



# Sur la dynamique coorbitale : du mouvement des troyens de Jupiter à la rotation des planètes coorbitales

Philippe Robutel

## ► To cite this version:

Philippe Robutel. Sur la dynamique coorbitale : du mouvement des troyens de Jupiter à la rotation des planètes coorbitales. Astrophysique [astro-ph]. UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 2015. <tel-01190795>

**HAL Id: tel-01190795**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01190795>**

Submitted on 1 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE*

MÉMOIRE D'HABILITATION  
À DIRIGER DES RECHERCHES

Présenté par Philippe ROBUTEL

**Sur la dynamique coorbitale :  
du mouvement des troyens de Jupiter  
à la rotation des planètes coorbitales**

*Soutenu le 16 juin 2015*

**Jury :**

Cristian BEAUGÉ (*Rapporteur*)

Luc BLANCHET (*Président*)

Rudolf DVORAK (*Rapporteur*)

Anne LEMAÎTRE (*Examinatrice*)

Alessandro MORBIDELLI (*Examineur*)

Fathi NAMOUNI (*Rapporteur*)



# Résumé

Le premier chapitre présentera les principales techniques sur lesquelles sont basés les travaux exposés dans ce mémoire : l'étude de l'application fréquence, la mesure de la diffusion par analyse en fréquence et l'application de ces dernières à l'étude de la dynamique globale d'un système planétaire.

Dans le deuxième chapitre, je proposerai une introduction à la résonance coorbitale. Après avoir exposé quelques aspects historiques de l'existence d'orbites remarquables dans le problème des trois corps (non restreint), je rappellerai certains points concernant la stabilité de ces solutions, puis présenterai des résultats originaux ayant trait au problème moyen ainsi qu'aux bifurcations des équilibres de Lagrange et d'Euler.

Après avoir abordé la résonance coorbitale dans le cadre du problème des 3-corps, j'exposerai, dans le troisième chapitre, les résultats obtenus sur la dynamique des troyens de Jupiter, ainsi que certaines de leurs extensions. Les trajectoires des troyens seront étudiés à l'aide du problème restreint de  $(n + 2)$ -corps,  $n$  correspondant au nombre de planètes du système auxquelles on ajoutera le Soleil et une particule test représentant le troyen. L'essentiel du travail consistera à comprendre les structures dynamiques des essaims dans l'espace des fréquences. Les résultats découleront naturellement de cette étude. Je donnerai d'abord une classification des principales résonances conditionnant la dynamique des essaims. Je montrerai ensuite comment cette structure résonante influence la dynamique à long terme des essaims de Jupiter et en particulier leur érosion engendrée par des phénomènes de diffusion. Je terminerai ce chapitre en abordant la question de la modification de la structure résonante, et par conséquent de la stabilité de l'essaim, sous l'effet de la modification de la géométrie du système planétaire.

Le quatrième chapitre regroupera mes travaux effectués sur la rotation des corps en résonance coorbitale. Je débiterai ce chapitre en présentant l'approche générale de la rotation en résonance coorbitale qui nous a conduit à distinguer trois grandes classes dynamiques de systèmes en fonction de leurs masses et des valeurs des moments d'inertie des corps qui les composent. Pour deux de ces classes apparaît un nouveau type de résonance spin-orbit qui peut conduire à des rotations chaotiques. Pour l'autre classe, à laquelle appartiennent les satellites de Saturne Janus, Epiméthée, Hélène, Polydeuces, Téthys et Calypso, on retrouvera les résonances spin-orbit habituelles perturbées par le mouvement coorbital. C'est à la rotation de ces six satellites que seront consacrés les derniers paragraphes du quatrième chapitre.

Je terminerai cet exposé en proposant quelques extensions et applications possibles des travaux et méthodes présentés dans ce mémoire.

# Abstract

The first chapter describes the main methods on which this work is based : the study of frequency maps, the measurement of diffusion in the frequency space, and their applications to the global dynamics of planetary systems.

In the second chapter, I propose an introduction to the coorbital resonance. After a brief historic outline of the existence of remarkable orbits in the three-body problem, I recall a few points concerning the stability of these solutions. Then, I present original results related to the averaged problem and to the bifurcations of the Euler and Lagrange equilibria.

After having tackled the coorbital resonance in the three-body problem framework, I present in the third chapter my results concerning the dynamics of the jovian Trojans and some of its extension. The trajectory of the Trojans is studied using the  $(n+2)$ -body problem,  $n$  being the number of planets composing the system to which the Sun and a test-particle representing the Trojan are added. Several results arise from the study of the dynamics in the frequency space. First, I give a classification of the main resonances which control the dynamics of the swarms. Then, I show how the resonant structure influences the long-term dynamics and especially the slow erosion of Jupiter's swarms caused by diffusion. I end this chapter by addressing the stability of swarms with respect to a modification of the resonant structure which is governed by the geometry of the planet system.

The fourth chapter includes my results on the rotation of bodies in coorbital resonance. I begin with a presentation of the general approach that led us to distinguish three different dynamical classes of system according to the masses and the moments of inertia of their components. In two of these classes, a new kind of spin-orbit resonance can lead to chaotic rotations. In the third one, which includes Saturn's satellites Janus, Epimetheus, Helene, Polydeuces, Tethys, and Calypso, we find the usual spin-orbit resonances perturbed by the coorbital motion of the bodies. The last paragraph of the chapter is devoted to the rotation of these six satellites.

The end of the manuscript proposes some possible extensions and applications of the work and the methods presented in this thesis.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>De la dynamique à court terme aux résonances séculaires</b>	<b>3</b>
1.1	L'application fréquence : définition et réalisation numérique . . . . .	3
1.2	Application fréquence et problème restreint des $N + 2$ -corps . . . . .	5
1.3	Instabilités à court terme et résonances en moyen mouvement . . . . .	5
1.4	Résonances séculaires dans la ceinture d'astéroïdes . . . . .	9
<b>2</b>	<b>La résonance coorbitale</b>	<b>12</b>
2.1	Quelques configurations remarquables du problème des 3-corps . . . . .	12
2.2	Autour des solutions d'Euler et de Lagrange du problème des 3-corps . . . . .	13
2.2.1	Formulation du problème des 3 corps . . . . .	13
2.2.2	Equilibres relatifs . . . . .	13
2.2.3	Stabilité linéaire des équilibres . . . . .	15
2.3	Moyennisation adaptée à la résonance 1:1 . . . . .	16
2.3.1	Hamiltonien moyen . . . . .	16
2.3.2	Problème moyen quasi-circulaire associé à $H_0$ . . . . .	18
2.3.3	Le voisinage des orbites circulaires planes . . . . .	20
2.3.4	Prolongement de ces orbites remarquables et conjecture sur leur comportement asymptotique . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Dynamique des essaims de troyens : application à Jupiter</b>	<b>27</b>
3.1	Résonances secondaires dans un essaim de troyens . . . . .	27
3.2	La structure résonante des troyens de Jupiter . . . . .	29
3.3	Dynamique à long terme et diffusion dans l'espace des fréquences . . . . .	33
3.4	Relations entre les troyens observés et la structure résonante . . . . .	34
3.5	Evolution de la structure résonante lors d'une migration . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Sur la rotation des corps en résonance coorbitale</b>	<b>39</b>
4.1	Modélisation de la rotation . . . . .	39
4.2	Rotation des satellites coorbitaux de Saturne . . . . .	43
4.2.1	Quelques données sur les satellites coorbitaux de Saturne . . . . .	43
4.2.2	Sur la rotation d'équilibre de Janus et d'Epiméthée . . . . .	44
4.2.3	Rotation au voisinage de l'équilibre . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Quelques extensions possibles</b>	<b>50</b>
5.1	Quelques travaux théoriques . . . . .	50
5.1.1	Conjecture sur la terminaison des familles anti-Lagrange et Euler . . . . .	50
5.1.2	Les bifurcations verticales . . . . .	50
5.1.3	Existence d'orbites quasi-périodiques du type fer à cheval . . . . .	50
5.2	Exoplanètes coorbitales? . . . . .	51
5.2.1	Stabilité des systèmes coorbitaux . . . . .	52
5.2.2	Détection des systèmes coorbitaux . . . . .	52
5.2.3	Rotation des coorbitaux . . . . .	53
5.2.4	Effets de marée et résonance coorbitale . . . . .	53

# Introduction

Je présenterai dans ce mémoire les articles suivants :

- [1] Robutel, P. and Pousse, A. (2013). *On the co-orbital motion of two planets in quasi-circular orbits*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **117** :17-40.
- [2] Robutel, P. and Gabern, F. (2006). *The resonant structure of Jupiter's Trojan asteroids I : Long-term stability and diffusion*. MNRAS, **372** :1463–1482.
- [3] Robutel, P. and Bodossian, J. (2009). *The resonant structure of Jupiter's Trojan asteroids - II. What happens for different configurations of the planetary system*. MNRAS, **399** :69–87.
- [4] Correia, A. C. M., Robutel, P. (2013). *Spin-Orbit Coupling and Chaotic Rotation for Co-orbital Bodies in Quasi-circular Orbits*, Apj, **779** :20.
- [5] Robutel, P., Rambaux, N., and Castillo-Rogez, J. (2011). *Analytical description of physical librations of saturnian coorbital satellites Janus and Epimetheus*. Icarus, **211** :758–769.
- [6] Robutel, P., Rambaux, El Moutamid, M. (2012). *Influence of the coorbital resonance on the rotation of the Trojan satellites of Saturn*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **113** :1-22.

Tous sont reliés à la résonance coorbitale. L'article [1] aborde de manière analytique la dynamique du problème planétaire des 3-corps en résonance orbitale 1:1. Une approche numérique de la dynamique à long-terme des essaims de troyens est exposée dans [2] et [3]. La rotation de corps en résonance coorbitale est étudiée dans les trois derniers articles.

Dans le premier chapitre, je présenterai les principales techniques sur lesquelles sont basés les travaux exposés dans ce mémoire, à savoir : l'étude de l'application fréquence, la mesure de la diffusion par analyse en fréquence et l'application de ces dernières à l'étude de la dynamique globale d'un système planétaire. Je présenterai d'abord le cas où l'application fréquence est une fonction d'une variable réelle ainsi qu'une application à l'analyse des instabilités à court terme induites par les résonances en moyen mouvement (Robutel et Laskar, 2001). Puis l'application fréquence prendra ses valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  avec une illustration à l'étude de la dynamique séculaire de la ceinture principale d'astéroïdes. C'est au chapitre 3 que l'analyse de l'application fréquence révélera toute sa force avec sa mise en pratique à l'étude de la dynamique des essaims de troyens de Jupiter.

Avant d'entrer dans des considérations techniques sur la dynamique des troyens, j'ai souhaité présenter une introduction à la résonance coorbitale. Le chapitre 2 exposera d'abord quelques aspects historiques de l'existence d'orbites particulières dans le problème de trois corps (non restreint), puis certains points concernant la stabilité et les fréquences de ces solutions y seront rappelés, ils nous seront utiles tout au long de ce mémoire. J'y présenterai enfin des résultats originaux, tirés de [1], qui auront trait au problème moyen ainsi qu'aux bifurcations des équilibres de Lagrange et d'autres orbites remarquables du problème des 3-corps.

Après avoir abordé la résonance coorbitale dans le cadre du problème des 3-corps, j'exposerai au chapitre 3 les résultats obtenus dans [2] sur la dynamique des troyens de Jupiter, ainsi que leurs extensions publiées dans [3]. Les trajectoires des troyens seront étudiés à l'aide du problème restreint de  $n+2$ -corps,  $n$  correspondant au nombre de planètes du système auxquelles on ajoutera le Soleil et une particule test représentant le troyen. L'essentiel du travail consistera à comprendre

les structures dynamiques des essaims dans l'espace des fréquences en ayant recours aux outils et méthodes présentés au chapitre 1. Les résultats découleront naturellement de cette étude. Je donnerai d'abord une classification des principales résonances conditionnant la dynamique de essaims. Cette classification, qui a été reprise par plusieurs auteurs (voir en particulier Hou *et al.*, 2014a) a d'abord été esquissée dans Robutel *et al.* (2005), puis systématisée dans le cadre des essaims de troyens de Jupiter dans [2] et enfin énoncée dans son cas le plus général dans [3]. Je montrerai ensuite comment cette structure résonante influence la dynamique à long terme des essaims de Jupiter et en particulier leur érosion engendrée par des phénomènes de diffusion. Je terminerai ce chapitre en abordant la question de la modification de la structure résonante et par conséquent de la stabilité de l'essaim sous l'effet de la modification de la géométrie du système planétaire.

Je présenterai au chapitre 4 les travaux effectués sur la rotation des corps en résonance co-orbitale publiés dans [4], [5] et [6]. Mon intérêt pour cette question a été suscité par l'article de Tiscareno *et al.* (2009) dans lequel les auteurs exposaient leurs résultats portant sur les mesures des amplitudes de la libration en longitude (petites oscillation par rapport à la rotation synchrone) de Janus et d'Epiméthée obtenues à partir d'images de la sonde Cassini. Dans le but de comprendre et d'interpréter ces travaux, nous avons, avec Nicolas Rambaux, étudié l'influence du mouvement orbital bien particulier de ces satellites sur leur rotation en supposant, comme Tiscareno, que cette dernière était synchrone. Ce n'est que plus tard, lors d'une étude bien plus générale décrite dans [4], que nous avons compris avec Alexandre Correia, que la synchronisation n'était pas nécessairement la seule issue pour la rotation des corps en résonance coorbitale gravitant à proximité du corps central du système où ils subissent des dissipations de marées (étoile dans le cas de la rotation de planètes, planètes pour la rotation de satellites).

Je débiterai ce chapitre en présentant cette approche générale de la rotation en résonance coorbitale retracée dans [4] qui nous a conduit à distinguer trois grandes classes de systèmes en fonction de leurs masses et des valeurs des moments d'inertie de leurs composantes. Pour deux de ces classes apparaît un nouveau type de résonance spin-orbit pouvant conduire à des rotations chaotiques. Pour l'autre classe, à laquelle appartiennent les satellites de Saturne Janus, Epiméthée, Hélène, Polydeuces, Téthys et Calypso, on retrouvera les résonances spin-orbit habituelles perturbées par le mouvement coorbital. C'est à la rotation de ces six satellites que seront consacrés les derniers paragraphes du chapitre 4.

Je terminerai cet exposé en proposant, au chapitre 5, quelques extensions et applications possibles des travaux et méthodes présentés dans ce mémoire.



# Chapitre 1

## De la dynamique à court terme aux résonances séculaires

### 1.1 L'application fréquence : définition et réalisation numérique

Considérons un système hamiltonien presque intégrable possédant  $n$  degrés de liberté et notons  $H_\varepsilon(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta)$  le hamiltonien correspondant,  $H$  étant une fonction analytique réelle définie sur  $(I, \theta) \in \mathbb{B}^n \times \mathbb{T}^n$ ,  $\mathbb{B}^n$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\mathbb{T}^n$  le tore de dimension  $n$ . Pour le hamiltonien non perturbé  $H_0$ , la construction de l'application fréquence est immédiate. En effet, le système différentiel associé s'écrivant

$$\dot{I}_j = 0 \quad , \quad \dot{\theta}_j = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}(I) = \omega_j(I) \quad , \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.1)$$

ses solutions s'écrivent  $z_j(t) = z_{j,0} e^{i\omega_j t}$  avec  $z_j = I_j e^{i\theta_j}$ . Il s'agit donc de trajectoires quasi-périodiques s'enroulant sur les tores d'équation  $I_j = |z_j(0)|$  dont le vecteur fréquence est donné par  $\omega(I) = (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I))$ . Si le hamiltonien  $H_0$  est non dégénéré, au sens où :

$$\det \left( \frac{\partial \omega}{\partial I}(I) \right) = \det \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I) \right) \neq 0 \quad (1.2)$$

l'application fréquence définie par

$$F : \begin{cases} \mathbb{B}^n & \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ I & \longrightarrow \omega \end{cases} \quad (1.3)$$

réalise, au moins localement, un difféomorphisme de  $\mathbb{B}^n$  sur son image  $\Omega = F(\mathbb{B}^n)$  dans l'espace des fréquences. Les tores sont alors aussi bien paramétrés par les actions  $I$  que par les fréquences  $\omega$ .

Pour un système perturbé mais non dégénéré<sup>1</sup>, la théorie KAM affirme que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe un ensemble de Cantor noté  $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$  constitué de vecteurs fréquence vérifiant une condition diophantienne de la forme

$$|k \cdot \omega| > \kappa_\varepsilon / |k|^\tau \quad \text{avec } \tau < n - 1 \quad (1.4)$$

pour lequel les tores du problème non perturbé persistent sous l'effet de la perturbation, en étant éventuellement déformés. Comme dans le cas non perturbé, il y a toujours bijection entre les fréquences de  $\Omega_\varepsilon$  et les actions paramétrant les tores subsistant après perturbation. Contrairement au cas intégrable, l'application fréquence n'est plus définie sur  $\mathbb{B}^n$ , mais sur un sous-ensemble discret de type Cantor de ce dernier. Il est malgré tout possible de prolonger cette bijection sur un

---

1. On trouvera dans Hanssmann (2011) des conditions de non-dégénérescence plus faibles que celles données par (1.2) pour lesquelles on peut encore appliquer les théories KAM.

ensemble « continu » contenant l'ensemble en question. Ainsi, Pöschel (1982) (voir aussi Laskar, 1999) montre l'existence d'un difféomorphisme

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{T}^n \times \Omega & \longrightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{B}^n \\ (\varphi, \omega) & \longrightarrow (\theta, I) \end{cases} \quad (1.5)$$

analytique en la variable  $\varphi$  et  $C^\infty$  en  $\omega$ , qui transforme, sur  $\mathbb{T}^n \times \Omega_\varepsilon$ , les équations canoniques associées à  $H_\varepsilon$  en

$$\dot{\omega}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_j = \omega_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.6)$$

Si, pour terminer, on fixe la valeur des angles  $\theta \in \mathbb{T}^n$  à des quantités arbitraires  $\theta_0$ , on peut définir une application fréquence de la manière suivante :

$$F_{\theta_0} : \begin{cases} B^n & \longrightarrow \Omega \\ I & \longrightarrow \Pi_\Omega \circ \Psi^{-1}(\theta_0, I) \end{cases} \quad (1.7)$$

$\Pi_\Omega$  étant le projecteur de  $\mathbb{T}^n \times \Omega$  sur  $\Omega$ . Ainsi définie, l'application fréquence dépend des valeurs choisies pour  $\theta_0$ , mais si la perturbation est suffisamment petite, la non-dégénérescence de  $H_0$  garantie que si  $(\theta_1, I_1)$  et  $(\theta_2, I_2)$  appartiennent au même tore de KAM, on a  $F_{\theta_1}(I_1) = F_{\theta_2}(I_2)$ . En d'autres termes, sur un tore donné, la valeur de l'application fréquence  $F_{\theta_0}$  est indépendante de  $\theta_0$ . Cette propriété sera utilisée de manière cruciale au paragraphe 3.4 afin de positionner les troyens observés par rapport aux structures résonantes des essaims de troyens de Jupiter.

Afin d'étudier l'application fréquence dans un cas concret, il convient de déterminer, ou plus modestement d'approcher, les fréquences fondamentales des solutions quasi-périodiques. Pour ce faire, l'algorithme numérique NAFF (Laskar, 1990, 1999) fournit, à partir de la donnée sur un intervalle de temps  $[-T, T]$  d'une fonction à valeur complexe, une approximation quasi-périodique de cette dernière. Ainsi, pour une fonction  $f$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ , l'approximation obtenue prend la forme

$$f(t) \approx \sum_{p=1}^N a_p e^{i\omega_p t}, \quad \forall t \in [-T, T] \quad (1.8)$$

où les nombres complexes  $a_p$  sont ordonnés par valeurs décroissantes de leur module. Un résultat important (Laskar, 1999) vient donner un sens précis à l'approximation numérique de l'application fréquence. Sans entrer dans les détails, ce résultat prouve que, si l'on considère une solution quasi-périodique vivant sur un tore de KAM, l'écart entre ses fréquences fondamentales et leur approximation sur l'intervalle de temps  $[-T, T]$  est d'ordre  $T^{-q}$ , où  $q$  est un entier positif dépendant de l'algorithme de calcul des fréquences<sup>2</sup>. Ainsi, les fréquences fondamentales approchées convergent vers les fréquences KAM quand la longueur de l'intervalle d'approximation tend vers l'infini. Intéressons-nous maintenant aux relations entre la régularité de la dynamique du problème étudié et celle de l'application fréquence. Supposons avoir déterminé une durée  $T$  telle que l'analyse des trajectoires sur l'intervalle  $[-T, T]$  fournisse une bonne approximation des fréquences fondamentales (pour des trajectoires quasi-périodiques). Alors, d'après Laskar (1999), quel que soit le réel  $\tau$  fixé, l'approximation des fréquences fondamentales d'une trajectoire quasi-périodique obtenue sur l'intervalle de temps  $[\tau - T, \tau + T]$  est indépendante de  $\tau$ . L'intérêt majeur de cette propriété est que si deux déterminations des fréquences fondamentales d'une trajectoire sont significativement différentes, cette trajectoire ne peut être quasi-périodique. De plus, les éventuelles variations par rapport à  $\tau$  des fréquences calculées sur l'intervalle  $[\tau - T, \tau + T]$  peuvent mettre en évidence des phénomènes de diffusion dans l'espace des fréquences, et donc dans l'espace des phases. Une deuxième propriété de l'application fréquence est essentielle à l'étude de la régularité de la dynamique. Cette propriété affirme que l'application fréquence est régulière sur l'ensembles tores invariants (elle réalise un difféomorphisme entre l'ensemble des actions appartenant aux tores de KAM et son image dans l'espace des fréquences), ainsi ses singularités indiquent l'absence (la destruction) de tores invariants et des solutions quasi-périodiques qu'ils supportent. Les définitions et propriétés énoncées ci-dessus seront utilisées tout au long de ce mémoire.

2. L'approximation quasi-périodique est obtenue par décomposition orthogonale et l'entier  $q$  est lié au choix du produit scalaire. Dans la majeure partie des résultats présentés plus loin,  $q$  est égal à 4.

## 1.2 Application fréquence et problème restreint des $N + 2$ -corps

Il s'agit ici d'une première approche de l'étude de la dynamique globale d'un système planétaire. Nous y mettons à profit l'analyse de l'application fréquence dans un cadre très simple. On s'intéresse ici à la dynamique de particules tests (corps n'influençant pas le mouvement des planètes) évoluant dans un système planétaire donné, par exemple les astéroïdes du système solaire. Si l'on suppose que le système, qui comporte  $N$  planètes, est régulier au sens où les trajectoires planétaires sont quasi-périodiques<sup>3</sup>, si nous supposons également que notre système planétaire est en dehors de toute résonance en moyen mouvement, les fréquences fondamentales du système se décomposeront en deux sous-ensembles distincts : les moyens mouvements propres  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$  et les fréquences propres séculaires  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N)$  liées aux précessions des périhélies et  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$  associées aux mouvement des nœuds. Si les moyens mouvements propres sont d'ordre 1, les fréquences séculaires sont quant à elles d'ordre  $\varepsilon$ , avec  $\varepsilon = \max(m_1/m_0, \dots, m_N/m_0)$ , les  $m_j$  étant les masses des planètes et  $m_0$  celle de l'étoile centrale. Le mouvement des planètes étant donné, on peut aisément ramener le problème à un système hamiltonien à 3 degrés de liberté dépendant quasi-périodiquement du temps où les fréquences associées à la dépendance temporelle sont celles du système planétaire, fixées une fois pour toutes. L'espace des fréquences est ainsi réduit à un ensemble de dimension 3. Pour chaque trajectoire quasi-périodique, ou proche de l'être, on peut choisir comme fréquences le triplet  $(n, g, s)$  où la première composante est le moyen mouvement propre et les deux autres, les fréquences séculaires propres liées, comme pour les planètes, au mouvement du périastre et nœud ascendant. A l'instar des fréquences planétaires,  $n$  sera d'ordre 1 alors que  $g$  et  $s$  seront d'ordre  $\varepsilon$ .

La construction d'une application fréquence possédant les propriétés de paragraphe précédent est un peu délicate. En effet, si l'on veut procéder de la même manière, il faut d'abord utiliser un système de coordonnées actions-angles d'un problème intégrable non dégénéré. Pour modéliser le mouvement de la particule, on dispose du problème de Kepler, mais toutes ses orbites (bornées) étant périodiques, ce problème est fortement dégénéré. Un moyen classique de lever cette dégénérescence est d'approcher la partie séculaire de la perturbation par une forme normale, comme l'ont fait Milani et Knezević (1990) pour le calcul des éléments propres des astéroïdes<sup>4</sup>. Mais, de manière plus pragmatique, on peut s'intéresser à l'application

$$F_{\theta_0} : (a, e, \mathcal{I}) \longmapsto (n, g, s), \quad \theta_0 = (\lambda, \varpi, \Omega) \quad \text{fixé}, \quad (1.9)$$

où  $(\lambda, \varpi, \Omega, a, e, \mathcal{I})$  sont les éléments elliptiques du petit corps et  $(\lambda_j, \varpi_j, \Omega_j, a_j, e_j, \mathcal{I}_j)$  ceux de la  $j$ ième planète. Bien que ne vérifiant pas exactement les propriétés énoncées au paragraphe 1.1, cette application possède le double avantage d'avoir une définition simple et claire et de pouvoir être approximée numériquement de manière élémentaire, ce que ne serait pas le cas d'une construction basée sur une forme normale. Le fait que les variables  $(\lambda, \varpi, \Omega, a, e, \mathcal{I})$  ne soient pas des variables action-angle peut, entre autre, engendrer un problème de non surjectivité de  $F_{\theta_0}$  que nous retrouverons au paragraphe 3.2, mais localement, tout se passera comme si les hypothèses du paragraphe 1.1 étaient vérifiées.

## 1.3 Instabilités à court terme et résonances en moyen mouvement

La première application des méthodes présentées ci-dessus est consacrée à la construction d'une cartographie dynamique du système solaire, elle fait l'objet de l'article de Robutel et Laskar (2001). La méthode employée ici est simple et efficace. Plutôt que d'étudier l'application fréquence  $F_{\theta_0}$  définie par (1.9), nous en étudions la projection sur la première coordonnée restreinte à la

3. Si ce n'est pas exactement le cas, on pourra toujours prendre une approximation quasi-périodique sur un temps fini.

4. On peut en trouver un exposé synthétique dans (Morbidelli, 2002, chapitre 8).

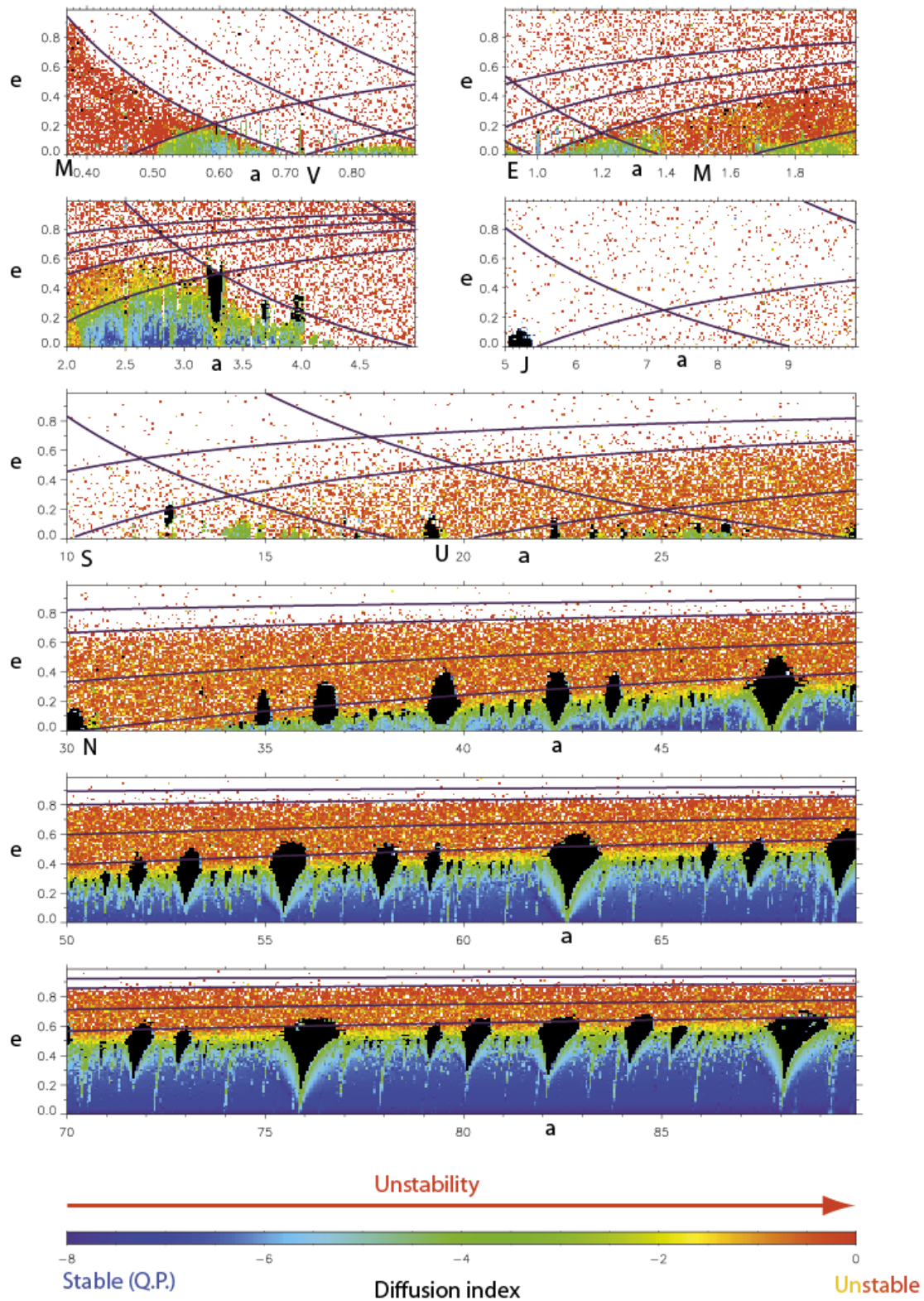


FIGURE 1.1 – Carte de stabilité du Système solaire dans le plan  $(a_0, e_0)$  pour  $\mathcal{I}_0 = \lambda_0 = \varpi_0 = \Omega_0 = 0$ . Adaptation de la figure 2 de Robutel et Laskar (2001). Les couleurs correspondent aux différentes valeurs de  $\log_{10} |1 - n^{(2)}/n^{(1)}|$ , le noir aux résonances en moyen mouvement et le blanc aux particules éjectées en cours de calcul. Les courbes violettes matérialisent les lieux de collision des petits corps avec une des planètes.

première composante de l'espace de départ, à savoir celle des demi-grands axes, les autres éléments

elliptiques de la particule étant fixés. En d'autres termes, il s'agit de l'application

$$F_{\theta_0}^{e,\mathcal{I}} : a \mapsto n \quad (1.10)$$

Cette simplification entraîne au moins deux avantages principaux. Tout d'abord elle permet de limiter le temps d'intégration. En effet, les fréquences fondamentales d'une solution (quasi-périodiques) sont déterminées numériquement par l'analyse en fréquence de la trajectoire déduite de l'intégration numérique. Le rapport entre les fréquences propres séculaires et les moyens mouvements propres étant de l'ordre de  $\varepsilon$ , donc aux environs de 1/1000 dans le système solaire, l'intervalle de temps nécessaire à déterminer les fréquences avec une précision donnée est bien moindre pour les moyens mouvements que pour les fréquences séculaires. Si certains phénomènes agissant sur des échelles de temps longues, tels les phénomènes séculaires, échappent à ce type d'étude<sup>5</sup>, les régions potentiellement stables à long terme seront quant à elles immédiatement localisées.

Au-delà de l'efficacité de la méthode, le choix de l'application fréquence  $F_{\theta_0}^{e,\mathcal{I}}$  offre un deuxième avantage. Contrairement à ce qui a été dit plus haut sur l'application  $F_{\theta_0}$  dont l'image est à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , l'application  $F_{\theta_0}^{e,\mathcal{I}}$  satisfait les propriétés énoncées au paragraphe 1.1. Effectivement, si l'on néglige les perturbations planétaires, la troisième loi de Kepler montre que cette application réalise une bijection entre les actions, ici le demi-grand axe, et les fréquences, le moyen mouvement. Pour une faible perturbation, on peut supposer que cette correspondance persiste, au moins entre l'ensemble des demi-grands axes pour lesquels la trajectoire est quasi-périodique et son image. Ceci fournit en particulier une manière simple de déterminer le moyen mouvement propre : il suffira de choisir la fréquence du terme de plus grande amplitude dans l'approximation quasi-périodique de  $a \exp(i\lambda)$  obtenue à l'aide de la méthode d'analyse en fréquence<sup>6</sup>. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle permet d'identifier immédiatement les résonances en moyen mouvement : si dans une région de l'espace des phases le moyen mouvement propre est constant, l'application fréquence n'y est manifestement pas injective. C'est que nous sommes à l'intérieur d'une résonance en moyen mouvement. La connaissance de la valeur de la fréquence orbitale permet en général d'identifier la résonance. Dans le cas où il s'agit d'une résonance orbitale entre la particule test et une des planètes, le meilleur approximant rationnel du rapport des moyens mouvements des deux corps fournit en général le résultat, même si un bon usage de la troisième loi de Kepler peut souvent permettre de conclure. En revanche, s'il s'agit d'une résonance en moyen mouvement impliquant trois corps, d'une résonance séculaire (voir paragraphe 1.4) ou encore d'une résonance secondaire (voir le cas des troyens au chapitre 3), la connaissance des fréquences fondamentales devient alors un élément essentiel à l'identification des résonances. Comme nous l'avons vu plus haut, l'étude de la variation des fréquences fondamentales au cours du temps nous livre une information autant qualitative que quantitative sur la nature des trajectoires étudiées. Elle nous permet également de « lire » la dynamique dans l'espace des fréquences. C'est d'ailleurs sur ce dernier point que repose l'analyse de la dynamique des essaims de troyens présentée au chapitre 3.

Mais pour le moment, limitons-nous à l'étude de l'application  $F_{\theta_0}^{e,\mathcal{I}}$  et à son application à la dynamique d'un petit corps dans le système solaire. Les résultats les plus frappants de cette étude sont regroupés sur la figure 1.1. Cette figure présente une carte dynamiques du système solaire dans le plan  $(a, e)$ . Pour réaliser cette carte, 192 000 particules test ont été intégrées. Les conditions initiales de chaque petit corps sont choisies dans le plan  $(a, e)$ , avec  $0.38 \leq a \leq 90$  u.a. et  $0 \leq e \leq 0.9$ , les autres conditions initiales étant données par  $\lambda = \varpi = \Omega = 0$ , et  $\mathcal{I} = 0$ , le plan de référence étant le plan invariant du système solaire<sup>7</sup>. Les conditions initiales des planètes sont rapportées au plan invariant à la date J2000. Chaque particule est intégrée durant 500 000 ans dans le champ gravitationnel des 8 planètes du système solaire si elle est à l'intérieur de

5. Il est, dans une certaine mesure, possible de lire l'effet des résonances séculaires principales sur le moyen mouvement propre. La bande verticale orange (instable) visible la figure 1.1 à 2 u.a. est liée à la présence de la résonance en moyen mouvement 4:1 avec Jupiter, mais surtout à celle de la résonance séculaire  $g = g_6$ .

6. Comme nous le constaterons aux paragraphes 1.4 et 3.2, les fréquences séculaires ne se déterminent pas toujours aussi simplement.

7. Plan perpendiculaire au moment cinétique total passant par le Soleil.

l'orbite de Jupiter, et durant 2 millions d'années avec uniquement les planètes géantes si elle se trouve initialement sur ou à l'extérieur de l'orbite de Jupiter. Si le petit corps est éjecté ou entre en collision avec un des corps massifs, sa position initiale est indiquée en blanc sur la figure. Dans le cas inverse, sa localisation est indiquée soit en noir, soit d'une couleur allant du bleu foncé en rouge suivant le code défini au bas de la figure. Ces couleurs renseignent sur la nature quasi-périodique de la trajectoire, elles indiquent la valeur de la variation temporelle du moyen mouvement propre au cours de l'intégration. En pratique la diffusion en fréquence est évaluée par l'indice de diffusion donné par  $\sigma = 1 - n^{(2)}/n^{(1)}$ , où  $n^{(1)}$  et  $n^{(2)}$  sont les moyens mouvements propres déterminés sur deux intervalles de temps successifs. Le code de couleurs de la figure 1.1, correspond aux différentes valeurs de  $\log_{10} |\sigma|$ . Le bleu,  $\sigma < 10^{-6}$ , correspond à des valeurs de diffusion de l'ordre de la précision de la détermination des fréquences, donc à des orbites stables. L'instabilité augmente ensuite pour atteindre un régime fortement instable au dessus de  $10^{-1}$ , en rouge. Notons que la variation temporelle des fréquences fondamentales est également liée aux variations des actions au cours du temps. Ici, la troisième loi de Kepler montre qu'une variation de fréquence  $\Delta n$  équivaut à une variation du demi-grand axe  $\Delta a$  telle que  $\frac{\Delta n}{n} \approx -\frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}$ .

Comme nous l'avons dit plus haut, à l'intérieur d'une résonance orbitale, le moyen mouvement propre est constant. En pratique, ce n'est pas exactement le cas : certaines instabilités, engendrées par exemple par des résonances secondaires, peuvent induire de faibles variations temporelles de  $n$ , mais ces dernières ne sont pas comparables aux variations subies au voisinage des résonances orbitales et en particulier au franchissement de leurs séparatrices. Bien qu'il soit possible d'utiliser la diffusion des moyens mouvements propres pour mettre en évidence certaines instabilités internes aux résonances orbitales (voir la figure 1 de [3]), nous ne le ferons pas ici. Ainsi, quand une trajectoire est en résonance orbitale, sa diffusion n'est pas calculée et la condition initiale correspondante est indiquée en noir.

La figure 1.1, fournit une vision globale assez frappante du système solaire tout en soulignant la séparation de ce dernier en trois structures dynamiques connectées par les résonances en moyen mouvement. Ces structures sont particulièrement visibles dans la ceinture de Kuiper située au-delà de Neptune. En effet, mis à part la ceinture d'astéroïdes (entre 2 et 4 u.a) et essaims de troyens de Jupiter, Uranus et Neptune, la région du système solaire intérieure aux planètes est très fortement instable. Cette instabilité est principalement due au recouvrement des résonances en moyen mouvement entre les petits corps et les différentes planètes<sup>8</sup>. Dans la ceinture de Kuiper, les petits corps entrent principalement en résonance avec Neptune<sup>9</sup>, ce qui simplifie leur répartition et permet de mettre à jour les trois structures évoquées ci-dessus. La première région, la plus instable, s'étend au-dessus de la ligne de collision avec Neptune (courbe violette issue du point de coordonnées  $a = 30$ ,  $e = 0$ ), l'indice de diffusion  $y$  est supérieur à  $10^{-1}$ . Plus bas, dans les régions bleues, pour de plus faibles excentricités, on trouve les trajectoires stables ou modérément instables. Leur indice de diffusion est inférieur à  $10^{-6}$ , c'est donc ici que l'on trouvera les zones de stabilité à long terme. Entre ces deux domaines se situe une région instable engendrée par le recouvrement des résonances. Cette région intermédiaire (vert, jaune) semble décrire une mince bande parallèle à la ligne de collision. Ces trois régions sont connectées par les résonance orbitales indiquées en noir. Nous montrons au paragraphe 3.3, en prenant pour exemple la résonance 1:1, que les résonances permettent effectivement des transitions entre les régions potentiellement stables à long terme et la région de collision.

Revenons sur un point important. Pour définir l'application fréquence, nous avons dû fixer la valeur initiale des angles (voir paragraphe 1.1). Dans le cas du système solaire, nous avons imposé  $\lambda_0 = \varpi_0 = \Omega_0 = 0$ . Mais ceci n'a que très peu d'influence sur les résultats globaux. Evidemment, par ce choix des conditions initiales, on peut couper une résonance en un endroit ou elle est plus ou moins large (nous en donnons des exemples dans la section 4 de Robutel et Laskar, 2001) mais ceci n'a pratiquement pas d'influence sur l'image globale de la dynamique du système étudié. Nous

8. Voir les détails de ce recouvrement dans la région contenue entre les planètes géantes à la section 3.2.1 de Robutel et Laskar (2001).

9. On observe également des résonances en l'astéroïde et Saturne où encore Uranus. Elles sont regroupées dans la table IV associée à la figure 9 de Robutel et Laskar (2001).

reviendrons sur ce point au paragraphe 3.4 au moment de placer les troyens observés par rapport aux structures des essaims de Jupiter.

Signalons pour terminer que d'autres applications directes de la méthode présentée dans ce paragraphe sont regroupées dans Robutel (2005) et Pilat-Lohinger *et al.* (2008), et qu'une application au système  $\nu$ -Andromède est réalisée dans Robutel et Laskar (2001).

## 1.4 Résonances séculaires dans la ceinture d'astéroïdes

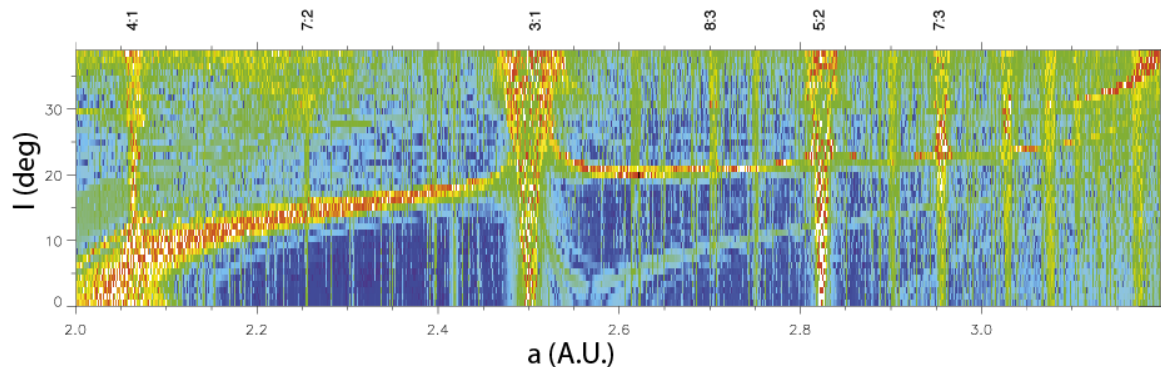


FIGURE 1.2 – Résonances séculaires dans la ceinture d'astéroïdes. Le code de couleur est similaire à celui de la figure 1.1.

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes limités à l'étude de la fréquence fondamentale orbitale : le moyen mouvement propre. Montrons maintenant quels sont les avantages apportés par l'exploration de l'espace des fréquences. Prenons pour exemple la ceinture d'astéroïdes. Appliquons les mêmes méthodes que celles présentées au paragraphe précédent en intégrant la particule test durant 2 millions d'années au lieu de 500 000 ans comme ce qui a été fait pour la figure 1.1. Les résultats sont regroupés sur la carte de stabilité visible sur la figure 1.2. Elle a été obtenue de la même manière que la carte du système solaire, mais plutôt que de répartir les conditions initiales des petits corps dans le plan de coordonnées  $(a, e)$ , le plan  $(e, \mathcal{I})$  lui a été préféré. C'est en effet dans ce dernier que les principales résonances séculaires sont visibles. Quant aux autres conditions initiales, elles ont été fixées à  $e_0 = 0.1$  et  $\lambda_0 = \varpi_0 = \Omega = 0$ . Au-delà des résonances en moyen mouvement qui s'identifient aux bandes verticales de haute diffusion, d'autres structures instables, diagonales et horizontales, se détachent nettement. Il s'agit évidemment de résonances séculaires dont la plus marquante est celle correspondant à la relation  $g = g_6$ . D'autres résonances séculaires moins visibles apparaissent également, on pourra les comparer aux structures obtenues par construction de formes normales par Milani et Knezević (1990, 1992). On constate donc que les instabilités engendrées par les résonances séculaires, qui agissent sur une échelle de temps bien plus grande que les résonances orbitales, induisent également une diffusion significative du moyen mouvement propre. Mais c'est dans l'espace des fréquences qu'apparaissent de manière évidente toutes ces structures. Nous allons donc construire l'équivalent de la figure 1.2 dans l'espace des fréquences. Afin de réaliser numériquement l'application qui aux actions  $(a, I)$  associe les fréquences  $(n, g, s)$ , les éléments initiaux  $e_0$  et  $\lambda_0 = \varpi_0 = \Omega$  étant fixés, il faut pouvoir déterminer les fréquences séculaires propres des astéroïdes. Les fréquences séculaires  $g$  et  $s$  sont déduites de la décomposition quasi-périodique des quantités  $e \exp(i\varpi)$  et  $\sin(\mathcal{I}/2) \exp(i\Omega)$ . Contrairement à  $n$ , les fréquences propres séculaires ne sont pas nécessairement associées au terme de plus grande amplitude de la décomposition. Pour des astéroïdes de faible excentricité ou inclinaison, les fréquences séculaires dominantes sont plutôt des combinaisons linéaires des fréquences séculaires du système planétaire (voir le chapitre 8 de Morbidelli, 2002). Il faut donc sélectionner les fréquences fondamentales parmi celles apparaissant dans la décomposition. La reconnaissance automatique des fréquences fondamentales séculaires peut être un peu délicate, en particulier quand l'astéroïde

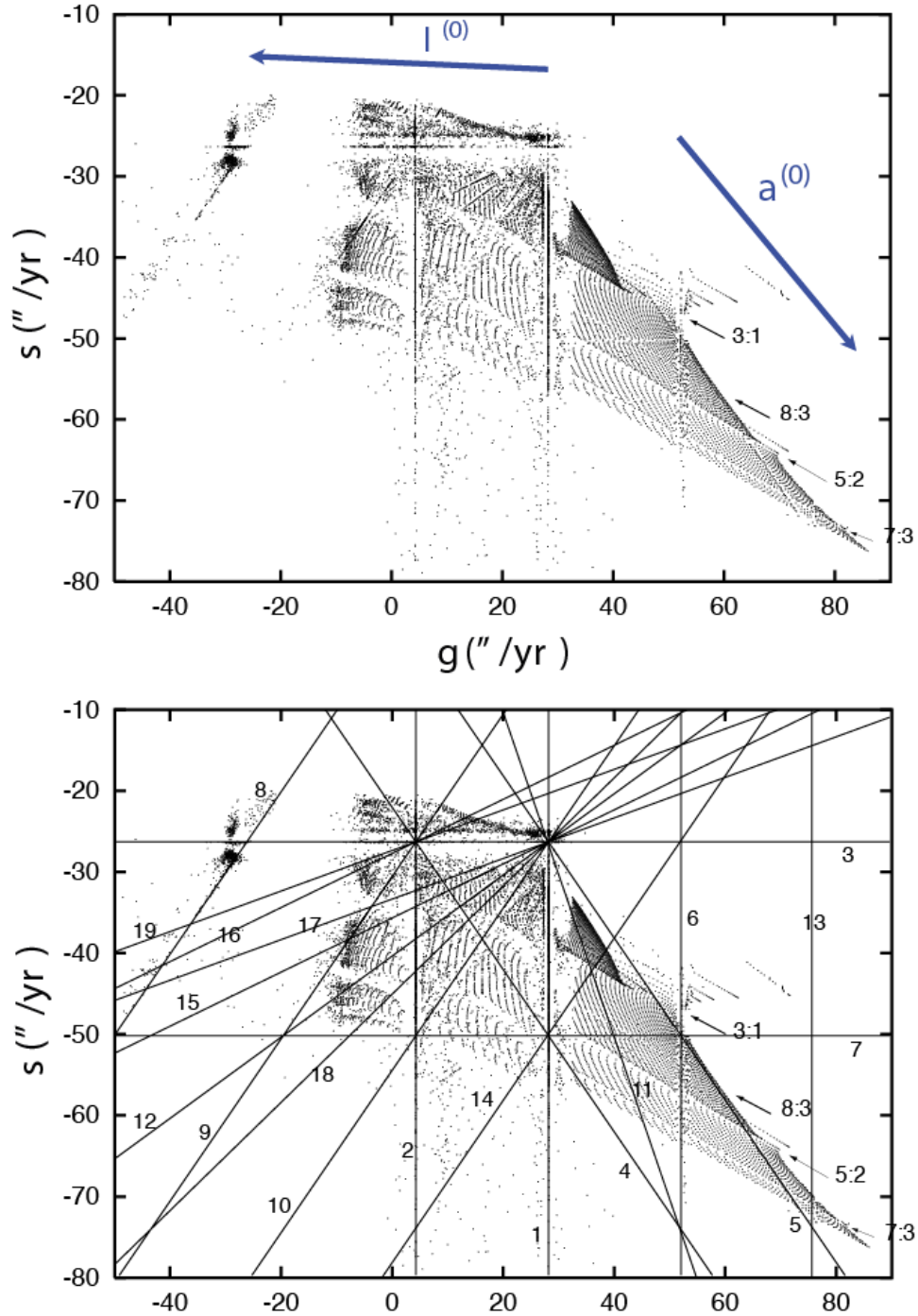


FIGURE 1.3 – Ceinture d’astéroïdes dans l’espace des fréquences séculaires. La figure du haut est le pendant de la figure 1.2 dans l’espace des fréquences séculaires  $(g, s)$ . Les flèches bleues indiquent le sens de variation du demi-grand axe et de l’inclinaison. Les flèches noires marquent le position des principales résonances en moyen mouvement. La ceinture principale d’astéroïdes correspond au petit triangle centré en  $(35, -40)$  bordé par la résonance séculaire  $g = g_6$  et la résonance orbitale 3:1. Sur la figure du bas, les lignes indiquent la localisation des principales résonances séculaires, la liste de ces résonances est fournie dans le tableau 1.1. Adaptation de la figure 4.8 de Robutel (2005).

évolue à l’intérieur d’une résonance séculaire. Il est en effet difficile, dans ce cas, de distinguer une fréquence propre d’une fréquence séculaire de forçage, puisqu’elles coïncident à la résonance<sup>10</sup>.

10. C’est généralement une combinaison des fréquences propres séculaires qui est égale à une combinaison des fréquences séculaires planétaires.



Cette détermination des fréquences fondamentales séculaires, bien qu'étant difficile voire impossible à automatiser pour une trajectoire isolée, est assez aisée si l'on considère un ensemble de trajectoires voisines dans lequel on peut suivre l'évolution des fréquences de l'extérieur de la résonance, où elles se calculent simplement, vers son intérieur.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$p$	1	1	0	1	1	1	0	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1
$q$	0	0	1	1	1	0	1	-2	-1	-1	1	-2	0	-1	-3	-3	-4	-3	-4
$r_1$	0	-1	0	-1	0	1	-1	0	-1	0	0	0	2	1	0	-1	0	0	-1
$r_2$	-1	0	0	0	-1	-2	1	0	0	-1	-2	-1	-3	-2	-1	0	-1	-2	0
$r_3$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	0	1	1	-1	2	0	1	3	3	4	3	4

TABLE 1.1 – Tableaux des résonances séculaires visibles sur la figure 1.3. Les résonances correspondent à des combinaisons de fréquence de la forme  $pg + qs + r_1g_5 + r_2g_6 + r_3s_6 = 0$ , les valeurs des coefficients  $p, q$  et  $r_j$  étant reportées dans les colonnes du tableau.

Revenons maintenant à notre application fréquence. Si celle-ci était régulière, elle transformerait le rectangle  $(a, I) \in [2, 3.2] \times [0, 40]$ , en une surface bidirectionnelle de l'espace des fréquences  $\mathbb{R}^3$ . Afin de visualiser cette dernière, nous l'avons projetée sur le plan des fréquences séculaires  $(g, s)$ . Cette projection est représentée sur la figure 1.3. Cette figure est composée de 80 courbes des 200 points chacune qui sont l'image des segments  $\mathcal{I} = ct$  par l'application fréquence. Ces courbes sont lisses dans les régions régulières alors que leurs singularités marquent la présence de zones chaotiques. Les résonances séculaires sont immédiatement visibles dans l'espace des fréquences puisqu'elles sont marquées par des droites de pente rationnelle sur lesquelles les points s'accumulent (voir Laskar, 1999). Les résonances en moyen mouvement, dont les principales sont marquées par de flèches, apparaissent également sous forme de courbes séparant distinctement certains domaines de l'espace des fréquence tout en induisant un léger recouvrement de ces zones<sup>11</sup>. En particulier, le triangle contenant le point de coordonnées  $(35, -40)$  qui se détache nettement en haut à droite correspond, sur la figure 1.2, à la partie de la ceinture d'astéroïdes située sous la résonance séculaire  $g = g_6$  et à gauche de la résonance orbitale 3:1. Les principales résonances séculaires visibles sur la figure 1.3-haut sont regroupées dans le tableau 1.1 et marquées par des lignes sur la partie basse de la même figure. On comprend ici l'un des intérêts majeurs de l'exploration des l'espace des fréquences : il permet d'identifier la présence et l'influence dynamique d'une résonance tout en en rendant immédiat l'identifications. Ceci aurait être impossible, ou tout du moins très délicat à réaliser dans l'espace des actions comme le confirme la lecture de Milani et Knezević (1990). Nous retrouverons l'espace des fréquences au chapitre 3 où nous montrerons qu'il permet de visualiser la diffusion.

11. Ce recouvrement est dû à la projection de l'image de l'application fréquence sur le plan de coordonnées  $(g, s)$ .

## Chapitre 2

# La résonance coorbitale

### 2.1 Quelques configurations remarquables du problème des 3-corps

Avant d'aborder la résonance coorbitale dans sa généralité, attardons-nous sur quelques solutions très particulières du problème des 3-corps. La première de ces solutions remarquables fut présentée par Euler quand il fit remarquer que, si la Lune était quatre fois plus éloignée de la Terre qu'elle ne l'est actuellement, les mouvements relatifs du Soleil, de la Terre et de la Lune seraient tels que cette dernière nous apparaîtrait comme une éternelle pleine Lune (Euler, 1764). Plus généralement, si à un instant donné, les trois corps sont alignés, si les distances mutuelles et les masses sont liées par une relation qui sera explicitée au paragraphe 2.2.2, et si les vitesses de deux de ces corps, mesurées par rapport au troisième, sont parallèles entre elles et proportionnelles à la distance au troisième corps, alors les trois corps resteront en permanence alignés sur une droite mobile. Les distances mutuelles ainsi que les vitesses angulaires des corps en mouvement ne seront pas nécessairement conservées au cours du temps mais évolueront de telle manière que la configuration se déforme homothétiquement.

La seconde des configurations remarquables fut présentée par Lagrange (1772). Il s'agit de la fameuse configuration pour laquelle les trois corps occupent les sommets d'un triangle équilatéral, la longueur des côtés de ce triangle étant indépendante des masses des corps. Comme dans le cas des configurations alignées, ce triangle n'est pas fixe et ses dimensions peuvent évoluer au cours du temps. La question de la stabilité de ces configurations ne fut tranchée qu'au milieu de XIX<sup>ème</sup> siècle. Contrairement à ce que semblait penser Euler (1764), Liouville démontra en 1842 que les configurations alignées étaient instables quelle que soit la valeur des masses des corps. Il fit remarquer que si l'on plaçait trois corps, par exemple la Lune, le Soleil et la Terre, dans une des configurations alignées découvertes par Euler, les perturbations engendrées par les autres corps du système solaire modifieraient cette configuration, d'où sa question : « *Trois masses étant placées non plus rigoureusement, mais à très-peu près dans les conditions énoncées par Laplace<sup>1</sup> on demande si l'action réciproque des masses maintiendra le système dans cet état particulier de mouvement ou si elle tendra au contraire à l'en écarter de plus en plus* ». L'intégration du système linéarisé au voisinage d'une telle solution du problème des 3-corps lui permet d'en démontrer l'instabilité indépendamment de la valeur des masses<sup>2</sup>. Il en déduit que : « *Si la Lune avait occupé à l'origine la position particulière que Laplace indique, elle n'aurait pu s'y maintenir que pendant un temps très-court* ». L'année suivante, Gascheau (1843) aborde quant à lui le problème de la stabilité des configurations équilatérales et démontre que « *le mouvement est stable ou instable, suivant que le rapport du carré de la somme des trois masses à la somme des produits deux à deux de ces masses est supérieur ou inférieur à 27* ». Bien que Gascheau jugeait que pour la configuration équilatérale « *il n'y a, sans doute, pas autant d'intérêt à savoir*

---

1. Dans son mémoire, Liouville mentionne Lagrange et Laplace comme étant à l'origine de la découverte de ces configurations. Il ne semble pas connaître les travaux d'Euler sur la question.

2. La démonstration est détaillée dans La connaissance des temps pour l'année 1845 (Liouville, 1945).

si le mouvement dont il fixe les lois est stable ou instable » que dans le cas des configurations d'Euler, c'est pourtant au voisinage de cette première configuration qu'Achille, le premier troyen (ou plutôt Grecque) de Jupiter, fut découvert, plus d'un siècle après le résultat de Lagrange. En effet, l'astéroïde 1906 TG fut observé pour la première fois le 22 février 1906 par M. Wolf (1906) à Heidelberg. La même année, Charlier (1906) suspecta ce nouvel astéroïde de graviter au voisinage du point de Lagrange  $L_4$  de Jupiter ( $60^\circ$  en avant de la planète). La confirmation fut obtenue avec la découverte de deux nouveaux coorbitaux de Jupiter, 1906 VY (voisin de  $L_5$ ) et 1907 XM (proche de  $L_4$ ). Ces trois corps furent respectivement nommés Achille, Patroclus et Hector (Palisa, 1907). On dénombre actuellement plus de 4000 troyens de Jupiter<sup>3</sup>, ainsi que quelques astéroïdes coorbitaux de la Terre, Mars, Uranus et Neptune<sup>4</sup>.

## 2.2 Autour des solutions d'Euler et de Lagrange du problème des 3-corps

### 2.2.1 Formulation du problème des 3 corps

On considère ici le cas planétaire du problème des trois corps pour lequel, à l'instar du système solaire, la masse d'un des corps, dit corps central, est prépondérante devant celle des deux autres corps. Ce modèle est particulièrement adapté aux problèmes des deux planètes orbitant autour d'une étoile, ou encore au cas des satellites d'une planète. Rappelons brièvement sa formulation hamiltonienne en variables héliocentriques canoniques. Pour plus d'informations, on pourra consulter (Laskar et Robutel, 1995). Si  $m_0$  est la masse du corps central et  $m_1, m_2$  celles des planètes, si l'on note  $\beta_j = m_0 m_j (m_0 + m_j)^{-1}$  pour  $j \in \{1, 2\}$  leur masse réduite, et  $\mu_j = \mathcal{G}(m_0 + m_j)$ , le hamiltonien du problème s'écrit :

$$H(\tilde{\mathbf{r}}_j, \mathbf{r}_j) = \sum_{j \in \{1,2\}} \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j^2}{2\beta_j} - \frac{\mu_j \beta_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right) + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}. \quad (2.1)$$

Dans l'expression (2.1),  $\mathcal{G}$  est la constante de la gravitation universelle,  $\mathbf{r}_j$  est le vecteur positionnant le  $j$  ième corps par rapport à l'étoile, et  $\tilde{\mathbf{r}}_j$  est sa variable conjuguée<sup>5</sup>. On peut écrire le hamiltonien et les équations canoniques qui lui sont associées de manière plus concise en posant :

$$\mathbf{R}^T = (\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T), \text{ et } \tilde{\mathbf{R}}^T = (\tilde{\mathbf{r}}_1^T, \tilde{\mathbf{r}}_2^T) \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{x}^T$  représente le transposé du vecteur  $\mathbf{x}$ , le hamiltonien (2.1) s'écrit :

$$H(\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{R}} - V(\mathbf{R}), \text{ avec } V(\mathbf{R}) = \frac{\mu_1 \beta_1}{\|\mathbf{r}_1\|} + \frac{\mu_2 \beta_2}{\|\mathbf{r}_2\|} + \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \quad (2.3)$$

et

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^{-1} \mathbf{I}_3 & m_0^{-1} \mathbf{I}_3 \\ m_0^{-1} \mathbf{I}_3 & \beta_2^{-1} \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

la matrice  $\mathbf{I}_3$  représentant l'identité de  $\mathbb{R}^3$ . Avec ces notations, les équations du mouvement prennent la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}, \text{ et } \dot{\tilde{\mathbf{R}}} = \nabla V(\mathbf{R}) \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Equilibres relatifs

Les équilibres relatifs (configurations fixes en repère tournant à vitesse angulaire constante) du problème des 3 corps ont déjà été présentés au paragraphe 2.1. Ils sont de deux natures :

3. voir Robutel et Souchay (2010) pour un historique des découvertes.

4. Source : Minor Planet Center, <http://www.minorplanetcenter.net/iau/lists/Trojans.html>

5. Ce vecteur n'est pas la quantité de mouvement héliocentrique mais barycentrique du  $j$  ième corps.

les équilibres alignés (configurations d'Euler) et les équilibres équilatéraux (configurations de Lagrange). Revenons brièvement sur ces équilibres, ce qui nous permettra de rappeler quelques résultats qui seront utilisés plus loin. Le passage en repère tournant se fait pas le biais des coordonnées  $(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$ , liées aux coordonnées héliocentriques canoniques  $(\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{R}})$  par les relations :  $\mathbf{R} = \exp(t\boldsymbol{\Omega})\mathbf{X}$  et  $\tilde{\mathbf{R}} = \exp(t\boldsymbol{\Omega})\tilde{\mathbf{X}}$ , la matrice  $\boldsymbol{\Omega}$  étant définie par

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \begin{pmatrix} \mathbf{J}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{J}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire, quelconque pour le moment. Dans les variables  $(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$  liées au repère tournant, le hamiltonien que l'on notera encore  $H$ , s'écrit :

$$H(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} - V(\mathbf{X}), \quad (2.7)$$

et les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{X}}} &= \boldsymbol{\Omega} \tilde{\mathbf{X}} + \nabla V(\mathbf{X}) \end{cases}. \quad (2.8)$$

On vérifie alors que les points fixes (équilibres relatifs) sont confinés dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation du repère. Ainsi, si l'on pose  $\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}_1^T, 0, \mathbf{X}_2^T, 0) = (x_1, y_1, 0, x_2, y_2, 0)$ , les équilibres sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} \frac{m_0 + m_2}{m} \omega^2 \mathbf{X}_1 - \frac{m_2}{m} \omega^2 \mathbf{X}_2 - \mathcal{G} m_0 \frac{\mathbf{X}_1}{\|\mathbf{X}_1\|^3} - \mathcal{G} m_2 \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\|^3} = 0 \\ \frac{m_0 + m_1}{m} \omega^2 \mathbf{X}_2 - \frac{m_1}{m} \omega^2 \mathbf{X}_1 - \mathcal{G} m_0 \frac{\mathbf{X}_2}{\|\mathbf{X}_2\|^3} + \mathcal{G} m_1 \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\|^3} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $m = m_0 + m_1 + m_2$ .

Si  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  sont linéairement indépendants, on déduit des équations (2.9) que

$$\|\mathbf{X}_1\| = \|\mathbf{X}_2\| = \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\| = \rho, \quad \text{et} \quad \omega^2 \rho^3 = \mathcal{G} m. \quad (2.10)$$

Nous retrouvons ici les configurations de Lagrange, où les trois corps occupent les sommets d'un triangle équilatéral, dont la longueur des côtés est  $\rho$ , et qui tourne à vitesse angulaire constante  $\omega$ . Les paramètres  $\rho$ ,  $\omega$  et  $m$  sont liés par la troisième loi de Kepler (2.10).

Quand  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  sont colinéaires, l'élimination de la vitesse angulaire  $\omega$  dans le système d'équations (2.9) permet de montrer que, si l'on pose  $\mathbf{X}_2 = z\mathbf{X}_1$ , les équilibres relatifs alignés sont donnés par l'unique racine positive de l'équation

$$\begin{aligned} P_{0,1,2}(u) &= 0, & z &= 1 + u & \text{si} & 1 < z, \\ P_{0,2,1}(u) &= 0, & z &= (1 + u)^{-1} & \text{si} & 0 < z < 1, \\ P_{1,0,2}(u) &= 0, & z &= -u & \text{si} & z < 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

le polynôme  $P_{i,j,k}$  étant donné par

$$\begin{aligned} P_{i,j,k}(X) &= f_{i,j} X^5 + f'_{i,j} X^4 + f''_{i,j} X^3 - f''_{k,j} X^2 - f'_{k,j} X - f_{k,j} \\ \text{avec } f_{i,j} &= m_i + m_j, f'_{i,j} = 3m_i + 2m_j \quad \text{avec } f''_{i,j} = 3m_i + m_j. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ainsi, dans le cas planétaire, en posant  $\varepsilon = \text{Max}(\frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0})$ , on vérifie que

$$\begin{aligned} \text{si } 1 < z & : z = 1 + \left( \frac{m_1 + m_2}{3m_0} \right)^{1/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}) \\ \text{si } 0 < z < 1 & : z = 1 - \left( \frac{m_1 + m_2}{3m_0} \right)^{1/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}) \\ \text{si } z < 0 & : z = -1 + \frac{7(m_1 + m_2)}{12m_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

On retrouve donc les équilibres relatifs d'Euler. Dans les deux premiers cas, les planètes sont situées du même côté du corps central. Ces équilibres correspondent évidemment aux points de Lagrange  $L_1$  et  $L_2$  pour le problème restreint. Dans le troisième cas, associé au point  $L_3$ , les deux planètes sont de part et d'autre du corps principal. Ces résultats se généralisent aisément aux configurations centrales du type Lagrange et Euler. Pour les premières, les trois corps occupent encore le sommet d'un triangle équilatéral qui se déforme homothétiquement avec le temps. En effet, chacune des deux planètes évolue sur une conique dont le Soleil est un foyer, l'une des coniques se déduisant de l'autre par une rotation d'angle  $\pm\pi/3$  centrée au Soleil. Dans le cas où les coniques sont des ellipses, leurs éléments vérifient<sup>6</sup> :

$$a_1 = a_2, \quad e_1 = e_2, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \varpi_1 - \varpi_2 = \pm\pi/3. \quad (2.14)$$

Pour les configurations alignées, et dans le cas où les mouvements sont bornés, les éléments elliptiques héliocentriques des deux planètes vérifient les relations :

$$a_1 = za_2, \quad e_1 = e_2, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \varpi_1 - \varpi_2 = 0 \quad (2.15)$$

pour les configurations associées à  $L_1$  et  $L_3$ . Quant à la configuration pour laquelle les planètes sont opposées, on a

$$a_1 = za_2, \quad e_1 = e_2, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \varpi_1 - \varpi_2 = \pi \quad (2.16)$$

Dans le cas des configurations alignées, on parlera, comme pour celles de Lagrange, de configurations d'Euler circulaires et elliptiques.

### 2.2.3 Stabilité linéaire des équilibres

Comme l'a démontré Liouville (voir paragraphe 2.1), les configurations d'Euler sont instables, et ce quelles que soient les valeurs des masses des trois corps. En revanche, les configurations de Lagrange sont linéairement stables sous une certaine condition, portant sur les valeurs des masses, établies par Gascheau (1843). Dans le cas planétaire, les masses des planètes sont suffisamment faibles pour que cette condition soit en général satisfaite. Les points fixes, en repère tournant, correspondant aux équilibres relatifs de Lagrange étant donc elliptiques, il sera utile de préciser les fréquences qui leur sont associées, fréquences que nous retrouverons tout au long de cet exposé.

Le système d'équations (2.9) étant invariant par rotation, les configurations de Lagrange sont définies à une rotation près, ainsi qu'à une symétrie près puisque le système est invariant sous l'effet de la permutation des indices des corps. Afin de calculer les valeurs propres de l'équilibre, il suffit donc de linéariser le système (2.8) au voisinage d'une configuration donnée, toutes les configurations déduites de celle-ci par rotation ou symétrie fournissant le même résultat. Si  $(\mathbf{X}_0^T, \tilde{\mathbf{X}}_0^T)$  sont les coordonnées d'une telle configuration, la matrice du système qui linéarise (2.8) au voisinage de ce point s'écrit :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{M}^{-1} \\ \text{Hess}(V(\mathbf{X}_0)) & \mathbf{\Omega} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

où  $\text{Hess}(V(\mathbf{X}_0))$  représente la matrice hessienne du potentiel  $V$  évaluée au point  $\mathbf{X}_0$ . A une permutation des vecteurs de base près, cette matrice  $12 \times 12$  se décompose en deux blocs diagonaux associés respectivement aux variations horizontales (dans le plan du mouvement), et aux variations verticales (normales au plan du mouvement). Le polynôme caractéristique de la partie verticale est simplement donné par :

$$P_v(X) = (X^2 + \omega^2)^2 \quad (2.18)$$

et les valeurs propres verticales sont :

$$Sp_v = \{-i\omega, -i\omega, i\omega, i\omega\}. \quad (2.19)$$

---

6. Ces relations sont valables pour des éléments képlériens déduits des positions et vitesse héliocentrique avec  $\mu = Gm$ . Dans le cas d'éléments elliptiques canoniques déduits des positions héliocentriques et vitesses barycentriques (voir Laskar et Robutel, 1995), la situation est plus complexe, au moins pour de faibles excentricité, comme l'appendice de [1] l'explique.

Quant au polynôme caractéristique de l'équation aux variations horizontales, il s'écrit

$$P_h(X) = Q(Z), \quad \text{avec } Z = \omega^{-2}X^2 \quad (2.20)$$

où le polynôme du quatrième degré  $Q$  prend la forme :

$$Q(Z) = Z(Z+1)(4m^2Z^2 + 4m^2Z + 27p), \quad (2.21)$$

avec  $m = m_0 + m_1 + m_2$  et  $p = m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2$ . Ainsi, parmi les 8 valeurs propres de l'équation aux variations horizontales, 4 sont indépendantes des masses, à savoir la racine double 0 liée à l'invariance par rotation des équations, et les racines imaginaires pures  $i\omega, -i\omega$ . Les 4 autres valeurs propres dépendent des masses. En effet les deux racines de  $Q$  qui dépendent des masses sont

$$Z_+ = -(1 + \sqrt{1 - 27p/m^2})/2, \quad \text{et } Z_- = -(1 - \sqrt{1 - 27p/m^2})/2. \quad (2.22)$$

On retrouve ici la condition établie par Gascheau imposant la stabilité linéaire des équilibres de Lagrange si et seulement si  $27(m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2) < (m_0 + m_1 + m_2)^2$ . En effet, sous cette hypothèse,  $Z_+$  et  $Z_-$  sont toutes deux négatives et les valeurs des racines de  $P_h$  correspondantes sont alors imaginaires pures, ce qui entraîne la stabilité de l'équilibre. Finalement, les valeurs propres de l'équation aux variations horizontales au voisinage des équilibres de Lagrange sont :

$$Sp_h = \left\{ 0, 0, \pm i\omega, \pm i\omega \sqrt{(1 + \sqrt{1 - 27p/m^2})/2}, \pm i\omega \sqrt{(1 - \sqrt{1 - 27p/m^2})/2} \right\}. \quad (2.23)$$

Les fréquences associées aux variations horizontales se déduisent immédiatement de ces valeurs propres. Notons que, si les masses planétaires sont petites devant la masse solaire, les deux fréquences horizontales non triviales peuvent s'approximer par :

$$\omega \sqrt{\frac{27(m_1 + m_2)}{4m_0}} \left( 1 + \mathcal{O}_2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_0} \right) \right), \quad \text{et } \omega \left( 1 - \frac{27(m_1 + m_2)}{8m_0} + \mathcal{O}_2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_0} \right) \right). \quad (2.24)$$

Nous verrons aux paragraphes <sup>7</sup> 2.3.2 et 2.3.3 que la première fréquence correspond à la fréquence de libration  $\nu$  de l'angle critique  $\lambda_1 - \lambda_2$  au voisinage des équilibres  $\lambda_1 - \lambda_2 = \pm\pi/3$ , et que la deuxième est la différence entre le moyen-mouvement  $\omega$  commun aux deux planètes et la fréquence de précession  $g$  commune du périhélie des deux planètes au voisinage des mouvements circulaires. En particulier, quand les masses planétaires tendent, par valeur inférieure, vers la valeur de Gascheau pour laquelle  $27p/m^2 = 1$ , les fréquences  $\omega, \nu$  et  $g$  tendent à être liées par la relation de commensurabilité  $\nu = n - g$  avec  $\nu = \omega/\sqrt{2}$ .

## 2.3 Moyennisation adaptée à la résonance 1:1

### 2.3.1 Hamiltonien moyen

#### Développement du hamiltonien

Comme dans toute résonance en moyen mouvement, il existe une combinaison des longitudes moyennes des planètes, ici  $\lambda_1 - \lambda_2$ , qui évolue lentement par rapport aux longitudes moyennes elles mêmes. On peut donc s'intéresser directement à ces variations lentes en construisant une forme normale résonante qui, dans le cas le plus simple, correspond à la moyenne du hamiltonien par rapport à une des combinaisons des longitudes à variation rapide. Sans entrer dans les détails qui sont donnés dans [1], une expression du hamiltonien moyen peut être obtenue sur le même principe que celui du développement du hamiltonien planétaire en variables de Poincaré (c.f.

7. Voir également Gabern *et al.* (2004) pour plus de détails.

Laskar et Robutel, 1995) avec quelques variantes imposées par les spécificités de la résonance coorbitale. Pour des raisons de concision, seul le problème plan sera évoqué dans ce mémoire, le problème général étant présenté dans [1].

En utilisant les variables canoniques  $(\theta_1, \theta_2, J_1, J_2, x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ , définies par

$$\theta_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad 2J_1 = \Lambda_1 - \Lambda_2 \quad (2.25)$$

$$\theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad 2J_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (2.26)$$

$$x_j = \sqrt{\Lambda_j/2X_j}, \quad \tilde{x}_j = -i\bar{x}_j \quad (2.27)$$

avec

$$\Lambda_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j} \quad \text{et} \quad X_j = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \exp(i\varpi_j), \quad (2.28)$$

le hamiltonien du problème planétaire plan des 3-corps prend la forme :

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \tilde{H}_2 + \mathcal{O}_3(e_j) + \mathcal{O}_3(\varepsilon) \quad (2.29)$$

avec

$$H_0 = -\frac{\beta_1 \mu_1}{2a_1} - \frac{\beta_2 \mu_2}{2a_2} + \mathcal{G} m_1 m_2 \left( \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{a_1 a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \theta_1}} \right), \quad (2.30)$$

$$H_2 = \mathcal{G} m_1 m_2 (A_2 X_1 \bar{X}_1 + B_2 X_1 \bar{X}_2 + \bar{B}_2 \bar{X}_1 X_2 + A_2 X_2 \bar{X}_2) \quad (2.31)$$

où les coefficients, indépendants de l'angle rapide  $\theta_2$ , vérifient :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{a_1 a_2}{8A^{5/2}} (a_1 a_2 (5 \cos 2\theta_1 - 13) + 4(a_1^2 + a_2^2) \cos \theta_1) - \frac{\cos \theta_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} \\ B_2 &= \frac{e^{-2i\theta_1}}{2\sqrt{a_1 a_2}} - \frac{a_1 a_2}{16A^{5/2}} (a_1 a_2 (e^{-3i\theta_1} + 9e^{i\theta_1} - 26e^{-i\theta_1}) + 8(a_1^2 + a_2^2)e^{-2i\theta_1}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$A = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \theta_1.$$

$H_1$  et  $\tilde{H}_2$  ne nous étant pas utiles dans ce qui suit, leurs expressions ne seront pas explicitées.

### Forme du hamiltonien moyen

Pour modéliser le problème moyen, on se contentera ici au calcul d'une forme normale résonante limitée au premier ordre du petit paramètre  $\varepsilon$ , autrement dit, à la moyenne de  $H$  sur l'angle à variation rapide  $\theta_2$ . On pourrait, bien entendu, calculer la forme normale à des ordres plus élevés, mais cela n'apporterait rien de plus d'un point de vue qualitatif. En effet, les propriétés d'invariance ou de symétrie qui seront énoncées plus loin seront valables quel que soit le degré auquel est calculée la forme normale résonante. Si nous notons encore  $(\theta_j, J_j, x_j, \tilde{x}_j)$  les variables du problème moyen, nous aurons

$$\bar{H}(\theta_1, J_j, x_j, \tilde{x}_j) = H_0(\theta_1, J_j) + H_2(\theta_1, J_j, x_j, \tilde{x}_j) + \dots + H_{2n}(\theta_1, J_j, x_j, \tilde{x}_j) + \mathcal{O}_{2n+2}(x_j). \quad (2.33)$$

Dans cette expression, l'indice  $j$  indique la présence des indices 1 et 2, les  $H_0$  et  $H_2$  sont données en (2.30) et (2.31), et plus généralement  $H_{2n}$  est un polynôme homogène de degré  $2n$  en les variables  $x_j, \tilde{x}_j$  prenant la forme :

$$\sum_{p_1 + \tilde{p}_1 + p_2 + \tilde{p}_2 = 2n} \gamma_{p_j, \tilde{p}_j}(\theta_1, J_1, J_2) x_1^{p_1} \tilde{x}_1^{\tilde{p}_1} x_2^{p_2} \tilde{x}_2^{\tilde{p}_2} \quad \text{avec} \quad p_1 + p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2. \quad (2.34)$$

Cette dernière relation, dite relation de d'Alembert, qui lie entre elles les puissances des excentricités, est une conséquence de l'invariance du problème sous l'effet des rotations. La relation

de d'Alembert, qui impose la parité du hamiltonien moyen par rapport aux variables  $(x_j, \tilde{x}_j)$ , a une conséquence remarquable sur la dynamique de la résonance coorbitale. En effet, elle impose à l'ensemble

$$\mathcal{C}_0 = \{\theta_1, J_1, J_2, x_1 = x_2 = \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0\} \quad (2.35)$$

d'être une variété invariante par le flot du système moyen<sup>8</sup>. La dynamique sur cette variété est alors donnée par le hamiltonien  $H_0$ . Ce dernier ne dépendant que d'un seul angle  $\theta_1$  est intégrable. Pour cette approximation donnée par  $H_0$ , les orbites képlériennes instantanées associées à chacune des planètes sont simplement des cercles dont le rayon (demi-grand axe) varie au cours du temps (voir paragraphe 2.3.2). Ainsi, la quantité

$$\sum_{j=1,2} (\Lambda_j - |x_j|^2) \quad (2.36)$$

est une intégrale première du problème complet. On peut montrer que cette même expression est également une intégrale du mouvement moyenné. Comme l'angle  $\theta_2$  n'apparaissant pas dans le hamiltonien moyen, sa variable conjuguée  $J_2 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$  est également constante pour le problème moyen, par conséquent,

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1} e_1^2 + \beta_2 \sqrt{\mu_2 a_2} e_2^2 + \mathcal{O}_4(e_j) \quad (2.37)$$

est une intégrale première du problème moyen. Cette dernière relation permet de réduire le problème moyen à un système hamiltonien à 2 degrés de liberté. Certaines conséquences de cette réduction seront discutées au paragraphe 2.3.4. Mais pour le moment, étudions la dynamique du système hamiltonien associée à l'approximation quasi-circulaire donnée par le hamiltonien  $H_0$ .

### 2.3.2 Problème moyen quasi-circulaire associé à $H_0$

Le hamiltonien  $H_0$  défini par l'expression (2.30), ne dépendant que des variables  $(\theta_1, J_1, J_2)$  est intégrable. Afin d'en décrire la dynamique, il sera plus agréable de remplacer ces variables par le triplé  $(\zeta, J, \bar{a})$  défini par les relations :

$$\zeta = \theta_1, \quad J_1 = \frac{(\beta_1 \sqrt{\mu_1} - \beta_2 \sqrt{\mu_2})}{2} \sqrt{\bar{a}} + J, \quad J_2 = \frac{(\beta_1 \sqrt{\mu_1} + \beta_2 \sqrt{\mu_2})}{2} \sqrt{\bar{a}}. \quad (2.38)$$

La dernière expression montre que  $\bar{a}$  est une intégrale du problème moyen liée aux demi-grands axes par la relation  $m_1 \sqrt{a_1} + m_2 \sqrt{a_2} = (m_1 + m_2) \sqrt{\bar{a}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Quant à  $J$ , cette variable mesurera la position du système par rapport au « centre » de la résonance coorbitale. Enfin, il peut être avantageux d'utiliser, à la place de  $J$ , la variable sans dimension  $u$ , donnée par

$$J = (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\mu_0 \bar{a}} u \quad \text{avec} \quad \mu_0 = \mathcal{G} m_0. \quad (2.39)$$

Une fois la dynamique décrite dans les variables  $(\zeta, J)$  ou  $(\zeta, u)$ , on revient aisément aux demi-grands axes par

$$a_j = \left( \sqrt{\bar{a}} + \frac{(-1)^{j+1}}{\beta_j \sqrt{\mu_j}} J \right)^2 = \bar{a} \left( 1 + (-1)^{j+1} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_j} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_j}} u \right)^2. \quad (2.40)$$

On constate alors que l'intégrale  $\bar{a}$  fournit une valeur moyenne autour de laquelle les demi-grands axes oscilleront. Ajoutons que ce paramètre peut être vu comme un facteur d'échelle : il définit la taille du système planétaire, ou encore son unité de longueur. Ainsi, quelle que soit la valeur des  $\bar{a}$ , de  $\mathcal{G}$  ou encore celle des masses planétaires, le portrait de phase sera qualitativement toujours le même. En particulier, l'approximation quasi-circulaire donnée par le hamiltonien  $H_0$  fera, dans tous les cas, apparaître 5 points fixes associés aux 5 équilibres relatifs (2 configurations équilatérales et 3 alignées) décrits plus haut.



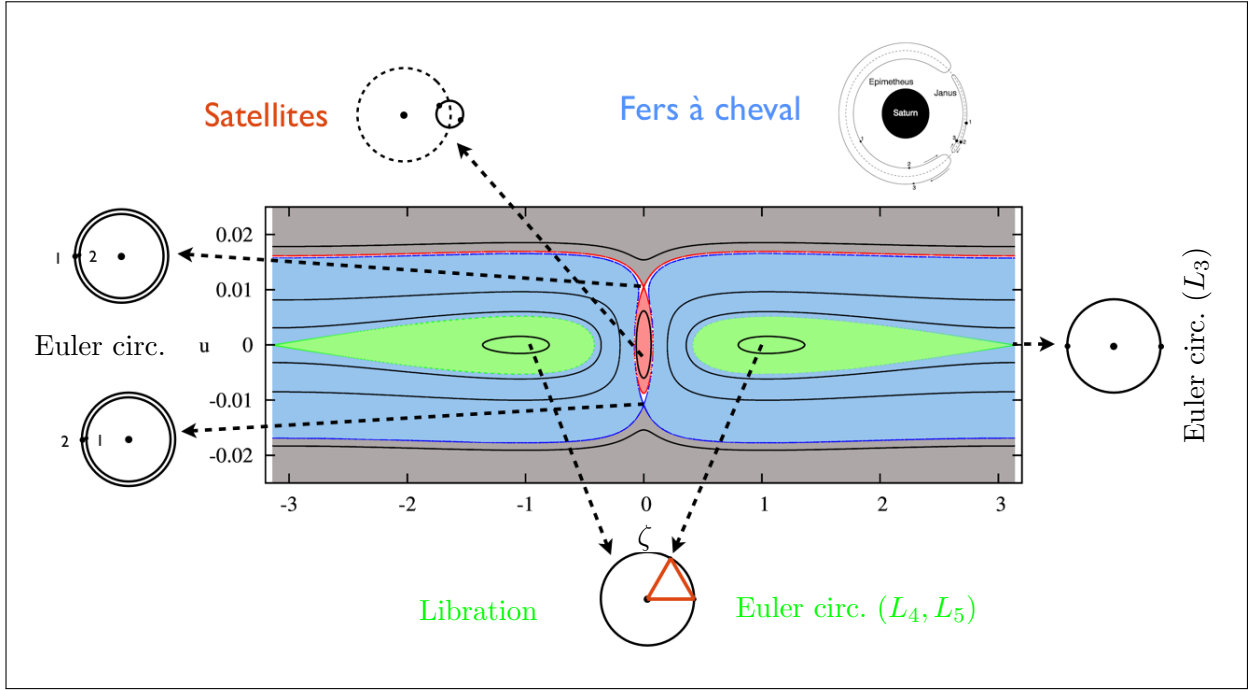


FIGURE 2.1 – Portraits de phases du hamiltonien  $H_0$  donné par (2.30) obtenu pour  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 10^{-3}$ ,  $m_2 = 3 \cdot 10^{-4}$  et  $G = a = 1$ . Les zones vertes correspondent aux régions de libration autour des équilibres de Lagrange équilatéraux, les régions bleues aux orbites de type fer à cheval, et les rouges aux situations où les deux planètes forment un couple serré qui tourne rapidement autour de leur centre de masse, lui-même en orbite autour du corps central. On retrouve sur cette figure les 5 points fixes associés aux configurations d’Euler et de Lagrange, ainsi que les variétés stables et instables qui divisent l’espace des phases.

La figure 2.1 représente ce dernier dans les variables  $(\zeta, u)$  pour  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 10^{-3}$ ,  $m_2 = 3 \cdot 10^{-4}$  et  $G = a = 1$ . Les parties grisées sont extérieures à la résonance coorbitale : pour  $u > 0$  l’angle  $\zeta$  circule dans le sens horaire ( $a_1 > a_2$ ) et dans le sens direct quand  $u$  est négatif. Quant aux régions vertes, bleues et rouges, elles correspondent aux différents types de mouvements en résonance coorbitale. Les deux points fixes elliptiques situés au cœur des deux régions vertes sont associés aux configurations équilatérales de Lagrange. Les coordonnées de ces derniers sont  $(\zeta, u) = (\pm\pi/3, 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$ , donc  $a_j = \bar{a} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . La partie principale du développement de  $H_0$  au voisinage de ces points fixes est donnée par

$$H_0^{(2)} = -\frac{3}{2} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 \bar{a}^2} J^2 + \frac{3Gm_1 m_2}{4\bar{a}} \left( \zeta \pm \frac{\pi}{3} \right)^2 \right) \quad (2.41)$$

et l’on retrouve bien la fréquence

$$\nu = \sqrt{\frac{27 G m_0}{4 \bar{a}^3} \frac{m_1 + m_2}{m_0}} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \sqrt{\frac{27}{4} \frac{m_1 + m_2}{m_0}} \omega (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \quad (2.42)$$

déjà obtenue en (2.24). Autour de ces points fixes, dans les régions vertes, les orbites correspondent à des déformations périodiques (quasi-périodiques dans le problème complet) des configurations équilatérales, l’amplitude de ces déformations augmentant à mesure qu’on s’éloigne des équilibres. Cette région est bornée par la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  associée au point fixe hyperbolique correspondant à la configuration d’Euler pour laquelle les deux planètes sont en opposition ( $L_3$  pour le problème restreint). Comme on l’a vu au paragraphe 2.2.2, cet équilibre vérifie  $\zeta = \pi$  et  $a_j = \bar{a} + \mathcal{O}(\varepsilon)$  (on trouvera dans [1] des expressions plus complètes concernant les coordonnées des équilibres d’Euler). A l’extérieur de ce domaine, par chaque point du domaine bleu passe une orbite en fer à cheval dont un exemple marquant est donné par le système Saturne-Janus-Epiméthée (paragraphe 4.2).

8. Ceci est vrai quelque soit l’ordre auquel est calculée la moyenne.

Il s'agit d'orbites entourant les 3 points fixes mentionnés ci-dessus. L'angle  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$  subit donc de grandes variations :  $\zeta \in [\Theta_3, 2\pi - \Theta_3]$ , avec  $0 < \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) < \Theta_3 < 2 \arcsin((\sqrt{2}-1)/2) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . La région bleue est limitée extérieurement par la séparatrice  $\mathcal{S}_1$  issue du point fixe hyperbolique dont les coordonnées vérifient  $\zeta = 0$  et  $u = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) > 0$ . Ce point correspond évidemment à la configuration alignée d'Euler pour laquelle le corps d'indice 1 est situé entre celui d'indice 2 et le corps le plus massif. Au-delà de  $\mathcal{S}_1$  (zones grises), le système n'est plus en résonance coorbitale. Le dernier domaine résonant, en rouge sur la figure 2.1, contient la singularité associée à la collision des deux planètes en  $(\zeta, u) = (0, 0)$ . A l'intérieur de cette région, les deux planètes sont satellites l'une de l'autre, leur centre de masse effectuant une révolution quasi-circulaire autour du Soleil. Il est donc fort probable que le hamiltonien moyen utilisé ici ne fournisse pas une représentation fidèle du mouvement « réel » des deux planètes, ou pire, qu'il n'y ait que très peu de rapport entre les trajectoires réelles et celles déduites de  $H_0$ . Mais la situation n'est pas si critique qu'il n'y paraît. Bien entendu, il est facile de montrer, comme dans [1], que la fréquence du mouvement autour de la singularité tend vers l'infini quand on s'en approche. Dans ce cas, le problème moyen ne peut pas représenter correctement la dynamique dans la zone des satellites (rouge) puisque la fréquence du mouvement y est plus grande de celle que la variable  $(\theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2)$  sur laquelle la moyenne est calculée. En revanche, même si la dynamique modélisée à l'intérieur de la zone des satellites par le hamiltonien moyen n'est pas représentative de celle du problème réel, la topologie de l'espace des phases est, au moins qualitativement, celle attendue. Les cinq équilibres relatifs y sont représentés, et la taille des différents domaines résonants est respectée. On vérifie en effet que la largeur des zones de libration autour des équilibres équilatéraux (mesurée dans la direction des  $u$ ) est d'ordre  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  et que celle de la zone associée aux orbites en fer à cheval est en  $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ . Ceci en fournit une démonstration indépendante de celle proposée par ce qui est démontré dans Dermott et Murray (1981). Notons enfin que l'approximation classique du problème moyen introduite par Yoder *et al.* (1983) pour décrire le mouvement de Janus et Epiméthée et que l'on trouve déjà dans Érdi (1977) dans le cadre du problème restreint, ne permet pas de séparer les orbites en fer à cheval de l'extérieur de la résonance coorbitale. En effet son hamiltonien, qui dans les variables utilisées ici prend la forme

$$-\frac{3}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{J^2}{a^2} + \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{a} \left( \cos \zeta - \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \zeta}} \right), \quad (2.43)$$

ne possède que 3 points fixes correspondant à  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Ainsi,  $\mathcal{S}_3$  décompose l'espace des phases du problème en 3 composantes distinctes : les 2 régions de libration autour des équilibres de Lagrange et le reste de l'espace des phases où toutes les orbites sont en fer à cheval.

### 2.3.3 Le voisinage des orbites circulaires planes

Après avoir étudié la dynamique sur la surface invariante  $\mathcal{C}_0$  associée aux orbites quasi-circulaires, il est naturel de s'intéresser à la dynamique dans les directions transversales, celles associées aux variables  $x_j$ . Autrement dit, il s'agit d'étudier la déformation des orbites « circulaires » sous l'effet d'une augmentation infinitésimale de leurs excentricités<sup>9</sup>. L'équation aux variations au voisinage de  $\mathcal{C}_0$  se déduit du hamiltonien

$$H_0(\zeta, J_j) + H_2(\zeta_1, J_j, x_j, \tilde{x}_j) \quad (2.44)$$

où les expressions de  $H_0$  et  $H_2$  sont données par (2.30) et (2.31). Au voisinage d'une solution donnée sur  $\mathcal{C}_0$ , elles s'écrivent<sup>10</sup>

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 2i\mathcal{G}m_1m_2 \begin{pmatrix} \frac{A_2}{\Lambda_1} & \frac{\bar{B}_2}{\Lambda_1} \\ \frac{B_2}{\Lambda_2} & \frac{A_2}{\Lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

9. Les variations verticales (directions des inclinaisons) sont également étudiées dans [1].

10. Il est préférable de les écrire en fonction des variables  $X_j$  plutôt qu'à l'aide des  $x_j$ , les solutions lues dans ce premier jeu de variables étant directement interprétable en terme d'éléments elliptiques.

Sauf si la solution de référence est choisie sur une des séparatrices  $\mathcal{S}_j \in \mathcal{C}_0$ , les coefficients de la matrice du système linéaire précédent dépendent périodiquement du temps par le biais des quantités  $(A_2, B_2, \Lambda_1, \Lambda_2)$ , dépendant elles-mêmes du temps à travers  $(\zeta(t), J(t))$ , solution périodique de  $H_0$ . Le théorème de Floquet montre qu'il existe une transformation linéaire dépendant périodiquement du temps qui permet de réduire le système (2.45) à un système autonome et donc trivialement intégrable. La stabilité des solutions de l'équation aux variations se déduit donc des valeurs propres de ce système autonome. Dans [1] (voir en particulier la figure 3 de cet article), nous avons calculé numériquement ces valeurs propres et montré qu'elles semblaient toujours être imaginaires pures<sup>11</sup>. Ainsi, il semble que  $\mathcal{C}_0$  soit normalement elliptique et que l'instabilité (l'hyperbolicité) soit essentiellement contenue dans ce plan. En conséquence, si l'on choisit une condition initiale en dehors de ce plan tout en en restant au voisinage, la solution correspondante se contente d'osciller autour du plan  $\mathcal{C}_0$ .

Cette étude au voisinage des équilibres de Lagrange fournit des résultats tout à fait intéressants. Pour les équilibres de Lagrange, choisissons  $\zeta = \pi/3$  et  $J = 0$  (le résultat sera similaire en  $\zeta = -\pi/3$ ), on a

$$A_2 = -\frac{27}{16}, B_2 = \frac{27}{16}e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \Lambda_j = m_j\sqrt{\mathcal{G}m_0\bar{a}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.46)$$

Ainsi, les valeurs propres de l'équation aux variations en excentricité (2.45) sont

$$v_1 = -i\frac{27}{8}\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\bar{a}}\left(\frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_2}\right) = -i\frac{27}{8}\frac{m_1+m_2}{m_0}\sqrt{\frac{\mathcal{G}m_0}{\bar{a}^3}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad v_2 = 0 \quad (2.47)$$

et les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_2 e^{i\frac{\pi}{3}} \\ -\Lambda_1 \end{pmatrix} = \sqrt{\mathcal{G}m_0} \begin{pmatrix} m_2 e^{i\frac{\pi}{3}} \\ -m_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

L'interprétation de ces directions propres en terme d'éléments elliptiques est la suivante. Le long de la direction neutre portée par  $V_2$ , les couples d'ellipses satisfont  $e_1 = e_2$  et  $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 = \pi/3$ . Sachant que  $a_1 = a_2 = \bar{a}$  et que  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2 = \pi/3$ , on retrouve les configurations équilatérales elliptiques de Lagrange. Le fait que la valeur propre  $v_2$  soit nulle indique simplement que les ellipses sont fixe. Le long de la direction propre associée à  $V_1$ , les éléments elliptiques des couples d'ellipses vérifient les relations

$$a_1 = a_2 = \bar{a}, \quad \zeta = \lambda_1 - \lambda_2 = \pi/3, \quad m_1e_1 = m_2e_2, \quad \text{et} \quad \Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 = \pi/3 + \pi. \quad (2.49)$$

Par conséquent, si  $m_1 = m_2$  et pour une faible excentricité, cette orbite périodique se déduit d'une configuration elliptique de Lagrange en faisant tourner une des deux ellipses d'un angle  $\pi$ . De plus, contrairement aux configurations de Lagrange, les excentricités ne sont plus en général égales, mais liées par une relation dépendante des masses planétaires. La valeur propre  $v_1$  associée à cette direction n'étant pas nulle, ces ellipses sont animées d'un mouvement de précession dont la fréquence est  $-iv_1 = \frac{27}{8}\frac{m_1+m_2}{m_0}\sqrt{\frac{\mathcal{G}m_0}{\bar{a}^3}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . La direction  $V_1$  engendre donc une famille d'orbites périodiques du problème moyen. Celle-ci se relève en une famille d'orbites quasi-périodiques à 2 fréquences du problème initial.

Ainsi, dans les directions normales à  $\mathcal{C}_0$ , les équilibres équilatéraux de Lagrange, pour lesquels les orbites planétaires sont circulaires, donnent naissance à deux familles d'orbites particulières. La première portée par  $V_2$  correspond aux configurations centrales de Lagrange (orbites elliptiques pour lesquelles la configuration équilatérale est toujours respectée). Il s'agit de points fixes du problème moyen, et donc d'orbites périodiques du problème des 3-corps. La deuxième famille est composée d'orbites périodiques du problème moyen, et donc d'orbites quasi-périodiques du

11. D'autres propriétés remarquables, telle l'existence de résonances d'ordre faible entre les fréquences  $g_1$  et  $\nu$  pour les orbites en fer à cheval, ont également été prouvées dans [1].

problème des 3-corps, une des fréquences étant le moyen mouvement et l'autre la fréquence de précession des périhélie. Cette deuxième famille est tangente, à son origine<sup>12</sup>, à la famille décrite dans Giuppone *et al.* (2010) dénommée « anti-Lagrange » par ces auteurs<sup>13</sup>. Ceci sera précisé au paragraphe suivant.

Notons que ce qui vient d'être effectué au voisinage des équilibres relatifs équilatéraux peut être également fait au voisinage des équilibres d'Euler. Résumons ici ce que l'on obtient au voisinage de l'équilibre relatif pour lequel les deux planètes sont en opposition (l'équivalent de  $L_3$ )<sup>14</sup>. Comme dans le cas précédant, la matrice de l'équation aux variations dans la direction des excentricités possède deux directions propres indépendantes. La première engendre les configurations d'Euler elliptiques : les deux ellipses ont même excentricité, leurs péricentres sont opposés et la valeur propre correspondante est nulle. La deuxième direction, issue de  $L_3$ , correspond aux couples d'ellipses dont les péricentres sont en conjonction, mais les planètes en opposition, ainsi, quand l'une est au péricentre, l'autre est à l'apocentre. Enfin, comme dans le cas des anti-Lagrange, les excentricités sont liées aux masses planétaires par la relation  $m_1 e_1 = m_2 e_2$ . A l'instar des anti-Lagrange, ces orbites précèdent à une fréquence proportionnelle à la valeur des masses planétaires. L'existence de ces orbites instables ( $L_3$  est un point hyperbolique de  $H_0$ ), dont la famille est étudiée numériquement par Hadjidemetriou *et al.* (2009), avait déjà été prouvée par Poincaré (1892) dans le tome I des méthodes nouvelles de la mécanique céleste (voir également Chenciner, 2012). Elles entrent dans la classe des orbites de Poincaré de deuxième sorte.

### 2.3.4 Prolongement de ces orbites remarquables et conjecture sur leur comportement asymptotique

#### Approche linéaire

L'étude de l'équation aux variations qui vient d'être effectuée met en évidence qu'au voisinage des points fixes du hamiltonien intégrable  $H_0$ , des directions propres donnent naissance, au moins localement, à des familles d'orbites périodiques ou de points d'équilibres.

Concentrons-nous, pour le moment, sur les équilibres de Lagrange circulaires. Au voisinage de  $L_4$  (les résultats seront identiques pour  $L_5$ ), on peut construire un système de coordonnées canoniques  $(z_0, \tilde{z}_0, z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2)$  qui diagonalise la partie quadratique de  $\bar{H}$  et réduit le hamiltonien moyen à l'expression :

$$i\nu z_0 \tilde{z}_0 + ig_1 z_1 \tilde{z}_1 + ig_2 z_2 \tilde{z}_2 + P(z_0, \tilde{z}_0, z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2) \quad (2.50)$$

où  $P$  contient les termes de degré strictement supérieur à 2. Dans cette dernière expression les variables canoniques  $(z_0, \tilde{z}_0) = (z_0, -i\bar{z}_0)$  sont définies par

$$z_0 = \frac{\alpha \left( \zeta - \frac{\pi}{3} \right) - i\alpha^{-1} J}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left( \frac{3\mathcal{G}\bar{a}}{4} \right)^{1/4} \left( \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} \right)^{1/4} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)). \quad (2.51)$$

Quant aux  $(z_1, z_2)$ , vérifiant également  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (-i\bar{z}_1, -i\bar{z}_2)$ , elles sont liées aux  $x_1, x_2$  par la matrice de passage qui diagonalise l'équation aux variations (2.45). En limitant les calculs aux termes principaux (en puissance de  $\varepsilon$ ) on obtient :

$$z_1 = \frac{\sqrt{m_2} e^{-i\pi/3} x_1 - \sqrt{m_1} x_2}{\sqrt{m_1 + m_2}}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{m_1} e^{-i\pi/3} x_1 + \sqrt{m_2} x_2}{\sqrt{m_1 + m_2}}. \quad (2.52)$$

Si, dans un premier temps, on se cantonne au point de vue linéaire (en négligeant  $P$ ), l'expression (2.50) montre que, de l'équilibre de Lagrange circulaire, sont issues trois familles d'orbites périodiques (dont une est de période infinie), portées par les trois directions propres du système différentiel associé. Le choix des coordonnées  $z_j$  fait que :

12. l'équilibre relatif circulaire de Lagrange.

13. Ces probablement parce qu'on peut déduire, schématiquement, ces orbites des configurations de Lagrange en retournant une des ellipses que les auteurs les ont nommées ainsi.

14. voir le paragraphe 3.1.2 de [1] pour plus de détails.

- La famille d'orbites circulaires de fréquence  $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  est portée par  $z_1 = z_2 = 0$ .
- Celle définie par  $z_0 = z_1 = 0$  correspond aux anti-Lagrange dont la fréquence est  $g_1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .
- La famille des points fixes ( $g_2 = 0$ ) associés aux Lagrange elliptiques a pour équation  $z_0 = z_1 = 0$ .

### Prolongement des familles d'orbites périodiques

Si le théorème central de Lyapunov (voir par exemple Meyer et Hall, 1992) s'appliquait directement au hamiltonien (2.50), on en déduirait l'existence de 3 familles d'orbites périodiques paramétrées par la valeurs  $H_f$  de ce hamiltonien. Ces 3 familles coïncideraient à l'origine ( $H_f = 0$ ), on pourrait donc considérer qu'elles prennent naissance à l'équilibre circulaire de Lagrange. En ce point, chacune des familles seraient tangentes à une des directions propres du système linéarisé. Supposons pour le moment que ces familles existent. Notons alors  $\mathcal{F}_0$  la famille tangente à l'origine à  $z_1 = z_2 = 0$  (famille quasi-circulaire), par  $\mathcal{F}_1$  celle tangente à  $z_0 = z_2 = 0$  (famille des anti-Lagrange) et enfin par  $\mathcal{F}_2$  celle tangente à  $z_0 = z_1 = 0$  (Lagrange elliptique). Au voisinage de l'origine, les fréquences des orbites périodiques de chacune des familles sont proches de  $\nu$  pour  $\mathcal{F}_0$ , de  $g_1$  pour  $\mathcal{F}_1$  et de  $g_2$  pour  $\mathcal{F}_2$ . Mais, en particulier parce que  $g_2 = 0$ , les conditions de non résonance nécessaires à l'application de ce théorème de Lyapunov ne sont pas satisfaites. Un moyen de passer outre cette dégénérescence et de contourner l'impossibilité d'appliquer le théorème de Lyapunov est de réduire le hamiltonien (2.50) à une forme normale de Birkhoff. Il s'agit de construire un système de coordonnées canoniques  $(\xi_0, \tilde{\xi}_0, \xi_1, \tilde{\xi}_1, \xi_2, \tilde{\xi}_2)$  ne différant des  $(z_j, \tilde{z}_j)$  qu'à partir du degré 2, dans lequel le hamiltonien moyen s'écrit :

$$N(\xi_j, \tilde{\xi}_j) = \sum_{q=0}^2 \gamma_q \xi_p \tilde{\xi}_p + \sum_{q_0+q_1+q_2 \geq 2} \gamma'_{q_0, q_1, q_2} (\xi_0 \tilde{\xi}_0)^{q_0} (\xi_1 \tilde{\xi}_1)^{q_1} (\xi_2 \tilde{\xi}_2)^{q_2}, \quad (2.53)$$

avec  $\gamma_0 = i\nu$ ,  $\gamma_1 = ig_1$  et  $\gamma_2 = 0$ . Les  $\gamma'_{q_0, q_1, q_2}$  sont des nombres complexes tels que les coefficients des monômes  $(\xi_2 \tilde{\xi}_2)^{q_2}$  sont nuls. Dans ces coordonnées, le hamiltonien  $N$  est intégrable, et les trajectoires solutions des équations de Hamilton qui lui sont associées sont quasi-périodiques. Les fréquences correspondantes sont simplement données par  $\omega_j = \frac{\partial N}{\partial I_j}$ , où les  $(\varphi_j, I_j)$  sont des coordonnées angle-action vérifiant  $\xi_j = \sqrt{I_j} e^{i\varphi_j}$ . Ainsi le système de coordonnées  $(\xi_j, \tilde{\xi}_j)$  permet de paramétrer simplement les 3 familles :

- *Famille  $\mathcal{F}_0$*  : elle regroupe les orbites quasi-circulaire et est paramétrée par

$$z_0 = \xi_0 + f(\xi_0, \tilde{\xi}_0), \quad z_1 = z_2 = 0, \quad \tilde{\xi}_0 = -i\bar{\xi}_0 \in \mathbb{C}, \quad (2.54)$$

$f$  étant un polynôme de degré  $2n$  en  $(\xi_0, \tilde{\xi}_0)$  dont le terme de plus bas degré est quadratique. Il s'agit simplement des orbites périodiques voisines de  $L_4$  du plan  $e_1 = e_2 = 0$ . Leur dynamique est régie par le hamiltonien  $H_0$  étudié au paragraphe 2.3.2.

- *Famille  $\mathcal{F}_1$*  : composée des anti-Lagrange, elle s'écrit

$$z_0 = P(\xi_1 \tilde{\xi}_1), \quad z_1 = \xi_1 + \xi_1 Q(\xi_1 \tilde{\xi}_1), \quad z_2 = \xi_1 R(\xi_1 \tilde{\xi}_1), \quad \tilde{\xi}_1 = -i\bar{\xi}_1 \in \mathbb{C} \quad (2.55)$$

où  $P, Q$  et  $R$  sont des polynômes de degré  $n$  d'une variable complexe s'annulant en zéro. On vérifie à l'aide des expressions (2.51) et (2.52) que pour chaque orbite de cette famille les quantités  $e_1, e_2, \lambda_1 - \lambda_2$  et  $\varpi_1 - \varpi_2$  sont constantes au cours du temps, mais que les valeurs de ces constantes évoluent le long de la famille.

- *Famille  $\mathcal{F}_2$*  : qui regroupe les configurations de Lagrange elliptiques et est paramétrée par :

$$z_0 = z_1 = 0, \quad z_2 = \xi_2, \quad \tilde{\xi}_2 = -i\bar{\xi}_2 \in \mathbb{C}. \quad (2.56)$$

## Réduction

On peut également s'intéresser à l'intersection des ces familles avec une surface de niveau du moment cinétique. D'après la formule (2.37), la somme du carré du module des coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  est invariante par le flot du système moyen. Comme on peut vérifier aisément que

$$C = |x_1|^2 + |x_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2, \quad (2.57)$$

une surface de niveau  $C = c \geq 0$  contient, au plus, une seule orbite de chaque famille. Plus précisément, la surface  $C = 0$  est réduite au seul point de Lagrange circulaire qui se trouve également être à l'intersection des 3 familles. En revanche, pour  $C = c > 0$ , la surface de niveau ne contient qu'une seule orbite de chacune des deux familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ , la famille circulaire  $\mathcal{F}_0$  étant entièrement contenue dans la surface  $C = 0$ .

L'invariance du moment cinétique permet, quand celui-ci n'est pas nul, de réduire le problème moyen d'un degré de liberté et d'aboutir ainsi à un système hamiltonien à 2 degrés de liberté. Mais cette réduction est singulière pour les mouvements circulaires, puisque la surface de niveau correspondante est réduite à un point. En dehors des mouvements circulaires, cette réduction peut s'effectuer en utilisant, par exemple, les variables  $\varpi_1 - \varpi_2$ ,  $\varpi_1 + \varpi_2$  et leurs actions conjuguées. Le hamiltonien étant invariant par rotation, seule la première combinaison angulaire y apparaît, la variable conjuguée du deuxième angle est alors une intégrale première liée au moment cinétique du système. Par conséquent, l'intersection d'une surface de moment cinétique non-nul avec chacune des deux familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  est un point fixe du problème réduit : l'orbite elliptique de Lagrange l'était déjà avant réduction, et la deuxième (anti-Lagrange) le devient naturellement, puisque la différence entre les longitudes du péricentre des deux ellipses est constante (égale à  $\pi/3 + \pi$  dans l'approximation linéaire de cette famille). Ainsi, bien que ne correspondant pas à une configuration remarquable des trois corps comme c'est le cas des configurations de Lagrange, les anti-Lagrange ont la particularité de coïncider avec des points fixes du problème moyen réduit. Il ne fait donc aucun doute que les points fixes « non symétriques » décrits par Giuppone *et al.* (2010) sont bien la version réduite de la famille de Lyapunov  $\mathcal{F}_1$  issue de la configuration de Lagrange circulaire.

Nous pouvons appliquer à l'équilibre circulaire d'Euler pour lequel les deux planètes sont à l'opposé du soleil (type  $L_3$ ) le même raisonnement que celui utilisé pour les équilibres circulaires de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$ . Ainsi, comme le dernier paragraphe de la section 2.3.3 le suggère<sup>15</sup>, cette configuration circulaire bifurque en 3 familles d'orbites périodiques instables. Une famille d'orbites circulaires évoluant dans le plan  $\mathcal{C}_0$ , la famille correspondant aux orbites de Poincaré de seconde sorte et la famille des points fixes correspondant aux configurations elliptiques d'Euler. Dans l'espace réduit (moment cinétique fixé à une valeur strictement positive), les deux dernières familles donnent naissance à des points fixes hyperboliques.

Notons enfin que le problème réduit possède d'autres points fixes que ceux qui bifurquent des équilibres de Lagrange et d'Euler. En effet, pour des excentricités suffisamment grandes, les orbites dites quasi-satellites conduisent à un point fixe elliptique (il n'en existe qu'un à moment cinétique fixé). Giuppone *et al.* (2010) montre l'importance de ce point fixe et des orbites voisines à grande excentricité, et Hadjidemetriou et Voyatzis (2011) en étudient la famille. Ces orbites n'existant pas pour de faibles excentricités, elles ne seront plus mentionnées ici.

## Conjecture sur l'extrémité des familles d'orbites remarquables

De l'équilibre équilatéral de Lagrange ( $L_4$  ou  $L_5$ ) sont issues trois familles d'orbites périodiques. Nous ne nous intéresserons pas ici à la famille  $\mathcal{F}_0$  cantonnée dans le plan  $\mathcal{C}_0$  (mouvements circulaires). La famille  $\mathcal{F}_2$  formée par les configuration équilatérales de Lagrange est quant à elle parfaitement connue. Elle commence en  $L_4$  ou  $L_5$  par un couple d'orbites circulaires concentriques, la configuration associée est normalement elliptique pour peu que les masses planétaires soient suffisamment faibles (c.f. critère de Gascheau au paragraphe 2.1). Puis, quand on se déplace

15. Voir également la section 3.1.2 de [1] pour plus de détails.

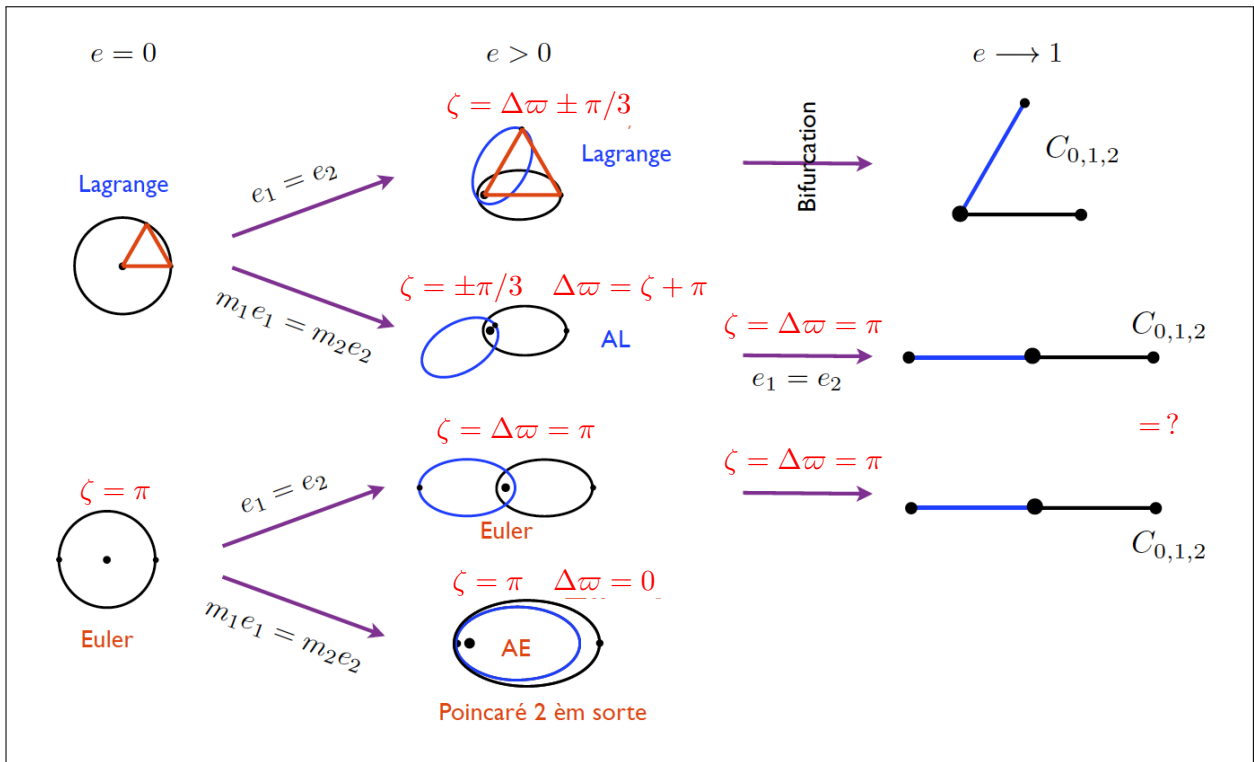


FIGURE 2.2 – Conjecture sur le comportement des familles d’orbites périodiques à grande excentricité. Cette figure propose une représentation schématique des familles d’orbites périodiques issues des équilibres relatifs circulaires de Lagrange et d’Euler. A partir de ces deux types d’équilibre, représentés dans la première colonne ( $e = 0$ ), naissent deux familles de Lyapunov d’orbites périodiques, la troisième qui correspond à des orbites circulaires n’est pas représentée sur cette figure. La deuxième colonne schématise les orbites des familles excentriques. La dernière colonne indique l’extrémité opposée de chaque famille, excepté celle des orbites de Poincaré de deuxième sorte. Les orbites issues de la branche Lagrange sont stables (au moins pour de petites excentricités) alors que celles associées à la branche Euler sont instables. Le notation  $C_{0,1,2}$  symbolise la collision triple. Se peut-il que la familles de Euler et celle des anti-Lagrange coïncident sur la variété de collisions ?

le long de la famille en augmentant les excentricités, les deux étant toujours égales, on rencontre un point de bifurcation situé à une valeur critique de l’excentricité dépendant des masses (voir Danby, 1964; Roberts, 2002; Nauenberg, 2002), où s’opère un changement de stabilité, les orbites devenant normalement hyperboliques. Cette famille, composée désormais d’orbites instables, se poursuit jusqu’à son extrémité. Sur l’orbite finale, chacune des deux planètes évolue sur un segment ( $e = 1$ ) séparé par un angle de  $\pm\pi/3$ . Sur cette orbite, les 3 corps entrent simultanément en collision (voir Fig. 2.2). En revanche, la famille  $\mathcal{F}_1$  est bien moins connue. Les orbites du type anti-Lagrange ont, semble t’il, été mises en évidence au cours des études numériques du hamiltonien réduit menées par Giuppone *et al.* (2010). Leur famille a ensuite été étudiée, toujours numériquement, par Hadjidemetriou et Voyatzis (2011)<sup>16</sup>. Leurs simulations montrent que, partant d’une configuration anti-Lagrange de faible excentricité où les relations  $m_1 e_1 = m_2 e_2$ ,  $\zeta = \pi/3$  et  $\Delta\varpi = \zeta + \pi$  sont vérifiées, lorsque l’on se déplace sur la famille par augmentation des excentricités, les planètes et les péricentres de leur orbites tendent à converger vers l’opposition par rapport au corps central. Au cours de cette évolution, la loi liant les masses aux excentricités est de moins en moins bien respectée (sauf quand  $m_1 = m_2$  où dans ce cas  $e_1 = e_2$ ). L’extrémité de cette famille n’est pas accessible simplement, en particulier à cause des problèmes numériques liés à la collision simultanée des trois corps, mais Hadjidemetriou et Voyatzis déduisent de leurs simulations que cette extrémité correspond au cas où  $\zeta = \Delta\varpi = \pi$  et  $e_1 = e_2 = 1$ , et ce indépendamment de la valeur

16. La méthode analytique basée sur la construction d’une forme normale de Birkhoff présentée plus haut permet une étude très détaillée des familles, mais limitée à un voisinage donné des points de Lagrange. Nous montrons en particulier, dans [1], que pour  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 1 \times 10^{-3}$  et  $m_2 = 1 \times 10^{-4}$ , on doit limiter les excentricités à  $e_1 = 0.07$  et  $e_2 = 0.23$ .

des masses planétaires. Il s'agit donc d'une orbite de collision triple où les trois corps évoluent sur une droite fixe.

Partons maintenant d'Euler de type  $L_3$  qui donne naissance à la branche du bas du diagramme 2.2. Si nous laissons de côté la famille associée aux orbites de Poincaré de deuxième sorte<sup>17</sup> qui a été étudiée par Hadjidemetriou *et al.* (2009), il nous reste la famille des configurations elliptiques d'Euler sur laquelle les deux planètes sont en permanence de part et d'autre du soleil. Le long de cette famille, les ellipses satisfont  $e_1 = e_2$  et  $\zeta = \Delta\varpi = \pi$ . Ainsi, si on se réfère aux résultats de Hadjidemetriou et Voyatzis décrits ci-dessus, il semble que cette famille et la famille  $\mathcal{F}_1$  des anti-Lagrange ont la même extrémité :  $e_1 = e_2$  et  $\zeta = \Delta\varpi = \pi$ . A priori, ceci peut sembler surprenant. En effet, les configurations d'Euler conduisent à des orbites périodiques (les ellipses sont fixes, seules les planètes sont mobiles) alors que les anti-Lagrange forment des orbites quasi-périodiques à deux fréquences (mouvement des planètes et précession des orbites). Mais, il est probable que la fréquence de précession de ces orbites tende vers zéro quand les excentricités tendent vers 1. Nous montrons dans [1] que, dans le domaine où la forme normale de Birkhoff est valide, cette fréquence de précession décroît rapidement. De plus, des simulations numériques préliminaires que j'ai effectuées sur les anti-Lagrange à haute excentricité semblent confirmer cette décroissance vers zéro.

Pour le moment, la question de savoir si la famille des anti-Lagrange et celle des Euler se terminent toutes deux par la même orbite homographique menant à la collision triple est ouverte. Cependant, la vérification de cette conjecture permettrait de construire un chemin de l'espace des orbites joignant la configuration d'Euler pour laquelle les planètes sont opposées aux équilibres circulaires de Lagrange (soit  $L_4$  soit  $L_5$ ) par l'intermédiaire de la famille  $\mathcal{F}_1$  et d'une orbite de collision triple.

---

17. A l'instar des anti-Lagrange, dans l'approximation linéaire, donc à faible excentricité, ces orbites peuvent être obtenues à partir d'une configuration d'Euler faiblement excentrique par laquelle on fait tourner de  $\pi$  une des ellipses tout en maintenant la différence des longitudes moyennes  $\zeta$  constamment égale à  $\pi$ .



# Chapitre 3

## Dynamique des essaims de troyens : application à Jupiter

### 3.1 Résonances secondaires dans un essaim de troyens

Afin de décrire dans ses grandes lignes l'ensemble des résonances affectant significativement la dynamique d'un essaim de troyens, nous parlerons dans la suite de la structure résonante de l'essaim, limitons nous dans un premier temps au problème restreint des 3-corps. En faisant tendre une des masses planétaires vers zéro, le chapitre précédent nous montre que les points de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$  sont elliptiques et que les fréquences  $(\nu, g, s)$  y sont données par :

$$\nu_{L_{4,5}}^{(0)} = \sqrt{(27/4)\varepsilon}n + o(\sqrt{\varepsilon}), g_{L_{4,5}}^{(0)} = (27/8)\varepsilon n + o(\varepsilon) \quad \text{et} \quad s_{L_{4,5}}^{(0)} = 0, \quad (3.1)$$

où  $n$  est le moyen mouvement de la planète abritant les troyens, l'indice (0) indiquant que les fréquences sont calculées dans le cadre du problème des 3-corps (dont on considérera une perturbation par la suite). On peut vérifier, au moins dans les régions de librations autour des points de Lagrange équilatéraux, que les 3 fréquences fondamentales de l'astéroïde diffèrent de celles données ci-dessus, mais restent toujours du même ordre de grandeur, sauf éventuellement pour  $s$ . En effet,  $|s|$  passe de la valeur zéro, aux points de Lagrange, à des valeurs de l'ordre de la masse planétaire quand l'inclinaison est importante, mais toujours en restant strictement inférieur à  $g$  (voir Morais ; 2001). Ainsi, ces trois différentes échelles de temps  $\mathcal{O}(1)$ ,  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  et  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  rendent peu nombreuses les possibilités de résonance significative entre ces fréquences. Ceci est d'autant plus vrai que la masse de la planète abritant les troyens, donc  $\varepsilon$ , est faible. Cependant, pour une masse de l'ordre de celle de Jupiter, pour laquelle la quantité  $1/\sqrt{\varepsilon}$  est de l'ordre de 31, ces résonances<sup>1</sup> qui prennent la forme

$$i\nu + jn_p + kg = 0, \quad (i, j, k) \in \mathbb{Z}^3, \quad (3.2)$$

peuvent, bien qu'étant d'ordre élevé, profondément affecter la dynamique de régions spécifiques des essaims. En effet, nous montrons dans Robutel *et al.* (2005) et [2] que des résonances de la forme (3.2) pour  $i = 1$  et  $j \in \{11, 12, 13, 14\}$  génèrent de fortes instabilités dans les parties extérieures des essaims, même en modélisant la dynamique par le problème restreint des 3-corps. Pour des modèles plus sophistiqués, d'autres familles de résonances viennent ajouter de l'instabilité dans ces régions.

Admettons maintenant que la planète abritant les essaims de troyens fasse partie d'un système formé de  $N$  planètes. Nous supposerons également, comme nous l'avons fait au paragraphe 1.2, que le système planétaire est hors résonance, quasi-périodique. Nous noterons alors  $(n_1, \dots, n_N)$

---

1. S'agissant des résonances apparaissant à l'intérieur d'une résonance, ici la résonance en moyen mouvement 1:1, on peut les dénommer résonances secondaires, bien qu'en général ce terme soit employé dans le cas où la fréquence de libration associée à la première résonance est commensurable à une autre fréquence. Nous verrons plus loin que c'est bien le cas pour les résonances de la famille I et II données par (3.4) et (3.5), mais qu'il en est autrement pour celles des familles III et IV définies par (3.7) et (3.6).

ses moyens mouvements propres,  $(g_1, \dots, g_N)$  les fréquences séculaires associées à la précession des périhélie et  $(s_1, \dots, s_N)$  celles des nœuds. Admettons enfin que les moyen mouvements propres sont d'ordre 1 et les fréquences séculaires d'ordre  $\varepsilon$ , avec  $\varepsilon = \max(m_1/m_0, \dots, m_N/m_0)$ .

Une difficulté qu'entraîne cette modélisation par le problème restreint des  $(N+2)$ -corps réside dans la définition des points de Lagrange. Dans le cas du problème restreint circulaire des 3-corps, ces derniers sont des points fixes en repère tournant. Pour le problème restreint elliptique, il s'agira encore de points fixes, mais dans un repère tournant et pulsant de manière à ce que la distance entre Jupiter et le Soleil soit à tout instant constante. Si, comme c'est le cas ici, nous considérons une perturbation quasi-périodique du problème restreint, on peut supposer, si la perturbation est suffisamment faible, que chacune des deux configurations équilatérales de Lagrange est remplacée par une orbite quasi-périodique dont les fréquences fondamentales sont celles du système planétaire (voir Jorba et Simó, 1996; Jorba, 2000; Gabern, 2003; Hou *et al.*, 2014a,b). La projection d'une telle orbite sur l'espace des positions ne coïncidera pas avec le troisième sommet d'un des triangles équilatéraux dont le Soleil et Jupiter forment les autres sommets, mais sera animée d'un mouvement quasi-périodique au voisinage de celui-ci. Par analogie, nous nommerons ce troisième sommet point équilatéral.

De manière plus générale, ces perturbations quasi-périodiques permettent de considérer le problème comme un système hamiltonien à trois degrés de liberté (ces degrés correspondent aux mouvements du troyen) dépendant quasi-périodiquement du temps. Les fréquences des perturbations (fréquences de forçage) sont évidemment les fréquences fondamentales du système planétaire. La prise en compte des ces fréquences de forçage augmente grandement les possibilités de résonances et donc la richesse de la dynamique du problème. De manière schématique, on peut considérer que les résonances principales s'obtiennent à partir des relations (3.2) en remplacer le second membre, égal à zéro dans le cas restreint des 3-corps, par des combinaisons linéaires des fréquences fondamentales du système, c'est à dire :

$$i\nu + jn_p + kg = \sum_l (i_l n_l + j_l g_l + k_l s_l), \quad (3.3)$$

les  $i_l, j_l$  et  $k_l$  étant des entiers relatifs<sup>2</sup>. Toutes les combinaisons ci-dessus n'engendrent pas nécessairement de résonances significatives. Les principales résonances, celles dont l'influence sur la dynamique des essaims est la plus notable, peuvent être regroupées suivant quatre familles distinctes.

Afin de simplifier la discussion qui suit, supposons que le système planétaire étudié ne comporte que deux planètes : celle qui abrite les essaims (planète 1) et une deuxième planète perturbatrice qui peut être intérieure où extérieure à la première<sup>3</sup>. Dans ce cas, les fréquences fondamentales de forçage seront :  $(n_1, n_2, g_1, g_2, s_1)$ , en supposant que la fréquence nulle soit  $s_2$ . Un moyen simple et efficace de décrire la structure des résonances affectant les essaims consiste à faire évoluer la géométrie du système planétaire. Nous donnerons une application naturelle de ce procédé au paragraphe 3.5.

Pour commencer, fixons la configuration du système de manière à ce que les planètes soient loin des principales résonances orbitales. Ainsi, les fréquences de forçage se décomposent en deux groupes disjoints : les fréquences orbitales d'ordre 1 et les fréquences séculaires d'ordre  $\varepsilon$ . De plus, une combinaison linéaire des moyen mouvements dont la valeur absolue des coefficients reste raisonnablement faible est encore une quantité d'ordre 1. En ce qui concerne le troyen, ses fréquences propres sont d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  pour la fréquence de libration  $\nu$  et d'ordre  $\varepsilon$  pour les fréquences séculaires.

2. Rappelons que l'indice  $p$  correspond à celui de la planète qui héberge les troyens.

3. Comme nous l'avons fait dans [3] cet exposé se généralise aisément à un système comportant  $N$  planètes.

Dans ce cas, les résonances secondaires les plus simples à envisager correspondent à la situation où le rapport  $\nu/n_1$  est proche d'être rationnel. Notre première famille de résonances est donc définie par :

$$\boxed{\text{Famille I : } i\nu + jn_p = kg + ls + k_1g_1 + k_2g_2 + k_3s_1, \quad i \neq 0, j \neq 0.} \quad (3.4)$$

Nous verrons l'importance de cette famille de résonance aux paragraphes 3.2 dans les cas des troyens de Jupiter. Si maintenant, nous modifions la géométrie de notre système<sup>4</sup> de manière à rapprocher nos planètes de la résonance en moyen mouvement  $\alpha : -\beta$  avec  $|\alpha| + |\beta|$  assez petit, la fréquence  $\nu_{\alpha,\beta} = \alpha n_1 - \beta n_2$  qui auparavant était d'ordre 1, voit sa valeur absolue diminuer. En poursuivant le processus jusqu'à ce que les fréquences  $\nu$  et  $\nu_{\alpha,\beta}$  soient du même ordre de grandeur, les résonances ainsi engendrées prendront la forme :

$$\boxed{\text{Famille II : } i\nu - j\nu_{\alpha,\beta} = kg + ls + k_1g_1 + k_2g_2 + k_3s_1, \quad i \neq 0, j \neq 0.} \quad (3.5)$$

Ces résonances, dont l'influence sera précisée au paragraphe 3.3, jouent un rôle dynamique important pour les troyens de Jupiter ayant une grande amplitude de libration (autour des points de Lagrange), en particulier pour  $\nu_{\alpha,\beta} = n_{Jup} - 3n_{Sat}$  et  $\nu_{\alpha,\beta} = n_{Jup} - 2n_{Sat}$ . Les essais de Neptune contiennent également cette famille de résonance pour  $\nu_{\alpha,\beta} = n_{Ura} - 2n_{Nep}$  (Bodossian, 2008; Zhou *et al.*, 2009, 2011).

En rapprochant encore le système de la résonance  $\alpha : -\beta$ , une nouvelle famille apparaît, liant la fréquence  $\nu_{\alpha,\beta}$  à la fréquence séculaire  $g$  ou éventuellement  $s$ . Ainsi définie, la famille IV satisfait la relation :

$$\boxed{\text{Famille IV : } j\nu_{\alpha,\beta} + kg = ls + k_1g_1 + k_2g_2 + k_3s_1, \quad j \neq 0, k \neq 0.} \quad (3.6)$$

Pour  $\nu_{\alpha,\beta} = 2n_{Jup} - 5n_{Sat}$ , la famille IV joue un rôle majeur dans la dynamique à long terme des certains troyens de Jupiter (voir paragraphe 3.3). Ces résonances sont également largement impliquées dans les mécanismes d'instabilité des essais de Saturne (Bodossian, 2008).

Le dernier type de résonance, bien connu dans tout le système solaire que l'on soit ou non à l'intérieur d'une résonance en moyen mouvement, est celui des résonances séculaires, que nous nommerons famille III. Elle est définie par la relation :

$$\boxed{\text{Famille III : } kg + ls + k_1g_1 + k_2g_2 + k_3s_1 = 0.} \quad (3.7)$$

Ces résonances classiques sont présentes dans tous les essais de troyens des planètes du système solaire. Elles jouent un rôle prépondérant dans la dynamique des troyens des planètes telluriques comme le suggèrent Scholl *et al.* (2005a) pour Mars, Scholl *et al.* (2005b) pour Venus et plus généralement Evans et Tabachnik (2000), Morais et Morbidelli (2002) et Morais et Morbidelli (2006).

Pour terminer, indiquons quelques limites à la classification des familles indiquée ci-dessus. Tout d'abord, elle est bien adaptée à un système planétaire comparable au système solaire, et en particulier aux troyens des planètes géantes. Mais, il ne faut pas non plus que la masse de la planète dont on étudie les troyens soit trop importante par rapport à celle de l'étoile. En effet, quand les masses s'approchent de la valeur de Gascheau ( $m_p/m_0 \approx$ , paragraphe 2.1),  $g$  devient comparable à  $\nu$  et d'autres phénomènes peuvent se produire. Enfin, notons que, si l'aplatissement du corps central est relativement important, dans le cas par exemple pour un système de satellites d'une planète géante, la fréquence de précession du péricentre  $g$  est bien plus élevée que ne l'est la fréquence de libration  $\nu$  (c'est le cas pour Janus et Epiméthée voir chapitre 4). Ceci offre d'autres possibilités de résonances qui ne seront pas considérées ici.

## 3.2 La structure résonante des troyens de Jupiter

Après ces considérations générales, intéressons-nous à la dynamique à l'intérieur des essais de troyens de Jupiter tels qu'ils sont dans le système solaire actuel. La majeure partie des résultats

4. On peut, pas exemple, modifier la valeur d'un des demi-grands axes.

qui seront présentés a été obtenue par l'analyse de l'application fréquence. Elle sera construite de manière similaire à celle présentée au paragraphe 1.4, mais en remplaçant le moyen mouvement propre  $n$ , qui dans le cas des troyens est toujours égal au moyen mouvement propre de Jupiter, par la fréquence  $\nu$  dite fréquence de libration. Elle sera déduite de l'approximation quasi-périodique de  $a \exp i(\lambda - \lambda_{Jup})$  et sera ainsi associée à la libration de la longitude moyenne du troyen autour de celle de Jupiter. Nous étudierons donc l'application qui, pour une valeur fixée des éléments elliptiques angulaires initiaux du troyen  $\Theta_0 = (\lambda_0, \varpi_0, \Omega_0)$ , aux variables d'action  $(a, e, \mathcal{I})$  associe les fréquences fondamentales  $(\nu, g, s)$ . Notons que, comme dans le cas des astéroïdes de la ceinture principale en dehors des résonances en moyen mouvement, dans le cas de la résonance coorbitale, les fréquences  $g$  et  $s$  sont déterminées à partir des fonctions du temps  $e \exp(i\varpi)$  et  $\sin(\mathcal{I}/2) \exp(i\Omega)$ .

Avant de poursuivre, précisons un point sur lequel sont basées les études présentées dans [3]. Notons d'abord  $F_0$  l'application fréquence dans le cas du problème restreint elliptique des 3-corps (Soleil, Jupiter sur une orbite elliptique et une particule),  $\Theta_0$  étant fixé. Ajoutons à ce problème une perturbation dépendant quasi-périodiquement du temps, et notons  $F_\varepsilon$  l'application fréquence définie dans ce cas,  $\Theta_0$  étant toujours fixé à la même valeur.  $F_\varepsilon$  peut alors être vue comme une perturbation de l'application fréquence  $F_0$ . En d'autres termes, l'image  $F_0(\mathcal{D})$  d'un domaine tridimensionnel  $\mathcal{D}$  de l'espace des actions de l'espace des actions  $(a, e, \mathcal{I})$  par l'application  $F_0$  est voisine de l'image du même domaine par  $F_\varepsilon$ , ceci au moins pour leur partie régulière, image par l'application fréquence des conditions initiales conduisant à des tores de KAM. Bien que n'étant pas clairement démontrée, cette affirmation est vérifiée numériquement dans le cas de Jupiter dans [2], [3] également pour Saturne et Neptune dans Bodossian (2008), et son utilisation sera essentielle dans tout ce chapitre.

Revenons maintenant à l'étude de la dynamique des troyens de Jupiter. Nous avons montré dans [2] que le modèle le plus simple qui représentait les principales structures dynamiques rencontrées dans les essais de troyens de Jupiter était celui contenant les troyens, le Soleil, Jupiter et Saturne. Par rapport au modèle contenant les 4 planètes géantes, ce dernier a l'avantage de ne contenir que peu de fréquences perturbatrices (extérieures). En effet, une trajectoire quasi-périodique du système planétaire Soleil, Jupiter, Saturne possède les 5 fréquences fondamentales<sup>5</sup>  $(n_5, n_6, g_5, g_6, s_6)$ . Ainsi, en s'appuyant sur la description des 4 familles de résonances présentées au paragraphe 3.1, l'identification d'une résonance particulière reste abordable, ce qui n'est plus nécessairement le cas pour le modèle incluant les 4 planètes géantes et donc 11 fréquences de forçage. Mais ceci n'a que peu d'importance puisque l'ajout d'Uranus et Neptune au modèle n'altère que très modérément la structure résonante des essais de troyens de Jupiter [2].

Concentrons-nous désormais sur le cas des troyens de Jupiter modélisés par le problème restreint des 4 corps (Soleil, Jupiter, Saturne, petit corps). Notons d'abord qu'il n'y pas de différence notable entre la dynamique globale de l'essaim centré en  $L_4$  qui précède Jupiter sur son orbite et celui qui la succède, nous reviendrons sur ce point au paragraphe 3.4. Pour cette raison, nous nous concentrerons sur l'essaim de  $L_4$ .

La figure 3.1 permet d'apprécier les détails de la structure dynamique de l'essaim. A chaque couple de conditions initiales  $(a, e) \in [5.005, 5.403] \times [0, 0.4]$ , les autres conditions initiales étant fixées à  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_5$ ,  $\lambda - \lambda_5 = \varpi - \varpi_5 = \pi/3$  et  $\Omega = \Omega_5$ , est assignée une couleur correspondant à la diffusion de la fréquence  $\nu$  calculée sur deux intervalles de temps consécutifs de 5 millions d'années chacun. La zone la plus stable, bleu foncé où la diffusion relative  $|(\nu^1 - \nu^2)/\nu^1| < 10^{-6}$ , inclut un large voisinage de la configuration équilatérale de Lagrange situé en  $(a, e) \approx (5.21, 0.05)$ , que l'on notera encore  $L_4$ , en gardant en mémoire qu'il ne s'agit pas d'une orbite périodique comme dans le problème restreint circulaire mais d'une trajectoire quasi-périodique (voir paragraphe 3.1). De cette région centrale partent des structures dont la diffusion est plus élevée (vertes à jaunes) qui viennent s'accumuler à la frontières de l'essaim en des structures de haute diffusion ( $> 10^{-2}$  en rouge). Les instabilités induites par ce recouvrement tendent à éjecter les troyens à l'extérieur de

---

5. Par analogie aux planètes du système solaire,  $n_5$  et  $n_6$  sont les moyen mouvements propres de Jupiter et de Saturne, 5 ième et 6 ième planètes. Les notations  $g_5, g_6, s_6$  se rapportent aux fréquences séculaires du système solaire (voir Carpino *et al.*, 1987; Laskar, 1990). Par convention la fréquence  $s_5$  est nulle.

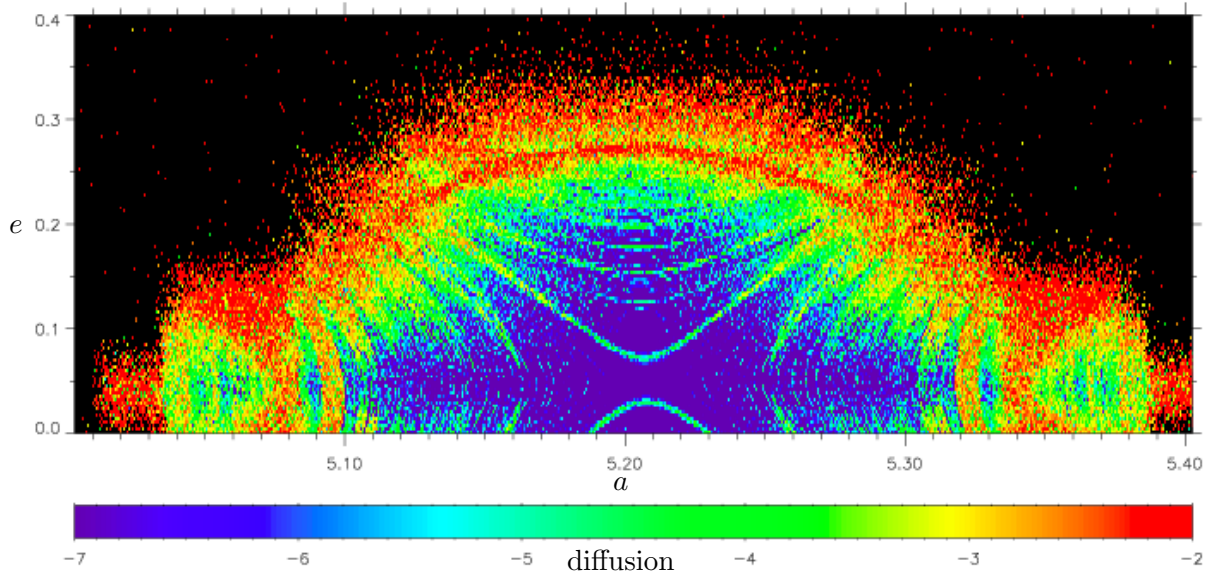


FIGURE 3.1 – Carte dynamique de l'essaim  $L_4$  de Jupiter. Coupe dans le plan de coordonnées  $(a, e)$  pour  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_5 + 2^\circ$ . Le code de couleur indique les différentes valeurs de la quantité  $\log_{10} \left| \frac{\nu^1 - \nu^2}{\nu^1} \right|$  mesurant la diffusion en  $\nu$ .

la résonance coorbitale (régions noires). Notons également que ces structures, qui sont liées à la présence de résonances, sont symétriques par rapport à la droite  $e = e_5 \approx 0.0489$  et également par rapport à la droite verticale  $a = a_5 \approx 5.2035$  ua. Ces propriétés, qui sont explicitées dans [2] permettent de réduire le domaine d'étude au rectangle  $a \geq a_5$  et  $e \geq e_5$ .

Il convient maintenant d'identifier les résonances sous-jacentes à ces structures. On trouve la trace de certaines de ces résonances dans la littérature : Michtchenko *et al.* (2001) montrent que la grande "arche" rouge qui borde la limite extérieure de l'essaim sur notre figure 3.1 correspond à la résonance séculaire  $s = s_6$ ; et Nesvorný et Dones (2002) suspectent les commensurabilités entre la fréquence de libration du troyen  $\nu$  et la fréquence associée à la combinaison de longitudes  $\lambda_5 - 2\lambda_6$  d'engendrer certaines instabilités. Ces deux types de résonances font respectivement partie des familles III, définie par l'équation (3.7), et II avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$  décrite en (3.5), formules dans lesquelles on aura pris soin de remplacer les fréquences génériques  $(g_1, g_2, s_1)$  par  $(g_5, g_6, s_6)$ .

L'identification des autres résonances qui structurent la dynamique des essaims de troyens de Jupiter n'est pas nécessairement aisée. Si la troisième loi de Kepler permet une correspondance presque évidente entre le demi-grand axe et la résonance orbitale dans laquelle se trouve un astéroïde (voir paragraphe 1.3), celle reliant les éléments elliptiques et les fréquences  $(\nu, g, s)$  n'a rien d'immédiat. Pour parvenir à nos fins, trois ingrédients sont essentiels : la bijection entre les actions et les fréquences, qui permet de localiser une structure instable de l'espace des actions dans celui des fréquences, et réciproquement ; la classification des résonances en 4 familles présentées au paragraphe 3.1 qui permet de restreindre le nombre de combinaisons de fréquences susceptible de correspondre à la résonance observée dans l'espace des fréquences ; et le recours à un modèle dynamique simplifié, comme le problème restreint elliptique des 3-corps qui permet de limiter les possibilités de résonances. Sans entrer dans les détails de cette analyse<sup>6</sup>, montrons sa mise en œuvre sur un exemple. Intéressons-nous d'abord aux résonances traversant l'essaim de  $L_4$  modélisé par le problème restreint elliptique des 3-corps. La partie en haut à gauche de la figure 3.2 présente une carte dynamique de ce problème dans l'espace des actions restreint au domaine

$$\mathcal{D} = \{(a, e) \in [5.2, 5.4] \times [0.05, 0.3], \mathcal{I} = \mathcal{I}_5 + 2^\circ, \lambda - \lambda_5 = \varpi - \varpi_5 = \pi/3, \Omega = \Omega_5\}. \quad (3.8)$$

La figure en bas à gauche correspond à la projection sur le plan de coordonnées  $(g, \nu)$  de l'image de  $\mathcal{D}$ , une surface de  $\mathbb{R}^3$ , par l'application fréquence. Comme nous l'avons vu pour les résonances

6. Toutes les précisions nécessaires sont fournies dans [3] et [2].

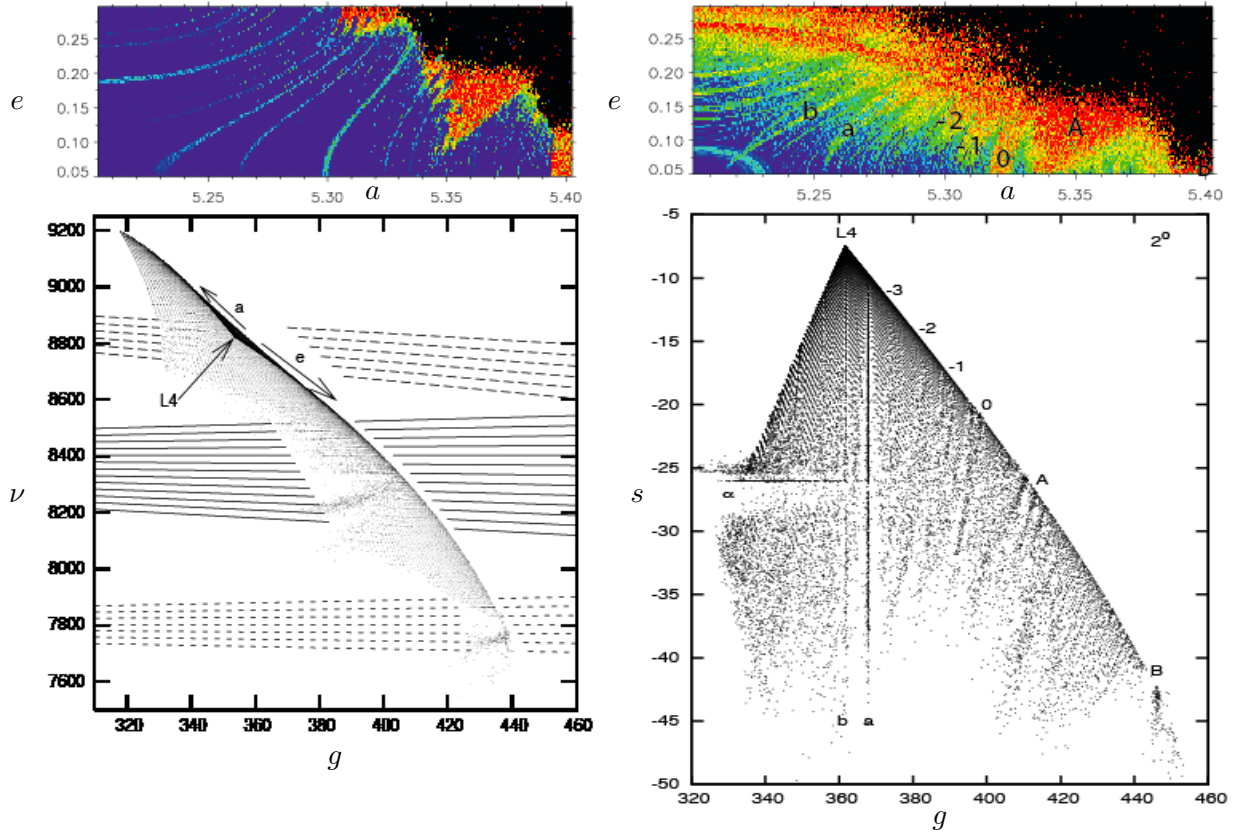


FIGURE 3.2 – Structure résonante de l'essaim  $L_4$  de Jupiter. Les conditions initiales des troyens sont équi-réparties dans le domaine  $\mathcal{D} = \{(a, e) \in [5.2, 5.4] \times [0.05, 0.3], \mathcal{I} = \mathcal{I}_5 + 2^\circ, \lambda - \lambda_5 = \varpi - \varpi_5 = \pi/3, \Omega = \Omega_5\}$ . La colonne de gauche correspond au problème restreint elliptique des 3-corps, celle de droite au problème restreint des 4-corps incluant le Soleil, Jupiter et Saturne. En haut, les couleurs indiquent la diffusion de la fréquence  $\nu$ , le code étant le même que sur la figure 3.1. Aux figures du bas correspondent les projections, sur le plan  $(g, \nu)$  à gauche, sur le plan  $(g, s)$  à droite, de l'image de  $\mathcal{D}$  par l'application fréquence.

séculaires de la ceinture d'astéroïdes, les lignes droites visibles sur le diagramme des fréquences sont associées à des résonances. On montre simplement, à l'aide de la formule 3.3, que ces structures correspondent aux trois groupes de résonances  $12\nu - n_5 = qg$ ,  $13\nu - n_5 = qg$  et  $14\nu - n_5 = qg$ , les valeurs de l'entier  $q$  étant données au paragraphe 2.3.2.1 de Robutel *et al.* (2005). Ces résonances sont parfaitement visibles dans l'espace des actions. Proche le  $L_4$ , elles s'identifient aux fines courbes bleu clair, à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'essaim, la largeur de la zone d'instabilité (modérée) augmente jusqu'à la fusion des régions résonantes associées à chacun des trois groupes présentés plus haut. Ce recouvrement donne finalement naissance aux trois grandes régions chaotique (rouges) visibles sur la figure.

Après perturbation du modèle par l'ajout de Saturne, la structure résonante de l'essaim se diversifie et s'enrichit notablement. Comme le montre la colonne de droite de la figure 3.2 (haut), de nouvelles structures apparaissent. Pour les identifier, il est encore une fois nécessaire de recourir aux fréquences. En effet, dans l'espace tridimensionnel des fréquences fondamentales, une résonance s'identifie à un plan. L'intersection de ce plan résonant avec l'image de  $\mathcal{D}$  par l'application fréquence est donc une courbe plane. La projection de cette courbe sur un plan est alors une droite, si ce plan est perpendiculaire au plan résonant, et une courbe dans le cas contraire. Ainsi, par des choix judicieux des plans sur lesquels on projette l'image de  $\mathcal{D}$  par l'application fréquence, l'identification des résonances devient (relativement) aisée. Sur le plan de coordonnées  $(\nu, g)$  on retrouve évidemment les résonances déjà identifiées dans le cas du problème restreint des 3-corps, dont les principales structures qui sont indiquées par les lettres A et B (Fig. 3.2 en haut à droite) sont engendrées par les résonances de la famille I correspondant aux relations  $13\nu - n_4 = kg + k_5g_5 + k_6g_6 = 0$  et  $14\nu - n_4 = kg + k_5g_5 + k_6g_6 = 0$ . La situation est compliquée

par la présence de résonances de la famille II qui sont indiquées sur la figure par les labels  $-p$ ,  $p$  allant de 0 à 3 et ont pour équation  $5\nu - 2(n_5 - 2n_6) + pg + p_5g_5 + p_6g_6 = 0$ .

En projetant sur le plan  $(g, s)$  (Fig. 3.2 en bas à droite), d'autres droites résonantes se dessinent. On vérifie que ces droites horizontales et verticales correspondent respectivement à des résonances de la famille III, qui regroupe les résonances séculaires, et à la famille IV, où la fréquence  $\nu_{\alpha,\beta}$  intervenant dans la formule (3.6) est égale à  $2n_5 - 5n_6 = \nu_{2,5}$ , autrement dit, à la fréquence de la grande inégalité. Parmi toutes les structures qui apparaissent sur le rectangle en bas à droite de la figure, les plus notables sont les structures verticales (notées a et b) et horizontales dont la principale est notée  $\alpha$ . Les structures a et b correspondant respectivement aux résonances  $4g + 2n_5 - 5n_6 - g_5 = 0$  et  $4g + 2n_5 - 5n_6 - 2g_5 + g_6 = 0$ . La structure  $\alpha$  n'est autre que la résonance séculaire  $s = s_6$  qui délimite, pour de faibles inclinaisons, les régions les plus stables des essaims. Si ici la structure résonante des essaims à faible inclinaison a été survolée, elle est étudiée en détails dans l'article [2], ainsi que la modification de sa géométrie pour des inclinaisons plus élevées.

### 3.3 Dynamique à long terme et diffusion dans l'espace des fréquences

Toutes les simulations présentées jusqu'ici ont été réalisées sur une échelle de temps relativement courte. L'idée proposée dans [2] est d'itérer le processus ayant conduit à la réalisation de la figure 3.2 dans un double objectif : d'une part de comprendre et de mesurer l'effet de la structure résonante mise à jour ci-dessus sur la stabilité à long terme des essaims de troyens de Jupiter et d'autre part de pouvoir observer la dynamique directement dans l'espace des fréquences.

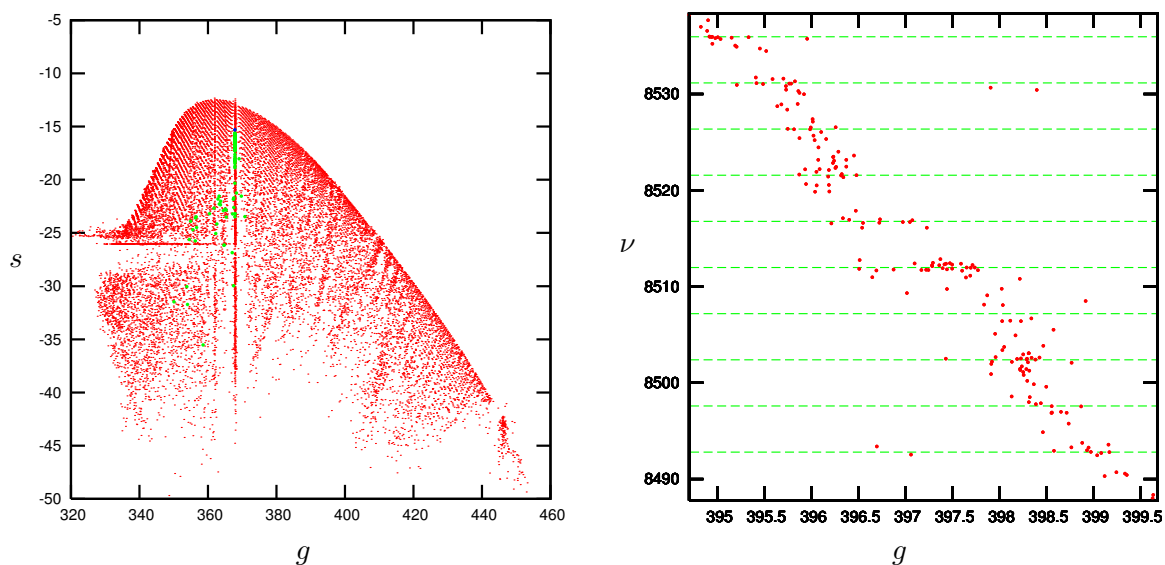


FIGURE 3.3 – Différents types de diffusion vus dans l'espace des fréquences. Partie gauche : diffusion de type Arnold projetée sur le plan  $(g, s)$ . La particule évolue le long de la résonance  $4g + 2n_5 - 5n_6 - g_5 = 0$  durant les 600 premiers millions d'années, puis en sort pour errer dans la zone chaotique bordant la résonance  $s = s_6$ . Elle quitte enfin l'essaim après 800 millions d'années passées dans la résonance coorbitale. La figure de gauche présente une diffusion du type Chirikov transverse aux résonances de la famille II projetée sur le plan  $(g, \nu)$ . Les lignes interrompues indiquent la position de résonances  $5\nu - 2\nu_{1,2} + kg_5 - (2 + k)g_6 = 0$  avec de bas en haut  $k = -5$  à  $k = 4$ . Les fréquences sont comptées en arcsec/an.

Pour atteindre le premier objectif, au moins pour de faibles inclinaisons, les conditions initiales du domaine  $\mathcal{D}$ , défini par la formule (3.8), ont été intégrées sur une durée d'un milliard d'années, séparée en 200 tranches de 5 millions d'années sur lesquelles les fréquences fondamentales de chaque trajectoire ont été calculées. On constate d'abord que presque tous les troyens situés au voisinage et au-delà de la résonance séculaire  $s = s_6$  sont éjectés de la zone coorbitale en moins d'un milliard d'années. On observe également que la majeure partie des zones colorées en rouge

(diffusions supérieures à  $10^{-3}$ ) sur les cartes de stabilité établies sur 10 millions d'années sont dépeuplées au bout d'un milliard d'années. Cependant, une exception à cette règle est fournie par la région notée A sur la figure 3.2 et associée au recouvrement des résonances de la famille II de la forme  $13\nu - n_4 = kg + k_5g_5 + k_6g_6 = 0$ . Nous en verrons plus loin la raison. Une étude plus approfondie (voir les sections 3.1 et 3.2 de [2]) montre qu'au fil du temps, des lacunes se creusent au voisinage des résonances principales de la famille IV. La résonance  $4g + 2n_5 - 5n_6 - g_5 = 0$  désignée par la lettre *a* sur la figure 3.2 semble être particulièrement impliquée dans le processus d'érosion à long terme des essaims signalé par Levison *et al.* (1997). On constate, le long de cette résonance, mais également au voisinage de la résonance  $4g + 2n_5 - 5n_6 - 2g_5 + g_6 = 0$ , que des phénomènes de diffusion apparaissent sur de grandes échelles de temps.

Comme le montre l'exemple donné sur la partie gauche de la figure 3.3, c'est dans l'espace des fréquence que la diffusion s'interprète le plus simplement. On peut observer (en vert) l'évolution des fréquences  $(g, s)$  projetées sur le fond rouge correspondant aux fréquences de la figure 3.2 (bas, droite). Les fréquences de la trajectoire, dont les conditions initiales sont choisies sur la résonance  $4g + 2n_5 - 5n_6 - g_5 = 0$  et proche de  $L_4$ , évoluent le long de cette résonance durant les 600 premiers millions d'années ( $g$  est toujours constant alors que  $s$  marque une tendance à diminuer). Puis, la particule quitte cette résonance pour errer au voisinage de  $s = s_6$ . Elle est finalement éjectée de l'essaim de  $L_4$  après l'avoir parcouru durant 800 millions d'années. De nombreux autres exemples de ce type de diffusion ont été identifiés au voisinage des résonances de la famille IV, certains sont présentés dans [2]. Ce phénomène, qui semble assez courant, offre un moyen de transporter les troyens de l'intérieur des essaims vers les régions extérieures très instables. Il contribue au lent dépeuplement des essaims identifié par Levison *et al.* (1997).

A l'inverse de cette lente diffusion que certains auteurs comparent à une diffusion d'Arnold (1964), un autre phénomène agissant sur des échelles de temps bien plus courtes coexiste. Il s'agit du phénomène engendré par une diffusion transverse aux résonance de la famille II, rencontré en particulier dans la région instable notée A. Sur l'exemple présenté sur la partie droite de la figure 3.2, les fréquences ont tendance à se regrouper le long des résonances  $5\nu - 2\nu_{1,2} + kg_5 - (2+k)g_6 = 0$  subissant des transitions rapides entre ces dernières comme c'est le cas dans le mécanisme de recouvrement des résonances décrit par Chirikov (1959). Bien que les trajectoires diffusent rapidement dans l'espace des fréquences, on observe que, dans la grande majorité des cas, ce mouvement reste borné. Les troyens impliqués dans ce type de diffusion ont donc un mouvement chaotique, mais ne sont pas, en général, éjectés des essaims. Ceci explique pourquoi la région rouge A subsiste durant au moins un milliard d'années bien qu'étant chaotique.

### 3.4 Relations entre les troyens observés et la structure résonante

Une question importante est de savoir si les mécanismes et la structure résonante décrits au fil des paragraphes précédents sont purement théoriques ou s'ils existent réellement dans le système solaire. Une manière de répondre à cette question est de positionner les troyens réels par rapport à cette structure résonante et de regarder si, parmi les troyens connus pour leur comportement chaotique, certains sont liés aux résonances décrites plus haut. On pourrait, comme nous l'avons fait dans Robutel et Laskar (2001) pour des corps de la ceinture de Kuiper, construire une carte de stabilité du voisinage d'un troyen observé en fixant toutes ses conditions initiales à une époque donnée, sauf deux (par exemple le demi-grand axe et l'excentricité) qui serviraient de coordonnées à la carte 3.1 ou 3.2, mais toutes les particules fictives constituant ces dernières ont toutes les mêmes phases initiales  $\theta_0 = (\lambda_0, \varpi_0, \Omega_0)$ , ce qui n'est pas le cas des troyens observés. Comme la localisation des résonances sur ce type de cartes dépend des phases, la comparaison n'aurait que peu de sens.

Pour cette raison, nous avons développé dans Robutel *et al.* (2005) une méthode basée sur la correspondance entre l'espace des actions et celui des fréquences. Supposons que nous souhaitions représenter les troyens sur des cartes en action pour lesquelles les angles initiaux sont fixés à  $\theta_r = (\lambda_r, \varpi_r, \Omega_r)$ . Si les éléments elliptiques initiaux de notre troyen observé sont  $(a_o, e_o, \mathcal{I}_o)$  pour



les actions et  $\theta_o = (\lambda_o, \varpi_o, \Omega_o)$  pour les angles, cet astéroïde sera équivalent d'un point de vue dynamique à celui dont les éléments elliptiques initiaux sont  $(a, e, \mathcal{I})$  et  $\theta_r$  avec

$$(a, e, \mathcal{I}) = F_{\theta_r}^{-1} \circ F_{\theta_o}(a_o, e_o, \mathcal{I}_o) \quad (3.9)$$

où les  $F_{\theta_r}$  et  $F_{\theta_o}$  sont les applications fréquences associées aux angles  $\theta_r$  et  $\theta_o$ . L'idée sous-jacente étant que si deux trajectoires ont les mêmes fréquences fondamentales, elles sont dynamiquement équivalentes. Bien entendu, cela n'aura de sens que pour des corps dont la trajectoire est sinon quasi-périodique, au moins proche d'un tel mouvement. De cette manière, à un troyen réel défini par ses éléments elliptiques à une époque donnée, on peut faire correspondre un unique troyen fictif ayant pour actions les éléments  $(a, e, \mathcal{I})$  donnés par la formule (3.9) et comme phases les  $\theta_r$  fixées une fois pour toute. Afin de visualiser les résultats ainsi obtenus, dans Robutel *et al.* (2005) nous avons sélectionné des sections de l'espace des actions  $(a, e, \mathcal{I})$  à inclinaisons constantes et projeté chaque astéroïde sur le plan dont il était le plus proche en garantissant que la différence des fréquences fondamentales entre la trajectoire du troyen réel et du troyen projeté n'excédait pas  $0.1''/an$ . Cette méthode nous a ainsi permis de placer sur des cartes de stabilité les 420 troyens du catalogue de Bowell<sup>7</sup> dont les conditions initiales étaient les mieux connues à l'époque. Si la grande majorité de ces 420 corps se situe dans les régions les plus stables de essaims<sup>8</sup>, là où la diffusion est minimale, certains troyens réels sont proches ou à l'intérieur de plusieurs des résonances identifiées aux paragraphes précédents. Notons par exemple que des astéroïdes tels 4543-Phoinix, ou 1173-Anchises qui évoluent à l'intérieur de résonances de la famille III et IV ont déjà été remarqués par Milani (1993) pour avoir un mouvement chaotique.

Mentionnons pour finir que les troyens de  $L_4$  et  $L_5$  ont été placés sur les mêmes cartes, sans distinction de leur appartenance à un des deux essaims. Bien que ceci puisse paraître surprenant, il s'agit d'une démarche naturelle puisqu'il n'y a pas de différence sensible entre les dynamiques globales des deux essaims. On constate, en particulier, que le domaine des fréquences qui correspond aux trajectoires régulières est le même dans les deux cas. Ceci est également vrai des limites de stabilité des essaims dans l'espace des fréquences. Enfin, les résonances rencontrées et donc la structure résonante sont également identiques. Certains auteurs, en comparant des cartes de stabilité en éléments oscillateurs instantanés, ont constaté des dissymétries entre les voisinages de  $L_4$  et de  $L_5$  ainsi que de faibles différences de stabilité (voir par exemple Dvorak et Schwarz, 2005), mais ceci, à mon avis, reflète principalement le fait que les substituts des points de Lagrange ne sont pas des orbites périodiques comme dans le problème restreint, mais quasi-périodiques (voir paragraphe 3.1 et Hou *et al.*, 2014a,b).

Pourtant, si l'on s'intéresse à la population observée dans les deux essaims de troyens dont l'échantillon est complet au moins jusqu'à une magnitude absolue de 11.5 d'après Karlsson (2010), la taille de l'essaim de  $L_5$  est d'environ 75% celle de l'essaim  $L_4$ . Si l'on peut écarter les biais observationnels (Karlsson, 2010), la raison de cette dissymétrie n'est pas encore totalement comprise, bien que certains modèles tendent à fournir des explications convaincantes (Morbidelli *et al.*, 2005; Nesvorný *et al.*, 2013; Di Sisto *et al.*, 2014).

### 3.5 Evolution de la structure résonante lors d'une migration

Nous avons vu au paragraphe 3.3 l'existence de phénomènes de diffusion à long terme de certaines familles de résonance. Il existe donc des chemins, sur lesquels certains troyens peuvent voyager très lentement des parties centrales de l'essaim (partie la plus stable) vers les parties externes d'où ils peuvent s'échapper rapidement. Ce résultat permet d'expliquer le mécanisme de lente érosion des essaims de troyens conjecturé par Levison *et al.* (1997). Inversement, comme le système considéré est conservatif, les chemins qui permettent de quitter la région coorbitale sont également ceux par lesquels on y pénètre. Mais ce mécanisme est bien trop lent, donc trop peu efficace, pour expliquer la formation des essaims de troyens par capture diffuse. Divers

7. ASTORB database (<http://www.naic.edu/~nolan/astorb.html>).

8. Voir Michtchenko *et al.* (2001), Nesvorný et Dones (2002), ou encore Tsiganis *et al.* (2005b).

mécanismes de formation des essaims ont été envisagés, comme la capture des troyens durant la formation de Jupiter (Marzari et Scholl, 1998), la collision de corps parents (Shoemaker *et al.*, 1989) ou encore leur accrétion en présence de gaz (Yoder, 1979). Mais aucun de ces modèles n'est capable d'expliquer la présence de troyens à forte inclinaison (pouvant aller jusqu'à  $35^\circ$ ). Cette difficulté semble avoir été levée par le mécanisme basé sur le « modèle de Nice » (Tsiganis *et al.*, 2005a) dans lequel les troyens sont capturés durant la migration planétaire (Morbidelli *et al.*, 2005). Dans ce modèle de migration, les planètes interagissant avec le disque de planétésimaux ont tendance à voir leur demi-grand axe évoluer de manière globalement monotone<sup>9</sup> et pratiquement continument. Dans la dernière variante de ce modèle (voir Nesvorny *et al.* 2013), dans laquelle une cinquième planète géante est éjectée du système solaire, la variation des demi-grands axes peut subir de fortes discontinuités, notamment lors de l'éjection de cette géante. Ce modèle, dans lequel Jupiter semble sauter sur les planétésimaux pour les capturer dans ses essaims de troyens, fait apparaître, suivant les simulations, diverses dissymétries entre les populations de  $L_4$  et  $L_5$  comparables à celles observées dans le système solaire actuel. Quel que soit le modèle de migration utilisé, il engendrera une modification, continue ou non, de la géométrie du système des planètes géantes, et donc des perturbations que subissent les troyens. En d'autres termes, ce phénomène modifie les fréquences de forçage du système, dans la mesure où la trajectoire du système planétaire reste bien approximée par une fonction quasi-périodique (ce qui peut localement ne pas être le cas, en particulier au voisinage d'une résonance entre les planètes).

On peut alors aborder la question de la stabilité lors de la migration sous un angle plus général, en se demandant ce que l'on peut dire de la stabilité des essaims pour un jeu de fréquences fondamentales du système planétaire donné. La réponse à cette question permet de comprendre l'évolution dynamique des essaims lors d'une variation des ces fréquences, qu'elle soit due à une migration ou à un autre facteur. Le formalisme présenté tout au long de ce chapitre permet de répondre à ce type de question, ou tout du moins d'en fournir les moyens.

En effet, considérons maintenant l'ensemble des trajectoires quasi-périodiques du système non perturbé, c'est à dire celle d'un essaim de troyens modélisé par le problème des 3-corps restreint. A cet ensemble, associons le domaine  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  formé des fréquences fondamentales  $(\nu, g, s)$  de ces trajectoires. La dynamique globale des essaims (stabilité, instabilité, diffusion, ...) dépendra alors essentiellement des résonances pouvant apparaître dans le domaine de fréquence  $\mathcal{F}$ . Nous avons vu que sans perturbation, les résonances intervenant étaient d'ordre élevé et n'engendraient que des instabilités très localisées. En prenant en compte les perturbations planétaires (à fréquences fondamentales planétaire fixées), tout un réseau de résonances apparaît, constitué en particulier des quatre familles décrites au paragraphe 3.1. Chacune de ces résonances correspond, dans l'espace des fréquences, à un hyperplan (ici plan de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ ). Notre problème se ramène donc simplement à savoir si certains de ces plans rencontrent  $\mathcal{F}$ . Ceci se résout simplement si l'on connaît le domaine  $\mathcal{F}$  et le réseau donné par les formules (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7). Inversement, on peut choisir les fréquences fondamentales planétaires de manière à ce que les résonances soient très présentes dans le domaine  $\mathcal{F}$ , ce qui rendra les essaims très instables, ou au contraire presque absents, ce qui correspondra à une situation beaucoup plus stable. Ces deux situations opposées sont illustrées par la figure 3.4. Le graphique du haut a déjà été présenté au paragraphe 3.2, il représente l'essaim de  $L_4$  dans la configuration actuelle du système solaire. En rapprochant Saturne de Jupiter de manière à ce que la fréquence  $2n_6 - n_5$  soit de l'ordre de grandeur des valeurs atteintes par  $\nu$  dans l'essaim ( $a_2 = 8.75$  ua au lieu des 9.5855 ua), on permet aux résonances de la famille II de pénétrer largement ce dernier. Ainsi perturbée, la partie stable de l'essaim est réduite à un petit voisinage des points de Lagrange (voir également la figure 3.5). Comme on peut le constater sur la figure du bas, les résonances de la famille IV ont un effet similaire. A très courte distance de la résonance 5:2 entre Jupiter et Saturne ( $a_2 = 9.6$  ua) on quitte le domaine où dominent les résonances de la famille II pour entrer dans le domaine de la famille IV associée aux résonances de la forme  $5n_6 - 2n_5 + kg \approx 0$ .

Plus généralement, la connaissance de l'évolution des fréquences fondamentales du système

---

9. Celui de Jupiter diminue légèrement alors que celui des autres planètes géantes augmente.

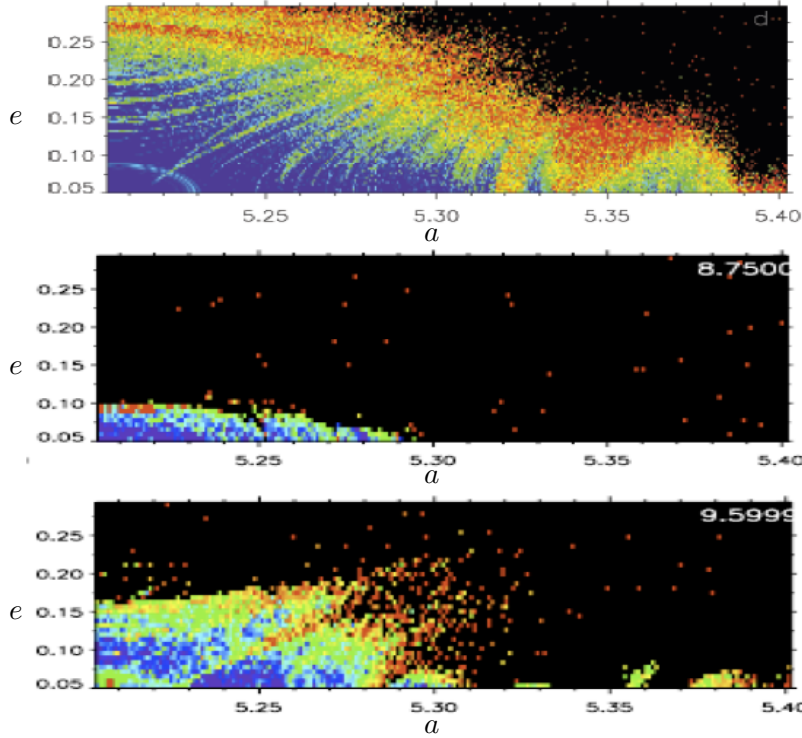


FIGURE 3.4 – Trois valeurs différentes du demi-grand axe de Saturne. En haut, la situation actuelle, avec  $a_6 = 9.5855$  au, présente des essais très larges et très stables, pénétrés par de fines régions chaotiques (cf. fig. 3.2). En diminuant de 9% la valeur du demi-grand axe de Saturne ( $a_6 = 8.75$  ua sur la figure du milieu) la famille II liée à la résonance 2:1 entre Jupiter et Saturne pénètre largement l’essai le dépeuplant presque entièrement. En approchant le système de la résonance orbitale 5:2 ( $a_6 = 9.6$  au, 0.15% plus grand que la valeur actuelle), la famille IV (figure du bas) déstabilise largement les essais.

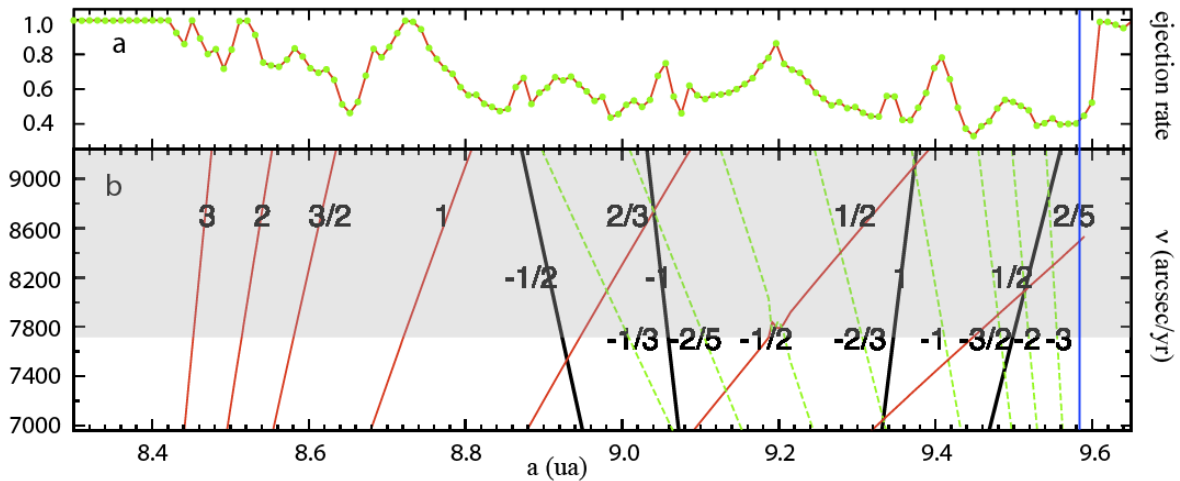


FIGURE 3.5 – Prédiction des épisodes instables engendrés par les résonances de la famille II. Le rectangle gris de la figure du bas (b), représente les valeurs de  $\nu$  accessibles dans les essais de Jupiter à une inclinaison de l’ordre de  $2^\circ$ . Les segments inclinés donnent la valeur de la fréquence  $(i/j)\nu_{\alpha,\beta}$  en fonction du demi-grand axe de Saturne donné en abscisse. Les segments rouges correspondent à  $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ , les noirs à  $(3, 7)$  et les verts à  $(2, 5)$ . Les nombres rationnels  $i/j$  sont indiqués sur chacun des segments. La fraction de troyens éjectés de l’essai est tracé sur la figure du haut (a). Le segment vertical bleu indique la position du système solaire actuel.

planétaire permet de prédire l’évolution dynamique des essais. Prenons pour exemple les essais de troyens de Jupiter perturbés par Saturne, et supposons que le demi-grand axe de cette dernière planète peut varier entre 8.3 ua, valeur qui place les deux planètes en résonance 2:1, et 9.6 ua, au cœur de la résonance 5:2. Pour chaque valeur du demi-grand axe de Saturne, l’analyse en fréquence nous permet de déterminer les fréquences fondamentales du système planétaire. En outre, cette même méthode permet également de déterminer le domaine de fréquences  $\mathcal{F}$  dans le problème restreint des 3-corps. Le demi-grand axe de Jupiter étant fixe, ce domaine sera pratiquement invariant, seul l’effet des perturbations dues à Saturne variera avec son demi-grand axe. Si le demi-grand axe de la planète abritant les troyens variait également, il suffirait de faire la même

étude en divisant les fréquences fondamentales des troyens  $(\nu, g, s)$  par le moyen mouvement de la planète en question (voir l'étude de la dynamique des essaims de troyens de Saturne réalisée par J. Bodossian en 2008). Il ne reste plus qu'à chercher les intersections des résonances potentielles avec le domaine  $\mathcal{F}$ . La figure 3.5-b illustre cette technique de prédiction dont tous les détails sont fournis dans [3]. Pour simplifier, cette figure se limite au passage des résonances de la famille II dans la partie de faible inclinaison de l'essaim, l'étude présentée dans [3] étant bien plus générale. Sur cette figure, les segments inclinés donnent la valeur de quantités  $(i/j)\nu_{\alpha,\beta}$  (les détails sont donnés dans la légende de la figure) en fonction du demi-grand axe de Saturne, alors que le rectangle gris donne l'intervalle de valeur que peut prendre  $\nu$  dans la partie de l'essaim où l'inclinaison est faible. L'intersection des ces segments avec le rectangle indique les valeurs du demi-grand axe de Saturne pour lesquelles les résonances de la famille II vérifiant  $i\nu \approx j\nu_{\alpha,\beta}$  (voir la formule 3.5), pénètrent l'essaim. Si l'on admet que l'instabilité de l'essaim est due à sa pénétration par les résonances, on déduit immédiatement les configurations du système planétaire conduisant à des populations stables, ou au contraire chaotiques. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la figure 3.5-a qui montre la bonne corrélation entre les prédictions de passage des résonances fournies par 3.5-b et la dynamique réelle des populations de troyens. Cette figure donne, en effet, la fraction de troyens éjectés au cours d'une simulation d'une durée de 10 millions d'années effectuée pour chaque position de Saturne. Mis à part les configurations où les deux planètes sont en résonance orbitale 2:1 ( $a_6 < 8.42$  au) et 5:2 ( $a_6 > 9.6$ ) dans lesquelles les essaims sont presque totalement dépeuplés, la courbe donnant le taux d'éjection en fonction de  $a_6$  évolue en dents de scie, en passant par un maximum local à chaque traversée de résonances puis décroissant à mesure que ces dernières s'éloignent.

## Chapitre 4

# Sur la rotation des corps en résonance coorbitale

### 4.1 Modélisation de la rotation

Comme nous l'avons fait au chapitre 2, nous considérons deux corps de masses non nulles  $m_1$  et  $m_2$  en mouvement coorbital autour d'un corps central de masse  $m_0$  bien supérieure. Mais ici les corps ne seront plus nécessairement ponctuels. Nous pourrions donc nous intéresser à leur rotation. Pour simplifier, et sans nuire à la généralité, nous ne considérerons que la rotation du premier corps, ce qui permettra d'omettre l'indice 1 quand ceci n'induera pas d'ambiguïté. Dans ces conditions, nous supposons que l'orbite du corps en rotation est plane et entièrement déterminée par ses coordonnées polaires  $(r, f)$  (voir la figure 4.1) dont la dépendance temporelle est donnée. Supposons également ce corps triaxial, les moments d'inertie suivant les axes principaux sont alors notés  $A \leq B \leq C$ . Faisons encore l'hypothèse que l'axe de rotation du corps est son axe de plus grande inertie, ce dernier étant perpendiculaire au plan orbital. Sous ces hypothèses, l'orientation du corps dans un repère inertiel est définie par un unique angle  $\theta$  (voir Fig. 4.1) dont l'évolution temporelle satisfait l'équation différentielle (voir par exemple Murray et Dermott, 1999) :

$$\ddot{\theta} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \sin 2(\theta - f) = 0, \text{ avec } \sigma^2 = 3 \frac{\mathcal{G}m_0}{r_0^3} \frac{B - A}{C}, \quad (4.1)$$

$r_0$  étant une constante liée à l'orbite, par exemple la valeur moyenne de  $r$ .

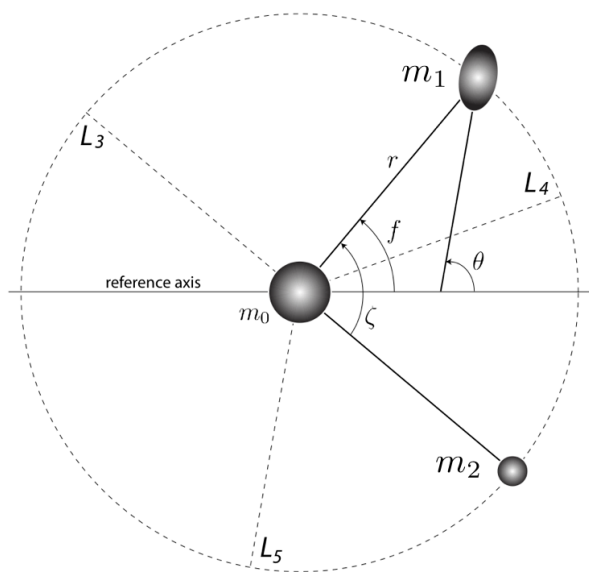


FIGURE 4.1 – Définition des variables dans le cas coorbital.  $m_0$  est la masse du corps central,  $m_1$  celle du corps en rotation et  $m_2$  celle du compagnon coorbital. L'angle  $\theta$ , entre un axe de référence fixe et le grand axe du corps de masse  $m_1$  mesure sa rotation.  $(r, f)$  est le couple de coordonnées polaires positionnant le corps en rotation. Dans le cas képlérien ( $m_2 = 0$ ) ces paramètres ont encore la même signification, en particulier,  $f$  devient la longitude vraie. Enfin, dans le cas coorbital,  $\zeta$  est la moyenne sur les courtes périodes de la différence des longitudes moyennes  $\lambda_1 - \lambda_2$  des deux corps. En conséquence, il ne s'agit de l'angle représenté sur la figure que quand les excentricités sont nulles.

L'équation de la rotation (4.1) est le plus souvent étudiée dans le cas où le mouvement du corps en rotation est képlérien. Les quantités  $r$  et  $f$  dépendant alors périodiquement du temps, on peut les développer en série de Fourier à l'aide des coefficients de Hansen  $X_k^{p,q}$  (voir Laskar, 2005). La substitution de ces expressions dans (4.1) conduit à l'équation :

$$\ddot{\theta} + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{-3,2}(e) \sin(2\theta - knt) = 0, \quad (4.2)$$

dans laquelle les coefficients de Hansen  $X_k^{-3,2}(e)$  sont d'ordre  $e^{|k-2|}$  quand  $e$  tend vers zéro. Cette expression montre que les principales résonances spin-orbit, sont centrées sur les fréquences de rotation  $\dot{\theta} = kn/2$  et ont une amplitude d'ordre  $\sigma\sqrt{e}^{|k-2|}$  en terme de fréquence. Ainsi, les résonances spin-orbit les plus significatives, au moins pour des excentricités faibles à modérées, sont : la résonance synchrone 1:1 dans laquelle se trouve la Lune, la 3:2 où évolue Mercure et la 1:2. Pour de faibles valeurs de  $e$  ou de la triaxialité  $(B - A)/C$ , les principales résonances sont isolées et la rotation du corps est régulière pour la plupart des conditions initiales. Pour de plus grandes largeurs des îles de résonance, ce qui se produit pour des valeurs de  $e$  ou de  $(B - A)/C$  plus élevées, ces résonances se recouvrent partiellement en donnant naissance à de grandes régions chaotiques, comme l'ont montré Wisdom *et al.* (1984). Au contraire, si l'excentricité tend vers zéro, l'amplitude de toutes les résonances spin-orbit tend également vers zéro, à l'exception de la résonance synchrone. Ainsi, comme  $X_k^{-3,2}(0) = 0$  quand  $k \neq 2$ , l'équation (4.2) se ramène à celle d'un pendule.

En présence de dissipations, le mouvement de rotation peut être capturé dans une de ces résonances, comme c'est le cas pour Mercure (Colombo, 1965). La probabilité de capture dans une résonance donnée diminuant avec son amplitude (Goldreich et Peale, 1966), la seule issue possible (ou de loin la plus probable) pour un corps évoluant sur une orbite circulaire ou faiblement excentrique est la capture en résonance synchrone.

Nous avons montré dans [4] que la situation pouvait être très différente si le corps en rotation était en résonance coorbitale avec un compagnon. Si les corps de masses  $m_1$  et  $m_2$  sont coorbitaux, les fonctions du temps  $r$  et  $f$  intervenant dans l'équation (4.2) ne sont plus des fonctions dépendant périodiquement du temps, mais plutôt des fonctions quasi-périodiques<sup>1</sup>. En supposant, comme nous l'avons fait dans [4] que le mouvement des coorbitaux est quasi-circulaire, en d'autres termes que l'on pourra négliger leur excentricité (voir chapitre 2), on peut montrer<sup>2</sup> qu'à l'ordre 1 du petit paramètre  $\mu = (m_1 + m_2)/m_0$ , les quantités  $r$  et  $f$  sont approximées par

$$f = nt + \delta\zeta, \quad r = a = \bar{a} \left( 1 - \delta \frac{3\dot{\zeta}}{2n} \right), \quad \delta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.3)$$

Dans ces expressions, les variations à longue période provenant de la résonance coorbitale interviennent par le biais de  $\zeta$  qui satisfait l'équation différentielle

$$\ddot{\zeta} = -3\mu n^2 (1 - (2 - 2 \cos \zeta)^{-3/2}) \sin \zeta, \quad (4.4)$$

équation qui découle du hamiltonien (2.43). La position du corps en rotation dépend donc quasi-périodiquement du temps, avec pour fréquences fondamentales le moyen mouvement  $n$  et la fréquence de libration dans la résonance coorbitale  $\nu$ .

Supposons d'abord que l'amplitude de libration coorbitale soit faible. Cette hypothèse simplificatrice permet de mettre simplement en évidence un mécanisme de démultiplication de l'île synchrone faisant apparaître un nouveau type de résonances spin-orbit. D'après le chapitre 2, au voisinage des configurations circulaires de Lagrange, on peut écrire :

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha \sin(\nu t) \quad \text{avec} \quad \nu \approx n\sqrt{27\mu}/2, \quad (4.5)$$

1. On ne s'intéresse qu'au cas où le mouvement orbital est quasi-périodique, donc parfaitement régulier.

2. En adaptant la théorie développée par Érdi (1977) dans le cadre du problème restreint des 3-corps au cas où les trois masses sont toutes non nulles (voir également [5]).

avec  $\zeta_0 = \pm\pi/3$  suivant la configuration choisie, et où  $\alpha$  représente l'amplitude de la libration au voisinage de cette configuration. En injectant ces expressions dans (4.3) et en remplaçant dans l'équation (4.1) où seuls les termes de plus bas degré en  $\alpha$  sont conservés, on obtient une première approximation de l'équation de la rotation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{\sigma^2}{2} [\sin(2\theta - 2u) + \delta\alpha \sin(2\theta - 2u - \nu t) - \delta\alpha \sin(2\theta - 2u + \nu t)] = 0, \quad (4.6)$$

avec  $u = nt + \delta\zeta_0$ .

Si  $\alpha = 0$  ou  $\delta = 0$ , on retrouve le cas képlérien circulaire avec une unique île de libration associée

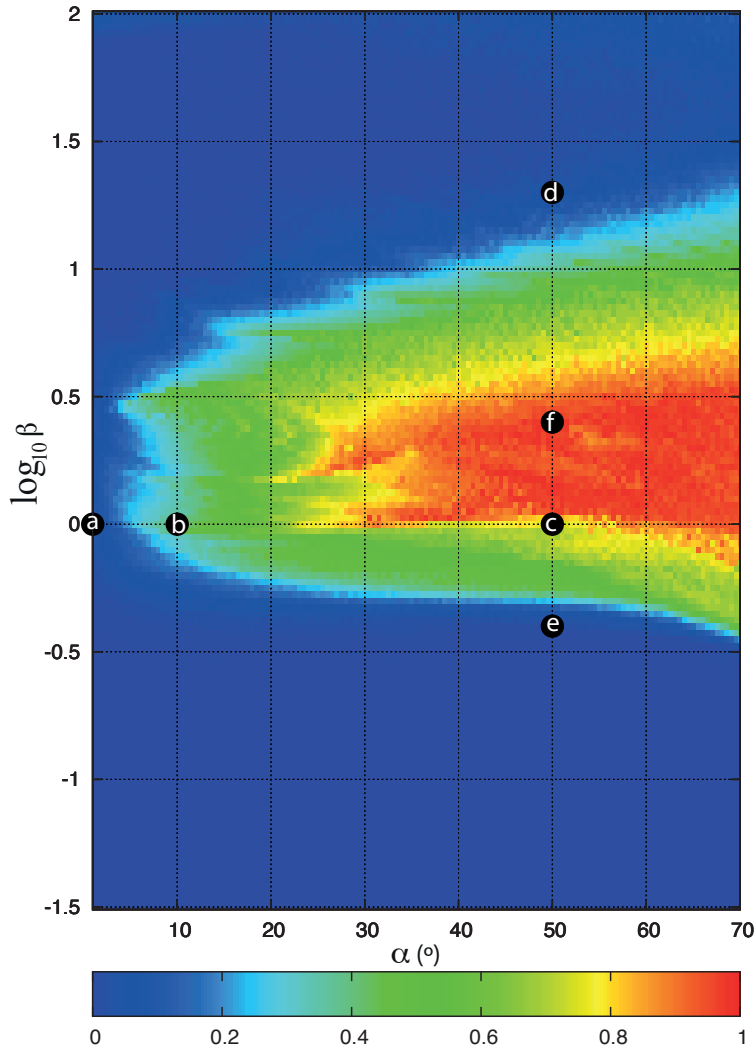


FIGURE 4.2 – Diagramme de stabilité de la rotation au voisinage de la résonance synchrone. Le code de couleur indique la proportion d'orbites chaotiques à proximité de la rotation synchrone. La région chaotique, vert à rouge, contient les exemples c et f, l'exemple b étant à la frontière de cette zone. Au dessus de la région chaotique ( $\log_{10} \beta > 0$  dans la région indiquée par la lettre d) seule la résonance synchrone est dominante, alors qu'en dessous ( $\log_{10} \beta < 0$ , où est situé l'exemple e), plusieurs résonances spin-orbit coexistent. Les cercles noirs correspondent aux six exemples présentés dans [4]. L'exemple (e) est donné sur la figure 4.3.

à la résonance synchrone. En revanche, dès que  $\alpha$  et  $\delta$  sont non nuls, deux nouvelles résonances apparaissent, la première dans laquelle la fréquence de rotation est voisine de  $n + \nu/2$  et où la rotation est supersynchrone, et la seconde où la rotation est sub-synchrone avec une fréquence proche de  $n - \nu/2$ . La largeur maximale des îles associées est égale à  $2\sigma\sqrt{\alpha}$  alors que celle de la résonance synchrone est de  $2\sigma$ . D'après le critère de Chirikov, les deux îles les plus proches<sup>3</sup> se recouvrent si  $\nu > 2\sigma(1 + \sqrt{\alpha})$ . Bien que ce critère soit approximatif, on peut en déduire que l'aspect global du portrait de phase de l'équation (4.6) dépend principalement de la taille relative de  $\nu$  et  $\sigma$  ou (ce qui est équivalent puisque, d'après le chapitre 2,  $\nu/n$  est du même ordre de grandeur que  $\sqrt{\mu}$ ) de la grandeur de  $\sqrt{\mu}$  comparée à celle de  $\sigma/n$ . En d'autres termes, puisque  $\sigma = \sqrt{3\frac{B-A}{C}}n$ , on est finalement amené à comparer la taille de  $\mu = (m_1 + m_2)/m_0$  à celle de la triaxialité  $(B - A)/C$ .

3. Supersynchrone et synchrone où subsynchrone et synchrone.

De manière schématique, la situation se ramène aux trois cas suivants :

- Si  $\sigma \ll \nu$  ou  $\frac{B-A}{C} \ll \mu$  : les résonances principales sont isolées les unes des autres, la plupart des conditions initiales conduisent à une rotation régulière au voisinage de la synchronisation.
- Si  $\sigma = \mathcal{O}(\nu)$  ou  $\frac{B-A}{C} = \mathcal{O}(\mu)$  : les résonances se recouvrent partiellement engendrant de larges régions chaotiques.
- Si  $\sigma \gg \nu$  ou  $\frac{B-A}{C} \gg \mu$  : le recouvrement complet des résonances conduit à une dynamique comparable à celle d'un pendule modulé. La seule île de résonance est celle associée à la rotation synchrone.

Bien entendu, les estimations obtenues ci-dessus ne sont rigoureuses que pour de petites amplitudes de libration autour des configurations équilatérales. Mais, comme le montre la figure 4.2, les conclusions restent valables même pour de grandes amplitudes de libration<sup>4</sup>. Cette figure montre l'effet des deux principaux paramètres  $\alpha$  et  $\beta = \sigma/(\sqrt{\mu}n) = \sqrt{\frac{3}{\mu}} \frac{B-A}{C}$  sur la stabilité de la rotation au voisinage de la synchronisation. Elle met en évidence deux grandes régions régulières (bleu foncé) associées aux très grandes et très petites valeurs de  $\beta$  séparées par un domaine dans lequel on observe des mouvements de nature dynamique différente, allant d'une faible diffusion (en vert) à des rotations fortement chaotiques (en rouge).

Pour  $\beta \ll 1$ , les îles associées aux résonances principales centrées en  $\dot{\theta} = n + k\nu/2$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sont isolées, comme le montre la figure 4.3. Mais, pour des amplitudes de libration dans la résonance coorbitale assez grandes, ici  $\alpha = 50^\circ$ , les îles associées aux résonances  $n \pm \nu/2$  sont de taille comparable à celle de la résonance synchrone. Ces valeurs du paramètre  $\beta$  sont caractéristiques des systèmes dont au moins une des composantes est une planète géante. Dans ce cas  $\mu$  est au moins égal à  $10^{-3}$ , quantité qui ne sera certainement pas dépassée par la valeur de la triaxialité  $(B-A)/C$ . Cette situation est particulièrement intéressante, non seulement du fait de l'existence d'un nouveau type de résonance spin-orbit, mais également parce qu'en présence de dissipation, le système peut y être capturé. Si, par exemple, la vitesse de rotation, initialement bien supérieure à la fréquence orbitale, décroît sous l'effet de la marée levée par le corps primaire<sup>5</sup>, la capture en résonance supersynchrone  $\dot{\theta} = n + \nu/2$  semble être la plus probable (voir figure 4.3). La synchronisation, voire la capture en résonance subsynchrone, est également possible comme nous le montrons dans [4]. Ces comportements se distinguent singulièrement du cas de la rotation sur une orbite képlérienne de faible excentricité, où le seul état final possible est la rotation synchrone.

Des valeurs de  $\beta$  de l'ordre de 1 peuvent se rencontrer dans des systèmes formés de deux planètes telluriques. En effet, dans ce cas,  $\mu$  et  $(B-A)/C$  peuvent être tous deux de l'ordre de  $10^{-6}$  (Yoder, 1995). Ici encore, la situation dynamique est particulièrement intéressante puisque le recouvrement partiel des résonances conduit à une rotation chaotique.

Reste la partie supérieure du diagramme, atteinte pour de fortes valeurs de  $\beta$ , donc pour des coorbitaux de faible masse par rapport au corps central et dont la forme est loin d'être sphérique. Ce cas est plus fréquent dans les systèmes de satellites que dans les systèmes planétaires. Le couple Janus-Epiméthée, ou encore les petits satellites Hélène et Polydeuces, coorbitaux de Dioné, ainsi que les troyens de Téthys, Calypso et Télésto, en sont de parfaites illustrations. Dans cette situation, les résonances spin-orbit se recouvrent entièrement ne laissant plus la place qu'à l'île synchrone. En conséquence, le ralentissement de la rotation par dissipation de marée ne peut conduire qu'à la synchronisation. Cette situation, voisine du cas képlérien, possède toutefois des particularités intéressantes qui seront évoquées aux paragraphes suivants.

4. Dans [4] nous montrons le même type de résultats pour des orbites en fer à cheval.

5. Nous avons utilisé dans [4] le modèle visco-élastique linéaire (Mignard, 1979) dont la contribution à l'équation (4.1) est donnée par  $\dot{\theta} = K\tau_0^6 r^{-6}(\dot{\theta} - n - \delta\zeta)$ .  $K$  est une constante égale à  $250 \text{ an}^{-1}$  sur l'exemple de la figure 4.3.



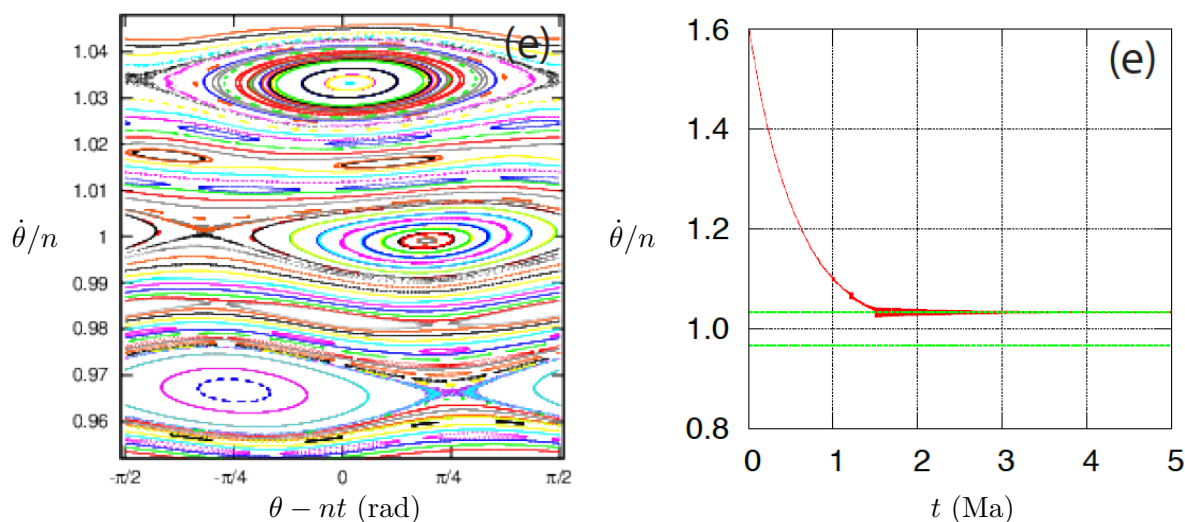


FIGURE 4.3 – Rotation d’un corps triaxial sur une orbite en résonance en moyen mouvement 1:1. Gauche : section de Poincaré de l’équation (4.1) dans le plan  $(\theta - nt, \dot{\theta}/n)$ . Dans cette situation où  $\beta = .04$  et  $\alpha = 50^\circ$ , les trois îles principales, centrées en  $\dot{\theta} = n - \nu/2, n, n + \nu/2$ , sont isolées. On constate également entre celles-ci la présence d’îles engendrées par des résonances spin-orbit d’ordre supérieur dans lesquelles la fréquence de rotation est voisine de  $n \pm \nu/4$ . Droite : un exemple de capture dans la résonance supersynchrone  $n + \nu/2$  marqué par la ligne verte supérieure. Sur l’axe des abscisses, le temps est compté en millions d’années.

## 4.2 Rotation des satellites coorbitaux de Saturne

### 4.2.1 Quelques données sur les satellites coorbitaux de Saturne

Attardons-nous dans ce paragraphe sur les six petits satellites de Saturne mentionnés plus haut : Janus, Epiméthée, Hélène, Polydeuces, Téthys et Calypso. Janus et Epiméthée ont la remarquable propriété d’être les seuls corps connus du système solaire à évoluer de manière stable (tout au moins sur une longue durée) sur des orbites en fer à cheval à l’intérieur de la résonance coorbitale<sup>6</sup>. Ces deux satellites orbitent à une distance moyenne d’environ 151400 km de Saturne, soit 2.5 fois le rayon de la planète, en effectuant leur révolution en un peu moins de 0.7 jour. Dans un repère tournant avec une vitesse angulaire égale à leur fréquence orbitale moyenne, ils décrivent, en une période de 8 ans, des orbites en fer à cheval schématisées sur la figure 4.4. En première approximation, les deux satellites décrivent des orbites circulaires de rayon légèrement différent (moins de 100 km, ce qui représente moins de 0.07% de leur distance à Saturne). D’après la troisième loi de Kepler, le corps intérieur rattrape lentement le satellite extérieur conduisant à une rencontre proche, les deux corps étant alors séparés d’une distance d’environ 14000 km, soit plus de 100 rayons de Hill de ces satellites<sup>7</sup>. Au cours de cette rencontre, les satellites « échangent » leurs orbites de manière telle que le corps intérieur devienne extérieur. Bien entendu, cet échange n’est pas instantané, mais s’effectue de manière continue et relativement lente : il faut environ 8 mois aux satellites pour accomplir ce transfert.

Les quatre autres satellites ont une orbite de type troyen en voisinage d’un des points d’équilibres équilatéraux du système formé de Saturne, du satellite en question et de Hélène ou Dioné suivant le cas. Quelques données les concernant sont regroupées dans le tableau 4.1. Dans ce tableau, sont indiquées de droite à gauche les valeurs du moyen mouvement  $n$ , de la fréquence de libration coorbitale  $\nu$ , de la fréquence de libration spin-orbit  $\sigma$  et de l’amplitude de libration dans

6. Il existe bien des astéroïdes évoluant sur des orbites en fer à cheval au voisinage de la Terre (voir Brasser *et al.*, 2004) ou encore d’Uranus (de la Fuente Marcos et de la Fuente Marcos, 2013), mais ce type d’orbite n’est que transitoire.

7. Le rapport  $\mu$  entre la masse du satellite et celle de Saturne est d’environ  $3.3 \times 10^{-9}$  pour Janus et  $9.7 \times 10^{-10}$  pour Epiméthée (voir Robutel *et al.*; 2012). Le rayon de Hill étant défini pas  $R_H = a(\mu/3)^{1/3}$ , il est de l’ordre de 150 km pour Janus et 100 km pour Epiméthée.

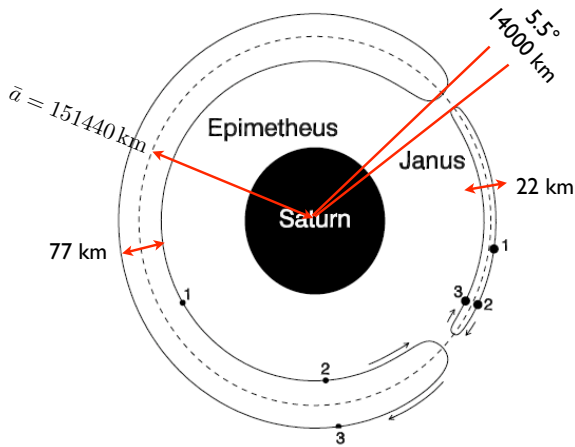


FIGURE 4.4 – Mouvement orbital moyen de Janus et Epiméthée en repère tournant (les variations à la période orbitale ont été moyennées). L’amplitude des variations radiales a été augmentée d’un facteur 500, et la taille des lunes d’un facteur 50. Les nombres indiquent la position des satellites au 01/07/2004 (1), 21/05/2005 (2) et 09/09/2006 (3). Figure tirée de Tiscareno *et al.* (2009)

la résonance coorbitale. Cette dernière est définie par la quantité  $\max(\zeta) - \min(\zeta)$  où  $\zeta$  vérifie l’équation (4.4). La dernière colonne donne une approximation de la distance à Saturne, exprimée en rayon de la planète. Ces satellites orbitant tous à quelques rayons de Saturne, les dissipations

Satellite	$n$ (rad/day)	$\nu$ (rad/day)	$\sigma$ (rad/day)	amp. Libr. (deg.)	Distance (Rayon Saturne)
Polydeuces	2.3	$7.93 \cdot 10^{-3}$	1.86	53	6.5
Hélène	2.3	$8.18 \cdot 10^{-3}$	1.42	30	6.5
Télesto	3.3	$9.03 \cdot 10^{-3}$	3.22	8	5.1
Calypso	3.3	$9.02 \cdot 10^{-3}$	2.97	2	5.1
Janus	9.03	$2.15 \cdot 10^{-3}$	4.94	76	2.5
Epiméthée	9.03	$2.15 \cdot 10^{-3}$	8.51	273	2.5

TABLE 4.1 – Quelques données orbitales extraites de [5] et [6].

de marée ont permis leur capture en résonance spin-orbit. Sachant que leurs excentricités sont faibles, de l’ordre du centième pour Janus et Epiméthée et du millième pour les quatre autres, et que le rapport des fréquences  $\sigma/\nu$  variant entre 173 pour Hélène et plus de 2000 pour Janus, les résultats du paragraphe 4.1 montrent qu’ils ne peuvent être capturés que dans la résonance synchrone. L’amplitude de la libration à l’intérieur de l’île de résonance devant être également amortie, la trajectoire convergera vers un attracteur quasi-périodique dont les fréquences fondamentales seront celles de l’orbite, à savoir  $n$  et  $\nu$  (voir par exemple Celletti et Chierchia (2008) et également la figure 5-d de [4]). C’est donc de cette orbite, appelée également solution ou orbite forcée, et de son voisinage dont nous traiterons dans les paragraphes suivants.

#### 4.2.2 Sur la rotation d’équilibre de Janus et d’Epiméthée

L’inclinaison de ces satellites sur l’équateur de Saturne étant très faible, moins  $0.2^\circ$  pour Janus et de  $0.4^\circ$  pour son compagnon, et leurs obliquités étant encore bien plus faibles, inférieures à 10 arcsec d’après Noyelles (2010), l’étude de leur rotation à l’aide de l’équation (4.1) est entièrement justifiée. Une des finalités de [5] étant d’obtenir une expression de la libration forcée des coorbitaux (l’attracteur mentionné plus haut) afin d’une part, d’interpréter le déphasage observé par Tiscareno *et al.* (2009), et d’autre part de fournir un modèle de rotation des deux satellites susceptible d’être ajusté aux observations dans l’espoir d’en déduire certains paramètres physiques de corps. Je ne présenterai, dans ce paragraphe, qu’une description schématique et quelque peu simplifiée des méthodes conduisant aux résultats détaillés dans [5].

En supposant que la libration autour de la synchronisation est de faible amplitude, donc que l’angle  $\theta - f$  séparant le grand axe du corps de la direction Saturne-satellite reste petit, on peut

linéariser l'équation (4.1) qui devient :

$$\ddot{\theta} + \sigma^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 (\theta - f) = 0, \quad (4.7)$$

$a$  étant le demi-grand axe moyen des satellites ( $a = r_0$ ).

Admettons ensuite que  $a/r \approx 1$  et que l'excentricité du satellite est constante<sup>8</sup>, puis approximations  $f$  par l'expression

$$f \approx nt + B(\nu t) + 2e \sin(nt + B(\nu t)), \quad \text{avec} \quad B(\nu t) = \delta \zeta(t). \quad (4.8)$$

Dans cette dernière expression qui généralise la formule (4.3) au cas faiblement excentrique,  $\zeta$  satisfait l'équation différentielle (4.4) et  $\delta$  est égale à  $m_E/(m_J + m_E)$  ou à  $-m_J/(m_J + m_E)$  selon que l'on s'intéresse à la rotation de Janus (indice  $J$ ) ou à celle de son compagnon (indice  $E$ ). Précisons également que, pour alléger les notations, les constantes additives correspondant à des phases initiales ont été supprimées de la formule (4.8) ainsi que d'autres qui suivront. En posant

$$y = \theta - nt - B(\nu t) \quad (4.9)$$

et en injectant les approximations précédentes dans l'équation (4.7) tout en négligeant la dérivée temporelle seconde de  $B(\nu t)$ , car  $\nu \ll n$ , on obtient l'équation différentielle :

$$\ddot{y} + \sigma^2 y = 2e\sigma^2 \sin(nt + B(\nu t)) \quad (4.10)$$

Cette équation différentielle étant linéaire, on peut toujours utiliser la méthode de la variation des constantes pour en exhiber la solution générale sous forme intégrale. Mais cette formulation ne met pas en évidence la solution forcée que nous recherchons. Une façon classique de calculer cette solution est d'utiliser un développement en série de Fourier. Il convient de développer la fonction  $B(\nu t)$ , ou de manière équivalente la solution  $\zeta$  de l'équation différentielle (4.4), puis de substituer dans  $\sin(nt + B(\nu t))$  pour obtenir la série de Fourier du second membre de (4.10) et enfin de résoudre terme à terme cette dernière équation. Si cette technique est très efficace quand l'orbite du corps en rotation libre avec une faible amplitude au voisinage des équilibres équilatéraux de Lagrange, car les coefficients du développement de l'orbite et donc ceux de la solution forcée de (4.10) décroissent rapidement pourvu que  $n$  ne soit pas trop proche de  $\sigma$  (voir la formule (4.12)), il n'en est pas de même pour une orbite en fer à cheval. Comme nous le montrons dans [5], il faut, dans ce cas, prendre en compte un grand nombre de termes pour que la solution obtenue par développement de Fourier approxime convenablement la rotation de Janus ou d'Epiméthée. Une deuxième difficulté, intrinsèque à la résonance coorbitale, vient ici s'ajouter. Admettons que le développement du second membre de (4.10) soit de la forme :

$$\sin(nt + B(\nu t)) = \sum_{|k| \leq N} \alpha_k \sin(nt + k\nu t) \quad (4.11)$$

la solution forcée s'écrira alors :

$$y(t) = 2e\sigma^2 \sum_{|k| \leq N} \alpha_k \frac{\sin(nt + k\nu t)}{\sigma^2 - (n + k\nu)^2}. \quad (4.12)$$

Mais  $\nu$  étant très petit devant  $n$ , toutes les harmoniques de l'expression ci-dessus ont des fréquences très proches, et leur identification dans les données observationnelles de la libration en longitude nécessitera que ces dernières soient d'une grande précision, en tous cas bien au-delà de la précision des mesures fournies par la sonde Cassini. Comme je l'ai signalé plus haut, on constate également que quand  $n$  et  $\sigma$  sont proches, les diviseurs qui apparaissent dans l'expression (4.12) peuvent être

---

8. Nous ne faisons pas l'approximation  $a/r = 1$  dans [5] et nous y montrons que les excentricités de Janus et d'Epiméthée varient avec une période d'environ 2700 ans.

petits, voire nuls. Cette situation qui est susceptible de se présenter dans le cas d’Epiméthée est abordée dans [6] et sera évoquée au paragraphe 4.2.3.

Si la petitesse de la fréquence coorbitale  $\nu$  devant  $n$  induit les difficultés signalées ci-dessus, on peut en tirer avantage en développant la solution forcée recherchée en puissance du petit paramètre  $\epsilon = \nu/n$ . La solution quasi-périodique recherchée ayant pour fréquences fondamentales  $n$  et  $\nu$ , elle peut s’écrire sous la forme  $y(t) = F(nt, \nu t)$ , où  $F(\theta_1, \theta_2)$  est une fonction  $2\pi$ -périodique en  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . L’équation différentielle (4.10) devient alors :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_2^2} = 2e \left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 \sin(nt + B(\nu t)). \quad (4.13)$$

L’injection du développement en puissance de  $\epsilon$  de la solution cherchée dans cette équation, le regroupement des termes de même degré en  $\epsilon$ , et enfin la résolution successive des équations différentielles linéaires ainsi obtenues, conduisent à l’expression de la solution forcée. A l’ordre 1 en  $\nu/n$ , ce procédé nous donne :

$$y(t) = \frac{2e\sigma^2}{\sigma^2 - n^2} \left(1 + 2\epsilon \frac{n^2}{\sigma^2 - n^2} B'(\nu t)\right) \sin(nt + B(\nu t)) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.14)$$

$B'$  étant la dérivée de  $B$ . Cette formulation, très compacte, possède au moins deux avantages. D’une part, sa simplicité lui permet de bien mieux se prêter à un ajustement aux observations que ne le ferait la solution développée en série de Fourier. D’autre part, l’interprétation des différents termes la constituant permet de savoir si le déphasage observé par Tiscareno *et al.* (2009) est dû, ou non, à l’influence du mouvement coorbital sur la libration de Janus. Rappelons que ces auteurs ont estimé en 2009 que Janus, dont la rotation semblait être synchrone, ne voyait pas le grand axe de son ellipsoïde pointer vers Saturne lors de son passage au péricentre, mais plutôt vers une direction qui s’en écartait d’environ  $5.3^\circ$ . Afin d’estimer ce déphasage, il suffit de soustraire à  $y$  le terme

$$f - \lambda = 2e \sin(nt + B(\nu t)) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.15)$$

ce qui permet de repérer l’orientation du grand axe du satellite par rapport à la direction Saturne-satellite. D’où l’expression de cet angle d’orientation noté  $\tilde{y}$  :

$$\tilde{y}(t) = \frac{2en^2}{\sigma^2 - n^2} \left(1 + 2\epsilon \frac{n^2}{\sigma^2 - n^2} B'(\nu t)\right) \sin(nt + B(\nu t)) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.16)$$

Si l’on néglige le terme de taille  $\epsilon$  tout en figeant les variations de  $B$ , on retrouve la solution classique de la libration en longitude d’un corps sur une orbite képlérienne d’excentricité  $e$ . D’après les données du tableau 4.1, l’amplitude de cette libration est d’environ  $1.1^\circ$  degrés. On sait que, quand le satellite passe au péricentre de son orbite képlérienne, son grand axe est orienté vers la planète, donc que  $\tilde{y}$  y est égal à zéro (ou  $\pi$ ). Si on prend en compte les variations à long terme de la phase  $B$ , toujours en négligeant les terme en  $\epsilon$ , il existera un passage au péricentre pour lequel  $B$  sera proche de son maximum<sup>9</sup>, c’est à dire  $38^\circ$  pour Janus. La valeur de  $\tilde{y}$  y sera donc maximale, et le déphasage sera majoré par  $0.7^\circ$ . L’ajout du terme de taille  $\epsilon$  ne modifiera que très peu cette valeur : comme pour Janus  $|B'| < 0.45$ , ce terme affectera l’amplitude de la libration d’au plus 0.03%. Nous sommes donc très loin des  $5.3^\circ$  invoqués par Tiscareno *et al.* (2009). Dans [5] nous avons modélisé d’autres effets pouvant conduire à ce déphasage, telle une dissymétrie du corps modélisée par des harmoniques d’ordre 3, ou encore les dissipations de marée, mais les résultats obtenus étaient toujours bien inférieurs à la valeur recherchée. Bien qu’un peu frustrant, ceci est finalement rassurant puisqu’il n’y a, en réalité, pas de déviation mesurable. Dans l’article de Thomas *et al.* (2013), il n’est plus fait mention du déphasage en question, Matthew Tiscareno ayant même précisé lors d’une discussion en marge d’un colloque<sup>10</sup> que ce déphasage n’apparaissait plus en prenant en compte les dernières observations de la sonde Cassini. Cette fausse piste a au

9. A condition que  $\nu$  et  $n$  ne soient pas commensurables.

10. EGU 2011

moins le mérite de nous avoir incités à développer un modèle de rotation de Janus et d’Epiméthée publié dans [5], de l’avoir étendu dans [6] aux quatre autres satellites troyens de Saturne, et d’avoir obtenu, avec Alexandre Correia, les résultats bien plus généraux que j’ai présentés au paragraphe 4.1.

### 4.2.3 Rotation au voisinage de l’équilibre

Au cours de son voyage dans le système de Saturne, la sonde Cassini à effectué un grand nombre d’observations des satellites de la planète, dont les satellites coorbitaux et troyens de Saturne. Les quatre derniers étant de très petits corps, leur plus grand diamètre étant de l’ordre de la trentaine des kilomètres pour Hélène, Télésto et Calypso et voisin de deux kilomètres pour Polydeuces (Porco *et al.*, 2007; Thomas, 2010), les seules données disponibles avant les travaux de Thomas *et al.* (2013) étaient celles des longueurs des trois axes des ellipsoïdes modélisant leurs formes. A partir de ces données, et en supposant les corps homogènes, il est possible de remonter à leurs moments d’inertie et donc à la fréquence  $\sigma$  caractérisant leur libration autour de la synchronisation<sup>11</sup>. L’incertitude sur ces valeurs étant élevée, de l’ordre de plusieurs dizaines de pourcents, il était possible, suivant les satellites, que  $\sigma$  ait été proche de  $n$  ou de  $n/2$  (voit tableau 4.1). Ce sont ces cas, particulièrement intéressants d’un point de vue dynamique que nous avons étudiés dans [6]. En voici un résumé succinct.

Si ces résonances secondaires, ici commensurabilités entre  $\sigma$  et  $n$ , enrichissent la dynamique en modifiant profondément la topologie de l’espace des phases, elles compliquent grandement la recherche des solutions du problème puisque les expressions (4.12) et (4.14) de la rotation forcée divergent dans le cas de la résonance 1:1. Pour la résonance 2:1 ( $2\sigma = n$ ), cette expression reste valable, mais d’autres solutions quasi-périodiques de fréquences  $n$  et  $\nu$  existent à proximité de celle-ci. Dans l’espoir de décrire systématiquement la structure de l’espace des phases, au moins pour de petites librations au voisinage de la rotation synchrone, et également les bifurcations rencontrées au voisinage des résonances secondaires, il convient de recourir à une méthode un peu moins artisanale que celle employée au paragraphe 4.2.2.

Une manière efficace de réaliser l’étude souhaitée est d’utiliser les méthodes standards de la théorie des perturbations hamiltonienne. Sans entrer dans les détails, on peut voir l’équation (4.1) comme provenant du système hamiltonien non autonome :

$$H(x, X, t) = \frac{X^2}{2} - \frac{\sigma^2}{4} (1 + \sqrt{\mu}h(nt, \nu t)) \cos 2x - n\sqrt{\mu}g(nt, \nu t)X, \quad (4.17)$$

où  $(x, X) = (\theta - f, \dot{\theta} - n)$ ,  $\mu$  est le rapport de la somme des masses des satellites sur celle de Saturne<sup>12</sup> et  $h$  et  $g$  sont deux fonctions quasi-périodiques dont les fréquences fondamentales sont  $n$  et  $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . Dans un voisinage de l’origine des coordonnées ( $x = X = 0$ ), cette dernière n’étant un point fixe que si  $\mu = 0$ , les trajectoires régulières sont des trajectoires quasi-périodiques ayant trois fréquences fondamentales : les deux fréquences orbitales  $n$  et  $\nu$  et une troisième, proche de  $\sigma$  qui dépend de la distance à l’origine. Ces orbites à trois fréquences s’enroulent autour d’une autre orbite ne dépendant que des deux fréquences orbitales  $n$  et  $\nu$  : l’orbite forcée étudiée au paragraphe précédent. Dans les cas les plus simples, quand  $n/\sigma$  est loin d’être un entier, cette orbite, qui est unique, s’obtient par une translation (dépendant quasi-périodiquement du temps) sur les coordonnées  $(x, X)$  de manière à ce que l’origine des nouvelles coordonnées soit un point fixe du système. Pour réaliser cette opération, il convient d’éliminer du Hamiltonien (4.17) le terme  $n\sqrt{\mu}g(nt, \nu t)X$ , ce qui revient à chercher la solution quasi-périodique de (4.10) ayant pour fréquences fondamentales  $n$  et  $\sigma$ . C’est donc sans surprise que nous obtenons la solution forcée sous une forme semblable à (4.14). L’application de cette formule aux données du tableau 4.1 conduit à une majoration des amplitudes de libration autour de la rotation synchrone des Satellites troyens

11. On retrouve ces valeurs dans le tableau 4.1

12. Dans l’approximation conduisant au hamiltonien (4.17) on suppose que l’excentricité de l’orbite et le rapport des masses sont du même ordre. Cette hypothèse dont on peut très bien se passer permet de n’introduire qu’un seul petit paramètre.

Hélène, Télésto, Calypso et Polydeuces (Table 2 de [6]), valeurs confinées par Thomas *et al.* (2013), dans la limite de la précision des observations Cassini, pour ces 3 premiers satellites.

Au voisinage de l'orbite forcée, la fréquence de libration autour de la rotation synchrone est proche de  $\sigma$ , cette dernière fréquence ayant été choisie loin d'une commensurabilité d'ordre faible avec  $n$ , aucune résonance significative entre ces deux fréquences ne surviendra au voisinage de l'origine. Les variations lentes, dues à la résonance coorbitale, n'engendrent pas non plus de résonance significative. En effet, les rapports  $n/\nu$  et  $\sigma/\nu$  sont d'ordre  $\sqrt{\mu}$ , quantité qui avoisine des valeurs proches de 1000 pour les quatre satellites de Saturne étudiés<sup>13</sup>, ce qui écarte là encore, toute possibilité de résonance significative. La dynamique est donc globalement régulière, à l'exception de petites régions très confinées où agissent des résonances d'ordre élevé, et peut être décrite analytiquement par une réduction du hamiltonien (4.17) à une forme normale, comme nous l'avons fait dans [6].

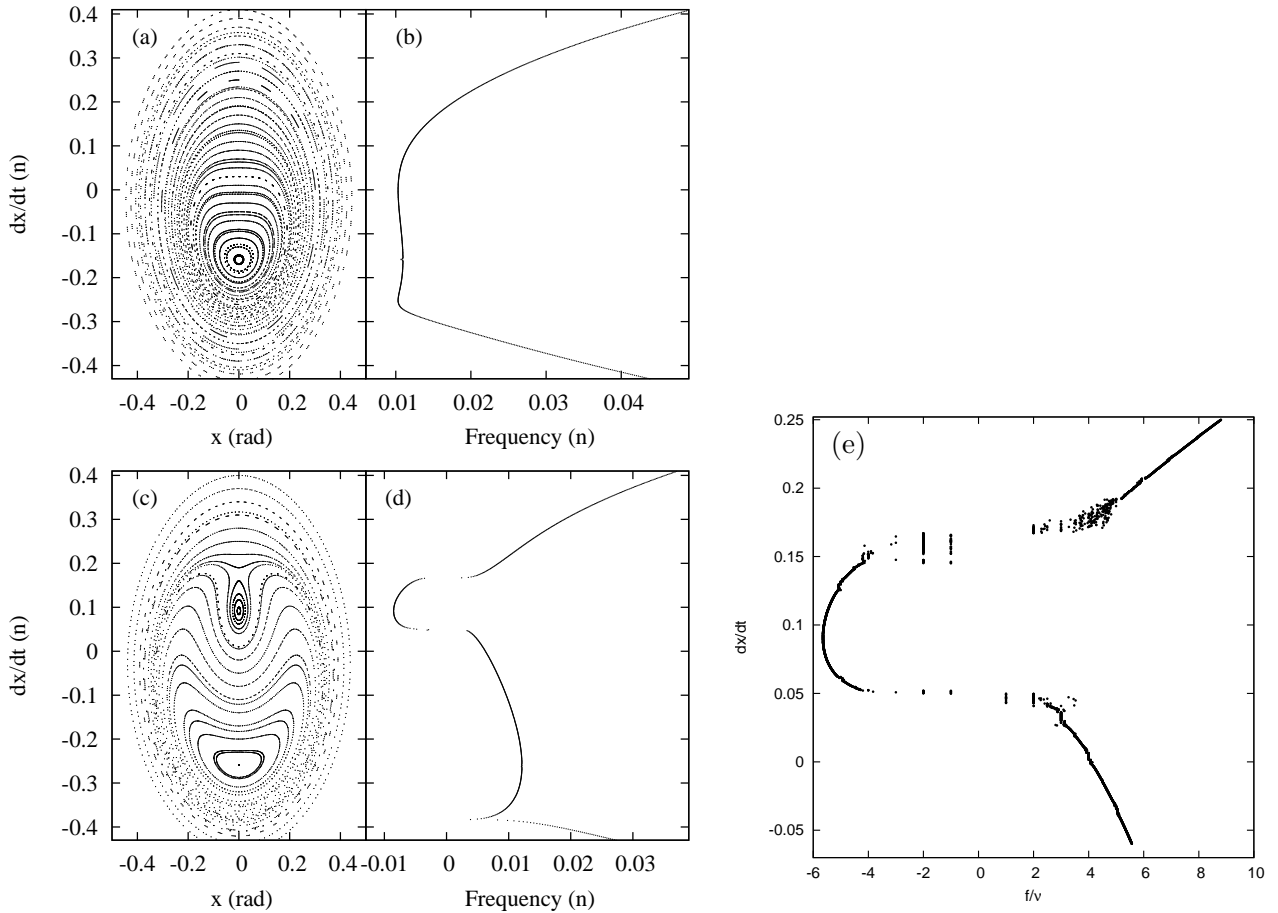


FIGURE 4.5 – Portraits de phase du hamiltonien (4.17) pour  $\sigma/n = 1$  en (a) et  $\sigma/n = 1.013$  pour (c). L'effet de la résonance coorbitale n'est pas pris en compte. Figures (b) et (d) : fréquence de rotation  $f$  autour du ou des points fixes mesurée le long du segment vertical  $x = 0$ . Figure (e) : zoom de la figure (d) en prenant en compte le troisième degré de liberté lié au mouvement coorbital. On constate l'apparition de zones chaotiques engendrées par les résonances entre  $f$  et  $\nu$ .

La situation est bien plus riche au voisinage d'une résonance secondaire, en particulier quand le rapport  $n/\sigma$  est proche d'un petit entier. Dans ce cas, l'orbite forcée n'est plus nécessairement unique et il existe une valeur critique de  $\sigma$ , qui dépend de la résonance considérée, pour laquelle naissent d'autres familles d'orbites quasi-périodiques. Un exemple en est donné par la figure 4.5 qui illustre cette bifurcation dans le cas de la résonance 1:1 entre  $\sigma$  et  $n$ .

Afin de représenter plus clairement le phénomène, les perturbations à longue période engendrées par la résonance coorbitale ont été figées, ce qui correspond à placer les trois corps sur une configuration équilatérale de Lagrange. Le problème ainsi ramené à deux degrés de liberté,

13. Probablement bien plus pour Polydeuces.

son portrait de phase peut être visualisé par itération du flot au temps  $2\pi/n$  (période orbitale) du hamiltonien (4.17). Ainsi obtenus, les portraits de phase au voisinage de l'origine rapporté aux coordonnées  $(x, \dot{x})$  sont présentés en (a) pour  $\sigma = n$  et en (c) pour  $\sigma = 1.013n$ .

Le seul point fixe présent sur la figure (a) est associé à l'orbite forcée qui ici est périodique puisque les mouvements lents sont figés. A l'inverse du cas non résonant, ce point fixe est assez éloigné de l'origine, indiquant une grande amplitude de libration autour de la synchronisation. En supposant que la dynamique soit régulière, les trajectoires entourant le point fixes sont quasi-périodiques de fréquences fondamentales  $n$  et  $f$ , cette dernière fréquence étant tracée sur la figure (b) où elle est calculée le long de la droite  $(0, \dot{x})$ .

Pour  $\sigma = 1.013n$ , figure (c), le portrait de phase change considérablement, puisqu'un nouveau couple de points fixes apparaît (un stable et l'autre instable), séparant ainsi l'espace des phases en trois régions de libration distinctes. La position des séparatrices issues du point hyperbolique est marquée par les sauts en fréquences de la figure (d), où  $f$  est représentée en fonction de  $\dot{x}$  pour  $x = 0$ . Au voisinage des séparatrices, cette dernière fréquence tend vers zéro, ce qui a une conséquence dynamique fort intéressante. En effet, si l'on considère maintenant la perturbation de fréquence  $\nu$  engendrée par la résonance coorbitale, le rapport  $\nu/f$  reste généralement élevé, pour  $\sigma = n$  (figures (a) et (b)) on a toujours  $f > 7\nu$ , et aucune résonance significative n'est présente. Mais ceci n'est plus vrai à proximité des séparatrices, comme le montre la figure (e) qui représente, dans le problème perturbé, les valeurs de la fréquence  $f$  dans un domaine incluant les séparatrices autour desquelles on observe de larges zones chaotiques bordant les résonances marquées par des plateaux. Le même type de comportement chaotique existe au voisinage d'autres résonances secondaires tels la 1:2 ou la 1:3, les bifurcations associées à la première résonance sont détaillées dans [6].

L'analyse des observations d'Hélène, Télésto et Calypso par la sonde Cassini (Thomas *et al.*, 2013) semble montrer que les librations de ces satellites autour de la rotation synchrone sont de faible amplitude, résultats que nous avons également obtenus en faisant l'hypothèse que  $n$  et  $\sigma$  n'étaient pas commensurables, ce qui rend très improbable le fait que ces satellites soient actuellement piégés dans une des résonances étudiées dans ce paragraphe. Mais il n'est pas impossible qu'ils l'aient été au cours de leur histoire.

# Chapitre 5

## Quelques extensions possibles

Les travaux et méthodes que j'ai présentés dans ce mémoire peuvent être prolongés de diverses manières et appliqués à différents types de problèmes. Certaines de ces extensions ont déjà été suggérées dans le chapitre précédent, d'autres moins évidentes vont être développées ici.

### 5.1 Quelques travaux théoriques

#### 5.1.1 Conjecture sur la terminaison des familles anti-Lagrange et Euler

J'ai présenté au paragraphe 2.3.4 une conjecture dans laquelle je propose que les familles d'orbites anti-Lagrange et d'Euler du type  $L_3$  coïncident quand leur excentricité tend vers 1. Il semble très délicat d'aborder ce problème de manière numérique puisque l'orbite vers laquelle sont sensées converger ces deux familles est une orbite pour laquelle les trois corps entrent simultanément en collision. Il paraît plus raisonnable de traiter cette question d'un point de vue théorique en partant directement de la variété de collision triple en s'inspirant, par exemple, des travaux Moeckel (1981) sur les orbites passant infiniment près de la collision triple.

#### 5.1.2 Les bifurcations verticales

Un autre type de prolongement assez voisin de celui-ci, mais probablement plus directement accessible, consiste en l'étude des orbites périodiques verticales issues des configurations de Lagrange circulaire. L'équation aux variations verticales, abordée au paragraphe 2.2.3 et un peu plus détaillée dans [1] où nous montrons que la partie quadratique verticale du hamiltonien moyen est identiquement nulle, est fortement dégénérée comme le montre la formule (2.19). Cette situation impose donc une analyse minutieuse des termes de degrés 4 du hamiltonien moyen si l'on veut comprendre les éventuelles bifurcations pouvant donner lieu à des orbites verticales remarquables. Des exemples de ce type de comportement particulier dans la direction verticale ont été fournis, entre autre, par Jorba (2000) dans le cadre du problème restreint bicirculaire des 4-corps, par Perdios et Zagouras (1991) et Marchal (2009) dans le problème restreint quasi-circulaire des 3-corps, et également par Chenciner et Féjoz (2008) dans le cadre du problème des 3-corps à masses égales (pour des masses égales les configurations de Lagrange sont instables, voir paragraphe 2.2.3). On peut également se demander si pour de grandes inclinaisons l'orbite verticale, qui est a priori normalement elliptique pour des inclinaisons voisines de zéro, bifurque, comme l'ont montré Jefferys et Moser (1966) dans le problème planétaire séculaire des 3-corps où, pour une inclinaison voisine de  $39^\circ$  (voir Libert et Henrard, 2007, pour plus de précisions sur cette valeur critique) cette orbite donne naissance à un triplet d'orbites périodiques.

#### 5.1.3 Existence d'orbites quasi-périodiques du type fer à cheval

Une application, beaucoup moins immédiate mais tout aussi naturelle, du formalisme présenté au chapitre 2 consiste en la démonstration de l'existence d'orbites quasi-périodiques dans le do-



maine des fers à cheval à l'aide de la théorie KAM. L'idée provient du fait qu'à une transformation canonique près<sup>1</sup>, le hamiltonien du problème des 3-corps en résonance coorbitale se décompose en la somme de trois parties : la première correspondant au hamiltonien d'un problème de Kepler, la deuxième donnée par le hamiltonien  $H_0$  étudiée au paragraphe 2.3.2, et la dernière étant une perturbation ayant pour partie principale le hamiltonien quadratique (2.31). En montrant à l'aide de KAM que certaines orbites quasi-périodiques du hamiltonien intégrable donné par la somme des deux premières parties sont conservées sous l'effet de la perturbation, on arrive au résultat escompté. Une des originalités de ce travail, entrepris avec Laurent Niederman, réside dans le fait que, contrairement aux situations classiques des applications de KAM en mécanique céleste, comme le problème planétaire quasi-circulaire ou le problème restreint au voisinages des points de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$ , la partie intégrable du problème ne possède pas de système de variable explicite, ce qui complique singulièrement les choses.

## 5.2 Exoplanètes coorbitales ?

Un autre domaine d'application et d'extension des résultats présentés dans ce mémoire est celui des exoplanètes.

En effet, certains modèles de formation montrent que les fréquentes collisions et rencontres proches entre planètes ou embryons planétaires conduisent à des accrétions ou à des captures en résonance coorbitale (Cresswell et Nelson, 2006). Cresswell et Nelson (2008) estiment qu'environ 30% des leurs simulations conduisent à la naissance d'un couple de planètes coorbitales dynamiquement stable. Ces auteurs montrent également que dans la majeure partie des cas les excentricités des coorbitales restent de l'ordre de quelques centièmes et que leur amplitude de libration au voisinage de configurations équilatérales reste modérée (Cresswell et Nelson, 2009).

Bien que les coorbitaux semblent être une conséquence des processus de formation des systèmes planétaires, aucun couple coorbital n'a encore été découvert. On peut évoquer deux raisons principales à cela : l'impossibilité actuelle de détecter un tel système et le fait que ces systèmes planétaires ne soient pas si fréquents qu'il n'y paraisse. Si aucun troyen n'a été observé par analyse des données de transit Kepler, Janson (2013) montre que la majeure partie des systèmes coorbitaux échappe aux méthodes d'analyse de TTV issues des observations de la mission Kepler. De manière similaire, à partir de l'analyse des variations de la vitesse radiale d'une étoile, il est difficile de distinguer un système coorbital de deux planètes en résonance 2:1 et même d'une seule planète gravitant sur une orbite à forte excentricité (voir Giuppone *et al.*, 2012). En ce qui concerne la fréquence des planètes coorbitales, Pierens et Raymond (2014) amoindrissent quelque peu la conclusion de Cresswell et Nelson (2008) en montrant que l'effet différentiel de la lacune créée dans le disque par le couple de planètes tend, sous certaines hypothèses, à éjecter les corps de la résonance 1:1. Les systèmes dont les deux composantes sont de même masse seraient les plus sujets à ce type d'instabilité. Il semblerait également, d'après Rodríguez *et al.* (2013), que les forts effets de marée subis par les systèmes coorbitaux proches de leur étoile tendraient à faire augmenter leur amplitude de libration dans la résonance 1:1 jusqu'à leur sortie de la résonance. Ce phénomène, s'il était confirmé (voir ci-dessous), limiterait également la proportion de planètes troyennes poches de leur étoile.

La recherche des systèmes planétaires coorbitaux nécessite, pour qu'elle soit efficace, une bonne connaissance de leur géométrie ainsi que l'utilisation d'outils d'analyse des observations adaptés à la résonance 1:1. Je propose donc trois axes de recherche complémentaires qui sont : la détermination des configurations stables en fonction des masses planétaires, le développement des méthodes dédiées à la détection de systèmes coorbitaux et une extension des travaux présentés au chapitre 4 portant sur la rotation des corps en résonance coorbitale.

Une première étape consiste à caractériser le type d'orbite (voisine de Lagrange, fer à cheval, quasi-satellite, autres) que l'on peut rencontrer le plus fréquemment en fonction de la valeur des

---

1. Celle qui moyenne le problème à l'ordre un des masses.

masses planétaires par rapport à celle de l'étoile. Bien sûr, le terrain à déjà été défriché, nous savons en particulier que :

- Plus les masses et les excentricités planétaires sont grandes, plus la taille des régions stables entourant les configurations de Lagrange se réduit (voir Gascheau, 1843; Danby, 1964; Roberts, 2002; Nauenberg, 2002).
- Pour de faibles excentricités les orbites en fer à cheval ne sont stables que si les planètes sont de masse inférieure à une quantité de l'ordre de la masse de Saturne (Laughlin et Chambers, 2002; Dvorak, 2006) et que la fraction de l'espace des phases contenant les orbites en fer à cheval augmente au détriment des trajectoires libration autour des configurations équilatérales de Lagrange (tadpole) à mesure que l'on diminue la valeur de la somme des masses des planètes<sup>2</sup> (Dermott et Murray, 1981).
- A grande excentricité, il semble d'après Giuppone *et al.* (2010) qu'au moins pour des planètes aussi massives que Jupiter, les orbites précédentes soient remplacées presque intégralement par des trajectoires de type quasi-satellite pour lesquelles la différence des longitudes moyennes libre autour de 0 (voir Namouni, 1999 pour le problème restreint et également Nauenberg (2002) et Funk *et al.* (2011) dans le cas planétaire). Mais qu'en est-il pour des masses plus faibles ?

Notons enfin que ces résultats ont tous été obtenus dans le cas d'un système planétaire coplanaire et qu'à ma connaissance, aucune étude systématique de la stabilité d'un couple planétaire coorbital incliné n'est encore publiée.

### 5.2.1 Stabilité des systèmes coorbitaux

Pour les petites excentricités, des conclusions complémentaires pourront être obtenues grâce au formalisme présenté au chapitre 2 aidé de simulations numériques ciblées. Pour les plus grandes excentricités la situation est plus floue, et si nous supposons que les planètes ne sont pas coplanaires, tout reste à faire. Une solution consiste à effectuer des simulations numériques dans le même esprit que celles présentées au chapitre 3 dont l'analyse des données (détermination des fréquences fondamentales ou autres éléments propres) s'appuie sur des outils analytiques comme ceux obtenus au paragraphe 2.3.4 par construction de forme normale de Birkhoff. Ces techniques de normalisation, qui s'appliquent directement dans un grand voisinage des équilibres équilatéraux de Lagrange (voir [1]), sont également en cours de développement pour les quasi-satellites dans la thèse d'Alexandre Pousse. Pour les orbites en fer à cheval la situation est, pour le moment, bien moins claire. En ce qui concerne le problème incliné, quelques pistes ont déjà été évoquées plus haut.

### 5.2.2 Détection des systèmes coorbitaux

Conjointement à ces études de stabilité, il convient de développer des méthodes dédiées à la détection de systèmes coorbitaux par le biais de l'étude de la vitesse radiale de l'étoile les abritant. C'est en effet pour cette technique d'observation, employée depuis une vingtaine d'années, que l'accumulation temporelle des données est la plus grande, ce qui permettrait dans les meilleurs cas, d'accéder à la fréquence de libration dans la 1:1, et par ce biais aux masses planétaires ainsi qu'à l'amplitude de libration dans la résonance. En se basant sur la description analytique du mouvement des coorbitaux développée dans [1] et décrite au chapitre 2, il est possible de construire un modèle de vitesse radiale dépendant explicitement des paramètres du système<sup>3</sup>. Un ajustement de ce modèle à des données d'observations concrètes devrait permettre de démasquer un éventuel couple de planètes en résonance 1:1. Ce travail est actuellement en cours dans le cadre de la thèse d'Adrien Leleu pour le modèle quasi-circulaire associé au hamiltonien (2.30). Une fois

---

2. On peut supposé que ceci est également vérifié pour de grandes excentricités, bien que je ne connaisse aucun article qui le mentionne explicitement.

3. A partir de la formulation analytique proposée dans [1], Vokrouhlický et Nesvorný (2014) montrent quelle est la forme des TTV engendrées par un système coorbital sur une orbite en fer à cheval.

effectuée la généralisation de ce modèle au cas excentrique, on peut espérer qu'elle débouchera sur une caractérisation précise de la variation de la vitesse radiale induite par un système coorbital général.

### 5.2.3 Rotation des coorbitaux

Le troisième axe de recherche concerne la rotation des troyens et ses éventuelles implications sur la dynamique orbitale par le biais des effets de marée. J'ai expliqué au paragraphe 4.1 de quelle manière pouvaient apparaître des rotations super et sub-synchrones dans certains systèmes coorbitaux quasi-circulaires. Ce résultat peut s'étendre de plusieurs manières. La généralisation la plus évidente consiste à prendre en compte les excentricités. Dans ce cas, déjà abordé par Leleu *et al.* (2014), la rotation synchrone, mais également toutes les autres résonances spin-orbit, voient leurs îles de libration se démultiplier. Ce mécanisme étant essentiellement dû à la présence d'une fréquence petite par rapport au moyen mouvement mais pas négligeable, doit pouvoir être étendu à des situations où les deux planètes sont dans une autre résonance orbitale que la 1:1.

Une autre extension consiste à considérer le cas où l'axe de rotation du corps n'est plus nécessairement dans son plan orbital. La prise en compte de l'obliquité, qui augmente certainement la taille des zones chaotiques engendrées par le recouvrement des résonances décrit en 4.1, peut aussi conduire à un autre phénomène intéressant : la possibilité de résonances entre la fréquence de précession et la fréquence coorbitale, conduisant ainsi à un nouveau type d'état de Cassini.

### 5.2.4 Effets de marée et résonance coorbitale

Le dernier point concerne les effets de marée en résonance coorbitale. J'ai montré au paragraphe 4.1 comment des dissipations de marée pouvaient conduire à des captures en résonance spin-orbit légèrement non synchrone. On peut se demander dans quelle mesure cette absence de synchronisation peut modifier les résultats obtenus par Rodríguez *et al.* (2013) sur l'instabilité orbitale des systèmes coorbitaux proches de leur étoile. Plus qu'une simulation numérique, la mise au point d'un modèle analytique moyen des effets de marée sur la rotation et la dynamique orbitale des corps en résonance 1:1 devrait permettre de répondre à cette question.

# Bibliographie

- ARNOLD, V. I. (1964). Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Sov. Math. Dok.*, 5:581–585.
- BODOSSIAN, J. (2008). *Contribution à l'analyse de la dynamique des troyens. Evolution du réseau de résonances en fonction des fréquences planétaires*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- BRASSER, R., INNANEN, K. A., CONNORS, M., VEILLET, C., WIEGERT, P., MIKKOLA, S. et CHODAS, P. W. (2004). Transient co-orbital asteroids. *Icarus*, 171:102–109.
- CARPINO, M., MILANI, A. et NOBILI, A. M. (1987). Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets. *Astron. Astrophys.*, 181:182–194.
- CELLETTI, A. et CHIERCHIA, L. (2008). Measures of basins of attraction in spin-orbit dynamics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101:159–170.
- CHARLIER, C. V. L. (1906). Über den Planeten 1906 TG. *Astronomische Nachrichten*, 171:213.
- CHENCINER, A. (2012). Poincaré and the three-body problem. In *Séminaire Poincaré (Bourbaphy) XVI (2012) : Poincaré, 1912-2012*, pages 45–133.
- CHENCINER, A. et FÉJOZ, J. (2008). The flow of the equal-mass spatial 3-body problem in the neighborhood of the equilateral relative equilibrium. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 10(2-3):421–438.
- CHIRIKOV, B. V. (1959). The passage of a nonlinear oscillating system through resonance. *Sov. Phys. Dokl.*, 4:390.
- COLOMBO, G. (1965). Rotational Period of the Planet Mercury. *Nature*, 208:575.
- CORREIA, A. C. M. et ROBUTEL, P. (2013). Spin-orbit coupling and chaotic rotation for coorbital bodies in quasi-circular orbits. *APJ*, 779:20.
- CRESSWELL, P. et NELSON, R. P. (2006). On the evolution of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *Astron. Astrophys.*, 450:833–853.
- CRESSWELL, P. et NELSON, R. P. (2008). Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *Astron. Astrophys.*, 482:677–690.
- CRESSWELL, P. et NELSON, R. P. (2009). On the growth and stability of Trojan planets. *Astron. Astrophys.*, 493:1141–1147.
- DANBY, J. M. A. (1964). Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. *Astron. Astrophys.*, 69:165.
- DE LA FUENTE MARCOS, C. et DE LA FUENTE MARCOS, R. (2013). Crantor, a short-lived horseshoe companion to Uranus. *Astron. Astrophys.*, 551:A114.
- DERMOTT, S. F. et MURRAY, C. D. (1981). The dynamics of tadpole and horseshoe orbits. I - Theory. *Icarus*, 48:1–11.

- DI SISTO, R. P., RAMOS, X. S. et BEAUGÉ, C. (2014). Giga-year evolution of Jupiter Trojans and the asymmetry problem. *Icarus*, 243:287–295.
- DVORAK, R. (2006). Exchange orbits in planetary systems. In SULI A., Freistetter F., P. A., éditeur : *Proc. Fourth Austrian Hungarian Workshop on Celestial Mechanics.*, pages 63–74.
- DVORAK, R. et SCHWARZ, R. (2005). On the Stability Regions of the Trojan Asteroids. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 92:19–28.
- ÉRDI, B. (1977). An asymptotic solution for the trojan case of the plane elliptic restricted problem of three bodies. *Celestial Mechanics*, 15:367–383.
- EULER, L. (1764). Considerationes de motu corporum coelestium. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. Berlin acad.*, 10:544–558.
- EVANS, N. W. et TABACHNIK, S. A. (2000). Asteroids in the inner Solar system - II. Observable properties. *MNRAS*, 319:80–94.
- FUNK, B., SCHWARZ, R., DVORAK, R. et ROTH, M. (2011). Exchange orbits : a possible application to extrasolar planetary systems ? *MNRAS*, 410:455–460.
- GABERN, F. (2003). *On the dynamics of the Trojan asteroids.* Thèse de doctorat, Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi Universitat de Barcelona.
- GABERN, F., JORBA, A. et ROBUTEL, P. (2004). On the accuracy of restricted three-body models for the trojan motion. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 11(4):843–854.
- GASCHEAU, G. (1843). Examen d’une classe d’équations différentielles et application à un cas particulier du problème des trois corps. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 16(7):393–394.
- GIUPPONE, C. A., BEAUGÉ, C., MICHTCHEENKO, T. A. et FERRAZ-MELLO, S. (2010). Dynamics of two planets in co-orbital motion. *MNRAS*, 407:390–398.
- GIUPPONE, C. A., BENITEZ-LLAMBAY, P., et BEAUGÉ, C. (2012). Origin and detectability of co-orbital planets from radial velocity data. *MNRAS*, 421(1):356–368.
- GOLDREICH, P. et PEALE, S. (1966). Spin-orbit coupling in the solar system. *Astron. J.*, 71:425–438.
- HADJIDEMETRIOU, J. D., PSYCHOYOS, D. et VOYATZIS, G. (2009). The 1/1 resonance in extrasolar planetary systems. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 104:23–38.
- HADJIDEMETRIOU, J. D. et VOYATZIS, G. (2011). The 1/1 resonance in extrasolar systems. Migration from planetary to satellite orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 111:179–199.
- HANSSMANN, H. (2011). Non-degeneracy conditions in kam theory. *Indag. Math.*, 3-4:241–256.
- HOU, X., SCHEERES, D. J. et LIU, L. (2014a). Dynamics of the Jupiter Trojans with Saturn’s perturbation in the present configuration of the two planets. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 119:119–142.
- HOU, X. Y., SCHEERES, D. J. et LIU, L. (2014b). Saturn Trojans : a dynamical point of view. *MNRAS*, 437:1420–1433.
- JANSON, M. (2013). A Systematic Search for Trojan Planets in the Kepler Data. *APJ*, 774:156.
- JEFFERYS, W. H. et MOSER, J. (1966). Quasi-periodic solutions for the three-body problem. *Astron. J.*, 71(7):568–578.

- JORBA, À. (2000). A numerical study on the existence of stable motions near the triangular points of the real earth-moon system. *Astron. Astrophys.*, 364:327–338.
- JORBA, A. et SIMÓ, C. (1996). On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(6):1704–1737.
- KARLSSON, O. (2010). On the observational bias of the Trojan swarms. *Astron. Astrophys.*, 516:A22.
- LAGRANGE (1772). *Œuvres complètes*. Gouthier-Villars, Paris (1869).
- LASKAR, J. (1990). The chaotic motion of the Solar System. A numerical estimate of the size of the chaotic zone. *Icarus*, 88:266–291.
- LASKAR, J. (1999). Introduction to frequency map analysis. In SIMÓ, C., éditeur : *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, NATO ASI, pages 134–150. Kluwer, Dordrecht.
- LASKAR, J. (2005). Note on the Generalized Hansen and Laplace Coefficients. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91:351–356.
- LASKAR, J. et ROBUTEL, P. (1995). Stability of the planetary three-body problem I : Expansion of the planetary hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62:193–217.
- LAUGHLIN, G. et CHAMBERS, J. E. (2002). Extrasolar Trojans : The Viability and Detectability of Planets in the 1 :1 Resonance. *Astron. J.*, 124:592–600.
- LELEU, A., ROBUTEL, P. et CORREIA, A. C. M. (2014). Spin-orbit coupling and chaotic rotation for eccentric coorbital bodies. *ArXiv e-prints*.
- LEVISON, H., SHOEMAKER, E. et SHOEMAKER, C. (1997). The long-term dynamical stability of Jupiter’s Trojan asteroids. *Nature*, 385:42–44.
- LIBERT, A.-S. et HENRARD, J. (2007). Exoplanetary systems : The role of an equilibrium at high mutual inclination in shaping the global behavior of the 3-D secular planetary three-body problem. *Icarus*, 191:469–485.
- LIUVILLE, J. (1842). Sur un cas particulier du problème des trois corps. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 14:503–506.
- LIUVILLE, J. (1945). Sur un cas particulier du problème des trois corps. *Connaissance des Temps pour l’an 1845*, pages add. 5–17.
- MARCHAL, C. (2009). Long term evolution of quasi-circular Trojan orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104:53–67.
- MARZARI, F. et SCHOLL, H. (1998). The growth of Jupiter and Saturn and the capture of Trojans. *Astron. Astrophys.*, 339:278–285.
- MEYER, K. R. et HALL, G. R. (1992). *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the n-body problem*. Springer-Verlag.
- MICHTCHENKO, T., BEAUGÉ, C. et ROIG, F. (2001). Planetary migration and the effects of mean motion resonances on Jupiter’s Trojan asteroids. *Astron. J.*, 122:3485–3491.
- MIGNARD, F. (1979). The evolution of the lunar orbit revisited. I. *Moon and Planets*, 20:301–315.
- MILANI, A. (1993). The Trojan asteroid belt : proper elements, stability, chaos and families. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 57:59–94.

- MILANI, A. et KNEZEVIĆ, Z. (1990). Secular perturbation theory and computation of asteroid proper elements. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 49:347–411.
- MILANI, A. et KNEZEVIĆ, Z. (1992). Asteroid proper elements and secular resonances. *Icarus*, 98:211–232.
- MOECKEL, R. (1981). Orbits of the three-body problem which pass infinitely close to triple collision. *American Journal of Mathematics*, 103(6):1323–1341.
- MORAIS, M. H. M. (2001). Hamiltonian formulation of the secular theory for Trojan-type motion. *Astron. Astrophys.*, 369:677–689.
- MORAIS, M. H. M. et MORBIDELLI, A. (2002). The Population of Near-Earth Asteroids in Coorbital Motion with the Earth. *Icarus*, 160:1–9.
- MORAIS, M. H. M. et MORBIDELLI, A. (2006). The population of near earth asteroids in coorbital motion with venus. *Icarus*, 185(1):29–38.
- MORBIDELLI, A. (2002). *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*. Taylor & Francis, London, 2002, ISBN 0415279399.
- MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K. et GOMES, R. S. (2005). Chaotic capture of Jupiter’s Trojan asteroids in the early Solar System. *Nature*, 435:462–465.
- MURRAY, C. D. et DERMOTT, S. F. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge univ. press.
- NAMOUNI, F. (1999). Secular Interactions of Coorbiting Objects. *Icarus*, 137:293–314.
- NAUENBERG, M. (2002). Stability and Eccentricity for Two Planets in a 1 :1 Resonance, and Their Possible Occurrence in Extrasolar Planetary Systems. *Astron. J.*, 124:2332–2338.
- NESVORNY, D. et DONES, L. (2002). How long-live are the hypothetical Trojan populations of Saturn, Uranus, and Neptune? *Icarus*, 160:271–288.
- NESVORNY, D., VOKROUHLICKY, D. et MORBIDELLI, A. (2013). Capture of Trojans by Jumping Jupiter. *APJ*, 768:45.
- NOYELLES, B. (2010). Theory of the rotation of Janus and Epimetheus. *Icarus*, 207:887–902.
- PALISA, J. (1907). Beobachtungen von kleinen Planeten. *Astronomische Nachrichten*, 175:191.
- PERDIOS, E. et ZAGOURAS, C. G. (1991). Vertical stability of periodic solutions around the triangular equilibrium points. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 51:75–81.
- PIERENS, A. et RAYMOND, S. N. (2014). Disruption of co-orbital (1 :1) planetary resonances during gas-driven orbital migration. *MNRAS*, 442:2296–2303.
- PILAT-LOHINGER, E., SÜLI, Á., ROBUTEL, P. et FREISTETTER, F. (2008). The Influence of Giant Planets Near a Mean Motion Resonance on Earth-like Planets in the Habitable Zone of Sun-like Stars. *Astron. J.*, 681:1639–1645.
- POINCARÉ, H. (1892). *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, volume I. Gauthier Villars Paris, reprinted by Blanchard, 1987.
- PORCO, C. C., THOMAS, P. C., WEISS, J. W. et RICHARDSON, D. C. (2007). Saturn’s Small Inner Satellites : Clues to Their Origins. *Science*, 318:1602–1607.
- PÖSCHEL, J. (1982). Integrability of hamiltonian systems on cantor sets. *Comm. Comm. Pure Appl. Math.*, 25:653–695.

- ROBERTS, G. (2002). Linear stability of the elliptic Lagrangian triangle solutions in the three-body problem. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 182:191–218.
- ROBUTEL, P. (2005). Frequency analysis and global dynamics of a planetary system. In BENEST, D., éditeur : *Hamiltonian systems and Fourier analysis : new prospects for gravitational dynamics*, Advances in astronomy and astrophysics, pages 179–198. Cambridge Scientific Publishers.
- ROBUTEL, P. et BODOSSIAN, J. (2009). The resonant structure of Jupiter’s Trojan asteroids - II. What happens for different configurations of the planetary system. *MNRAS*, 399:69–87.
- ROBUTEL, P. et GABERN, F. (2006). The resonant structure of Jupiter’s Trojan asteroids I : Long-term stability and diffusion. *MNRAS*, 372:1463–1482.
- ROBUTEL, P., GABERN, F. et JORBA, A. (2005). The Observed Trojans and the Global Dynamics Around The Lagrangian Points of the Sun-Jupiter System. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 92:53–69.
- ROBUTEL, P. et LASKAR, J. (2001). Frequency map and global dynamics in the solar system I : Short period dynamics of massless particles. *Icarus*, 152:4–28.
- ROBUTEL, P. et POUSSE, A. (2013). On the co-orbital motion of two planets in quasi-circular orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 117:17–40.
- ROBUTEL, P., RAMBAUX, N. et CASTILLO-ROGEZ, J. (2011). Analytical description of physical librations of saturnian coorbital satellites Janus and Epimetheus. *Icarus*, 211:758–769.
- ROBUTEL, P., RAMBAUX, N. et EL MOUTAMID, M. (2012). Influence of the coorbital resonance on the rotation of the trojan satellites of saturn. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 113(1):1–22.
- ROBUTEL, P. et SOUCHAY, J. (2010). An Introduction to the Dynamics of Trojan Asteroids. In J. SOUCHAY & R. DVORAK, éditeur : *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 790 de *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pages 195–227.
- RODRÍGUEZ, A., GIUPPONE, C. A. et MICHTCHEKNO, T. A. (2013). Tidal evolution of close-in exoplanets in co-orbital configurations. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 117:59–74.
- SCHOLL, H., MARZARI, F. et TRICARICO, P. (2005a). Dynamics of Mars Trojans. *Icarus*, 175:397–408.
- SCHOLL, H., MARZARI, F. et TRICARICO, P. (2005b). The Instability of Venus Trojans. *Astron. J.*, 130:2912–2915.
- SHOEMAKER, E., SHOEMAKER, C. et WOLFE, R. F. (1989). Trojan asteroids : Populations, dynamical structure and origin of the  $L_4$  and  $L_5$  swarms. In TUCSON, A. . U. A. P., éditeur : *Asteroids II*, page 487.
- THOMAS, P. C. (2010). Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission. *Icarus*, 208:395–401.
- THOMAS, P. C., BURNS, J. A., HEDMAN, M., HELFENSTEIN, P., MORRISON, S., TISCARENO et VEVERKA, J. (2013). The inner small satellites of saturn : A variety of worlds. *Icarus*, 226(999–1019).
- TISCARENO, M. S., THOMAS, P. C. et BURNS, J. A. (2009). The rotation of Janus and Epimetheus. *Icarus*, 204:254–261.
- TSIGANIS, K., GOMES, R. S., MORBIDELLI, A. et LEVISON, H. F. (2005a). Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435:459–461.



- TSIGANIS, K., VARVOGLIS, H. et DVORAK, R. (2005b). Chaotic diffusion and effective stability of Jupiter Trojans. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 92:71–87.
- VOKROUHLICKÝ, D. et NESVORNÝ, D. (2014). Transit Timing Variations for Planets Co-orbiting in the Horseshoe Regime. *APJ*, 791:6.
- WISDOM, J., PEALE, S. J. et MIGNARD, F. (1984). The chaotic rotation of Hyperion. *Icarus*, 58:137–152.
- WOLF, M. (1906). Photographische Aufnahmen von kleinen Planeten. *Astronomische Nachrichten*, 170:353.
- YODER, C. (1979). Notes on the origin of the Trojan asteroids. *Icarus*, 40:341–344.
- YODER, C. F. (1995). *Global Earth Physics : A Handbook of Physical Constants*. Washington, DC : American Geophysical Union.
- YODER, C. F., COLOMBO, G., SYNNOTT, S. P. et YODER, K. A. (1983). Theory of motion of Saturn's coorbiting satellites. *Icarus*, 53:431–443.
- ZHOU, L.-Y., DVORAK, R. et SUN, Y.-S. (2009). The dynamics of Neptune Trojan - I. The inclined orbits. *MNRAS*, 398:1217–1227.
- ZHOU, L.-Y., DVORAK, R. et SUN, Y.-S. (2011). Dynamics of neptune's trojans : II. eccentric orbits and observed ones. *MNRAS*, 410:1849–1860.