



Comprendre le monde,
construire l'avenir®



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE 517 PARTICULES, NOYAUX, COSMOS
LABORATOIRE IRFU/SPHN

DISCIPLINE : PHYSIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le 16 juillet 2015 par

Cédric Mezrag

Étude des distributions de partons généralisées, approches phénoménologiques et équations de Dyson-Schwinger

Synthèse en français

Directeur de thèse : Franck Sabatié

Ingénieur Chercheur (Irfu/SPHN)

Composition du jury :

Rapporteurs :

Jean-François Mathiot
Barbara Pasquini

Directeur de recherche (LPC Clermont)
Associated professor (Universita di Pavia)

Examineurs :

Asmaa Abada
Hervé Moutarde
Craig Roberts

Professeur (Université Paris Sud)
Ingénieur Chercheur (Irfu/SPHN)
Senior Physicist and Group-Leader (ANL)

1 Introduction aux distributions de partons généralisées

1.1 Masse de l'univers visible

La découverte au CERN du boson de Brout-Englert-Higgs confirme la théorie actuelle de la physique à haute énergie, connue sous le nom de modèle standard de la physique des particules. Cependant, confirmation et compréhension sont deux points différents, et aujourd'hui un certain nombre de phénomènes dus à la dynamique du modèle standard reste mal compris. Parmi eux, le *confinement* des degrés de liberté fondamentaux de l'interaction forte, les quarks et les gluons, à l'intérieur des degrés de libertés observables, les hadrons, reste toujours mal décrit à partir des premiers principes de la théorie moderne, la chromodynamique quantique (QCD, de l'anglais Quantum ChromoDynamics). La génération de masse, un second phénomène lié à QCD puisque la brisure de l'interaction électro-faible ne contribue que pour quelques pourcents à la masse des hadrons, est également un sujet de recherche très actif. Autrement dit, le mécanisme engendrant la plus grande partie de la masse visible de l'univers n'est toujours pas expliqué.

1.2 Structure des hadrons

Étant confinés à l'intérieur des hadrons, quarks et gluons fluctuent pour donner une structure dynamique à ces derniers. L'étude de la structure hadronique a historiquement joué un rôle clef dans l'établissement de QCD comme théorie de l'interaction forte, via les violations d'invariance d'échelle mesurées dans les expériences de diffusion profondément inélastique, conçues pour extraire les distributions de partons (PDFs). Les PDFs $q(x)$ sont interprétées comme la densité de quark de saveur q portant une fraction d'impulsion x de l'impulsion du hadron le long du cône de lumière. De manière plus formelle, les PDFs sont définies comme la transformée de Fourier d'un opérateur non local :

$$q(x)\bar{u}(P)\gamma^+u(P) = \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+z^-} \langle P | \bar{\psi}^q \left(-\frac{z}{2} \right) \gamma^+ \left[-\frac{z}{2}; \frac{z}{2} \right] \psi^q \left(\frac{z}{2} \right) | P \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0}, \quad (1)$$

où $[\cdot; \cdot]$ désigne la ligne de Wilson entre deux points d'espace-temps. La notion de PDF a été généralisée dans les années 1990, menant à la définition de nouveaux objets appelés distributions de partons généralisées (GPDs, de l'anglais Generalised Parton Distributions), qui encodent une structure tridimensionnelle des hadrons selon une dimension d'impulsion (le long du cône de lumière) et deux dimensions d'espace, transverses au cône de lumière. De la même manière que les PDFs, les GPDs s'écrivent comme la transformée de Fourier d'éléments de matrice d'opérateurs non locaux, leur nombre dépendant des nombres quantiques du hadron considéré. De manière plus explicite, dans le cas d'un proton, on définit les GPDs de quarks H^q et E^q comme :

$$\begin{aligned} F^q &= \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+z^-} \langle p_2 | \bar{\psi}^q \left(-\frac{z}{2} \right) \gamma^+ \psi^q \left(\frac{z}{2} \right) | p_1 \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0} \\ &= \frac{1}{2P^+} \left[H^q(x, \xi, t) \bar{u}(p_2) \gamma^+ u(p_1) + E^q(x, \xi, t) \bar{u}(p_2) \frac{i\sigma^{+\mu} \Delta_\mu}{2M} u(p_1) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

où $P = \frac{p_1+p_2}{2}$ et $\Delta = p_2 - p_1$. Le paramètre ξ est quant à lui défini selon $\xi = -\frac{\Delta \cdot n}{2P \cdot n}$. Du fait de l'absence de spin, dans le cas d'un pion, le même élément de matrice peut être écrit

comme

$$H_{\pi}^q(x, \xi, t) = \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+z^-} \langle p_2 | \bar{\psi}^q \left(-\frac{z}{2} \right) \gamma^+ \psi^q \left(\frac{z}{2} \right) | p_1 \rangle \Big|_{z^+=z_{\perp}=0}. \quad (3)$$

Tout ceci est directement généralisable aux gluons via l'opérateur adéquat.

1.3 Propriétés des distributions de partons généralisées

Contrairement aux PDFs, qui sont peu contraintes théoriquement et peuvent donc être paramétrées par des formes fonctionnelles *ad-hoc*, les GPDs obéissent à un certain nombre de contraintes théoriques, rendant leur modélisation ardue. On peut notamment citer :

- les propriétés dites de support, forçant $x \in [-1; 1]$ et $\xi \in [-1; 1]$ et provenant des principes généraux de théorie des champs,
- la continuité le long des droites $x = \pm\xi$, condition nécessaire à la factorisation des processus physiques,
- la parité en ξ des GPDs H et E , découlant de l'invariance par renversement temporel,
- l'hermiticité de la théorie force les GPDs à être des fonctions réelles,
- la limite dite vers l'avant des GPDs ($t \rightarrow 0$ et $\xi \rightarrow 0$) qui redonne les PDFs correspondantes,
- le liens entre GPDs et contributions aux facteurs de forme correspondant à l'intégrale des GPDs selon x :

$$\int_{-1}^1 dx H^q(x, \xi, t) = F_1^q(t) \quad , \quad \int_{-1}^1 dx E^q(x, \xi, t) = F_2^q(t), \quad (4)$$

- la propriété appelé polynomialité, qui découle de la symétrie de Lorentz et qui impose que les moments de Mellin des GPDs définis comme :

$$\mathcal{M}_m(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx x^m H(x, \xi, t), \quad (5)$$

s'écrivent comme des polynômes en ξ de degrés au plus $m + 1$ selon la parité de m :

$$\int dx x^m H(x, \xi, t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \xi^{2j} A_{m+1, 2j}^q(t) + \text{mod}(m, 2) \xi^{m+1} C_{m+1}^q(t), \quad (6)$$

$$\int dx x^m E(x, \xi, t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \xi^{2j} B_{m+1, 2j}^q(t) - \text{mod}(m, 2) \xi^{m+1} C_{m+1}^q(t), \quad (7)$$

les fonction de t A^q , B^q et C^q étant parfois appelées facteurs de forme généralisés,

- la positivité reliant les GPDs aux PDFs dans la région cinématique $\xi \leq x \leq 1$ à travers l'inégalité suivante :

$$H^q(x, \xi) \leq \sqrt{q(x_1)q(x_2)}, \quad (8)$$

et qui provient d'une inégalité de Cauchy-Schwartz.

Du fait de toutes ces propriétés, la modélisation des GPDs est un véritable défi scientifique. A l'heure actuelle, il n'existe aucune solution reposant uniquement sur les premiers principes de QCD.

2 Doubles distributions

2.1 Définitions et liens entre DDs et GPDs

Historiquement, les doubles distributions (DDs) ont été introduites indépendamment des GPDs sous la forme d'une autre paramétrisation possible des éléments de matrice d'opérateurs non locaux. Formellement, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q} \left(-\frac{z}{2} \right) \gamma_{\mu q} \left(\frac{z}{2} \right) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle_{z^2=0} &= 2P_\mu \int_{\Omega} d\beta d\alpha e^{-i\beta(P \cdot z) + i\alpha \frac{(\Delta \cdot z)}{2}} F^q(\beta, \alpha, t) \\ &\quad - \Delta_\mu \int_{\Omega} d\beta d\alpha e^{-i\beta(P \cdot z) + i\alpha \frac{(\Delta \cdot z)}{2}} G^q(\beta, \alpha, t) \\ &\quad + \text{des termes de twist supérieur,} \end{aligned} \quad (9)$$

dans le cas d'un hadron scalaire, et :

$$\begin{aligned} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q} \left(-\frac{z}{2} \right) \gamma_{\mu q} \left(\frac{z}{2} \right) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle_{z^2=0} &= \bar{u} \left(P + \frac{\Delta}{2} \right) \\ &\quad \left[\gamma_\mu \int_{\Omega} d\beta d\alpha e^{-i\beta(P \cdot z) + i\alpha \frac{(\Delta \cdot z)}{2}} F^q(\beta, \alpha, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sigma_{\mu\nu} \Delta^\nu}{2M} \int_{\Omega} d\beta d\alpha e^{-i\beta(P \cdot z) + i\alpha \frac{(\Delta \cdot z)}{2}} K^q(\beta, \alpha, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta_\mu}{2M} \int_{\Omega} d\beta d\alpha e^{-i\beta(P \cdot z) + i\alpha \frac{(\Delta \cdot z)}{2}} G^q(\beta, \alpha, t) \right] \\ &\quad \times u \left(P - \frac{\Delta}{2} \right) + \text{des termes de twist supérieur} \end{aligned} \quad (10)$$

dans le cas d'un hadron de spin 1/2. De la même manière que les GPDs, les DDs doivent respecter un certain nombre de propriétés, notamment :

— la symétrie des DDs selon α :

$$\begin{cases} F^q(\beta, -\alpha, t) = F^q(\beta, \alpha, t) \\ K^q(\beta, -\alpha, t) = K^q(\beta, \alpha, t) \end{cases}, \quad G^q(\beta, -\alpha, t) = -G^q(\beta, \alpha, t). \quad (11)$$

découlant de l'invariance par renversement temporel,

— les propriété de support, restreignant le domaine de définition des DDs à :

$$\Omega = \{(\beta, \alpha), |\beta| + |\alpha| \leq 1\}. \quad (12)$$

La relation entre DDs et GPDs est une transformation de Radon. Autrement dit, il est possible de retrouver les GPDs à partir des DDs suivant la convolution :

$$H^q(x, \xi, t) = \int_{\Omega} d\beta d\alpha (F^q(\beta, \alpha, t) + \xi G^q(\beta, \alpha, t)) \delta(x - \beta - \alpha\xi), \quad (13)$$

$$E^q(x, \xi, t) = \int_{\Omega} d\beta d\alpha (K^q(\beta, \alpha, t) - \xi G^q(\beta, \alpha, t)) \delta(x - \beta - \alpha\xi). \quad (14)$$

La convolution avec le δ de Dirac assure aux GPDs leur propriété de polynomialité dès lors qu'elles sont calculées à partir de DDs.

2.2 Symétrie et ambiguïté

Les DDs ne sont pas définies de manière unique. Il est en effet possible de définir une transformation qui laissera l'élément de matrice de considéré invariant, et qui conduira après transformation de Radon aux même GPDs. Dans le cas scalaire, il est possible d'introduire une distribution $\sigma(\beta, \alpha)$ telle que :

$$F^q(\beta, \alpha, t) \rightarrow F^q(\beta, \alpha, t) + \frac{\partial \sigma^q}{\partial \alpha}(\beta, \alpha, t), \quad (15)$$

$$G^q(\beta, \alpha, t) \rightarrow G^q(\beta, \alpha, t) - \frac{\partial \sigma^q}{\partial \beta}(\beta, \alpha, t), \quad (16)$$

laissant invariant la GPD du moment que :

$$\sigma^q(\beta, -\alpha, t) = -\sigma^q(\beta, \alpha, t). \quad (17)$$

Ainsi, plusieurs schéma de définition des DDs ont été introduits. Le plus couramment utilisé est celui dit de Polyakov-Weiss, dans lequel la DD $G^q(\beta, \alpha, t)$ est réduite à son strict minimum :

$$F^q(\beta, \alpha, t) \rightarrow F_{\text{DD}+\text{D}}^q(\beta, \alpha, t), \quad (18)$$

$$G^q(\beta, \alpha, t) \rightarrow D(\alpha, t)\delta(\beta). \quad (19)$$

Un autre schéma sera utilisé dans la suite. Il est appelé « One Component Double Distribution » (1CDD) et permet une réécriture des DDs de la manière suivante :

$$F_{\text{1CDD}}^q(\beta, \alpha) = \beta f^q(\beta, \alpha), \quad (20)$$

$$G_{\text{1CDD}}^q(\beta, \alpha) = \alpha f^q(\beta, \alpha). \quad (21)$$

$f^q(\beta, \alpha)$ sera par abus de langage appelé par la suite la DD dans le schéma 1CDD.

2.3 Modelisation phénoménologique

2.3.1 Ansatz de Radyushkin

La plupart des modèle phénoménologique de GPDs construits sur les DDs font appel à l'Ansatz factorisé dit de Radyushkin (RDDA). Il permet de réécrire la DD $F^q(\beta, \alpha, t)$ comme :

$$F^q(\beta, \alpha, t) = \pi_N(\beta, \alpha)q(\beta, t), \quad (22)$$

où $q(\beta, t)$ est la PDF généralisée à t non nul, et $\pi_N(\beta, \alpha)$ est appelée fonction de profil et est donnée par :

$$\pi_N(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma\left(N + \frac{3}{2}\right) [(1 - |\beta|)^2 - \alpha^2]^N}{\sqrt{\pi}\Gamma(N + 1) (1 - |\beta|)^{2N+1}}, \quad (23)$$

Γ étant la fonction gamma d'Euler. Étant normalisée selon α , cette forme fonctionnelle permet de retrouver la PDF quand ξ tend vers 0. De plus le paramètre N contrôle la sensibilité du modèle à l'obliquité ξ puisque quand N devient grand, la dépendance dans l'obliquité disparaît :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_N(\beta, \alpha) = \delta(\alpha). \quad (24)$$

On s'intéressera dans la suite au modèle de Goloskokov et Kroll (modèle GK), dans lequel la RDDA est appliquée dans le schéma Polyakov-Weiss, et le terme résiduel de la DD $G^q(\beta, \alpha, t)$, appelé D -term, est négligé. Dans ce modèle la DD $F^q(\beta, \alpha, t)$ est divisée en deux contributions dites de mer et de valence :

$$F_{\text{val}}^q(\beta, \alpha) = \left(F^q(\beta, \alpha) + F^q(-\beta, \alpha) \right) \theta(\beta), \quad (25)$$

$$F_{\text{mer}}^q(\beta, \alpha) = F^q(\beta, \alpha) \theta(\beta) - F^q(-\beta, \alpha) \theta(-\beta). \quad (26)$$

Les données collectées au Jefferson Laboratory (JLab) étant principalement sensible à la partie valence, on ne modifiera par la suite que cette contribution par rapport au modèle GK original.

2.3.2 Cas scalaire

Dans un premier temps, la GPD E est négligée et on s'applique ici à réécrire le modèle GK mais en appliquant la RDDA dans le schéma 1CDD au lieu du schéma de Polyakov-Weiss, ce qui a pour avantage de générer la DD $G^q(\beta, \alpha, t)$, négligée dans le modèle original. Cependant, une telle opération conduit à :

$$f^q(\beta, \alpha) = \frac{q(\beta)}{\beta} \pi_N(\beta, \alpha), \quad (27)$$

et produit ainsi une singularité non intégrable en $\beta = 0$. La régularisation introduite provient d'une interprétation en terme d'amplitude de diffusion. La DD $f_{\text{val}}^q(\beta, \alpha, t)$ peut alors être définie telle que :

$$f_{\text{val}}^q(\beta, \alpha, t) = \frac{q_{\text{val}}(\beta, t)}{\beta} \pi_N(\beta, \alpha) - \delta(\beta) \pi_N(0, \alpha) \int_0^1 d\gamma \frac{q_{\text{val}}(\gamma, t)}{\gamma(1-\gamma)^2}. \quad (28)$$

En construisant un modèle de GPD sur cette DD, on obtient un résultats beaucoup plus sensible au paramètre N . Cette sensibilité accrue est illustrée figure 1. Un comparaison au don-

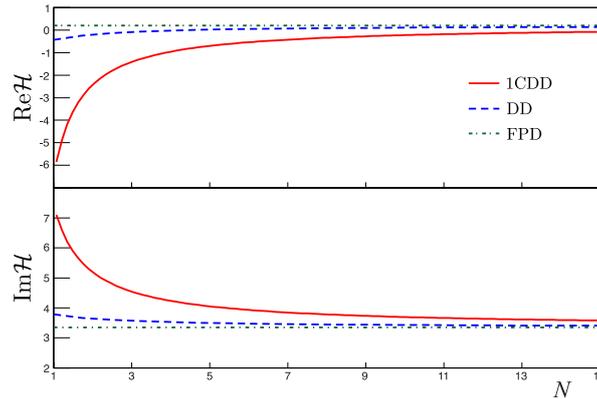


FIGURE 1 – Parties réelle et imaginaire du facteur de forme Compton (CFF) \mathcal{H} en fonction du paramètre N de la fonction profile π_N . Les paramètres cinématiques sont les suivants : $x_B = 0.36$, $Q^2 = 2.3 \text{ GeV}^2$ et $t = -0.23 \text{ GeV}^2$ pour les paramétrisations 1CDD (ligne pleine rouge), DD (ligne en tirets bleus) et FPD (ligne en pointillés verts).

nées JLab du Hall A sur les section efficaces dépendantes et indépendantes de la polarisation

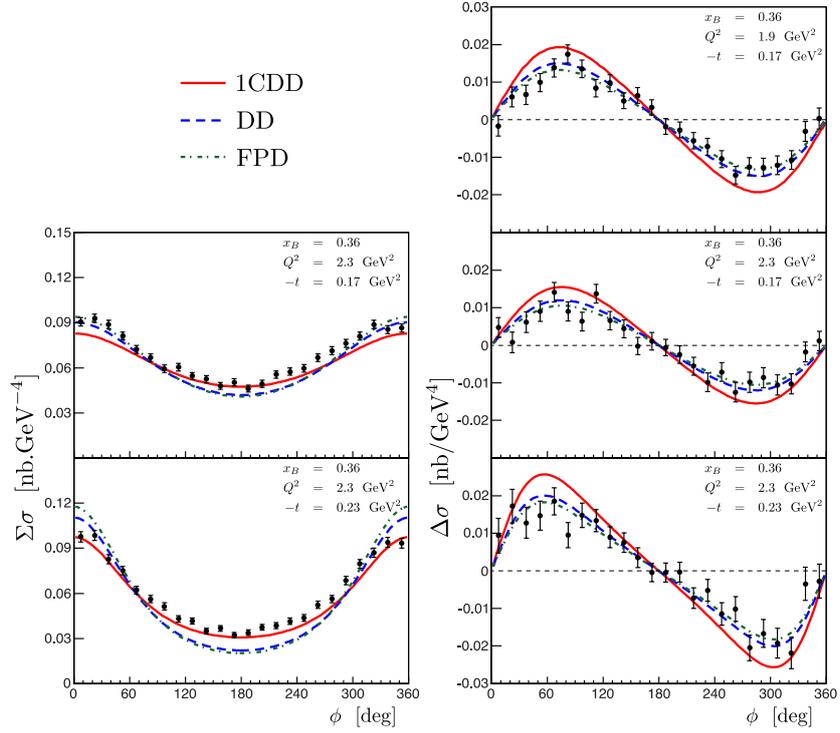


FIGURE 2 – Comparaison aux données du Hall A : résultats pour $x_B = 0.36$, $Q^2 = 2.3 \text{ GeV}^2$ (les quatre diagrammes les plus bas) et $Q^2 = 1.9 \text{ GeV}^2$ (le diagramme du haut), $t = -0.23 \text{ GeV}^2$ (les deux diagrammes du bas) et $t = -0.17 \text{ GeV}^2$ (les trois diagrammes les plus haut). La ligne pleine rouge correspond à la paramétrisation 1CDD, les tirets bleus à l’Ansatz DD classique et les pointillés verts à la limite non oblique FPD. Toutes sont construites sur le modèle GK.

du faisceau d’électron est présentée figure 2. L’accord avec les données est significativement meilleur dans le cas de la paramétrisation 1CDD pour les sections efficaces indépendantes de l’hélicité de faisceau. En revanche, dans le cas des sections efficaces dépendantes de l’hélicité du faisceau, l’accord avec les données se dégrade légèrement dans le cadre de la paramétrisation 1CDD, par rapport au modèle original GK.

2.3.3 Cas spinoriel

Il est également possible de tenir compte de la GPD E dans le formalisme 1CDD en adoptant le développement précédent du cas scalaire au cas spinoriel, *i.e.* en passant de deux DDs à trois DDs. Il est alors possible de se placer dans le schéma suivant :

$$H^q(x, \xi, t) + E^q(x, \xi, t) = \int_{\Omega} d\beta d\alpha a^q(\beta, \alpha, t) \delta(x - \beta - \alpha\xi), \quad (29)$$

$$-E^q(x, \xi, t) = x \int_{\Omega} d\beta d\alpha b^q(\beta, \alpha, t) \delta(x - \beta - \alpha\xi). \quad (30)$$

où a et b seront également appelées DD (de manière abusive pour b). La RDDA implique alors :

$$a(\beta, \alpha, t) = (q(\beta, t) + e(\beta, t))\pi_{N_{H+E}}(\beta, \alpha), \quad (31)$$

$$b(\beta, \alpha, t) = -\frac{e(\beta, t)}{\beta}\pi_{N_E}(\beta, \alpha), \quad (32)$$

et il est donc nécessaire de régulariser b . Pour ce faire, on définit une distribution $+$, régularisée, en utilisant le D -term comme régulateur :

$$F(x, \xi) = [F]_+(x, \xi) + F_D(x, \xi), \quad (33)$$

$$[F]_+(x, \xi) = x \int_{\Omega} d\beta d\alpha \left(\delta(x - \beta - \alpha\xi) - \delta(x - \alpha\xi) \right) f(\beta, \alpha), \quad (34)$$

$$F_D(x, \xi) = x \int_{-1}^{+1} d\alpha \frac{D(\alpha)}{\alpha} \delta(x - \alpha\xi). \quad (35)$$

Ceci permet *in fine* de modéliser les GPDs H et E selon :

$$H_{\text{val DD}}^q(x, \xi, t) + E_{\text{val DD}}^q(x, \xi, t) = \int_{\Omega} d\beta d\alpha \delta(x - \beta - \alpha\xi) \theta(\beta) \pi_{N_{H+E}}(\beta, \alpha) \left(q_{\text{val}}(\beta, t) + e_{\text{val}}(\beta, t) \right), \quad (36)$$

$$[E_{\text{val}}^q]_+(x, \xi, t) = x \int_{\Omega} d\beta d\alpha \frac{e_{\text{val}}^q(\beta, t)}{\beta} \pi_{N_E}(\beta, \alpha) \left(\delta(x - \beta - \alpha\xi) - \delta(x - \alpha\xi) \right). \quad (37)$$

Il est alors possible de calculer les GPDs et de les comparer aux données du Hall A comme illustré sur la figure 3. Dans ce cadre, le nouveau modèle en 1CDD est très peu différent de la version DD+D. Ceci s'explique par le fait que c'est principalement la GPD E qui est modifiée. Mais cette dernière ne contribue que peu aux amplitudes DVCS sur cible non polarisée. Des données supplémentaires sont donc nécessaires pour trancher entre ces différentes paramétrisations.

3 Equations de Dyson-Schwinger

3.1 Définitions

Les équations de Dyson-Schwinger ont été établies au moment de l'émergence de la théorie quantique des champs. En résumé, partant de la fonction de partition d'une théorie, il est possible d'obtenir un nombre infini d'équations couplant les fonctions de Green entre elles. Par exemple le propagateur de quark S_q peut être calculé en fonction du propagateur de gluon $D_{\mu\nu}$ et du vertex quark gluon Γ_q^ν grâce à l'équation dite « de Gap » :

$$S_q^{-1}(p) = Z_2(i\gamma \cdot p + m_q^0) + Z_1 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-k) \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} S(k) \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_q^\nu(k, p), \quad (38)$$

où Z_1 et Z_2 sont des constantes de renormalisation. De la même manière, des éléments de matrice, comme la fonction d'onde de Bethe-Salpeter, notée χ et définie comme :

$$\chi_{ij; q_1 q_2}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \left[\psi_i^{q_1}(x_1) \bar{\psi}_j^{q_2}(x_2) \right] | \pi, K \rangle, \quad (39)$$

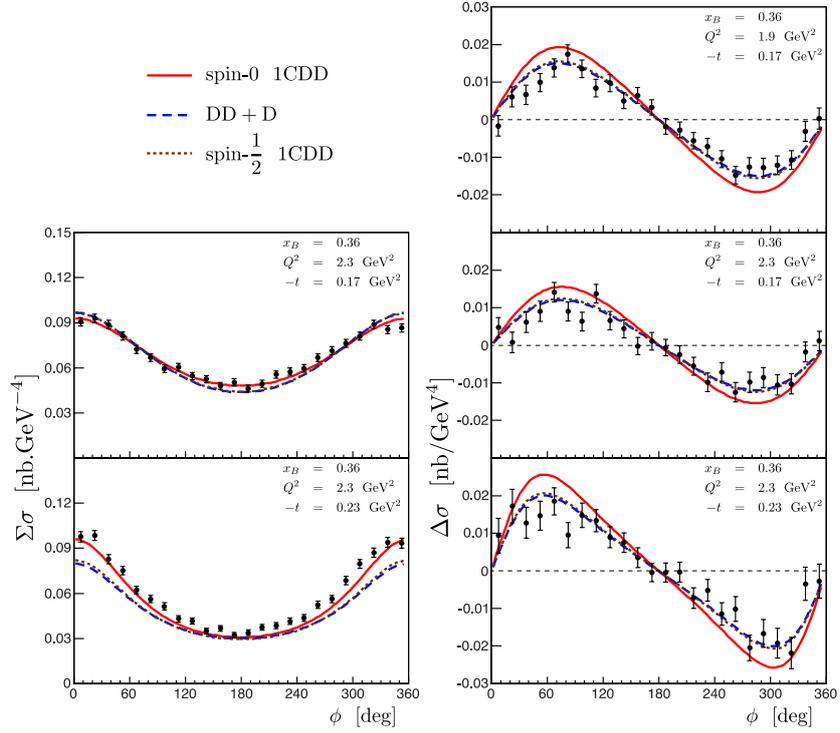


FIGURE 3 – Comparaison aux données Jlab du Hall A telles que $\frac{|t|}{Q^2} \leq 0.1$. La ligne pleine rouge correspond à la paramétrisation 1CDD en négligeant E , les tirets bleus à celle dite DD+D, et les pointillés marrons au cas complet du proton en paramétrisation 1CDD.

ou l'amplitude de Bethe-Salpeter :

$$\Gamma_\pi(k, K) = S^{-1}(-k_2) \chi(k, K) S^{-1}(k_1) \quad (40)$$

sont solutions d'équations couplées. Dans le cas présent il s'agit de l'équation dite de Bethe-Salpeter qui permet de calculer l'amplitude Γ_π via une convolution auto-cohérente avec un noyau K :

$$\Gamma_{\pi;ij}(p, P) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [S(k_{\bar{\eta}})\Gamma_\pi(k, P)S(k_\eta)]_{ab} K_{ij}^{ab}(k, p, P), \quad (41)$$

la dynamique étant bien entendu contenue dans le noyau. Moyennant un schéma de troncature cohérent, il est possible de résoudre les équations de Gap et de Bethe-Salpeter simultanément. Les solutions sont alors projetées sur des formes fonctionnelles spécifiques. Dans le cas du propagateur, il s'agit d'une somme de pôles complexe conjugués :

$$S(k) = \sum_j^N \left[\frac{z_j}{i\gamma \cdot k + m_j} + \frac{z_j^*}{i\gamma \cdot k + m_j^*} \right]. \quad (42)$$

Dans le cas de la fonction d'onde de Bethe-Salpeter, il s'agit de la représentation dite de Nakanishi :

$$\chi(k, P) \propto \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{\varphi_i^{[n]}(z, \gamma)}{\left(\gamma + \tilde{m}^2 - \frac{1}{4}M^2 - k^2 - P \cdot kz - i\epsilon\right)^{n+2}}, \quad (43)$$

où \tilde{m} est la masse constituante, M est la masse de l'état lié, and n un paramètre *ad-hoc* assurant :

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\varphi_l^{[n]}(z, \gamma)}{\gamma^n} = 0. \quad (44)$$

3.2 Premier modèle de GPDs

3.2.1 Modélisation

Avant de modéliser les GPDs via un calcul numérique complet des fonctions de Green de QCD, on se propose ici de partir sur un modèle analytique reprenant les paramétrisations précédentes. Ainsi, en définissant :

$$S(p) = [-i\gamma \cdot p + M] \Delta_M(p^2), \quad (45)$$

$$\Delta_M(s) = \frac{1}{s + M^2}, \quad (46)$$

$$\Gamma_\pi(k, P) = i\gamma_5 \frac{M}{f_\pi} M^{2\nu} \int_{-1}^{+1} dz \rho_\nu(z) [\Delta_M(k_{+z}^2)]^\nu, \quad (47)$$

$$\rho_\nu(z) = R_\nu (1 - z^2)^\nu, \quad (48)$$

$$k_{+z} = k - \left(\frac{1-z}{2} - \eta \right) P, \quad (49)$$

il est possible de calculer une GPD de pion analytiquement dans l'approximation du diagramme triangle. Afin d'éviter certaines difficultés théoriques dues au caractère non local des GPDs, on modélise l'ensemble des moments de Mellin. Ainsi, la GPD sera reconstruite dans un second temps. L'approximation du diagramme triangle permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} 2(P \cdot n)^{m+1} \mathcal{M}_m(\xi, t) &= \text{Tr}_{\text{CFD}} \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (k \cdot n)^m \tau_- i \bar{\Gamma}_\pi \left((1-\eta) \left(k + \frac{\Delta}{2} \right) + \eta(k - P), P + \frac{\Delta}{2} \right) \right. \\ &\quad S(k + \frac{\Delta}{2}) i n \cdot \Gamma(k + \frac{\Delta}{2}, k - \frac{\Delta}{2}) S(k - \frac{\Delta}{2}) \\ &\quad \left. \tau_+ i \Gamma_\pi \left(\eta(k - P) + (1-\eta) \left(k - \frac{\Delta}{2} \right), P - \frac{\Delta}{2} \right) S(k - P) \right], \quad (50) \end{aligned}$$

où $n \cdot \Gamma$ est le vertex quark photon projeté sur le cône de lumière. Tous calculs faits, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_m(\xi, t) &= \frac{M^2}{2\pi^2 f_\pi^2} \int_0^1 dx dy du dv dw \int_{-1}^{+1} dz dz' \delta(x + y + u + v + w - 1) x^{\nu-1} y^{\nu-1} \rho(z) \rho(z') \\ &\quad \frac{M^{4\nu}}{2} \left[\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu)^2} \left((f\Delta \cdot n + gP \cdot n \left(\left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 - P^2 \right) - 2P \cdot n \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \right) \frac{1}{(M')^{2\nu+1}} \right. \\ &\quad + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)^2} \frac{1}{2} \left(P \cdot n + \frac{\Delta}{2} \cdot n \right) \delta(v) \frac{1}{(M')^{2\nu}} + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)^2} \frac{1}{2} \left(P \cdot n - \frac{\Delta}{2} \cdot n \right) \delta(w) \frac{1}{(M')^{2\nu}} \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)^2} (f\Delta \cdot n + gP \cdot n) \delta(u) \frac{1}{(M')^{2\nu}} \right] \frac{(f\Delta \cdot n + gP \cdot n)^m}{2(P \cdot n)^{m+1}}, \quad (51) \end{aligned}$$

où

$$f = f(x, y, v, w, z, z') = \frac{1}{2} \left(-\frac{1+z'}{2}y + \frac{1+z}{2}x + v - w \right), \quad (52)$$

$$g = g(x, y, u, z, z') = \left(\frac{1-z'}{2} \right) y + x \frac{1-z}{2} + u, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} M'(t, P^2, x, y, u, v, w, z, z')^2 &= M^2 + \frac{t}{4} \left(-4f^2 + y \left(\frac{1+z'}{2} \right)^2 + x \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 + v + w \right) \\ &+ P^2 \left(-g^2 + \left(\frac{1-z'}{2} \right)^2 y + \left(\frac{1-z}{2} \right)^2 x + u \right). \end{aligned} \quad (54)$$

3.2.2 Résultats

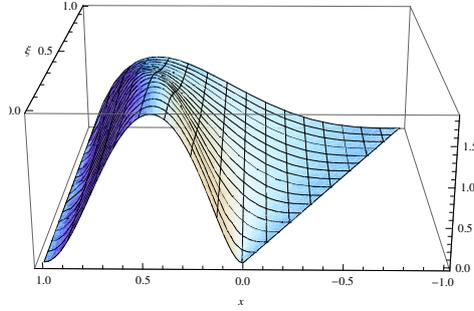


FIGURE 4 – GPD H pour t tendant vers 0.

En retravaillant l'équation (51), il est possible de faire apparaître une expression analytique des DDs. A partir de là, les GPDs peuvent être directement reconstruites grâce à l'équation (13). On trouve donc, pour $t = 0$, dans la région DGLAP :

$$\begin{aligned} H_{x \geq \xi}^u(x, \xi, 0) &= \frac{48}{5} \left\{ \frac{3(-2(x-1)^4(2x^2-5\xi^2+3)\log(1-x))}{20(\xi^2-1)^3} \right. \\ &\frac{3\left(+4\xi(15x^2(x+3)+(19x+29)\xi^4+5(x(x(x+11)+21)+3)\xi^2)\tanh^{-1}\left(\frac{(x-1)\xi}{x-\xi^2}\right)\right)}{20(\xi^2-1)^3} \\ &+ \frac{3(x^3(x(2(x-4)x+15)-30)-15(2x(x+5)+5)\xi^4)\log(x^2-\xi^2)}{20(\xi^2-1)^3} \\ &+ \frac{3(-5x(x(x(x+2)+36)+18)\xi^2-15\xi^6)\log(x^2-\xi^2)}{20(\xi^2-1)^3} \\ &+ \frac{3(2(x-1)((23x+58)\xi^4+(x(x(x+67)+112)+6)\xi^2+x(x((5-2x)x+15)+3))}{20(\xi^2-1)^3} \\ &+ \frac{3((15(2x(x+5)+5)\xi^4+10x(3x(x+5)+11)\xi^2)\log(1-\xi^2))}{20(\xi^2-1)^3} \\ &\left. + \frac{3(2x(5x(x+2)-6)+15\xi^6-5\xi^2+3)\log(1-\xi^2)}{20(\xi^2-1)^3} \right\}, \end{aligned} \quad (55)$$

et dans la région ERBL :

$$\begin{aligned}
H_{|x|\leq\xi}^u(x, \xi, 0) = & \frac{48}{5} \left\{ \frac{6\xi(x-1)^4 (-(2x^2 - 5\xi^2 + 3)) \log(1-x)}{40\xi(\xi^2-1)^3} \right. \\
& + \frac{6\xi(-4\xi(15x^2(x+3) + (19x+29)\xi^4 + 5(x(x(x+11) + 21) + 3)\xi^2)) \log(2\xi)}{40\xi(\xi^2-1)^3} \\
& + \frac{6\xi(\xi+1)^3 ((38x+13)\xi^2 + 6x(5x+6)\xi + 2x(5x(x+2) - 6) + 15\xi^3 - 9\xi + 3) \log(\xi+1)}{40\xi(\xi^2-1)^3} \\
& + \frac{6\xi(x-\xi)^3 ((7x-58)\xi^2 + 6(x-4)x\xi + x(2(x-4)x+15) + 15\xi^3 + 75\xi - 30) \log(\xi-x)}{40\xi(\xi^2-1)^3} \\
& + \frac{3(\xi-1)(x+\xi)(4x^4\xi - 2x^3\xi(\xi+7) + x^2(\xi((119-25\xi)\xi-5) + 15))}{40\xi(\xi^2-1)^3} \\
& \left. + \frac{3(\xi-1)(x+\xi)(x\xi(\xi(\xi(71\xi+5) + 219) + 9) + 2\xi(\xi(2\xi(34\xi+5) + 9) + 3))}{40\xi(\xi^2-1)^3} \right\}. \quad (56)
\end{aligned}$$

Il est alors possible d'en déduire une expression pour la PDF, calculée à partir du diagramme triangle $q_\pi^{\text{Tr}}(x)$:

$$q_\pi^{\text{Tr}}(x) = \frac{72}{25} \left((30-15x+8x^2-2x^3)x^3 \log x + (3+2x^2)(1-x)^4 \log(1-x) + (3+15x+5x^2-2x^3)x(1-x) \right). \quad (57)$$

Peu de données sont disponibles pour le pion. Il existe cependant des données concernant le facteur de forme, auxquelles nous pouvons comparer notre modèle. L'accord est frappant comme le montre la figure 5. Il est également possible de comparer les moments de Mellin de notre PDF à ceux d'une paramétrisation phénoménologique évoluée à basse échelle de factorisation. Les résultats, présentés sur la figure 6, sont encourageants.

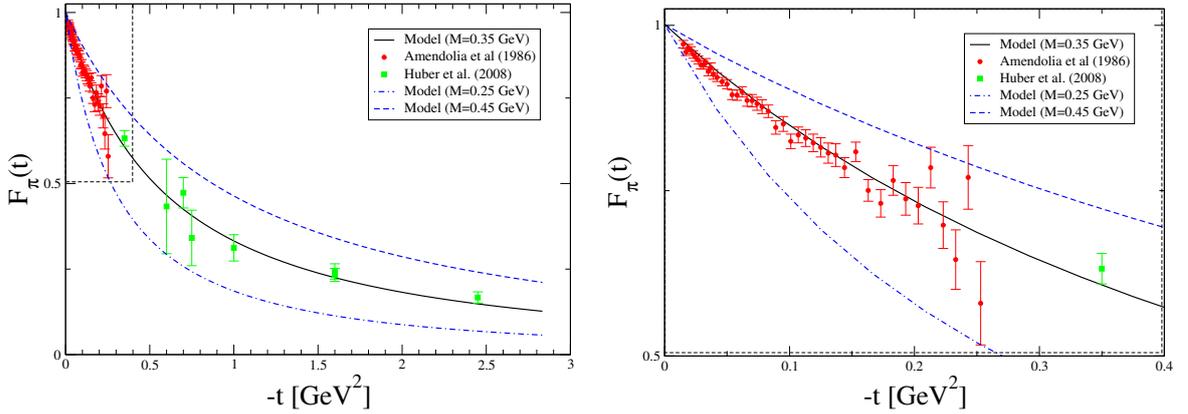


FIGURE 5 – Le facteur de forme du pion F_π calculé pour $M = 0.35$ GeV (ligne pleine noire), 0.25 GeV (tirets bleus) et 0.45 GeV (pointillés bleus), pour $\nu = 1$ dans les trois cas. Le cadre de droite présente un zoom sur la région à petit t , insistant ainsi sur les contraintes générées par le grand nombre de points de données à faible transfert d'impulsion.

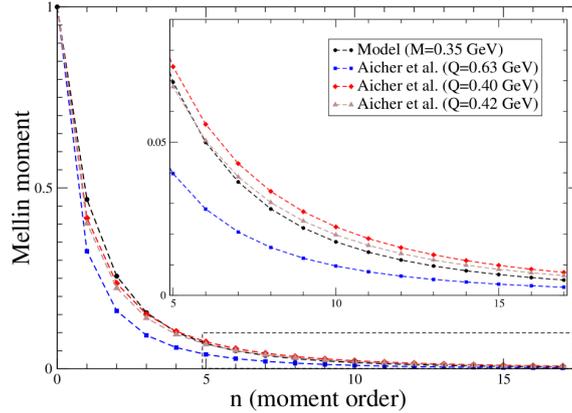


FIGURE 6 – Moment de Mellin calculés dans l’approche présentée ici et comparés à ceux obtenue par la paramétrisation phénoménologique de Aicher *et al.* évoluée à $Q = 0.40$ GeV et 0.42 GeV.

3.3 Théorème de pion mou

Si le modèle algébrique développé dans l’approche du diagramme triangle respecte la plupart des propriétés des GPDs de pion, il y en a une qui n’est pas respectée, le théorème de pion mou. Il est néanmoins possible de montrer que l’approximation triangulaire suffit pour vérifier cette propriété, si le schéma de troncature respecte l’identité Axial-Vecteur de Ward-Takahashi (AVWT) donnée par :

$$P^\mu \Gamma_{5\mu}^i(p, P) = \frac{\tau^i}{2} \left(S^{-1}(k_\eta) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(k_{\bar{\eta}}) \right) - i [m_{q_1}(\mu_R) + m_{q_2}(\mu_R)] \Gamma_5^i(p, P). \quad (58)$$

À l’aide des formules de réduction :

$$\lim_{P \rightarrow 0} P^\mu \Gamma_\mu^{5j}(k, P) = f_\pi \Gamma_\pi^j(k, 0), \quad (59)$$

$$\lim_{P^2 \rightarrow 0} iP^2 \Gamma_5^j(k, P) = \rho_\pi \Gamma_\pi^j(k, P) \Big|_{P^2=0}. \quad (60)$$

l’identité AVWT permet de relier l’amplitude de Bethe-Salpeter du pion au propagateur du quark :

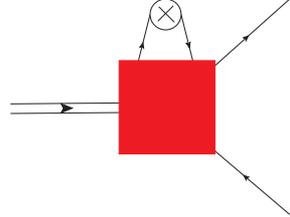
$$f_\pi \Gamma_\pi^j(k, 0) = i\gamma_5 \frac{\tau^j}{2} S^{-1}(k) + iS^{-1}(k) \gamma_5 \frac{\tau^j}{2}. \quad (61)$$

En insérant (60) et (61) dans le diagramme triangle, il est possible de montrer que le théorème de pion mou est vérifié en analysant finement les structures gluoniques mises en jeu.

3.4 Au-delà de l’approximation triangulaire

Si le théorème de pion mou peut être décrit dans l’approximation du diagramme triangle, cette dernière présente néanmoins des limites. De fait, l’approximation « problème à deux corps » force la PDF à être symétrique dans l’échange $x \leftrightarrow 1 - x$. La contribution produite par le calcul du diagramme triangle est malheureusement un peu asymétrique. Ceci montre que certaines contributions, importantes pour la préservation des symétries, ont été omises dans

cette approximation. En considérant le cas $\xi \rightarrow 0$ et $t \rightarrow 0$, c'est-à-dire celui correspondant à la PDF, il est possible de faire apparaître une contribution additionnelle liée à la structure en échelle de gluons. Cette contribution se traduit par un vertex supplémentaire à prendre en compte :



$$= -\frac{1}{2}(k \cdot n)^m n^\mu \frac{\partial \Gamma_\pi^q}{\partial k^\mu}(k, P). \quad (62)$$

Il est alors possible de calculer la contribution additionnelle $q^{\text{ad}}(x)$:

$$q_\pi^{\text{ad}}(x) = \frac{72}{25} \left(- (2x^3 + 4x + 9) (x-1)^3 \log(1-x) + x^3 (2x((x-3)x + 5) - 15) \log(x) - x(x-1)(2x-1)((x-1)x-9) \right). \quad (63)$$

On peut alors en déduire la PDF totale :

$$\begin{aligned} q_\pi^{\text{tot}}(x) &= q_\pi^{\text{Tr}}(x) + q_\pi^{\text{ad}}(x) \\ &= \frac{72}{25} \left(x^3 (x(2x-5) + 15) \log(x) - (2x^2 + x + 12) (x-1)^3 \log(1-x) - 2x(x-1)((x-1)x + 6) \right), \end{aligned} \quad (64)$$

qui est symétrique comme on peut le constater sur la figure 7.

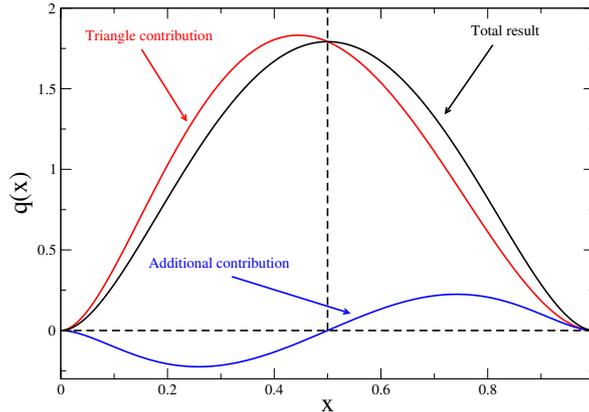


FIGURE 7 – Les différentes contributions à la PDF et leur somme.

L'analyse à $t = 0$ et $\xi = 0$ ne peut malheureusement pas être facilement étendue en dehors ce domaine cinématique. Néanmoins, les résultats permettent d'obtenir un Ansatz pour le domaine cinématique x , $\xi = 0$, t . On peut alors calculer la probabilité de présence d'un quark à l'intérieur du pion dans le plan transverse. Ceci est illustré figure 8.

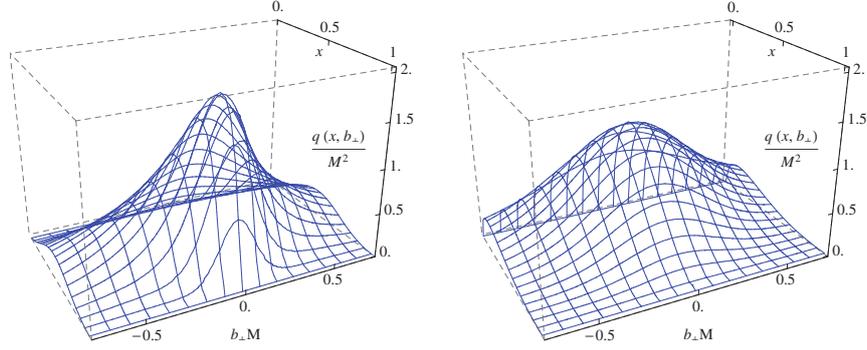


FIGURE 8 – Densité de probabilité de présence des quarks dans le plan transverse en fonction de leur impulsion longitudinale. A gauche, échelle de factorisation d’origine, $\mu_F = 0.51\text{GeV}$. A droite, résultat après évolution à $\mu_F = 2\text{GeV}$.

4 Perspectives sur le cône de lumière

4.1 Recouvrement de fonction d’onde

Pour aller au delà de l’approximation du diagramme triangle, une solution est de se pencher sur le cas de la GPD calculée sur le cône de lumière. La GPD peut être calculée dans la région DGLAP comme une somme de recouvrements de fonctions d’onde Ψ sur le cône de lumière :

$$H_\pi^q(x, \xi, t)|_{\xi \leq x \leq 1} = \sum_N \sqrt{1-\xi}^{2-N} \sqrt{1+\xi}^{2-N} \sum_{\beta=\beta'} \sum_j \delta_{s_j q} \int [d\bar{x}]_N [d^2\bar{\mathbf{k}}_\perp]_N \delta(x - \bar{x}_j) \Psi_{N,\beta'}^*(\hat{\Omega}') \Psi_{N,\beta}(\tilde{\Omega}). \quad (65)$$

Étant donnée la relation liant la fonction d’onde sur le cône de lumière et la fonction d’onde de Bethe-Salpeter :

$$\Psi(k^+, \mathbf{k}_\perp, P) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{dk^-}{2\pi} \text{Tr} \left[\gamma^+ \gamma_5 \chi_\pi(k, P) \right], \quad (66)$$

il est possible dans le cadre du modèle algébrique précédemment défini de déterminer la GPD dans la région DGLAP. Le calcul est plus simple que dans le cas du diagramme triangle et mène à :

$$H_\pi^q(x, \xi, 0)|_{\text{DGLAP}} = \kappa'_\nu x_1^\nu (1-x_1)^\nu x_2^\nu (1-x_2)^\nu \quad (67)$$

$$= \kappa'_\nu \frac{(1-x)^{2\nu} (x^2 - \xi^2)^\nu}{(1-\xi^2)^{2\nu}}, \quad (68)$$

où κ'_ν est une constante de normalisation. Ce modèle est naturellement symétrique en $x \leftrightarrow 1-x$ lorsque l’on se place dans le domaine cinématique correspondant à la PDF. Mais à l’inverse, disposant seulement la fonction d’onde à 2 partons, il n’est pas possible de déduire une région ERBL.

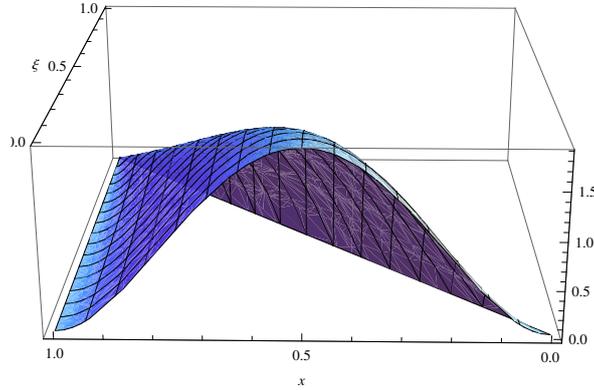


FIGURE 9 – GPD dans la région DGLAP obtenue par calcul sur le cône de lumière.

4.2 Transformation de Radon inverse

Une possibilité pour modéliser la région ERBL sans faire appel à des états de Fock supérieurs est d'utiliser la transformation de Radon inverse pour retrouver une DD. Le problème de la transformation inverse de Radon est un problème mathématique connu et résolu dans plusieurs cas où une partie de l'information est manquante. Par exemple, dans le cas où l'information angulaire en ϕ tel que $\xi = \tan \phi$ est incomplète, il est possible d'utiliser la transformée de Radon inverse à angle limité :

$$f_{\phi_1 \phi_2}(\beta, \alpha) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \text{PV} \left[\frac{1}{\tau} \right] \left(\frac{\partial}{\partial s'} \mathcal{R}f(s' + \beta \cos(\phi) + \alpha \sin(\phi) - \tau, \phi) \right) \Big|_{s'=0}. \quad (69)$$

Cependant un certain nombre d'études doit être réalisé pour analyser les effets systématiques sur les GPDs reconstruites par cette méthode. Surtout sachant que la séparation des région DGLAP et ERBL corréle les domaines d'intégration entre ϕ et τ .

5 Conclusion

La physique hadronique est un des champs de recherche les plus excitants à l'heure actuelle. Le démarrage de l'accélérateur JLab monté en énergie va certainement profondément modifier notre compréhension de la structure des hadrons. Le manque de modélisation dynamique, au sens calculé via la dynamique de QCD, risque cruellement de se faire sentir. Le travail réalisé dans cette thèse est un premier pas pour combler ce vide en reliant dynamique et structure. Il ouvre également sur un grand nombre de possibilités au niveau des GPDs (modélisation à trois corps et plus, calcul pour le proton) mais pas seulement. En effet, des objets comme les distributions d'amplitudes généralisées et les distributions d'impulsion transverse peuvent très bien être calculées dans cette approche. Dans tous les cas, du fait du redémarrage prochain de JLab, le besoin d'interprétation dynamique des données hadroniques n'a jamais été aussi fort.