

# THÈSE DE DOCTORAT

DE L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de

## DOCTEUR

Spécialité : Automatique

par

Saïd AOUES

## Schémas d'intégration dédiés à l'étude, l'analyse et la synthèse dans le formalisme hamiltonien à ports

Soutenance le 04/12/2014 devant le jury composé de :

M. BERNARD BROGLIATO	Directeur de recherche, INRIA, Grenoble	Rapporteur
M. THOMAS HÉLIE	Chargé de recherches au CNRS, IRCAM, Paris	Rapporteur
M. BERNHARD MASCHKE	Professeur, l'UCB, Lyon	Examineur
M. ERIC BUSVELLE	Professeur, l'IUT, Dijon-Auxerre	Examineur
M. ALEXANDRE SEURET	Chargé de recherches au CNRS, LAAS, Toulouse	Examineur
M. WILFRID MARQUIS-FAVRE	Professeur, l'INSA, Lyon	Directeur de Thèse
M. DAMIEN EBERARD	Maitre de conférence, l'INSA, Lyon	Co-directeur de Thèse

### Laboratoire Ampère

UMR CNRS 5005 INSA de Lyon Département Génie Mécanique Conception  
20 Avenue Albert Einstein 69621 Villeurbanne Cedex



*A qui vous!!!*



# REMERCIEMENTS

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	vii
NOTATIONS	ix
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
<b>1 PASSIVITÉ DANS LE FORMALISME HAMILTONIEN</b>	<b>9</b>
1 SYSTÈMES PASSIFS ET STABILITÉ	10
1.1 Passivité	10
1.2 Stabilité et stabilisation	12
1.3 Interconnexion de systèmes passifs	14
2 FORMALISME HAMILTONIEN	16
2.1 Bilan d'énergie et stabilité	17
2.2 Composabilité	18
2.3 Principe de la synthèse énergétique : IDA-PBC design	18
2.4 Introduction à la commande par interconnexion	19
3 ILLUSTRATION	20
4 PROBLÉMATIQUE	23
<b>2 SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS À TEMPS DISCRET</b>	<b>25</b>
1 MOTIVATION : TRAJECTOIRE DISCRÈTE vs TRAJECTOIRE CONTINUE	27
1.1 Intégrateurs standards : Euler explicite et implicite	28
1.2 Intégrateurs géométriques : Euler symplectique A et B	29
1.3 Intégrateur énergétique : schéma point-milieu	30
2 DYNAMIQUE DISCRÈTE DES SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS	31
2.1 Dérivée discrète	31
2.2 Gradient discret : définition et exemple	32
2.3 Discrétisation de systèmes hamiltoniens passifs	36
2.4 Étude comparative avec les approches de la littérature	38
2.5 Étude du cas linéaire sans dissipation : flot discret	40
3 COMPOSITION DE SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS TEMPS DISCRET	42
3.1 Mise en réseau de SHP discrets	43
3.2 Illustration : interconnexion de circuits électriques	45
4 IMPACT DES RETARDS SUR L'INTERCONNEXION DES SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS À TEMPS DISCRET	48
4.1 Un bref état de l'art sur les systèmes à retards	49
4.2 Interconnexion en réseau à retard multiple	50
4.3 Illustration	54
5 UN MOT SUR LES INÉGALITÉS DE WIRTINGER EN TEMPS CONTINU	55
5.1 Formulation du problème en temps continu	56
5.2 Stabilité et stabilité robuste du système hamiltonien non linéaire	57
5.3 Exemple comparatif	59
<b>3 SYNTHÈSE DISCRÈTE BASÉE SUR LA PASSIVITÉ</b>	<b>61</b>
1 $L_gV$ -CONTRÔLEUR EN TEMPS DISCRET	63

1.1	Stabilisation de systèmes hamiltoniens discrets passifs . . . . .	64
1.2	Étude du retard : stabilité et robustesse . . . . .	66
1.3	Prise en compte de la saturation . . . . .	69
1.4	Exemple numérique . . . . .	71
2	CONTRÔLEUR IDA-PBC EN TEMPS DISCRET . . . . .	73
2.1	Synthèse de contrôleur IDA-PBC discret . . . . .	73
2.2	Exemples de simulations . . . . .	75
3	APPLICATION SUR LE CONVERTISSEUR BUCK . . . . .	81
3.1	Modes de fonctionnements . . . . .	81
3.2	Modèle moyen du convertisseur Buck . . . . .	83
3.3	Application du contrôleur IDA-PBC sur le convertisseur Buck . . . . .	84
3.4	Simulations et analyse des résultats . . . . .	85
3.5	Validation expérimentale . . . . .	87
4	SYSTÈMES HAMILTONIENS À PARAMÈTRES DISTRIBUÉS . . . . .	91
1	BREF RAPPEL : SYSTÈMES HAMILTONIENS CONTINUS EN DIMENSION INFINIE . . . . .	93
2	DISCRÉTISATION SPATIO-TEMPOREL DES SYSTÈMES HAMILTONIENS EN DIMENSION INFINIE . . . . .	94
2.1	Systèmes Hamiltoniens non linéaires à paramètres distribués . . . . .	94
2.2	Systèmes Hamiltoniens linéaires conservatifs . . . . .	96
2.3	Équation de Korteweg et de Vries (KdV) . . . . .	98
3	INTERCONNEXION DE SYSTÈMES HAMILTONIENS À TRAVERS LES FRONTIÈRES . . . . .	99
3.1	Interconnexion feedback de systèmes hamiltoniens réduits . . . . .	99
3.2	Interconnexion mixte de systèmes hamiltoniens . . . . .	101
3.3	Ligne de transmission 1-D . . . . .	102
4	CONTRÔLEUR IDA-PBC EN DIMENSION INFINIE . . . . .	104
	CONCLUSION GÉNÉRALE . . . . .	111
	A ANNEXES . . . . .	115
1	GRADIENT DISCRET POUR $H$ QUADRATIQUE . . . . .	116
2	PREUVE DES LEMMES . . . . .	117
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	119

## LISTE DES FIGURES

1.1	Décroissance de $V$ le long d'une trajectoire. . . . .	13
1.2	Diagramme d'interconnexion par feedback . . . . .	15
1.3	Pendule commandé en couple. . . . .	20
2.1	Le diagramme de phase ( $p_1 \times q_1$ ) obtenu avec le gradient discret (à gauche) et avec ode45 (à droite). . . . .	36
2.2	Réseau d'interconnexion de SHP discret. . . . .	42
2.3	Interconnexion de deux circuits LC. . . . .	45
2.4	L'évolution de la charge $q_1$ à gauche et $q_2$ à droite du système interconnecté $\Sigma_{12}$ . . . . .	46
2.5	L'évolution de l'énergie $H$ à gauche et sa variation $\Delta H$ à droite. . . . .	46
2.6	La variation d'énergie en fonction du générateur. . . . .	47
2.7	Les performances du système interconnecté pour $R_i = 0.3$ : l'évolution de l'énergie à gauche et le diagramme de phase à droite . . . . .	48
2.8	Les performances du système interconnecté pour $R_i = 0.1$ : l'évolution de l'énergie à gauche et le diagramme de phase à droite . . . . .	48

2.9	Schéma du réseau retardé. . . . .	49
2.10	Interconnexion par feedback de deux systèmes sous l'effet d'un retard variant $d(n)$ . . . .	53
2.11	Les trajectoires du système (à gauche) et l'énergie et sa variation (à droite). . . . .	55
2.12	Interconnexion par feedback de deux systèmes non linéaires en temps continu. . . . .	55
3.1	L'évolution du système avec le $L_gH$ -contrôleur. . . . .	65
3.2	À gauche, l'évolution en temps des trajectoires $(q, p)$ et de la commande $u$ , et à droite, le diagramme de phase $(q \times p)$ . . . . .	72
3.3	Diagramme de phase et évolution de l'énergie du système bouclé avec $u = u_{es}$ . . . . .	76
3.4	Diagramme de phase et évolution de l'énergie du système bouclé avec $u = u_{es} + u_{di}$ . . . .	76
3.5	Diagramme de phase pour $K_{di} = 0,25$ à gauche et $K_{di} = 0,05$ à droite, et $\Delta t = 0,8$ . . . .	78
3.6	Diagramme de phase de l'oscillateur d'impact bouclé. . . . .	78
3.7	Pendule à roue inertielle. . . . .	78
3.8	Diagramme de phase et évolution de l'énergie $H_d$ en boucle fermée. . . . .	80
3.9	Diagramme de phase et évolution de l'énergie $H_d$ en boucle fermée. . . . .	80
3.10	Convertisseur de puissance Buck . . . . .	81
3.11	Modes de fonctionnements : à gauche CCM et à droite DCM . . . . .	82
3.12	Interrupteur fermé . . . . .	83
3.13	Interrupteur ouvert . . . . .	83
3.14	Évolution du courant et de la tension pour la fréquence $F = 5KHz$ . . . . .	86
3.15	Évolution du courant et de la tension pour la fréquence $F = 3KHz$ . . . . .	86
3.16	Évolution du courant et de la tension pour la fréquence $F = 4KHz$ sous une perturbation. . . .	87
3.17	Propagation d'onde. . . . .	87
3.18	Évolution de la commande (à gauche) et de la tension $v_s$ (à droite) pour la fréquence $F = 4KHz$ . . . . .	88
3.19	Évolution de la commande (à gauche) et de la tension $v_s$ (à droite) pour la fréquence $F = 2KHz$ . . . . .	89
3.20	Évolution de la commande (à gauche) et de la tension $v_s$ (à droite) pour la fréquence $F = 5KHz$ . . . . .	89
4.1	Démarche de la discrétisation du système hamiltonien à paramètres distribués . . . . .	96
4.2	Interconnexion par feedback de deux systèmes hamiltoniens à paramètres distribués . . . .	100
4.3	Interconnexion discrète mixte . . . . .	101
4.4	Interconnexion de deux lignes de transmission . . . . .	103
4.5	La variation énergétique en temps discret . . . . .	105
4.6	Variation d'énergie $\overline{\mathcal{H}}$ au cours du temps ( $\Delta t = \Delta z = \Delta w = 1$ ). . . . .	106
4.7	Stabilisation du système à $\Pi = 4$ en utilisant le gradient discret. . . . .	108
4.8	Stabilisation du système à $\Pi = 4$ en utilisant le solveur ode45. . . . .	109
4.9	Maitre-Esclave . . . . .	113



# NOTATIONS

SHP	Systèmes Hamiltoniens à Ports
IDA-PBC	Interconnection and Damping Assignment-Passivity Based Controllers
ZEO	Zéro-Etat Observable
ZED	Zéro-Etat Détectable
EDO	Equations Différentielles Ordinaires
EDP	Equations aux Dérivées Partielles
LMI	Linear Matrix Inequality
LK	Lyapunov-Krasovskii
$L_g$	La dérivée de Lie le long du champ de vecteur $g$
$\mathcal{D}$	La structure de Dirac
$\Sigma$	Système continu
$\bar{\Sigma}$	Système discret
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	ensembles des réels et des réels positifs
$\mathbb{R}^d$	ensemble des vecteurs réels à $d$ dimensions



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## CONTEXTE DU LABORATOIRE AMPÈRE

Ce travail de thèse a été effectué au sein du département Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes (MIS) au laboratoire Ampère<sup>1</sup>. Ces travaux ont été financés par le projet ANR JCJC SIMI 3 intitulé *Approximation of Infinite Dimensional Systems* (AIDS), référence ANR-11-JS03-0004.

Une caractéristique forte des activités dans le domaine de l'Automatique à Ampère est le lien étroit entre les développements amonts et le transfert vers les plateformes expérimentales présentes au laboratoire : centre d'essais Fluid Power<sup>2</sup> (composants de puissance pneumatique, systèmes hydrauliques de puissance, commande en Fluid Power), Électronique de puissance (convertisseurs de puissance), Robotique médicale (BirthSim et téléopération), ou encore avec l'équipe de recherche commune Gestion Energie et Stockage pour les Transports (GEST<sup>3</sup>) avec le Laboratoire Transports et Environnement (LTE<sup>4</sup>) de l'IFFSTAR<sup>5</sup> (hybridation de la chaîne de traction et écoconduite).

Nos travaux s'inscrivent dans cette démarche. Nous avons implémenté et validé expérimentalement sur un convertisseur de puissance DC-DC (Buck) la procédure de synthèse énergétique discrète que nous avons développée.

## CONTEXTE DE RECHERCHE

Notre étude porte sur une classe de systèmes d'équations dont la dynamique décrit la physique par la représentation des échanges d'énergie au sein du système ainsi que les échanges avec son environnement au travers de variables d'interaction. Il s'agit du formalisme hamiltonien à ports. On résume les caractéristiques fondamentales **en temps continu** de ces systèmes en retenant que l'énergie est une intégrale première, que la structure caractérise les invariants dynamiques, qu'ils sont passifs et composables.

**Nos travaux présentent une intégration de ces caractéristiques dans la description en temps discret du formalisme hamiltonien. Nous définissons ainsi une classe de dynamiques discrètes pour laquelle nous proposons une méthode de synthèse énergétique discrète, nous analysons la stabilité de ces dynamiques en réseau en présence de retard et d'incertitudes. Enfin, nous abordons l'approximation, la composition et la synthèse de commande en dimension infinie.**

Historiquement, le concept d'énergie pour la modélisation de systèmes physiques est issu des approches lagrangienne et hamiltonienne dans le domaine de la Mécanique. Ces travaux ont fourni un cadre mathématique nouveau pour l'analyse des systèmes mécaniques par la description de la géométrie des équations et pour l'étude des propriétés des trajectoires solutions. Par la suite, ces approches ont été amplement développées et le champ d'application étendu à divers domaines de l'ingénierie, tels l'électronique, l'électromagnétisme, l'électronique de puissance, la mécatronique, la biologie, etc.

Le formalisme hamiltonien encode géométriquement les propriétés du système et offre une interprétation physique claire des variables utilisées. L'invariance de la classe par interconnexion (la composabilité) permet d'aborder la modélisation de systèmes complexes comme un assemblage de sous-systèmes (plus

---

1. <http://www.ampere-lyon.fr/>

2. <http://www.ampere-lab.fr/spip.php?rubrique51>

3. <http://www.ampere-lab.fr/spip.php?rubrique142>

4. <http://www.ifsttar.fr/linstitut/ame/laboratoires/lte-ifsttar/>

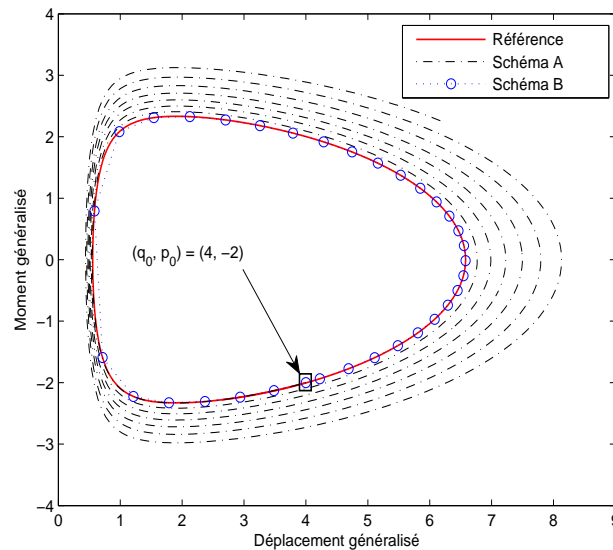
5. <http://www.ifsttar.fr/>

simples) en interaction et pour lesquels on peut prendre en compte différentes échelles d'espace, de granularité et de temps. On rencontre cette classe en dimension finie [Maschke et van der Schaft 1992] et en dimension infinie [van der Schaft et Maschke 2002].

Les outils inhérents de ce formalisme ont été exploités pour la synthèse de loi de commande. L'approche énergétique dans la description de la dynamique a été utilisée pour adapter et développer des méthodes de synthèse énergétique [Ortega et al. 2001]. Ces résultats ont conduit à une littérature extensive concernant les dynamiques atteignables [Ortega et al. 2002b], la commande par interconnexion [Ortega et al. 2008], l'utilisation d'invariants dynamiques [van der Schaft 1999], le cas sous-actionné [Ortega et al. 2002a]. On trouve également des domaines d'application variés traitant de la pile à combustible [Tanasa et Siuka 2012], des convertisseurs de puissances [Meghnous et al. 2013], de profil de plasma dans le tokamak [Vu et al. 2013], des canaux d'irrigation [Hamroun et al. 2008], de polymérisation [Nishida et al. 2008] ou de colonne d'adsorption [Baaiu et al. 2009a].

On notera également des travaux plus restreints concernant la réduction de systèmes linéaires [Rostyslav 2010] et non linéaires [Beattie et Gugercin 2011], l'analyse de stabilité sous l'effet des retards [Pasumarthy et Kao 2009, Yoo et al. 2011, Kao et Pasumarthy 2012], et la prise en compte de la contrainte de saturation [Airon et Yuzhen 2010].

Tous ces développements concernent des dynamiques **en temps continu** et leurs démonstrations reposent sur l'exploitation des propriétés de la classe énoncées plus haut. C'est sur ce point que réside la différence avec l'approche **en temps discret**. *A priori*, l'approximation induit une perte d'information qui ne permet plus de garantir des propriétés discrètes similaires à celles du continu. Les avantages des techniques d'analyse et de synthèse sont ainsi perdus.



La figure ci-dessus illustre ce phénomène. Il s'agit de la dynamique de l'oscillateur d'impact<sup>6</sup> dont les trajectoires, en tant que système conservatif, sont contraintes à évoluer sur un même niveau d'énergie. Or ce n'est pas le cas du flot discret A qui s'écarte de la référence à mesure que le temps évolue. La perte d'information liée à ce schéma d'approximation se traduit par une croissance numérique de l'énergie. En revanche, on observe que le flot discret B reste sur un même niveau d'énergie : le schéma d'intégration utilisé conserve l'énergie. Il s'agit d'un intégrateur énergétique [Leimkuhler et Reich 2005]. On emploie alors la terminologie d'**intégrateur dédié**.

L'approximation de la dynamique hamiltonienne est une thématique prolifique qui concerne principalement deux communautés scientifiques. On trouve une littérature extensive attribuée aux numériciens

6. La dynamique hamiltonienne en temps continu donnée par :  $\dot{q} = p$  et  $\dot{p} = -0.15 q + \frac{2}{q^3}$ .

et, plus récemment, le point de vue système des automaticiens. Cependant, de part leurs thématiques de recherche, ces communautés visent des objectifs distincts.

La communauté numérique s'est employée à développer des méthodes d'intégration pour assurer la stabilité, une validité sur des temps longs et efficaces. Ils ont développés de nombreux algorithmes numériques pour des systèmes hamiltoniens décrits par des équations différentielles ordinaires en utilisant des approches géométriques pour garantir la structure des équations [Leimkuhler et Reich 1994, Hairer 1997, McLachlan 2007] : la structure symplectique [Sanz-Serna et Calvo 1994], le volume de l'espace des phases [Feng et Wang 1994] et les symétries [McLachlan et Quispel 1998], et des approches énergétiques par des gradients discrets [Greenspan 1974, Itoh et Abe 1998, Harten et al. 1983], par l'extension des méthodes trigonométriques [Cohen 2005, Cohen et Hairer 2011], par la méthode de Runge-Kutta et les séries de Taylor [Hairer 2005]. Ces travaux ont été étendus sur des équations aux dérivées partielles par des intégrateurs multi-symplectiques [Marsden et al. 1998, Bridges 2006], gradients discrets [Dahlby et Owren 2011, Celledoni et al. 2012] et schéma point milieu [Dutykh et Fedele 2013]. A noter, que dans la majorité des cas, un schéma d'intégration ne peut pas préserver à la fois la structure géométrique (symplecticité) et la variation d'énergie en temps discret [Ge et Marsden 1988].

Face à cette situation, il est important de savoir au moment de l'approximation, laquelle de ces deux propriétés on désire conserver en fonction du problème considéré.

On retiendra que ces résultats concernent exclusivement des systèmes libres, c'est à dire ne possédant pas de variables entrée-sortie.

La communauté automatique a, pour sa part, abordé l'approximation du formalisme port-hamiltonien d'un point de vue modulaire en tenant compte des variables entrée-sortie. Les premiers travaux ont été orientés vers la préservation de la structure géométrique, en dimension finie [Talasila et al. 2004; 2005; 2006], et en dimension infinie 1-D [Golo et al. 2004], multi-échelle [Baaiu et al. 2009a] et  $n$ -D [Seslija et al. 2012]. On notera que ces travaux n'abordent pas les propriétés du flot discret. En vue de l'échantillonnage, les approches se sont orientées vers la préservation de la passivité [Stramigioli et al. 2005, Monaco et al. 2009] et ont montré l'importance de la définition de la sortie conjuguée à l'entrée. Enfin, on trouve une littérature plus réduite qui traite de la synthèse de commande IDA-PBC en temps discret [Laila et Astolfi 2005; 2006b, Gören-Sümer et Yalçin 2011], en échantillonné [Tiefensee et al. 2010] et en dimension infinie [Macchelli et Melchiorri 2005, Schoberl et Siuka 2011a].

On retiendra que ces résultats ne décrivent que des flots discrets pour lesquels le bilan d'énergie n'est satisfait qu'à l'ordre deux.

Dans l'objectif de l'approximation énergétique à temps discret du formalisme hamiltonien, il apparaît nécessaire de combiner l'approche énergétique (numérique) et l'approche modulaire (automatique) pour satisfaire les propriétés fondamentales de la classe. C'est précisément par la définition d'un intégrateur énergétique compatible (au sens de la passivité) avec les variables entrée-sortie que débutent nos travaux. Dès lors, les résultats énoncés par la suite s'inspirent de la démarche du continu et se démontrent en augmentation similaire.

## CONTRIBUTIONS

Nos travaux reposent sur la définition d'une dynamique hamiltonienne passive discrète (en dimension finie et infinie) obtenue par un intégrateur énergétique de type gradient discret. Cette formulation discrète qui garantit la passivité du flot discret, nous permet alors d'analyser la stabilité de réseau de  $\bar{\Sigma}_i$  (en présence de retard et d'incertitude), d'établir une discrétisation de lois de commande énergétique (en tenant compte de la saturation pour les systèmes de dimension infinie semi-discrétisés).

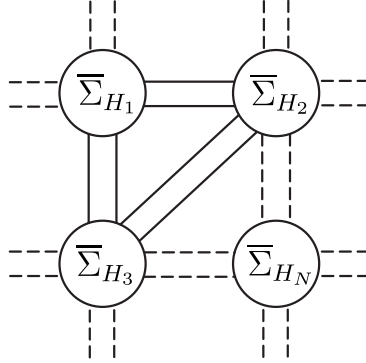
La classe, notée SHP, de système  $\Sigma$  considérée est décrite par les équations

$$(\Sigma) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_H^{J-R}(x) + g(x)u \\ L_g H(x) \end{bmatrix} \quad (1)$$

où  $J$  représente les échanges d'énergie réversibles au sein du système,  $R$  des échanges irréversibles (exprimés sous forme de dissipation),  $g$  le champ de vecteur d'entrée,  $u$  et  $y$  les entrée et sortie d'interaction. Le bilan d'énergie de ce système d'équation conduit invariablement à l'inégalité de passivité relativement au stockage  $H$

$$\frac{dH}{dt} \leq y^T u.$$

La composabilité de tels systèmes exprime l'invariance de la classe par interconnexion. L'opérateur de composition  $\Phi_{\mathcal{D}}$ , relativement à la structure  $\mathcal{D}$ , associe à tout  $N$ -uplet  $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2, \dots, \bar{\Sigma}_N)$  le système  $\Sigma = \Phi_{\mathcal{D}}(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2, \dots, \bar{\Sigma}_N)$  décrivant le réseau d'interconnexion des  $(\Sigma_i)_i$  dont les variables d'interaction  $u_i, y_i$  sont contraintes par  $\mathcal{D}$ . La dynamique de  $\Sigma$  conserve alors la même structure, *i.e.*  $\Sigma \in SHP$ , avec les dépendances  $J = J(J_i, g_i)$ ,  $R = R(R_i)$  et  $H = \sum_i H_i$  l'énergie totale.



Nous introduisons un opérateur de projection  $\Pi$  qui à tout  $\Sigma$  associe le système discret  $\bar{\Sigma} = \Pi(\Sigma)$  en la variable  $X$ . Cet opérateur est déduit d'une approximation de l'opérateur gradient  $\nabla$  par un gradient discret  $\bar{\nabla}$  représentant le taux d'accroissement. En notant  $X'$  l'état discret consécutif de  $X$ , le système discret obtenu par projection s'exprime

$$(\bar{\Sigma}_H) : \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_t X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_H^{J-R}(X, X') + g(X)u \\ g^T \bar{\nabla}_X H(X, X') \end{bmatrix}.$$

Une première caractéristique concerne la passivité (intrinsèque) de  $\bar{\Sigma}$  relativement au stockage  $H$ , similairement au cas continu

$$\bar{\nabla}_t H(n) \leq y^T u(n), \quad \forall n.$$

En particulier, pour une entrée nulle (système libre) l'énergie est une intégrale première du champ discret. Une seconde caractéristique est l'invariance par composition de la classe  $\overline{SHP} = \Pi(SHP)$ . Ainsi

$$\forall (\bar{\Sigma}_1, \dots, \bar{\Sigma}_N) \in \overline{SHP}^N, \quad \bar{\Sigma} = \Phi_{\mathcal{D}}(\bar{\Sigma}_1, \dots, \bar{\Sigma}_N) \in \overline{SHP}.$$

En résumé, l'intégrateur énergétique basé sur le gradient discret  $\bar{\nabla}$  définit une projection  $\Pi : SHP \rightarrow \overline{SHP}$  qui préserve les propriétés de passivité et de composabilité.

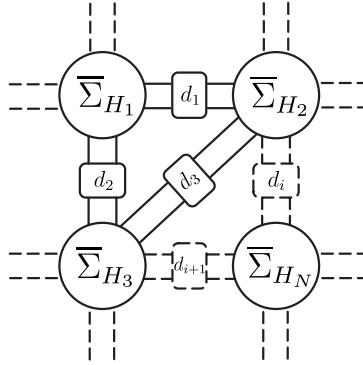
On montre de plus que la dynamique du réseau  $\bar{\Sigma}$  ne dépend pas de l'ordre d'application des opérateurs de projection et composition. Autrement dit, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma_{H_1}, \dots, \Sigma_{H_N}) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{D}}} & \Sigma_H \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ (\bar{\Sigma}_{H_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{H_N}) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{D}}} & \bar{\Sigma}_H \end{array}$$

est commutatif.

Ces premières considérations confortent notre choix d'envisager la classe  $\overline{SHP}$  comme un cadre formel suffisamment riche pour l'analyse de la stabilité et la synthèse énergétique de la classe  $SHP$  discrétisée.

L'analyse de stabilité dans la classe  $\overline{SHP}$  constitue une part importante de nos travaux. Nous avons ainsi étudié la stabilité des réseaux de  $\{\overline{\Sigma}_i\}_i$  en présence de retards et d'incertitudes, ainsi que la stabilisation par  $L_gV$ -contrôleur et par la méthode énergétique IDA-PBC avec prise en compte de retards et de la saturation.



Pour traiter la stabilité de la mise en réseau de dynamiques discrètes  $\overline{\Sigma}_i$  en présence de retards, on remarque tout d'abord que la dynamique du réseau n'appartient plus à la classe  $\overline{SHP}$ . Une approche par fonctionnelle de Lyapunov-Krasovski nous a permis d'établir une condition de stabilité asymptotique en terme d'inégalité matricielle linéaire (LMI)

$$\exists ?\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^T > 0 \quad \text{t.q.} \quad \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -R(n) + (d_i^M - d_i^m + 1) \mathcal{P}_i & \mathcal{M}_i/2 \\ \mathcal{M}_i^T/2 & -\mathcal{P}_i \end{bmatrix} < 0.$$

Ce résultat utilise les inégalités de Jensen. En temps continu, nous avons également établi une condition similaire utilisant les inégalités Wirtinger connues pour être moins conservatives que celles de Jensen. Cela nous a permis d'étudier la stabilité robuste en présence d'incertitudes polytopiques portant sur le hessien de l'énergie.

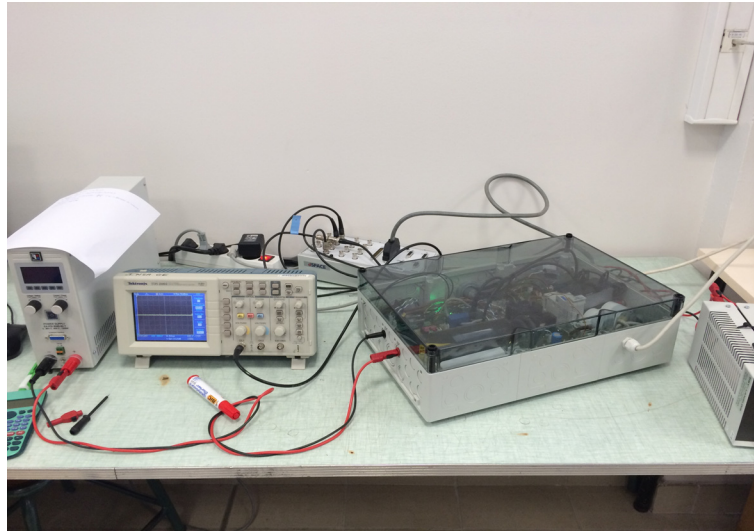
Concernant la synthèse énergétique, l'introduction de  $\overline{SHP}$  permet de traiter la méthode énergétique IDA-PBC avec les mêmes ingrédients fondamentaux (passivité, composabilité, *etc.*) que ceux de l'approche en temps continu. Nous présentons quelques résultats de stabilisation en dimension finie et en dimension infinie. C'est précisément cette similitude dans la démarche qui démontre les résultats énoncés. Dans le cas d'un système bouclé en présence de retards et d'incertitudes, la condition de stabilité s'exprime par l'inégalité matricielle (LMI)

$$\exists ?\mathcal{Q}_i^{(s)} = \mathcal{Q}_i^{(s)T} > 0 \quad \text{t.q.} \quad \Xi_k = \begin{bmatrix} \Lambda^{(s)} & J_d^{(s)} - R_d^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & -Q_1^{(s)} & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2^{(s)} & 0 \\ * & * & * & -Q_3^{(s)} \end{bmatrix} < 0.$$

La prise en compte de la saturation  $\text{sat}(u) = \text{sign}(u) \min(1, |u|)$  conduit à une inégalité matricielle similaire en utilisant des fonctionnelles ne faisant pas intervenir l'incertain.

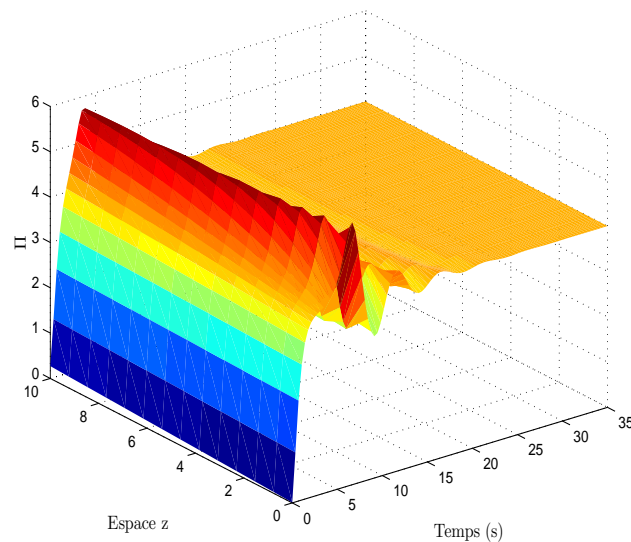
Enfin, mentionnons la mise en œuvre expérimentale de la synthèse énergétique discrète sur un convertisseur de puissance abaisseur de tension. On donne une représentation circuit de ce convertisseur ci-dessous. La synthèse IDA-PBC est calculée pour le modèle moyen.

Il est important ici de souligner le caractère intrinsèque des résultats théoriques développés : l'analyse de stabilité étant indépendante du pas de discrétisation, nous avons pu réduire la fréquence d'échantillonnage. D'un point de vue technologie embarquée, cela permet potentiellement de réduire la fréquence de



fonctionnement du micro-contrôleur sans pour autant affecter la fréquence de découpage.

Les résultats obtenus en dimension finie s'étendent à la dimension infinie avec une étape supplémentaire de semi-discrétisation en espace. Nous traitons de l'interconnexion infinie/infinie et de l'interconnexion mixte finie/infinie. A la suite de quoi, nous proposons un nouveau contrôleur de type IDA-PBC. Nous terminons par un exemple numérique d'application de cette méthode de synthèse pour contrôler une onde qui se propage le long d'une certaine distance.



## CONTENU

Ce manuscrit est constitué de quatre chapitres qui s'articulent comme suit.

Le premier chapitre est consacré au rappel des différents concepts en temps continu qui ont été le fil conducteur des ces travaux de thèses dédiés à l'étude des systèmes hamiltoniens à ports en temps discret. On rappelle en particulier le caractère héréditaire de la passivité par interconnexion et des critères de



stabilisation dans le cas générale. Ces résultats sont ensuite traduits dans le formalisme hamiltonien. A cette occasion, on présente la composabilité et la méthode IDA-PBC. Un exemple de simulation termine le chapitre en illustrant la nécessité d'intégrateur dédié.

Dans le second chapitre, nous proposons une formulation de la dynamique hamiltonienne passive à temps discret se basant sur un intégrateur énergétique. Nous étudions ensuite la composabilité de ces dynamiques, et en particulier les conditions de stabilité de réseaux en présence de retards et de stabilité robuste en présence de retards et d'incertitudes via les inégalités Wirtinger. Un exemple pris dans la littérature met en évidence le caractère moins conservatif de la méthode.

Le troisième chapitre est dédié à la synthèse de commande discrète. Nous étudions la stabilisation du système discret par un  $L_gV$ -contrôleur et par la méthode IDA-PBC. Nous donnerons des conditions de stabilité en présence de retards et de saturation de la commande. Ces résultats sont illustrés par des exemples académiques. Les résultats expérimentaux obtenus sur un convertisseur de puissance valide notre démarche.

Le dernier chapitre traite du formalisme hamiltonien en dimension infinie. Après une semi-discrétisation en espace, nous assurons la passivité en utilisant l'intégrateur énergétique précédemment introduit. Nous démontrons ensuite la composabilité et proposons une méthode de synthèse de commande discrète. Nous terminons par la simulation de l'équation de Sine-Gordon.

## PUBLICATIONS

### Revue internationale avec comité de lecture (en cours)

- S.Aoues and al. Conservative discrete-time port-Hamiltonian dynamics, *Systems & control letters*
- S.Aoues and al. Stability issue of interconnected discrete-time port-Hamiltonian systems, *System & Control Letters*
- S.Aoues and al. LMI stability condition for time-varying delay interconnection of discrete port-Hamiltonian systems, *International journal of robust and control*

### Conférences internationales avec comité de lecture

- S.Aoues and al. Discrete IDA-PBC design for 2-D port-Hamiltonian systems, In *Nonlinear Control and Systems (NOLCOS)*, pages 134-139, 2013, Toulouse, France
- S.Aoues and al. Canonical interconnection of discrete linear port-Hamiltonian systems, In *Conference on Decision and Control*, pages 3166-3171, 2013, Florence, Italy
- S.Aoues and al. Canonical interconnection of discrete linear port-Hamiltonian systems, In *Conference on Decision and Control 2014*, Los angeles, USA (accepté).
- S.Aoues and al. Discretizing IDA-PBC control law for underactuated mechanical port-Hamiltonian systems, In *European Control Conference 2015* (soumis).
- S.Aoues and al. Stability conditions of discrete linear port-Hamiltonian systems with time-varying delay interconnection, In *European Control Conference 2015* (soumis).



# Chapitre 1

## Passivité dans le formalisme Hamiltonien

### Résumé.

Ce chapitre regroupe les notions et concepts généraux en temps continu qui ont été le fil conducteur de ces travaux de thèse dédiés à l'étude du formalisme hamiltonien en temps discret. Il présente tout d'abord le concept de passivité des systèmes d'équations différentielles et les propriétés intrinsèques de stabilité et d'interconnexion qui ont conduit aux développements d'outils pour l'analyse et la synthèse de lois de commande.

Il est ensuite rappelé que ce concept s'inscrit dans le formalisme hamiltonien par l'introduction de ports d'interaction (*i.e.* couples entrée-sortie passifs) ajoutant ainsi la connaissance de la structure des équations dans les outils d'analyse et de synthèse.

Pour terminer, une synthèse énergétique est mise en œuvre sur un modèle de pendule commandé en couple. Des résultats numériques émergent la problématique de schémas de discrétisation dédiés.

### SOMMAIRE

1	SYSTÈMES PASSIFS ET STABILITÉ . . . . .	10
1.1	Passivité . . . . .	10
1.2	Stabilité et stabilisation . . . . .	12
1.3	Interconnexion de systèmes passifs . . . . .	14
2	FORMALISME HAMILTONIEN . . . . .	16
2.1	Bilan d'énergie et stabilité . . . . .	17
2.2	Composabilité . . . . .	18
2.3	Principe de la synthèse énergétique : IDA-PBC design . . . . .	18
2.4	Introduction à la commande par interconnexion . . . . .	19
3	ILLUSTRATION . . . . .	20
4	PROBLÉMATIQUE . . . . .	23

# 1 SYSTÈMES PASSIFS ET STABILITÉ

Initiée par Lagrange, l'approche énergétique pour la modélisation de la dynamique de systèmes physiques s'est largement répandue dans le domaine de l'ingénierie. En effet, la description des phénomènes basée sur des considérations énergétiques offre une interprétation intuitive des équations du modèle pour l'ingénieur : répartition, conversions, stockages, dissipations et échanges extérieurs d'énergies.

Dans ce contexte, nous rappelons tout d'abord les fondements de la théorie de la dissipativité [Willems 1972] qui propose une formalisation de ces considérations énergétiques.

Dans la description des systèmes dynamiques, la théorie de la dissipativité enrichit la connaissance du système d'équations différentielles par une **fonction de stockage** et un **taux d'approvisionnement** qui renseignent sur le comportement énergétique du système vis-à-vis de son environnement. L'exploitation de l'information complémentaire contenue dans ces fonctions conduit à une analyse de ces systèmes par l'étude des interactions *système*  $\leftrightarrow$  *environnement*.

Lorsque le système différentiel modélise une dynamique, on associe le stockage à l'énergie du système physique et l'approvisionnement à la puissance d'échange liée à l'interaction système  $\leftrightarrow$  environnement. Cette puissance d'échange est comptée positivement lorsque l'environnement se comporte comme une source d'énergie pour le système et négativement lorsque le système est assimilé à une source cédant de l'énergie à son environnement.

Les fonctions de stockage et d'approvisionnement sont liées au travers de l'**inégalité de dissipation** qui traduit le fait que, à tout instant, un système *dissipatif* accumule l'énergie d'échange à la dissipation près. Elle renseigne donc sur la quantité d'énergie que l'on peut extraire du système.

Parmi les systèmes dissipatifs, les **systèmes passifs** se distinguent par un taux d'approvisionnement défini comme le produit entrée-sortie du système. Cette propriété a conduit au développement d'outils particuliers pour l'analyse (interconnexion, théorème du petit gain) et la synthèse (commande passive et robuste).

Plus généralement, la passivité a été exploitée pour étudier la stabilité, l'interconnexion et la synthèse de lois de commande, tant sur le plan théorique [Hill et Moylan 1980, Greenhalgh et al. 2013] que pratique dans des domaines de l'ingénierie mécanique [Ortega et al. 2002a, Stramigioli et al. 2005, Navarro-Lopez et al. 2005, Costa-Castello et Fossas 2007], électrique [Ortega et al. 2003], hydraulique [Perry et Kailash 2004]

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire les propriétés intrinsèques et les résultats fondamentaux issus de la passivité.

## 1.1 Passivité

On rappelle ici la caractérisation de la passivité pour les systèmes affines. On introduit tout d'abord le concept de dissipativité dans un cadre général.

Considérons le système dynamique décrit par les équations

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x(0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases}, \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur des variables d'état,  $x_0$  la condition initiale,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrée et  $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$  celui des sorties. On suppose également  $f$  lisse.

Pour le système (1.1), on définit le **taux d'approvisionnement**  $s : \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  qui caractérise l'interaction du système avec son environnement de manière positive lorsque le système reçoit et négative lorsqu'il fournit. On suppose  $s$  localement intégrale, *i.e.* pour tout couple  $(u, y)$  satisfaisant (1.1) sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  on a  $\int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau < +\infty$ .

**Définition 1.1.** (*Inégalité de dissipation (e.g. [van der Schaft 1999])*) On dit que le système (1.1) avec

le taux  $s$  est **dissipatif** s'il existe une **fonction de stockage**  $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$S(x(t_1)) \leq S(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), h(x(\tau))) d\tau, \quad (1.2)$$

le long des trajectoires du système pour tout  $t_1 \geq t_0$ . On parle de système **sans perte** dans le cas d'égalité.

Lorsque la dynamique considérée est associée à un système physique, on assimile la fonction de stockage à l'énergie du système et le taux d'approvisionnement à la puissance d'échange. L'inégalité de dissipation traduit alors que, pour un système dissipatif, la quantité d'énergie contenue dans le système à l'instant  $t_1$  ne peut être supérieure à la quantité présente à l'instant  $t_0$  qui se voit modifiée par le taux d'échange durant l'intervalle  $[t_0, t_1]$ .

En d'autres termes, l'équation de dissipation est une formalisation du bilan d'énergie pour un système ouvert. Dans le cas d'égalité, la terminologie *sans perte* traduit donc l'absence de phénomène dissipatif au sein du système.

On note également que la quantité d'énergie que l'on peut extraire d'un système dissipatif ne peut excéder celle initialement présente (où, par convention, on impose  $S(0) = 0$  puisque la fonction de stockage est bornée inférieurement).

Parmi les systèmes dissipatifs, les systèmes **passifs** se distinguent par un taux d'approvisionnement qui s'exprime comme le produit entrée-sortie, *i.e.*  $s(u, y) := y^T u$ . En toute rigueur, il existe plusieurs nuances sur la passivité (par rapport à l'entrée, à la sortie *etc.*, voir par exemple [van der Schaft 1999, Costa-Castello et Fossas 2006, Monaco et Normand-Cyrot 2011]) qui ne seront pas exploitées ici.

**Définition 1.2.** (*Passivité*) (e.g. [Khalil 2002, van der Schaft 1999]) Le système (1.1) est dit **passif** s'il vérifie une inégalité de dissipation pour le taux d'approvisionnement  $s(u, y) = y^T u$ . Il est dit **conservatif** s'il est passif sans perte.

On notera que la terminologie *conservatif* s'entend ici pour un système **ouvert**. *A priori*, le qualificatif conservatif suppose qu'une quantité reste inchangée (en l'occurrence l'énergie dans notre cas), ce que l'on retrouve ici pour une entrée identiquement nulle ( $u \equiv 0$ ). Dans le cadre des systèmes ouverts, la notion de conservatif se conçoit plus comme une absence de dissipation (que comme une quantité constante) et il a été choisi de reprendre le même qualificatif.

Pour un système **affine en les entrées**, soit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x(0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases}, \quad (1.3)$$

dont  $S$  est une fonction de stockage, la passivité se caractérise par les **conditions de Hill-Moylan**<sup>1</sup> suivantes

$$\begin{cases} \nabla S(x)^T f(x) \leq 0 \\ \nabla S(x)^T g(x) = h^T(x) \end{cases}, \quad (1.4)$$

où  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  désigne l'opérateur *gradient*. On a le résultat suivant.

**Proposition 1** ([van der Schaft 1999]).

Un système affine en les entrées est passif si et seulement si il existe une fonction  $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  continûment différentiable qui vérifie les conditions de Hill-Moylan (1.4).

A l'aide de cette caractérisation, on formule la version différentielle de **l'inégalité de passivité** déduite de (1.2) pour les systèmes affines comme suit

$$\dot{S} = \nabla S^T f + \nabla S^T g u \leq y^T u. \quad (1.5)$$

Nous verrons que l'inégalité de passivité  $\dot{S} \leq y^T u$  s'exploite pour l'analyse de stabilité et la stabilisation en choisissant  $S$  comme candidate Lyapunov. Ces résultats font l'objet du paragraphe suivant.

1. Dans la littérature, on trouve également la terminologie *propriétés KYP* pour désigner les équations (1.4) en référence à la version non linéaire du critère de Kalman-Yakubovich-Popov [Yakubovich 1962]

## 1.2 Stabilité et stabilisation

Dans ce paragraphe, nous rappelons la stabilité au sens de Lyapunov et la méthode de stabilisation de Jurdjevic-Quinn. Ces résultats sont ensuite déclinés dans le cadre des systèmes passifs via l'inégalité de passivité. En effet, en associant une *fonction de Lyapunov*  $V$  à une mesure de l'énergie du système, l'analyse de stabilité, qui se traduit par la décroissance de  $V$  le long des trajectoires du système libre, se retrouve dans l'inégalité (1.5) en posant  $V = S$  et  $u \equiv 0$ .

On considère la partie libre du système affine (1.3), soit  $\dot{x} = f(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $f$  lisse. On note  $x(t, x_0)$  la solution issue en  $t = 0$  de  $x_0$ .

**Définition 1.3.** On dit que  $x^*$  est un état d'équilibre si  $f(x^*) = 0$ . On dit qu'un état d'équilibre est **stable au sens de Lyapunov** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0, \quad |x_0 - x^*| \leq \eta \Rightarrow |x(t, x_0) - x^*| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (1.6)$$

Si  $x^*$  n'est pas stable, on dit que l'état d'équilibre est instable. Si  $x^*$  est stable, son **bassin d'attraction** est

$$D(x^*) = \{x_0 / x(t, x_0) \rightarrow x^* \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}. \quad (1.7)$$

Si  $D(x^*)$  est un voisinage de  $x^*$  on dit que  $x^*$  est **asymptotiquement stable**. Si  $D(x^*) = \mathbb{R}^n$  on dit que  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable.

**Définition 1.4.** Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x^*$  et  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Pour une trajectoire  $t \mapsto x(t)$  on note

$$\dot{V}(x(t)) = L_f V(x(t)) = \nabla V(x(t))^T f(x(t)). \quad (1.8)$$

On dit que  $V$  est une **fonction de Lyapunov** si

- (i)  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour  $x \in U \setminus \{x^*\}$ ,
- (ii)  $\dot{V} \leq 0$  dans  $U$ .

De plus, si  $\dot{V} < 0$  on dit que  $V$  est une **Lyapunov stricte**.

### Théorème 1.

S'il existe une fonction de Lyapunov, alors l'état d'équilibre est stable. Si la fonction de Lyapunov est stricte, alors l'équilibre est asymptotiquement stable.

Géométriquement, l'inégalité  $\dot{V} \leq 0$  indique des sens opposés entre le champ  $f$  et la normale aux courbes de niveau de  $V$ . La trajectoire parcourt donc de manière transverse (et pour des valeurs décroissantes) les courbes de niveau pour atteindre un niveau minimum. On peut interpréter ce niveau comme un minimum d'énergie vers lequel le système tend naturellement. Ce minimum peut être un ensemble de points dans le cas stable ou un singleton pour une Lyapunov stricte.

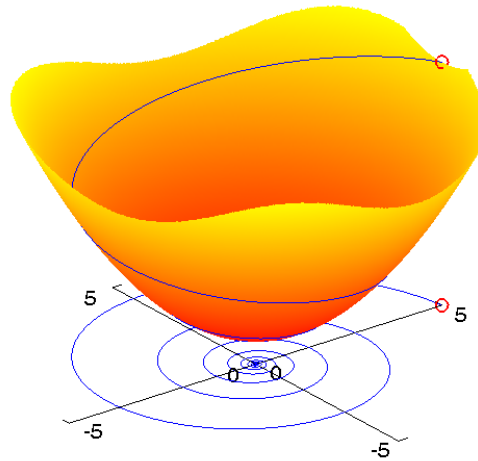
La figure 1.1 donne une illustration de cette décroissance le long des trajectoires pour un stockage quadratique. La projection de la trajectoire (issue de  $x_0 = (5, 0)$  représenté par  $\circ$ ) dans le plan de phase montre la convergence asymptotique vers l'origine.

La généralisation du théorème de Lyapunov repose sur le *principe d'invariance de LaSalle* qui conduit au résultat suivant.

### Théorème 2.

Soient  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lisse telle que  $\dot{V} \leq 0$  et  $K$  un compact. On note  $M$  le plus grand sous-ensemble positivement invariant<sup>a</sup> de  $\{\dot{V} \equiv 0\}$ . Alors, toute trajectoire qui reste dans  $K$  tend vers  $M$ .

a. Pour tout  $x_0$  de  $M$ ,  $x(t, x_0) \in K$  pour tout  $t \geq 0$ .

FIGURE 1.1 – Décroissance de  $V$  le long d'une trajectoire.

On s'intéresse maintenant à la stabilisation de systèmes affines en les contrôles (non nécessairement passifs) par la méthode de Jurdjevic-Quinn énoncée ci-dessous.

**Proposition 2** ([Jurdjevic et Quinn 1978]).

Considérons le système affine lisse (1.3) :  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  où  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $f(x^*) = 0$ . Supposons qu'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

1.  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour tout  $x \neq x^*$ ,
2.  $V$  est propre<sup>a</sup>,
3.  $\nabla V(x)^T f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ,
4.  $\{x : L_f V(x) = 0\} \cap \{x : L_f^k L_g V(x) = 0, \forall k\} = \{x^*\}$

Alors le retour d'état  $u(x) = -L_g V(x)$  rend le point d'équilibre  $x^*$  globalement asymptotiquement stable.

<sup>a</sup>. Pour tout  $v \in \mathbb{R}_+$  l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq V(x) \leq v\}$  est compact.

Nous présentons maintenant une application de ces résultats généraux dans le cadre des systèmes passifs affines en entrée.

Supposons la dynamique affine (1.3) passive relativement au stockage  $S$ . On remarque d'une part que pour une entrée identiquement nulle, l'inégalité de passivité (1.5) assure  $\dot{S} \leq y^T u \equiv 0$ . D'autre part, on remarque qu'un minimum local strict  $x^*$  du stockage  $S$  est une position d'équilibre du champ  $f$ . Alors, d'après ces deux remarques, la fonction  $V(x) = S(x) - S(x^*)$  satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème 1 est donc une Lyapunov pour  $x^*$ . Ainsi, on en déduit : **les minima stricts d'un stockage forment un ensemble de points d'équilibre stables pour la partie libre d'un système passif**<sup>2</sup>.

2. Ce résultat reste vrai pour la dynamique non affine (1.1).

On obtient la stabilité asymptotique si  $x(t) \equiv x^*$  est l'unique trajectoire (positivement) invariante dans  $\{\dot{S} = 0\}$  en appliquant le principe d'invariance de LaSalle.

La méthode de stabilisation de Jurdjevic-Quinn détermine une loi de commande par retour d'état qui présente un intérêt pratique dans le cas de systèmes passifs puisqu'elle se traduit par un *retour de sortie*. Ceci illustre une certaine facilité de synthèse de loi de commande stabilisante pour cette classe de systèmes. L'idée est, tout comme dans l'analyse de stabilité, d'utiliser la fonction de stockage  $S$  pour répondre aux critères de la proposition en posant  $V = S$ . Sous les hypothèses *ad hoc*, le retour d'état  $u = -L_g V$  devient un retour de sortie  $u = -L_g S = -h(x) = -y$  par les conditions de Hill-Moylan (1.4).

Pour cette commande, on remarque également que l'inégalité de passivité s'écrit  $\dot{S} \leq y^T u(y) = -\|y\|^2$ , d'où la décroissance de la fonction de stockage le long des trajectoires. Aussi,  $S$  apparaît de nouveau comme une candidate Lyapunov naturelle pour le système en boucle fermée.

D'un point de vue énergétique, ce type de commande revient à dissiper l'énergie  $S$  du système. Nous verrons par la suite que pour les systèmes hamiltoniens passifs, ce retour de sortie peut être vu comme une **injection d'amortissement** qui permet d'assurer la stabilité asymptotique et dont la valeur est liée à la vitesse de convergence.

On trouve parfois dans la littérature la terminologie  $L_g V$ -**contrôleur** pour désigner la méthode de Jurdjevic-Quinn. La commande s'exprime  $u(t) = -k L_g V(x(t))$  où  $k > 0$  est un vecteur de gains qui permet d'accélérer la vitesse de convergence en augmentant la dissipation du système en boucle fermée.

Pour un système passif, le  $L_g V$ -contrôleur offre une possibilité de dissiper l'énergie. Si l'on reprend l'inégalité de passivité  $\dot{S} \leq y^T u$ , on voit aisément que toute commande  $u = -\alpha(y)$  qui assure un signe stricte fixe de  $y^T u < 0$  (et donc une dissipation) offre des perspectives de stabilisation.

Toutefois, cela nécessite des hypothèses et nous rappelons tout d'abord les notions d'observabilité et de détectabilité pour le système (1.1) décrit par  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $y = h(x)$ .

**Définition 1.5.** *Le système (1.1) est dit*

- **zéro-état observable (ZEO)** si pour une entrée identiquement nulle, on a

$$y(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad \implies \quad x(t) = 0, \forall t \geq 0. \quad (1.9)$$

- **zéro-état détectable (ZED)** si pour une entrée identiquement nulle, on a

$$y(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad \implies \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (1.10)$$

**Proposition 3** ([Byrnes et al. 1991]).

Considérons le système (1.1) de dynamique  $\dot{x} = f(x, u)$  et de sortie  $y = h(x)$  que l'on suppose passif relativement à la fonction de stockage  $S$ . Supposons de plus qu'il soit zéro-état détectable (ZED). Alors, toute fonction lisse  $\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  telle que  $\alpha(0) = 0$  et  $y^T \alpha(y) > 0$  pour tout  $y \neq 0$ , engendre une loi de commande  $u = -\alpha(y)$  qui stabilise asymptotiquement l'origine.

Dans ces travaux de thèse, nous nous focaliserons sur l'exploitation du  $L_g V$ -contrôleur. Nous verrons en particulier que pour des systèmes hamiltoniens à *temps discret*, cette méthodologie de synthèse est conditionnée par la passivité de la dynamique discrète. En effet, l'absence de cette propriété donne lieu à une dérive numérique de l'énergie pouvant conduire à l'explosion des trajectoires.

### 1.3 Interconnexion de systèmes passifs

Nous rappelons ici un résultat connexe au théorème de la passivité et qui traduit le fait que la passivité est préservée par interconnexion. En d'autres mots, un système issu de l'interconnexion de sous-systèmes passifs hérite de la propriété de passivité. Cet héritage par interconnexion est une propriété fondamentale de cette classe de systèmes que l'on exploite en modélisation et en synthèse. Nous verrons par la suite qu'elle reste essentielle pour une approche en temps discret.



Par abus de langage, nous utilisons l'expression *passivité par interconnexion* pour désigner cette propriété.

Du point de vue de la modélisation, la passivité par interconnexion permet de traiter un système comme un assemblage de sous-systèmes en interaction et dont les caractéristiques (passivité, énergie, stabilité, *etc.*) se propagent du local au global. On déduit ensuite aisément certaines caractéristiques héréditaires du système interconnecté. On parle **d'approche réseau** où les nœuds décrivent les dynamiques des sous-systèmes et les arcs les échanges entre sous-systèmes (interactions internes) et avec l'environnement (les taux d'approvisionnement).

On exploite également cette représentation pour la synthèse du contrôleur passif où, par analogie, certains nœuds du réseau représentent les dynamiques des contrôleurs.

Considérons deux systèmes dynamiques  $\Sigma_1, \Sigma_2$  décrits par les relations

$$(\Sigma_i) : \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i, u_i) \\ y_i = h_i(x_i) \end{cases} \quad (1.11)$$

que l'on suppose passifs relativement aux fonctions de stockage  $S_i(x_i)$  pour  $i = 1, 2$ .

Afin de clarifier notre propos tout en conservant la philosophie de l'approche, nous ne rappellerons ici que le cas de *l'interconnexion par feedback*. Sous l'hypothèse d'interconnexion passive (*i.e.* qui se traduit par des taux d'approvisionnement satisfaisant une équation de passivité commune), les résultats présentés s'étendent aisément à des structures d'interconnexion plus complexes (*e.g.* critère de Popov [van der Schaft 1999]).

La structure d'interconnexion par feedback représentée ci-dessous

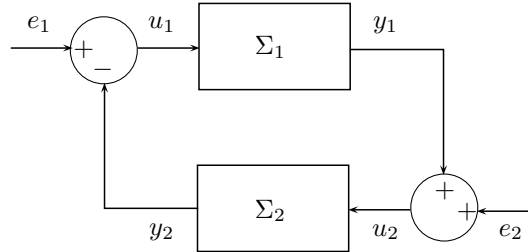


FIGURE 1.2 – Diagramme d'interconnexion par feedback

est caractérisée par les contraintes

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 - y_2 \\ u_2 &= e_2 + y_1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

On notera  $\Sigma_{12}$  le système global de dynamique  $\dot{x} = f(x, e)$  et de sortie  $y = h(x)$ , où  $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$ ,  $e = [e_1^T \ e_2^T]^T$  et  $y = [y_1^T \ y_2^T]^T$ . Le théorème de la passivité s'énonce comme suit.

**Proposition 4** ([van der Schaft 1999] p. 46).

Si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont passifs alors  $\Sigma_{12}$  est passif par rapport à l'entrée  $e$  et la sortie  $y$  relativement à la fonction de stockage  $S(x) = S_1(x_1) + S_2(x_2)$ . Si de plus les stockages  $S_1$  et  $S_2$  admettent respectivement un minimum local strict en  $x_1^*$  et  $x_2^*$ , alors, pour des entrées nulles (*i.e.*  $e_1 = e_2 = 0$ ), le point  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  est un équilibre stable de  $\Sigma_{12}$ .

Dans un contexte plus général, on introduit l'**opérateur de composition**  $\Phi_{\mathcal{P}} : (\Sigma_1, \dots, \Sigma_N) \mapsto \Sigma_{1\dots N}$  qui, à un  $N$ -uplet de systèmes, associe le système global  $\Sigma_{1\dots N}$  obtenu en satisfaisant les contraintes de l'interconnexion passive  $\mathcal{P}$ . Du résultat précédent, on déduit que  $\Sigma_{1\dots N}$  est passif.

**Remarque 1.1.** *Le transport de la passivité par interconnexion se retrouve également dans l'approche robuste basée sur le **théorème du petit gain**. Sans rentrer dans les détails de cette approche largement développée dans la littérature, nous rappelons brièvement quelques résultats pour faire le lien entre l'analyse de robustesse et la passivité. En un certain sens, il s'agit de faire le lien entre une stabilité au sens de Lyapunov (via la passivité) et une stabilité entrée-sortie (via le  $L_2$ -gain).*

*On a d'une part l'équivalence entre la passivité de l'application entrée-sortie de  $\Sigma$  et l'existence d'un  $L_2$ -gain  $\leq 1$ , noté  $\gamma_2(\Sigma)$ , pour l'opérateur de scattering associé. Et d'autre part, pour des systèmes passifs  $\Sigma_1, \Sigma_2$  zéro-état détectable dont les fonctions de stockage  $S_1, S_2$  sont (localement) définies positives, si le  $L_2$ -gain du système interconnecté  $\Sigma_{12}$  est fini, i.e. on a  $\gamma_2(\Sigma_1) \cdot \gamma_2(\Sigma_2) < 1$  (théorème du petit gain), alors l'origine est asymptotiquement stable.*

*On notera que le théorème du petit gain tout comme les résultats de la proposition précédente restent valides dans le cas de systèmes  $\Sigma_1, \Sigma_2$  perturbés pourvu que la passivité et les propriétés des fonctions de stockage soient vérifiées.*

*En analyse robuste, on utilise ces résultats pour l'étude de la dynamique d'un système incertain (ou perturbé)  $\dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x)\Delta\bar{h}(x)$ , où  $\Delta$  est inconnu, en décomposant la dynamique comme suit. On associe à  $\Sigma_1$  le système  $\dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x)\bar{u}$  de sortie  $y = \bar{h}(x)$ , et à  $\Sigma_2$  le système statique  $w = \Delta z$ . L'interconnexion traduit alors les contraintes  $z := y$  et  $u := w = \Delta\bar{h}(x)$ .*

*Si  $\Sigma_1$  admet un  $L_2$ -gain fini  $\gamma_2(\Sigma_1) \leq \gamma$  et un stockage localement défini positif en 0, alors la stabilité asymptotique de l'origine est assurée pour toute perturbation  $\Delta$  dont le rayon spectral est strictement borné par  $\frac{1}{\gamma}$ . Autrement dit, on assure ainsi un  $L_2$ -gain fini du système bouclé relativement à toute perturbation  $\Delta$  satisfaisant la condition  $\rho(\Delta) < 1/\gamma$ .*

*Par analogie, on traite de la synthèse robuste en ajoutant une matrice de gain dans la décomposition. La complexité de la résolution tient à la détermination de ces paramètres garantissant un  $L_2$ -gain fini en boucle fermée qui maximise l'intervalle des incertitudes.*

*Cette approche n'a pas été développée dans la suite de ce mémoire, mais son étude pourrait éventuellement présenter un intérêt dans le cas non linéaire [Yalçın et al. 2014].*

## 2 FORMALISME HAMILTONIEN

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la dynamique de systèmes affines en entrée dont la partie libre  $X_H$  est hamiltonienne (au sens où le champ est engendré par un tenseur de Poisson) et la sortie est passive (en ce sens que le produit entrée-sortie est un taux d'approvisionnement pour le système).

Considérons le système hamiltonien contrôlé affine  $\dot{x} = X_H(x) + g(x)u$  engendré par la fonction hamiltonienne  $H$ , et dont la sortie prend la forme  $y = L_g H(x)$ . Dans ces conditions, un calcul simple montre que les conditions de Hill-Moylan (1.4) sont satisfaites avec le stockage  $S = H$ . De manière équivalente, la dérivée de  $H$  (autrement dit, le bilan d'énergie)

$$\dot{H} = L_{X_H + gu} H = L_{g_u} H = u^T L_g H = u^T y, \quad (1.13)$$

conduit à une équation de passivité dont la fonction de stockage est le hamiltonien  $H$  et le taux d'approvisionnement est  $s(u, y) = y^T u$ . Il s'agit donc du cas d'égalité de l'inégalité de passivité relativement à  $H$ . Un tel système est donc **conservatif** (au sens des système ouvert, cf Définition 1.2) car il est passif et sans perte. Cela traduit le fait que la variation d'énergie au sein du système est *exactement* la quantité de puissance (signée) qui transite par les variables entrées-sorties passives.

Afin d'inclure des phénomènes dissipatifs dans la représentation (conservative) précédente, on adjoint un tenseur symétrique (semi-)défini positif au tenseur de Poisson. La classe des systèmes hamiltoniens passifs ainsi obtenue est définie en coordonnées ci-après.

**Définition 2.1.** *Un **système hamiltonien passif**<sup>3</sup> (SHP) est défini par un quadruplet  $(J, R, H, g)$  et*

3. En toute rigueur, il s'agit ici d'une version affaiblie de la définition des systèmes hamiltoniens à port [port-Hamiltonian system] présentée dans la littérature puisque l'on impose à la fonction hamiltonienne d'être bornée inférieurement.

les équations

$$(\Sigma_H) : \begin{cases} \dot{x} = [J(x) - R(x)] \nabla_x H(x) + g(x)u = X_H^R(x) + g(x)u \\ y = L_g H(x) = g(x)^T \nabla_x H(x) \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $J(x) + J(x)^T = 0$  se nomme *matrice de structure*,  $R(x) = R(x)^T \geq 0$  est la *matrice de dissipation*,  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  la *fonction hamiltonienne* et  $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la *matrice d'entrée*. Par commodité, on notera  $X_H^R$  la partie libre du champ engendrée par  $H$  et de dissipation  $R$ .

Dans la littérature, on trouve la terminologie de *variables de port* en référence aux couples de variables entrées-sorties passifs et la dénomination **système hamiltonien à ports** pour la dynamique associée [Maschke et van der Schaft 1992]. Cette terminologie trouve une raison chronologique et fait suite aux analyses successives portant sur les sorties dites *naturelles* et *hamiltoniennes*. Dans ce manuscrit cependant, nous avons choisi d'inclure explicitement le terme *passif* dans la définition puisque cette propriété est au cœur de ces travaux de thèse.

Pour un système hamiltonien passif décrivant la dynamique d'un procédé, les éléments du quadruplet  $(J, R, H, g)$  admettent la signification physique suivante.

La fonction hamiltonienne  $H$  représente la quantité d'énergie contenue dans le système. On la suppose bornée inférieurement, d'où (par translation) son image à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ . Elle représente la somme des énergies décrivant des phénomènes de stockage de type capacitif, inductif, inertiel, gravifique, de pressurisation, etc.

La matrice de structure  $J$  caractérise les échanges réversibles au sein du système. Comme illustrations simples, elle coïncide avec la matrice d'incidence d'un circuit électrique LC ou avec la matrice de rotation dans  $\mathbb{R}^3$  pour un corps rigide.

La matrice de dissipation  $R$  localise les phénomènes de dissipation d'énergie. Elle décrit des phénomènes de type résistif, frottement, perte de charge, etc. On notera que les phénomènes considérés sont modélisés par un champ de gradient.

## 2.1 Bilan d'énergie et stabilité

Le bilan d'énergie du système hamiltonien passif (SHP) (1.14) conduit à une égalité de dissipation où la fonction de stockage, le taux de dissipation et le taux d'approvisionnement sont explicites. On a en effet

$$\dot{H} = L_{\dot{x}} H = -\nabla H^T R \nabla H + y^T u \leq y^T u \quad (1.15)$$

d'où, par intégration pour tout  $t > t_0$

$$H(x(t)) - H(x(t_0)) = - \int_{t_0}^t \nabla H(x(s))^T R(x(s)) \nabla H(x(s)) ds + \int_{t_0}^t y^T(s) u(s) ds. \quad (1.16)$$

Ce bilan montre que, pour un SHP, l'énergie présente à l'instant  $t$  au sein du système est égale à celle présente à l'instant  $t_0$  diminuée par la quantité dissipée et modifiée par la quantité de puissance qui transite par les variables entrée-sortie passives durant l'intervalle  $[t_0, t]$ . On retrouve l'interprétation intuitive de l'accumulation des échanges à la dissipation près.

De ces relations précédentes, on déduit qu'un SHP est passif relativement à la fonction de stockage  $H$  et son taux de dissipation est donné par le premier membre de droite. La connaissance du taux de dissipation donne une indication sur le taux de décroissance de  $H$ . Il entre en compte pour l'étude de la convergence asymptotique.

En tant que système passif, on sait que l'ensemble des minima stricts du hamiltonien  $H$  d'un SHP est un **ensemble d'états d'équilibre stables** pour la partie libre. On montre en effet qu'un minimum local strict  $x^*$  de  $H$  est une position d'équilibre et que la fonction  $V(x) = H(x) - H(x^*)$  est une candidate Lyapunov pour  $x^*$ .

Le bilan d'énergie permet également d'observer l'augmentation du taux de dissipation du système (et donc de la vitesse de convergence) pour un  $L_g V$ -contrôleur générant une commande du type  $u = -ky + v$ . Il vient

$$\dot{H} = -\nabla H^T [R + gkg^T] \nabla H + y^T v. \quad (1.17)$$

Pour une entrée  $v \equiv 0$ , l'égalité précédente renseigne sur le taux de décroissance de  $H$  qui varie en fonction du réglage de  $k$ .

## 2.2 Composabilité

En tant que système passif, la classe des SHP possède la propriété de **passivité par interconnexion** (cf paragraphe 1.3) : le système issu de SHP interconnectés hérite de la propriété de passivité. Il s'avère que l'interconnexion préserve également la classe : une interconnexion de SHP est un SHP. On parlera alors de **composabilité**<sup>4</sup> ou d'**approche modulaire** pour désigner l'invariance de la classe.

Comme illustration, nous reprenons le cas de l'interconnexion par feedback (figure 1.2) de deux SHP notés  $\Sigma_1, \Sigma_2$ . On note  $\Sigma_{12}$  le système résultant de cette interconnexion caractérisée par les contraintes  $u_1 = e_1 - y_2$  et  $u_2 = e_2 + y_1$ . Plus succinctement, on notera  $\Sigma_{12} = \Phi(\Sigma_1, \Sigma_2)$  où  $\Phi$  désigne l'opérateur de composition par interconnexion feedback.

Un calcul simple donne la dynamique bouclée

$$\Sigma_{12} : \begin{cases} \dot{x} = [J - R] \nabla_x H + ge = X_H^R + ge \\ y = g^T \nabla_x H = L_g H \end{cases} \quad (1.18)$$

où

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & -g_1 g_2^T \\ g_2 g_1^T & J_2 \end{bmatrix}, \quad R = \text{diag}(R_1, R_2), \quad \text{et} \quad g = \text{diag}(g_1, g_2), \quad (1.19)$$

vérifient  $J + J^T = 0$  et  $R = R^T \geq 0$  d'après les hypothèses sur  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , et le hamiltonien est donné par  $H(x) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$ . On a ainsi le résultat suivant.

### Proposition 5.

Le système bouclé  $\Sigma_{12}$  est un SHP engendré par  $(J, R, H, g)$  et les équations (1.18).

On généralise ce résultat à un nombre fini de SHP et pour des structures d'interconnexion plus complexes dites **continue de puissance** pour lesquelles les variables entrée-sortie passives sont contraintes par une **structure de Dirac**  $\mathcal{D}$ . On a le résultat analogue : le système interconnecté  $\Phi_{\mathcal{D}}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_N)$  est un SHP [Golo 2002].

## 2.3 Principe de la synthèse énergétique : IDA-PBC design

La synthèse énergétique s'appuie sur la méthode de *poursuite de modèle* qui se particularise pour la classe des SHP en exploitant les propriétés intrinsèques de stabilité et de composabilité.

En quelques mots, le principe général est le suivant. Pour une dynamique affine  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , il s'agit de déterminer la commande  $u$  qui permet d'atteindre une dynamique désirée  $f_d(x)$  possédant des caractéristiques voulues. Formellement, une solution est donnée par  $u = g^\dagger(f_d - f)$ , où  $g^\dagger$  désigne une inverse (généralisée) de  $g$ . Il apparaît clairement que l'existence de cette commande est contrainte par l'image de  $g$  et le domaine de  $f_d$ .

Pour un SHP donné par (1.14), les spécifications de cette méthode s'exprime en deux étapes.

Dans un premier temps, on ne retiendra que la partie conservative de la dynamique  $\dot{x} = X_H(x) + g(x)u$  et on se donne une dynamique désirée en boucle fermée de la forme  $X_{H_d}$ . En d'autres mots, la dynamique cible est engendrée par une énergie désirée  $H_d$ . On synthétise alors une commande  $u_{es}$  (pour *energy shaping*) qui permet d'atteindre cette cible. On note que, en tant que système passif, les minima de  $H_d$

4. Cette terminologie est empruntée au Génie Informatique où elle désigne la capacité d'un logiciel à permettre l'interfonctionnalité des composantes, à savoir la sélection, le remplacement, l'assemblage, la (re-)configuration *etc.* de modules pour répondre à des spécifications. Une illustration de haut niveau pourrait être le *Functional Mock-up Interface* (FMI) <https://www.fmi-standard.org/>

sont des équilibres stables de  $X_{H_d}$ . *In fine*, la position asymptotiquement stable recherchée appartient à cet ensemble.

Dans un deuxième temps, on synthétise une commande  $u_{di}$  (pour *damping injection*) qui stabilise asymptotiquement l'équilibre voulu parmi l'ensemble précédent. On utilise alors la méthode de Jurdjevic-Quinn (cf proposition 2) pour assurer une dynamique bouclée de la forme  $X_{H_d}^{R_d}$  (donc du type SHP) via un  $L_gV$ -contrôleur (cf equation (1.17)).

On parle de **synthèse IDA-PBC**<sup>5</sup> [Ortega et al. 2002b] pour désigner cette méthode.

L'idée originelle est apparue dans un problème de régulation par retour d'état d'un bras manipulateur complètement actionné [Takegaki et Arimoto 1981]. Elle a ensuite été formalisée dans l'objectif de *passivation* du système bouclé [Ortega et Spong 1989] et développée dans de nombreux travaux, notamment pour des systèmes mécaniques et électroniques [Ortega et al. 2001, Ortega et al. 2002b; 2008, Gomez-Estern et van der Schaft 2004].

En fonction des degrés de liberté octroyés au designer, on distingue trois approches de synthèse pour ce type de commande [Ortega et al. 2002a] : IDA non paramétrique, IDA paramétrique et IDA algébrique. Dans ce manuscrit, nous utiliserons la dernière approche qui consiste à fixer la fonction d'énergie désirée  $H_d$  et à laisser libre les paramètres  $J_d$  et  $R_d$ .

Nous rappelons ici la marche à suivre dans le contexte des SHP. Il s'agit de déterminer la commande  $u$  pour un comportement énergétique désiré en boucle fermée en résolvant l'égalité

$$\dot{x} = X_H^R + gu = [J - R]\nabla H + gu = [J_d - R_d]\nabla H_d = X_{H_d}^{R_d}, \quad (1.20)$$

soit l'équation

$$gu = \left( X_{H_d}^{R_d} - X_H^R \right). \quad (1.21)$$

Dans le cas (rare !) où  $g$  est inversible, la loi de commande est immédiate en multipliant à gauche (1.21) par l'inverse  $g^{-1}$ . Dans le cas contraire, on utilise une inverse généralisée  $g^\dagger$  ce qui entraîne une contrainte supplémentaire, appelée **condition de matching**, qui définit l'ensemble des dynamiques cibles accessibles. En effet, lorsque l'on applique  $g^\perp$  l'annihilateur à gauche de  $g$  à l'équation précédente, les paramètres engendrant la dynamique désirée doivent satisfaire le système d'équations aux dérivées partielles suivantes

$$g^\perp \left( X_{H_d}^{R_d} - X_H^R \right) = 0. \quad (1.22)$$

La condition de matching impose donc une contrainte forte quant à la résolution du problème de synthèse IDA-PBC. En dehors du cadre général, il existe cependant de nombreux exemples (académiques et pratiques) pour lesquelles sa résolution est donnée.

Enfin, on notera que la motivation principale de cette démarche de synthèse pour la classe des SHP réside dans le fait qu'elle propose une méthode engendrant **tous les contrôleurs stabilisants** de cette classe.

## 2.4 Introduction à la commande par interconnexion

Dans la démarche de synthèse de commande, on peut également envisager d'utiliser la composabilité des SHP dans la démarche de synthèse de commande. Pour une dynamique hamiltonienne passive, on impose ainsi une structure de SHP au contrôleur. Le réseau de connexion *système*  $\leftrightarrow$  *contrôleur* représente les échanges d'énergie entre ces deux sous-systèmes. Le système interconnecté est alors un SHP et les propriétés de passivité par interconnexion et composabilité sont préservées. Elles s'utilisent pour l'analyse du système bouclé.

On peut intégrer cette démarche dans la synthèse IDA-PBC [Ortega et al. 2002a; 2008]. Mais c'est surtout parce qu'elle permet d'inclure les invariants structurels, les **fonctions de Casimir**, que cette démarche est avantageuse [van der Schaft 1999]. En particulier pour la commande de SHP de dimension infinie, comme nous le verrons au chapitre 4.

---

5. Interconnexion and Damping Assignment Passivity-Based Control

En quelques mots, voici le principe. On peut déduire des propriétés dynamiques d'un SHP à partir de sa matrice de structure  $J$  et indépendamment de  $H$ . Si la fonction  $C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie  $\nabla C^T J \equiv 0$ , alors  $C$  est constante le long des trajectoires de  $X_H$  et ceci pour tout  $H$ . On nomme *fonctions de Casimir* ces invariants dynamiques. On remarque de plus que si  $(C_1, \dots, C_r) =: C$  sont des Casimir, alors  $\dot{H}_a(C_1, \dots, C_r)(x) \equiv 0$  pour toute fonction  $H_a : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ .

On obtient alors une dynamique *réduite* de  $X_H^R$  sur les ensembles de niveau  $L_c = \{x \in \mathbb{R}^m / C(x) = c\}$  car ce sont des ensembles invariants. De plus, en modifiant l'énergie par  $H + H_a(C_1, \dots, C_r)$ , on obtient une dynamique de même structure  $J$  et  $R$ .  $H_a$  apparaît donc comme un degré de liberté pour fixer les équilibres à atteindre (pour mémoire, ces équilibres sont les minima de l'énergie), d'où la terminologie *energy shaping*.

Dans un objectif de synthèse de commande par interconnexion, la recherche de Casimir se fait sur la structure global du système interconnecté (et donc sur l'espace étendu aux variables du système et du contrôleur).

### 3 ILLUSTRATION

Nous terminons ce chapitre par la mise en œuvre numérique d'une commande basée sur la synthèse énergétique appliquée à un modèle de pendule commandé en couple.

Notre objectif ici est double. D'une part, nous illustrons plus en détail la démarche de synthèse et sa faisabilité. Et d'autre part, nous illustrons de manière simple la perte d'information liée à la discrétisation de la dynamique et son implication dans le comportement du système bouclé discrétisé.

De la mise en œuvre numérique de ces exemples émerge la problématique de la synthèse énergétique discrète. En effet, sans précaution particulière, l'étape de discrétisation conduit à un système temps discret qui ne possède pas les propriétés intrinsèques du système continu. Entendu que cette démarche de synthèse énergétique repose intrinsèquement sur ces propriétés (passivité, composabilité), les lois de commande ainsi discrétisées engendrent des trajectoires ératiques.

C'est précisément l'objet de ces travaux de thèse que de garantir *a priori* l'information préservée lors du passage continu  $\rightarrow$  discret et par la même de proposer un cadre formel pour l'étude des SHP discret en termes de passivité, stabilité, composabilité et synthèse passive. Les développements issus de cette étude constituent les chapitres suivants de ce mémoire.

Considérons le pendule commandé en couple illustré par la figure 1.3.

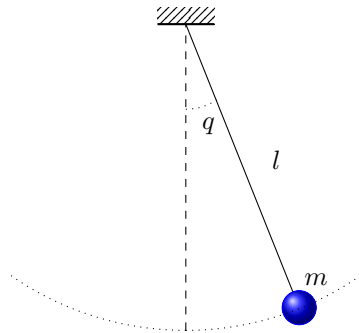


FIGURE 1.3 – Pendule commandé en couple.

Dans le formalisme hamiltonien, les variables d'énergie sont la variable d'angle  $q$  et le moment cinétique  $p$ . On note  $u$  la commande qui exerce un couple sur l'axe du pendule. Pour simplifier, on prendra des grandeurs normalisées (*i.e.*  $mg l = 1$ ) de sorte que l'énergie  $H$  du pendule s'exprime

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q). \quad (1.23)$$

La dynamique du pendule peut être décrite sous la forme d'un SHP engendré par  $(J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, R =$

$[0]$ ,  $H(q, p)$ ,  $g = [0 \ 1]^T$ ), soit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(q) \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = p \end{cases} . \quad (1.24)$$

C'est un système conservatif (au sens des systèmes ouverts, cf Définition 1.2) puisque la variation d'énergie le long des trajectoires s'exprime

$$\frac{dH}{dt} = p\dot{p} + \sin(q)\dot{q} = p(-\sin(q) + u) + \sin(q)p = yu . \quad (1.25)$$

Dans un premier temps, nous considérons la synthèse de la commande *energy shaping*  $u_{es}$ . Nous imposons une dynamique cible  $X_{H_d} = J\nabla H_d$  où  $H_d$  prend la forme

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q) + \frac{K_{es}}{2}q^2 + 1 . \quad (1.26)$$

Il s'agit alors de résoudre en  $u_{es}$  l'égalité  $X_H + gu_{es} = X_{H_d}$ . On notera que seule la partie potentielle est sujette à modification. Pour cette raison, la composante en  $\dot{q}$  reste inchangée et la commande  $u_{es}$  se calcule aisément en résolvant l'équation selon la composante en  $\dot{p}$  :

$$-\sin(q) + u_{es} = -\sin(q) - K_{es}q . \quad (1.27)$$

Dans un second temps, la synthèse de la commande *damping injection*  $u_{di}$  est réalisée sur la base d'un  $L_gV$ -contrôleur, soit  $u_{di} = -K_{di}y$ .

En résumé, la commande IDA-PBC **en temps continu** du pendule non linéaire commandé en couple s'exprime  $u(t) = u_{es}(t) + u_{di}(t)$  avec

$$u_{es}(t) = -K_{es}q(t) \quad \text{et} \quad u_{di}(t) = -K_{di}p(t) . \quad (1.28)$$

La dynamique en boucle fermée s'exprime donc

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -K_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} . \quad (1.29)$$

On notera que  $x^* = (0, 0)$  est une position d'équilibre asymptotiquement stable puisque d'une part  $H_d$  est définie positive au voisinage de ce point, et que d'autre part

$$\frac{dH_d}{dt} = -K_{di}p^2 < 0 . \quad (1.30)$$

**On remarquera la condition (1.30) est satisfaite pour tout réglage  $K_{di} > 0$ . La commande IDA-PBC engendre donc une dynamique bouclée intrinsèquement stable.**

La simulation de la trajectoire continue ne sera pas issue d'une intégration formelle du champ (illusoire dans la majorité des cas). Nous partirons du principe que la précision d'une intégration numérique de ce champ pour un pas suffisamment petit et un horizon temporel suffisamment court est suffisamment grande pour négliger l'erreur d'intégration (de l'ordre de la précision machine). Nous considérerons alors cette trajectoire numérique comme *la* référence. Elle est obtenue avec la routine `ode45`.

On exprime maintenant la dynamique discrète en appliquant un schéma d'Euler explicite (cf tableau 1.1). La traduction **en temps discret** du contrôleur (1.28) est réalisée par une conversion analogique→numérique à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro (d'utilisation pratique courante). On parle alors de *commande émulée*. Elle s'exprime simplement

$$u_{es}(n) = -K_{es}q(n) \quad \text{et} \quad u_{di}(n) = -K_{di}p(n) . \quad (1.31)$$

Nous présentons les résultats de simulation dans le tableau 1.1. Les graphes de gauche correspondent à l'évolution des trajectoires dans le diagramme de phase  $q \times p$ , et ceux de droite à l'évolution temporelle de l'énergie en boucle fermée  $H_d$ .



Dynamique du pendule	
$\dot{q} = p$ $\dot{p} = -\sin(q) + u$	$q(n+1) = q(n) + \Delta t p(n)$ $p(n+1) = p(n) - \Delta t \sin(q(n)) + \Delta t u(n)$
Loi de commande IDA-PBC	
$u_{es}(t) = -K_{es} q(t)$ et $u_{di}(t) = -K_{di} p(t)$	$u_{es}(n) = -K_{es} q(n)$ et $u_{di}(n) = -K_{di} p(n)$
Résultats de simulation	
condition initiale $(q^0, p^0) = (1, 1)$ et pas de discrétisation $\Delta t = 0,25$	
<p>Diagramme de phase en boucle fermée</p>	<p>Évolution de l'énergie bouclée <math>H_d</math></p>
gain d'amortissement $K_{di} = 1$	
gain d'amortissement $K_{di} = 0,4$	

TABLE 1.1 – Comparaison entre la commande continue et la commande émulée

Afin d'illustrer la perte d'information liée à la discrétisation (autre que la précision liée au pas de l'approximation), nous avons choisi deux jeux de paramètres pour le réglage du facteur d'amortissement  $K_{di}$ . La première série a été obtenue pour  $K_{di} = 1$  et la seconde pour  $K_{di} = 0,4$ . Gardons en mémoire que la dynamique bouclée continue possède une stabilité intrinsèque pour tout  $K_{di} > 0$ , cf équation (1.30).

La première série des résultats de simulation (graphes du haut tableau 1.1) obtenue pour un gain d'amortissement  $K_{di} = 1$  s'accorde avec la théorie : l'origine est asymptotiquement stable. On note que la trajectoire discrète converge plus lentement que la continue, ce qui, intuitivement, pourrait s'expliquer



par la précision du schéma d'Euler pour un pas fixé. La convergence asymptotique s'observe également d'un point de vue énergétique par la dissipation de l'énergie disponible (graphe de droite).

Pour la deuxième série des résultats de simulation (graphes du bas tableau 1.1) obtenue avec un gain d'amortissement  $K_{di} = 0,4$  les conclusions sont bien différentes. On constate en effet une divergence de la trajectoire discrète (graphe de gauche) que l'on attribue à la croissance numérique de l'énergie en boucle fermée (graphe de droite).

Une première conclusion s'impose : contrairement au système continu, la dynamique discrète n'est pas intrinsèquement stable. Pour un pas fixé, la stabilité apparaît conditionnée par le réglage des gains du correcteur. On pourrait arguer que numériquement, il suffirait de réduire le pas pour obtenir la convergence, mais cela ne résoudrait en rien l'analyse de stabilité du système discret.

Une deuxième conséquence concerne l'interprétation des résultats de la première série où nous avons attribué la différence du taux de décroissance à la précision du schéma. On peut maintenant préciser cette interprétation. D'un point de vue énergétique, le gain d'amortissement  $K_{di}$  du contrôleur doit assurer deux tâches simultanées : dissiper l'énergie (sa fonction première) et compenser la croissance numérique de l'énergie (due à l'approximation). En conséquence, l'écart du taux de convergence de la première série s'explique mieux par la capacité du contrôleur à compenser la croissance numérique de l'énergie que par la précision du schéma proprement dite.

## 4 PROBLÉMATIQUE

Nous avons rappelé dans ce premier chapitre quelques outils de formalisation de l'approche énergétique pour la représentation, l'analyse et la synthèse de commande de systèmes dynamiques physiques. En particulier, nous avons vu que l'approche hamiltonienne passive possède deux propriétés intrinsèques fondamentales, à savoir la passivité par interconnexion et la composabilité. La méthode de synthèse énergétique pour cette classe de systèmes repose sur ces propriétés. Elle présente l'avantage d'engendrer tous les contrôleurs stabilisants pour cette classe.

Lors de la mise en œuvre numérique, nous avons délibérément choisi un schéma standard (type Euler) pour illustrer la perte de propriété liée à la discrétisation. Dans notre exemple, il s'agissait de la passivité. L'illustration portait sur la (l'in)capacité d'un schéma à transposer la propriété de passivité de la dynamique du système indépendamment du pas d'intégration, donc de manière intrinsèque.

Dans la suite de ce mémoire, nous traitons de l'approximation de la dynamique hamiltonienne passive par un schéma énergétique basé sur un gradient discret. Cette approximation assure intrinsèquement la passivité de la dynamique discrète relativement à la même fonction de stockage et au même taux de dissipation. Nous traitons alors de la mise en réseau de ces dynamiques discrètes et montrons que les propriétés de passivité par interconnexion et de composabilité sont préservées. Dans ce contexte de réseau de systèmes discrets, nous avons également établi des conditions de stabilité pour des structures d'interconnexion retardées et en présence d'incertitudes polytopiques. L'équation de passivité discrète sert ensuite pour une formalisation de la synthèse énergétique discrète qui, à l'instar du continu, repose sur les propriétés intrinsèques de passivité et de composabilité. Enfin, nous proposons une utilisation de cette approche par gradient discret dans le cadre hamiltonien linéaire en dimension infinie.



# Chapitre 2

## Systèmes hamiltoniens passifs à temps discret

### Résumé.

Ce chapitre traite de l'approximation dans le formalisme hamiltonien en vue de préserver les propriétés fondamentales de passivité et de composabilité. Nous proposons une approximation par un schéma énergétique qui assure une équation de passivité relativement à la même fonction de stockage et un taux de dissipation identique. Nous abordons ensuite la question de la stabilité lors de la mise en réseau de ces dynamiques. Nous montrons que, à l'instar du cas continu, la dynamique interconnectée appartient à la même classe. La passivité par interconnexion et la composabilité sont ainsi des propriétés préservées. Nous dérivons des conditions de stabilité à l'aide de l'inégalité de Jensen (approche Lyapunov-Krasovskii) dans l'étude de l'impact des retards de communications induits par la structure d'interconnexion. Nous obtenons enfin des conditions de stabilité robuste pour des incertitudes polytopiques à l'aide de l'inégalité de Wirtinger dans le formalisme hamiltonien en temps continu.

### SOMMAIRE

1	MOTIVATION : TRAJECTOIRE DISCRÈTE VS TRAJECTOIRE CONTINUE . . . . .	27
1.1	Intégrateurs standards : Euler explicite et implicite . . . . .	28
1.2	Intégrateurs géométriques : Euler symplectique A et B . . . . .	29
1.3	Intégrateur énergétique : schéma point-milieu . . . . .	30
2	DYNAMIQUE DISCRÈTE DES SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS . . . . .	31
2.1	Dérivée discrète . . . . .	31
2.2	Gradient discret : définition et exemple . . . . .	32
2.3	Discrétisation de systèmes hamiltoniens passifs . . . . .	36
2.4	Étude comparative avec les approches de la littérature . . . . .	38
2.5	Étude du cas linéaire sans dissipation : flot discret . . . . .	40
3	COMPOSITION DE SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS TEMPS DISCRET . . . . .	42
3.1	Mise en réseau de SHP discrets . . . . .	43
3.2	Illustration : interconnexion de circuits électriques . . . . .	45
4	IMPACT DES RETARDS SUR L'INTERCONNEXION DES SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS À TEMPS DISCRET . . . . .	48
4.1	Un bref état de l'art sur les systèmes à retards . . . . .	49
4.2	Interconnexion en réseau à retard multiple . . . . .	50
4.3	Illustration . . . . .	54
5	UN MOT SUR LES INÉGALITÉS DE WIRTINGER EN TEMPS CONTINU . . . . .	55
5.1	Formulation du problème en temps continu . . . . .	56
5.2	Stabilité et stabilité robuste du système hamiltonien non linéaire . . . . .	57
5.3	Exemple comparatif . . . . .	59

Dans l'objectif d'implémenter des lois de commande sur des calculateurs embarqués, nous étudions tout d'abord l'approximation relativement à un ensemble de propriétés intrinsèques du système d'équations. Cette approximation desservira ensuite à la synthèse discrète.

Dans la littérature, il n'existe pas, mis à part pour le cas linéaire à notre connaissance, de dynamique hamiltonienne à temps discret issue d'une approximation dédiée à la préservation de la passivité. C'est précisément là que ce positionne ces travaux en proposant une approximation par un schéma énergétique étendu aux variables entrées-sortie passives. Cette approche permet ensuite l'étude des propriétés de ces dynamiques en réseau.

Sur le plan numérique, on distingue trois familles d'intégrateurs pour la discrétisation temporelle : les intégrateurs dits *standards*, et les intégrateurs dédiés *géométriques* et *énergétiques*. La bibliographie portant sur l'approximation des dynamiques décrites par des équations aux dérivées partielles est reportée au chapitre 4.

Dans le formalisme hamiltonien, on peut d'ores et déjà écarter la première famille de part son incapacité à préserver les propriétés [Feng et Qin 2002, Hairer et al. 2002, Leimkuhler et Reich 2005]. Nous donnerons une illustration en début de ce chapitre.

Les intégrateurs géométriques ont été développés pour garantir une géométrie du flot discret. La caractéristique principale de cette propriété se situe dans le bon comportement du flot sur des temps longs. On trouve essentiellement des intégrateurs symplectiques [Feng et Qin 2002, Hairer et al. 2002, Leimkuhler et Reich 2005], mais aussi traitant du cas Poisson [Feng et Wang 1994, Zhu et Qin 1994, Karasozen 2004]. Les schémas développés reposent sur une modification de schémas standards (Euler symplectique [Hairer et al. 2002] Euler pondéré [Putz et al. 1999] et Runge-Kutta [Reich 1997]), sur le développement de schéma *leap-frog* [Console et Hairer 2014]. Ces intégrateurs géométriques ont été adaptés pour l'étude des symétries et invariants [McLachlan et Quispel 1998, McLachlan 1995], des contraintes [Leimkuhler et Skeel 1994].

Les intégrateurs énergétiques sont construits pour garantir la conservation de l'énergie à chaque itération. Autrement dit, la contrainte du niveau d'énergie sur lequel évolue la trajectoire est implicitement satisfaite par le schéma. On trouve de nouveau des approches basées sur une modification de schémas standards (Runge-Kutta [Hairer 2005], Runge-Kutta partitionnée dans [Cohen et Hairer 2011] pour les systèmes linéaires), des approches par gradient discret (champ de vecteur moyenné [Harten et al. 1983], différences finies [Itoh et Abe 1998], quotient aux différences [Itoh et Abe 1998], dérivée discrète [Gonzalez 1996]), la méthode *boundar-value* [Aceto et Trigiante 1999] et l'approche par observateur dans [Busvelle et al. 1994]

On retiendra d'une part qu'un intégrateur ne peut satisfaire simultanément la symplecticité du flot et la conservation de l'énergie [Ge et Marsden 1988] (excepté dans le cas linéaire), et d'autre part que les développements de ces schémas concernent des dynamiques libres, c'est à dire ne possédant pas de variables entrée-sortie (inhérentes à l'approche système de l'Automatique).

Dans la littérature, on distingue les schémas d'intégration dans le formalisme hamiltonien entrée-sortie selon trois critères : la préservation de la structure, la préservation de la passivité et la garantie de stabilité par bouclage.

La préservation de la structure (issue de l'approximation en dimension infinie basée sur les éléments finis mixtes [Golo et al. 2004] et une approche purement géométrique dans [Talasila et al. 2004]) a été traitée par une structure de Dirac discrète [Talasila et al. 2006]. Ce dernier donne un cadre formelle pour l'approximation des systèmes hamiltoniens à ports où leur simulation se fait toujours à travers des intégrateurs standards.

L'approche passive, systèmes linéaires temps invariants ont été traités dans [Greenhalgh et al. 2013] par une  $(\theta, \lambda)$ -méthode caractérisant l'ensemble des couples entrée-sortie passifs. Pour les systèmes échantillonnés, il a été montré que la passivité est conditionnée par la fréquence d'échantillonnage [Jiang 1993] et par la dissipation du taux d'approvisionnement [Laila et Nesic 2002] et qu'elle peut être obtenue par modification de la sortie échantillonnée [Stramigioli et al. 2005, Costa-Castello et Fossas 2007, Monaco et al. 2011], par bouclage statique [Navarro-Lopez 2005] et par gradient discret [Laila et Astolfi 2006a, Gören-Sümer et Yalçin 2008, Chabassier 2012]. Ces derniers travaux ont montré que le bilan énergétique discret est exact sauf si la dynamique du système d'origine est linéaire.

On trouve enfin des approches qui visent à garantir la stabilité du système bouclé. En quelques mots, ces approches se bornent à compenser les erreurs d'approximation par l'ajout de termes correctifs qui assurent la convergence de la trajectoire vers l'équilibre désiré [Laila et Astolfi 2005; 2006b]. Des gradients discrets de type quadratique dans [Gören-Sümer et Yalçın 2008].

De ces formulations passives discrètes dans l'approche système, on retiendra que, dans le cas hamiltonien, le bilan d'énergie est satisfait à l'ordre deux. Notre ambition est de renforcer cette description en assurant un bilan d'énergie exact par une *équation* de passivité discrète.

Ce chapitre est constitué des cinq parties suivantes :

La première partie propose une comparaison des propriétés des flots discrets et la perte d'information liée au choix de l'intégrateur. Dans la deuxième partie, nous introduisons la dynamique hamiltonienne passive discrète obtenue par un intégrateur énergétique. La troisième partie étudie la composabilité de ces dynamiques discrètes. Des conditions de stabilité sont obtenus pour un réseau en présence de retard dans la troisième partie. Enfin, nous terminons ce chapitre par une partie dédiée à l'étude des réseaux en présence de retards et d'incertitudes en utilisant les inégalités de Wirtinger.

## 1 MOTIVATION : TRAJECTOIRE DISCRÈTE VS TRAJECTOIRE CONTINUE

Dans ces travaux de thèse, les développements et les contributions reposent sur les propriétés du flot discret. Afin de motiver le choix du schéma d'intégration, on illustre ici le comportement du flot numérique d'un oscillateur harmonique en fonction de l'intégrateur retenu.

Nous distinguons trois familles de schémas numériques qui permettent de discrétiser les systèmes physiques décrits par des équations différentielles ordinaires (EDOs) : les intégrateurs **standards** (Euler, Runge-Kutta, ...), les intégrateurs **géométriques** (Euler symplectique A et B, Runge-Kutta symplectique, ...) et les intégrateurs **énergétiques** (point-milieu, gradient discret, ...).

Pour un système hamiltonien, on retiendra que le flot possède des caractéristiques (telles la symplecticité et la conservation de l'énergie) qui ne sont pas prises en compte par les intégrateurs standards [Feng et Qin 2002, Leimkuhler et Reich 2005]. Il apparaît dès lors nécessaire d'avoir des méthodes d'intégration dédiées pour ces dynamiques.

C'est précisément l'essence des intégrateurs géométriques et énergétiques conçus essentiellement pour cette classe de systèmes. Les propriétés intrinsèques du flot discret, en lien avec celles du flot continu, confèrent une stabilité sur un horizon de temps long, une fidélité pour un large pas d'intégration, [Hairer 1997, Hairer et al. 2002, McLachlan 2007; 1995, Bridges 2006].

Dans ce manuscrit, nous limiterons notre étude au cas des **intégrateurs à un pas**, soit une approximation de  $\dot{x} = X(x)$  par un schéma de la forme  $x(n+1) - x(n) = \Delta t X(n, n+1)$ , où  $\Delta t$  est le pas d'intégration et  $X$  une approximation à deux points du champ.

Nous débutons par une comparaison entre ces différentes familles d'intégrateurs en traitant la cas de l'oscillateur harmonique. On considère le modèle dynamique en temps continu  $\dot{x} = X_H(x)$  où

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ -q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} = J \nabla_x H \quad \text{avec} \quad H(x) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle \quad (2.1)$$

avec  $q$  le déplacement,  $p$  la quantité de mouvement et  $H$  le hamiltonien (l'énergie) du système. Les trajectoires et les propriétés en temps continu et pour un schéma à un pas sont rappelées et présentées dans le tableau 2.1 ci-dessous

La conservation de l'énergie s'observe graphiquement lorsque la trajectoire est un cercle dans le diagramme de phase. La symplecticité du flot s'observe par la conservation des aires. Pour illustrer les expressions analytiques obtenues pour chaque schéma, nous donnons les résultats de simulations pour un ensemble de conditions initiales formant un disque dont l'évolution en termes de distance à l'origine et d'aire renseigne sur les propriétés du schéma considéré.

Temps continu	Approximation un pas
Trajectoires	
$x(t+h) = Ax(t)$ où $A = e^{hJ}$	$x(n+1) = Ax(n)$
Variation d'énergie	
$\dot{H} = \langle \nabla_x H, J \nabla_x H \rangle = 0$	$H(n+1) = \frac{1}{2} \langle x(n), A^T A x(n) \rangle$ énergie constante si $A^T A = I$
Étude de la symplecticité du flot	
$A \in S_p(2, \mathbb{R}) :$ $A^T J A = J$	flot symplectique si $A^T J A = J$

TABLE 2.1 – Caractéristiques des flots continu et discret pour le système (2.1)

### 1.1 Intégrateurs standards : Euler explicite et implicite

Le but de ce paragraphe n'est pas de faire un cours d'analyse numérique sur les intégrateurs standards. Il s'agit d'illustrer la raison pour laquelle leur utilisation s'avère inadaptée pour la discrétisation de systèmes hamiltoniens. La dynamique de l'oscillateur donnée en (2.1) est approchée par deux schémas à

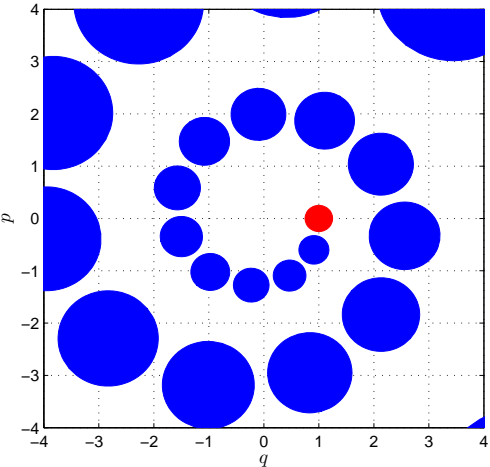
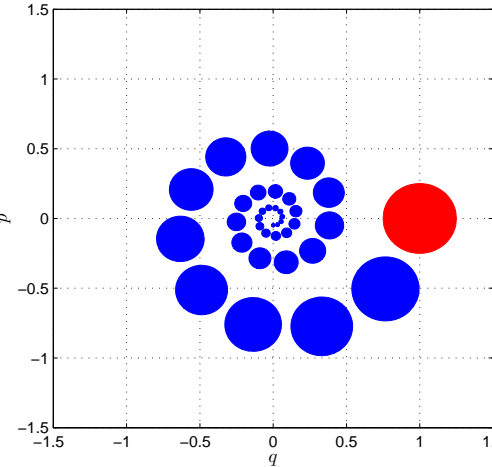
Euler explicite	Euler implicite
Trajectoires discrètes	
$x_e(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{bmatrix} x_e(n) = A_e x_e(n)$	$x_i(n+1) = \frac{1}{1+\Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{bmatrix} x_i(n) = A_i x_i(n)$
Variation d'énergie	
$H_e(n+1) = (1+\Delta t^2)H_e(n)$	$H_i(n+1) = \frac{1}{1+\Delta t^2}H_i(n)$
Étude de la symplecticité du flot discret	
$A_e^T J A_e = (1+\Delta t^2)J$	$A_i^T J A_i = \frac{1}{1+\Delta t^2}J$
Simulation numérique du diagramme de phase ( $\Delta t = 0.25s$ )	
	

TABLE 2.2 – Comparaison entre les schémas Euler explicite et Euler implicite

un pas fixe de type Euler explicite et Euler implicite. On étudie la variation d'énergie et la symplecticité des flots discrets associés et on illustre numériquement ces résultats, cf tableau 2.2.

Dans les deux cas, les expressions de la variation d'énergie indiquent une **dérive** intrinsèque de celle-ci. A

chaque itération du schéma explicite, l'énergie discrète **croît** d'un facteur  $(1 + \Delta t^2) > 1$ . Graphiquement, on observe cette croissance de l'énergie par l'augmentation de la distance des centres des disques à l'origine. Pour le cas implicite, l'énergie discrète **décroit** d'un facteur  $\frac{1}{1+\Delta t^2}$  et on observe une diminution de la distance des centres des disques à l'origine. D'un point de vue énergétique, la divergence du cas explicite traduit une **création d'énergie** par le système discret et la convergence du cas implicite traduit la **dissipation d'énergie** par le système discret.

L'étude de la symplecticité du flot indique une tendance similaire pour l'évolution des aires : le cas explicite (resp. implicite) donne lieu à une variation d'un facteur  $(1 + \Delta t^2)$  (resp.  $\frac{1}{1+\Delta t^2}$ ) conduisant à une augmentation (resp. diminution) de l'aire du disque initiale à chaque itération.

En résumé, les deux propriétés intrinsèques du système continu ne se transposent pas au flot discret. Il apparaît que pour limiter les dérives (énergétique et de symplecticité) liées à l'intégrateur, une réduction du pas d'intégration réduit le facteur conduisant à ces variations. Il se pose alors légitimement la question de la pertinence des résultats numériques et de l'analyse qui peut être faite.

Nous verrons qu'il existe des schémas qui permettent de garantir l'une ou l'autre de ces propriétés, et ce, de manière intrinsèque (*i.e.* indépendamment du pas d'intégration).

## 1.2 Intégrateurs géométriques : Euler symplectique A et B

Comme le nom de cette famille l'indique, le flot discret obtenu par ce type d'intégrateur possède intrinsèquement la même géométrie que le flot du système continu. Citons comme référence les ouvrages [Hairer et al. 2002] et [Leimkuhler et Reich 2005] qui présentent un nombre de développements en lien avec les intégrateurs symplectiques.

Les résultats de l'approximation de la dynamique de l'oscillateur (2.1) par les schémas Euler symplectique A et B respectivement indexés par  $s_A$  et  $s_B$ , sont présentés dans le tableau 2.3.

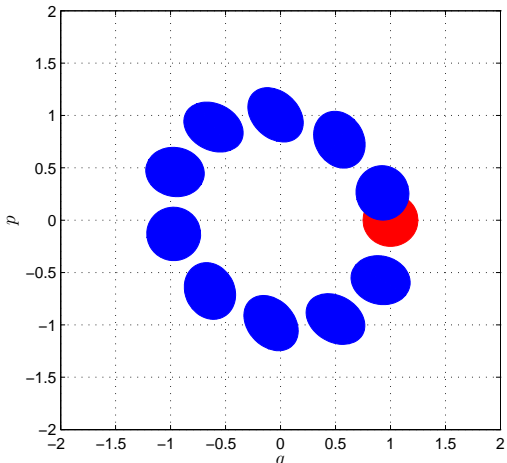
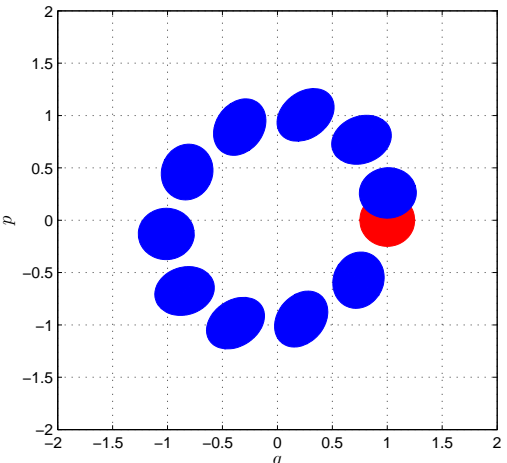
Euler symplectique A	Euler symplectique B
Trajectoires discrètes	
$x_{s_A}(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 - \Delta t^2 \end{bmatrix} x_{s_A}(n)$	$x_{s_B}(n+1) = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{bmatrix} x_{s_B}(n)$
Variation d'énergie	
$H_{s_A}(n+1) = H_{s_A}(n) + O(\Delta t^2)$	$H_{s_B}(n+1) = H_{s_B}(n) + O(\Delta t^2)$
Étude de la symplecticité du flot discret	
$A_{s_A}^T J A_{s_A} = J$	$A_{s_B}^T J A_{s_B} = J$
Simulation numérique du diagramme de phase	
	

TABLE 2.3 – Comparaison entre les schémas Euler symplectique A et Euler symplectique B

Du point de vue énergétique, on constate une déformation de la trajectoire (du cercle à l'ellipse) qui s'accroît pour des temps longs. La dérive numérique est en effet d'ordre  $O(\Delta t^2)$ .

**A priori**, le flot discret hérite de la symplecticité du flot continu. A chaque itération, le disque se déforme **tout en préservant son aire**. La symplecticité inhérente au flot discret confère une grande stabilité aux itérations successives **mais** n'offre pas de garantie sur l'évolution énergétique du système.

### 1.3 Intégrateur énergétique : schéma point-milieu

Nous étudions maintenant le flot discret obtenu par un schéma point-milieu. Dans l'exemple considéré, le flot discret obtenu préserve **à la fois** l'énergie et la symplecticité, comme présenté dans la partie gauche du tableau 2.4.

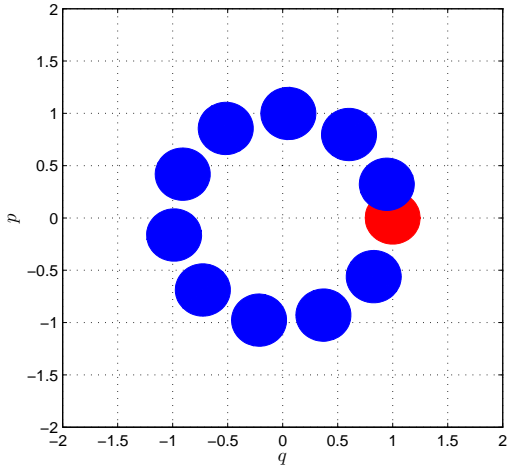
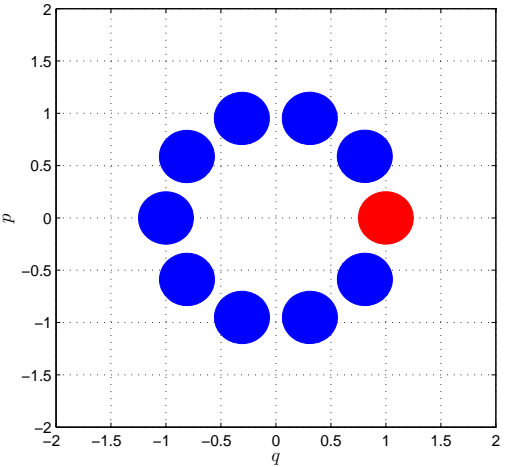
Point-milieu	Solution continue
Trajectoires	
$x_{\text{pm}}(n+1) = \frac{1}{1+\frac{\Delta t^2}{4}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{4} & \Delta t \\ -\Delta t & 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \end{bmatrix} x_{\text{pm}}(n)$	$x_c(t+\Delta t) = \begin{bmatrix} \cos(\Delta t) & \sin(\Delta t) \\ -\sin(\Delta t) & \cos(\Delta t) \end{bmatrix} x_c(t)$
Variation d'énergie	
$H_{\text{pm}}(n+1) = H_{\text{pm}}(n)$	$H_c(t+\Delta t) = H_c(t)$
Étude de la symplecticité du flot	
$A_{\text{pm}}^T J A_{\text{pm}} = J$	$A_c^T J A_c = J$
Simulation numérique du diagramme de phase	
	

TABLE 2.4 – Comparaison entre le schéma point-milieu vs la solution continue

Cependant, on constate malgré tout un recouvrement partiel du dernier disque bleu sur la condition initiale en rouge. Ce phénomène, qui n'a pas lieu sur la figure de droite correspondant aux trajectoires analytiques, s'explique par un **déphasage en temps** de la trajectoire discrète.

Ceci illustre un résultat connu de la littérature [Ge et Marsden 1988] qui affirme qu'une trajectoire discrète satisfaisant simultanément la conservation de l'énergie et la symplecticité est une paramétrisation en temps de la solution analytique. En conséquence, il est illusoire (excepté dans le cas linéaire) d'espérer satisfaire ces deux conditions simultanément.

A partir de ces constatations, il apparaît nécessaire d'orienter le choix du type d'intégrateur en fonction des objectifs visés. Dans ces travaux de thèse, nous nous intéressons au cadre formel permettant de décrire



la dynamique hamiltonienne passive en temps discret. Ce cadre doit permettre d'exprimer de manière naturelle les propriétés intrinsèques des dynamiques continues associées, telles la passivité, la stabilité ou la composabilité.

## 2 DYNAMIQUE DISCRÈTE DES SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS

Nous venons de voir sur une dynamique hamiltonienne simple l'impact de l'intégrateur sur le comportement des trajectoires discrètes et les évolutions énergétiques associées.

Nous présentons ici notre approche de discrétisation des systèmes hamiltoniens passifs. Nous proposons d'utiliser un intégrateur énergétique basé sur un gradient discret pour décrire le comportement du système **en tenant compte des variables entrées/sorties**.

L'originalité de cette approche réside précisément dans la vision système de la dynamique. On trouve en effet dans la littérature une multitude de schémas dédiés à la caractérisation discrète d'invariants mais principalement pour les systèmes libres, *i.e.* sans entrées/sorties.

Le concept de passivité prend en effet son sens dans la description des interactions système  $\longleftrightarrow$  environnement et pour cette raison, le transfert des méthodes issues de la communauté numérique n'est pas immédiat, voire inenvisageable dans la majorité des cas. D'où la nécessité de proposer une approche qui tient compte de ces interactions dès la formulation du problème.

### 2.1 Dérivée discrète

On illustre maintenant l'utilisation d'une dérivée discrète pour la caractérisation d'une intégrale première dans le cas d'un champ hamiltonien symplectique.

Soit  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie  $m$ ,  $V^*$  son dual et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit de dualité sur  $V \times V^*$ . On suppose  $V$  muni d'une 2-forme extérieure non dégénérée  $\omega$ .  $(V, \omega)$  est ainsi un espace symplectique. On rappelle que  $\omega$  détermine un isomorphisme  $\omega^\flat : V \rightarrow V^*$  qui à tout élément  $v$  de  $V$  associe l'unique élément tel que  $\omega(v, \cdot) = -\omega(\omega^\flat(v), \cdot)$ . Alors, à toute fonction différentielle  $H : V \rightarrow \mathbb{R}$  on associe par cet isomorphisme un *champ de vecteur hamiltonien*  $X_H : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  défini par  $\omega^\flat(X_H) = dH$ , où  $d$  désigne la dérivée extérieure.

Pour présenter la caractérisation d'une intégrale première (et en particulier la conservation de l'énergie), nous considérons le système  $(V, \omega, H)$  de dynamique

$$\dot{x} = X_H(x), \quad (2.2)$$

où le champ de vecteur hamiltonien  $X_H$  est supposé lisse. Une *intégrale première* du système  $(V, \omega, H)$  est une fonction différentielle  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait la *condition d'orthogonalité* suivante

$$\langle df(x), X_H(x) \rangle = 0, \quad \forall x \in V. \quad (2.3)$$

On note que  $H$  est trivialement une intégrale de  $X_H$  puisque  $\langle dH, X_H \rangle = \langle \omega^\flat(X_H), X_H \rangle = -\omega(X_H, X_H)$  qui est identiquement nulle par l'antisymétrie de  $\omega$ .

On introduit la notation suivante :  $X$  désigne la variable d'état discrète et  $X'$  la fonction sur  $\mathbb{N}$  définie par  $X'(k) = X(k+1)$ . Les dynamiques discrètes que nous considérons ici sont des solutions approchées de (2.2) par un schéma discret de la forme

$$X' - X = \Delta t X_H(X, X'), \quad (2.4)$$

où  $\Delta t > 0$  représente le pas d'intégration et  $X_H : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une approximation du champ de vecteur hamiltonien  $X_H$  (2.2). La traduction de la condition d'orthogonalité (2.3) pour la dynamique discrète (2.4) repose sur le concept de dérivée discrète suivant.

**Définition 2.1** ([Gonzalez 1996]). *La dérivée discrète d'une fonction lisse  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $Df : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec les propriétés suivantes*

(i) *Directionnalité* :  $\langle Df(x, x'), x' - x \rangle = f(x') - f(x)$  pour tout  $x, x'$  dans  $V$ .

(ii) *Consistance* :  $Df(x, x') = df\left(\frac{x+x'}{2}\right) + O(\|x' - x\|)$  pour tout  $x, x'$  dans  $V$  avec  $\|x' - x\|$  suffisamment petit.

En utilisant l'opérateur de dérivation discrète  $D$ , l'analogue de la condition d'orthogonalité (2.3) s'écrit

$$\langle Df(X, X'), X_H(X, X') \rangle = 0, \quad \forall X, X' \in V. \quad (2.5)$$

Ainsi, lorsque  $f$  est une intégrale première de  $X_H$ , il est nécessaire de définir simultanément une dérivée discrète  $D$  et une approximation du champ  $X_H$  qui assurent (2.5) pour pouvoir déduire que  $f$  est une intégrale de (2.4) et conclure que  $f$  est constante le long des trajectoires discrètes.

L'objectif du paragraphe suivant est de présenter un **intégrateur énergétique** qui assure intrinsèquement l'orthogonalité  $\langle DH, X_H \rangle = 0$ . Pour ce faire, nous verrons que la dérivée discrète  $D$  intervient dans l'approximation  $X_H$  du champ.

## 2.2 Gradient discret : définition et exemple

Dans notre étude, la dynamique hamiltonienne discrète vient de l'approximation des opérateurs différentiels  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\frac{\partial}{\partial x}$  par des taux d'accroissements. Par construction, ces taux vérifient la condition d'orthogonalité (2.5) sur la grille engendrée par la résolution de la dynamique discrète (2.4). Ainsi,  $H$  est une quantité conservée le long des trajectoires discrètes, d'où la terminologie **intégrateur énergétique**.

Les développements et l'interprétation qui suivent sont une reformulation de l'approche par **quotients aux différences** proposés dans [Itoh et Abe 1998]. Dans cet article, une approximation des équations de Hamilton garantissant la conservation de  $H$  est obtenue comme suit.

Sur une grille (un ensemble discret de points), par analogie avec le principe de moindre action, on impose une action (discrète) nulle, soit la variation du lagrangien  $\delta L \equiv 0$  en tout point de la grille. On montre ensuite que cela revient à contraindre les taux d'accroissement  $\overline{\nabla}_{q_i} L$  du lagrangien dans toutes les directions. Ces contraintes engendrent des équations d'Euler-Lagrange discrètes. Les équations de Hamilton sont ensuite déduites par la transformée de Legendre modulo un schéma d'intégration sur les vitesses (qui assure la conservation du hamiltonien). En résumé, l'approximation des équations de Hamilton résulte de l'application du principe de moindre action **ainsi que du choix d'un schéma d'intégration des variables vitesse**.

C'est sur ce point que notre formulation se distingue. A partir des taux d'accroissement définis sur une grille engendrée par une trajectoire, nous introduisons le temps sur cette grille pour obtenir une approximation du champ. Cette approche conduit à contraindre simultanément les opérateurs en temps et en état. Ainsi, les équations discrètes obtenues ne sont plus sujettes au choix d'un schéma en vitesses et, en ce sens, conservent leur caractère intrinsèque du point de vue énergétique.

En voici une présentation détaillée.

Soit  $H$  une fonction de  $\mathbb{R}^m$  à valeurs réelles. Pour tout couple  $(x, x')$  de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  la variation  $\delta H(x, x') = H(x') - H(x)$  vérifie la relation algébrique

$$\begin{aligned} \delta H(x, x') = & H(x'_1, \dots, x'_{m-1}, x'_m) - H(x'_1, \dots, x'_{m-1}, x_m) \\ & + H(x'_1, \dots, x'_{m-2}, x'_{m-1}, x_m) - H(x'_1, \dots, x'_{m-2}, x_{m-1}, x_m) \\ & + \dots \\ & + H(x'_1, \dots, x'_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - H(x'_1, \dots, x'_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ & + \dots \\ & + H(x'_1, x_2, \dots, x_m) - H(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (2.6)$$

On notera que pour chaque ligne du membre de droite, le second terme s'annule avec le premier de la ligne qui suit, et ainsi de suite. On définit alors le **quotient aux différences** comme le taux d'accroissement des termes de chaque ligne de (2.6). Aussi, pour tout  $(x, x') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  le  $i$ -ème quotient aux différences, que l'on note  $\overline{\nabla}_{x_i} H(x, x')$ , est défini par

$$\overline{\nabla}_{x_i} H(x, x') = \frac{1}{x'_i - x_i} [H(x'_1, \dots, x'_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - H(x'_1, \dots, x'_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)]. \quad (2.7)$$

**Proposition 6.**

Soit  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. L'application  $\text{Df} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  définie par

$$(x, x') \mapsto \text{Df}(x, x') = \overline{\nabla}_x f(x, x') = [\overline{\nabla}_{x_1} f \ \overline{\nabla}_{x_2} f \ \cdots \ \overline{\nabla}_{x_m} f]^T(x, x') \quad (2.8)$$

où  $\overline{\nabla}_{x_i} f$  est définie par (2.7), est une dérivée discrète.

**Preuve.** *Immédiat.* #

En particulier, on peut exprimer les taux d'accroissements de  $H$  sur toute grille  $\mathcal{V}$  de la forme

$$\mathcal{V} := \left\{ (v_1)^N \times (v_2)^N \times \cdots \times (v_m)^N \in (\mathbb{R}^m)^N, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Par un jeu d'écriture, en posant pour tout  $(x, x') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ,  $(x, x') = (x, x + \delta x)$ , le quotient fait sens pour tout  $\delta x$ . La variation  $\delta H$  de  $H$  s'écrit alors comme une combinaison linéaire des taux d'accroissements :

$$\delta H(x) = \sum_{i=1}^m \delta x_i \overline{\nabla}_{x_i} H(x) = \langle \delta x, \overline{\nabla}_x H(x) \rangle. \quad (2.9)$$

où  $\delta x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\delta x$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . On omet ici la dépendance en  $x'$  puisque le terme  $\delta x$  reliant  $x$  et  $x'$  apparaît explicitement.

En résumé, sur une grille  $\mathcal{V}$  quelconque, la variation  $\delta H$  de  $H$  se décompose comme une combinaison linéaire des taux d'accroissements  $\overline{\nabla}_{x_i} H(x)$  pondérés par la  $i$ -ème variation  $\delta x_i$  de  $x$ .

Puisque la décomposition (2.9) de  $\delta H$  est valide pour tout  $\delta x$ , un cas intéressant est celui de la dépendance en temps de la variation  $\delta x(t)$  induite par une équation différentielle régissant l'évolution de la variable d'état  $x$ . Nous introduisons le temps  $t$  dans l'équation (2.9) comme suit.

Considérons une grille  $\mathcal{V}_t$  constituée de  $N$  échantillons distincts de la trajectoire de l'équation différentielle régissant  $x$ . Soit  $x(t)$  l'élément de  $\mathcal{V}$  correspondant la solution au temps  $t$ . Il est clair que les composantes de tout élément  $x'$  de  $\mathcal{V}_t$  distinct de  $x$  s'expriment comme une trajectoire solution issue de  $x$ . En d'autres termes, pour tout  $x'$  de  $\mathcal{V}_t \setminus \{x(t)\}$ , il existe un vecteur  $(\delta t_1, \dots, \delta t_m)$  tel que  $x'_i = x_i(t + \delta t_i) =: x_i(t'_i)$ , pour tout  $i$ . On définit alors le taux d'accroissement de chaque composante par le quotient aux différences

$$\overline{\nabla}_t x_i(t, t'_i) = \frac{x_i(t'_i) - x_i(t)}{t'_i - t} = \frac{x'_i - x_i(t)}{\delta t_i}. \quad (2.10)$$

De la relation précédente, on tire l'expression de la variation  $\delta x_i$  de  $x$  en fonction du taux d'accroissement  $\overline{\nabla}_t x_i$ , soit  $\delta x_i = x'_i - x_i(t) = \delta t_i \overline{\nabla}_t x_i(t, t'_i)$ . L'expression de la variation  $\delta H$  de  $H$  sur la grille  $\mathcal{V}_t$  faisant intervenir le temps s'obtient alors en injectant (2.10) dans (2.9), soit

$$\delta H(x(t)) = \sum_{i=1}^m \delta t_i \overline{\nabla}_t x_i(t, t'_i) \overline{\nabla}_{x_i} H(x, x'). \quad (2.11)$$

Nous obtenons ainsi une décomposition de  $\delta H$  sur  $\mathcal{V}_t$ . Cependant, dans l'objectif d'étudier la variation de  $H$  le long d'une trajectoire, il est nécessaire d'imposer un temps d'intégration identique pour chaque composante.

En imposant  $\delta t_1 = \cdots = \delta t_m =: \delta t$ , on obtient  $x' = x(t + \delta t)$  que l'on notera par  $x'(t)$ . On a alors  $\delta x(t) = (x' - x)(t) = \delta t \overline{\nabla}_t x(t)$ , ce qui conduit à la décomposition

$$\delta H(x(t)) = \delta t \langle \overline{\nabla}_t x(t), \overline{\nabla}_x H(x(t)) \rangle \quad (2.12)$$

On remarquera que les quotients aux différences  $\overline{\nabla}_x$  et  $\overline{\nabla}_t$  jouent des rôles analogues à ceux des opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{d}{dt}$  en temps continu.

La relation (2.12) présente un intérêt fondamental car elle traduit sur  $\mathcal{V}_t$  la dérivée de Lie de  $H$  le long des trajectoires. En effet, les relations précédentes permettent de décomposer la variation temporelle de  $H$ , notée  $\overline{\nabla}_t H$ , comme suit

$$\overline{\nabla}_t H(t) = \frac{H(t + \delta t) - H(t)}{\delta t} = \frac{\delta H(x)}{\delta t} = \langle \overline{\nabla}_t x(t), \overline{\nabla}_x H(x) \rangle \quad (2.13)$$

Les taux d'accroissement ainsi définis permettent donc **une évaluation exacte** de la variation  $\delta H$  sur la grille  $\mathcal{V}_t$  **dont les nœuds sont supposés être des points de la trajectoire**.

On pose alors le problème inverse : à partir de la donnée de  $x(t)$  et  $\delta t$ , comment déterminer  $x'(t)$  tel que  $H$  soit conservée ? En itérant, on s'interroge sur la procédure permettant de générer la séquence  $x', x'', x''' \dots$  qui garantit  $\delta H \equiv 0$ . De manière générale, la caractérisation explicite de cette procédure (*i.e.* pour tout  $x(t)$  et tout  $\delta t$ ) correspond à une caractérisation explicite du flot, ce qui est illusoire. La démarche présentée par la suite consiste à contraindre les taux d'accroissement par une approximation du champ vectoriel. Le schéma proposé permet ainsi de **générer** la grille  $\mathcal{V}_{\delta t}$  et sur laquelle (2.12) (ou son équivalent (2.13)) est satisfaite.

Pour illustrer simplement cette démarche, considérons tout d'abord le cas d'un champ symplectique  $\dot{x} = X_H(x) = J(x)\nabla_x H(x)$  dont la forme symplectique  $\omega$  est globalement défini par sa représentation matricielle  $J$ . Avec ce qui précède, nous savons que l'égalité

$$\overline{\nabla}_t x(t) = J(x)\overline{\nabla}_x H(x, x'), \quad (2.14)$$

est satisfaite pour tout couple  $(x, x') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  vérifiant  $x'(t) = x(t + \delta t)$ , et par conséquent, l'énergie est conservée puisque l'antisymétrie de  $J$  dans (2.12) (ou son équivalent (2.13)) implique  $H(x') - H(x) = 0$ . Si l'on se donne  $x$  et  $\delta t$ , il est clair que résoudre l'équation (2.14) en  $x'$  garantit la conservation de  $H$ , et en itérant on définit une trajectoire sur le niveau d'énergie  $H(x)$ .

Nous donnons maintenant le point de vue discret.

On rappelle que l'état discret est donné par une fonction  $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$  définie par  $n \mapsto X(n) = [X_1(n) \ \dots \ X_i(n) \ \dots \ X_m(n)]^T$ . La trajectoire discrète est alors donnée par la matrice  $X^N \in (\mathbb{R}^m)^N$  où  $N$  désigne le nombre d'itérations. On note  $X' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$  la fonction définie par  $n \mapsto X'(n) = X(n+1)$  et on pose  $\Delta X = X' - X$ .

Pour deux états consécutifs  $X, X'$  la variation  $\delta H$  suivant l'identité algébrique (2.6) repose sur le choix de l'ordre des indices. Si l'on considère  $X, X'$  comme deux sommets opposés d'un hypercube,  $X$  étant l'origine et  $X'$  l'extrémité, il existe  $m!$  chemins de connexion. A chaque chemin, on associe l'ordre des indices. A une permutation de  $\{1, \dots, m\}$  près, l'ordre choisit ici sera

$$X \rightarrow [X'_1 \ X_2 \ \dots \ X_m] \rightarrow [X'_1 \ X'_2 \ \dots \ X_m] \rightarrow [X'_1 \ \dots \ X'_{m-1} \ X_m] \rightarrow X'. \quad (2.15)$$

On note  $\Delta_X H$  le vecteur des variations de  $H$  suivant le chemin (2.15), soit

$$\Delta_X H = \begin{bmatrix} H(X'_1, X_2, \dots, X_m) - H(X) \\ H(X'_1, X'_2, \dots, X_m) - H(X'_1, X_2, \dots, X_m) \\ \vdots \\ H(X') - H(X'_1, \dots, X'_{m-1}, X_m) \end{bmatrix} =: [\Delta_{X_i} H]_{i=1:m}. \quad (2.16)$$

On exprime alors les taux d'accroissement en  $X$  et  $H$  par les **gradients discrets**

$$\overline{\nabla}_t X := \frac{\Delta X}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \overline{\nabla}_X H := \frac{\Delta_X H}{\Delta X} \quad (2.17)$$

où  $\frac{\Delta_X H}{\Delta X}$  est la notation entendue comme division terme à terme  $\nabla_X H / \nabla_X$ . En d'autres termes

$$(\overline{\nabla}_t X)_i = \frac{\Delta X_i}{\Delta t} = \frac{X'_i - X_i}{\Delta t} \quad (2.18)$$

et

$$(\overline{\nabla}_X H)_i = \overline{\nabla}_{X_i} H = \frac{\Delta_{X_i} H}{\Delta X_i} = \frac{1}{(X'_i - X_i)} \left[ H(X'_1, \dots, X'_{i-1}, X'_i, X_{i+1}, \dots, X_m) - H(X'_1, \dots, X'_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_m) \right]. \quad (2.19)$$

Nous avons vu que sur une grille engendrée par des points de la trajectoire, la variation  $\delta H$  de  $H$  se décomposait comme une combinaison linéaire des taux d'accroissement  $\overline{\nabla}_{x_i}$  pondérés par les variations  $\delta x_i$ . Cette décomposition est fondamentale car elle s'interprète comme une dérivée de Lie discrète (cf (2.12) ou son équivalent (2.13)). Nous avons ici une décomposition analogue **mais sur la grille que nous générons**. On a en effet

$$\Delta H = \left\langle \frac{\Delta_X H}{\Delta X}, \Delta X \right\rangle = \Delta t \langle \overline{\nabla}_X H, \overline{\nabla}_t X \rangle. \quad (2.20)$$

L'approximation par les gradients discrets (2.17) du champ symplectique  $\dot{x} = J(x)\nabla_x H(x)$  s'écrit

$$\overline{\nabla}_t X = J(x)\overline{\nabla}_X H. \quad (2.21)$$

Ainsi, la trajectoire discrète  $X^N$  est associée à la résolution du schéma d'intégration à un pas  $X' - X = \Delta t X_H(X, X')$  où  $X_H = J\overline{\nabla}_X H$ .

Enfin, l'approximation  $X_H$  du champ  $X_H$  utilisant la dérivée discrète  $\overline{\nabla}$ , la variation d'énergie  $\Delta H := H(X') - H(X)$  décomposée selon (2.20) montre que l'énergie  $H$  est **intrinsèquement conservée**. On a en effet par antisymétrie de  $J$

$$\Delta H = \Delta t \langle \overline{\nabla}_X H, \overline{\nabla}_t X \rangle = \Delta t \langle \overline{\nabla}_X H, J\overline{\nabla}_X H \rangle \equiv 0. \quad (2.22)$$

On notera d'une part que l'on aborde aucunement la tâche délicate de l'approximation de la structure symplectique. Seul nous intéresse son caractère antisymétrique pour garantir la conservation de l'énergie via l'expression discrète de la dérivation de Lie (2.13). On retiendra également que l'on augmente la précision de l'approximation par gradient discret en moyennant sa valeur sur l'ensemble des chemins possibles.

On donne maintenant un exemple numérique de l'utilisation de ce gradient discret.

### Exemple 2.1. Système chaotique (*Hénon Heiles*)

Ce type de modèle a été introduit en 1964 par Hénon et Heiles pour décrire le mouvement chaotique des étoiles dans une galaxie. Il s'agit d'un système d'équations symplectiques dont le comportement numérique obtenu par des intégrateurs standards est ératique.

La dynamique en temps continue est décrite par les équations hamiltoniennes

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \nabla_x H \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_1 &= -q_1 - 2q_1 q_2 \\ \dot{p}_2 &= -q_2 - q_1^2 + q_2^2 \end{cases} \quad (2.23)$$

avec l'énergie totale

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3. \quad (2.24)$$

Nous comparons les trajectoires obtenues avec la routine `ode45` et le gradient énergétique présenté précédemment. Les résultats de simulation dans la plan de phase  $q_1 \times p_1$  sont présentés figure 2.1.

Le pattern périodique obtenu avec le gradient discret (graphe de gauche) est "standard" en ce sens qu'il se retrouve dans la littérature<sup>1</sup>. Par opposition, on observe sur la trajectoire issue de l'intégration par la routine `ode45` (graphe de droite) une densification de points au voisinage de l'origine. Ce phénomène illustre la dérive de l'énergie et il s'accroît avec l'augmentation du temps de simulation.

On notera qu'il est possible d'obtenir de très bons résultats numériques pour ce système à l'aide d'intégrateur symplectique [McLachlan et al. 2004].

1. Les différents patterns voir le site web : <http://physics.unm.edu/Courses/Finley/p573/MagnElctrField/HH11.html>

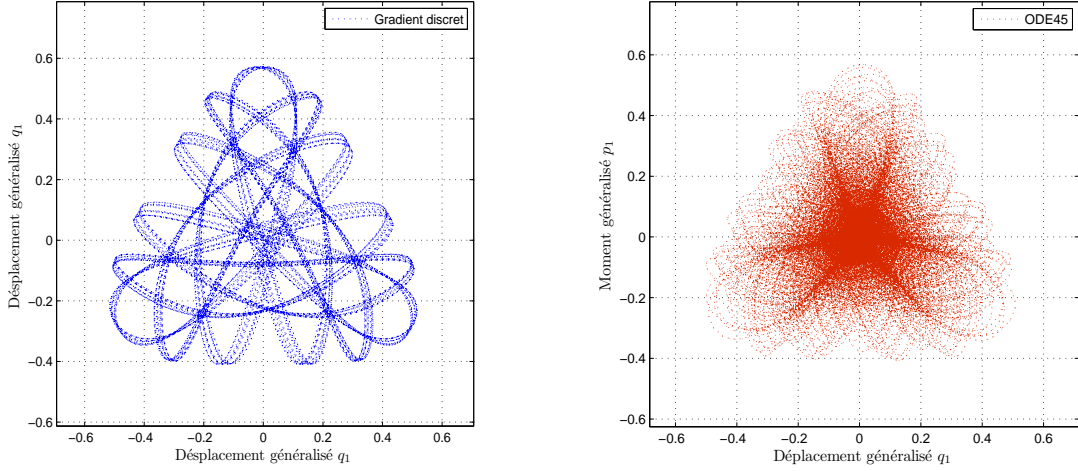


FIGURE 2.1 – Le diagramme de phase  $(p_1 \times q_1)$  obtenu avec le gradient discret (à gauche) et avec `ode45` (à droite).

### 2.3 Discrétisation de systèmes hamiltoniens passifs

Avant de présenter notre approche, nous allons tout d’abord rappeler brièvement le peu de travaux existants dans la littérature qui traitent la discrétisation des systèmes hamiltoniens à ports. Dans le travail de [Talasila et al. 2006], les systèmes hamiltoniens à ports sont considérés comme un objet géométrique appelé structure de Dirac (exprimé en terme efforts/flux). Même si géométriquement le bilan discret est défini, la validation sur la machine de calcul nécessite souvent un schéma de discrétisation (solveur Matlab) qui détruit systématiquement les propriétés de cette classe du système. Dans le travail [Stramigioli et al. 2005], la préservation de la passivité pour les systèmes mécaniques a été étudiée sous échantillonnage. Un autre travail en échantillonné a été proposé dans [Monaco et al. 2009] où ils ont mentionné que la sortie de port échantillonnée joue un rôle important dans la préservation de la passivité. En temps discret, on trouve essentiellement le travail de [Laila et Astolfi 2006a] basé sur un gradient discret modifié issu du travail de [Gonzalez 1996]. Un autre type du gradient discret (quadratique) a été utilisé dans [Gören-Sümer et Yalçın 2008]. L’extension de ces travaux sur la synthèse de lois de commande énergétique a été développée, en échantillonnée dans [Tiefensee et al. 2010] et en temps discret [Laila et Astolfi 2005; 2006b, Gören-Sümer et Yalçın 2011]. Ces derniers montrent qu’un ajout de dissipation est primordiale pour maintenir la stabilité du système en boucle fermée.

Tous ces travaux sont une contribution pour les systèmes hamiltoniens à ports discrets, mais ils restent insuffisants car ils sont incapables de reproduire (exactement) le comportement énergétique du système continu.

La particularité de notre résultat revient au fait qu’il utilise d’une part un gradient discret de type énergétique, et d’autre part, le choix de la sortie de port discrète qui découle directement de la forme du gradient discret. Contrairement à ce qui se fasse dans la littérature, l’avantage de cette approche de discrétisation permet de reproduire fidèlement le comportement énergétique du système continu sur les instants discrets indépendamment du pas de d’intégration.

La dynamique hamiltonienne passive considérée s’exprime

$$(\Sigma_H) : \begin{bmatrix} \nabla_t x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_H^R(x) + g(x)u \\ L_g H(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J(x) - R(x)] \nabla_x H(x) + g(x)u \\ g(x)^T \nabla_x H(x) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

dont le bilan d’énergie conduit à l’égalité de passivité

$$\nabla_t H = \langle X_H^R + gu, \nabla_x H \rangle = u^T y - \nabla_x H^T R \nabla_x H. \quad (2.26)$$

L’approximation du système  $\Sigma_H$  est vue comme une projection  $\Pi : \Sigma_H \mapsto \bar{\Sigma}_H$  dont la dynamique associée est obtenue en remplaçant l’opérateur de dérivation  $\nabla$  par la dérivation discrète  $\bar{\nabla}$ . On introduit la définition suivante.



**Définition 2.2.** Un *système hamiltonien passif à temps discret* est formellement défini par le quadruplet  $(J, R, H, g)$  et les équations discrètes

$$(\bar{\Sigma}_H) : \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_t X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_H^R + gu \\ g^T \bar{\nabla}_X H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J(X) - R(X)] \bar{\nabla}_X H(X, X') + g(X)u \\ g^T(X) \bar{\nabla}_X H(X, X') \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

avec  $J + J^T \equiv 0$ ,  $R = R^T \geq 0$  et les opérateurs  $\bar{\nabla}_t, \bar{\nabla}_X$  définis par (2.17). Les grandeurs  $u$  et  $y$  représentent respectivement l'entrée et la sortie discrète.

Il est clair que, aux choix d'une permutation de  $\{1, 2, \dots, m\}$  et d'une valeur de pas d'intégration  $\Delta t$  près, le système hamiltonien à temps discret (2.27) est une approximation du SHP continu (2.25). Aussi,  $\bar{\Sigma}_H$  pourra être considéré comme un système dynamique à temps discret en tant que tel, ou comme l'approximation  $\bar{\Sigma}_H = \Pi(\Sigma_H)$ . Pour cette raison, sauf mention explicite, nous ne ferons pas la distinction dans la suite de ce mémoire.

On rappelle les définitions de stabilité et de passivité dans le cas discret.

**Définition 2.3** ([LaSalle 1976]). On considère la dynamique discrète décrite par

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (2.28)$$

Soit un  $C \subset \mathbb{R}^m$  un compact et  $O$  un ouvert contenant  $C$ . S'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

1.  $V(x) \leq 0$  pour  $x \in C$  et  $V(x) > 0$  pour  $x \in O$ ,
2.  $V$  est continue,
3.  $\Delta V := V(x(n+1)) - V(x(n)) \leq 0$  pour tout  $x(n) \in O$ ,

alors  $C$  est stable.

Une fonction satisfaisant les conditions 2 et 3 est dite fonction de Lyapunov du système (2.28) sur  $O$ .

**Définition 2.4.** Un système discret de la forme

$$\begin{cases} x(n+1) = f(x(n), u(n)) \\ y(n) = h(x(n), u(n)) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (2.29)$$

est dit **passif** s'il existe une fonction définie positive  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant  $V(0) = 0$ , telle que

$$\Delta V = V(x(n+1)) - V(x(n)) \leq y(n)^T u(n), \quad \forall u(n) \quad \text{et} \quad \forall n. \quad (2.30)$$

On déduit immédiatement que, à l'instar du continu, la dynamique hamiltonienne discrète (2.27) est intrinsèquement passive.

#### Proposition 7.

Le système hamiltonien à temps discret (2.27) où  $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ , vérifie une **égalité de passivité** relativement à la fonction de stockage  $H$  et au taux de dissipation  $\bar{\nabla}_X H^T R \bar{\nabla}_X H$ .

**Preuve.** En utilisant la formulation discrète de la dérivée de Lie (2.20) appliquée à  $H$ , il vient

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t H &= \langle \bar{\nabla}_X H, \bar{\nabla}_t X \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X H(X, X'), [J(X) - R(X)] \bar{\nabla}_X H(X, X') + g(X)u \rangle \\ &= y^T u - \langle \bar{\nabla}_X H(X, X'), R(X) \bar{\nabla}_X H(X, X') \rangle \\ &\leq y^T u. \end{aligned} \quad (2.31)$$

On vérifie ainsi la condition de passivité discrète (2.30) avec  $V(x) = H(x) - \operatorname{argmin} H$ . #

On voit que cette égalité de passivité discrète s'interprète de manière identique à celle obtenue pour un SHP continu. L'énergie discrète accumulée entre deux instants  $X, X'$  est donnée par la quantité de puissance qui transite par les variables entrée-sortie à la dissipation près. On retrouve le caractère *conservatif* (au sens des systèmes ouverts) en l'absence de dissipation (*i.e.*  $R \equiv 0$ ).

On note également que si  $\bar{\Sigma}_H$  résulte de l'approximation de  $\Sigma_H$ , les deux systèmes vérifient une égalité de passivité relativement à la même fonction de stockage et au même taux de dissipation. La projection  $\Pi(\Sigma_H) = \bar{\Sigma}_H$  préserve donc simultanément la propriété de passivité et les fonctions caractéristiques associées.

### Corollaire 1.

Les minima de  $H$  forment un ensemble de points d'équilibre stables.

### Corollaire 2.

La partie libre du SHP discret (2.27) est intrinsèquement stable.

**Preuve.** Cela revient en effet à prendre  $u \equiv 0$  dans (2.31), ce qui donne  $\bar{\nabla}_t H \leq 0$ . #

## 2.4 Étude comparative avec les approches de la littérature

Afin d'éclaircir notre approche, nous allons la comparer avec les résultats de la littérature [Laila et Astolfi 2006a] et [Gören-Sümer et Yalçın 2008]. En deux mots, la différence réside dans la conservation de la notion de passivité en temps discret. Dans ces travaux, le bilan énergétique s'exprime par la relation suivante

$$\bar{\nabla}_t H = -\bar{\nabla}_X H^T R \bar{\nabla}_X H + y^T u + \epsilon(X, X') . \quad (2.32)$$

On constate que l'approximation produit un terme dans le bilan d'énergie qui n'a aucun sens physique due à l'erreur numérique. On distingue la **création d'énergie** et la **dissipation d'énergie** en fonction de signe de l'erreur  $\epsilon(X, X')$ .

Lorsque  $\epsilon$  garde un signe strict positif mais d'amplitude inférieure à la dissipation, le système discret reste passif relativement à  $H$ . Dans le cas contraire, il perd cette propriété.

Si  $\epsilon$  garde un signe strict négatif, le système discret est passif pour un taux de dissipation surévalué. Enfin, dans le cas où le signe de  $\epsilon$  varie avec les itérations, il peut s'avérer délicat de conclure sur la passivité et donc sur la stabilité.

Un cas particulier du système (2.27) est celui d'un **système mécanique** où la modélisation sous la forme hamiltonienne est souvent représentée par une énergie séparable (énergie cinétique et potentielle) quadratique en moment généralisé  $p$ , qui s'écrit en temps continu par la somme

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^2 + V(q) . \quad (2.33)$$

La dynamique discrète dans ce cas est dérivée directement de la Définition 2.2 avec la sortie de port donnée par la moyenne sur le moment généralisé. En dimension deux, la dynamique discrète des systèmes mécaniques conservatifs est donnée par [Aoues et al. 2013b]

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \frac{q(n+1)-q(n)}{\Delta t} \\ \frac{p(n+1)-p(n)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{V(q(n+1))-V(q(n))}{\frac{q(n+1)-q(n)}{2}} \\ \frac{p(n+1)+p(n)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B(q(n)) \end{bmatrix} u(n) \\ y(n) = B(q(n))^T \frac{p(n+1)+p(n)}{2} \end{array} \right. . \quad (2.34)$$

où cette dynamique assure la propriété de passivité en temps discret indépendamment du pas d'intégration. Le bilan énergétique s'exprime alors par

$$\begin{aligned} H(n+1) - H(n) &\triangleq \left[ \frac{1}{2} (p(n+1))^2 + V(q(n+1)) \right] - \left[ \frac{1}{2} (p(n))^2 + V(q(n)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (p(n+1))^2 - (p(n))^2 \right] + V(q(n+1)) - V(q(n)) \end{aligned} \quad (2.35)$$



Le premier terme de l'équation (2.35) s'exprime comme suit

$$\frac{1}{2} \left[ (p(n+1))^2 - (p(n))^2 \right] = \left( \frac{p(n+1)+p(n)}{2} \right) (p(n+1) - p(n)) \stackrel{(2.34)}{=} \left( \frac{q(n+1)-q(n)}{\Delta t} \right) (p(n+1) - p(n))$$

et le deuxième terme

$$V(q(n+1)) - V(q(n)) \stackrel{(2.34)}{=} - (q(n+1) - q(n)) \left( \frac{p(n+1)+p(n)}{\Delta t} \right) + \underbrace{(q(n+1) - q(n)) B(q(n))}_{\Delta t y(n)^T} u(n)$$

alors  $H(n+1) - H(n) \equiv \Delta t y(n)^T u(n)$  est vrai quelque soit le pas d'intégration  $\Delta t$ .

**Remarque 2.1.** *A noter que dans le cas mécanique, si la mesure initiale  $y(0)$  est connue et le champ de vecteur d'entrée  $B$  est inversible, alors on peut calculer directement le déplacement généralisé sans faire appel à aucune méthode de résolution*

$$q(n+1) = q(n) + \Delta t B(q(n))^{-T} y(n) \quad (2.36)$$

ensuite, on déduit le moment généralisé  $p(n+1)$ .

On compare maintenant notre approche avec l'approche proposée dans [Gören-Sümer et Yalçın 2011], considérée comme une approche performante dans le cas des systèmes hamiltoniens à temps discret. Cette technique est basée sur un gradient discret de type quadratique. Son principe, est de décrire chaque gradient continu par la relation  $\nabla_x H = \phi(x)x$  où sa version discrète est donnée par la forme quadratique suivante

$$\bar{\nabla}_x H = \bar{\phi}(x(n+1), x(n)) \left[ \frac{x(n+1) + x(n)}{2} \right] \quad (2.37)$$

où  $\bar{\phi}(x(n+1), x(n)) = [\phi(x(n+1)) + \phi(x(n))] / 2$ . Afin de pouvoir comparer et étudier l'erreur numérique  $\epsilon$ , on donne la dynamique discrète dans le cas mécanique en se basant sur le gradient discret (2.37). Le système hamiltonien passif à temps discret s'écrit dans ce cas par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \frac{q(n+1)-q(n)}{\Delta t} \\ \frac{p(n+1)+p(n)}{\Delta t} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} (V_{gr}(q(n+1))+V_{gr}(q(n)))(q(n+1)-q(n)) \\ \frac{p(n+1)+p(n)}{2} \end{array} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ B(q(n)) \end{bmatrix} u(n) \\ y(n) = B(q(n))^T \frac{p(n+1)+p(n)}{2} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

où  $V_{gr}(q)$  satisfait en temps continu la relation  $\nabla_q V(q) = V_{gr}(q)q$ .

Si nous calculons maintenant le bilan énergétique avec cette dynamique, nous obtenons

$$\begin{aligned} H(n+1) - H(n) &= \frac{1}{2} \left[ (p(n+1))^2 - (p(n))^2 \right] + V(q(n+1)) - V(q(n)) \\ &= \frac{1}{2} [(p(n+1) + p(n)) (p(n+1) - p(n))] + V(q(n+1)) - V(q(n)) \\ &\quad \vdots \\ &= \Delta t \frac{(p(n+1) + p(n))}{2} B(q(n)) u(n) \\ &\quad + V(q(n+1)) - V(q(n)) - \left[ \frac{[V_{gr}(q(n+1)) + V_{gr}(q(n))] (q(n+1)^2 - q(n)^2)}{4} \right] \\ &= \Delta t y(n)^T u(n) + \epsilon(q(n+1), q(n)) \end{aligned} \quad (2.39)$$

De cette relation, on remarque que le bilan énergétique en temps discret n'est pas préservé, une erreur ( $\epsilon(q(n+1), q(n)) \neq 0$ ) intervient, celle-ci est due au schéma d'intégration utilisé. En revanche, la dynamique discrète (2.38) conserve exactement la propriété de passivité si et seulement si l'énergie potentielle a une forme quadratique  $V(q) = \frac{1}{2}q^2$ . Dans ce cas, le terme  $V_{gr}(q(n+1)) = V_{gr}(q(n)) = 1$  ce qui implique  $\epsilon(q(n+1), q(n)) = 0$ .

## 2.5 Étude du cas linéaire sans dissipation : flot discret

Dans le cas de dynamique linéaire, l'approximation conduit à une formulation explicite du flot discret. On retrouve ainsi le schéma point-milieu (en utilisant deux chemins symétriques ou par changement de base).

La dynamique considérée est définie par le triplet  $(J, H, g)$  avec une énergie quadratique  $H(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$ ,  $Q = Q^T > 0$  et les équations

$$\begin{cases} \dot{x} = JQx + gu \\ y = g^T Qx \end{cases} \quad (2.40)$$

Nous proposons une alternative pour retrouver le schéma point-milieu. On peut calculer le gradient discret comme la moyenne des deux chemins d'intégration (*cf* détails annexe 1)

$$\begin{aligned} X &\rightarrow [X'_1 \ X_2 \ \cdots \ X_m] \rightarrow [X'_1 \ X'_2 \ X_3 \ \cdots \ X_m] \rightarrow \cdots \rightarrow X' \\ X &\rightarrow [X_1 \ \cdots \ X_{m-1} \ X'_m] \rightarrow [X_1 \ \cdots \ X'_{m-1} \ X'_m] \rightarrow \cdots \rightarrow X' \end{aligned} \quad (2.41)$$

ce qui conduit à l'expression

$$\bar{\nabla}_X H(X, X') = Q \frac{X' + X}{2}. \quad (2.42)$$

On peut également remarquer que, puisque  $Q$  est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale  $P$  (*i.e.*  $P^T P = I$ ) telle que  $P^T Q P = D$  soit diagonale. Par changement de variable  $x = Pz$ , la dynamique libre devient  $\dot{z} = [P^T J P] Dz$  où  $Dz$  est le gradient de l'énergie  $G(z) = \frac{1}{2}z^T D z$ . Dans cette nouvelle base, on a trivialement  $\bar{\nabla}_z G = D \frac{Z' + Z}{2}$  et la dynamique discrète s'écrit

$$\frac{Z' - Z}{\Delta t} = [P^T J P] D \frac{Z' + Z}{2}. \quad (2.43)$$

En appliquant la matrice de passage à l'expression précédente, on obtient

$$\frac{X' - X}{\Delta t} = P \frac{Z' - Z}{\Delta t} = P [P^T J P] [P^T Q P] \frac{Z' + Z}{2} = JQ \frac{X' + X}{2}. \quad (2.44)$$

On notera que cette approximation correspond au gradient par différences finies utilisé en acoustique du piano [Chabassier 2012].

La dynamique discrète est donnée alors par la définition ci-dessous,

**Définition 2.5.** [Aoues et al. 2013a] Un **système hamiltonien linéaire conservatif** est donné en temps discret par la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{X(n+1) - X(n)}{\Delta t} = JQ \frac{X(n+1) + X(n)}{2} + gu(n) \\ y(n) = g^T Q \frac{X(n+1) + X(n)}{2} \end{cases} \quad (2.45)$$

où  $J$  est une matrice antisymétrique satisfait  $J + J^T = 0$ ,  $Q$  est une matrice symétrique définie positive et  $g$  est une matrice d'entrée.  $u(n)$  et  $y(n)$  sont les entrées et sorties discrètes du système (2.45), respectivement.

En terme de trajectoire, la dynamique discrète (2.45) s'exprime par le flot numérique

$$\begin{cases} X(n+1) = AX(n) + Bu(n) \\ y(n) = CX(n) + Du(n) \end{cases} \quad (2.46)$$

où les différents paramètres sont donnés par

$$\begin{aligned} A &= (I + N)^{-1}(I - N), \quad N = -\frac{\Delta t}{2} JQ \\ B &= \Delta t (I + N)^{-1} g \\ C &= \frac{1}{2} g^T Q (I + A) \\ D &= \frac{\Delta t}{2} g^T Q (I + N)^{-1} g \end{aligned} \quad (2.47)$$

La matrice  $A$  est une **transformée de Cayley**. Elle vérifie la propriété de commutativité suivante

$$A = (I + N)^{-1}(I - N) = (I - N)(I + N)^{-1}. \quad (2.48)$$

En respectant la définition de la sortie de port discrète, on remarque que les trajectoires de la dynamique hamiltonienne discrète (2.46) (ou (2.45)) satisfait un bilan énergétique (exact) en temps discret. Ainsi, le schéma point-milieu conserve l'aspect énergétique pour le système hamiltonien linéaire avec des variables de ports (2.46) (ou (2.45)).

**Proposition 8.**

Le système hamiltonien linéaire donné en temps discret par la dynamique (2.46) (ou (2.45)) est passif et sans pertes relativement au stockage  $H$ .

La preuve à cette proposition peut être obtenue avec deux approches différentes : en utilisant la structure hamiltonienne (2.45) (calcul simple), ou en utilisant le flot numérique donné par la forme explicite (2.46) (calcul complexe).

**Proposition 9** ([Feng et Qin 2002]).

Soit  $A$  et  $N$  sont des matrices non-exceptionnelles<sup>a</sup> liées par  $A = (I + N)^{-1}(I - N)$  et  $N = (I + A)^{-1}(I - A)$ , et  $Q$  une matrice arbitraire. Alors,

$$A^T Q A = Q \iff N^T Q + Q N = 0 \quad (2.49)$$

a. La matrice  $A$  est dite non-exceptionnelle si le  $\det(I + A) \neq 0$

**Preuve.** On montre que pour tout  $n$  le bilan d'énergie en temps discret s'écrit  $\nabla_t H(n) = y(n)^T u(n)$  (équivalent à  $H(n+1) - H(n) = \Delta t u(n)^T y(n)$ ). L'énergie à l'instant  $n+1$  est donnée par  $H(n+1) = \frac{1}{2} \langle X(n+1), Q X(n+1) \rangle$ . Cette dernière conduit à

$$H(n+1) = \frac{1}{2} \langle AX(n), Q AX(n) \rangle + \Delta t \langle u(n), g^T (I + N)^{-T} Q AX(n) \rangle + \Delta t \langle u(n), \frac{\Delta t}{2} g^T (I + N)^{-T} Q (I + N)^{-1} g u(n) \rangle \quad (2.50)$$

Le premier terme de (2.50) est égal à  $H(n)$  grâce à (2.49). Il reste à savoir à quoi le deuxième et le troisième terme sont associés pour pouvoir enfin conclure. La matrice  $N$  est non-exceptionnelle et sa relation avec la matrice  $A$  est donnée par  $2(I + N)^{-1} = I + A$ , et en utilisant l'équation (2.49), il est facile de voir que

$$g^T (I + N)^{-T} Q A = \frac{1}{2} g^T (I + A^T) Q A = \frac{1}{2} g^T Q (I + A) = C \quad (2.51)$$

Enfin, le produit scalaire  $\langle u(n), Du(n) \rangle$  est donné par

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} g^T Q (I + N)^{-1} g &= \frac{\Delta t}{4} g^T Q (I + A) g \\ &= \frac{\Delta t}{4} g^T (I + A)^T Q A g \\ &= \frac{\Delta t}{2} g^T (I + N)^{-T} Q (I - N) (I + N)^{-1} g \\ &= \frac{\Delta t}{2} g^T (I + N)^{-T} Q (I + N)^{-1} g + g^T J g \end{aligned} \quad (2.52)$$

Le premier terme de l'égalité précédente (2.51) est égal au terme de la deuxième rangée de (2.50), et le second terme implique une matrice antisymétrique  $J$ , d'où le terme  $g^T J g = 0$  de l'égalité (2.52) est négligé. Pour résumer, nous avons montré que pour tout  $n$ , le bilan énergétique discret s'écrit sous la forme  $H(n+1) - H(n) = \Delta t \langle u(n), C X(n) + Du(n) \rangle$ .

Il est intéressant de noter que la proposition 8 peut être prouvée en utilisant la dynamique discrète implicite (2.45) plutôt que d'utiliser le flot discret (2.46). En effet, le bilan énergétique discret s'écrit

$$\begin{aligned} H(n+1) - H(n) &= \Delta t \left\langle Q \frac{X(n+1)+X(n)}{2}, \frac{X(n+1)-X(n)}{\Delta t} \right\rangle \\ &= \Delta t \left\langle Q \frac{X(n+1)+X(n)}{2}, \left[ JQ \frac{X(n+1)+X(n)}{2} + gu(n) \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (2.53)$$

qui est égal à  $\Delta t \langle u(n), y(n) \rangle$  par (2.45), ce produit est associé à une structure de Dirac discrète.

### 3 COMPOSITION DE SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS TEMPS DISCRET

En modélisation, on utilise l'invariance de la classe des SHP par composition pour décrire la dynamique d'un système complexe comme un réseau de sous-systèmes (de dynamiques plus simples) interconnectés. Le réseau caractérise ainsi les échanges énergétiques entre sous-systèmes. En vue de l'analyse de la dynamique globale, l'invariance de la classe renseigne sur les diverses propriétés héritées des systèmes (constituants les nœuds du réseau) au travers des échanges énergétiques (les arcs orientés du graphe associé).

Dans l'objectif de description en temps discret de dynamique hamiltonienne se pose naturellement la question de la composabilité des SHP discret que nous avons introduits. A notre connaissance, cette question n'a pas été abordée dans la littérature. Et pour cause, mis à part le cas LTI [Greenhalgh et al. 2013], aucune dynamique hamiltonienne discrète ne s'est affranchie de la dérive numérique de l'énergie (croissante ou décroissante) en présence de variables entrée-sortie. Par conséquent, sans équivalent discret du bilan d'énergie (*i.e.* d'équation de passivité), la question de la composabilité est mal posée.

Nous nous focalisons sur la structure d'interconnexion décrite par la figure 2.2 ci-dessous

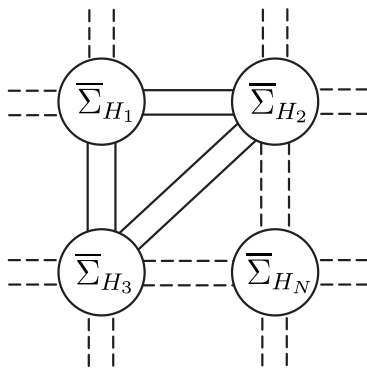


FIGURE 2.2 – Réseau d'interconnexion de SHP discret.

où  $\bar{\Sigma}_{H_i}$  désigne le système discret d'énergie  $H_i$ . La dynamique discrète globale s'exprime  $\bar{\Sigma}_H = \Phi(\bar{\Sigma}_{H_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{H_N})$ , où  $H$  est l'énergie globale et  $\Phi$  l'opérateur de composition.

Nous montrons que l'invariance par composition est préservée par l'opérateur de projection  $\Pi$ . De plus, les opérateurs de composition et de projection commutent, soit  $\Pi \circ \Phi = \Phi \circ \Pi$ .

Brièvement, les travaux qui traitent la composabilité dans la littérature [Golo et al. 2004, Talasila et al. 2005] considère un système hamiltonien comme un objet purement géométrique (structure de Dirac) qui fournit un cadre formel de la préservation de la structure (*i.e.* interconnexion de plusieurs Dirac est une Dirac). Dans ces travaux, le bilan énergétique n'est pas été pris en compte puisque les méthodes d'intégrations inadaptées à cette classe du système sont souvent utilisées pour la simulation.

Dans cette partie, on propose une composition en réseau, qui préserve fidèlement la structure hamiltonienne et le bilan énergétique en temps discret.

### 3.1 Mise en réseau de SHP discrets

On rappelle que du point de vue de la modélisation, la propriété d'interconnexion permet de réduire la complexité des systèmes multi-physiques considérés par la description des interactions entre sous-systèmes et avec leur environnement. Dans une perspective de contrôle, la composabilité est la propriété sous-jacente des techniques de *contrôle par interconnexion* où certains nœuds du réseau sont associés à la dynamique de contrôleurs.

En temps continu, l'interconnexion de SHP se fait au moyen d'une structure dite *continue de puissance*. Cette structure assure un bilan de puissance nulle. En d'autres termes, la somme des puissances sortantes est égale à la somme des puissances entrantes. L'objet géométrique associé s'appelle une structure de Dirac.

**Définition 3.1.** Soient  $\mathcal{U}, \mathcal{Y}$  deux espaces vectoriels,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $\mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  et  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  la forme bilinéaire non dégénérée issue de la symétrisation de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Une **structure de Dirac**  $\mathcal{D} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  est le sous-espace maximal tel que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ , où l'orthogonalité est définie relativement à la forme bilinéaire.

On note que pour tout élément  $(u, y)$  de  $\mathcal{D}$ , on a  $\langle y, u \rangle = 0$ . Et donc, lorsque le produit  $\langle y, u \rangle$  a la dimension physique d'une puissance, on parle de structure continue de puissance. Une première caractérisation matricielle de la structure de Dirac est la *représentation noyau*. On montre en effet qu'il existe deux applications  $\mathbf{U}, \mathbf{Y} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  vérifiant

$$\text{rang}[\mathbf{Y} \quad \mathbf{U}] = m \quad \text{et} \quad \mathbf{U}\mathbf{Y}^T + \mathbf{Y}\mathbf{U}^T = 0, \quad (2.54)$$

et telles que la structure de Dirac  $\mathcal{D}$  se définisse

$$\mathcal{D} = \text{Ker}([\mathbf{Y} \quad \mathbf{U}]) = \{(u, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \mathbf{Y}y + \mathbf{U}u = 0\}. \quad (2.55)$$

Parmi les représentations matricielles [Golo 2002] d'une structure d'interconnexion continue de puissance  $\mathcal{D}$ , nous retiendrons pour notre étude la *représentation canonique*. Pour cette représentation, on montre l'existence d'une base dans laquelle il existe une matrice antisymétrique  $\mathcal{S}$  telle que (2.55) s'exprime

$$\mathcal{D} = \{(u, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : u = \mathcal{S}y\}. \quad (2.56)$$

Nous choisissons cette représentation car elle indique une causalité de calcul entre les sorties et les entrées. On notera que dans le contexte géométrique (plus général) des systèmes hamiltoniens à port, il n'est pas nécessaire de faire explicitement ce choix : la structure de Dirac contraint les variables d'interconnexion sans imposer de notion d'entrée ou de sortie. Puisque nous travaillons en coordonnées hamiltoniennes, il semble plus judicieux de faire un choix.

Nous considérons la mise en réseau de  $N$  SHP discrets  $\bar{\Sigma}_{H_i}$  de dynamique

$$(\bar{\Sigma}_{H_i}) : \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_t X_i(n) \\ y_i(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_i(n) - R_i(n)] \bar{\nabla}_{X_i} H_i(n) + g_i(n) u_i \\ g_i^T(n) \bar{\nabla}_{X_i} H_i(n) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.57)$$

Pour simplifier les écritures, nous considérons le cas où **toutes les variables passives**  $u, y$  sont contraintes par l'interconnexion et pour des champs de vecteurs d'entrée  $g_i$  de rang plein en colonne. Le cas où seul un sous-ensemble de ces variables intervient dans les interactions entre sous-systèmes se déduit clairement de ce qui suit.

On note  $U(n) = [u_1(n)^T \quad \dots \quad u_N(n)^T]^T$  et  $Y(n) = [y_1(n)^T \quad \dots \quad y_N(n)^T]^T$  les vecteurs d'entrée et de sortie regroupant les entrées et sorties de chacun des  $N$  systèmes. La structure d'interconnexion du réseau est définie par la donnée d'une matrice antisymétrique  $\mathcal{S}$  dont la taille est égale à la somme des dimensions des ports de chaque système. La structure d'interconnexion du réseau impose alors la contrainte  $U(n) = \mathcal{S}Y(n)$ .

On montre aisément que la dynamique du réseau  $\bar{\Sigma}_H = \Phi_{\mathcal{S}}(\bar{\Sigma}_{H_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{H_N})$  est décrite par

$$\bar{\nabla}_t X(n) = [J(n) - R(n) + g(n)\mathcal{S}g(n)^T] \bar{\nabla}_X H(n) \quad (2.58)$$

où  $X = [X_1^T \quad \dots \quad X_N^T]^T$  désigne l'état global du réseau,  $H = \sum_{i=1}^N H_i$  représente l'énergie totale, le gradient discret  $\bar{\nabla}_X H(n) = [\dots \quad \bar{\nabla}_{X_i} H_i^T \quad \dots]^T$  regroupe les composantes des gradients des sous-systèmes et les matrices de structure  $J$ , de dissipation  $R$  et d'entrée  $g$  sont données par

$$M(n) = \text{diag}(M_1(n), \dots, M_N(n)), \quad \text{où} \quad M_i \in \{J_i, R_i, g_i\}. \quad (2.59)$$

On a la propriété de **composabilité** des dynamiques hamiltoniennes discrètes.

**Proposition 10.**

La dynamique du réseau  $\bar{\Sigma}_H = \Phi_S(\bar{\Sigma}_{H_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{H_N})$  donnée par (2.58) est un SHP discret qui satisfait une équation de passivité relativement au stockage  $H$  qui est l'énergie totale et au taux de dissipation  $R$  qui est la dissipation totale.

**Preuve.** Il suffit de noter que  $gSg^T$  est antisymétrique pour voir que

$$\begin{aligned} \nabla_t H(n) &= \langle \bar{\nabla}_X H(n), [J(n) - R(n) + g(n)Sg(n)^T] \bar{\nabla}_X H(n) \rangle \\ &= -\bar{\nabla}_X H(n)^T R(n) \bar{\nabla}_X H(n) \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

#

On voit dans ce bilan que lorsque  $\mathcal{R} \equiv 0$  le système est **sans perte**.

**Corollaire 3.**

La dynamique du réseau  $\Sigma_H$  est intrinsèquement stable.

**Preuve.** C'est une conséquence directe de la propriété de composabilité qui induit la passivité par interconnexion. #

Si le réseau discret étudié est constitué de SHP discrets qui résultent de l'approximation d'un réseau de SHP continus, on se pose légitimement la question de l'ordre entre la procédure de discrétisation (la projection  $\Pi$ ) et la procédure d'interconnexion (la composition  $\Phi$ ). Intuitivement, on s'attend à ce que le résultat soit identique. Autrement dit, qu'il soit invariant par rapport à la manière d'obtenir le réseau discret. On montre en effet que les opérateurs de projection et de composition commutent.

Considérons un ensemble de  $N$  SHP continus  $\Sigma_{H_1}, \dots, \Sigma_{H_N}$  dont les champs de vecteurs d'entrée  $g_i$  sont de rang plein en colonne. On note  $\Sigma_H$  le réseau interconnecté par la structure  $\mathcal{D}$  caractérisée par la matrice antisymétrique  $\mathcal{S}$ , soit  $\Sigma_H = \Phi_S(\Sigma_{H_1}, \dots, \Sigma_{H_N})$ , où  $H$  désigne l'énergie totale  $H = \sum_i H_i$ . On note  $\bar{\Sigma}_*$  l'image (discrète) par  $\Pi$  de  $\Sigma_*$ . On a :

**Proposition 11.**

Les opérateurs de projection  $\Pi$  et de composition  $\Phi_S$  commutent, soit  $\Pi \circ \Phi_S = \Phi_S \circ \Pi$ .

Autrement dit, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma_{H_1}, \dots, \Sigma_{H_N}) & \xrightarrow{\Phi_S} & \Sigma_H \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ (\bar{\Sigma}_{H_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{H_N}) & \xrightarrow{\Phi_S} & \bar{\Sigma}_H \end{array}$$

est commutatif.

**Preuve.** En reprenant la dynamique issue de l'interconnexion de SHP continus donnée par l'équation (1.18), on remarque que le générateur de  $\Pi(\Sigma_H) = \Pi(\Phi_S(\Sigma_{H_1}, \dots, \Sigma_{H_N}))$  est identique à celui de  $\Phi_S(\bar{\Sigma}_{H_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{H_N})$  donné équation (2.58). #

### 3.2 Illustration : interconnexion de circuits électriques

Les exemples numériques qui suivent ont pour objectif de mettre en évidence la perte d'information liée à l'absence de composabilité des dynamiques discrètes issues d'intégrateurs standards.

La première série traite de l'interconnexion de systèmes linéaires conservatifs par la mise en réseau de deux circuits  $LC$ . La comparaison se fera entre la solution continue et les dynamiques discrètes obtenues par émulation et par le gradient discret proposé dans ces travaux de thèse. La deuxième série traite deux cas avec dissipation via un réseau d'interconnexion de 4-circuits  $RLC$ . On comparera les dynamiques discrètes émulées et par gradient discrets. On distinguera les cas pour une dissipation faible et élevée.

Enfin, nous tenons à préciser que les interconnexions étudiées sont des cas d'école et n'ont aucune réalité pratique.

**Cas linéaire sans perte.** Considérons l'interconnexion de deux circuits LC donnée par la figure 3.1

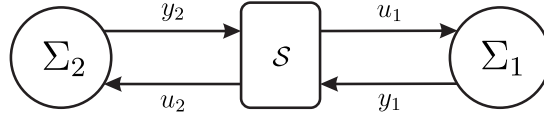


FIGURE 2.3 – Interconnexion de deux circuits LC.

de dynamique hamiltonienne suivante

$$(\Sigma_{H_i}) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i/C_i \\ p_i/L_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \\ y_i = p_i/L_i \end{cases}, \quad i = 1, 2. \quad (2.61)$$

où  $q$  représente la charge et  $p$  représente le flux. L'interconnexion du système  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  s'effectue à travers une interconnexion canonique qui préserve la continuité de puissance donnée par la matrice

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

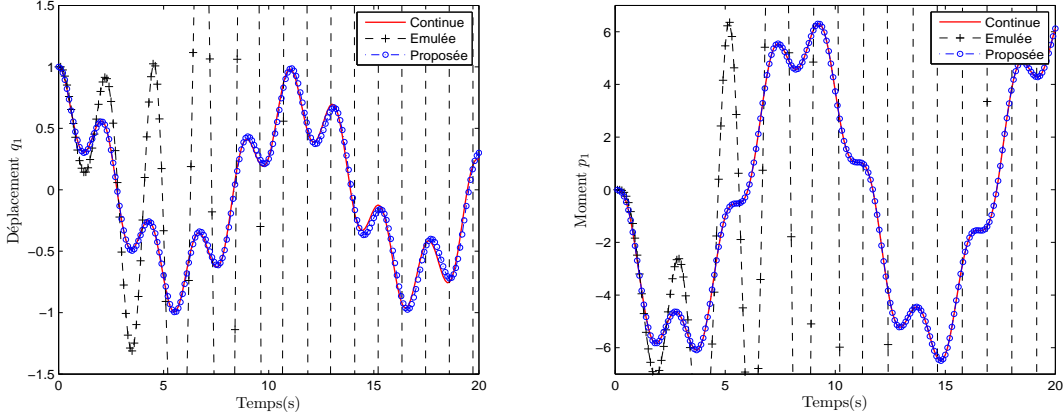
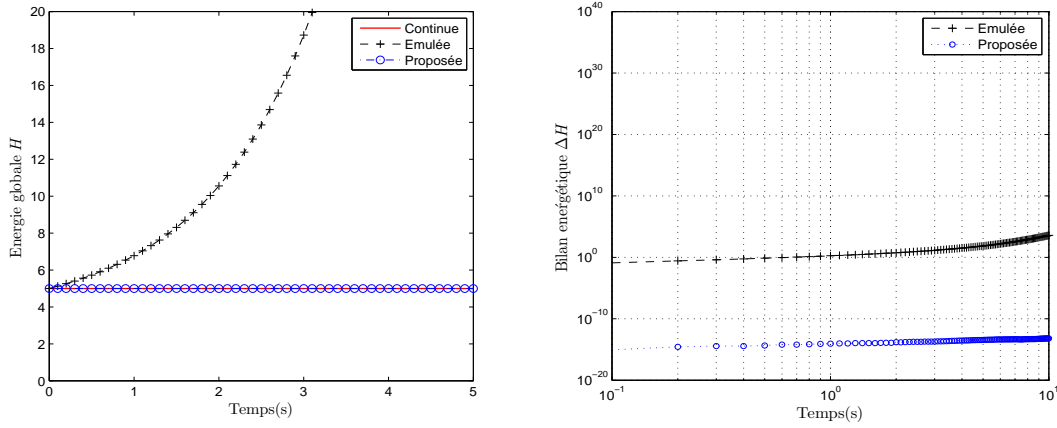
En simulation, Les paramètres de la capacité et de l'inductance sont donnés par  $(C_1, L_1) = (0.2, 2)$  et  $(C_2, L_2) = (10, 0.1)$  et les conditions initiales du système sont  $(q_1, p_1, q_2, p_2) = (-1, 2, 0, 0)$  avec le pas de discrétisation  $\Delta t = 0.1$ .

Afin de faire une comparaison entre les différentes approches discrètes, on prend comme référence la solution continue du système interconnecté. Notez que les résultats de simulation sont effectués sur un horizon du temps très court ( $t = 20s$ ) à cause de la divergence des trajectoires obtenues avec l'approche émulée. Dans la figure 2.4, les trajectoires  $q_1$  et  $p_1$  du système interconnecté sont présentées. Comme prévu, les trajectoires obtenues avec l'approche émulée divergent au bout de quelques secondes de simulation, due à l'instabilité du système interconnecté. Physiquement, cela s'explique par une dérive d'énergie globale discrète (figure 2.5 à gauche) engendrée par l'erreur numérique de ce schéma d'intégration. A partir des figures, on constate que les trajectoires discrètes obtenues avec l'approche proposée dans ce manuscrit suivent exactement le comportement des trajectoires continues considérées ici comme références. Le bilan énergétique discret est donc exactement conservé indépendamment du pas de discrétisation et du temps de simulation comme le montre la figure 2.5 à droite.

Nous limitons maintenant notre analyse à une illustration purement numérique de la dynamique discrète du système interconnecté obtenue par l'approche proposée. Il est important de noter qu'il existe différentes façons pour la mise en œuvre. Bien que ces implémentations sont a priori identiques, les générateurs associés pourraient avoir des comportements énergétiques différents.

Notons que le flot numérique de chaque système est donné par  $\bar{\Sigma}_i$  avec  $i = 1, 2$ , et les variations énergétiques sont calculées par trois façons suivantes :

- 1)  $\nabla H[\phi_y(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2)]$  : associée au générateur obtenu par la composition du flot numérique  $\bar{\Sigma}_1$  et  $\bar{\Sigma}_2$  où la sortie  $y_i(n)$  est considérée comme une fonction de  $x_i(n+1)$  et  $x_i(n)$ .
- 2)  $\nabla H[\phi_u(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2)]$  : associée au générateur obtenu par la composition du flot numérique  $\bar{\Sigma}_1$  et  $\bar{\Sigma}_2$  où

FIGURE 2.4 – L'évolution de la charge  $q_1$  à gauche et  $q_2$  à droite du système interconnecté  $\Sigma_{12}$ .FIGURE 2.5 – L'évolution de l'énergie  $H$  à gauche et sa variation  $\Delta H$  à droite.

l'entrée  $u_i(n)$  est considérée comme une fonction de  $x_i(n)$ .

3)  $\nabla H[\phi(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2)]$  : associé à la discrétisation directe du réseau interconnecté en temps continu, c'est-à-dire  $\bar{\Sigma}_{12} = \Pi(\Sigma_{12})$ .

Les simulations sont réalisées sur l'intervalle de temps  $t \in [0, 10^6]$ s avec un pas de temps  $\Delta t = 0.1$ s et ils sont présentés dans la figure 2.6. Notez que l'émulation ne peut pas fournir une telle simulation de longue durée.

Le pire de ces cas présentent une dérive énergétique de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-9}$ , deux fois meilleurs que dans le cas de la discrétisation directe  $\bar{\Sigma}_{12} = \Pi(\Sigma_{12})$ . Une explication pourrait être que la transformation de Cayley implique une matrice inverse dans le cas de la discrétisation directe, alors que les deux autres cas, ont besoin de plus.

**Cas linéaire avec dissipation.** On s'intéresse maintenant à l'interconnexion de quatre circuits  $RLC$  donnés en temps continu par

$$(\Sigma_{H_i}) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i/C_i \\ p_i/L_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \end{bmatrix} u_i \\ y_i = p_i/L_i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.62)$$

L'interconnexion en temps continu et discret de quatre circuits  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  et  $\Sigma_4$  s'effectue à travers la structure canonique suivante

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \longleftrightarrow & \Sigma_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \Sigma_4 & \longleftrightarrow & \Sigma_3 \end{array} \quad \text{avec} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 & -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$



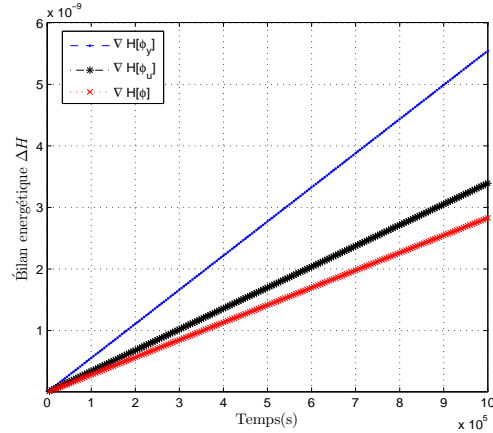


FIGURE 2.6 – La variation d'énergie en fonction du générateur.

Le paramètre  $R_i > 0$  désigne la résistance interne de chaque circuit avec  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0.1$ . En temps continu, le paramètre  $R_i > 0$  joue un rôle important pour assurer la stabilité asymptotique du système interconnecté en satisfaisant le bilan suivant  $\dot{H} = -\nabla_x H^T R \nabla_x H < 0$ . L'énergie en temps continu du système interconnecté diminue au cours du temps pour atteindre son minimum à l'équilibre.

Par intuition, le paramètre de dissipation  $R$  aura deux rôles en temps discret. Le premier similaire au cas continu, il assure la convergence du système vers son point d'équilibre, et le deuxième, sert à compenser l'erreur de discrétisation commise. La question maintenant est de savoir si le terme de dissipation compense toujours cette erreur de discrétisation. En pratique, le choix de la résistance est souvent fixé par un dispositif électrique, donc son augmentation pour compenser cette erreur devient impossible. Le seul moyen pour remédier à ce manque est d'assurer le bilan discret indépendamment du pas de discrétisation afin d'imiter le comportement du système d'origine (continu). Afin d'illustrer nos propos, deux valeurs de la résistance sont prises en compte.

En simulation, les conditions initiales sont les mêmes pour les différentes approches  $(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3, q_4, p_4) = (-1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  avec le pas de discrétisation  $\Delta t = 0.1$ . On distingue deux cas :  $R_i = 0.3$  et  $R_i = 0.1$ .

Concernant le premier cas, la figure 2.7 à gauche montre l'évolution d'énergie globale obtenue avec différentes approches. On remarque que toutes les trajectoires convergent vers l'origine avec une vitesse de convergence différente. La figure 2.7 à droite montre le diagramme de phase  $(q_1 \times p_1)$  où on observe clairement que la vitesse de convergence de l'approche proposée superpose la trajectoire continue. La trajectoire émulée s'écarte légèrement de la continue due à l'erreur de discrétisation.

Dans le cas où la résistance est faible  $R_i = 0.1$ , le système interconnecté discret obtenu avec l'approche émulée est instable. La figure 2.8 à gauche montre la divergence de l'énergie globale discrète obtenue avec cette approche. La seule raison de l'instabilité revient au fait que la résistance dans ce cas n'arrive pas à compenser l'erreur de discrétisation commise par la technique d'émulation. Cependant, l'approche proposée reste stable et ses trajectoires superposent le comportement des trajectoires continues, voir la figure 2.8 à droite.

L'interconnexion en temps discret qu'on a proposé dans cette partie assure à la fois la structure (le système global est un système hamiltonien) et le bilan énergétique indépendamment du pas de discrétisation.

La question maintenant est de savoir si les retards en temps détruisent cette propriété d'interconnexion en temps discret. C'est l'idée de la partie suivante, où uniquement l'étude de stabilité sous l'effet des retards va être prise en compte.

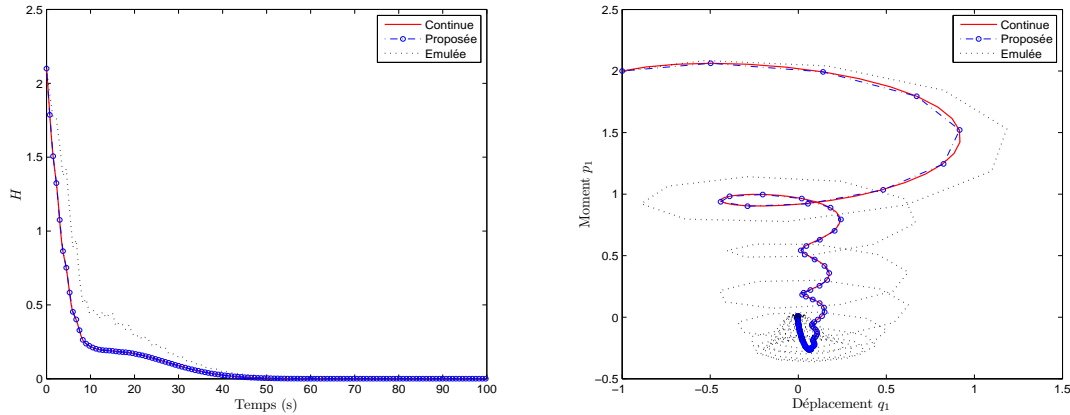


FIGURE 2.7 – Les performances du système interconnecté pour  $R_i = 0.3$  : l'évolution de l'énergie à gauche et le diagramme de phase à droite

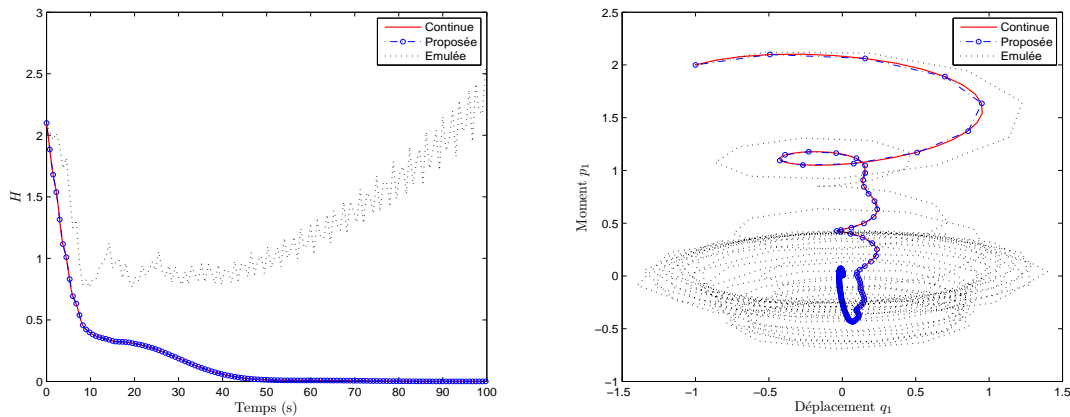


FIGURE 2.8 – Les performances du système interconnecté pour  $R_i = 0.1$  : l'évolution de l'énergie à gauche et le diagramme de phase à droite

#### 4 IMPACT DES RETARDS SUR L'INTERCONNEXION DES SYSTÈMES HAMILTONIENS PASSIFS À TEMPS DISCRET

Nous venons de voir une représentation de la dynamique d'un système comme un réseau de sous-systèmes interconnectés. Un aspect fondamental du formalisme hamiltonien discret que nous avons défini est que l'opérateur de composition préserve la classe. En particulier la stabilité intrinsèque qui découle de la passivité. On s'interroge maintenant sur l'éventuelle présence de retards dans la structure d'interconnexion et leurs conséquences sur le comportement dynamique global.

On peut motiver cette étude d'un point de vue pratique. On peut en effet voir l'intégration du retard dans la structure d'interconnexion comme une modélisation de phénomènes de transport. On rencontre cette problématique en téléopération où la communication longue distance entre le maître (le manipulateur) et l'esclave (le robot) engendre des temps de réponse non négligeables. On peut également imputer la présence de retard dans un réseau à la suite d'un ordonnancement des tâches ou de congestion d'information.

Notre intérêt se porte sur la structure d'interconnexion retardée suivante

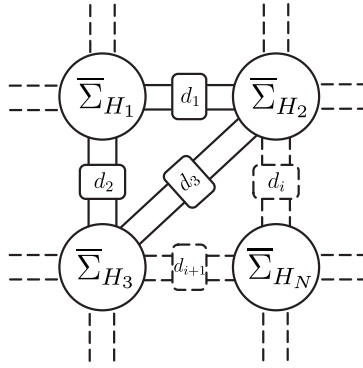


FIGURE 2.9 – Schéma du réseau retardé.

où les  $\bar{\Sigma}_{H_i}$  désignent les dynamiques discrètes et les  $d_i$  les retards, non nécessairement constants. L'écriture du bilan d'énergie globale  $H = \sum_i H_i$

$$\bar{\nabla}_t H(n) = - [\bar{\nabla}_X H(k) R \bar{\nabla}_X H(k)]_{|k=n} + \sum_{i=1}^N \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T \mathcal{M}_i \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d_i(n)}.$$

ne permet plus de conclure quant à la stabilité, comme le cas précédemment. Le premier terme du membre de droite s'apparente à un taux de dissipation via la matrice  $R$  qui encapsule les différentes contributions des sous-systèmes. Mais le second terme fait intervenir tous les échanges en temps différé entre sous-systèmes, via les  $\mathcal{M}_i(n)$ , et on ne peut pas l'analyser avec les outils que nous avons jusque là utilisés.

Dans la littérature, de nombreux travaux ont été développés pour établir des critères de stabilité sous l'effet des retards en temps. Ces critères peuvent être classés en deux types : le critère pour des retards constants et pour des retards variants dans le temps. Pour le premier type, de nombreuses approches ont été proposées [Gopalsamy et He 1994, Shaobo et Gexue 2004, Delice et Sipahi 2012], dans la deuxième catégorie les techniques sont plus restreinte [Moon et al. 2001, Wu et al. 2004]. La majorité de ces techniques sont appliquées aux systèmes linéaires, toutefois l'analyse de la stabilité pour des systèmes non linéaires reste un problème de recherche ouvert dans la littérature. Récemment, une série de travaux a été proposée pour traiter l'impact des retards sur les systèmes hamiltoniens en temps continu, voir [Pasumathy et Kao 2009, Kao et Pasumathy 2012, Yang et Wang 2010, Yoo et al. 2011, Mukhija et al. 2012]. En ce qui nous concerne, nous allons établir des conditions de stabilité pour l'interconnexion en réseau de plusieurs systèmes affectés par des retards multiples variants dans le temps.

Cette étude va être débutée par un bref rappel sur l'approche de Lyapunov-Krasovskii considérée ici comme un pilier pour l'analyse et l'étude de stabilité des systèmes à retards dans le cadre de ce formalisme.

#### 4.1 Un bref état de l'art sur les systèmes à retards

L'objectif de cette section n'est pas de présenter de façon exhaustive la théorie des systèmes à retards, mais plutôt d'introduire les concepts de bases qui seront utiles pour l'étude de la stabilité des systèmes affectés par des retards dans le cadre de ce formalisme.

L'une des techniques importantes pour l'étude des systèmes à retards est connue sous le nom de **Lyapunov-Krasovskii**, voire [Krasovskii 1963]. Cette approche est considérée comme étant une extension directe de la seconde méthode de Lyapunov (introduite dans le premier chapitre) destinée pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards. Son concept revient à chercher des fonctionnelles définies positives qui décroissent le long des trajectoires du système considéré.

Il existe une autre approche pour l'étude de stabilité de systèmes à retards moins utilisée dans la littérature dite **approche de Lyapunov-Razumikhin**, voire [Razumikhin 1956]. Cette approche montre qu'il n'est pas vraiment utile d'assurer la négativité de la variation de la fonctionnelle le long

de toutes les trajectoires du système mais uniquement pour les trajectoires de l'état qui ont tendance à s'écartier du point d'équilibre.

En temps discret, le retard qui affecte le système physique est souvent noté par  $d(n)$  qui peut être constant ou variant dans le temps. Avant chaque étude de stabilité, une hypothèse sur le retard sera faite et il est restreint à l'une des catégories suivantes :

- **Retards majorés** : cette catégorie suppose que le retard  $d_M$  est connu et il varie dans un domaine précis

$$0 < d(n) \leq d_M$$

- **Retards bornés** : suppose que la valeur minimale ( $d_m$ ) et maximale ( $d_M$ ) sont connues, et le retard vérifie la contrainte suivante

$$d_m \leq d(n) \leq d_M$$

- **Retards inconnus** : dans ce cas, aucune hypothèse n'est faite sur les retards.

Certains travaux dans la littérature s'intéressent à l'étude de la robustesse des systèmes à retards. Pour ce faire, deux approches différentes peuvent être utilisées. La première consiste à exprimer les matrices incertaines du système par une somme pondérée des matrices connues et constantes, ce type d'approche dite **l'incertitude polytopiques**. La deuxième consiste à séparer la partie connue de la partie inconnue bornée en norme, d'où l'appellation **l'incertitude bornées en normes**.

Au cour de notre étude, nous optons à l'approche de Lyapunov-Krasovskii pour obtenir des conditions de stabilité, et les incertitudes vont être traitées par la première approche (incertitude polytopiques) afin d'étudier la robustesse des systèmes hamiltoniens à retards.

## 4.2 Interconnexion en réseau à retard multiple

Nous abordons maintenant l'étude de la stabilité d'un réseau de systèmes hamiltoniens en présence de retards variants. On rappelle la dynamique discrète introduite dans ce mémoire

$$(\bar{\Sigma}_{H_i}) : \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_t X_i(n) \\ y_i(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_i(n) - R_i(n)] \bar{\nabla}_{X_i} H_i(n) + g_i u_i \\ g_i^T \bar{\nabla}_{X_i} H_i(n) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.64)$$

On note  $U(n) = [u_1(n)^T \ \dots \ u_N(n)^T]^T$  et  $Y(n) = [y_1(n)^T \ \dots \ y_N(n)^T]^T$  les concaténations des vecteurs d'entrée et de sortie des  $N$  systèmes.

On rappelle également que la structure d'interconnexion **idéalisée** est donnée par une structure de Dirac  $\mathcal{D}$  (cf définition 3.1) caractérisée par la relation  $U(n) = \mathcal{S}Y(n)$  où  $\mathcal{S}$  est une matrice antisymétrique.

Nous considérons ici le cas d'un réseau en présence de retards dont la structure d'interconnexion est caractérisée par

$$U(n) = \mathcal{S}Y(n - d_\kappa(n)), \quad (2.65)$$

avec la notation  $Y(n - d_\kappa(n)) = [y_1^T(n - d_1(n)) \ \dots \ y_N^T(n - d_N(n))]^T$  est le vecteur des sorties retardées, où, par abus de notation,  $d_\kappa(n)$  désigne les retards  $d_1(n), \dots, d_N(n)$  de chaque système  $\bar{\Sigma}_{H_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{H_N}$ . Ces retards variant dans le temps doivent respecter la contrainte

$$0 < d_i^m \leq d_i(n) \leq d_i^M, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.66)$$

où  $d_i^m$  et  $d_i^M$  déterminent les retards minimum et maximum associés à  $\bar{\Sigma}_{H_i}$ .

La structure d'interconnexion retardée (2.65) engendre la dynamique

$$\bar{\nabla}_t X(k)|_{k=n} = [J(n) - R(n)] \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n} + \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_i(n)} \quad (2.67)$$

où les matrices de structure et de dissipation du réseau concatènent celles des sous-systèmes, soit  $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_N)$  et  $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_N)$ , où la structure d'interconnexion considérée introduit les termes retardés via  $\mathcal{M} := g\mathcal{S}g^T = \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i$ . Lorsque l'on calcule le bilan d'énergie du réseau, on obtient

$$\bar{\nabla}_t H(n) = - [\bar{\nabla}_X H(k) R \bar{\nabla}_X H(k)]_{|k=n} + \sum_{i=1}^N \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T \mathcal{M}_i \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d_i(n)}. \quad (2.68)$$

Si l'on interprète ce bilan, le premier terme correspond à la dissipation globale du réseau (identique au cas sans retard) et le second exprime les variations dues aux termes croisés en  $n$  et  $n - d_i(n)$  engendrés par la présence de retards dans la structure d'interconnexion. C'est précisément ce second terme que l'on ne peut étudier avec les outils jusque là introduits.

Dans la littérature, on trouve des méthodes d'estimation du retard au cours du temps pour l'étude de la stabilité. On peut citer l'utilisation d'un filtre de Kalman dans [Iqbal et Roth 2006] et de la transformée en variable d'ondes dans [Anderson et Spong 1989]. L'approche adoptée ici ne se base pas sur une méthode d'estimation mais sur l'utilisation de fonctionnelle de Lyapunov-Krasovski. On énonce le résultat de stabilité du réseau suivant.

### Théorème 3.

La dynamique du réseau retardé (2.67) pour des retards  $d_i$  vérifiant les contraintes (2.66) est asymptotiquement stable s'il existe  $N$  matrices  $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^T > 0$  définies positives solution de l'inégalité matricielle

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -R(n) + (d_i^M - d_i^m + 1) \mathcal{P}_i & \mathcal{M}_i/2 \\ \mathcal{M}_i^T/2 & -\mathcal{P}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (2.69)$$

La démonstration de ce théorème nécessite l'introduction des deux lemmes suivants dont les preuves sont données dans l'Annexe 2.

**Lemme 4.1.** *Pour toute matrice symétrique constante semi-définie positive  $P^T = P \geq 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\sum_{k=n+1-d(n+1)}^{n-1} W_k^T P W_k - \sum_{k=n+1-d(n)}^{n-1} W_k^T P W_k \leq \sum_{k=n+1-d^M}^{n-d^m} W_k^T P W_k. \quad (2.70)$$

**Lemme 4.2.** *Pour toute matrice symétrique constante semi-définie positive  $P^T = P \geq 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\sum_{j=n+2-d^M}^{n+1-d^m} \sum_{k=j}^n W_k^T P W_k - \sum_{j=n+1-d^M}^{n-d^m} \sum_{k=j}^{n-1} W_k^T P W_k = (d^M - d^m) W_n^T P W_n - \sum_{k=n+1-d^M}^{n-d^m} W_k^T P W_k. \quad (2.71)$$

**Preuve.** *Afin de tenir compte des termes retardés dans le bilan d'énergie, on complète l'énergie par deux candidates de Lyapunov-Krasovski comme suit*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1(n) &= H(n), \\ \mathcal{V}_2(n) &= \Delta t \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=n-d_i(n)}^{n-1} \bar{i}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k) \right\}, \\ \mathcal{V}_3(n) &= \Delta t \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=n+1-d_i^M}^{n-d_i^m} \sum_{k=j}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k) \right\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

On cherche maintenant une condition de décroissance de la fonction  $\mathcal{V}(n) = \mathcal{V}_1(n) + \mathcal{V}_2(n) + \mathcal{V}_3(n)$ . On calcule ainsi les variations de chaque fonctionnelle le long des trajectoires du système (2.67) en utilisant la formulation discrète de la dérivation de Lie  $\bar{\nabla}_t f = \langle \bar{\nabla}_x f, \bar{\nabla}_t x \rangle = \frac{1}{\Delta t} \Delta f$  introduite équation (2.20).

La variation de  $\mathcal{V}_1$  est donnée par le bilan d'énergie sur  $H$  exprimée équation (2.68). On remarque qu'en introduisant le vecteur  $\xi(n) = [\bar{\nabla}_X H(n)^T \quad \bar{\nabla}_X H(n - d_i(n))^T]^T$  on exprime cette variation sous la forme

$$\bar{\nabla}_t \mathcal{V}_1 = \sum_{i=1}^N \xi^T(n) \begin{bmatrix} -R(n) & \mathcal{M}_i/2 \\ \mathcal{M}_i^T/2 & 0 \end{bmatrix} \xi(n) \quad (2.73)$$

Calculons la variation de  $\mathcal{V}_2$ , il vient

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t \mathcal{V}_2(n) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \sum_{k=n+1-d_i(n+1)}^n - \sum_{k=n-d_i(n)}^{n-1} \right) \bar{\nabla}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \bar{\nabla}_X H(n)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(n) - [\bar{\nabla}_X H_i(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k)]_{|k=n-d_i(n)} \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \sum_{k=n+1-d_i(n+1)}^{n-1} - \sum_{k=n+1-d_i(n)}^{n-1} \right) \bar{\nabla}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k) \right\}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

En appliquant le lemme 4.1, on majore le dernier terme de l'équation précédente par une somme sur les bornes du retard, soit

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t \mathcal{V}_2(n) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ \bar{\nabla}_X H(n)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(n) - [\bar{\nabla}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k)]_{|i=n-d_i(n)} \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=n+1-d_i^M}^{n-d_i^m} \bar{\nabla}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k) \right\}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Par le lemme 4.2, la variation de la troisième fonctionnelle  $\mathcal{V}_3$  s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t \mathcal{V}_3(n) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \sum_{j=n+2-d_i^M}^{n+1-d_i^m} \sum_{k=j}^n - \sum_{j=n+1-d_i^M}^{n-d_i^m} \sum_{k=j}^{n-1} \right) \bar{\nabla}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ (d_i^M - d_i^m) \bar{\nabla}_X H(n)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(n) - \sum_{k=n+1-d_i^M}^{n-d_i^m} \bar{\nabla}_X H(k)^T \mathcal{P}_i \bar{\nabla}_X H(k) \right\} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Enfin, puisque les derniers termes des équations (2.75) et (2.76) s'annulent, la variation de  $\mathcal{V}$  le long des trajectoires du système (2.67) s'écrit

$$\bar{\nabla}_t \mathcal{V}(n) \leq \sum_{i=1}^N \xi(n)^T \begin{bmatrix} -R(n) + (d_i^M - d_i^m + 1) \mathcal{P}_i & \mathcal{M}_i/2 \\ \mathcal{M}_i^T/2 & -\mathcal{P}_i \end{bmatrix} \xi(n) \quad (2.77)$$

On conclut quant à la stabilité asymptotique en remarquant  $\xi = 0$  si et seulement si  $X \equiv 0$ .

Du théorème précédent, des conditions de stabilité pour des retards constants  $d_i(n) = d_i$  peuvent directement dérivées, voir le corollaire ci-dessous,

**Corollaire 4.**

Le système retardé (2.67) pour des retards constants  $d_i$  vérifiant les contraintes (2.66) est asymptotiquement stable s'il existe  $N$  matrices  $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^T > 0$  définies positives solution de l'inégalité matricielle

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -R(n) + \mathcal{P}_i & \mathcal{M}_i/2 \\ \mathcal{M}_i^T/2 & -\mathcal{P}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (2.78)$$

En première analyse, ce résultat fournit une condition *formelle* de stabilité en ce sens que l'inégalité matricielle à résoudre n'est pas directement implémentable puisque dépendante de l'état. Cependant, dans certains cas, cette dépendance n'a pas lieu.

On peut tout d'abord s'affranchir du terme de dissipation, ce qui a pour conséquence d'augmenter le conservatisme de la condition de stabilité, en utilisant le fait que  $R$  est définie positive. On a ainsi le corollaire :

**Corollaire 5.**

La dynamique du réseau retardé (2.67) pour des retards  $d_i$  vérifiant les contraintes (2.66) est asymptotiquement stable s'il existe  $N$  matrices  $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^T > 0$  définies positives solution de l'inégalité matricielle

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} (d_i^M - d_i^n + 1) \mathcal{P}_i & \mathcal{M}_i/2 \\ \mathcal{M}_i^T/2 & -\mathcal{P}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (2.79)$$

Un autre cas intéressant cher en automatique, il s'agit de l'interconnexion feedback entre un système et son contrôleur. Si nous supposons que l'interconnexion se fait à travers un retard variant comme le présente la figure 2.10,

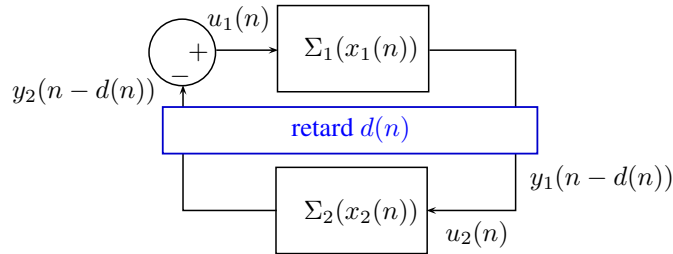


FIGURE 2.10 – Interconnexion par feedback de deux systèmes sous l'effet d'un retard variant  $d(n)$

avec la dynamique discrète du système interconnecté est donnée par

$$\bar{\nabla}_t X(k)|_{k=n} = [J(n) - R(n)] \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n} + \mathcal{M} \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)} \quad (2.80)$$

où les matrices

$$J - R = \begin{bmatrix} J_1 - R_1 & 0 \\ 0 & J_2 - R_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & -g_1 g_2^T \\ g_2 g_1^T & 0 \end{bmatrix}$$

Du Théorème 3, les conditions de stabilité dans le cas feedback avec un seul retard  $d(n)$  sont données dans le corollaire suivant,

**Corollaire 6.**

Le système retardé (2.80) pour un retard  $d(n)$  variant dans le temps est dit asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$  définie positive solution de l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} -R(n) + (d^M - d^m + 1) \mathcal{P} & \mathcal{M}/2 \\ \mathcal{M}^T/2 & -\mathcal{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.81)$$

Si l'on considère des systèmes dont la dissipation interne est **constante**, alors l'inégalité matricielle du théorème 3 est implémentable. On aboutit à la même conclusion lorsque le terme de dissipation peut être *a priori* **borné**, ce qui implique de nouveau une augmentation du conservatisme.

**Remarque 4.1.** *Il est important de noter que les conditions de stabilité proposées sont aussi valables pour le cas de l'interconnexion en réseau des systèmes linéaires. Dans ce cas  $H$  est quadratique et les matrices  $J$  et  $R$  sont constantes, ce qui donne une LMI implémentable directement.*

**4.3 Illustration**

Afin d'illustrer ce résultat de stabilité, on considère deux systèmes hamiltoniens à ports (indexés par 1 et 2) donnés par la dynamique non linéaire suivante

$$(\Sigma_i :) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{bmatrix} = (J_i - R_i) \begin{bmatrix} \nabla_{q_i} H_i \\ \nabla_{p_i} H_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \end{bmatrix} u_i, \\ y_i = \alpha_i \nabla_{p_i} H_i \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (2.82)$$

avec l'énergie de chaque système

$$H_i = \frac{1}{2} p_i^2 - \gamma_i \cos(q_i) + \beta_i$$

où les paramètres  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \beta_1 = 1$  et  $\beta_2 = 3$ . La matrice de structure  $J_1 = J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , La matrice de dissipation de  $\Sigma_1$  est  $R_1 = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 \\ 0 & 0.425 \end{bmatrix}$  et de  $\Sigma_2$  est  $R_2 = \begin{bmatrix} 0.175 & 0 \\ 0 & 0.325 \end{bmatrix}$ . Les vecteurs d'entrée de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont  $G_1 = [0, \alpha_1]^T$  et  $G_2 = [0, \alpha_2]^T$  avec  $\alpha_1 = 0.1$  et  $\alpha_2 = 0.2$ , respectivement. Les conditions initiales sont  $(q_1, p_1, q_2, p_2) = (0.2, 0, 0.2, 0)$  et le pas de discrétisation  $\Delta t = 0.5s$ . En utilisant la forme discrète (2.34), le système (2.82) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \bar{\nabla}_t q_i(n) \\ \bar{\nabla}_t p_i(n) \end{bmatrix} = (J_i - R_i) \begin{bmatrix} -\gamma_i \frac{\cos(q_i(n+1)) - \cos(q_i(n))}{q_i(n+1) - q_i(n)} \\ \frac{p_i(n+1) + p_i(n)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \end{bmatrix} u_i(n) \quad (2.83)$$

$$y_i(n) = \alpha_i \frac{p_i(n+1) + p_i(n)}{2}$$

où  $\bar{\nabla}_t q_i(n) = \frac{q_i(n+1) - q_i(n)}{\Delta t}$  et  $\bar{\nabla}_t p_i(n) = \frac{p_i(n+1) - p_i(n)}{\Delta t}$ . L'interconnexion de ces deux systèmes discrets s'effectue à travers la structure retardée où les  $d_i(n) \in \{1, 2, \dots, 8\}, i = 1, 2$  sont générés de façon aléatoire. La matrice antisymétrique est donnée

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}$$

Le système interconnecté en temps discret est

$$\bar{\nabla}_t \mathcal{X}(k)|_{k=n} = [\mathcal{J}(n) - \mathcal{R}(n)] \bar{\nabla}_t \mathcal{H}(k)|_{k=n} + \sum_{i=1}^2 \mathcal{M}_i \bar{\nabla}_t \mathcal{H}(k)|_{k=n-d_i(n)} \quad (2.84)$$

Notez que numériquement, quelques problèmes de résolution peuvent apparaître lorsque la différence  $q_i(n+1) - q_i(n)$  dans le dénominateur du gradient discret  $\bar{\nabla}_t \mathcal{H}(n)$  devient faible. Nous avons utilisé les relations trigonométriques  $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin((a+b)/2)\sin((a-b)/2)$  pour donner une expression



plus fiable et éviter la division sur zéro.

En résolvant la LMI (2.79) donnée par le Théorème 3, les valeurs propres sont obtenues

$$\sigma(\Gamma) = - [0.1510287 \quad 0.1404882 \quad 0.1227004 \quad 0.1170479 \quad 0.0223995 \quad 0.0065374 \quad 0.0009940]$$

On peut donc conclure que pour tout  $\Delta t$ , on obtient  $\bar{\nabla}_t \mathcal{V}(n) < 0$  et le système interconnecté est asymptotiquement stable. En simulation, on observe que toutes les trajectoires discrètes du système interconnecté

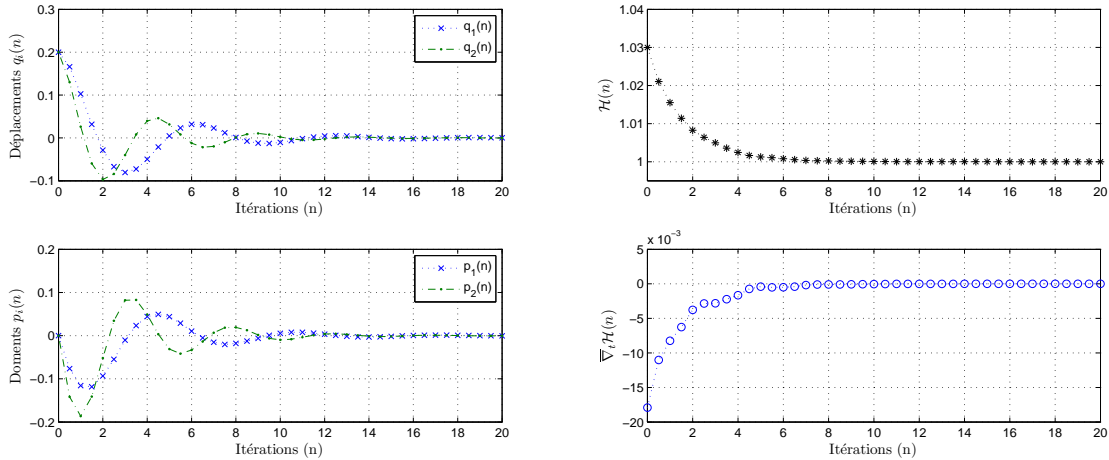


FIGURE 2.11 – Les trajectoires du système (à gauche) et l'énergie et sa variation (à droite).

convergent vers l'équilibre (l'origine), voir la figure 2.11 à gauche. En ce qui concerne l'énergie globale et sa variation (bilan énergétique), on constate que l'énergie diminue au cours du temps et sa variation donc est négative, voir la figure 2.11 à droite.

## 5 UN MOT SUR LES INÉGALITÉS DE WIRTINGER EN TEMPS CONTINU

Dans cette dernière partie, nous présentons une étude de la stabilité de dynamique hamiltonienne en temps continu. Cette étude reprend les travaux de [Pasumathy et Kao 2009] et [Yoo et al. 2011] où des conditions de stabilité par Lyapunov-Krasovskii ont été établies à partir des inégalités de Jensen.

Nous proposons ici de dériver des conditions de stabilité à partir des inégalités de Wirtinger que l'on sait conservatives. Nous traiterons le cas de l'interconnexion de deux SHP par feedback présenté par la figure 2.12.

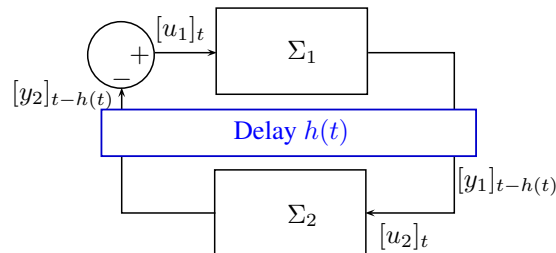


FIGURE 2.12 – Interconnexion par feedback de deux systèmes non linéaires en temps continu.

Le retard  $h(t)$  intervenant dans le réseau satisfait les contraintes suivantes :

$$0 \leq h(t) \leq h_M \quad \text{et} \quad 0 \leq \dot{h}(t) \leq d < 1 \quad (2.85)$$

où  $h_M$  désigne la valeur maximal du retard et  $\dot{h}(t)$  la vitesse de variation du retard.

Classiquement, la réduction du conservatisme fait appel souvent à l'ajout de fonctionnelles, ce qui conduit à des calculs gigantesques qui complexifient l'étude et l'analyse du système considéré. D'un point de vue constructif, le calcul de la dérivée de  $V$  entraîne souvent des termes intégraux difficiles à manipuler. Une des manières de faire, est de les majorer, c'est l'idée des **inégalités de Jensen** donnée en temps continu par le lemme suivant

**Lemme 5.1.** *Pour tout scalaire  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice définie positive, fonction  $f \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que l'intégrale soit définie, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\int_a^b \dot{f}(s)^T \mathcal{Q} \dot{f}(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} f(b) \\ f(a) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & -\mathcal{Q} \\ * & \mathcal{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(b) \\ f(a) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Cette inégalité est considérée comme un pilier principal de plusieurs contributions importantes dans la communauté des systèmes à retards, voir [Gu et Kharitonov 2003] et [He et al. 2007].

Dans le cadre du formalisme hamiltonien, cette inégalité a été utilisée lors de l'étude de stabilité dans les travaux de [Pasumathy et Kao 2009] et [Yoo et al. 2011]. Notre approche vise à améliorer ces résultats de la littérature en utilisant une nouvelle classe d'inégalité connue sous le nom **inégalités de Wirtinger** qui englobent les inégalités de Jensen.

## 5.1 Formulation du problème en temps continu

Considérons deux systèmes hamiltoniens à ports en temps continu donnés par la dynamique (voir le premier chapitre)

$$(\Sigma_i) : \begin{cases} \dot{x}_i = (J_i - R_i) [\nabla_{x_i} H_i]_t + G_i u_i \\ y_i = G_i^T [\nabla_{x_i} H_i]_t \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (2.87)$$

On s'intéresse dans cette partie à une interconnexion feedback de deux systèmes hamiltoniens non linéaires affectée par un retard en temps donnée par la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} [u_1]_t \\ [u_2]_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [y_1]_{t-h(t)} \\ [y_2]_{t-h(t)} \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

A travers cette interconnexion, le système global est donné par la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - R_1 & 0 \\ 0 & J_2 - R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\nabla_{x_1} H_1]_t \\ [\nabla_{x_2} H_2]_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -G_1 G_2^T \\ G_2 G_1^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\nabla_{x_1} H_1]_{t-h(t)} \\ [\nabla_{x_2} H_2]_{t-h(t)} \end{bmatrix} \\ \iff \dot{\mathcal{X}} = (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t + \mathcal{M} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \end{cases} \quad (2.89)$$

De l'équation précédente, la structure hamiltonienne est perdue sous l'effet du retard  $h(t)$ . Nous nous intéressons uniquement à la stabilité du système (2.89). En prenant  $\mathcal{H}$  comme une candidate de Lyapunov, le bilan énergétique en temps continu s'exprime par

$$\frac{d\mathcal{H}_t}{dt} \stackrel{(2.89)}{=} -\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{R} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{M} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \quad (2.90)$$

De la relation (2.90), nous pouvons conclure que la candidate  $\mathcal{H}$  ne suffit pas pour prouver la stabilité du système interconnecté. Le terme de gauche est défini positif tandis que le terme de droite peut être défini positif ou négatif. Donc le choix des autres fonctionnelles est indispensable.

Avant de ce faire, nous allons tout d'abord rappeler les inégalités de Wirtinger utilisées récemment dans le travail [Seuret et Gouaisbaut 2013] donné par le lemme suivant

**Lemme 5.2.** [Seuret et Gouaisbaut 2013] *Pour tout scalaire  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice définie positive, fonction  $f \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que l'intégrale soit définie, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\int_a^b \dot{f}(s)^T \mathcal{Q} \dot{f}(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & 0 \\ 0 & 3\mathcal{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

où

$$\Omega_0 = f(b) - f(a), \Omega_1 = f(b) + f(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(s) ds.$$

La preuve à ce lemme est détaillée dans [Seuret et Gouaisbaut 2013].

## 5.2 Stabilité et stabilité robuste du système hamiltonien non linéaire

Dans cette section, nous considérons le problème de stabilité du système interconnecté (2.89) affecté par un retard variant dans le temps. En introduisant les mêmes fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii que celles proposées dans le travail de [Yoo et al. 2011], et en se basant sur l'inégalité de Wirtinger, nous établissons le résultat suivant

**Théorème 4** ([Aoues et al. 2014]).

Le système interconnecté (2.89) est asymptotiquement stable pour tout retard  $h(t)$  satisfait (2.85), s'il existe des matrices symétriques  $\mathcal{P} > 0$ ,  $\mathcal{S} > 0$  et  $\mathcal{Q} > 0$  de dimensions appropriées telles que la condition LMI soit vérifiée :

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.92)$$

où les différents paramètres

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= -\mathcal{R} + \mathcal{S} - 4\mathcal{Q} + (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T \alpha (\mathcal{J} - \mathcal{R}) + \mathcal{P} \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t (\mathcal{J} - \mathcal{R}) + (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T \mathcal{P} \\ \Xi_{12} &= \frac{1}{2} \mathcal{M} - 2\mathcal{Q} + \mathcal{P} \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t \mathcal{M} + (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T \alpha \mathcal{M} \\ \Xi_{13} &= 6\mathcal{Q}, \quad \Xi_{23} = 6\mathcal{Q}, \quad \Xi_{33} = -12\mathcal{Q} \\ \Xi_{22} &= -(1-d)\mathcal{S} - 4\mathcal{Q} + \mathcal{M}^T \alpha \mathcal{M} \\ \alpha &= h_M^2 \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T \mathcal{Q} \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t \end{aligned}$$

**Preuve.** Afin de démontrer ce résultat, nous allons choisir trois fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii données par la somme suivante

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_1(t) + \mathcal{V}_2(t) + \mathcal{V}_3(t), \quad (2.93)$$

avec

$$\mathcal{V}_1(t) = \mathcal{H}_t + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{P} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t, \quad (2.94)$$

$$\mathcal{V}_2(t) = \int_{t-h(t)}^t \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s^T \mathcal{S} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s ds, \quad (2.95)$$

$$\mathcal{V}_3(t) = h_M \int_{-h_M}^0 \int_{t+s}^t \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_\tau^T) \mathcal{Q} \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_\tau) d\tau ds, \quad (2.96)$$

Le long des trajectoires du système (2.89), la dérivée de la fonction d'énergie  $\mathcal{V}_1$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1(t) &= -\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{R} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{M} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{P} \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T \dot{\mathcal{X}}_t + \dot{\mathcal{X}}_t^T \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t \mathcal{P}^T \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t \\ &= \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \left\{ -\mathcal{R} + \mathcal{P} \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t (\mathcal{J} - \mathcal{R}) + (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T \mathcal{P}^T \right\} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t \\ &\quad + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{M} + \mathcal{P} \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t \mathcal{M} \right\} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)}^T \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{M}^T + \mathcal{M}^T \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T \mathcal{P}^T \right\} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t \end{aligned} \quad (2.97)$$

et la dérivée de  $\mathcal{V}_2$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_2(t) &= \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{S} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t - (1-\dot{h}(t)) \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)}^T \mathcal{S} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \\ &\leq \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T \mathcal{S} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t - (1-d) \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)}^T \mathcal{S} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Enfin, la dérivée de  $\mathcal{V}_3$  est

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_3(t) &= \dot{\mathcal{X}}^T \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T h_M^2 \mathcal{Q} \nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t \dot{\mathcal{X}} - h_M \int_{t-h_M}^t \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s^T) \mathcal{Q} \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s) ds \\ &= \left\{ \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)}^T \mathcal{M}^T \right\} \alpha \left\{ (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t + \mathcal{M} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \right\} \\ &\quad - h_M \int_{t-h_M}^t \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s^T) \mathcal{Q} \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s) ds \end{aligned} \quad (2.99)$$

Considérons les inégalités de Wirtinger, la dérivée  $\dot{\mathcal{V}}_3$  s'exprime par

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_3(t) = & \left\{ \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t^T (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)}^T \mathcal{M}^T \right\} \alpha \left\{ (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t + \mathcal{M} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \right\} \\ & - \left[ \begin{array}{c} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t - \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \\ \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} - \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s ds \end{array} \right]^T \times \\ & \left[ \begin{array}{cc} \mathcal{Q} & \\ & 3\mathcal{Q} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t - \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \\ \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t + \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} - \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s ds \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.100)$$

La dérivée de la fonction globale (2.93) s'écrit sous la forme matricielle

$$\dot{\mathcal{V}}(t) = \left[ \begin{array}{c} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t \\ \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \\ \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s ds \end{array} \right]^T \Xi \left[ \begin{array}{c} \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_t \\ \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_{t-h(t)} \\ \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{H}_s ds \end{array} \right] < 0, \quad (2.101)$$

Le système interconnecté (2.89) est asymptotiquement stable si la condition LMI (3.18) est satisfaite pour tout retard variant  $h(t)$  vérifie (2.85).

Depuis le Theorem 4, la stabilité robuste du système interconnecté décrit par la dynamique (2.89) peut être directement obtenue lorsque le système est soumis à une incertitude polytopique. Supposons que la matrice d'hessienne est incertaine, et elle s'exprime sous la forme

$$\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t = \sum_{j=1}^N \lambda_j (\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t)^{(j)} \quad (2.102)$$

où le paramètre de pondération  $\lambda$  vérifie la condition suivante

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.103)$$

Les matrices constantes  $(\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t)^{(j)}$  représentent les sommets de polytope et elles sont construites à partir des bornes des paramètres incertains. Supposons que la matrice d'hessienne est de la forme (2.102). En se basant sur le Théorème 4, nous pouvons obtenir le résultat suivant

**Théorème 5** ([Aoues et al. 2014]).

Le système interconnecté (2.89) avec une incertitude polytopique (2.102) est robustement asymptotiquement stable pour tout retard variant  $h(t)$  satisfait la condition (2.85), s'il existe des matrices symétriques  $\mathcal{P} > 0$ ,  $\mathcal{S} > 0$  et  $\mathcal{Q} > 0$  telles que la LMI suivante soit vérifiée

$$\Xi^{(j)} = \begin{bmatrix} \Xi_{11}^{(j)} & \Xi_{12}^{(j)} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22}^{(j)} & \Xi_{23} \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad \text{for } j = 1, \dots, N. \quad (2.104)$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_{11}^{(j)} &= -\mathcal{R} + \mathcal{S} + (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T \alpha^{(j)} (\mathcal{J} - \mathcal{R}) - 4\mathcal{Q} + \mathcal{P} (\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t)^{(j)} (\mathcal{J} - \mathcal{R}) + (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T (\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T)^{(j)} \mathcal{P} \\ \Xi_{12}^{(j)} &= \frac{1}{2} \mathcal{M} - 2\mathcal{Q} + \mathcal{P} (\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t)^{(j)} \mathcal{M} + (\mathcal{J} - \mathcal{R})^T \alpha^{(j)} \mathcal{M} \\ \Xi_{13} &= 6\mathcal{Q}, \quad \Xi_{23} = 6\mathcal{Q}, \quad \Xi_{33} = -12\mathcal{Q} \\ \Xi_{22}^{(j)} &= -(1-d)\mathcal{S} - 4\mathcal{Q} + \mathcal{M}^T \alpha^{(j)} \mathcal{M} \\ \alpha^{(j)} &= h_M^2 (\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t^T)^{(j)} \mathcal{Q} (\nabla_{\mathcal{X}}^2 \mathcal{H}_t)^{(j)} \end{aligned}$$

**Preuve.** La preuve à ce résultat peut être obtenue en suivant les mêmes étapes que la preuve du Théorème 4.

### 5.3 Exemple comparatif

La dynamique hamiltonienne du pendule non linéaire est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(q) \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{et} \quad y = p \quad (2.105)$$

où  $D = 0.1$  désigne le terme de dissipation. La sortie  $y$  représente la vitesse angulaire et l'entrée  $u$  désigne la force du couple. Dans ce cas, l'hamiltonien  $H$  prend la forme suivante

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + (1 - \cos(q)) \quad (2.106)$$

En boucle ouverte, le système (2.105) est stable au point d'équilibre  $(0, 0)$ . L'idée, est d'interconnecter ce système avec un contrôleur dans le but de le stabiliser vers un autre point d'équilibre  $(q_*, 0, \xi_*)$ . La forme du contrôleur est donnée par

$$\dot{\xi} = u_c \quad \text{et} \quad y_c = \nabla_{\xi} H_c \quad (2.107)$$

Le système en boucle ouverte (2.105) et son contrôleur sont interconnectés par la continuité de puissance (feedback)  $u = -y_c$  et  $u_c = y$ . Le système interconnecté est un système hamiltonien qui s'écrit par

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -D & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(q) \\ p \\ \nabla_{\xi} H_c \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

où  $H_c(\xi)$  représente l'énergie du contrôleur. L'idée maintenant est de générer un invariant dynamique appelé fonction de Casimir et de construire une fonction de Lyapunov basant sur l'hamiltonien du système, la fonction d'énergie du système bouclé est

$$H_d(q, p, \xi) = H(q, p) + H_c(\xi) + C(q, p, \xi) \quad (2.109)$$

Cet exemple a été largement étudié dans le travail de [Garcia-Canseco et al. 2005], où il a été montré que les objectifs de stabilité désirée sont obtenus par le choix des fonctions d'énergies suivantes

$$H_c(\xi) = \frac{1}{2}\beta \left( \xi - \xi_* - \frac{1}{\beta} \sin(q) \right)^2$$

$$C(q, p, \xi) = \frac{1}{2}\kappa \left( q - q_* - (\xi - \xi_*) - \frac{1}{\kappa} \sin(q_*) \right)^2$$

où les paramètres  $\beta$  et  $\kappa$  sont choisis dans le but de satisfaire les relations suivantes

$$\cos(q_*) + \kappa > 0 \quad \text{et} \quad \beta \cos(q_*) + \kappa \cos(q_*) + \beta\kappa > 0$$

Nous ajoutons un amortissement au système de la forme  $\dot{\xi} = -z \nabla_{\xi} H_c$  avec  $z > 0$ . Supposons maintenant que l'interconnexion est affectée par un retard en temps qui satisfait (2.85). Le système interconnecté dans ce cas est donné par

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -D & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\nabla_q H_d]_t \\ [\nabla_p H_d]_t \\ [\nabla_{\xi} H_d]_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\nabla_q H_d]_{t-h(t)} \\ [\nabla_p H_d]_{t-h(t)} \\ [\nabla_{\xi} H_d]_{t-h(t)} \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

La condition de stabilité exige également le calcul de la matrice d'hessienne de la fonction de Lyapunov du système sans retard

$$\nabla^2 H_d(q, p, \xi) = \begin{bmatrix} \cos(q) + K & 0 & -K \\ 0 & 1 & 0 \\ -K & 0 & \beta + K \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

Les différents paramètres sont donnés par  $K = 2$ ,  $\beta = 3$  et  $\kappa = z = 1$ , pour plus de détails concernant le choix de ces paramètres voir le travail de [Pasumathy et Kao 2009].

Dans cet exemple, la matrice d'hessienne (2.111) dépend d'un terme non linéaire  $\cos(q)$  qui appartient à l'intervalle  $[-1, 1]$ . En utilisant la condition LMI (2.104), nous obtenons la stabilité du pendule non linéaire en boucle fermée donnée par (2.110). L'objectif maintenant est de comparer les différents retards maximums  $h_M$  admissibles pour le système (2.110) en fonction de  $d \in [0, 1]$  obtenus avec différentes approches (inégalités de Jensen dans la littérature et les inégalités de Wirtinger dans notre étude). Les résultats sont mentionnés dans le tableau 2.5.

$d$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.99
Théorème [Pasumathy et Kao 2009]	0.052	0.044	0.035	0.026	0.015	0.008	-
Théorème 5	0.361	0.337	0.315	0.292	0.269	0.258	0.248

TABLE 2.5 – Le retard maximal  $h_M$  admissible pour le système en fonction de  $d$  pour  $\cos(q) \in [-1, 1]$ .

À partir de ce tableau, on remarque que les conditions proposées (basées sur les inégalités de Wirtinger) sont moins conservatives par rapport au résultat de [Pasumathy et Kao 2009]. Le travail proposé par [Yoo et al. 2011] n'est pas faisable dans ce cas précis dû au terme  $\cos(q)$  qui varie entre  $-1$  et  $1$ . Lorsque  $q = \pi$ , la hessienne (2.111) devient constante ainsi que le résultat de [Yoo et al. 2011] devient faisable. On compare alors les trois résultats dans le tableau 2.6.

$d$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.99
Théorème [Pasumathy et Kao 2009]	0.132	0.112	0.089	0.064	0.036	0.020	-
Théorème [Yoo et al. 2011]	0.227	0.214	0.200	0.185	0.170	0.163	0.160
Théorème 5	0.918	0.814	0.715	0.622	0.512	0.448	0.418

TABLE 2.6 – Le retard maximal  $h_M$  ammissible pour le système en fonction de  $d$  pour  $\cos(q) = -1$

De ce tableau, on constate que les conditions de stabilité proposées basées sur Wirtinger réduisent le conservatisme des résultats de la littérature.

Comme perspective à cette dernière partie, il convient de poursuivre cette première esquisse pour réduire le conservatisme des conditions de stabilité proposées dans le cas discret. L'idée globale est de remplacer les inégalités de Jensen données en temps discret par le lemme suivant

**Lemme 5.3.** [Jiang et al. 2005] Pour toute matrice constante  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T > 0$ , on a l'inégalité suivante

$$\left( \sum_{i=d_m}^{d_M} W(i) \right)^T P \left( \sum_{i=d_m}^{d_M} W(i) \right) \leq (d_M - d_m + 1) \sum_{i=d_m}^{d_M} W(i)^T P W(i) \quad (2.112)$$

par les inégalités de Wirtinger. Ce travail est en cours de préparation.

Dans ce deuxième chapitre, nous avons proposé une dynamique hamiltonienne discrète pour laquelle la notion de passivité est une propriété intrinsèque. Cette dynamique a permis de montrer la propriété de composabilité de la classe : l'interconnexion de système hamiltonien discret est un système hamiltonien discret qui reproduit le comportement énergétique du système interconnecté continu. Nous avons également montré la commutativité des opérateurs de projection et de composition. Des conditions de stabilités ont été établies pour un réseau en présence de retard. Enfin, une technique de réduction du conservatisme (inégalités de Wirtinger) a été proposée dans le cas continu.

# Chapitre 3

## Synthèse discrète basée sur la passivité

### Résumé.

Ce troisième chapitre est associé à l'étude de la stabilisation des systèmes hamiltoniens passifs en temps discret. Nous commençons tout d'abord par la synthèse d'un contrôleur simple de type retour de sortie auquel les retards en temps et la saturation ont été rajoutés. Ensuite, nous présentons une nouvelle méthodologie pour la conception du contrôleur IDA-PBC discret. Une comparaison avec les résultats de la littérature a été effectuée. Enfin, nous appliquons ce contrôleur sur un convertisseur de puissance du type Buck. Les résultats de simulations et expérimentaux illustrent les performances du contrôleur IDA-PBC proposé dans ce manuscrit.

### SOMMAIRE

1	<i><math>L_gV</math>-CONTRÔLEUR EN TEMPS DISCRET</i>	63
1.1	Stabilisation de systèmes hamiltoniens discrets passifs	64
1.2	Étude du retard : stabilité et robustesse	66
1.3	Prise en compte de la saturation	69
1.4	Exemple numérique	71
2	CONTRÔLEUR IDA-PBC EN TEMPS DISCRET	73
2.1	Synthèse de contrôleur IDA-PBC discret	73
2.2	Exemples de simulations	75
3	APPLICATION SUR LE CONVERTISSEUR BUCK	81
3.1	Modes de fonctionnements	81
3.2	Modèle moyen du convertisseur Buck	83
3.3	Application du contrôleur IDA-PBC sur le convertisseur Buck	84
3.4	Simulations et analyse des résultats	85
3.5	Validation expérimentale	87

L'apparition des contrôleurs numériques dans les années 50 n'a pas eu l'effet escompté à cause de leur coût élevé et leur fiabilité réduite. Quelques temps après, et avec les avancées technologiques, ces contrôleurs ont connu une forte expansion et leur utilisations dans le monde industriel devint supplanter les contrôleurs analogiques.

Dans la théorie du contrôle, la littérature offre un choix multiple pour concevoir un contrôleur numérique : soit par une simple implémentation (bloqueur d'ordre zéro) du contrôleur continu [Laila et Nesic 2002], soit par un calcul basé sur le modèle échantillonné [Chen et Bruce 1995] ou soit par un calcul établi sur la base d'un modèle exacte ou approché [Nešić et Teel 2004]. La première technique dite *émulée* est la plus simple à établir, mais elle reste insuffisante par ce qu'elle nécessite une faible période d'échantillonnage par rapport à la dynamique du système considéré. La deuxième technique dite *échantillonnée*, conçue pour reproduire les propriétés du système sur les instants d'échantillonnages [Monaco et Normand-Cyrot 2009], soit en se basant sur la solution continue (approche indirecte), soit sur le modèle échantillonné sans supposer l'existence de la solution en temps continu (approche directe). La dernière dite *discrète*, la plus précise, mais elle nécessite un modèle fiable en temps discret, ce qui n'est pas toujours le cas surtout lorsqu'un système est non linéaire.

Quelle que soit la procédure de conception, la perte d'information détériore l'efficacité du contrôleur, potentiellement jusqu'à entraîner une instabilité du comportement désiré.

Notre motivation, est d'anticiper et/ou de limiter cette perte afin d'éviter tout comportement anormal en boucle fermée. Dans notre approche, nous optons aux contrôleurs discrets obtenus sur la base d'un modèle approché dans le cadre du formalisme hamiltonien.

Au cours de ces dernières décennies, des progrès importants ont été réalisés pour étudier le comportement dynamique des systèmes contrôlés, en échantillonné et en discret. On trouve dans [Owens et al. 1996], une étude détaillée sur l'analyse de la stabilité des systèmes échantillonnés soumis à la technique d'émulation (bloqueur d'ordre zéro), pour apporter un terme correctif à cette technique, d'autres bloqueurs ont été proposés dans [Di Giamberardino et al. 1996, Hu et Michel 1999]. En temps discret, l'approximation du modèle par un schéma d'intégration de type Euler a été utilisé dans plusieurs travaux pour la synthèse, du contrôle adaptatif dans [Mareels Iven et al. 1992], backstepping dans [Nesic et Teel 2001], IDA-PBC dans [Laila et Astolfi 2005]. D'autres contrôleurs conçus sous l'hypothèse qu'un modèle discret exacte est connu ont été proposés dans [Baras et Patel 1998, David et al. 1999].

Si on se place maintenant dans le cadre du formalisme hamiltonien, l'approximation des SHP pour la synthèse de la commande IDA-PBC reste limité. L'implémentation de ce contrôleur est une tâche difficile car la structure hamiltonienne et son comportement énergétique peuvent être perdus sous l'effet de la discrétisation (chapitre précédent). Dans [Tiefensee et al. 2010], une nouvelle approche IDA-PBC échantillonnée a été établie sur la base d'une solution en temps continu (approche indirecte). Cette approche est basée sur un travail récent qui traite les SHP sous échantillonnage proposé dans [Monaco et al. 2009] par des développements en série de Lie. Dans [Laila et Astolfi 2005], un schéma d'intégration de type Euler a été utilisé pour établir un contrôleur IDA-PBC discret pour les systèmes hamiltoniens avec énergie séparable, une extension sur un cas général a été traitée dans [Laila et Astolfi 2006b]. Un autre contrôleur discret a été proposé dans [Gören-Sümer et Yalçın 2011] sur la base des gradients discrets quadratiques.

Tous ces résultats présentent des meilleurs performances par rapport à l'approche émulée. Toutefois, leur validité est très limitée puisque ils sont valables uniquement pour des faibles valeurs du pas d'intégration. Et les propriétés en échantillonnage et en discret ne sont plus des propriétés intrinsèques au système.

Notre contribution dans ce chapitre est de proposer une démarche de synthèse d'un contrôleur discret de type IDA-PBC qui préserve la propriété de passivité du système considéré, avec la même fonction d'énergie, la même fonction de dissipation et indépendamment du pas d'intégration.

Ce chapitre, composé de trois parties, est organisé comme suit.

Dans la première partie, on propose une technique de synthèse de  $L_gH$ -contrôleur en temps discret qui reproduit le comportement énergétique du système continu. On montre que ce contrôleur engendre



une dynamique bouclée intrinsèquement stable. Ensuite, ce contrôleur a été appliqué sur une dynamique hamiltonienne retardée. La stabilité robuste de la boucle fermée a été présentée lorsque les matrices sont supposées incertaines. Nous ajoutons ensuite une contrainte de saturation sur ce contrôleur tout en prenant compte des retards. Les conditions de stabilités sont obtenues via une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Pour terminer cette partie, un exemple illustratif a été présenté pour montrer l'efficacité des conditions de stabilités proposées.

La deuxième partie est consacrée à la synthèse de la commande IDA-PBC en temps discret. Cette technique est basée sur un gradient discret énergétique qui permet de conserver la notion de passivité du système considéré. La stabilité a été présentée en prenant l'hamiltonien global comme étant une fonction de Lyapunov. Afin de montrer l'efficacité de notre approche en la comparant à des résultats de la littérature, une série d'exemples non linéaires est présentée. Les résultats de simulations montrent que les performances du contrôleur proposé dans ce manuscrit sont nettement meilleures par rapport à ceux qui existent dans la littérature, particulièrement l'approche émulée et la technique proposée dans [Laila et Astolfi 2005; 2006b].

Enfin, la troisième partie est dédiée à l'application du contrôleur discret sur un convertisseur de puissance de type Buck. Nous présentons tout d'abord son fonctionnement ainsi que son modèle mathématique. Nous expliquons ensuite un peu plus en détails la démarche pour établir le contrôleur discret pour ce convertisseur. Pour finir, les résultats de simulations et expérimentaux sont présentés pour valider les performances de notre approche en la comparant à l'approche émulée utilisée fréquemment dans la littérature.

## 1 $L_gV$ -CONTRÔLEUR EN TEMPS DISCRET

En temps continu, un bouclage négatif de sortie (*en anglais*, output negative feedback) suffit largement pour assurer la stabilité asymptotique d'un système hamiltonien passif sous condition qu'il soit détectable en état zéro<sup>1</sup>. Dans le cas où le système a une dynamique au préalable stable (système hamiltonien), ce retour de sortie est connu sous le nom de  $L_gV$ -**contrôleur**, proposé pour la première fois dans le travail de [Jurdjevic et Quinn 1978].

Physiquement, ce type de contrôleur se traduit par une injection d'amortissement au système dans le but d'améliorer et de contrôler sa vitesse de convergence vers le point d'équilibre désiré.

Dans le travail de thèse de [Tiefensee 2010], l'auteur a affirmé que l'équivalent de ce contrôleur en échantillonné<sup>2</sup> n'assure pas souvent la stabilité en boucle fermée. Mathématiquement, ce résultat est directement lié à la négativité de la variation d'énergie  $V$  sur chaque intervalle du temps formé par deux instants d'échantillonnages successifs. Pratiquement parlant, la propriété de passivité en échantillonnage n'est plus une propriété intrinsèque du système bouclé.

Dans cette direction, de nouvelles techniques de contrôle ont été développées pour conserver au mieux la propriété de passivité et améliorer le contrôleur émulé (classique). L'idée globale consiste à augmenter la négativité de la variation d'énergie pour que la vitesse de convergence vers le point d'équilibre soit la plus rapide possible. Ces techniques se traduisent physiquement par un rajout de dissipation (injection artificielle de l'amortissement) au système pour un objectif bien précis d'accélérer la dissipation d'énergie totale du système en boucle fermée.

En temps discret, un nouveau contrôleur a été obtenu dans la littérature par [Laila et Astolfi 2006a] en se basant sur la dynamique discrète hamiltonienne obtenue avec un gradient discret modifié de type [Gonzalez 1996]. Les auteurs ont mentionné que les performances de ce contrôleur sont nettement meilleures par rapport au contrôleur émulé. Cependant, la propriété de passivité en temps discret n'est pas préservée, elle est fortement liée au pas de temps utilisé.

À noter que tous ces résultats (échantillonnage et discret) se sont focalisés sur une **correction** du contrôleur émulé afin d'améliorer la vitesse de convergence du système bouclé.

1. Cette condition garantit que la sortie  $y$  est égale à zéro seulement au point d'équilibre et ainsi le contrôleur  $L_gV \neq 0$  pour tout  $x \neq 0$

2. contrôleur émulé obtenu directement par l'échantillonnage du contrôleur continu ( $u(n) = -ky(n) = -kL_gV(x) |_{x=x(n)}$ )

Notre approche est complètement différente. Elle s'agit de se rapprocher au mieux aux propriétés du système continu particulièrement la propriété de passivité sans aucune condition sur le pas de temps utilisé. Puisque la sortie de port discrète assure la passivité en temps discret (voir le chapitre précédent), le  $L_gV$ -contrôleur (retour de sortie) discret en principe assure lui aussi le comportement énergétique visé du système bouclé.

La première partie de cette section consiste à la stabilisation en temps discret des systèmes hamiltoniens passifs à l'aide du  $L_gV$ -contrôleur. Dans la seconde et la troisième partie, on présente l'étude de la stabilité en boucle fermée lorsque des retards en temps et les contraintes de saturation, respectivement, viennent perturber le système. L'étude a été faite par l'approche de Lyapunov-Krasovskii, et les conditions de stabilités sont données en termes des inégalités matricielles. Enfin, un exemple numérique vient illustrer l'efficacité de cette nouvelle approche proposée dans cette première partie de ce chapitre.

## 1.1 Stabilisation de systèmes hamiltoniens discrets passifs

On rappelle que la dynamique hamiltonienne passive est définie par un quadruplet  $(H, J, R, g)$  et les équations

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t X(n) = [J(n) - R(n)] \bar{\nabla}_X H(n) + g(n)u(n) \\ y(n) = g^T(n) \bar{\nabla}_X H(n) \end{cases} \quad (3.1)$$

qui conserve le bilan énergétique en temps discret (cf chapitre 2).

Dans le formalisme hamiltonien, l'énergie  $H$  satisfait les conditions de Jurdjevic-Quin (cf Proposition 2 chapitre 1). Il s'ensuit un bouclage stabilisant de la forme  $u(n) = -k L_g H(n) = -ky$ . Si l'on applique cette commande sur la dynamique discrète (3.1), on obtient la boucle fermée suivante

$$\bar{\nabla}_t X(n) = [J(n) - R(n)] \bar{\nabla}_X H(n) - g(n)kg(n)^T \bar{\nabla}_X H(n). \quad (3.2)$$

### Proposition 12.

Le système (3.1) par une commande  $u(n) = -k L_g H(n)$  est intrinsèquement stable.

**Preuve.** La preuve à ce résultat revient à calculer la variation énergétique en temps discret en prenant la fonction  $H$  comme une candidate de Lyapunov,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t H(n) &:= \langle \bar{\nabla}_X H(n), \bar{\nabla}_t X(n) \rangle = -\bar{\nabla}_X H(n)^T R(n) \bar{\nabla}_X H(n) - \bar{\nabla}_X H(n)^T g(n)kg(n)^T \bar{\nabla}_X H(n) \\ &= -\bar{\nabla}_X H(n)^T (R(n) + g(n)kg(n)^T) \bar{\nabla}_X H(n) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si le terme  $(R(n) + g(n)kg(n)^T) < 0$ , le système bouclé est asymptotiquement stable.

Dans la plupart des cas, l'implémentation de cette technique de commande **n'est jamais immédiate** de part son caractère implicite.

Le caractère intrinsèque de ce résultat se traduit par une indépendance vis-à-vis du pas d'intégration. Ce n'est pas le cas des résultats proposés dans la littérature où la stabilité est assurée par l'ajout de dissipation (amortissement artificiel) pour assurer la convergence de la boucle fermée.



Il est important de noter que lorsque  $H$  est séparable avec une partie cinétique quadratique (système mécanique), le  $L_gH$ -contrôleur est directement liée à la **sortie moyennée** donnée par la moyenne sur deux états discrets successifs. De plus, si le hamiltonien est quadratique avec le triplet  $(J, R, g)$  constant (système linéaire), le contrôleur discret devient explicite et il s'exprime par

$$u(n) = - \left[ I + \frac{k}{2} g^T B \right]^{-1} \left[ \frac{k}{2} g^T (A + I) \right] x(n), \quad (3.4)$$

si le terme matriciel  $\left[I + \frac{k}{2}g^T B\right]$  est inversible, si non on utilise des inverses généralisées. Les matrices  $A$  et  $B$  sont données par

$$A = \left[I - \frac{\Delta t}{2}Q(J - R)\right]^{-1} \left[I + \frac{\Delta t}{2}Q(J - R)\right] \quad \text{et} \quad B = \Delta t \left[I - \frac{\Delta t}{2}Q(J - R)\right]^{-1} Qg$$

En pratique, la validation du contrôleur (3.4) est immédiate sans faire appel à aucune des méthodes d'estimation ou algorithmes de résolution.

**Exemple 1.1.** *Oscillateur d'impact*

On présente la stabilisation de l'oscillateur d'impact par un  $L_gV$ -contrôleur. On compare l'approche par le gradient discret et l'émulation. La dynamique de l'oscillateur d'impact est donnée en temps continu par la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -0.15 q + \frac{2}{q^3} + u \\ y = p \end{cases}, \quad (3.5)$$

où le hamiltonien est  $H(q, p) = \frac{0.15}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{q^2}$  et les variables  $q$  et  $p$  représentent le déplacement généralisé et le moment généralisé, respectivement.

Le  $L_gH$ -contrôleur en temps continu est donné par

$$u = -ky = -kp,$$

Le contrôleur émulé s'écrit directement par

$$u(n) = -kp(n),$$

et celui proposé est donné par la sortie de port discrète sous la forme

$$u(n) = -k \frac{p(n+1) + p(n)}{2}, \quad (3.6)$$

qui représente la moyenne du moment généralisé évalué sur deux instants discrets successifs.

Les résultats de simulations sont obtenus pour un gain  $k = 0.3$ , un pas d'intégration  $\Delta t = 0.25s$  et une condition initiale  $(q^0, p^0) = (4, -2)$ , avec un pas de discrétisation.

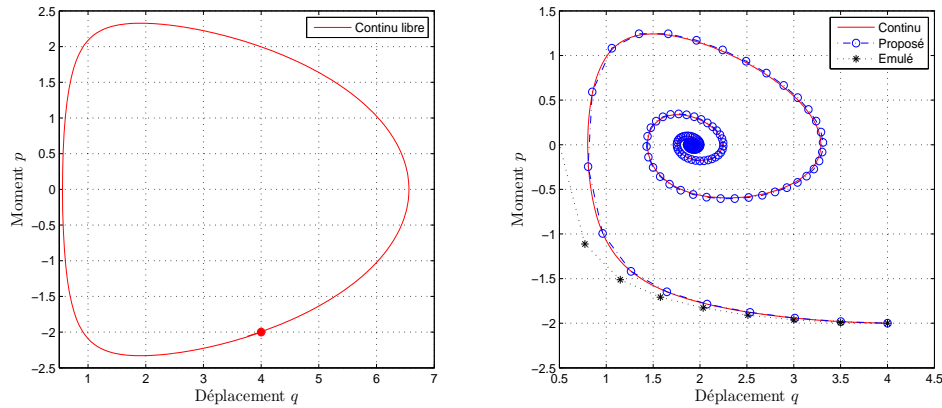


FIGURE 3.1 – L'évolution du système avec le  $L_gH$ -contrôleur.

Le graphe de gauche figure 3.1, représente le diagramme de phase de l'oscillateur d'impact. C'est un système sans pertes pas de dissipation interne), le système libre est donc conservatif : la trajectoire évolue à énergie constante.

Le graphe de droite figure 3.1, le  $L_gV$ -contrôleur en temps continu injecte de l'amortissement au système pour atteindre son point d'équilibre. Il en va de même pour la dynamique discrète passive que nous avons introduite. En revanche, l'approximation par Euler émulé engendre une dérive énergétique que le  $L_gV$ -contrôleur n'est pas capable de compenser et la trajectoire diverge après quelques secondes de simulation.

Pour que le contrôleur émulé satisfasse la stabilité du système (3.5), il faut soit choisir un pas de discrétisation très faible ou augmenter le gain de dissipation pour compenser cette dérive numérique.

## 1.2 Étude du retard : stabilité et robustesse

La présence de retard lors de la synthèse de contrôleurs (continus ou discrets) dégrade les performances de la boucle fermée et complique son étude et son analyse. Notre objectif ici est d'étudier la stabilité d'un système hamiltonien retardé soumis à un contrôleur de type  $L_gH$  en temps discret.

Dans le but de faciliter cette étude, on se restreint au cas d'un système hamiltonien passif avec le triplet  $(J, R, g)$  constant et le hamiltonien  $H$  quelconque. On considère la dynamique retardée suivante

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t X(n) &= [J - R] \bar{\nabla}_X H(n) + [J_d - R_d] \bar{\nabla}_X H(n - d(n)) + gu(n) \\ y(n) &= g^T \bar{\nabla}_X H(n) \end{cases} \quad (3.7)$$

où la matrice  $J_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfait  $J_d + J_\tau^T = 0$  et la matrice de dissipation  $R_d = R_d^T \geq 0$ . Le retard discret  $d(n)$  est supposé borné et il varie selon l'hypothèse suivante

$$0 < d_m \leq d(n) \leq d_M \quad (3.8)$$

où  $d_m$  et  $d_M$  sont des nombres entiers positifs qui représentent les limites inférieure et supérieure du retard  $d(n)$ , respectivement.

En appliquant le  $L_gH$ -contrôleur sur la dynamique retardée (3.7), on obtient un système bouclé donné de la forme

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t X(i)_{|k=n} &= [J - R] \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + [J_d - R_d] \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} - gkg^T \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} \\ &= [J - R - gkg^T] \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + [J_d - R_d] \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La dynamique discrète de la boucle fermée **n'est plus sous la forme hamiltonienne** de part l'existence d'un terme avec retard dont l'évolution est inconnue. En prenant  $H$  comme candidate de Lyapunov, le bilan d'énergie s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t H(n) &:= \langle \bar{\nabla}_X H(n), \bar{\nabla}_t X(n) \rangle \\ &= \left\langle \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}, \left[ (J - R - gkg^T) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + (J_d - R_d) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \right] \right\rangle \\ &= -\bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (R + gkg^T) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (J_d - R_d) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir du bilan énergétique (3.10), on constate que la candidate  $H$  seule ne suffit pas pour prouver la stabilité du système bouclé en présence des retards. Le signe du premier terme est connu (négatif) car le terme  $(R + gkg^T)$  est toujours positif. Par contre, le signe du deuxième terme est inconnu et on ne peut conclure sur la stabilité de la boucle fermée.

Afin d'étudier ce terme retardé, de nouvelles candidates au sens de Lyapunov-Krasovskii vont être choisies.

Cette étude a deux objectifs, le premier est de trouver des conditions de stabilités (justes suffisantes) pour que le système (3.9) en boucle fermée soit asymptotiquement stable, et le deuxième c'est d'étudier la robustesse du système quand les matrices  $J, R, g, J_\tau$  et  $R_\tau$  sont supposées incertaines et satisfont les incertitudes polytopiques suivantes

$$\begin{bmatrix} J & R & g & J_d & R_d \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^r \lambda_s \begin{bmatrix} J^{(s)} & R^{(s)} & g^{(s)} & J_\tau^{(s)} & R_\tau^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

où  $\sum_{s=1}^r \lambda_s = 1$ ,  $0 \leq \lambda_s \leq 1$ ,  $s = 1, 2, \dots, r$ , et les matrices  $J^{(s)}, R^{(s)}, g^{(s)}, J_\tau^{(s)}, R_\tau^{(s)}$  sont constantes indiquant les points extrêmes des incertitudes, et  $r$  désigne le nombre de point.

Les différentes preuves utilisent les deux lemmes introduits auparavant et que nous rappelons ici

**Lemme 1.1.** *Pour toute matrice symétrique constante semi-définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P^T = P \geq 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\sum_{k=n+1-d(n+1)}^{n-1} W_k^T P W_k - \sum_{k=n+1-d(n)}^{n-1} W_k^T P W_k \leq \sum_{k=n+1-d_M}^{n-d_m} W_k^T P W_k$$

**Lemme 1.2.** *Pour toute matrice symétrique constante semi-définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P^T = P \geq 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\sum_{j=n+2-d_M}^{n+1-d_m} \sum_{k=j}^n W_k^T P W_k - \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} \sum_{k=j}^{n-1} W_k^T P W_k = (d_M - d_m) W_n^T P W_n - \sum_{k=n+1-d_M}^{n-d_m} W_k^T P W_k$$

En introduisant de nouvelles fonctions de Lyapounov-Krasovskii, les conditions de stabilité sont établies dans le théorème ci-dessous,

**Théorème 6.**

Le système discret en boucle fermée (3.9) avec  $d(n)$  satisfait (3.8) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices symétriques  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$  and  $Q_3 > 0$  telles que l'inégalité matricielle suivante soit vérifiée

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Lambda & J_\tau - R_\tau & 0 & 0 \\ 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (3.12)$$

où  $\Lambda = -R - gkg^T + \alpha Q_1 + Q_2 + Q_3$  et le paramètre  $\alpha = (d_M - d_m + 1)$ .

**Preuve.** On définit la fonction de Lyapunov pour la boucle fermée (3.9) comme la somme  $V(n) = \sum_{l=1}^4 V_l(n)$ , où

$$\begin{aligned} V_1(n) &= H(n), \\ V_2(n) &= \Delta t \sum_{k=n-d(n)}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k), \\ V_3(n) &= \Delta t \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} \sum_{k=j}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k), \\ V_4(n) &= \Delta t \left\{ \sum_{k=n-d_m}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_2 \bar{\nabla}_X H(k) + \sum_{k=n-d_M}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_3 \bar{\nabla}_X H(k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La variation d'énergie globale au cours du temps s'écrit par  $\bar{\nabla}_t V(n) = \frac{1}{\Delta t} (V(n+1) - V(n))$ . Pour la première candidate  $V_1$ , sa variation le long des trajectoires du système bouclé est donnée par la variation de l'hamiltonien  $H$ , voir l'équation (3.10).

La variation de  $V_2$  le long des trajectoires est donnée par

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t V_2(n) &= \sum_{k=n+1-d(n+1)}^n \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k) - \sum_{k=n-d(n)}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k) \\ &= \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} - \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)}^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \\ &\quad + \sum_{k=n+1-d(n+1)}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k) - \sum_{k=n+1-d(n)}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k) \end{aligned} \quad (3.14)$$

en utilisant le lemme 1.1 devient

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t V_2(n) &\leq \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} - \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)}^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \\ &\quad + \sum_{k=n+1-d_M}^{n-d_m} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

En utilisant le lemme 1.2, la variation de  $V_3$  le long des trajectoires du système (3.9) s'écrit

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_t V_3(n) &= \sum_{j=n+2-d_M}^{n+1-d_m} \sum_{k=j}^n \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k) - \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} \sum_{k=j}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k) \\ &= (d_M - d_m) \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n} - \sum_{k=n+1-d_M}^{n-d_m} \bar{\nabla}_X H(k)^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)\end{aligned}\quad (3.16)$$

Enfin la variation de  $V_4$  est obtenue en utilisant le lemme 1.2

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_t V_4(n) &= \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T Q_2 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n} - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_m}^T Q_2 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_m} \\ &\quad + \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T Q_3 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n} - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_M}^T Q_3 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_M}\end{aligned}\quad (3.17)$$

À partir des équations (3.10), (3.15), (3.16) et (3.17), la variation d'énergie totale  $V$  le long des trajectoires du système bouclé (3.9) s'écrit

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_t V(n) &= \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T \{ -R - gkg^T + \alpha Q_1 + Q_2 + Q_3 \} \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n} \\ &\quad + \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T (J_d - R_d) \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)} - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)}^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)} \\ &\quad - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_m}^T Q_2 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_m} - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_M}^T Q_3 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_M} \\ &= \xi(n)^T \Xi \xi(n)\end{aligned}\quad (3.18)$$

avec

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Lambda & J_d - R_d & 0 & 0 \\ 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

et

$$\xi(n)^T = \left[ \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T \quad \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)}^T \quad \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_m}^T \quad \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_M}^T \right]. \quad (3.20)$$

Si la condition (3.19) est vérifiée, alors le système en boucle fermée est asymptotiquement stable en temps discret.

Comme sous cas, les conditions de stabilité lorsque le retard est constant  $d(n) = d$  sont obtenues directement à partir du Théorème 6. Le résultat est donné dans le corollaire ci-dessous,

#### Corollaire 7.

Le système en boucle fermée (3.9) à retard constant est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$  et  $Q_3 > 0$  telles que

$$\bar{\Xi} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & J_d - R_d \\ 0 & -Q_1 - Q_2 - Q_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

où  $\bar{\Lambda} = -R - gkg^T + Q_1 + Q_2 + Q_3$

La preuve à ce résultat peut être directement dérivée à partir du Théorème 6 en mettant  $d_m = d_M = d$ , ou par un simple calcul en utilisant uniquement trois candidates de LK suivantes  $V_1(n)$ ,  $V_2(n)$  et  $V_4(n)$  données par les équations (3.13). Dans ce cas, le vecteur  $\xi$  est réduit au vecteur suivant

$$\bar{\xi}(n)^T = \left[ \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T \quad \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d}^T \right]$$

Généralement, dans le cas pratique, les matrices  $J$ ,  $R$ ,  $g$ ,  $J_d$  et  $R_d$  qui composent le système bouclé (3.9) peuvent être affectées par une incertitude. Dans ce qui suit, nous souhaitons étendre le résultat précédent à une classe du système hamiltonien incertain. Sur la base du résultat obtenu dans le Théorème 6, l'étude de la robustesse est donnée par le résultat suivant,

**Théorème 7.**

Le système en boucle fermée (3.9) à retard avec les incertitudes polytopiques de la forme (3.11) est asymptotiquement stable pour tout retard variant  $d(n)$  satisfait (3.8), s'il existe des matrices  $Q_1^{(s)} > 0, Q_2^{(s)} > 0$  et  $Q_3^{(s)} > 0$  telle que pour  $s = 1, \dots, r$ , on obtient

$$\Xi_k = \begin{bmatrix} \Lambda^{(s)} & J_d^{(s)} - R_d^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & -Q_1^{(s)} & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2^{(s)} & 0 \\ * & * & * & -Q_3^{(s)} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.22)$$

**Preuve.** *Posons*

$$V_\lambda(n) = \sum_{l=1}^4 V_{l\lambda}(n) \quad (3.23)$$

où

$$\begin{aligned} V_{1\lambda}(n) &= \sum_{s=1}^r \lambda_s H^{(s)}(n), \\ V_{2\lambda}(n) &= \sum_{s=1}^r \sum_{k=n-d(n)}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T \lambda_s Q_1^{(s)} \bar{\nabla}_X H(k), \\ V_{3\lambda}(n) &= \sum_{s=1}^r \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} \sum_{k=j}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T \lambda_s Q_1^{(s)} \bar{\nabla}_X H(k), \\ V_{4\lambda}(n) &= \sum_{s=1}^r \left\{ \sum_{k=n-d_m}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T \lambda_s Q_2^{(s)} \bar{\nabla}_X H(k) + \sum_{k=n-d_M}^{n-1} \bar{\nabla}_X H(k)^T \lambda_s Q_3^{(s)} \bar{\nabla}_X H(k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

On peut facilement en déduire la condition LMI (3.22) d'une manière analogue à la preuve du Théorème 6. Selon la théorie standard de Lyapunov, si la condition (3.22) est vérifiée, le système bouclé (3.9) soumis à des incertitudes de type (3.11) et à des retards discrets variants dans le temps (3.8) est asymptotiquement stable.

Ce résultat, peut jouer un rôle important dans le cas pratique où les paramètres du système sont souvent affectés par une incertitude.

### 1.3 Prise en compte de la saturation

Afin de se placer au plus proche possible du cas pratique (cas réel), on va complexifier le système précédent (3.7) en ajoutant une contrainte de saturation sur le  $L_gH$ -contrôleur.

Ce phénomène de saturation a été amplement étudié dans la littérature et de nombreux résultats significatifs ont été proposés dans la dernière décennie, voir l'ouvrage de [Tarbouriech et al. 2007].

Dans notre étude, on traite la stabilité de systèmes hamiltoniens passifs au niveau discret affectés à la fois par des retards en temps et la saturation sur  $L_gH$ -contrôleur. La dynamique discrète dans ce cas est donnée par

$$\bar{\nabla}_t X(n) = [J - R] \bar{\nabla}_X H(n) + [J_d - R_d] \bar{\nabla}_X H(n - d(n)) + g \text{sat}(u(n)) \quad (3.25)$$

où  $\text{sat}(u) := [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T \in \mathbb{R}^m$  représente le contrôle du système (3.25) avec  $\text{sat}(\cdot)$  désigne la fonction de saturation. La non linéarité de la saturation s'écrit par

$$\text{sat}(u_i) = \text{sgn}(u_i) \min\{1, |u_i|\}; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.26)$$

Dans le but de faciliter l'analyse et les calculs durant cette étude, on introduit le lemme suivant,

**Lemme 1.3.** *Supposons que  $\text{sat}(u(n))$  est définie comme dans (3.26). Alors, la relation suivante est vérifiée*

$$v^T v \leq u^T u \quad (3.27)$$

avec

$$v = \text{sat}(u) - u \quad (3.28)$$

La preuve à ce lemme peut être facilement obtenue, voir [Airong et Yuzhen 2010]. Sous la contrainte de saturation, le  $L_g H$ -contrôleur en temps discret s'écrit

$$\text{sat}(u(n)) = \text{sat}(-kg^T \bar{\nabla}_X H(n))$$

et la boucle fermée est donnée par

$$\bar{\nabla}_t X(n) = [J - R] \bar{\nabla}_X H(n) + [J_d - R_d] \bar{\nabla}_X H(n - d(n)) + g \text{sat}(-kg^T \bar{\nabla}_X H(n)) \quad (3.29)$$

A partir de la relation (3.28), on obtient

$$v = \text{sat}(-kg^T \bar{\nabla}_X H(n)) + kg^T \bar{\nabla}_X H(n)$$

et la boucle fermée (3.29) peut être exprimée sous la forme

$$\bar{\nabla}_t X(n) = [J - R - gkg^T] \bar{\nabla}_X H(n) + [J_d - R_d] \bar{\nabla}_X H(n - d(n)) + gv. \quad (3.30)$$

On constate que la structure hamiltonienne est détruite sous l'effet du retard et la contrainte de saturation. A partir de (3.30) et le lemme 1.3, on peut montrer facilement que la stabilité de la boucle fermée en temps discret est aussi perdue. Alors, on peut conclure que la propriété de stabilité n'est pas une propriété intrinsèque lors de la présence du retard et de la saturation dans le système.

Le bilan d'énergie s'exprime en temps discret par

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t H(n) &= -\bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (R + gkg^T) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (J_d - R_d) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \\ &\quad + \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T gv \\ &\leq -\bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (R + gkg^T) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (J_d - R_d) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T gg^T \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + v^T v \right\} \\ &\stackrel{(3.27)}{\leq} -\bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (R + gkg^T) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (J_d - R_d) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T gg^T \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} + \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T gk^T kg^T \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} \right\} \\ &= \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T \left\{ -R + \frac{1}{2}g(I - 2k + k^T k)g^T \right\} \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n} \\ &\quad + \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n}^T (J_d - R_d) \bar{\nabla}_X H(k)_{|k=n-d(n)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

le passage de la première à la deuxième ligne dans l'équation (3.31) se fait à l'aide des identités remarquables<sup>3</sup>.

Afin de traiter ce problème de stabilité, on postule le théorème ci-dessous,

---

3. Pour tout  $a$  et  $b$ , on a  $(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab$



**Théorème 8.**

Le système discret en boucle fermée (3.29) est dit asymptotiquement stable pour tout retard discret  $d(n)$  satisfait (3.8) et la contrainte de saturation (3.26), s'il existe des matrices symétriques  $Q_1 > 0, Q_2 > 0$  and  $Q_3 > 0$  telles que la condition LMI suivante soit vérifiée

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Omega & J_\tau - R_\tau & 0 & 0 \\ 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (3.32)$$

où la matrice  $\Omega = -R + \frac{1}{2}g(I - 2k + k^T k)g^T + \alpha Q_1 + Q_2 + Q_3$ .

**Preuve.** On considère les fonctions de Lyapunov-Krasovskii décrites par (3.13), la variation d'énergie totale  $V$  s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t V(n) &= \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T \left\{ -R + \frac{1}{2}g(I - 2k + k^T k)g^T + \alpha Q_1 + Q_2 + Q_3 \right\} \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n} \\ &\quad - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n}^T (J_\tau - R_\tau) \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)} - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)}^T Q_1 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d(n)} \\ &\quad - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_m}^T Q_2 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_m} - \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_M}^T Q_3 \bar{\nabla}_X H(k)|_{k=n-d_M} \\ &= \xi(n)^T \Gamma \xi(n) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si la condition (3.32) est vérifiée, le  $L_gH$ -contrôleur sous contrainte de saturation assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (3.30).

La stabilité robuste peut être dérivée directement à partir du Théorème 8. On énonce le résultat dans le corollaire qui suit.

**Corollaire 8.**

Le système en boucle fermée (3.30) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices incertaines  $Q_1^{(s)} > 0, Q_2^{(s)} > 0$  and  $Q_3^{(s)} > 0$  telle que

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Omega^{(s)} & J_\tau^{(s)} - R_\tau^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & -Q_1^{(s)} & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2^{(s)} & 0 \\ * & * & * & -Q_3^{(s)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

où  $\Omega^{(s)} = -R^{(s)} + \frac{1}{2}g^{(s)}(I - 2k + k^T k)(g^T)^{(s)} + \alpha Q_1^{(s)} + Q_2^{(s)} + Q_3^{(s)}$ .

La preuve peut être vérifiée d'une manière similaire au Théorème 8. Le cas du retard constant est considéré comme un sous cas du résultat proposé dans cette partie. Dans le cas linéaire les conditions de stabilité sont les mêmes en remplaçant uniquement l'hamiltonien  $H$  par une forme quadratique  $H = \frac{1}{2}X^T Q X$ .

Il existe de nombreux résultats sur les systèmes linéaires avec la contrainte de saturation sur la commande [Sussmann et al. 1994], [Tarbouriech et al. 2007]. Par contre, les résultats sont rares dans le cas des systèmes non linéaires en particulier les systèmes hamiltoniens à ports, voir le travail de [Airong et Yuzhen 2010] en temps continu.

**1.4 Exemple numérique**

On considère un pendule non linéaire avec un retard en temps intervenant simultanément (et de manière abstraite) sur les deux variables d'état et une contrainte de saturation sur son contrôleur. Cet exemple a

pour objectif d'illustrer la stabilisation des systèmes hamiltoniens à ports discrets affectés par ces deux contraintes. La dynamique hamiltonienne en temps discret s'écrit par

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t X(n) = [J - R] \bar{\nabla}_X H(n) + [J_d - R_d] \bar{\nabla}_X H(n - d(n)) + g \text{sat}(u(n)) \\ y(n) = g^T \bar{\nabla}_X H(n) \end{cases} \quad (3.35)$$

où les différentes matrices

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.75 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs

$$\bar{\nabla}_t X(n) = \begin{bmatrix} \frac{q(n+1)-q(n)}{\Delta t} \\ \frac{p(n+1)-p(n)}{\Delta t} \end{bmatrix}, \quad \bar{\nabla}_X H(n) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(q(n+1))-\cos(q(n))}{q(n+1)-q(n)} \\ \frac{p(n+1)+p(n)}{2} \end{bmatrix}$$

La contrainte de saturation considérée ici satisfait l'équation (3.26) et elle s'écrit sous la forme

$$\text{sat}(u) = \text{sgn}(u) \min\{0.25, |u|\}, \quad |\text{sat}(u)| \leq 0.25$$

avec le retard en temps satisfait l'équation (3.8) généré d'une manière aléatoire  $d(n) \in \{1, 2, \dots, 8\}$ .

A partir du Théorème 8, les valeurs propres de la matrice LMI sont toutes négatives

$$\sigma(\Gamma) = -[0.0895, 0.4195, 0.0993, 0.2238, 0.1997, 0.4724, 0.1997, 0.4724]$$

et les différentes matrices sont

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.1111 & 0.0365 \\ 0.0365 & 0.2120 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q_2 = Q_3 = \begin{bmatrix} 0.3063 & 0.1331 \\ 0.1331 & 0.3659 \end{bmatrix}$$

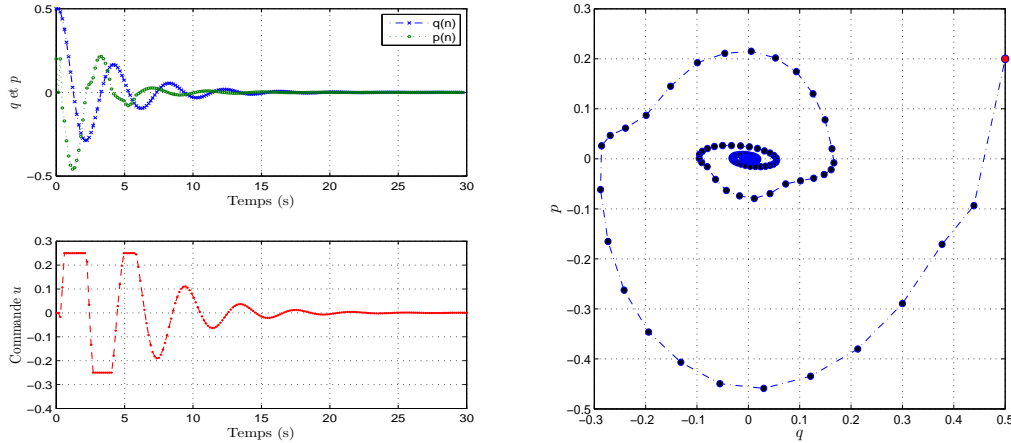


FIGURE 3.2 – À gauche, l'évolution en temps des trajectoires  $(q, p)$  et de la commande  $u$ , et à droite, le diagramme de phase  $(q \times p)$ .

Les résultats de simulations sont obtenus avec un pas de discrétisation  $\Delta t = 0.15s$  et les conditions initiales  $(q_0, p_0) = (0.5, 0.2)$ . La figure 3.2 à gauche, montre l'évolution des trajectoires de la boucle fermée et  $L_g H$ -contrôleur au cours du temps ( $t = 30s$ ). On remarque que la stabilité asymptotique est assurée par le contrôleur discret malgré l'effet du retard et la contrainte de saturation. Dans la figure 3.2 à droite, on constate des petites cassures sur les trajectoires du système bouclé (diagramme de phase) et cela est due à la saturation du contrôleur proposé à cet instant.

On peut donc conclure que le résultat présenté dans le Théorème 8 est très pratique dans la stabilisation des systèmes hamiltoniens affectés par des retards avec la contrainte de saturation sur le contrôleur. L'avantage que peut avoir ce résultat est le fait que l'étude est basée sur la dynamique discrète pour

laquelle la stabilité est une propriété intrinsèque en discret. Dans le cas contraire, l'erreur numérique peut engendrer un aspect négatif sur le conservatisme de ces conditions de stabilité.

Le  $L_gH$ -contrôleur étudié tout au long de cette partie peut être vu comme le contrôle par assignement d'interconnexion et d'amortissement (*en anglais*, Interconnection and Damping Assignment IDA) qui joue un rôle important dans la méthodologie IDA-PBC discrète qui sera présentée en détails dans la partie suivante.

## 2 CONTRÔLEUR IDA-PBC EN TEMPS DISCRET

Dans le formalisme hamiltonien, la synthèse IDA-PBC [Ortega et al. 2002b] est une méthode de stabilisation basée sur des considérations énergétiques et qui engendre tous les contrôleurs stabilisants pour cette classe de systèmes. Du point de vue énergétique, elle offre une interprétation intuitive dans ce formalisme (par la matrice de structure associée aux échanges au sein du système et par la matrice de dissipation associée aux phénomènes d'amortissement). Le bien-fondé de cette méthode repose sur les propriétés intrinsèques de passivité et de composabilité de la classe. C'est pourquoi, pour des dynamiques à temps discret, cette méthode ne s'applique pas trivialement. En effet, en l'absence de passivité (ou de composabilité) on peut montrer que la stabilité n'est plus intrinsèque car conditionnée par le pas d'intégration.

L'objet de ce paragraphe est de proposer une synthèse IDA-PBC discrète dans le formalisme hamiltonien passif à temps discret que nous avons introduit.

En temps continu, la synthèse IDA-PBC se décompose en une commande qui permet d'atteindre une dynamique cible (modèle matching) à laquelle s'ajoute une commande stabilisante par  $L_gV$ -contrôleur. La difficulté majeure de cette méthode réside dans la définition d'une dynamique cible atteignable. Cette restriction de la cible est nommée condition de matching. La littérature fournit plusieurs études sur la résolution de cette condition de matching pour des classes particulières. On peut citer [Fujimoto et al. 2001] pour IDA algébrique, [Ortega et al. 2002b] pour IDA non paramétrique et [Ortega et al. 2002a] pour IDA paramétrique.

On trouve également diverses applications expérimentales de cette méthode par une discrétisation directe de la commande continue (émulation), en mécanique pour commander la bille sur rail dans [Ortega et al. 2002a], électronique de puissance dans le contrôle du pont redresseur [Gaviria et al. 2005], le convertisseur de puissance de type Buck-Boost [Yong et al. 2008] et dans le domaine magnétique pour contrôler le profil radial du plasma dans le Tokamak [Vu et al. 2013].

En temps discret, les premiers travaux sont récents et la littérature est beaucoup moins extensive. En quelques mots, l'ensemble des ces travaux reposent sur le même principe : la compensation de la dérive énergétique discrète par l'ajout d'un terme correctif. On peut citer [Laila et Astolfi 2005] dans le cas des systèmes complètement actionnés et [Laila et Astolfi 2006b, Gören-Sümer et Yalçın 2011].

Fort de la passivité et de la composabilité discrètes, nous sommes à même de traiter la synthèse IDA-PBC discrète avec des outils similaires à ceux du continu. On notera que la difficulté de l'atteignabilité d'une dynamique cible n'est pas abordée dans ce mémoire.

### 2.1 Synthèse de contrôleur IDA-PBC discret

Considérons une dynamique discrète sans perte de la forme

$$(\bar{\Sigma}_H) : \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_t n \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(n)\bar{\nabla}_X H(n) + g(n)u \\ g^T(n)\bar{\nabla}_X H(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_H + gu \\ g^T\bar{\nabla}_X H \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

pour laquelle nous avons une égalité de passivité relativement au stockage  $H$ , à savoir  $\bar{\nabla}_t H = y^T u$ .

En faisant abstraction de l'atteignabilité de la cible, nous imposons le modèle cible  $(J_d, R_d, H_d)$ , soit une dynamique en boucle fermée de la forme

$$\bar{\nabla}_t X(n) = [J_d(n) - R_d(n)] \bar{\nabla}_X H_d(n). \quad (3.37)$$

On obtient un résultat similaire au cas continu.

**Proposition 13.**

Le système contrôlé (3.36) avec la commande IDA-PBC discrète  $u(n) = u_{es}(n) + u_{di}(n)$  où

$$u_{es}(n) = g(n)^\dagger \{J_d(n)\overline{\nabla}_X H_d(n) - J(n)\overline{\nabla}_X H(n)\} \quad (3.38a)$$

$$u_{di}(n) = -g(n)^\dagger R_d(n)\overline{\nabla}_X H_d(n) \quad (3.38b)$$

avec la pseudo-inverse  $g(n)^\dagger = [g(n)^T g(n)]^{-1} g(n)^T$ , engendre la dynamique désirée (3.37).

**Preuve.** *Un calcul direct mène au résultat. #*

Ce qui est moins évident en revanche, c'est que les composantes de la commande IDA-PBC jouent des rôles analogues à celles du continu. En effet, la commande  $u_{es}$  engendre une dynamique **conservative**. Le bilan d'énergie pour cette commande s'écrit

$$\overline{\nabla}_t H_d = \langle \overline{\nabla}_X H_d, \overline{X}_H + g u_{es} \rangle = \langle \overline{\nabla}_X H_d, \overline{X}_H + J_d \overline{\nabla}_X H_d - \overline{X}_H \rangle \equiv 0. \quad (3.39)$$

Il en est de même pour la commande  $u_{di}$  dont la fonction est de dissiper l'énergie pour assurer la stabilité, et ce indépendamment du pas d'intégration. En résumé, la formulation de cette synthèse IDA-PBC discrète repose implicitement sur les propriétés de la dynamique discrète.

En pratique, excepté le cas où  $g$  est inversible, la commande IDA-PBC que nous proposons ne peut s'affranchir de l'analyse du système continu. C'est en effet à la suite de cette analyse que l'on est capable de préciser la dynamique cible atteignable. Il semble vain de vouloir obtenir un équivalent discret affaibli de la condition de matching puisque toute notre démarche repose sur l'indépendance des propriétés vis-à-vis du pas d'intégration  $\Delta t$ . Une condition de matching discrète devrait donc être satisfaite pour tout  $\Delta t$ , ce qui, par passage à la limite, conduirait à la condition en temps continu.

Autre remarque concernant la réalisation de cette commande. Nous avons vu d'une part la stabilité (intrinsèque) engendrée par un correcteur de type  $L_g V$  et d'autre part son implémentation aisée en tant que retour de sortie. Afin d'exploiter ces avantages, il est courant d'imposer une dissipation en boucle fermée de la forme  $R_d = g K_{di} g^T$ , où  $K_{di}$  est la matrice définie positive constituée des gains d'amortissement. Dans ces conditions, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 14.**

Considérons la dynamique contrôlée (3.36) que l'on suppose zéro-état-déTECTABLE<sup>a</sup> et la dynamique désirée (3.37) avec la dissipation  $R_d = g K_{di} g^T$ ,  $K_{di} > 0$ . Si  $x^*$  est un minimum isolé de  $H_d$ , alors

- (i)  $x^*$  est un point d'équilibre (localement) stable de la boucle fermée obtenue avec la commande  $u(n) = u_{es}(n)$  donnée par (3.38a).
- (ii)  $x^*$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable de la boucle fermée avec la commande  $u(n) = u_{es}(n) + u_{di}(n)$  donnée par (3.38).

a. cf définition 1.5 chapitre 1

**Preuve.** *Montrons que  $V(x) = H_d(x) - H_d(x^*)$  est une candidate Lyapunov pour la dynamique considérée.*

(i) La commande  $u_{es}$  engendre une dynamique conservative, on a alors  $\overline{\nabla}_t V = \overline{\nabla}_t H \stackrel{(3.39)}{\equiv} 0$ .

(ii) En appliquant la commande complète  $u_{es} + u_{di}$ , on a

$$\overline{\nabla}_t V = -\overline{\nabla}_X H^T g K_{di} g^T \overline{\nabla}_X H = y_d^T K_{di} y_d < 0 \quad (3.40)$$

On conclut sur la stabilité asymptotique car la dynamique est zéro-état-déTECTABLE. #

## 2.2 Exemples de simulations

Nous illustrons maintenant la synthèse IDA-PBC discrète sur trois systèmes : le pendule simple, l'oscillateur d'impact et le pendule à roue inertielle. Les deux premiers sont des systèmes complètement actionnés et le dernier est sous-actionné. Dans chacun des cas, nous donnons les résultats de simulation issus d'une discrétisation par Euler émulé, Euler émulé corrigé et gradient discret.

### Pendule simple :

Avec des grandeurs normalisées (*i.e.*  $mgl = 1$ ), l'énergie  $H$  du pendule s'exprime

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q), \quad (3.41)$$

et la dynamique sous forme d'un SHP s'écrit

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(q) \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = p \end{cases} . \quad (3.42)$$

On prendra comme énergie désirée en boucle fermée

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q) + \frac{K_{es}}{2}q^2 + 1, \quad (3.43)$$

et comme dynamique cible

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -K_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

de sorte que le bilan d'énergie en boucle fermée s'écrive

$$\frac{dH_d}{dt} = -K_{di}p^2 < 0. \quad (3.45)$$

On résume les dynamiques et les lois de commande associées dans le tableau 3.1.

Dynamique	Commande
Système continue	
$\dot{x} = X_H(x) + gu$	$u_{es}(t) = -K_{es}q(t)$ $u_{di}(t) = -K_{di}p(t)$
Système émulé	
Euler	$u_{es}^E(n) = -K_{es}q(n)$ $u_{di}^E(n) = -K_{di}p(n)$
Système émulé corrigé [Laila]	
Euler	$u_{es}^L(n) = -K_{es}q(n) - \frac{K_{es}\Delta t}{2}p(n)$ $u_{di}^L(n) = -K_{di}p(n)$
SHP discret passif	
Gradient discret	$u_{es}^G(n) = -K_{es} \frac{q(n+1)+q(n)}{2}$ $u_{di}^G(n) = -K_{di} \frac{p(n+1)+p(n)}{2}$

TABLE 3.1 – Lois de commande IDA-PBC en fonction de la dynamique du pendule simple.

Comme précédemment, la courbe de référence sera celle obtenue par la routine `ode45` pour laquelle nous supposons une dérive de l'ordre de la précision machine pour horizon temporel court.

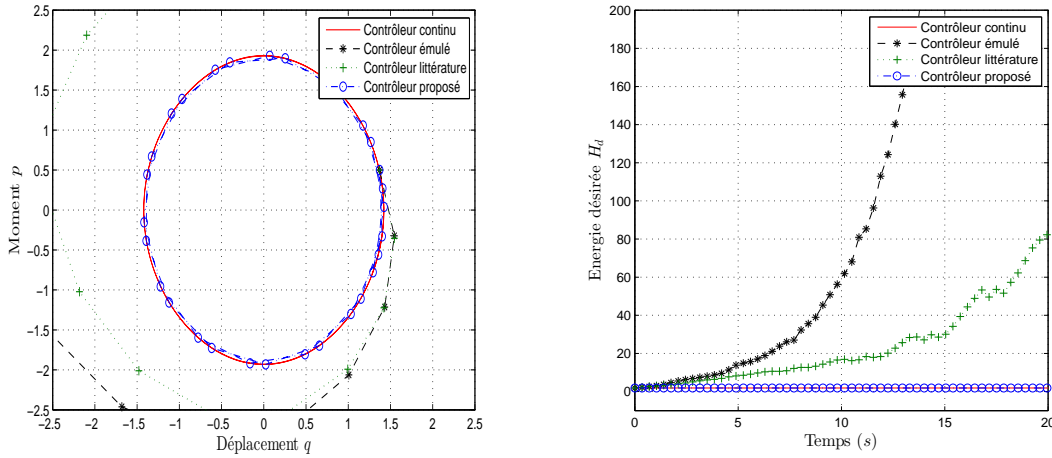


FIGURE 3.3 – Diagramme de phase et évolution de l'énergie du système bouclé avec  $u = u_{es}$ .

Dans un premier temps, nous appliquons uniquement la commande  $u_{es}$ , *i.e.* nous étudions le comportement des différentes dynamiques par rapport à la cible conservative. Les résultats de simulation sont présentés figure 3.3.

Le graphe de gauche figure 3.3 présente les dynamiques dans le plan de phase. L'approximation par gradient discret s'accorde avec le comportement continu. En revanche, les trajectoires obtenues par les approximations émulé et émulé corrigé sont divergentes : les dynamiques discrètes associées ne satisfaisant pas une équation de passivité, l'approximation engendre une dérive énergétique. On observe sur le graphe de droite figure 3.3 que le terme correctif introduit dans [Laila et Astolfi 2005] réduit cette dérive sans pour autant la supprimer.

Dans un second temps, nous appliquons la commande IDA-PBC complète  $u_{es} + u_{di}$  afin de vérifier la stabilisation du système bouclé. Les résultats de simulation sont présentés figure 3.4.

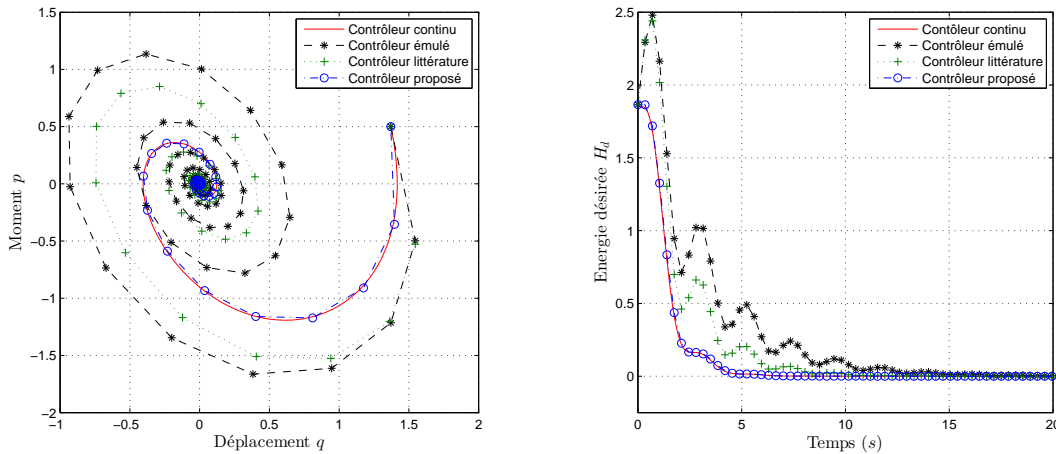


FIGURE 3.4 – Diagramme de phase et évolution de l'énergie du système bouclé avec  $u = u_{es} + u_{di}$ .

Les dynamiques dans le plan de phase montrent la stabilité asymptotique de l'origine mais avec des vitesses de convergences qui diffèrent. Comme nous l'avions évoqué dans le chapitre 1, ces écarts s'expliquent moins par la précision du schéma que par la dérive énergétique. En effet, si l'on reprend l'évolution de  $H_d$  dans le cas conservatif, graphe de droite figure 3.3, on comprend que pour assurer la convergence des trajectoires, l'amortissement introduit par la commande  $u_{di}$  doit compenser la dérive énergétique liée à la formulation de la dynamique discrète. Les niveaux d'énergie étant supérieurs, la

dissipation prend nécessairement plus de temps, d'où une vitesse de convergence réduite.

Intuitivement, on imagine aisément qu'en jouant sur le paramètre d'amortissement  $K_{di}$ , on peut déstabiliser la dynamique émulé tout en assurant la convergence de celle corrigée et même déstabiliser les deux. Nous présenterons des cas similaires dans l'exemple suivant.

L'analyse des résultats de simulation nécessite donc une attention particulière avant de conclure avec des arguments standards du continu.

### Oscillateur d'impact :

La dynamique de l'oscillateur d'impact est donnée par

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,15q - \frac{2}{q^3} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = p \end{cases} \quad (3.46)$$

avec comme énergie le hamiltonien  $H(q, p) = \frac{0,15}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{q^2}$ . La dynamique cible est similaire à l'exemple précédent, voir (3.44), avec comme énergie désirée

$$H_d(q, p) = H(q, p) + K_{es} \cos(q) - \frac{1}{2} \ln(q) - \frac{3}{2}q \quad (3.47)$$

On résume les dynamiques et les lois de commande associées dans le tableau 3.2.

Dynamique	Commande
Système continue	
$\dot{x} = X_H(x) + gu$	$u_{es}(t) = 0, 35 \sin(q(t)) + \frac{1}{2q(t)} + \frac{3}{2}$ $u_{di}(t) = -K_{di} p(t)$
Système émulé	
Euler	$u_{es}^E(n) = 0, 35 \sin(q(n)) + \frac{1}{2q(n)} + \frac{3}{2}$ $u_{di}^E(n) = -K_{di} p(n)$
Système émulé corrigé	
Euler	$u_{es}^L(n) = u_{es}^E(n) - \frac{k\Delta t}{2} p(n)$ $u_{di}^L(n) = -K_{di} p(n)$
SHP discret passif	
Gradient discret	$u_{es}^G(n) = -K_{es} \frac{q(n+1)+q(n)}{2}$ $u_{di}^G(n) = -K_{di} \frac{p(n+1)+p(n)}{2}$

TABLE 3.2 – Lois de commande IDA-PBC en fonction de la dynamique du pendule simple.

La courbe de référence sera celle obtenue par la routine `ode23t` pour laquelle nous supposerons une dérive de l'ordre de la précision machine sur l'horizon temporel considéré.

La première série illustre la dépendance de la stabilité du système bouclé en fonction du gain d'amortissement  $K_{di}$  et du pas d'intégration  $\Delta t$ . Les résultats de simulation sont présentés figure 3.5.

Enfin, la figure 3.6 qui suit présente le cas pathologique où toutes les trajectoires convergent vers différents ensembles. Nous avons appliqué les commandes discrètes émulée et émulée corrigée à une dynamique obtenue par un intégrateur énergétique. On observe la stabilisation de l'origine par les commandes IDA-PBC continue et issue du gradient discret. Les trajectoires émulée et émulée corrigée convergent, mais vers des cycles limites **distincts**. Par opposition au formalisme hamiltonien continu, l'analyse du comportement de ces dynamiques ne peut se faire qu'au cas par cas. Dans notre interprétation, ces cycles limites correspondent au cas d'égalité entre l'erreur de design du contrôleur et le comportement conservatif du système. Autrement dit, ils représentent les niveaux d'énergie de l'erreur de design du contrôleur.

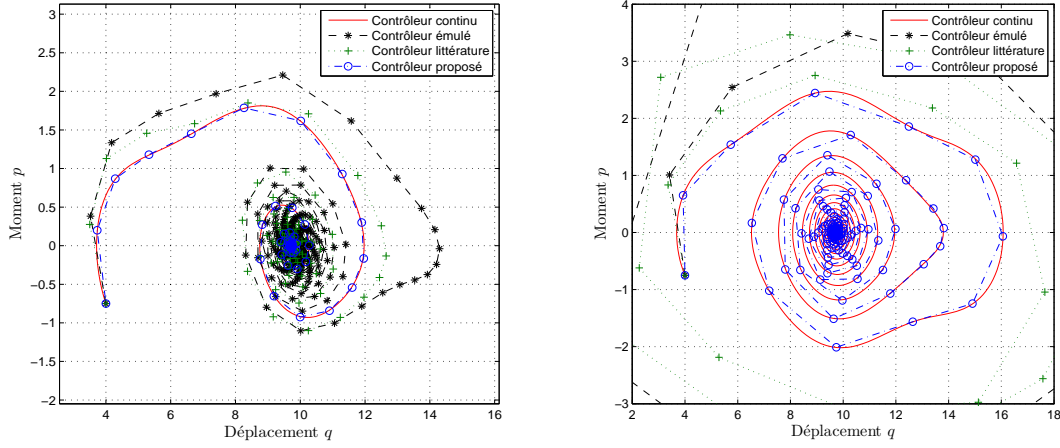


FIGURE 3.5 – Diagramme de phase pour  $K_{di} = 0,25$  à gauche et  $K_{di} = 0,05$  à droite, et  $\Delta t = 0,8$ .

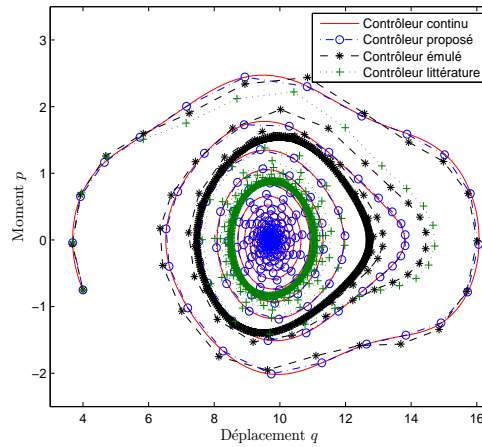


FIGURE 3.6 – Diagramme de phase de l'oscillateur d'impact bouclé.

### Pendule à roue inertielle :

Le pendule à roue inertielle est un pendule plan muni d'un disque motorisé situé à l'extrémité de la tige, voir la figure 3.7. L'actionnement du rotor produit une accélération angulaire du disque, générant un couple sur l'axe du pendule. La variable  $q_1$  représente l'angle par rapport à l'axe horizontal du pendule et  $q_2$  l'écart angulaire du disque par rapport au pendule.

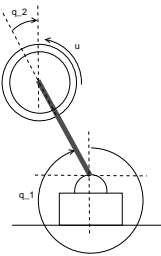


FIGURE 3.7 – Pendule à roue inertielle.

En **temps continu**, ce système peut être modélisé sous la forme hamiltonienne comme suit,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} u \quad (3.48)$$



où les différentes matrices représentent

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

où  $(q, p)$  désigne les variables du système,  $g$  désigne le vecteur d'entrée,  $M$  représente la matrice d'inertie et les paramètres  $I_1$  et  $I_2$  désignent le moment d'inertie du pendule et du disque, respectivement. L'énergie totale du système est donnée par la somme de l'énergie cinétique et potentielle

$$H(q, p) = K(p) + V(q) = \frac{1}{2I_1}p_1^2 + \frac{1}{2I_2}p_2^2 + m_3(\cos(q_1) - 1) \quad \text{avec} \quad m_3 = mgL$$

où  $m$  la masse du pendule,  $L$  sa longueur et  $g$  la force de gravité. Pour plus de détails concernant la synthèse de la commande IDA-PBC en temps continu voir [Ortega et al. 2002a].

La matrice d'inertie désirée  $M_d$  est choisie comme suit

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \quad a_1 > 0; a_1 a_3 > a_2^2 \quad (3.50)$$

où les coefficients  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont imposés d'une façon à assurer la positivité de la matrice  $M_d$ . Calculer la première partie de ce contrôleur ( $u_{es}$ ) revient à résoudre la condition matching suivante

$$\left( \frac{a_1 + a_2}{I_1} \right) \nabla_{q_1} V_d + \left( \frac{a_2 + a_3}{I_2} \right) \nabla_{q_2} V_d = -m_3 \sin(q_1) \quad (3.51)$$

On fixe l'énergie potentielle désirée

$$V_d(q) = \frac{I_1 m_3}{a_1 + a_2} \cos(q_1) + \frac{k_1}{2} \left( q_2 - \frac{I_1(a_2 + a_3)}{I_2(a_1 + a_2)} q_1 \right)^2 \quad (3.52)$$

Pour plus de détails sur la démarche de la synthèse en temps continu, voir la travail de [Ortega et al. 2002a].

On résume les dynamiques et les lois de commandes associées dans le tableau 3.3

Dynamique	Commande
Système continue	
$\dot{x} = X_H(x) + gu$	$u_{es}(t) = 30 \sin(q_1) + 5k_1(q_2 + q_1)$ $u_{di}(t) = -k_v(-2p_1 - p_2)$
Système émulé	
Euler	$u_{es}^E(n) = 30 \sin(q_1(n)) + 5k_1(q_2(n) + q_1(n))$ $u_{di}^E(n) = -k_v(-2p_1(n) - p_2(n))$
Système émulé corrigé	
Euler	$u_{es}^L(n) = 30 \sin(q_1(n)) + 5(q_2(n) + q_1(n))$ $+ 350\Delta t(2p_1(n) + p_2(n))$ $u_{di}^L(n) = -k_v(-2p_1(n) - p_2(n))$
SHP discret passif	
Gradient discret	$u_{es}^G(n) = -30 \left\{ \frac{\cos(q_1(n+1)) - \cos(q_1(n))}{q_1(n+1) - q_1(n)} \right\} - \frac{15}{2} q_1(n+1)$ $\frac{25}{2} q_1(n) - 10q_2(n+1) + 15q_2(n)$ $u_{di}^G(n) = -5 \frac{I_2(a_1 + a_2)}{a_1 a_3 - a_2^2} \left\{ \frac{q_2(n+1) - q_2(n)}{\Delta t} + \frac{I_1(a_2 + a_3)}{I_2(a_1 + a_2)} \frac{q_1(n+1) - q_1(n)}{\Delta t} \right\}$

TABLE 3.3 – Lois de commande IDA-PBC en fonction de la dynamique de la roue inertielle.

Comme dans l'exemple précédent, nous traiterons le cas continu à l'aide de la routine `ode45` pour laquelle les erreurs d'intégration seront supposées négligeables relativement à l'horizon temporel. L'implémentation de la dynamique discrète sera conduite pour un pas  $\Delta t = 0,033s$ . Les différents paramètres sont  $I_1 = 0.1$ ,  $I_2 = 0.2$ ,  $m_3 = 10$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -3$ ,  $a_3 = 5$ ,  $k_v = 5$  et  $k_1 = 1$ . la condition initiale est  $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (2, 0, 0, 0)$ . Les résultats de simulation présentés figure 3.8 concernent le couple de variables  $(q_1, p_1)$ .

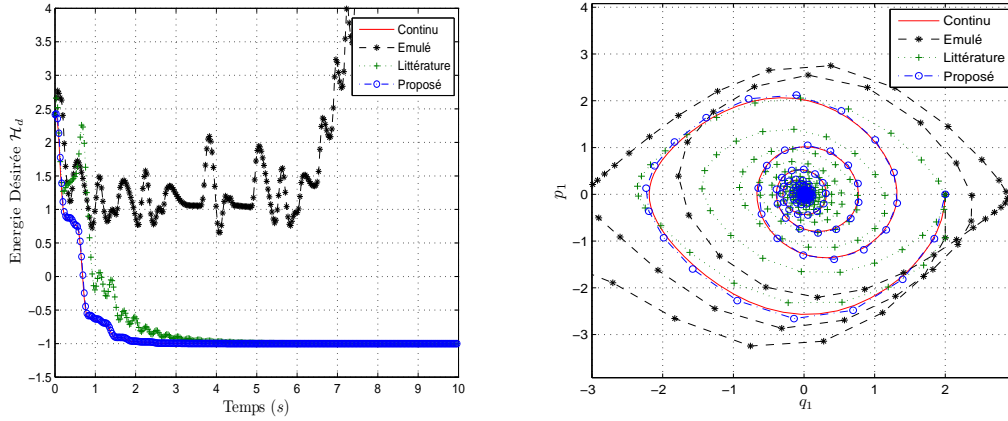


FIGURE 3.8 – Diagramme de phase et évolution de l'énergie  $H_d$  en boucle fermée.

Ces simulations illustrent le comportement ératiques des trajectoires discrètes obtenues par un schéma ne tenant pas compte des propriétés intrinsèques de la dynamique. Par construction, le contrôleur IDA-PBC en temps continu stabilise asymptotiquement l'origine. On observe une évolution identique sur les trajectoires discrètes obtenu avec l'approche proposé.

Cependant, l'émulation de ce contrôleur conduit à une dynamique en boucle fermée qui est inattendue, *cf* diagramme de phase figure 3.8 à gauche. L'écart entre les trajectoires s'observe également sur le comportement de l'énergie en boucle fermée  $H_d$  (qui engendre la dynamique) présentée figure 3.8 à droite. Sur cette figure, on voit en effet que la commande discrète ne permet pas d'atteindre le niveau d'énergie désirée pour stabiliser l'origine. Ce comportement peut s'expliquer comme suit. L'approximation liée au schéma de discrétisation conduit à une **croissance numérique de l'énergie** que le contrôleur ne peut pas compenser. Il s'ensuit un comportement imprévisible de la boucle fermée. Tant dis que les trajectoires obtenues avec le contrôleur de la littérature convergent vers le point d'équilibre avec une faible vitesse de convergence en la comparant à la référence. Dans ce cas, le contrôleur de la littérature arrive à compenser la dérive d'énergie qui est due à l'erreur numérique.

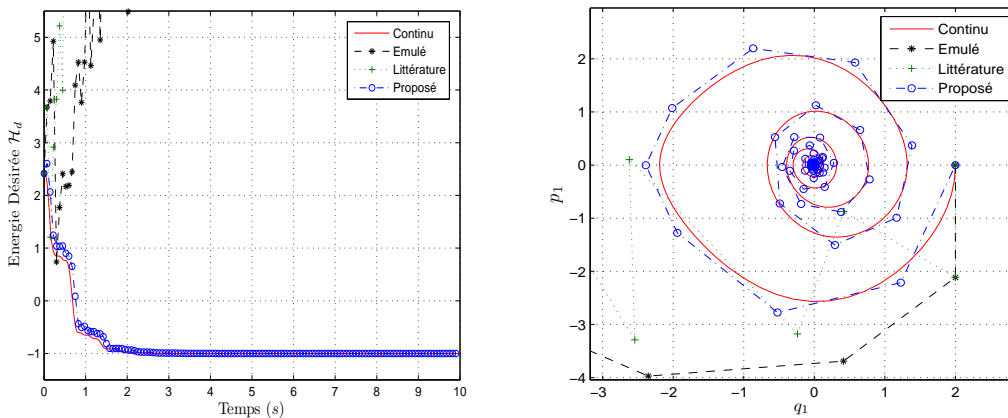


FIGURE 3.9 – Diagramme de phase et évolution de l'énergie  $H_d$  en boucle fermée.

Afin de tester les limites du contrôleur de la littérature, nous allons augmenter le pas d'intégration jusqu'à  $\Delta t = 0,075s$ . De la figure 3.9, on observe que les trajectoires discrètes avec le contrôleur de la littérature divergent comme celles obtenues avec émulé. Pour ce pas d'intégration, les deux contrôleurs discrets n'arrivent pas à compenser cette dérive énergétique. Cependant, les trajectoires discrètes obtenues avec notre approche restent stables et convergent vers le point d'équilibre (similaire au cas continu).

### 3 APPLICATION SUR LE CONVERTISSEUR BUCK

Un convertisseur est un dispositif électronique de puissance qui sert à la gestion de l'énergie électrique. On peut citer comme application la distribution d'énergie stockée (batterie), dans des ordinateurs, dans des véhicules électriques, des appareils électroménagers et dans d'autres nombreuses applications.

Souvent, ces convertisseurs sont victimes à des fluctuations de tension d'entrée, des variations de la charge et des incertitudes. Donc, un contrôleur est indispensable pour faire face à ces différentes contraintes pour répondre aux spécifications et assurer les performances désirées.

Avec l'évolution des nouvelles technologies, de nouveaux convertisseurs de puissances (de tailles réduites) ont été conçus pour fonctionner à des fréquences de découpages élevées (quelques MHz). Pour les contrôler, il apparaît nécessaire d'utiliser des micro-contrôleurs rapides pour permettre un volume de calcul suffisant par rapport aux fréquences de découpages. L'inconvénient majeur de ces dispositifs est leur coût élevé. On a donc recours à des micro-contrôleurs moins rapides sous la condition d'adapter une technique de commande qui fonctionne pour des faibles fréquences d'échantillonnages. Il s'agit donc en pratique de satisfaire un compromis entre la robustesse et les performances.

Nous étudions ici un convertisseur DC-DC abaisseur de tension Buck. La commande de ce type de convertisseur a été traitée en temps continu par des approches classiques (régulateur PID) [Rabbani et al. 2012], par mode glissant [Guldemir 2011] et par une synthèse énergétique IDA-PBC [Jaafar 2011]. Toutes ces techniques ont été validées par un bloqueur d'ordre zéro (émulation). A notre connaissance, l'approche énergétique discrète n'apparaît pas dans la littérature.

Nous proposons de comparer notre méthode de synthèse discrète avec une commande émulée. Nous étudions ensuite la robustesse vis-à-vis de la charge et de la fréquence d'échantillonnage. Nous verrons que la méthode proposée, de part les propriétés satisfaites indépendamment du pas d'intégration, permet d'atteindre des performances désirées pour des fréquences d'échantillonnages assez faible.

#### 3.1 Modes de fonctionnements

Le convertisseur Buck connu aussi sous le nom d'abaisseur de tension continue-continue a pour objectif de convertir une tension d'entrée en une tension de sortie de plus faible valeur. Il est composé des éléments électroniques suivants :  $S$  = interrupteur (switch),  $D$  = diode,  $L$  = inductance,  $C$  = capacité,  $R$  = résistance,  $v_e$  = tension d'alimentation et  $v_s$  = tension de sortie (ou de la charge), voir la figure 3.10.

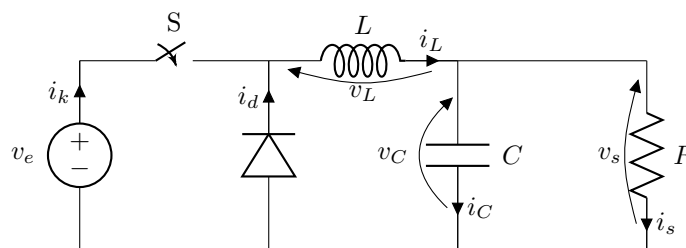


FIGURE 3.10 – Convertisseur de puissance Buck

Ce type de convertisseur peut être décomposé en deux configurations selon la position de l'interrupteur  $S$ . Quand l'interrupteur est fermé "état passant", le courant qui sort de la source traverse l'inductance, et croît linéairement dans la bobine. Ainsi l'énergie sera stockée tant que le courant ne cesse de croître. Dans ce cas la tension aux bornes de l'inductance est donnée par la différence de tension d'entrée et de

sortie  $v_L = v_e - v_s$ . Dans le cas où l'interrupteur  $S$  est ouvert "état bloqué", l'inductance se décharge sur la charge et la diode de roue libre  $D$  assure la continuité du courant sans interruption dans le circuit. La tension aux bornes de l'inductance s'exprime alors par  $v_L = -v_s$ , car la diode devient passante et sa tension est négligeable.

Physiquement, l'interrupteur  $S$  peut être vue comme étant un commutateur de puissance ou un transistor. Sur la grille de ce dernier, un signal MLI<sup>4</sup> est injecté dans le but de contrôler l'état d'ouverture et de la fermeture lors du fonctionnement. En faisant varier ce signal, on pourra ainsi contrôler la tension de sortie moyennée.

Le principe de fonctionnement de ce convertisseur est décrit par deux modes : mode de conduction continue (*en anglais*, CCM : Continuous Conduction Mode) et le mode de conduction discontinue (*en anglais*, DCM : Discontinuous Conduction Mode). D'un point de vue électronique de puissance, ces deux modes de fonctionnements sont expliqués comme suit :

- **Mode de conduction continue** : ce mode est caractérisé par un courant circulant d'une manière continue dans la bobine sans interruption. Dans ce cas, la période de fonctionnement est décomposée sur deux intervalles, le premier correspond à l'état passant de l'interrupteur défini par  $[t_0, t_0 + \alpha T]$  et le deuxième correspond à l'état bloqué défini par  $[t_0 + \alpha T, t_0 + T]$ . Les paramètres  $T$  et  $\alpha$  désignent la période de commutation et le rapport cyclique, respectivement. Lorsque l'interrupteur est bloqué, le courant dans l'inductance décroît linéairement puisque la tension d'entrée est constante sur cet intervalle. L'évolution du courant est illustré par la figure 3.11 à gauche. D'après cette figure, on constate que le courant évolue d'une façon continue en fonction des modes de fonctionnement, d'où le nom *mode de conduction continue*.
- **Mode de conduction discontinue** : ce type de mode traduit le fait que le courant qui traverse la bobine s'annule sur un certain intervalle de fonctionnement. Dans ce cas, la période de commutation est décomposée sur trois intervalles (figure 3.11) : l'état passant de l'interrupteur est défini par  $[t_0, t_0 + \alpha T]$  et l'état bloqué est constitué de deux parties définies par deux intervalles du temps  $[t_0 + \alpha T, t_0 + (\alpha + \beta)T]$  et  $[t_0 + (\alpha + \beta)T, t_0 + T]$ , où le deuxième intervalle correspond à la durée du temps pendant laquelle le courant s'annule.

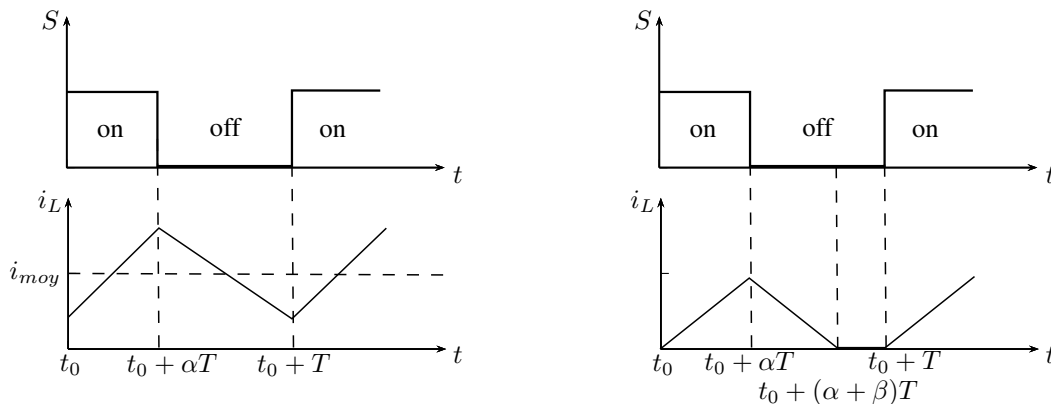


FIGURE 3.11 – Modes de fonctionnements : à gauche CCM et à droite DCM

**Remarque 3.1.** Quand le courant dans la bobine  $i_L$  s'annule uniquement au moment de la commutation, le convertisseur Buck fonctionne en **conduction limitée** (entre la conduction continue et discontinue).



Le mode de fonctionnement du convertisseur Buck est assimilé à un cycliste qui pédalerait de façon saccadée. Sur un intervalle du temps, le cycliste pédale et sa vitesse augmente, et s'il s'arrête de pédaler et se laisse aller sur son élan (grâce à la roue libre), sa vitesse dans ce cas diminue. Donc le cycliste est confronté à deux modes de fonctionnements différents liés à sa vitesse sur un intervalle de temps donné : le premier mode est lorsque l'élan est suffisant pour atteindre la fin de l'intervalle sans que sa vitesse s'annule. Ceci donc est

4. Modulation de Largeur d'Impulsions (*en anglais*, PWM : Pulse Width Modulation)

analogue au mode CCM du convertisseur. Le deuxième mode, est lorsque l'élan ne suffit pas pour atteindre la fin de l'intervalle, donc sa vitesse s'annule sur une partie de temps ce qui est analogue au mode CDM dans le cas du convertisseur.

En pratique, ce convertisseur peut fonctionner dans les deux modes. Dans la suite de notre étude, seul le mode par conduction a été pris en compte. Nous présentons maintenant le modèle moyen de ce convertisseur.

### 3.2 Modèle moyen du convertisseur Buck

Pour établir la dynamique de ce convertisseur, une technique classique consiste à moyennner par un rapport cyclique les deux configurations suivant l'état de l'interrupteur  $S$  fermé (figure 3.12) ou ouvert (figure 3.13). Chaque configuration du circuit est décrite mathématiquement par un modèle linéaire comme suit.

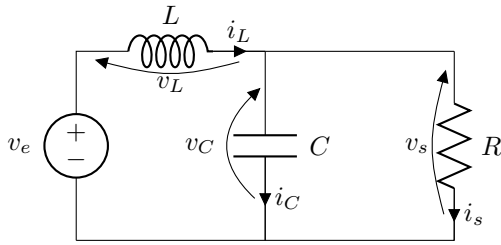


FIGURE 3.12 – Interrupteur fermé

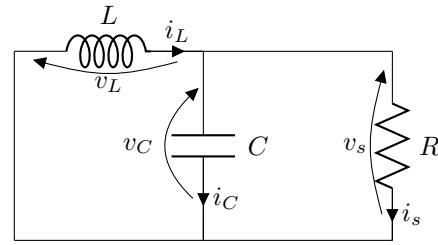


FIGURE 3.13 – Interrupteur ouvert

Lorsque l'interrupteur  $S$  est fermé, de la figure 3.12, on obtient directement les équations suivantes

$$\begin{cases} v_L + v_C - v_e = 0 & \text{où } v_C = v_s \text{ (loi des mailles)} \\ i_L - i_C - i_s = 0 & \text{(loi des noeuds)} \end{cases}, \quad (3.53)$$

et dans le cas où l'interrupteur  $S$  est ouvert, de la figure 3.13, on obtient

$$\begin{cases} v_L + v_C = 0 \\ i_L - i_C - i_s = 0 \end{cases}, \quad (3.54)$$

où les paires  $(v_L, i_L)$ ,  $(v_C, i_C)$  représentent les tensions et les courants dans l'inductance et le condensateur, respectivement. On pose  $x = [i_L \ v_C]^T$  comme vecteur d'état,  $v_e = E$  représente la tension d'entrée constante et  $i_s$  désigne le courant de sortie qui traverse la résistance  $R$ . Le modèle d'état des lois de Kirchoff (3.53) et (3.54) sont données par

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E \\ y_1 = [0 \ 1] x_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} E \\ y_2 = [0 \ 1] x_2 \end{cases} \quad (3.55)$$

Afin d'obtenir un modèle mathématique pour la synthèse de lois de commandes, une méthode fréquemment utilisée dans la littérature consiste à moyennner les équations de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  correspondants aux deux modes distincts suivant l'état de  $S$ . Le résultat est un système linéaire donné par

$$\begin{cases} \dot{x} = (uA_1 + (1-u)A_2)x + (uB_1 + (1-u)B_2)E = (A_1 - A_2)ux + A_2x + E(B_1 - B_2)u + B_2E \\ y = (uC_1 + (1-u)C_2)x = (C_1 - C_2)ux - C_2x \end{cases} \quad (3.56)$$

Après simplification, le modèle moyen s'écrit alors sous la forme linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1] x \end{cases}, \quad (3.57)$$

où le contrôleur  $u \equiv \alpha$  désigne le rapport cyclique utilisé pour piloter la tension de la charge  $v_C$ .

**Remarque 3.2.** Dans le mode de conduction discontinue, le convertisseur Buck est décrit par trois configurations. Deux configurations sont identiques au mode de conduction continue ( $S$ -fermé  $D$ -bloquée et  $S$ -ouvert  $D$ -passante) et la troisième configuration correspondante à la fin de découpage où l'interrupteur  $S$  est ouvert au moment que la diode reste bloquée ( $S$ -ouvert  $D$ -bloquée).

### 3.3 Application du contrôleur IDA-PBC sur le convertisseur Buck

A partir du modèle moyen (3.57), on peut facilement obtenir la forme hamiltonienne (linéaire) en remplaçant les variables  $x$  par les variables d'énergie  $z = [\phi_L \ q_c]^T$  avec  $\phi_L$  désigne le flux magnétique dans la bobine et  $q_c$  désigne la charge électrique. La dynamique en temps continu du convertisseur Buck s'exprime alors par

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}}_{(J-R)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}}_Q z + \underbrace{\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}}_g u \Leftrightarrow \dot{z} = [J - R] Qz + gu. \quad (3.58)$$

En temps discret, la dynamique hamiltonienne basée sur le gradient énergétique s'écrit par

$$\frac{z(n+1) - z(n)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \frac{z(n+1) + z(n)}{2} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} u(n), \quad (3.59)$$

où l'énergie totale du système est donnée par la somme d'énergie stockée dans la bobine et celle dans le condensateur sous la forme quadratique

$$H(n) = \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_L(n)^2}{L} + \frac{q_C(n)^2}{C} \right) = \frac{1}{2} z(n)^T Qz(n). \quad (3.60)$$

L'idée maintenant est d'appliquer un contrôleur passif en temps discret sur ce type de convertisseur. Pour ce faire, on choisit une approche algébrique où on impose l'énergie  $H_d(n)$  comme étant l'hamiltonien du système autour du point d'équilibre désiré  $z^*$

$$H_d(n) = \frac{1}{2} (z(n) - z^*)^T Q (z(n) - z^*). \quad (3.61)$$

et on résout un ensemble d'équations en les matrices de structure et de dissipation désirées  $J_d$  et  $R_d$

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & -j_d \\ j_d & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_d = \begin{bmatrix} r_{1d} & 0 \\ 0 & r_{2d} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.62)$$

Le système en boucle fermée désiré s'écrit lui aussi sous la forme hamiltonienne

$$\frac{z(n+1) - z(n)}{\Delta t} = (J_d - R_d) Q \left( \frac{z(n+1) + z(n)}{2} - z^* \right). \quad (3.63)$$

Il reste maintenant à faire l'égalité entre la boucle ouverte (3.59) et la boucle fermée (3.63) afin de trouver les paramètres de  $J_d$  et  $R_d$  et obtenir le contrôleur discret désiré. Cette égalité est donnée par

$$(J - R) Q \frac{z(n+1) + z(n)}{2} + gu(n) = (J_d - R_d) Q \left( \frac{z(n+1) + z(n)}{2} - z^* \right) \quad (3.64)$$

Les différents paramètres inconnus ( $j_d, r_{1d}$  et  $r_{2d}$ ) sont dans les matrices  $J_d$  et  $R_d$ , pour les explicités, on résout deux équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} -\frac{1}{C} \frac{q_C(n+1) + q_C(n)}{2} + Eu(n) & = -\frac{r_{1d}}{L} \left[ \frac{\phi_L(n+1) + \phi_L(n)}{2} - \phi_L^* \right] - \frac{j_d}{C} \left[ \frac{q_C(n+1) + q_C(n)}{2} - q_C^* \right] \\ \frac{1}{L} \frac{\phi_L(n+1) + \phi_L(n)}{2} - \frac{1}{RC} \frac{q_C(n+1) + q_C(n)}{2} & = \frac{j_d}{L} \left[ \frac{\phi_L(n+1) + \phi_L(n)}{2} - \phi_L^* \right] - \frac{r_{2d}}{C} \left[ \frac{q_C(n+1) + q_C(n)}{2} - q_C^* \right] \end{cases} \quad (3.65)$$

De la deuxième ligne de l'équation (3.65), le paramètre  $j_d$  s'écrit par la relation suivante

$$j_d = \frac{\frac{1}{L} \frac{\phi_L(n+1) + \phi_L(n)}{2} - \frac{1}{RC} \frac{q_C(n+1) + q_C(n)}{2} + \frac{r_{2d}}{C} \left[ \frac{q_C(n+1) + q_C(n)}{2} - q_C^* \right]}{\frac{1}{L} \left[ \frac{\phi_L(n+1) + \phi_L(n)}{2} - \phi_L^* \right]} \quad (3.66)$$

D'après les lois de Kirchoff,  $r_{1d}$  représente la résistance et  $r_{2d}$  la conductance. On choisit alors de poser  $r_{2d} = \frac{1}{R}$ . La relation (3.65) donne alors  $j_d = 1$ . Maintenant que tous les paramètres sont connus, on calcule le contrôleur discret à partir de l'égalité (3.64) en remplaçant les dynamiques à l'instant  $n + 1$  par les formes explicites suivantes : la boucle ouverte (3.59) par  $z(n + 1) = Az(n) + Bu(n)$  et la boucle fermée (3.63) par  $z(n + 1) = A_d z(n) - B_d z^*$ , où les différentes matrices sont données par

$$\begin{aligned} A &= [I - \frac{\Delta t}{2}(J - R)Q]^{-1} [I + \frac{\Delta t}{2}(J - R)Q] \\ B &= \Delta t [I - \frac{\Delta t}{2}(J - R)Q]^{-1} g \\ A_d &= [I - \frac{\Delta t}{2}(J_d - R_d)Q]^{-1} [I + \frac{\Delta t}{2}(J_d - R_d)Q] \\ B_d &= \Delta t [I - \frac{\Delta t}{2}(J_d - R_d)Q]^{-1} (J_d - R_d)Q \end{aligned}$$

A partir de la relation (3.64), le contrôleur discret prend la forme suivante

$$u(n) = \mathcal{B}^\dagger \{ [A_d - \mathcal{A}] z(n) - B_d z^* \}. \quad (3.67)$$

où  $\mathcal{B}^\dagger = [\mathcal{B}^T \mathcal{B}]^{-1} \mathcal{B}^T$  et les différents paramètres s'écrivent par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}(J - R)Q(A + I) \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{2}(J - R)QB + g \\ \mathcal{A}_d &= \frac{1}{2}(J_d - R_d)Q(A_d + I) \\ \mathcal{B}_d &= \frac{1}{2}(J_d - R_d)Q(B_d + I) \end{aligned}$$

Lors de la mise en œuvre pratique, on va manipuler que les variables du courant dans l'inductance  $i_L$  et de la tension de sortie  $v_s$ , alors un changement de variable est nécessaire pour faire apparaître ces nouvelles variables en respectant la relation ci-dessous,

$$\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_L \\ q_C \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = Qz \quad (3.68)$$

Le contrôleur IDA-PBC discret s'écrit alors par

$$u(n) = \mathcal{B}^\dagger \{ [A_d - \mathcal{A}] Q^{-1} x(n) - B_d Q^{-1} x^* \}. \quad (3.69)$$

Ce contrôleur discret assure la négativité de la variation de l'hamiltonien désiré  $H_d$  indépendamment du choix de pas d'intégration et pour tout gain de dissipation  $K_{di} > 0$ .

**Remarque 3.3.** *En temps continu, l'efficacité de ce contrôleur a été mis en avant dans [Jaafar 2011] en le comparant avec les méthodes classiques de la littérature (comme les régulateurs PID par exemple). Bien qu'il présente de nombreux avantages au niveau de la commande des convertisseurs, son application sur la maquette reste limité par le fait qu'on perd la propriété de passivité, ce qui conduit d'ailleurs à des oscillations et voire même l'instabilité du système en boucle fermée.*

Il est important de noter que l'augmentation de l'ordre des méthodes de discrétisation n'assure pas nécessairement la négativité du bilan énergétique en temps discret (perte de la passivité), voir les travaux de [Nešić et al. 1999, Nešić et Teel 2004, Nešić et Grüne 2005] pour plus de détails. Alors, le seul moyen est d'adapter un schéma d'intégration pour lequel la propriété de passivité en particulier devient intrinsèque.

### 3.4 Simulations et analyse des résultats

L'objectif de cette partie est d'illustrer les performances du contrôleur discret proposé (3.69) en le comparant avec le contrôleur émulé pour des fréquences d'échantillonnages décroissantes. Autrement dit, on donne des résultats de simulations pour différentes valeurs du pas d'intégration afin d'évaluer l'impact de la discrétisation lors de l'implémentation et de la validation sur le convertisseur.

En simulation, les valeurs numériques des différents paramètres du convertisseurs sont représentés dans le tableau 3.4.

La figure 3.14 (à gauche) illustre le contrôleur donné par le rapport cyclique et la tension de la charge (à droite) obtenue avec une fréquence d'échantillonnage  $F = 5kHz$ . A partir de ces figures, on constate

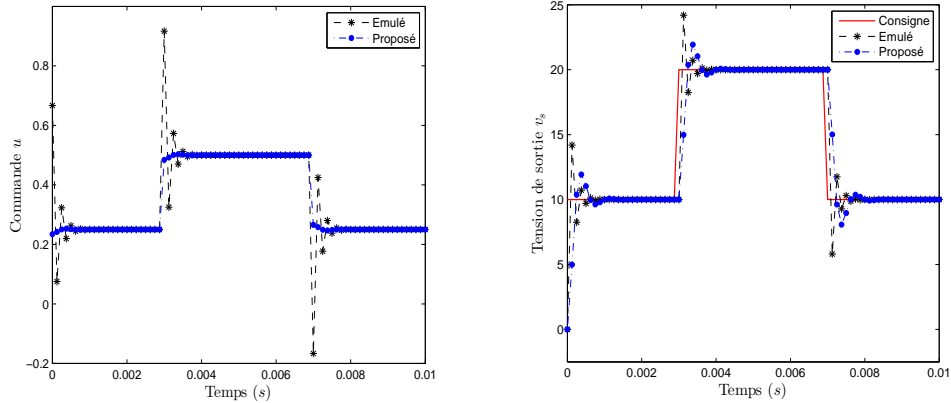


$L$	$C$	$R$	$E$	$r_{1d}$
$160\mu H$	$400\mu F$	$3\Omega$	$40V$	$5\Omega$

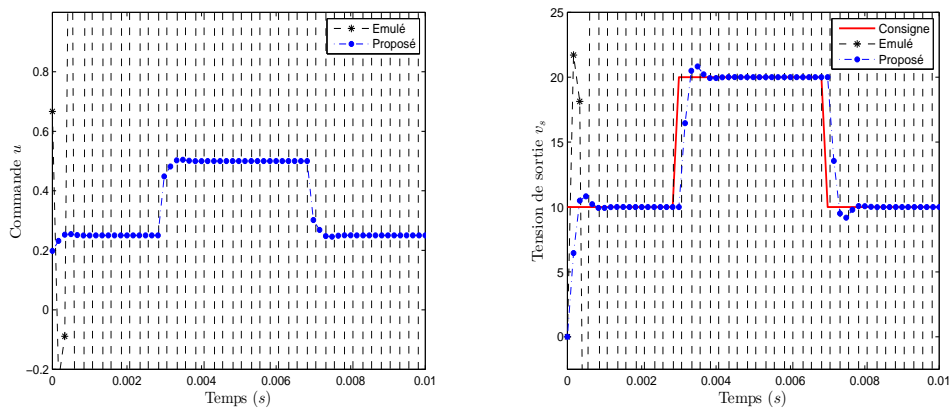
TABLE 3.4 – Paramètres du convertisseur Buck.

que ces deux contrôleurs discrets assurent la stabilité du système en boucle fermée. Dans les deux cas, la tension de sortie suit la référence. Par contre, on remarque quelques oscillations au niveau de la tension  $v_s$  obtenue avec le contrôleur émulé. On observe aussi des pics au niveau du contrôleur émulé chose qui n'existe pas sur le contrôleur proposé.

Quand la fréquence d'échantillonnage est diminuée de 40%, soit  $F = 3KHz$  le contrôleur émulé ne suffit

FIGURE 3.14 – Évolution du courant et de la tension pour la fréquence  $F = 5KHz$ .

pas pour maintenir la tension de sortie  $v_s$  à sa référence (figure 3.15 à droite). Cela vient du fait que l'erreur numérique engendrée par le contrôleur émulé détruit les propriétés fondamentales de la boucle fermée. Pour assurer la stabilité avec ce type de contrôleur, il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage ce qui est fortement limité en pratique.

FIGURE 3.15 – Évolution du courant et de la tension pour la fréquence  $F = 3KHz$ .

La question maintenant est de savoir si les deux contrôleurs sont robustes aux variations de la charge. De la figure 3.16, on observe clairement que le contrôleur proposé est nettement meilleur que celui émulé pour la fréquence d'échantillonnage  $F = 4KHz$ . La charge de départ est de  $3\Omega$ , à l'instant  $t = 5ms$  on effectue une variation de la charge de 75% et on constate que la tension obtenue avec le contrôleur émulé ne suit plus sa référence. En revanche, le contrôleur proposé rejette la variation de la charge et il maintient la tension de sortie à sa consigne, voir la figure 3.16 à  $t = 5ms$ .



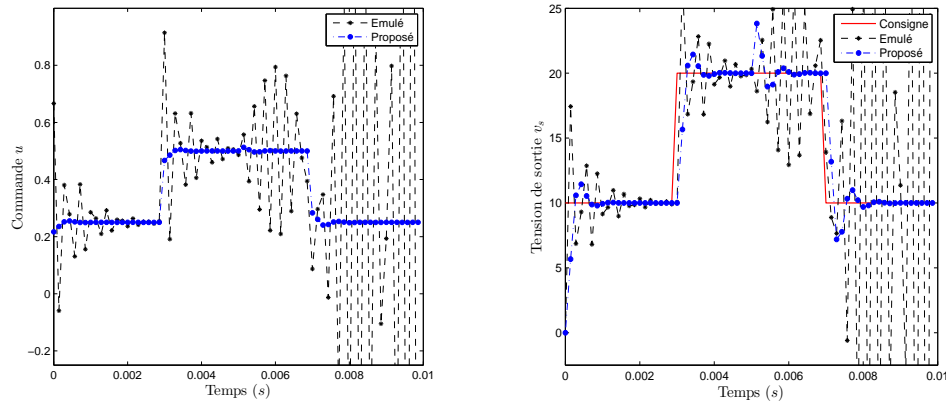


FIGURE 3.16 – Évolution du courant et de la tension pour la fréquence  $F = 4\text{KHz}$  sous une perturbation.

### 3.5 Validation expérimentale

Avant une étude comparative des résultats expérimentaux, on va tout d'abord vous présenter simplement la maquette sans rentrer dans les détails, voir la figure 3.17.

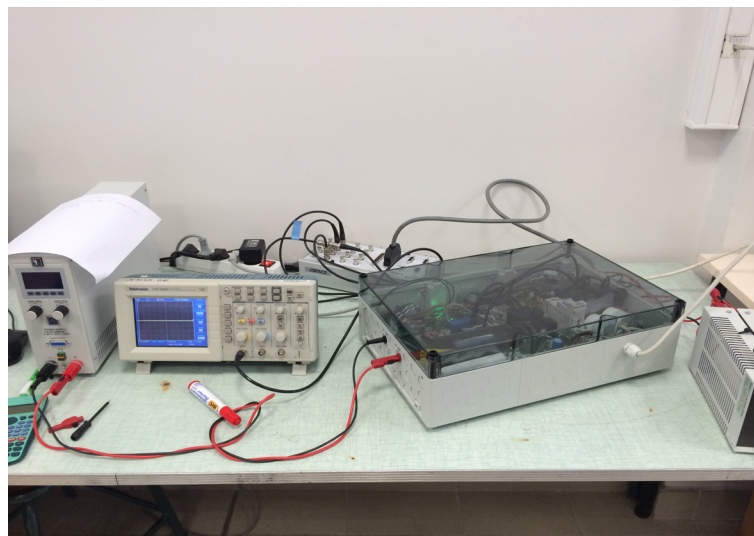
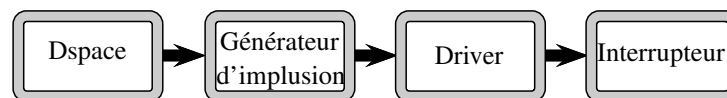


FIGURE 3.17 – Propagation d'onde.



L'ordinateur est associé à une carte électronique qui possède un DSP de type DS1104 qui permet d'effectuer les calculs en temps réel. Un boîtier de connections relié par une nappe à la carte DS1104 possède les entrées-sorties suivantes :

- 8 entrées analogiques (-10 V +10V).
- 8 sorties analogiques (-10 V +10V).
- 1 port E/S numériques.
- 2 entrées codeur incrémental.
- 1 sortie MLI triphasée.

La carte DSP va donc permettre l'acquisition des tensions et courants, et sa sortie MLI (PWM) pilotera le hacheur. Cette carte permet aussi de mettre en application des simulations développées sous l'environnement Simulink, dans un processeur de type DSP en temps réel. Enfin, l'envoi de l'impulsion sur l'interrupteur se fait à l'aide d'un driver, qui représente une interface entre les signaux analogiques et les composants de puissance.

En pratique, les différents paramètres du convertisseur sont représentés dans le tableau 3.5

$L$	$C$	$R$	$E$	$F$
$160\mu H$	$400\mu F$	$2\Omega - \text{inf}$	$40V$	$10KHz$

TABLE 3.5 – Paramètres du convertisseur Buck.

A partir de la figure 3.18, on constate des petites oscillations de la tension de sortie  $v_s$  commandée avec le contrôleur émulé pour des fréquences d'échantillonnage  $F = 4KHz$ . En revanche, le contrôleur proposé suit exactement la consigne (échelon) sans oscillations avec une erreur statique nulle. Ceci est dû à l'erreur numérique commise en temps discret par le contrôleur émulé. En diminuant la fréquence

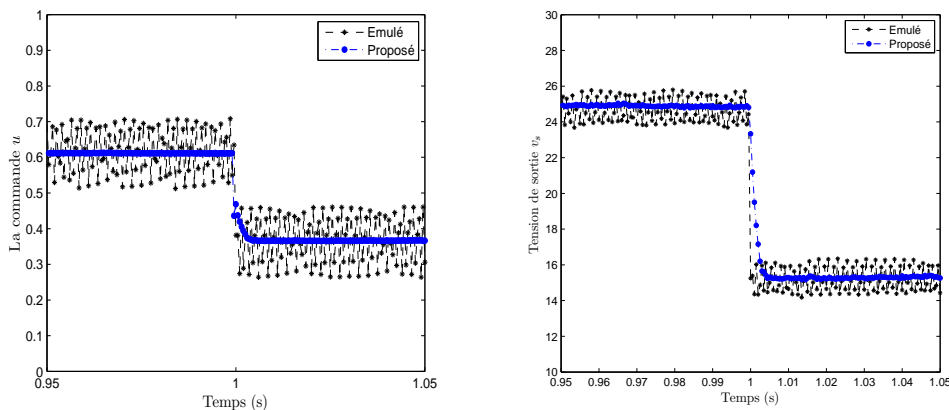


FIGURE 3.18 – Évolution de la commande (à gauche) et de la tension  $v_s$  (à droite) pour la fréquence  $F = 4KHz$ .

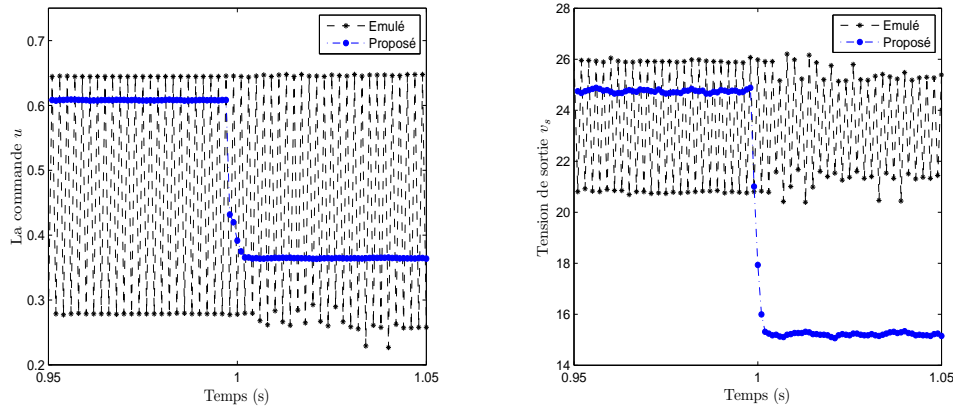
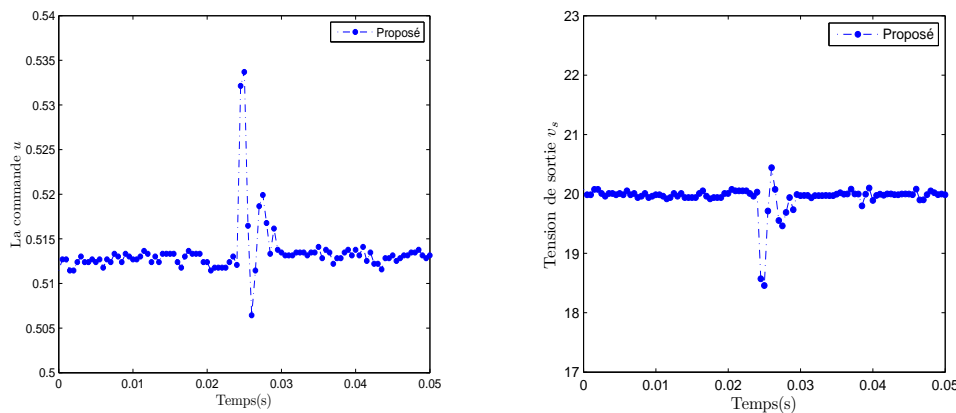
d'échantillonnage  $F = 2KHz$  (figure 3.19), on remarque que la boucle fermée obtenue avec le contrôleur émulé est instable. La raison, revient au fait qu'en diminuant la fréquence d'échantillonnage, l'erreur numérique augmente et déstabilise la boucle fermée. Ce phénomène d'instabilité est lié directement à la conservation ou non de la propriété de passivité en temps discret. En ce qui concerne le contrôleur discret proposé, on remarque que le système bouclé reste stable et la sortie suit exactement la consigne désirée. La variation de la fréquence n'a aucun effet sur les propriétés du système bouclé.

Un dernier test est réalisé en considérant une fréquence d'échantillonnage un peu élevée  $F = 5KHz$  pour tester la robustesse de chaque technique de commande vis-à-vis la variation paramétrique de la résistance de charge de 75%. De la figure 3.20, on observe le contrôleur proposé rejette la variation de la charge et maintient la tension de sortie à sa référence sans erreur statique.

Pour résumer nos propos, le contrôleur discret proposé pour le convertisseur Buck est simple à implémenter et il maintient la tension de sortie à sa référence même pour des basses fréquences d'échantillonnages (*i.e.* pas de discrétisation assez large). Ce contrôleur permet d'assurer la robustesse vis-à-vis la variation de la résistance de charge.

Dans ce chapitre, on a proposé une nouvelle stratégie de commande en temps discret pour la stabilisation des systèmes hamiltoniens à ports.

La technique dite  $L_gV$ -contrôleur permet de reproduire à chaque instant discret le comportement énergétique du système continu. La stabilité de la boucle fermée en temps discret est une propriété intrinsèque en utilisant la fonction d'énergie discrète comme une candidate de Lyapunov. Ensuite, ce contrôleur a été appliqué sur une dynamique hamiltonienne retardée. On a mentionné que la structure

FIGURE 3.19 – Évolution de la commande (à gauche) et de la tension  $v_s$  (à droite) pour la fréquence  $F = 2KHz$ .FIGURE 3.20 – Évolution de la commande (à gauche) et de la tension  $v_s$  (à droite) pour la fréquence  $F = 5KHz$ .

hamiltonienne est perdue et que la fonction d'énergie du système ne suffit pas pour conclure sur la stabilité. Par une approche Lyapunov-Krasovskii, des conditions de stabilités sous la forme d'inégalité matricielle ont été obtenues. L'extension de ce résultat en prenant compte des incertitudes polytopiques a été établi. Une étude de stabilité qui tient compte à la fois des retards et de la saturation du contrôleur a été développée. A la fin de cette première partie, un exemple illustratif a été traité pour montrer l'efficacité de l'approche proposée.

Un autre type de commande (IDA-PBC) basée sur la passivité a été proposée en temps discret. La synthèse de cette commande est basée sur la dynamique discrète des SHP qui préserve la propriété de passivité. On a démontré que les performances de la boucle fermée obtenue avec ce contrôleur sont les mêmes que celles obtenues dans le cas continu. Pour montrer la robustesse de notre approche vis-à-vis de l'augmentation du pas d'intégration, une série d'exemples non linéaires a été traitée. Les résultats de simulation montrent les performances de notre approche.

Ce contrôleur a été appliqué sur un convertisseur de puissance DC-DC de type Buck. Nous avons tout d'abord modélisé le système sous la forme hamiltonienne avec une énergie quadratique. Ensuite, en fixant un comportement énergétique désiré autour du point d'équilibre  $x^*$ , la condition de matching a été résolue et le contrôleur a été établi. Enfin, le contrôleur a été validé expérimentalement pour fréquences d'échantillonnages décroissantes. Ce contrôleur assure la stabilité de la boucle fermée au moment où le contrôleur émulé devient instable. La robustesse de notre approche vis-à-vis la variation de la charge a été présentée.



# Chapitre 4

## Systèmes Hamiltoniens à paramètres distribués

### Résumé.

Ce dernier chapitre est vu comme une extension des résultats précédents sur les systèmes hamiltoniens à paramètres répartis. On propose tout d'abord une dynamique discrète issue d'un gradient discret qui reproduit fidèlement le comportement énergétique du système d'origine. Ensuite, une composabilité discrète a été développée pour laquelle la passivité reste une propriété intrinsèque. Pour montrer l'efficacité de la composabilité discrète, un exemple d'interconnexion de deux ligne de transmission a été traité. Pour finir, on donne une de synthèse énergétique pour contrôler les systèmes de dimension finie. La démarche de cette technique a été détaillée et elle a été appliquée sur l'équation de Sine-Gordon.

### SOMMAIRE

1	BREF RAPPEL : SYSTÈMES HAMILTONIENS CONTINUS EN DIMENSION INFINIE . . . . .	93
2	DISCRÉTISATION SPATIO-TEMPOREL DES SYSTÈMES HAMILTONIENS EN DIMENSION INFINIE . . . . .	94
2.1	Systèmes Hamiltoniens non linéaires à paramètres distribués . . . . .	94
2.2	Systèmes Hamiltoniens linéaires conservatifs . . . . .	96
2.3	Équation de Korteweg et de Vries (KdV) . . . . .	98
3	INTERCONNEXION DE SYSTÈMES HAMILTONIENS À TRAVERS LES FRONTIÈRES . . . . .	99
3.1	Interconnexion feedback de systèmes hamiltoniens réduits . . . . .	99
3.2	Interconnexion mixte de systèmes hamiltoniens . . . . .	101
3.3	Ligne de transmission 1-D . . . . .	102
4	CONTRÔLEUR IDA-PBC EN DIMENSION INFINIE . . . . .	104

Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement aux systèmes à paramètres distribués (dimension infinie), c'est à dire aux systèmes en évolution spatio-temporelle régis par des équations aux dérivées partielles (EDP).

La simulation d'un procédé physique décrit par une EDP est une tâche très difficile due à la dépendance en temps et en espace. Il apparaît donc nécessaire d'adapter le schéma d'intégration par rapport aux caractéristiques des équations du modèle considéré.

Dans la littérature, il existe de nombreux algorithmes numériques développés principalement pour la simulation de modèles mathématiques. Ces schémas numériques sont classés selon différents critères (conservativité, ordre, ...) et doivent vérifier certaines propriétés (convergence, consistance, ...). Dans le contexte du formalisme hamiltonien, certains critères sont essentiels à respecter car ils sont liés à la nature de la structure physique du modèle considéré. L'approximation de ces systèmes (finie ou infinie) vise à conserver soit la géométrie des équation en se basant sur les intégrateurs géométriques [Hairer et al. 2002, Bridges 2006, Dutykh et Fedele 2013], soit sur la conservation de l'énergie établie sur la base des intégrateurs énergétiques [Dahlby et Owren 2011, Celledoni et al. 2012, McLachlan 2013]. Tous ces résultats concernent des systèmes fermés.

D'un point de vue contrôle, on rencontre principalement une communauté issue de l'automatique, pour laquelle la notion de systèmes ouverts est essentielle pour l'analyse et la synthèse des lois de commandes dans le formalisme hamiltonien (Stokes-Dirac) [van der Schaft et Maschke 2002] et [Le Gorrec et al. 2005]. Différentes techniques de commandes ont été proposées, approche basée sur les fonctions de Casimirs dans [Schoberl et Siuka 2011a], contrôle par interconnexion dans [Macchelli et Melchiorri 2004] et l'énergie shaping pour stabiliser les systèmes linéaires dans [Alessandro 2013]. Dans cette communauté, quelques travaux dédiés à la discrétisation spatiale qui visent à préserver la structure hamiltonienne ont été établis récemment. Notamment dans l'étude de la ligne de transmission sans perte [Golo et al. 2004], les équations de saint venant [Hamroun et al. 2008], la colonne d'absorption [Baaiu et al. 2009b] et piézoélectrique dans [Voss et Scherpen 2011]. L'ensemble de ces travaux utilisent les méthodes des éléments finis mixtes. Ces différentes approches ont été ensuite généralisées pour la définition des méthodes pseudo-spectrales mixtes symplectiques dans le travail de [Moulla et al. 2011]. Ces travaux ont mentionné qu'il était possible de préserver la structure du système de départ avec un choix approprié des bases d'approximations des différentes variables dans le système considéré. Pour la simulation, tous les travaux de la littérature utilisent, soit les routines matlab ou des schémas d'Eleur pour l'implémentation.

Nous avons montré dans les chapitres précédents que les propriétés (la structure et la passivité) dans le cadre du formalisme sont très sensibles à la discrétisation temporelle. Les résultats de la littérature peuvent être mis en cause si le schéma d'intégration choisi n'est pas adapté à la discrétisation des systèmes hamiltoniens. En d'autres termes, la préservation de la structure hamiltonienne en semi-discrétisation (spatiale) ne suffit pas pour faire de la simulation et de la synthèse de lois de commandes.

L'approche adoptée dans ce chapitre, consiste à préserver la structure du système lors de la semi-discrétisation, ensuite garantir le bilan énergétique (la passivité) lors de la discrétisation temporelle.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante.

Après avoir défini la classe du système hamiltonien en dimension infinie, nous définirons la dynamique discrète dans le cas linéaire et non linéaire et nous vérifierons ainsi les différentes propriétés. Ensuite, nous traiterons l'interconnexion par feedback en temps discret à travers les frontières. L'interconnexion mixte entre un système de dimension infinie et deux systèmes de dimension finie sera étudiée. Un exemple d'interconnexion de deux lignes de transmission sera présenté à la fin de cette partie. Enfin, une synthèse en temps discret du contrôleur IDA-PBC appliqué sur un système de dimension infinie sera étudié en détail. Un exemple illustratif sera introduit à la fin du chapitre dans le but de montrer l'efficacité de la technique de synthèse proposée dans ce chapitre.

# 1 BREF RAPPEL : SYSTÈMES HAMILTONIENS CONTINUS EN DIMENSION INFINIE

Cette section donne quelques rappels introductifs sur les systèmes Hamiltoniens à ports et ses propriétés en dimension infinie. Cette classe du système est considérée comme une extension des systèmes Hamiltoniens de dimension finie (deuxième chapitre) pour laquelle l'étude et l'analyse devient complexes due à sa dépendance des variables temporelle et spatiale. Dans la littérature, différentes approches ont été proposées pour des objectifs distincts, la structure de Stokes-Dirac dans [van der Schaft et Maschke 2002], approche classique dite en anglais "classical evolutionary" dans [Olver 1993] et son extension pour faire du contrôle dans les travaux de [Schoberl et Siuka 2011b; 2012].

Dans ce chapitre, nous adressons le cas des systèmes hamiltoniens linéaires et non linéaires définis sur un domaine spatial unidimensionnel (EDP 1-D).

**Définition 1.1.** *Le système hamiltonien à port en dimension infinie avec les variables indépendantes  $(z, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  et la fonction  $x(z, t) \in \mathbb{R}^m$  est donné par la forme*

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} + \mathcal{G}u(z, t) \\ y(z, t) = \mathcal{G}^* \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{J}$  est un opérateur différentiel et  $\mathcal{R}$  est une matrice symétrique définie positive traduit l'aspect dissipatif du système physique. Le vecteur d'entrée  $\mathcal{G}$  est considéré dans ce manuscrit constant et son adjoint noté par  $\mathcal{G}^*$  est donc équivalent à  $\mathcal{G}^T$ . Le couple  $(u, y)$  désigne les entrées/sorties distribuées, respectivement.

La fonctionnelle  $\mathcal{H}$  représente la densité d'énergie exprimée par

$$\mathcal{H}[x] := \int_{\Omega} H \left( x, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \dots \right) dz \quad (4.2)$$

où  $\Omega$  est un sous-ensemble dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  et  $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}$  désigne le gradient variationnel de  $\mathcal{H}$  par rapport  $x$  (voir le chapitre 7 de [Olver 1993]) qui satisfait la relation suivante

$$\int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \cdot v \, dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}[x + \epsilon v] - \mathcal{H}[x]}{\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{H}[x + \epsilon v]_{\epsilon=0} \quad (4.3)$$

pour tout  $x, v \in \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}$  désigne l'espace d'Hilbert. Quand les variables frontières sont négligées, le gradient variationnel s'exprime par

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} := \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H}{\partial x_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial H}{\partial x_{zz}} \right) - \dots \quad (4.4)$$

où la notation d'indice  $(\bullet)_z$  désigne la différenciation partielle par rapport à la variable  $z$ . La variation de la fonctionnelle au cours du temps s'écrit formellement par la relation suivante

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}, \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}^T}{\delta x}, \left\{ (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} + \mathcal{G}u \right\} \right\rangle = -\frac{\delta \mathcal{H}^T}{\delta x} \mathcal{R} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} + y^T u \quad (4.5)$$

Un cas intéressant traité fréquemment dans la littérature est celui où la densité d'énergie  $\mathcal{H}$  est donnée sous la forme quadratique

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} H[x] \, dz = \frac{1}{2} \int_{\Omega} x^T \mathcal{Q} x \, dz \quad (4.6)$$

avec la matrice  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$ . Le système hamiltonien dans ce cas est dit **linéaire** s'exprime par

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{Q} x(z, t) + \mathcal{G}u(z, t) \\ y(z, t) = \mathcal{G}^T \mathcal{Q} x(z, t) \end{cases} \quad (4.7)$$

**Remarque 1.1.** Dans l'absence du contrôleur  $u = 0$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H}[x]$  est exactement conservé dans le sens où  $\mathcal{H}[x(t)] = \mathcal{H}[x(0)]$  est constant pour toutes solutions de  $x(z, t)$  de (4.1) et (4.7).

Similaire au cas de dimension finie, l'interconnexion au sens de la continuité de puissance dans le cas de dimension infinie est conservée [Ramkrishna et van der Schaft 2004]. Dans ce cas précis, l'interconnexion peut se faire de trois façons différentes, soit par le domaine spatiale, soit à travers les frontières du système ou les deux. Un autre type d'interconnexion dit mixte a été présenté dans le travail de [Macchelli et Melchiorri 2005] qui fournit un cadre mathématique pour la synthèse de lois de commande. Son principe est de coupler un système de dimension infinie à des systèmes de dimension finie à travers les variables de ports.

Dans la plupart des cas, cette classe de système ne peut être traitée analytiquement. Son étude nécessite donc des approximations numériques et cela fera l'objet de la partie qui suit.

## 2 DISCRÉTISATION SPATIO-TEMPOREL DES SYSTÈMES HAMILTONIENS EN DIMENSION INFINIE

L'approximation des systèmes hamiltoniens à ports en dimension infinie n'est pas très abordée dans la littérature. Le peu de résultats qu'on trouve, l'approximation se fait toujours en espace, ensuite une méthode d'intégration en temps est utilisée sans accorder beaucoup d'important aux propriétés du système considéré, voir essentiellement les travaux de [Golo et al. 2004, Moulla et al. 2011, Voss et Scherpen 2011].

Notre contribution concerne à étudier la caractérisation de la conservation de propriétés dans le cadre du formalisme hamiltonien à paramètres distribués. Plus précisément, de préserver l'énergie, la passivité et la notion d'interconnexion en temps discret. Au cours de cette étude, nous allons montrer comment la théorie derrière le gradient discret (énergétique) destinée pour la résolution des équations différentielles ordinaires (présentée dans le deuxième chapitre) peut être étendue d'une façon simple pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

### 2.1 Systèmes Hamiltoniens non linéaires à paramètres distribués

Classiquement, l'approche populaire utilisée pour discrétiser un système de dimension infinie consiste à le discrétiser en temps et en espace d'une façon indépendante. Dans notre étude, nous allons adopter la même approche afin de donner une dynamique discrète des systèmes Hamiltoniens à ports à paramètres distribués.

La démarche qu'on propose est composée de deux étapes essentielles suivantes :

- (i) : Discrétisation spatiale : en utilisant la méthode de différence finie, on réduit le système de dimension infinie à un ensemble de systèmes de dimension finie décrits par des EDOs tout en préservant la structure hamiltonienne.
- (ii) : Discrétisation temporelle : en utilisant le gradient énergétique [Aoues et al. en preparation], qui joue un rôle important dans la préservation de la notion de passivité en temps discret.

Plus en détails, notre approche revient à respecter principalement la démarche suivante :

- 1) Dans un premier lieu, on approche la fonctionnelle d'énergie  $\mathcal{H}$  par la méthode de différence finie qui donne une fonction discrète  $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}\Delta z$ .
- 2) La deuxième étape, sert à remplacer la dérivée variationnelle par un gradient standard continu en temps. La relation s'écrit par

$$\frac{\delta \overline{\mathcal{H}}}{\delta \mathcal{X}} = \frac{1}{\Delta z} \nabla_x \overline{\mathcal{H}}'(\mathcal{X}) = \nabla_x \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}) \quad (4.8)$$

où  $\Delta z$  désigne le maillage en espace. Pour plus de détails sur l'obtention de la relation (4.8), voir le travail de [Celledoni et al. 2012] qui traite les systèmes hamiltoniens libres.

- 3) La troisième étape, consiste à discrétiser les opérateurs  $\mathcal{J}$  (resp.  $\mathcal{R}$ ) d'une façon qu'ils restent antisymétrique (resp. symétrique défini positif), notés en discret par  $\overline{\mathcal{J}}$  (resp.  $\overline{\mathcal{R}}$ ).



Ces trois premières étapes conduisent à un modèle réduit (ensemble d'ODEs) donné par la dynamique semi-discrétisée continue en temps suivante

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{dt}(t) = (\overline{\mathcal{J}} - \overline{\mathcal{R}}) \frac{\delta \overline{\mathcal{H}}'}{\delta \mathcal{X}}(\mathcal{X}) + \mathcal{G}\mathcal{U}(t) \\ \mathcal{Y}(t) = \mathcal{G}^* \frac{\delta \overline{\mathcal{H}}'}{\delta \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \end{cases} \quad (4.9)$$

où les vecteurs  $(\mathcal{X}, \mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y})$  appartiennent à  $\mathbb{R}^N$

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} x(z_1, t) \\ x(z_2, t) \\ \vdots \\ x(z_N, t) \end{bmatrix}, \mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} u(z_1, t) \\ u(z_2, t) \\ \vdots \\ u(z_N, t) \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} y(z_1, t) \\ y(z_2, t) \\ \vdots \\ y(z_N, t) \end{bmatrix}$$

4) Une fois un modèle réduit est obtenu, nous allons appliquer le gradient énergétique discret  $\overline{\nabla}$  pour compléter la discrétisation (temps) du système.

Ces différentes étapes, conduisent alors à un système hamiltonien discret de dimension finie donné par la définition ci-dessous,

**Définition 2.1.** Soit  $\overline{\mathcal{J}}$  (resp.  $\overline{\mathcal{R}}$ ) sont des opérateurs discrets antisymétrique (resp. symétrique semi-défini positif) et  $\overline{\mathcal{H}}\Delta z$  est la discrétisation en espace de la fonctionnelle  $\mathcal{H}$  obtenue en remplaçant l'intégrale en temps continu par une forme quadratique en temps discret. En se basant sur le gradient discret en temps, le système hamiltonien réduit s'exprime par

$$\begin{cases} \overline{\nabla}_t \mathcal{X}(n) = (\overline{\mathcal{J}} - \overline{\mathcal{R}}) \overline{\nabla}_x \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n+1), \mathcal{X}(n)) + \mathcal{G}\mathcal{U}(n) \\ \mathcal{Y}(n) = \mathcal{G}^T \overline{\nabla}_x \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n+1), \mathcal{X}(n)) \end{cases} \quad (4.10)$$

où le gradient discret  $\overline{\nabla}_x \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n+1), \mathcal{X}(n))$  satisfait

$$\overline{\nabla}_x^T \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n+1), \mathcal{X}(n)) [\mathcal{X}(n+1) - \mathcal{X}(n)] = \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n+1)) - \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n)) \quad (4.11)$$

#### Proposition 15.

Le système hamiltonien discret (4.10) est passif.

**Preuve.** De l'équation (4.10), le bilan énergétique s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n)) &= \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n+1)) - \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n)) \\ &\stackrel{(4.11)}{=} \left\langle \overline{\nabla}_x^T \overline{\mathcal{H}}, [\mathcal{X}(n+1) - \mathcal{X}(n)] \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_x^T \overline{\mathcal{H}}, \Delta t \{ (\overline{\mathcal{J}} - \overline{\mathcal{R}}) \overline{\nabla}_x \overline{\mathcal{H}} + \mathcal{G}\mathcal{U}(n) \} \right\rangle \\ &= -\Delta t \overline{\nabla}_x^T \overline{\mathcal{H}} \overline{\mathcal{R}} \overline{\nabla}_x \overline{\mathcal{H}} + \Delta t \mathcal{Y}(n)^T \mathcal{U}(n) \end{aligned} \quad (4.12)$$

De la relation (4.12), l'énergie semi-discrétisée à l'instant  $n+1$  est égale à la quantité d'énergie à l'instant  $n$  moins la quantité dissipée par le système plus celle donnée par le produit de puissance (entrée/sortie).

Pour récapituler l'approche proposée ci-dessus, nous allons présenter les différentes étapes dans un schéma block présenté par la figure 4.1,

**Remarque 2.1.** A noter que pour des raisons de simplicité, nous allons utiliser uniquement la méthode de différences finies pour la discrétisation spatiale, d'autres méthodes peuvent être utilisées à la place, comme par exemple la méthode de pseudo-spectrale, élément finie et Galerkin.

Dans la partie qui suit, un cas particulier de la dynamique (4.10) correspondant à  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int x^T x dz$  va être présenté.

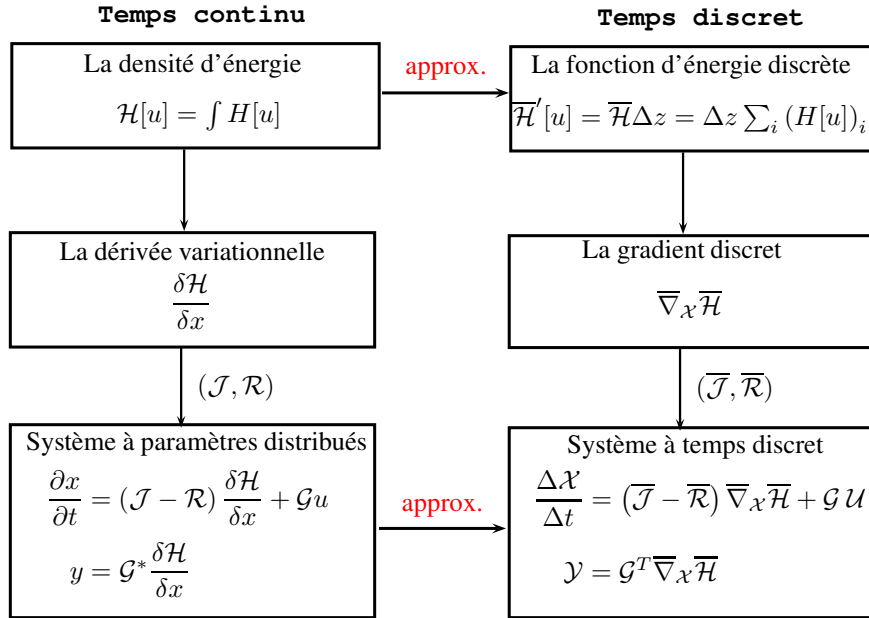


FIGURE 4.1 – Démarche de la discrétisation du système hamiltonien à paramètres distribués

## 2.2 Systèmes Hamiltoniens linéaires conservatifs

Les systèmes hamiltoniens linéaires en dimension infinie sont souvent utilisés dans le domaine physique pour modéliser une onde qui se propage au long d'une certaine distance (ligne de transmission). Cette se caractérise par un opérateur différentiel  $\mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial z}$  avec l'énergie quadratique donnée en temps continu sous la forme (4.6).

En temps discret, en se basant sur la méthode de différence finie, la fonction d'énergie semi-discrétisée s'écrit par la somme quadratique suivante

$$\bar{\mathcal{H}} = \Delta z \sum_i \frac{1}{2} x_i^T \mathcal{Q} x_i \quad (4.13)$$

où  $x_i(n) := x(z_i, t_n)$ ,  $z_i = i\Delta z$  avec  $i \in \mathbb{Z}$  sont des points de maillage en espace. Afin de simplifier les calculs, nous considérons uniquement le cas où la matrice  $\mathcal{Q}$  est une matrice identité. L'opérateur différentiel  $\frac{\partial}{\partial z}$  est obtenu en temps discret à l'aide d'un schéma centré

$$\bar{\mathcal{J}} = \frac{\{\cdot\}_{i+1} - \{\cdot\}_{i-1}}{2\Delta z} \quad (4.14)$$

tel que  $\bar{\mathcal{J}}$  reste un opérateur antisymétrique satisfait la relation  $\bar{\mathcal{J}}^T + \bar{\mathcal{J}} = 0$ . Dans ce cas précis, le gradient variationnel est équivalent au gradient standard en temps continu le fait que la fonction (4.13) ne dépend pas de la différentiation par rapport à la variable d'espace  $z$ . Pour terminer la discrétisation (en temps), nous allons appliquer un schéma point-milieu déjà présenté dans le deuxième et le troisième chapitre. La dynamique discrète hamiltonienne est donnée par la définition ci-dessous,

**Définition 2.2.** *L'approximation d'un système hamiltonien linéaire de dimension finie est définie par la dynamique discrète suivante*

$$\begin{cases} \mathcal{X}(n+1) &= \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \mathcal{X}(n) + \Delta t \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{G} U(n) \\ \mathcal{Y}(n) &= \frac{1}{2} \mathcal{G}^T (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 + I) \mathcal{X}(n) + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{G}^T \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{G} U(n) \end{cases} \quad (4.15)$$

où les matrices

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{4\Delta z} & & \frac{\Delta t}{4\Delta z} \\ \frac{\Delta t}{4\Delta z} & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\Delta t}{4\Delta z} \\ -\frac{\Delta t}{4\Delta z} & & \frac{\Delta t}{4\Delta z} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{4\Delta z} & & -\frac{\Delta t}{4\Delta z} \\ -\frac{\Delta t}{4\Delta z} & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{4\Delta z} \\ \frac{\Delta t}{4\Delta z} & & -\frac{\Delta t}{4\Delta z} & 1 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs sont donnés par

$$\mathcal{X}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix}; \mathcal{U}(n) = \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ \vdots \\ u_N(n) \end{bmatrix}; \mathcal{Y}(n) = \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ \vdots \\ y_N(n) \end{bmatrix}$$

Notez que la sortie de port discrète (moyennée) joue un rôle important dans la préservation de la passivité en temps discret. L'avantage de cette dynamique réside dans le fait qu'elle ne nécessite aucune méthode de résolution lors de l'implémentation. La dynamique linéaire discrète est donnée dans ce cas par la forme explicite suivante

$$\begin{cases} \mathcal{X}(n+1) &= \mathcal{A}\mathcal{X}(n) + \mathcal{B}\mathcal{U}(n) \\ \mathcal{Y}(n) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(n) + \mathcal{D}\mathcal{U}(n) \end{cases} \quad (4.16)$$

où les paramètres

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (I + \mathcal{N})^{-1}(I - \mathcal{N}) \\ \mathcal{B} &= \Delta t(I + \mathcal{N})^{-1}\mathcal{G} \\ \mathcal{C} &= \frac{1}{2}\mathcal{G}^T(I + \mathcal{A}) \\ \mathcal{D} &= \frac{\Delta t}{2}\mathcal{G}^T(I + \mathcal{N})^{-1}\mathcal{G} \end{aligned} \quad (4.17)$$

et les matrices  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont données par la relation suivante

$$\mathcal{L}_1 = (\mathcal{I} + \mathcal{N}) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_2 = (\mathcal{I} - \mathcal{N}) \quad (4.18)$$

avec la matrice  $\mathcal{N}$  satisfait la propriété d'antisymétrie  $\mathcal{N}^T + \mathcal{N} = 0$  et la matrice  $\mathcal{A}$  est une transformée de Cayley satisfait la condition suivante

$$\mathcal{A}^T \mathcal{A} = \mathcal{I} \quad (4.19)$$

Nous verrons alors que le système discret (4.16) respect un bilan énergétique exacte indépendamment du pas d'intégration. L'énergie semi-discrétisée  $\overline{\mathcal{H}} = \Delta z \overline{\mathcal{H}}$  présentée par la forme quadratique (4.13) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante

$$\overline{\mathcal{H}}(n) = \frac{1}{2} \mathcal{X}(n)^T \mathcal{X}(n) \quad (4.20)$$

et le bilan énergétique s'exprime par

$$\overline{\mathcal{H}}(n+1) - \overline{\mathcal{H}}(n) = \Delta t \mathcal{Y}(n)^T \mathcal{U}(n) \quad (4.21)$$

L'énergie à l'instant  $n+1$  conduit à la relation suivante,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}(n+1) &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}(\mathcal{X}(n))^T, \mathcal{A}\mathcal{X}(n) \rangle + \Delta t \langle \mathcal{U}(n), \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-T} \mathcal{A}\mathcal{X}(n) \rangle \\ &\quad + \Delta t \langle \mathcal{U}(n), \frac{\Delta t}{2} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-T} (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-1} \mathcal{G}\mathcal{U}(n) \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

Le premier terme de l'équation (4.22) correspond à l'énergie  $\overline{\mathcal{H}}(n)$  en utilisant (4.19). En partant du fait que  $2(\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-1} = \mathcal{I} + \mathcal{A}$ , il est facile de démontrer que le deuxième terme est associé à la matrice  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-T} \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{A}^T) \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{A}) = \mathcal{C} \quad (4.23)$$

Enfin, le produit scalaire  $\langle \mathcal{U}(n), \mathcal{D}\mathcal{U}(n) \rangle$  est équivalent

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta t}{2} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-1} \mathcal{G} &= \frac{\Delta t}{4} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{A}) \mathcal{A} \\
&= \frac{\Delta t}{4} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{A})^T \mathcal{A} \mathcal{G} \\
&= \frac{\Delta t}{2} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-T} (\mathcal{I} - \mathcal{N}) (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-1} \mathcal{G} \\
&= \frac{\Delta t}{2} \mathcal{G}^T (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-T} (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{-1} \mathcal{G} + \mathcal{G}^T \mathcal{S} \mathcal{G}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

De la dernière ligne de (4.24), le premier terme est identique à la deuxième ligne de (4.22) et le deuxième terme  $\mathcal{G}^T \mathcal{S} \mathcal{G}$  vaut zéro car  $\mathcal{S}$  satisfait la propriété d'antisymétrie.

Que ce soit dans le cas linéaires ou non linéaire, la discrétisation de l'opérateur différentiel  $\mathcal{J}$  revient souvent à imposer des conditions limites périodiques<sup>1</sup> au système.

### 2.3 Équation de Korteweg et de Vries (KdV)

L'Equation de Korteweg et de Vries (KdV)<sup>2</sup> est un modèle mathématique qui décrit la théorie des ondes sur la surface des canaux peu profonde. Son EDP est donnée en temps continu par

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -6x \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}, \quad x = x(z, t) \tag{4.25}$$

La forme hamiltonienne de l'équation (4.25) s'exprime par

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mathcal{J} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \quad \text{où } \mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial z} \text{ et } \mathcal{H} = \int \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 - x^3 \right\} dz$$

Nous débutons notre approche par la discrétisation spatiale (semi-discrétisation) de la densité d'énergie  $\mathcal{H}$  en la remplaçant par la fonction  $\overline{\mathcal{H}}' = \Delta z \overline{\mathcal{H}}$  où  $\overline{\mathcal{H}}$  est donnée par la somme

$$\overline{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta z} \right)^2 - x_i^3 \right] \tag{4.26}$$

Nous obtenons alors un ensemble d'équations différentielles non linéaires. Nous discrétisons ensuite l'opérateur différentiel  $\mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial z}$  en utilisant un schéma centrale exprimé par

$$\overline{\mathcal{J}} = \frac{\{ \cdot \}_{i+1} - \{ \cdot \}_{i-1}}{2\Delta z} \tag{4.27}$$

Afin d'obtenir un système complètement discret, nous utilisons le gradient discret, ce qui nous donne la dynamique suivante

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) - x_1(n) \\ x_2(n+1) - x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n+1) - x_N(n) \end{bmatrix} = \frac{\Delta t}{2\Delta z} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\nabla}_{x_2} \overline{\mathcal{H}}(x_1(n+1), x_1(n)) \\ \overline{\nabla}_{x_2} \overline{\mathcal{H}}(x_2(n+1), x_2(n)) \\ \vdots \\ \overline{\nabla}_{x_N} \overline{\mathcal{H}}(x_N(n+1), x_N(n)) \end{bmatrix}$$

où les conditions limites sont de type périodiques. La dynamique du système discrète est implicite, et donc elle doit être résolue à chaque pas de temps. Pour ce faire, nous utilisons les itérations de Newton qui convergent très rapidement dans le cas pratique.

Maintenant que la dynamique hamiltonienne discrète est abordée, il reste à savoir si la notion d'interconnexion est préservée en temps discret. C'est l'objet de la partie qui suit.

1. Satisfait la relation suivante  $x_{i+N} = x_i$   
2. Une histoire sur les propriétés physiques de cette EDP peut être trouvée sur la page internet de l'université Herriot-Watt à Edimbourg (Ecosse).

### 3 INTERCONNEXION DE SYSTÈMES HAMILTONIENS À TRAVERS LES FRONTIÈRES

La propriété de composition est considérée comme un élément clé pour les systèmes hamiltoniens en dimension finie. Récemment, cette propriété a été étendue sur les systèmes de dimension infinie dans le but de l'analyse et la synthèse de lois de commande.

Dans cette partie, nous optons à une version discrète de cette propriété de composition en se basant sur la dynamique discrète précédente. Nous allons vous montrer comment la propriété de composition en temps discret assure la même structure par rapport au comportement de son homologue en temps continu.

Nous débutons par l'interconnexion feedback à travers les frontières de deux systèmes hamiltoniens discrets dans le contexte de l'Automatique. Nous verrons alors que la propriété d'interconnexion est stable sous l'effet de discrétisation indépendamment du pas d'intégration  $\Delta t$ . Le résultat de cette interconnexion est à nouveau un système hamiltonien. Cette notion est ensuite étendue sur ce qu'on appelle une interconnexion mixte, obtenue par un couplage entre des systèmes de dimension finie et infinie. Pour terminer, nous allons traiter l'exemple de la ligne de transmission où plusieurs circuits électriques sont couplés entre eux.

#### 3.1 Interconnexion feedback de systèmes hamiltoniens réduits

Dans cette section, nous nous intéressons à la stabilité par interconnexion de deux systèmes hamiltoniens à paramètres répartis sous l'effet de discrétisation (espace et temps). Contrairement au cas présenté précédemment où le contrôleur est distribué sur tout le domaine spatiale, ici nous limiterons notre étude au cas du contrôleur localisé intervenant uniquement sur les limites du système physique considéré.

Cette étude est vue comme étant une extension de l'interconnexion par feedback de deux systèmes hamiltoniens de dimension *finie* présentée auparavant dans les chapitres précédents.

Considérons deux systèmes hamiltoniens continus  $\Sigma_1(z, t)$  et  $\Sigma_2(w, t)$  donnés par les dynamiques suivantes

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t}(z, t) = (\mathcal{J}_1 - \mathcal{R}_1) \frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta x_1} + \mathcal{G}_1 u_1(z, t) \\ y_1(z, t) = \mathcal{G}_1^T \frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta x_1} \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial t}(w, t) = (\mathcal{J}_2 - \mathcal{R}_2) \frac{\delta \mathcal{H}_2}{\delta x_2} + \mathcal{G}_2 u_2(w, t) \\ y_2(w, t) = \mathcal{G}_2^T \frac{\delta \mathcal{H}_2}{\delta x_2} \end{cases} \quad (4.28)$$

Les dynamiques discrètes de chaque systèmes  $\bar{\Sigma}_1$  et  $\bar{\Sigma}_2$  pour un nombre de point spatiale fini donné par les variables  $z = 1, \dots, N$  et  $w = 1, \dots, L$  sont données par

$$\bar{\Sigma}_1 : \begin{cases} \bar{\nabla}_t \mathcal{X}_1(n) = (\bar{\mathcal{J}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_1) \bar{\nabla}_{x_1} \bar{\mathcal{H}}_1 + \mathcal{G}_{1|z_1} u_{1|z_1} + \mathcal{G}_{1|z_N} u_{1|z_N} \\ y_{1|z_1}(n) = \mathcal{G}_{1|z_1}^T \bar{\nabla}_{x_1} \bar{\mathcal{H}}_1 \\ y_{1|z_N}(n) = \mathcal{G}_{1|z_N}^T \bar{\nabla}_{x_1} \bar{\mathcal{H}}_1 \end{cases} \quad (4.29)$$

et

$$\bar{\Sigma}_2 : \begin{cases} \bar{\nabla}_t \mathcal{X}_2(n) = (\bar{\mathcal{J}}_2 - \bar{\mathcal{R}}_2) \bar{\nabla}_{x_2} \bar{\mathcal{H}}_2 + \mathcal{G}_{2|w_1} u_{2|w_1} + \mathcal{G}_{2|w_L} u_{2|w_L} \\ y_{2|w_1}(n) = \mathcal{G}_{2|w_1}^T \bar{\nabla}_{x_2} \bar{\mathcal{H}}_2 \\ y_{2|w_L}(n) = \mathcal{G}_{2|w_L}^T \bar{\nabla}_{x_2} \bar{\mathcal{H}}_2 \end{cases} \quad (4.30)$$

où les indices sur les vecteurs d'entrées  $\mathcal{G}_{1|z_1}$ ,  $\mathcal{G}_{1|z_N}$ ,  $\mathcal{G}_{2|w_1}$  et  $\mathcal{G}_{2|w_L}$  sont introduits pour mentionner que les sorties existent uniquement là où le contrôleur intervient. Les commandes dans ce cas sont considérées nulles sur tout le domaine sauf sur les frontières.

Nous allons maintenant interconnecter ces deux systèmes à travers les frontières  $(z_N, w_1)$ , voir le schéma block présenté par la figure 4.2

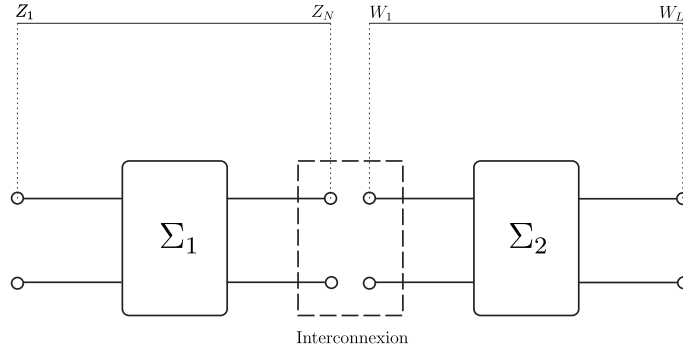


FIGURE 4.2 – Interconnexion par feedback de deux systèmes hamiltoniens à paramètres distribués

Mathématiquement, la continuité de puissance présentée dans la figure 4.2 est donnée par la relation entrée-sortie suivante

$$\begin{aligned} u_{1|z_N}(n) &= -y_{2|w_1}(n) = \mathcal{G}_{2|w_1}^T \nabla_{\mathcal{X}_2} \bar{\mathcal{H}}_2 \\ u_{2|w_1}(n) &= y_{1|z_N}(n) = \mathcal{G}_{1|z_N}^T \nabla_{\mathcal{X}_1} \bar{\mathcal{H}}_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Le résultat de cette interconnexion donne un système hamiltonien discret qui s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nabla_t \mathcal{X}_1(n) \\ \nabla_t \mathcal{X}_2(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\bar{\mathcal{J}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_1) & -\mathcal{G}_{1|z_N} \mathcal{G}_{2|w_1}^T \\ \mathcal{G}_{2|w_1} \mathcal{G}_{1|z_N}^T & (\bar{\mathcal{J}}_2 - \bar{\mathcal{R}}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathcal{X}_1} \bar{\mathcal{H}}_1 \\ \nabla_{\mathcal{X}_2} \bar{\mathcal{H}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1|z_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{2|w_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1|z_1} \\ u_{2|w_L} \end{bmatrix} \\ &= (\bar{\mathcal{J}}_{12} - \bar{\mathcal{R}}_{12}) \nabla_{\mathcal{X}_{12}} \bar{\mathcal{H}}_{12} + \mathcal{G}_{12} u_{12}(n) \end{aligned} \quad (4.32)$$

où les matrices

$$\bar{\mathcal{J}}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{J}}_1 & -\mathcal{G}_{1|z_N} \mathcal{G}_{2|w_1}^T \\ \mathcal{G}_{2|w_1} \mathcal{G}_{1|z_N}^T & \bar{\mathcal{J}}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{R}}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{R}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

et l'énergie totale semi-discrétisée est donnée par la somme de l'énergie de chaque système par

$$\bar{\mathcal{H}}_{12} = \bar{\mathcal{H}}_1 + \bar{\mathcal{H}}_2 \quad (4.34)$$

Nous pouvons facilement conclure que la structure hamiltonienne est préservée sous l'effet d'interconnexion en temps discret.

**Proposition 16.**

Le système hamiltonien (4.32) obtenu par l'interconnexion (4.31) est passif.

**Preuve.** Il suffit de calculer le bilan énergétique sur l'intervalle du temps  $[n, n+1]$  pour prouver la proposition ci-dessus. Le bilan énergétique du système globale est donné par

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{12}(n+1) - \bar{\mathcal{H}}_{12}(n) &= -\Delta t \nabla_{\mathcal{X}_{12}} \bar{\mathcal{H}}_{12}^T \bar{\mathcal{R}}_{12} \nabla_{\mathcal{X}_{12}} \bar{\mathcal{H}}_{12} + \Delta t \nabla_{\mathcal{X}_{12}} \bar{\mathcal{H}}_{12}^T \mathcal{G}_{12} u_{12} \\ &\leq y_{12}^T u_{12} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Le système interconnecté (4.32) peut être obtenu de deux manières différentes, soit par la composition de deux systèmes discrets  $\Phi(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2)$  ou soit par l'approximation (espace et temps) directe d'un système déjà interconnecté en temps continu ( $\Sigma_{12} = \Phi(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ). On note ici par  $\Pi_{z,t}$ ,  $z$  pour la semi-discrétisation et  $t$  pour la discrétisation temporelle.

**Proposition 17.**

Les opérateurs de projection  $\Pi_{z,t}$  et de composition  $\Phi$  commutent, soit  $\Pi_{z,t} \circ \Phi = \Phi \circ \Pi_{z,t}$ .

Autrement dit, le schéma block suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 (\Sigma_1, \Sigma_2) & \xrightarrow{\Phi} & \Sigma_{12} \\
 \Pi_{z,t} \downarrow & & \downarrow \Pi_{z,t} \\
 (\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2) & \xrightarrow{\Phi} & \bar{\Sigma}_{12}
 \end{array}$$

**Preuve.** La preuve à la proposition ci-dessus est évidente

$$\Phi(\Pi_{z,t}(\Sigma_1), \Pi_{z,t}(\Sigma_2)) = \Phi(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2) = \bar{\Sigma}_{12} = \Pi_{z,t}(\Sigma_{12}) = \Pi_{z,t}(\Phi(\Sigma_1, \Sigma_2))$$

### 3.2 Interconnexion mixte de systèmes hamiltoniens

En temps continu, ce type d'interconnexion a montré un intérêt majeur pour la synthèse de lois de commande. L'idée consiste à commander un système de dimension infinie en lui connectant un contrôleur de dimension finie [Macchelli et Melchiorri 2004] et [Schoberl et Siuka 2011a].

Dans cette partie, nous proposons une interconnexion mixte en temps discret destinée à l'analyse de propriétés. La synthèse de lois de commande n'est pas prise en compte.

On traite le cas de l'interconnexion de deux systèmes de dimension finie à travers les frontières du système de dimension infinie. On connecte le premier système à la frontière  $z_1$  et le deuxième à  $z_N$ , voir la figure 4.3

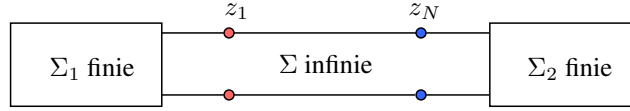


FIGURE 4.3 – Interconnexion discrète mixte

Domaine du contrôle, l'exemple académique est celui d'un couplage entre un convertisseur de puissance, ligne de transmission et la machine électrique. Le contrôleur dans ce cas est de dimension finie et il va agir sur un système de dimension finie (machine électrique) à travers une ligne de transmission décrite par une EDP.

Considérons deux systèmes hamiltoniens discrets donnés par la dynamique suivant

$$\bar{\Sigma}_i : \begin{cases} \bar{\nabla}_t X_i(n) = [J_i(n) - R_i(n)] \bar{\nabla}_{X_i} H_i(n) + g_i(n) u_i(n) \\ y_i(n) = g_i^T(n) \bar{\nabla}_{X_i} H_i(n) \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (4.36)$$

où  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables d'états discrètes des systèmes hamiltoniens finies  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , respectivement. L'interconnexion avec le système hamiltonien discret

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t \mathcal{X}(n) = (\bar{\mathcal{J}} - \bar{\mathcal{R}}) \bar{\nabla}_{\mathcal{X}} \bar{\mathcal{H}} + \mathcal{G}_{|z_1} u_{|z_1} + \mathcal{G}_{|z_N} u_{|z_N} \\ y_{|z_1}(n) = \mathcal{G}_{|z_1}^T \bar{\nabla}_{\mathcal{X}} \bar{\mathcal{H}} \\ y_{|z_N}(n) = \mathcal{G}_{|z_N}^T \bar{\nabla}_{\mathcal{X}} \bar{\mathcal{H}} \end{cases} \quad (4.37)$$

s'effectuera à travers les frontières  $(z_1, z_N)$  par la continuité de puissance donnée mathématiquement par la relation suivante

$$z_1 : \begin{cases} u_{|z_1}(n) = -y_1(n) \\ u_1(n) = y_{|z_1}(n) \end{cases} \quad z_N : \begin{cases} u_{|z_N}(n) = -y_2(n) \\ u_2(n) = y_{|z_N}(n) \end{cases} \quad (4.38)$$

Le système interconnecté obtenu s'écrit par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{\nabla}_t X_1(n) \\ \overline{\nabla}_t X_2(n) \\ \overline{\nabla}_t \mathcal{X}(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (J_1(n) - R_1(n)) & 0 & g_1 \mathcal{G}_{|z_1}^T \\ 0 & (J_2(n) - R_2(n)) & g_2 \mathcal{G}_{|z_N}^T \\ -\mathcal{G}_{|z_1} g_1^T & -\mathcal{G}_{|z_N} g_2^T & (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\nabla}_{X_1} H_1 \\ \overline{\nabla}_{X_2} H_2 \\ \overline{\nabla}_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{J}(n) - \mathbf{R}(n)) \overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nous constatons immédiatement que le résultat d'interconnexion est à nouveau un système hamiltonien. La structure de composition est conservée sous l'effet de la discrétisation. L'énergie globale dans ce cas précis est la somme d'énergie de différents systèmes

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}(n)) = H_1(X_1(n)) + H_2(X_2(n)) + \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n)) \quad (4.40)$$

où la variable d'état  $\mathbf{X} = [X_1^T, X_2^T, \mathcal{X}^T]^T$ .

### 3.3 Ligne de transmission 1-D

Le système fondamental d'équations aux dérivées partielles décrivant la propagation des courants  $I(z, t)$  et des tensions  $V(z, t)$  à travers une ligne de transmission sans perte (pas de résistance dans la ligne) est donné en temps continu par les équations d'ondes (ou équations télégraphistes) suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t}(z, t) &= -\frac{1}{L(z)} \frac{\partial V}{\partial z}(z, t) \\ \frac{\partial V}{\partial t}(z, t) &= -\frac{1}{C(z)} \frac{\partial I}{\partial z}(z, t) + u(z, t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

où les variables  $C$  et  $L$  représentent respectivement la capacité et l'inductance distribuées sur tout le domaine d'étude  $\Omega = [0, N]$ . Le contrôleur  $u$  agit uniquement sur la tension. Les équations télégraphistes (4.41) peuvent s'exprimer en terme de charge électrique  $q$  et le flux magnétique  $\phi$  en respectant la relation suivante

$$I(z, t) = \frac{\phi(z, t)}{L(z)} \quad \text{et} \quad V(z, t) = \frac{q(z, t)}{C(z)} \quad (4.42)$$

La formulation précédente (4.41) peut être représentée par le modèle hamiltonien à port en dimension infinie décrit par la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{bmatrix} (z, t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q(z, t)}{C(z)} \\ \frac{\phi(z, t)}{L(z)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(z, t) \quad (4.43)$$

où la matrice de structure  $\mathcal{J}$  est composée par l'opérateur spatial  $\frac{\partial}{\partial z}$  avec l'énergie totale du système définie par la forme quadratique

$$\mathcal{H}(q, \phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{q(z, t)^2}{C(x)} + \frac{\phi(z, t)^2}{L(x)} \right) dz \quad (4.44)$$

Dans le cas libre ( $u = 0$ ), la variation énergétique en temps continu s'exprime sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^N \left( \frac{q(z, t)}{C(x)} \frac{\partial q}{\partial t}(z, t) + \frac{\phi(z, t)}{L(x)} \frac{\partial \phi}{\partial t}(z, t) \right) dz \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^N \left( \frac{q(z, t)}{C(x)} \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} + \frac{\phi(z, t)}{L(x)} \frac{\partial q(z, t)}{\partial z} \right) dz \\ &= -\int_0^N \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q(z, t)}{C(x)} \frac{\phi(z, t)}{L(x)} \right) dz \\ &= \frac{q(0, t)}{C(0)} \frac{\phi(0, t)}{L(0)} - \frac{q(N, t)}{C(N)} \frac{\phi(N, t)}{L(N)} \\ &\equiv V(0, t)I(0, t) - V(N, t)I(N, t) \end{aligned} \quad (4.45)$$



Nous constatons que le transfert énergétique dans le cas libre peut se faire uniquement via les frontières. La relation (4.45) interprète le fait que l'énergie du système n'est rien d'autre que celle alimentées par ses limites (frontières). Dans le cas où les conditions aux limites sont nulles, la variation d'énergie  $\dot{\mathcal{H}} = 0$  et le système (4.43) est dit conservatif.

Dans le but de simplifier les calculs par la suite de cet exemple, on normalise l'inductance et la capacité du système  $L = C = 1$ . L'énergie donc s'écrit par

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} x(z, t)^T x(z, t) dz \quad \text{où } x = [q \ \phi]^T \quad (4.46)$$

et le système hamiltonien s'exprime par la dynamique linéaire conservative suivante

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \mathcal{J} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}(z, t) + \mathcal{G}u(z, t) \quad \text{où } \mathcal{J} = -\frac{\partial}{\partial z} \quad (4.47)$$

Si nous décomposons maintenant la ligne de transmission en segments de longueur  $\Delta z$  (telle que  $\Delta z \ll \lambda$ , longueur d'onde), la dépendance en espace des équations dynamiques n'existe plus (semi-discrétisation). L'énergie alors est donnée sous la forme d'une somme

$$\bar{\mathcal{H}}(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N x_i(n)^T x_i(n) = \frac{1}{2} \mathcal{X}(n)^T \mathcal{X}(n) \quad (4.48)$$

Enfin, pour compléter la discrétisation (en temps) nous appliquons le gradient énergétique et la dynamique explicite de la ligne s'écrit par

$$\mathcal{X}(n+1) = \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \mathcal{X}(n) + \Delta t \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{G}u(n) \quad \text{où } \mathcal{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \quad (4.49)$$

où les conditions aux limites sont de type périodiques. Les matrices  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont les mêmes que celles données dans la dynamique (4.15), leurs produit dans la dynamique discrète (4.49) satisfait la condition suivante

$$(\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2)^T \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 = \mathcal{I} \quad (4.50)$$

Le bilan énergétique en temps discret en absence du contrôleur s'écrit par

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(n+1) - \bar{\mathcal{H}}(n) &= \frac{1}{2} (\mathcal{X}(n+1)^T \mathcal{X}(n+1) - \mathcal{X}(n)^T \mathcal{X}(n)) \\ &= \frac{1}{2} \left( (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \mathcal{X}(n))^T (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \mathcal{X}(n)) - \mathcal{X}(n)^T \mathcal{X}(n) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{X}(n)^T \underbrace{(\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2)^T (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2)}_{\mathcal{I}} \mathcal{X}(n) - \mathcal{X}(n)^T \mathcal{X}(n) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

qui est exactement conservé au cours du temps.

Maintenant, on s'intéresse à l'interconnexion de deux lignes de transmission à travers deux contrôleurs frontières.

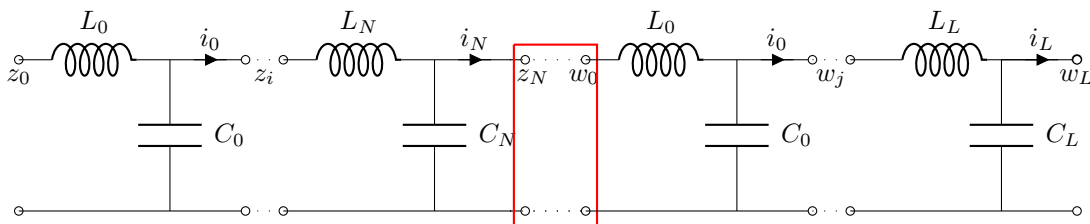


FIGURE 4.4 – Interconnexion de deux lignes de transmission

L'interconnexion par la continuité de puissance (voir figure 4.4) s'effectuera sur la limite de la première ligne en  $z_N$  et le début de la deuxième en  $w_0$ . On suppose que le transfert énergétique est nul en  $z_0$  et  $w_L$ . La relation entrées/sorties est donnée dans ce cas par

$$u_{|z_n}(n) = -y_{|w_0}(n) \quad \text{et} \quad u_{|w_0}(n) = y_{|z_N}(n)$$

Les dynamiques discrètes des deux lignes de transmissions sont données par

$$\bar{\Sigma}_1 : \begin{cases} \mathcal{X}_1(n+1) &= \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \mathcal{X}_1(n) + \Delta t \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{G}_{1|z_N} u_{1|z_N} \\ y_{1|z_N}(n) &= \frac{1}{2} \mathcal{G}_{1|z_N}^T (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 + I) \mathcal{X}_1(n) + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{G}_{1|z_N}^T \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{G}_{1|z_N} u_{1|z_N} \end{cases} \quad (4.52)$$

et

$$\bar{\Sigma}_2 : \begin{cases} \mathcal{X}_2(n+1) &= \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2 \mathcal{X}_2(n) + \Delta t \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{G}_{2|w_0} u_{2|w_0} \\ y_{2|w_0}(n) &= \frac{1}{2} \mathcal{G}_{2|w_0}^T (\mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2 + I) \mathcal{X}_2(n) + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{G}_{2|w_0}^T \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{G}_{2|w_0} u_{2|w_0} \end{cases} \quad (4.53)$$

Le système globale est aussi un système hamiltonien linéaire où sa dynamique discrète explicite s'écrit sous la forme

$$\mathcal{X}(n+1) = \mathcal{A} \mathcal{X}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{X} = [x_0, \dots, x_N, \xi_0, \dots, \xi_L]^T \quad (4.54)$$

avec le générateur

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \frac{1}{2} \mathcal{G}_{1|z_N} \mathcal{G}_{1|w_0}^T \\ -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{1|w_0} \mathcal{G}_{1|z_N}^T & \mathcal{M}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_2 & -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{1|z_N} \mathcal{G}_{1|w_0}^T \\ \frac{1}{2} \mathcal{G}_{1|w_0} \mathcal{G}_{1|z_N}^T & \mathcal{M}_2 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

est une Cayley satisfait la relation  $\mathcal{A}^T \mathcal{A} = \mathcal{I}$  considérée comme une condition nécessaire et suffisante pour la conservation d'énergie du système globale ( $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n+1)) = \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{X}(n))$ ). Avec les matrices circulantes  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont données par

$$\mathcal{L}_1 = -\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{4\Delta z} & \frac{\Delta t}{4\Delta z} \\ \frac{\Delta t}{4\Delta z} & \ddots & \\ \ddots & \ddots & -\frac{\Delta t}{4\Delta z} \\ -\frac{\Delta t}{4\Delta z} & \frac{\Delta t}{4\Delta z} & 1 \end{bmatrix}; \mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{4\Delta w} & \frac{\Delta t}{4\Delta w} \\ \frac{\Delta t}{4\Delta w} & \ddots & \\ \ddots & \ddots & -\frac{1}{4\Delta w} \\ -\frac{\Delta t}{4\Delta w} & \frac{\Delta t}{4\Delta w} & 1 \end{bmatrix}$$

Nous présentons maintenant dans la figure 4.5 les résultats numériques de l'interconnexion de deux lignes de transmission en temps discret. Ces résultats sont obtenus par la méthode de différence finie (discrétisation spatiale) et le gradient énergétique et le solveur matlab `ode45` pour la discrétisation en temps.

Le graphe ci-dessous donne la variation énergétique au cours du temps sur l'ensemble de lignes de transmission.

Nous pouvons donc conclure que les résultats numériques concordent avec les résultats théoriques développés précédemment. Le système interconnecté obtenu est conservatif<sup>3</sup> d'où la variation énergétique est de l'ordre  $10^{-18}$  (précision matlab). Dans le cas du solveur, la conservation d'énergie est de l'ordre de  $10^{-4}$  pour un temps de simulation de  $t = 100$ s. Si on augmente le temps de simulation, la variation d'énergie dans ce cas diverge contrairement à l'approche proposée. Cet exemple illustre donc l'importance de mettre en œuvre un schéma d'intégration qui préserve les propriétés telles : la structure hamiltonienne et la passivité en temps discret.

## 4 CONTRÔLEUR IDA-PBC EN DIMENSION INFINIE

Étant donné un système de dimension infinie, il existe, en principe, deux approches différentes pour la synthèse du contrôleur. La première dite **méthode directe** consiste à discrétiser d'abord le système

3. Puisque l'échange énergétique est considéré nul sur  $z_0$  et  $w_l$

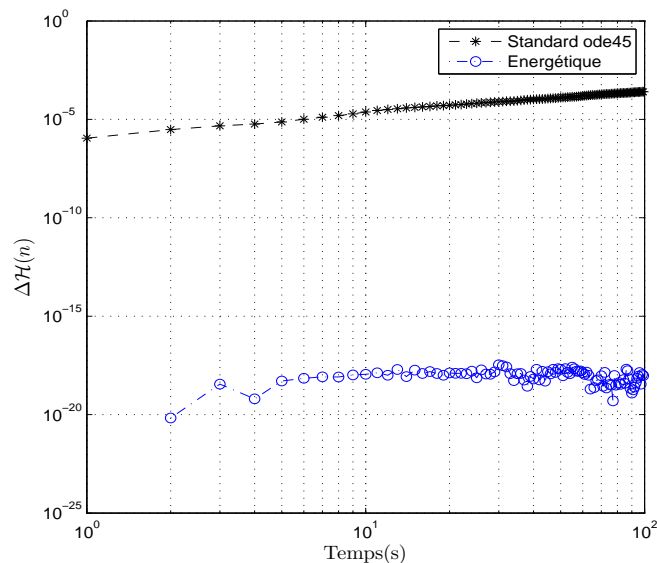


FIGURE 4.5 – La variation énergétique en temps discret

de dimension infinie pour obtenir un système de dimension finie, ce qui nous permet d'accéder à la méthodologie du contrôleur IDA-PBC. Quant à la deuxième, connue sous le nom **méthode indirecte**, il s'agit de construire le contrôleur à partir du système de dimension infinie. L'approximation dans ce cas intervient uniquement dans la simulation ou lors de la mise en œuvre pratique. L'inconvénient de cette dernière, est le manque d'outils théoriques de cette technique de commande dans la littérature.

Il est donc clair qu'on est plus à l'aise avec la première approche où de nombreux travaux existent dans la littérature en temps continu. En temps discret, la démarche a été développée dans le troisième chapitre de ce manuscrit.

Cette partie a pour but de présenter quelques résultats au niveau du contrôleur de type IDA-PBC appliqué dans le cadre du formalisme hamiltonien en dimension infinie. Dans ce cas précis, le contrôleur soit il est localisé ou il est distribué sur tout le domaine physique. Dans notre étude, nous nous limiterons au cas où le contrôleur est distribué.

Notre approche consiste à approcher tout d'abord le modèle physique (EDP→EDO) tout en préservant la structure du système d'origine. Puis, on applique un gradient énergétique qui préserve la propriété de passivité en temps discret. Nous fixons ensuite un comportement énergétique désiré sur tout le domaine dans le but d'obtenir un contrôleur discret distribué.

Soit le système hamiltonien donné par la dynamique

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t \mathcal{X}(n) = (\bar{\mathcal{J}} - \bar{\mathcal{R}}) \bar{\nabla}_x \bar{\mathcal{H}}(n) + \mathcal{G}\mathcal{U}(n) \\ \mathcal{Y}(n) = \mathcal{G}^T \bar{\nabla}_x \bar{\mathcal{H}}(n) \end{cases} \quad (4.56)$$

où le vecteur  $\mathcal{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n)]^T$  avec  $x_i(n) = x(z_i, t_n)$ . Le contrôleur  $\mathcal{U}(n)$  dans ce cas est distribué sur tout le domaine spatiale. L'idée maintenant est de fixer un comportement énergétique désiré  $\bar{\mathcal{H}}_d$  qui s'écrit en boucle fermée sous la forme

$$\bar{\nabla}_t \mathcal{X}(n) = (\bar{\mathcal{J}}_d - \bar{\mathcal{R}}_d) \bar{\nabla}_x \bar{\mathcal{H}}_d(n) \quad (4.57)$$

L'obtention du contrôleur se fera par la résolution de l'égalité ci-dessous

$$(\bar{\mathcal{J}} - \bar{\mathcal{R}}) \bar{\nabla}_x \bar{\mathcal{H}}(n) + \mathcal{G}\mathcal{U}(n) = (\bar{\mathcal{J}}_d - \bar{\mathcal{R}}_d) \bar{\nabla}_x \bar{\mathcal{H}}_d(n) \quad (4.58)$$

Dans la suite de cette partie, nous considérons seulement le cas du contrôleur IDA-PBC classique ( $\overline{\mathcal{J}} - \overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{J}}_d - \overline{\mathcal{R}}_d$ ) avec le système complètement actionné (la matrice  $\mathcal{G}$  est inversible).

Le contrôleur distribué s'écrit alors par

$$\mathcal{U}(n) = \mathcal{G}^{-1} (\overline{\mathcal{J}} - \overline{\mathcal{R}}) [\nabla_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}}_d(n) - \nabla_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}}(n)] \quad (4.59)$$

Ce contrôleur permet de garantir la stabilité de la boucle ouverte (4.56) vers le point d'équilibre désiré  $\mathcal{X}^*$ . En prenant  $\overline{\mathcal{H}}_d$  comme une fonction de Lyapunov discrète, on peut vérifier directement la stabilité de la boucle fermée en calculant le bilan énergétique suivant

$$\begin{aligned} \nabla_t \overline{\mathcal{H}}_d(n) &= \langle \nabla_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}}_d(n), \nabla_t \mathcal{X}(n) \rangle = \langle \nabla_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}}_d(n), (\overline{\mathcal{J}}_d - \overline{\mathcal{R}}_d) \nabla_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}}_d(n) \rangle \\ &= -\nabla_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}}_d(n)^T \overline{\mathcal{R}}_d \nabla_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{H}}_d(n) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Si  $\overline{\mathcal{R}}_d > 0$ , le système bouclé (4.57) est asymptotiquement stable.

Afin de mieux comprendre la synthèse de ce type de contrôleur, nous allons l'illustrer par un système physique décrit par une équation d'onde non linéaire connue sous le nom **Sine-Gordon**. Cette équation est utilisée dans plusieurs domaines physique, en mécanique pour modéliser une série de pendules en interaction [Hu 1977] et en biologie dans la modélisation d'une chaîne d'ADN [Angelo 2013]. Sa dynamique est donnée par une EDP 1-D présentée en temps continu par

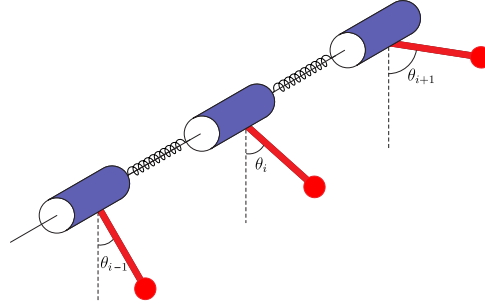


FIGURE 4.6 – Variation d'énergie  $\overline{\mathcal{H}}$  au cours du temps ( $\Delta t = \Delta z = \Delta w = 1$ ).

$$I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - mgl \sin(\theta) + u(z, t) \quad (4.61)$$

Si on se place dans le cas mécanique (chaîne de pendules en interaction, voir la figure 4.6), la variable  $\theta$  représente l'angle du pendule par rapport à son point d'équilibre.  $I$  est le moment d'inertie et  $C$  est la raideur. Notant par  $l$  la distance à l'axe de son centre de gravité,  $m$  sa masse et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Pour faciliter les calculs on normalise tous les paramètres à 1 ( $mgl = C = I = 1$ ).

La densité d'énergie s'exprime par

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + (1 - \cos(\theta)) \right\} dz \quad (4.62)$$

où le premier terme désigne l'énergie cinétique du pendule, le deuxième correspond à l'interaction entre différents pendules et le troisième désigne l'énergie potentielle du système.

Supposons que la variable d'état  $x = [\theta, \pi = \frac{\partial \theta}{\partial t}]^T$ , la dérivée variationnelle de la fonctionnelle  $\mathcal{H}$  est

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_z} = \sin(\theta) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_z} = \pi \end{aligned}$$

où la notation d'indice  $(\bullet)_z$  désigne la différenciation partielle par rapport à la variable  $z$ . La dynamique

(4.61) peut s'écrire alors sous la forme hamiltonienne en dimension infinie par

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \sin(\theta) \\ \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(z, t) \quad (4.63)$$

avec le contrôleur distribué  $u(z, t)$  agit uniquement sur la variable  $\pi$ . Avant de construire le contrôleur discret, nous allons tout d'abord discrétiser la boucle ouverte (4.63) de l'équation de Sine-Grodon. Premièrement, nous allons semi-discrétiser la densité d'énergie (4.62) en la remplaçant par  $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}\Delta z$  où  $\overline{\mathcal{H}}$  prend la forme suivante

$$\overline{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} \pi_i^2 + \frac{(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1})^2}{2(\Delta z)^2} + (1 - \cos(\theta_i)) \right] \quad (4.64)$$

La matrice  $\overline{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$  satisfait la propriété d'antisymétrie, le modèle semi-discrétiser s'écrit alors par

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta z^2} A \Theta + \sin(\Theta) \\ \Pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathcal{U} \quad (4.65)$$

où  $A$  représente la matrice circulante donnée par la forme

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

avec les variables  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$ ,  $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N]^T$  désignent les vecteurs de la discrétisation spatiale de  $\theta(z, t)$  et  $\pi(z, t)$ , respectivement. Le contrôleur distribué  $\mathcal{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$  agit sur tout les points du domaine physique de la variable  $\Pi$ .

Pour compléter la discrétisation, on utilise le gradient discret et on obtient la dynamique hamiltonienne discrète suivante

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\Theta(n+1) - \Theta(n)}{\Delta t} \\ \frac{\Pi(n+1) - \Pi(n)}{\Delta t} \end{bmatrix} &= \overline{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} \frac{A}{\Delta z^2} \frac{\Theta(n+1) + \Theta(n)}{2} - \frac{\cos(\Theta(n+1)) - \cos(\Theta(n))}{\Theta(n+1) - \Theta(n)} \\ \frac{\Pi(n+1) + \Pi(n)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathcal{U}(n) \\ \mathcal{Y}(n) &= \frac{\Theta(n+1) - \Theta(n)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.67)$$

qui satisfait le bilan énergétique ci-dessous

$$\begin{aligned} \Delta \overline{\mathcal{H}}(n) &= \overline{\mathcal{H}}(n+1) - \overline{\mathcal{H}}(n) \\ &\stackrel{(4.64)}{=} \frac{1}{2} \Pi(n+1)^2 + \frac{A}{2(\Delta z)^2} \Theta(n+1)^2 + [1 - \cos(\Theta(n+1))] - \frac{1}{2} \Pi(n)^2 - \frac{A}{2(\Delta z)^2} \Theta(n)^2 \\ &\quad - [1 - \cos(\Theta(n))] \\ &= \frac{A}{2\Delta z^2} [\Theta(n+1) + \Theta(n)] [\Theta(n+1) - \Theta(n)] - [\cos(\Theta(n+1)) - \cos(\Theta(n))] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\Pi(n+1) + \Pi(n)] [\Pi(n+1) - \Pi(n)] \\ &\stackrel{(4.67)}{=} (\Theta(n+1) - \Theta(n)) \mathcal{U}(n) \\ &= \Delta t \mathcal{Y}(n) \mathcal{U}(n) \end{aligned} \quad (4.68)$$

De la relation (4.68), nous pouvons conclure que la passivité est préservée au niveau discret. Dans l'absence du contrôleur, le bilan énergétique discret est nul et le système discret dans ce cas est dit conservatif.

À ce stade, il reste à fixer le comportement énergétique désiré sur chaque point du domaine spatiale, donné par

$$\bar{\mathcal{H}}_d = \sum_{i=0}^N \left[ \frac{1}{2} \pi_i^2 - 1.8 \cos(\theta_i) \right] \quad (4.69)$$

Le système bouclé donc s'écrit par

$$\left[ \frac{\Theta(n+1) - \Theta(n)}{\Delta t} \right] = (\bar{\mathcal{J}} - \bar{\mathcal{R}}_d) \left[ -1.8 \frac{\cos(\Theta(n+1)) - \cos(\Theta(n))}{\frac{\Theta(n+1) - \Theta(n)}{\Pi(n+1) + \Pi(n)}} \right] \quad (4.70)$$

où la matrice de dissipation  $\bar{\mathcal{R}}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$  avec  $k = 0.6$  est une matrice diagonale contient toutes les dissipation sur chaque maillage de  $\Pi$ . Par l'égalité (4.67) = (4.70), le contrôleur distribué s'exprime par

$$\mathcal{U}(n) = \frac{A}{\Delta z^2} \frac{\Theta(n+1) + \Theta(n)}{2} + 0.8 \frac{\cos(\Theta(n+1)) - \cos(\Theta(n))}{\Theta(n+1) - \Theta(n)} - 0.6 \frac{\Theta(n+1) - \Theta(n)}{\Delta t} \quad (4.71)$$

Le but de ce contrôleur est de stabiliser les différents pendules à la références  $\Pi^* = 4$  pour des conditions initiales suivantes  $\pi(z_{i+1}, n) = 0.02 + \pi(z_i, n)$  avec  $\pi(z_1, n) = 0.01$ .

Dans la figure 4.7, on observe que l'ensemble de pendules convergent vers le point d'équilibre désiré  $\Pi^*$ . On constate un dépassement de 50% et quelques oscillations qu'on peut réduire en augmentant le gain de dissipation  $k$ .

Pour éviter toutes confusions, nous rappelons aux lecteurs que l'objectif principale de notre approche est de montrer le rôle qui peut jouer le schéma d'intégration dans la synthèse des contrôleurs passifs. L'étude des performances et de la robustesse ne sont pas prises en compte dans ce manuscrit.

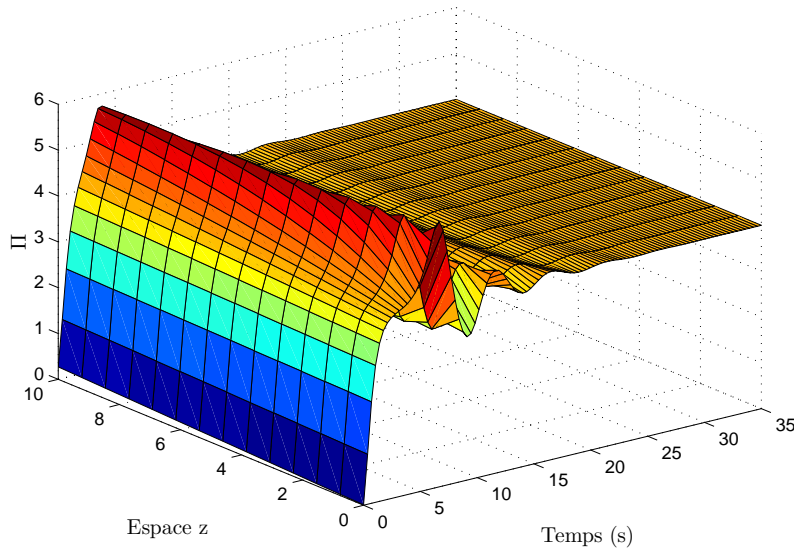


FIGURE 4.7 – Stabilisation du système à  $\Pi = 4$  en utilisant le gradient discret.

Comme il a été mentionné auparavant, la conservation de la structure hamiltonienne lors de la discrétisation spatiale ne suffit pas ni pour la simulation ni pour la synthèse. Le choix de l'intégrateur en temps est important pour éviter justement de perdre les propriétés du système hamiltonien considéré. Pour illustrer ce phénomène, nous allons faire une discrétisation spatiale tout en préservant la structure et en suite avec un solveur matlab nous allons valider le contrôleur. Les résultats de simulations sont donnés dans la figure 4.8.

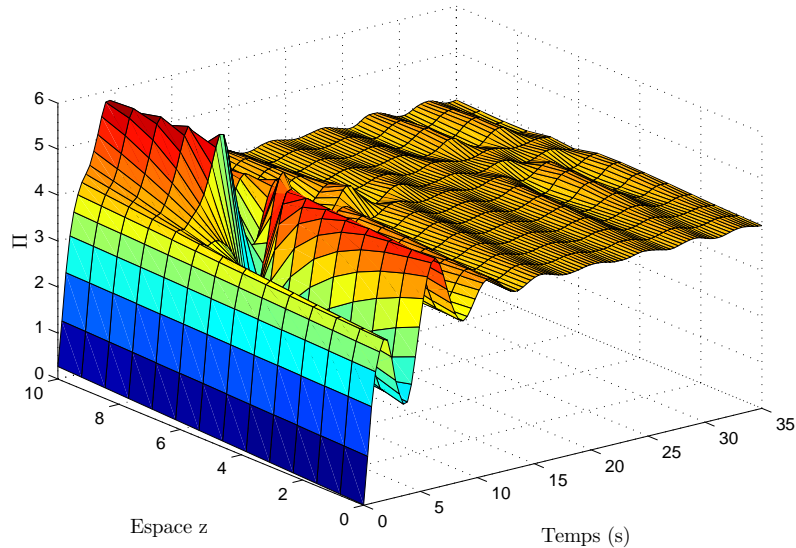


FIGURE 4.8 – Stabilisation du système à  $\Pi = 4$  en utilisant le solveur `ode45`.

On constate des dépassements et de fortes oscillations. Le système prend un certain temps pour se stabiliser et cela est due à l'erreur numérique commise par le solveur matlab.

Si on remplace le solveur matlab par l'approche émulée (utilisée souvent dans la littérature), le système devient carrément instable puisque l'erreur numérique commise par cette approche est beaucoup plus importante que celle du solveur matlab.

Dans ce dernier chapitre, nous avons abordé l'approximation des systèmes hamiltoniens à ports en dimension infinie. L'approche proposée combine une semi-discrétisation en espace suivie de l'intégrateur énergétique introduit pour les EDO. Nous avons ensuite traité deux types d'interconnexions, une par feedback de deux systèmes hamiltoniens de dimension infinie, et une deuxième dite mixte entre un système de dimension infinie et deux systèmes de dimension finie. Nous avons alors pu démontrer que la propriété de composition en temps discret assure la même structure par rapport au comportement de son homologue établi en temps continu. Cette propriété a été illustrée par l'interconnexion de deux lignes de transmission. Pour terminer, nous avons établi une démarche de synthèse énergétique appliquée sur l'équation d'onde non linéaire. Ce résultat a permis de différencier notre approche avec celles qui existent dans la littérature.





# CONCLUSION GÉNÉRALE

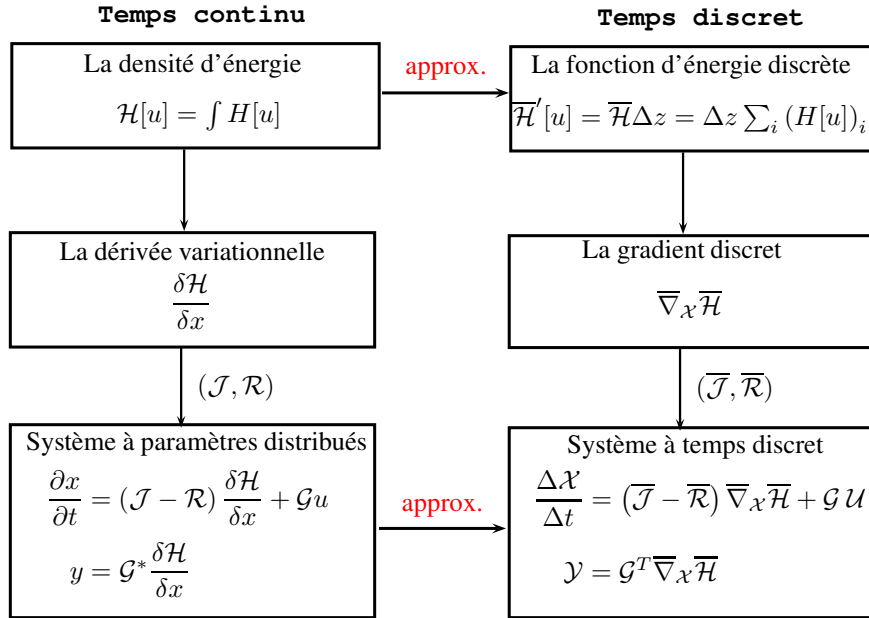
Dans ce manuscrit, nous avons présenté nos travaux concernant la discrétisation des systèmes hamiltoniens à ports de dimension finie et infinie. L'approche développée consiste en approximation de dimension finie par un gradient discret. Après avoir montré que la dynamique obtenue est intrinsèquement passive, nous avons étudié la stabilité de réseau et nous avons proposé une technique de synthèse. Dans ces développements sont inclus les retards, les incertitudes et la saturation. La faisabilité des résultats a été aérée par l'expérimentation sur un convertisseur de puissance. Ces résultats, ont été ensuite étendus sur les systèmes de dimension infinie.

Le premier chapitre introduit les notions de passivité, stabilité et stabilisation pour les systèmes affines en entrée, puis dans le cadre des systèmes hamiltoniens. Nous avons rappelé en particulier la propriété de composition et la synthèse de commande IDA-PBC. Un exemple numérique a été traité pour illustrer la perte d'information liée à la discrétisation par le comportement ératique de trajectoire discrète.

Le deuxième chapitre présente la démarche d'approximation qui nous a permis de définir une dynamique hamiltonienne passive sur laquelle repose l'ensemble des développements présentés. Par l'illustration des propriétés de flot discret en fonction du type d'intégrateur, nous rappelons la problématique. Nous avons introduit un gradient discret utilisé pour définir un opérateur de projection qui engendre une dynamique hamiltonienne discrète intrinsèquement passive relativement aux mêmes fonctions de stockage et de dissipation. L'étude de l'interconnexion de ces dynamiques a montré la commutativité entre les opérateurs de projection et de composition. Des conditions de stabilité sous forme d'inégalité matricielle ont été obtenues pour des réseaux en présence de retard et d'incertitudes. Pour finir, une étude en temps continu utilisant les inégalités de Wirtinger a montré la réduction du conservatisme par rapport aux résultats de la littérature. Un exemple numérique a été traité pour montrer l'efficacité des critères de stabilité proposés.

Le troisième chapitre détaille la méthode de synthèse de commande discrète que nous avons développé sur la base de techniques continues. Nous avons tout d'abord présenté une technique de synthèse dite  $L_gV$ -contrôleur en temps discret qui reproduit le comportement énergétique du système continu sur chaque instant discret. Cette technique de commande engendre une dynamique bouclée intrinsèquement stable. Ensuite, nous avons étudié la stabilité du système bouclé lorsqu'un retard en temps vient affecter la dynamique du système en boucle ouverte. La contrainte de saturation sur ce contrôleur a également été prise en compte. Dans cette étude, des conditions de stabilité basées sur des fonctionnelles de Lyapunov-krasovskii ont été proposées. Ensuite, nous avons proposé une autre stratégie de commande, dite IDA-PBC en temps discret. La démarche de la synthèse est fondée sur un gradient discret qui préserve la notion de la passivité du système considéré. Nous avons montré que l'énergie du système bouclé est une bonne candidate de Lyapunov pour conclure quant à la stabilité du système en temps discret. Enfin, cette technique de commande a été comparée avec les résultats de la littérature. Une série d'exemples a été traitée (pendule simple, oscillateur d'impact et le pendule gyroscopique) et des résultats de simulation ont été obtenus. Afin de confirmer l'efficacité de la technique de commande proposée, une application sur un convertisseur de puissance (Buck) a été validée. Ensuite, nous avons pu montrer que cette technique est beaucoup plus performante par rapport à la technique d'émulation. Un test sur la robustesse vis-à-vis la variation de la résistance de charge a été présentée.

Dans le dernier chapitre, nous avons étendu ces résultats pour traiter les systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie. Nous avons montré que la dynamique discrète est obtenue en respectant deux



étapes suivantes : la discrétisation spatiale qui conserve la structure, puis la discrétisation temporelle tout en garantissant le bilan d'énergie (voir le schéma block ci-dessus).

Un cas particulier de cette classe de système concernant l'énergie quadratique a été étudié. Nous avons ensuite traité deux types d'interconnexions. La première associée à l'interconnexion par feedback de deux systèmes hamiltoniens de dimension infinie, et la deuxième dite mixte pour interconnecter un système de dimension infinie à deux systèmes de dimension finie. Nous avons montré que la propriété de composition en temps discret assure la même structure que son homologue en temps continu. Pour terminer, nous avons donné une première synthèse énergétique appliquée sur un système de dimension infinie (équation d'onde non linéaire). La démarche de la synthèse repose sur la discrétisation spatio-temporelle de la boucle ouverte et la boucle fermée désirée. Ce résultat a permis de différencier notre approche avec celles qui existent dans la littérature où seulement la discrétisation spatiale a été prise en compte.

## PERSPECTIVES

Dans la continuité directe de notre travail de thèse, nous pouvons étendre le gradient discret sur ce qu'on appelle ici  $\theta$ -gradient. Ce dernier sera donné par une combinaison en deux chemins d'intégration suivant

$$\overline{\nabla}_x H = \theta \overline{\nabla}_x H(x, x') + (1 - \theta) \overline{\nabla}_x H(x', x)$$

De plus à sa conservation de l'énergie, il offre une possibilité de conserver d'autres propriétés par un degré de liberté  $\theta \in [0, 1]$  (la conservation de la symétrie par exemple pour  $\theta = \frac{1}{2}$ ). Comme nous l'avons déjà rappelé précédemment, la composabilité des systèmes hamiltoniens discrets donne un système hamiltonien mais de grandes dimensions (*i.e.* le nombre de variables nécessaire à sa description est élevé). Le problème de réduction en temps discret est envisageable, qui permettra de trouver un modèle de dimension réduite et qui reproduit fidèlement le comportement du système hamiltonien. Ce modèle va simplifier donc l'étude, l'analyse, la simulation et la synthèse de lois de commande. D'un point de vue contrôle, ce gradient discret sera utilisé pour établir une nouvelle technique de commande dite *contrôle par interconnexion*. En ce qui concerne les systèmes hamiltoniens de dimension infinie, il s'agit de remplacer la méthode de différence finie par des méthodes symplectiques proposées récemment dans la littérature. On envisage aussi d'étendre ces résultats pour traiter les systèmes Bi-hamiltoniens qui ont deux voire trois modèles mathématiques. Un exemple de cette classe du système est présenté dans le tableau ci-dessous,

Le choix d'un modèle de cette classe du système peut avoir un grand impact sur les propriétés du système lors de la simulation, de l'analyse et de la synthèse discrète.

Sur le plan applicatif, il nous semble intéressant d'appliquer la commande IDA-PBC discrète sur un autre convertisseur plus complexe de type SEPIC (Single-Ended Primary Inductor Converter). Enfin, une

Forme 1	Forme 2
Bi-Hamiltonien	
$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \mathcal{J}_1(\partial_z) \delta_x \mathcal{H}_1(x, \partial_z, \dots)$	$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \mathcal{J}_2(x, \partial_z, \dots) \delta_x \mathcal{H}_2(x)$
Avantages et Inconvénients	
$\mathcal{J}_1$ facile à discrétiser	$\mathcal{J}_2$ difficile à discrétiser
$\mathcal{H}_1$ énergie quelconque	$\mathcal{H}_2$ énergie quadratique
Exemple : equation de Kortweg de Vries	
$\mathcal{J}_1 = \partial_z$	$\mathcal{J}_2 = \frac{2}{3}x\partial_z + \partial_z + \partial_z^3$
$\mathcal{H}_1 = \int_z \left[ \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(\partial_z x)^2 \right] dz$	$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \int_z x^2 dz$

TABLE 4.1 – Le Bi-hamiltonien

autre application est envisageable pour traiter le problème d'interconnexion entre le maître et son esclave dans le domaine de téléopération, voir la figure 4.9. La commande par interconnexion en temps continu a

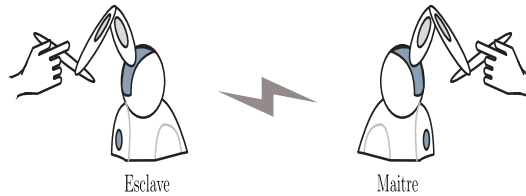


FIGURE 4.9 – Maître-Esclave

été déjà développée dans la littérature pour ce type de système. Pour remédier aux problèmes de discrétisation, une synthèse purement discrète sera intéressante en se basant sur la dynamique discrète proposée dans ce mémoire, tout en prenant comptes des retards et la contrainte de saturation du contrôleur.



# A

## Annexes

### SOMMAIRE

1	GRADIENT DISCRET POUR $H$ QUADRATIQUE . . . . .	116
2	PREUVE DES LEMMES . . . . .	117

# 1 GRADIENT DISCRET POUR $H$ QUADRATIQUE

Concernant les systèmes hamiltoniens linéaires, le hamiltonien  $H$  prend toujours une forme quadratique donné par

$$H = \frac{1}{2} X^T Q X \quad \text{avec} \quad X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \quad (\text{A.1})$$

où la matrice  $Q = Q^T > 0$  s'exprime comme suit

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \cdots & Q_{1,m} \\ Q_{1,2} & Q_{2,2} & \cdots & Q_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1,m} & Q_{2,m} & \cdots & Q_{m,m} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

En utilisant le gradient discret symétrique obtenu par une combinaison de deux chemins d'intégrations suivant

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X H)_i &= \frac{1}{(X'_i - X_i)} \\ &\left[ \frac{1}{2} \left[ H(X'_1, \dots, X'_{i-1}, X'_i, X_{i+1}, \dots, X_m) - H(X'_1, \dots, X'_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_m) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ H(X_1, \dots, X_{i-1}, X'_i, X'_{i+1}, \dots, X'_m) - H(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X'_{i+1}, \dots, X'_m) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

nous pouvons montrer facilement que dans le cas linéaire, le gradient discret s'écrit sous la forme vectorielle ci-dessous,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X H &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2(X'_1 - X_1)} [Q_{1,1}(X'_1 + X_1)(X'_1 - X_1) + (X'_1 - X_1)(Q_{1,2}(X'_2 + X_2) + \dots + Q_{1,m}(X'_m + X_m))] \\ \frac{1}{2(X'_2 - X_2)} [Q_{2,2}(X'_2 + X_2)(X'_2 - X_2) + (X'_2 - X_2)(Q_{1,2}(X'_1 + X_1) + \dots + Q_{2,m}(X'_m + X_m))] \\ \vdots \\ \frac{1}{2(X'_m - X_m)} [Q_{m,m}(X'_m + X_m)(X'_m - X_m) + (X'_m - X_m)(Q_{1,m}(X'_1 + X_1) + \dots + \dots)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} Q_{1,1}(X'_1 + X_1) + \frac{1}{2} Q_{1,2}(X'_2 + X_2) + \dots + \frac{1}{2} Q_{1,m}(X'_m + X_m) \\ \frac{1}{2} Q_{2,2}(X'_2 + X_2) + \frac{1}{2} Q_{1,2}(X'_1 + X_1) + \dots + \frac{1}{2} Q_{2,m}(X'_m + X_m) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} Q_{m,m}(X'_m + X_m) + \frac{1}{2} Q_{1,m}(X'_1 + X_1) + \dots + \frac{1}{2} Q_{m-1,m-1}(X'_{m-1} + X_{m-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \cdots & Q_{1,m} \\ Q_{1,2} & Q_{2,2} & \cdots & Q_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1,m} & Q_{2,m} & \cdots & Q_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(X'_1 + X_1)}{2} \\ \frac{(X'_2 + X_2)}{2} \\ \vdots \\ \frac{(X'_m + X_m)}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A travers ce calcul, on voit clairement que le gradient discret (A.3) est réduit à un schéma d'intégration de type point-milieu.

## 2 PREUVE DES LEMMES

Nous supposons que le retard  $d(n)$  satisfait la condition  $0 < d_m \leq d(n) \leq d_M$  pour tout  $n$ .

**Lemme 4.1 :** Pour toute matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P^T = P \geq 0$ , nous avons

$$\sum_{i=n+1-d(n+1)}^{n-1} W(i)^T P W(i) - \sum_{i=n+1-d(n)}^{n-1} W(i)^T P W(i) \leq \sum_{i=n+1-d_M}^{n-d_m} W(i)^T P W(i)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n+1-d(n+1)}^{n-1} W(i)^T P W(i) - \sum_{i=n+1-d(n)}^{n-1} W(i)^T P W(i) \\ = & \sum_{i=n+1-d(n+1)}^{n-d_m} W(i)^T P W(i) + \sum_{i=n+1-d_m}^{n-1} W(i)^T P W(i) - \sum_{i=n+1-d(n)}^{n-d_m} W(i)^T P W(i) - \sum_{i=n+1-d_m}^{n-1} W(i)^T P W(i) \\ = & \sum_{i=n+1-d(n+1)}^{n-d(n)} W(i)^T P W(i) + \sum_{i=n+1-d(n)}^{n-d_m} W(i)^T P W(i) - \sum_{i=n+1-d(n)}^{n-d_m} W(i)^T P W(i) \\ \leq & \sum_{i=n+1-d_M}^{n-d_m} W(i)^T P W(i) \end{aligned}$$

**Lemme 4.2 :** Pour toute matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P^T = P \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=n+2-d_M}^{n+1-d_m} \sum_{i=j}^n W(i)^T P W(i) - \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} \sum_{i=j}^{n-1} W(i)^T P W(i) \\ & = (d_M - d_m) W(n)^T P W(n) - \sum_{i=n+1-d_M}^{n-d_m} W(i)^T P W(i) \end{aligned}$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} & \sum_{j=n+2-d_M}^{n+1-d_m} \sum_{i=j}^n W(i)^T P W(i) - \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} \sum_{i=j}^{n-1} W(i)^T P W(i) \\ & = \sum_{j=n+2-d_M}^{n-d_m} \sum_{i=j+1}^n W(i)^T P W(i) - \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} \sum_{i=j}^{n-1} W(i)^T P W(i) \\ & = \sum_{j=n+1-d_M}^{n-d_m} (W(n)^T P W(n) - W(j)^T P W(j)) \\ & = (d_M - d_m) W(n)^T P W(n) - \sum_{i=n+1-d_M}^{n-d_m} W(i)^T P W(i) \end{aligned}$$





# BIBLIOGRAPHIE

- L. Aceto et D. Trigiante. Symmetric schemes, time reversal symmetry and conservative methods for hamiltonian systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 107(2) :257–274, 1999. (Cité page 26.)
- W. Airong et W. Yuzhen. Stabilization and control of nonlinear port-controlled Hamiltonian systems subject to actuator saturation. *Automatica*, 46(6) :2008–2013, 2010. (Cité pages 2, 70 et 71.)
- M. Alessandro. Boundary energy shaping of linear distributed port-hamiltonian systems. *European Journal of Control*, 19(6) :521–528, 2013. (Cité page 92.)
- R. Anderson et M.W. Spong. Asymptotic stability for force reflecting teleoperators with time delays. Dans *Robotics and Automation. Proceedings.,IEEE International Conference on*, pages 1618–1625 vol.3, 1989. (Cité page 51.)
- D. G Angelo. Longitudinal displacements of base pairs in {DNA} and effects on the dynamics of nonlinear excitations. *Mathematical Biosciences*, 245(1) :70 – 75, 2013. (Cité page 106.)
- S. Aoues, D. Eberard, et W. Marquis-favre. Canonical interconnection of discrete linear port-Hamiltonian systems. Dans *Conference on Decision and Control*, pages 3166–3171, 2013a. (Cité page 40.)
- S. Aoues, D. Eberard, et W. Marquis-favre. Discrete IDA-PBC design for 2-D port-Hamiltonian systems. Dans *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Toulouse, France, September*, pages 134–139, 2013b. (Cité page 38.)
- S. Aoues, D. Eberard, et W. Marquis-favre. Conservative discrete-time port-Hamiltonian dynamics : passivity and stability. *Systems and control letters*, en preparation. (Cité page 94.)
- S. Aoues, W. Lombardi, A. Seuret, et D. Eberard. Robust stability for delayed port-hamiltonian systems using improved wirtinger-based inequality. Dans *Conference on Decision and Control*, page accepted, 2014. (Cité pages 57 et 58.)
- A. Baaiu, F. Couenne, D. Eberard, C. Jallut, L. Lefevre, Y. Legorrec, et B. Maschke. Port-based modelling of mass transport phenomena. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems : Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences*, 15 :233–254, 2009a. (Cité pages 2 et 3.)
- A. Baaiu, F. Couenne, L. Lefevre, Y. Legorrec, et M. Tayakout. Structure preserving infinite dimensionnal model reduction : application to absorption processes. *Journal of process control*, 19 :394–404, 2009b. (Cité page 92.)
- J.S. Baras et N.S. Patel. Robust control of set-valued discrete-time dynamical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(1) :61–75, Jan 1998. (Cité page 62.)
- C. Beattie et S. Gugercin. Structure-preserving model reduction for nonlinear port-hamiltonian systems. Dans *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 6564–6569, Dec 2011. (Cité page 2.)
- T.J. Bridges. Canonical multi-symplectic structure on the total exterior algebra bundle. *Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 462 :1531–1551, 2006. (Cité pages 3, 27 et 92.)
- E. Busvelle, R. Kharab, A. Maciejewski, et J. Strelcyn. Numerical integration of differential equations in the presence of first integrals : observer method. *Applicationes Mathematicae*, 22(3) :373–418, 1994. (Cité page 26.)

- C.I. Byrnes, A. Isidori, et J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 36(11) :1228–1240, November 1991. (Cité page 14.)
- E. Celledoni, V. Grimm, R.I. McLachlan, B. Owren, et G.R.W. Quispel. Preserving energy resp. dissipation in numerical pdes using the average vector field method. *Journal of Computational Physics*, 231 : 6770–6789, 2012. (Cité pages 3, 92 et 94.)
- J. Chabassier. *Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques*. PhD thesis, Ecole polytechnique Paris, Mai 2012. (Cité pages 26 et 40.)
- T. Chen et A. Bruce. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1995. ISBN 3540199497. (Cité page 62.)
- D. Cohen. Conservation properties of numerical integrators for highly oscillatory hamiltonian systems. Dans *IMA J. Numer. Anal.*, 26, 34-59, 2005. (Cité page 3.)
- D. Cohen et E. Hairer. Linear energy-preserving integrators for poisson systems. *BIT Numerical Mathematics*, 51 :91–101, 2011. (Cité pages 3 et 26.)
- P. Console et E. Hairer. Reducing round-off errors in symmetric multistep methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 262(0) :217 – 222, 2014. (Cité page 26.)
- R. Costa-Castello et E. Fossas. On preserving passivity in sampled-data linear systems. Dans *American Control Conference*, pages 7613–7617, June 2006. (Cité page 11.)
- R. Costa-Castello et E. Fossas. On preserving passivity in sampled-data linear systems. *J. Franklin Inst.*, 13 :583–590, 2007. (Cité pages 10 et 26.)
- M. Dahlby et B. Owren. A general framework for deriving integral-preserving numerical methods for pdes. *SIAM*, 33 :2318–2340, 2011. (Cité pages 3 et 92.)
- A. David, C. Alessandro, Ro Casavola, et M. Edoardo. Command governors for constrained nonlinear systems : Direct nonlinear vs. linearization-based strategies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :816–820, 1999. (Cité page 62.)
- II. Delice et R. Sipahi. Delay-independent stability test for systems with multiple time-delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57(4) :963–972, April 2012. (Cité page 49.)
- P. Di Giamberardino, F. Grassini, S. Monaco, et D. Normand-Cyrot. Piecewise continuous control for a car-like robot : implementation and experimental results. Dans *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*, volume 3, pages 3564–3569 vol.3, Dec 1996. (Cité page 62.)
- M. Dutykh, D. Chhay et F. Fedele. Geometric numerical schemes for the kdv equation. *Comput. and Math. Appl.*, 53 :221–236, 2013. (Cité pages 3 et 92.)
- K. Feng et M. Qin. *Symplectic geometric algorithms for Hamiltonian system*. Sci. and Tech. Press of Zhejiang, Hangzhou (in Chinese), 2002. (Cité pages 26, 27 et 41.)
- K. Feng et D. L. Wang. Dynamical systems and geometric construction of algorithms. *Contemporary Mathematics*, 46, 1994. (Cité pages 3 et 26.)
- K. Fujimoto, K. Sakurama, et T. Sugie. Trajectory tracking control of port-controlled hamiltonian systems and its application to a magnetic levitation system. Dans *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 4, pages 3388–3393, 2001. (Cité page 73.)
- E. Garcia-Canseco, P. Pasumarthy, A. van der Schaft, et R. Ortega. On control by interconnection of port hamiltonian systems. Dans P. Piztek, éditeur, *16th IFAC World Congress*. Elsevier, July 2005. (Cité page 59.)
- C. Gaviria, E. Fossas, et R. Griño. Robust controller for a full-bridge rectifier using the ida approach and gssa modeling. *Circuits and Systems I : Regular Papers, IEEE Transactions on*, 52(3) :609–616, March 2005. (Cité page 73.)

- Z. Ge et J.E. Marsden. Lie-poisson Hamiltonion-Jacobi theory and lie-poisson integrators. *Journal of Physics Letters A*, 139 :133–134, 1988. (Cit e pages 3, 26 et 30.)
- G. Golo. *Interconnection structures in port-based modelling : Tools for analysis and simulation*. PhD thesis, University of Twente, Enschede", The Netherlands, 2002. (Cit e pages 18 et 43.)
- G. Golo, V. Talasila, A.J. van der Schaft, et B.M. Maschke. Hamiltonian discretization of the the Telegrapher’s equation. *Automatica*, 2004. (Cit e pages 3, 26, 42, 92 et 94.)
- F. Gomez-Estern et A.J. van der Schaft. Physical damping in IDA-PBC controlled underactuated mechanical systems. *European Journal of Control*, 10(5) :451–468, December 2004. (Cit e page 19.)
- O. Gonzalez. Time integration and discrete Hamiltonian systems. *Nonlinear Science*, 6 :449–467, 1996. (Cit e pages 26, 31, 36 et 63.)
- K. Gopalsamy et X. He. Delay-independent stability in bidirectional associative memory networks. *IEEE Trans Neural Netw*, 10(5) :998–1002, 1994. (Cit e page 49.)
- L. G oren-S umer et Y. Yal ın. Gradient based discrete-time modeling and control of hamiltonian systems. Dans *17th IFAC World Congress, Korea, Seoul*, 2008. (Cit e pages 26, 27, 36 et 38.)
- L. G oren-S umer et Y. Yal ın. A direct discrete-time IDA-PBC design method for a class of underactuated Hamiltonian systems. Dans *18th IFAC World Congress, Italy*, 2011. (Cit e pages 3, 36, 39, 62 et 73.)
- S. Greenhalgh, V. Acary, et B. Brogliato. On preserving dissipativity properties of linear complementarity dynamical systems with the  $\theta$ -method. *Numerische Mathematik*, 125 :601–637, 2013. (Cit e pages 10, 26 et 42.)
- D. Greenspan. Discrete numerical methods in physics and engineering. Dans *Academic Press*, 1974. (Cit e page 3.)
- K. Gu et V. L. Kharitonov. *Stability of time-delay systems*. Academic Press, 2003. (Cit e page 56.)
- H. Guldemir. Study of sliding mode control of dc–dc Buck converter. *Energy and Power Engineering*, 3 : 401–406, 2011. (Cit e page 81.)
- E. Hairer. Variable time step integration with symplectic methods. *Appl. Numer. Math.*, 25 :219–227, 1997. (Cit e pages 3 et 27.)
- E. Hairer. Long-time energy conservation of numerical integrators. *Comput. Math*, pages 162–180, 2005. (Cit e pages 3 et 26.)
- E. Hairer, C. Lubich, et G. Wanner. *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer Series in Comp. Math. 31, 2002. (Cit e pages 26, 27, 29 et 92.)
- B. Hamroun, L. Lefevre, et E. Mendes. Passivity based control of a reduced port-controlled hamiltonian model for the shallow water equations. Dans *Decision and Control, 47th IEEE Conference on*, pages 3917–3922, Dec 2008. (Cit e pages 2 et 92.)
- A. Harten, P. D. Lax, et B. van Leer. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61, 1983. (Cit e pages 3 et 26.)
- Y. He, Q. G. Wang, L. Xie, et C. Lin. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52 :293–299, February 2007. (Cit e page 56.)
- D. J. Hill et P. J. Moylan. Dissipative Dynamical Systems : Basic Input-Output and State Properties . *Journal of the Franklin Institute*, 309 :327 – 357, 1980. (Cit e page 10.)
- B. Hu. Generalizing the pendulum sine-gordon equation and its solutions. *Il Nuovo Cimento A Series 11*, 38(4) :441–454, 1977. (Cit e page 106.)

- B. Hu et A.N. Michel. Some qualitative properties of multirate digital control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 44(4) :765–770, Apr 1999. (Cité page 62.)
- A. Iqbal et H. Roth. Predictive time domain passivity control for delayed teleoperation using energy derivatives. Dans *Proc. of 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, pages 1–6, 2006. (Cité page 51.)
- T. Itoh et K. Abe. Hamiltonian-conserving discrete canonical equations based on variational difference quotients. *Journal Comput. Phys*, 77 :85–102, 1998. (Cité pages 3, 26 et 32.)
- A Jaafar. *Contribution à la modélisation, l'analyse et l'optimisation de lois de commande pour convertisseurs DC-DC de puissance*. PhD thesis, SUPELEC, Gif sur Yvette, 2011. (Cité pages 81 et 85.)
- J. Jiang. Preservations of positive realness under discretizations. *J. Franklin Inst.*, 330 :721–734, 1993. (Cité page 26.)
- X. Jiang, Qing-Long Han, et X. Yu. Stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delay. Dans *American Control Conference, 2005*, pages 2817–2822, June 2005. (Cité page 60.)
- V. Jurdjevic et J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, 28 :381–389, 1978. (Cité pages 13 et 63.)
- C. Y. Kao et R. Pasumathy. Stability analysis of interconnected hamiltonian systems under time delays. *IET Control Theory and Applications*, 6(4) :570–577, 2012. (Cité pages 2 et 49.)
- B. Karasozen. Poisson integrators. *Mathematical and Computer Modelling*, 40 :1225 – 1244, 2004. (Cité page 26.)
- H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. zef, 2002. (Cité page 11.)
- N. Krasovskii. *Stability of Motion*. Stanford University Press, 1963. (Cité page 49.)
- D.S. Laila et A. Astolfi. Discrete-time IDA-PBC design for separable Hamiltonian systems. Dans *16th IFAC World Congress, Prague*, 2005. (Cité pages 3, 27, 36, 62, 63, 73 et 76.)
- D.S. Laila et A. Astolfi. Construction of discrete-time models for port-Hamiltonian systems with application. *Systems & Control Letters*, 55 :673–680, 2006a. (Cité pages 26, 36, 38 et 63.)
- D.S. Laila et A. Astolfi. Discrete-time IDA-PBC design for underactuated Hamiltonian control systems. Dans *American Control Conference*, pages 188–193, 2006b. (Cité pages 3, 27, 36, 62, 63 et 73.)
- D.S. Laila et G. Nesić. Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation. *Eur. J. Control*, 8(2) :109–125, 2002. (Cité pages 26 et 62.)
- J. P. LaSalle. *The Stability of Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976. (Cité page 37.)
- Y. Le Gorrec, H.J. Zwart, et B. Maschke. Dirac structures and boundary control systems associated with skew-symmetric differential operators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(5) :1864–1892, December 2005. (Cité page 92.)
- B. Leimkuhler, B. J. et R. D. Skeel. Symplectic numerical integrators in constrained hamiltonian systems. *Journal of Computational Physics*, 112(1) :117 – 125, 1994. (Cité page 26.)
- B. J. Leimkuhler et S. Reich. Symplectic integration of constrained hamiltonian systems. *Mathematics of Computation*, 63 :589–605, 1994. (Cité page 3.)
- B. J. Leimkuhler et S. Reich. *Simulating Hamiltonian Dynamics*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2005. (Cité pages 2, 26, 27 et 29.)
- A. Macchelli et C. Melchiorri. Control by interconnection of mixed port hamiltonian systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11) :1839–1844, Nov 2005. (Cité pages 3 et 94.)

- A.J. Macchelli, A. van der Schaft et C. Melchiorri. Port hamiltonian formulation of infinite dimensional systems ii. boundary control by interconnection. Dans *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2004. (Cité pages 92 et 101.)
- M.Y. Mareels Iven, H.B. Penfold, et R.J. Evans. Controlling nonlinear time-varying systems via euler approximations. *Automatica*, 28(4) :681 – 696, 1992. (Cité page 62.)
- J.E. Marsden, G.W. Patrick, et S. Shkoller. *Multisymplectic Geometry, Variational Integrators, and Nonlinear PDEs*. Communications in Mathematical Physics, 1998. (Cité page 3.)
- B. Maschke et A.J. van der Schaft. Port controlled Hamiltonian systems : modeling origins and system theoretic properties. Dans *proc of the IFAC symposium on NOLCOS*, pages 282–288, Bordeaux, Juin 1992. (Cité pages 2 et 17.)
- R. I. McLachlan, M. Perlmutter, et G.R.W. Quispel. On the nonlinear stability of symplectic integrators. *BIT Numerical Mathematics*, 44(1) :99–117, 2004. (Cité page 35.)
- R.I. McLachlan. On the numerical integration of ordinary differential equations by symmetric composition methods. *SIAM*, 16 :151–168, 1995. (Cité pages 26 et 27.)
- R.I. McLachlan. A new implementation of symplectic runge-kutta methods. *SIAM J. Scientific Computing*, 29 :1637–1649, 2007. (Cité pages 3 et 27.)
- R.I. McLachlan. Discrete gradient methods have an energy conservation law. *Discrete and continuous dynamical systems*, 34 :1099–1104, 2013. (Cité page 92.)
- R.I. McLachlan et G. R. W. Quispel. Generating functions for dynamical systems with symmetries, integrals and differential invariants. *Physica D*, 112 :298–309, 1998. (Cité pages 3 et 26.)
- AR. Meghnoos, D. Patino, M.T. Pham, et X. Lin-Shi. Hybrid optimal control with singular arcs for dc-dc power converters. Dans *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 103–108, Dec 2013. (Cité page 2.)
- S. Monaco et D. Normand-Cyrot. Méthodologie d’analyse et de synthèse pour les systèmes échantillonnés. Dans *Automatique avancée et informatique appliquée*, pages 33–48, 2009. (Cité page 62.)
- S. Monaco et D. Normand-Cyrot. Nonlinear average passivity and stabilizing controllers in discrete time. *Systems & Control Letters*, 60 :431–439, 2011. (Cité page 11.)
- S. Monaco, D. Normand-Cyrot, et F. Triefensee. Nonlinear port-controlled Hamiltonian system under sampling. Dans *48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, China*, 2009. (Cité pages 3, 36 et 62.)
- S. Monaco, D. Normand-Cyrot, et F. Triefensee. Sampled-data stabilization : a pbc approach. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 56 :907–912, 2011. (Cité page 26.)
- Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, et Y. S. Lee. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *International Journal of Control*, 74 :1447–1455, 2001. (Cité page 49.)
- R. Moulla, L. Lefèvre, et B. Maschke. Geometric pseudo-spectral method for spatial integration of dynamical systems. *Mathematical and computer modelling of dynamical systems, special issue on Modelling*, 17 :85–104, 2011. (Cité pages 92 et 94.)
- P. Mukhija, I.N. Kar, et R. K P Bhatt. Delay-distribution based stability analysis of time-delayed port-hamiltonian systems. Dans *Signal Processing, Computing and Control (ISPC), IEEE International Conference on*, pages 1–5, 2012. (Cité page 49.)
- E. M. Navarro-Lopez. Several dissipativity and passivity implications in the linear discrete-time setting. *Mathematical Problems in Engineering*, 11(6) :599–616, 2005. (Cité page 26.)
- E. M. Navarro-Lopez, H. Sira-Ramirez, et E. Fossas-Colet. A speed-gradient based method to passify nonlinear discrete-time systems. Dans *World congress*, pages 703–708, 2005. (Cité page 10.)



- D. Nesic et A.R. Teel. Backstepping on the euler approximate model for stabilization of sampled-data nonlinear systems. Dans *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 2, pages 1737–1742 vol.2, 2001. (Cité page 62.)
- D. Nešić et L. Grüne. Lyapunov-based continuous-time nonlinear controller redesign for sampled-data implementation. *Automatica*, 41(7) :1143 – 1156, 2005. (Cité page 85.)
- D. Nešić et A.R. Teel. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(7) :1103–1122, July 2004. (Cité pages 62 et 85.)
- D. Nešić, A.R. Teel, et P.V. Kokotović. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems & Control Letters*, 38(4–5) :259 – 270, 1999. (Cité page 85.)
- G. Nishida, K. Takagi, B. Maschke, et Z. Luo. Multi-scale distributed port-hamiltonian representation of ionic polymer-metal composite. Dans *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, volume 17, pages 2300–2305, December 2008. (Cité page 2.)
- P. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, New-York, ii edition, 1993. (Cité page 93.)
- R. Ortega, D. Jeltsema, et J. MA. Scherpen. Power shaping : a new paradigm for stabilization of nonlinear rlc circuits. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(10) :1762–1767, October 2003. (Cité page 10.)
- R. Ortega et M.W. Spong. Adaptive motion control of rigid robots : a tutorial. Dans *Decision and Control, Proceedings of the 27th IEEE Conference on*, volume 2, pages 1575–1584, December 1989. (Cité page 19.)
- R. Ortega, M.W. Spong, F. Gümez-Estern, et G. Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47 :1218–1233, 2002a. (Cité pages 2, 10, 19, 73 et 79.)
- R. Ortega, A. van der Schaft, F. Castanos, et A. Astolfi. Control by interconnection and standard passivity-based control of port-hamiltonian systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53 (11) :2527–2542, 2008. (Cité pages 2 et 19.)
- R. Ortega, A. J. van der Schaft, Iven. Mareels, et B. Maschke. Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(2) :18–33, April 2001. (Cité pages 2 et 19.)
- R. Ortega, A.J. van der Schaft, B.M. Maschke, et G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica*, 38 :585–596, 2002b. (Cité pages 2, 19 et 73.)
- D. H. Owens, Y. Zheng, et S. A. Billings. Fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems : Part 1. existence theorems. *IMA Journal Mathematical Control and Informations*, 7 :1–11, 1996. (Cité page 62.)
- R. Pasumathy et C. Y. Kao. On stability of time delay hamiltonian systems. Dans *American Control Conference*, pages 4909–4914, 2009. (Cité pages 2, 49, 55, 56 et 60.)
- Y. Li Perry et K. Kailash. Passive bilateral teleoperation of a hydraulic actuator using an electrohydraulic passive valve. Dans *Journal fluid power*, pages 43–56, 2004. (Cité page 10.)
- M. Puta, I. Casu, et A. Voitecovici. Constant poisson structures and the weighted euler integrator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 111 :147 – 152, 1999. ISSN 0377-0427. (Cité page 26.)
- M. Rabbani, H.M.M. Maruf, T. Ahmed, M.A Kabir, et U. Mahbub. Fuzzy logic driven adaptive pid controller for pwm based buck converter. Dans *Informatics, Electronics Vision (ICIEV), 2012 International Conference on*, pages 958–962, May 2012. (Cité page 81.)

- P. Ramkrishna et A. J. van der Schaft. On interconnections of infinite-dimensional port-hamiltonian systems. Dans *Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Leuven, 2004. Katholieke Universiteit Leuven. (Cité page 94.)
- B. Razumikhin. On the stability of systems with delay. *PMM*, 20 :500–512, 1956. (Cité page 49.)
- S. Reich. On higher-order semi-explicit symplectic partitioned runge-kutta methods for constrained hamiltonian systems. *Numer. Math*, 76 :231–247, 1997. (Cité page 26.)
- V. P. Rostyslav. Discussion on : "passivity and structure preserving order reduction of linear port-hamiltonian systems using krylov subspaces". *Eur. J. Control*, 16(4) :407–409, 2010. (Cité page 2.)
- J. M. Sanz-Serna et M. P. Calvo. *Numerical Hamiltonian problems*. Chapman and Hall, 1994. (Cité page 3.)
- M. Schoberl et A. Siuka. On casimir functionals for field theories in port-hamiltonian description for control purposes. Dans *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 7759–7764, December 2011a. (Cité pages 3, 92 et 101.)
- M. Schoberl et A. Siuka. On casimir functionals for field theories in port-hamiltonian description for control purposes. Dans *50th CDC-ECC, Orlando, Florida*, 2011b. (Cité page 93.)
- M. Schoberl et A. Siuka. On the port-hamiltonian representation of systems described by partial differential equations. Dans *IFAC*, 2012. (Cité page 93.)
- M. Seslija, A. van der Schaft, et J. M. A. Scherpen. Discrete exterior geometry approach to structure-preserving discretization of distributed-parameter port-hamiltonian systems. *Journal of Geometry and Physics*, 62 :1509 – 1531, 2012. (Cité page 3.)
- A. Seuret et F. Gouaisbaut. Wirtinger-based integral inequality : Aplacation to time-delay systems. *Automatica*, 49 :2860–2866, 2013. (Cité page 56.)
- W. Shaobo et R. Gexue. Delay-independent stability criteria for a class of retarded dynamical systems with two delays. *Journal of Sound and Vibration*, 270(4–5) :625 – 638, 2004. (Cité page 49.)
- S. Stramigioli, C. Secchi, A. J. van der Schaft, et C. Fantuzzi. Sampled data systems passivity and discrete port-Hamiltonian systems. *IEEE Transaction on Robotics*, 21(4) :574–587, 2005. (Cité pages 3, 10, 26 et 36.)
- H.J. Sussmann, E.D. Sontag, et Y. Yang. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(12) :2411–2425, Dec 1994. (Cité page 71.)
- M. Takegaki et S. Arimoto. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103 :119–125, 1981. (Cité page 19.)
- V. Talasila, J. Clemente-Gallardo, et A.J. van der Schaft. Geometry and Hamiltonian mechanics on discrete spaces. *physics A : Mathematical and General*, 37 :9705–9734, 2004. (Cité pages 3 et 26.)
- V. Talasila, J. Clemente-Gallardo, et A.J. van der Schaft. Discrete port-Hamiltonian systems : mixed interconnections. Dans *44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Seville, Spain*, pages 5656–5661, 2005. (Cité pages 3 et 42.)
- V. Talasila, J. Clemente-Gallardo, et A.J. van der Schaft. Discrete port-Hamiltonian systems. *Systems & Control Letters*, 55 :478–486, 2006. (Cité pages 3, 26 et 36.)
- V. Tanasa et A. Siuka. Sur la gestion échantillonnée de l'énergie d'un système-pile à combustible-super condensateurs. Dans *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, pages 727–732, July 2012. (Cité page 2.)
- S. Tarbouriech, G. Garcia, et H. Glattfelder. *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*. Springer-Verlag, 2007. (Cité pages 69 et 71.)

- F. Tiefensee. *Méthodes asymptotiques pour la commande des systèmes non linéaires échantillonnés*. PhD thesis, Université Paris sud 11, Mai 2010. (Cité page 63.)
- F. Tiefensee, S. Monaco, et D. Normand-Cyrot. IDA-PBC under sampling for port-controlled hamiltonian systems. Dans *American Control Conference, Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA*, 2010. (Cité pages 3, 36 et 62.)
- A. van der Schaft.  *$L_2$ -gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer Series in Comp. Math. 31, 1999. (Cité pages 2, 10, 11, 15 et 19.)
- A.J. van der Schaft et B.M. Maschke. Hamiltonian formulation of distributed parameter systems with boundary energy flow. *J. of Geometry and Physics*, 42 :166–174, 2002. (Cité pages 2, 92 et 93.)
- T. Voss et J. M. A. Scherpen. Structure preserving spatial discretization of a 1-D piezoelectric timoshenko beam. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 9 :129–154, April 2011. (Cité pages 92 et 94.)
- N. M. T. Vu, R. Nouailletas, L. Lefevre, et S. Bremond. An IDA-PBC approach for the control of 1D plasma profile in tokamaks. Dans *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 4176–4181, Dec 2013. (Cité pages 2 et 73.)
- J.C. Willems. Dissipative dynamical systems part 1 : general theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45 : 321 :351, 1972. (Cité page 10.)
- M. Wu, Y. He, J. H. She, et G. P. Liu. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 40 :1435–1439, 2004. (Cité page 49.)
- V. A. Yakubovich. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Doklady A. N. SSSR*, 143 :1304 – 1307, 1962. (Cité page 11.)
- Y. Yalçın, L. Gören-Sümer, et A. Astolfi. Some results on disturbance attenuation for hamiltonian systems via direct discrete-time design. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pages n/a–n/a, 2014. ISSN 1099-1239. (Cité page 16.)
- R. Yang et Y. Wang. Stability analysis for a class of nonlinear time-delay systems via hamiltonian functional method. Dans *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2010 8th World Congress on*, 2010. (Cité page 49.)
- W. Yong, Y. Haisheng, et Y. Jinpeng. The modeling and control of buck-boost converter based on energy-shaping theory. Dans *Industrial Technology, 2008. IEEE International Conference on*, pages 1–6, April 2008. (Cité page 73.)
- Y.J. Yoo, J.H. Koo, et S.C. Won. Delay dependent stability condition for the port hamiltonian systems with time varying delay. Dans *Control Conference (ASCC), 2011 8th Asian*, pages 834–838, May 2011. (Cité pages 2, 49, 55, 56, 57 et 60.)
- W. Zhu et M. Qin. Poisson schemes for hamiltonian systems on poisson manifolds. *Computers & Mathematics with Applications*, 27(12) :7–16, 1994. (Cité page 26.)