At last, the background close-off depth  $C^{b,1}$  is simulated with Goujon et al. (2003)'s densification model forced by the accumulation rate and temperature histories.

### 3.1.2 *EDC background scenario*

The EDC background scenario is written  $A^{b,2}$ ,  $T^{b,2}$  and  $C^{b,2}$ . The ice part is the EDC3model scenario which is simulated with the inverse 1D flow model with Monte Carlo optimised parameters (Parrenin et al., 2007b). Note that the EDC3model scenario dissents from the EDC3 reference scenario as mentioned in section 1. The model error connected to unresolved physics and forcing field uncertainties, defeated the Monte Carlo inversion process, which failed to verify relevant ice age markers before 41 and after 400 kyr. This problem was solved by subsequently distorting the EDC3model accumulation rate and thinning function, in order that the resulting ice chronology - EDC3 - agrees with the conflicting data (Parrenin et al., 2007a). In this work, when possible, we preferred to use a purely modelled dating scenario as background. The 1D flow model is forced by a conceptual model of ice thickness variations (Parrenin et al., 2007b) tuned to fit the results of Ritz et al. (2001)'s 3D thermo-mechanical model. The background accumulation rate  $A^{b,2}$  is inferred from a relationship based directly on the isotopic content of ice. The background thinning function  $T^{b,2}$  is deduced from  $\psi^{b,2}$  and  $A^{b,2}$  with equation (3). Finally, the sp4 scenario proposed by Louergue et al. (2007) provides the background close-off depth  $C^{b,2}$ , which is simulated with the Goujon et al. (2003) densification model.



### 3.1.3 EDML background scenario

The EDML background scenario is written  $A^{b,3}$ ,  $T^{b,3}$  and  $C^{b,3}$ . The flow simulations are described in Huybrechts et al. (2007). It consists in a local flow model which calculates a 3D velocity field (Pattyn, 2003). A Lagrangian back-tracing method enables to estimate both, the ice age and the total thinning function. A 3D thermo-mechanical model (Huybrechts, 2002) computes the required ice sheet thickness changes and the lateral boundary conditions (note that the background ice age is different from EDML1). The accumulation rate is inferred using the classical empirical relationships with isotopic content (see section 3.1.1). The Louergue et al. (2007) sp4 scenario provides the close-off depth, which was simulated with the Goujon et al. (2003) densification model on the basis of EDML1 (Ruth et al., 2007). The whole modeling exercise finally provides the EDML background entities  $\psi^{b,3}$ ,  $T^{b,3}$ ,  $A^{b,3}$  and  $C^{b,3}$ .

### 3.1.4 NGRIP background scenario

The ice part of the NGRIP background scenario relies on GICC05. In addition to the ice chronology  $\psi^{b,4}$ , GICC05 provides the annual layer thickness  $L^{b,4}$ . A flow model (Andersen et al., 2004) enables to estimate the thinning function  $T^{b,4}$ , and to further deduce the accumulation rate  $A^{b,4}$  on the basis of  $L^{b,4}$  measurements. In this work, we performed a simulation with the Goujon et al. (2003) densification model in order to estimate  $C^{b,4}$ . The simulation is run with the following characteristics: (i) the GICC05 ice age scale, (ii) the GICC05 accumulation history and (iii) the mean annual temperature derived from the NGRIP ice isotope measurements ( $\delta^{18}\text{O}_{\text{ice}}$ , oxygen-18 of ice, see Johnsen et al. (2001)).

## 3.2 Glaciological data

We used a total of 1491 chronological markers to constrain the new dating scenarios: ice and gas age markers, ice and gas stratigraphic links and delta-depth estimates. This is a high number compared to what has been done previously. The accuracy of the proposed dating is depending on the accuracy and density of the applied markers. Most of the markers are concentrated in the time period 0-50 kyr, which explains that our results are tentative beyond 50 kyr.

### 3.2.1 Ice age markers

A total number of 1034 ice age markers are applied to constrain the Vostok, EDC and NGRIP chronologies (no ice age markers are used to constrain the

EDML core).

**Vostok ice age markers** For the Vostok core, we included the tie points already used to derive the Vostok-FGT1 chronology (Parrenin et al. (2004), Table 1 therein). We completed the set with new ice age markers that were estimated on the basis of the inferred relationships between the Vostok local insolation and the Vostok records of  $O_2/N_2$  and air content (Lipenkov et al. in prep, personal communication, 2009).

**EDC ice age markers** For the EDC core, we included the age markers used to build the EDC3 ice chronology (Parrenin et al. (2007a), Table 1), but we made several changes to the original set of tie points. First, we used the 36 tie points in Table 1 (Parrenin et al., 2007a), derived from the EDC  $\delta^{18}O_{atm}$  record (Dreyfus et al., 2007), as gas age markers instead of ice age markers (see section 3.2.2). Second, we withdrew two tie points that were inferred from the isotope-methane record synchronisation of the NGRIP and EDML cores during the last deglaciation (respectively at 361.5 and 427.2 m, Parrenin et al. (2007a), Table 1 therein). These two tie points would otherwise introduce redundancy with the EDC-EDML and EDML-NGRIP methane stratigraphic links defined in section 3.2.4. The final set of ice age markers is summarised in Table 2.

**NGRIP ice age markers** We selected temporal markers each 60 yr in the temporal window 0-50 kyr directly from the GICC05 ice chronology (not shown, because the resulting data set can easily be deduced from GICC05). The uncertainty of each age marker is chosen as half of the Maximum Counting Error (hereafter *MCE*, see definition in Andersen et al. (2006); Svensson et al. (2008)). This choice is based on the comparisons made by Svensson et al. (2008) and Fleitmann et al. (2009), of GICC05 with other independently dated records in the 0-60 kyr window, showing that most of the records agree with GICC05 within a one  $\sigma$  uncertainty. Strictly speaking, sampling temporal markers each 60 yr probably leads to error correlation between markers that we did not take into account. This way, we artificially prevent the GICC05 ice chronology from changing much. In the future, a more rigorous approach would require independent ice age markers (e.g, tephra, speleothems,...) in order to refine GICC05.

### 3.2.2 Gas age markers

A total number of 49 gas age markers are applied to constrain the EDC and NGRIP chronologies.

**EDC gas age markers** We strictly relied on Dreyfus et al. (2007) (their Table 1), who derived 36 temporal markers from the  $\delta^{18}\text{O}_{\text{atm}}$  record, by orbital tuning on precession. As a component of the gas phase of ice cores,  $\delta^{18}\text{O}_{\text{atm}}$  provides constraints on gas chronologies (i.e., gas age markers). Because the methodology used by Dreyfus et al. (2007) and Parrenin et al. (2007a) was not designed to optimise the gas chronology but only the ice chronology with ice age markers, they converted the  $\delta^{18}\text{O}_{\text{atm}}$  temporal markers into ice age makers by assessing a delta-age (i.e., the authors applied the EDC2 delta-age). Unlike Parrenin et al. (2007a) and Dreyfus et al. (2007), we applied the set of  $\delta^{18}\text{O}_{\text{atm}}$  data as gas age markers, because our dating method enables to apply both gas and ice age marker constraint and to simultaneously optimise gas and ice chronologies. We set the uncertainty and covariance of uncertainty attached to each age marker to 6000 and 2000 yr, respectively (see Dreyfus et al. (2007) for details).

**NGRIP gas age markers** Severinghaus et al. (1998) showed that ice isotope and methane in Greenland increase in phase during abrupt climatic transitions. This result is based on measurements of  $^{15}\text{N}$  of  $\text{N}_2$  (hereafter  $\delta^{15}\text{N}$ ),  $^{40}\text{Ar}$ , methane and  $\delta^{18}\text{O}_{\text{ice}}$ , performed on the GISP2 core, during the Younger Dryas to Pre-Boreal transition (hereafter YD-PB). At this stage, our numerical code is unable to assimilate “stratigraphic links” connecting depths *on the same core*. We therefore cannot rigorously constrain the NGRIP gas age and ice age to be equal during fast climatic transitions recorded in methane and isotopes. To solve this problem, we added 13 gas age markers presented in Table 6, which force the  $\text{CH}_4$  and  $\delta^{18}\text{O}_{\text{ice}}$  synchronicity. We assessed a 60 yr uncertainty for the deglaciation transitions and a 100 yr uncertainty for the Dansgaard-Oeschger events (hereafter DO) numbered from 2 to 12.

### 3.2.3 Ice stratigraphic links

We used a total of 331 ice stratigraphic links to constrain the new dating scenarios. Ice stratigraphic links are defined first between Vostok and EDC, second between EDC and EDML and finally between EDC and NGRIP.

**Vostok-EDC ice stratigraphic links** For the last 45 kyr, Udisti et al. (2004) identified 56 major volcanic events that are common to EDC and Vostok (these events are identified from electrical conductivity measurements, hereafter ECM, or from sulfate spikes). We used the pairs of depths (Udisti et al. (2004), their Table 1) as ice stratigraphic links between Vostok and EDC, to which we arbitrarily associated a 200 yr uncertainty. Unlike tephra layers, sulfate or ECM spikes in ice cores are anonymous because they carry

no geochemical signature enabling the identification of the eruption and volcanic province. As underlined by Udisti et al. (2004) and Severi et al. (2007), some time intervals show several spikes in one core with no counterpart in the other core. On this basis, we assumed that some pair of depths may have been mismatched. A very careful work should be done to identify uncertain pair of depths in order to better estimate uncertainties. We also extracted three ice stratigraphic links from Narcisi et al. (2005), at logging depths close to 2000 m for both EDC and Vostok (see Table 3). For the latter stratigraphic links, we assumed a logging depth uncertainty of 0.5 m for both EDC and Vostok, leading to an overall root mean square (hereafter RMS) uncertainty of about 100 years.

**EDC-EDML ice stratigraphic links** Severi et al. (2007) used sulfate spikes to perform an EDC-EDML ice age synchronisation. The related EDC and EDML sulfate profiles were used to transfer the EDC3 ice age scale to the EDML core, resulting in the EDML1 ice age scale (Ruth et al., 2007). We chose 270 of these ice stratigraphic links according to an index provided by the authors which defines the quality of the matched volcanic events. We defined an uncertainty ranging from 100 to 300 yr based on this index (see comments in the above paragraph).

**EDC-NGRIP ice stratigraphic links** A double-peak structure during the Laschamp geomagnetic excursion around 41 kyr, was identified in the  $^{10}\text{Be}$  records of GRIP (Yiou et al., 1997) and EDC (Raisbeck et al., 2007). The transfer of the  $^{10}\text{Be}$  peaks from GRIP to NGRIP relies on a match of the GRIP and NGRIP  $\delta^{18}\text{O}_{\text{ice}}$  records. The matching is precise because the two  $^{10}\text{Be}$  peaks are contemporary to DO 10, and we assigned an arbitrary 50 yr synchronisation error. In addition, Louergue et al. (2007) provided uncertainties on the depth of the  $^{10}\text{Be}$  peaks in the NGRIP and EDC cores, which we converted into temporal uncertainties, according to the NGRIP and EDC background age scales. The resulting RMS error is about 110 years (Table 4).

#### 3.2.4 Gas stratigraphic links

The gas stratigraphic links applied to constrain the new dating scenarios are defined between Vostok and EDC, EDC and EDML and EDML and NGRIP (a total number of 50 markers).

**Vostok-EDC gas stratigraphic links** We derived 5 gas stratigraphic links during the last and the penultimate deglaciation by matching the methane

records of Vostok (Petit et al., 1999)) and EDC (Loulergue et al., 2008) (Table 5).

**EDC-EDML gas stratigraphic links** The set of 24 gas stratigraphic links between EDC and EDML are derived from the matching of methane records proposed by Loulergue et al. (2007), Table 2 therein.

**EDML-NGRIP gas stratigraphic links** We derived a set of 21 gas stratigraphic links by matching the EDML and Greenland CH<sub>4</sub> records for each onset and termination of the fast transitions, from the onset of the Holocene back to 50 kyr. We inferred a 100 year synchronisation uncertainty ( $2\sigma$ ) except for the initial slow methane rise of DO 1 and for the DO 2,3 and 4, for which we assessed errors between 130 and 160 years (Table 7).

### 3.2.5 *Delta-depth markers*

**Vostok delta-depth markers** We used the two delta-depth estimates ( $63 \pm 7$  m at 1503.33 m and  $20 \pm 2$  m at 2784 m) proposed by Caillon et al. (2001, 2003), for transition 5d/5c and termination III, respectively (these estimates being assessed on the basis of  $\delta^{15}\text{N}$ ,  $\delta^{40}\text{Ar}$  and ice isotopic measurements).

**EDC delta-depth markers** For termination I and II, we used the delta-depth estimates with uncertainties proposed by Dreyfus Boissier (2008) on the basis of  $\delta^{15}\text{N}$  and ice isotopic measurements. In addition, we added a set of 17 delta-depth markers with uncertainties defined in Dreyfus et al. (2007) (Table 2, therein). Those latter estimates were deduced from warming or cooling events which were assumed to be simultaneously recorded in the gas phase (CO<sub>2</sub> and CH<sub>4</sub>) and in the ice matrix (ice isotopes). A more rigorous work would require to assess and introduce a time shift, which is known to occur between the greenhouse gas and ice isotopic signals (Caillon et al., 2003). This would lead to apply different delta-depth values or to introduce error correlations between the delta-depth markers.

**NGRIP delta-depth markers** We used the delta-depth estimates proposed by Huber et al. (2006) for DO 9 to 12, on the basis of  $\delta^{15}\text{N}$ ,  $\delta^{40}\text{Ar}$  and ice isotopic measurements ( $16.29 \pm 1.5$ ,  $15.39 \pm 1.5$ ,  $15.01 \pm 2$  and  $11.85 \pm 1.5$  m at 2099.90, 2124.10, 2157.65, and 2222.00 m, respectively, A. Landais, personal communication).

## 4 Results and discussion

We first give an overview of the new dating scenarios (section 4.1). We restrict ourselves to the EDC and EDML cores, because at this stage of the study, too few data are used to constrain the Vostok chronologies, and moreover we "artificially" limited the possibility of change in the NGRIP gas age scale (see section 3.2.1). We present the methane and ice isotope records, according to the new dating scenarios, on the well-constrained period from present day back to 50 kyr, and discuss the new North-South timing, in particular during the last deglaciation (section 4.2). Finally in section 4.3, we analyse the reconstructed accumulation rate, close-off depth and thinning function, in order to validate the new dating scenarios between 0 and 50 kyr.

### *4.1 EDC and EDML new ice and gas chronologies and confidence intervals*

Figures 2 and 3 present the overall new ice and gas chronologies, in comparison with the background chronologies, for the entire EDC and EDML cores, respectively. Also shown are the uncertainty ( $2\sigma$ ) on the new ice age scales, as well as the delta-depth reconstructions and the data constraints. Figures 4 and 5 present the same curves, but on the 0-20 kyr temporal window.

As can be noted on these figures, the new dating scenarios are in agreement with the data constraints. Moreover, on Figure 3, one can note that the delta-depth reconstruction for EDML is in agreement with the values assessed by Louergue et al. (2007), on the basis of the EDC and GRIP  $^{10}\text{Be}$  records. A possible underestimation of the uncertainty attached to the EDC delta-depth proposed by Louergue et al. (2007), may explain a slight disagreement with our delta-depth reconstruction for EDC (see Figure 2).

Figures 2 to 5 confirm that the method can be applied on several cores simultaneously, on large depth intervals and with numerous chronological data of different types. They also show that the uncertainties assessed for the new ice age scales behave as expected: a growing trend with depth and superimposed drops in the neighbourhood of data. All these results constitute a real dating improvement compared to the performance of either direct or inverse glaciological modeling that has been used for dating purposes till now.

## 4.2 Methane and ice isotope records: new North-South timing

### 4.2.1 Matching the methane records

On the time window 7-20 kyr, the EDC, EDML and Greenland methane records are shown on panel A in Figure 6, according to the new dating scenarios. In comparison with the current gas age scenarios shown on panel A in Figure 1, the new gas scenarios resolve the mismatch during the deglaciation. The matching of the Greenland and Antarctic methane records also holds for the DO events and DO like-events from 2 to 12 (not shown).

During the Glacial to Bolling-Allerod transition (hereafter GL-BA), the new NGRIP gas age is about 200 years younger than the gas chronology proposed by Blunier et al. (2007). The abrupt rise of the Greenland methane stack record starts and stops at 14700 and 14450 yr before present (BP) respectively (where present is defined as 1950 AD), which falls within the uncertainty estimated by Blunier et al. (2007). Our results also suggests that the EDC3gas\_a and EDML1gas\_a (i.e., the sp4 scenario) are respectively 450 and 150 years too young, during the GL-BA, and that EDC3gas\_a is 350 and 300 years too young during the Bolling-Allerod to Younger Dryas (hereafter BA-YD) and YD-PB transitions, respectively.

### 4.2.2 North-South timing as recorded in the ice isotope records

The climatic transitions as recorded in the Greenland and Antarctic ice isotopic records (the EDC  $\delta D$  record, Jouzel et al. (2007), the EDML  $\delta^{18}O_{ice}$  record, EPICA Community Members (2006) and the NGRIP  $\delta^{18}O_{ice}$ , Johnsen et al. (2001)) are plotted against the new dating scenarios on panel B in Figure 6, as well as on panel A in Figure 7, on the time intervals 7-20 kyr and 30-50 kyr, respectively. The panel B in Figure 7 shows the latter records according to EDC3, EDML1 and GICC05, for comparison.

Comparison of Figures 1 and 6, panels B, suggests that the EDC3 and EDML1 ice chronologies are both too young during the GL-BA and YD-PB transitions. According to the new dating scenarios, the end of the GL-BA transition should be shifted towards older ages by 300 yr for EDC and 250 yr for EDML. Meanwhile, for the end of the BA-YD transition, the shifts towards older ages should be 125 and 75 yr for EDC and EDML, respectively. On the basis of our results, we propose a new dating for the warming in Antarctica during the last deglaciation, with the onset and end dated to  $17900 \pm 300$  and  $14550 \pm 130$  yr BP (see the  $2\sigma$  uncertainty plotted on Figure 4), instead of 17400 and 14250 yr BP.

At last, as shown on Figure 7, the timing between the Greenland DO events

and the Antarctic DO like-events from 5 to 12 is also modified. These changes lead to new dating scenarios in better agreement with the bipolar see-saw concept (Stocker, 1998; Blunier and Brook, 2001; EPICA Community Members, 2006), not only for the last deglaciation transitions but also for the major DO and DO-like events, e.g., DO 8 and 12. The new timing for the DO 2, 3, 4 and 11 should not be considered here because the stratigraphic links between the EDML methane record and the Greenland methane stack record are imprecise (the EDML record is noisy for DO 2, 3 and 4) or non-existent (there is a gap in the EDML record for DO 11).

### *4.3 Analysis of the reconstructed glaciological entities*

#### *4.3.1 Corrections to the modeled accumulation, thinning and close-off depth*

Figure 8 displays the ratios between the new and the background accumulation rate, thinning function and close-off depth for EDC and EDML. These ratios are corrections relative to the background scenarios (see section 3.1). In the time window 0-40 kyr, the corrections are in agreement with the modeling errors expected for the corresponding glaciological entities.

The corrections applied to the EDC modeled thinning function are very small (a maximum correction of 5%). They are in agreement with ice flow modeling uncertainties expected in the top part of domes. For EDML, the latter corrections are larger (close to 18% between 25 and 28 kyr possibly due to the low density of constraints). Such result is consistent with the EDML drilling location down-stream on a flow line, which implies that both temporal and spatial variations of the forcing fields must be assessed in the modeling, conversely to EDC.

The corrections applied to the close-off depth expressed in meters of ice equivalent, do not exceed 22% for both EDC and EDML. These corrections are consistent with the typical variations of modelled and measured close-off depths (Goujon et al., 2003; Landais et al., 2006a; Loulergue et al., 2007), particularly when the related changes in the firn density profiles are considered. A discussion on the reconstructed EDC close-off depth is detailed in section 4.3.3.

The corrections applied to the modeled accumulation rate directly provides the multiplying factors (varying with depth and time), to apply to the accumulation model, i.e., the classical relationship with the ice isotope. Some overall larger corrections are calculated for EDML, in comparison with EDC, with a maximum correction of 26% during the Holocene. One can note that the shape of the inverse correction, apart from its timing, is similar to the trend of the climatic signal during the deglaciation transitions and the early Holocene. The



new EDML accumulation rate scenario is discussed in the following section.

#### 4.3.2 Accumulation rate reconstructions

Figure 9 compares the new and the background scenarios for the EDML accumulation rate. It also shows the EDC and EDML ice isotopic records plotted against the new ice age scales, as well as the reconstructed accumulation rate for EDC.

The resulting new EDML accumulation scenario shows little resemblance with the ice isotopic signal, especially between 3 and 11 kyr. The new scenario does not predict high values for the early Holocene optimum and the accumulation is lower than predicted by the classical relationship with the isotope. Such a difference seems likely, as EDML site stands along a flow line. The Holocene ice originates up to 20 km upstream (Huybrechts et al., 2007). Moreover, large spatial variabilities in accumulation are observed in the neighbourhood of the EDML drilling site, close to 20% on the 30 km traverse between DML05 (B32 drilling) and DML19 sites (Oerter et al., 2000). Rotschky et al. (2004) also reported changes in accumulation rate varying from 45 to 65  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{yr}^{-1}$  eastwards of point DML05, along the ice divide, and some accumulation spots below 45 and above 85  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{yr}^{-1}$ . On this basis, the temporal variability of processes affecting the accumulation pattern may also explain the low reconstructed rates in the 4-11 kyr period: (i) Wind-scouring known to occur in the area, may have triggered snow redistribution mechanisms, (ii) large scale or regional changes in the air mass advection during the Holocene are also possible, and (iii) both mechanisms may be responsible of changes in the ice divide location in the past.

We must however remain cautious with the EDML accumulation rate reconstruction. The corrections to the accumulation rate and the distortion of the ice age scale (see equation 3) are dependent: inaccurate data constraints may result in inaccurate accumulation corrections. One has therefore to question the set of chronological data used to constrain the new dating scenario. The EDML ice chronology is tightly linked to the EDC ice chronology by the mean of stratigraphic links derived from volcanic sulfate spikes. Udisti et al. (2004) mentioned that only a few common volcanic spikes can be unambiguously identified during the last deglaciation. They underlined the existence of a reliable triplet of sulfate spikes at 390 m depth in the EDC core (i.e., around 13 kyr on the new ice age scenario). In our application, we included as stratigraphic links, the reliable triplet mentioned above, but also other pairs of common sulfate spikes proposed by Udisti et al. (2004) for EDC and EDML. The uncertainties assessed for the latter stratigraphic links might have been underestimated. To solve this issue and refine the proposed accumulation rate scenario, other stratigraphic links such as tephra layers, might be considered,

as well as proxies of accumulation changes such as chemical records.

### 4.3.3 *Delta-age and close-off depth reconstructions*

Figure 10 shows the delta-age and delta-depth reconstructions for the EDC core, as estimated with three different scenarios: (i) the sp1 scenario (Louergue et al., 2007) built with the (Goujon et al., 2003) densification model on the basis of an accumulation rate history, which is consistent with the EDC3 age scale, (ii) the sp4 scenario (Louergue et al., 2007) (see section 1) and (iii) the new dating scenario.

Panel A in Figure 10 confirms that the sp1 scenario overestimates the EDC delta-age, as observed by Louergue et al. (2007). The delta-age behaviour in the 22-32 kyr time interval cannot be discussed, due to the poor quality of the data constraints. Conversely, in the neighbourhood of the Laschamp excursion (41 kyr), the gas and ice ages are both well-constrained (see section 3.2.3) and yield good confidence.

On panel B in Figure 10, the new EDC scenario assesses a thinner close-off depth (denoted CODIE on Figure 10), than simulated by the densification models during the glacial periods. The high close-off depth values estimated by densification models have already been questioned by  $\delta^{15}\text{N}$  measurements in Antarctica (Landais et al., 2006a). Further studies are however necessary in order to settle the issue. From the gravitational fractionation of  $\delta^{15}\text{N}$  in firn, the depth of the diffusive column can be assessed. However, our poor knowledge of the convective and non-diffusive zones in Antarctic firn during glacial periods (up to 40 m, A. Landais, personal communication) makes it difficult to deduce a faithful close-off depth (sum of convective, non-diffusive and diffusive zones) from  $\delta^{15}\text{N}$  measurements (Caillon et al. (2003); Landais et al. (2006a), Dreyfus et al., this issue).

## 5 Summary and further prospects

A new dating method based on inverse techniques, allows calculating consistent gas and ice chronologies for several ice cores on large depth intervals. The method enables to cross-constrain the age scales with global or regional stratigraphic markers. It makes the best compromise between the constraints brought by glaciological models and data. It does not improve the description of the glaciological models (ice flow models and/or firn densification models) but it refines the existing dating scenarios of accumulation rate, thinning function and close-off depth, and it provides improved gas and ice age chronologies in agreement with the glaciological data. At the same time, an age uncertainty

is estimated on the basis of the probabilistic formulation of the method.

We applied this method to four ice cores at the same time, Vostok, EDC, EDML and NGRIP, using background dating scenarios provided by the literature. We proved the ability of the method to be applied simultaneously to several Greenland and Antarctic cores and to produce new dating scenarios in agreement with several chronological constraints.

We focused on time intervals that were properly constrained with gas and ice temporal markers, stratigraphic links and delta-depth measurements. In the time interval 0-50 kyr and particularly during the last deglaciation, we improved the overall gas and ice age consistency and reconciled the Greenland and Antarctic methane records. We also suggested that the EDC3 reference chronology is too young during the last deglaciation.

In addition, we analysed the differences between the new and pre-existent scenarios of accumulation rate, thinning function and close-off depth, and the new values are kept within the limits of physical mechanisms. Our application however supports the idea that during glacial periods and for cold sites such as EDC, the close-off depth may be smaller than predicted by densification models. Moreover, the EDML accumulation rate reconstructions question the accumulation rate model accuracy and/or the reliability of the volcanic sulfate matching during the Last Glacial Maximum to Holocene transition. In this respect, the search for additional stratigraphic links such as tephra layers would help to solve this issue.

The new dating method (as well as the proposed dating scenarios between 0-50 kyr) open perspectives for perfecting the interpretation of paleoclimate records. In particular, the timing between Antarctic and Greenland climate (as recorded in the ice isotope) confirms the concept of an underlying see-saw mechanism. In the future, the method may provide some insights both on the sources of inaccuracy of the forward glaciological models, and on the origins of the glaciological data variability (e.g., firn properties, ice isotope,  $\delta^{15}\text{N}$ , ice microstructure and fabric, etc.), by analysing the differences between the new and pre-existent scenarios of accumulation rate, thinning function and close-off depth, and by comparing them with the paleo-records. For the layer counted age scales, such analysis may help to identify inaccurate determinations of annual layer thickness (for instance during cold periods with thin annual layers).

The new dating method is a very useful tool to combine the widespread chronological information in order to calculate consistent ice core chronologies. However, the reliability of the chronologies calculated by this mean, depends on the quality and accuracy of the chronological constraints. It is therefore of importance to: (i) carefully choose the data incorporated in the dating pro-

cess, as well as the background dating scenarios, (ii) carefully estimate the associated uncertainties and (iii) cautiously analyse the results. This method offers perspectives in the field of paleoclimatology and could be extended for applications to marine and continental cores.

**Acknowledgement** We wish to dedicate this work to our friend and colleague, J-M Barnola, who passed away September 21, 2009. Discussions with Emilie Capron, Amaëlle Landais, Mickael Town, Gaël Durand, Olivier Gagliardini, Gabrielle Dreyfus, Valérie Masson and Jean Jouzel were very helpful for the achievement of the manuscript. We are also grateful to Michel Sacchettini for his technical help and to Volodya Lipenkov and Dominique Raynaud for providing new Vostok age markers based on the comparison of air content and O<sub>2</sub>/N<sub>2</sub> records. We acknowledge the reviewers and the editor Hubertus Fischer, for their useful comments, suggestions and corrections.

This work was supported by the Agence Nationale de la Recherche (projects ANR-05-BLAN-0165-01 and ANR-07-BLAN-0125). It is a contribution to the European Project for Ice Coring in Antarctica (EPICA), a joint European Science Foundation/European Commission scientific programme, funded by the EU and by national contributions from Belgium, Denmark, France, Germany, Italy, the Netherlands, Norway, Sweden, Switzerland and the United Kingdom. The main logistic support was provided by IPEV and PNRA (at Dome C) and AWI (at Dronning Maud Land). This is an EPICA publication no.246.

## References

- Alley, R. B., Brook, E. J., Anandakrishnan, S., 2002. A northern lead in the orbital band: north-south phasing of Ice-Age events. *Quaternary Science Reviews* 21 (1-3), 431–441.
- Andersen, K., Azuma, N., Barnola, J., Bigler, M., Biscaye, P., Caillon, N., Chappellaz, J., Clausen, H., Dahl-Jensen, D., Fischer, H., et al., 2004. High-resolution record of Northern Hemisphere climate extending into the last interglacial period. *Nature* 431 (7005), 147–151.
- Andersen, K., Svensson, A., Johnsen, S., Rasmussen, S., Bigler, M., Röthlisberger, R., Ruth, U., Siggaard-Andersen, M., Peder Steffensen, J., Dahl-Jensen, D., et al., 2006. The Greenland Ice Core Chronology 2005, 15–42ka. Part 1: constructing the time scale. *Quaternary Science Reviews* 25 (23-24), 3246–3257.
- Arnaud, L., Barnola, J., Duval, P., 2000. Physical modeling of the densification of snow/firn 20 and ice in the upper part of polar ice sheets. *Physics of Ice Core Records*. T. Hondoh. Sapporo.

- Basile, I., Petit, J., Touron, S., Grousset, F., Barkov, N., 2001. Volcanic layers in Antarctic(Vostok) ice cores- Source identification and atmospheric implications. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres* 106(D23) (31), 915–931.
- Blunier, T., Brook, E., 2001. Timing of millennial-scale climate change in Antarctica and Greenland during the last glacial period. *Science* 291 (5501), 109–112.
- Blunier, T., Spahni, R., Barnola, J.-M., Chappellaz, J., Loulergue, L., Schwander, J., 2007. Synchronization of ice core records via atmospheric gases. *Climate of the Past* 3 (2), 325–330.  
URL <http://www.clim-past.net/3/325/2007/>
- Caillon, N., Severinghaus, J., Barnola, J., Chappellaz, J., Jouzel, J., Parrenin, F., 2001. Estimation of temperature change and of gas age - ice age difference, 108 kyr B.P., at Vostok, Antarctica. *Journal of Geophysical Research. D. Atmospheres* 106(D23) (31), 893–901.
- Caillon, N., Severinghaus, J., Jouzel, J., Barnola, J., Kang, J., Lipenkov, V., 2003. Timing of Atmospheric CO<sub>2</sub> and Antarctic Temperature Changes Across Termination III. *Science* 299 (5613), 1728–1731.
- Clark, P. U., McCabe, A. M., Mix, A. C., Weaver, A. J., 2004. Rapid rise of sea level 19,000 years ago and its global implications. *Science* 2304, 11411144.
- Dreyfus, G. B., Parrenin, F., Lemieux-Dudon, B., Durand, G., Masson-Delmotte, V., Jouzel, J., Barnola, J.-M., Panno, L., Spahni, R., Tisserand, A., Siegenthaler, U., Leuenberger, M., 2007. Anomalous flow below 2700 m in the Dome C ice core detected using  $\delta^{18}O$  of atmospheric oxygen measurements. *Climate of the Past* 3 (2), 341–353.  
URL <http://www.clim-past.net/3/341/2007/>
- Dreyfus Boissier, G., 2008. La composition isotopique de l'air piégé dans la glace: interprétation climatique et outil chronologique. Ph.D. thesis.
- Dunbar, N., McIntosh, W., Esser, R., 2008. Physical setting and tephrochronology of the summit caldera ice record at Mount Moulton, West Antarctica. *Bulletin of the Geological Society of America* 120 (7-8), 796–812.
- Durand, G., Gillet-Chaulet, F., Svensson, A., Gagliardini, O., Kipfstuhl, S., Meyssonier, J., Parrenin, F., Duval, P., Dahl-Jensen, D., 2007. Change in ice rheology during climate variations - implications for ice flow modelling and dating of the epica dome c core. *Climate of the Past* 3 (1), 155–167.  
URL <http://www.clim-past.net/3/155/2007/>
- EPICA Community Members, 2004. Eight glacial cycles from an Antarctic ice core. *Nature* 429, 623–628.
- EPICA Community Members, 2006. One-to-one coupling of glacial climate variability in Greenland and Antarctica. *Nature* 444, 195–198.
- Fleitmann, D., Cheng, H., Badertscher, S., Edwards, R., Mudelsee, M., Göktürk, O., Fankhauser, A., Pickering, R., Raible, C., Matter, A., et al., 2009. Timing and climatic impact of Greenland interstadials recorded in stalagmites from northern Turkey. *Geophysical Research Letters* 36 (19), L19707.

- Gilbert, J., Lemarechal, C., 1993. The modules M1QN3 and N1QN3. Program documentation, INRIA.
- Goujon, C., Barnola, J., Ritz, C., 2003. Modeling the densification of polar firn including heat diffusion: Application to close-off characteristics and gas isotopic fractionation for Antarctica and Greenland sites. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres* 108(D24), 4792.
- Grinsted, A., Dahl-Jensen, D., 2002. A Monte Carlo-tuned model of the flow in the NorthGRIP area. *Annals of Glaciology* 35 (1), 527–530.
- Huber, C., Leuenberger, M., Spahni, R., Flückiger, J., Schwander, J., Stocker, T., Johnsen, S., Landais, A., Jouzel, J., 2006. Isotope calibrated Greenland temperature record over Marine Isotope Stage 3 and its relation to CH<sub>4</sub>. *Earth and Planetary Science Letters* 243 (3-4), 504–519.
- Huybrechts, P., 2002. Sea-level changes at the LGM from ice-dynamic reconstructions of the Greenland and Antarctic ice sheets during the glacial cycles. *Quaternary Science Reviews* 21 (1-3), 203–231.
- Huybrechts, P., Rybak, O., Pattyn, F., Ruth, U., Steinhage, D., 2007. Ice thinning, upstream advection, and non-climatic biases for the upper 89% of the EDML ice core from a nested model of the Antarctic ice sheet. *Climate of the Past* 3 (4), 577–589.  
URL <http://www.clim-past.net/3/577/2007/>
- Johnsen, S., Dahl-Jensen, D., Gundestrup, N., Steffensen, J., Clausen, H., Miller, H., Masson-Delmotte, V., Sveinbjörnsdóttir, A., White, J., 2001. Oxygen isotope and palaeotemperature records from six Greenland ice-core stations: Camp Century, Dye-3, GRIP, GISP2, Renland and NorthGRIP. *Journal of Quaternary Science* 16 (4), 299–307.
- Jouzel, J., Masson-Delmotte, V., Cattani, O., Dreyfus, G., Falourd, S., Hoffmann, G., Minster, B., Nouet, J., Barnola, J., Chappellaz, J., et al., 2007. Orbital and Millennial Antarctic Climate Variability over the Past 800,000 Years. *Science* 317 (5839), 793.
- Landais, A., Barnola, J., Kawamura, K., Caillon, N., Delmotte, M., Van Ommen, T., Dreyfus, G., Jouzel, J., Masson-Delmotte, V., Minster, B., et al., 2006a. Firn-air  $\delta^{15}\text{N}$  in modern polar sites and glacial-interglacial ice: a model-data mismatch during glacial periods in Antarctica? *Quaternary Science Reviews* 25 (1-2), 49–62.
- Landais, A., Masson-Delmotte, V., Jouzel, J., Raynaud, D., Johnsen, S., Huber, C., Leuenberger, M., Schwander, J., Minster, B., 2006b. The glacial inception as recorded in the NorthGRIP Greenland ice core: timing, structure and associated abrupt temperature changes. *Climate Dynamics* 26 (2), 273–284.
- Lemieux-Dudon, B., Parrenin, F., Blayo, E., 2009. A probabilistic method to construct an optimal ice chronology for ice cores. In: Hondoh, T. (Ed.), *Proceedings of the 2nd International Workshop on Physics of Ice Core Records (PICR-2)*. Institute of Low Temperature Science, Hokkaido University, Sapporo, Japan, in press.
- Loulergue, L., Parrenin, F., Blunier, T., Barnola, J.-M., Spahni, R., Schilt,

- A., Raisbeck, G., Chappellaz, J., 2007. New constraints on the gas age-ice age difference along the epica ice cores, 050 kyr. *Climate of the Past* 3 (3), 527–540.  
URL <http://www.clim-past.net/3/527/2007/>
- Loulergue, L., Schilt, A., Spahni, R., Masson-Delmotte, V., Blunier, T., Lemieux, B., Barnola, J., Raynaud, D., Stocker, T., Chappellaz, J., 2008. Orbital and millennial-scale features of atmospheric CH<sub>4</sub> over the past 800,000 years. *Nature* 453 (7193), 383–386.
- Narcisi, B., Petit, J., Delmonte, B., Basile-Doelsch, I., Maggi, V., 2005. Characteristics and sources of tephra layers in the EPICA-Dome C ice record (East Antarctica): Implications for past atmospheric circulation and ice core stratigraphic correlations. *Earth and Planetary Science Letters* 239 (3-4), 253–265.
- Narcisi, B., Petit, J., Tiepolo, M., 2006. A volcanic marker (92 kyr) for dating deep East Antarctic cores. *Quaternary Science Reviews* 25 (21-22).
- Oerter, H., Wilhelms, F., Jung-Rothenhausler, F., Goktas, F., Miller, H., Graf, W., Sommer, S., 2000. Accumulation rates in Dronning Maud Land, Antarctica, as revealed by dielectric-profiling measurements of shallow firn cores. *Annals of Glaciology* 30, 27–34.
- Parrenin, F., Barnola, J.-M., Beer, J., Blunier, T., Castellano, E., Chappellaz, J., Dreyfus, G., Fischer, H., Fujita, S., Jouzel, J., Kawamura, K., Lemieux-Dudon, B., Loulergue, L., Masson-Delmotte, V., Narcisi, B., Petit, J.-R., Raisbeck, G., Raynaud, D., Ruth, U., Schwander, J., Severi, M., Spahni, R., Steffensen, J. P., Svensson, A., Udisti, R., Waelbroeck, C., Wolff, E., 2007a. The EDC3 chronology for the EPICA Dome C ice core. *Climate of the Past* 3 (3), 485–497.  
URL <http://www.clim-past.net/3/485/2007/>
- Parrenin, F., Dreyfus, G., Durand, G., Fujita, S., Gagliardini, O., Gillet, F., Jouzel, J., Kawamura, K., Lhomme, N., Masson-Delmotte, V., Ritz, C., Schwander, J., Shoji, H., Uemura, R., Watanabe, O., Yoshida, N., 2007b. 1-D-ice flow modelling at EPICA Dome C and Dome Fuji, East Antarctica. *Climate of the Past* 3 (2), 243–259.  
URL <http://www.clim-past.net/3/243/2007/>
- Parrenin, F., Jouzel, J., Waelbroeck, C., Ritz, C., Barnola, J., 2001. Dating the Vostok ice core by an inverse method. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres* 106(D23) (31), 837–851.
- Parrenin, F., Remy, F., Ritz, C., Siegert, M., Jouzel, J., 2004. New modeling of the Vostok ice flow line and implication for the glaciological chronology of the Vostok ice core. *Journal of Geophysical Research* (D20102).
- Pattyn, F., 2003. A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model: Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. *Journal of Geophysical Research* 108(B8) (2382), 10–1029.
- Petit, J., Jouzel, J., Raynaud, D., Barkov, N., Barnola, J., Basile, I., Bender, M., Chappellaz, J., Davis, M., Delaygue, G., et al., 1999. Climate and atmospheric history of the past 420, 000 years from the Vostok ice core,

- Antarctica. *Nature* 399 (6735), 429–436.
- Pimienta, P., 1987. Etude du comportement mecanique des glaces polycristallines aux faibles contraintes. Ph.D. thesis, These de l'Universite Joseph Fourier-Grenoble I.
- Raisbeck, G. M., Yiou, F., Jouzel, J., Stocker, T. F., 2007. Direct north-south synchronization of abrupt climate change record in ice cores using beryllium 10. *Climate of the Past* 3 (3), 541–547.  
URL <http://www.clim-past.net/3/541/2007/>
- Rasmussen, S., Andersen, K., Svensson, A., Steffensen, J., Vinther, B., Clausen, H., Siggaard-Andersen, M., Johnsen, S., Larsen, L., Dahl-Jensen, D., et al., 2006. A new Greenland ice core chronology for the last glacial termination. *J. Geophys. Res* 111.
- Rasmussen, S., Seierstad, I., Andersen, K., Bigler, M., Dahl-Jensen, D., Johnsen, S., 2008. Synchronization of the NGRIP, GRIP, and GISP2 ice cores across MIS 2 and palaeoclimatic implications. *Quaternary Science Reviews* 27 (1-2), 18–28.
- Ritz, C., Rommelaere, V., Dumas, C., 2001. Modeling the evolution of Antarctic ice sheet over the last 420, 000 years- Implications for altitude changes in the Vostok region. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres* 106(D23) (31), 943–964.
- Rotschky, G., Eisen, O., Wilhelms, F., Nixdorf, U., Oerter, H., 2004. Spatial distribution of surface mass balance on Amundsenisen plateau, Antarctica, derived from ice-penetrating radar studies. *Annals of Glaciology* 39, 265.
- Ruth, U., Barnola, J.-M., Beer, J., Bigler, M., Blunier, T., Castellano, E., Fischer, H., Fundel, F., Huybrechts, P., Kaufmann, P., Kipfstuhl, S., Lambert, A., Morganti, A., Oerter, H., Parrenin, F., Rybak, O., Severi, M., Udisti, R., Wilhelms, F., Wolff, E., 2007. EDML1: a chronology for the EPICA deep ice core from Dronning Maud Land, Antarctica, over the last 150 000 years. *Climate of the Past* 3 (3), 475–484.  
URL <http://www.clim-past.net/3/475/2007/>
- Severi, M., Becagli, S., Castellano, E., Morganti, A., Traversi, R., Udisti, R., Ruth, U., Fischer, H., Huybrechts, P., Wolff, E., Parrenin, F., Kaufmann, P., Lambert, F., Steffensen, J. P., 2007. Synchronisation of the edml and edc ice cores for the last 52 kyr by volcanic signature matching. *Climate of the Past* 3 (3), 367–374.  
URL <http://www.clim-past.net/3/367/2007/>
- Severinghaus, J., Sowers, T., Brook, E., Alley, R., Bender, M., 1998. Timing of abrupt climate change at the end of the younger dryas interval from thermally fractionated gases in polar ice. *Nature* 391, 141 – 146.
- Stocker, T., 1998. Climate change: the seesaw effect. *Science* 282 (5386), 61.
- Svensson, A., Andersen, K., Bigler, M., Clausen, H., Dahl-Jensen, D., Davies, S., Johnsen, S., Muscheler, R., Rasmussen, S., Röthlisberger, R., et al., 2006. The Greenland Ice Core Chronology 2005, 15–42ka. Part 2: comparison to other records. *Quaternary Science Reviews* 25 (23-24), 3258–3267.
- Svensson, A., Andersen, K. K., Bigler, M., Clausen, H. B., Dahl-Jensen, D.,



- Davies, S. M., Johnsen, S. J., Muscheler, R., Parrenin, F., Rasmussen, S. O., Röthlisberger, R., Seierstad, I., Steffensen, J. P., Vinther, B. M., 2008. A 60 000 year Greenland stratigraphic ice core chronology. *Climate of the Past* 4 (1), 47–57.  
URL <http://www.clim-past.net/4/47/2008/>
- Traufetter, F., Oerter, H., Fischer, H., Weller, R., Miller, H., 2004. Spatio-temporal variability in volcanic sulphate deposition over the past 2 kyr in snow pits and firn cores from Amundsenisen, Antarctica. *Journal of Glaciology* 50 (168), 137–146.
- Udisti, R., Becagli, S., Castellano, E., Delmonte, B., Jouzel, J., Petit, J., Schwander, J., Stenni, B., Wolff, E., 2004. Stratigraphic correlations between the European Project for Ice Coring in Antarctica (EPICA) Dome C and Vostok ice cores showing the relative variations of snow accumulation over the past 45 kyr. *Journal Geophysical Research. Atmospheres* 109(D08) (101).
- Yiou, F., Raisbeck, G., Baumgartner, S., Beer, J., Hammer, C., Johnsen, S., Jouzel, J., Kubik, P., Lestringuez, J., Stievenard, M., et al., 1997. Beryllium 10 in the Greenland Ice Core Project ice core at Summit, Greenland. *Journal of geophysical research* 102 (C 12), 26783–26794.

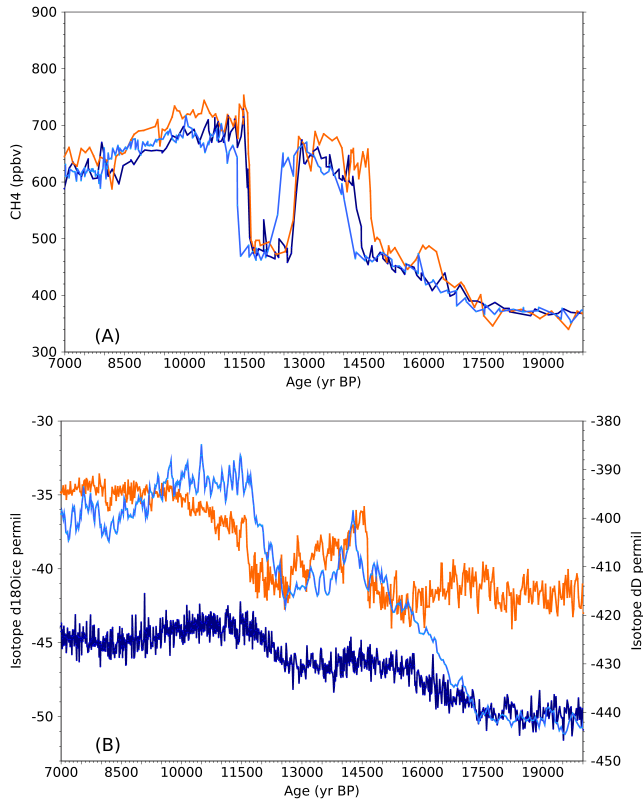


Fig. 1. Current dating problems related to ice cores of Antarctic (EDC and EDML respectively in light and dark blue) and Greenland (orange), for the last deglaciation transitions: (A) Unexpected timing during the Bolling-Allerod transition between ice isotopic records with the EDC3, EDML1 and GICC05 ice age scales, with a 400 yr lag between the maximum value reached by the EDC  $\delta D$  record before the Antarctic Cold Reversal, and (the fast Bolling-Allerod transition recorded in the NGRIP  $\delta^{18}O_{ice}$  record, respectively for the EDC, EDML and NGRIP ice isotopes. (B) Mismatch between the  $CH_4$  records with the sp4 gas age scenario for EDC and EDML, and the GICC05 gas age (Blunier et al., 2007) for the Greenland stack record.

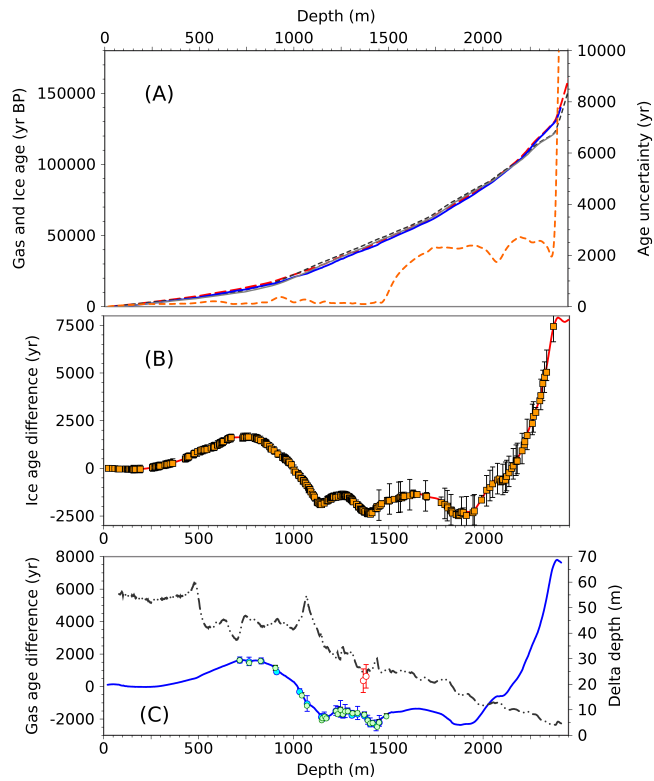


Fig. 2. EDC overall new dating scenario for ice and gas: (A) New and background ice and gas chronologies and uncertainty on the ice age estimate (orange dashed line, right Y-axis). Ice chronologies are dashed lines while gas chronologies are solid lines; background chronologies are in dark grey while new ice and gas chronologies are red and blue lines, respectively. (B) Difference between new and background ice age scales (i.e., new minus background, red line); red triangles are ice age markers; orange squares, orange and green diamonds are EDC-EDML, EDC-Vostok and EDC-NGRIP ice stratigraphic links, respectively; error bars correspond to  $2\sigma$  uncertainties. (C) Difference between new and background gas age scales (blue line); new delta-depth reconstruction (black dashed line, right Y axis); blue triangles are gas age markers; blue and purple circles are respectively EDC-EDML and EDC-Vostok gas stratigraphic links; red circles are delta-depth data inferred by Louergue et al. (2007), which are not used to constrain the new dating scenarios but are plotted for comparison; error bars are  $2\sigma$  uncertainties.

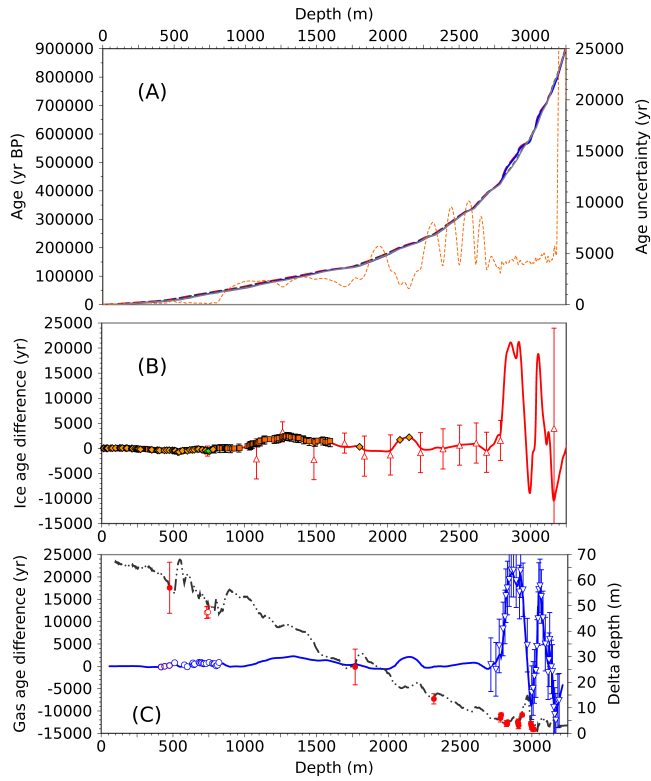


Fig. 3. EDML overall new dating scenario for ice and gas: (A) New and background ice and gas chronologies and uncertainty on the ice age estimate; see Figure 2 for plot symbols. (B) Difference between new and background ice age scales (i.e., new minus background, red line); orange squares are EDML-EDC ice stratigraphic links; error bars correspond to  $2\sigma$  uncertainties. (C) Difference between new and background gas age scales (blue line); new delta-depth reconstruction (black dashed line, right Y axis); blue and green circles are EDML-EDC and EDML-NGRIP gas stratigraphic links, respectively; red filled circles are delta-depth data; red empty circles are delta-depth inferred by Loulergue et al. (2007) but unused in the application; error bars are  $2\sigma$  uncertainties.

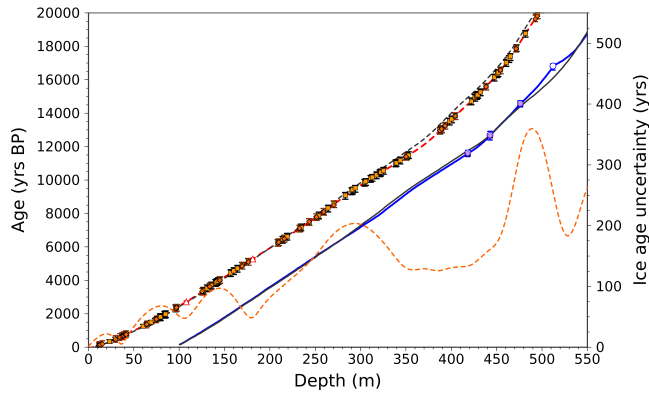


Fig. 4. EDC new ice and gas chronologies with uncertainty, compared to the background chronologies on a 0-20 kyr temporal window. Ice chronologies are dashed lines while gas chronologies are solid lines; the background chronologies are in dark grey while the new ice and gas age are red and blue lines, respectively; the confidence interval ( $2\sigma$ ) is plotted as orange dashed line (right Y-axis); ice age markers are red triangles; orange squares and diamonds are EDC-EDML and EDC-Vostok ice stratigraphic links, respectively; blue and purple circles are EDC-EDML and EDC-Vostok gas stratigraphic links, respectively; error bars are  $2\sigma$  uncertainties.

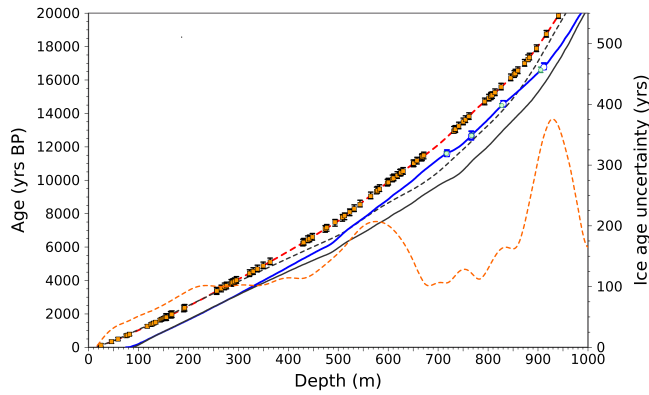


Fig. 5. EDML new ice and gas chronologies with uncertainty, compared to the background chronologies on a 0-20 kyr temporal window. See Figure 4 for plot symbols; orange diamonds are EDML-EDC ice stratigraphic links; blue and green circles are EDML-EDC and EDML-NGRIP gas stratigraphic links, respectively; error bars are  $2\sigma$  uncertainties.

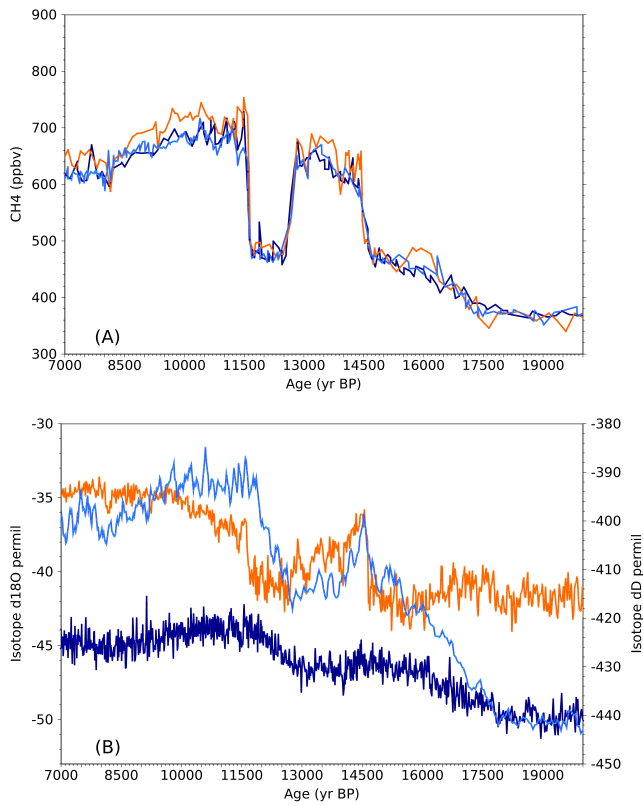


Fig. 6. New ice and gas chronologies for the EDC and EDML cores (light and dark blue lines, respectively) and for the NGRIP core (orange line), during the last deglaciation: (A) methane records; (B) ice isotope records.

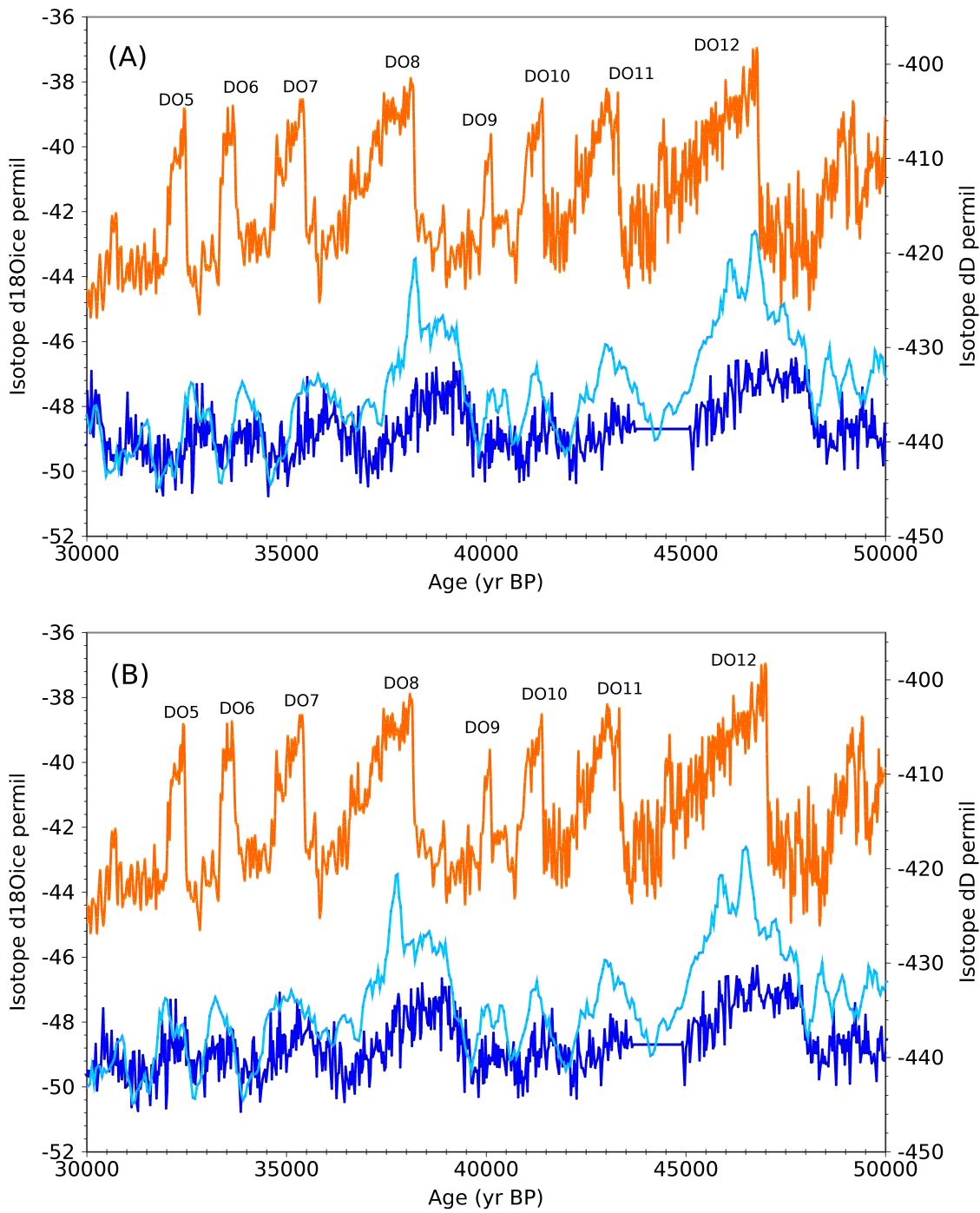


Fig. 7. EDC  $\delta D$  (light blue), EDML (dark blue) and NGRIP (orange)  $\delta^{18}O$  ice isotope records, on the time interval 30-50 kyr: (A) plotted against the new dating scenarios (this work); (B) plotted against the EDC3, EDML1 and GICC05 ice age scales. The DO events (i.e., Dansgaard-Oeschger) and Antarctic counterparts are shown and the new timing for the major DO, e.g., 8 and 12, is underlined.

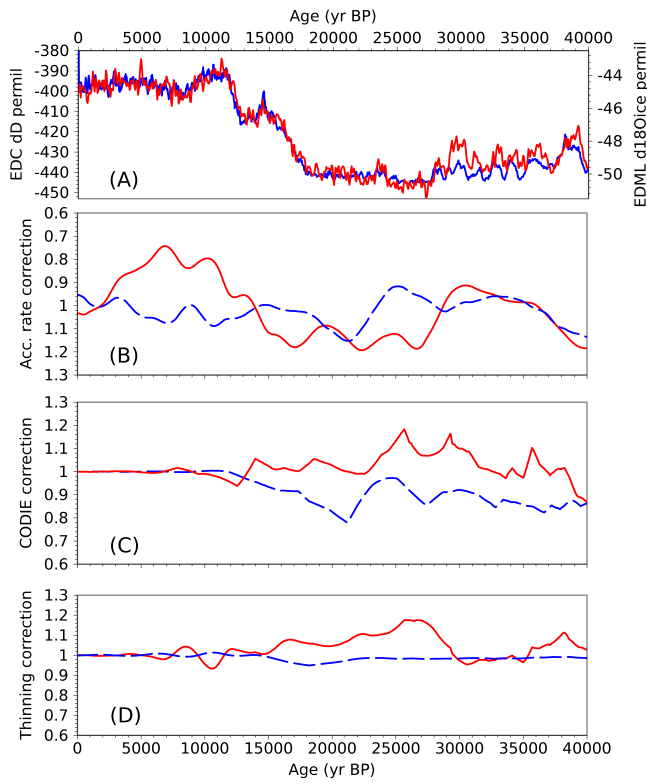


Fig. 8. EDC (blue/dashed blue) and EDML (red) climatic records and correction on glaciological entities, plotted against the new chronologies: (A) Ice isotope records; (B) Ratio between the new and background accumulation rate (reverse Y-axis); (C) Ratio between the new and background close-off depth (labelled "CODIE correction" to refer to the measurement unit "m-ie", i.e., meters of ice equivalent); (D) Ratio between the new and background thinning function.

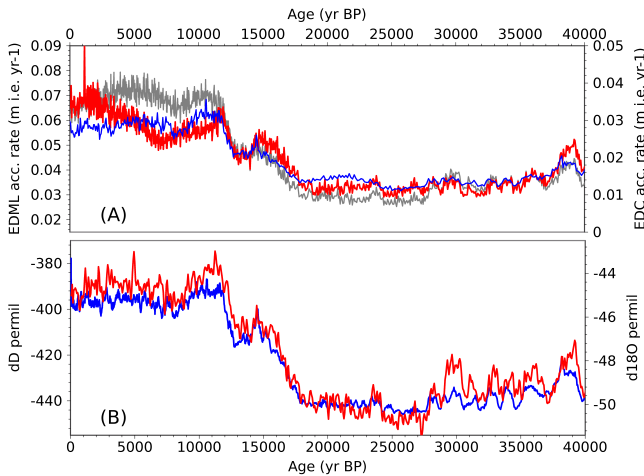


Fig. 9. New EDC and EDML accumulation rate reconstructions and isotope records, plotted against the new chronologies: (A) New EDML (red, left Y-axis) and new EDC accumulation rate (blue, right Y-axis) compared to the background EDML accumulation (grey, left Y-axis). (B) New EDML  $\delta^{18}\text{O}_{\text{ice}}$  record (red) and EDC  $\delta\text{D}$  record (blue).



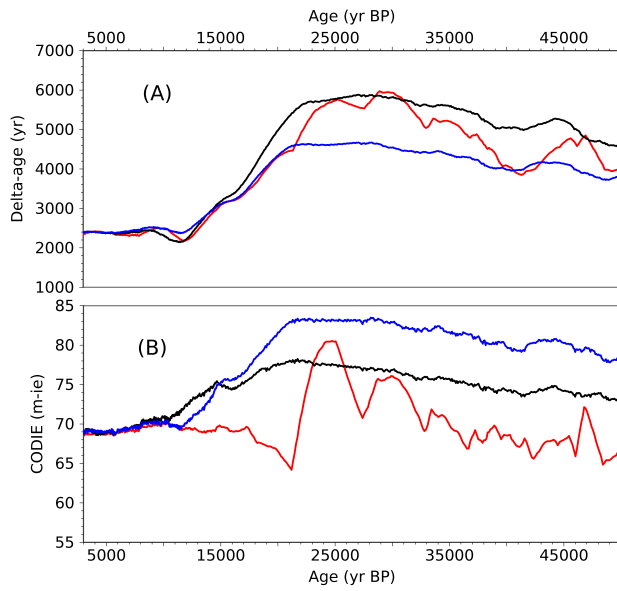


Fig. 10. Comparison of the EDC delta-age and close-off depth scenarios for the last 50 kyr: (A) Delta-age scenarios: sp1 scenario (black), sp4 scenario (blue) and the present work scenario (red). (B) Close-off depth scenarios (labelled "CODIE" to refer to the measurement unit "m-ie", i.e., meters of ice equivalent): sp1 scenario (black), sp4 scenario (blue) and the present work scenario (red).

Age markers	Depth (m)	Age (yr BP)	Uncertainty (yr)	Reference
$^{10}\text{Be}/^{14}\text{C}$	178	7180	100	(a)
$^{10}\text{Be}$	601	41000	2000	(a)
Orbital tuning	1904	132400	6000	(a)
Orbital tuning	2516	200600	6000	(a)
Orbital tuning	2777	246000	6000	(a)
Orbital tuning	2945	293600	6000	(a)
Orbital tuning	3134	336200	6000	(a)
Orbital tuning	3218	373800	6000	(a)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2167.5	164000	800	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2285.5	176000	400	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2371.5	186000	600	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2450.5	196000	1400	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2565	210000	1200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2652.5	222000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2694	230000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2740.5	240000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2802	252000	800	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2858	268000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2908	282000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2942.5	290000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	2979	300000	400	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	3027.5	314000	400	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	3071	326000	400	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	3115	336000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	3139	342000	400	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	3169	354000	600	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	3199	368000	200	(b)
Air content - $\text{O}_2/\text{N}_2$	3235	386000	1500	(b)

Table 1

Ice age markers used to constrain the new dating scenario for the Vostok core; the last column specifies the study from which the age markers are extracted: (a) Parrenin et al. (2004), (b) Lipenkov et al., in prep., personal com. 2009.

Age markers	Depth (m)	Age (yr BP)	Uncertainty (yr)
El Chicon	38.12	691	50
$^{10}\text{Be}/^{14}\text{C}$	107.83	2716	50
$^{10}\text{Be}/^{14}\text{C}$	181.12	5280	50
$^{10}\text{Be}$	740.08	41200	1000
Mt Berlin erupt. <sup>(*)</sup> .	1265.10	92500 (*)	2000 (*)
Term. II	1698.91	130100	2000
Air content	1082.34	70600	4000
Air content	1484.59	109400	4000
Air content	1838.09	147600	4000
Air content	2019.73	185300	4000
Air content	2230.71	227300	4000
Air content	2387.95	270400	4000
Air content	2503.74	313400	4000
Air content	2620.23	352400	4000
Air content	2692.69	390500	4000
Air content	2789.58	431400	4000
B-M reversal	3165.00	785000	20000

Table 2

Ice age markers used to constrain the new EDC core dating scenario. (\*): a new mean value of  $92.1 \pm 0.9$  kyr was recently assessed by Dunbar et al. (2008).

	EDC depth (m)	Vostok depth (m)	Uncertainty (yr)
Ash layer	1804.0	2000.70	100
Ash layer	2086.6	2501.92	100
Ash layer	2150.9	2589.56	100

Table 3

Ice stratigraphic links derived from common volcanic events identified through geochemical analysis of tephra layers that are inventoried in Narcisi et al. (2005). Note that all the Vostok depths are transferred to core 3G, e.g., ash layers at 1996.3 and 2586.15 m depth, along the cores 4G<sub>2</sub> and 5G<sub>1</sub>, are transferred to the core 3G at 2000.70 and 2589.56 m depth, respectively. At 2 km depth, we assumed a logging depth uncertainty of 0.5 m, roughly equivalent to 50 and 100 years for Vostok and EDC, respectively. The resulting RMS error is around 100 yr.

	EDC depth (m)	NGRIP depth (m)	Uncertainty (yr)
Peak 1	735.5 ± 1.1	2110.1 ± 1.1	110
Peak 2	744.8 ± 1.1	2127.5 ± 1.1	111

Table 4

Ice stratigraphic links derived from the double peak structure of GRIP-EDC <sup>10</sup>Be records (see Louergue et al. (2007)). Uncertainties in m are converted into temporal uncertainties, according to the NGRIP and EDC background age scales, with a resulting RMS error of about 110 years.

	EDC depth (m)	Vostok depth (m)	Uncertainty (yr)
YD-PB	418.2	319.96	150
BA-YD	442.7	346.16	150
GL-BA	476.1	372.2	150
TII	1722	1852.1	300
TII	1770	1879.7	300

Table 5

EDC-Vostok gas stratigraphic links derived from methane records during the last and the penultimate deglaciation; YD-PB = Younger Dryas to Pre-Boreal; BA-YD = Bolling-Allerod to Younger Dryas; GL-BA = Glacial to Bolling-Allerod; TII = Termination II.

	NGRIP depth (m)	age (yr)	Uncertainty (yr)
YD-PB	1516.37	11760	60
GL-BA	1638.01	14740	60
DO2	1824.08	23440	100
DO3	1897.12	27860	100
DO4	1911.63	28920	100
DO5	1969.62	32580	100
DO6	1994.17	33880	100
DO7	2027.61	35600	100
DO8	2087.90	38360	100
DO9	2119.17	40200	100
DO10	2142.27	41500	100
DO11	2175.27	43480	100
DO12	2239.68	46900	100

Table 6

NGRIP depth and GICC05 age of the major rapid climate changes, as recorded in the ice isotope. The GICC05 ice age of each event is attributed to each corresponding methane events, and provide a gas age marker. YD-PB = Younger Dryas to Pre-Boreal; GL-BA = Glacial to Bolling-Allerod; DO = Dansgaard-Oeschger event.

Transitions	NGRIP depth (m)	EDML depth (m)	Uncertainty (yr)
YD-PB	1511.54	716.55	100
BA-YD	1540.08	767.19	100
GL-BA	1627.89	827.53	100
Slow raise	1673.15	905.30	160
DO3 end	1796.95	1044.32	130
DO3 onset	1818.63	1070.99	160
DO2 end	1879.28	1149.2	130
DO2 onset	1891.96	1152.90	130
DO4 end	1901.97	1165.33	130
DO4 onset	1909.45	1173.42	100
DO5 end	1954.86	1224.54	100
DO5 onset	1963.88	1233.39	100
DO6 end	1981.94	1248.48	100
DO6 onset	1991.88	1260.59	100
DO7 end	2003.66	1272.56	100
DO7 onset	2024.93	1286.72	100
DO8 end	2042.86	1311.85	100
DO8 onset	2086.67	1337.84	100
DO9 onset	2115.88	1373.84	130
DO10 end	2125.12	1391.77	100
DO10 onset	2141.01	1404.59	100
DO11 end	2149.46	1417.60	100
DO11 onset	2173.20	1441.59	100
DO12 end	2185.66	1451.82	100
DO12 onset	2236.86	1490.22	100

Table 7

Gas stratigraphic links derived from the match of the EDML CH<sub>4</sub> record with the Greenland CH<sub>4</sub> stack record from present back to 55 kyr BP. YD-PB = Younger Dryas to Pre-Boreal; BA-YD = Bolling-Allerod to Younger Dryas; GL-BA = Glacial to Bolling-Allerod; DO = Dansgaard-Oeschger event.

## A Appendix: background error covariance matrix

The  $B$  matrix is defined as  $B = E[(\epsilon^b)(\epsilon^b)^T]$ ,  $\epsilon^b$  is the euclidean distance between  $X^t$  and  $X^b$ , the true and background dating scenarios, respectively.

Defining very precisely the  $B$  matrix is of course out of reach in practical applications, since  $X^t$  is unknown. However, there are different means of getting some insights on  $B$ . One can for instance perform a statistical analysis, comparing the glaciological dating scenarios built with simple flow models for dating purposes, to the ones simulated with more complex flow models. Such a statistical analysis is not in the scope of this paper and we only use a very preliminary shaping of the  $B$  matrix.

We assume no error correlation between the background entities of two distinct ice cores. We further assume no error correlation between  $A^{b,k}$ ,  $T^{b,k}$  and  $C^{b,k}$ . The  $B$  matrix is therefore made of diagonal blocks  $B^k$ , where each block related to the core  $k$  is written:

$$B^k = \begin{pmatrix} B_{A^{b,k}} & 0 & 0 \\ 0 & B_{T^{b,k}} & 0 \\ 0 & 0 & B_{C^{b,k}} \end{pmatrix}$$

We independently set  $\sigma^{b,k}$ , the standard deviation vectors and  $\rho^{b,k}$ , the correlation matrices associated with the three sub-matrices  $B_{A^{b,k}}$ ,  $B_{T^{b,k}}$  and  $B_{C^{b,k}}$ :

$$[B_{A^{b,k}}]_{ij} = [\sigma_A^{b,k}]_i [\sigma_A^{b,k}]_j [\rho_A^{b,k}]_{ij} \quad (\text{A.1})$$

$$[B_{T^{b,k}}]_{ij} = [\sigma_T^{b,k}]_i [\sigma_T^{b,k}]_j [\rho_T^{b,k}]_{ij} \quad (\text{A.2})$$

$$[B_{C^{b,k}}]_{ij} = [\sigma_C^{b,k}]_i [\sigma_C^{b,k}]_j [\rho_C^{b,k}]_{ij} \quad (\text{A.3})$$

$$(\text{A.4})$$

We define the  $\rho_{A^{b,k}}$  and  $\rho_{C^{b,k}}$  correlation matrices as functions of *age differences* while the  $\rho_{T^{b,k}}$  matrix is set as a function of *depth differences*. This separation is based on the distinct dependence of  $A^{b,k}$  and  $T^{b,k}$  either on age or on depth. Changes in accumulation rate are not linked to the drilling depth but more naturally to the paleoclimate change through time. The total thinning of an ice layer is more intrinsically a mechanical state attached to the depth of the layer.

The error variance on  $A^{b,k}$  (resp.  $C^{b,k}$ ) is assumed to depend on the product of

$\sigma_{A,0}^{b,k}$  (resp.  $\sigma_{C,0}^{b,k}$ ) a scalar parameter, and the normalized squared distance between the past and present-day site temperature (i.e., the further we are from present-day climate the greater the uncertainty on background accumulation rate and close-off depth).  $\sigma_{A,0}^{b,k}$  (resp.  $\sigma_{C,0}^{b,k}$ ) is set equal to 0.5. The correlation matrix  $\rho_A^{b,k}$  (resp.  $\rho_C^{b,k}$ ) is defined as a Gaussian distribution of  $\psi^{b,k}$ , which depends on  $L_A^{b,k}$  (resp.  $L_C^{b,k}$ ), a correlation length parameter in time unit set to 4000 yr.  $\rho_A^{b,k}$  (resp.  $\rho_C^{b,k}$ ) is therefore written:

$$\begin{aligned} [\rho_A^{b,k}]_{ij} &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\psi_i^{b,k} - \psi_j^{b,k}}{L_A^{b,k}} \right)^2 \right] \\ [\rho_C^{b,k}]_{ij} &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\psi_i^{b,k} - \psi_j^{b,k}}{L_C^{b,k}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

The error variance on  $T^{b,k}$  is chosen in order to agree with the following comment: the longer the ice particle trajectories, the greater is the error of the forward model. One candidate for  $\sigma_T^{b,k}$ , the error variance vector, can therefore be a growing function of the inverse of  $T_i^{b,k}$  (the total thinning experienced by the ice layer between depths  $z_{i-1}^k$  and  $z_i^k$ ):

$$[\sigma_T^{b,k}]_i = \sigma_{T,0}^{b,k} \left[ \frac{1}{10} + \frac{1}{H} \sum_{j=1}^i \frac{dz_j^k}{T_j^{b,k}} \right] \quad (\text{A.6})$$

where  $H$  is the total ice thickness and  $\sigma_{T,0}^{b,k}$  a parameter which is set to 0.45. The related correlation profile is here again chosen as a Gaussian distribution with an associated correlation length parameter  $L_T^{b,k}$  set to 70 m:

$$[\rho_T^{b,k}]_{i,j} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z_i - z_j}{L_T^{b,k}} \right)^2 \right] \quad (\text{A.7})$$



# Inversion sur 4 sites

---

## 16.1 Simulation améliorée

On apporte quelques améliorations pour la simulations sur 4 sites, proposée dans le papier QSR. On présente les modifications opérées sur le jeu de données assimilées ainsi que sur les scénarios d'ébauche. On profite de cette nouvelle simulation pour présenter d'une part la nouvelle échelle d'âge gaz à NGRIP et d'autre part la séquence climatique au Groenland et en Antarctique associée à cette nouvelle simulation (i.e., la séquence des variations de température enregistrées au Groenland et en Antarctique).

### 16.1.1 Retour sur les observations

#### 16.1.1.1 Contraintes supplémentaires sur l'âge gaz à NGRIP

La communauté paléo cherche à valider les théories de la bascule du climat (EPICA Community Members, 2006; Stocker, 1998) à des échelles de temps de plus en plus petites qui s'approchent aujourd'hui de la centaine d'année pour la dernière période glaciaire. Dans ces conditions, une estimation précise du delta-age (donc de l'âge gaz) au Groenland devient pratiquement aussi cruciale que l'estimation du delta-age en Antarctique. On propose d'assimiler des marqueurs de delta-depth pour le forage de NGRIP. Ces données sont issues des travaux de Huber *et al.* (2006) qui ont estimé les delta-depth lors des DO du stade 3 à l'aide des enregistrements de l'isotope de la glace et du  $\delta^{15}N$  du gaz. On liste les nouvelles données assimilées dans le tableau 16.1. Ces données ne sont pas malheureusement pas encore disponibles pour les D01 à 8 du forage de NGRIP.

Dansgaard-Oeschger	Profondeur (m)	Delta-depth (m)	Incertitude (m)
DO 9	2099.90	16.29	1.5
DO 10	2124.10	15.39	1.5
DO 11	2157.65	15.01	3
DO 12	2222.00	11.85	1.5
DO 13	2257.20	11.35	1.5
DO 14	2345.20	10.64	1.5
DO 15	2366.10	10.71	1.5

TABLEAU 16.1 – Données de delta-depth mesurées par Huber *et al.* (2006) lors des DO du stade 3 à l’aide des enregistrements de l’isotope de la glace et du  $\delta^{15}N$  du gaz.

### 16.1.1.2 Corrélation d’erreur sur les marqueurs d’âge glace à NGRIP

Le nombre de marqueurs d’âge glace utilisés dans la simulation QSR pour le forage de NGRIP est excessif (ces marqueurs sont issus de la chronologie stratigraphique GICC05). Par ailleurs, il existe une corrélation d’erreur sur ces marqueurs (voir discussion sur les incertitudes associées au comptage des couches annuelles section 5.2.1, partie ). Dans la nouvelle simulation, nous avons légèrement réduit le nombre de marqueurs de 1497 (tous les 40 ans) à 993 (tous les 60 ans). Cette réduction est probablement insuffisante dans la mesure où nous n’avons toujours pas introduit de corrélation d’erreur. Une implémentation du code est nécessaire à ce stade : si la méthode développée opère sur des matrices de covariance d’erreur non diagonales, la routine de chargement des données ne comprend une option “lecture des corrélations d’erreur” que pour les marqueurs d’âge gaz.).

### 16.1.1.3 Liens stratigraphiques gaz entre EDML et NGRIP

On réduit le nombre de liens stratigraphiques gaz entre EDML et NGRIP en ne conservant que les liens obtenus lors des transitions climatiques YD-PB, BA-YD, GL-BA, et DO2 à 11 (voir tableau 6 du papier QSR). On a donc enlevé 11 liens (entre 800 et 1000m, voir tableau 6, article QSR) assimilés dans la simulation QSR. Ces liens sont issus du travail de Blunier *et al.* (2007) qui ont réalisé une corrélation optimisée par méthode de Monte Carlo entre les enregistrements de méthane à NGRIP et EDML. Ce retrait fait partie de tests qui visent à identifier quelles sont les observations qui génèrent la forme particulière de l’accumulation reconstruite à EDML dans la simulation QSR (voir figure 10 de l’article).

### 16.1.2 Retour sur les scénarios d'ébauches

On a estimé plus proprement le scénario d'âge gaz à NGRIP : la codie (profondeur de fermeture des pores mesurée en mètres d'équivalent glace) avait été évaluée sur la base du profil de densité de la colonne de névé aujourd'hui et non à partir des estimations de ce profil dans le passé, par le modèle de densification Goujon *et al.* (2003). Ce changement amène une diminution du delta-age jusqu'à 200ans à partir de 1500m, c'est-à-dire à partir et au-delà vers le passé, de la transition Younger Dryas/Pré-Boréal.

## 16.2 Résultats

La figure 16.1 présente la séquence climatique Nord-Sud sur la fenêtre temporelle 0-60ka, telle que prédite par les modèles glaciologiques de datation. Il s'agit donc de la séquence climatique Nord-Sud associée aux scénarios d'ébauche que nous avons utilisés dans notre simulation avec pour EDML et EDC les âges glace calculés respectivement par Huybrechts *et al.* (2007) et Parrenin *et al.* (2007a).

La figure 16.2 présente cette même séquence climatique Nord-Sud d'une part telle que reconstruite par la méthode développée dans cette thèse et d'autre part telle que construite par la communauté paléo à la suite de plusieurs travaux dont ceux de Parrenin *et al.* (2007b); Ruth *et al.* (2007); Blunier *et al.* (2007); EPICA Community Members (2006).

La figure 16.4 présente entre 0-20ka, les chronologies gaz et glace après analyse pour le forage de NGRIP. L'erreur sur la chronologie stratigraphique GICC05 étant très faible dans cette fenêtre temporelle ( $\pm 222$  à 20ka b2k et  $\pm 50$  à 11.7ka b2k) et compte-tenu de la densité des marqueurs d'âge glace assimilés, l'âge glace après analyse est identique à l'âge d'ébauche.

La figure 16.3 présente : (i) pour les forages EDML et EDC, les enregistrements de CH<sub>4</sub> avec les nouveaux scénarios d'âge gaz et (ii) pour le forage de NGRIP, les enregistrements de CH<sub>4</sub> en fonction de l'âge gaz d'ébauche (Blunier *et al.*, 2007) et de l'âge gaz après analyse.

Enfin, la figure 16.5 compare pour les forages de EDC et EDML, les nouveaux scénarios de taux d'accumulation et d'isotope de la glace.

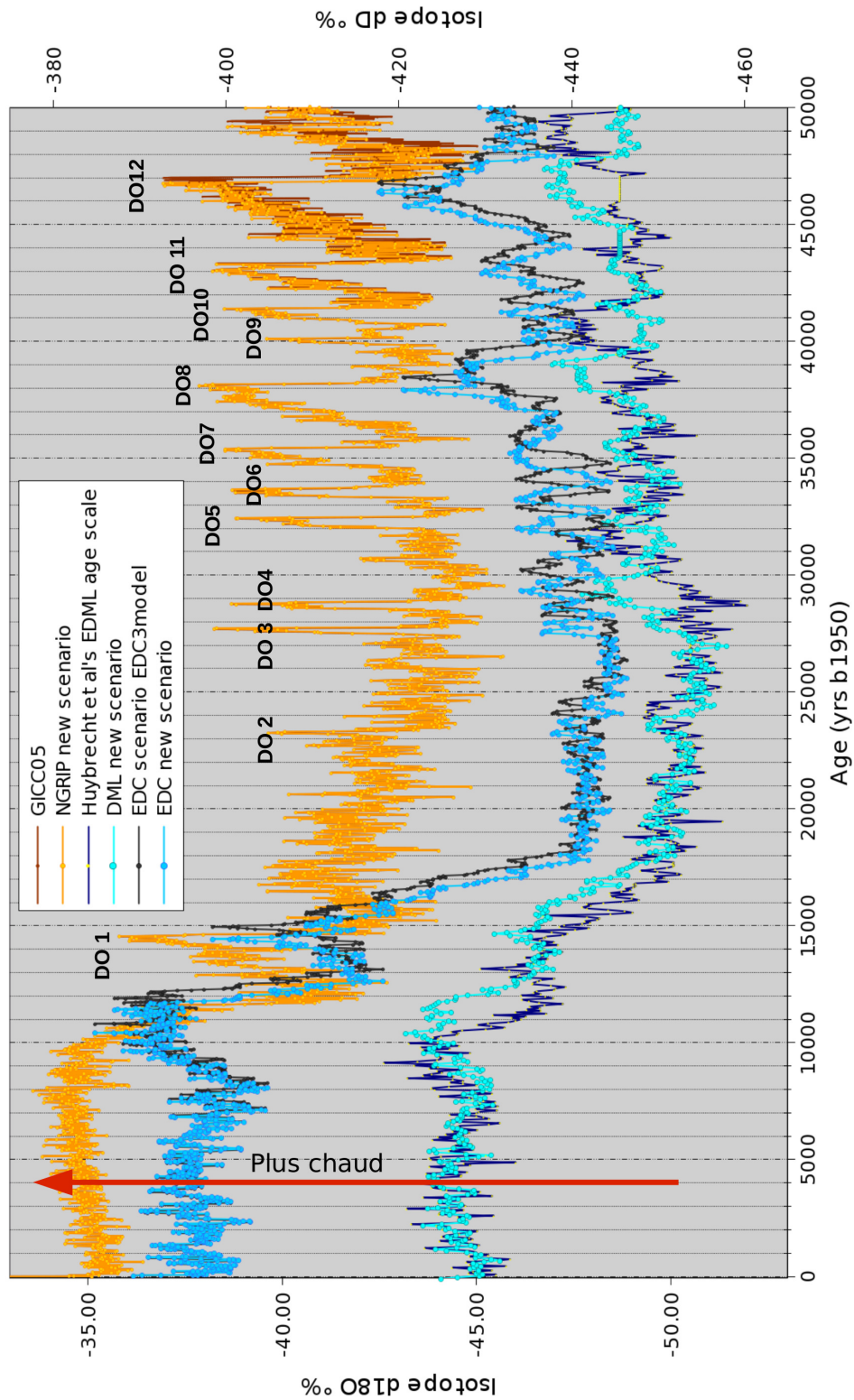


FIGURE 16.1 – Enregistrements des isotopes de la glace des forages EDML, EDC et NGRIP : (i) les scénarios d'ébauche que nous avons utilisés EDC3model (Parrenin *et al.*, 2007a) pour EDC et l'âge glace de Huybrechts *et al.* (2007) pour EDML ; (ii) la chronologie stratigraphique GICC05 pour NGRIP.

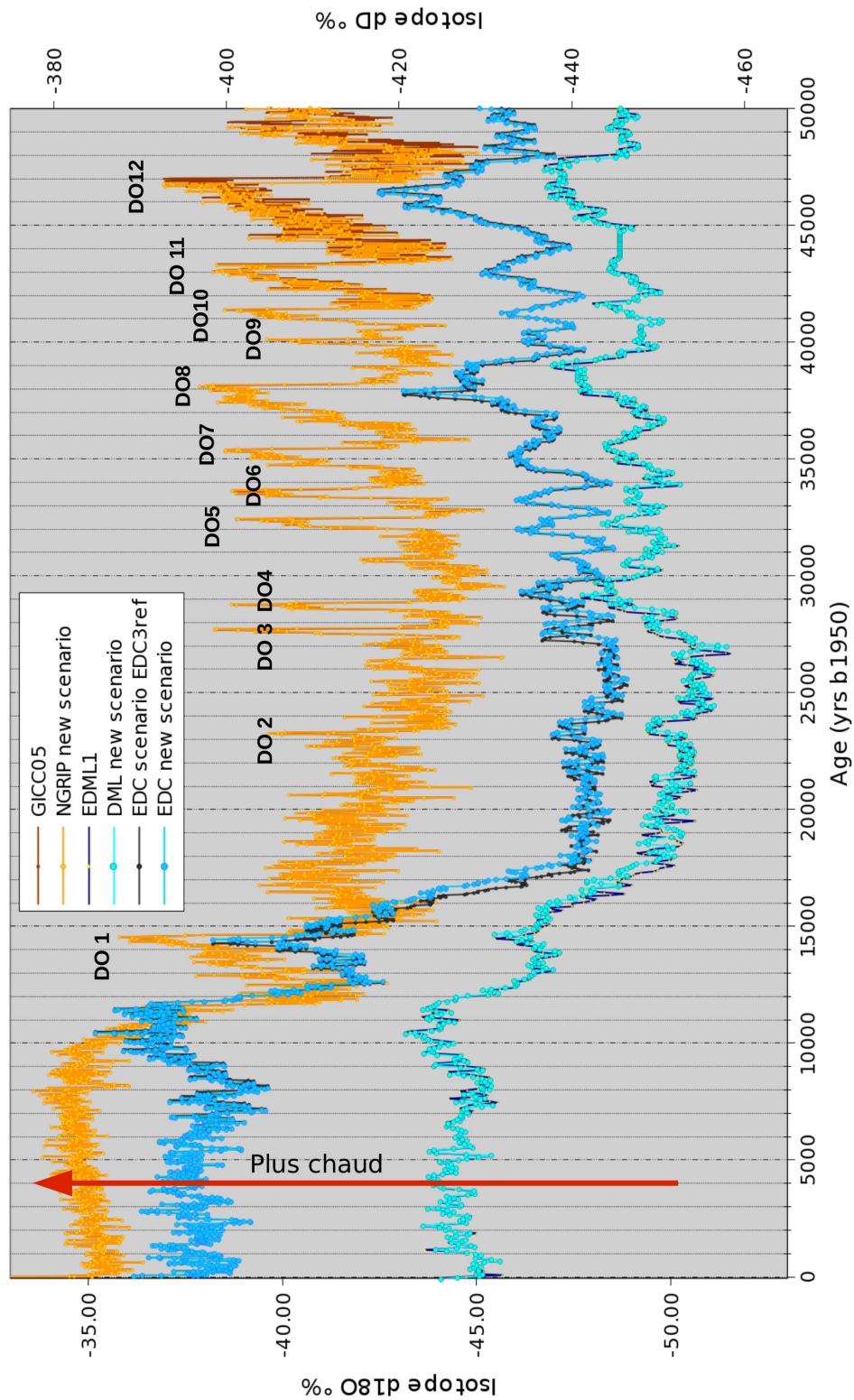


FIGURE 16.2 – Enregistrements des isotopes de la glace des forages EDML, EDC et NGRIP : comparaison des nouveaux scénarios de datation calculés dans ce travail avec les chronologies EDML1, EDC3ref et GICC05 issu du travail de la communauté paléo (Parrenin *et al.*, 2007b; Ruth *et al.*, 2007; EPICA Community Members, 2006).

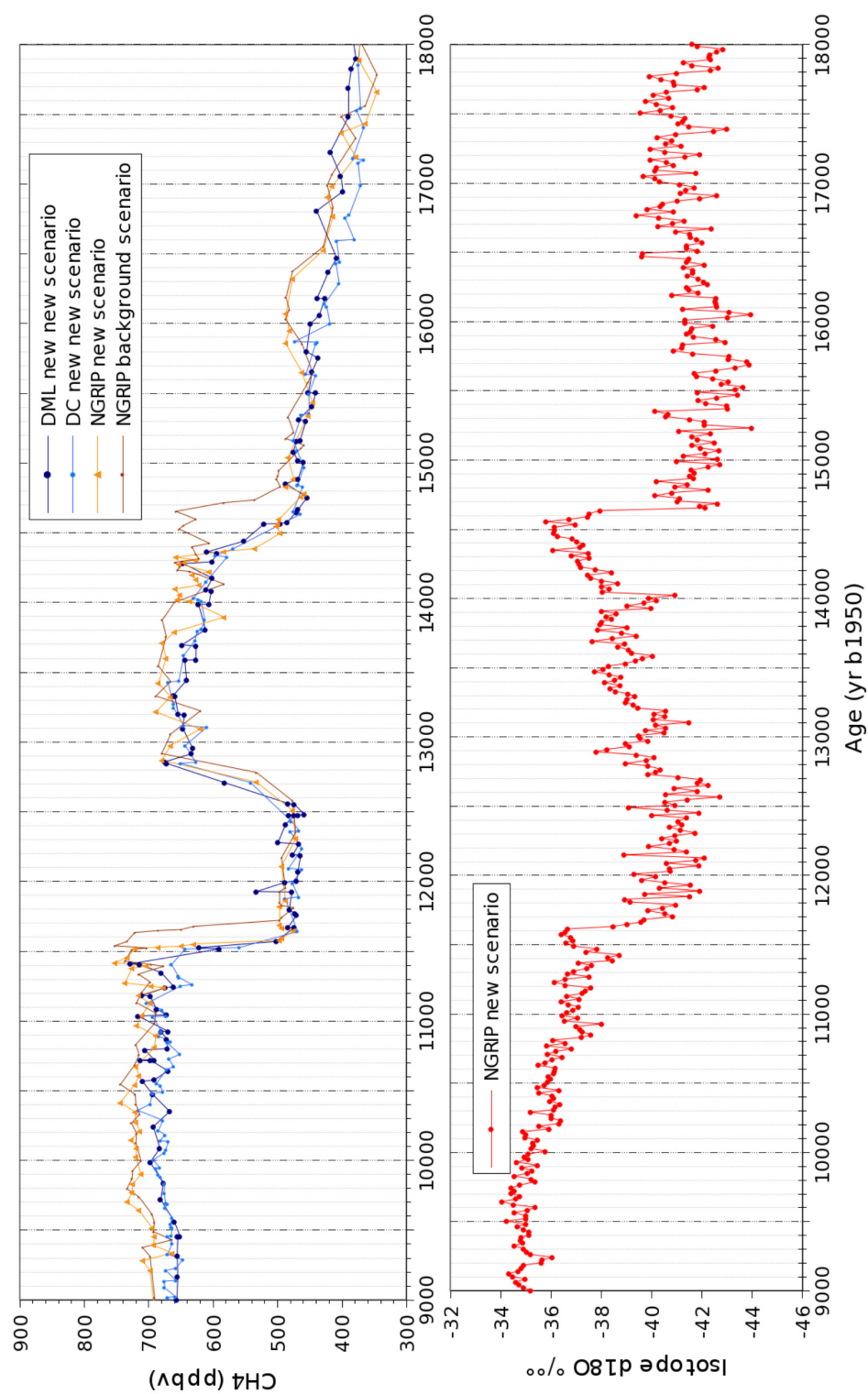


FIGURE 16.3 – Enregistrements de CH<sub>4</sub> avec les nouveaux scénarios d'âge gaz pour les forages EDML, EDC et NGRIP ; comparaison avec le scénario d'âge gaz d'ébauche de Blunier *et al.* (2007).

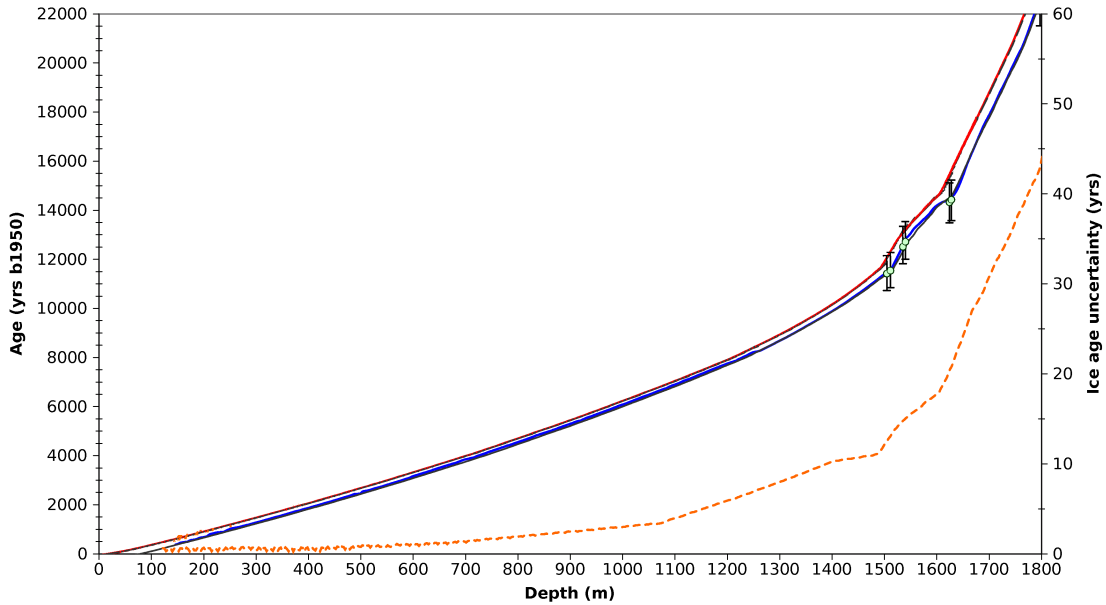


FIGURE 16.4 – Nouvelle chronologie gaz pour le forage de NGRIP.

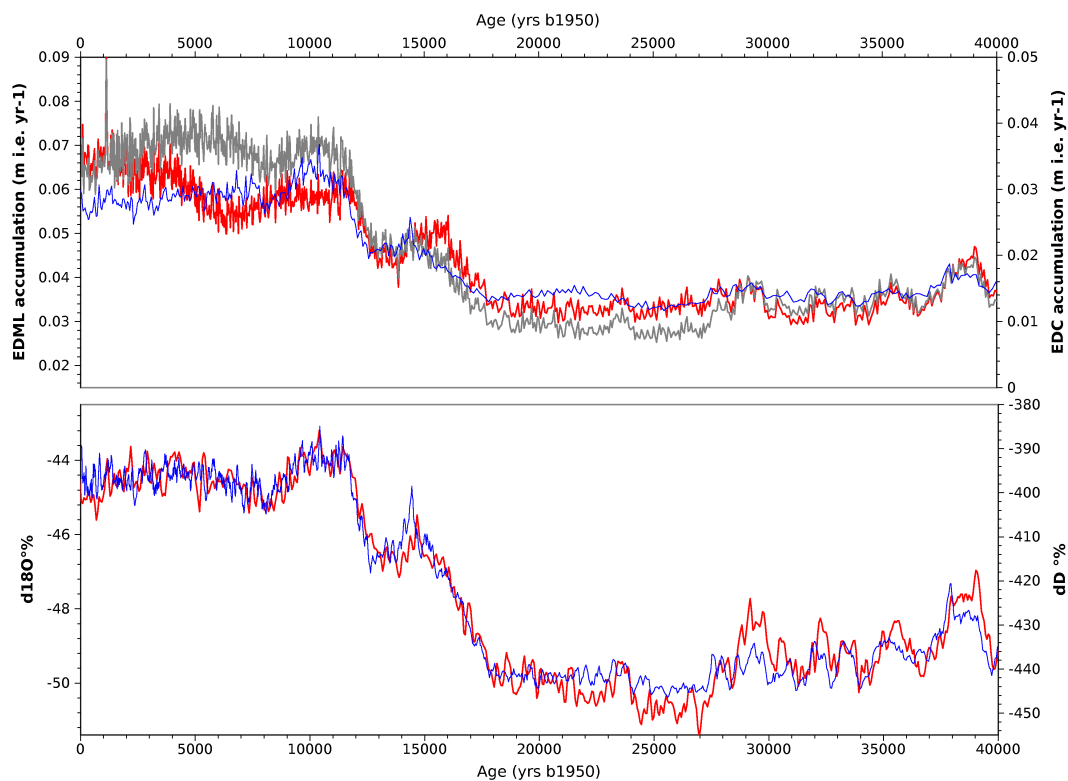


FIGURE 16.5 – Pour les forages EDC (bleu) et EDML (rouge) : (i) en haut, les nouveaux scénarios de taux d'accumulation comparés au scénario d'accumulation d'ébauche pour EDML (Huybrechts *et al.*, 2007), (ii) en bas de, les nouveaux scénario des isotopes de la glace.

## 16.3 Discussion

### 16.3.1 Nouvelles chronologies et bascule du climat pendant le dernier inter-glaciaire

La comparaison des figures 16.1 et 16.2 montre l'impact important des données assimilées sur les scénarios glaciologique après analyse pour les forages de EDC et EDML. On note en revanche que la séquence climatique Nord-Sud obtenue à l'aide de la méthode développée dans ce travail est très proche du scénario construit par la communauté paléo : ceci n'est pas un hasard puisque les données utilisées sont à peu de chose près identiques pour les deux approches. S'il ne s'agit pas d'un résultat "innovant" pour la communauté paléo, en revanche il s'agit d'un résultat qui valide la méthode développée au cours de cette thèse.

Cependant la comparaison des scénarios de la figure 16.2 montre quelques différences, avec des biais de l'âge des transitions de 100 à 400ans pour :

- la datation en Antarctique (forage EDC et EDML) du début et de la fin du DO1 (voir le papier QSR avec les figures 13 et 14 qui opèrent un zoom sur la fenêtre 6-24ka) ; nos simulations suggèrent avec une incertitude  $2\sigma$  les âges suivants :
  - début du DO1 :  $18000 \pm 440$  années b1950 ;
  - fin du DO1 :  $14440 \pm 140$  années b1950 ;
- la datation en Antarctique (forage EDC et EDML) des pics de température pour les DO3, 4 et 8.
- la datation à NGRIP de la transition rapide d'entrée dans le DO12.

Cependant, les différences d'âge observées sont très faibles par rapport aux incertitudes estimées. Des contraintes supplémentaires sur le delta-age à NGRIP et à EDML seraient nécessaires. Faute d'enregistrement de  $\delta^{15}N$  (à NGRIP), on pourrait dériver des estimations de delta-depth à partir des enregistrements de méthane et d'isotope de la glace. Une solution plus radicale (il faut de nouveaux forages) qui mobilise la communauté des paléo-glaciologues, consiste à réaliser les synchronisations Nord-Sud avec les enregistrements méthane de sites pour lesquels le delta-age est le plus petit possible (e.g., le forage de Talos Dôme avec le projet franco-italien TALDICE). Ceci permet de minimiser l'erreur absolue associée au delta-age <sup>1</sup>.

---

1. On rappelle que la synchronisation Nord-Sud a été opérée avec les forages de NGRIP et EDML grâce aux enregistrements de méthane qui sont associés aux chronologies gaz. Or, la séquence climatique Nord-Sud est observée sur les enregistrements isotopiques de la glace.



### 16.3.2 Nouvelle chronologie gaz à NGRIP

Pour le forage de NGRIP, les différences entre l'âge gaz des scénarios d'ébauche et après analyse, sont encore une fois très faibles par rapport aux incertitudes (voir figure 16.3 et 16.4). Dans l'hypothèse où le méthane répond à l'augmentation de température, le nouveau scénario paraît plus réaliste. Il a l'avantage d'avoir été estimé avec un scénario d'ébauche avec le modèle de densification Goujon *et al.* (2003) et pour les conditions climatiques de NGRIP, le scénario de Blunier *et al.* (2007) ayant lui été obtenu par le portage (via des liens stratigraphiques) de l'âge gaz du forage de GRIP sur le forage de NGRIP.

### 16.3.3 Scénario de taux d'accumulation à EDML

Les nouvelles reconstructions de taux d'accumulation à EDML sont durant l'Holocène davantage conformes aux schémas habituels (notamment avec un optimum climatique en début d'Holocène). L'augmentation d'accumulation à EDC et EDML est relativement synchrone au début du DO1 mais en fin de DO, EDML atteint un maximum en avance sur EDC. Cette même tendance est observée pour l'isotope. S'agit-il d'un artefact dû à la façon de dériver les liens stratigraphiques entre EDML et EDC (méthane, sulfate) ou bien y-a-t-il réellement un déphasage entre ces signaux? Encore une fois, on travaille avec des différences d'âge extrêmement petites au regard de l'erreur après analyse. On ne peut que multiplier l'usage de données indépendantes et précises pour réduire l'incertitude associée aux chronologies analysées.

### 16.3.4 Reconstruction de codie

On a présenté dans l'article QSR, la reconstruction de la codie (profondeur de fermeture des pores mesurée en mètres d'équivalent glace) pour le forage de EDC (figure 8, papier QSR, chapitre 15). On a souligné que cette observation était en accord avec les mesures de  $\delta^{15}N$  mais que la méconnaissance de l'épaisseur de la zone convective constituait un obstacle pour en déduire avec certitude, une diminution de la COD (profondeur de fermeture des pores mesurée en mètres réels) en période glaciaire. Il faut noter l'importance du profil de densité le long de la colonne de névé. Dans l'hypothèse où il y a bien diminution de la codie en période glaciaire, un des facteurs à considérer est le profil de densité qui peut expliquer une diminution à hauteur de 20% de la codie (communication personnelle, Jean-Marc Barnola).



**Cinquième partie**  
**Conclusions et perspectives**

## 17.1 Développements

Dans ce travail de thèse, on a souligné l'importance de la cohérence des datations des forages polaires afin de reconstruire les scénarios climatiques du passé. En présentant les différents modèles glaciologiques de datation, on a abordé le problème de l'erreur non paramétrique de ces modèles, erreur à l'origine d'un désaccord entre les prédictions de ces modèles et un certain nombre de données pertinentes. On a présenté la diversité de l'information chronologique issue de mesures réalisées sur les carottes de glace ou sur d'autres archives paléo-climatiques et on a souligné l'intérêt de développer des approches inverses pour rassembler l'information issue des données et des modèles.

Dans le cadre des approches inverses, on a montré qu'il était nécessaire d'assouplir les modèles glaciologiques de datation en prenant en compte l'erreur modèle dans le processus d'inversion, ceci afin que les scénarios glaciologiques après analyse (chronologie gaz et glace, taux d'accumulation, fonction d'amincissement et profondeur de fermeture des pores) puissent respecter les données assimilées. Toujours dans le cadre des approches inverses, on a souligné qu'un des prérequis pour estimer des datations cohérentes entre forage, consiste à travailler simultanément sur plusieurs forages, en assimilant des observations de type marqueurs stratigraphiques (e.g.,  $\text{CH}_4$ , sulfate, téphra,...) afin d'assurer la synchronisation des chronologies estimées, soit à une échelle globale (forages d'Antarctique et du Groenland) soit à une échelle régionale.

Pour répondre aux besoins de la communauté paléo, on a développé un outil "automatique" qui permet d'estimer pour plusieurs forages polaires, des chronologies cohérentes pour le gaz et la glace. Cet outil est construit autour de techniques inverses qui réalisent un compromis entre l'information chronologique apportée par les modèles glaciologiques de datation et par divers types de données (marqueur d'âge gaz et glace, liens stratigraphiques gaz et glace, marqueurs de grandeur). Cet outil permet de raffiner les scénarios d'ébauche estimés par les modèles glaciologiques de datation (chronologies gaz et glace, taux d'accumulation, fonction d'amincissement, profondeur de fermeture des pores) grâce à la prise en compte de

l'erreur modèle sous forme de fonctions de correction. On a montré que cet outil nécessite l'usage de nombreuses données pertinentes car ce sont elles qui induisent potentiellement des corrections sur les scénarios d'ébauche en sortie des modèles.

On a décrit l'approche probabiliste sur laquelle repose cet outil. Le choix d'une approche probabiliste a été motivé par l'objectif d'estimer des intervalles de confiance sur les nouveaux scénarios glaciologiques : les chronologies en premier lieu mais aussi le taux d'accumulation, la fonction d'amincissement, et la profondeur de fermeture des pores. L'approche probabiliste consiste en une formulation bayésienne du problème inverse que l'on a traduit en terme de fonction coût en appliquant le critère d'optimalité du maximum de vraisemblance. Cependant, on a montré que pour exploiter pleinement cette approche probabiliste (i.e., calculer des intervalles de confiance), il faut connaître les variances et covariances d'erreur attachées d'une part aux observations assimilées et d'autre part aux scénarios d'ébauche en sortie des modèles.

On a étudié la sensibilité de la solution aux variances et covariances d'erreur associées aux scénarios d'ébauche en sortie des modèles. On a vu que ces variances et covariances d'erreur modèle sont pour l'instant mal connues. Elles sont propres au type de modèle glaciologique utilisé et au forage sur lequel le modèle s'applique (e.g., en appliquant un modèle d'écoulement basé sur l'approximation de la SIA0, l'importance de l'erreur commise sera variable suivant la topographie du socle et de la surface au voisinage du forage considéré).

Dans ce contexte, on a souligné à nouveau l'importance d'assimiler de nombreuses données. On a aussi développé une formulation alternative qui repose sur l'ajout d'un terme de régularisation non probabiliste à la fonction coût, terme qui contraint les solutions (i.e., les fonctions de correction) à être *lisses*. Cette alternative, compromet la possibilité d'estimer proprement des intervalles de confiance a posteriori sur les grandeurs analysées.

Outre l'objectif pragmatique de calculer des chronologies cohérentes sur plusieurs forages, on a montré (voir article QSR, chapitre 14) que l'outil développé a un potentiel pour explorer l'origine de l'erreur modèle en comparant les scénarios des fonctions de correction avec des enregistrements indépendants (e.g., texture de la glace, traceurs chimiques des anomalies de taux accumulation,...). Encore une fois, pour exploiter ce potentiel il est nécessaire d'assimiler un grand nombre de données pertinentes.

## 17.2 Applications

Les applications de cette nouvelle approche ont été présentées partie **IV** autour de deux articles chacun suivi d'un chapitre de discussion.

Le premier article (Lemieux-Dudon *et al.*, 2009) consiste en une application sur un seul forage (EDC) qui a permis d'étudier la sensibilité de la solution à la structure des matrices de covariance d'erreur d'ébauche (i.e., aux variances et covariances d'erreur a priori sur le modèle glaciologique d'écoulement de la glace) et on a comparé la solution issue de la formulation purement probabiliste à la solution obtenue avec un terme de régularisation non probabiliste.

Le second article (Lemieux-Dudon et al, QSR, soumis) consiste en une application opérant sur quatre sites simultanément : NGRIP au Groenland et trois sites d'Anrtarctique, EDML, EDC et Vostok. On y a montré la capacité de la méthode pour calculer des chronologies cohérentes notamment entre le Groenland et l'Antarctique. On a proposé un nouveau scénario glaciologique pour EDC, EDML, NGRIP et Vostok (taux d'accumulation, fonction d'amincissement et profondeur de fermeture des pores) permettant de réconcilier les chronologies gaz des forages de NGRIP, EDC et EDML pendant la dernière déglaciation et la dernière période glaciaire. On a montré que la transition climatique du DO1 en Antarctique (pendant la dernière déglaciation) a probablement eu lieu environ 200 ou 300 ans plus tôt que ne le prévoit la chronologie de référence EDC3. On a aussi remis en question la datation de la terminaison II, sur la base de données de couches de cendre. Par ailleurs, ces nouveaux scénario suggèrent que *codie* et *delta-age* sont surestimés par les modèles de densification pendant la période glaciaire en Antarctique. Enfin, les nouveaux scénario d'accumulation reconstruits pour les sites d'Antarctique présentent des formes qui s'écartent du profil isotopique. Le temps imparti pour ce travail n'a cependant pas permis de collecter, de sélectionner et d'assimiler de nouvelles données pour confirmer ou infirmer ces résultats.

Enfin, l'outil développé pendant cette thèse est actuellement utilisé dans le cadre de la thèse de Daphné Buiron et du projet franco-italien TALDICE afin de dater le forage de Talos Dôme.

On présente les perspectives sous la forme de deux sections. La première section présente quelques axes de développement pour améliorer la performance de l'outil. La deuxième section décrit quelques axes d'applications à explorer.

## **18.1 Perspectives de développement**

### **18.1.1 Assimilation de données d'épaisseurs de couches annuelles**

L'assimilation des épaisseurs des couches annuelles est particulièrement intéressante dans le cadre de la chronologie GICC05. On a vu section 5.2.1 (partie 16.1.1.2) que contrairement à l'âge stratigraphique, l'incertitude sur l'épaisseur des couches annuelles n'est pas cumulative avec la profondeur. Assimiler l'épaisseur des couches annuelles permettraient de mieux contraindre les scénarios d'accumulation et d'amincissement à NGRIP<sup>1</sup>.

### **18.1.2 Acquérir de l'information a priori sur les variances et covariances d'erreur modèle**

Nous avons privilégié une formulation bayésienne du problème inverse afin de permettre l'estimation d'intervalles de confiance sur les grandeurs analysées. Dans notre travail, les matrices de covariances d'erreur d'ébauche qui conditionnent la forme de la solution, ont été construites sur des considérations élémentaires et contiennent une grande part d'information subjective. Une approche courante dans des disciplines comme l'océanographie ou la météorologie opérationnelles consiste à modéliser ces matrices de covariances en réalisant des statistiques sur un grand nombre de simulations. On peut transposer cette pratique en glaciologie. Cependant, l'erreur des modèles glaciologiques de datation étant a priori essentiellement non paramétrique, il faut envisager d'utiliser des modèles glaciologiques plus élaborés (i.e., avec une description plus détaillée de l'écoulement de la glace et/ou de la densification du névé).

---

1. On note que l'épaisseur des couches annuelles et la chronologie stratigraphique glace GICC05 ne sont pas des grandeurs statistiquement indépendantes.

Pour illustrer ce type d'approche, on propose par exemple de réaliser des expériences pour de tester l'impact de l'anisotropie de la glace sur la fonction d'amincissement dans le cas d'un forage à l'aplomb d'un dôme (voir l'article QSR 15, partie IV). Il faut alors utiliser un modèle d'écoulement qui intègre une loi de comportement tenant compte de l'évolution de la fabrique. Gillet-Chaulet *et al.* (2005, 2006) ont développé un modèle qui permet de réaliser ces expériences. En partant de deux configurations initiales qui se distinguent par deux profils de fabrique différents : (i) un profil isotrope et (ii) un profil anisotrope (par exemple celui mesuré aujourd'hui le long du forage EDC), en supposant un même profil initial d'épaisseur de couche annuelle (i.e.,  $L(Z)$ ), on peut réaliser deux simulations sur un temps  $\Delta t$  et comparer pour ces deux configurations initiales, l'amincissement  $T(z)$  subit sur la durée  $\Delta t$  par les couches de glace le long du forage<sup>2</sup>.

### 18.1.3 Vérification d'hypothèses pour valider l'estimation des erreurs a posteriori

Pour valider l'estimation des erreurs a posteriori sur les grandeurs analysées, il serait intéressant de vérifier la validité de l'hypothèse 14 de gaussianité de l'erreur sur l'âge analysé, ainsi que la validité de l'hypothèse 13 de faible non linéarité de l'opérateur d'observation généralisé  $h$ .

### 18.1.4 Couplage des modèles inverses d'écoulement et de la méthode développée dans ce travail

On ne parle pas ici des modèles de densification car ceux-ci n'ont pour l'instant qu'une formulation directe. Il existe différentes approches pour identifier à la fois les paramètres des modèles d'écoulement pour la datation et l'erreur modèle associée. On veut ici tirer partie de la méthode développée au cours de cette thèse qui introduit et identifie l'erreur modèle. On propose de coupler le modèle inverse pour la datation développé par Parrenin *et al.* (2001) avec la méthode développée durant ce travail de thèse.

La résolution du problème inverse d'écoulement proposée par Parrenin *et al.* (2001) repose sur l'échantillonnage par méthode de Monte Carlo de la densité de probabilité a posteriori sur les paramètres du modèle. Cet échantillonnage est construit au cours d'une marche dans l'espace des paramètres qui explore des jeux de paramètres successifs  $M_i$ . Ces jeux de paramètres sont soit acceptés soit rejetés en fonction notamment de la valeur de la vraisemblance

---

2. Le modèle Gillet-Chaulet *et al.* (2005, 2006) est exigeant en temps de calcul, le temps  $\Delta t$  devra donc être réduit à quelques dizaines de kilo-années.



(voir 7, partie III), cette vraisemblance mesurant l'écart entre les données de marqueurs d'âge glace et les prédictions du modèle  $M_i$ .

On propose de modifier la formulation de la vraisemblance de sorte qu'elle ne mesure non pas seulement l'écart entre prédiction du modèle d'écoulement et marqueurs d'âge mais aussi l'écart entre prédiction du modèle et le nouveau scénario d'amincissement estimé par la technique développée dans ce travail (à savoir  $T^a(z)$ ). Ceci permet d'imposer indirectement la contrainte de données de type liens stratigraphiques ou marqueurs de grandeur (e.g., delta-depth) utilisées dans la technique développée dans ce travail. On propose par ailleurs d'utiliser le nouveau scénario d'accumulation  $A^a(z)$  comme condition aux limites du modèle d'écoulement.

Cependant, ce couplage nécessite impérativement d'introduire des degrés de liberté supplémentaires dans le modèle d'écoulement pour la datation. On a en effet montré que ce type de modèle n'était pas en mesure de reproduire la complexité de l'écoulement de la glace et de respecter certains marqueurs temporels pertinents.

Un premier axe de travail consiste à introduire des degrés de liberté en supposant variables avec le temps un ou plusieurs paramètres supposés constants dans le modèle d'écoulement pour la datation. Par exemple, on peut choisir :

1. *Les taux de glissement  $s$  et de fusion  $\dot{f}$  à la base de la calotte* : il est probable qu'ils aient varié au cours du temps avec les variations du profil de température et de la pression à la base de la calotte (c.f., variation d'épaisseur de la calotte). Aussi, on peut introduire et identifier les fonctions  $\rho(\Psi(z))$  et  $\varepsilon(\Psi(z))$ <sup>3</sup> afin de reconstruire les évolutions temporelles de  $s^*$  et  $\dot{f}^*$  telles que :

$$\begin{aligned} s^* &= \rho(\Psi(z)) s \\ \dot{f}^* &= \varepsilon(\Psi(z)) \dot{f} \end{aligned} \tag{18.1}$$

2. *L'exposant de la fonction de forme  $m$*  : dans le cadre des modèles reposant sur l'approximation de la nappe froide de Lliboutry (1979) (voir section 4.3.8, partie 16.1.1.2) : il est possible que  $m$  (et la forme du profil de vitesse) ait varié au cours du temps (avec les mécanismes de fluage mis en jeu en fonction de la profondeur et des ordres de grandeur de la contrainte, avec la valeur de la température à la base de la calotte,

---

3. On rappelle que  $\Psi(z)$  est l'âge de la glace en fonction de la profondeur  $z$  le long du forage.

avec l'épaisseur de la calotte,...). On peut introduire et chercher à identifier la fonction  $\nu(\Psi(z))$  afin de reconstruire l'évolution temporelle de  $m^*$  telle que :

$$m^* = \nu(\Psi(z)) m \quad (18.2)$$

Un second axe de travail consiste à contrôler les paléo-épaisseurs  $H$  de la calotte. L'évolution de l'épaisseur de la calotte  $H$  peut être entachée d'erreur (parce que l'on connaît mal sur un domaine à l'échelle de la calotte, l'évolution dans le passé du taux d'accumulation, des processus de fusion-glissement à la base, des processus d'écoulement par les portails que sont les lignes d'échouage). Aussi, on peut introduire une fonction  $\mu(\Psi(z))$  afin de reconstruire un nouveau scénario d'épaisseur  $H^*$  :

$$H^* = \mu(\Psi(z)) H \quad (18.3)$$

On propose dans un premier temps d'identifier une seule des fonctions introduites à la fois :  $\varrho(\Psi(z))$ ,  $\varrho(\Psi(z))$ ,  $\nu(\Psi(z))$  ou  $\mu(\Psi(z))$ , et de contrôler après analyse la vraisemblance des valeurs trouvées.

De plus, on propose de procéder par itérations avec des cycles constitués par l'alternance d'optimisation réalisées avec :

1. Le modèle inverse d'écoulement Parrenin *et al.* (2001) qui donne de nouvelles valeurs pour les paramètres modèle, un nouveau scénario pour l'une des fonctions  $\varrho(\Psi(z))$ ,  $\varrho(\Psi(z))$ ,  $\nu(\Psi(z))$  ou  $\mu(\Psi(z))$  ainsi qu'une nouvelle chronologie glace  $\Psi^b(z)$  ;
2. La technique développée au cours de ce travail et qui donne de nouveaux scénario glaciologiques  $A^a(z)$ ,  $T^a(z)$ ,  $C^a(z)$ ,  $\Psi^a(z)$  et  $\chi^a(z)$  (en utilisant comme chronologie glace d'ébauche  $\Psi^b(z)$  obtenue à l'étape précédente)

Cependant, comme l'étape d'optimisation du modèle inverse d'écoulement Parrenin *et al.* (2001) repose sur une méthode de Monte Carlo, il s'agit de travailler dans un espace des paramètres de dimension "raisonnable". On propose de découper l'épaisseur du forage en  $n$  fenêtres qui se recouvrent partiellement et de formuler le problème inverse sur chacune des fenêtres successivement, avec un échantillonnage "local" par méthode de Monte Carlo. Cette formulation locale (et glissante) permettrait d'identifier la valeur optimale d'une des fonctions  $\varrho(\Psi(z))$ ,  $\varrho(\Psi(z))$ ,  $\nu(\Psi(z))$  ou  $\mu(\Psi(z))$  (i.e., optimale au regard de l'ébauche, des marqueurs d'âge et du scénario d'amincissement  $T^a(z)$  appartenant à cette fenêtre). On peut qualifier cette approche de méthode de Monte Carlo *glissante*. Elle revient à identifier

par morceaux les fonctions  $\rho(\Psi(z))$ ,  $\nu(\Psi(z))$  ou  $\mu(\Psi(z))$  ou encore les paramètres auxquelles elles sont rattachées.

## 18.2 Perspectives d'applications

Les perspective d'application sont multiples et ce sont les futurs utilisateurs qui se chargeront de les définir. On note cependant que les nouveaux scénarios glaciologiques après analyse doivent être confrontés :

- à des données indépendantes pour être validés ;
- aux reconstructions des modèles glaciologiques dans l'objectif d'améliorer la description des modèles.

### 18.2.1 Confronter les nouveaux scénario glaciologiques à des données indépendantes

Cette étape a d'une part pour objectif de confirmer ou d'infirmer les nouveaux scénario de taux d'accumulation, de fonction d'amincissement et de profondeur de fermeture des pores (en m-ie, codie) :

1. Il faut confronter les reconstructions de taux d'accumulation aux anomalies dans le flux de différentes espèces chimiques mesurées le long du forage, avec en particulier :
  - le béryllium-10,
  - le sodium,

En effet, on a vu que nos reconstructions s'écartaient du profil isotopique.

2. Il faut aussi confronter les reconstructions de fonctions d'amincissement à des données de texture (comme ceci a été initié dans l'article QSR) :
  - la taille des grains,
  - la concentration de la fabrication.
3. On peut confronter les reconstructions de delta-depth aux estimations de cette même grandeur lors des transitions climatiques rapides, à l'aide des enregistrements de l'isotope de la glace d'une part et des isotopes de l'azote et l'argon d'autre part.
4. La confrontation des reconstructions de codie est plus délicate. En effet, le profil de densité de la colonne de névé est une inconnue, ce qui empêche de remonter de la codie à la profondeur de fermeture des pores (COD). D'autre part, si en période climatique stable, les formes isotopiques lourdes de l'azote et de l'argon permettent d'estimer la

hauteur de la colonne diffusive (DCH), les incertitudes sur les épaisseurs des zones non-diffusives et convectives ne permettent pas de confirmer ou d'infirmier avec certitude les différents scénarios de COD.

### 18.2.2 Multiplier les contraintes sur le delta-age et le delta-depth

Pour reconstruire des scénarios de codage fiables, il est nécessaire de disposer pour des profondeurs voisines de contraintes à la fois sur l'âge gaz et l'âge glace. Les données de delta-depth issues de la confrontation des profils de l'isotope de la glace est du  $\delta^{15}N$  sont particulièrement intéressants au Groenland et les mesures en cours à NGRIP pour les DO1 à 8 seront les bienvenues.

### 18.2.3 Forcer les modèles de densification avec les nouveaux scénarios d'accumulation

Il peut être utile de déterminer si la modification des champs de forçage du modèle de densification (accumulation et température) sont à même de reproduire les scénarios de codage obtenus par la méthode développée dans ce travail, ou bien si ceci n'est possible qu'en modifiant la paramétrisation des processus de densification. On peut commencer par :

- forcer le modèle de densification avec les nouveaux scénarios d'accumulation,
- comparer la nouvelle codage en sortie du modèle de densification avec le scénario de codage obtenu par la méthode développée dans ce travail.



# Sixième partie

## Annexes

# Approximation hydrostatique ou glaciostatique

---

L'équation quasi-statique de conservation de la quantité de mouvement 4.37 se développe :

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (\text{A.3})$$

Sur la base du faible rapport d'aspect  $\epsilon$ , appliquer la SIA0 consiste pour une grandeur quelconque du problème, à négliger ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  devant sa dérivée partielle par rapport à la coordonnée vertical  $z$ . Ceci amène à ne considérer que les contraintes déviatoriques dans le plan horizontales. On aboutit alors à des expressions explicites des vitesses  $v_x$  et  $v_y$ . On montre dans ce qui suit, quelques étapes du développement et les résultats essentiels de la SIA0.

Une première étape consiste à réaliser l'approximation hydrostatique qui repose sur le fait que les contraintes de cisaillements  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  qui s'appliquent sur toute surface horizontale de la calotte dans les directions  $x$  et  $y$  sont petites en comparaison de la contrainte  $\tau_{zz}$  (voir analyse dimensionnelle dans Greve Ralf) ce qui permet de simplifier l'équation A.3 :

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (\text{A.4})$$

Avec la condition aux limites en surface 4.41, celle-ci s'intègre :

$$\tau_{zz} = -\rho g (h - z) \quad (\text{A.5})$$

Ce permet d'écrire, en notant que  $\text{tr } \tau = -3p + \text{tr } \tau^d$  :

$$p = \rho g(h - z) - \tau_{xx}^d - \tau_{yy}^d \quad (\text{A.6})$$

Cette dernière équation injectée dans les deux premières composantes de l'équation 4.23 donne :

$$\tau_{xx} = 2\tau_{xx}^d + \tau_{yy}^d - \rho g(h - z) \quad (\text{A.7})$$

$$\tau_{yy} = 2\tau_{yy}^d + \tau_{xx}^d - \rho g(h - z) \quad (\text{A.8})$$

Ce qui permet à nouveau de transformer les équations A.2 et A.3 :

$$2 \frac{\partial \tau_{xx}^d}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}^d}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{A.9})$$

$$2 \frac{\partial \tau_{yy}^d}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}^d}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_{zz} = -\rho g(h - z) \quad (\text{A.11})$$

On néglige ensuite dans ce système, les contraintes déviatoriques  $\tau_{xx}^d, \tau_{yy}^d, \tau_{zz}^d$  ainsi que les contraintes dans les plans verticaux,  $\tau_{xy}$  et on suppose que toutes les contraintes normales sont égales à l'opposé de la pression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= -\rho g(h - z) = -p \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$



# Modèle de Lliboutry pour une nappe de glace froide

---

J'avoue ne pas comprendre pourquoi cette approximation est présentée comme liée au choix d'un un profil de température stationnaire et linéaire. Ma compréhension aujourd'hui m'amène à voir cette approximation comme un profil de température stationnaire oui mais linéaire non. Je me permets de développer mon point de vue et j'espère qu'un correcteur éclairé trouvera mon erreur (la solution étant peut-être dans l'article de Lliboutry, 1979).

L'objectif est d'arrêter un profil raisonnable pour la température  $\theta$  dans l'équation de la SIA0 donnant  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  4.66. L'approximation du profil de température  $\theta$  consiste notamment à imposer le gradient géothermique  $G_0$  dans la glace, à la base de calotte (à Vostok environ  $0.025^\circ\text{Cm}^{-1}$  selon Ritz, 1992). Cette approximation est dite "première approximation près du socle" :

$$\theta = \frac{\theta_b^2}{\theta^b + G_0(z - b)} \quad (\text{B.1})$$

où comme précédemment  $\theta_m$  et  $\theta_b$  sont respectivement la température de fusion (sous la pression basale  $p_b$ ) et la température à la base de la calotte dans la glace.

Le gradient thermique au sein de la calotte s'écrit alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{-\theta_b^2 G_0}{(\theta^b + G_0(z - b))^2} \quad (\text{B.2})$$

et on vérifie bien que lorsque  $z = b$  à la base de la calotte, ceci donne :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=b} = -G_0 \quad (\text{B.3})$$

Avec la coordonnée réduite  $\xi$ , l'approximation (B.1) s'écrit :

$$\theta = \frac{\theta_b^2}{\theta^b + G_0 H(1 - \xi)} \quad (\text{B.4})$$

On décompose ensuite  $A_\theta$  la fonction de température selon Arrhenius, de la façon suivante :

$$A_\theta = A_0 \exp \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{\theta_m} - \frac{1}{\theta_b} \right) \exp \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{\theta_b} - \frac{1}{\theta} \right) \quad (\text{B.5})$$

On définit par ailleurs la variable  $d_b$  qui est homogène à une vitesse de déformation :

$$d_b = 2A_0 (\rho g H |\text{grad } h|)^n \exp \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{\theta_m} - \frac{1}{\theta_b} \right) \quad (\text{B.6})$$

On introduit l'équation [B.5](#) dans l'expression [4.66](#) en notant que comme  $x$  est la coordonnée curviligne suivant la plus grande pente, la norme de cette pente s'écrit  $|\text{grad } h| = \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|$  :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -2A_0 \exp \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{\theta_m} - \frac{1}{\theta_b} \right) \exp \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{\theta_b} - \frac{1}{\theta} \right) [\rho g H \xi \frac{\partial h}{\partial x}]^n \quad (\text{B.7})$$

On introduit dans cette nouvelle équation, l'équation [B.6](#) donnant  $d_b$  :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -d_b \exp \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{\theta_b} - \frac{1}{\theta} \right) \xi^n \quad (\text{B.8})$$

On simplifie l'argument de l'exponentielle de l'équation [B.8](#) ci-dessus en utilisant l'approximation [B.4](#) qui donne  $\theta$  en fonction de  $\xi$ ,  $T_b$  et  $G_0$  :

$$\frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{\theta_b} - \frac{1}{\theta} \right) = -k G_0 H (1 - \xi) \quad (\text{B.9})$$

où  $k$  s'écrit :

$$k = \frac{E_a}{R \theta_b^2} \quad (\text{B.10})$$

On effectue ensuite un développement limité au premier ordre de la variable  $1 - \xi$  (donc près du socle donne lorsqu'elle est proche de zéro) dans l'argument de l'exponentielle de l'équation [B.8](#) en tenant compte de [B.9](#) :

$$\exp -k G_0 H (1 - \xi) \approx \xi^{k G_0 H} \quad (\text{B.11})$$

Finalement, on réintroduit l'équation ci-dessus dans l'équation de la vitesse de déformation **B.8** :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -d_b \xi^m \quad (\text{B.12})$$

avec l'exposant  $m$  donné par  $m = n - kG_0H$ .

En intégrant de la base jusqu'en  $z$  (en notant que  $v_x(z = b) = 0$ ), on a :

$$v_x(x, z) = \frac{d_b H}{m + 1} (1 - \xi^{m+1}) \quad (\text{B.13})$$

Par ailleurs, on a :

$$\bar{U}_x = \frac{d_b H}{m + 2} \quad (\text{B.14})$$

En combinant **B.13** et **B.14** on arrive à :

$$v_x(x, z) = \frac{m + 2}{m + 1} (1 - \xi^{m+1}) \bar{U}_x \quad (\text{B.15})$$

# Calcul du delta-depth

---

On note qu'en toute rigueur, il faudrait remplacer l'équation (2.6) par l'intégrale :

$$\Delta\Lambda(Z) = \int_{Z-C(Z)}^Z T(z')dz' \quad (\text{C.1})$$

# Densité volumique de probabilité, densité homogène de probabilité

---

## D.1 Invariance d'une solution au sens d'un critère d'optimalité

On rappelle la propriété suivante :

**Propriété 2.** *La solution au sens d'un critère d'optimalité doit être invariante par un changement de variable opéré sur la densité de probabilité qui décrit le problème.*

Cette propriété justifie l'usage des densité volumique de probabilité lorsqu'on travaille sur des espaces où la métrique n'est pas euclidienne. Nous allons illustrer pourquoi.

## D.2 Grandeur $\tilde{X}$ distribuée lognormalement et sa transformée $X = \exp \tilde{X}$

Supposons que l'on observe lors d'une expérience une grandeur (physique) décrite par la variable aléatoire notée  $\tilde{X}$ . Supposons que cette variable appartienne à un espace euclidien et qu'on la décrive dans un système de coordonnées cartésiennes tel que tout résultat d'une expérience soit mesuré par la coordonnée  $\tilde{x}$  :

Supposons que l'on observe deux fois de suite cette variable aléatoire et que notre mesure donne les résultats  $\tilde{x}_1$  puis  $\tilde{x}_2$ . Dans le système de coordonnées choisi, la distance  $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  qui sépare ces deux observations est une distance euclidienne :

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = |\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2| \quad (\text{D.1})$$

Supposons que l'on répète  $N$  fois la mesure de  $X$  dans des conditions d'expérience identiques avec  $N$  très grand afin d'en déduire la densité de probabilité suivie par la variable aléatoire  $\tilde{X}$ . Supposons que cette densité de probabilité soit la gaussienne  $f_{\tilde{X}}$  décrite par les deux paramètres statistiques  $\tilde{X}_b$  et  $B$  :

$$f_{\tilde{X}}(\tilde{X}) = \frac{1}{(2\pi|B|)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\tilde{X} - \tilde{X}_b) B^{-1} (\tilde{X} - \tilde{X}_b)^T \right] \quad (\text{D.2})$$

Supposons que le paramètre statistique qui nous intéresse soit le maximum de vraisemblance  $m_{\tilde{X}}$  vérifié par la variable  $\tilde{X}$ . Le maximum de vraisemblance est - dans un espace euclidien doté d'un système de coordonnées cartésiennes - le mode de la densité de probabilité gaussienne  $f_{\tilde{X}}(\tilde{X})$  et on a donc :

$$m_{\tilde{X}} = \tilde{X}^b \quad (\text{D.3})$$

On peut noter que pour  $f(\tilde{X})$  comme pour toute densité de probabilité gaussienne, on a les propriétés suivantes :

1.  $\tilde{X}_b$  est à la fois le mode, la moyenne et le médiane,
2. par ailleurs la matrice de covariance  $B$  est ici un nombre (on travaille sur un espace à une dimension) qui n'est autre que la variance  $\sigma^2$  et qui est défini par l'espérance mathématique  $E[.]$  :

$$E[(\tilde{X} - \tilde{X}_b)(\tilde{X} - \tilde{X}_b)^T] = \sigma^2 \quad (\text{D.4})$$

Supposons que la grandeur physique qui nous intéresse soit en fait  $X = \exp \tilde{X}$  qui a pour coordonnée dans le repère cartésien précédemment défini  $x = \exp \tilde{x}$ . On note que cette nouvelle variable  $X$  est strictement positive. On a les transformations réciproques entre  $X$  et  $\tilde{X}$  :

$$\begin{aligned} X &= \exp \tilde{X} & \text{avec } X > 0 \\ \tilde{X} &= \ln X & \text{avec } X > 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Supposons que l'on souhaite déduire de notre expérience précédente la loi statistique suivie par la variable aléatoire  $X$ . Ceci se déduit par l'égalité des probabilités élémentaires suivantes, où  $f_X(X)$  est la densité de probabilité suivie par la variable  $X$  :

$$f_{\tilde{X}}(\tilde{X})d\tilde{X} = f_X(X)dX \quad (\text{D.6})$$

soit :

$$f_X(X) = f_{\tilde{X}}(\tilde{X}) \frac{d\tilde{X}}{dX} \quad (\text{D.7})$$

On retrouve le très classique Jacobien de la transformation (très simple sans faire appel à un déterminant puisque nous travaillons dans un espace à une dimension) :

$$J = \frac{d\tilde{X}}{dX} = \frac{1}{\exp \tilde{X}} = \frac{1}{X} \quad (\text{D.8})$$

Ce qui donne pour  $f_X(X)$ , une densité de probabilité lognormale :

$$f_X(X) = \frac{1}{(2\pi|B|)^{\frac{1}{2}} X} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\ln X - \ln X^b) B^{-1} (\ln X - \ln X^b)^T \right] \quad (\text{D.9})$$

Supposons maintenant qu'un nouvel expérimentateur travaille sur cette expérience et décide d'utiliser  $f_X(X)$  pour dériver le maximum de vraisemblance vérifié par la variable  $X$ . S'il applique la définition précédente qui consiste à identifier le maximum de vraisemblance au mode de la densité de probabilité  $f_X(X)$  ce dernier obtient la grandeur  $m_X^{f_X}$  :

$$m_X^{f_X} = \exp(\ln X_b - \sigma^2) \quad (\text{D.10})$$

Ce qui se réécrit :

$$m_X^{f_X} = \exp(\tilde{X}_b - \sigma^2) \quad (\text{D.11})$$

### D.3 Mode d'une distribution lognormale et maximum de vraisemblance

Le résultat précédent (équation [D.11](#)) est **particulièrement gênant !** En effet, le mode  $m_X$  de  $f_X(X)$  n'est pas le transformé du mode  $m_{\tilde{X}}$  par l'équation [\(D.5\)](#) qui transforme  $\tilde{X}$  en  $X$ . Ce qui revient à dire que **le maximum de vraisemblance ne serait pas invariant par le changement de variable [\(D.5\)](#) !** Cette **assertion est fautive** comme nous allons le montrer à l'aide du formalisme exposé/rapporté par Mosegaard et Tarantola (2002).

### D.4 Densité volumique de probabilité

Mosegaard et Tarantola (2002) propose de ne pas appliquer le maximum de vraisemblance (et plus généralement je pense les critères d'optimalité) sur les densités de probabilité  $f$  mais en revanche de l'appliquer sur ce qu'il appelle les *densités volumiques de probabilité* notée  $f_\mu$ . Les densités volumiques de probabilité s'expriment *par unité de volume invariant lors d'un changement de variable..*

En particulier, notons  $dV_\mu(X)$  et  $dV_\mu(\tilde{X})$  les volumes élémentaires décrits respectivement avec les variables  $X$  et  $\tilde{X}$  et invariants dans le changement de variable :

$$dV_\mu(X) = dV_\mu(\tilde{X}) \quad (\text{D.12})$$

Notons par ailleurs  $f_{\mu,X}(X)$  et  $f_{\mu,\tilde{X}}(\tilde{X})$  les *densités volumiques de probabilité* associées respectivement à  $X$  et  $\tilde{X}$ , qui vérifient bien évidemment l'égalité des probabilités élémentaires :

$$f_{\mu,X}dV_{\mu}(X) = f_{\mu,\tilde{X}}dV_{\mu}(\tilde{X}) \quad (\text{D.13})$$

Pour la variable  $\tilde{X}$ , l'élément de volume  $dV_{\mu}(\tilde{X})$  (puisque dans un espace euclidien doté d'un système de coordonnées cartésiennes) est basé sur la mesure euclidienne de la distance donnée par l'équation D.1 et on a très simplement :

$$dV_{\mu}(\tilde{X}) = d\tilde{X} \quad (\text{D.14})$$

On a donc pour la variable  $\tilde{X}$ , l'égalité entre densité de probabilité  $f_{\tilde{X}}$  et *densités volumiques de probabilité*  $f_{\mu,\tilde{X}}$  :

$$f_{\mu,\tilde{X}} = f_{\tilde{X}} \quad (\text{D.15})$$

Ce résultat n'est néanmoins pas valable pour la variable  $X$ . En effet, le volume  $dV_{\mu}(X)$  vérifie :

$$\begin{aligned} dV_{\mu}(X) &= dV_{\mu}(\tilde{X}) \\ &= d\tilde{X} \\ &= \frac{dX}{\exp \tilde{X}} \\ &= \frac{dX}{X} \end{aligned}$$

et la densité volumique de probabilité  $f_{\mu,X}(X)$  est donc (en utilisant les équations (D.13), (D.14), (D.15) et (D.16)) :

$$f_{\mu,X} = X f_X \quad (\text{D.16})$$

On constate que la *densité volumique de probabilité*  $f_{\mu,X}(X)$  n'est pas une distribution lognormale :

$$f_{\mu,X}(X) = \frac{1}{(2\pi|B|)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\ln X - \ln X^b) B^{-1} (\ln X - \ln X^b)^T \right] \quad (\text{D.17})$$

L'application du maximum de vraisemblance sur  $f_{\mu,X}(X)$  est cohérente avec l'application du maximum de vraisemblance sur  $f_{\mu,\tilde{X}}(\tilde{X})$ , le mode des deux densités volumiques de probabilité est :



$$\begin{aligned}
m_{\tilde{X}}^{f_{\mu, \tilde{X}}} &= m_X^{f_{\mu, X}} \\
&= \tilde{X}_b \\
&= \ln X_b
\end{aligned}$$

Ce problème de non-invariance était prévisible puisque les distributions lognormales présentent une moyenne, un mode et une médiane distinctes alors que ça n'est pas le cas des distributions gaussiennes. En particulier moyenne et mode d'une distribution lognormale dépendent du paramètre de dispersion  $\sigma$  (ou de la matrice de covariance  $B$  s'il s'agit d'une distribution multivariée).

**Remarque 4.** Le mode  $m_{\tilde{X}}^{f_{\mu, \tilde{X}}}$  de  $f_{\mu, X}(X)$  est la médiane de la densité de probabilité lognormale  $f_X(X)$ . La médiane étant calculée à partir de l'intégration de probabilité élémentaire, elle est invariante dans le changement de variable défini par l'équation (D.5).

## D.5 Densité homogène de probabilité

Mosegaard et Tarantola (2002) introduisent dans leur formalisme les *densité homogène de probabilité* notée  $\mu_X^h$ . Ils proposent la relation suivante entre densité volumique de probabilité  $f_{\mu, X}(X)$  et densité de probabilité  $f_X(X)$  :

$$f_{\mu, X}(X) = \frac{f_X(X)}{\mu_X^h(X)}$$

Chaque fois que l'on travaille avec une variable qui appartient à un espace dont la métrique n'est pas euclidienne, Mosegaard et Tarantola (2002) propose d'appliquer le maximum de vraisemblance sur les **densités volumiques de probabilité**.

C'est notamment le cas de la variable  $X = \exp X$ . Cette variable étant strictement positive, la métrique euclidienne ne s'applique pas. Les travaux de Jeffrey ont montré que la métrique adaptée est basée sur une distance logarithmique. En particulier, si on a pour  $X$  les deux résultats d'expérience  $x_1$  et  $x_2$ , la distance qui les sépare ces deux observations est définie par :

$$d(x_1, x_2) = \ln \frac{x_2}{x_1} \tag{D.18}$$

La *densité homogène de probabilité* permet pour toute variable aléatoire  $X$  appartenant à un espace  $\mathcal{X}$  sur lequel il existe une métrique, de calculer des probabilités proportionnelles au volume  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$  considéré.

## D.6 Règle d'invariance

On retiendra ceci :

- une densité de probabilité  $f_X$  n'est pas toujours invariante par un changement de variable ;
- une densité volumique de probabilité  $f_{\mu,X}$  est invariante par changement de variable ;
- et bien sûr une mesure de probabilité - par exemple  $P(X, X + dX) = f_X dX$  est invariante par changement de variable.

# Transformation d'une distribution lognormale en distribution gaussienne : les avantages

**Propriété 3.** Soit un vecteur aléatoire  $Z$  de dimension  $n$  décrit par une densité de probabilité  $f_Z$  de type lognormale généralisée :

$$f_Z(Z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |B|^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{Z_i} \exp \frac{1}{2} (\log Z - \log Z^b)^T B^{K-1} (\log Z - \log Z^b) \quad (\text{E.1})$$

Si on définit la variable aléatoire  $\tilde{Z}$  par le changement de variable suivant :

$$\tilde{Z} = \log Z \quad (\text{E.2})$$

alors  $\tilde{Z}$  est décrite par  $f_{\tilde{Z}}$  une densité de probabilité gaussienne généralisée :

$$f_{\tilde{Z}}(\tilde{Z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |B|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\tilde{Z} - \tilde{Z}^b)^T B^{-1} (\tilde{Z} - \tilde{Z}^b) \right] \quad (\text{E.3})$$

avec  $\tilde{Z}^b = \ln Z^b$ . La réciproque est évidemment vraie.

Cette propriété permet de transformer une densité de probabilité lognormale en densité de probabilité gaussienne et d'éviter d'enfreindre la propriété 2 (énoncée dans l'annexe D.1) en appliquant le critère d'optimalité (comme le maximum de vraisemblance) non pas sur la densité volumique de probabilité mais directement sur la densité de probabilité lognormale (voir annexe D). Par ailleurs, il s'avère que décrire le problème inverse avec une variable gaussienne plutôt que lognormal présente certains avantages. En effet, le théorème central limite permet très souvent de s'accommoder de l'hypothèse de gaussianité et par conséquent de nombreuses techniques de calculs ont été développées pour les distributions gaussiennes. On note enfin que la manipulation des densités de probabilité lognormales entraîne des erreurs de raisonnement encore fréquemment commises dans les travaux scientifiques (on peut trouver un exemple de ce type d'erreur dans le papier de Fletcher et Zupansky Fletcher et Zupanski (2006)).

## F.1 Marqueurs d'âge glace et marqueurs d'âge gas

On rappelle que le vecteur d'observation "âge glace" associé au forage  $K$  s'écrit  $Y^{\Psi,K}$ .

### F.1.1 Densité de probabilité

$f_{Y^{\Psi,K}}^{\Psi,K}$  la densité de probabilité de mesurer  $Y^{\Psi,K}$  est indépendante de toutes les autres densités de probabilité d'erreur d'observation compte-tenu des hypothèses 6, 8 et 9. On peut donc écrire :

$$f_{Y^{\Psi,K}}^{\Psi,K} (Y^{\Psi,K}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\Psi,K}}{2}} |R^{\Psi,K}|^{\frac{1}{2}}} \exp -\frac{1}{2} (Y^{\Psi,K} - \hat{Y}^{\Psi,K})^T R^{\Psi,K^{-1}} (Y^{\Psi,K} - \hat{Y}^{\Psi,K}) \quad (\text{F.1})$$

### F.1.2 Opérateur d'observation

$h^{\Psi,K}(\tilde{X}^K)$  le modèle d'observation théorique directe associé au forage  $K$ , permet de prédire le jeu de mesures  $\hat{Y}^{\Psi,K}$ . Sa  $i^{eme}$  composante qui n'est fonction que des perturbations  $\tilde{\alpha}^K$  et  $\tilde{\tau}^K$ , s'écrit :

$$h_i^{\Psi,K} (\tilde{X}^K) = \sum_{j=1}^{m_i^{\Psi,K}-1} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_j^K \exp -\tilde{\tau}_j^K}{A_j^{b,K} T_j^{b,K}} d_j^K dz_j^K + \lambda_i^{\Psi,K} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_{m_i^{\Psi,K}}^K \exp -\tilde{\tau}_{m_i^{\Psi,K}}^K}{A_{m_i^{\Psi,K}}^{b,K} T_{m_i^{\Psi,K}}^{b,K}} D_{m_i^{\Psi,K}}^K dz_{m_i^{\Psi,K}}^K \quad (\text{F.2})$$

où :

- l'indice  $m_i^{\Psi,K}$  cible la profondeur de grille  $z_{m_i^{\Psi,K}}^K$  la plus proche par valeur supérieure de  $\hat{z}_i^{\Psi,K}$  la profondeur se rapportant à la  $i^{eme}$  mesure ;

— le deuxième terme de l'équation est une simple interpolation linéaire de l'âge glace entre les profondeurs de grille  $z_{m_i^{\Psi,K-1}}^K$  et  $z_{m_i^{\Psi,K}}^K$  avec :

$$\lambda_i^{\Psi,K} = \frac{\hat{z}_i^{\Psi,K} - z_{m_i^{\Psi,K-1}}^K}{z_{m_i^{\Psi,K}}^K - z_{m_i^{\Psi,K-1}}^K} \quad (\text{F.3})$$

### F.1.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\Psi,K}$

Son expression générale est la suivante :

$$H_{ij}^{\Psi,KT} = \frac{\partial h_i^{\Psi,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{F.4})$$

Pour permettre de développer des équations plus concises par la suite, on introduit une variable intermédiaire notée  $f_j^K$  qui s'écrit comme suit pour tout  $j \in \{1, \dots, n^K\}$  :

$$f_j^K = \frac{\exp -\tilde{\alpha}_j^K \exp -\tilde{\tau}_j^K}{L_j^{b,K}} d_j^K \quad (\text{F.5})$$

On rappelle par ailleurs que l'indice  $m_i^{\Psi,K}$  et le facteur  $\lambda_i^{\Psi,K}$  qui interviennent dans l'expression de  $h^{\Psi,K}$  ont été définis précédemment dans la section 8.4.6.1 (l'indice sélectionne la profondeur de grille la plus proche par valeur supérieure de la profondeur de mesure  $\hat{z}_i^{\Psi,K}$  alors que le facteur  $\lambda_i^{\Psi,K}$  permet de réaliser une interpolation linéaire).

Ces deux points étant spécifiés, on développe ci-dessous l'expression des composantes  $H_{ij}^{\Psi,KT}$  pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n^{\Psi,K}\}$  mais en distinguant 3 cas selon que l'indice  $j$  appartient à l'intervalle  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$  (intervalles qui déterminent si l'on différencie par rapport aux composantes de  $\tilde{\alpha}^K$ ,  $\tilde{\tau}^K$  ou  $\tilde{\gamma}^K$ ) :

— Lorsque  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\Psi,K} = \frac{\partial h_i^{\Psi,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{cases} -f_j^K dz_j^K & 1 \leq j \leq m_i^{\Psi,K} - 1 \\ -\lambda_i^{\Psi,K} f_{m_i^{\Psi,K}}^K dz_{m_i^{\Psi,K}}^K & j = m_i^{\Psi,K} \\ 0 & m_i^{\Psi,K} < j \leq n^K \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\Psi,K} = \frac{\partial h_i^{\Psi,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{cases} -f_{n^K-j}^K dz_{n^K-j}^K & n^K + 1 \leq j \leq n^K + m_i^{\Psi,K} - 1 \\ -\lambda_i^{\Psi,K} f_{m_i^{\Psi,K}}^K dz_{m_i^{\Psi,K}}^K & j = n^K + m_i^{\Psi,K} \\ 0 & n^K + m_i^{\Psi,K} < j \leq 2n^K \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\Psi,K} &= \frac{\partial h_i^{\Psi,K}}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

## F.2 Marqueurs d'âge gaz

Le vecteur d'observation "âge gaz" associé au forage  $K$  s'écrit  $Y^{\chi,K}$ .

### F.2.1 Densité de probabilité

$f_{Y^{\chi,K}}^{\chi,K}$  la densité de probabilité de mesurer  $Y^{\chi,K}$  est indépendante de toutes les autres distributions d'erreur d'observation du fait des hypothèses 6, 8 et 9. On l'écrit :

$$\begin{aligned} f_Y^{\chi,K} (Y^{\chi,K}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\chi,K}}{2}} |R^{\chi,K}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\exp -\frac{1}{2} (Y^{\chi,K} - \hat{Y}^{\chi,K})^T R^{\chi,K-1} (Y^{\chi,K} - \hat{Y}^{\chi,K}) \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

### F.2.2 Opérateur d'observation

$h_i^{\chi,K}(\tilde{X}^K)$  le modèle d'observation théorique directe associé au forage  $K$  qui permet de prédire le jeu de mesures  $\hat{Y}^{\chi,K}$  a pour  $i^{eme}$  composante :

$$\begin{aligned} h_i^{\chi,K}(\tilde{X}^K) &= \sum_{j=1}^{m_i^{\chi,K}-1} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_j^K \exp -\tilde{\tau}_j^K}{A_j^{b,K} T_j^{b,K}} D_j^K dz_j^K \\ &+ \lambda_i^{\chi,K} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_{m_i^{\chi,K}}^K \exp -\tilde{\tau}_{m_i^{\chi,K}}^K}{A_{m_i^{\chi,K}}^{b,K} T_{m_i^{\chi,K}}^{b,K}} D_{m_i^{\chi,K}}^K dz_{m_i^{\chi,K}}^K \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n^{\chi,K}\}$ , cette dernière équation réalise une interpolation linéaire de l'âge glace entre les profondeurs de grille  $z_{m_i^{\chi,K}-1}^K$  et  $z_{m_i^{\chi,K}}^K$  et nous allons préciser comment et pourquoi :

— Le facteur  $\lambda_i^{X,K}$  qui contribue à cette interpolation linéaire s'écrit :

$$\lambda_i^{X,K} = \frac{\hat{z}_i^{X,K} - z_{m_i^{X,K}-1}^K}{z_{m_i^{X,K}}^K - z_{m_i^{X,K}-1}^K} \quad (\text{F.11})$$

— La profondeur où l'âge glace est égal à  $\hat{Y}_i^{X,K}$  l'âge gaz recherché est notée  $\zeta$  et correspond à la profondeur de mesure retranché du delta-depth :

$$\zeta = \hat{z}_i^{X,K} - \Delta\Lambda^K(\hat{z}_i^{X,K}) \quad (\text{F.12})$$

— l'interpolation linéaire de l'âge glace à cette profondeur  $\zeta$  repose en particulier sur l'identification des points de grille  $z_{m_i^{X,K}-1}^K$  et  $z_{m_i^{X,K}}^K$  qui encadrent  $\zeta$  comme suit :

$$z_{m_i^{X,K}-1}^K \leq \zeta < z_{m_i^{X,K}}^K \quad (\text{F.13})$$

— Sous-jacent, est menée une autre interpolation linéaire afin d'approcher la valeur de  $\Delta\Lambda^K(\hat{z}_i^{X,K})$ .

— On détermine pour ce faire les points de grilles notés  $z_{p_i^{X,K}-1}^K$  et  $z_{p_i^{X,K}}^K$  qui encadrent  $\hat{z}_i^{X,K}$  comme suit :

$$z_{p_i^{X,K}-1}^K \leq \hat{z}_i^{X,K} < z_{p_i^{X,K}}^K \quad (\text{F.14})$$

— La valeur approchée de  $\Delta\Lambda^K(\hat{z}_i^{X,K})$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda^K(\hat{z}_i^{X,K}) &\simeq (1 - \mu_i^{X,K}) \frac{\Delta\Lambda_{p_i^{X,K}-1}^{b,K}}{\exp -\tilde{\tau}_{p_i^{X,K}-1}^K \exp -\tilde{\gamma}_{p_i^{X,K}-1}^K} \\ &+ \mu_i^{X,K} \frac{\Delta\Lambda_{p_i^{X,K}}^{b,K}}{\exp -\tilde{\tau}_{p_i^{X,K}}^K \exp -\tilde{\gamma}_{p_i^{X,K}}^K} \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

où le facteur  $\mu_i^{X,K}$  est fonction des profondeurs précitées :

$$\mu_i^{X,K} = \frac{\hat{z}_i^{X,K} - z_{p_i^{X,K}-1}^K}{z_{p_i^{X,K}}^K - z_{p_i^{X,K}-1}^K} \quad (\text{F.16})$$

L'opérateur d'observation "âge gaz" tout comme l'opérateur d'observation "âge glace" est fonction des perturbations  $\tilde{\alpha}^K$  et  $\tilde{\tau}^K$ . Cependant, il est aussi fonction des perturbations  $\tilde{\gamma}^K$  par l'intermédiaire du vecteur d'indices  $m^{\chi,K}$ . En effet, les indices  $m^{\chi,K}$  dépendent de la valeur de  $\Delta\Lambda^K(\hat{z}_i^{\chi,K})$  qui implique les fonctions  $\tilde{\gamma}^K$  et  $\tilde{\tau}^K$  aux points de grille  $z_{p_i^{\chi,K-1}}^K$  et  $z_{p_i^{\chi,K}}^K$ .

### F.2.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\chi,K}$

Son expression générale est la suivante :

$$H_{ij}^{\chi,K} = \frac{\partial h_i^{\chi,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{F.17})$$

Avant d'aller plus loin, on rappelle tout d'abord l'expression du delta-depth estimé à la profondeur  $z_j^K$  (voir détails section 11.3.3.2) en fonction des corrections :

$$\Delta d_j^K = \frac{\Delta d_j^{K,b}}{\exp -\tilde{\tau}_j^K \exp -\tilde{\gamma}_j^K} \quad (\text{F.18})$$

Pour simplifier l'écriture, on utilise à nouveau la variable  $f_j^K$  donnée par l'équation F.5 et on introduit aussi une seconde variable intermédiaire notée  $g_j^K$  qui en dépend :

$$g_j^K = (1 - \lambda_i^{\chi,K}) f_{j-1}^K + \lambda_i^{\chi,K} f_j^K \quad (\text{F.19})$$

On rappelle que les indices  $p_i^{\chi,K}$  et  $m_i^{\chi,K}$  ainsi que les facteurs  $\mu_i^{\chi,K}$  et  $\lambda_i^{\chi,K}$  ont été définis pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n^{\chi,K}\}$  dans la section F.2. Ceci permet d'exprimer les composantes  $H^{\chi,K T}_{ij}$  selon 3 cas de figure. Ces 3 cas se distinguent comme précédemment par l'intervalle d'entier auquel l'indice  $j$  appartient tout en autorisant toute valeur parmi  $\{1, \dots, n^{\chi,K}\}$  pour l'indice  $i$ .

— Quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\chi,K} = \frac{\partial h_i^{\chi,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \quad (\text{F.20})$$

$$\begin{cases} -f_j^K dz_j^K & 1 \leq j \leq m_i^{\chi,K} - 1 \\ -\lambda_i^{\chi,K} f_j^K dz_j^K & j = m_i^{\chi,K} \\ 0 & m_i^{\chi,K} < j \leq n^K \end{cases}$$



— Quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\chi,K} = \frac{\partial h_i^{\chi,K}}{\partial \bar{\tau}_j^K} \quad (\text{F.21})$$

$$\begin{cases} -f_{j-n^K}^K dz_{j-n^K}^K & n^K + 1 \leq j \leq n^K + m_i^{\chi,K} - 1 \\ -\lambda_i^{\chi,K} f_{j-n^K}^K dz_{j-n^K}^K & j = n^K + m_i^{\chi,K} \\ 0 & n^K + m_i^{\chi,K} < j < n^K + p_i^{\chi,K} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\chi,K}) \Delta d_{j-n^K}^K g_{m_i^{\chi,K}}^K & j = n^K + p_i^{\chi,K} - 1 \\ -\mu_i^{\chi,K} \Delta d_{j-n^K}^K g_{m_i^{\chi,K}}^K & j = n^K + p_i^{\chi,K} \\ 0 & n^K + p_i^{\chi,K} < j \leq 2n^K \end{cases}$$

— Quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\chi,K} = \frac{\partial h_i^{\chi,K}}{\partial \bar{\tau}_j^K} \quad (\text{F.22})$$

$$\begin{cases} 0 & 2n^K + 1 \leq j < 2n^K + p_i^{\chi,K} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\chi,K}) \Delta d_{j-2n^K}^K g_{m_i^{\chi,K}}^K & j = 2n^K + p_i^{\chi,K} - 1 \\ -\mu_i^{\chi,K} \Delta d_{j-2n^K}^K g_{m_i^{\chi,K}}^K & j = 2n^K + p_i^{\chi,K} \\ 0 & 2n^K + p_i^{\chi,K} < j \leq 3n^K \end{cases}$$

### F.3 Marqueurs d'accumulation

On rappelle que le vecteur d'observation se rapportant aux marqueurs d'accumulation s'écrit  $\tilde{Y}^{\alpha,K}$  pour le forage  $K$ .

#### F.3.1 Densité de probabilité

$f_{\tilde{Y}^{\alpha,K}}^{\alpha,K}$  la densité de probabilité de mesurer  $\tilde{Y}^{\alpha,K}$  est indépendante de toutes les autres densités de probabilité d'erreur d'observation, comme stipulé par les hypothèses 6, 8 et 9 et elle s'écrit :

$$f_{\tilde{Y}^{\alpha,K}}^{\alpha,K}(\tilde{Y}^{\alpha,K}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\alpha,K}}{2}} |R^{\alpha,K}|^{\frac{1}{2}}} \exp -\frac{1}{2} \left( \tilde{Y}^{\alpha,K} - \tilde{Y}^{\alpha,K} \right)^T R^{\alpha,K-1} \left( \tilde{Y}^{\alpha,K} - \tilde{Y}^{\alpha,K} \right) \quad (\text{F.23})$$

### F.3.2 Opérateur d'observation

$h^{\alpha,K}(\tilde{X}^K)$  le modèle d'observation théorique directe qui permet de prédire le jeu de mesures  $\tilde{Y}^{\alpha,K}$  associé au forage  $K$ , a pour  $i^{eme}$  composante :

$$h_i^{\alpha,K}(\tilde{\alpha}^K) = (1 - \lambda_i^{\alpha,K}) \tilde{\alpha}_{m_i^{\alpha,K}-1}^K + \lambda_i^{\alpha,K} \tilde{\alpha}_{m_i^{\alpha,K}}^K \quad (\text{F.24})$$

où :

- l'indice  $m_i^{\alpha,K}$  cible la profondeur de grille  $z_{m_i^{\alpha,K}}^K$  la plus proche par valeur supérieure de la profondeur de mesure  $\hat{z}_i^{\alpha,K}$  ;
- les deux termes de l'équation correspondent à l'interpolation linéaire de la correction  $\tilde{\alpha}^K$  entre les profondeurs de grille  $z_{m_i^{\alpha,K}-1}^K$  et  $z_{m_i^{\alpha,K}}^K$  avec :

$$\lambda_i^{\alpha,K} = \frac{\hat{z}_i^{\alpha,K} - z_{m_i^{\alpha,K}-1}^K}{z_{m_i^{\alpha,K}}^K - z_{m_i^{\alpha,K}-1}^K} \quad (\text{F.25})$$

### F.3.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\alpha,K}$

Son expression générale est la suivante :

$$H_{ij}^{\alpha,K} = \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{F.26})$$

On rappelle là encore que l'indice  $m_i^{\alpha,K}$  ainsi que le facteur  $\lambda_i^{\alpha,K}$  ont été tous deux définis dans la section F.3. En distinguant les 3 cas selon que l'indice  $j$  appartient aux intervalles d'entier  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$ , on écrit ci-dessous l'expression des composantes  $H_{ij}^{\alpha,K}$  valable quelque soit l'indice  $i \in \{1, \dots, n^{\alpha,K}\}$  :

- quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\alpha,K} = \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \quad (\text{F.27})$$

$$\begin{cases} 0 & 1 \leq j < m_i^{\alpha,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\alpha,K}) & j = m_i^{\alpha,K} - 1 \\ \lambda_i^{\alpha,K} & j = m_i^{\alpha,K} \\ 0 & m_i^{\alpha,K} < j \leq n^K \end{cases}$$

- quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\alpha,K} &= \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

— quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\alpha,K} &= \frac{\partial h_i^{\alpha,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

## F.4 Marqueurs d'amincissement

Le vecteur d'observation associé au forages  $K$  s'écrit  $\tilde{Y}^{\tau,K}$ .

### F.4.1 Densité de probabilité

Comme stipulé par les hypothèses 6, 8 et 9,  $f_{\tilde{Y}^{\tau,K}}^{\tau,K}$  la densité de probabilité de mesurer  $\tilde{Y}^{\tau,K}$  est indépendante de toutes les autres densités de probabilité d'erreur d'observation et elle s'écrit :

$$\begin{aligned} f_{\tilde{Y}^{\tau,K}}^{\tau,K}(\tilde{Y}^{\tau,K}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\tau,K}}{2}} |R^{\tau,K}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\exp -\frac{1}{2} \left( \tilde{Y}^{\tau,K} - \hat{Y}^{\tau,K} \right)^T R^{\tau,K-1} \left( \tilde{Y}^{\tau,K} - \hat{Y}^{\tau,K} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

### F.4.2 Opérateur d'observation

Le modèle d'observation théorique directe qui permet de prédire le jeu de mesures  $\tilde{Y}^{\tau,K}$  est noté  $h^{\tau,K}(\tilde{X}^K)$ . Sa  $i^{eme}$  composante s'écrit :

$$h_i^{\tau,K}(\tilde{\tau}^K) = (1 - \lambda_i^{\tau,K}) \tilde{\tau}_{m_i^{\tau,K-1}}^K + \lambda_i^{\tau,K} \tilde{\tau}_{m_i^{\tau,K}}^K \quad (\text{F.31})$$

où :

- l'indice  $m_i^{\tau,K}$  cible la profondeur de grille  $z_{m_i^{\tau,K}}^K$  la plus proche par valeur supérieure de la profondeur de mesure  $\hat{z}_i^{\tau,K}$ .
- les deux termes de l'équation correspondent à l'interpolation linéaire entre  $\tilde{\tau}_{m_i^{\tau,K-1}}^K$  et  $\tilde{\tau}_{m_i^{\tau,K}}^K$  afin d'approcher la valeur de  $\tilde{\tau}^K$  à la profondeur  $\hat{z}_i^{\tau,K}$  avec :

$$\lambda_i^{\tau,K} = \frac{\hat{z}_i^{\tau,K} - z_{m_i^{\tau,K-1}}^K}{z_{m_i^{\tau,K}}^K - z_{m_i^{\tau,K-1}}^K} \quad (\text{F.32})$$

### F.4.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\tau,K}$

Son expression générale est :

$$H_{ij}^{\tau,K} = \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{F.33})$$

On rappelle là encore que l'indice  $m_i^{\tau,K}$  et le facteur  $\lambda_i^{\tau,K}$  ont été définis préalablement dans la section F.4. On distingue toujours les 3 cas selon la valeur de l'indice  $j$  afin de donner l'expression des composantes  $H_{ij}^{\tau,K}$  valable quelque soit l'indice  $i \in \{1, \dots, n^{\tau,K}\}$  :

— quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\tau,K} &= \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

— quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\tau,K} &= \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &\begin{cases} 0 & n^K + 1 \leq j < n^K + m_i^{\tau,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\tau,K}) & j = n^K + m_i^{\tau,K} - 1 \\ \lambda_i^{\tau,K} & j = n^K + m_i^{\tau,K} \\ 0 & n^K + m_i^{\tau,K} < j \leq 2n^K \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

— quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\alpha,K} &= \frac{\partial h_i^{\tau,K}}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

## F.5 Marqueurs de delta-depth

Les observations de type marqueurs de delta-depth sont rassemblées dans le vecteur  $\tilde{Y}^{\delta,K}$  pour le forage  $K$ .

### F.5.1 Densité de probabilité

Comme stipulé par les hypothèses 6, 8 et 9,  $f_{\tilde{Y}^{\delta,K}}^{\delta,K}$  la densité de probabilité de mesurer  $\tilde{Y}^{\delta,K}$  est indépendante de toutes les autres densités de probabilité d'erreur d'observation et elle s'écrit :

$$f_{\tilde{Y}^{\delta,K}}^{\delta,K}(\tilde{Y}^{\delta,K}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\delta,K}}{2}} |R^{\delta,K}|^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{F.37})$$

$$\exp -\frac{1}{2} \left( \tilde{Y}^{\delta,K} - \tilde{Y}^{\delta,K} \right)^T R^{\delta,K-1} \left( \tilde{Y}^{\delta,K} - \tilde{Y}^{\delta,K} \right)$$

### F.5.2 Opérateur d'observation

Le modèle d'observation théorique directe qui permet de prédire le jeu de mesures  $\tilde{Y}^{\delta,K}$  est noté  $h^{\delta,K}(\tilde{X}^K)$ . Sa  $i^{eme}$  composante s'écrit :

$$h_i^{\delta,K}(\tilde{\delta}^K) = \left(1 - \lambda_i^{\delta,K}\right) \left(\tilde{\tau}_{m_i^{\delta,K-1}}^K + \tilde{\gamma}_{m_i^{\delta,K-1}}^K\right) + \lambda_i^{\delta,K} \left(\tilde{\tau}_{m_i^{\delta,K}}^K + \tilde{\gamma}_{m_i^{\delta,K}}^K\right) \quad (\text{F.38})$$

où :

- l'indice  $m_i^{\delta,K}$  cible la profondeur de grille  $z_{m_i^{\delta,K}}^K$  la plus proche par valeur supérieure de la profondeur de mesure  $\hat{z}_i^{\delta,K}$ .
- les deux termes de l'équation correspondent à l'interpolation linéaire entre les profondeurs  $z_{m_i^{\delta,K-1}}^K$  et  $z_{m_i^{\delta,K}}^K$  afin d'approcher la valeur de  $\tilde{\delta}^K$  à la profondeur  $\hat{z}_i^{\delta,K}$  avec :

$$\lambda_i^{\delta,K} = \frac{\hat{z}_i^{\delta,K} - z_{m_i^{\delta,K-1}}^K}{z_{m_i^{\delta,K}}^K - z_{m_i^{\delta,K-1}}^K} \quad (\text{F.39})$$

### F.5.3 Opérateur linéaire tangent $H^{\delta,K}$

Son expression générale est :

$$H_{ij}^{\delta,K} = \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{F.40})$$

On rappelle là encore que l'indice  $m_i^{\delta,K}$  et le facteur associé  $\lambda_i^{\delta,K}$  ont été définis dans la section F.5. On distingue toujours les 3 cas selon la valeur de l'indice  $j$  afin de donner l'expression des composantes  $H_{ij}^{\delta,K}$  valable quelque soit l'indice  $i \in \{1, \dots, n^{\delta,K}\}$  :

- quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\delta,K} = \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} = 0 \quad (\text{F.41})$$

— quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\delta,K} = \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \quad (\text{F.42})$$

$$\begin{cases} 0 & n^K + 1 \leq j < n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\delta,K}) & j = n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ \lambda_i^{\delta,K} & j = n^K + m_i^{\delta,K} \\ 0 & n^K + m_i^{\delta,K} < j \leq 2n^K \end{cases}$$

— quand  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$H_{ij}^{\delta,K} = \frac{\partial h_i^{\delta,K}}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} \quad (\text{F.43})$$

$$\begin{cases} 0 & 2n^K + 1 \leq j < 2n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ (1 - \lambda_i^{\delta,K}) & j = 2n^K + m_i^{\delta,K} - 1 \\ \lambda_i^{\delta,K} & j = 2n^K + m_i^{\delta,K} \\ 0 & 2n^K + m_i^{\delta,K} < j \leq 3n^K \end{cases}$$

## F.6 Liens stratigraphiques glace

Les liens stratigraphiques glace consiste en la mesure des  $n^{\Psi,J}$  différences d'âge  $\Delta\hat{Y}^{\Psi,J}$ .

### F.6.1 Densité de probabilité

Avec les hypothèses 6, 8 et 9,  $f_{\Delta Y^{\Psi,J}}^{\Psi,J}$  la densité de probabilité de mesurer  $\Delta Y^{\Psi,J}$  est indépendante de toutes les autres distributions d'erreur d'observation et on écrit donc :

$$f_{\Delta Y^{\Psi,J}}^{\Psi,J}(\Delta Y^{\Psi,J}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\Psi,J}}{2}} |R^{\Psi,J}|^{\frac{1}{2}}} \exp -\frac{1}{2} (\Delta Y^{\Psi,J} - \Delta\hat{Y}^{\Psi,J})^T R^{\Psi,J^{-1}} (\Delta Y^{\Psi,J} - \Delta\hat{Y}^{\Psi,J}) \quad (\text{F.44})$$

### F.6.2 Opérateur d'observation

Le modèle d'observation théorique est noté  $\Delta h^{\Psi,J}(\tilde{X})$  qui est une écriture condensée pour  $\Delta h^{\Psi,K1,K2}(\tilde{X})$ . Il implique de calculer deux âges glace, respectivement attachés au forage  $K1$  et  $K2$ , puis d'en faire la différence. On introduit donc deux opérateurs  $h^{\Psi,J,K1}(\tilde{X}^{K1})$  et  $h^{\Psi,J,K2}(\tilde{X}^{K2})$ , qui mesurent respectivement les âges glace des forages  $K1$  et  $K2$  aux profondeurs rassemblées dans les vecteurs  $\hat{z}^{\Psi,J,K1}$  et  $\hat{z}^{\Psi,J,K2}$ . L'opérateur  $\Delta h^{\Psi,J}(\tilde{X})$  s'écrit alors :

$$\Delta h^{\Psi,J}(\tilde{X}) = h^{\Psi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\Psi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \quad (\text{F.45})$$

L'opérateur  $h^{\Psi,J,K1}(\tilde{X}^{K1})$  associé au forage  $K1$  n'est fonction que des corrections  $\tilde{\alpha}^{K1}$  et  $\tilde{\tau}^{K1}$  et sa  $i^{eme}$  composante s'écrit :

$$\begin{aligned} h_i^{\Psi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) &= \sum_{j=1}^{m_i^{\Psi,J,K1}-1} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_j^{K1} \exp -\tilde{\tau}_j^{K1}}{A_j^{b,K1} T_j^{b,K1}} dz_j^{K1} \\ &+ \lambda_i^{\Psi,J,K1} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} \exp -\tilde{\tau}_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1}}{A_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{b,K1} T_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{b,K1}} dz_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} \end{aligned} \quad (\text{F.46})$$

Au travers du facteur  $\lambda_i^{\Psi,J,K1}$ , cette dernière équation réalise une interpolation linéaire de l'âge glace entre les profondeurs  $z_{m_i^{\Psi,J,K1}-1}^{K1}$  et  $z_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1}$  avec :

- l'indice  $m_i^{\Psi,J,K1}$  ciblant la profondeur de grille  $z_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1}$  la plus proche de la profondeur de mesure  $\hat{z}_i^{\Psi,J,K1}$  par valeur supérieure :

$$z_{m_i^{\Psi,J,K1}-1}^{K1} \leq \hat{z}_i^{\Psi,J,K1} < z_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} \quad (\text{F.47})$$

- le facteur  $\lambda_i^{\Psi,J,K1}$  donné par :

$$\lambda_i^{\Psi,J,K1} = \frac{\hat{z}_i^{\Psi,J,K1} - z_{m_i^{\Psi,J,K1}-1}^{K1}}{z_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} - z_{m_i^{\Psi,J,K1}-1}^{K1}} \quad (\text{F.48})$$

De façon complètement analogue en substituant  $K2$  à  $K1$ , on a l'expression de la  $i^{eme}$  composante de l'opérateur  $h^{\Psi,J,K2}(\tilde{X}^{K2})$  associé au forage  $K2$ . Il n'est fonction que des corrections  $\tilde{\alpha}^{K2}$  et  $\tilde{\tau}^{K2}$ .

### F.6.3 Opérateurs linéaires tangents $H^{\Psi,J,K1}$ et $H^{\Psi,J,K2}$

Les expressions générales de  $H^{\Psi,J,K1}$  et  $H^{\Psi,J,K2}$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} H^{\Psi,J,K1} &= \frac{\partial h^{\Psi,J,K1T}}{\partial \tilde{X}^{K1}} \\ H^{\Psi,J,K2} &= \frac{\partial h^{\Psi,J,K2T}}{\partial \tilde{X}^{K2}} \end{aligned} \quad (\text{F.49})$$

On s'intéresse d'abord à l'opérateur  $H^{\Psi,J,K1T}$ . On rappelle que l'indice  $m_i^{\Psi,J,K1}$  ainsi que le facteur  $\lambda_i^{\Psi,J,K1}$  ont été précédemment définis dans la section F.6. On utilise à nouveau la variable intermédiaire  $f_j^K$  en prenant  $K = K1$  qui a été définie par l'équation F.5.

On donne ci-dessous les expressions des composantes  $H^{\Psi,J,K1}_{ij}$  valables pour tout indice  $i \in \{1, \dots, \dots, n^{\Psi,J}\}$  (indice ciblant un lien stratigraphique glace donné) mais on distingue là encore 3 cas selon que l'indice  $j$  appartienne à l'intervalle d'entier  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$ .

— Lorsque  $j \in \{1, 2, \dots, n^{K1}\}$  :

$$H^{\Psi,J,K1}_{ij} = \frac{\partial h_i^{\Psi,J,K1}}{\partial \bar{\alpha}_j^K} \quad (\text{F.50})$$

$$\begin{cases} -f_j^{K1} dz_j^{K1} & 1 \leq j \leq m_i^{\Psi,J,K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\Psi,K1} f_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} dz_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} & j = m_i^{\Psi,J,K1} \\ 0 & m_i^{\Psi,J,K1} < j \leq n^{K1} \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{n^{K1} + 1, \dots, 2n^{K1}\}$  :

$$H^{\Psi,J,K1}_{ij} = \frac{\partial h_i^{\Psi,J,K1}}{\partial \bar{\tau}_j^{K1}} \quad (\text{F.51})$$

$$\begin{cases} -f_{n^{K1}-j}^{K1} dz_{n^{K1}-j}^{K1} & n^{K1} + 1 \leq j \leq n^{K1} + m_i^{\Psi,J,K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\Psi,K1} f_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} dz_{m_i^{\Psi,J,K1}}^{K1} & j = n^{K1} + m_i^{\Psi,J,K1} \\ 0 & n^{K1} + m_i^{\Psi,J,K1} < j \leq 2n^{K1} \end{cases}$$

— Lorsque  $j \in \{2n^{K1} + 1, \dots, 3n^{K1}\}$  :

$$H^{\Psi,J,K1}_{ij} = \frac{\partial h_i^{\Psi,J,K1}}{\partial \bar{\gamma}_j^{K1}} \quad (\text{F.52})$$

$$= 0$$

L'expression de  $H^{\Psi,J,K2}$  est analytiquement similaire à l'expression de  $H^{\Psi,J,K1}$ . On l'obtient en remplaçant l'indice  $K1$  par l'indice  $K2$  dans les 6 équations qui précèdent.

## F.7 Liens stratigraphique gaz

Les  $n_{\chi,J}$  liens stratigraphiques gaz sont rassemblés dans le vecteur  $\Delta \hat{Y}^{\chi,J}$ .

### F.7.1 Densité de probabilité

Sous les hypothèses 6, 8 et 9,  $\rho_{\Delta Y^{\chi,J}}^{\chi,J}$  la densité de probabilité de mesurer  $\Delta Y^{\chi,J}$  est indépendante de toutes les autres distributions d'erreur d'observation et on peut écrire :



$$\begin{aligned} \rho_{\Delta Y^{\chi,J}}^{\chi,J} (\Delta Y^{\chi,J}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\chi,J}}{2}} |R^{\chi,J}|^{\frac{1}{2}}} \\ \exp \frac{1}{2} (\Delta Y^{\chi,J} - \Delta \hat{Y}^{\chi,J})^T R^{\chi,J^{-1}} (\Delta Y^{\chi,J} - \Delta \hat{Y}^{\chi,J}) \end{aligned} \quad (\text{F.53})$$

## F.7.2 Opérateur d'observation

Le modèle d'observation théorique direct noté  $\Delta h^{\chi,J}(\tilde{X})$  (écriture condensée pour  $\Delta h^{\chi,K1,K2}(\tilde{X})$ ) implique là encore de calculer deux âges (cette fois des âge gaz), puis d'en faire la différence. Ce modèle d'observation se décompose donc là aussi en deux opérateurs  $h^{\chi,J,K1}(\tilde{X}^{K1})$  et  $h^{\chi,J,K2}(\tilde{X}^{K2})$  permettant de prédire l'âge gaz aux profondeurs repertrépertoriéesctivement dans les vecteurs  $\hat{z}^{\chi,J,K1}$  et  $\hat{z}^{\chi,J,K2}$  :

$$\Delta h^{\chi,J}(\tilde{X}) = h^{\chi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) - h^{\chi,J,K2}(\tilde{X}^{K2}) \quad (\text{F.54})$$

On développe dans la suite l'expression de la  $i^{eme}$  composante de l'opérateur  $h^{\chi,J,K1}(\tilde{X}^{K1})$  :

$$\begin{aligned} h_i^{\chi,J,K1}(\tilde{X}^{K1}) &= \sum_{j=1}^{m_i^{\chi,J,K1}-1} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_j^{K1} \exp -\tilde{\tau}_j^{K1}}{A_j^{b,K1} T_j^{b,K1}} d_j^{K1} dz_j^{K1} \\ &+ \lambda_i^{\chi,J,K1} \frac{\exp -\tilde{\alpha}_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1} \exp -\tilde{\tau}_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1}}{A_{m_i^{\chi,J,K1}}^{b,K1} T_{m_i^{\chi,J,K1}}^{b,K1}} d_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1} dz_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1} \end{aligned} \quad (\text{F.55})$$

Cette dernière équation réalise une interpolation linéaire de l'âge *glace* entre les profondeurs de grille  $z_{m_i^{\chi,J,K1}-1}^{K1}$  et  $z_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1}$  au travers du facteur  $\lambda_i^{\chi,J,K1}$  où pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n^{\chi,J}\}$  :

— le facteur  $\lambda_i^{\chi,J,K1}$  s'écrit :

$$\lambda_i^{\chi,J,K1} = \frac{\hat{z}_i^{\chi,J,K1} - z_{m_i^{\chi,J,K1}-1}^K}{z_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1} - z_{m_i^{\chi,J,K1}-1}^{K1}} \quad (\text{F.56})$$

— la profondeur de grille  $z_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1}$  est la plus proche par valeur supérieure de la profondeur  $\zeta$  où l'âge *glace* est égal à l'âge gaz  $\hat{Y}_i^{\chi,J,K1}$  :

$$z_{m_i^{\chi,J,K1}-1}^{K1} \leq \zeta < z_{m_i^{\chi,J,K1}}^{K1} \quad (\text{F.57})$$

- cette profondeur  $\zeta$  se calcule (voir schéma xxx et section xxx) comme la différence entre  $\hat{z}_i^{\chi,J,K1}$  et  $\Delta\Lambda^{K1}(\hat{z}_i^{\chi,J,K1})$  le delta-depth estimé en cette même profondeur de mesure :

$$\zeta = \hat{z}_i^{\chi,J,K1} - \Delta\Lambda^{K1}(\hat{z}_i^{\chi,J,K1}) \quad (\text{F.58})$$

- ce qui nécessite d'approcher la valeur de  $\Delta\Lambda^{K1}(\hat{z}_i^{\chi,J,K1})$ , ce que l'on fait par interpolation linéaire ;
- on introduit pour ce faire les points de grille notés  $z_{p_i^{\chi,J,K1-1}}^{K1}$  et  $z_{p_i^{\chi,J,K1}}^{K1}$  tels que :

$$z_{p_i^{\chi,J,K1-1}}^{K1} \leq \hat{z}_i^{\chi,J,K1} < z_{p_i^{\chi,J,K1}}^{K1} \quad (\text{F.59})$$

- la valeur approchée de  $\Delta\Lambda^{K1}(\hat{z}_i^{\chi,J,K1})$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda^{K1}(\hat{z}_i^{\chi,J,K1}) &\simeq \\ (1 - \mu_i^{\chi,J,K1}) &\frac{\Delta\Lambda_{p_i^{\chi,J,K1-1}}^{b,K1}}{\exp - (\tilde{\tau}_{p_i^{\chi,J,K1-1}}^{K1} + \tilde{\gamma}_{p_i^{\chi,J,K1-1}}^{K1})} \\ + \mu_i^{\chi,J,K1} &\frac{\Delta\Lambda_{p_i^{\chi,J,K1}}^{b,K1}}{\exp - (\tilde{\tau}_{p_i^{\chi,J,K1}}^{K1} + \tilde{\gamma}_{p_i^{\chi,J,K1}}^{K1})} \end{aligned} \quad (\text{F.60})$$

où le facteur  $\mu_i^{\chi,J,K1}$  est fonction des profondeurs pré-ciprécitées

$$\mu_i^{\chi,J,K1} = \frac{\hat{z}_i^{\chi,J,K1} - z_{p_i^{\chi,J,K1-1}}^{K1}}{z_{p_i^{\chi,J,K1}}^{K1} - z_{p_i^{\chi,J,K1-1}}^{K1}} \quad (\text{F.61})$$

Tout comme les opérateurs d'observation associés aux marqueurs d'âge gaz, on constate que  $h^{\chi,J,K1}$  n'est pas uniquement fonction des corrections  $\tilde{\alpha}^{K1}$  et  $\tilde{\tau}^{K1}$  mais aussi fonction des corrections  $\tilde{\gamma}^{K1}$  au travers du vecteur d'indices  $m^{\Psi,J,K1}$ . Par ailleurs, on note que l'expression des composantes de l'opérateur  $h^{\chi,J,K2}(\tilde{X}^{K2})$  associé cette fois au forage  $K2$ , s'exprime de façon totalement symétrique en substituant simplement  $K2$  à  $K1$  dans les équations 8.62, F.56, F.57, F.58, F.59, F.61 et F.61.

### F.7.3 Opérateurs linéaires tangents $H^{\chi,J,K1}$ et $H^{\chi,J,K2}$

Les expressions générales de  $H^{\chi,J,K1}$  et  $H^{\chi,J,K2}$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} H^{\chi,J,K1} &= \frac{\partial h^{\chi,J,K1T}}{\partial \bar{X}^{K1}} \\ H^{\chi,J,K2} &= \frac{\partial h^{\chi,J,K2T}}{\partial \bar{X}^{K2}} \end{aligned} \quad (\text{F.62})$$

On développe tout d'abord l'expression de  $H^{\chi,J,K1T}$ . En prenant  $K = K1$ , on utilise une fois de plus  $f_j^K$  la variable intermédiaire définie par l'équation F.5 et on introduit une troisième variable intermédiaire notée  $g_j^{J,K1}$  :

$$g_j^{J,K1} = (1 - \lambda_i^{\chi,J,K1})f_{j-1}^{K1} + \lambda_i^{\chi,J,K1}f_j \quad (\text{F.63})$$

On rappelle par ailleurs que les indices  $m_i^{\chi,J,K1}$  et  $p_i^{\chi,J,K1}$  ainsi que les facteurs  $\lambda_i^{\chi,J,K1}$  et  $\mu_i^{\chi,J,K1}$  sont définis dans la section F.7.

On donne ci-dessous les expressions des composantes  $H^{\chi,J,K1T}_{ij}$  valables pour tout indice  $i \in \{1, \dots, \dots, n^{\chi,J}\}$  (indice ciblant un lien stratigraphique glace donné) mais on distingue là-encore 3 cas selon que l'indice  $j$  appartienne à l'intervalle d'entier  $[1, n^K]$ ,  $[n^K + 1, 2n^K]$  ou  $[2n^K + 1, 3n^K]$ .

— Quand  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\chi,J,K1} &= \frac{\partial h_i^{\chi,J,K1}}{\partial \bar{\alpha}_j^{K1}} \\ &\begin{cases} -f_j^{K1} dz_j^{K1} & 1 \leq j \leq m_i^{\chi,J,K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\chi,J,K1} f_j^{K1} dz_j^{K1} & j = m_i^{\chi,J,K1} \\ 0 & m_i^{\chi,J,K1} < j \leq n^{K1} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{F.64})$$

— Quand  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\chi,K} &= \frac{\partial h_i^{\chi,J,K1}}{\partial \bar{\tau}_j^{K1}} \\ &\begin{cases} -f_{j-n^{K1}}^{K1} dz_{j-n^{K1}}^{K1} & n^{K1} + 1 \leq j \leq n^{K1} + m_i^{\chi,J,K1} - 1 \\ -\lambda_i^{\chi,J,K1} f_{j-n^{K1}}^{K1} dz_{j-n^{K1}}^{K1} & j = n^{K1} + m_i^{\chi,J,K1} \\ 0 & n^{K1} + m_i^{\chi,J,K1} < j < n^{K1} + p_i^{\chi,J,K1} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\chi,J,K1}) \Delta d_{j-n^{K1}}^{K1} g_{m_i^{\chi,J,K1}}^{J,K1} & j = n^{K1} + p_i^{\chi,J,K1} - 1 \\ -\mu_i^{\chi,J,K1} \Delta d_{j-n^{K1}}^K g_{m_i^{\chi,J,K1}}^{J,K1} & j = n^{K1} + p_i^{\chi,J,K1} \\ 0 & n^{K1} + p_i^{\chi,J,K1} < j \leq 2n^{K1} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{F.65})$$

— Quand  $j \in \{2n^{K1} + 1, \dots, 3n^{K1}\}$  :

$$H_{ij}^{\chi, J, K1} = \frac{\partial h_i^{\chi, J, K1}}{\partial \gamma_j^{K1}} \quad (\text{F.66})$$

$$\begin{cases} 0 & 2n^{K1} + 1 \leq j < 2n^{K1} + p_i^{\chi, J, K1} - 1 \\ -(1 - \mu_i^{\chi, J, K1}) \Delta d_{j-2n^{K1}}^{K1} g_{m_i^{\chi, J, K1}}^{J, K1} & j = 2n^{K1} + p_i^{\chi, J, K1} - 1 \\ -\mu_i^{\chi, J, K1} \Delta d_{j-2n^{K1}}^{K1} g_{m_i^{\chi, J, K1}}^{J, K1} & j = 2n^{K1} + p_i^{\chi, J, K1} \\ 0 & 2n^{K1} + p_i^{\chi, J, K1} < j \leq 3n^{K1} \end{cases}$$

# Opérateurs généralisés : formalisme

## G.1 Opérateur linéaire tangent généralisé $H$ associé aux observations

On note  $H$  l'opérateur linéaire tangent de  $h$  que l'on peut définir en tout point  $\tilde{X}$  de  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Conformément à la description de l'opérateur  $h$  dans la section précédente, on sépare  $H$  en deux composantes  $H^*$  et  $\Delta H^*$  :

$$H = \begin{bmatrix} H^* \\ \Delta H \end{bmatrix}$$

Afin de détailler ces deux composantes, on suppose dorénavant que l'inversion s'applique sur un ensemble d'au moins quatre forages. Dans ce contexte  $H^*$  et  $\Delta H$  de dérivent respectivement des expressions ci-dessous :

$$H^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial \tilde{X}^1} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{\partial h^2}{\partial \tilde{X}^2} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{\partial h^3}{\partial \tilde{X}^3} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h^4}{\partial \tilde{X}^4} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{G.1})$$

$$\Delta H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta h^{1,2}}{\partial \tilde{X}^1} & \frac{\partial \Delta h^{1,2}}{\partial \tilde{X}^2} & 0 & 0 & \vdots \\ \frac{\partial \Delta h^{1,3}}{\partial \tilde{X}^1} & 0 & \frac{\partial \Delta h^{1,3}}{\partial \tilde{X}^3} & 0 & \vdots \\ \frac{\partial \Delta h^{1,4}}{\partial \tilde{X}^1} & 0 & & \frac{\partial \Delta h^{1,4}}{\partial \tilde{X}^4} & \vdots \\ 0 & \frac{\partial \Delta h^{2,3}}{\partial \tilde{X}^2} & \frac{\partial \Delta h^{2,3}}{\partial \tilde{X}^3} & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{\partial \Delta h^{2,4}}{\partial \tilde{X}^2} & 0 & \frac{\partial \Delta h^{2,4}}{\partial \tilde{X}^4} & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Delta h^{3,4}}{\partial \tilde{X}^3} & \frac{\partial \Delta h^{3,4}}{\partial \tilde{X}^4} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{G.2})$$

où :

— l'exposant  $K$  dans les expressions  $\partial h^K$  désigne le forage  $K$  et :

$$\frac{\partial \Delta h^K}{\partial \tilde{X}^K}_{ij} = \frac{\partial \Delta h_i^K}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{G.3})$$

— les exposants  $K1, K2$  dans les expressions  $\partial \Delta h^{K1, K2}$  désigne le couple de forages  $(K1, K2)$ , aussi indicé par l'entier  $J$  et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta h^{K1, K2}}{\partial \tilde{X}^{K1}}_{ij} &= \frac{\partial \Delta h_i^{K1, K2}}{\partial \tilde{X}_j^{K1}} \\ \frac{\partial \Delta h^{K1, K2}}{\partial \tilde{X}^{K2}}_{ij} &= \frac{\partial \Delta h_i^{K1, K2}}{\partial \tilde{X}_j^{K2}} \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

On rappelle que l'on a développé les expressions des opérateurs linéaire tangent associés à  $h^K$  et  $\Delta h^{K1, K2}$  dans la section 11.3.3. A ce stade, l'opérateur linéaire tangent  $H$  qui est est fonction de  $\tilde{X}$  est alors complètement défini. On note  $\widehat{H}$  cet opérateur s'il est estimé à l'optimum  $\tilde{X}^a$ .

## G.2 Matrice de covariance d'erreur d'observation généralisée R

On introduit  $R$  la *matrice de covariance d'erreur d'observation généralisée*. Conformément à la structure du vecteur d'observation  $Y$  et conformément à l'hypothèse d'indépendance statistique 8 des mesures  $Y^*$  et  $\Delta Y$ , la matrice  $R$  se décompose en deux blocs matriciels  $R^*$  et  $\Delta R$  disposés sur sa diagonale :

$$R = \begin{bmatrix} R^* & 0 \\ 0 & \Delta R \end{bmatrix}$$

Compte-tenu des hypothèses 6 et 7, ces deux blocs matriciels ont une structure diagonal-bloc avec les caractéristiques suivantes :

— La matrice  $R^*$  se décompose en  $N$  matrices de covariance d'erreur d'observation  $R^K$  où chaque matrice  $R^K$  répertorie l'auto-covariance des erreurs d'observation associées au vecteur  $Y^K$  :

$$R^* = \begin{bmatrix} R^1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & R^2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & R^3 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & R^4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

— La matrice  $\Delta R$  se décompose en  $C_N^2$  matrices de covariance d'erreur d'observation  $R^{K1,K2}$  où chaque matrice  $R^{K1,K2}$  aussi notées  $R^J$ , répertorie l'auto-covariance des erreurs d'observation associées au vecteur  $\Delta Y^J$  :

$$\Delta R = \begin{bmatrix} R^{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & R^{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & R^{1,4} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & R^{2,3} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^{2,4} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

### G.3 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche généralisée B

Compte-tenu de l'hypothèse d'indépendance statistique 1,  $B$  la *matrice de covariance d'erreur d'ébauche généralisée* a elle aussi une structure diagonal-bloc :

$$B = \begin{bmatrix} B^1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & B^2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & B^3 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B^4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

où chaque matrice  $B^K$  se rapporte au vecteur  $\tilde{X}^K$  comme développé dans la section 8.3.3.

# Opérateurs linéaires tangents associés aux modèles d'âge glace et gaz

---

## H.1 Opérateurs linéaires tangents généralisés

### H.1.1 Modèle d'âge glace

L'équation (8.15) donnée dans la section 11.3.3.2 permet de calculer les  $N$  vecteurs  $\Psi^K$  qui estiment les  $N$  chronologies glace discrètes du problème. On regroupe les  $N$  vecteurs  $\Psi^K$  en un seul dans la variable âge glace généralisée  $\Psi$  :

$$\Psi(\tilde{X}) = \begin{bmatrix} \Psi^1(\tilde{X}^1) \\ \Psi^2(\tilde{X}^2) \\ \vdots \\ \Psi^N(\tilde{X}^N) \end{bmatrix}$$

On introduit ensuite l'opérateur linéaire tangent du modèle d'âge glace noté  $\nabla\Psi$ , opérateur qui servira à construire l'expression des intervalles de confiance sur l'âge glace optimisé :

$$\nabla\Psi^T(\tilde{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Psi^1}{\partial\tilde{X}^1} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{\partial\Psi^2}{\partial\tilde{X}^2} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{\partial\Psi^3}{\partial\tilde{X}^3} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Psi^4}{\partial\tilde{X}^4} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{H.1})$$

où les composantes de chaque sous-opérateur linéaire tangent  $\frac{\partial\Psi^K}{\partial\tilde{X}^K}$  sont définies pour  $i \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, 3n^K\}$  de la façon suivante :

$$\nabla\Psi_{ij}^K = \frac{\partial\Psi_i^K}{\partial\tilde{X}_j^K} \quad (\text{H.2})$$

On explicite ces composantes dans la section H.2 en annexe.

On remarque que si l'opérateur linéaire tangent du modèle d'âge glace est estimé à l'optimum  $\tilde{X}^{K,a}$  on le note alors  $\nabla\Psi^a$ .



### H.1.2 Modèle d'âge gaz

C'est cette fois-ci l'équation 8.17 qui permet d'estimer les chronologies gaz discrète des  $N$  forages impliqués dans l'inversion, chronologies que l'on représente par le vecteur  $\chi^K$  pour  $K \in \{1, \dots, N\}$ . On regroupe les  $N$  vecteurs  $\chi^K$  dans la variable âge gaz généralisée  $\chi$  :

$$\chi(\tilde{X}) = \begin{bmatrix} \chi^1(\tilde{X}^1) \\ \chi^2(\tilde{X}^2) \\ \vdots \\ \chi^N(\tilde{X}^N) \end{bmatrix}$$

On introduit ensuite l'opérateur  $\nabla_\chi$  qui est l'opérateur linéaire tangent du modèle d'âge gaz :

$$\nabla_\chi(\tilde{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi^1}{\partial \tilde{X}^1} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{\partial \chi^2}{\partial \tilde{X}^2} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{\partial \chi^3}{\partial \tilde{X}^3} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \chi^4}{\partial \tilde{X}^4} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{H.3})$$

où les composantes de chaque sous-opérateur linéaire tangent  $\frac{\partial \chi^K}{\partial \tilde{X}^K}$  sont définies pour  $p \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, 3n^K\}$  de la façon suivante :

$$\nabla_\chi^K_{pj} = \frac{\partial \chi_p^K}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{H.4})$$

On explicite ces composantes dans la section H.3 en annexe.

## H.2 Opérateur linéaire tangent associé au modèle d'âge glace

On rappelle que pour le forage  $K$ , le modèle linéaire tangent associé au modèle d'âge glace est  $\nabla\Psi^K$  :

$$\nabla\Psi^K_{ij} = \frac{\partial \Psi_i^K}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{H.5})$$

On introduit la variable intermédiaire  $f_j^K$  qui va nous permettre d'alléger l'écriture dans les équations qui suivent :

$$f_j^K = \frac{\exp -\alpha_j^K \exp -\tau_j^K}{L_j^{b,K}} d_j^K \quad (\text{H.6})$$

En se référant à l'équation 8.15, on développe alors l'expression des composantes  $\nabla \Psi_{ij}^K$  valables pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  mais pour lesquelles on distingue trois cas selon les valeurs prises par  $j$  :

— pour  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_{ij}^K &= \frac{\partial \Psi_i^K}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \\ &= \begin{cases} -\frac{\exp -\alpha_j^K \exp -\tau_j^K}{L_j^{b,K}} d_j^K dz_j^K & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

— pour  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_{ij}^K &= \frac{\partial \Psi_i^K}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &= \begin{cases} -\frac{\exp -\alpha_j^K \exp -\tau_j^K}{L_j^{b,K}} d_j^K dz_j^K & \text{si } j - n^K \leq i \\ 0 & \text{si } j - n^K > i \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

— pour  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_{ij}^K &= \frac{\partial \Psi_i^K}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

On remarque que si l'opérateur linéaire tangent du modèle d'âge glace est estimé à l'optimum  $\tilde{X}^{K,a}$  on le note alors  $\nabla \Psi^a$ .

### H.3 Opérateur linéaire tangent associé au modèle d'âge gaz

On rappelle que pour le forage  $K$ , le modèle linéaire tangent associé au modèle d'âge est  $\nabla \chi(\tilde{X})$  avec les composantes de chaque sous-opérateur linéaire tangent  $\frac{\partial \chi^K}{\partial \tilde{X}^K}$  qui sont définies pour  $i \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, 3n^K\}$  de la façon suivante :

$$\nabla \chi_{pj}^K = \frac{\partial \chi_p^K}{\partial \tilde{X}_j^K} \quad (\text{H.10})$$

On rappelle par ailleurs que  $z_p^K - \Delta D_p^K$  est la profondeur où l'âge glace est égal à l'âge gaz  $\chi_p^K$  et que cette dernière a été encadré dans la section 11.3.3.2, par deux points de grille indicés  $q_p^K - 1$  et  $q_p^K$  :

$$z_{q_p^K - 1}^K \leq z_p^K - \Delta D_p^K < z_{q_p^K}^K \quad (\text{H.11})$$

Il est important de noter que les indices  $q_p^K - 1$  et  $q_p^K$  qui interviennent dans l'équation 8.17 dépendent tous deux des perturbations  $\tilde{\tau}_p^K$  et  $\tilde{\gamma}_p^K$  et ceci du fait que la grandeur  $\Delta D_p^K$  en dépend.

On va développer ci-dessous les composantes des opérateurs  $\frac{\partial \chi_p^K}{\partial \tilde{X}^K}$ . Dans ce développement afin de simplifier les calculs, on omet l'interpolation linéaire mise en jeu 8.17 ce qui revient à considérer l'équation suivante :

$$\chi_p^K = \Psi_{q_p^K}^K \quad (\text{H.12})$$

Avec cette simplification et en utilisant à nouveau la variable intermédiaire définie par l'équation H.6, on a pour  $i \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  mais en distinguant 3 cas selon les valeurs prises par l'indice  $j$  :

— pour  $j \in \{1, 2, \dots, n^K\}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \chi_{pj}^K &= \frac{\partial \chi_p^K}{\partial \tilde{\alpha}_j^K} \\ &= \begin{cases} -f_j^K dz_j^K & \text{si } j \leq q_p^K \\ 0 & \text{si } j > q_p^K \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

— pour  $j \in \{n^K + 1, \dots, 2n^K\}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \chi_{pj}^K &= \frac{\partial \chi_p^K}{\partial \tilde{\tau}_j^K} \\ &= \begin{cases} -f_j^K dz_j^K & \text{si } 1 < j - n^K \leq q_p^K \\ 0 & \text{si } q_p^K < j - n^K < p \\ -\Delta d_{n^K+p}^{b,K} \exp -\alpha_{n^K+p}^K \exp -\tau_{n^K+p}^K f_{n^K+p}^K & \text{si } j = n^K + p \\ 0 & \text{si } j > n^K + p \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

— pour  $j \in \{2n^K + 1, \dots, 3n^K\}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \chi_{pj}^K &= \frac{\partial \chi_p^K}{\partial \tilde{\gamma}_j^K} && \text{(H.15)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < j - 2n^K < p \\ -\Delta d_{n^K+p}^{b,K} \exp -\alpha_{n^K+p}^K \exp -\tau_{n^K+p}^K f_{n^K+p}^K & \text{si } j = 2n^K + p \\ 0 & \text{si } j > 2n^K + p \end{cases} \end{aligned}$$

Bibliography for Lemieux-Dudon, B Ph.D. manuscript

# Références bibliographiques

- Svensson, A. and Andersen, KK. and Bigler, M. and Clausen, HB. and Dahl-Jensen, D. and Davies, SM. and Johnsen, S. J. and Muscheler, R. and Parrenin, F. and Rasmussen, SO. and Röthlisberger, R. and others (2008). A 60 000 year Greenland stratigraphic ice core chronology. *Climate of the Past*, **4**(1), 47–57.
- Alley, R., Shuman, C., Meese, D., Gow, A., Taylor, K., Cuffey, K., Fitzpatrick, J., Grootes, P., Zielinski, G., Ram, M., *et al.* (1997). Visual-stratigraphic dating of the GISP2 ice core : Basis, reproducibility, and application. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH-ALL SERIES-*, **102**, 26–26.
- Alley, R. B. (1987). Firn densification by grain boundary sliding : a first model. *J. Phys.*
- Andersen, K., Svensson, A., Johnsen, S., Rasmussen, S., Bigler, M., Röthlisberger, R., Ruth, U., Siggaard-Andersen, M., Peder Steffensen, J., Dahl-Jensen, D., *et al.* (2006). The Greenland Ice Core Chronology 2005, 15–42ka. Part 1 : constructing the time scale. *Quaternary Science Reviews*, **25**(23-24), 3246–3257.
- Arnaud, L. (1997). *Modélisation de la transformation de la neige en glace à la surface des calottes polaires ; Etude du transport des gaz dans ces milieux poreux*. Ph.D. thesis.
- Arnaud, L., Barnola, J., and Duval, P. (2000). Physical modeling of the densification of snow/firn 20 and ice in the upper part of polar ice sheets. *Physics of Ice Core Records*. T. Hondoh. Sapporo.
- Artz, E. (1982). The influence of an increasing particle coordination on the densification of spherical powders. *Acta Metall.*
- Basile, I., Petit, J., Touron, S., Grousset, F., and Barkov, N. (2001). Volcanic layers in Antarctic(Vostok) ice cores- Source identification and atmospheric implications. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres*, **106**(D23)(31), 915–931.
- Bassinot, F., Labeyrie, L., Vincent, E., Quidelleur, X., Shackleton, N., and Lancelot, Y. (1994). The astronomical theory of climate and the age of the Brunhes-Matuyama magnetic reversal. *Earth and Planetary Science Letters (ISSN 0012-821X)*, **126**(1-3).

- Berger, A. L. (1978). Long-term variations of daily insolation and Quaternary climatic change. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 2362–2367.
- Blunier, T., Spahni, R., Barnola, J.-M., Chappellaz, J., Loulergue, L., and Schwander, J. (2007). Synchronization of ice core records via atmospheric gases. *Climate of the Past*, **3**(2), 325–330.
- Buchardt, S. and Dahl-Jensen, D. (2007). Estimating the basal melt rate at NorthGRIP using a Monte Carlo technique. *Annals of Glaciology*, **45**, 137.
- Caillon, N., Severinghaus, J., Barnola, J., Chappellaz, J., Jouzel, J., and Parrenin, F. (2001). Estimation of temperature change and of gas age - ice age difference, 108 kyr B.P., at Vostok, Antarctica. *Journal of Geophysical Research. D. Atmospheres*, **106**(D23)(31), 893–901.
- Caillon, N., Severinghaus, J., Jouzel, J., Barnola, J., Kang, J., and Lipenkov, V. (2003). Timing of Atmospheric CO<sub>2</sub> and Antarctic Temperature Changes Across Termination III. *Science*, **299**(5613), 1728–1731.
- Capron, E., Landais, A., Lemieux-Dudon, B., Schilt, A., Loulergue, L., Buiron, B., Chappellaz, J., Masson-Delmotte, V., Dahl-Jensen, D., Johnsen, S., Leuenberger, M., and Oerter, H. (2008). Construction of a common timescale between NorthGRIP and EDML ice cores using <sup>18</sup>O of atmospheric oxygen (<sup>18</sup>O<sub>atm</sub>) and CH<sub>4</sub> measurements over MIS 5 (80-123 ka). *Quaternary Science Reviews*.
- Colbeck, S. (1989). Air movement in snow due to wind pumping. *J. Glaciol.*, **35**, 209–213.
- Connolley, W. (1996). The Antarctic temperature inversion. *Int. J. Climatology*, **16**, 1333–1342.
- Craig, H. (1961a). Isotopic variations in meteoric waters. *Science*, **133**, 1702–1703.
- Craig, H. (1961b). Standards for reporting concentrations of deuterium and oxygen-18 in natural water. *Science*, **133**, 1833–1834.
- Cuffey, K. M., Clow, G. D., Alley, R. B., Stuiver, M., Waddington, E. D., and Saltus, R. W. (1995). Large Arctic temperature change at the Winconsin-Holocene glacial transition. *Science*, **270**(5235), 455 – 458.

- Dahl-Jensen, D. (1989). Two dimensional thermomechanical modelling of flow and depth-age profiles at Crête, central Greenland. *Ann. Glaciol.*, **12**.
- Dahl-Jensen, D., Mosegaard, K., Gundestrup, N., Clow, G., Johnsen, S., Hansen, A., and Balling, N. (1998). Past temperatures directly from the Greenland ice sheet. *Science*, **282**(5387), 268.
- Dansgaard, W. (1964). Stable isotopes in precipitation. *Tellus*, **16**, 436–468.
- Dreyfus, G. B., Parrenin, F., Lemieux-Dudon, B., Durand, G., Masson-Delmotte, V., Jouzel, J., Barnola, J.-M., Panno, L., Spahni, R., Tisserand, A., Siegenthaler, U., and Leuenberger, M. (2007). Anomalous flow below 2700 m in the Dome C ice core detected using  $\delta^{18}O$  of atmospheric oxygen measurements. *Climate of the Past*, **3**(2), 341–353.
- Dunbar, N., McIntosh, W., and Esser, R. (2008). Physical setting and tephrochronology of the summit caldera ice record at Mount Moulton, West Antarctica. *Bulletin of the Geological Society of America*, **120**(7-8), 796–812.
- Ekaykin, A., Lipenkov, V., Barkov, N., Petit, J., and Masson-Delmotte, V. (2002). Spatial and temporal variability in isotope composition of recent snow in the vicinity of Vostok station, Antarctica : implications for ice-core record interpretation. *Annals of Glaciology*, **35**(1), 181–186.
- Ekaykin, A., Lipenkov, V., Kuzmina, I., Petit, J., Masson-Delmotte, V., and Johnsen, S. (2004). The changes in isotope composition and accumulation of snow at Vostok station, East Antarctica, over the past 200 years. *Annals of Glaciology*, **39**(1), 569–575.
- EPICA Community Members (2004). Eight glacial cycles from an Antarctic ice core. *Nature*, **429**, 623–628.
- EPICA Community Members (2006). One-to-one coupling of glacial climate variability in Greenland and Antarctica. *Nature*, **444**, 195–198.
- Fairbanks, R., Mortlock, R., Chiu, T., Cao, L., Kaplan, A., Guilderson, T., Fairbanks, T., Bloom, A., Grootes, P., and Nadeau, M. (2005). Radiocarbon calibration curve spanning 0 to 50,000 years BP based on paired  $^{230}Th/^{234}U/^{238}U$  and  $^{14}C$  dates on pristine corals. *Quaternary Science Reviews*, **24**(16-17), 1781–1796.



- Fletcher, S. and Zupanski, M. (2006). A Data Assimilation Method for Lognormally Distributed Observational Errors. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*
- Gilbert, J. and Lemarechal, C. (1993). The modules M1QN3 and N1QN3. *Program documentation, INRIA.*
- Gillet-Chaulet, F., Gagliardini, O., Meyssonier, J., Montagnat, M., and Castelnau, O. (2005). A user-friendly anisotropic flow law for ice-sheet modelling. *J. Glaciol.*, **41**(172), 3 – 14.
- Gillet-Chaulet, F., Gagliardini, O., Meyssonier, J., Zwinger, T., and Ruokolainen, J. (2006). Flow-induced anisotropy in polar ice and related ice-sheet flow modelling. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **134**, 33–43.
- Goosse, H., Masson-Delmotte, V., Renssen, H., Delmotte, M., Fichefet, T., Morgan, V., Van Ommen, T., Khim, B., and Stenni, B. (2004). A late medieval warm period in the Southern Ocean as a delayed response to external forcing. *Geophys. Res. Lett.*, **31**(6).
- Goujon, C., Barnola, J., and Ritz, C. (2003). Modeling the densification of polar firn including heat diffusion : Application to close-off characteristics and gas isotopic fractionation for Antarctica and Greenland sites. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres*, **108**(D24), 4792.
- Gregory, J. and Huybrechts, P. (2006). Ice-sheet contributions to future sea-level change. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **364**(1844), 1709–1731.
- Grinsted, A. and Dahl-Jensen, D. (2002). A Monte Carlo-tuned model of the flow in the NorthGRIP area. *Annals of Glaciology*, **35**(1), 527–530.
- Guillou, H., Singer, B., Laj, C., Kissel, C., Scaillet, S., and Jicha, B. (2004). On the age of the Laschamp geomagnetic excursion. *Earth and Planetary Science Letters*, **227**(3-4), 331–343.
- Hays, J., Imbrie, J., and Moore, T. (1976a).
- Hays, J., Imbrie, J., and Shackleton, N. (1976b). *Science.*

- Heinrich, H. (1988). Origin and consequences of cyclic ice rafting in the northeast Atlantic Ocean during the past 130,000 years. *Quaternary Research*, **29**(2), 142–152.
- Herron, M. M. and Langway, C. C. (1980). Firn densification : an empirical model. *J. Glaciol.*, **25**(95), 373–385.
- Hondoh, T., Shoji, H., Watanabe, O., TSYGANOVA, E., Salamatin, A., and LIPENKOV, V. (2004). Average time scale for Dome Fuji ice core, East Antarctica. *Polar Meteorol Glaciol (Nat Inst Polar Res)*, **18**, 1–18.
- Huber, C., Leuenberger, M., Spahni, R., Flückiger, J., Schwander, J., Stocker, T., Johnsen, S., Landais, A., and Jouzel, J. (2006). Isotope calibrated Greenland temperature record over Marine Isotope Stage 3 and its relation to CH<sub>4</sub>. *Earth and Planetary Science Letters*, **243**(3-4), 504–519.
- Huybrechts, P. (2002). Sea-level changes at the LGM from ice-dynamic reconstructions of the Greenland and Antarctic ice sheets during the glacial cycles. *Quaternary Science Reviews*, **21**(1-3), 203–231.
- Huybrechts, P., Rybak, O., Pattyn, F., Ruth, U., and Steinhage, D. (2007). Ice thinning, upstream advection, and non-climatic biases for the upper 89% of the EDML ice core from a nested model of the Antarctic ice sheet. *Climate of the Past*, **3**(4), 577–589.
- IPCC (2007). Intergovernmental Panel on Climate Change.
- Johnsen, S. J., Dansgaard, W., and White, J. W. (1989). The origin of Arctic precipitation under present and glacial conditions. *Tellus*, **41**(B), 452–469.
- Johnsen, S. J., Dahl-Jensen, D., Dansgaard, W., and Gundestrup, N. S. (1995). Greenland temperatures derived from GRIP bore hole temperature and ice core isotope profiles. *Tellus*, **47b**(5), 624–629.
- Krinner, G., Genthon, C., and Jouzel, J. (1997). GCM analysis of local influences on ice core delta signals. *Geophysical Research Letters*, **24**(22), 2823–2828.
- Krinner, G., Guicherd, B., Ox, K., Genthon, C., and Magand, O. (2008). Influence of oceanic boundary conditions in simulations of Antarctic climate and surface mass balance change during the coming century. *Journal of Climate*, **21**(5), 938–962.

- Kukla, G. and An, Z. (1989). Loess stratigraphy in central China. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, **72**(1-2), 203–225.
- Landais, A., Barnola, J., Kawamura, K., Caillon, N., Delmotte, M., Van Ommen, T., Dreyfus, G., Jouzel, J., Masson-Delmotte, V., Minster, B., *et al.* (2006a). Firn-air  $\delta^{15}\text{N}$  in modern polar sites and glacial–interglacial ice : a model-data mismatch during glacial periods in Antarctica ? *Quaternary Science Reviews*, **25**(1-2), 49–62.
- Landais, A., Masson-Delmotte, V., Jouzel, J., Raynaud, D., Johnsen, S., Huber, C., Leuenberger, M., Schwander, J., and Minster, B. (2006b). The glacial inception as recorded in the NorthGRIP Greenland ice core : timing, structure and associated abrupt temperature changes. *Climate Dynamics*, **26**(2), 273–284.
- Laskar, J., Robutel, P., Joutel, F., Gastineau, M., Correia, A., and Levrard, B. (2004). A long-term numerical solution for the insolation quantities of the Earth. *Astronomy & Astrophysics*, **428**(1), 261–285.
- Lemieux-Dudon, B., Parrenin, F., and Blayo, E. (2009). A probabilistic method to construct an optimal ice chronology for ice cores. In T. Hondoh, editor, *Proceedings of the 2nd International Workshop on Physics of Ice Core Records (PICR-2)*, Sapporo, Japan. Institute of Low Temperature Science, Hokkaido University. In press.
- Lisiecki, L. and Raymo, M. (2005). A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic  $\delta^{18}\text{O}$  records. *Paleoceanography*, **20**, 1–17.
- Lliboutry, L. (1979). A critical review of analytical approximate solutions for steady state velocities and temperature in cold ice sheets. *Z. Gletscherkd. Glacialgeol.*, **15**(2), 135–148.
- Lorius, C. and Merlivat, L. (1977). Distribution of mean surface stable isotopes values in East Antarctica : observed changes with depth. Isotopes and Impurities in Snow and Ice. *IAHS Publ*, **118**, 127–137.
- Louergue, L., Parrenin, F., Blunier, T., Barnola, J.-M., Spahni, R., Schilt, A., Raisbeck, G., and Chappellaz, J. (2007). New constraints on the gas age-ice age difference along the epica ice cores, 050 kyr. *Climate of the Past*, **3**(3), 527–540.
- Louergue, L., Schilt, A., Spahni, R., Masson-Delmotte, V., Blunier, T., Lemieux, B., Barnola,

- J., Raynaud, D., Stocker, T., and Chappellaz, J. (2008). Orbital and millennial-scale features of atmospheric CH<sub>4</sub> over the past 800,000 years. *Nature*, **453**(7193), 383–386.
- Magand, O., Genthon, C., Fily, M., Krinner, G., Picard, G., Frezzotti, M., and Ekaykin, A. (2007). An up-to-date qualitycontrolled surface mass balance data set for the 90–180 E Antarctica sector and 1950–2005 period. *J. Geophys. Res.*, **112**.
- Martinerie, P., Lipenkov, V., Raynaud, D., Chappellaz, J., Barkov, N., and Lorius, C. (1999). Air content paleo record in the Vostok ice core (Antarctica) : A mixed record of climatic and glaciological parameters. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, **99**(D5).
- Martinson, D., Pisias, N., Hays, J., Imbrie, J., Moore, T., and Shackleton, N. (1987). Age dating and the orbital theory of the ice ages : development of a high-resolution 0 to 300,000-year chronostratigraphy. *Quaternary Research*, **27**(1), 29.
- Masson-Delmotte, V., Hou, S., Ekaykin, A., Jouzel, J., Aristarain, A., Bernardo, R., Bromwich, D., Cattani, O., Delmotte, M., Falourd, S., *et al.* (2008). A Review of Antarctic Surface Snow Isotopic Composition : Observations, Atmospheric Circulation, and Isotopic Modeling. *Journal of Climate*, **21**(13), 3359–3387.
- Mosegaard, K. and Tarantola, A. (2002). Probabilistic approach to inverse problems.
- Narcisi, B., Petit, J., Delmonte, B., Basile-Doelsch, I., and Maggi, V. (2005). Characteristics and sources of tephra layers in the EPICA-Dome C ice record (East Antarctica) : Implications for past atmospheric circulation and ice core stratigraphic correlations . *Earth and Planetary Science Letters*, **239**(3-4), 253–265.
- North Greenland Ice Core Project members (2004). High-resolution record of northern hemisphere climate extending into the last interglacial period. *Nature*, **431**, 147–151.
- Parrenin, F., Jouzel, J., Waelbroeck, C., Ritz, C., and Barnola, J. (2001). Dating the Vostok ice core by an inverse method. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres*, **106**(D23)(31), 837–851.
- Parrenin, F., Remy, F., Ritz, C., Siegert, M., and Jouzel, J. (2004). New modeling of the Vostok ice flow line and implication for the glaciological chronology of the Vostok ice core. *Journal of Geophysical Research*, **109**(D20102).

- Parrenin, F., Dreyfus, G., Durand, G., Fujita, S., Gagliardini, O., Gillet, F., Jouzel, J., Kawamura, K., Lhomme, N., Masson-Delmotte, V., Ritz, C., Schwander, J., Shoji, H., Uemura, R., Watanabe, O., and Yoshida, N. (2007a). 1-D-ice flow modelling at EPICA Dome C and Dome Fuji, East Antarctica. *Climate of the Past*, **3**(2), 243–259.
- Parrenin, F., Barnola, J.-M., Beer, J., Blunier, T., Castellano, E., Chappellaz, J., Dreyfus, G., Fischer, H., Fujita, S., Jouzel, J., Kawamura, K., Lemieux-Dudon, B., Loulergue, L., Masson-Delmotte, V., Narcisi, B., Petit, J.-R., Raisbeck, G., Raynaud, D., Ruth, U., Schwander, J., Severi, M., Spahni, R., Steffensen, J. P., Svensson, A., Udisti, R., Waelbroeck, C., and Wolff, E. (2007b). The EDC3 chronology for the EPICA Dome C ice core. *Climate of the Past*, **3**(3), 485–497.
- Pattyn, F. (2003). A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model : Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. *Journal of Geophysical Research*, **108**(B8)(2382), 10–1029.
- Petit, J., Jouzel, J., Raynaud, D., Barkov, N., Barnola, J., Basile, I., Bender, M., Chappellaz, J., Davis, M., Delaygue, G., *et al.* (1999). Climate and atmospheric history of the past 420, 000 years from the Vostok ice core, Antarctica. *Nature*, **399**(6735), 429–436.
- Pettit, E. and Waddington, E. (2003). Ice flow at low deviatoric stress. *Journal of Glaciology*, **49**(166), 359–369.
- Raisbeck, G. M., Yiou, F., Bard, E., Dollfus, D., Jouzel, J., and Petit, J. R. (1998). Absolute dating of the last 7000 years of the Vostok ice core using  $^{10}\text{Be}$ . *Mineral. Mag.*, **62A**, 1228.
- Raisbeck, G. M., Yiou, F., Jouzel, J., and Stocker, T. F. (2007). Direct north-south synchronization of abrupt climate change record in ice cores using beryllium 10. *Climate of the Past*, **3**(3), 541–547.
- Rasmussen, S., Andersen, K., Svensson, A., Steffensen, J., Vinther, B., Clausen, H., Siggaard-Andersen, M., Johnsen, S., Larsen, L., Dahl-Jensen, D., *et al.* (2006). A new Greenland ice core chronology for the last glacial termination. *J. Geophys. Res.*, **111**.
- Raymond, C. F. (1983). Deformation in the vicinity of ice divides. *J. Glaciol.*, **29**(103), 357–373.

- Raynaud, D., Lipenkov, V., Lemieux-Dudon, B., Duval, P., Loutre, M., and Lhomme, N. (2007). The local insolation signature of air content in Antarctic ice. A new step toward an absolute dating of ice records. *Earth and Planetary Science Letters*, **261**(3-4), 337–349.
- Reimer, P., Baillie, M., Bard, E., Bayliss, A., Beck, J., Bertrand, C., Blackwell, P., Buck, C., Burr, G., Cutler, K., *et al.* (2004). IntCal04 terrestrial radiocarbon age calibration, 0-26 Cal Kyr BP. *Radiocarbon*, **46**(3), 1029–1058.
- Ritz, C. (1980). *Exploitation du profil de température mesuré dans la calotte glaciaire au Dôme C (Antarctide Orientale)*. Ph.D. thesis, Université Scientifique et médicale de Grenoble.
- Ritz, C. (1992). *Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire antarctique Vostok-glacier Byrd : sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus*. Thèse d'état, Univ. J. Fourier.
- Ritz, C., Rommelaere, V., and Dumas, C. (2001). Modeling the evolution of Antarctic ice sheet over the last 420, 000 years- Implications for altitude changes in the Vostok region. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres*, **106**(D23)(31), 943–964.
- Robin, G. d. Q. (1977). Ice cores and climatic changes. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie B*, **280**, 143–168.
- Rommelaere, V. (1997). *Trois problèmes inverses en glaciologie*. Ph.D. thesis.
- Rommelaere, V., Arnaud, L., and Barnola, J. (1997). Reconstructing recent atmospheric trace gas concentrations from polar firn and bubbly ice data by inverse methods. *Journal of Geophysical Research. Atmospheres*, **102**(D25)(30), 069–083.
- Rotschky, G., Eisen, O., Wilhelms, F., Nixdorf, U., and Oerter, H. (2004). Spatial distribution of surface mass balance on Amundsenisen plateau, Antarctica, derived from ice-penetrating radar studies. *Annals of Glaciology*, **39**, 265.
- Ruth, U., Barnola, J.-M., Beer, J., Bigler, M., Blunier, T., Castellano, E., Fischer, H., Fundel, F., Huybrechts, P., Kaufmann, P., Kipfstuhl, S., Lambrecht, A., Morganti, A., Oerter, H., Parrenin, F., Rybak, O., Severi, M., Udisti, R., Wilhelms, F., and Wolff, E. (2007). "edml1" : a chronology for the epica deep ice core from dronning maud land, antarctica, over the last 150 000 years. *Climate of the Past*, **3**(3), 475–484.

- Salamatin, A., Tsyganova, E., Lipenkov, V., and Petit, J. (2004). Vostok (Antarctica) ice-core time-scale from datings of different origins. *Annals of Glaciology*, **39**(1), 283–292.
- Salamatin, A., Lipenkov, V., Barnola, J., Hori, J., Duval, P., and Hondoh, T. (2007). Basic approaches to dry snow-firn densification modelling, *Materialy Glyatsiologicheskikh Issledovaniy*, 101.
- Salamatin, A. N., Lipenkov, V. Y., Barkov, N. I., Jouzel, J., Petit, J. R., and Raynaud, D. (1998). Ice core age dating and paleothermometer calibration on the basis of isotopes and temperature profiles from deep boreholes at Vostok station (East Antarctica). *Journal of Geophysical Research*, **103**(D8), 8963–8977.
- Severi, M., Becagli, S., Castellano, E., Morganti, A., Traversi, R., Udisti, R., Ruth, U., Fischer, H., Huybrechts, P., Wolff, E., Parrenin, F., Kaufmann, P., Lambert, F., and Steffensen, J. P. (2007). Synchronisation of the edml and edc ice cores for the last 52 kyr by volcanic signature matching. *Climate of the Past*, **3**(3), 367–374.
- Severinghaus, J., Sowers, T., Brook, E., Alley, R., and Bender, M. (1998). Timing of abrupt climate change at the end of the younger dryas interval from thermally fractionated gases in polar ice. *Nature*, **391**, 141 – 146.
- Shackleton, N. (2000). The 100,000-Year Ice-Age Cycle Identified and Found to Lag Temperature, Carbon Dioxide, and Orbital Eccentricity. *Science*, **289**(5486), 1897–1902.
- Shackleton, N., Fairbanks, R., Chiu, T., and Parrenin, F. (2004). Absolute calibration of the Greenland time scale : implications for Antarctic time scales and for  $\Delta^{14}\text{C}$ . *Quaternary Science Reviews*, **23**(14-15), 1513–1522.
- Siegenthaler, U., Stocker, T., Monnin, E., Luthi, D., Schwander, J., Stauffer, B., Raynaud, D., Barnola, J., Fischer, H., Masson-Delmotte, V., *et al.* (2005). Stable Carbon Cycle-Climate Relationship During the Late Pleistocene.
- Snieder, R. and Trampert, J. (1999). INVERSE PROBLEMS IN GEOPHYSICS. *Wavefield Inversion*.
- Southon, J. (2004). A Radiocarbon Perspective on Greenland ice-core Chronologies : can we use ice cores for  $^{14}\text{C}$  Calibration ?

- Sowers, T. A., Bender, M., Raynaud, D., and Korotkevich, Y. L. (1992). The  $\delta^{15}\text{N}$  of  $\text{O}_2$  in air trapped in polar ice : a tracer of gas transport in the firn and a possible constraint on ice age-gas age differences. *J. Geophys. Res.*, **97**(15), 15683–15697. papier.
- Stocker, T. (1998). Climate change : the seesaw effect. *Science*, **282**(5386), 61.
- Svensson, A., Andersen, K., Bigler, M., Clausen, H., Dahl-Jensen, D., Davies, S., Johnsen, S., Muscheler, R., Rasmussen, S., Röthlisberger, R., *et al.* (2006). The Greenland Ice Core Chronology 2005, 15–42ka. Part 2 : comparison to other records. *Quaternary Science Reviews*, **25**(23-24), 3258–3267.
- Tarantola, A. (2005). Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation (Philadelphia, PA : SIAM).
- Traufetter, F., Oerter, H., Fischer, H., Weller, R., and Miller, H. (2004). Spatio-temporal variability in volcanic sulphate deposition over the past 2 kyr in snow pits and firn cores from Amundsenisen, Antarctica. *Journal of Glaciology*, **50**(168), 137–146.
- Udisti, R., Becagli, S., Castellano, E., Delmonte, B., Jouzel, J., Petit, J., Schwander, J., Stenni, B., and Wolff, E. (2004). Stratigraphic correlations between the European Project for Ice Coring in Antarctica (EPICA) Dome C and Vostok ice cores showing the relative variations of snow accumulation over the past 45 kyr. *Journal Geophysical Research. Atmospheres*, **109**(D08)(101).
- Vimeux, F., Masson, V., Delaygue, G., Jouzel, J., Stievenard, M., and Petit, J. (2001). A 420000 year long deuterium-excess record measured along the Vostok core : information on past changes in Vostok precipitation origin. *Journal of Geophysical Research*, **106**, 31863–31873.
- Vimeux, F., Cuffey, K., and Jouzel, J. (2002). New insights into Southern Hemisphere temperature changes from Vostok ice cores using deuterium excess correction. *Earth and Planetary Science Letters*, **203**(3-4), 829–843.
- Vinther, BM and Clausen, HB and Johnsen, SJ and Rasmussen, SO and Andersen, KK and Buchardt, SL and Dahl-Jensen, D. and Seierstad, IK and Siggaard-Andersen, ML and Steffensen, JP and others (2006). A synchronized dating of three Greenland ice cores throughout the Holocene. *Journal of Geophysical Research*, **111**(D13).



- Wang, Y., Cheng, H., Edwards, R., An, Z., Wu, J., Shen, C., and Dorale, J. (2001). A High-Resolution Absolute-Dated Late Pleistocene Monsoon Record from Hulu Cave, China. *Science*, **294**(5550), 2345.
- Watanabe, O., Shoji, H., Satow, K., Motoyama, H., Fujii, Y., Narita, H., and Aoki, S. (2003). Dating of the Dome Fuji, Antarctica deep ice core. *Mem Natl Inst Polar Res Spec Issue*, **57**, 25–37.
- Yiou, F., Raisbeck, G., Bourles, D., Lorius, C., and Barkov, N. (1985).  $^{10}\text{Be}$  in ice at Vostok Antarctica during the last climatic cycle. *Nature*, **316**(6029), 616–617.
- Yiou, F., Raisbeck, G., Baumgartner, S., Beer, J., Hammer, C., Johnsen, S., Jouzel, J., Kubik, P., Lestringuez, J., Stievenard, M., *et al.* (1997). Beryllium 10 in the Greenland Ice Core Project ice core at Summit, Greenland. *Journal of Geophysical Research*, **102**(C12)(26), 26783–26794.

# Liste des figures

1.1	Variations principales des paramètres orbitaux de la Terre : excentricité (100ka et 400ka), obliquité (41ka) et précession (19 et 23ka). . . . .	20
1.2	L'Antarctique ; de gauche à droite : (A) les principaux secteurs géographiques, (B) les principaux forages et les principales lignes de partage (crêtes). Extrait de Masson-Delmotte <i>et al.</i> (2008). . . . .	20
1.3	Les forages du Groenland. Extrait de North Greenland Ice Core Project members (2004). . . . .	21
1.4	Forage de Vostok : enregistrements du climat et des gaz à effet de serre et comparaison de la datation GT4 avec avec l'insolation. De haut en bas sont tracés en fonction du temps (positif avant 1950) avec l'échelle d'âge GT4 : (A) CO <sub>2</sub> atmosphérique, (B) reconconstruction de la température en moyenne annuelle du site de Vostok, (C) CH <sub>4</sub> atmosphérique, (D) teneur isotopique en $\delta^{18}O_{atm}$ du di-oxygène atmosphérique piégé dans la glace, (D) Série temporelle de l'insolation journalière à 65°Nord pour la mi-juin. Le $\delta^{18}O_{atm}$ contient une fréquence temporelle proche de la précession, le décalage des maxima $\delta^{18}O_{atm}$ -insolation suggère que la chronologie glace GT4 peut être raffinée. Extrait de Petit <i>et al.</i> (1999). . . . .	22
1.5	Piégeage du gaz en profondeur conduisant à un gaz plus jeune que la glace. (A) à gauche la colonne de neige-névé qui se densifie et piège le gaz dans la zone de fermeture des pores ; (B) à droite le profil de densité de la glace et la fraction de porosité fermée en fonction de la profondeur (axe Y de gauche) ou du temps (axe de droite) ; cet exemple est tiré de mesures et modélisation faites à Vostok (Jean-Marc Barnola, communication personnelle). . . . .	23
1.6	Schématisme simpliste de la différence entre modèle direct et modèle inverse. Le modèle direct est utilisé pour prédire des observations. Les paramètres d'un modèle inverse sont contraints par des observations afin d'optimiser les prédictions de ce modèle. . . . .	26

1.7	Comparaison des profils climatiques de Vostok et Dome C (EDC) mettant en exergue les limites des modèles glaciologiques de datation. Variations du deutérium de la glace indicateur des paléo-températures à Vostok (axe Y de gauche) et Dome C (axe Y de droite) en fonction des échelles d'âge modélisées et optimisées (Parrenin <i>et al.</i> , 2004, 2007a) par méthode de Monte Carlo : entre 240 et 420ka les variations de températures n'apparaissent pas synchrones et les écarts peuvent atteindre plus d'une dizaine de kilo-années. . . . .	28
1.8	Echelle d'âge glace EDC3model (Parrenin <i>et al.</i> , 2007a) optimisée par méthode inverse et les marqueurs d'âge avec leur barre d'erreur pour contraindre les paramètres du modèle d'écoulement. Les triangles bleus (sommet tourné vers le bas) sont les marqueurs de $^{18}O_{atm}$ qui n'ont pu être respectés avec le modèle d'écoulement et la méthode d'optimisation utilisée. (A) En haut, EDC3model sur toute la profondeur du forage EDC; (B) En bas, EDC3model avec un zoom sur l'intervalle de profondeur 2700-3200m. . . . .	29
1.9	Comparaison des enregistrements de méthane au Groenland et en Antarctique. $CH_4$ à EDC (bleu clair), à EDM (bleu foncé) et à NGRIP (orange). Les déphasages temporels entre ces enregistrements pendant la dernière déglaciation soulignent les incohérences des modèles de datation. . . . .	31
2.1	Relation entre l'âge glace $\Psi(Z)$ , l'âge gaz $\chi(Z)$ , le delta-age $\Delta\chi(Z)$ et le delta-depth $\Delta\Lambda(Z)$ . . . . .	37
4.1	En Antarctique, compilation de données de $\delta D$ et de taux d'accumulation (cm d'équivalent eau an-1); extrait de Masson-Delmotte <i>et al.</i> (2008). . . . .	51
4.2	Contraintes s'exerçant sur les faces d'un cube élémentaire. . . . .	56
4.3	La ligne de courant principale repérée par l'abscisse curviligne $x$ et les deux lignes adjacentes $x + \delta x$ et $x - \delta x$ séparées par une largeur $Y(x)$ ; l'échelle horizontale du schéma devrait être dilatée pour que la portion de calotte circonscrite par les deux "plan" de courant soit en accord avec les hypothèses sur la pente. . . . .	71
4.4	Colonne de névé et les trois zones définies par Sowers <i>et al.</i> (1992). . . . .	78
4.5	Colonne de névé et les trois zones définies par Sowers <i>et al.</i> (1992). . . . .	79

5.1	Comparaison des âges GICC05 d'horizons volcaniques et géomagnétiques (identifiés le long de la carotte de NGRIP) avec les âges de ces mêmes événements datés indépendamment par méthode radiométrique $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ (horizons Laschamp et NAAZ II) ou $^{14}\text{C}$ (les autres horizons). Les âges $^{14}\text{C}$ sont issus de la calibration IntCal04 (Reimer <i>et al.</i> , 2004) and Fairbanks0107 (Fairbanks <i>et al.</i> , 2005). Les barres d'erreur sont $1\sigma$ . Si la datation GICC05 est en accord avec les âges $^{14}\text{C}$ calibrés alors les horizons doivent être sur la courbe de calibration. Si la datation GICC05 est en accord avec les âges radiométriques $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ alors les horizons doivent être sur la droite de pente 1. Extrait de Svensson, A. and Andersen, K.K. and Bigler, M. and Clausen, H.B. and Dahl-Jensen, D. and Davies, S.M. and Johnsen, S. J. and Muscheler, R. and Parrenin, F. and Rasmussen, S.O. and Röthlisberger, R. and others (2008). . . . .	89
5.2	Profils de sulfate obtenus à EDC et EDML pour la transition LGM-Holocène avec le profil isotopique de EDML. On note qu'il y peu d'éruptions volcaniques détectées pendant la transition climatique. Trois éruptions majeures (marquées d'un astérix) sont présentes en début de transition et permettent de réaliser un calage. Extrait de Severi <i>et al.</i> (2007). . . . .	93
5.3	Carotte de GISP2 au Groenland : détermination du delta-age pour la transition climatiques du Younger-Dryas vers le Pré-Boreal. Isotope de la glace $\delta^{18}\text{O}_{ice}$ , isotope du gaz $\delta^{15}\text{N}$ . Extrait de Severinghaus <i>et al.</i> (1998). . . . .	98
7.1	Modèle théorique direct avec l'opérateur d'observation $h(X)$ qui permet de prédire l'observation $Y$ ; $\eta$ est l'incertitude due à la fois à l'erreur modèle et à l'erreur d'observation. L'approche inverse consiste à estimer les paramètres modèle $X$ compte tenu de l'information expérimentale $Y$ . Ceci permet de calibrer un modèle et de mieux prédire d'autres grandeurs : par exemple $\Psi$ et $\chi$ . . . . .	111
8.1	Discrétisation des profondeurs pour le forage $K$ avec les deux types de grandeurs du problèmes : (a) celles associées à la couche de glace $dz_i^K : A_i^K, T_i^K$ et $L_i^K$ ; (b) celles associées à la profondeurs $z_i^K : \Psi_i^K, \chi_i^K, C_i^K$ et $\Delta\Lambda_i^K$ . . . .	123
8.2	Egalité entre l'âge du gaz $\chi_p^K$ attaché à la profondeur $z_p^K$ et l'âge de la glace attaché à la profondeur $z_p^K - \Delta\Lambda_p^K$ . . . . .	124

14.1	Age glace analysé et incertitude associée pour les expériences Ib ( $L_\beta^b = 0\text{m}$ ), Id ( $L_\beta^b = 50\text{m}$ ) et Ie ( $L_\beta^b = 100\text{m}$ ) avec le jeu I de marqueurs d'âge glace. . . . .	199
14.2	Age glace analysé et incertitude associée pour les expériences IIb ( $L_\beta^b = 0\text{m}$ ), IIId ( $L_\beta^b = 50\text{m}$ ), IIe ( $L_\beta^b = 100\text{m}$ ) et IIIf ( $L_\beta^b = 600\text{m}$ ) avec le jeu II de marqueurs d'âge glace. . . . .	199
14.3	Age glace analysé et incertitude associée pour les expériences Ia (terme $J^r$ "lissant" non probabiliste), Ib ( $L_\beta^b = 0\text{m}$ ), Ic ( $L_\beta^b = 15\text{m}$ ) et Ie ( $L_\beta^b = 100\text{m}$ ) en fonction de l'intervalle de profondeur 800-1500m. . . . .	200
14.4	Correction $\beta^a$ sur l'amincissement après analyse sur l'intervalle 0-2000m (qui ne comprend pas de marqueurs d'amincissement) pour les expérience IIIa (terme $J^r$ "lissant" non probabiliste), IIIb ( $L_\beta^b = 0\text{m}$ ), IIIc ( $L_\beta^b = 30\text{m}$ ) et IIId ( $L_\beta^b = 50\text{m}$ ). . . . .	200
14.5	Expérience IIIa avec terme de régularisation "lissant" $J_r$ et $L_\beta^b = 0\text{m}$ : la correction sur l'amincissement est la ligne épaisse bleu foncé (ses intervalles de confiance sont en bleu plus clair et ne tiennent pas compte du terme non probabiliste $J_r$ ) ; les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge. . . . .	201
14.6	Expérience IIIb avec $L_\beta^b = 0\text{m}$ : sensibilité à l'erreur d'ébauche de la correction sur l'amincissement après analyse (ligne épaisse bleu foncé) et de ses intervalles de confiance (lignes bleu plus clair). Les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge. . . . .	201
14.7	Expérience IIIc avec $L_\beta^b = 30\text{m}$ : sensibilité à l'erreur d'ébauche de la correction sur l'amincissement après analyse (ligne épaisse bleu foncé) et de ses intervalles de confiance (lignes bleu plus clair). Les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge. . . . .	202
14.8	Expérience IIIe avec $L_\beta^b = 100\text{m}$ : sensibilité à l'erreur d'ébauche de la correction sur l'amincissement après analyse (ligne épaisse bleu foncé) et de ses intervalles de confiance (lignes bleu plus clair). Les marqueurs d'amincissement avec leur barre d'erreur sont en rouge. . . . .	202
16.1	Enregistrements des isotopes de la glace des forages EDML, EDC et NGRIP : (i) les scénarios d'ébauche que nous avons utilisés EDC3model (Parrenin <i>et al.</i> , 2007a) pour EDC et l'âge glace de Huybrechts <i>et al.</i> (2007) pour EDML ; (ii) la chronologie stratigraphique GICC05 pour NGRIP. . . . .	249

---

16.2	Enregistrements des isotopes de la glace des forages EDML, EDC et NGRIP : comparaison des nouveaux scénarios de datation calculés dans ce travail avec les chronologies EDML1, EDC3ref et GICC05 issu du travail de la communauté paléo (Parrenin <i>et al.</i> , 2007b; Ruth <i>et al.</i> , 2007; EPICA Community Members, 2006). . . . .	250
16.3	Enregistrements de CH <sub>4</sub> avec les nouveaux scénarios d'âge gaz pour les forages EDML, EDC et NGRIP ; comparaison avec le scénario d'âge gaz d'ébauche de Blunier <i>et al.</i> (2007). . . . .	251
16.4	Nouvelle chronologie gaz pour le forage de NGRIP. . . . .	252
16.5	Pour les forages EDC (bleu) et EDML (rouge) : (i) en haut, les nouveaux scénarios de taux d'accumulation comparés au scénario d'accumulation d'ébauche pour EDML (Huybrechts <i>et al.</i> , 2007), (ii) en bas de, les nouveaux scénario des isotopes de la glace. . . . .	252

## Résumé

Les relations de phase entre augmentation de la concentration des gaz à effet de serre et augmentation de la température constitue un enjeu sociétal. Pour affiner notre compréhension des mécanismes climatiques sur la Terre, une datation précise des enregistrements climatiques du passé (carotte de glace, carotte de sédiments marins, spéléothèmes) est indispensable. En échelle relative, les datations permettent d'évaluer les relations de phase des variations climatiques en différents points du globe. En échelle absolue, les liens entre changements de l'orbite terrestre et réponse climatique peuvent être étudiés. Les carottes de glace d'Antarctique et du Groenland constituent des archives uniques à l'échelle des grands cycles glaciaire-interglaciaire. Elles offrent de nombreux marqueurs stratigraphiques pour la datation relative (méthane, couches de cendre...). Les échelles d'âge de ces carottes peuvent en outre être calculées grâce à des modèles numériques simulant la déformation des calottes, l'évolution de la température et des précipitations, ainsi que les caractéristiques du névé polaire. Toutefois les incertitudes sur ces datations modélisées demeurent considérables, notamment sur la datation relative des signaux de température enregistrés dans la glace solide et des signaux de composition de l'atmosphère enregistrés dans les bulles d'air piégées dans la glace. Le gaz et la glace à une même profondeur n'ont en effet pas le même âge. Au cours de ce travail de thèse, un code d'assimilation de données a été développé afin de réduire les incertitudes sur les chronologies. Ce code permet de calculer simultanément les datations gaz et glace de plusieurs forages glaciaires en réalisant un compromis entre les informations chronologiques fournies par les modèles glaciologiques et celles apportées par les contraintes stratigraphiques issues des mesures dans la glace et le gaz. La méthode repose sur une inférence Bayésienne formulée à l'aide d'une fonction coût. Cette formulation met en jeu des matrices de covariance d'erreur qui rendent compte des incertitudes sur les données ainsi que sur les sorties des modèles fournissant la première ébauche de datation. Elle permet de proposer des échelles d'âge optimisées ainsi que des intervalles de confiance. Dans ce manuscrit, on présente les premières expériences de datation réalisées avec l'outil numérique. En particulier, la datation simultanée des forages de North GRIP (Groenland), Vostok, Epica Dôme C et Epica Dronning Maud Land (Antarctique) montre le potentiel de cet outil pour construire les futures échelles d'âge des forages profonds d'Antarctique et du Groenland.