



# Simulation de fissures courbes en trois dimensions avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes : En vue de l'identification de lois de propagation de fatigue

Clément Roux-Langlois

## ► To cite this version:

Clément Roux-Langlois. Simulation de fissures courbes en trois dimensions avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes : En vue de l'identification de lois de propagation de fatigue. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2014. Français. <NNT : 2014ISAL0112>. <tel-01208086>

**HAL Id: tel-01208086**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01208086>**

Submitted on 1 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

**Simulation de fissures courbes en trois dimensions avec  
extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes :  
en vue de l'identification de lois de propagation de fatigue**

Présenté devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Clément Roux-Langlois**  
**Agrégé de mécanique**

Thèse soutenue le 25 Novembre 2014 devant la Commission d'examen

## **Jury**

|                         |                                      |               |
|-------------------------|--------------------------------------|---------------|
| EUGENIO GINER-MARAVILLA | Professeur, UP València              | Rapporteur    |
| NICOLAS MOËS            | Professeur, EC Nantes                | Rapporteur    |
| PATRICK LABORDE         | Professeur, Université Paul Sabatier | Examineur     |
| SYLVIE POMMIER          | Professeur, ENS Cachan               | Examinatrice  |
| JEAN-CHARLES PASSIEUX   | Maitre de conférences, INSA Toulouse | Invité        |
| ANTHONY GRAVOUIL        | Professeur, INSA Lyon                | Directeur     |
| MARIE-CHRISTINE BAIETTO | Directrice de recherche, INSA Lyon   | Co-directrice |
| JULIEN RÉTHORÉ          | Chargé de recherche, INSA Lyon       | Co-directeur  |

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



*INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015*

| SIGLE            | ECOLE DOCTORALE                                                                                                                                                                                                                                                      | NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>CHIMIE</b>    | <b>CHIMIE DE LYON</b><br><a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a><br><br>Insa : R. GOURDON                                                                                                                                              | <b>M. Jean Marc LANCELIN</b><br>Université de Lyon – Collège Doctoral<br>Bât ESCPE<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72.43 13 95<br><a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>                                 |
| <b>E.E.A.</b>    | <b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b><br><a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a><br><br>Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN<br>eea@ec-lyon.fr                                                                                        | <b>M. Gérard SCORLETTI</b><br>Ecole Centrale de Lyon<br>36 avenue Guy de Collongue<br>69134 ECULLY<br>Tél : 04.72.18 65 55 Fax : 04 78 43 37 17<br><a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>                                                   |
| <b>E2M2</b>      | <b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b><br><a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a><br><br>Insa : H. CHARLES                                                                                                    | <b>Mme Gudrun BORNETTE</b><br>CNRS UMR 5023 LEHNA<br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>Bât Forel<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cédex<br>Tél : 06.07.53.89.13<br><a href="mailto:e2m2@univ-lyon1.fr">e2m2@univ-lyon1.fr</a>                                 |
| <b>EDISS</b>     | <b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b><br><a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a><br><br>Sec : Samia VUILLERMOZ<br>Insa : M. LAGARDE                                                                                                       | <b>M. Didier REVEL</b><br>Hôpital Louis Pradel<br>Bâtiment Central<br>28 Avenue Doyen Lépine<br>69677 BRON<br>Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16<br><a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>                               |
| <b>INFOMATHS</b> | <b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b><br><a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a><br><br>Sec : Renée EL MELHEM                                                                                                                     | <b>Mme Sylvie CALABRETTO</b><br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>INFOMATHS<br>Bâtiment Braconnier<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87<br><a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a> |
| <b>Matériaux</b> | <b>MATERIAUX DE LYON</b><br><a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a><br><br>Secrétariat : M. LABOUNE<br>PM : 71.70 –Fax : 87.12<br>Bat. Saint Exupéry<br><a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a> | <b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b><br>INSA de Lyon<br>MATEIS<br>Bâtiment Saint Exupéry<br>7 avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28<br><a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>          |
| <b>MEGA</b>      | <b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b><br><a href="http://mega.ec-lyon.fr">http://mega.ec-lyon.fr</a><br><br>Secrétariat : M. LABOUNE<br>PM : 71.70 –Fax : 87.12<br>Bat. Saint Exupéry<br><a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>   | <b>M. Philippe BOISSE</b><br>INSA de Lyon<br>Laboratoire LAMCOS<br>Bâtiment Jacquard<br>25 bis avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37<br><a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>    |
| <b>ScSo</b>      | <b>ScSo*</b><br><a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a><br><br>Sec : Viviane POLSINELLI<br>Brigitte DUBOIS<br>Insa : J.Y. TOUSSAINT                                                                                  | <b>M. OBADIA Lionel</b><br>Université Lyon 2<br>86 rue Pasteur<br>69365 LYON Cedex 07<br>Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48<br><a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>                                                                |

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

La rédaction de ce mémoire est la conclusion d'un projet de recherche. Je souhaite en profiter pour remercier les personnes qui ont rendu ce projet vivant et égayé mon cadre de travail.

Je tiens en particulier à remercier mes encadrants qui m'ont proposé la trame de ce projet et dont les lumières ont guidé mon travail. La liberté de recherche qu'ils m'ont laissé a permis de rendre cette expérience de recherche complète. Leur soutien m'a été précieux pour conclure ma thèse et poursuivre dans les meilleures conditions. J'ai repris la méthode développée en 2D par Jean-Charles, avec qui il a été des plus agréable d'échanger et de travailler. Le projet ANR RUPXCUBE m'a amener à travailler avec François Hild et Stéphane Roux. Je les remercie vivement pour leur implication, leur rigueur scientifique qu'ils m'ont fait partager et leur relectures minutieuses et détaillées. Enfin, les expérimentateurs Jean-Yves Buffière et Joël ont apporté leur bonne humeur et m'ont permis d'encren ce projet dans la réalité. Merci Joël pour nos discussions et tes conseils.

Je remercie les professeurs Eugenio Giner Maravilla et Nicolas Moës d'avoir accepter d'être rapporteurs de ce travail de thèse et d'être venu assister à la soutenance. Je remercie également les professeurs Patrick Laborde et Sylvie Pommier qui se sont libérés pour participer au Jury.

J'ai principalement effectué ma mission d'enseignement au sein de l'UETC où Manu, Pierre et Nadine m'ont accueillis à bras ouverts. Je les remercie pour leur disponibilité, leur bonne humeur et leur dévouement. Ils m'ont intégré pleinement au sein de l'équipe où enseigner a été un plaisir pour moi. Enfin je remercie Paul dont le secours et les conseils assurent un fonctionnement optimal de la plate-forme TP. Le savoir faire des assistants assistants Isabelle Comby, Isabelle Veru, Michelle Seignol, Anne Giraud et Corinne Iafrate-Gran a bien souvent facilité les démarches administratives, ce qui est fort appréciable.

J'ai une pensée chaleureuse pour Alain Combescure qui m'a accueilli et fait visiter le laboratoire. Je le remercie pour son implication, son enthousiasme et sa simplicité. Je remercie vivement Thomas Elguedj qui anime l'équipe, ses outils informatiques, ses installations et ses événements. Parmi ces événements je pense aussi au barbecues que Daniel Nélias organise chaque année. Enfin, je remercie Aline, Anne, Arnaud et Thibault pour leur conseils avisés.

Sans distinction de bureau, de matinalité, de sportivité, de sens du tarot ou de générosité culinaire, je remercie vivement mes collègues de bureau Alexandres, Caro, Cédric, Didier, Éspoir, Gauthier, Guillaume, Hana, Jikai, Jing, Julien, Lan, Lu, Mandi, Nico, Paul et Tuyet. Ils ont contribué et contribuent au quotidien à la convivialité du labo. Au delà du laboratoire, je salut mon ami Romain qui s'est démené pour faire vivre l'ADIL dans la bonne humeur ainsi que nos collaborateurs dynamiques et motivés Johan, Julien, Xavier et Thomas.

Mais cette étape lyonnaise a été dopée par Rob et Tyty, la dream team qui a débarquée en même temps que moi au labo. On a bien profité, de la montagne, des

---

pentés de la Croix Rousses et du carton comme des soirées et de tout le reste. Même si j'ai été utilisé comme fusible pour les activités d'endurance, j'ai quand même pu vous former à la détection de méduses! La team s'est ensuite enrichie pour le meilleur avec Pierrot ("le vieux frisé") et Mimi que je remercie de sa gentillesse et de plus de nous avoir appris la danse, Corentin ("le fou") inarrêtable une fois arrivé et Pauline pourvoyeurs de bières du nord, Momo avec qui on a cherché du riz en Turquie, Yannick la relève, Dave l'italien au snooker, Alex, Samy, Pipo, Benoit, Damien et Guillermo. Vous êtes les bienvenues pour un apéro et plus quand vous voulez!

Au delà du Laboratoire, je souhaite remercier mes amies de mon étape Cachanaise Julien et Marie pour leur dynamisme et leur motivation ainsi que mes amies du Sud Audrey, Florie et Marlène. Puisque mes mots ont rejoint la côte, je profite de cette opportunité pour remercier mes parents et mes frères et ma famille pour leur présence et leur soutien, ils sont finalement mes enseignants les plus assidus!

Enfin, les mots sont bien faibles pour remercier Adeline pour tout ce qu'elle m'apporte et que nous partageons. À ses côtés, la vie est douce, riche et le quotidien plein de toutes ses choses qui font que les années passent si vite. Je te remercie de m'accepter, de me combler et de profiter de la vie avec moi! Je t'aime.

# Résumé

La compréhension du comportement de structures jusqu'à leur ruine est nécessaire pour concevoir au mieux ces structures. Selon le matériau et les sollicitations considérées, les mécanismes physiques à l'origine de la rupture changent. Nous nous intéresserons à des matériaux homogènes pour lesquels la ruine passe par le développement de fissures autour desquelles les non-linéarités de comportement n'ont pas un rôle dominant. Ces conditions sont réunies pour les matériaux fragiles pour lesquels la source principale de dissipation est la génération non réversible d'une surface libre, et pour certaines fissures de fatigue. Sur un cycle de chargement, il existe de nombreuses applications pour lesquelles les non-linéarités restent confinées.

La théorie de la mécanique linéaire élastique de la rupture est alors un modèle pertinent pour approcher le comportement de la structure. Sous ces hypothèses, le front de la fissure introduit une singularité. L'étude asymptotique de cette singularité dans des situations plane et anti-plane permet de définir les séries de Williams. La singularité est alors d'ordre un demi et elle est quantifiée par les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) pour chacun des trois modes de sollicitations. En 3D, la fissure peut avoir une géométrie complexe, et aucune expression générale de la singularité n'existe. Dans cette thèse, les séries de Williams en déplacements sont utilisées et régularisées le long du front au sens des éléments finis.

À partir de cette définition 3D des séries asymptotiques en pointe de fissure, une méthode d'extraction directe des FIC (DEK-FEM) est étendue au cas 3D. Le domaine est décomposé en deux domaines, raccordés en moyenne sur l'interface. Au voisinage du front, les champs mécaniques sont approchés par une troncature des champs asymptotiques. La singularité est donc traitée avec des champs adaptés, et les degrés de liberté associés sont directement les coefficients asymptotiques. Parmi ces coefficients asymptotiques, on retrouve les FIC et les  $T$ -stresses. Pour des raisons d'efficacité numérique et pour pouvoir relier l'échelle de la structure à l'échelle de la fissure, cette méthode est intégrée dans un contexte multigrilles localisées X-FEM. Ainsi nous montrons que cette approche permet une bonne évaluation des évolutions des FIC et du  $T$ -stress.

Cette méthode est développée en parallèle d'une stratégie de post-traitement expérimental (mesure de champs de déplacements par corrélation d'images) basée sur les mêmes séries asymptotiques. Les images tridimensionnelles d'un essai de fatigue *in situ* sont obtenues par micro-tomographie à rayons X et reconstruction. La corrélation et la régularisation basées sur les séries asymptotiques permettent d'obtenir la géométrie de la fissure et les FIC pour pouvoir identifier des lois de propagation de fissures 3D en fatigue. L'efficacité de cette méthode en parallèle d'une simulation DEK-FEM est illustrée en 2D.

**Mots clés:** Facteur d'intensité des contraintes, fissure courbe 3D, X-FEM, multigrilles localisées.



# Table des matières

|                                                                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Table des matières                                                                                               | i         |
| <b>La rupture au sein du projet RUPXCUBE</b>                                                                     | <b>1</b>  |
| <b>1 La DEK-FEM en 2D</b>                                                                                        | <b>9</b>  |
| 1.1 Formulation du problème et approches analytiques . . . . .                                                   | 11        |
| 1.1.1 Formulation forte . . . . .                                                                                | 11        |
| 1.1.2 Cas particuliers 2D en milieu infini . . . . .                                                             | 13        |
| 1.1.3 Interprétation physique des trois modes . . . . .                                                          | 17        |
| 1.1.4 Formulation faible . . . . .                                                                               | 20        |
| 1.2 Méthodes numériques pour la simulation de fissures et lois de propa-<br>gation . . . . .                     | 24        |
| 1.2.1 Introduction de la fissure et sa singularité . . . . .                                                     | 25        |
| 1.2.2 Méthode éléments finis étendus/généralisés . . . . .                                                       | 31        |
| 1.2.3 Modèles de propagation de fissures . . . . .                                                               | 46        |
| 1.2.4 Obtention des facteurs d'intensité des contraintes par post-<br>traitement des champs mécaniques . . . . . | 58        |
| 1.2.5 Les paramètres de propagation comme inconnues du problème                                                  | 64        |
| 1.2.6 Bilan sur la méthode numérique retenue . . . . .                                                           | 71        |
| <b>2 Extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes en 3D</b>                                       | <b>73</b> |
| 2.1 Extension des champs asymptotiques au 3D . . . . .                                                           | 75        |
| 2.1.1 Définitions classiques des champs asymptotiques . . . . .                                                  | 76        |
| 2.1.2 Définition à partir du champ de déplacements étendu au front                                               | 77        |
| 2.2 Approche monogrille . . . . .                                                                                | 83        |
| 2.2.1 Formulation faible à trois champs . . . . .                                                                | 83        |
| 2.2.2 Décomposition de la structure fissurée en deux domaines . . .                                              | 86        |
| 2.2.3 Domaine éléments finis étendus $\Omega_X$ . . . . .                                                        | 87        |
| 2.2.4 Domaine $\Omega_W$ : patch analytique . . . . .                                                            | 88        |
| 2.2.5 Raccord entre les deux domaines . . . . .                                                                  | 90        |
| 2.2.6 Approche matricielle et résolution . . . . .                                                               | 92        |
| 2.3 DEK-FEM dans un contexte multigrilles . . . . .                                                              | 93        |
| 2.3.1 Raffinement local et méthodes multi-échelles . . . . .                                                     | 94        |

|          |                                                                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.2    | Présentation des méthodes multigrilles . . . . .                                                               | 95         |
| 2.3.3    | Méthode X-FEM multigrilles localisées . . . . .                                                                | 96         |
| 2.3.4    | Introduction du patch analytique . . . . .                                                                     | 104        |
| <b>3</b> | <b>Application à des problèmes élastiques</b>                                                                  | <b>109</b> |
| 3.1      | Fissures à front droit . . . . .                                                                               | 110        |
| 3.1.1    | Fissure symétrique en tension (SEN) . . . . .                                                                  | 110        |
| 3.1.2    | Flexion trois points (3PB) . . . . .                                                                           | 114        |
| 3.2      | Fissures à front courbe . . . . .                                                                              | 116        |
| 3.2.1    | Fissure <i>penny-shaped</i> en tension . . . . .                                                               | 116        |
| 3.2.2    | Fissure <i>penny-shaped</i> en cisaillement . . . . .                                                          | 119        |
| 3.2.3    | Fissure <i>penny-shaped</i> inclinée en tension . . . . .                                                      | 123        |
| 3.2.4    | Fissure plane circulaire de coin en tension . . . . .                                                          | 128        |
| 3.2.5    | Bilan de l'étude des fissures à front courbe . . . . .                                                         | 130        |
| 3.3      | Fissures dans un contexte multigrilles . . . . .                                                               | 131        |
| 3.3.1    | Fissure symétrique en tension multigrilles . . . . .                                                           | 131        |
| 3.3.2    | Bilan DEK-FEM multigrilles . . . . .                                                                           | 132        |
| <b>4</b> | <b>Vers l'identification de lois de propagation de fissures 2D/3D par couplage simulation/mesure de champs</b> | <b>135</b> |
| 4.1      | Méthode d'identification de lois de propagation en fatigue 2D . . . . .                                        | 138        |
| 4.1.1    | Mesure de champs par corrélation d'image . . . . .                                                             | 139        |
| 4.1.2    | Identification des coefficients asymptotiques de la fissure . . . . .                                          | 143        |
| 4.1.3    | Identification de la géométrie de la fissure . . . . .                                                         | 147        |
| 4.2      | Essai CCT sur Ti35 . . . . .                                                                                   | 151        |
| 4.2.1    | Présentation de l'essai . . . . .                                                                              | 152        |
| 4.2.2    | Validation de la méthode de dépouillement sur une simulation plastique . . . . .                               | 153        |
| 4.2.3    | Dépouillement de l'essai . . . . .                                                                             | 165        |
| 4.2.4    | Simulations dédiées aux essais . . . . .                                                                       | 166        |
| 4.2.5    | Couplage simulation/mesure de champs à la position $a_W$ . . . . .                                             | 168        |
| 4.2.6    | Identification de la loi de propagation . . . . .                                                              | 169        |
| 4.2.7    | Simulation 2D de la propagation en fatigue . . . . .                                                           | 170        |
| 4.2.8    | Bilan de l'application à l'essai CCT . . . . .                                                                 | 172        |
| 4.3      | Extension de l'approche au trois dimensions . . . . .                                                          | 173        |
| 4.3.1    | Tomographie et mesure de champ . . . . .                                                                       | 173        |
| 4.3.2    | Extraction des FIC en volume . . . . .                                                                         | 175        |
| 4.3.3    | Vers des lois de propagation de fissures tridimensionnelles . . . . .                                          | 176        |
|          | <b>Conclusions et perspectives</b>                                                                             | <b>177</b> |
|          | <b>Annexe 1</b>                                                                                                | <b>181</b> |
|          | <b>Annexe 2</b>                                                                                                | <b>185</b> |

|                      |            |
|----------------------|------------|
| <b>Bibliographie</b> | <b>189</b> |
|----------------------|------------|



# La rupture au sein du projet RUPXCUBE

Pour concevoir des systèmes mécaniques, il est nécessaire de maîtriser les processus pouvant entraîner la rupture. C'est un phénomène dont le coût ne peut être négligé "*the annual cost of fracture in the U.S. in 1978 [is] about 4% of the gross national product*" [AND 05]. Deux types de sollicitations peuvent alors être distinguées, les sollicitations exceptionnelles et les sollicitations récurrentes. Ce premier type de sollicitation est pris en compte par une démarche appelée "analyse des modes de défaillance, de leurs effets et de leur criticité". Cette démarche prend en compte des sollicitations extrêmes qui peuvent engendrer la défaillance du système. Il est alors nécessaire de savoir comment elle aura lieu pour en limiter l'impact. Le second type nécessite d'anticiper l'évolution du système dans le temps et éventuellement de programmer un certain nombre d'opérations de maintenance. Un système mécanique est souvent utilisé de manière répétitive, il y aura alors ce qu'on appelle des cycles de sollicitation. Sous ces sollicitations cycliques, la structure peut s'endommager et une fissure peut se propager jusqu'à la ruine pour des niveaux de charge faibles, on parle alors de fatigue.

La maîtrise de la ruine pour des sollicitations extrêmes ou cycliques est donc nécessaire pour la conception et la maintenance des systèmes mécaniques. Pour certains matériaux et sollicitations, la rupture survient par la propagation d'une fissure autour de laquelle les non-linéarités restent confinées. Un modèle élastique linéaire est alors pertinent pour comprendre et simuler la ruine. Développer des outils numériques de prédiction permet de diminuer les coûts de conception en diminuant les campagnes d'essais. Cela permet surtout de pouvoir optimiser la conception de manière toujours plus approfondie. La mise au point de ces outils passe par l'identification de modèles adaptés. Il est alors intéressant d'observer les phénomènes dominants au voisinage du front. Il est ensuite nécessaire d'identifier les paramètres pilotant la propagation pour déterminer une loi de propagation. La loi et les modèles permettant de reproduire les phénomènes observés et de retrouver les paramètres dominants doivent alors être validés.

## Mécanique linéaire élastique de la rupture

Le cadre de cette étude est la mécanique linéaire élastique de la rupture. Il s'agit d'une théorie simplificatrice qui traite d'un milieu au comportement élastique linéaire dans lequel une fissure se propage. Cette théorie étant simple, elle permet d'approcher analytiquement le comportement mécanique asymptotique en pointe de fissure [MUS 53, WIL 57]. La propagation de la fissure est la seule source de dissipation. Aussi une approche thermodynamique propose-t-elle de relier la dissipation à la surface de fissure créée par le taux de restitution d'énergie. Ce taux peut être calculé par une intégrale [RIC 68a] et il peut être relié au comportement asymptotique. La connaissance du comportement asymptotique est alors un outil pour prédire la propagation, notamment à travers les facteurs d'intensité des contraintes, qui sont les paramètres dominants.

Cette approche permet une bonne approximation lorsque les non-linéarités sont localisées en pointe de fissure. Cette situation existe pour des sollicitations statiques et dynamiques dans des matériaux fragiles comme le verre, certains métaux à basse température et les céramiques. Ces dernières sont de plus en plus utilisées dans l'industrie pour leur grande résistance. Une autre application de ces concepts est le frottement sous cisaillement qui peut être assimilé à une fissure qui se referme [SVE 14]. Enfin, une application récurrente est la fatigue à grand nombre de cycles [NEW 98] dans un spectre plus large de matériaux. C'est à cette dernière application que s'intéressent les travaux présentés.

## Fatigue

En pratique, la plupart des systèmes mécaniques sont soumis à des chargements cycliques. Ils peuvent atteindre des milliards de cycles par an. Pour ce type de sollicitation, des fissures apparaissent puis se propagent pour des niveaux de sollicitation faibles ( $< 50\%$ ) par rapport à la limite élastique. Une structure peut donc être largement sur-dimensionnée pour des sollicitations statiques et rompre en fatigue.

Sous ces faibles niveaux de charge, les non-linéarités n'apparaissent qu'autour de défauts puis autour du front de la fissure. Dans de nombreuses situations, elles restent localisées. Une approche élastique est alors souvent utilisée pour caractériser les champs mécaniques. Il est possible d'enrichir ces méthodes en modélisant les non-linéarités en pointe de fissure. Néanmoins, la loi de propagation peut prendre en compte certaines non-linéarités.

## Prédiction de la durée de vie

La ruine d'une structure en fatigue passe par trois phases avant la rupture. La première est une phase d'amorçage pendant laquelle aucune fissure n'est visible. Le matériau se détériore au voisinage de défauts qui concentrent les contraintes. Ce phénomène apparaît souvent au voisinage des surfaces libres où les concentrations de contraintes autour des défauts sont plus importantes et l'environnement est plus

agressif. L'utilisation de matériaux plus purs (comme le titane considéré Section 4.2) réduit les inclusions. La fatigue s'amorce alors, pour des niveaux de contraintes plus élevés, par des bandes de glissement, souvent à l'interface entre les grains. La deuxième phase est l'apparition d'une fissure micro-structurellement courte, dont la propagation est liée à la microstructure (joints de grain, inclusions,...). Ces deux phases, jusqu'à l'apparition d'une fissure de l'ordre de  $100\ \mu\text{m}$  peuvent consommer plus de 60% de la durée de vie.

Au delà d'une certaine dimension, la fissure est micro-structurellement longue. La propagation est alors pilotée par des paramètres associés à la pointe de fissure indépendamment de la microstructure. C'est cette dernière phase qui est étudiée dans la cadre de cette thèse. En particulier lorsque les non-linéarités sont confinées en pointe de fissure. Dans ces conditions, les paramètres de la mécanique linéaire élastique de la rupture sont directement liés à la vitesse de propagation et à la rupture [NEW 98].

### **Organiser la maintenance**

La prédiction de la propagation de fissures micro-structurellement longues est particulièrement importante. En plus de jouer un rôle important dans la durée de vie, elle permet d'organiser la maintenance. En effet, la durée de vie est difficile à calculer précisément ; elle présente souvent une variabilité importante qui se traduit par une estimation de durée de vie courte par rapport à la tenue moyenne. Les méthodes de détection de fissures permettent alors de ne plus remplacer systématiquement des pièces mécaniques encore fonctionnelles. Il est possible de ne remplacer que celles qui sont déjà fissurées de manière critique.

Une question se pose alors : à quelle fréquence faut-il tester les pièces ? Une réponse est basée sur la prédiction de propagation de fissure. En effet, si la méthode de mesure retenue ne permet pas de détecter des fissures de moins de  $100\ \mu\text{m}$ , la question de la maintenance est réduite à : en combien de temps une telle fissure conduit-elle à la ruine ? Comme l'estimation de la durée de vie, cette démarche de maintenance requiert l'étude de la propagation de fissures longues en fatigue.

## **RUPXCUBE : prédiction de la propagation de fissure de fatigue**

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet ANR-09-BLAN-0009-01-RUPXCUBE : "Identification tridimensionnelle de lois locales de propagation de fissures par micro-tomographie X, mesure de champs étendus et simulation éléments finis étendus".

Ce projet traite de fissures de fatigue micro-structurellement longues, dans l'hypothèse où les non-linéarités restent confinées. Il vise à développer une démarche alliant mesure de champs expérimentaux et simulations numériques pour identifier des lois de propagation 3D. La description du champ de déplacements expérimental

et de ce champ dans la simulation est identique. Les deux sont basées sur des éléments finis et le développement asymptotique de Williams en pointe de fissure [MUS 53, WIL 57].

Le projet s'appuie sur les compétences de trois laboratoires. Chacun amène son expertise sur un des piliers de la démarche :

- ( $\alpha$ ) MATEIS (INSA de Lyon) : imagerie 3D par micro-tomographie à rayons X,
- ( $\beta$ ) LMT (ENS Cachan) : mesure de champs de déplacements par corrélation d'image 3D,
- ( $\gamma$ ) LAMCOS (INSA de Lyon) : simulation numérique 3D de propagation de fissure.

Néanmoins, chacun des acteurs participe à plusieurs des items au cours du projet.

Dans le cadre de ce projet, les travaux présentés dans ce mémoire développent principalement l'item ( $\gamma$ ) où une méthode de simulation 3D est développée. Elle est basée sur les séries asymptotiques de Williams. Les coefficients asymptotiques sont directement identifiés comme degrés de liberté du problème. D'autre part, la démarche RUPXCUBE est appliquée sur un exemple 2D montrant les liens entre les items ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) et comment leur combinaison est bénéfique à l'identification de la loi de propagation.

### **Observer le matériau fissuré ( $\alpha$ )**

La méthode d'observation dans ce projet est basée sur la mesure de champs, présentée Section 4.1.1. En 2D, une approximation par la méthode des éléments finis du champ de déplacements est obtenue par corrélation entre deux images. Pour améliorer la précision du champ de déplacements et diminuer l'influence du bruit, ce champ peut être régularisé avec les propriétés mécaniques. Cette mesure du champ est riche, elle permet une observation précise des phénomènes mécaniques autour de la pointe de fissure.

En 3D, la même démarche de corrélation d'“images” sur un champ de déplacements éléments finis peut être appliquée. Cette fois les images sont obtenues par reconstruction 3D de radiographies. Les radiographies sont obtenues par l'exposition à un faisceau à même de passer en partie au travers de la matière. La tomographie à rayons X est utilisée dans le projet. L'étape supplémentaire de reconstruction est néanmoins source d'erreur, et la tomographie source de complications expérimentales.

### **Analyser les champs mécaniques en présence ( $\beta$ )**

Les images obtenues sont limitées par leur résolution. Lorsque la fissure est faiblement ouverte, elle sera difficilement visible. La mesure de champs aide l'interprétation, notamment à travers le résidu de corrélation. En effet, si le champ de déplacements éléments finis ne permet pas de représenter correctement les déplacements, le résidu de corrélation est élevé. D'autre part, si les images sont

focalisées sur la pointe de la fissure, il est alors possible de mesurer des phénomènes comme l'ouverture et la refermeture au cours du cycle.

La projection du champ de déplacements sur les séries asymptotiques permet ensuite d'identifier avec précision la position du front ainsi que les coefficients asymptotiques. Ces coefficients, et en particulier les facteurs d'intensité des contraintes sont pilotes dans la propagation. D'autres coefficients comme les  $T$ -stress sont également accessibles par cette projection. Il est alors possible d'identifier une loi de propagation pour l'essai considéré. Le développement de la méthode en 3D a pour but d'identifier une loi de propagation prenant réellement en compte les effets 3D. Enfin, puisque les propriétés évoluent le long du front, pour chaque pas de propagation étudié, de nombreuses informations sont disponibles pour identifier la loi de propagation.

### Simulation numérique de la propagation ( $\gamma$ )

La modélisation de structures réelles nécessite de recourir à des méthodes d'approximation numériques. La méthode que nous utilisons pour générer un espace d'approximation efficace pour un milieu fissuré est basée sur les éléments finis étendus. La corrélation d'image utilisée étant également basée sur une discrétisation éléments finis, il est facile de comparer le champ de déplacements simulé aux déplacements expérimentaux. D'autant plus que dans la simulation une troncature des séries asymptotiques est également utilisée pour approcher les champs mécaniques au voisinage du front.

L'utilisation des premiers ordres du développement en séries asymptotiques au voisinage du front permet d'identifier directement les coefficients asymptotiques comme degrés de liberté du problème. Ils doivent être introduits seuls, par exemple avec un super-élément spécifique appelé *Hybrid Crack Element* (HCE) [TON 73b, XIA 07]. Il est également possible de décomposer le domaine en deux parties pour traiter spécifiquement le voisinage du front avec les séries de Williams. Le reste du domaine est alors directement traité par la méthode éléments finis étendus. Le raccord peut soit être fait en moyenne sur une zone de recouvrement [RÉT 10a], soit avec un raccord intégral sur la frontière entre les deux domaines [PAS 11].

Ces simulations sont basées sur un modèle de comportement élastique linéaire. La mesure de champs permet de s'assurer que le champ simulé est une bonne approximation de la réalité. L'adéquation entre les coefficients asymptotiques simulés et mesurés expérimentalement est alors vérifiée. Il est ensuite possible de simuler la propagation avec la loi identifiée.

### Les innovations de cette thèse

Les travaux de recherche présentés se concentrent principalement sur le développement de la simulation 3D. Les méthodes utilisées sont introduites au Chapitre 1. Sa première partie présente les modèles mathématiques et les

développements asymptotiques en pointe de fissure. Sa seconde partie est consacrée à la présentation des méthodes numériques pour la simulation de fissures, en particulier celles qui seront utilisées ici. Les modèles de propagation de fissures y sont introduits.

### Extension de la DEK-FEM au 3D

Le Chapitre 2 présente la méthode numérique développée appelée DEK-FEM pour *Direct Estimation of generalized stress intensity factors K Finite Element Method* en 3D. Cette méthode utilise une discrétisation basée sur les développements asymptotiques en pointe de fissure. Les évolutions des coefficients asymptotiques le long du front sont donc directement identifiées comme degrés de libertés du système.

La méthode existe en 2D [PAS 11, PAS 13]. Nous avons traité son extension en 3D. En 2D, au voisinage du front, les séries asymptotiques proposées par Williams [WIL 57] sont directement utilisées en pointe de fissure. Le premier challenge de l'extension de la méthode au 3D est la proposition d'une définition des champs asymptotiques en 3D. Malgré des études analytiques [APE 08], le développement asymptotique autour d'une fissure 3D n'est pas disponible dans le cas général (fissures courbes, débouchantes,...). Ainsi, il est nécessaire de construire une base tronquée inspirée des champs asymptotiques de Williams apte à capturer convenablement les singularités au voisinage d'un front de fissure 3D. Nous proposons d'utiliser le champ de déplacements des séries de Williams 2D rendu continu le long du front par une discrétisation éléments finis 1D. Les champs de déformations et de contraintes sont calculés à partir de ce champ de déplacement. La compatibilité contraintes/déplacements est donc naturellement vérifiée. Cette base est également complétée par l'ajout d'une troisième rotation.

Le passage à une simulation 3D augmente notablement le nombre de degrés de liberté considérés et donc les temps de calcul. L'optimisation des méthodes de résolution est alors nécessaire. Comme sa version 2D [PAS 11, PAS 13], la DEK-FEM 3D est couplée avec une méthode multigrilles localisées [RAN 08, RAN 09]. Cette approche facilite la génération d'un maillage à même de réunir l'échelle de la structure, l'échelle de la fissure et celle du front. De plus, cette méthode permet une résolution quasi-optimale du problème discrétisé. Le domaine analytique est uniquement introduit dans la grille la plus fine. Les autres grilles sont directement des grilles éléments finis étendus.

Dans le Chapitre 3, nous appliquons la méthode à quelques cas tests. Dans un premier temps, nous considérons des fissures planes à front droit. La définition des champs est alors simplifiée, en particulier celle du gradient des déplacements. Ces champs sont très proches des champs auxiliaires utilisés dans l'intégrale d'interaction. La méthode est ensuite appliquée à des fissures planes à fronts courbes. Ces fronts courbes introduisent des difficultés supplémentaires dans la définition des champs asymptotiques. Cette application est particulièrement intéressante car il existe des références analytiques pour l'évolution des facteurs d'intensité des

contraintes le long du front. Enfin un exemple de couplage avec la méthode multi-grille est présenté. Ces applications montrent que la méthode développée permet une bonne identification des évolutions des coefficients asymptotiques le long du front.

### **Application de la démarche RUPXCUBE complète en 2D**

Enfin le dernier chapitre (Chapitre 4) de ce mémoire présente plus en détails la procédure complète d'identification d'une loi de propagation en parallèle avec des simulations. La mesure de champs par corrélation d'image et la simulation en parallèle permet de détecter des erreurs expérimentales. De plus il permet de valider la simulation avec un modèle élastique linéaire. L'identification des coefficients asymptotiques lors du post-traitement d'essais permet également de vérifier qu'ils sont comparables avec ceux obtenus par simulation. Enfin la simulation de la propagation offre une première validation de la loi de propagation identifiée.

La démarche est appliquée à un essai 2D. Les différentes comparaisons énoncées ci-dessus permettent de s'affranchir de biais expérimentaux. Les erreurs entre les différents modèles sont évaluées, elles sont bien de l'ordre de l'incertitude de mesure. Une loi de propagation est ensuite identifiée et permet de retrouver la vitesse expérimentale par une simulation. Cette première application montre le potentiel de la stratégie d'identification développée. Enfin, l'extension de cette approche en 3D et différents développements réalisés pour pouvoir l'utiliser dans un futur proche sont présentés.



# Chapitre 1

## La DEK-FEM en 2D

*Les champs mécaniques dans un solide soumis à des conditions aux limites bien posées sont régis par des équations locales. Dans des configurations simples, il est possible de résoudre ces équations analytiquement. Lorsqu'une fissure structurellement longue est présente dans ce solide, une singularité apparaît en pointe de fissure. Par une approche asymptotique dans un voisinage de la pointe d'une fissure droite, il est possible d'écrire les champs mécaniques en pointe comme des développements en séries dites asymptotiques. Cette approche permet de calibrer la singularité, mais en pratique, celle-ci est intégrée dans une structure à géométrie plus complexe. Pour connaître la réponse de l'ensemble, dont celle de la singularité, il faut alors recourir à des méthodes approchées, souvent numériques.*

*Une question supplémentaire pour la simulation de la propagation est de savoir à quelle vitesse et dans quelle direction la fissure va propager. Pour des matériaux fragiles ou des sollicitations pour lesquelles les non-linéarités en pointe de fissures restent confinées, la singularité est le paramètre pilotant la propagation. À partir de l'intensité de cette singularité, de nombreuses lois de propagation permettent de prédire correctement la vitesse et la direction de propagation. La difficulté est alors de calculer précisément cette singularité dans les simulations. La méthode de simulation développée est une méthode numérique (basée sur les éléments finis étendus) qui traite le front de la fissure avec une troncature des séries asymptotiques (obtenues par une approche analytique). Cette approche utilise une méthode dédiée à chacune des échelles qui cohabitent : la structure et la singularité. Dans un premier temps, ce premier chapitre présente l'approche analytique qui permet d'obtenir les séries asymptotiques, Section 1.1.2. Les méthodes numériques nécessaires à la simulation d'un milieu fissuré sont présentées à la Section 1.2, en particulier l'approche X-FEM qui est utilisée par la suite.*

## Sommaire

---

|            |                                                                                                            |           |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Formulation du problème et approches analytiques . . . . .</b>                                          | <b>11</b> |
| 1.1.1      | Formulation forte . . . . .                                                                                | 11        |
| 1.1.2      | Cas particuliers 2D en milieu infini . . . . .                                                             | 13        |
| 1.1.3      | Interprétation physique des trois modes . . . . .                                                          | 17        |
| 1.1.4      | Formulation faible . . . . .                                                                               | 20        |
| <b>1.2</b> | <b>Méthodes numériques pour la simulation de fissures et lois<br/>de propagation . . . . .</b>             | <b>24</b> |
| 1.2.1      | Introduction de la fissure et sa singularité . . . . .                                                     | 25        |
| 1.2.2      | Méthode éléments finis étendus/généralisés . . . . .                                                       | 31        |
| 1.2.3      | Modèles de propagation de fissures . . . . .                                                               | 46        |
| 1.2.4      | Obtention des facteurs d'intensité des contraintes par post-<br>traitement des champs mécaniques . . . . . | 58        |
| 1.2.5      | Les paramètres de propagation comme inconnues du problème                                                  | 64        |
| 1.2.6      | Bilan sur la méthode numérique retenue . . . . .                                                           | 71        |

---

## 1.1 Formulation du problème et approches analytiques

Cette Section introduit différentes formulations du problème mathématique associé au modèle physique d'équilibre en élasticité linéaire. Dans un premier temps, la formulation forte du problème, avec les équations locales, est présentée à la Section 1.1.1. Cette formulation permet des approches analytiques dans des configurations simples qui aboutissent à l'expression du développement asymptotique des champs en pointe de fissure (voir Section 1.1.2). Lorsque la configuration est plus complexe une approche numérique est nécessaire à la résolution du problème. Une formulation faible qui permet une résolution numérique est introduite à la Section 1.1.4.

### 1.1.1 Formulation forte

Le problème de référence étudié dans le cadre de cette thèse consiste en un milieu tridimensionnel  $\Omega$  continu homogène constitué d'un matériau au comportement élastique linéaire isotrope, présentant une discontinuité : la fissure. Ce milieu est sollicité par une densité de forces de volumes  $\mathbf{f}_d$ , une densité d'effort surfacique  $\mathbf{F}_d$  et des déplacements imposés  $\mathbf{u}_d$  sur différentes parties de sa frontière. L'ouverture en déplacements de cette discontinuité des champs mécaniques est étudiée, et les lèvres de la fissure  $L^+$  et  $L^-$  sont considérées libres d'effort. Lorsque les chargements considérés amènent les deux faces de la fissure à se refermer l'une sur l'autre [BOW 76], il faudra également traiter le contact entre ces lèvres. Le problème est alors non-linéaire, de plus la dimension de la zone de contact peut être petite [DOL 01].

Il s'agit d'un problème aux limites puisque les champs mécaniques,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  sont déterminés à partir des conditions aux limites qui s'appliquent sur le bord du

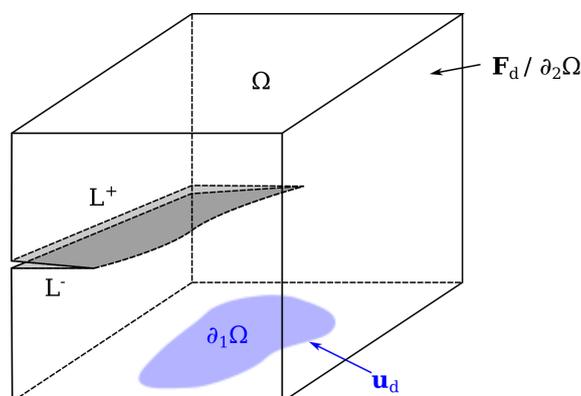


FIGURE 1.1 – Description du problème aux limites considéré.

domaine  $\partial\Omega$ . Le problème est bien posé, des déplacements  $\mathbf{u}_d$  sont imposés sur une partie du bord  $\partial_1\Omega$  de mesure non nulle, et sur le reste du bord  $\partial_2\Omega$ , défini tel que  $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$  et  $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$ , des efforts  $\mathbf{F}_d$  sont imposés. Le milieu, et les conditions aux limites décrites précédemment sont représentés Figure 1.1.

### 1.1.1.1 Équations locales

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  et le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  vérifient localement ( $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ ) les équations d'équilibre et les conditions aux limites

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2\Omega, \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in L^+ \text{ et } \forall \mathbf{x} \in L^-, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1\Omega, \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\Omega$  au point de coordonnées  $\mathbf{x}$ . La relation de comportement élastique linéaire, sous l'hypothèse des petites perturbations, donne la relation entre contraintes et déformations

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.5)$$

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations, les déformations  $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^s \mathbf{u}$  sont définies comme la partie symétrique du gradient des déplacements, et  $\mathbf{C}$  est le tenseur de Hooke.

Ces cinq équations locales constituent la formulation forte du problème, il est possible de les résoudre (i.e., de trouver  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{u} \forall \mathbf{x} \in \Omega$ ) de manière analytique pour des géométries et des conditions aux limites simples. Ce type de résolution, illustré dans la Section 1.1.2, permet d'obtenir le comportement asymptotique en pointe de fissure. Lorsque la géométrie ou les conditions aux limites sont trop complexes, une solution approchée du problème peut être obtenue par une méthode numérique comme celles présentées à la Section 1.2. Les résultats des méthodes analytiques peuvent alors permettre de valider les méthodes numériques.

### 1.1.1.2 Champs admissibles

Les équations (1.1) à (1.4) contraignent la forme des champs de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et de déplacement  $\mathbf{u}$ . Il est possible de prendre en compte ces équations dans la résolution du problème en réduisant l'espace de recherche aux fonctions dites admissibles qui vérifient ces équations. Notons  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_d)$  l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles avec les déplacements imposés, c'est-à-dire suffisamment réguliers et vérifiant l'équation (1.4)

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}_d) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ régulier, discontinu uniquement sur } L^\pm \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \right\}. \quad (1.6)$$

La continuité et la régularité traduisent l'hypothèse physique que le matériau se déforme en restant continu. D'autre part, notons  $\mathcal{S}(\mathbf{f}_d, \mathbf{F}_d)$  l'ensemble des déplacements statiquement admissibles avec les efforts imposés et la condition d'équilibre, c'est-à-dire suffisamment régulier et vérifiant les équations (1.1) à (1.3)

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}_d, \mathbf{F}_d) = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \mid \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \text{ sur } \partial_2 \Omega \\ \text{et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } L^+ \text{ et } L^- \end{array} \right\}. \quad (1.7)$$

On peut alors simplement reformuler le problème comme

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{S} \text{ tels que } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (1.8)$$

## 1.1.2 Cas particuliers 2D en milieu infini

Pour de nombreuses géométries simples, des développements limités des champs de contraintes et de déplacements ont été obtenus. En utilisant une méthode de variables complexes, Westergaard (1937) [WES 39] a exprimé le champ singulier ( $\propto r^{-1/2}$ ) de contraintes en pointe de fissure pour une fissure finie dans un milieu infini et pour une fissure semi-infinie dans un milieu infini dans un état plan des déformations. Muskhelishvili (1953) [MUS 53] a par la suite proposé une méthode basée sur l'expression de potentiels complexes. Elle permet de traiter un plus grand nombre de situations et d'obtenir des développements en série [WIL 57] de la singularité, dans des situations bidimensionnelles (i.e., état plan des contraintes ou des déformations) en milieu infini. La singularité étant très localisée en pointe de fissure, l'hypothèse de milieu infini n'est pas très restrictive quant à l'utilisation des champs singuliers [SHA 73]. Elle peut néanmoins restreindre leur zone d'application à un petit domaine autour du front pour que les conditions aux limites soient relativement éloignées, et la courbure de la fissure relativement faible.

La démarche qui permet d'obtenir le développement en série des champs mécaniques en pointe de fissure pour une fissure infinie plane à front droit dans un milieu élastique linéaire infini est présentée brièvement ci-dessous, elle est développée dans [BUI 78, LEB 03].

### 1.1.2.1 Modes plans

La première étude analytique considérée est dans un état plan, avec un front dont la tangente est normale au plan considéré. Elle est présentée sous l'hypothèse d'un état plan des déformations, mais un état plan des contraintes peut également être retenu. On définit des coordonnées polaires dans un plan normal au front comme représenté Figure 1.2. Sans force volumique, l'équation d'équilibre (1.1) permet d'écrire que les contraintes dérivent d'une forme différentielle exacte. Il existe donc

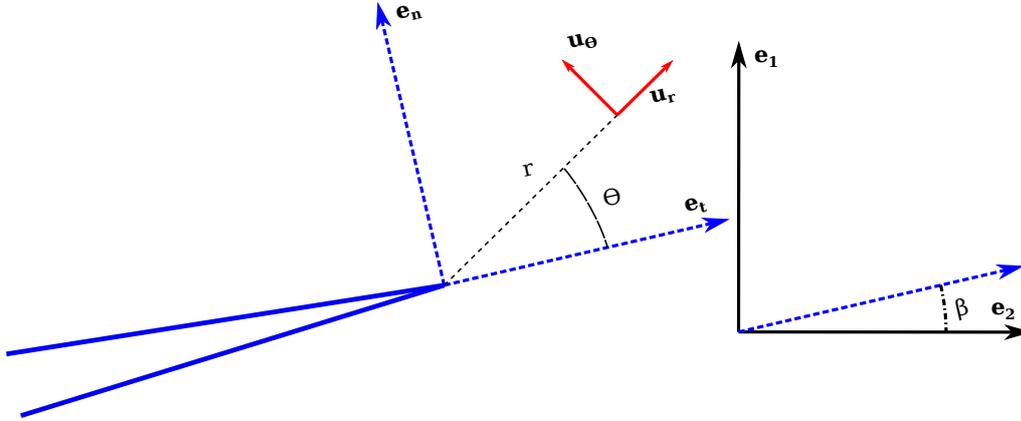


FIGURE 1.2 – Paramétrage du problème dans le plan normal au front (modes plan et anti-plan).  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est la base globale du problème,  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$  la base locale, et  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  une base polaire autour du front.

un potentiel  $P(x_1, x_2)$  appelé fonction d’Airy tel que

$$\begin{cases} \sigma_{11} = & \frac{\partial^2 P}{\partial (x_1)^2} (x_1, x_2), \\ \sigma_{22} = & \frac{\partial^2 P}{\partial (x_2)^2} (x_1, x_2), \\ \sigma_{12} = & - \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1, x_2). \end{cases} \quad (1.9)$$

La résolution du problème d’élasticité considéré consiste à trouver les champs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{u}$  correspondants. Il est possible de ne traiter que des contraintes, le champ  $\boldsymbol{\sigma}$  doit alors par l’intermédiaire de la relation de comportement (1.5), donner un gradient de déplacements qui soit compatible avec un champ de déplacement. Les équations associées à cette condition sont dites équations de compatibilités et peuvent s’écrire en terme de contraintes sous la forme de l’équation de Beltrami

$$(1 + \nu)\Delta\boldsymbol{\sigma} + \nabla(\nabla \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (1.10)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Pour vérifier cette équation, le potentiel  $P$  doit simplement vérifier  $\Delta\Delta P = 0$ . Des conditions aux limites d’effort nul sur les lèvres de la fissure  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  sont considérées. Résoudre le problème d’élasticité en déformations planes avec une approche en contraintes revient à déterminer  $P(r, \theta)$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta\Delta P = 0, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r, \pm\pi) = \sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial P}{\partial r \partial \theta}\right)(r, \pm\pi) = \sigma_{r\theta}(r, \pm\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

La solution de ce problème est cherchée sous la forme  $P(r, \theta) = r^{\alpha+2}p(\theta)$  au voisinage de la pointe. Le calcul de  $p(\theta)$  à partir de  $\Delta\Delta P = 0$  est ainsi réduit à la

résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre quatre suivante

$$\frac{d^4 p(\theta)}{d\theta^4} + [\alpha^2 + (\alpha + 2)^2] \frac{d^2 p(\theta)}{d\theta^2} + \alpha^2(\alpha + 2)^2 p(\theta) = 0. \quad (1.12)$$

Cette équation a une solution du type  $p(\theta) = Ae^{ik\theta}$ , et la résolution de son polynôme caractéristique nous donne  $k = \pm\alpha$  ou  $k = \pm(\alpha + 2)$ . Le problème de l'équation (1.11) devient donc

$$\begin{cases} p(\theta) = A \sin(\alpha\theta) + B \cos(\alpha\theta) + C \sin[(\alpha + 2)\theta] + D \cos[(\alpha + 2)\theta], \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r, \pm\pi) = (\alpha + 1)(\alpha + 2)r^\alpha p(\pm\pi) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial P}{r \partial \theta} \right) = (\alpha + 1)r^\alpha \frac{dp}{d\theta}(\pm\pi) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des constantes réelles. Pour que l'équation (1.13) admette une solution non nulle,  $\alpha$  doit être entier ou demi entier.

Lorsque  $\alpha$  est entier,  $2(\alpha + 1) = n, n \in \mathbb{Z}$  avec  $n$  pair,  $p(\theta)$  de la forme suivante est solution du système (1.13)

$$p(\theta) = B \cos(\alpha\theta) + D \cos[(\alpha + 2)\theta]. \quad (1.14)$$

Cette solution est continue sur les lèvres de la fissure. D'autre part, lorsque  $\alpha$  est demi entier,  $2(\alpha + 1) = n, n \in \mathbb{Z}$  avec  $n$  impair,  $p(\theta)$  est de la forme

$$p(\theta) = A \sin(\alpha\theta) + C \sin[(\alpha + 2)\theta]. \quad (1.15)$$

Cette solution est discontinue sur les lèvres de la fissure. Quand  $\alpha = -1$ , les conditions aux limites de l'équation (1.13) sont validées sans condition, les quatre constantes  $A, B, C$  et  $D$  sont libres. De même, lorsque  $\alpha = -2$ , une seule condition lie les quatre constantes. Les deux équations précédentes présentant en général deux constantes indépendantes, il existe donc en général, deux séries de solutions en contraintes évoluant en  $r^{n/2}$  où  $n$  est appelé l'ordre.

À partir de la fonction  $p(\theta)$  et donc du potentiel  $P(r, \theta)$  il est possible de remonter jusqu'au champ de contraintes qui pour l'ordre  $n$  s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}^n(r, \theta) = \underbrace{\begin{bmatrix} (\sigma^n)_{tt} \\ (\sigma^n)_{nn} \\ (\sigma^n)_{tn} \end{bmatrix}}_{\text{Voigt dans } (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)} = A^n r^{n/2-1} \mathbf{f}_I^n(\theta) + B^n r^{n/2-1} \mathbf{f}_{II}^n(\theta), \quad (1.16)$$

où les fonctions  $\mathbf{f}_i^n(\theta), i = I$  ou  $II$  s'écrivent en notation de Voigt dans la base associée à la pointe de fissure  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_I^n(\theta) &= \frac{n}{2} \begin{bmatrix} \left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos \left[ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right] - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos \left[ \left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right] \\ \left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos \left[ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right] + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos \left[ \left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right] \\ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sin \left[ \left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right] - \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin \left[ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right] \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_{II}^n(\theta) &= \frac{n}{2} \begin{bmatrix} - \left(2 + \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin \left[ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right] + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sin \left[ \left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right] \\ - \left(2 - \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin \left[ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right] - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sin \left[ \left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right] \\ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos \left[ \left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right] - \left(\frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos \left[ \left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Les deux fonctions  $\mathbf{f}_I^n$  et  $\mathbf{f}_{II}^n$  sont associées à des constantes  $A^n$  et  $B^n$  indépendantes. On peut donc décomposer le champ de contraintes sur ces deux fonctions séparément et à partir de chacun de ses termes remonter jusqu'au déplacement. Les développements en série, dite de Williams, des contraintes et des déplacements prennent donc la forme suivante

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = \sum_{i=I, II} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_i^n r^{n/2-1} \mathbf{f}_i^n(\theta) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{i=I, II} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_i^n r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta), \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_I^n(\theta) &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos\left[\frac{n}{2}\theta\right] - \frac{n}{2} \cos\left[\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta\right] \right. \\ &\quad \left. \left( \kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin\left[\frac{n}{2}\theta\right] + \frac{n}{2} \sin\left[\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta\right] \right]_{(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)}, \\ \mathbf{g}_{II}^n(\theta) &= \frac{1}{2\mu} \left[ -\left( \kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin\left[\frac{n}{2}\theta\right] + \frac{n}{2} \sin\left[\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta\right] \right. \\ &\quad \left. \left( \kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos\left[\frac{n}{2}\theta\right] + \frac{n}{2} \cos\left[\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta\right] \right]_{(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où  $\kappa$  est la constante de Kolosov, exprimée en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$ . Elle prend la valeur  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes.  $\mu$  est le module de cisaillement transversal. On peut montrer par un raisonnement similaire que dans un état plan des contraintes  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ . Muskhelishvili dans [MUS 53] a obtenu ce développement en série avec des potentiels complexes et écrit ce champ de déplacements dans le plan complexe

$$\mathbf{u}_I^n = u_t + i \cdot u_n = b_I^n r^{\frac{n}{2}} \left( \kappa e^{\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}} - \frac{n}{2} \cdot e^{\frac{i \cdot (4-n) \cdot \theta}{2}} + \left[ \frac{n}{2} + (-1)^n \right] e^{-\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}} \right), \quad (1.20)$$

$$\mathbf{u}_{II}^n = u_t + i \cdot u_n = b_{II}^n i \cdot r^{\frac{n}{2}} \left( \kappa e^{\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}} + \frac{n}{2} \cdot e^{\frac{i \cdot (4-n) \cdot \theta}{2}} - \left[ \frac{n}{2} - (-1)^n \right] e^{-\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}} \right). \quad (1.21)$$

En pratique, cette expression est particulièrement intéressante pour calculer le gradient du déplacement. Elle est bien entendu équivalente aux équations (1.18) et (1.19) en déplacement.

### 1.1.2.2 Mode antiplan

La deuxième étude analytique pour obtenir un développement en série complémentaire concerne un état d'élasticité antiplan (i.e.,  $\mathbf{u} = u(r, \theta) \cdot \mathbf{e}_3$ ). Pour ce cas, l'étude est menée sur les quantités primales et il existe une seule composante par ordre. Les contraintes sont calculées par la suite à partir des déplacements et la validation des équations de compatibilité des contraintes n'est plus une difficulté.

Le cas considéré est toujours une fissure plane infinie à front droit de normale  $\mathbf{e}_3$  dans un milieu infini. À partir de la forme supposée du champ de déplacements on peut déterminer le champ de déformations puis le champ de contraintes

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial t} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial n} \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} & \frac{\partial u_3}{\partial n} & 0 \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_3)}. \quad (1.22)$$

L'équation d'équilibre (1.1) :  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$  impose au déplacement  $\Delta u_3 = 0$ . Cette relation et la forme antiplane et régulière de  $\mathbf{u}$ , impliquent qu'il existe une fonction holomorphe  $f(z)$  (avec  $z = t + in = re^{i\theta}$ ) telle que

$$\begin{cases} \mu u_3 = \operatorname{Re} f(z), \\ \sigma_{3t} - i\sigma_{3n} = \frac{df(z)}{dz}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Nous cherchons des contraintes qui auraient la même forme que celles du mode plan, équation (1.16). Cherchons donc une solution  $f(z)$  proportionnelle à  $(A + iB)z^{\alpha+1}$ , où  $A$  et  $B$  sont de nouvelles constantes réelles. L'application des conditions aux limites nous donne

$$\begin{cases} \frac{df(z)}{dz} = (\alpha + 1)(A + iB)z^\alpha, \\ \sigma_{3n}(r, \theta = \pm\pi) = -(\alpha + 1) [A \sin(\alpha\theta) + B \cos(\alpha\theta)] r^\alpha = 0, \\ \sigma_{3t}(r, \theta = \pm\pi) = (\alpha + 1) [A \cos(\alpha\theta) - B \sin(\alpha\theta)] r^\alpha = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Pour vérifier ces conditions aux limites,  $\alpha$  doit être entier ou demi entier. Lorsque  $\alpha$  est entier,  $2(\alpha + 1) = n, n \in \mathbb{Z}$  avec  $n$  pair,  $B = 0$  et donc  $f(z) = Az^{n/2}$ , il s'agit d'une solution continue au passage de la fissure. D'autre part, lorsque  $\alpha$  est demi entier,  $2(\alpha + 1) = n, n \in \mathbb{Z}$  avec  $n$  impair,  $A = 0$  et donc  $f(z) = iBz^{n/2}$ , le champ de déplacements est discontinu au passage de la fissure. Dans le cas anti-plan également, il existe donc une série de solutions dont les contraintes évoluent en  $r^{n/2}$ .

On peut synthétiser ces résultats sur les déplacements et les contraintes pour l'ordre  $n$

$$\begin{cases} u_3 = b_{III}^n \frac{2}{\mu} r^{\frac{n}{2}} \operatorname{Re} \left( (-i)^n e^{\frac{in\theta}{2}} \right) = b_{III}^n \frac{2}{\mu} r^{\frac{n}{2}} \cos \left[ \frac{n}{2} (\theta - \pi) \right], \\ \sigma_{3n} = -n r^{n/2-1} \sin \left( \frac{n}{2} (\theta - \pi) - \theta \right), \\ \sigma_{3t} = n r^{n/2-1} \cos \left( \frac{n}{2} (\theta - \pi) - \theta \right). \end{cases} \quad (1.25)$$

À partir de ces résultats, il est possible d'écrire cette série de solutions (appelée mode *III*) avec le même formalisme que les séries du mode plan équation (1.18)

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{III}^n r^{n/2-1} \mathbf{f}_{III}^n(\theta) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{III}^n r^{n/2} \mathbf{g}_{III}^n(\theta). \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } \mathbf{f}_{III}^n(\theta) &= \begin{bmatrix} (f_{III}^n)_{3n} \\ (f_{III}^n)_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n \sin \left( \frac{n}{2} (\theta - \pi) - \theta \right) \\ n \cos \left( \frac{n}{2} (\theta - \pi) - \theta \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_{III}^n(\theta) &= \frac{2}{\mu} \cos \left[ \frac{n}{2} (\theta - \pi) \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

### 1.1.3 Interprétation physique des trois modes

L'hypothèse d'élasticité linéaire est malmenée par ces développements en série. En effet, les déformations (ainsi que les contraintes) tendent vers l'infini quand on se

rapproche de la pointe de fissure ( $r \rightarrow 0$ ) pour  $n \leq 1$  et  $n \neq 0$ , et les déplacements également pour  $n < 0$ . D'autre part, l'énergie élastique associée aux ordres  $n \leq -1$  est infinie car en  $r \rightarrow 0$ ,  $\int r^{2\alpha+1} dr$  diverge. Dans des simulations élastiques linéaires, ces termes sont généralement écartés.

La résolution analytique des problèmes plan et anti-plan engendre trois séries de solution notées *I*, *II* et *III*. Les premiers ordres des fonctions  $\mathbf{g}_i^n$  de ces trois séries sont représentés dans la Table 1.1. Ces trois séries correspondent à autant de modes de sollicitation. Le mode *I* est un mode symétrique par rapport au plan de la fissure, les déplacements restent dans le plan de la fissure, il est dit d'ouverture. Le mode *II* est un mode de cisaillement dit plan dans le plan  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$ , les déplacements restent dans le plan de la fissure,  $u_x$  est antisymétrique et  $u_y$  est symétrique. Enfin le mode *III* est un mode de cisaillement dit antiplan.

Au voisinage du front, sous la condition d'énergie finie en élasticité linéaire (i.e.,  $n \geq 0$ ), la plupart des termes  $\phi_i^n$  tendent vers zéro. Seuls les termes  $n \in \{0, 1, 2\}$  subsistent et fournissent une bonne approximation des champs mécaniques dans des configurations 2D

$$\begin{aligned}
 u_t(r, \theta) &= b_I^0 \frac{\kappa+1}{2\mu} + \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{T}{8\mu} (\kappa+1) r \cos \theta - b_{II}^2 \frac{\kappa+1}{2\mu} r \sin \theta + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right), \\
 u_n(r, \theta) &= b_{II}^0 \frac{\kappa+1}{2\mu} + \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa-1}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{T}{8\mu} (3-\kappa) r \sin \theta + b_{II}^2 \frac{\kappa+1}{2\mu} r \cos \theta + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right), \\
 u_3(r, \theta) &= b_{III}^0 \frac{2}{\mu} + \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} - b_{III}^2 \frac{2r}{\mu} \cos \theta + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right), \\
 \sigma_{nn}(r, \theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \\
 \sigma_{tt}(r, \theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \\
 \sigma_{tn}(r, \theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \\
 \sigma_{3n}(r, \theta) &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right). \\
 \sigma_{3t}(r, \theta) &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right). \\
 \sigma_{33}(r, \theta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Les fonctions d'ordre  $n = 0$  sont des translations de solide rigide, dans la direction  $\mathbf{e}_t$  pour le mode *I*,  $\mathbf{e}_n$  pour le mode *II* et  $\mathbf{e}_3$  pour le mode *III*. Les termes d'ordre  $n = 1$  sont les seuls termes singuliers (en contraintes) à énergie finie en élasticité linéaire. Ces termes sont dit singuliers puisque le champ de contraintes associé tend vers l'infini en  $r \rightarrow 0$ . Cette singularité est d'ordre un demi et le coefficient de cette singularité est appelé facteur d'intensité des contraintes (FIC, notés  $K_i$  avec  $i = I, II, \text{ et } III$ ). Avec les notations retenues, les FIC sont proportionnels aux coefficients des séries de Williams

$$b_I^1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad b_{II}^1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad b_{III}^1 = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{1.28}$$

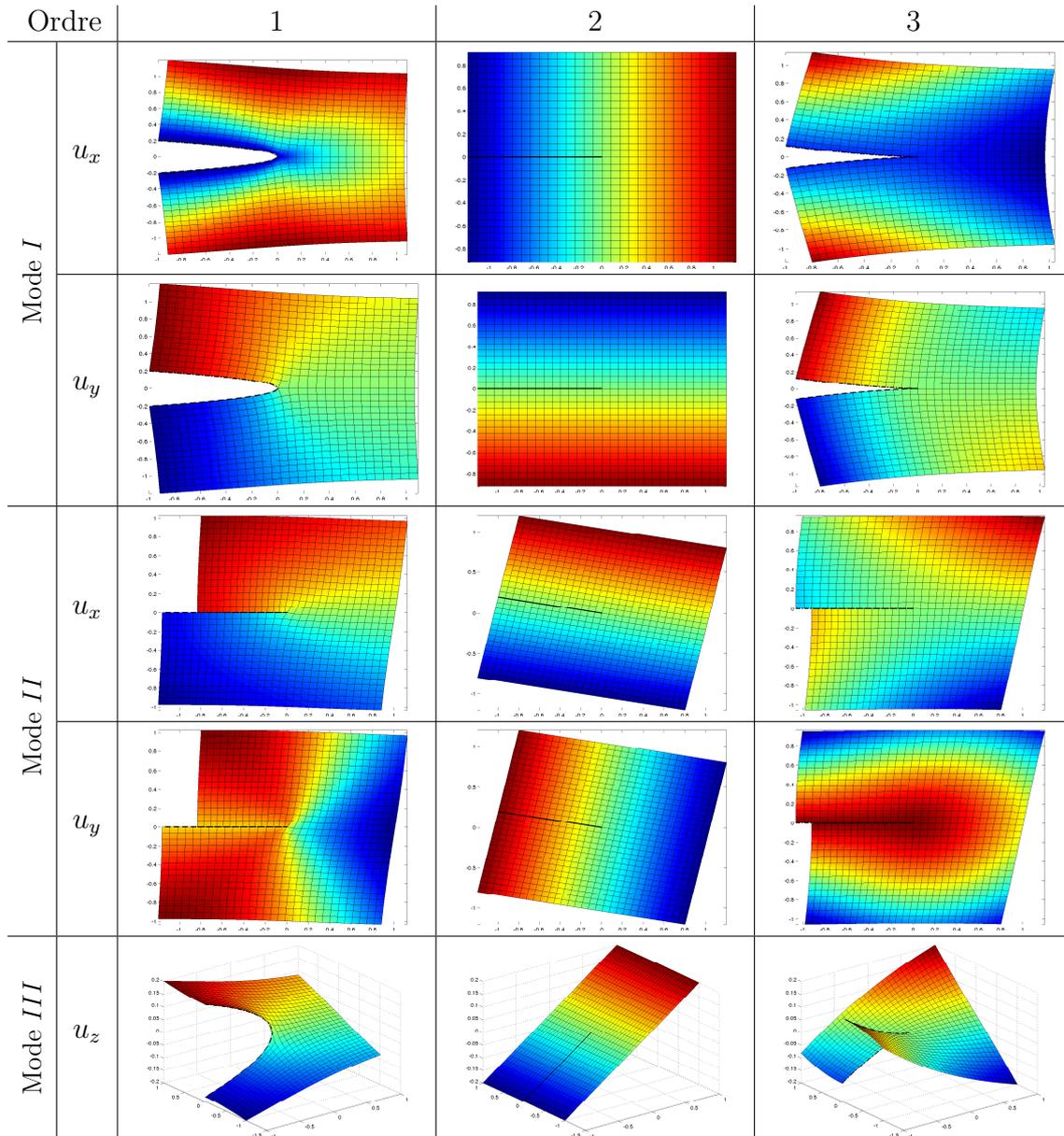


TABLE 1.1 – Déplacements et déformées d'un carré du plan  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$  centré sur la fissure pour les fonctions des premiers ordres de la série de Williams (i.e., fonctions  $\mathbf{g}_i^n$  des équations (1.18) et (1.26) pour  $n = 1, 2$ , et  $3$  et  $i = I, II$ , et  $III$ )

Ces termes reflètent et quantifient l'intensité de la singularité. Ils sont utilisés dans de nombreux critères de propagation aussi bien pour déterminer la vitesse que la direction de propagation de la fissure (confère Partie 1.2.3). Le terme mode  $I$  d'ordre  $n = 2$  correspond à une contrainte tangentielle ( $\sigma_{tt}$ ) uniforme. Il est appelé  $T$ -stress (noté  $T$  avec  $T = 4b_I^2$ ) et est associé à l'état de triaxialité en pointe de fissure [LAR 73, RIC 74]. Ce coefficient a également été identifié comme jouant un rôle majeur dans la prédiction de la propagation de fissure [BET 91]. Les autres termes d'ordre  $n = 2$  sont des rotations de solide rigide, autour de  $\mathbf{e}_3$  pour le mode  $II$  et de  $\mathbf{e}_n$  pour le mode  $III$ .

Les ordres pairs (i.e.,  $n$  pairs) sont continus au passage de la fissure. Tandis que pour les ordres impairs (i.e.,  $n$  impairs), le saut de déplacements des lèvres est proportionnel à  $r^{n/2}$ , dans la direction  $\mathbf{e}_n$  pour le mode  $I$ ,  $\mathbf{e}_t$  pour le mode  $II$  et  $\mathbf{e}_3$  pour le mode  $III$ . Les termes d'ordre  $n < 0$  sont dits super-singuliers puisque même les déplacements sont singuliers (i.e.,  $u \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} \infty$ ). Les termes d'ordre supérieurs (i.e.,  $n > 1$ ) ne présentent pas de singularité et sont appelés sub-singuliers

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{i=I,II,III} \left[ \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} b_i^n \mathbf{g}_i^n(\theta) r^{\frac{n}{2}}}_{\text{termes "super-singuliers"}} + \underbrace{b_i^0 \mathbf{g}_i^0}_{\text{translations}} + \underbrace{b_i^1 \mathbf{g}_i^1(\theta) \sqrt{r}}_{\text{terme singulier}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{n=\infty} b_i^n \mathbf{g}_i^n(\theta) r^{\frac{n}{2}}}_{\text{termes "sub-singuliers"}} \right]. \quad (1.29)$$

De part leur puissance en  $r^{n/2}$ , les termes super-singuliers auront une influence significative au voisinage du front et les termes sub-singuliers dans des zones plus éloignées, ils pourront notamment accommoder des effets de bords dus aux conditions aux limites.

Les termes super-singuliers ne peuvent être utilisés directement dans une simulation élastique linéaire, aussi ils sont généralement exclus de ce genre de simulations. Cependant, pour des comportements plus élaborés ou en excluant une *process zone* autour de la pointe de fissure, leur utilisation dans la description des champs asymptotiques est significative [HUI 95, ROU 09].

### 1.1.4 Formulation faible

La résolution du système d'équations locales (1.1) à (1.5) sur l'intégralité du domaine  $\Omega$  par une approche analytique n'est possible que pour des géométries et conditions aux limites simples. Pour les géométries, les formes de fissures et les conditions aux limites complexes que l'on retrouve dans notre environnement et qui intéressent les industriels, des approximations numériques sont construites, certaines sont basées sur les équations locales. La FEM, la méthode numérique la plus répandue est basée sur une formulation faible présentée dans cette Section.

Il est possible d'affaiblir ces équations, pour ne les vérifier qu'en un sens intégral sur le domaine. Il s'agit de formulations dites faibles du problème d'élasticité. On peut ainsi montrer l'équivalence entre les formulations faibles et fortes pour de

grandes classes de problèmes avec par exemple comme point de départ le principe des puissances virtuelles (voir Partie suivante 1.1.4.1). Ainsi, de nombreuses méthodes d'approximation se basent sur ces formulations, comme la méthode des éléments finis (Section 1.2.1.3) ou des éléments de frontières. La méthode des éléments de frontière [BON 99] est basée sur une représentation intégrale des déplacements à partir de solutions particulières. La méthode des éléments finis (*Finite Element Method* notée FEM) et ses extensions utilisent une formulation variationnelle [HUG 00, BON 07], les quantités intégrales sur le domaine prennent alors un sens énergétique. C'est la méthode la plus utilisée dans le milieu industriel. Elle est à la base de l'approche développée, aussi la formulation faible du problème considéré est présentée.

#### 1.1.4.1 Principe des puissances virtuelles

À partir de l'équation d'équilibre (1.1), il est possible de construire la formulation faible comme suit. L'équation (1.1) est multipliée par un champ continu et régulier arbitraire  $\mathbf{v}$  dit de déplacements virtuels puis intégrée sur tout le domaine  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} dV = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}, \quad (1.30)$$

où  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ régulier et discontinu uniquement sur } L^{\pm}\}$ . Cette équation est très générale puisque aucune hypothèse n'est faite sur le comportement du matériau. À partir de cette équation, le théorème de flux-divergence et la symétrie de  $\boldsymbol{\sigma}$  permettent d'obtenir

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{v} dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}. \quad (1.31)$$

Ce résultat correspond au principe des puissances virtuelles appliqué à l'équilibre. Cette approche a été développée et popularisée par Germain [GER 73]. On peut y ajouter la relation de comportement (1.5) et séparer les contributions de surface

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v} dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\partial_1\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{L^{\pm}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}. \quad (1.32)$$

On a souvent des efforts nuls sur les lèvres  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} |_{L^{\pm}} = \mathbf{0}$ . En choisissant un champ de déplacements virtuels  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathbf{0})$  cinématiquement admissible à 0 (i.e., pour des déplacements imposés nuls)

$$\mathcal{U}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ régulier, discontinu uniquement sur } L^{\pm} \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_1\Omega\}, \quad (1.33)$$

les efforts de réaction aux déplacements imposés sont évacués des inconnues du problème. La formulation faible du problème d'équilibre en élasticité linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations s'écrit donc trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\mathbf{u}_d)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v} dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathbf{0}). \quad (1.34)$$

Le problème dit primal est formulé en déplacements uniquement, ce qui simplifie sa résolution. Le champ de contraintes est obtenu simplement en appliquant la relation de comportement. Il est aussi possible d'écrire le problème en contraintes. C'est le principe de base des méthodes dites duales mais l'obtention d'un champ de contraintes admissibles  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}(\mathbf{f}_d, \mathbf{F}_d)$  est plus complexe qu'un champ de déplacements admissible puisque les contraintes doivent vérifier l'équilibre et être compatibles avec un déplacement [LAD 83].

Cette formulation est utile car elle est équivalente à la formulation forte [BEL 99b]. C'est-à-dire que pour des conditions aux limites bien posées, elle admet une unique solution qui est la même que celle de la formulation forte. La construction de la formulation faible est présentée dans un cadre restreint (i.e., l'élasticité linéaire en petites perturbations). Elle peut néanmoins être étendue à de nombreux comportements et à des simulations dynamiques.

Cette approche intégrale réduit les conditions de régularité sur l'espace des solutions  $\mathbf{u}$  et des déplacements virtuels  $\mathbf{v}$ . Ces champs de déplacements et leurs gradients doivent être de carré intégrable. Cette condition assure que l'énergie de déformation reste finie et que le champ de déplacements soit dans un espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Omega$ ,  $H^1(\Omega)$ , condition nécessaire pour assurer l'existence et l'unicité de la solution.

#### 1.1.4.2 Méthode de Galerkin pour une résolution approchée

Pour des problèmes complexes, trouver une solution exacte dans  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_d)$  est difficile. À partir de la formulation faible présentée précédemment, la méthode de Galerkin introduite dans cette Section permet d'obtenir la meilleure solution du problème dans un espace d'approximation réduit. Cette méthode est à la base de nombreuses méthodes éléments finis et de la simulation basée sur les champs asymptotiques développée dans le cadre de cette thèse. On cherche donc une approximation de la solution du problème. On réduit le sous espace de recherche de la solution  $\mathbf{u}^h$  (l'exposant  $h$  indique que c'est une solution approchée) à une solution particulière admissible  $\mathbf{u}_p$  et une combinaison linéaire d'un nombre fini  $N$  de fonctions libres. Ces fonctions  $\boldsymbol{\varphi}_k$  sont cinématiquement admissibles pour des déplacements imposés nuls

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N u_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) \quad \text{avec } (\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\varphi}_k) \in \mathcal{U}(\mathbf{u}_d) \times \mathcal{U}(\mathbf{0}). \quad (1.35)$$

L'espace engendré par ces fonctions est cinématiquement admissible (i.e., inclus dans  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_d)$ ). Les champs virtuels  $\mathbf{v}^h$  prennent la même forme sans la solution particulière

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N v_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) \quad \forall v_k \in \mathbb{R}^N \quad \text{avec } \boldsymbol{\varphi}_k \in \mathcal{U}(\mathbf{0}). \quad (1.36)$$

La résolution du problème (1.34) revient à calculer les  $N$  coefficients  $u_k$ . En remplaçant  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  par les expressions (1.35) et (1.36) dans la formulation variationnelle

en déplacement (1.34), le problème revient à trouver les  $u_k \in \mathbb{R}^N$  tels que

$$\sum_{k=1}^N u_k \int_{\Omega} \nabla^s \varphi_k : \mathbf{C} : \nabla^s \varphi_j \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \varphi_j \, dV + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \varphi_j \, dS \quad \forall j \in \llbracket 1; N \rrbracket. \quad (1.37)$$

Cette résolution consiste à résoudre un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues. Il est possible de mettre cette équation sous une forme matricielle

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (1.38)$$

avec  $\mathbf{U}$  le vecteur des  $N$  inconnues tel que  $U_k = u_k \quad \forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket$  souvent appelés déplacements généralisés.  $\mathbf{K}$  est une matrice carrée de dimension  $N$ , appelée matrice de rigidité

$$K_{kj} = \int_{\Omega} \nabla^s \varphi_k : \mathbf{C} : \nabla^s \varphi_j \, dV \quad \forall (j, k) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2. \quad (1.39)$$

$\mathbf{F}$  est un vecteur de dimension  $N$  appelé vecteur de forces généralisées

$$F_j = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \varphi_j \, dV + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \varphi_j \, dS \quad \forall j \in \llbracket 1; N \rrbracket. \quad (1.40)$$

Les conditions de symétrie de la loi de comportement élastique linéaire et les conditions aux limites bien posées avec  $\partial_1 \Omega$  de mesure non nulle font que la matrice  $\mathbf{K}$  est symétrique définie positive et donc inversible.

La solution  $\mathbf{u}^h$  obtenue par la résolution du système (1.38) minimise l'énergie potentielle sur l'espace réduit. C'est la meilleure approximation de la solution exacte  $\mathbf{u}$  au sens de la norme en énergie

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^s (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) : \mathbf{C} : \nabla^s (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \, dV. \quad (1.41)$$

De plus l'énergie de déformation de la solution approchée est sous estimée.

À partir de ces résultats il est possible de construire des méthodes numériques d'approximation. Un des points clés est de construire les fonctions  $\varphi_k$ . Ces fonctions doivent permettre de représenter les solutions du problème considéré. Le choix d'utiliser des fonctions à support localisé, effectué dans les méthodes sans maillage et la FEM, aura deux avantages numériques importants. Le premier est que les intégrations pour obtenir la matrice de rigidité et les efforts généralisés portent sur de petites régions. Le second est que de nombreux coefficients de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  sont nuls, diminuant la mémoire nécessaire à son stockage et accélérant la résolution de (1.38).

### 1.1.4.3 Extension à la propagation

Il est possible d'étendre ces formulations à la propagation. La prise en compte de la propagation de la fissure fait nécessairement intervenir un aspect temporel. Pour

des situations quasi-statiques ou en fatigue, la formulation précédente est utilisée pour chaque position du front  $a(t)$  (dans un intervalle de temps  $t \in [0, T]$ ). Il faut y ajouter une loi de propagation de la fissure

$$\dot{a}(t) = \dot{a}(a(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.42)$$

À chaque pas  $t_{i+1} = t_i + \delta t$  de chargement et/ou de propagation, on calcule les champs mécaniques puis l'incrément de fissure. La géométrie est alors modifiée.

Pour de nombreuses situations, le chargement est tel que les inerties et les ondes se propageant à l'intérieur du système doivent être prises en compte. Des effets d'inerties s'ajoutent à l'équation d'équilibre (1.1)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.43)$$

où  $\rho$  est la masse volumique. Ce terme se traduit par une énergie volumique qui s'ajoute à l'énergie de déformation élastique dans le terme de gauche de l'équation (1.31) du principe des puissances virtuelles

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{v} \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS \quad \forall (\mathbf{v}, t) \in \mathcal{U} \times [0, T]. \quad (1.44)$$

Pour obtenir la dérivée temporelle du champ de déplacement  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ , une méthode d'intégration temporelle est généralement utilisée. Elle peut être explicite (basée sur les pas de temps précédents) et donc facile à calculer mais instable ou implicite (basée sur les pas de temps environnants) et donc plus précise et stable mais le calcul pour un grand intervalle de temps peut être plus délicat.

À partir de ces équations, des formulations espace-temps peuvent être mises en place, par exemple pour la méthode des éléments finis par Hughes et Hulbert [HUG 88] puis pour les éléments finis étendus par Chessa et Belytschko [CHE 04], et les techniques multigrilles avec raffinement espace temps automatique par Cavin [CAV 06]. Des auteurs [BOU 08, MIK 08, REC 12] ont également proposé des formulations variationnelles intégrant l'équation de propagation (1.42). Une énergie surfacique est ajoutée, ainsi que la longueur de la fissure comme variable interne pour assurer la non-réversibilité de la propagation.

## 1.2 Méthodes numériques pour la simulation de fissures et lois de propagation

De plus, lors de la propagation d'une fissure, la géométrie du solide considéré évolue au cours du temps. En effet, la longueur de la discontinuité  $L^\pm$  augmente et la position du front est mobile. Il s'agit de prendre en compte la discontinuité et la fissure dans la simulation numérique ainsi que le calcul de la longueur et de la direction de propagation.

Les phénomènes considérés dans le cadre de cette thèse sont la simulation numérique 3D de la propagation de fissure de fatigue à grand nombre de cycles et la rupture fragile quasi-statique. La quantité d'intérêt est donc la propagation d'une fissure existante où la dissipation est concentrée en pointe de fissure. Lorsque, au contraire, les phénomènes non-linéaires sont dominants et que la dissipation est diffuse, la prise en compte de l'endommagement devient nécessaire. La méthode la plus ancienne et simple consiste à insérer des éléments cohésifs [ORT 99, ZHO 04, CAZ 10a] entre les éléments FEM. La difficulté réside dans l'identification de la loi de comportement cohésive et l'impact de ces éléments sur la rigidité globale. La fissuration et la fragmentation sont naturelles mais ont lieu uniquement à l'interface entre les nœuds FEM. Les méthodes d'endommagement non-locales [BAŽ 02, SIM 10] permettent de simuler continûment l'apparition de discontinuités en diminuant la raideur locale. La difficulté réside dans le choix de la longueur caractéristique et la transition entre l'endommagement et la rupture qui sont difficiles à relier à des phénomènes physiques. Il est alors possible de travailler avec deux paramètres d'endommagement, un diffus et un localisé. Ce dernier permet de traiter plus directement l'apparition de la fissure, se traduisant éventuellement par l'introduction d'éléments cohésifs thermodynamiquement équivalents [CAZ 10b].

### 1.2.1 Introduction de la fissure et sa singularité

D'une manière générale, la première étape de la simulation en mécanique des structures est de déterminer l'espace de recherche en déplacements et en contraintes du problème mécanique considéré. La discontinuité et la singularité introduites par la fissure doivent être prises en compte. Dans l'industrie, pour la simulation numérique de structures, la méthode des éléments finis et ses variantes sont les plus répandues. Elle se base sur la formulation faible et la méthode de Galerkin présentée précédemment. Sa robustesse et son adaptabilité aux géométries complexes et à de nombreux modèles de matériaux sont à la base de son succès. Cette méthode et certaines de ces évolutions seront présentées dans cette partie, en particulier la méthode dite des éléments finis étendus (X-FEM).

Des méthodes alternatives sont également brièvement introduites. La méthode des éléments de frontière permet d'approcher la solution du problème en tout point du domaine  $\Omega$  à partir d'un nombre limité de degrés de liberté sur le bord du domaine, y compris les lèvres de la fissure. En élasticité linéaire, elle donne des résultats intéressants et précis pour des géométries relativement simples. L'autre approche introduite est l'approche sans maillage. Les méthodes sans maillage, comme la méthode SPH pour *Smoothed Particle Hydrodynamics*, sont adaptées aux grandes déformations sous des sollicitations extrêmes. Enfin, on citera la méthode des différences finies notamment présentée dans [STR 04], très efficace d'un point de vu temps de calcul. C'est la méthode qui est utilisée pour les *level sets* présentées à la Section 1.2.2.4. Elle se base sur la résolution approchée des équations fortes, les dérivées en espace sont approchées sur une grille structurée. C'est également

cette nécessité d'utiliser une grille structurée qui fait sa faiblesse quand la structure considérée est à géométrie complexe. Cette méthode a été généralisée en considérant une moyenne sur les éléments et le flux des grandeurs mécaniques sur la frontière de ces éléments. Cette généralisation est appelée méthode des volumes finis [VER 07], elle est utilisée notamment en mécanique des fluides.

### 1.2.1.1 Méthode des éléments de frontière

La méthode des équations intégrales [BON 99] (*Boundary Element Method* : BEM) consiste à utiliser la solution d'un problème avec une force ponctuelle en milieu infini (solution de Green) comme champ virtuel dans une formulation adaptée à l'hypothèse de milieu infini. Le champ de déplacements en tout point intérieur au domaine est alors exprimé comme fonction de la solution analytique en milieu infini et d'une intégrale sur le bord du domaine. Les valeurs sur ce bord sont obtenues par passage à la limite de cette expression. La solution est approchée à partir des bords du domaine seulement, ce qui est plus économique en nombre de degrés de liberté car la discrétisation est bidimensionnelle en 3D. Cette méthode permet de résoudre de nombreuses équations aux dérivées partielles, en mécanique des fluides, acoustique ou électromagnétisme.

La BEM a été appliquée à des problèmes de mécanique et en particulier au cas de la fissuration [MI 94, BON 99, CAR 00, KOL 05, WAN 06]. La méthode est très précise pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes élastiques qui peuvent être directement obtenus à partir du déplacement. Elle est particulièrement efficace si le rapport surface (dont les lèvres des fissures) sur volume est grand puisqu'elle met alors en jeu un nombre d'inconnues faible. La gestion des interfaces mobiles consiste donc à augmenter incrémentalement la surface discrétisée.

Cependant cette approche génère des systèmes linéaires pleins puisque les déplacements en un point dépendent de l'intégrale sur toute la frontière. Des algorithmes efficaces [CHE 99] ont été construits pour accélérer la résolution. Le point faible de cette méthode est que son extension aux phénomènes non-linéaires est difficile. En effet, les solutions particulières utilisées sont obtenues pour des comportements simples. Si les phénomènes non-linéaires sont locaux, ils peuvent être maillés en 3D et la méthode offre encore des perspectives intéressantes.

### 1.2.1.2 Méthodes sans maillage

Les méthodes dites sans maillage sont particulièrement adaptées à la simulation de la ruine de structures en grandes déformations [BEL 96, NGU 08]. En effet, l'approche ne repose pas sur un maillage qui doit rester relativement régulier mais simplement sur des nœuds avec une zone d'influence de forme simple. Ces nœuds peuvent se déformer plus librement, et la fragmentation est alors assez naturelle. Des fonctions d'interpolations sont construites pour ces nœuds, elles s'annulent sur le bord de la zone d'influence pour assurer la continuité.

La méthode SPH (dont Liu et Liu proposent un état de l'art récent [LIU 10]) est la première méthode de ce type. Elle repose sur la résolution de la formulation forte. Elle est adaptée aux grandes déformations, et a notamment été utilisée pour des simulations sous sollicitations extrêmes comme des explosions ou crashes, notamment au LAMCOS par Maurel et Combescure [MAU 08], Schuzel-Marmot *et al.* COC11 et Caleyron *et al.* [CAL 12]. Elle est également utilisée pour des simulations en mécanique des fluides, et est donc intéressante pour simuler l'interaction fluide/structure sous des sollicitations extrêmes [MAU 08]. De nombreuses méthodes basées sur des formulations faibles ont été développées pour traiter des problèmes de mécanique des solides. Une approximation des moindres carrés mobiles (MLS) permet également de définir une méthode sans maillage. Cette approche est à la base de la méthode *Element Free Galerkin* (EFM) qui est plus stable mais plus coûteuse que la méthode SPH. Ce type de fonctions constitue une partition de l'unité, cette propriété [BAB 97] est utilisée pour enrichir l'espace d'approximation. Notamment des fonctions spécifiques à la fissuration décrivant la discontinuité et la singularité [FLE 97, KRY 99]. Ce sont ces enrichissements qui ont été par la suite transposés à la FEM, à l'origine de la X-FEM.

Les méthodes sans maillage s'affranchissent des difficultés du maillage, en particulier pour de grandes déformations et des interfaces mobiles. Elle permettent d'enrichir, d'augmenter l'ordre d'interpolation et de raffiner la discrétisation facilement. Cependant, l'intégration de leurs fonctions de forme est délicate. Ces méthodes ne sont en générale pas interpolantes, ce qui rend l'application de condition aux limites délicate. D'un point de vu général, elles sont numériquement moins efficaces que la méthode des éléments finis [NGU 08].

### 1.2.1.3 Méthodes basées sur les éléments finis

L'utilisation intensive de la méthode des éléments finis a conduit à de nombreux développements et variantes. Elle a été appliquée à de nombreux types d'équations et sa transversalité explique son succès. Elle est à la base de la méthode présentée dans ce mémoire. Les performances de la FEM sont réduites pour la simulation de discontinuité et de singularité. Sont taux de convergence [HUG 00] par rapport à la taille caractéristique des éléments de la discrétisation  $h$  est borné [TON 73a] par la nature de la singularité (d'ordre  $\alpha$ )

$$\frac{\|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}^h\|_E}{\|\mathbf{u}^{ex}\|_E} \leq ch^\eta, \quad \text{où } \eta = \min(p, \alpha). \quad (1.45)$$

où  $\mathbf{u}^{ex}$  est la solution du problème et  $E$  est la norme en énergie de déformation associée au champ de déplacements considéré.  $p$  est l'ordre d'interpolation éléments finis (l'ordre des polynômes considérés par élément), et  $\alpha$  l'ordre de la singularité. Enfin,  $c$  est une constante indépendante des déplacements et de la discrétisation. La propagation de la fissure est également une difficulté car la modification de la géométrie n'est pas aisée. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) pro-

pose une solution relativement simple à ces problèmes, et est aujourd'hui largement utilisée.

## Présentation de la FEM

La FEM repose sur la méthode de Galerkin, présentée Section 1.1.4.2, et permet de générer automatiquement la base d'approximation  $\varphi_k$  avec généralement  $\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$  (1.35), de représenter la géométrie et de réaliser l'intégration. Elle est basée sur une discrétisation géométrique [HOL 88] (appelé maillage) du domaine en polyèdres, ou polygones en 2D, simples (appelés éléments). Cette opération peut s'avérer complexe mais permet d'approcher des géométries et des solutions complexes en considérant des éléments suffisamment petits.

Des fonctions de forme généralement polynomiales sont associées à chaque type d'éléments. Ces fonctions de forme sont liées à des valeurs nodales qui font le lien entre les éléments adjacents du maillage, et assurent la continuité de l'interpolation. Pour chaque forme d'élément, un élément de référence à la géométrie idéalisée est défini dans une base locale. Les coordonnées dans ce repère local seront notées  $\boldsymbol{\xi} = (\xi \mathbf{e}_\xi, \eta \mathbf{e}_\eta, \zeta \mathbf{e}_\zeta)$ . Pour chacune des  $N_e$  inconnues nodales d'un élément, une fonction de forme  $\varphi_k(\boldsymbol{\xi})$  et sa dérivée  $\nabla \varphi_k(\boldsymbol{\xi})$  sont associées à cet élément de référence dans ce repère.

Pour les éléments dits isoparamétriques, les points  $\mathbf{x}$  de l'élément de référence dans le domaine  $\Omega$  sont mis en relation avec ceux de l'élément de référence dans le repère local  $\boldsymbol{\xi}$  par

$$\mathbf{x}^h = \sum_{j=1}^{N_{el}} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_k, \quad (1.46)$$

où  $\mathbf{x}_k$  est la position du nœud  $k$  dans le repère global, et  $N_{el}$  est l'ensemble des fonctions de forme associées à un élément. La géométrie du problème est donc connue à partir de la position des nœuds, leur connectivité et des fonctions d'interpolation  $\varphi_k$ . Les fonctions de forme sont généralement interpolantes, c'est-à-dire que l'inconnue nodale est la valeur du champ au nœud  $u_k = \mathbf{x}_k$ . Ce type d'éléments finis est dit isoparamétrique car les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour représenter la géométrie et les inconnues. Les paramétrages et la position des nœuds des éléments doivent être tels que  $\mathbf{x}$  n'a qu'un antécédent  $\boldsymbol{\xi}$ . Cette condition implique que le Jacobien du changement de coordonnées ne s'annule pas.

De nombreux éléments ont été développés. En 2D pour différentes géométries (triangles, quadrilatères,...) avec une interpolation polynomiale. En 3D, les géométries sont plus variées (pyramides, tétraèdres, hexaèdres, prismes,...) et on retrouve des interpolations polynomiales. Enfin des éléments spécifiques ont été développées pour des représentations simplifiées de géométries avec des caractéristiques géométriques propres comme des éléments plaques ou coques [BAT 92]. Les éléments les plus utilisés sont certainement les éléments polynomiaux d'ordre un. Les différents éléments ne seront pas détaillés mais certaines caractéristiques principales seront présentées.

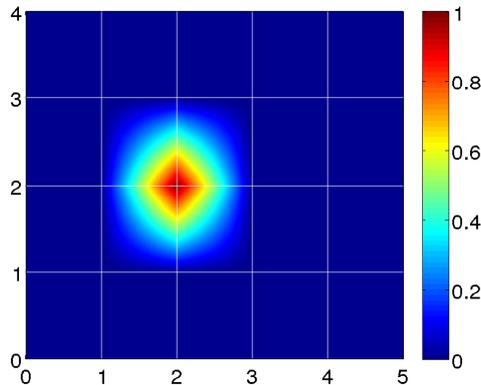


FIGURE 1.3 – Fonction de forme du nœud de coordonné  $(2,2)$ , polynomiale d'ordre 1 pour des quadrangles à 4 nœuds. Le domaine représenté est de  $5 \times 4$  éléments<sup>2</sup>.

La continuité des déplacements implique que les fonctions de forme s'étalent sur plusieurs éléments. En pratique, les conditions énoncées assurent que le support d'une fonction de forme associée à un nœud est uniquement active sur les éléments ayant ce nœud pour sommet, comme représenté Figure 1.3. Le support des fonctions de forme est limité, aussi la matrice de rigidité sera creuse. En effet,  $\mathbf{K}_{ij}$  sera nul aussitôt que les supports des fonctions de forme  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  sont disjoints. Par exemple, en 2D pour des quadrangles à 4 nœuds, comme représenté Figure 1.3, la largeur de bande de la matrice de rigidité sera de 16. En 3D, pour les hexaèdres à 8 nœuds qui seront utilisés par la suite, elle est de 78. Ces valeurs sont exactes pour des maillages structurés et approchées sinon.

Pour améliorer la précision de l'approximation deux méthodes peuvent être envisagées, diminuer la taille des éléments ou augmenter l'ordre des polynômes. La première méthode est souvent retenue puisque c'est la plus simple. L'augmentation de l'ordre nécessite de se doter des éléments correspondant et augmente la largeur de bande. Néanmoins, elle augmente la continuité de l'approximation (de ses dérivées) dans les éléments. Des méthodes dites NURBS (Non-Uniform Rational Basis Splines) permettent de représenter plus précisément la géométrie et d'automatiser l'augmentation de l'ordre d'interpolation, en préservant un degré de continuité élevé.

## Introduction de la discontinuité

La méthode FEM représente la géométrie et les champs mécaniques avec les mêmes fonctions de forme qui sont continues sur le domaine. Ces principes en font une faiblesse pour la simulation de discontinuités. On peut distinguer deux types de discontinuités. Les discontinuités dites faibles portent seulement sur la dérivée de la fonction d'interpolation. On les retrouve pour le champ de déplacement, à l'interface

entre deux matériaux, autour d'une interface ou entre deux phases solides... Les discontinuités de la fonction d'interpolation même sont dites fortes. On les retrouve notamment au niveau d'une fissure.

Les éléments finis permettent de prendre en compte des discontinuités faibles si elles sont localisées sur la frontière entre les éléments. Il faut donc que le maillage soit conforme avec les discontinuités faibles. Pour simuler une discontinuité forte, il faut considérer chacune de ses lèvres comme un bord du domaine. Elles doivent être conformes avec les faces (arêtes en 2D) d'éléments et le front doit être sur une arête (nœud en 2D). Les nœuds  $y$  sont alors doublés.

Cette condition est particulièrement contraignante lorsque la fissure se propage. En effet, il faut recommencer l'opération de maillage au moins localement. Remaillage qui peut s'avérer coûteux [CHI 13], et délicat [RÉT 05a] quand il faut projeter des quantités de l'ancien maillage vers le nouveau. Cette projection peut être source d'erreur, la conservation de l'énergie est approchée [BRA 05] et des instabilités peuvent apparaître dans les schémas numériques d'intégration temporelle [RÉT 05a]. Pour des cas de propagation où le trajet de la fissure est connu, en mode  $I$  par exemple, il est possible de conserver le même maillage pendant toute la simulation de la propagation. Les nœuds sur le trajet qui ne sont pas encore séparés par la fissure ont leurs déplacements contraints. L'incrément de propagation sera néanmoins imposé par la dimension des faces des éléments coupés.

### Introduction de la singularité

La singularité en pointe de fissure n'est pas polynomiale et est mal prise en compte par les éléments finis. La nature de la singularité impacte globalement l'erreur et réduit le taux de convergence (confère équation 1.45). Pour des éléments classiques d'ordre un, le taux de convergence de problèmes continus est en  $O(h)$ , l'introduction d'une fissure (et donc d'une singularité d'ordre  $1/2$ ) réduit ce taux en  $O(\sqrt{h})$ .

L'introduction de la singularité en  $\sqrt{r}$  peut être réalisée assez naturellement avec des éléments quadratiques où des nœuds sont placés au quart des arêtes des éléments [BAR 74]. Cette approche nécessite peu de développement, et donne de bons résultats pour des fissures droites en 2D. Néanmoins, la génération du maillage n'est pas triviale et un maillage rayonnant en pointe de fissure est préférable. Des extensions pour des analyses en 3D existent, avec une génération des éléments rayonnants et une précision acceptable, par exemple [DHO 01]. Dans un contexte éléments finis, d'autres approches ont été développées comme la création de super-éléments [TON 73b] qui prennent en compte la singularité et communiquent avec leurs voisins par des nœuds sans assurer la continuité à l'interface. Un certain nombre de ces approches sont examinées dans [FAW 79].

De nombreuses méthodes ont été proposées pour remédier à ce problème. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM), a été développée à partir de 1999 par Belytschko and Black [BEL 99b] et est maintenant largement utilisée. Elle propose

une solution peu intrusive pour introduire la singularité et la discontinuité dans l'espace d'approximation. Elle est utilisée dans le cadre de cette thèse et fait l'objet de la section suivante.

## 1.2.2 Méthode éléments finis étendus/généralisés

La X-FEM est une extension de la FEM. La fissure est introduite comme un enrichissement des champs mécaniques approchés comme le déplacement  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ . Elle n'est donc plus maillée comme une frontière du domaine. L'enrichissement est réalisé avec la méthode de la partition de l'unité [BAB 97], présentée ci-dessous. Il est généralement constitué d'une fonction discontinue et d'enrichissements singuliers qui introduisent la fissure. Une représentation géométrique de la fissure est néanmoins nécessaire. La simulation de la propagation est naturelle : en effet la représentation de la fissure évolue et le lieu de l'enrichissement évolue spatialement mais le maillage de la structure reste le même. Cette méthode est très proche de la méthode des éléments finis généralisés G-FEM [STR 00].

La méthode (en développement rapide) a fait l'objet de nombreuses *reviews* comme par exemple [KAR 03b, BEL 09, FRI 10]. Des premières applications à des problèmes élastiques ont montré son potentiel, en 2D [BEL 99b, MOË 99] pour des fissures qui branchent ou se rejoignent [BEL 01] puis en 3D [SUK 00, DUA 01, MOË 02a, GRA 02].

Une extension à un comportement endommageable par des éléments cohésifs a été proposée par Moës et Belytschko [MOË 02b], puis appliquée à la simulation de béton sans armature métallique en 3D [GAS 05]. La méthode a été étendue à la plasticité par Elguedj *et al.* [ELG 06a] avec des fonctions d'enrichissement spécifiques. La friction entre les lèvres peut également être prise en compte [DOL 01].

Les aspects mathématiques de la méthode comme l'étude de son taux de convergence ont été étudiés par Laborde *et al.* [LAB 05]. L'introduction d'une fonction *cutoff* qui délimite les fonctions d'enrichissement a permis de restaurer une convergence quasi-optimale à la méthode pour une taille d'enrichissement constante en 2D [CHA 06]. À partir de ces travaux, une méthode séparant la zone non enrichie et la zone enrichie avec un raccord intégral a été imaginée [CHA 11] et maintient la convergence optimale sans influence de la singularité (i.e., en  $O(h)$ , pour des éléments linéaires).

### 1.2.2.1 Méthode de la partition de l'unité

La méthode de la partition de l'unité (PUM) a été formalisée par Babuška et Melenk [BAB 97]. Elle a été appliquée à des méthodes sans maillage [NGU 08] puis à la méthode des éléments finis. Elle permet de nombreux type d'enrichissement et a été appliquée pour des simulations numériques variées : pour modéliser des interfaces en général comme l'interaction fluide-structure [WAG 01], la simulation d'inclusions [SUK 01, MOË 03] et de la solidification [CHE 02]. Son application à

la mécanique de la rupture, a engendré la méthode X-FEM et la méthode G-FEM.

Les fonctions de forme éléments finis constituent un exemple de partition de l'unité de l'espace approximé  $\Omega^h$ , c'est-à-dire dans toutes les directions  $j$  de l'espace

$$\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^h. \quad (1.47)$$

Cette propriété permet à la FEM de reproduire des déplacements de corps rigide. Elle peut être utilisée pour enrichir le champ de déplacements dans une direction  $j$  par une fonction  $\varphi^e$  qui est mal représentée par cette approximation, en effet

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N u_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N^e} u^e \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j \varphi^e(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^N u_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) + u^e \varphi^e(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^h. \quad (1.48)$$

Où  $u^e$  est un degré de liberté associé à l'enrichissement, et  $N^e = N$  dans ce cas.

Si on recherche les variations de ces fonctions d'enrichissement sur l'espace, il est possible d'associer un degré de liberté par fonction de forme

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N u_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N^e} u_k^e \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) \varphi^e(\mathbf{x}). \quad (1.49)$$

Dans cette expression, l'enrichissement est réalisé dans toutes les directions de l'espace. La direction des fonctions de forme éléments finis  $\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})$  est donc utilisée.

Cette approche double le nombre de degrés de libertés. Cependant, la zone à enrichir est souvent localisée, comme c'est le cas pour la simulation de fissure. Il est alors possible de restreindre la zone enrichie en prenant  $N^e$  comme un sous ensemble de  $N$ . En pratique lorsqu'on enrichit toutes les fonctions de forme associées aux nœuds d'un groupe d'éléments, les éléments correspondants sont enrichis et peuvent reproduire librement la fonction  $\varphi^e(\mathbf{x})$ . En effet la somme des fonctions de forme éléments finis associées à ces nœuds est une partition de l'unité sur les éléments correspondant comme illustré sur la Figure 1.4. De plus, l'évolution reste continue entre la zone enrichie et la zone non enrichie, au niveau des éléments dont tous les nœuds ne sont pas enrichis. Ces éléments partiellement enrichis seront appelés *blending elements*, ils peuvent réduire le taux de convergence de la méthode [CHA 06].

Bien entendu, cette méthode permet de représenter plusieurs fonctions d'enrichissement. En effet, on peut ajouter à l'équation (1.49) autant de fonctions d'enrichissement que nécessaire par sommation. Pour la simulation de phénomènes physiques pour lesquels la forme de la solution est connue et est mal représentée par les fonctions de base choisies, cette méthode d'enrichissement est particulièrement intéressante. Elle permet de représenter des interfaces dans le milieu simulé, comme dans le cas des bi-matériaux, des inclusions, différents grains, des trous... Elle est particulièrement intéressante lorsque les interfaces sont mobiles comme dans le cas de la simulation de la solidification, du changement de phase ou de la propagation de fissures.

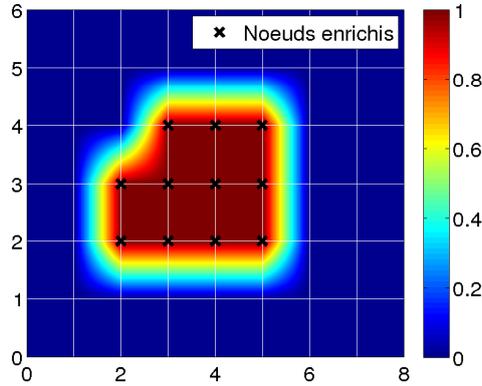


FIGURE 1.4 – Partition de l'unité locale,  $\sum_{k=1}^{N^e} \varphi_k(\mathbf{x})$ , avec  $N^e$  restreinte aux fonctions de forme associées aux nœuds enrichis.

La méthode de la partition de l'unité est assez générale et s'applique à la FEM comme aux méthodes sans maillage, les enrichissements peuvent être basés sur une représentation intrinsèque ou non et la zone d'enrichissement peut être locale ou non. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) se base sur ce principe. Fries et Belytschko [FRI 10] en proposent les caractéristiques suivantes

- (i) *the enrichment is extrinsic and realized by the PU concept,*
- (ii) *the enrichment is local because only a subset of the nodes is enriched,*
- (iii) *the enrichment is meshbased, i.e. the PU is constructed by means of standard FE shape functions, and*
- (iv) *enrichments for arbitrary discontinuities in the function and their gradients are available.*

Dans la X-FEM, la discontinuité est représentée par un enrichissement dans toutes les directions, et la singularité par quatre enrichissements dans chacune des directions également

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k \in N} u_k \varphi_k(\mathbf{x}) + \sum_{k \in N^d} u_{c_k} \varphi_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in N^s} \sum_{j=1}^4 u_{e_k}^j \varphi_k(\mathbf{x}) S_j(\mathbf{x}). \quad (1.50)$$

$H(\mathbf{x})$  est la fonction d'enrichissement discontinue qui s'applique sur l'ensemble de fonctions de forme  $N^d$ .  $S_j(\mathbf{x})$  sont les fonctions d'enrichissement singulières, et  $N^s$  l'ensemble de fonctions de forme associées. Ces ensembles et fonctions sont présentés ci-dessous.

### 1.2.2.2 Enrichissement pour la discontinuité forte

Plutôt que de mailler explicitement la fissure comme c'est nécessaire pour la FEM, la X-FEM enrichit la discrétisation par une discontinuité, grâce à la partition

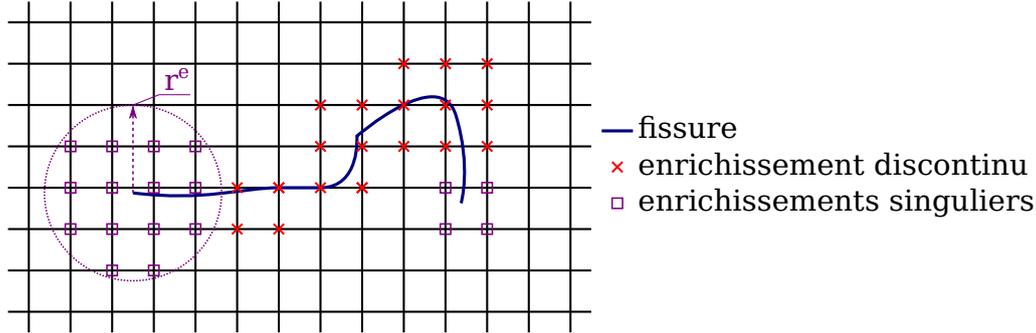


FIGURE 1.5 – Nœuds enrichis pour la fissure représentée. Pour le front de gauche, tous les nœuds dans un rayon  $r^e$  autour du front sont enrichis, l’enrichissement est dit géométrique. Pour le front de droite, une rangée de nœuds autour du front est enrichie, l’enrichissement est dit topologique.

de l’unité présentée ci-dessus. Tous les nœuds dont le support (le bord nul est exclu) est coupé sont enrichis par une discontinuité comme représenté Figure 1.5.  $N^d$  est le sous-ensemble des fonctions de forme correspondant à ces nœuds. Puisqu’on enrichit avec une fonction, les degrés de liberté sont doublés et permettent donc de représenter deux milieux distincts (avec des mouvements de corps rigide et des déformations propres).

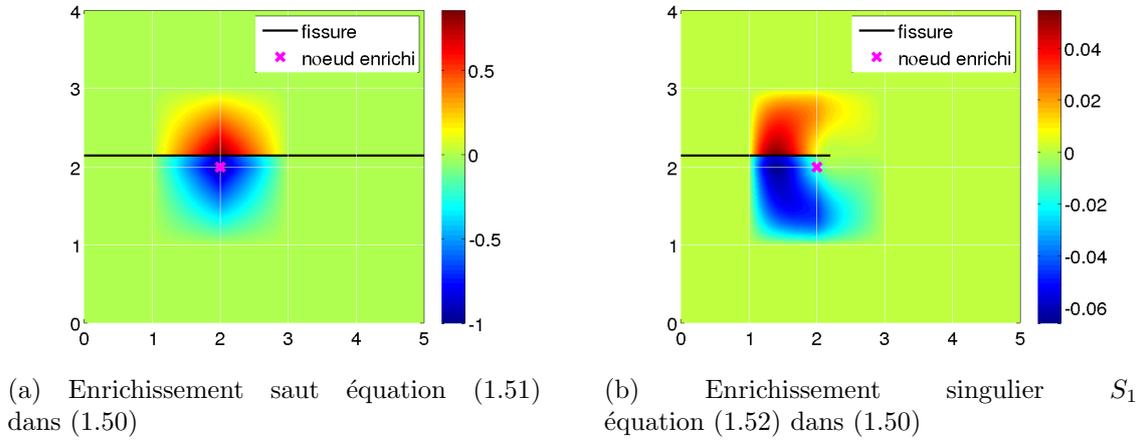
Les fonctions d’enrichissement généralement utilisées [MOË 99, BEL 01] sont la fonction Heaviside généralisée ou la fonction signe. Ces deux fonctions diffèrent simplement au niveau de l’interface, la fonction signe de la distance à la fissure, que nous utilisons est définie par

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.51)$$

où  $\mathbf{x}^*$  est un des points les plus proches de  $\mathbf{x}$  sur la fissure,  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  est la normale à ce point. L’orientation de  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  et donc le choix du demi espace positif est arbitraire. Comme introduit dans [MOË 99] pour un maillage conforme à la fissure, la modélisation avec cet enrichissement est équivalente à la modélisation FEM par nœuds doubles.

### 1.2.2.3 Enrichissements singuliers en pointe de fissure

Les éléments dont le support est tranché de part en part peuvent être décrits par les fonctions précédentes (1.51). Cependant la séparation en deux demi-espaces du support n’est plus possible quand le front est à l’intérieur du support. Le saut de déplacements au passage de la fissure évolue continûment jusqu’à une valeur nulle au niveau du front. De plus, une singularité mal représentée par la discrétisation

FIGURE 1.6 – Fonctions d’enrichissement classiques autour d’un nœud  $\varphi_k(\mathbf{x})\varphi^e(\mathbf{x})$ .

FEM est présente en pointe de fissure. Ces spécificités sont prises en compte par des fonctions d’enrichissement plus riches.

L’approche analytique présentée Section 1.1.2 fournit des informations sur la nature de la singularité et sur l’évolution de la discontinuité. La base utilisée en 2D puis 3D a été introduite par Fleming *et al.* [FLE 97] dans une méthode sans maillage. Elle correspond à une base de représentation des modes singuliers en pointe de fissure pour un milieu élastique

$$\begin{aligned}
 S_1(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \\
 S_2(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 S_3(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \\
 S_4(\mathbf{x}) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Comme pour l’approche asymptotique,  $r$  et  $\theta$  correspondent à un système de coordonnées polaires locales en pointe de fissure, représenté Figure 1.2.

Le choix de cette base de représentation a été fait pour des considérations numériques. Elle représente la singularité tout en assurant un bon conditionnement pour la plupart des positions du front. Pour cette raison, seule la fonction  $S_1(\mathbf{x})$  est discontinue. Toutes les fonctions sont proportionnelles à  $\sqrt{r}$  qui est l’ordre de la “singularité”. Les coefficients matériaux (i.e., la constante de Kolosov  $\kappa$  ici) ont été ôtées de ces fonctions par soucis de généralité. Comme pour la discontinuité, l’enrichissement est réalisé dans toutes les directions de l’espace, conformément à l’expression (1.49). Ces fonctions issues d’une approche élastique peuvent être aménagées pour la simulation de phénomènes non-linéaires en pointe de fissure [MOË 02b, ELG 06a].

| FEM                              | X-FEM (enrichissement en $\mathbf{x}^*$ , $r$ et $\theta$ ) |                                                    |                                                                                                                                          |                                                                                |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| maillage explicite de la fissure | représentation implicite                                    |                                                    | représentation explicite                                                                                                                 | représentation hybride                                                         |
|                                  | <i>level sets</i> [SET 99, STO 01]                          | <i>level sets et fast marching method</i> [SUK 03] | <ul style="list-style-type: none"> <li>— triangulation (3D)</li> <li>— segmentation (2D)</li> <li>— analytique (forme simple)</li> </ul> | représentation explicite puis génération de <i>level sets</i> [PRA 07, FRI 12] |
|                                  | maillage de la structure (X-FEM)                            | maillage dédié (structuré)                         |                                                                                                                                          |                                                                                |

FIGURE 1.7 – Tableau synthétisant différentes méthodes pour la représentation de la fissure.

Il faut choisir l'ensemble de nœuds enrichis, et donc l'ensemble de fonctions de forme correspondantes  $N^s$ . Le choix le plus courant est l'enrichissement topologique d'une rangée de nœuds autour du front. Il consiste à enrichir seulement les nœuds dont le support (privé de sa frontière) inclut le front de la fissure. L'avantage de cette approche est de ne faire entrer aucune longueur caractéristique. Lorsqu'on raffine le maillage, la taille de la zone enrichie diminue mais le nombre de couches enrichies reste constant. Une autre méthode consiste à enrichir les nœuds suivant un critère géométrique, par exemple tous les nœuds dans un rayon  $r^e$  autour du front de la fissure (l'enrichissement donc dit géométrique). Ce critère fait intervenir une longueur qui doit être calibrée. Il permet néanmoins de mener à bien les études de convergence [CHA 06] en maintenant une dimension constante pour la zone d'enrichissement. Ces deux approches ont été représentées sur la Figure 1.5.

#### 1.2.2.4 Représentation de la fissure par courbes de niveau

Les enrichissements de l'approche X-FEM se basent sur des coordonnées locales associées à la fissure. L'enrichissement de la discontinuité fait intervenir la distance à la fissure par l'intermédiaire de  $\mathbf{x}^*$  la coordonnée du point le plus proche sur la fissure. Les enrichissements de la singularité quant à eux reposent sur un système de coordonnées locales en pointe de fissure. Ces coordonnées polaires  $(r, \theta)$  en 2D (curvilinéaires autour du front en 3D) sont représentées Figure 1.2.

Ces paramètres locaux doivent être calculés en tous points de Gauss des éléments ayant au moins un nœud enrichi. La représentation de la fissure peut être intrinsèque

au maillage de la structure. Soit en étant conforme aux bords des éléments comme c'est le cas pour la FEM. Se pose alors le problème du remaillage et de la finesse du maillage autour de la fissure qui a minima doit permettre de représenter la fissure. La seconde possibilité consiste en une représentation extrinsèque au maillage de la structure. Soit par une représentation explicite de la fissure par une segmentation (2D) [BEL 99b, MOË 99] ou une décomposition en polyèdres (3D) [SUK 00, DUA 01]. Les difficultés sont alors l'extrapolation aux points de Gauss des grandeurs locales ( $\mathbf{x}^*$ ,  $r$  et  $\theta$ ) qui peut être coûteuse et la réactualisation de ces informations lors de la propagation de la fissure. Cela peut être fait par une représentation implicite de la fissure par la méthode des *level sets* introduite par Sethian [SET 96, SET 99]. Cette méthode associée à un maillage structuré est une solution à ces difficultés (extrapolation aux points de Gauss et propagation) souvent utilisée dans le contexte X-FEM [SUK 01, STO 01, MOË 02a, GRA 02, SUK 03]. Il est également possible de calculer les *level sets* sur le maillage de la structure qui dans le cas général d'une structure réelle est non structuré. La propagation et l'extrapolation sont alors plus complexes [BAR 98]. Ces différentes approches sont synthétisées sur la Figure 1.7.

Les *level sets* (fonctions de niveau) sont des champs scalaires de l'espace. La valeur de ces champs correspond à la distance signée à une interface de l'espace, une courbe en 2D et une surface en 3D. Pour une interface  $\mathcal{I}$ , la définition de la *level sets* associée est

$$crack(\mathbf{x}) = \text{signe}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] |\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|, \quad (1.53)$$

où  $\mathbf{x}^s$  est le point de l'interface le plus proche du point  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  est la normale à ce point  $\mathbf{x}^s$ . On associe une courbe de niveau à la discontinuité prolongée dans la direction  $\mathbf{e}_t$ . Cette *level set* et cette définition, très proche de l'équation (1.51) permettent de calculer directement la fonction d'enrichissement  $H(\mathbf{x})$ . Le gradient de ce champ permet de calculer en tout point la normale à l'interface  $\nabla crack(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_n$ . Il est également possible de déterminer simplement la courbure locale de l'interface qui sera utile pour la simulation 3D. La propriété de distance signée des courbes de niveaux par rapport à une interface  $\mathcal{I}$  se traduit par

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \text{ tel que } crack(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (1.54)$$

$$\|\nabla crack(\mathbf{x})\| = 1. \quad (1.55)$$

Pour représenter les coordonnées locales en pointe de fissure (2 paramètres,  $r$  et  $\theta$ ) il est nécessaire d'introduire une seconde information. C'est également possible par l'utilisation d'une seconde courbe de niveau  $front(\mathbf{x})$ . Cette courbe de niveau est orthogonale à la première  $\nabla crack(\mathbf{x}) \cdot \nabla front(\mathbf{x}) = 0$  et présente une valeur nulle au niveau du front. La seconde coordonnée locale en pointe de fissure est alors définie comme  $\nabla front(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_t$ . À partir de ces deux courbes de niveaux, les

coordonnées locales sont définies comme

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{crack^2(\mathbf{x}) + front^2(\mathbf{x})}, \\ \theta &= 2 \arctan \left( \frac{crack(\mathbf{x})}{front(\mathbf{x}) + r} \right). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Pour des géométries de fissures complexes, ces courbes de niveaux sont numérisées. Pour ce faire, elles sont discrétisées en espace, soit sur le maillage de la structure soit sur un maillage annexe. Utiliser un maillage dédié présente plusieurs avantages, c'est une solution assez répandue lors de l'utilisation de la X-FEM [PRA 07, PRA 08]. Ce maillage dédié peut s'adapter à la géométrie de la fissure, en étant d'une dimension cohérente et localisé dans la zone où se trouve la fissure. En effet, une fissure obtenue numériquement par propagation incrémentale ou expérimentalement (photographies ou imagerie 3D) peut avoir une géométrie complexe. L'autre avantage qui fait la force de ces méthodes est qu'il est possible d'utiliser un maillage structuré pour lequel l'interpolation et l'actualisation avec la propagation sont réalisées très efficacement par des algorithmes différences finies [OSH 88, SET 99].

Lorsque la fissure se propage, les courbes de niveaux représentées sur une grille fixe doivent être actualisées. En utilisant les courbes de niveau  $crack(\mathbf{x})$  et  $front(\mathbf{x})$  définies sur un maillage structuré, Gravouil *et al.* [GRA 02] ont mis au point une méthode 3D permettant d'actualiser les courbes de niveaux avec des équations géométriques fonction de la vitesse de propagation

$$\frac{\partial crack}{\partial \tau} + V_c \mathbf{e}_n \cdot \nabla crack(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{avec } (\mathbf{x}, \tau) \in (\Omega \times [0, t_{end}]). \quad (1.57)$$

En partant d'une loi de propagation, la vitesse d'évolution du front, connue par la loi de propagation  $\mathbf{V} = V_f \mathbf{e}_t + V_c \mathbf{e}_n$  est étendue directement aux points proches puis au volume. Afin de ne pas modifier les courbes de niveaux des zones déjà fissurées, ce qui reviendrait à déplacer la fissure dans le milieu, la vitesse  $V_c$  normale à la fissure n'est appliquée que pour la zone non fissurée proportionnellement à la distance au front.

Les équations de vitesse sont du type Hamilton-Jacobi pour lesquelles Sethian [SET 99] propose d'utiliser un schéma aux différences finies dit *upwind* robuste et efficace. Il est néanmoins difficile de vérifier les propriétés de différences signées des équations (1.54) et (1.55) et la propriétés de d'orthogonalité entre  $crack(\mathbf{x})$  et  $front(\mathbf{x})$ . Cette difficulté est détaillée par Dufloy *et al.* dans [DUF 07].

Enfin, la représentation de la fissure peut être complètement explicite par un ensemble de segments [MOË 99] (ou d'éléments de surface [SUK 00] en 3D). Lors de l'évolution de la fissure, l'interface est simplement augmentée d'éléments correspondants au pas de propagation. Cette méthode, utilisée par les premiers développements X-FEM est robuste mais coûteuse. Elle est cependant souvent utilisée pour initialiser les *level sets*.

On peut alors combiner les deux méthodes pour profiter des avantages de chacune [PRA 07, FRI 12]. On utilise une représentation explicite pour simplifier la simulation de la propagation. Le modèle de propagation est appliqué à chaque nœud de la bordure du domaine. Une direction et une longueur en résulte, qui permettent de créer de nouveaux éléments. Ces éléments peuvent être très distordus si la propagation est de pas inégal, mais il n'y a pas de rigidité associée à l'interface. À partir de cette représentation explicite, il existe des méthodes numériques géométriques efficaces pour calculer les deux *level sets* présentées  $crack(\mathbf{x})$  et  $front(\mathbf{x})$  sur un maillage structuré. Et à partir de cette représentation *level sets*, la définition des nœuds à enrichir, le calcul des enrichissements et l'intégration de la matrice de rigidité sont réalisés efficacement avec des algorithmes différences finies. C'est cette méthode qui est utilisée dans le cadre de cette thèse avec une représentation explicite par éléments ou utilisant une fonction analytique pour des géométries simples (ellipses).

### 1.2.2.5 Difficultés introduites par la méthode

La méthode X-FEM introduit des difficultés numériques maintenant bien connues. L'ajout de fonctions d'enrichissement fait perdre localement la propriété  $\delta$ -Kronecker de la FEM. Sans cette propriété, l'imposition de conditions aux limites est plus difficile. Ce problème localisé peut être résolu en modifiant les fonctions d'enrichissement comme développé ci-dessous. Les éléments partiellement enrichis (avec seulement une partie de leurs nœuds enrichis) sont également sources de problèmes. Ces éléments assurent le lien entre les éléments FEM et les éléments enrichis. Ils ont notamment tendance à diminuer le taux de convergence de la méthode [CHE 03, LAB 05].

Les enrichissements de la méthode X-FEM diminuent dans la plupart des cas le conditionnement de la FEM, c'est pourquoi des préconditionneurs sont généralement utilisés. Ce conditionnement peut affecter la précision des résultats. Babuška et Banerjee [BAB 12] ont proposé une méthode permettant de retrouver le conditionnement de la FEM. Cette méthode consiste également à modifier la fonction d'enrichissement.

Une autre difficulté introduite par les enrichissements est leur intégration (pour le calcul de la rigidité). En effet la méthode d'intégration utilisée pour la méthode des éléments finis est la quadrature de Gauss. Elle repose sur une somme pondérée en un ensemble de points donné. Pour chaque élément fini, la position et le poids des points de Gauss sont connus dans l'espace de référence. Elle permet l'intégration exacte de polynômes d'ordre  $2n - 1$  avec  $n$  points dans chacune des directions de l'espace pour chaque élément. Cette propriété est en accord parfait avec la FEM puisque l'espace d'approximation est polynomial sur chacun des éléments. Lorsque la méthode est étendue avec des enrichissements singuliers, les fonctions ne sont plus polynomiales et l'intégration exacte n'est plus possible. Ce problème est également détaillé ci-dessous.

**Traitement des *blending elements***

Comme représenté sur la Figure 1.4, entre d'une part les éléments complètement enrichis (où la partition de l'unité vaut 1 et d'autre part les fonctions d'enrichissement sont représentées exactement) et les éléments finis standards (qui n'ont aucun nœud enrichi) il existe des éléments partiellement enrichis, situés à l'interface entre les deux domaines. La fonction d'enrichissement  $\varphi^e$  n'est pas représentée complètement mais seulement son produit avec une fonction de forme éléments finis. Elle ne peut pas être compensée par les fonctions de forme FEM également présentes. Une erreur est donc nécessairement commise dans ces éléments qui diminuent le taux de convergence de la méthode X-FEM classique [CHE 03, LAB 05].

Pour palier à ce problème plusieurs méthodes ont été proposées. La plus classique et simple à mettre en œuvre consiste à annuler la fonction d'enrichissement aux nœuds (alors dites *shifted*). Elle restaure la propriété de  $\delta$ -Kronecker des éléments finis. Elle est présentée ci-dessous. Pour les enrichissements discontinus et singuliers, un traitement spécial pour les *blending elements* a été proposé par Fries [FRI 08]. Il ajoute des degrés de liberté dans ces *blending elements* pour mieux compenser les fonctions partiellement enrichies qui assurent la continuité. Il permet de retrouver le taux de convergence et est présenté succinctement ci-dessous.

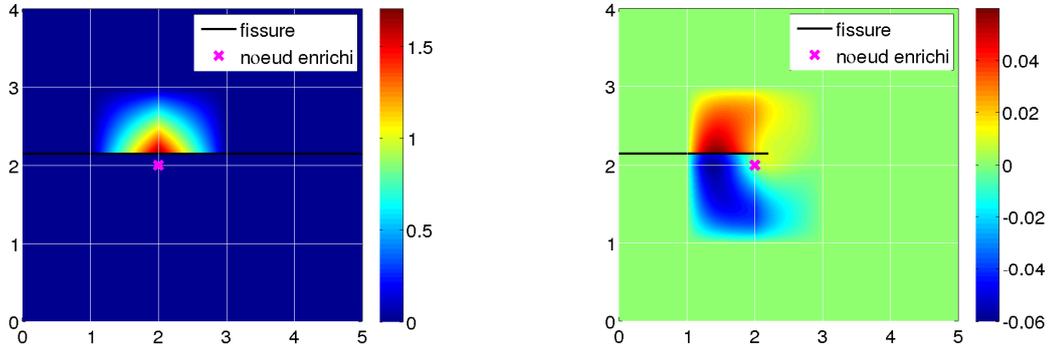
Il n'est pas envisageable de directement mettre l'enrichissement à zéro dans les *blending elements*, puisqu'une discontinuité artificielle serait introduite. Mais des méthodes pour assurer une transition franche entre les deux approches ont été proposées avec succès. Laborde *et al.* [LAB 05] ont montré que le traitement du problème en deux domaines séparés (un enrichi et un FEM) raccordés nœuds à nœuds permettait de retrouver un taux de convergence optimal. Ce résultat a par la suite été démontré [CHA 11] pour un raccord intégral entre les deux domaines.

L'introduction des fonctions d'enrichissements des équations (1.51) et (1.52) dans la formulation classique de l'équation (1.50) fait perdre la propriété de  $\delta$ -Kronecker de la FEM. Cette propriété des fonctions de forme,  $\varphi_k(\mathbf{x}_j) = \delta_{kj}$  est souhaitable car elle permet d'être interpolant. C'est-à-dire que les degrés de liberté calculés sont directement les déplacements au nœuds  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j) = u_j$ . Elle permet notamment de faciliter l'application de conditions aux limites de Dirichlet.

Dans le cadre de la X-FEM, les déplacements sont approchés par la méthode FEM, auxquels s'ajoutent des termes d'enrichissement. Pour que les degrés de liberté de la méthode FEM restent interpolants, le produit  $\varphi_k \varphi^e$  (avec  $\varphi^e$  qui sont les fonctions d'enrichissement  $H$  et  $S_j \quad \forall j = 1, \dots, 4$  dans l'équation (1.50)) doit être nul à tous les nœuds. Les fonctions FEM  $\varphi_k$  étant nulles pour tous les nœuds  $\mathbf{x}_j$  tel que  $j \neq k$ , il suffit que les fonctions d'enrichissement  $\varphi^e$  considérées soient nulles au point  $\mathbf{x}_i$ . C'est l'idée à l'origine des enrichissements *shifted*  $\varphi_k^{shift}$  proposés par Sukumar *et al.* [SUK 01]

$$\varphi_k^{shift}(\mathbf{x}) = \varphi^e(\mathbf{x}) - \varphi^e(\mathbf{x}_k) \quad \forall k \in N^e. \quad (1.58)$$

Les fonctions d'enrichissement sont donc différentes pour tous les nœuds enrichis. Pour un nœud donné, elles sont représentées Figure 1.8. Pour l'enrichissement saut



(a) Enrichissement saut équation (1.51) dans (1.50)

 (b) Enrichissement singulier  $S_1$  équation (1.52) dans (1.50)

 FIGURE 1.8 – Fonction d’enrichissement *shifted* autour d’un nœud  $\varphi_k(\mathbf{x})\varphi^{shift}(\mathbf{x})$ .

( $\varphi^e = H$ ), le support de l’enrichissement est réduit aux éléments où passe la discontinuité, il n’y a donc plus de *blending elements*. Cette approche permet de retrouver un taux de convergence optimal pour des discontinuités fortes.

Néanmoins, cette modification n’est pas suffisante pour restaurer le taux de convergence de la FEM pour des discontinuités faibles. Fries [FRI 08], a proposé une *corrected X-FEM*, permettant de mieux gérer les *blending elements*. Elle consiste à doter les *blending elements* de fonctions d’enrichissement supplémentaires permettant de mieux compenser les enrichissements partiels qui y sont présents.

Cette opération est réalisée très simplement en augmentant l’ensemble des fonctions de forme enrichies  $N^e$  (i.e.,  $N^s$  dans le cas de la singularité de l’équation (1.50)). Les fonctions de forme associées aux nœuds d’éléments ayant au moins un nœud enrichi sont ajoutées à  $N^e$  donnant  $N^{e+}$ , comme représenté Figure 1.9. Les fonctions d’enrichissement  $\varphi^e$  sont *shifted* puis multipliées par une fonction rampe  $R^{N^e}(\mathbf{x})$ , la partition de l’unité locale X-FEM utilisée pour l’enrichissement dans l’équation (1.49) définie par

$$R^{N^e}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N^e} \varphi_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j. \quad (1.59)$$

Seul un champ scalaire nous intéresse, aussi  $\mathbf{e}_j$  est choisi arbitrairement et  $R^{N^e}(\mathbf{x})$  est la fonction représentée Figure 1.4. La fonction d’enrichissement corrigée  $\varphi^{corr}(\mathbf{x})$  est alors

$$\varphi_k^{corr}(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) (\varphi^e(\mathbf{x}) - \varphi^e(\mathbf{x}_k)) \quad \forall k \in N^{e+}. \quad (1.60)$$

Cet enrichissement est calculé aisément, et permet de retrouver le taux de convergence optimal en présence de discontinuités faibles [FRI 08].

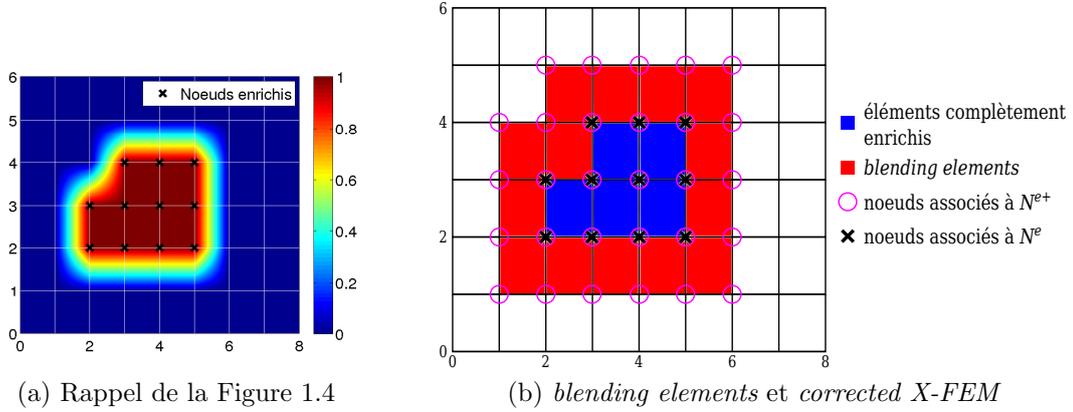


FIGURE 1.9 – Localisation des *blending elements* pour l'exemple de zone enrichie représentée Figure 1.4, ainsi que les nœuds associés aux enrichissements de la *corrected X-FEM* [FRI 08].

### Dégradation du conditionnement

Le conditionnement  $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}\|^{-1}$  (pour une matrice  $\mathbf{A}$ ) permet de quantifier l'impact d'une erreur numérique dans la résolution d'un système linéaire de la forme  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ . Considérons le système linéaire perturbé par une erreur  $\delta\mathbf{b}$  sur le second membre  $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ , le conditionnement donne une borne exacte à l'erreur résultante sur la solution  $\delta\mathbf{u}$

$$\frac{\|\delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (1.61)$$

Si c'est la matrice du système linéaire qui est perturbée  $(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{b}$ , l'erreur résultante sur la solution  $\Delta\mathbf{u}$  est également bornée par le conditionnement

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} (1 + O(\|\Delta\mathbf{A}\|)). \quad (1.62)$$

Dans le cadre de l'utilisation d'une méthode itérative pour la résolution du système linéaire, le conditionnement est d'autant plus important qu'en plus de dégrader la précision de la solution, il peut piloter la vitesse de convergence. D'après la définition du conditionnement, il apparaît qu'il dépend de la norme matricielle considérée. La vitesse de convergence est en particulier liée à la norme 2 (qui peut être calculée comme  $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ , où  $\rho(\mathbf{A})$  est la plus grande valeur propre de  $\mathbf{A}$  aussi appelé rayon spectral). Pour cette norme, le conditionnement  $\kappa_2(\mathbf{A})$  peut être calculé comme

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \frac{\max_i |\Lambda_i|}{\min_i |\Lambda_i|}, \quad \text{avec } \lambda_i \text{ les valeurs propres de } \mathbf{A}. \quad (1.63)$$

L'introduction de la discontinuité dégrade le conditionnement de la X-FEM par rapport à la FEM [BÉC 05, FRI 10]. Pour palier à ce problème, les méthodes numériques sont généralement préconditionnées. Des préconditionneurs ont donc été développés pour la X-FEM [BÉC 05, MEN 11]. En particulier, lorsque la discontinuité sépare un élément en deux parties très inégales, de très petites valeurs propres sont introduites dans la matrice de rigidité. Pour éviter ces situations, on peut simplement recourir à un critère géométrique pour n'enrichir que les nœuds proches de la discontinuité si les deux parties de l'élément sont trop inégales [MOË 99, REU 08]. La discontinuité n'est pas exactement reproduite mais l'erreur sur la solution est plus faible que l'erreur numérique due au conditionnement. Si c'est possible, il suffit de déplacer les nœuds proches sur la fissure pour corriger ce problème.

Enfin dans le cas général, Babuška et Barnerjee [BAB 12] ont proposé la G-FEM / X-FEM stabilisée en modifiant la fonction d'enrichissement discontinue

$$\varphi_k^{stable}(\mathbf{x}) = \varphi^e(\mathbf{x}) - \mathcal{J}_{\varphi^e}(\mathbf{x}) \quad \forall k \in N^e, \quad \text{avec } \mathcal{J}_{\varphi^e}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in N^e} \varphi^e(\mathbf{x}_j) \varphi_j(\mathbf{x}). \quad (1.64)$$

Comme pour l'expression (1.49), les fonctions  $\varphi_j(\mathbf{x})$  sont les fonctions de forme éléments finis qui constituent une partition de l'unité. La fonction  $\mathcal{J}_{\varphi^e}$  permet que la méthode soit à nouveau interpolante, en conservant un enrichissement identique pour tous les nœuds enrichis. Les auteurs proposent une preuve de l'amélioration du conditionnement et quelques exemples.

## L'intégration des fonctions X-FEM

Depuis le début de la méthode, l'intégration numérique des fonctions X-FEM nécessite des traitements spécifiques. Deux difficultés sont rencontrées, la gestion de la discontinuité et l'intégration précise des fonctions représentant la singularité équation (1.52). L'intégration numérique consiste en général à calculer une intégrale de l'espace à partir de l'évaluation d'une fonction en un nombre fini de points. Pour chacun de ces  $N_G$  points  $\mathbf{x}_g$  on calcul un poids  $\omega_g$  et l'intégrale d'une fonction  $f(\mathbf{x})$  sur un domaine  $\Omega$  est approchée par la somme

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \simeq \sum_{g \in N_G} \omega_g f(\mathbf{x}_g). \quad (1.65)$$

Pour rendre efficace cette approche, on peut agir sur la position des points d'évaluation, leur nombre et le calcul des fonctions de poids.

En éléments finis, l'espace d'approximation est polynomial par éléments. La méthode de Gauss-Legendre permet d'intégrer exactement des polynômes de l'ordre souhaité sur chacun des éléments. Pour ce faire on peut déterminer pour un élément de référence (d'une forme simple avec des coordonnées unitaires également introduit Section 1.2.1.3) le nombre de points nécessaires, leur position et les poids associés. Ces caractéristiques sont définies une fois pour toutes pour l'élément de référence.

L'intégration des éléments réels est alors simplement obtenue par un changement de variable dans chacun des éléments

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega = \sum_{k \in N} \int_{\Omega_k} f(\mathbf{x})d\Omega \simeq \sum_{k \in N} \int_{\Omega_k^{el}} f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}))|\det \mathbf{J}_c|d\Omega. \quad (1.66)$$

Où  $\mathbf{J}_c$  est la matrice jacobienne de la transformation  $c$  de la base  $\mathbf{x}$  en  $\boldsymbol{\xi}$ .

Cette approche nécessite  $n$  points d'intégration pour chaque dimension des éléments pour intégrer des polynômes de degrés  $2n - 1$ . Elle est très efficace pour la FEM.

Lorsque les enrichissements sont continus et réguliers, même si ils ne sont pas polynomiaux, une intégration de haut ordre de ce type donne de bons résultats. La discontinuité, bien que géométriquement simple, est généralement mal représentée par des polynômes et nécessiterait une intégration de très haut ordre pour une approximation de mauvaise qualité. La solution proposée dès les débuts de la X-FEM [MOË 99, STR 00] consiste à faire un sous-découpage des éléments conforme à la fissure. Un exemple de ce redécoupage est présenté Figure 1.10 pour des quadrangles [XIA 06]. En effet, le produit des fonctions de forme FEM (polynomial par éléments) et des enrichissements signes (équation (1.51)) est simplement polynomial par sous-éléments de part et d'autre de la fissure.

Dans les *blending elements*, il faut intégrer le produit de deux fonctions de forme et de l'enrichissement. Pour un enrichissement signe, l'ordre de la fonction résultant est donc la somme de l'ordre de la fonction de forme éléments finis et de la fonction de forme de la partition de l'unité (généralement un). Ventura [VEN 06] a proposé une méthode spécifique d'intégration qui repose sur la création d'un polynôme spécifique.

Pour les éléments singuliers, l'intégration exacte n'est pas accessible par une méthode de Gauss. Certains auteurs ont recours à des quadratures de Gauss d'ordre très élevé (ordre 15 dans [LIU 04]). Pour intégrer le plus proprement possible la singularité, il est possible de distribuer les points d'intégration autour de la pointe de fissure dans un rayon donné [BÉC 05, LAB 05]. Enfin, une méthode robuste consiste à contrôler l'intégration en fonction d'une évaluation de l'erreur d'intégration commise [XIA 06].

### 1.2.2.6 Bilan de la X-FEM

Malgré les difficultés introduites par la X-FEM, principalement numériques, elle s'impose comme une méthode de référence en simulation de milieu fissuré. La singularité est prise en compte dans la discrétisation. La X-FEM permet alors d'améliorer le taux de convergence qui était réduit par la singularité pour la FEM. Pour un même maillage, la X-FEM sera plus précise pour une augmentation du nombre de degrés de liberté faible. En plus de la simulation de fissures, la possibilité d'enrichir la discrétisation présente de nombreuses applications notamment grâce à l'introduction de la singularité. La X-FEM permet donc d'utiliser un maillage non-conforme avec la fissure, aspect très intéressant pour la simulation de la propagation où le même maillage peut être utilisé pour plusieurs pas de propagation.

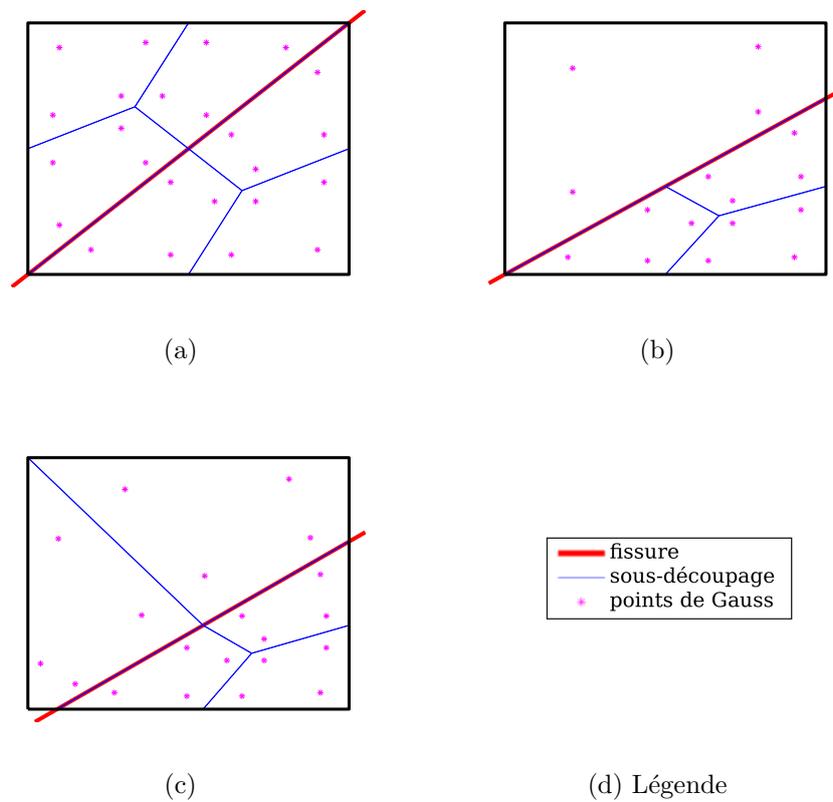


FIGURE 1.10 – Exemple de sous-division d'un quadrangle pour l'intégration exacte de l'enrichissement X-FEM discontinu (en ordre un). Deux points de Gauss sont représentés dans chacune des deux direction pour tous les sous éléments.

### 1.2.3 Modèles de propagation de fissures

Une fois la simulation pour un pas de temps ou une position de fissure donnée, la difficulté est d'identifier les paramètres contrôlant la propagation de la fissure. Un bref aperçu de ces paramètres est proposé lorsqu'une simulation non-linéaire est nécessaire. Les non-linéarités en pointe de fissure peuvent être géométriques (grands déplacements ou grandes déformations), phénoménologique (contact interfacial) ou constitutives (plasticité, endommagement,...). L'hypothèse d'élasticité linéaire pour simuler la propagation est ensuite abordée. Elle est très largement utilisée notamment à travers les facteurs d'intensité des contraintes. Des paramètres et critères de propagation classiques, basés sur cette hypothèse, sont présentés. Il en existe de nombreux dans des situations planes, mais ils sont plus rares pour des situations tridimensionnelles [LEB 03, LAZ 08, HAB 12a]. Dans cette partie, l'objectif n'est pas de donner un aperçu exhaustif des différents critères et paramètres qui ont été proposés, mais de montrer dans quelles circonstances et comment les coefficients asymptotiques des séries de Williams peuvent être utilisés, en particulier dans le cas tridimensionnel.

Dans un premier temps, le cas des matériaux ductiles est abordé. Pour ces matériaux, les modèles de propagation sont généralement directement basés sur les contraintes. Les matériaux fragiles sont ensuite considérés. Dans ce cas, l'approche asymptotique peut être reliée à des considérations énergétique. Les modèles en contraintes précédents peuvent alors être exprimés en fonction des facteurs d'intensité des contraintes. Enfin, les lois de propagation de fatigue sont considérées. Ces lois consistent à extrapoler la propagation de la fissure pour plusieurs cycles à partir de l'étude d'un cycle. Lorsque le chargement n'est pas proportionnel, la direction de la propagation est alors plus complexe à déterminer.

#### 1.2.3.1 Cas des matériaux ductiles

La théorie de la rupture élastique linéaire prédit des contraintes et déformations infinies en pointe de fissure. Il existe nécessairement une *process zone* dans laquelle le comportement du matériau est non-linéaire. Les phénomènes physiques à l'origine de ces non linéarités sont complexes [RAV 84, LYN 88, RIT 88]. Pour les matériaux métalliques, des déformations plastiques non réversibles se développent, des micro-fissures peuvent apparaître, des défauts apparaissent, grandissent et se regroupent créant parfois des porosités,... La microstructure joue un rôle prépondérant, de la plasticité cristalline se développe dans des grains ainsi que des glissements au niveau des joints de grains. Les défauts de la microstructure catalysent l'apparition de micro-fissures et de défauts. Ces phénomènes peuvent être étendus et piloter la ruine de la structure, on parle alors de comportement ductile. En effet, un matériau ductile supportant des déformations importantes après sa limite élastique présente de grandes non-linéarités avant rupture.

Étant donné le caractère micro-structurel de ces phénomènes, une simulation à l'échelle micro peut être réalisée. Elle doit alors prendre en compte la micro-

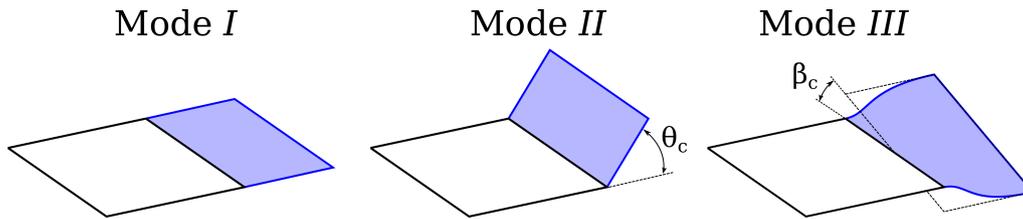


FIGURE 1.11 – Orientation possible des incréments de propagation d'une fissure 3D.  $\theta_c$  est l'angle de branchement et  $\beta_c$  l'angle de déversement.

structure qui est soit relevée expérimentalement (par exemple en tomographie par rayons X [CLO 97, LIM 10]), soit générée numériquement [ESP 03, KRA 08]. Pour modéliser une structure de dimension plus importante, la modélisation est généralement faite à l'échelle macroscopique. Les phénomènes micro-structuraux sont regroupés dans des variables thermodynamiques macroscopiques [LEM 96], en général sous la forme de plasticité et d'endommagement. Des méthodes de simulation de ce type ont fait l'objet de nombreuses thèses au LAMCOS [ELG 06b, PRA 07, SIM 10]. L'identification des paramètres de ces modèles est une difficulté importante, ils sont notamment fonction de la température et de la vitesse de sollicitation.

Les fissures sont alors des zones fortement endommagées qui se propagent. La simulation de la ruine et la propagation des fissures est alors naturelle et ne nécessite pas de modèle de propagation d'interface. L'endommagement peut par exemple être simulé par des éléments cohésifs [ORT 99, ZHO 04, CAZ 10a], un modèle d'endommagement non-local [BAŽ 02, SIM 10] ou la propagation d'un front d'endommagement représenté par une unique *level set* dite épaisse [MOË 11]. De plus ces approches permettent de modéliser l'initiation de la fissure et son développement. Ces modèles sont néanmoins coûteux à identifier. Ils sont riches, et la simulation de la ruine de structures industrielles est souvent hors de portée en temps et en ressources nécessaires. Deux problèmes notables existent, la dépendance au maillage et la transition entre l'endommagement fort et la discontinuité.

Aussi des modèles ont été développés pour la simulation de structure avec des fissures macroscopiques qui sont représentées par des discontinuités. Ces modèles nécessitent l'identification de lois de propagation. Ces lois doivent prédire aussi bien la direction de propagation, la longueur de propagation et les instabilités qui peuvent apparaître. Elles dépendent du chargement, de la géométrie, de la dynamique et de nombreux paramètres environnementaux et matériaux. Néanmoins, cette approche facilite grandement la simulation.

Une loi de propagation doit prédire l'avancée du front pour un pas de temps ou un nombre de cycles mais également les directions de propagation. L'orientation est classiquement décrite par deux angles illustrés sur la Figure 1.11,  $\theta_c$  l'angle dit de branchement dans le plan normal au front et  $\beta_c$  l'angle dit de déversement autour de  $\mathbf{e}_t$ . L'étude de ce déversement est complexe et selon la géométrie et le chargement un

même état local produira soit un déversement de tout le front, soit un déversement local en plusieurs parties [LAZ 08, ESN 14].

Lorsque les non-linéarités comme la plasticité sont très étendues en pointe de fissure, la direction de perte d'ellipticité (tenseur acoustique) ou la contrainte de cisaillement sont des pilotes potentiels de la direction de propagation [CAZ 10b]. En trois dimensions, Haboussa [HAB 12a] a proposé de prendre la contrainte équivalente au sens de von Mises  $\sigma^{vM}$ . La direction de propagation  $(\theta_c, \beta_c)$ , est la direction autour du front dans laquelle  $\sigma^{vM}$  est maximale

$$\frac{\partial \sigma^{vM}}{\partial \theta}(\theta, \beta) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma^{vM}}{\partial \beta}(\theta, \beta) = 0. \quad (1.67)$$

À partir d'une extrapolation des champs élastiques linéaires en déformations planes, les directions de propagation sont calculées par une approche semi-analytique [HAB 12a]

$$\theta_c^{shear} = \text{sign}(\tilde{\sigma}_{tn}) \frac{\pi}{4} \left( 1 + \frac{8\nu}{125} \right) \arctan \left| \frac{3\tilde{\sigma}_{1n} \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}_{3n}}{20} \right)}{5\tilde{\sigma}_{2n}} \right|, \quad (1.68)$$

$$\beta_c^{shear} = \text{sign}(\tilde{\sigma}_{ts}) \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\tilde{\sigma}_{ss}(\theta_c^{shear}) - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_c^{shear})}{2\tilde{\sigma}_{\theta s}(\theta_c^{shear})} \right]. \quad (1.69)$$

$$\tilde{\sigma}_{1n} = \frac{|\tilde{\sigma}_{nn}|}{|\tilde{\sigma}_{nn}| + |\tilde{\sigma}_{tn}| + |\tilde{\sigma}_{ts}|}, \quad \tilde{\sigma}_{2n} = \frac{|\tilde{\sigma}_{tn}|}{|\tilde{\sigma}_{nn}| + |\tilde{\sigma}_{tn}| + |\tilde{\sigma}_{ts}|} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_{2n} = \frac{|\tilde{\sigma}_{tn}|}{|\tilde{\sigma}_{nn}| + |\tilde{\sigma}_{tn}| + |\tilde{\sigma}_{ts}|}$$

sont des contraintes normées entre elles comme introduit pour les facteurs d'intensité des contraintes par [SCH 02]. Les contraintes  $\tilde{\sigma}$  sont des contraintes moyennes autour du front de fissure. En effet, une évaluation des contraintes au niveau du front sera fortement imprécise, aussi une moyenne locale permet de gagner en robustesse. Elles sont des grandeurs plus significatives que l'interpolation en un point des contraintes autour du front. Ces contraintes ont notamment été utilisées avec succès en présence de plasticité étendue [FRA 13], et pour simuler la transition entre la rupture en cisaillement et en tension [HAB 12b]. Elles sont obtenues en moyennant sur une demi-sphère  $V_s$  de rayon  $R$  en pointe de fissure avec une fonction de pondération

$$\tilde{\sigma}_{jk} = \frac{\int_{V_s} e^{10 \frac{d^2}{R^2}} \sigma_{jk}(\mathbf{x}) \, dV(\mathbf{x})}{\int_{V_s} e^{10 \frac{d^2}{R^2}} \, dV(\mathbf{x})}, \quad \forall (j, k) \in (t, n, s)^2, \quad (1.70)$$

où  $d$  est la distance entre le front et le point courant  $\mathbf{x}$ . Le choix du rayon  $R$  est généralement fait sur des considérations numériques (quelques éléments) mais reste un paramètre sensible.

Le critère RKR [RIT 73] de déclenchement de la propagation est également utilisé pour ces approches locales. Il est généralement basé directement sur la comparaison de la contrainte principale maximale  $\tilde{\sigma}^M$  à une contrainte critique  $\sigma_c$

$$\begin{cases} \text{si } \tilde{\sigma}^M < \sigma_c & \dot{a} = 0, \\ \text{si } \tilde{\sigma}^M \geq \sigma_c & \dot{a} > 0. \end{cases} \quad (1.71)$$

Comme synthétisé dans [PRA 08],  $\sigma^M$  peut soit être calculée à une longueur caractéristique du front dans la direction de propagation soit être évaluée en moyenne avec l'équation (1.70). Si la fissure avance, on peut par exemple utiliser la populaire [FRE 98] loi introduite par Kanninen et Popelar [KAN 85] pour quantifier la vitesse de propagation

$$\dot{a} = \left(1 - \frac{\sigma_{Ic}}{\tilde{\sigma}^M}\right) c_r. \quad (1.72)$$

Où  $c_r$  est la vitesse des ondes de Rayleigh dans le matériau. Elle est utilisée par exemple par [GRÉ 07].

Lorsque les déformations en pointe de fissure sont moins importantes, la contrainte d'ouverture prend le pas sur la contrainte de cisaillement. La transition entre les deux a été étudiée dans [HAB 12b, HAB 12a], et peut être calculée à partir d'une loi des mélanges sur un critère en déformation moyenne. Dans ce cas, le critère de démarrage de la fissure équation (1.71) et la loi de propagation définie par l'équation (1.72) sont bien adaptés. Cette situation, où les phénomènes non-linéaires sont de moindre importance, est mieux maîtrisée.

Lorsque l'ouverture domine la propagation, une hypothèse pertinente peut être de considérer que la fissure propagera dans la direction où la contrainte de traction est maximale [ERD 63]. Ce critère classique est équivalent [HAB 12a] au critère proposé par Schöllmann *et al.* [SCH 02] qui postule que la propagation se fera dans la direction où la plus grande composante de la contrainte principale est maximale. De la même manière que précédemment, à partir d'une extrapolation des champs élastiques linéaires en déformations planes, les directions de propagation sont calculées par une approche semi-analytique

$$\theta_c^{tens} = \text{sign}(\tilde{\sigma}_{tn}) 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1 + \tilde{\sigma}_{1n} - (1 - \tilde{\sigma}_{3n})^p}{\tilde{\sigma}_{2n}} \right) - \sqrt{\left( \frac{1 + \tilde{\sigma}_{1n} - (1 - \tilde{\sigma}_{3n})^p}{\tilde{\sigma}_{2n}} \right)^2 + 8} \right], \quad (1.73)$$

$$\beta_c^{tens} = \text{sign}(\tilde{\sigma}_{ts}) \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2\tilde{\sigma}_{\theta s}(\theta_c^{tens})}{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_c^{tens}) - \tilde{\sigma}_{ss}(\theta_c^{tens})} \right]. \quad (1.74)$$

Avec  $p = (\sqrt{\pi} - 5\nu)/4$ .

Ces modèles de propagation de discontinuités macroscopiques pour des non-linéarités importantes en pointe de fissure sont obtenus par extension de la théorie élastique linéaire en deux dimensions. C'est particulièrement vrai pour les directions de propagation  $\theta_c^{shear}$ ,  $\beta_c^{shear}$ ,  $\theta_c^{tens}$  et  $\beta_c^{tens}$ . Il est également possible de suivre les définitions à la lettre et de calculer une contrainte moyenne dans plusieurs directions autour du front. Pour être précise, cette approche nécessitera un raffinement du maillage important autour du front et des calculs dans de nombreuses directions.

### 1.2.3.2 Les matériaux fragiles

Cette appellation regroupe les matériaux pour lesquels une fissure se propage en générant peu de non-linéarités en pointe de fissure. Ils ont été très étudiés puisqu'ils

permettent d'utiliser des modèles élastiques linéaires et que la fissuration y est la source principale de dissipation. Dans ce cadre, les lois de propagation de fissure (critère de propagation, vitesse et orientation) sont bien établis. La difficulté est alors de quantifier quelle ampleur de non-linéarités est acceptable par de tels modèles.

### Approche énergétique

En considérant que la seule source de dissipation est la propagation du front de fissure, il est possible d'identifier un critère de propagation efficace. L'initiation de cette démarche est attribuée à Griffith (1920) [LEB 03]. Elle est détaillée par Leblond [LEB 03] et consiste à dire que le travail des forces extérieures  $W_{ext}$  est stocké sous forme d'énergie libre élastique  $W_{el}$  ou dissipé (sans élévation de chaleur) par la propagation de fissure. La propagation de la fissure provoque une dissipation d'énergie  $G_c$  par unité de longueur. Lorsque l'énergie cinétique  $W_{cin}$  n'est pas négligeable, le premier principe sans échauffement donne

$$\partial W_{ext} = \partial W_{el} + \partial W_{cin} + G_c dA, \quad (1.75)$$

où  $dA$  est l'incrément de propagation de la fissure. Le système est donc fonction du chargement et de la surface de la fissure  $A$ . Finalement, les deux principes de la thermodynamique donnent

$$\begin{cases} \left( -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial a} - G_c \right) \dot{a} = 0, \\ G_c \dot{a} \geq 0. \end{cases} \quad (1.76)$$

Dans cette expression,  $\mathcal{E}_p$  est l'énergie potentielle totale (des forces conservatives et de la déformation élastique), et  $a$  la longueur de la fissure. À chargement constant, sa dérivée est appelée taux de restitution d'énergie  $G = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial a}$ .

Cette approche fournit donc un critère de propagation :  $G = G_c$ . Cependant il ne permet pas de déterminer la direction de propagation. Erdogan et Sih [ERD 63] ont proposé de considérer que la direction de propagation soit guidée par la direction dans laquelle le taux de restitution d'énergie est maximal. C'est-à-dire, pour le chargement donné, en considérant une extension de fissure fixée  $da_t$  dans toutes les directions de l'espace, la direction dans laquelle le taux de restitution est maximal.

En quasi-statique, pour un chargement compatible avec la géométrie initiale de la fissure, ce taux de restitution d'énergie peut se calculer à partir des facteurs d'intensité des contraintes

$$G = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2, \quad \text{avec} \begin{cases} E^* = E & \text{en contraintes planes,} \\ E^* = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes,} \\ E^* \text{ variable en 3D (Section 1.2.4.2).} \end{cases} \quad (1.77)$$

Cette formule est généralement aussi utilisée pour des fissures non rectilignes bien que les tentatives de généralisation à des directions de propagation quelconques

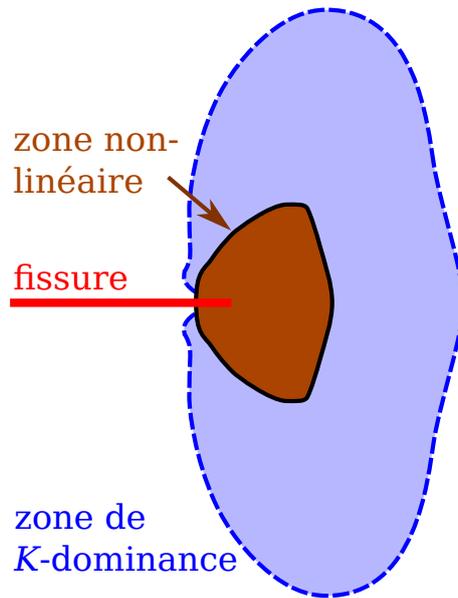


FIGURE 1.12 – Représentation du critère de plasticité confiné proposé par [SUR 98].

ne soit pas encore abouties [LEB 03]. Cette relation permet de faire le lien entre cette approche énergétique et les développements asymptotiques en pointe de fissure présentés en Section 1.1.2. La manière dont ces développements peuvent être utilisés pour les lois de propagation est l'objet de la partie suivante.

### Approche asymptotique

Dans la Section 1.1.2, des paramètres caractérisant la singularité (les facteurs d'intensité des contraintes  $K$ ) ont été identifiés par une étude asymptotique lorsqu'une fissure est présente dans un milieu élastique linéaire en situation plane. Cette hypothèse de comportement linéaire élastique est intéressante et pourra être utilisée avec précision quand les non-linéarités en pointe de fissure comme la plasticité restent confinées. Suresh [SUR 98] propose de quantifier cette définition en la liant à la notion de  $K$ -dominance. Cette zone est définie comme la zone où les contraintes devinent du champ de contraintes associé aux facteurs d'intensité des contraintes (précisé équation (1.27)) de moins de 10% au sens de von Mises. Les non-linéarités sont alors considérées comme confinées si elles sont restreintes dans une zone plus petite que la zone de  $K$ -dominance, comme illustré Figure 1.12.

Lorsque cette hypothèse est vérifiée, les facteurs d'intensité des contraintes sont les paramètres caractérisant au mieux la fissure. Ils s'imposent naturellement dans les lois de propagation. Cette hypothèse est vérifiée pour des matériaux dits fragiles comme de nombreux métaux (e.g., fontes) notamment à basse température, les céramiques, le verre,... En pratique, les facteurs d'intensités peuvent aussi être utilisés en dehors de ce cadre dans des simulations non-linéaires [ELG 06a].

Le critère de déclenchement de la propagation de la fissure en contrainte d'ouverture peut encore être utilisé. Néanmoins, ce critère local est moins attrayant que le recours au critère en taux de restitution d'énergie  $G = G_c$  qui est une grandeur globale. Enfin, pour une propagation en mode  $I$ , ce modèle est équivalent (confère équation (1.77)) à un critère sur le facteur d'intensité des contraintes  $K_I = K_{Ic}$ .

Les facteurs d'intensité des contraintes sont associés à un champ de contraintes au voisinage du front, ils permettent de calculer directement la direction de propagation pour les critères usuels qui sont basés sur les états de contraintes locaux, notamment ceux déjà énoncés. Le critère de contrainte d'ouverture maximal [ERD 63] autour du front pour un chargement en déformations planes [HAB 12a] prédit par exemple

$$\theta_c^{tens} = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1 + K_I - (1 - K_{III})^p}{K_{II}} \right) - \sqrt{\left( \frac{1 + K_I - (1 - K_{III})^p}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right], \quad (1.78)$$

avec  $p = (\sqrt{\pi} - 5\nu)/4$ . C'est également à partir de ces champs que Schöllmann *et al.* [SCH 02] ont proposé la direction  $\beta$  rappelé par l'équation (1.74) pour le critère en contrainte d'ouverture maximale. Ces résultats sont semblables à ceux obtenus avec un critère en contrainte principale maximale [SCH 02, HAB 12a].

Les champs asymptotiques permettent également d'appliquer le critère sur la direction qui maximise le taux de restitution d'énergie  $G$ . Une application directe de ce critère nécessiterait d'évaluer  $G$  pour une extension de fissure dans toutes les directions autour du front. Cependant, dans des situations planes, il est possible d'exprimer les facteurs d'intensité des contraintes  $K_i^*$  et donc le taux de restitution d'énergie  $G^*$ , juste après branchement (pour une extension du front dans une direction donnée) en fonction des facteurs d'intensité des contraintes à la position du front actuelle et de l'angle de branchement [LEB 03]

$$\begin{bmatrix} K_I^*(\theta_c) \\ K_{II}^*(\theta_c) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\theta_c) \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad (1.79)$$

$\mathbf{f}(\theta_c)$  est une fonction linéaire dépendant de l'angle de branchement. Cette fonction est connue (numériquement ou aux premiers ordres) et est valable pour toutes les situations où la fissure (et sa branche) sont continues et régulières.

Dans la plupart des expériences menées, et pour les critères précédents, la fissure tend à évoluer vers une direction où seul le mode  $I$  est activé. C'est-à-dire celle qui annule les autres modes ( $K_{II}$  et  $K_{III}$ ), ils vérifient

$$\begin{cases} K_{II} = 0 & \implies \theta_c = 0 \\ K_{III} = 0 & \implies \beta_c = 0 \end{cases} \quad \text{et leur contraposée} \quad \begin{cases} \theta_c \neq 0 & \implies K_{II} \neq 0 \\ \beta_c \neq 0 & \implies K_{III} \neq 0 \end{cases} \quad (1.80)$$

C'est l'argument du principe de symétrie locale étendu aux trois dimensions [GOL 74]. Il tire son nom du fait que le mode  $I$  est un mode symétrique, les champs mécaniques obtenus dans le plan de fissuration sont donc localement symétriques. L'application de ce critère avec l'expression (1.79) est directe.

### 1.2.3.3 Les lois de fatigue

En fatigue, une fissure est soumise à des sollicitations cycliques. Elle propage pour des sollicitations faibles, c'est-à-dire à des niveaux de contraintes (ou de taux de restitution d'énergie) bien plus faible ( $< 50\%$ ) que la valeur limite  $\sigma_c$  (ou  $G_c$ ). Pour ce type de sollicitations, l'hypothèse de plasticité confinée peut être appliquée à un spectre de matériaux assez large [SUR 98, NEW 98]. En effet, la zone plastique activée est plus petite puisque les sollicitations sont plus faibles, en particulier pour la fatigue à grand nombre de cycles. Les facteurs d'intensité des contraintes étant les paramètres dominants dans cette situation, ils se sont rapidement imposés dans nombre de lois de propagation. Pour ce type de sollicitations, la vitesse de propagation est généralement exprimée en m/cycle. La simulation de tout les cycles n'étant pas numériquement envisageable, une extrapolation est réalisée pour de nombreux cycles à partir d'une simulation de quelques cycles.

Suite à l'introduction des champs asymptotiques et des facteurs d'intensité des contraintes, en mode  $I$ , à cycle de chargement constant, Paris *et al.* [PAR 61] ont constaté que l'avancée de la fissure par nombre de cycle  $\frac{da}{dN}$  était proportionnelle à la variation du facteur d'intensité des contraintes sur un cycle dans un diagramme logarithmique. Ils ont donc proposé une loi de propagation en fatigue

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^\eta, \quad \text{avec} \quad \Delta K_I = K_I^{max} - K_I^{min}, \quad (1.81)$$

où les coefficients  $C$  et  $\eta$  sont des propriétés matériaux déterminées expérimentalement. Cette loi a été vérifiée par de nombreuses études, et est une référence en fatigue pour une large plage de  $\Delta K$ , la région  $II$  de la Figure 1.13. Un autre paramètre a été proposé [MCE 58]. Il s'est avéré que les deux étaient équivalents.

### 1.2.3.4 Chargement proportionnel

Des extensions de cette approche à des chargements en mode mixte ont été proposées en considérant un facteur d'intensité des contraintes effectif à partir de plusieurs modes  $\Delta K^{eq}$ . Nous considérons dans un premier temps des situations où le rapport entre les différents modes de chargement est constant. Le chargement est alors dit proportionnelles. Pour ce type de chargement, la direction de propagation est généralement déterminée à partir des critères précédents. Dans des situations planes, qui sont les plus simples à étudier, Tanaka [TAN 74] a proposé une expression de  $K^{eq}$  basée sur une approche en déplacement

$$K^{eq} = \sqrt[4]{K_I^4 + 8K_{II}^4}, \quad \text{dans} \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K^{eq})^\eta, \quad (1.82)$$

Cette expression a été vérifiée expérimentalement en modes plans, elle est très utilisée en fatigue [QIA 96]. Dans l'état de l'art proposé par Qian et Fatemi [QIA 96], l'extension au mode  $III$  est présentée comme complexe à cause notamment du déversement

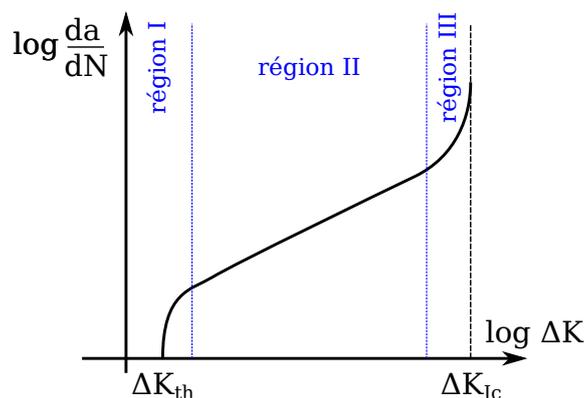


FIGURE 1.13 – Les trois régimes de propagation d’une fissure de fatigue à grand nombre de cycles.

du front en une ou plusieurs facettes selon le comportement du matériau et le chargement. Des extensions ont néanmoins été proposées [TAN 74, POO 85, RIC 08] mais sans faire consensus.

Les facteurs d’intensité des contraintes sont les paramètres dominants en pointe de fissure en élasticité linéaire. Cependant, Brown et Miller [BRO 85] ont montré que la vitesse de propagation était également fonction du second terme du développement asymptotique, le T-stress. L’influence de ce paramètre est mise en évidence expérimentalement en trois dimensions [GIA 11]. Hutař *et al.* [HUT 06] ont traduit cette influence sur les coefficients de la loi de Paris qui dépendent fortement de la géométrie et du chargement. En mode I, ils ont montré qu’il était possible d’identifier une loi fonction de  $\Delta K_I$  et  $T$  valable pour différentes géométries

$$\frac{da}{dN} = C \left[ H \left( \frac{T}{\sigma_y} \right) \Delta K_I \right]^\eta. \quad (1.83)$$

$\sigma_y$  est la limite élastique du matériaux. Ils ont également montré que la fonction  $H$  était liée à la taille de la zone plastique. Ce paramètre est également prépondérant [HAM 05, GAL 11] dans le modèle développé par Pommier *et al.* caractérisé par l’équation (1.85).

D’autres paramètres ont également été utilisés pour mettre au point des lois de propagations. Wheeler [WHE 72] a proposé un modèle basé sur la taille de la zone plastique. Un autre paramètre très utilisé est le *crack tip opening displacement* CTOD (ou angle, CTOA), Newman *et al.* [NEW 03] en proposent une synthèse. Directement lié à l’ouverture de la fissure, il est également directement mesurable à partir de techniques d’imagerie. Dans la cas plastique parfait, il peut être relié avec une évaluation du taux de restitution d’énergie.

Ces lois empiriques sont mises en échec lorsque l’environnement évolue ou que le chargement change, ce qui limite la plage d’application d’une telle loi [CIA 08]. Comme illustré sur la Figure 1.13, la loi de Paris n’est valable que pour une cer-

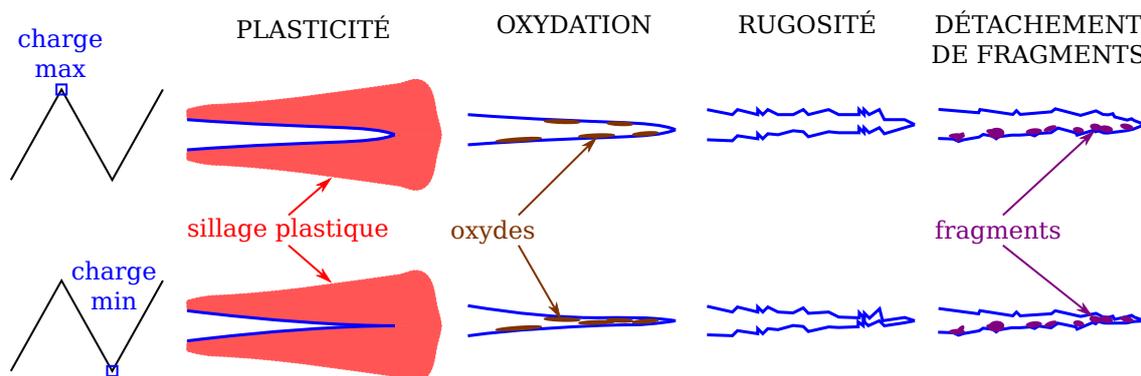


FIGURE 1.14 – Reproduction de la figure de [SUR 82] sur les origines physiques principales de la refermeture.

taine plage de facteur d'intensité des contraintes. C'est-à-dire pour des chargements raisonnables (on retrouve le problème de la plasticité confinée), et pour des fissures suffisamment longues. La taille par rapport à la microstructure peut notamment jouer. La région *I* illustre qu'un seuil de facteur d'intensité existe en deçà duquel il n'y a pas propagation, la microstructure joue alors un rôle important. A l'inverse, pour des valeurs trop importantes la structure rompt en quelques cycles, région *III*. Enfin, il est bon de rappeler que cette loi ne permet pas de prendre en compte l'initiation de la fissure qui peut être la phase principale de la durée de vie en fatigue [NEW 98].

Pour rendre cette loi plus générale, il faut alors augmenter le nombre de paramètres. Le rapport de charge  $R = \frac{K^{min}}{K^{max}}$  impacte la vitesse de propagation et peut être pris en compte dans la loi de propagation. Il est lié à la refermeture de la fissure, en effet, pour des rapport  $R$  faible ( $< 0.2$ ), les lèvres de la fissure peuvent entrer en contact. Ce phénomène introduit pour la plasticité par Elber [ELB 70] est d'une importance cruciale pour la propagation. Une présentation schématique serait de dire que le chargement est tel que la fissure est fermée (au moins sa pointe localement) pendant une partie du chargement et que cette partie du chargement ne contribue pas à la propagation du front. Cette idée était sous-jacente de l'approche CTOD/CTOA, et s'approche de la notion de seuil  $K^{ouv}$  de la région *I*. Les justifications physiques d'une telle refermeture sont nombreuses, Suresh et Ritchie [SUR 82] en ont identifié les principales qui sont représentées Figure 1.14. Cette approche peut être incluse dans la loi de propagation en modifiant directement la définition de  $\Delta K$ , on parle alors généralement d'une valeur effective  $\Delta K^{eff}$

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K^{eff})^\eta, \quad \text{avec} \quad \Delta K^{eff} = K^{max} - K^{ouv}. \quad (1.84)$$

Cependant, la relation entre le comportement du matériau et la loi de propagation n'est pas encore bien comprise [POM 02]. Lorsque le chargement cy-

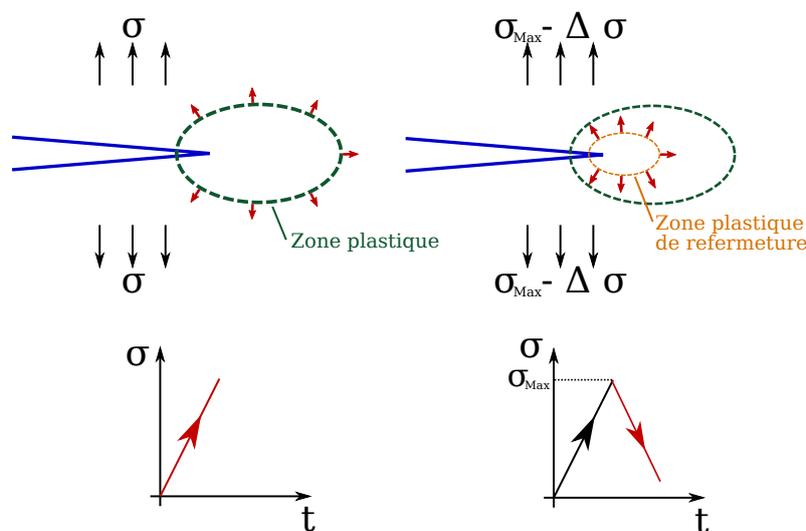


FIGURE 1.15 – Zone de plasticité *reverse* sous un chargement cyclique, c'est cette zone qui sera activée pour un cycle.

clique n'est pas constant, pour des matériaux à écrouissage isotrope notamment, les lois de propagation basées sur les facteurs d'intensités des contraintes seuls sont également mises en échec. En effet, la propagation est influencée par l'histoire du chargement. Par exemple, une surcharge aura un effet important sur la propagation [POM 02, POM 09a], un état de l'art est proposé par Skorupa [SKO 98, SKO 99]. Pour des matériaux plastiques à écrouissage isotrope, ce phénomène peut s'expliquer qualitativement : la surcharge crée une zone plastique importante en pointe de fissure qui par le biais de l'écrouissage devient plus résistante et ralentit la propagation de la fissure. En considérant la zone plastique cyclique, Wheeler [WHE 72] a proposé un modèle permettant dans une certaine mesure, de prendre en compte ce phénomène. En effet, dans un milieu avec un histoire plastique, la plasticité activée pendant un cycle est généralement plus faible (ce phénomène appelé plasticité *reverse* est illustré sur la Figure 1.15). Un cycle ne subit que l'amplitude du chargement, et la plasticité en pointe de fissure génère un compression lors de la décharge, la limite élastique apparente est donc de l'ordre de  $2\sigma_y$  pour chaque passage charge/décharge ou décharge/charge, réduisant d'autant la taille de la zone plastique dite cyclique [SUR 98].

Pour simuler ces phénomènes et calculer les paramètres comme le CTOD (nécessaire pour utiliser des lois de propagations adaptées) ou évaluer la refermeture, on peut recourir à une simulation plastique d'un milieu fissuré. Le contact entre les lèvres de la fissure doit être pris en compte. Cette simulation doit être très fine autour du front qui propage pour identifier correctement ces phénomènes très locaux en pointe de fissure [ANQ 88]. Pour simplifier ce type de simulation, on peut réduire l'information plastique sur les lèvres de la fissure. Un exemple populaire est

l'utilisation d'un modèle dérivé des approches cohésives [NEW 81]. Pommier *et al.* [POM 07, POM 09b] ont proposé un modèle où les non linéarités sont stockées en pointe de fissure, le reste du domaine étant élastique linéaire. Ce modèle se base sur un facteur d'intensité de l'écoulement plastique  $\rho$  dont la loi d'évolution spécifique au matériau est identifiée par une approche multi-échelle à partir d'essais.  $\rho$  s'apparente à la taille de la zone plastique, il évolue notamment avec le  $T$ -stress. La loi de propagation proposée est alors fonction du temps

$$\frac{da}{dt} = \begin{cases} \frac{C}{2} \frac{d\rho}{dt} & \text{si } \frac{d\rho}{dt} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (1.85)$$

### Chargement non-proportionnel

Pour des chargements complexes, notamment pour des fissures de *fretting* qui s'établissent dans les zones de contact frottant, le rapport entre les différents modes de chargement n'est pas constant, le chargement est dit non-proportionnel. Il se traduit en terme de facteurs d'intensité des contraintes par

$$\frac{K_j(t)}{K_k(t)} \neq \text{constante}, \quad \forall (j, k) \in (I, II, III)^2. \quad (1.86)$$

La difficulté de ce type de chargement vient du fait que les extremums des quantités utilisées pour déterminer les critères de propagation ne sont plus atteints simultanément. La détermination d'un  $\Delta K^{eq}$  n'est donc plus naturelle. Pour ces situations, Hourlier *et al.* [HOU 85] ont proposé un critère réunissant direction et longueur de propagation. Il stipule que la fissure propagera dans la direction pour laquelle le taux de propagation par cycle est le plus grand, à ce taux. À une position donnée, on calcule donc pour tous les temps  $t$  d'un cycle, dans toutes les directions  $\theta$

$$\frac{da}{dN}(\theta, t) = f(\Delta K_I^*(\theta, t)) \quad (1.87)$$

où  $f$  est une loi de propagation basée sur une amplitude de facteur d'intensité efficace pour le matériaux et le niveau de chargement considéré. Comme pour l'équation (1.79), l'étoile réfère à l'expression des facteurs d'intensité des contraintes après bifurcation en fonction des facteurs d'intensité des contraintes à la position considérée. Ce critère a donné des résultats intéressants comparables à l'expérience [BAI 13]. La simulation de fissure sous sollicitations contact (*fretting* et roulement) a été étudiée au LAMCOS notamment par Lamacq *et al.* [LAM 96], Ribeaucourt *et al.* [RIB 07], Pierres [PIE 10] et Trollé [TRO 14].

Bien qu'ayant des limites, les facteurs d'intensité des contraintes sont utilisés pour une plage large de problèmes. Il faut donc être capable de les identifier lors de simulations pour pouvoir modéliser la propagation. Des méthodes de calcul de ces paramètres dans des simulations sont présentées dans la section suivante. Dans des situations de plasticité confinée, d'autres coefficients asymptotiques ont démontré

leur importance, comme notamment le  $T$ -stress [HUT 06, HAM 05]. On s'intéressera donc également aux méthodes permettant son identification ainsi que celles des ordres supérieurs.

### 1.2.4 Obtention des facteurs d'intensité des contraintes par post-traitement des champs mécaniques

Les premières méthodes consistent à extraire directement les FIC à partir des champs calculés, du saut de déplacements par exemple. On citera notamment la technique basée sur la *crack closure* virtuelle [RYB 77]. Les méthodes les plus utilisées pour obtenir les facteurs d'intensité des contraintes sont basées sur l'intégration des champs mécaniques en pointe de fissure. Ces méthodes permettent de prendre en compte une information riche dans un espace autour du front. Les erreurs de discrétisation sont ainsi lissées, et les non-linéarités localisées au niveau du front n'entrent pas en jeu directement. Cette intégration correspond à une projection. D'autres méthodes de projections plus directes sur les champs asymptotiques donnent également des résultats potentiellement précis.

#### 1.2.4.1 L'intégrale invariante de contour

À partir des travaux d'Eshelby, Rice [RIC 68a] a introduit l'intégrale de contour  $J_c$

$$J_c = \int_C W_{\ell} \delta_{tk} n_k - \sigma_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_t} n_k \, ds. \quad (1.88)$$

$W_{\ell} = \frac{\sigma_{jk} \epsilon_{jk}}{2}$  est l'énergie de déformation.  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au contour  $C$  comme représentée Figure 1.16.

Cette intégrale est indépendante du contour  $C$  [RIC 68a], si les conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $C$  est un contour reliant une face de la fissure à l'autre en passant par la matière dans un plan orthogonal au front (confère Figure 1.16),
2. La fissure est rectiligne entre les points d'intersection du contour avec les lèvres de la fissure et le front (les segments  $C^+$  et  $C^-$  de la Figure 1.16 prolongés jusqu'au front),
3. Les lèvres  $C^+$  et  $C^-$  prolongées jusqu'au front sont libres d'efforts,
4. Il n'y a aucune force volumique à l'intérieur du domaine délimité par  $C \cap C^+ \cap C^-$ .

Budiansky et Rice [BUD 73] ont ensuite montré que cette intégrale correspondait à la première composante du vecteur des forces configurationnelles, concept popularisé et développé par Maugin [MAU 11], avec des applications 3D [MIE 07]. En considérant un contour circulaire dont le rayon tend vers 0, Rice [RIC 68a] a montré que cette intégrale permettait d'évaluer le taux de restitution d'énergie  $J_c = G$ . Elle rend donc applicable la théorie énergétique de la rupture de Irwin introduite

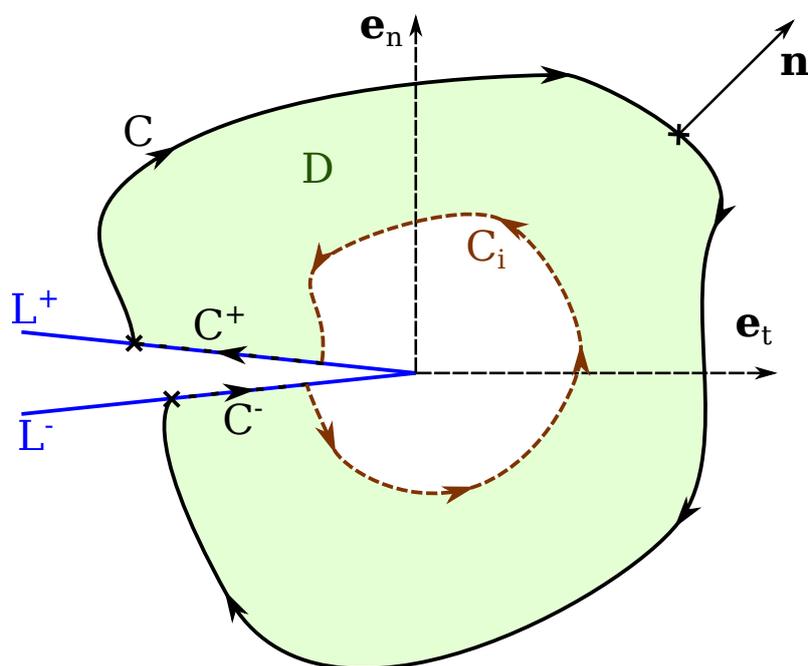


FIGURE 1.16 – Paramétrage de l’intégrale de contour en pointe de fissure.

Section 1.2.3.2. Dans le cas particulier d’une fissure soumise à un chargement en mode  $I$ , la formule (1.77) permet de calculer le facteur d’intensité mode  $I$ . Elle ne permet néanmoins pas d’isoler chacun des trois modes.

Pour calculer précisément cette intégrale à partir d’une solution approchée, il est intéressant de moyenner les champs sur un domaine éloigné du front de la fissure. Le domaine permet de prendre plus d’informations que le contour, et sa frontière peut être choisie conforme au maillage (en 2D) pour simplifier l’intégration. Du fait de la singularité, des erreurs plus importantes sont commises en pointe de fissure, zone qu’il sera donc intéressant d’exclure. On peut transformer une intégrale de contour fermé ( $C' = C \cup C^+ \cup C^-$  où  $C^+$  et  $C^-$  sont prolongés jusqu’au front) en intégrale de domaine avec l’introduction d’un champ dit d’extension virtuelle de fissure  $q$  [MOR 87]. Cette méthode est analogue (i.e.,  $q \equiv \theta$ ) à la méthode  $G-\theta$  développée par le Suo et Combescure [SUO 92]. Ce champ  $q$  est un champ scalaire, il doit être continu. Le théorème de la divergence permet alors de réécrire l’intégrale  $J_c$  en une intégrale de domaine  $J_d$

$$J_d = \int_{\Omega} \left( W_{el} \delta_{tk} - \sigma_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_t} \right) \frac{\partial q}{\partial x_t} d\Omega. \quad (1.89)$$

Dans cette expression,  $\Omega$  est le domaine entier. En pratique, on choisit un champ d’extension virtuelle de fissure constant (=1) à l’intérieur du contour intérieur  $C_i$  et nul à l’extérieur du contour extérieur  $C$ . L’intégrale est donc uniquement évaluée

sur une couronne  $D$  autour du front

$$J_d = \int_D \left( W_{\epsilon l} \delta_{tk} - \sigma_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_t} \right) \frac{\partial q}{\partial x_t} d\Omega. \quad (1.90)$$

En pratique, le domaine  $D$  est choisi conforme au maillage. Il est alors aisé de calculer un champ d'extension virtuelle  $q$  comme solution d'un problème de diffusion thermique entre deux conditions aux limites sur le contour extérieur  $C$  et le contour intérieur  $C_i$ . L'intégration est également réalisable élément par élément avec une méthode de Gauss.

Ce raisonnement peut être étendu pour prendre en compte le contact sur les lèvres [DOL 01, RIB 07], par exemple en fatigue [RIB 07] et en trois dimensions [PIE 10, TRO 14]. Des efforts apparaissent sur les lèvres où le contact existe  $C^- \cap C^+$ . Ces efforts apparaissent donc sur le contour fermé  $C \cup C^- \cup C^+ \cup C_i$  permettant d'appliquer le théorème de la divergence. Ils s'ajoutent à l'intégrale de domaine

$$J_{d_f} = J_d + \int_{C^+ \cap C^-} \sigma_{tn} \left( \frac{\partial u_t^-}{\partial x_t} - \frac{\partial u_t^+}{\partial x_t} \right) ds \quad (1.91)$$

Pour un comportement non-linéaire, l'énergie de déformation peut être définie comme [BUI 78]

$$W_p = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{jk} d\epsilon_{jk}. \quad (1.92)$$

Cette définition est valable si les contraintes dérivent d'un potentiel, la propriété d'indépendance au contour est conservée uniquement pour un chargement monotone. Dans un cadre général, l'écriture de l'énergie de déformation complète ajoute à l'intégrale  $J$  une intégrale de domaine  $J'$ . En pratique, par exemple pour de la plasticité peu étendue, on choisit un contour  $C$  et un contour intérieur  $C_i$  qui sont plus grands que la zone plastique pour que la modification  $J'$  soit négligeable [SCH 89]. Ainsi, le calcul de l'intégrale  $J$  à partir de l'équation (1.90) est une bonne approximation du taux de restitution d'énergie. La prise en compte de non-linéarités plus complexes est encore en développement. Les forces configurationnelles [MAU 11] sont une voie d'extension possible [KOL 14] pour développer de nouvelles lois de propagation.

Lorsque la fissure est sollicitée en mode mixte, il devient nécessaire de déterminer les différents facteurs d'intensité des contraintes séparément. À partir de l'intégrale  $J$ , Yau *et al.* [YAU 80] ont proposé une méthode pour les déterminer. Cette méthode appelée intégrale d'interaction est très largement utilisée [GOS 02]. On considère un état mécanique comme la somme de l'état courant de la structure  $(u_j, \epsilon_{jk}, \sigma_{jk})$  et d'un état auxiliaire  $(u_j^{(aux)}, \epsilon_{jk}^{(aux)}, \sigma_{jk}^{(aux)})$ . On peut alors réécrire l'intégrale  $J$  sous sa forme en domaine par exemple comme

$$J_d^{c+(aux)} = \int_D \left[ \frac{(\sigma_{jk} + \sigma_{jk}^{(aux)}) (\epsilon_{jk} + \epsilon_{jk}^{(aux)})}{2} \delta_{tk} - (\sigma_{jk} + \sigma_{jk}^{(aux)}) \frac{\partial u_j + u_j^{(aux)}}{\partial x_t} \right] \frac{\partial q}{\partial x_t} d\Omega. \quad (1.93)$$

À partir de cette expression, il est possible de développer et de réorganiser cette équation comme

$$J_d^{c+(aux)} = J_d + J_d^{(aux)} + I_d^{(aux)}. \quad (1.94)$$

C'est le terme  $I_d^{(aux)}$  qui est appelé intégrale d'interaction, il prend la forme

$$I_d^{(aux)} = \int_D \left( W^{c+(aux)} \delta_{tk} - \sigma_{jk} \frac{\partial u_j^{(aux)}}{\partial x_t} - \sigma_{jk}^{(aux)} \frac{\partial u_j}{\partial x_t} \right) \frac{\partial q}{\partial x_t} d\Omega. \quad (1.95)$$

Avec  $W^{c+(aux)} = \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^{(aux)} = \sigma_{jk}^{(aux)} \epsilon_{jk}$  l'énergie élastique de l'interaction entre les deux états.

En définissant les champs auxiliaires comme la somme des champs asymptotiques en pointe de fissure pour les deux modes plans (ordre  $n = 1$  dans l'équation (1.18)), en déformations planes, on obtient

$$I_d^{(aux)} = \frac{2}{E^*} \left( K_I K_I^{(aux)} + K_{II} K_{II}^{(aux)} \right). \quad (1.96)$$

En choisissant les champs auxiliaires comme chacun des modes purs, il est alors possible d'identifier la valeur de chacun des facteurs d'intensité des contraintes. On utilisera les deux combinaisons suivantes

$$\begin{aligned} K_I^{(aux)} = 1, K_{II}^{(aux)} = 0, K_{III}^{(aux)} = 0, &\Rightarrow K_I = \frac{E^*}{2} I_d^{(aux)}, \\ K_I^{(aux)} = 0, K_{II}^{(aux)} = 1, K_{III}^{(aux)} = 0, &\Rightarrow K_{II} = \frac{E^*}{2} I_d^{(aux)}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

Cette intégrale est indépendante du contour sous les mêmes conditions que l'intégrale  $J$ . De la même manière elle peut être étendue au problème du contact et les non-linéarités sont envisageables tant qu'elles restent confinées. C'est une méthode robuste pour obtenir les facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte par post-traitement des champs mécaniques. Kfoury [KFO 86] a proposé une méthode proche de l'intégrale d'interaction permettant d'obtenir le  $T$ -stress. Elle consiste à prendre des champs auxiliaires particuliers après avoir déterminé  $K_I$ .

#### 1.2.4.2 Extension des méthodes intégrales en 3D

Ces raisonnements sont faits pour des situations bidimensionnelles, leur extension à des cas tridimensionnels n'est pas évidente. Une première approche pourrait être de se mettre dans un plan orthogonal au front et d'y calculer, par exemple, l'intégrale d'interaction de domaine pour obtenir les facteurs d'intensité des contraintes. En s'intéressant également aux déplacements hors plan, l'intégrale d'interaction avec les champs auxiliaires comme la somme des trois modes, on obtient

$$I_d^{(aux)} = \frac{2}{E^*} \left( K_I K_I^{(aux)} + K_{II} K_{II}^{(aux)} \right) + \frac{1}{2\mu} K_{III} K_{III}^{(aux)}. \quad (1.98)$$

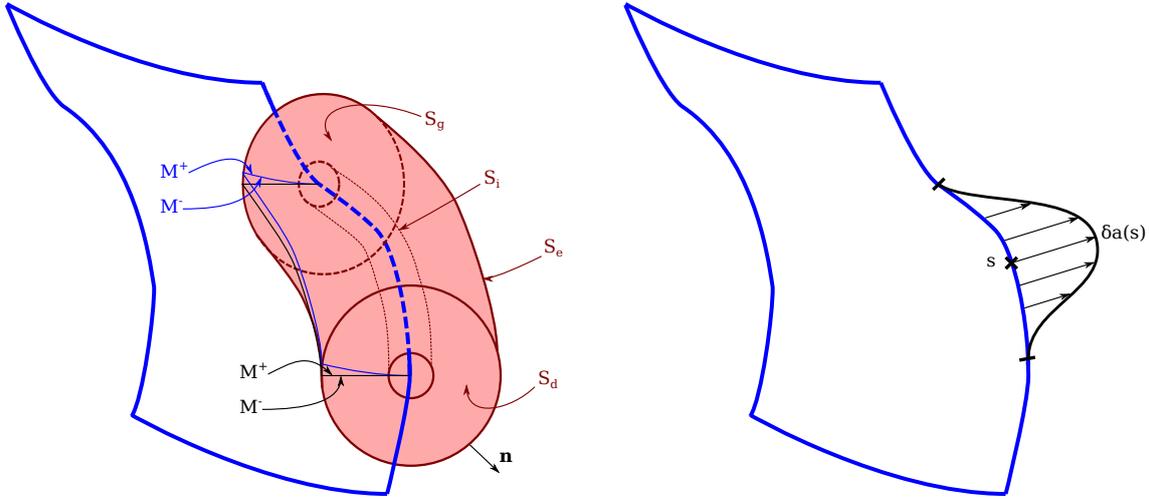


FIGURE 1.17 – Domaine tubulaire d’intégration pour l’intégrale d’interaction et l’évolution le long du front du champ de propagation virtuelle de la fissure.

Comme précédemment on peut découpler les modes en utilisant un mode *III* auxiliaire nul dans l’équation (1.97). Pour le mode *III*, le facteur d’intensité des contraintes est simplement obtenu en prenant un champs auxiliaire tel que

$$K_I^{(aux)} = 0, K_{II}^{(aux)} = 0, K_{III}^{(aux)} = 1, \Rightarrow K_{III} = \frac{1}{2\mu} I_d^{(aux)}. \quad (1.99)$$

Cette approche présente plusieurs problèmes :

- i. Les hypothèses de déformations planes ne sont pas vérifiées (notamment à cause de la courbure du front et de l’intersection du front avec le bord libre pour les fissure débouchantes), il est alors complexe de définir  $E^*$ . En général, on suppose que l’hypothèse de déformations planes (i.e.,  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ ) est une bonne approximation à cœur. Bui en propose une démonstration pour une fissure plane à front droit [BUI 78].
- ii. Comme pour l’intégrale de contour en 2D, le calcul de l’intégrale de surface à partir de champs discrétisés est peu précis, il faut projeter dans le plan puis extrapoler des valeur pour réaliser l’intégration.

En faisant tendre le contour extérieur du domaine vers le front (i.e.,  $C \rightarrow 0$ ), on se rapproche des conditions nécessaires pour identifier précisément les facteurs d’intensité des contraintes. Pour résoudre le problème ii., Gosz *et al.* [GOS 98] ont étendu l’intégrale à un tube de volume  $V$  (représenté Figure 1.17) autour du front de la fissure.

$$I(s) = \frac{-\int_V [\mathbf{P} : \nabla \mathbf{q} + (\nabla \cdot \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{q}] dV + \int_{L^+ \cup L^- \cup M^+ \cup M^-} \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS}{\int_f \delta a(s) ds} \quad (1.100)$$

$\mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^{(aux)} \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^{(aux)} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(aux)}$  est l'intégrande de  $I_c$  dans une direction quelconque.  $\delta a(s)$  est un champ de propagation virtuelle de la fissure (représenté Figure 1.17). Son évolution le long du front permet de pondérer le champ d'extension virtuelle en fonction de sa proximité avec le point  $s$  considéré. Une fonction en  $\cos^2(s)$  est souvent utilisée.  $\mathbf{q}$  est le champ d'extension virtuelle de la fissure qui évolue suffisamment continûment entre

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \delta a(s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) & \text{sur la surface intérieure } S_i, \\ 0 & \text{sur la surface extérieure } S_e, \text{ gauche } S_g \text{ et droite } S_d. \end{cases} \quad (1.101)$$

Enfin  $M^+$  et  $M^-$  sont des lèvres virtuelles associées aux champs auxiliaires.

Une des principales difficultés introduite par cette approche est la définition des champs auxiliaires en 3D. En effet, les champs mécaniques associés aux facteurs d'intensité des contraintes ne sont définis que pour des problèmes plan et anti-plan. L'extension est assez directe pour des fissures planes à front droit [GOS 98].

Pour les fissures à géométrie complexe Gosz et Moran [GOS 02] ont proposé une approximation efficace [MOË 02a]. Elle consiste à utiliser directement les champs de déplacements et les champs de contraintes 2D dans la base locale en pointe de fissure. Les champs de déformations sont soit définis à partir de la dérivation locale des champs de déplacement, soit à partir des contraintes en utilisant le tenseur de Hooke.

Quelle que soit la méthode choisie, il n'est pas possible de trouver des champs auxiliaires vérifiant à la fois l'équilibre, la compatibilité contraintes/déplacements et la loi de Hooke. La difficulté à la fois pour la simplification de  $I(s)$ , le choix du champ d'extension virtuelle de la fissure et des champs auxiliaires est le repère local. C'est une difficulté générale pour le calcul des facteurs d'intensité en 3D.

### 1.2.4.3 Projection sur les séries de Williams

Les méthodes les plus élémentaires pour identifier les facteurs d'intensité des contraintes consistent à projeter les déplacements en quelques points sur les champs singuliers associés aux FIC. Par exemple, une possibilité est d'étudier le saut de déplacements des lèvres au voisinage de la fissure. En cette position, le développement au premier ordre en  $r$  de l'équation (1.27) devient

$$u_t(r, \pi) - u_t(r, -\pi) = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) + O(r), \quad (1.102)$$

$$u_n(r, \pi) - u_n(r, -\pi) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) + O(r), \quad (1.103)$$

$$u_3(r, \pi) - u_3(r, -\pi) = \frac{4K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + O(r). \quad (1.104)$$

Cette méthode peut être étendue à n'importe quels points de mesure dans la zone où les facteurs d'intensité des contraintes dominant. Elle est très utilisée pour dépouiller des expériences en fissuration ou en adhérence [SVE 14].

McNeill *et al.* [MCN 87] ont proposé de projeter un champ de déplacements expérimental sur les premiers termes de la série de Williams pour obtenir les facteurs d'intensité des contraintes. Pour une zone de projection autour du front excluant la *process zone* et les lèvres de la fissure, cette méthode donne des résultats précis si le front de la fissure est connu. Pour obtenir précisément la position du front Hamam *et al.* [HAM 07] ont proposé une méthode basée sur l'annulation du terme symétrique d'ordre  $n = -1$ .

Cette approche a été étendue en trois dimensions, en réalisant la projection sur des plans orthogonaux au front [ROU 09, LIM 10, LAC 14a]. Pour des fronts quelconques, il faut projeter un champ de déplacements approché ou bruité dans des plans orthogonaux sur une zone de faible dimension (pour que les séries de Williams soient valables), les résultats sont moins précis. Toutefois, pour des champs calculés numériquement il est possible de raffiner la discrétisation localement autour du front.

Lorsque seul un champ de déplacements est connu (en corrélation d'images par exemple), le calcul de l'intégrale  $J$  est quadratique en déplacement [RÉT 05b]. Si celui-ci est bruité (mesures ou approximations), un biais systématique apparaît alors que la projection est réalisée linéairement en déplacements et donc non biaisée. Si les champs mécaniques sont obtenus par simulation, les intégrales de contour et d'interaction seront plus précises.

### 1.2.5 Les paramètres de propagation comme inconnues du problème

Ces méthodes de post-traitement des champs mécaniques obtenus par simulation donnent de bons résultats mais peuvent générer un surcoût de calcul non négligeable. Il est alors tentant de chercher ces quantités directement lors du calcul. D'autant plus que ce sont les quantités d'intérêt pour simuler la propagation. Un aperçu des méthodes existantes dans le contexte des éléments finis est proposé. Cette approche semble d'autant plus pertinente qu'il a été montré que pour extraire les facteurs d'intensité des contraintes de champs bruités, le plus efficace était de les considérer directement comme degrés de liberté [RÉT 11].

#### 1.2.5.1 Introduction de la singularité

L'idée à l'origine des méthodes d'extraction directe est d'introduire la singularité dans l'espace de recherche de la solution (souvent en déplacement). Un (ou plusieurs) degré de liberté est associé à cette singularité facilitant le calcul des facteurs d'intensité des contraintes. Une des premières méthodes, très simple, est d'utiliser des éléments avec des nœuds aux quarts de leur frontière [BAR 74, BAR 76]. La fonction de forme associée est en  $\sqrt{\xi}$ . Pour s'approcher de la singularité en  $\sqrt{r}$  en déplacement, on peut utiliser un maillage rayonnant en pointe de fissure comme représenté Figure 1.18. À partir de cette discrétisation, les champs mécaniques sont quasiment polaires et permettent une bonne identification des facteurs d'intensité

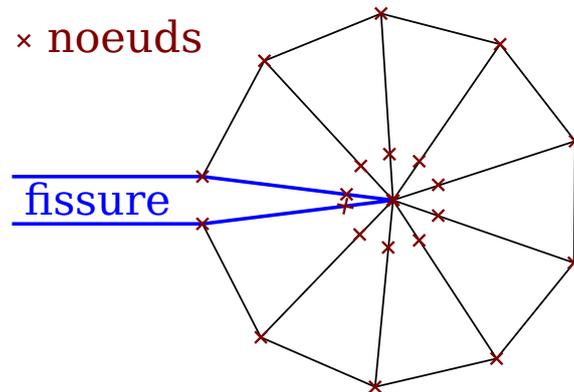


FIGURE 1.18 – Exemples de maillage avec des nœuds au quart rayonnant en pointe de fissure pour des triangles.

des contraintes

L'introduction de la singularité conformément au maillage permet d'identifier les facteurs d'intensité des contraintes. Cependant la génération du maillage adéquat n'est pas triviale, et peut être longue notamment en trois dimensions. La méthode X-FEM introduit également la singularité en pointe de fissure en contournant cette difficulté de génération d'un maillage compatible. Cependant, les enrichissements sont libres dans chacune des directions et en chacun des nœuds. De plus ils co-existent avec les fonctions de forme standards. Aussi ils ne permettent pas directement d'identifier les facteurs d'intensité des contraintes.

Dans le cadre de la X-FEM, Karihaloo et Xiao [KAR 01, XIA 03] ont proposé une méthode permettant d'identifier les facteurs d'intensité des contraintes en 2D en utilisant les premiers ordres de la série de Williams comme enrichissement. À ma connaissance, les méthodes d'extraction directe des FIC basées sur la série de Williams semblent uniquement développées en deux dimensions.

### 1.2.5.2 Introduction des séries asymptotiques

L'utilisation des premiers ordres des séries de Williams comme base de discrétisation en pointe de fissure permet d'identifier précisément les facteurs d'intensité des contraintes. Ces premiers ordres représentent correctement les champs mécanique dans les éléments proches de la pointe de fissure si elle est suffisamment droite. Ils permettent d'identifier correctement les facteurs d'intensité des contraintes en absorbant les autres ordres de contribution.

Cette approche basée sur des champs obtenus avec l'hypothèse de comportement élastique linéaire est utilisée dans des simulations élastiques linéaires. Des extensions seraient possibles en concentrant la plasticité en pointe de fissure ou en utilisant des champs asymptotiques plastiques comme par exemple les champs HRR (du nom des chercheurs qui les ont proposés Hutchinson, Rice et Rosengren [RIC 68b, HUT 68]).

Une première méthode (HCE *Hybrid Crack Element*) pour un maillage conforme a été proposée [TON 73b]. Des éléments plus spécifiques appelés *super-elements* sont développés. Ces éléments contiennent les champs asymptotiques en pointe de fissure. La méthode est dite hybride car ces éléments sont raccordés au reste du maillage FEM par des nœuds sur leur frontière. Ils permettent d'identifier précisément les facteurs d'intensité des contraintes avec un nombre limité de modes. Ici aussi le maillage doit être conforme à la fissure, mais il doit aussi être conforme avec les bords du *super-element*.

### Introduction des séries de Williams avec la PUM

L'utilisation des séries de Williams dans ces *super-elements* a démontré leur potentiel. Karihaloo et Xiao [XIA 03, LIU 04] l'ont mise à profit en enrichissant la discrétisation éléments finis avec ces séries en utilisant la partition de l'unité comme pour les éléments finis étendus. Cette approche reprend les avantages de la X-FEM, mais l'ajout de termes de haut ordre permet d'identifier directement les FIC. Le maillage n'a plus besoin d'être conforme avec la fissure. La simulation de la propagation de la fissure est simplifiée.

Deux modifications principales de la X-FEM sont proposées par Karihaloo et Xiao [XIA 03, LIU 04]. La première est l'utilisation des dix premiers ordres ( $n_{max} = 10$ ) de la série de Williams

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{i=I, II} \sum_{n=1}^{n_{max}=10} b_i^n r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta), \quad (1.105)$$

où  $\mathbf{g}_i^n$  sont les fonctions de la série de Williams en déplacements précisées équations (1.18) et (1.26). Ces dix ordres en mode *I* et *II* sont utilisés comme enrichissements en pointe de fissure avec un rayon normalisé pour des raisons de conditionnement. Tandis que les fonctions d'enrichissement singulières de la X-FEM ne représentent que le premier ordre de cette série (confère équation (1.52)). La seconde est qu'au voisinage de la pointe de fissure un unique degré de liberté est associé à chacun des termes de la série de Williams. Tandis que pour la X-FEM, les enrichissements sont libres et indépendants dans chaque direction et en chaque nœud.

Les éléments où se trouve la pointe de la fissure sont définis comme la première couche. Les fonctions de forme des nœuds de ces éléments constituent l'ensemble  $M_{k1}$  et une partition de l'unité sur ces éléments. Les éléments voisins de cette première couche sont définis comme la deuxième couche. De la même manière, les nœuds des éléments de la deuxième couche qui n'appartiennent pas à la première couche constituent l'ensemble de fonctions de forme  $M_{k2}$ . Il est ainsi possible de déterminer autant de couches et d'ensembles de fonctions de forme que nécessaire. Il a été montré que deux couches permettaient une bonne évaluation des facteurs d'intensité des contraintes. Les nœuds de ces couches sont représentés Figure 1.19.

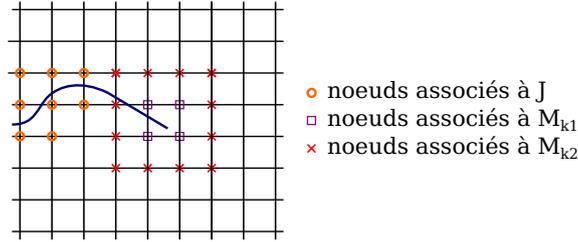


FIGURE 1.19 – Ensembles de nœuds des différents enrichissements de la X-FEM proposée par Karihaloo et Xiao [XIA 03, LIU 04].

La première couche d'éléments est enrichie avec la troncature de la série de Williams définie équation (1.105). Les degrés de liberté de ces enrichissements sont contraints à avoir la même valeur pour toutes les fonctions de forme  $M_{k1}$  de cette couche. La seconde couche est également enrichie avec cette troncature mais les enrichissements sont libres. Pour l'enrichissement discontinu, l'enrichissement est identique à la X-FEM. Le champ de déplacements est donc défini comme (par extension de l'équation (1.50))

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = & \sum_{k \in N} u_k \varphi_k(\mathbf{x}) + \sum_{k \in N^d} u_{c_k} \varphi_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{i=I, II} \sum_{n=1}^{n_{max}} b_i^n r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta) \left[ \sum_{k \in M_{k1}} \varphi_k(\mathbf{x}) \right] \\ & + \sum_{k \in M_{k2}} \sum_{i=I, II} \sum_{n=1}^{n_{max}} u_{ki}^n r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta) \varphi_k(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.106)$$

Les degrés de libertés  $b_i^n$  de la première couche sont directement une estimation des coefficients de la série de Williams. Les degrés de libertés de la seconde couche  $u_{ki}^n$  sont nettement plus nombreux et permettent de faire le lien entre la première couche et les éléments finis autour.

Cette approche pour deux couches et dix termes de la série permet d'identifier précisément ( $\simeq 2\%$ ) le facteur d'intensité  $K_I$  en mode  $I$  [XIA 03], et les facteurs d'intensité plans  $K_I$  et  $K_{II}$  en mode mixte [LIU 04]. Cependant l'identification des termes d'ordre supérieur n'est pas satisfaisante. Pour les calculer précisément, les auteurs ont utilisé la méthode HCE avec des *super-elements* basés sur une troncature de la série de Williams [KAR 01, XIA 03, LIU 04].

## HAX-FEM

L'introduction des séries de Williams comme enrichissement pose des problèmes de conditionnement. En effet, les termes d'ordre supérieurs qui permettent d'améliorer la précision sur les facteurs d'intensité des contraintes sont proches des éléments finis. Dans la méthode HCE, qui permet de calculer plus précisément

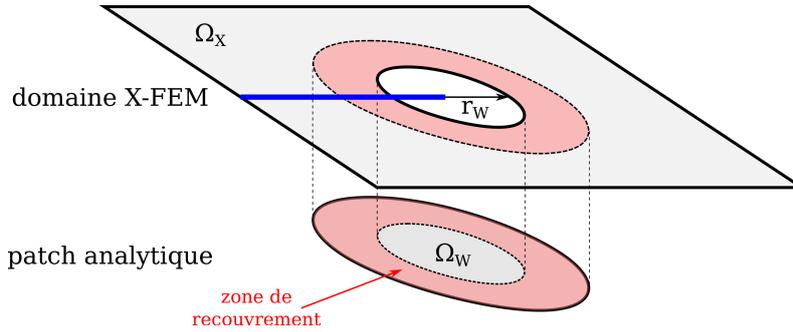


FIGURE 1.20 – Décomposition de domaine avec une zone de recouvrement dans la cadre de la méthode HAX-FEM [RÉT 10a].

les termes d'ordre supérieur, la série de Williams est seule en pointe de fissure, elle ne s'ajoute pas aux éléments finis. À partir de ce constat, Réthoré *et al.* [RÉT 10a, RÉT 10b] ont proposé une méthode (appelée Hybrid Analytical and eXtended Finite Element Method : HAX-FEM) qui décompose le domaine  $\Omega$  en deux sous domaines. L'idée est d'utiliser seulement une troncature des séries de Williams en pointe de fissure.

La zone autour de la fissure  $\Omega_W$  est traitée à part. Une troncation des séries de Williams est utilisée comme champs mécaniques de discrétisation où les inconnues sont les coefficients  $b_i^n$

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{i=I, II} \sum_{n=0}^{n_{DEK}} b_i^n r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta). \quad (1.107)$$

Cette fois les termes d'ordre  $n = 0$  sont introduits puisqu'ils permettent de représenter les mouvements de corps rigide. L'espace d'approximation étant défini, la meilleure solution sur cet espace est obtenue par une méthode de Galerkin (confère Partie 1.1.4.2). Le calcul de la matrice de rigidité est simplifié puisque les déformations et les contraintes sont facilement obtenues de manière analytique.

Le reste du domaine  $\Omega_X$  est simulé avec la X-FEM. C'est cette partie du domaine qui supporte les conditions aux limites. Cette condition permet de simplifier le traitement de la zone analytique. Le front de la fissure n'étant pas dans ce domaine, seuls les enrichissements discontinus sont nécessaires. Les deux domaines sont raccordés énergétiquement par la méthode Arlequin développée par Ben Dhia et Rautau [DHI 05]. Pour cette méthode, les deux domaines se recouvrent sur une zone appelée  $\Omega_{XW}$ , cette décomposition est représentée pour un domaine rectangulaire Figure 1.20. Dans la formulation globale, chacune des formulations faibles associée à un domaine est pondérée sur la zone de recouvrement par des fonctions  $p_X(\mathbf{x})$  (pour le domaine  $\Omega_X$ ) et  $p_W(\mathbf{x})$  (pour le domaine  $\Omega_W$ ). Ces fonctions de recouvrement scalaires évoluent continûment vers zéro sur le bord de leur domaine respectif et

sont telles que

$$p_X(\mathbf{x}) + p_W(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.108)$$

Ces fonctions peuvent être obtenues par la résolution d'un problème thermique ( $\Delta p_j = 0$  pour  $j = X$  ou  $W$ ) sur la zone de recouvrement (avec le même maillage) avec  $p_j = 1$  sur une frontière et  $p_j = 0$  sur l'autre. La seconde fonction est ensuite construite directement à partir de l'équation précédente. C'est une méthode également souvent utilisée pour calculer le champ d'extension virtuelle de fissure nécessaire à l'évaluation des intégrales de domaine (intégrale  $J$  ou intégrale d'interaction).

En pratique, pour faciliter la génération de maillage conforme à ces domaines, le domaine total est discrétisé. Les éléments dans un rayon  $r_W$  et une couche de  $l_{recouv}$  constituent le patch. Les éléments de cette couche et les autres constituent le domaine X-FEM. Pour le patch, la discrétisation ne sert plus mais les éléments sont conservés pour permettre l'intégration avec une méthode de Gauss de haut ordre. Pour un patch de petite taille avec  $r_W = 1$  élément et  $l_{recouv} = 1$  élément, et avec  $n_{DEK} = 7$ , l'identification des facteurs d'intensité est déjà pertinente (i.e., autour de 1.5% d'erreur).

Cette méthode a été comparée directement à la méthode basée sur la PUM (présentée dans la partie précédente), elle est plus précise [RÉT 10a]. Elle a ensuite été validée pour une simulation de propagation en mode mixte [RÉT 10b]. Le traitement de la propagation en élasticité linéaire est assez naturel, les éléments X-FEM sous-jacents au patch sont simplement désactivés et réactivés une fois le patch passé. Les bons résultats pour une petite zone analytique avec une zone de recouvrement de faible dimension sont particulièrement intéressants car ils permettent de limiter le nombre de degrés de liberté et de points de Gauss (qui sont plus nombreux dans le patch). Un petit patch est aussi intéressant pour s'approcher au mieux des hypothèses inhérente à l'utilisation des séries de Williams, comme celle de fissure droite.

## DEK-FEM

Le raccord tend à être le plus petit possible pour limiter la taille du patch. De plus, Chahine *et al.* [CHA 11] ont montré qu'une transition franche entre la zone singulière et la zone continue était souhaitable pour améliorer le conditionnement et la convergence. Pour ces raisons, Passieux *et al.* [PAS 11] ont proposé de modifier le raccord énergétique avec recouvrement de la HAX-FEM par un raccord intégral sur une frontière (linéique en 2D). Pour cette méthode également, le domaine est décomposé en deux sous domaines dont un analytique discrétisé avec les séries de Williams. Cette méthode sera appelée DEK-FEM pour *Direct Estimation of the stress intensity factors  $K_i$  ( $i = I$  ou  $II$ ) Finite Element Method*.

Le domaine  $\Omega_W$  traité avec le champ analytique de l'équation (1.107) est circulaire avec un rayon  $r_W$  mais cette fois aucune zone de recouvrement n'est ajoutée. La partie complémentaire du domaine  $\Omega$  constitue le domaine  $\Omega_X$  traité avec la

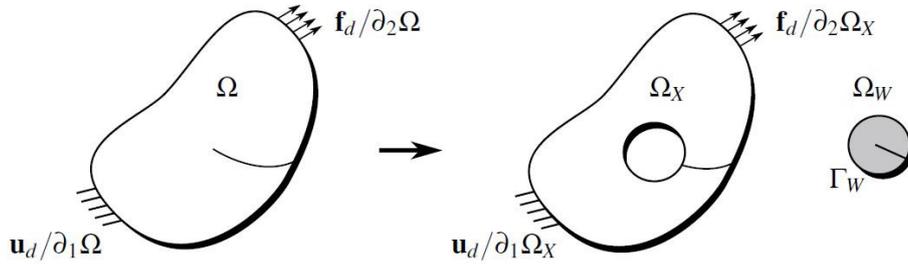


FIGURE 1.21 – Représentation de la décomposition du problème entre un patch analytique et un domaine X-FEM sans recouvrement pour la méthode DEK-FEM [PAS 11].

X-FEM ici aussi sans enrichissement singulier. L'interface entre les deux domaines, appelée  $\Gamma_W$ , est une courbe en 2D. Comme précédemment, en pratique ces deux domaines sont obtenus après la génération d'un maillage d'ensemble. Les éléments dans un rayon  $r_W$  constituent le patch analytique  $\Omega_W$  (ils ne jouent le rôle d'éléments que pour l'intégration). Le reste des éléments constitue le domaine X-FEM  $\Omega_X$  et supporte les conditions aux limites. L'interface  $\Gamma_W$  est donc un contour fermé constituant la frontière entre les éléments, composé par une série de segments.

Cette méthode se démarque de la HAX-FEM par le raccord. Il permet de se passer du calcul des fonctions de pondération  $p_X$  et  $p_W$ , et de s'affranchir de la zone de recouvrement. La méthode présente donc un paramètre de moins à identifier et quelques degrés de liberté de moins. Pour un patch de rayon suffisant  $r_W > 2$  éléments, et une troncature à l'ordre sept (i.e.,  $n_{DEK} = 7$ ), elle permet d'obtenir plus précisément les facteurs d'intensité des contraintes (en mode mixte également). De plus Passieux *et al.* [PAS 11] ont montré que cette méthode, avec un troncature  $n_{DEK} = 9$ , permettait d'identifier précisément les termes de haut ordre ( $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ ).

Le raccord entre les deux domaines est fait en moyenne avec une méthode de Mortar [BEL 99a]. Un champ  $\lambda$  continu et régulier est introduit. Le raccord entre le champ de déplacements analytique  $\mathbf{u}_W$  et le champ de déplacements X-FEM  $\mathbf{u}_X$  est assuré par

$$\int_{\Gamma_W} \lambda (\mathbf{u}_W - \mathbf{u}_X) = 0, \quad \forall \lambda \text{ continu et régulier.} \quad (1.109)$$

En pratique, le champ  $\lambda$  est discrétisé pour pouvoir trouver une solution approchée numériquement. On cherche donc  $\lambda$  dans un espace d'approximation qui reste à définir. Passieux *et al.* [PAS 11] ont considéré soit un champ éléments finis sur l'interface, soit le champ de contraintes d'une troncature de la série de Williams. Le champ de contraintes augmenté avec les déplacements de corps rigide s'est avéré plus performant pour la convergence de la méthode itérative considérée.

La DEK-FEM a été appliquée à plusieurs cas tests en mode *I* et en mode mixte permettant une identification précise des FIC et des termes de haut degré, pour

un faible nombre de degrés de liberté [PAS 11]. Lorsque la fissure est courte ou de géométrie complexe, deux échelles cohabitent : l'échelle micro de la singularité et l'échelle globale de la structure. Il faut alors faire cohabiter ces deux échelles par une résolution du problème à tous les niveaux. La DEK-FEM a donc été couplée à une méthode multigrilles localisées [PAS 11] développée par Rannou *et al.* [RAN 09]. Elle permet la résolution efficace du problème et simplifie la génération d'une discrétisation où échelle fine et structurelle cohabitent. Cette approche permet de simuler efficacement la propagation de fissure [PAS 13]. L'échelle grossière pouvant être calculée par un code de calcul quelconque et la fissure et sa singularité introduites de manière non-intrusive par une résolution séparée imposant simplement des efforts à l'échelle grossière.

### 1.2.6 Bilan sur la méthode numérique retenue

C'est cette dernière méthode (DEK-FEM) que nous avons étendue au 3D dans ma thèse. Le système est décomposé en un domaine X-FEM et un patch analytique au voisinage du front. La méthode X-FEM a été présentée, son extension au 3D est ancienne [SUK 00, MOË 02a, GRA 02] et maîtrisée. La méthode DEK-FEM, qui a été introduite, est présentée plus en détails dans le Chapitre suivant. Le couplage de cette méthode avec un algorithme multigrilles localisées est également présenté dans le Chapitre 2. Ce couplage existe en 2D [PAS 11, PAS 13], ainsi que la méthode multigrilles localisées en 3D [RAN 08]. Son implantation en 3D dans une méthode multigrilles localisées a été réalisé dans le cadre de cette thèse.

Le patch analytique est basé sur le développement asymptotique en pointe de fissure. Comme présenté à la Section 1.1.2, ce développement est bien connu en 2D. Cependant, le développement asymptotique au voisinage d'un front courbe en 3D n'est pas connu. C'est le point clef de l'extension de la DEK-FEM au 3D. Une base 3D permettant d'approcher les champs mécaniques (singularité et évolutions le long du front) dans le patch analytique doit être construite. Comme détaillé dans le Chapitre suivant, nous proposons d'utiliser une extension de la série asymptotique 2D en déplacements. La base proposée est ensuite testée sur des cas tests au Chapitre 3.



## Chapitre 2

# Extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes en 3D

*La plupart des méthodes d'extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes (présentées au Chapitre précédent) se basent sur les développements en séries asymptotiques des champs mécaniques en pointe de fissure. La méthode DEK-FEM, introduite en deux dimensions à la Section 1.21, utilise directement une troncature des séries de Williams comme discrétisation dans un domaine localisé autour du front. Cette méthode est présentée plus en détails dans ce Chapitre, en particulier son extension tridimensionnelle développée dans le cadre de cette thèse.*

*Dans un premier temps, les champs considérés en trois dimensions dans le patch analytique sont définis à la Section 2.1.2. En effet, les séries de Williams utilisées en deux dimensions ne peuvent être utilisées directement en trois dimensions. La méthode de simulation avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes est détaillée dans sa version tridimensionnelle (Voir Section 2.2). Le traitement du voisinage du front comme un domaine à part est rendu possible par l'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine présentée à la Section 2.2. Cette méthode repose sur une formulation faible à trois champs introduite à la Section 2.2.1. Enfin, l'implémentation de la DEK-FEM dans un contexte multigrilles localisées est introduite à la Section 2.3. Cette approche multigrilles localisées permet de prendre en compte efficacement les différentes échelles présentes dans un problème de fissuration. Elle est nécessaire en trois dimensions puisque la complexité du problème est alors généralement importante.*

## Sommaire

---

|            |                                                               |           |
|------------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Extension des champs asymptotiques au 3D . . . . .</b>     | <b>75</b> |
| 2.1.1      | Définitions classiques des champs asymptotiques . . . . .     | 76        |
| 2.1.2      | Définition à partir du champ de déplacements étendu au front  | 77        |
| <b>2.2</b> | <b>Approche monogrille . . . . .</b>                          | <b>83</b> |
| 2.2.1      | Formulation faible à trois champs . . . . .                   | 83        |
| 2.2.2      | Décomposition de la structure fissurée en deux domaines . . . | 86        |
| 2.2.3      | Domaine éléments finis étendus $\Omega_X$ . . . . .           | 87        |
| 2.2.4      | Domaine $\Omega_W$ : patch analytique . . . . .               | 88        |
| 2.2.5      | Raccord entre les deux domaines . . . . .                     | 90        |
| 2.2.6      | Approche matricielle et résolution . . . . .                  | 92        |
| <b>2.3</b> | <b>DEK-FEM dans un contexte multigrilles . . . . .</b>        | <b>93</b> |
| 2.3.1      | Raffinement local et méthodes multi-échelles . . . . .        | 94        |
| 2.3.2      | Présentation des méthodes multigrilles . . . . .              | 95        |
| 2.3.3      | Méthode X-FEM multigrilles localisées . . . . .               | 96        |
| 2.3.4      | Introduction du patch analytique . . . . .                    | 104       |

---

## 2.1 Extension des champs asymptotiques au 3D

Cette Section est consacrée à la définition de la discrétisation du patch analytique en 3D. Considérer une fissure tridimensionnelle introduit des difficultés supplémentaires qui sont détaillées ci-dessous. Ces difficultés sont telles qu'il n'existe pas de développement asymptotique autour du front en 3D. Les approximations des champs asymptotiques en 3D, notamment pour l'intégrale d'interaction, sont présentées à la Section 2.1.1. Ces approximations ne permettent pas de prendre en compte une évolution continue le long du front. Nous proposons une approximation basée sur la série de Williams en déplacements couplée avec une évolution éléments finis 1D le long du front (voir Section 2.1.2)

En trois dimensions, l'interface qui est la fissure n'est plus une ligne mais une surface. De même, le front n'est plus un point mais une courbe. La description de la fissure proposée Figure 1.2 n'est plus suffisante. Une troisième coordonnée locale est introduite, l'abscisse curviligne  $s$ . En association avec cette coordonnée, pour tout point du front, le vecteur  $\mathbf{e}_s$  qui est défini comme le vecteur tangent au front est introduit. La base locale est complétée par le vecteur  $\mathbf{e}_n$  qui est encore le vecteur normal à la fissure et le vecteur complémentaire  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n \wedge \mathbf{e}_s$ . Cette base locale est représentée pour un point d'un front courbe sur la Figure 2.1.

Des difficultés supplémentaires apparaissent. Une première vient de l'évolution possible de l'intensité de la singularité le long du front. Cette évolution est généralement supposée continue, notamment pour les facteurs d'intensité des contraintes. Cependant, l'intégrale d'interaction [YAU 80, SUO 92, GOS 02] comme les méthodes standards de projection évaluent généralement la singularité en un point du front. Aussi, les évaluations le long du front sont généralement bruitées [MOË 02a, RAN 09]. Elles oscillent autour d'une valeur moyenne. Il peut alors être intéressant de lisser les résultats le long du front, notamment pour des projections dans des plans tangents [LAC 14a]. La seconde difficulté vient du fait que la singularité agit sur une zone au voisinage du front, il faudra donc connaître le point du front correspondant à chaque point d'intégration de cette zone. Une

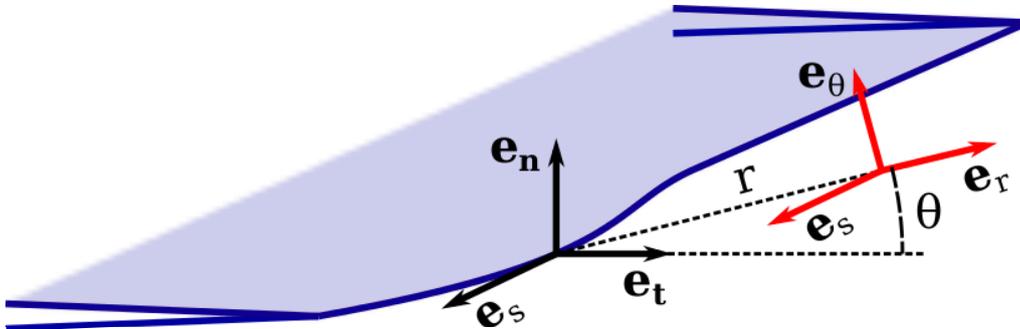


FIGURE 2.1 – Paramétrage du problème en trois dimensions.

méthode coûteuse mais efficace consiste à calculer la projection de chacun des points d'intégration sur le front [RAN 08].

En trois dimensions, le développement en séries des champs mécaniques au voisinage du front de la fissure n'est disponible que pour certaines géométries de fissure et certaines conditions aux limites [YOS 11]. Le calcul de séries comme celles disponibles en 2D, présentées Section 1.1.2, est étudié par exemple dans [APE 08] mais reste un problème ouvert. Leblond et Torlai [LEB 92] ont défini un développement du champ de contraintes dans le cas général d'une fissure courbe à front courbe pour tout chargement extérieur lointain :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = & \sum_{i=I, II, III} \left[ K_i \mathbf{d}_i(\theta) r^{-1/2} + T_i \mathbf{e}_i(\theta) \right. \\ & \left. + \left( b_i^3 \mathbf{h}_i(\theta) + \frac{dK_i}{ds} \mathbf{l}_i(\theta) + C^{lm} K_i \mathbf{m}_i^{lm}(\theta) + \Gamma K_i \mathbf{n}_i(\theta) \right) r^{1/2} + O(r) \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dans cette équation  $\Gamma$  représente la courbure du front et  $C^{lm}$  est le tenseur de courbure de la fissure.  $r$  et  $\theta$  forment un système de coordonnées polaires dans le plan perpendiculaire à la tangente au front ( $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n$ ) comme représenté Figure 2.1. Les fonctions  $\mathbf{d}_i(\theta)$ ,  $\mathbf{e}_i(\theta)$  et  $\mathbf{h}_i(\theta)$  sont les fonctions 2D en contraintes planes légèrement adaptées. La fonction  $\mathbf{l}_i(\theta)$  est une correction due à l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes le long du front, et les fonctions  $\mathbf{m}_i^{lm}(\theta)$  et  $\mathbf{n}_i(\theta)$  sont dues à la courbure de la fissure. Ce développement est très intéressant. Néanmoins, il n'est pas écrit en fonction de l'abscisse curviligne, il est réalisé dans un plan orthogonal au front. De plus, il est uniquement formulé au premier ordre et en contraintes.

Le passage au 3D introduit une autre difficulté : l'intersection du front de la fissure avec les bords libres pour les fissures débouchantes. On sépare donc ces deux problèmes. À l'intérieur du domaine, la singularité en 3D reste de l'ordre  $\frac{1}{2}$ . Au niveau des bords libres, Bažant et Estensoro [BAŽ 79] ont montré que l'ordre de la singularité dépend des angles d'intersection entre la fissure et la surface libre. Néanmoins, le vertex est souvent traité comme le reste de la fissure tout en sachant qu'une approximation y est faite. Cette approximation est raisonnable dans la mesure où elle est très localisée et, lors de la propagation, la fissure va avoir tendance à prendre une inclinaison pour laquelle l'ordre de la singularité est proche de  $\frac{1}{2}$ .

### 2.1.1 Définitions classiques des champs asymptotiques

Lors du calcul des facteurs d'intensité des contraintes, le champ singulier associé est généralement approximé. En effet, si plusieurs modes sont activés le recours à l'intégrale d'interaction, présentée Section 1.2.4.2, nécessite de connaître les champs auxiliaires. Une approximation couramment utilisée en 3D est celle décrite dans [MOË 02a]. Elle consiste simplement à utiliser les champs 2D définis dans la base locale ( $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s$ ).

Dans sa forme la plus utilisée et la plus précise, l'intégrale est calculée dans un volume autour du front tout en excluant éventuellement une petite zone à proximité du front [SUO 92, GOS 02]. Il faut donc déterminer le repère local pour tous les points d'intégration utilisés. Pour chacun de ces points  $M(\mathbf{x})$ , le point du front  $P(\mathbf{x})$  le plus proche et son repère local  $(P(\mathbf{x}), \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s)$  sont calculés. Les champs auxiliaires, sont définis dans ce repère et sont fonctions de  $r$  et  $\theta$ . On définit facilement  $r = |\mathbf{PM}|$  et  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{PM}$  et  $\mathbf{e}_t$ .

Pour des fissures courbes, Gosz et Moran [GOS 02] ont montré que le champ de contraintes auxiliaires de l'intégrale d'interaction ne vérifie pas l'équilibre et que les déformations auxiliaires ne sont pas la partie symétrique du gradient des déplacements auxiliaires. Les champs utilisés ne satisfont plus toutes les équations locales puisque nous ne savons pas calculer ces champs en trois dimensions. Néanmoins, la méthode proposée dans [GOS 02] donne des résultats intéressants et est empiriquement indépendante du contour choisi. La prise en compte de la courbure dans les champs auxiliaires a également été étudiée. González-Albuixech *et al.* [GON 13a, GON 13b] ont montré qu'elle permet d'améliorer la précision des FIC identifiés avec l'intégrale d'interaction.

### 2.1.2 Définition à partir du champ de déplacements étendu au front

Pour l'intégrale d'interaction, les champs singuliers analytiques dit auxiliaires ne sont utilisés qu'en post-traitement des champs mécaniques obtenus dans une simulation éléments finis par exemple. La résolution du problème d'équilibre mécanique en utilisant ces champs est plus délicate puisqu'elle peut converger vers un champ de déplacements non compatibles. L'approximation impacte donc tous les champs mécaniques et d'autant plus les coefficients asymptotiques identifiés.

La formulation du problème étant généralement primale (en déplacement), nous avons choisi de partir d'une hypothèse cinématique pour identifier l'espace de recherche. Cette approche est simple car pour calculer les déformations (puis les contraintes) il faut dériver les champs mécaniques. La compatibilité contraintes/déplacements est donc automatiquement vérifiée. De plus, la résolution de la formulation faible en déplacements assure que les champs obtenus vérifient l'équilibre et la relation de comportement de manière approchée, mais suffisante en pratique.

En trois dimensions, le problème n'est plus ni en situation plane ni anti-plane uniquement, les trois modes sont donc à considérer. On suppose que les trois modes introduits Section 1.1.2 représentent correctement les déplacements 3D au voisinage du point  $\mathbf{x}_c$  du front de fissure dans le repère local dans un plan  $(\mathbf{x}_c, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$  normal à la tangente au front. De plus, le champ de déplacements cherché est continu, on suppose donc une évolution continue des déplacements (dits de Williams  $u_W$ ) le long

du front d'abscisse curviligne  $s$

$$\mathbf{u}_W(r, \theta, s) = \left( \sum_{n=0}^{n_{max}=\infty} \sum_{i=I,II,III} (b_i^n) r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta) \right) f(s). \quad (2.2)$$

Ce champ de déplacements n'est pas exploitable sous cette forme dans une méthode numérique. En deux dimensions, il a été montré que pour un patch analytique en pointe de fissure l'utilisation des premiers ordres uniquement permettait une bonne identification des facteurs d'intensité des contraintes [KAR 03a, RÉT 10a, PAS 11]. La même approche est donc reprise en trois dimensions, une troncature de la série est retenue  $n_{max} = n_{DEK}$ . De plus il convient également de choisir un espace d'approximation dans la direction  $s$  et donc d'approximer la fonction  $f(s)$ . Nous choisissons ici aussi la méthode des éléments finis. La discrétisation est selon une seule dimension  $s$ . Le front est discrétisé en éléments puis des fonctions de forme éléments finis unidimensionnelles sont choisies

$$\mathbf{u}_W^h(r, \theta, s) = \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{n=0}^{n_{DEK}} \sum_{i=I,II,III} b_{ink} r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta) \varphi_k(s). \quad (2.3)$$

Le  $k^{\text{ème}}$  coefficient  $b_i^n$  est noté  $b_{ink}$ . La discrétisation le long du front doit alors s'adapter aux variations des coefficients asymptotiques. Un raffinement sera nécessaire lorsque la courbure du front est grande et lorsque le front s'approche d'un vertex.

Il a été montré à la Section 1.1.3 que les termes d'ordre zéro ( $n = 0$ ) correspondent aux trois translations de solide rigide d'une section perpendiculaire au front. Les termes d'ordre deux ( $n = 2$ ) modes *II* et *III* correspondent aux deux rotations de solide rigide. En trois dimensions, il en manque donc une. Cette rotation est ajoutée à l'espace d'approximation

$$\mathbf{u}_{W+}^h(r, \theta, s) = \sum_{k=1}^{N_s} \left[ \sum_{n=0}^{n_{DEK}} \sum_{i=I,II,III} b_{ink} r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta) + b'_k r \sin(\theta) \mathbf{e}_s \right] \varphi_k(s). \quad (2.4)$$

L'introduction de la discrétisation le long du front modifie la série de sorte qu'aucun terme ne correspond plus aux déplacements de corps rigide. Les déplacements de corps rigide sont maintenant pris en compte par une combinaison des termes de même ordre le long du front. Prenons l'exemple d'une translation, dans la direction  $\mathbf{e}_n$ , d'un élément du front (d'ordre un entre les nœuds  $k$  et  $k + 1$ ) pour une fissure droite à front droit. Comme pour une poutre, elle sera obtenue par la combinaison de translations (mode  $i = II$ , ordre  $n = 0$ ) identique  $b_{II0(k+1)} = b_{II0k}$  des deux nœuds

$$\mathbf{u} = \frac{\kappa + 1}{2\mu} b_{II0k} (\varphi_{k+1}(s) + \varphi_k(s)) \mathbf{e}_n = \frac{\kappa + 1}{2\mu} b_{II0k} \mathbf{e}_n. \quad (2.5)$$

Dans cette expression on vérifie bien que  $\mathbf{u}$  est une translation dans la direction  $\mathbf{e}_n$ .

On peut également montrer que, comme le  $T$ -stress, deux autres champs de contraintes uniformes vérifient les équations locales [PAR 91, LEB 92]. Le premier est un champ de compression dans la direction du front :  $\sigma_{ss}$  (si le front est plan  $\sigma_{33}$ ). Par analogie avec le  $T$ -stress et en référence à la composante de contrainte concernée, il est souvent appelé  $T_{33}$ . Le second est un champ de cisaillement  $\sigma_{ts}$  (si le front est plan  $\sigma_{13}$ ), il est souvent appelé  $T_{13}$ .

Le champ de contraintes au voisinage du front peut donc s'approcher par

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_K(\theta)r^{-1/2} + \begin{bmatrix} T & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{13} & 0 & T_{33} \end{bmatrix} + O(r^{1/2}). \quad (2.6)$$

Dans cette expression  $\boldsymbol{\sigma}_K(\theta)$  sont les termes singuliers correspondant aux facteurs d'intensité des contraintes.

Ces champs n'ont pas été rajoutés spécifiquement. Des champs de contraintes approchant proviennent néanmoins de l'évolution des déplacements dans la direction  $\mathbf{e}_s$ . Par exemple, les termes de translation mode  $I$  (lorsqu'elle évolue le long du front) permettent de prendre en compte le  $T$ -stress en cisaillement  $T_{13}$ . En effet, au sein d'un élément (entre les nœuds  $k$  et  $k+1$ ) du patch, le terme symétrique (mode  $i = I$ ) d'ordre zéro ( $n = 0$ ) résulte en des déplacements qui prennent la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \frac{\kappa + 1}{2\mu} (b_{I0(k+1)} - b_{I0k}) \varphi_k(s) \mathbf{e}_t, \quad (2.7)$$

$\varphi_k(s)$  étant une évolution linéaire (comme représenté sur la Figure 2.4b), le  $T$ -stress de cisaillement est dû à une évolution du coefficient  $b_I^0$  le long du front. De son côté, la contrainte  $T_{33}$  est approchée au coefficient de Poisson près. Reprenons l'équation précédente pour les termes en translation mode  $III$  :

$$\mathbf{u} = \frac{2}{\mu} (b_{III0(k+1)} - b_{III0k}) \varphi_k(s) \mathbf{e}_s. \quad (2.8)$$

Pour des éléments finis d'ordre un le long du front (i.e.,  $\varphi_k(s) \propto s$ ), ce champ de déplacements génère des déformations uniformes telles que :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{élasticité linéaire isotrope}} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda\epsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\epsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)\epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Où  $\lambda$  est le premier coefficient de Lamé. Le champ de contraintes associé (en élasticité linéaire isotrope) n'est pas exactement un  $T$ -stress. La contrainte  $T_{33}$  pourrait être ajoutée spécifiquement, mais dans tous les cas testés nous n'avons pas constaté d'influence significative.

### 2.1.2.1 Calcul du gradient de déplacements analytique

À partir de la cette définition du champ de déplacements équation (2.4), une difficulté est de calculer son gradient. En particulier sa partie symétrique  $\nabla^s \mathbf{u}$  qui sera nécessaire pour calculer la matrice de rigidité, les déformations et les contraintes. Le champ de déplacements asymptotique est dans une base locale, il peut donc être aisément dérivé par rapports aux paramètres de cette base  $(r, \theta, s)$ . Le plus simple est pour cela d'utiliser une notation complexe [MUS 53] comme rappelé dans les équations (1.20) et (1.21). Généralisons cette notation aux trois modes en considérant la composante  $\mathbf{u}_{ink}$  de la série équation (2.4), la fonction complexe  $z_n^i$  et la fonction  $s_n^i$  étant telles que

$$\mathbf{u}_{ink}(r, \theta, s) = r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta) \varphi_k(s) = r^{n/2} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z_n^i(\theta)) \\ \operatorname{Im}(z_n^i(\theta)) \\ \operatorname{Re}(s_n^i(\theta)) \end{bmatrix} \varphi_k(s). \quad (2.10)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \text{Mode I ordre } n : & z_n^I(\theta) = \kappa e^{\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}} - \frac{n}{2} \cdot e^{\frac{i \cdot (4-n) \cdot \theta}{2}} + \left[ \frac{n}{2} + (-1)^n \right] e^{-\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}}, \quad s_n^i = 0 \\ \text{Mode II ordre } n : & z_n^{II}(\theta) = \kappa e^{\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}} + \frac{n}{2} \cdot e^{\frac{i \cdot (4-n) \cdot \theta}{2}} - \left[ \frac{n}{2} - (-1)^n \right] e^{-\frac{i \cdot n \cdot \theta}{2}}, \quad s_n^i = 0 \\ \text{Mode III ordre } n : & z_n^{III} = 0, \quad s_n^i(\theta) = (-i)^n e^{\frac{i n \theta}{2}} \end{cases}$$

La dérivée de ce vecteur par rapport aux paramètres  $r, \theta$  et  $s$  est donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{ink}}{\partial r} &= \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z_n^i(\theta)) \\ \operatorname{Im}(z_n^i(\theta)) \\ \operatorname{Re}(s_n^i(\theta)) \end{bmatrix} \varphi_k(s), \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{ink}}{r \partial \theta} &= r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\left(\frac{\partial z_n^i}{\partial \theta}\right) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{\partial z_n^i}{\partial \theta}\right) \\ \operatorname{Re}\left(\frac{\partial s_n^i}{\partial \theta}\right) \end{bmatrix} \varphi_k(s), \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{ink}}{\partial s} &= r^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z_n^i(\theta)) \\ \operatorname{Im}(z_n^i(\theta)) \\ \operatorname{Re}(s_n^i(\theta)) \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi_k(s)}{\partial s}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Où les paramètres  $r, \theta$  définissent une base polaire en pointe de fissure. Les dérivées dans la base locale  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$  en pointe de fissure sont obtenues à partir des dérivées partielles précédentes comme suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cdot}{\partial t} &= \frac{\partial \cdot}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial \cdot}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \cdot}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \cdot}{r \partial \theta} \sin \theta, \\ \frac{\partial \cdot}{\partial n} &= \frac{\partial \cdot}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial \cdot}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial \cdot}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \cdot}{r \partial \theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

À partir de ces expressions des dérivées partielles, en posant  $\mathbf{u}_{ink} = v_t \mathbf{e}_t + v_n \mathbf{e}_n + v_s \mathbf{e}_s$ ,

la matrice des dérivées en fonction des paramètres du front  $t$ ,  $n$  et  $s$  s'écrit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_t}{\partial t} & \frac{\partial v_t}{\partial n} & \frac{\partial v_t}{\partial s} \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} & \frac{\partial v_n}{\partial n} & \frac{\partial v_n}{\partial s} \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} & \frac{\partial v_s}{\partial n} & \frac{\partial v_s}{\partial s} \end{bmatrix}_{(e_t, e_n, e_s)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_t}{\partial r} & \frac{\partial v_t}{r \partial \theta} & \frac{\partial v_t}{\partial s} \\ \frac{\partial v_n}{\partial r} & \frac{\partial v_n}{r \partial \theta} & \frac{\partial v_n}{\partial s} \\ \frac{\partial v_s}{\partial r} & \frac{\partial v_s}{r \partial \theta} & \frac{\partial v_s}{\partial s} \end{bmatrix}_{(e_t, e_n, e_s)} \cdot \mathbf{J}_r \\ \text{avec } \mathbf{J}_r &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial r}{\partial n} & \frac{\partial r}{\partial s} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} & \frac{\partial \theta}{\partial n} & \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \frac{\partial t}{\partial s} & \frac{\partial n}{\partial s} & \frac{\partial s}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$\mathbf{J}_r$  est la matrice jacobienne du changement de coordonnées de la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{e}_s$  entre la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_s)$  et  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s)$ . Pour une fissure quelconque suffisamment régulière,  $\nabla \mathbf{u}_{ink}$  le gradient de  $\mathbf{u}_{ink} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$  recherché s'exprime dans la base globale  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}_{ink} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} = \mathbf{P}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v_t}{\partial t} & \frac{\partial v_t}{\partial n} & \frac{\partial v_t}{\partial s} \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} & \frac{\partial v_n}{\partial n} & \frac{\partial v_n}{\partial s} \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} & \frac{\partial v_s}{\partial n} & \frac{\partial v_s}{\partial s} \end{bmatrix}_{(e_t, e_n, e_s)} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_l \\ \text{avec } \mathbf{J}_l &= \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial x_1} & \frac{\partial t}{\partial x_2} & \frac{\partial t}{\partial x_3} \\ \frac{\partial n}{\partial x_1} & \frac{\partial n}{\partial x_2} & \frac{\partial n}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s}{\partial x_1} & \frac{\partial s}{\partial x_2} & \frac{\partial s}{\partial x_3} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_t & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_t & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où  $\mathbf{J}_l$  est la matrice jacobienne du changement de coordonnées, et  $\mathbf{P}$  la matrice de passage de la base locale à la base globale.

La difficulté est alors de connaître en tout point autour du front les coordonnées locales et la matrice jacobienne de leur transformation dans les coordonnées globales. Si la fissure est définie explicitement, celles-ci sont définies naturellement. Si la fissure n'est pas définie explicitement mais par l'intermédiaire de fonctions de niveaux, le calcul de la matrice  $\mathbf{J}_l$  peut se faire par l'intermédiaire du calcul de la courbure de la fissure et du front.

### 2.1.2.2 Gradient du déplacements pour une fissure circulaire

Nous nous intéressons au cas particulier d'une fissure plane à front circulaire, de rayon  $a$ . C'est un exemple particulièrement intéressant car il existe des solutions analytiques tridimensionnelles pour des fissures avec cette géométrie. Elle permettra donc de tester et valider le modèle proposé. D'autre part, ce cas particulier peut facilement être étendu au premier ordre à toute forme du front en remplaçant le rayon par la courbure locale de la fissure.

Pour cette géométrie de fissure, la base associée au front de la fissure  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s)$  est une base cylindrique autour de  $\mathbf{e}_n$ . Dans cette base, le gradient peut être calculé

directement, dans la base locale, sans passer par une matrice jacobienne

$$\nabla \mathbf{u}_{ink} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(e_x, e_y, e_z)} = \mathbf{P}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v_t}{\partial t} & \frac{\partial v_t}{\partial n} & \frac{\partial v_t}{\partial s} - \frac{v_s}{a+r \cos \theta} \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} & \frac{\partial v_n}{\partial n} & \frac{\partial v_n}{\partial s} \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} & \frac{\partial v_s}{\partial n} & \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_t}{a+r \cos \theta} \end{bmatrix}_{(e_t, e_n, e_s)} \cdot \mathbf{P} \quad (2.15)$$

Son expression dans la base globale passe alors simplement par un changement de base. Celui-ci peut être réalisé analytiquement en se ramenant aux coordonnées globales du cylindre par une rotation puis aux coordonnées globales. Si les deux courbes de niveau  $crack(\mathbf{x})$  et  $front(\mathbf{x})$  sont utilisées, leurs gradients en un point  $\mathbf{x}$  quelconque permet de calculer les coordonnées associées à  $\mathbf{e}_n$  et  $\mathbf{e}_t$  dans le repère global (voir Section 1.2.2.4). Le troisième vecteur est alors facilement calculé dans ces coordonnées globales par un produit vectoriel  $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_t \wedge \mathbf{e}_n$ . L'expression de cette base dans les coordonnées globales permet d'obtenir directement la matrice de passage  $\mathbf{P}$  de la base locale à la base globale.

### 2.1.2.3 Utilisation d'une troisième *level set*

Le champ de déplacements utilisé pour le domaine analytique (équation (2.4)) est fonction d'une abscisse curviligne  $s$  qui doit être connue pour tous les points autour du front. En particulier aux points d'interpolation de la surface du raccord, au point d'interpolation pour la représentation et aux points de Gauss pour l'intégration. Puisque ces champs sont en  $r^{n/2}$  et avec des fonctions trigonométriques en  $\frac{n\theta}{2}$ , une intégration de haut ordre est nécessaire. Il faudra donc évaluer les fonctions  $\mathbf{u}_{ink}(r, \theta, s)$  et donc les paramètres  $(r, \theta, s)$  en de nombreux points. Il a été rappelé que réaliser cette évaluation par une projection était coûteux à la section 1.2.2.4 pour les paramètres  $(r, \theta)$ . Il en va de même pour l'abscisse curviligne  $s$ . La solution retenue en 2D pour évaluer  $r$  et  $\theta$  est l'utilisation de *level sets*.

Pour cette raison, nous nous sommes appuyés sur une troisième fonction de niveau  $curv(\mathbf{x})$  pour stocker l'abscisse curviligne. Cette *level set* a pour valeur en un point  $\mathbf{x}$  l'abscisse curviligne  $s$  du point du front le plus proche  $\mathbf{x}_f$ . Sur le front l'abscisse curviligne évolue comme la longueur du front. Elle est orthogonale aux autres *level sets*

$$\begin{cases} \nabla curv(\mathbf{x}) \cdot \nabla crack(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla curv(\mathbf{x}) \cdot \nabla front(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.16)$$

Cette propriété se traduit également par le produit vectoriel

$$\nabla curv(\mathbf{x}) = \nabla crack(\mathbf{x}) \wedge \nabla front(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

Le produit vectoriel permet de calculer le gradient de la troisième courbe de niveau à partir des deux premières. En intégrant ce gradient, il est possible de générer  $curv(\mathbf{x})$ , elle vérifiera alors la propriété d'orthogonalité. Pour des fronts

3D il est plus délicat de vérifier la propriété d'orthogonalité et la propriété de distance signée lorsque la fissure est courbe. Néanmoins, si le domaine analytique est petit (par rapport au rayon de courbure) l'approximation sur la distance signée est acceptable.

À partir de ces trois *level sets*, les paramètres locaux  $(r, \theta, s)$  sont obtenus et permettent d'évaluer le champ de déplacement. Ces courbes de niveaux permettent également de déterminer la courbure de la fissure en tout point autour du front et donc de calculer le gradient des déplacements. Ce champ peut donc être utilisé comme base d'approximation dans une méthode numérique 3D.

## 2.2 Approche monogrille

À partir de cette définition de la discrétisation du patch analytique, la méthode DEK-FEM est présentée dans cette Section et en particulier ses aspects tridimensionnels. Les points clés de son implémentation sont détaillés. Dans un premier temps, cette présentation est faite sous sa forme monogrille.

### 2.2.1 Formulation faible à trois champs

La méthode DEK-FEM repose sur la décomposition du domaine considéré  $\Omega$  en deux sous domaines. Dans un domaine  $\Omega_W$  localisé autour du front de la fissure, une base tronquée basée sur les séries de Williams (équation (2.4)) est utilisée. Les quantités du domaine analytique  $\Omega_W$  basées sur les séries de Williams sont notées avec l'indice  $W$ . La partie complémentaire du domaine  $\Omega_X$ , telle que  $\Omega = \Omega_X \cup \Omega_W$  et  $\Omega_X \cap \Omega_W = \emptyset$ , est traitée avec la méthode des éléments finis étendus (présentée à la Section 1.2.2). Les quantités du domaine X-FEM  $\omega_X$  sont notées avec l'indice  $X$ . Cette décomposition du domaine est représentée Figure 2.2.

La frontière des sous domaines est cette fois décomposée en trois. La première partie est l'interface entre les deux domaines  $\Gamma_W$ . Des efforts  $\lambda$  sont transmis par cet

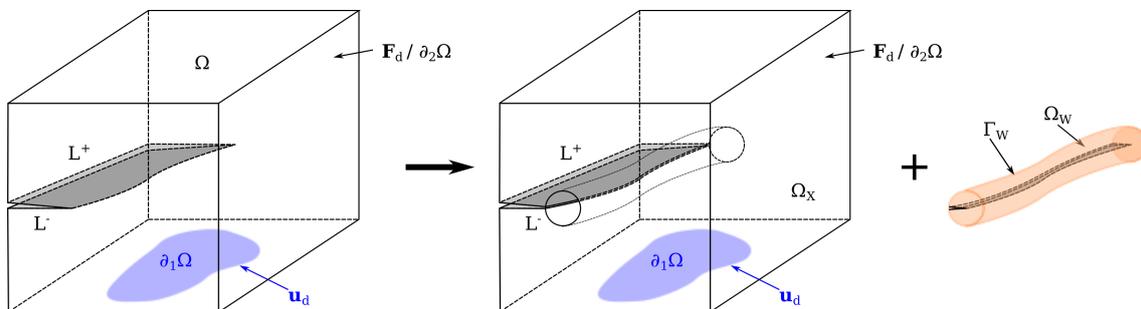


FIGURE 2.2 – Description de la décomposition du domaine  $\Omega$  du problème aux limites considéré.

interface, définissons les comme les efforts du patch sur le domaine  $\Omega_X$ . Par exemple pour le domaine analytique  $\Omega_W$ , on retrouve les deux sous parties  $\partial_1\Omega_W$  où des déplacements sont imposés et le complémentaire  $\partial_2\Omega_W$  où des efforts sont imposés. Ce dernier est complémentaire à  $\partial_1\Omega_W$  et  $\Gamma_W$  tel que  $\partial\Omega_W = \Gamma_W \cup \partial_1\Omega_W \cup \partial_2\Omega_W$  et  $\Gamma_W \cap \partial_1\Omega_W \cap \partial_2\Omega_W = \emptyset$ . De la même manière la frontière  $\partial\Omega_X$  de  $\Omega_X$  est composée de trois parties : l'interface  $\Gamma_W$ , une partie  $\partial_1\Omega_X$  où des déplacements sont imposés et le complémentaire  $\partial_2\Omega_X$  où des efforts sont imposés. On notera que la décomposition est telle que la frontière où des déplacements sont imposés  $\partial_1\Omega$  est répartie entre les deux domaines  $\partial_1\Omega = \partial_1\Omega_W \cup \partial_1\Omega_X$  dont l'intersection est vide  $\partial_1\Omega_W \cap \partial_1\Omega_X = \emptyset$ . De même, la surface où les efforts sont imposés est telle que  $\partial_2\Omega = \partial_2\Omega_W \cup \partial_2\Omega_X$  et vide  $\partial_2\Omega_W \cap \partial_2\Omega_X = \emptyset$ .

À partir du principe des puissances virtuelles, on peut réécrire la formulation faible en déplacements de l'équation (1.34) pour chacun des domaines. Pour le domaine  $\Omega_W$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u}_W$  est cherché dans l'espace

$$\mathcal{U}_W(\mathbf{u}_d) = \{\mathbf{u}_W \mid \mathbf{u}_W \text{ régulier, discontinu uniquement sur } L^\pm \text{ et } \mathbf{u}_W = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega_W\}.$$

La formulation faible s'écrit donc : trouver  $\mathbf{u}_W \in \mathcal{U}_W(\mathbf{u}_d)$  tel que  $\forall \mathbf{v}_W \in \mathcal{U}_W(\mathbf{0})$

$$\int_{\Omega_W} \nabla^s \mathbf{u}_W : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_W \, dV = \int_{\Omega_W} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_W \, dV + \int_{\partial_2\Omega_W} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_W \, dS - \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_W \, dS. \quad (2.18)$$

De même, pour le domaine  $\Omega_X$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u}_X$  est cherché dans l'espace

$$\mathcal{U}_X(\mathbf{u}_d) = \{\mathbf{u}_X \mid \mathbf{u}_X \text{ régulier, discontinu uniquement sur } L^\pm \text{ et } \mathbf{u}_X = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega_X\}.$$

La formulation faible s'écrit donc : trouver  $\mathbf{u}_X \in \mathcal{U}_X(\mathbf{u}_d)$  tel que  $\forall \mathbf{v}_X \in \mathcal{U}_X(\mathbf{0})$

$$\int_{\Omega_X} \nabla^s \mathbf{u}_X : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_X \, dV = \int_{\Omega_X} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_X \, dV + \int_{\partial_2\Omega_X} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_X \, dS + \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_X \, dS. \quad (2.19)$$

Ces deux parties ne sont pas indépendantes, les déplacements à leur interface  $\Gamma_W$  sont continus

$$\mathbf{u}_X(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_W(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_W. \quad (2.20)$$

Cette équation est vérifiée localement en tout point de l'interface  $\Gamma_W$ , au sens fort. Pour la formulation forte à deux champs, elle s'ajoute aux équations (1.1) à (1.5). Dans le cadre d'une formulation faible du problème, il convient d'affaiblir cette équation. Elle est multipliée par un multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\mu}$  défini dans l'ensemble  $\mathcal{L}$  des fonctions continues et régulières sur l'interface  $\Gamma_W$ , puis intégrée sur cette interface

$$\int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_W(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_X(\mathbf{x})) \, dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{L}. \quad (2.21)$$

Cette équation est équivalente à l'équation forte et permettra une résolution approchée. Il s'agit d'un raccord en moyenne avec une approche dite de Mortar [BEL 99a].

Pour les deux champs, la réunion des équations (2.18), (2.19) et (2.21) permet d'écrire la formulation faible équivalente :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\mathbf{u}_W, \mathbf{u}_X, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{U}_W(\mathbf{u}_d) \times \mathcal{U}_X(\mathbf{u}_d) \times \mathcal{L} \text{ tels que} \\
 & \int_{\Omega_W} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_W \, dV + \int_{\Omega_X} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_X \, dV + \int_{\partial_2\Omega_W} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_W \, dS + \int_{\partial_2\Omega_X} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_X \, dS \\
 & = \int_{\Omega_W} \nabla^s \mathbf{u}_W : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_W \, dV + \int_{\Omega_X} \nabla^s \mathbf{u}_X : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_X \, dV \\
 & + \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\mu} (\mathbf{u}_W - \mathbf{u}_X) \, dS + \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{v}_W - \mathbf{v}_X) \, dS \quad \forall (\mathbf{v}_W, \mathbf{v}_X, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{U}_W^0 \times \mathcal{U}_X^0 \times \mathcal{L}.
 \end{aligned}$$

Dans cette formulation on constate que le champ  $\boldsymbol{\lambda}$  est homogène à l'effort d'interface entre les domaines  $X$  et  $W$ . Cette formulation mixte fait donc intervenir des grandeurs primales  $\mathbf{u}_X$  et  $\mathbf{u}_W$  et duale  $\boldsymbol{\lambda}$ .

Quand le domaine  $\Omega_W$  est traité avec les séries de Williams, il est intéressant que le domaine  $\Omega_X$  ne supporte que des conditions aux limites d'efforts nuls. C'est-à-dire que  $\partial_1\Omega_W = \partial_1\Omega \cap \partial\Omega_W = \emptyset$ , et que les efforts  $\mathbf{F}_d$  sur  $\partial_2\Omega_W$  soient nuls. En effet, imposer des conditions aux limites sur un champ non interpolant est délicat, en particulier des déplacements (une option est de le faire en moyenne comme pour l'équation (2.21)). D'autre part les séries sont obtenues pour un milieu sans effort volumique. Elles s'appliquent également lorsqu'ils sont négligeables, c'est-à-dire quand leur puissance est négligeable devant l'énergie de déformation élastique

$$\int_{\Omega_W} \nabla^s \mathbf{u}_W : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_W \, dV \gg \int_{\Omega_W} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_W \, dV, \quad \forall \mathbf{v}_W \in \mathcal{U}_W^0. \quad (2.22)$$

En pointe de fissure, les déformations sont singulières, l'énergie élastique est donc importante. Lorsque le patch analytique  $\Omega_W$  est suffisamment localisé en pointe de fissure, cette condition est naturellement vérifiée. Ces deux conditions simplifient la formulation faible précédente comme suit

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\mathbf{u}_W, \mathbf{u}_X, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{U}_W(\mathbf{u}_d) \times \mathcal{U}_X(\mathbf{u}_d) \times \mathcal{L} \text{ tels que} \\
 & \int_{\Omega_W} \nabla^s \mathbf{u}_W : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_W \, dV + \int_{\Omega_X} \nabla^s \mathbf{u}_X : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_X \, dV \\
 & + \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\mu} (\mathbf{u}_W - \mathbf{u}_X) \, dS + \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{v}_W - \mathbf{v}_X) \, dS \\
 & = \int_{\Omega_X} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_X \, dV + \int_{\partial_2\Omega_X} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_X \, dS \quad \forall (\mathbf{v}_W, \mathbf{v}_X, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{U}_W^0 \times \mathcal{U}_X^0 \times \mathcal{L}.
 \end{aligned} \quad (2.23)$$

C'est la formulation à la base de l'approximation DEK-FEM. À partir de cette formulation faible, les espaces de recherche  $\mathcal{U}_W(\mathbf{u}_d)$ ,  $\mathcal{U}_X(\mathbf{u}_d)$  et  $\mathcal{L}$  sont réduits pour permettre une résolution numérique.

### 2.2.2 Décomposition de la structure fissurée en deux domaines

La première étape est de définir les deux domaines. Le domaine analytique est issu d'une approche asymptotique des champs mécaniques en pointe de fissure. Cette approche asymptotique permet de repousser les conditions aux limites à l'infini et donc de considérer un milieu infini. Elle nécessite de pouvoir considérer la fissure droite. En pratique pour que cette approche soit réaliste, il faut que le domaine analytique  $\Omega_W$  soit localisé en pointe de fissure, c'est-à-dire suffisamment petit.

Cette approche asymptotique permet de prendre en compte précisément la fissure et sa singularité. Elle est également nécessaire pour permettre l'extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes. De son côté, le domaine complémentaire a lui vocation à représenter des géométries plus complexes avec une discontinuité, et à faire le lien entre les conditions aux limites et le patch analytique. La méthode des éléments finis est particulièrement adaptée pour traiter des structures et pour la prise en compte des conditions aux limites. C'est pourquoi son extension aux problèmes avec discontinuité, la X-FEM, a été retenue pour traiter le domaine complémentaire  $\Omega_X$ .

La discrétisation du domaine X-FEM repose sur un maillage de la structure. Une force de cette méthode est de permettre la simulation de la propagation d'une fissure en conservant ce maillage. Pour conserver cette propriété dans le cadre de la DEK-FEM, nous ne générons pas un maillage spécifique à la décomposition de domaine. Maillage qui serait plus compliqué à générer puisque l'interface avec le patch analytique est une frontière potentiellement complexe. Par la suite, le maillage est généré pour toute la structure comme il le serait pour une simulation X-FEM standard. Ce maillage pourra être utilisé pour toute la propagation, si la finesse est suffisante.

Pour une position donnée du front, les éléments ayant au moins un nœud dans un rayon  $r_W$  du front de la fissure constituent le patch. Les éléments restant constituent le domaine X-FEM. L'interface entre les deux,  $\Gamma_W$ , est constituée des faces des éléments communes au patch analytique et au domaine X-FEM. Cette décomposition est représentée sur la Figure 2.3.

La discrétisation de l'interface est obtenue une fois les deux sous domaines identifiés. Une recherche est faite sur chacun des éléments du patch pour savoir si ils ont tous les nœuds d'une face en commun avec le domaine X-FEM. Dans ce cas, cette face est ajoutée à l'interface  $\Gamma_W$ . Lors de l'ajout, on s'assure que l'ordre des nœuds de la face soit tel que celle-ci soit définie avec une normale sortante du patch. Cette opération est importante pour que les fonctions de forme associées à cette interface soient continues.

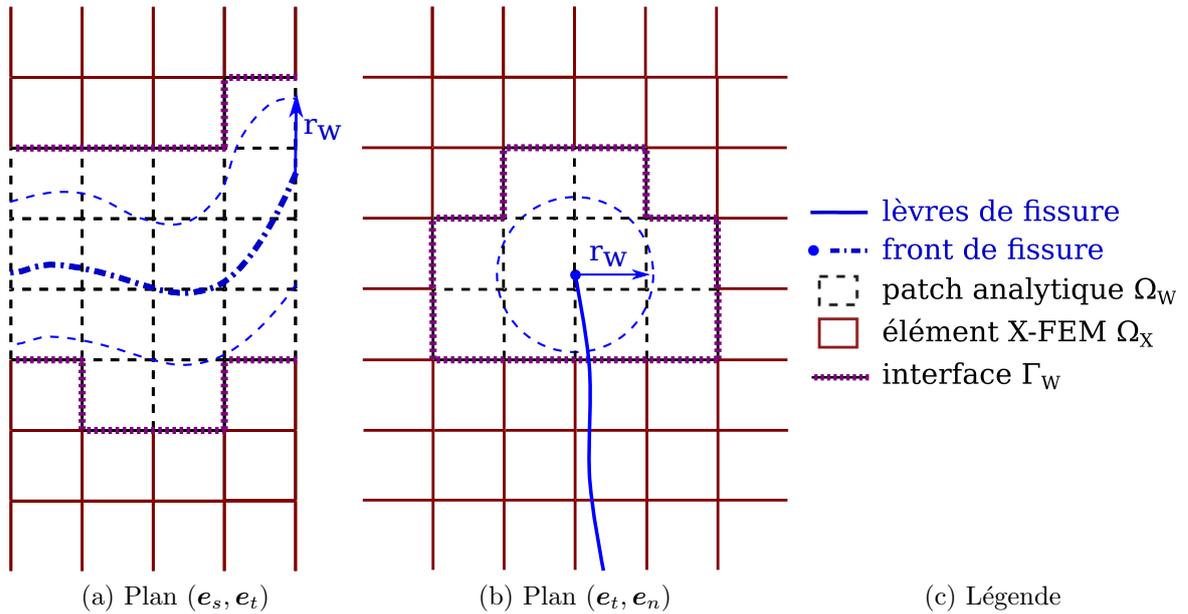


FIGURE 2.3 – Décomposition du maillage de la structure en deux sous domaines.

### 2.2.3 Domaine éléments finis étendus $\Omega_X$

Le domaine  $\Omega_X$  est simulé par des éléments finis étendus présentés Section 1.2.2. Ce domaine ne contient pas la singularité, seuls des enrichissements discontinus sont introduits. Le champ de déplacements approché par la méthode X-FEM de l'équation (1.50) est donc réduit à

$$\mathbf{u}_X^h(\mathbf{x}) = \sum_{k \in N} u_k \varphi_k(\mathbf{x}) + \sum_{k \in N^d} u_{c_k} \varphi_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Où les fonctions de forme  $\varphi_k(\mathbf{x})$  sont celles des éléments finis associés au maillage considéré. Elles doivent constituer une partition de l'unité. Réunissons ces différentes fonctions de forme sous une fonction de forme générique  $\varphi_k^g(\mathbf{x})$  telle que

$$\varphi_k^g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi_k(\mathbf{x}) & \text{si } k \in N, \\ \varphi_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) & \text{si } k \in N^d. \end{cases} \quad (2.25)$$

Cette fonction de forme permet d'écrire le champ de déplacements approché comme une seule somme de fonctions

$$\mathbf{u}_X^h(\mathbf{x}) = \sum_{k \in N \cup N^d} u_k \varphi_k^g(\mathbf{x}). \quad (2.26)$$

À partir de cette équation, une partie du problème (2.23) peut être écrit sous la forme matricielle introduite à la Section 1.1.4.2

$$\int_{\Omega_X} \nabla^s \mathbf{u}_X : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_X dV \longrightarrow \mathbf{K}_X \mathbf{U}_X$$

$$\text{avec } K_{Xkj} = \int_{\Omega_X} \nabla^s \varphi_k^g : \mathbf{C} : \nabla^s \varphi_j^g dV \quad \forall (j, k) \in \llbracket 1; N + N^d \rrbracket^2 \quad (2.27)$$

$$\int_{\Omega_X} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_X dV + \int_{\partial_2 \Omega_X} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_X dS \longrightarrow \mathbf{F}$$

$$\text{avec } F_j = \int_{\Omega_X} \mathbf{f}_d \cdot \varphi_j^g dV + \int_{\Omega_X} \mathbf{F}_d \cdot \varphi_j^g dV \quad \forall j \in \llbracket 1; N + N^d \rrbracket \quad (2.28)$$

Où  $\mathbf{U}_X$  est le vecteur des déplacements généralisés du domaine X-FEM. Il est composé de  $N + N^d$  inconnues et est tel que  $U_{Xk} = u_k \quad \forall k \in \llbracket 1; N + N^d \rrbracket$ .

## 2.2.4 Domaine $\Omega_W$ : patch analytique

Dans le domaine analytique, le champ de déplacements est approché par la troncature de l'extension des séries de Williams définie par l'équation (2.4). Cette extension au 3D de la série de Williams reprend les caractéristiques qui avaient permis l'identification précise des facteurs d'intensité des contraintes en 2D. La borne de la troncature  $n_{DEK} = 7$  identifiée comme efficace en 2D [PAS 11] est reprise. Une méthode pour obtenir le gradient de déplacements correspondant a également été présentée à la section 2.1.2.

À partir de cette approximation du champ de déplacements comme une somme de fonctions, la solution approchée sur l'espace vectoriel engendré par ces fonctions peut être obtenue par une méthode de Galerkin (introduite Section 1.1.4.2). Introduisons comme précédemment une fonction de forme générique  $\mathbf{G}_k(r, \theta, s)$  telle que

$$\mathbf{u}_{W+}^h(r, \theta, s) = \sum_{k=1}^{N_s} \left[ \sum_{n=0}^{n_{DEK}} \sum_{i=I,II,III} b_{ink} r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta) + b'_k r \sin(\theta) \mathbf{e}_s \right] \varphi_k(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{N_s(3n_{DEK}+1)} b_k \mathbf{G}_k(r, \theta, s). \quad (2.29)$$

Un vecteur de déplacements généralisés  $\mathbf{U}_W$  est également défini, avec le même agencement que  $\mathbf{G}_k$ ,  $U_{Wk} = b_k \quad \forall k \in \llbracket 1; N_s \cdot n_{DEK} \cdot 3 \rrbracket$ . Cette fonction de forme générique et le vecteur de déplacements généralisés permettent également d'écrire

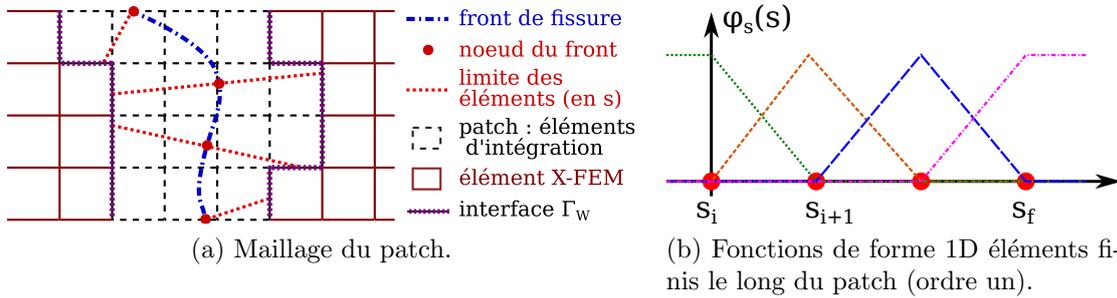


FIGURE 2.4 – Exemple de décomposition du patch en éléments finis d’ordre un selon l’abscisse curviligne  $s$  dans le cas 3D. Quatre éléments sont représentés le long du front.

un autre terme du problème (2.23)

$$\int_{\Omega_W} \nabla^s \mathbf{u}_W : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_W dV \longrightarrow \mathbf{K}_W \mathbf{U}_W$$

$$\text{avec } K_{Wkj} = \int_{\Omega_X} \nabla^s \mathbf{G}_k : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{G}_j dV \quad \forall (j, k) \in \llbracket 1; N_s \cdot n_{DEK} \cdot 3 \rrbracket^2$$
(2.30)

Une discrétisation éléments finis est utilisée le long de l’abscisse curviligne. Une approximation des coefficients de la série de Williams est donc identifiée en chaque nœud. Comme représenté pour quatre éléments sur la Figure 2.4a, ces coefficients ont comme zone d’influence le support de la fonction de forme du nœud auquel ils sont associés. L’évolution de ces coefficients est directement calculée, par exemple pour les facteurs d’intensité des contraintes (relation (1.28) dans l’expression (2.4))

$$\frac{K_i(s)}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{s=1}^{N_s} b_{i1s} \varphi_k(s).$$
(2.31)

Sauf mention contraire, par la suite, des éléments d’ordre un seront utilisés. Ils permettent d’assurer la continuité de l’évolution des coefficients asymptotiques. Les fonctions de forme associées à ces éléments sont représentées Figure 2.4b pour les quatre éléments de la Figure 2.4a. On peut remarquer que lorsque le front n’atteint pas la surface libre en formant un angle droit, une partie du patch se retrouve à l’extérieur des éléments. Elle est ramenée dans l’élément en étendant leurs fonctions de forme pour conserver la partition de l’unité.

Comme introduit par Xiao et Karihaloo [XIA 03], la différence d’ordre en  $r^{n/2}$  introduit un facteur d’échelle entre les différents ordres de la série avec la taille du patch  $r_W$ . Si rien n’est fait, les termes associés aux différents ordres auront des valeurs très différentes et la matrice de rigidité du patch sera mal conditionnée. Le

rayon  $r$  des séries de Williams est donc adimensionné par la taille caractéristique du patch  $r_W$ . L'opération inverse est effectuée sur les coefficients  $b_{ink}$  identifiés.

Comme pour les éléments finis, la question de l'intégration numérique se pose pour évaluer la matrice de rigidité. Les champs sont continus mais complexes. Comme en deux dimensions, nous choisissons d'utiliser les points de Gauss du maillage éléments finis étendus qui a été désactivé pour laisser place au patch. Un découpage en sous éléments conformes à la fissure permettrait d'améliorer la précision mais il n'a pour le moment pas été implémenté dans notre code de démonstration. Les fonctions de la série de Williams sont complexes (un schéma de Gauss d'ordre 5 était utilisé en 2D [PAS 11]). En 3D, ces fonctions sont associées aux fonctions de forme d'ordre un, augmentant leur complexité. Lorsqu'il n'y a pas de précision contraire, une intégration de Gauss d'ordre 8 par élément est retenue.

### 2.2.5 Raccord entre les deux domaines

Le raccord en moyenne utilisé pour assurer la continuité des déplacements entre le patch analytique et le domaine X-FEM est fait par l'intermédiaire d'un troisième champ  $\boldsymbol{\lambda}$  (voir équation (2.21)). Pour la résolution approchée du système il faut définir un espace de recherche de dimension finie pour ce champ. Comme pour les deux domaines, nous choisirons de l'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\lambda}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_l} \lambda_k \mathbf{L}_k(\mathbf{x}). \quad (2.32)$$

Un vecteur de multiplicateurs de Lagrange généralisés  $\boldsymbol{\Lambda}$  est également défini tel que  $\Lambda_k = \lambda_k, \forall k \in \llbracket 1; N_l \rrbracket$ . Cette définition permet d'écrire les derniers membres du problème (2.23) sous la forme matricielle

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_W - \mathbf{u}_X) dS &\longrightarrow \mathbf{C}_W \mathbf{U}_W + \mathbf{C}_X \mathbf{U}_W X \\ \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{v}_W - \mathbf{v}_X) dS &\longrightarrow \mathbf{C}_W \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{C}_X \boldsymbol{\Lambda} \\ \text{avec } C_{Wkj} &= - \int_{\Gamma_W} \mathbf{L}_k \mathbf{G}_j dS \quad \forall (j, k) \in \llbracket 1; N_s \cdot n_{DEK} \cdot 3 \rrbracket \times \llbracket 1; N_l \rrbracket \quad (2.33) \\ \text{et } C_{Xkj} &= \int_{\Gamma_W} \mathbf{L}_k \boldsymbol{\varphi}_j^g dS \quad \forall (j, k) \in \llbracket 1; N + N^d \rrbracket \times \llbracket 1; N_l \rrbracket \quad (2.34) \end{aligned}$$

#### 2.2.5.1 Choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange

Il faut maintenant choisir une discrétisation pour le champ  $\boldsymbol{\lambda}^h(\mathbf{x})$ . Il doit être défini sur l'interface  $\Gamma_W$ . Les deux choix les plus faciles à mettre en œuvre sont d'utiliser les discrétisations déjà disponibles

1. Utiliser le champ de déplacements éléments finis du domaine  $\Omega_X$

$$N_l = N + N^d, \quad \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}_k^g(\mathbf{x}), \quad \forall k \in \llbracket 1; N_l \rrbracket. \quad (2.35)$$

2. Utiliser le champ de déplacements analytique du patch  $\Omega_W$

$$N_l = N_s \cdot n_{DEK} \cdot 3, \quad \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_k(\mathbf{x}), \quad \forall k \in \llbracket 1; N_l \rrbracket. \quad (2.36)$$

Le choix 1 est équivalent à utiliser une discrétisation éléments finis 2D en utilisant les faces de l'interface comme éléments. Cette approche permet de définir une méthode d'intégration sur  $\Gamma_W$  : il est possible d'appliquer directement une méthode de Gauss. On associe des points de Gauss et les poids correspondants à chacun des éléments 2D et l'intégration est réalisée sur chacun de ces éléments. C'est la méthode que nous avons retenue pour l'intégration, avec une quadrature de Gauss d'ordre 8 également. Bien que les variations des fonctions considérées soient plus faibles puisque la frontière est plus loin du front, un ordre 8 est considéré car l'intégration est surfacique. Son impact en temps de calcul est faible par rapport au coût de calcul total.

Nous avons constaté à partir de l'équation (2.23) que les multiplicateurs de Lagrange sont homogènes à un champ de forces. Il peut alors être intéressant que la discrétisation choisi soit identique à la discrétisation des contraintes d'un des champs d'interface. C'est la raison qui a amené Passieux *et al.* [PAS 11] à considérer un troisième choix pour l'espace des multiplicateurs de Lagrange

3. Utiliser le champ de contraintes du patch  $\Omega_W$

$$N_l = N_s \cdot n_{DEK} \cdot 3, \quad \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{G}_k, \quad \forall k \in \llbracket 1; N_l \rrbracket. \quad (2.37)$$

En deux dimensions ce choix consiste à discrétiser les multiplicateurs de Lagrange avec une troncature de la série de Williams en contraintes de l'équation (1.18). Un problème existe donc pour les termes correspondant aux déplacements de corps rigide qui sont à contraintes nulles. Aussi, pour ces termes, Passieux *et al.* [PAS 11] ont proposé de considérer non plus les contraintes mais directement les déplacements de corps rigides. En trois dimensions, le problème ne se pose pas : aucune fonction  $\mathbf{G}_k$  ne correspond à des contraintes nulles.

Ces trois discrétisations des multiplicateurs de Lagrange sont considérées. Dans les exemples présentés par la suite, le champ de déplacements analytique du patch, choix 2, est utilisé lorsque le contraire n'est pas précisé. Ce choix donne de bons résultats. Il est simple à mettre en œuvre, et il permet de simplifier l'introduction du patch dans l'algorithme multigrilles localisées comme précisé à la Section 2.3.4.

### 2.2.5.2 Condition sur les multiplicateurs de Lagrange

Pour assurer la coercivité d'une formulation mixte, l'espace dual choisi doit vérifier la condition dite LBB (Ladizenskaïa-Babuška-Brezzi [BAB 73, FOR 91]) ou

condition *inf* — *sup* par rapport aux champs de déplacement. Si cette condition n'est pas vérifiée, des oscillations numériques vont apparaître au niveau de l'interface.

Il s'agit d'une condition sur les espaces de discrétisation. En pratique, lorsque l'espace dual est trop riche par rapport aux espaces de discrétisation des déplacements la condition risque de ne pas être vérifiée. Il existe donc deux approches [SIA 11] pour corriger ce problème : diminuer l'espace d'approximation des multiplicateurs ou augmenter celui des déplacements.

### 2.2.6 Approche matricielle et résolution

À partir des notations matricielles introduites précédemment, la résolution approchée du problème (2.23) consiste à résoudre système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_X & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_X^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_W & -\mathbf{C}_W^T \\ -\mathbf{C}_X & -\mathbf{C}_W & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_X \\ \mathbf{U}_W \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

La matrice de ce système linéaire n'est pas définie positive (zéros sur la diagonale à cause des multiplicateurs de Lagrange).

Une méthode de pivot de Gauss par blocs peut être mis en œuvre pour modifier la matrice à résoudre et obtenir une matrice définie positive. L'équation (2.38) est réécrite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{XW} & -\mathbf{C}_{XW}^T \\ -\mathbf{C}_{XW} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{XW} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\text{avec } \mathbf{K}_{XW} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_W \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{XW} = [\mathbf{C}_X \quad \mathbf{C}_W], \mathbf{U}_{XW} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X \\ \mathbf{U}_W \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Si  $\mathbf{K}_{XW}$  est inversible, dans notre cas si les mouvement de corps rigides des deux domaines sont bloqués (par substitution par exemple), la première ligne du système (2.39) peut être réécrite

$$\mathbf{U}_{XW} = \mathbf{K}_{XW}^{-1} (\mathbf{F}_0 + \mathbf{C}_{XW}^T \Lambda) \quad (2.40)$$

La deuxième partie du système (2.39) nous donne

$$\underbrace{\mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{C}_{XW}^T}_{\text{complément de Schur } \mathbf{S}} \Lambda = -\mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (2.41)$$

On réécrit alors (2.38) avec une matrice définie positive

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{XW} & -\mathbf{C}_{XW}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{C}_{XW}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{XW} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{F}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

La difficulté est néanmoins de calculer  $\mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{C}_{XW}^T$  et  $\mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{F}_0$ . Cette opération est réalisée en résolvant un système linéaire et en calculant

$$\text{Trouver } \mathbf{Y} \text{ tel que } \mathbf{K}_{XW} \mathbf{Y} = \mathbf{C}_{XW}^T \longrightarrow \mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{C}_{XW}^T = \mathbf{C}_{XW} \mathbf{Y}, \quad (2.43)$$

$$\text{Trouver } \mathbf{Z} \text{ tel que } \mathbf{K}_{XW} \mathbf{Z} = \mathbf{F}_0 \longrightarrow \mathbf{C}_{XW} \mathbf{K}_{XW}^{-1} \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_0 \mathbf{C}_{XW} \mathbf{Z}. \quad (2.44)$$

Dans le cas général, cette méthode pose néanmoins un certain nombre de problèmes. Il faut annuler les déplacements de corps rigide du domaine analytique qui ne sont pas bloqués. En effet, on s'est assuré qu'aucun déplacement n'était imposé sur ce domaine. De plus, annuler ces mouvements dans les éléments de symétries du problème n'est pas toujours possible pour le domaine analytique. Enfin, il faut résoudre deux systèmes linéaires supplémentaires.

La méthode QMR [FRE 91] préconditionnée, une variante de GMRES pour des systèmes non définis positifs, est donc préférée. Son taux de convergence est parfois faible, mais ce point ne fait qu'augmenter le temps de calcul et pas la mémoire utilisée. Dans les nombreux cas testés elle donne satisfaction, et c'est elle qui est utilisée quand le système est de grande dimension.

## 2.3 DEK-FEM dans un contexte multigrilles

La discrétisation de structures fissurées en 3D est un problème complexe qui peut nécessiter un très grand nombre d'inconnues. De plus, en trois dimensions, une fissure peut avoir une géométrie complexe. Ses lèvres sont des surfaces parfois courbes et la prise en compte de la courbure de son front nécessite une discrétisation très fine. Dans une structure industrielle, on s'intéresse fréquemment à de petites fissures (par rapport à la taille de la structure). Au niveau du front de ces fissures, les champs mécaniques sont singuliers et donc très localisés. Trois échelles, illustrées Figure 2.5 cohabitent donc : celle de la structure, celle de la fissure et celle de la singularité.

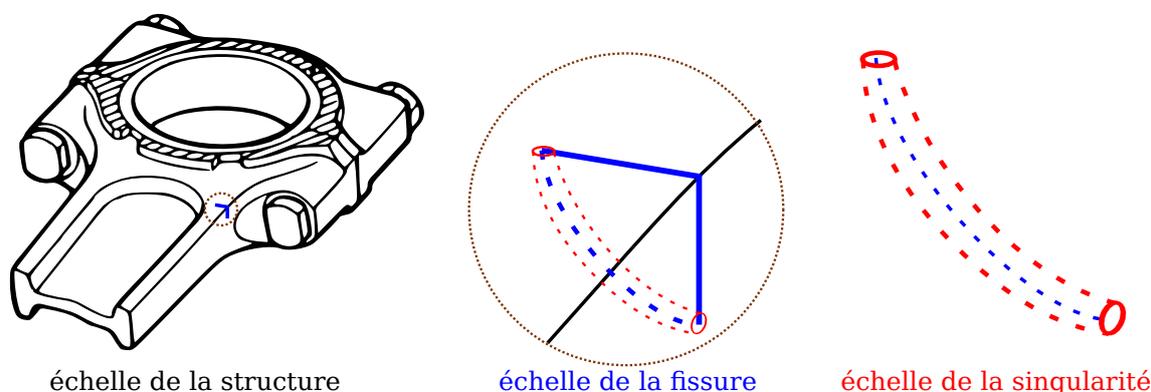


FIGURE 2.5 – Représentation des trois échelles d'une structure fissurée.

### 2.3.1 Raffinement local et méthodes multi-échelles

En général, une simulation avec la méthode FEM nécessite un raffinement localisé important autour du front pour obtenir une bonne précision sur les champs mécaniques en pointe de fissure et donc sur les facteurs d'intensité des contraintes. La méthode X-FEM améliore la précision mais nécessite quand même un certain raffinement au niveau du front pour s'adapter à l'échelle de la singularité. En trois dimensions, un raffinement local génère un nombre de degrés de liberté supplémentaires important et n'est pas une opération triviale. Pour surmonter ces difficultés des méthodes multi-échelles sont mises en œuvre.

Une première famille de méthode consiste à superposer un modèle micro au modèle macroscopique aux endroits où des phénomènes locaux doivent être pris en compte. On peut citer par exemple la formulation variationnelle multi-échelles proposée par Hughes [HUG 95]. Pour ce type d'approche, la difficulté est le transfert des informations entre les deux modèles. Ce transfert peut par exemple se faire avec le couplage en énergie de la méthode Arlequin [DHI 05] (utilisée pour la HAX-FEM, voir Partie 1.2.5.2). Comme pour la DEK-FEM, les deux modèles peuvent également être séparés en deux (ou plus) domaines distincts et couplés sur leur interface [GUI 07] au sens faible. Un point clef de ces approches est la méthode de couplage entre les deux échelles qui les fait communiquer. En dynamique, il faut être vigilant pour que l'énergie associée à des longueurs d'ondes incompatibles aux deux domaines soit correctement transmise et conservée [RAM 13].

Lorsque la microstructure se répète, il peut être intéressant d'en homogénéiser le comportement afin de pouvoir faire le calcul à l'échelle macroscopique [NEM 99]. Ce type d'approche est difficile à étendre aux cas non-linéaires, mais la méthode  $FE^2$  proposé par Feyel et Chaboche [FEY 00] traite le comportement à l'échelle microscopique et l'équilibre des contraintes homogénéisées à l'échelle macroscopique. Ces principes d'homogénéisation ont également été utilisés dans le contexte de la partition de l'unité [FIS 05].

Lorsque les différentes échelles peuvent être couplées avec le même modèle, il est possible de simplement raffiner le maillage localement. Ces techniques de remaillage sont souvent automatisées à partir d'une estimation de l'erreur commise [HUE 99]. Il existe trois méthodes principales qui sont parfois couplées entre elles :

1. *h-adaptivity* qui consiste à rajouter des éléments et à diminuer leur taille  $h$ ,
2. *p-adaptivity* qui consiste simplement à ajouter des nœuds pour augmenter l'ordre d'interpolation  $p$  des éléments,
3. *r-adaptivity* qui consiste à déplacer les nœuds des éléments sans modifier le nombre de degrés de liberté.

Cependant, la modification du maillage, notamment en trois dimensions n'est pas triviale. De plus, ces méthodes font augmenter le nombre de degrés de liberté pour atteindre la précision voulue. Une méthode multigrilles localisées [CAV 05, BIB 13] permet d'avoir un indicateur d'erreur naturel, de raffiner la discrétisation facilement et de résoudre un système à grand nombre de degrés de liberté de façon

quasi-optimale. Cette méthode a été étendue à des grilles X-FEM par Rannou *et al.* [RAN 09]. La méthode multigrilles peut également être couplée avec la décomposition de domaine lorsque la différence d'échelle existe en espace comme en temps [GRA 03].

### 2.3.2 Présentation des méthodes multigrilles

La résolution d'un système linéaire à un grand nombre  $n$  d'inconnues est un problème coûteux. La méthode naïve du pivot de Gauss a une complexité en  $O(n^3)$ . Cette complexité est nettement plus faible pour des algorithmes itératifs comme le gradient conjugué préconditionné qui est en  $O(n^{3/2})$ . Les solveurs multigrilles offrent une alternative prometteuse puisque leur complexité pour des maillages structurés est en  $O(n \log n)$  [BRA 77, VEN 00]. C'est cette complexité compétitive qui fait la force de ces approches. Cette méthode a été initialement développée pour des algorithmes différences finies en mécanique des fluides. Elle s'appuie sur la propriété de lissage des solveurs itératifs. Pour un maillage donné, les premières itérations approchent bien les modes locaux tandis qu'il faudra beaucoup d'itérations pour lisser la solution et donc approcher les modes globaux (qui impactent toute la structure). L'idée des multigrilles est de calculer ces modes globaux sur des maillages (grilles) plus grossiers, pour lesquels une itération est nettement moins coûteuse (moins de degrés de liberté).

La méthode consiste à générer une hiérarchie de grilles (illustrée Figure 2.6) puis à résoudre par itérations entre les grilles successives. L'initialisation consiste à résoudre le problème grossier (peu coûteux), puis projeter les déplacements sur les grilles plus fines. Une itération du solveur multigrilles, représentée schématiquement sur la Figure 2.6, commence par quelques itérations du solveur itératif sur la grille fine, dont le résidu est restreint à la grille supérieure et récursivement jusqu'à la grille grossière. Ensuite, une correction des déplacements est calculée sur la grille grossière puis projetée sur les grilles fines. Quelques itérations du solveur itératif sont calculées sur cette grille avec ce résidu comme second membre et récursivement jusqu'à la grille grossière. Elles sont répétées jusqu'à convergence et permettent de réduire le nombre d'itérations du solveur sur la grille fine (par comparaison à une résolution itérative sur la grille fine).

Bai et Brandt [BAI 87] ont étendu ce concept à l'utilisation de grilles localisées. Ce résultat est particulièrement intéressant puisqu'il permet de faire cohabiter plusieurs échelles. La localisation permet de raffiner la discrétisation aux endroits nécessaires (voir Figure 2.7 pour un exemple dans le cadre de la fissuration). Pour la génération des grilles, plusieurs approches sont possibles. Une première consiste à générer des grilles plus grossières à partir de la discrétisation cible pour réduire le temps de calcul. Une seconde approche démarre avec un maillage grossier (à l'échelle macroscopique) et des grilles localisées sont ajoutées pour atteindre l'échelle microscopique. Un facteur 2 entre deux grilles successives est considérée comme optimal [RAN 08]. Ce facteur rend l'ajout des grilles et donc le raffinement très simple

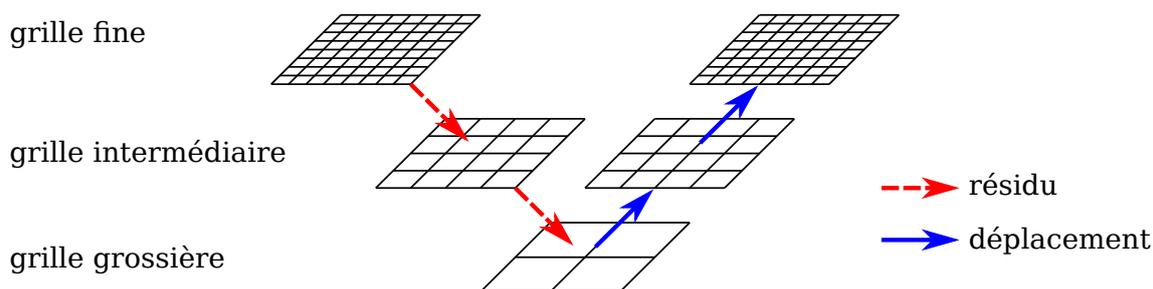


FIGURE 2.6 – Illustration d’une itération entre les grilles pour une méthode multi-grilles totale à 3 grilles.

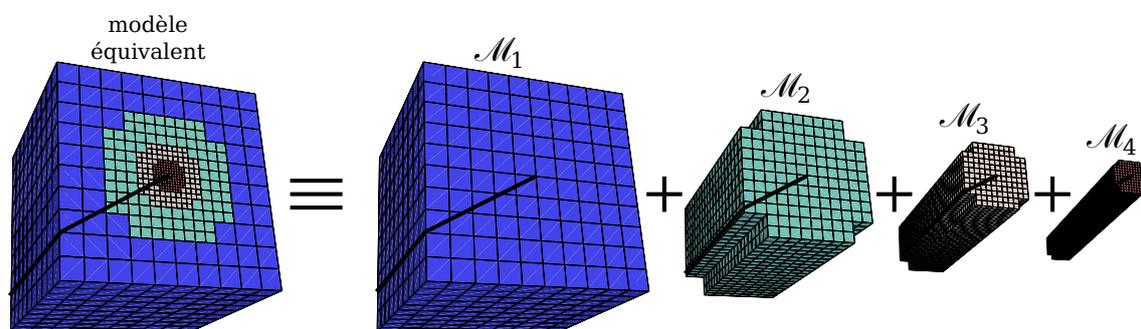


FIGURE 2.7 – Exemple de grilles localisées ( $n_g = 4$ ) en pointe de fissure en trois dimensions.

puisqu’il consiste à découper des éléments en deux dans chaque direction (ou inversement à les réunir). Raffiner un maillage localement est donc une opération triviale, d’autant qu’il simplifie la génération des opérateurs de transfert entre les grilles.

À convergence les deux grilles les plus fines fournissent un indicateur d’erreur de discrétisation, et permettent donc de savoir où ajouter des grilles fines supplémentaires. À partir de cet indicateur, des méthodes de raffinement automatique [CAV 05, BIB 13] avec contrôle de la précision ont été développées. Ces méthodes tirent leur efficacité de la facilité du raffinement et de l’efficacité du solveur. Les méthodes multigrilles ont également été étendues aux cas non-linéaires FAS (*Full Approximation Scheme* [BRA 77]), où les grilles grossières traitent les déplacements totaux et non plus une correction. Le traitement de non-linéarités matérielles, avec variable interne, est plus compliqué notamment pour le transfert de ces variables entre les grilles [KAC 93, RAN 08, BIO 10].

### 2.3.3 Méthode X-FEM multigrilles localisées

Par la suite, nous utilisons la méthode multigrilles localisées avec des grilles X-FEM développée par Rannou *et al.* [RAN 09, RAN 08]; elle est donc présentée

ci-dessous dans sa formulation élastique linéaire. La localisation des grilles permet de coupler l'échelle de la structure, l'échelle de la fissure et l'échelle de la singularité. Dans un premier temps, l'algorithme de résolution est donné. Son fonctionnement est ensuite présenté avec ses propriétés. Enfin la manière dont sont calculés les opérateurs de changement d'échelle est détaillée pour une simulation X-FEM.

### 2.3.3.1 Algorithme multigrilles localisées

L'algorithme multigrilles utilisé repose sur une hiérarchie de  $n_g$  grilles. Un indice  $g$  est donné à chacune de ces grilles, et aux quantités qui y sont définies. La grille la plus grossière est référencée comme la première  $g = 1$ , et plus l'indice augmente plus la finesse des grilles augmente jusqu'à la plus fine  $n_g$ .

Les grilles étant localisées, il existe une zone de recouvrement et une zone sans recouvrement. Pour une grille  $g$  donnée, nous nous intéressons à la zone où une grille plus fine existe. Nous définissons la quantité  ${}^B\mathbf{Q}_g$  de cette grille  $g$  à partir de  $\mathbf{Q}_g$  mais avec des valeurs nulles où aucune grille plus fine n'existe. Cette quantité a donc la même dimension que  $\mathbf{Q}_g$  mais a une valeur non nulle uniquement là où une grille plus fine existe. Pour cette grille  $g$ , nous définissons également  $\Gamma_g$  comme la frontière de la grille plus fine  $g$  à l'intérieur du domaine de la grille grossière  $g - 1$ .

#### Algorithme multigrilles localisées

1. Initialisation du  $\Lambda$  cycle
  - Grille la plus grossière :  $\mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1^0 = \mathbf{F}_1$ ,  $g = 2$
  - Initialisation d'un compteur de sous-cycles :  $\forall g \in ]1..n - g[ \quad c_g = 1$

##### 1.1. Transfert des déplacements vers la grille plus fine

$$\mathbf{U}_g^{-1/2} = \mathbf{P}_g \mathbf{U}_{g-1}^0$$

##### 1.2. Relaxation de ces déplacements projetés

Calcul de  $\mathbf{U}_g^0$  par  $\nu_2$  itérations de gradient conjugué à partir de  $\mathbf{U}_g^{-1/2}$ ,  
 $\mathbf{K}_g \mathbf{U}_g^0 = \mathbf{F}_g$ , sous la condition  $\mathbf{U}_g^0|_{\Gamma_g} = \mathbf{P}_g \mathbf{U}_{g-1}^0|_{\Gamma_g}$

##### 1.3. Si $g \neq n_g$ : retourner à 1.1. avec $g = g + 1$

#### 2. Relaxation de la grille fine $\nu_f - \nu_2$ itérations de gradient conjugué

$$\mathbf{K}_g \mathbf{U}_{n_g}^{i+1/4} = \mathbf{F}_{n_g}, \text{ sous la condition } \mathbf{U}_{n_g}^{i+1/4}|_{\Gamma_{n_g}} = \mathbf{P}_{n_g} \mathbf{U}_{n_g-1}^i|_{\Gamma_{n_g}} \quad (2.45)$$

#### 3. $V$ cycles multigrilles $i + 1$

##### 3.1. Résolutions sur les grilles fines

- $g = g - 1$

— Calcul des forces de transfert venant des grilles fines :

$$\mathbf{B}_{U_g}^i = \mathbf{P}_g^T \left[ (\mathbf{K}_{g+1} - {}^B\mathbf{K}_{g+1}) \mathbf{U}_{g+1}^i + \mathbf{B}_{U_{g+1}}^i \right] \quad (2.46)$$

— Relaxations :  $\nu_1$  itérations de gradient conjugué

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g^{i+1/4} = \mathbf{F}_g - \mathbf{B}_{U_g}^i + {}^B\mathbf{K}_g \mathbf{U}_g^i \\ \text{sous la condition } \mathbf{U}_g^{i+1/4} |_{\Gamma_g} = \mathbf{P}_g \mathbf{U}_{g-1}^i |_{\Gamma_g} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

— Si  $g > 1$  retour à 3.1.

### 3.2. Résolution directe sur la grille grossière

— Test de convergence : si  $\max_g \frac{\|\mathbf{U}_g^i - \mathbf{U}_g^{i-1}\|_E}{\|\mathbf{U}_1^i\|_E} < \epsilon$  **STOP**,

$\|\mathbf{U}_g\|_E$  est la norme énergétique telle que  $\|\mathbf{U}_g\|_E = \mathbf{U}_g^T \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g$ .

— Résolution directe du système grossier :

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1^{i+1} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{B}_{U_1}^i + {}^B\mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1^i \quad (2.48)$$

—  $g = g + 1$

### 3.3. Projection des déplacements des grilles grossières sur les fines (avec relaxations)

— Transfert des déplacements grossiers vers la grille plus fine

$$\mathbf{U}_g^{i+1/2} = \mathbf{U}_g^i + \mathbf{P}_g \underbrace{(\mathbf{U}_{g-1}^{i+1} - \mathbf{U}_{g-1}^i)}_{\Delta \mathbf{U}_{g-1}^{i+1}} \quad (2.49)$$

— Calcul de  $\mathbf{U}_g^{i+1}$  :  $\nu_2$  itérations de gradient conjugué à partir de  $\mathbf{U}_g^{i+1/2}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g^{i+1} = \mathbf{F}_g - \mathbf{B}_{U_g}^i + {}^B\mathbf{K}_g \mathbf{U}_g^{i+1/2} \\ \text{sous la condition } \mathbf{U}_g^{i+1} |_{\Gamma_g} = \mathbf{P}_g \mathbf{U}_{g-1}^{i+1} |_{\Gamma_g} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

— Si  $g = n_g$  : retour à 2

— Si  $c_g = \gamma$  :  $c_g = 1$  et  $g = g + 1$  puis retour à 3.3.

— Sinon :  $c_g = c_g + 1$  et  $g = g + 1$  puis retour à 3.1.

Cet algorithme est basé sur des itérations (exposant  $i$ ) entre les grilles pour obtenir le champ de déplacement. Pour deux niveaux et donc pour  $n_g$  récursivement, il a été justifié par une formulation variationnelle multi-échelles par Rannou [RAN 08]. Dans un premier temps, les quantités sont initialisées pour permettre de lancer l'algorithme. L'initialisation commence par la résolution de la grille la plus grossière pour obtenir une approximation des déplacements. Ces déplacements sont ensuite projetés

vers la grille inférieure (restriction) où quelques itérations de gradient conjuguée sont réalisées. Ces itérations permettent de corriger l'approximation grossière avec des modes à longueur de variation plus courte. Elles ont lieu sous la contrainte que les déplacements de la frontière de la grille considérée soit compatible avec les déplacements de la grille supérieure. Cette contrainte est facilement définie puisque les grilles sont hiérarchiques (Section 2.3.3.2). Ces conditions sont imposées par substitution [RAN 08]. L'opération est réalisée jusqu'à la grille la plus fine. Pour des schémas multigrilles où le recouvrement est total, l'initialisation sur la grille la plus grossière permet de diminuer le temps de calcul [VEN 00].

Les itérations s'arrêtent lorsqu'un nouveau cycle multigrilles n'apporte qu'une modification mineure de la solution calculée. L'indicateur d'erreur utilisé est un indicateur de stagnation de l'énergie de déformation  $\epsilon_E$  entre deux cycles  $i$  et  $i - 1$

$$\epsilon_{Eg}^i = \frac{\int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\sigma}_g : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_g}{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_1 : \boldsymbol{\epsilon}_1} = \frac{\Delta \mathbf{U}_g^i \mathbf{K}_g \Delta \mathbf{U}_g^i}{\mathbf{u}_1^i \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_1^i}. \quad (2.50)$$

Où  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_g$  (respectivement  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_g$ ) représente l'incrément de déformations (respectivement de contraintes) entre deux cycles multigrilles  $i$  et  $i - 1$ . Cet indicateur peut être calculé pour toutes les grilles. Un indicateur directement basé sur les déplacements calculés peut également être utilisé

$$\epsilon_{ug} = \frac{\text{mean}_{ddl} |U_g^i - U_g^{i-1}|}{\max_{ddl} |U_1|}. \quad (2.51)$$

Une fois initialisé, le cycle multigrilles peut commencer. Il est composé de deux grandes étapes :

- fin→gros : la solution sur la grille fine  $g$  est restreinte sur la grille grossière  $g - 1$  sous la forme d'un résidu, puis quelques ( $\nu_1$ ) itérations de gradient conjugué sont effectuées sur la grille grossière  $g - 1$  (opérations 3.1. de l'algorithme). Ces itérations corrigent les déplacements avec les informations de la grille la plus fine ;
- gros→fin : la correction  $\Delta \mathbf{U}_{g-1}$  apportée par la grille grossière  $g - 1$  est projetée sur la grille fine  $g$ , puis quelques ( $\nu_2$ ) itérations de gradient conjugué sont effectuées sur la grille fine  $g$  (opérations 3.3. de l'algorithme). Ces itérations sur la discrétisation plus fine corrigent les déplacements issus de la grille grossière.

Pour l'étape fin→gros, la grandeur qui est transférée entre les deux grilles  $\mathbf{B}_{U_g}^i$  est homogène à un effort. Elle agit comme un second membre de la grille grossière. Réécrivons le membre de droite de l'équation 2.47 pour deux grilles

$$\mathbf{F}_g - \mathbf{P}_g^T [\mathbf{K}_{g+1} \mathbf{U}_{g+1}^i] + {}^B \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g^i, \quad (2.52)$$

sur la zone de recouvrement, il s'apparente à un résidu.

Ces deux étapes reposent sur le transfert de quantités entre des grilles différentes. Pour cela des opérateurs de transfert sont construits comme détaillé à la Section 2.3.3.2. Les déplacements de la grille grossière  $\mathbf{U}_{g-1}$  sont prolongés sur la grille

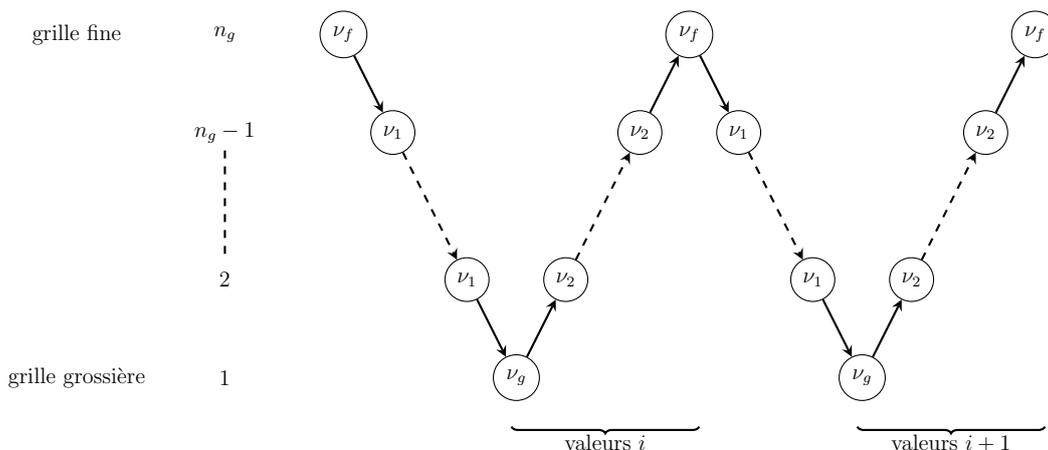


FIGURE 2.8 – Représentation d’un cycle multigrilles pour  $n_g$  grilles avec  $\gamma = 1$  (une seule répétition du cycle multigrilles par niveau).

fine  $\mathbf{U}_g$  avec l’opérateur  $\mathbf{P}_g$  (prolongement) qui permet d’écrire  $\mathbf{U}_g = \mathbf{P}_g \mathbf{U}_{g-1}$ . Dans l’autre sens, de efforts sont transmis, ces efforts sont restreints de la grille fine à la grille grossière par un opérateur de restriction  $\mathbf{R}_g$ . Pour permettre de conserver le travail des efforts intérieurs, l’opérateur utilisé est tel que  $\mathbf{R}_g = \mathbf{P}_g^T$  [RAN 08].

Un point clef du solveur multigrilles est l’enchaînement de la résolution entre les grilles fines et grossières. La méthode retenue (illustrée sur la Figure 2.8 pour  $n_g$  grilles) consiste à faire quelques ( $\nu_1$ ) itérations sur chacune des grilles fines jusqu’à la grille la plus grossière. Puis  $\nu_2$  itérations sont effectuées sur les grilles grossières jusqu’à la grille la plus fine. Une alternative peut être de faire des sous cycles sans aller à chaque fois jusqu’à la grille grossière. Des cycles intermédiaires peuvent être réalisés en ajustant le paramètre  $\gamma$  de l’algorithme ci-dessus. Le choix fait ici est de balayer à chaque cycle toutes les grilles  $\gamma = 1$ .

Les autres paramètres du solveur à ajuster sont le nombre d’itérations  $\nu_1$  et  $\nu_2$  du solveur gradient conjugué préconditionné lors de l’étape fin→gros et gros→fin respectivement. Ces paramètres sont à optimiser selon la nature du problème à résoudre pour rendre le solveur le plus efficace possible. Il s’agit d’un compromis entre la précision des corrections apportées et le coût de calcul d’un cycle. Les itérations du cycle multigrilles visent à faire converger le champ de déplacements calculé et le champ d’efforts qui transitent entre les grilles. La grille grossière permet de calculer précisément les modes de grande longueur de variation qui nécessiteraient beaucoup d’itérations sur les grilles fines. Tant que ces modes ne sont pas bien évalués, l’algorithme ne peut converger c’est pourquoi nous choisissons de résoudre exactement la grille la plus grossière [RAN 08]. Si cette résolution exacte est trop coûteuse, il est possible de simplement ajouter une grille plus grossière. De même la question du nombre d’itérations à réaliser sur la grille la plus fine se pose, doit-on effectuer à la fois les  $\nu_1$  et  $\nu_2$  itérations? Nous choisissons de définir un nombre  $\nu_f$  d’itérations sur cette grille, éventuellement différent de  $\nu_1 + \nu_2$ .

Lorsque les grilles ne sont pas localisées, la grille la plus fine est de loin la grille qui a le plus de degrés de liberté. Les opérations y sont donc plus chères en nombre de calcul et en mémoire utilisée. Les grilles localisées permettent au contraire d'avoir un nombre plus homogène de degrés de liberté entre les grilles (tout en garantissant un niveau de précision donné). À convergence, le champ de déplacements calculé et donc la précision de la discrétisation est celui de la grille la plus fine de l'endroit considéré.

D'un point de vue général, les méthodes multigrilles permettent de prendre en compte plusieurs échelles. Rannou *et al.* [RAN 09] ont montré que cette méthode permettait de prendre en compte une fissure très petite à l'échelle de la structure. Lorsque les éléments grossiers qui représentent toute la structure sont trop grands pour prendre en compte la fissure, l'enrichissement des éléments fins uniquement est suffisant. À partir de ce résultat, Passieux *et al.* [PAS 13] ont proposé une méthode de calcul non intrusif permettant de prendre en compte une fissure dans un calcul standard. Pour une structure simulée avec un logiciel de calcul éléments finis classique, la méthode permet de prendre en compte une fissure comme si une simulation X-FEM était réalisée. Les déplacements de la simulation éléments finis classique sont transmis à un code multigrilles permettant de prendre en compte la fissure qui ne renvoie à cette simulation que des efforts qui apparaissent simplement comme des efforts au second membre.

### 2.3.3.2 Les opérateurs de changement d'échelle

Le problème est résolu sur un ensemble de maillages, dans un cycle multigrilles passant de grilles fines  $g$  à des grilles grossières  $g - 1$  et inversement. Les opérateurs de prolongement  $\mathbf{P}_g$  et de restriction  $\mathbf{R}_g$  entre ces grilles sont définis comme suit

$$\begin{cases} \mathbf{U}_g &= \mathbf{P}_g \mathbf{U}_{g-1}, \\ {}^B \mathbf{K}_{g-1} \mathbf{U}_{g-1} &= \mathbf{R}_g \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g. \end{cases} \quad (2.53)$$

Dans cette équation,  $\mathbf{K}_g \mathbf{U}_g$  sont les forces internes associées au maillage fin, et  ${}^B \mathbf{K}_{g-1} \mathbf{U}_{g-1}$  les forces internes associées au maillage grossier où une grille plus fine existe.

Un facteur deux a été choisi entre les grilles, les espaces  $\mathcal{U}_g^{EF}$  définis par les éléments finis sur ces grilles sont donc imbriqués c'est-à-dire

$$\mathcal{U}_{g-1}^{EF} \subset \mathcal{U}_g^{EF}, \quad \forall g \in \llbracket 1, n_g \rrbracket. \quad (2.54)$$

Cette propriété permet de projeter facilement un champ de déplacements du maillage grossier sur le maillage fin. Le degré de liberté  $j$  du maillage fin  $U_{g_j}$  est simplement mis à la valeur de déplacement grossier  $\mathbf{u}_{g-1} \cdot \mathbf{e}_j$  dans la direction  $j$  de la fonction de forme du maillage fin, au nœud du maillage fin correspondant  $\mathbf{x}_j$

$$U_{g_j} = \mathbf{u}_{g-1}(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{e}_j, \quad \forall j \in N_g, \quad (2.55)$$

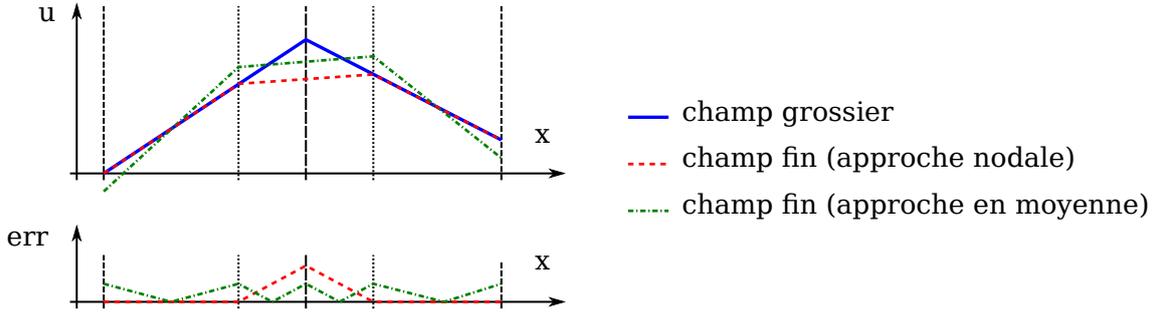


FIGURE 2.9 – Exemple de projection d'un maillage grossier vers un maillage fin pour un déplacement unidimensionnel. Deux méthodes sont comparées, une approche nodale et une méthode de projection en moyenne. La partie supérieure représente les déplacements, la partie inférieure, l'erreur par rapport au champ grossier.

où  $N_g$  est l'ensemble des indices des fonctions de forme du maillage  $g$ . La construction de l'opérateur de prolongement  $\mathbf{P}_g$ , des déplacements de la grille grossière  $g-1$  vers la grille fine  $g$ , est donc très simple

$$P_{gjk} = U_{g-1k} \varphi_{g-1k}(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{e}_j, \quad \forall (j, k) \in N_g \times N_{g-1}, \quad (2.56)$$

où  $\varphi_{g-1k}$  est la  $k^{\text{ième}}$  fonction de forme du maillage grossier. Ces fonctions de forme ayant un support restreint, la matrice  $\mathbf{P}_g$  est rectangulaire creuse. Elle peut être évaluée au niveau élémentaire. Lorsque les grilles ne sont pas imbriquées (équation (2.54)), cette approche nodale n'est plus exacte, voir Figure 2.9. L'opération de projection peut alors être réalisée plus précisément [DUR 06] avec une projection en moyenne comme présentée à l'équation (1.109).

Il est intéressant que le changement de grille soit conservatif, c'est-à-dire que les opérateurs de changement d'échelle laissent invariant le travail des efforts intérieurs sur la zone de projection

$$\mathbf{U}_{g-1}^T \mathbf{K}_{g-1} \mathbf{U}_{g-1} = \mathbf{U}_g^T \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g \quad \forall (\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_{g-1}) \quad (2.57)$$

$$\mathbf{U}_{g-1}^T \mathbf{R}_g \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g = \mathbf{U}_{g-1}^T \mathbf{P}_g^T \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g \quad \forall (\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_{g-1})$$

↓

$$\mathbf{R}_g = \mathbf{P}_g^T \quad (2.58)$$

l'opérateur de restriction  $\mathbf{R}_g$  est donc obtenu à partir de l'opérateur de prolongement.

Dans le cadre des éléments finis étendus, la construction des opérateurs de changement d'échelle n'est plus si simple [RAN 07, RAN 09]. En effet, il faut transférer les degrés de liberté standards et les degrés de liberté d'enrichissement qui partagent les mêmes supports. La relation d'inclusion des espaces (2.54) n'est plus vérifiée pour une méthode X-FEM standard. Il existe un certain nombre de nœuds d'abscisse  $\mathbf{x}_j$  du maillage fin, où les enrichissements fins sont incompatibles avec ceux du maillage

grossier. C'est-à-dire qu'en ce nœud les enrichissements appliqués sur la grille fine sont différents de ceux de la grille grossière.

Les maillages n'étant plus compatibles, une approximation est nécessaire pour l'opération de transfert entre les grilles. Une méthode classique consiste à déterminer ces opérateurs à partir d'une approche en moyenne (confère équation (1.109)). Cette approche nécessite une intégration sur le domaine défini par la grille fine, l'assemblage de matrices de projection et leur inversion. Si les maillages sont imbriqués, l'opération peut être faite au niveau élémentaire mais l'intégration des fonctions singulières reste néanmoins complexe. Rannou *et al.* [RAN 07, RAN 09] ont proposé une extension de l'approche nodale précédente donnant des résultats aussi bons que l'approche en moyenne.

Cette méthode consiste à identifier indépendamment, les degrés de liberté éléments finis standards, l'enrichissement discontinu et les enrichissements singuliers. Pour le maillage fin  $g$ , réunissons les degrés de liberté en chacun des nœuds  $\mathbf{x}_j$  dans toutes les directions pour introduire cette méthode

$$\mathbf{u}_g(\mathbf{x}_j) = \mathbf{u}_{g_j} + \begin{cases} \mathbf{u}_{g_{c_j}} H(\mathbf{x}_j) & \text{enrichissement discontinu,} \\ \sum_{k=1}^4 \mathbf{u}_{g_{e_j}^k} S_k(\mathbf{x}_j) & \text{enrichissement singulier.} \end{cases} \quad (2.59)$$

Où  $\mathbf{u}_{g_j}$  sont les degrés de liberté éléments finis du nœud  $j$  dans la direction associée,  $\mathbf{u}_{g_{c_j}}$  sont les degrés de liberté des enrichissements discontinus du nœud  $j$  dans la direction associée, et  $\mathbf{u}_{g_{e_j}^k}$  les degrés de liberté des enrichissements singuliers  $k$  du nœud  $j$  dans la direction associée.

La méthode est présentée au cas par cas à partir de la nature des degrés de liberté du nœud fin considéré, puis en fonction de leur position dans le support des fonctions de forme du maillage grossier.

- Nœud fin standard
  - Dans le support de fonctions de forme standards uniquement : situation FEM de l'équation (2.55)
  - Dans le support de fonctions de forme enrichies : **non compatible**, on approche les déplacements grossiers enrichis avec les éléments finis fins aux nœuds fins (équation (2.55))
- Nœud fin enrichi par la discontinuité
  - Dans le support de fonctions de forme enrichies par la discontinuité : identification terme à terme des degrés de liberté éléments finis  $\mathbf{u}_{g_j}$  et des discontinus  $\mathbf{u}_{g_{c_j}}$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{g_j} &= \sum_{k \in N_{g-1}} u_{g-1k} \varphi_{g-1k}(\mathbf{x}_j) \\ \mathbf{u}_{g_{c_j}} &= \sum_{k \in N_{g-1}^d} u_{g-1ck} \varphi_{g-1k}(\mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (2.60)$$

- Dans le support de fonctions de forme enrichies avec la singularité et la discontinuité : **non compatible**, identification terme à terme des degrés de liberté éléments finis  $\mathbf{u}_{g_j}$  et des enrichissements fins discontinus  $\mathbf{u}_{g_{c_j}}$  avec tous les autres enrichissements grossiers

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{g_j} = \sum_{k \in N_{g-1}} u_{g-1_k} \varphi_{g-1_k}(\mathbf{x}_j) \\ \mathbf{u}_{g_{c_j}} = \left( \sum_{k \in N_{g-1}^d} \left[ u_{g-1_{ck}} \varphi_{g-1_k}(\mathbf{x}_j) H(\mathbf{x}_j) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^4 u_{g-1_{ek}^i} \varphi_{g-1_k}(\mathbf{x}_j) S_y(\mathbf{x}_j) \right] \right) / H(\mathbf{x}_j) \end{array} \right. \quad (2.61)$$

- Nœud fin enrichi avec la singularité
  - Dans le support de fonctions de forme enrichies avec la singularité : identification terme à terme des degrés de liberté éléments finis  $\mathbf{u}_{g_j}$  et des singuliers  $\mathbf{u}_{g_{e_j}^k}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{g_j} = \sum_{k \in N_{g-1}} u_{g-1_k} \varphi_{g-1_k}(\mathbf{x}_j) \\ \mathbf{u}_{g_{e_j}^i} = \sum_{k \in N_{g-1}^e} u_{g-1_{ek}^i} \varphi_{g-1_k}(\mathbf{x}_j), \quad \forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Cette approche nécessite simplement de calculer les fonctions de forme grossières et d'enrichissement aux nœuds du maillage fin. L'approximation réalisée dans les cas d'enrichissements fins non conformes avec les enrichissements grossiers est localisée. Par conséquent, elle est rapidement lissée par les itérations de gradient conjugué sur la grille fine [RAN 08].

### 2.3.4 Introduction du patch analytique

Le patch analytique décrit à la Section 2.2.4 est introduit dans l'algorithme multigrilles. Il permet de traiter l'échelle de la singularité qui est l'échelle la plus fine. Il est donc introduit au niveau de la grille la plus fine, comme représenté sur la Figure 2.10, la structure du programme multigrilles X-FEM localisées avec le patch est développée dans l'Annexe 1. Dans un premier temps, Passieux *et al.* [PAS 11] ont considéré le patch comme une grille à part entière, la grille la plus fine. Il faut alors calculer le raccord intégral pour imposer les déplacements sur sa frontière  $\Gamma_{n_g}$ , mais également des opérateurs de changement d'échelle entre le patch et la grille X-FEM la plus fine  $n_g - 1$ . Ces opérateurs ne peuvent plus être calculés par une extrapolation directe, une méthode en moyenne doit être utilisée. De plus cette grille a un très petit nombre de degrés de liberté. Un solveur direct est donc utilisé pour la patch analytique.

L'utilisation de cette approche a montré [PAS 11] que la méthode multigrilles avec le patch comme grille fine convergerait nettement plus lentement que la méthode

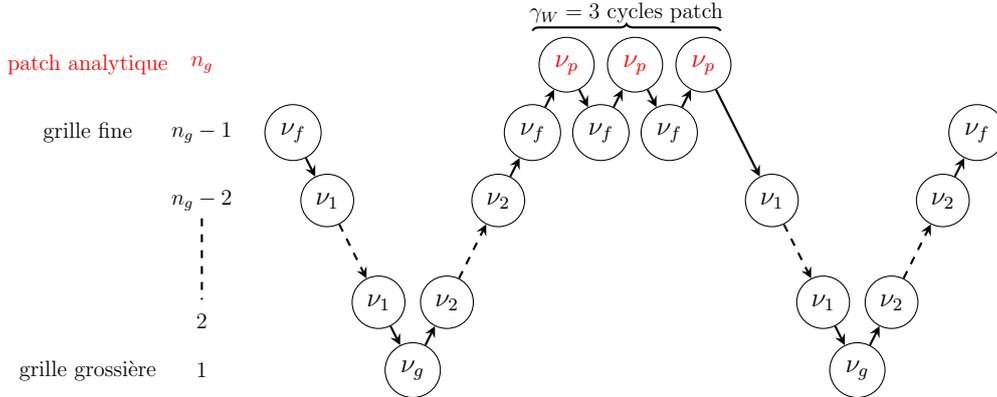


FIGURE 2.10 – Représentation d’un cycle multigrilles ( $n_g$  grilles,  $\gamma = 1$ ) avec l’introduction du patch analytique comme une grille supplémentaire et  $\gamma_W = 3$  itérations entre ce patch et la grille  $n_g$ , comme proposé par Passieux *et al.* [PAS 11].

multigrilles localisées X-FEM. Afin d’optimiser la vitesse de convergence d’un algorithme mixte comme illustré Figure 2.10, il est nécessaire de faire des itérations supplémentaires entre la grille fine  $n_g - 1$  et le patch. Il s’agit d’un sous cycle multigrilles pour le patch. Ce nombre de sous-cycles sera appelé  $\gamma_W$ . En pratique il a été constaté pour un exemple donné que  $\gamma_W = 6 \cdot \gamma$  est quasi-optimal.

Cette lenteur de convergence lorsque le patch est traité comme une grille de l’algorithme multigrilles invite à proposer une autre approche. Il est possible de décomposer la grille la plus fine  $n_g$  en deux sous domaines comme pour l’approche monogrille de la Section 2.2. Cette décomposition nécessite également l’utilisation d’une approche en moyenne pour construire les opérateurs de transfert entre cette grille et la grille plus grossière  $n_g - 1$ .

Dans la méthode de décomposition de domaine proposée, représentée Figure 2.2, les domaines  $\Omega_X$  et  $\Omega_W$  ne communiquent que par l’intermédiaire de leur interface. Le couplage du champ de déplacements X-FEM avec le champ analytique se fait par l’intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Dans l’esprit des méthodes de décomposition de domaine, Passieux *et al.* [PAS 13] ont proposé de condenser le domaine analytique sur son interface par l’intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange. Il est ensuite possible de ne résoudre le système que sur les degrés de liberté du domaine X-FEM. L’algorithme de résolution est alors celui représenté sur la Figure 2.8, avec une modification de la rigidité de la grille fine.

Le système linéaire de l’approche monogrille (2.38) caractérisant ce problème peut être séparé en deux parties

$$\begin{cases} \text{Problème grossier :} & \mathbf{K}_X \mathbf{U}_X = \mathbf{F} + \mathbf{C}_X^T \boldsymbol{\Lambda} \\ \text{Problème fin :} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_W & -\mathbf{C}_W^T \\ -\mathbf{C}_W & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_W \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_X \mathbf{U}_X \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.63)$$

Le problème fin n’est pas indépendant du problème grossier. Il reçoit des conditions aux limites du problème grossier. De son côté, le problème grossier est influencé par

le problème fin uniquement par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$ . Si le projecteur de Mortar  $\mathbf{C}_W$  est inversible (c'est le cas si on utilise les champs analytiques comme multiplicateurs de Lagrange), le problème fin permet alors d'écrire  $\Lambda$  sous la forme

$$\Lambda = -\mathbf{C}_W^{-T} \mathbf{K}_W \mathbf{U}_W \quad (2.64)$$

$$= -\underbrace{\mathbf{C}_W^{-T} \mathbf{K}_W \mathbf{C}_W^{-1}}_{\mathbf{S}_W^{-1}} \mathbf{C}_X \mathbf{U}_X. \quad (2.65)$$

Où  $\mathbf{S}_W^{-1}$  est l'inverse du complément de Schur. Le multiplicateur de Lagrange est donc écrit à partir des degrés de liberté du domaine X-FEM uniquement. Le problème grossier de l'équation (2.63) peut donc être résolu indépendamment des degrés de liberté du problème fin

$$\left[ \mathbf{K}_X + \mathbf{C}_X^T \underbrace{\mathbf{C}_W^{-T} \mathbf{K}_W \mathbf{C}_W^{-1}}_{\mathbf{L}_W \text{ dans [PAS 13]} } \mathbf{C}_X \right] \mathbf{U}_X = \mathbf{F}. \quad (2.66)$$

On remarque que la matrice de rigidité du patch analytique influence néanmoins la résolution sur le domaine X-FEM.

Dans le cas général où  $\mathbf{C}_W$  est rectangle et donc non inversible, la projection de  $\mathbf{u}_W$  sur  $\mathbf{u}_X$  est faite au sens des moindres carrés. On cherche à minimiser l'écart entre ces deux champs de déplacements au sens du produit scalaire suivant

$$J = (\mathbf{C}_X \mathbf{U}_X - \mathbf{C}_W \mathbf{U}_W)^T \cdot (\mathbf{C}_X \mathbf{U}_X - \mathbf{C}_W \mathbf{U}_W). \quad (2.67)$$

La fonction  $J$  résultante atteint un minimum quand sa dérivée s'annule

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{U}_W} &= 2 (\mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_W \mathbf{U}_W - \mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_X \mathbf{U}_X) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{U}_W &= (\mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_W)^{-1} \mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_X \mathbf{U}_X. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Plutôt que l'inverse de  $\mathbf{C}_W$  nous utiliserons  $(\mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_W)^{-1} \mathbf{C}_W^T$ . L'équation (2.65), devient alors

$$\Lambda = -\mathbf{C}_W (\mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_W)^{-T} \mathbf{K}_W (\mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_W)^{-1} \mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_X \mathbf{U}_X. \quad (2.69)$$

Le problème à résoudre sur les degrés de liberté du domaine X-FEM peut donc s'écrire comme précédemment

$$\left[ \mathbf{K}_X + \mathbf{C}_X^T \mathbf{C}_W (\mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_W)^{-T} \mathbf{K}_W (\mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_W)^{-1} \mathbf{C}_W^T \mathbf{C}_X \right] \mathbf{U}_X = \mathbf{F}. \quad (2.70)$$

Avec cette condensation, l'introduction du patch dans la grille fine modifie moins l'algorithme multigrilles. Il conserve la forme de la Figure 2.8. Afin de ne pas évaluer les déplacements du patch et avoir à construire les opérateurs de changement d'échelle avec une méthode en moyenne, la grille X-FEM est activée sur tout

le domaine. La matrice de rigidité  $\mathbf{K}_{n_g}$  de la grille la plus fine avec le patch est donc la rigidité du domaine X-FEM  $\mathbf{K}_X$  complétée de la matrice de rigidité  ${}^B\mathbf{K}_{n_g}$  X-FEM du domaine du patch analytique pour les éléments désactivés. De même les déplacements généralisés  $\mathbf{U}_{n_g}$  de la grille la plus fine  $n_g$  sont ceux du domaine X-FEM  $\mathbf{U}_X$  complétés par des degrés de liberté X-FEM  ${}^B\mathbf{U}_{n_g}$  associées à  $\Omega_W$ .

Les  $\nu_f$  relaxations sur la grille fine (voir Figure 2.8) sont donc faites en prenant en compte la condensation du patch analytique, l'équation (2.45) devient

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K}_{n_g} - {}^B\mathbf{K}_{n_g} + \mathbf{C}_X^T \mathbf{C}_W^{-T} \mathbf{K}_W \mathbf{C}_W^{-1} \mathbf{C}_X) \mathbf{U}_{n_g}^{i+1/4} = \mathbf{F}_{n_g}, \\ & \text{sous la condition } \mathbf{U}_{n_g}^{i+1/4} |_{\Gamma_{n_g}} = \mathbf{P}_{n_g} \mathbf{U}_{n_g-1}^i |_{\Gamma_{n_g}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dans cette équation,  $\mathbf{K}_{n_g} - {}^B\mathbf{K}_{n_g} = \mathbf{K}_X$  où  $\mathbf{K}_X$  est complété de zéros pour avoir la même dimension que  $\mathbf{K}_{n_g}$ , de même pour les déplacements généralisés. Cette modification de l'algorithme multigrilles localisées de la Section 2.3.3.1 a démontré son efficacité en terme de convergence et pour l'évaluation du facteur d'intensité des contraintes mode  $I$  dans [PAS 13]. Passieux *et al.* ont également utilisé avec succès ce nouvel algorithme pour simuler la propagation d'une fissure dans une plaque trouée en mode mixte. C'est cette méthode qui sera utilisée en 3D.

## Bilan sur l'extraction directe des facteurs d'intensité en 3D

La méthode d'extraction des FIC en trois dimensions développée dans le cadre de cette thèse est présentée dans ce chapitre. Elle est très similaire à sa version 2D, la principale difficulté de l'extension 3D est la définition de champs asymptotiques pour le patch analytique. La discrétisation proposée en pointe de fissure est basée sur une troncature de la série de Williams en déplacements. Cette série est supposée évoluer continûment le long du front. Numériquement cette évolution est traduite par une évolution éléments finis fonction de l'abscisse curviligne obtenue à l'aide d'une troisième *level set*. À partir de cette définition des déplacements, leur gradient est calculé dans la base locale pour obtenir les contraintes et les déformations. Cette discrétisation permet d'obtenir directement les évolutions des coefficients asymptotiques le long du front.

La méthode numérique permettant d'intégrer le patch dans la simulation de la structure est également présentée. Elle est basée sur une formulation faible à trois champs et utilise le formalisme de méthodes de décomposition de domaine. En pratique la décomposition de domaine est réalisée après la génération du maillage de la structure. Cette stratégie permet de simplifier l'opération de maillage et facilite la simulation de la propagation. Les éléments du patch sont désactivés et uniquement utilisés pour l'intégration. Enfin, Le couplage de cette méthode avec un stratégie multigrilles localisées est présenté. En trois dimensions, la résolution numérique d'un problème de fissuration nécessite généralement un très grand nombre de degrés de

liberté pour obtenir une bonne précision depuis l'échelle de la structure jusqu'à celle de la singularité. La méthode multigrilles X-FEM localisées permet de traiter efficacement la résolution et de générer plus facilement la discrétisation localement raffinée. La structure du programme multigrilles X-FEM localisées avec le patch analytique est détaillée à l'Annexe 1, elle synthétise l'approche numérique présentée dans ce chapitre.

Dans le Chapitre suivant, cette DEK-FEM 3D est validée sur la simulation de cas tests. Des fissures planes à front droits et courbes sont simulées. On vérifie que ces simulations permettent bien d'obtenir les évolutions des coefficients asymptotiques le long du front. Les différents paramètres de la méthode sont calibrés.

# Chapitre 3

## Application à des problèmes élastiques

*Ce Chapitre est consacré à l'application de la méthode DEK-FEM à des cas tests tridimensionnels. Dans un premier temps, des fissures planes à front droit sont considérées pour évaluer l'impact de la discrétisation le long du front sur l'évaluation des FIC. Ensuite, des fissures planes à front circulaire sont considérées. La méthode est évaluée sur des cas tests présentant des solutions analytiques. L'influence des différents paramètres de la méthode et de la discrétisation du patch sur l'identification des FIC est étudiée. Enfin, une application du couplage de la DEK-FEM avec un algorithme multigrilles X-FEM localisées est présentée.*

### Sommaire

---

|                                                       |            |
|-------------------------------------------------------|------------|
| <b>3.1 Fissures à front droit</b>                     | <b>110</b> |
| 3.1.1 Fissure symétrique en tension (SEN)             | 110        |
| 3.1.2 Flexion trois points (3PB)                      | 114        |
| <b>3.2 Fissures à front courbe</b>                    | <b>116</b> |
| 3.2.1 Fissure <i>penny-shaped</i> en tension          | 116        |
| 3.2.2 Fissure <i>penny-shaped</i> en cisaillement     | 119        |
| 3.2.3 Fissure <i>penny-shaped</i> inclinée en tension | 123        |
| 3.2.4 Fissure plane circulaire de coin en tension     | 128        |
| 3.2.5 Bilan de l'étude des fissures à front courbe    | 130        |
| <b>3.3 Fissures dans un contexte multigrilles</b>     | <b>131</b> |
| 3.3.1 Fissure symétrique en tension multigrilles      | 131        |
| 3.3.2 Bilan DEK-FEM multigrilles                      | 132        |

---

À l'heure actuelle, la méthode est développée pour des hexaèdres à huit nœuds. Ces éléments ont été choisis puisqu'ils permettent de construire facilement des maillages 3D réguliers. La méthode permet également l'utilisation de maillages générés par d'autres logiciels comme Gmsh [GEU 09]. L'extension à d'autres éléments ne présente pas de difficulté majeure. Le sous-découpage multigrilles doit néanmoins être prévu.

En ce qui concerne le domaine X-FEM, des enrichissements Heaviside généralisés présentés à l'équation (1.51) sont utilisés. Ces fonctions classiques introduisent des difficultés numériques dans les éléments semi-enrichis (*blending elements*, Section 1.2.2.5). Une autre difficulté de cette méthode est l'intégration des fonctions d'enrichissement, difficulté également présente pour la DEK-FEM au niveau du patch et de son interface. Nous utilisons simplement une méthode de Gauss d'ordre 7. Des solutions plus élaborées et plus performantes à ces difficultés sont présentées 1.2.2.5 et pourraient être implémentées.

Enfin, une autre difficulté introduite par l'extension au 3D est l'augmentation drastique du nombre d'éléments et donc de degrés de liberté. L'objectif de cette étude préliminaire est l'expérimentation de cette méthode numérique pour évaluer son potentiel. Il s'agit pour le moment d'un code Matlab. Une prochaine étape, pour régler ces trois difficultés, serait d'implémenter cette méthode dans un code de calcul X-FEM multigrilles localisées, comme ELFE-3D développé au LAMCOS. Par la suite, les coefficients asymptotiques sont normalisés, les longueurs sont données à titre indicatif en mètres.

## 3.1 Fissures à front droit

Nous nous intéressons dans un premier temps à des fissures planes à front droit. Le repère du front de fissure ( $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s$ ) est donc invariant le long du front. On s'affranchit donc du calcul de la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}_l$  lors du calcul du gradient des déplacements. Pour ce type de géométrie de fissure, la définition classique des champs singuliers (présentée Section 2.1.1) vérifie la compatibilité contraintes/déplacements. La définition classique ne prend pas en compte l'évolution le long du front, contrairement à la discrétisation proposée pour le patch analytique. Deux géométries et chargements sont considérés, un barreau avec une fissure symétrique en tension (SEN pour *Single Edge Notch*) et un barreau en flexion trois points avec une fissure inclinée (3PB pour *Three Points Bending*).

### 3.1.1 Fissure symétrique en tension (SEN)

Nous nous intéressons dans un premier temps à un barreau rectangulaire en tension a moitié fissuré par une fissure dans le plan de symétrie. Sa géométrie est représentée sur la Figure 3.1. La section du barreau a une épaisseur  $W$  deux fois plus grande que la longueur de la fissure  $a$ , et une largeur trois fois plus grande  $t = 3a$ .

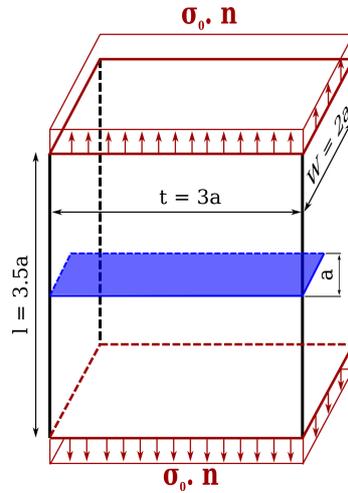


FIGURE 3.1 – Représentation de la géométrie et du chargement, pour le barreau symétrique en tension (SEN).

La longueur du barreau considéré est de  $l = 3.5 a$ . La tension est appliquée sur les extrémités par une répartition de pression  $\sigma_0 \cdot \mathbf{n}$ . Un coefficient de Poisson de  $\nu = 1/3$  est choisi.

Cette géométrie a été choisie car elle permet de comparer ces résultats à des résultats antérieurs. Ce cas test a notamment été traité par

- Li *et al.* [LI 98] avec la méthode des éléments de frontières (introduite à la Section 1.2.1.1). C'est la première référence que nous considérerons, elle n'est pas limitée par la discrétisation qui est 2D,
- Sukumar *et al.* [SUK 00] au moyen d'éléments finis étendus et avec l'intégrale d'interaction. Cette référence compare deux tailles de maillage X-FEM : 20 éléments par direction et 40 éléments par direction. Les champs auxiliaires sont les séries de Williams 2D en déformations planes. Les résultats ne sont pas donnés autour des vertex (intersection entre le front et la surface libre), c'est-à-dire dans les zones de variation rapide,
- Lachambre [LAC 14b] avec une méthode de projection sur les séries de Williams en déformations planes dans des plans orthogonaux au front introduite à la Section 1.2.4.3. Les champs mécaniques y sont obtenus par une simulation fine FEM puis projetés. Près des surface libres, cette approche ne donne pas satisfaction.

Les discrétisations X-FEM considérées pour la DEK-FEM sont les mêmes que Sukumar *et al.* [SUK 00] : une dite grossière avec 20 éléments par direction et la seconde dite fine avec 40 éléments par direction. Le rayon  $r_W$  du patch est de 1,7 éléments, 14 éléments finis 1D sont considérés le long du front pour le patch. Pour la discrétisation X-FEM grossière, un élément du patch a une longueur  $ds \simeq 1,43$  éléments X-FEM, tandis que pour la discrétisation fine  $ds \simeq 2,86$  éléments

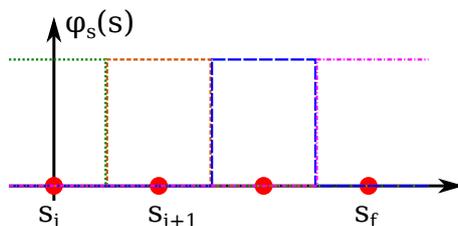


FIGURE 3.2 – Fonctions de forme 1D éléments finis le long du front (ordre zéro). Quatre éléments sont représentés le long du front comme sur la figure 2.4.

X-FEM. Les multiplicateurs de Lagrange sur l’interface  $\Gamma_W$  sont discrétisés sur des éléments finis 2D d’ordre un (sur les faces des éléments X-FEM qui représentent la frontière entre  $\Omega_W$  et  $\Omega_X$ ).

Dans un premier temps, des éléments d’ordre zéro sont considérés le long du front. Les fonctions de forme associées à ces éléments sont constantes autour des nœuds du front, et leur gradient le long du front est nul. Elles sont représentées Figure 3.2. Pour un front droit, lorsque des éléments d’ordre zéro sont considérés, les champs mécaniques du patch analytique sont directement ceux des séries de Williams sur chacun des éléments. Ils sont donc identiques aux champs auxiliaires de l’intégrale d’interaction utilisés dans la référence [SUK 00]. Néanmoins, cette discrétisation introduit des discontinuités des déplacements le long du front.

L’évolution du facteur d’intensité des contraintes en mode  $I$  ( $K_I$ ) évaluée par la simulation DEK-FEM est tracée pour cette discrétisation sur la Figure 3.3a. Puisque le problème est symétrique, seule la moitié de l’abscisse curviligne est représentée.  $s/t = 0$  est au milieu du front et  $s/t = 0.5$  sur la surface libre. À cœur, la valeur est proche des évaluations de la littérature qui utilisent la même définition des champs asymptotiques. Cette définition directement issue du 2D ne prend notamment pas en compte les modifications démontrées nécessaires en 3D [LEB 92]. Dans cette zone,  $K_I$  est quasiment constant aussi la discrétisation d’ordre zéro n’est pas pénalisante. Cependant, à l’approche des surfaces libres,  $K_I$  ne diminue que très peu. Cette discrétisation ne permet pas de prendre en compte la diminution observée dans la littérature, qui s’explique notamment par une singularité qui n’est plus d’ordre  $1/2$  [BAŽ 79, CHA 00]. Pour une discrétisation deux fois plus fine, l’évaluation de  $K_I$  ne varie que faiblement, la discrétisation grossière semble suffisante.

Une discrétisation éléments finis d’ordre un le long du front, comme représenté sur la Figure 2.4, induit un champ de déplacements continu le long du front. Les coefficients asymptotiques évalués le long du front sont donc continus et leur évolution le long du front est prise en compte dans la rigidité. Pour cet ordre, le champ de contraintes n’est plus identique à celui utilisé dans l’intégrale d’interaction. Pour cette discrétisation, la valeur de  $K_I$  est plus élevée que celui de l’intégrale d’interaction utilisée par Sukumar *et al.* [SUK 00]. L’ordre de grandeur reste comparable aux évaluations de la littérature. La diminution au bord du barreau est mieux prise

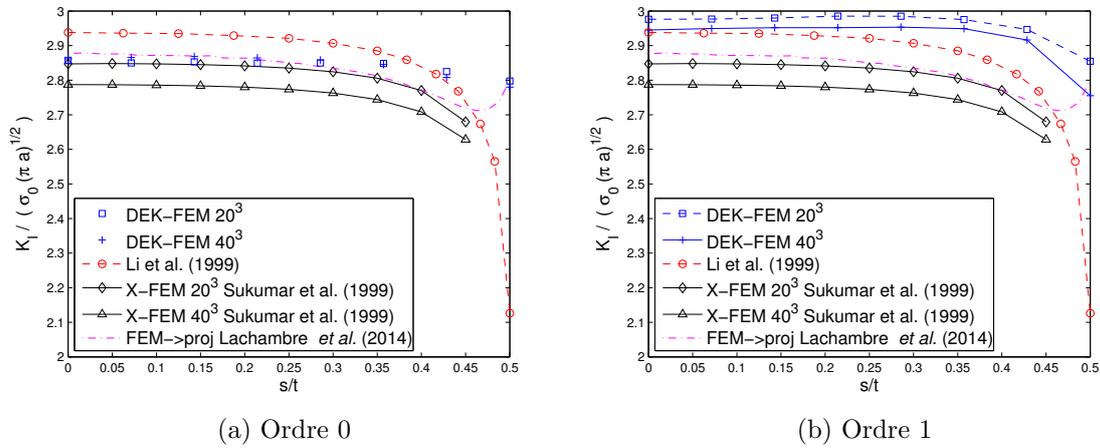


FIGURE 3.3 – Les facteurs d’intensité des contraintes en mode  $I$  pour le barreau en tension à moitié fissuré. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié du front est représentée. La figure (a) correspond à une discrétisation le long du front d’ordre 0 (i.e.,  $\varphi_k$  constante sur chacun des éléments), la figure (b) à une discrétisation d’ordre 1.

en compte. Pour cette discrétisation du front, le raffinement de la discrétisation X-FEM a un impact plus important sur la valeur identifiée, en particulier près du bord libre.

Ce cas test permet de constater que pour un front droit, lorsque les variations des coefficients asymptotiques sont faibles (à cœur pour  $s/t \in [0; 0.3]$ ), une discrétisation d’ordre zéro le long du front donne des résultats très similaires aux autres méthodes (i.e., éléments de frontières [LI 98], FEM puis projection sur les séries de Williams [LAC 14b] et X-FEM puis intégrale d’interaction). En effet, dans ce cas précis, les champs asymptotiques 2D qui sont utilisés dans toutes ces méthodes vérifient la compatibilité contraintes/déplacements. Cette valeur n’est qu’une référence approchée. Cependant, quand ces coefficients asymptotiques évoluent le long du front (à l’approche de la surface libre, pour  $s/t \in [0.3; 0.5]$ ) la DEK-FEM avec une discrétisation d’ordre zéro le long du front semble remise en cause. En effet, dans le patch analytique, les déplacements sont discontinus et les contraintes ne s’équilibrent pas le long du front. Une discrétisation d’ordre un le long du front est alors souhaitable, elle permet de retrouver la diminution des FIC attendue aux abords des surfaces libres. Pour confirmer ce résultat, nous nous intéressons ensuite à une situation pour laquelle les coefficients asymptotiques évoluent le long du front avec une amplitude plus importante.

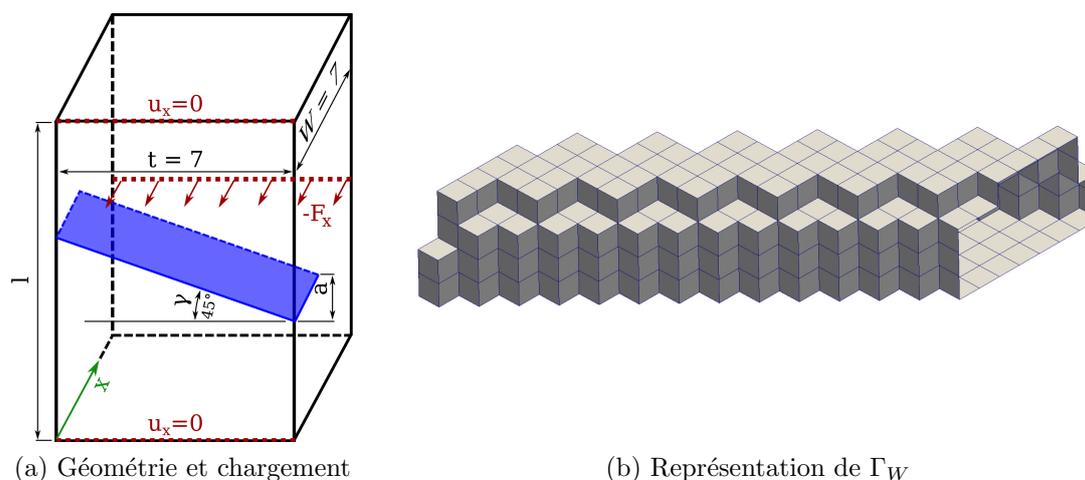


FIGURE 3.4 – Représentation de la géométrie, du chargement et de l'interface  $\Gamma_W$  entre la patch et le domaine X-FEM, pour le barreau en flexion trois points (3PB).

### 3.1.2 Flexion trois points (3PB)

La deuxième configuration à laquelle nous nous intéressons est également un barreau rectangulaire. Cette fois la fissure est inclinée pour activer différents modes en pointe de fissure. Il est chargé en flexion trois points par un effort d'intensité  $F_x = 10$  kN au milieu (repris par 2 appuis à ses extrémités). Cette fois le problème n'est plus symétrique, la rotation dans le plan des appuis est bloquée sur deux plans au milieu de l'épaisseur aux extrémités du barreau. Sa géométrie et son chargement sont représentés sur la Figure 3.4a. La section du barreau considéré est carrée, l'épaisseur  $W = 7$  et la largeur  $t = 7$  sont donc identiques, sa longueur est de  $l = 18$ . La longueur de la fissure  $a$  est égale au tiers de cette section :  $a = 2,33 \text{ m} \simeq W/3 = t/3$ . Un coefficient de Poisson de  $\nu = 0,38$  est choisi. Deux discrétisations sont considérées, une grossière avec des éléments cubiques de  $H = 0.5$  m d'arête ( $14 \times 36 \times 14$  éléments<sup>3</sup>) et une grossière avec des éléments cubiques de  $h = H/2 = 0.25$  m d'arête ( $28 \times 72 \times 28$  éléments<sup>3</sup>). Les paramètres retenus pour le patch sont un rayon  $r_W$  de 1,7 éléments et 13 éléments finis 1D le long du front pour le patch. La taille des éléments le long du front est donc  $ds \simeq 1,08$  éléments X-FEM pour le maillage X-FEM grossier et  $ds \simeq 2,15$  éléments X-FEM pour le maillage fin.

Cette simulation est intéressante car les coefficients asymptotiques évoluent le long du front et les trois modes sont activés. Les évolutions des modes  $I$  et  $III$  sont symétriques, tandis que celle du mode  $II$  est antisymétrique [LAZ 08].  $K_{III}$  est quasiment uniforme tandis que  $K_{II}$  n'est important que près des bords. Les coefficients asymptotiques considérés sont adimensionnés. Par la suite, on considère

$$\frac{K_i}{\frac{F_x \sqrt{a}}{tW}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{\frac{F_x}{tW}} . \quad (3.1)$$

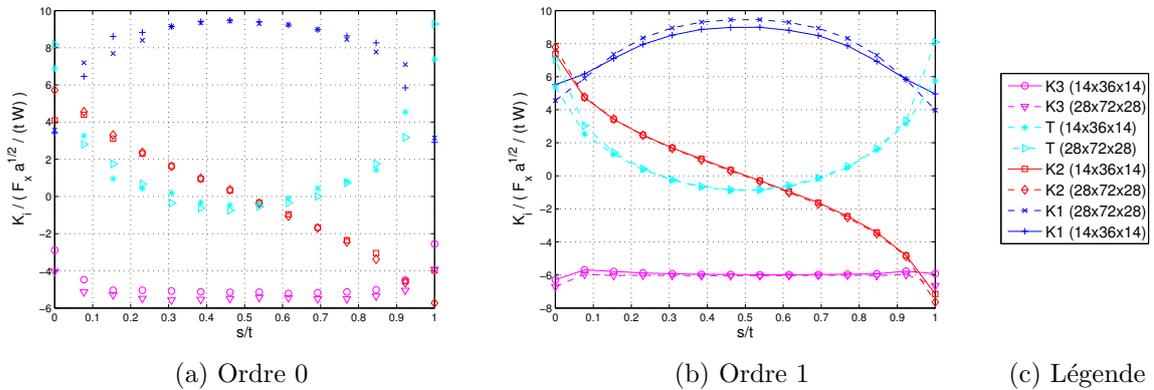


FIGURE 3.5 – Barreau en tension a moitié fissuré, les évolutions le long du front (normalisé par la largeur) de trois facteurs d'intensité des contraintes normalisés ( $K_i/(F_x \sqrt{a}/W t)$ ) sont représentées ainsi que celle du  $T$ -stress normalisé ( $T/(F_x/W t)$ ). La figure (a) correspond à une discrétisation le long du front d'ordre 0 (i.e.,  $\varphi_k$  constante sur chacun des éléments), et d'ordre 1 sur (b).

De plus, cette configuration permet de tester la DEK-FEM en 3D pour une fissure non compatible avec la direction des éléments.

Dans un premier temps, pour cet exemple aussi, des fonctions de forme éléments finis d'ordre zéro sont considérées. Les facteurs d'intensité des contraintes ainsi que le  $T$ -stress identifiés par la simulation DEK-FEM sont représentés Figure 3.5a. On retrouve les tendances attendues [LAZ 08], mais la non-continuité des champs mécaniques le long du front entraîne une évaluation saccadée des facteurs d'intensité des contraintes. Comme dans l'exemple précédent, la simulation grossière donne des coefficients asymptotiques proches de la simulation fine, en particulier à cœur. La simulation fine lisse néanmoins en partie ces coefficients.

Quand une discrétisation d'ordre un est considérée le long du patch, les évolutions des coefficients asymptotiques sont continues même pour la discrétisation grossière. Elles sont représentées sur la Figure 3.5b pour les facteurs d'intensité des contraintes et pour le  $T$ -stress. Les tendances sont également celles attendues bien que (comme pour une discrétisation d'ordre zéro) les symétries et anti-symétries ne soient pas parfaites car le barreau fléchi légèrement dans la direction de l'épaisseur. À cœur, le raffinement du maillage X-FEM a un impact modéré sur le mode  $I$ , et un impact faible sur les autres modes.

Cette configuration montre que la DEK-FEM est efficace pour une fissure inclinée par rapport au maillage. Comme représenté sur la Figure 3.4b, l'interface entre le patch analytique et le domaine X-FEM est alors en escalier. Pour ces deux maillages assez grossiers, une discrétisation d'ordre un le long du front permet de retrouver des évolutions des FIC continues et qui respectent les tendances attendues [LAZ 08]. Pour évaluer la précision de la méthode, nous nous intéressons par la suite à des

situations pour lesquels des évaluations analytiques existent.

## 3.2 Fissures à front courbe

De nombreuses fissures micro-structurellement longues dans un champ de contraintes homogène tendent à avoir une forme elliptique. Elles se développent soit à cœur, soit près d'un bord ou d'un coin. Cette tendance a été constatée aussi bien expérimentalement que numériquement par l'application de lois de propagation de fissure. Ce type de fissure a donc été beaucoup étudié aussi bien par des approches analytiques [KAS 66, SHA 73] que numériques [RAJ 79]. Ces études ont permis de proposer des expressions des facteurs d'intensité des contraintes pour de nombreuses situations génériques. Ces expressions permettent de mieux maîtriser la propagation de ces fissures elliptiques dans des structures à partir des sollicitations lointaines.

Des méthodes plus élaborées sont néanmoins nécessaires pour comprendre le comportement de fissures plus complexes, pour lesquelles l'hypothèse de forme elliptique n'est plus pertinente. Ces formes plus complexes apparaissent notamment, lorsque les fissures sont plus grandes ou que les sollicitations évoluent au cours de la propagation ou encore que les effets dynamiques génèrent des bifurcations,... La simulation de ces fissures de forme complexe est l'objectif de cette thèse. Néanmoins, ces résultats sur des fissures de formes simples sont autant de cas tests permettant de valider les méthodes numériques proposées.

Comme précédemment, nous nous intéresserons aux facteurs d'intensité des contraintes et à leur évolution le long du front. La difficulté supplémentaire introduite par ces fissures est la courbure du front. Lorsque le front est courbe, la définition classique des champs asymptotiques en pointe de fissure n'est plus exacte. L'influence de la courbure est particulièrement forte pour les méthodes d'extraction directe puisque le problème est résolu en utilisant les champs asymptotiques. Puisque la méthode utilisée assure la vérification de l'équilibre, nous nous sommes assurés que les champs mécaniques utilisés (présentés à la Section 2.1.2) vérifient la compatibilité contraintes/déplacements.

### 3.2.1 Fissure *penny-shaped* en tension

Le premier cas test considéré est une fissure plane à front circulaire (*penny-shaped*) soumise à de la tension  $\sigma_0$  dans la direction normale à ses lèvres. Cette configuration étant symétrique, seul le mode  $I$  est activé. Pour un milieu infini avec des conditions aux limites à l'infini, le problème est axisymétrique, les coefficients asymptotiques sont donc uniformes le long du front. Comme rappelé dans [WAN 04], sous ces hypothèses, des expressions analytiques du facteur d'intensité des contraintes et

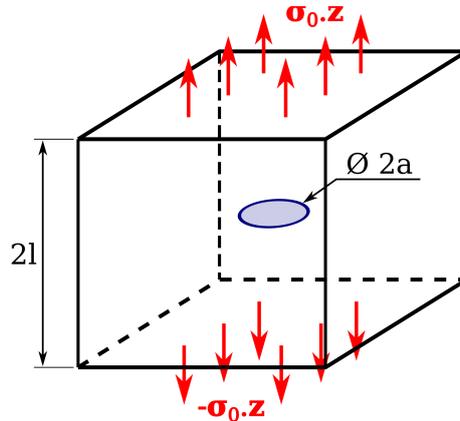


FIGURE 3.6 – Représentation de la géométrie et du chargement, la fissure *penny-shaped* sous un chargement de tension.

du  $T$ -stress sont connues

$$K_I = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad \text{and} \quad T = -\frac{1+2\nu}{2} \sigma_0. \quad (3.2)$$

Ce problème est un cas test classique en mécanique de la rupture. Sa simulation présente néanmoins une difficulté puisque la simulation d'un milieu infini dans un contexte éléments finis nécessite une approximation due aux effets de bords. Nous considérons un milieu de dimension fini (cube d'arête  $2l$ ) largement supérieur à la taille de la fissure de rayon  $a = l/10$ . Cette configuration approchée est représentée sur la Figure 3.6.

Pour que la fissure soit maillée suffisamment finement avec un nombre de degrés de liberté total raisonnable, un maillage localement raffiné est considéré. Nous utilisons le même maillage que Sukumar *et al.* dans [SUK 00] pour avoir un point de comparaison avec une méthode numérique comparable (X-FEM et intégrale d'interaction). Ce maillage présente une taille de maille  $H$  relativement grande par rapport au rayon de courbure du front  $H \simeq \frac{a}{3,5}$ . Nous utilisons également un maillage dont la zone fine est deux fois plus fine  $h \simeq \frac{a}{7}$  pour vérifier qu'un raffinement de la méthode numérique améliore la précision des calculs. Le code Gmsh [GEU 09] utilisé pour générer ces maillages est donné à l'Annexe 2. 12 éléments finis d'ordre un sont considérés le long du front,  $ds \simeq \frac{2\pi a}{12H} \simeq 1,8$  éléments X-FEM grossiers et  $ds \simeq \frac{2\pi a}{12h} \simeq 3,7$  éléments X-FEM fins.

Pour ces maillages, le facteur d'intensité des contraintes et le  $T$ -stress évalués le long du front sont représentés à la Figure 3.7. La DEK-FEM permet bien de retrouver des coefficients asymptotiques uniformes et continus, en particulier le facteur d'intensité des contraintes. Ce résultat est vérifié pour  $K_I$  (le terme dominant) pour les deux discrétisations. Cette qualité est intéressante puisqu'elle permet d'éviter des oscillations sur les FIC qu'on retrouve avec l'intégrale d'interaction [SUK 00, MOË 02a, RAN 09]. En effet, avec cette méthode de post-traitement,

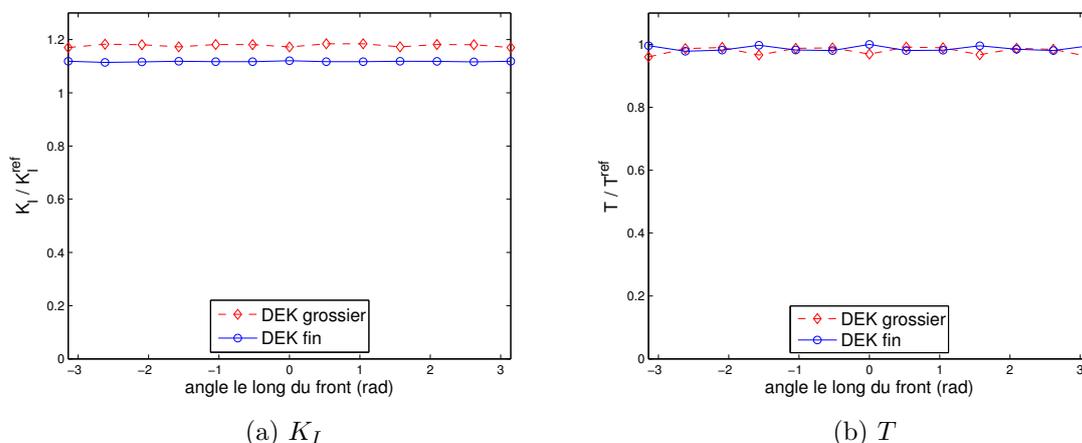


FIGURE 3.7 – Étude de l'influence de la taille du maillage X-FEM  $h$  sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* en tension, discrétisation d'ordre 1 le long du front.

la discrétisation des champs mécaniques calculés entraîne généralement des oscillations. Cependant, de légères oscillations dans l'évaluation du  $T$ -stress existent.

L'évaluation du  $T$ -stress est assez précise, elle s'améliore avec le raffinement du maillage ( $< 2.5\%$  d'erreur pour le maillage fin et  $< 4\%$  pour le maillage grossier). Cependant, le calcul de l'évaluation du facteur d'intensité des contraintes est moins précis ( $\simeq 12\%$  d'erreur pour le maillage fin, et  $\simeq 18\%$  pour le maillage grossier). Cette erreur est notable par rapport au  $< 5\%$  obtenus par Sukumar *et al.* [SUK 00] avec un calcul X-FEM et l'intégrale d'interaction pour un maillage comparable au maillage grossier. Néanmoins, en raffinant la discrétisation X-FEM, les erreurs diminuent aussi bien pour  $K_I$  que pour le  $T$ -stress. L'identification du  $T$ -stress pour des maillages relativement grossiers est naturellement meilleure car c'est un terme dont la zone d'influence est plus grande.

La zone d'influence de chacun des termes de la série de Williams est due à leur comportement en  $r^{n/2}$  (pour le champ de déplacement). Le choix de la dimension du patch doit donc être étudié. En deux dimensions, pour une fissure droite, Passieux *et al.* [PAS 11] ont montré qu'un rayon  $r_W$  du patch supérieur à deux éléments permettait une bonne évaluation des facteurs d'intensité des contraintes. Sur la Figure 3.8, les évaluations de  $K_I$  et du  $T$ -stress sont représentées pour différents rayons du patch pour un maillage fin. On constate, en 3D comme en 2D, que lorsque le rayon du patch est trop faible, les coefficients évalués sont erronés. Une nouvelle tendance apparaît néanmoins : un patch trop grand dégrade à nouveau l'évaluation du FIC, par rapport à son optimum obtenu pour cette discrétisation. Lorsque le patch est trop grand (i.e.,  $\frac{r_W}{a} > 0,5$ ), les hypothèses des séries de Williams, à savoir le milieu infini et la fissure plane à front droit, sont malmenées. Pour assurer la meilleure identifi-

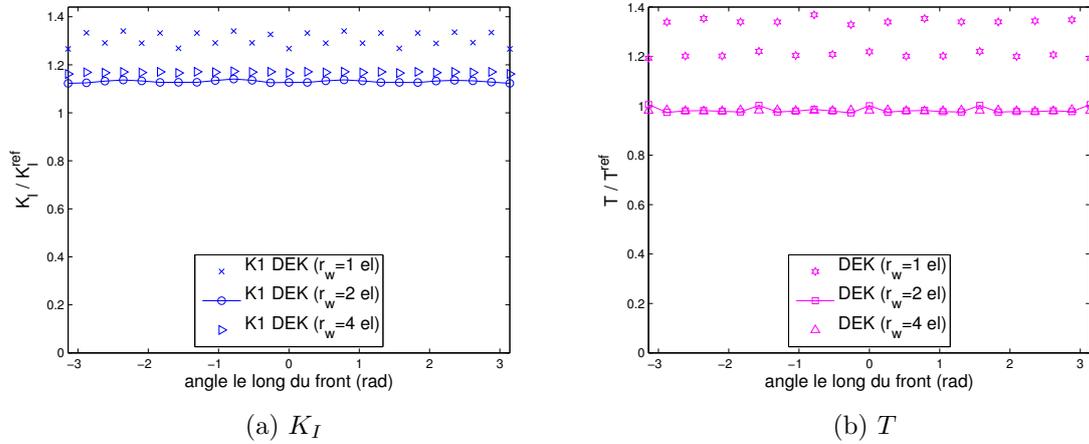


FIGURE 3.8 – Étude de l'influence de la taille du patch analytique  $r_w$  sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* en tension.

cation possible des coefficients asymptotiques, la taille du patch  $r_w \approx 2$  éléments est choisie comme la minimum nécessaire pour permettre la bonne transmission des informations structurelles entre le domaine X-FEM et la zone analytique.

La méthode donne des résultats intéressants pour des coefficients uniformes le long de front courbes. Des situations pour lesquelles ces coefficients évoluent sont considérés par la suite.

### 3.2.2 Fissure *penny-shaped* en cisaillement

Le second cas test considéré présente la même géométrie que le précédent, une fissure *penny-shaped* dans un milieu infini. Cette fois le chargement n'est plus de la tension mais du cisaillement. Pour cette configuration, les modes *II* et *III* sont activés et évoluent le long du front. Les positions le long du front circulaire sont indexées par un angle  $\alpha$ . En effet, selon la position le long du front, le cisaillement est soit tangent au front (mode *III*) soit perpendiculaire au front (mode *II*). Cette évolution est connue analytiquement (elle est par exemple rappelée dans [LI 98])

$$K_{II}^{ref} = \tau_0 \frac{4(1-\nu)\sqrt{\pi a}}{\pi(2-\nu)} \cos \alpha \quad \text{et} \quad K_{III}^{ref} = \tau_0 \frac{4\sqrt{\pi a}}{\pi(2-\nu)} \sin \alpha. \quad (3.3)$$

Le chargement de cisaillement peut être imposé par un déplacement tangentiel opposé  $\mathbf{u}_d$  sur chacune des faces parallèles au plan de la fissure. Le cisaillement correspondant est alors

$$\tau_0 = \frac{E}{2 + (1 + \nu)} \arctan \frac{2\mathbf{u}_d}{l}, \quad (3.4)$$

où  $l$  est ici aussi la hauteur de l'éprouvette (dans la direction normale au plan de la fissure).

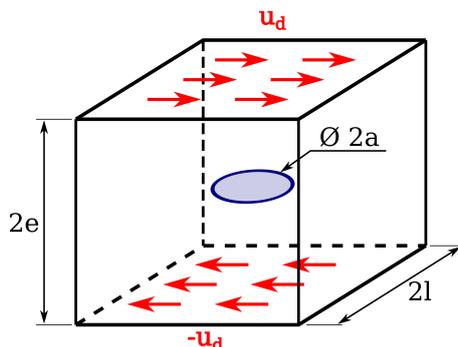


FIGURE 3.9 – Représentation de la géométrie et du chargement, la fissure *penny-shaped* sous un chargement de cisaillement.

Les conditions aux limites étant des déplacements imposés, l'approximation du milieu infini par un milieu fini est valide pour un milieu fini de dimension comparable à la taille de la fissure. En effet, il n'est pas nécessaire d'avoir une dimension importante pour que les conditions aux limites génèrent une sollicitation de cisaillement pur. Un milieu de section carrée d'arête  $2l$ , avec  $l = 2a$  et d'épaisseur  $2e$ , avec  $e = a$  est considéré. Ce domaine et les conditions aux limites appliquées sont représentées sur la Figure 3.9. Ce domaine réduit permet de recourir à un maillage structuré homogène et plus fin que le précédent par rapport à la fissure, dix éléments sont contenus dans la fissure  $h = \frac{a}{10}$ . Le maillage est donc de  $40 \times 40 \times 20$  éléments<sup>3</sup>. On considère 24 éléments le long du front, on a donc  $ds = \frac{2\pi a}{24h} \simeq 2,6$  éléments X-FEM.

Comme représenté sur la Figure 3.10b, pour une discrétisation d'ordre un le long du front, l'identification des facteurs d'intensité des contraintes est très satisfaisante (erreur  $< 2\%$ ). Les évolutions et les amplitudes sont correctement identifiées. Les coefficients du mode *I* sont bien négligeables par rapport au chargement

$$\left| \frac{K_I}{\tau_0 \sqrt{a}} \right| < 0.3\% \quad \text{and} \quad \left| \frac{T}{\tau_0} \right| < 1.3\%. \quad (3.5)$$

Dans les différentes illustrations, les coefficients asymptotiques sont normalisés par les termes utilisés dans l'expression ci-dessus. De plus, puisque les coefficients asymptotiques évoluent le long du front, le choix de la discrétisation éléments finis 1D le long du front est étudié. Pour une discrétisation d'ordre zéro (comme représentée sur la Figure 3.2), les évolutions des FIC sont représentées sur la Figure 3.10a. L'identification des FIC est alors moins précise (erreur  $> 5\%$ ) que pour l'ordre un. Pour cette configuration où les coefficients asymptotiques présentent une forte évolution, une description continue des déplacements du patch est bénéfique sur la qualité de l'identification des FIC.

Puisque le mode *III* est activé, l'influence de l'ajout de la troisième rotation dans le patch analytique sur l'identification des coefficients asymptotiques est étudiée. Pour la base sans la troisième rotation (c'est-à-dire la troncature des trois

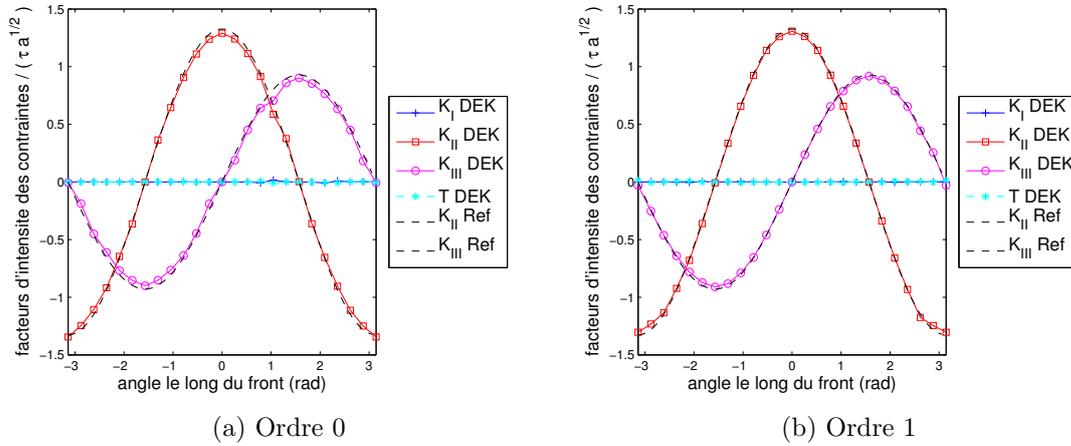


FIGURE 3.10 – Étude de l'influence de l'ordre de la discrétisation le long du front sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* en cisaillement.

modes des séries de Williams uniquement, voir équation (2.4)), leurs évolutions sont représentées sur la Figure 3.11. On constate que pour une identification précise de  $K_{III}$  la troisième rotation est nécessaire. En effet, lorsque la troisième rotation du patch n'est pas introduite dans la discrétisation, une erreur supérieure à 5% est commise. Cette erreur est réduite à moins de 2% par l'ajout de cette rotation.

L'influence de la taille des éléments du patch le long de l'abscisse curviligne est également étudiée sur ce cas test. Des tailles d'éléments du patch  $ds$  allant de un demi élément X-FEM à quatre éléments X-FEM sont considérées. Les FICs évalués pour ces différents  $ds$  sont représentés sur la Figure 3.12. On constate que lorsque la taille des éléments finis 1D le long du front est supérieure à un élément X-FEM du domaine  $\Omega_X$ , l'évaluation des coefficients est satisfaisante. En revanche, si les éléments du patch sont trop petits, chacun d'entre eux reçoit trop peu d'information du raccord avec le domaine X-FEM et des perturbations apparaissent dans le patch. On retiendra qu'il faut choisir une discrétisation du front telle que  $ds > 1$  élément X-FEM.

Enfin, la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange pour le raccord entre le patch et le domaine X-FEM est étudiée. Les trois possibilités introduites à la Section 2.2.5.1 sont considérées. Les facteurs d'intensité des contraintes identifiés pour ces trois discrétisations sont représentés sur la Figure 3.13. Les trois choix donnent des résultats proches, mais les discrétisations basées sur les séries asymptotiques donnent des résultats légèrement meilleurs. En particulier, l'utilisation directe de la série de Williams en déplacements donne de bons résultats. De plus elle est simple à calculer et permet de simplifier l'introduction du patch analytique dans l'algorithme multigrilles X-FEM localisées. Ce choix de multiplicateur de Lagrange est donc retenu.

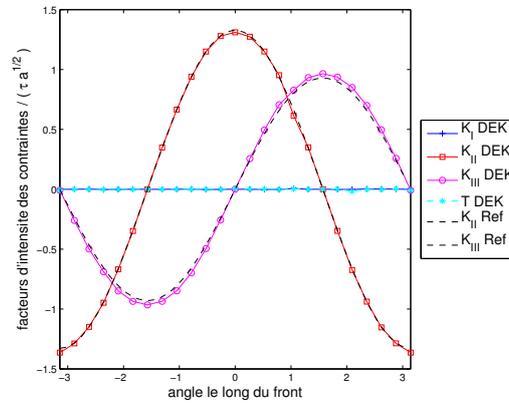


FIGURE 3.11 – Étude de l'influence de l'ajout de la troisième rotation sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* en cisaillement. La 3<sup>ème</sup> rotation n'est pas ajoutée.

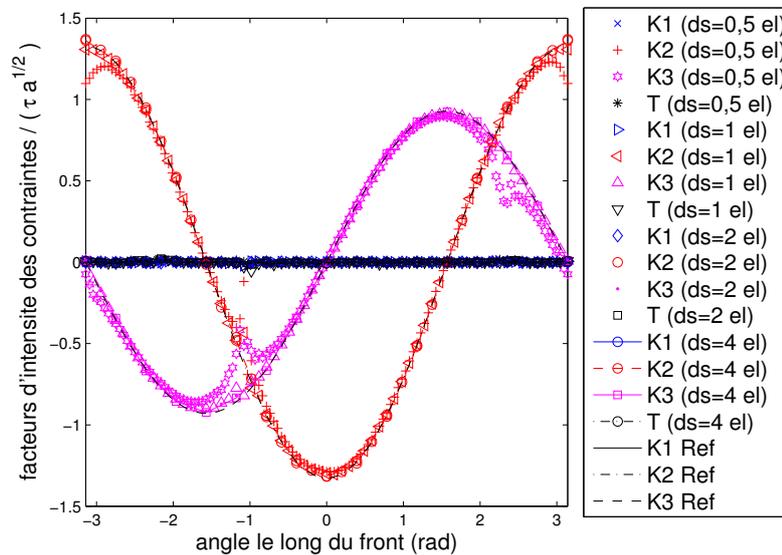


FIGURE 3.12 – Étude de l'influence de la taille des éléments du patch ( $ds$ ) sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* en cisaillement.

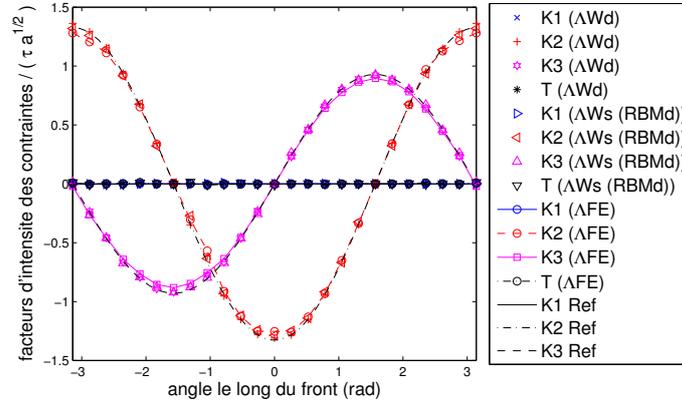


FIGURE 3.13 – Étude de l'influence de l'espace de discrétisation du patch sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* en cisaillement.  $\Delta FE$  se rapporte à la discrétisation éléments finis de la surface (équation (2.35)),  $\Delta Wd$  à la discrétisation du patch en déplacements (équation (2.36)) et  $\Delta Ws$  à la discrétisation du patch en contraintes (équation (2.37)).

### 3.2.3 Fissure *penny-shaped* inclinée en tension

Un problème en mode mixte complet est ensuite considéré. La fissure présente la même géométrie, dans un domaine soumis à une traction  $\sigma_0$ . Cette fois, la fissure *penny-shaped* est dans un plan incliné d'un angle  $\gamma = 45^\circ$  par rapport à l'axe de chargement. Cette configuration fait intervenir les trois modes, les modes *II* et *III* évoluent le long du front. Ce problème est aussi très étudié puisqu'il présente une solution analytique dans le cas général d'une fissure elliptique (d'axe principal  $a$  et secondaire  $b$ , donc d'une excentricité  $k = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$ ). Cette solution détaillée dans [KAS 66] est par exemple rappelée par Mi [MI 96]

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{\sigma_0 \sin^2 \gamma \sqrt{\pi b}}{E(k)} \left[ \sin^2 \theta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \theta \right], \\
 K_{II} &= -\frac{\sigma_0 \sin \gamma \cos \gamma \sqrt{\pi b} \cos \theta a}{\left[ \sin^2 \theta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{4}} b} \frac{k^2}{(k^2 - \nu)E(k) + \nu \left( \frac{a}{b} \right)^2 K(k)}, \\
 K_{III} &= \frac{\sigma_0 \sin \gamma \cos \gamma (1 - \nu) \sqrt{\pi b} \sin \theta}{\left[ \sin^2 \theta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{4}}} \frac{k^2}{(k^2 - \nu)E(k) + \nu \left( \frac{a}{b} \right)^2 K(k)}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

où  $K(k)$  et  $E(k)$  sont les intégrales elliptiques définies telles que

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad \text{et} \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx. \tag{3.7}$$

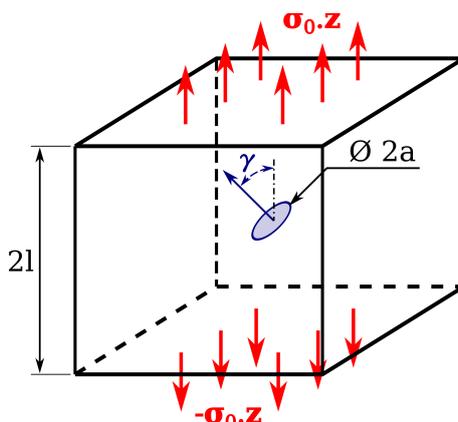


FIGURE 3.14 – Représentation de la géométrie et du chargement, pour la fissure *penny-shaped* inclinée d'un angle  $\gamma$  sous un chargement de tension.

Une fissure *penny-shaped* est un cas particulier de cette expression. Les facteurs d'intensité des contraintes sont alors simplement exprimés par

$$\begin{aligned}
 K_I^{ref} &= 2\sigma_0 \sin^2 \gamma \sqrt{\frac{a}{\pi}}, \\
 K_{II}^{ref} &= -2\sigma_0 \sin \gamma \cos \gamma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cos \alpha, \\
 K_{III}^{ref} &= 2\sigma_0 \sin \gamma \cos \gamma (1 - \nu) \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sin \alpha.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Seuls trois paramètres géométriques interviennent ici,  $a$  le rayon de la fissure,  $\gamma$  l'angle d'inclinaison de celle-ci par rapport à l'axe du chargement et  $\alpha \in [0, 2\pi]$  la position le long du front.

Cette expression est également valable pour un chargement de tension idéal, comme pour la Section 3.2.1. C'est par exemple le cas pour un milieu infini. La même approximation est reprise. On considère ici aussi un grand domaine cubique d'arête  $l = 10a$  soumis à des tractions surfaciques. Le domaine, la fissure et les conditions aux limites sont représentés sur la Figure 3.14. On utilise également les mêmes maillages raffinés localement autour de la fissure qu'à la Section 3.2.1 (dont la procédure d'obtention est donnée à l'Annexe 2). La taille caractéristique des éléments dans la zone autour du front est aussi  $h \simeq 7a$  pour le maillage fin et  $H \simeq 3,5a$  pour le maillage grossier. Cette taille est assez grossière. À titre de comparaison, pour une méthode X-FEM avec l'intégrale d'interaction, Moës *et al.* [MOË 02a] utilisaient une dizaine d'éléments dans le rayon de la fissure ( $h' \simeq \frac{a}{10}$ ).

Les coefficients asymptotiques évoluant le long du front, une discrétisation relativement fine est choisie pour le patch : 16 éléments finis 1D d'ordre un le long du front. La taille de ces éléments est donc de  $ds = \frac{2\pi a}{16H} \simeq 1,4$  éléments X-FEM pour le maillage X-FEM grossier, et de  $ds = \frac{2\pi a}{16h} \simeq 2,7$  éléments pour le fin. Les facteurs

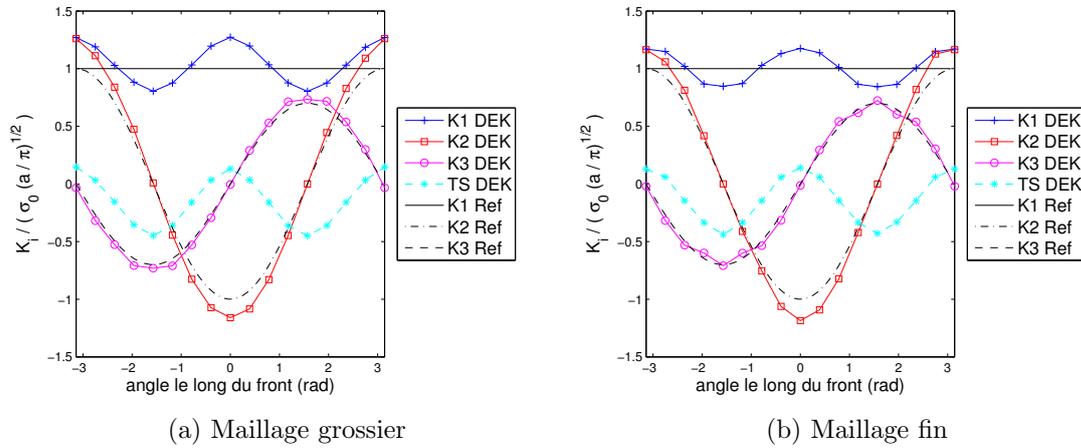


FIGURE 3.15 – Étude de l'influence de la taille du maillage X-FEM  $h$  sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* inclinée en tension pour une discrétisation d'ordre un des trois modes le long du front.

d'intensité des contraintes sont normalisés par la contrainte de tension et la longueur caractéristique de la fissure :  $\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ . Ils sont représentés sur la Figure 3.15 pour les deux maillages. Leurs valeurs analytiques  $y$  sont également représentées pour évaluer la qualité de l'identification. À titre indicatif, le  $T$ -stress apparaît également, il est aussi normalisé par la contrainte de tension  $\sigma_0$ .

Les facteurs d'intensité des contraintes évalués ne sont pas satisfaisants ( $\simeq 20\%$  d'erreur pour le maillage fin). Les tendances périodiques sont assez bien captées. Les FIC calculés sont continus mais les amplitudes évaluées présentent une erreur importante, en particulier pour le mode  $II$ . Une oscillation  $\pi$ -périodique apparaît sur  $K_I$ . Ce résultat est d'autant plus problématique pour la méthode que le raffinement de la discrétisation n'améliore que très faiblement l'identification.

L'oscillation  $\pi$ -périodique du facteur d'intensité des contraintes en mode  $I$  (qui devrait être uniforme) laisse penser à un couplage entre les modes. Une étude des vecteurs propres d'un élément du patch étaye cette hypothèse. Les vecteurs propres pour lesquels la contribution des facteurs d'intensité des contraintes est importante correspondent notamment à un couplage entre le mode  $I$  et le mode  $III$ . Une étude des champs associés à ces modes permettant de mieux comprendre l'origine de ce couplage est proposée ci-dessous. Les modes de Williams (équations (1.17) et (1.26))

pour un front droit sont tels que

$$\begin{aligned} \text{Modes plan} \quad \mathbf{u}_{ink} &= \begin{bmatrix} u_t(r, \theta) \\ u_n(r, \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{tt} & \epsilon_{tn} & 0 \\ \epsilon_{tn} & \epsilon_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{tn} & 0 \\ \sigma_{tn} & \sigma_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ss} \end{bmatrix}, \\ \text{Mode III} \quad \mathbf{u}_{ink} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s(r, \theta) \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_{ts} \\ 0 & 0 & \epsilon_{ns} \\ \epsilon_{ts} & \epsilon_{ns} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{ts} \\ 0 & 0 & \sigma_{ns} \\ \sigma_{ts} & \sigma_{ns} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dans ces expressions, on constate que les modes sont bien orthogonaux. La définition de l'évolution continue le long du front ( $\varphi_k(s)$ ) que nous proposons modifie ces modes comme suit (les modification apparaissent en **vert**)

$$\begin{aligned} \text{Modes plan} \quad \mathbf{u}_{ink} &= \begin{bmatrix} u_t(r, \theta, \bar{s}) \\ u_n(r, \theta, \bar{s}) \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{tt} & \epsilon_{tn} & \bar{\epsilon}_{ts} \\ \epsilon_{tn} & \epsilon_{nn} & \bar{\epsilon}_{ns} \\ \bar{\epsilon}_{ts} & \bar{\epsilon}_{ns} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{tn} & \bar{\sigma}_{ts} \\ \sigma_{tn} & \sigma_{nn} & \bar{\sigma}_{ns} \\ \bar{\sigma}_{ts} & \bar{\sigma}_{ns} & \sigma_{ss} \end{bmatrix}, \\ \text{Mode III} \quad \mathbf{u}_{ink} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s(r, \theta, \bar{s}) \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_{ts} \\ 0 & 0 & \epsilon_{ns} \\ \epsilon_{ts} & \epsilon_{ns} & \bar{\epsilon}_{ss} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{tt} & 0 & \sigma_{ts} \\ 0 & \bar{\sigma}_{nn} & \sigma_{ns} \\ \sigma_{ts} & \sigma_{ns} & \bar{\sigma}_{ss} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, les deux développements (plan et anti-plan) ont des composantes similaires. Si maintenant, une fissure circulaire est considérée, des termes de dérivées issus du caractère local de la base de définition des champs ( $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s$ ) apparaissent. Ils sont ajoutés dans les expressions ci-dessous en **rouge**

$$\begin{aligned} \text{Modes plan} \quad \mathbf{u}_{ink} &= \begin{bmatrix} u_t(r, \theta, \bar{s}) \\ u_n(r, \theta, \bar{s}) \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{tt} & \epsilon_{tn} & \bar{\epsilon}_{ts} \\ \epsilon_{tn} & \epsilon_{nn} & \bar{\epsilon}_{ns} \\ \bar{\epsilon}_{ts} & \bar{\epsilon}_{ns} & \epsilon_{ss} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{tn} & \bar{\sigma}_{ts} \\ \sigma_{tn} & \sigma_{nn} & \bar{\sigma}_{ns} \\ \bar{\sigma}_{ts} & \bar{\sigma}_{ns} & \sigma_{ss} \end{bmatrix}, \\ \text{Mode III} \quad \mathbf{u}_{ink} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s(r, \theta, \bar{s}) \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_{ts} \\ 0 & 0 & \epsilon_{ns} \\ \epsilon_{ts} & \epsilon_{ns} & \bar{\epsilon}_{ss} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{tt} & 0 & \sigma_{ts} \\ 0 & \bar{\sigma}_{nn} & \sigma_{ns} \\ \sigma_{ts} & \sigma_{ns} & \bar{\sigma}_{ss} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En plus d'avoir des composantes similaires, les champs asymptotiques des séries de Williams sont multipliées par les fonctions de forme ou leurs dérivées. Le découplage entre modes plans et mode anti-plan est donc perdu.

Pour découpler les modes sans modifier les propriétés asymptotiques, le plus simple est d'exploiter la discrétisation éléments finis le long du front. En effet, pour découpler les modes plans du mode anti-plan il est possible d'utiliser des discrétisations différentes de l'abscisse curviligne. Conservons la notation  $\varphi_k(s)$  pour les fonctions de forme de la discrétisation des modes plans et notons les fonctions de forme du mode anti-plan  $\varphi'_s(s)$ . L'approximation du champ de déplacements devient donc

$$\mathbf{u}_W^h(r, \theta, s) = \sum_{k \in N_s} \left[ \sum_{n=0}^{n_{DEK}} \sum_{i=I,II} b_{ink} \mathbf{g}_i^n(\theta) r^{\frac{n}{2}} \right] \varphi_k(s) + \sum_{k \in N_s} \sum_{n=0}^{n_{DEK}} b_{IIIink} \mathbf{g}_{III}^n(\theta) r^{\frac{n}{2}} \varphi'_k(s). \quad (3.9)$$

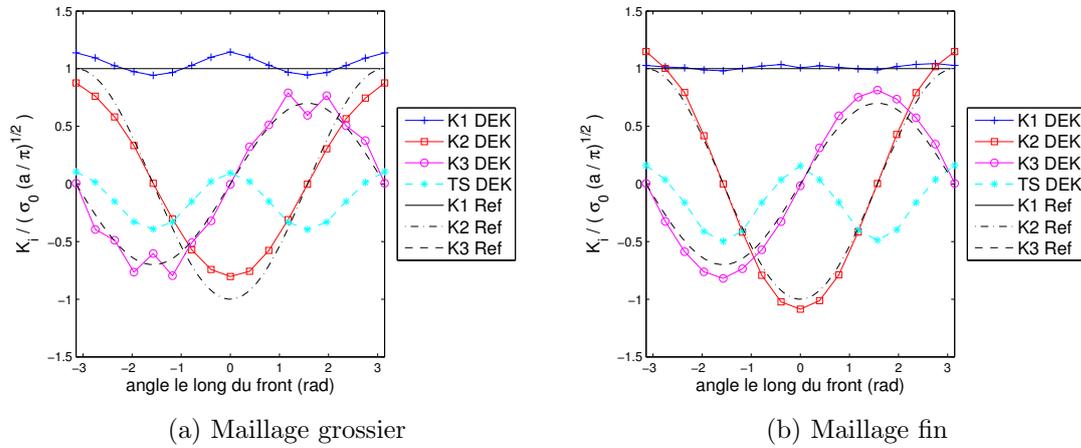


FIGURE 3.16 – Étude de l'influence de la taille  $h$  du maillage X-FEM sur l'évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure *penny-shaped* inclinée en tension pour une discrétisation d'ordre un des modes *I* et *II* et une discrétisation d'ordre zéro du mode *III* le long du front.

La troisième rotation est ajoutée à cette expression comme à l'expression (2.4). Pour vérifier cette idée avec une modification légère du code, nous utilisons des fonctions de forme d'ordre un pour les modes plans et d'ordre zéro pour le mode anti-plan. Ces fonctions de forme sont définies aux mêmes nœuds.

Comme précédemment pour l'approche à discrétisation le long du front unique, les facteurs d'intensité des contraintes obtenus avec cette approche sont représentés sur la Figure 3.16. Pour la discrétisation grossière, les oscillations de  $K_I$  persistent, bien que d'une amplitude moindre. De plus, les fonctions de forme du mode *III* n'étant plus continues, on constate des fluctuations dans l'évaluation de  $K_{III}$ . Par contre, lorsque le maillage est plus fin on obtient bien les évolutions, en particulier pour  $K_I$  qui ne présente plus d'oscillations parasites. Malgré cette discrétisation encore grossière, les fluctuations du mode *III* issues de la discontinuité des fonctions de forme utilisées sont négligeables. De plus la précision de l'identification est nettement meilleur.

La précision de l'identification des FIC reste à améliorer mais la discrétisation est encore relativement grossière. Cette stratégie a donc permis de découpler les modes pour une identification efficace des facteurs d'intensité des contraintes. Elle fonctionne également pour traiter les cas tests précédents. Ces calculs ont été effectivement menés et résultent en des évaluations des FIC comparables à celles des Figures 3.7 et 3.10b. La détermination d'une base efficace est donc cruciale pour identifier directement les facteurs d'intensité des contraintes. La base proposée fonctionne mais semble nécessiter un certain raffinement du maillage autour du front pour être précise.

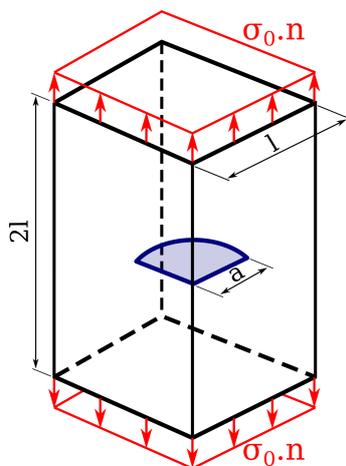


FIGURE 3.17 – Représentation de la géométrie et du chargement, la fissure de coin plane à front circulaire sous un chargement de tension.

### 3.2.4 Fissure plane circulaire de coin en tension

Le dernier cas test présenté est une fissure débouchante à front semi-circulaire. Elle permet de vérifier le bon fonctionnement de la méthode pour une fissure plane à front courbe dont le front s'arrête sur une surface libre. La situation considérée est un barreau à section carrée soumis à une traction d'intensité  $\sigma_0$ . La section est d'arête  $l$  et le barreau est de hauteur  $2l$ . Ce barreau est fissuré par une fissure à front semi-circulaire, centrée sur une arête, dont le rayon vaut  $a = \frac{l}{10}$ . La fissure est plane, elle est située dans le plan de symétrie du barreau, normale à la direction de tension. Cette configuration est représentée sur la Figure 3.14.

Les fissures elliptiques de surface ont été très étudiées. Newman et Raju ont proposé de nombreuses expressions des facteurs d'intensité des contraintes, notamment pour des plaques avec ou sans trou [NEW 84]. En effet, la rupture de structures mécano-soudées passe souvent par la propagation d'une fissure qui atteint la surface et s'établit en mode  $I$  avec une forme elliptique. Ces expressions des facteurs d'intensité des contraintes peuvent alors être directement utilisées une fois que le chargement est connu. Ce type de considérations a permis de fournir une expression de  $K_I$  pour la géométrie considérée avec une précision évaluée à 3% à cœur. Elle est notamment rappelée par Mi [MI 96]

$$K_I^{ref} = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left( 1.211 - 0.186\sqrt{\sin \alpha} \right) \left( 1.211 - 0.186\sqrt{\cos \alpha} \right). \quad (3.10)$$

Par la suite Qu et Wang [QU 06] se sont intéressés à l'évaluation du  $T$ -stress pour une géométrie proche. À partir de simulations éléments finis raffinées localement en pointe de fissure et d'un post-traitement par une méthode intégrale [KFO 86] comme introduit à la section 1.2.4.1, les auteurs proposent des valeurs le long du front pour

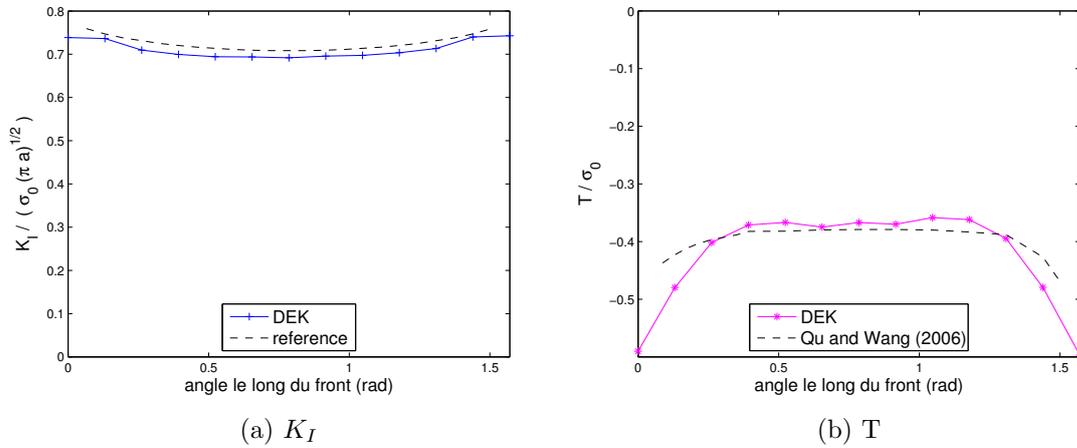


FIGURE 3.18 – Évaluation des coefficients asymptotiques de la fissure de coin plane à front circulaire en tension.

le  $T$ -stress. La géométrie la plus proche considérée par ces auteurs est une fissure circulaire dans une plaque d'épaisseur  $e = 5a$ . Cette référence approchée est utilisée pour donner une estimation de la valeur et de la tendance de l'évolution le long du front.

Comme précédemment, la fissure est petite par rapport au domaine considéré. Un maillage raffiné localement comme ceux présentés à l'Annexe 2 est à nouveau utilisé. Autour de la fissure, le maillage est plus fin que dans les exemples précédents :  $h = \frac{a}{10}$ . De son côté, le patch analytique est discrétisé avec des éléments finis 1D d'ordre un pour les modes plans et d'ordre zéro pour le mode anti-plan. Douze éléments finis sont considérés le long du front,  $ds = \frac{\pi a}{2 \times 12 h} = 1,3$  éléments du maillage X-FEM.

Les évolutions du facteur d'intensité des contraintes en mode  $I$  (normalisé par  $\sigma_0 \sqrt{\pi a}$ ) et du  $T$ -stress (normalisé par  $\sigma_0$ ) identifiées pour cette simulation sont représentés sur la Figure 3.18. À cœur, l'évaluation de  $K_I$  est satisfaisante ( $< 5\%$  d'erreur par rapport à l'expression (3.10)). On retrouve bien la tendance, même si un léger décalage subsiste également pour ce cas test. Le  $T$ -stress quant à lui est d'une intensité comparable à celle identifiée par [QU 06], à cœur, la tendance est également semblable.

On constate aussi une diminution de  $T$  à l'approche des surfaces libres, mais elle est plus marquée que dans [QU 06]. On notera également que les valeurs de  $K_I$  identifiées évoluent rapidement au niveau du bord. On pourrait s'intéresser plus en détail au traitement des vertex en modifiant les champs asymptotiques à cet endroit [BAŽ 79].

#### 3.2.5 Bilan de l'étude des fissures à front courbe

L'étude de ces fissures à front circulaire a permis d'analyser la précision de l'évaluation des facteurs d'intensité des contraintes et du  $T$ -stress par rapport à des solutions analytiques. Cette étude nous a permis de montrer que l'approche et la discrétisation du patch analytique proposées permettaient l'identification des évolutions des facteurs d'intensité des contraintes et du  $T$ -stress. Les tendances de ces évolutions sont obtenues précisément, cependant les amplitudes ne sont pas toujours satisfaisantes. Néanmoins, la précision augmente avec le raffinement du maillage et donc la diminution de la taille du patch. Les maillages utilisés sont encore relativement grossiers, le rayon de courbure est plus petit ou égal à dix éléments ( $a \in [3.5, 10]$  éléments), ils permettent néanmoins une évaluation satisfaisante. Affiner la discrétisation est une première piste pour améliorer la précision. En outre, la DEK-FEM permet d'obtenir naturellement des évolutions peu bruitées par la discrétisation et les termes d'ordre supérieur comme le  $T$ -stress.

Pour évaluer les facteurs d'intensité des contraintes, la méthode la plus classique consiste à calculer la solution avec la X-FEM puis à projeter les champs obtenus sur une solution asymptotique avec l'intégrale d'interaction. L'espace d'approximation de la méthode X-FEM est un espace générique (FEM) enrichi par des fonctions assez générales introduisant la singularité et la discontinuité. Ces enrichissements sont locaux et dans toutes les directions. Les champs mécaniques obtenus sont ensuite post-traités par l'intégrale d'interaction (une opération de projection qui nécessite une expression des champs asymptotiques).

De son côté, la méthode DEK-FEM utilise directement les champs asymptotiques pour la résolution du problème d'élasticité (qui fait intervenir la divergence du gradient du champ de déplacement). Cette opération est plus sensible aux approximations des champs asymptotiques qui sont faites pour son extension aux trois dimensions. Le choix des champs est donc particulièrement important. Par exemple, nous avons montré que l'ajout de la troisième rotation d'une section droite du patch permettait une identification plus précise. De même, le choix de la discrétisation éléments finis 1D le long du front influe sur la qualité de la solution. Et donc que les modes plans et anti-plan seuls ne suffisaient pas. Un autre point clef est l'extension de ces modes aux évolutions le long du front. L'approche proposée introduit un couplage entre les modes. Une méthode pour les découpler est proposée, elle consiste à utiliser deux discrétisations FEM 1D différentes le long du front. Poursuivre le travail sur le choix de cette base est une seconde piste pour rendre la DEK-FEM plus efficace.

L'extension à des fronts plus complexes ne pose pas de problèmes conceptuels dans la mise au point de la discrétisation. Elle augmente néanmoins la complexité numérique. Il faut alors calculer la courbure locale (la matrice Jacobienne le long du front si la fissure n'est plus plane). De plus, lorsque la courbure n'est plus uniforme, la finesse du maillage X-FEM doit évoluer le long du front. Il faudra alors travailler sur la générations de maillages efficaces.

### 3.3 Fissures dans un contexte multigrilles

Les cas test précédents (qui présentent une petite fissure dans un domaine de grande dimension) sont une illustration de l'aspect multi-échelles des problèmes de fissuration. Il a également été montré qu'un raffinement localisé était nécessaire pour obtenir une bonne précision. Comme présenté à la Section 2.3.4, la DEK-FEM a donc été couplée à une méthode multigrilles localisées pour permettre le raffinement local du maillage par sous-division des éléments et pour résoudre efficacement le problème.

Dans un premier temps, la méthode est illustrée par une simulation avec une fissure plane à front droit.

#### 3.3.1 Fissure symétrique en tension multigrilles

Le cas test étudié Section 3.1.1 est repris pour l'application de la DEK-FEM dans un contexte multigrilles. La géométrie et les conditions aux limites sont celles représentées sur la Figure 3.1. La fissure est plane et le front droit. L'intérêt de cette simulation est qu'elle a été traitée de nombreuses fois dans la littérature [LI 98, SUK 00, LAC 14b], des références numériques sont donc disponibles pour comparaison. De plus, une simulation avec un maillage mono-grille aussi fin que possible numériquement est également réalisée.

Cette simulation de référence est basée sur un maillage régulier structuré composé de  $24 \times 36 \times 42$  éléments ( $W \times t \times l$ ). Les éléments sont donc cubiques et ont une arête de  $h_{mono} = \frac{a}{12}$ , il y a 36 éléments le long du front. Le rayon du patch analytique est défini par  $r_W = 2,1$  éléments. Le long du front, une discrétisation d'ordre un est utilisée pour les trois modes. Le patch est discrétisé le long du front par 30 éléments, la taille de maille est donc de  $ds = 1,2$  éléments.

Puisque le problème est symétrique, seule la moitié de l'abscisse curviligne est représentée.  $s/t = 0$  est au milieu du front et  $s/t = 0.5$  sur la surface libre. Le résultat de cette simulation est proche de ceux obtenus dans la Section 3.1.1 pour une discrétisation d'ordre un le long du front (confère Figure 3.3b).

Deux maillages multigrilles localisées sont considérés. La grille grossière (1) considérée a une taille caractéristique deux fois supérieure au maillage de la solution monogrille de référence ( $12 \times 18 \times 21$  éléments,  $h_{coarse} = \frac{a}{6}$ ). Le premier est simplement composé de cette grille grossière et d'une grille fine. La grille fine (2) est localisée autour du front, elle est obtenue par subdivision de tous les éléments grossiers dans un rayon de  $r_{MGL} = r_W + 1.5$  éléments grossiers. Cette longueur est choisie pour que la plus fine puisse inclure le patch et une bande raisonnable d'éléments fins autour. Les éléments fins de cette discrétisation ont la même taille caractéristique que le maillage monogrille de référence,  $\min h_{MGL2} = h_{mono}$ . On notera toutefois que le maillage équivalent est plus grossier lorsqu'on s'éloigne de la fissure.

Le second maillage multigrilles localisées considéré est le premier maillage (grilles (1) et (2)), auquel une grille fine supplémentaire (3) a été ajoutée autour du front de la fissure. Il est donc composé de trois grilles, le maillage équivalent est représenté sur

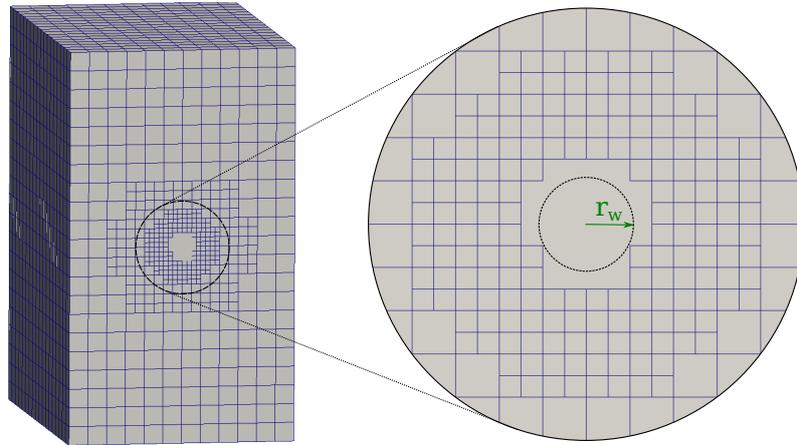


FIGURE 3.19 – Maillage multigrilles localisées à trois grilles.

la Figure 3.19. Cette troisième grille est à nouveau obtenue par subdivision de tous les éléments de la grille (2) dans un rayon de  $r_{MGL} = r_W + 1.5$  éléments. Elle a donc une taille de discrétisation minimale autour de la fissure de la moitié  $\min h_{MGL3} = \frac{\min h_{MGL2}}{2} = \frac{h_{mono}}{2}$

Comme pour la simulation de référence, le patch analytique est discrétisé par 30 éléments fins d'ordre un le long du front. Pour la simulation multigrilles à deux grilles,  $ds = 1, 2$  éléments (fins) comme pour la référence. Pour celle à trois grilles, la discrétisation le long du front est plus grossière par rapport à la taille de la grille fine :  $ds = 2, 4$  éléments fins. Un rayon  $r_W \approx 2, 1$  éléments fins est également utilisé pour définir le patch analytique. Sa taille diminue donc avec l'ajout de la troisième grille.

Les facteurs d'intensité des contraintes identifiés pour les deux simulations multigrilles présentées sont représentés sur la Figure 3.20. Les deux simulations convergent et permettent une bonne identification de l'évolution de  $K_I$ . La valeur à cœur est proche des valeurs de référence, et une diminution est constatée à l'approche du bord libre. La simulation multigrilles la plus fine permet d'obtenir une solution très proche de la solution monogrille de référence. Le couplage de la DEK-FEM avec l'algorithme multigrilles localisées fonctionne donc dans ce cas. L'ajout de la troisième grille et donc le raffinement de la discrétisation permet bien d'améliorer la précision du calcul, en particulier à l'approche de la surface libre.

### 3.3.2 Bilan DEK-FEM multigrilles

Ces simulations multigrilles sont encourageantes pour la poursuite des développements. Pour des fronts courbes, l'algorithme de résolution multigrilles est en cours de validation. La courbure du front modifie les discrétisations X-FEM et du patch au voisinage du front. Le compatibilité au sein d'une méthode multigrilles (avec recouvrement) est à l'étude. Une première piste est la modification de la base

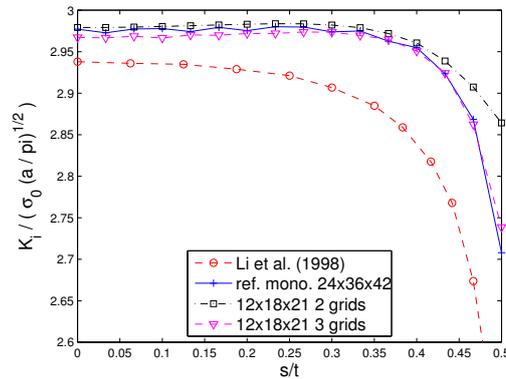


FIGURE 3.20 –  $K_I$  identifiés pour la comparaison entre les maillages multigrilles. Deux références apparaissent : le calcul monogrille fin de référence et le calcul BEM de Li *et al.* [LI 98].

utilisée dans le patch analytique. En effet, l'amélioration de cette base permettrait de réduire les erreurs d'approximation qui en résultent et qui peuvent dégrader la convergence de l'algorithme. L'intégration du patch dans l'algorithme de résolution multigrilles est également à l'étude. Notamment à travers son lien avec la grille la plus fine.

Une utilisation de cette méthode de simulation pour l'identification et la simulation de lois de propagation de fatigue est présentée à la Section suivante. Les outils de post-traitement compatibles avec la discrétisation du front basée sur les séries de Williams sont présentés. La stratégie d'identification est présentée et appliquée à un essai 2D. Son extension à des essais 3D est enfin introduite.



## Chapitre 4

# Vers l'identification de lois de propagation de fissures 2D/3D par couplage simulation/mesure de champs

*La méthode de simulation DEK-FEM a été développée en parallèle d'outils de mesure de champs dans le cadre du projet ANR RUPXCUBE [LAC 14b]. L'objectif du projet était de développer des méthodes numériques compatibles avec la mesure de champs pour identifier et valider des lois de propagation de fissure tridimensionnelles. À la Section 4.1, les méthodes de post-traitement des essais sont introduites ainsi que la stratégie d'identification en deux dimensions. Elle s'appuie sur la synergie entre le post-traitement d'essais et la simulation DEK-FEM, tous les deux basés sur les séries de Williams dans un environnement éléments finis. La méthode de simulation DEK-FEM en trois dimensions a été développée et présentée dans les chapitres précédents. La stratégie globale d'identification a été appliquée sur un essai plan [MAT 12], voir Section 4.2, c'est un exemple d'utilisation de la méthode DEK-FEM. Nous montrons comment le couplage des méthodes permet de rendre l'identification plus précise. Enfin la Section 4.3 présente la méthode en trois dimensions, et introduit les différents outils.*

## Sommaire

---

|            |                                                                           |            |
|------------|---------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4.1</b> | <b>Méthode d'identification de lois de propagation en fatigue</b>         |            |
|            | <b>2D</b>                                                                 | <b>138</b> |
| 4.1.1      | Mesure de champs par corrélation d'image                                  | 139        |
| 4.1.2      | Identification des coefficients asymptotiques de la fissure               | 143        |
| 4.1.3      | Identification de la géométrie de la fissure                              | 147        |
| <b>4.2</b> | <b>Essai CCT sur Ti35</b>                                                 | <b>151</b> |
| 4.2.1      | Présentation de l'essai                                                   | 152        |
| 4.2.2      | Validation de la méthode de dépouillement sur une simulation<br>plastique | 153        |
| 4.2.3      | Dépouillement de l'essai                                                  | 165        |
| 4.2.4      | Simulations dédiées aux essais                                            | 166        |
| 4.2.5      | Couplage simulation/mesure de champs à la position $a_W$                  | 168        |
| 4.2.6      | Identification de la loi de propagation                                   | 169        |
| 4.2.7      | Simulation 2D de la propagation en fatigue                                | 170        |
| 4.2.8      | Bilan de l'application à l'essai CCT                                      | 172        |
| <b>4.3</b> | <b>Extension de l'approche au trois dimensions</b>                        | <b>173</b> |
| 4.3.1      | Tomographie et mesure de champ                                            | 173        |
| 4.3.2      | Extraction des FIC en volume                                              | 175        |
| 4.3.3      | Vers des lois de propagation de fissures tridimensionnelles               | 176        |

---

---

Dans les chapitres précédents, la méthode de simulation avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes a été présentée dans le cas linéaire afin de disposer des développements asymptotiques. Pour traiter des non-linéarités plus étendues, on pourrait modifier les champs asymptotiques, en utilisant par exemple les champs HRR [RIC 68b, HUT 68, ELG 06b]. Une autre possibilité serait de concentrer les variables plastiques en pointe de fissure [POM 07, POM 09b] comme introduit dans l'équation (1.85).

Cependant, une simulation élastique permet fréquemment de modéliser correctement de grandes classes de matériaux en situations réelles. En effet les hypothèses de la mécanique linéaire élastique sont acceptables pour simuler l'évolution de fissures dans des matériaux fragiles. Elles sont également acceptables pour simuler la fatigue à grand nombre de cycles, lorsque la plasticité cyclique reste confinée. Cette situation se retrouve dans de nombreux systèmes mécaniques. Dans ces deux situations, la rupture est pilotée par les coefficients asymptotiques. Des simulations DEK-FEM pourraient alors être utilisées pour prédire la tenue d'une structure, évaluer sa durée de vie et planifier les opérations de maintenance.

Nous nous intéressons en particulier à la fatigue en plasticité confinée. Les paramètres pilotant la propagation, et des extensions à des non-linéarités de comportements plus étendues ont été présentés à la Section 1.2.3.3. Rappelons simplement que sous une sollicitation cyclique, une fissure peut propager pour des niveaux de charges très inférieurs à la charge statique critique. Pour des matériaux pour lesquels la plasticité reste confinée, les paramètres pilotant la propagation sont les facteurs d'intensité des contraintes. Dans ce cas, une loi de Paris [PAR 61] ou ses dérivées peuvent être utilisées. Pour que cette loi soit valable sous différents niveaux de triaxialité des contraintes, il faut prendre en compte le  $T$ -stress dans la loi de propagation [BRO 85, LAR 73, HUT 06]. Par exemple, Hutař *et al.* [HUT 06] ont proposé une loi adaptée à ce contexte, présentée équation (1.83). Ainsi, la méthode DEK-FEM permet d'utiliser directement cette loi puisque les coefficients asymptotiques sont évalués au cours de la simulation.

Dans un premier temps, Section 4.1, les méthodes de mesures 2D dédiés aux structures avec fissures sont présentées. Le champ de déplacements est mesuré dans la zone de propagation avec une méthode de corrélation d'images [SUT 83, SUT 09, RÉT 08]. À partir de ce champ mesuré, la position de la fissure et les coefficients asymptotiques correspondants sont identifiés par projection sur les séries de Williams. En parallèle, une simulation DEK-FEM avec les conditions aux limites mesurées localement est menée. Les méthodes de post-traitement des champs de déplacement expérimentaux et de simulation partagent les mêmes modèles et discrétisations. Leur étude en parallèle permet de valider les modèles et discrétisations. À la Section 4.2, ces méthodes sont utilisées sur un essai 2D pour identifier une loi de propagation en fatigue. Enfin, la Section 4.3 est consacrée à l'extension de la méthode en 3D.

#### 4. Vers l'identification de lois de propagation de fissures 2D/3D par couplage simulation/mesure de champs

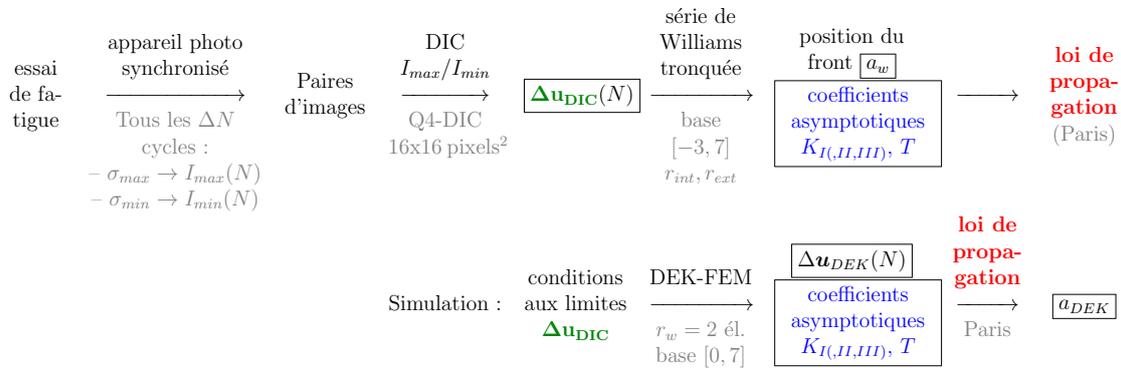


FIGURE 4.1 – Les différentes étapes de la stratégie d'identification de la loi de propagation de fatigue proposée en 2D.

### 4.1 Méthode d'identification de lois de propagation en fatigue 2D

Pour identifier une loi de propagation de fissure de fatigue, il est nécessaire :

- d'identifier la position du front au cours de la propagation et donc la vitesse de propagation.
- d'identifier les variables de cette loi au cours de la propagation. Nous nous intéresserons en particulier à des lois basées sur les coefficients asymptotiques comme les FIC et le *T-stress*.
- de vérifier que les hypothèses de validité de la loi choisie sont vérifiées.

La démarche proposée va plus loin, elle est schématisée sur la Figure 4.1. Elle intègre un couplage entre l'identification expérimentale et la simulation. Ce couplage permet de vérifier que le modèle de la simulation permet de représenter les phénomènes mis en jeu. Il permet également une première validation de la loi de propagation.

La première difficulté est d'estimer la longueur de la fissure ou la position du front. Il existe de nombreuses méthodes dédiées à cette mesure. Il est par exemple possible de soumettre l'éprouvette à un potentiel électrique et à partir de sa résistivité de déterminer la fraction de l'éprouvette qui est rompue [RIT 71]. Si la forme générale de la fissure est connue (fissure plane, circulaire ou à front droit, généralement en mode *I*), il est possible de remonter jusqu'à la taille de la fissure. De même, une mesure de la souplesse peut permettre de connaître la proportion de l'éprouvette qui est rompue [SAX 78]. D'une manière plus directe, il existe des jauges de fissuration à coller sur le flanc de l'éprouvette, sur la trajet de fissure présumé. Ces jauges sont composées de fils perpendiculaires à la fissure qui au passage de celle-ci se rompent, augmentant donc la résistivité de la jauge et permettant de connaître la position du front. Enfin, les méthodes *post-mortem*, en

particulier en fatigue, consistent à marquer le front (surcharge, corrosion, encre,...) lors de la propagation. L'éprouvette est ensuite rompue pour observer le faciès du front et retrouver la position lors du marquage. Cependant, la plupart des méthodes de marquage impactent la vitesse de propagation. Une fois la géométrie de la fissure connue, les paramètres de propagations sont calculés. Une première approche consiste à utiliser une mesure globale des conditions aux limites (généralement un capteur d'effort et de déplacement) pour utiliser une expression connue [BRO 89] ou une simulation (comme présenté à la Section 1.2.4). Une seconde approche pour calculer les paramètres est d'utiliser directement les champs mesurés localement autour de la pointe de fissure.

La procédure d'identification de la position du front et des paramètres de propagation utilisée est basée sur la mesure du champ de déplacements expérimental (détaillée à la Section 4.1.1). La mesure de champs permet d'obtenir le champ de déplacements surfacique à partir d'image ou volumique à partir de radiographies. Elle est non destructive, ne repose sur aucune hypothèse de forme de la fissure et permet d'identifier un champ de données bruitées. Comme présenté à la Section 4.1.2, il faut néanmoins traiter ce champ de déplacements spécifiquement pour obtenir la position du front et les facteurs d'intensité des contraintes avec précision. La mesure de champs permet également de vérifier que les paramètres de cette loi sont bien dominants dans le comportement au voisinage de la fissure. Cette procédure ne repose sur aucune hypothèse globale sur les conditions aux limites.

Une simulation est conduite en parallèle de l'identification. Elle est soumise à des conditions aux limites en déplacements mesurées localement par la mesure de champs. Ce parallèle permet de s'assurer que la simulation fournit des paramètres de la loi de propagation en adéquation avec l'identification expérimentale. La comparaison entre le champ de déplacements simulé et le champ de déplacements expérimental permet de valider le modèle de simulation numérique. Enfin, la simulation de la propagation permet de vérifier que la vitesse de propagation simulée correspond à la vitesse mesurée.

#### 4.1.1 Mesure de champs par corrélation d'image

La méthode expérimentale la plus classique pour connaître les champs mécaniques au cours d'une expérience est l'utilisation de jauges de déformation. Cette méthode fonctionne principalement pour des petites déformations et peut être utilisée dans la plupart des environnements mécaniques. Cependant, elle ne permet de connaître la déformation qu'en un point et dans une direction (mais en temps réel). Des méthodes plus élaborées, nécessitant un traitement numérique permettent d'obtenir des champs mécaniques, on parle alors de mesure de champs. L'interférométrie surfacique [JAC 08] donne des résultats intéressants et précis pour des surfaces rugueuses. Elle nécessite néanmoins des équipements spécifiques.

Une méthode concurrente est la corrélation d'images, développée pour la mécanique des solides notamment par Sutton *et al.* [SUT 83, SUT 09]. La

méthode consiste à comparer deux images sous des états mécaniques différents pour déterminer le champ de déplacements entre les deux. En 2D, le dispositif expérimental est relativement simple, il suffit d'un appareil photo (synchronisé en dynamique ou sous chargement cyclique). Pour que la méthode fonctionne, il faut que les images présentent un motif nuancé. Si le motif n'est pas inhérent au matériau, en 2D il peut généralement être facilement ajouté (mouchetis peint sur la surface). La méthode s'applique également au 3D, les images peuvent être obtenues en microtomographie à rayons X. L'obtention d'un champ de déplacements 3D expérimental est très prometteuse pour l'identification d'une loi de propagation 3D. Cependant, cette fois il est difficile d'ajouter un motif à l'intérieur du matériau, la méthode est donc limitée à certains matériaux.

Différentes approches existent pour obtenir le champ de déplacement [LAC 14b]. Une première méthode consiste à suivre des motifs et leur déplacement. Il existe aussi des méthodes consistant à découper l'image en zones de référence, et à repérer leur déplacement. Enfin la méthode que nous utilisons est dite globale, l'image de référence est décomposée en éléments finis, le déplacements est donc cherché aux nœuds [SUN 05, BES 06].

#### 4.1.1.1 Principe de la méthode

À partir de deux images, on cherche les déplacements permettant de les corrélérer. Une première image  $f(\mathbf{x})$  est dite image de référence, on cherche le champ de déplacement  $\mathbf{u}_{ex}$  permettant de superposer la seconde image  $g(\mathbf{x})$  à la première tel que

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_{ex}(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

En pratique, les images étant obtenues expérimentalement, il existe un bruit de mesure  $b(\mathbf{x})$  entre les deux. Ce bruit est par exemple généré par des reflets, des décollements du mouchetis, des projections,...

Les images sont numériques, en niveau de gris, ce sont donc des matrices de scalaires, organisées géométriquement en pixels (ou voxel en 3D). Le problème numérique est donc discret. Le capteur photographique réalise une approximation qui s'ajoute au bruit. En plus de reposer sur des images bruitées, la résolution de cette équation locale est mal posée. On met donc en place un problème inverse par l'intermédiaire des moindres carrés pour surcontraindre l'identification du déplacement. Le problème revient alors à minimiser la fonctionnelle  $\Phi_c^2(\mathbf{u})$  sur le domaine  $\Omega$

$$\Phi_c^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 d\Omega \quad (4.2)$$

dans laquelle l'équation discrète est approchée en négligeant le bruit. Ce problème de minimisation, non-linéaire en  $\mathbf{u}$ , est également mal posé. Pour pouvoir résoudre, on s'intéresse donc aux déplacements d'une zone de pixels. Pour la méthode de résolution globale, cette zone se traduit par des éléments qui englobent plusieurs pixels.

La fonctionnelle (4.2) étant non linéaire par rapport au déplacement, une méthode de résolution incrémentale (d'incrément  $\delta\mathbf{u}$ ) est retenue. Un développement de Taylor à l'ordre un de  $\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \delta\mathbf{u})$  permet d'approcher la fonctionnelle (4.2) autour d'une valeur de  $\mathbf{u}$  par

$$\Phi_c^2(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \approx \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - \delta\mathbf{u} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u})]^2 d\Omega. \quad (4.3)$$

La méthode choisie, dite globale, repose sur une discrétisation éléments finis. Le champ de déplacements est donc cherché sous la forme  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N u_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})$  comme introduit à la Section 1.2.1.3. De même pour l'incrément  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N du_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})$ . La fonctionnelle s'écrit alors sous forme matricielle

$$\Phi_c^{h^2}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \approx C + \frac{1}{2} \sum_{j,k} du_j M_{jk} du_k - \sum_k du_k D_k, \quad (4.4)$$

$$\text{avec : } C = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u})]^2 d\Omega, \quad (4.5)$$

$$D_k = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u})) (\boldsymbol{\varphi}_k \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u})) d\Omega, \quad (4.6)$$

$$M_{jk} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varphi}_j \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u})) (\boldsymbol{\varphi}_k \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u})) d\Omega. \quad (4.7)$$

À partir d'un champ de déplacements initial  $\mathbf{u}_{ini}$ , la recherche d'un minimum approché de la fonctionnelle  $\Phi_c^{h^2}(\mathbf{u}_{ini} + \delta\mathbf{u})$  peut être faite par l'annulation de sa dérivée

$$\min \Phi_c^{h^2}(\mathbf{u}) \implies \frac{\partial \Phi_c^{h^2}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = 0 \iff \mathbf{M}d\mathbf{U} = \mathbf{D}. \quad (4.8)$$

La résolution incrémentale revient donc à résoudre un système linéaire.

L'itération suivante de la résolution est faite à partir du champ de déplacements ainsi calculé :  $\mathbf{u}_{ini} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ . L'opération est renouvelée jusqu'à convergence, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'incrément  $\delta\mathbf{u}$  ait atteint la précision requise. Il est possible de calculer préalablement le mouvement de corps rigide en calculant le produit de corrélation des images dans le domaine de Fourier. Ce calcul fournit une bonne initialisation au calcul itératif.

À convergence, le gradient de l'image déformée tend vers le gradient de l'image de référence. L'approximation  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \approx \nabla \mathbf{f}(\mathbf{u})$  est souvent faite, elle permet de calculer la matrice  $\mathbf{M}$  une seule fois, seule la matrice  $\mathbf{D}$  est à recalculer à chaque itération. Il existe des méthodes pour calculer de manière simplifiée un second membre approché [LAC 14b]. Enfin, une résolution multi-échelle [RÉT 07] est possible pour accélérer la résolution en calculant rapidement un champ de déplacements initial approché, d'une manière assez similaire avec la méthode multigrilles.

#### 4.1.1.2 Résidu et erreur

Une fois le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  entre les deux images calculé, il est possible de quantifier la qualité de la superposition. Le résidu de la corrélation donne une information surfacique sur la différence entre les deux images  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u})|$ . Il regroupe les contributions d'un grand nombre de phénomènes

- les écarts optiques entre les images : luminosité, contraste, reflet,...
- bruit de mesure : numérisation en niveau de gris,
- les interférences physiques : vibrations, débris, décollement du mouchetis,...
- les erreurs d'approximation du champ de déplacements réel par le champ élément fini.

L'information surfacique que constitue le résidu de corrélation peut alors fournir des informations physiques sur la mesure. Il est possible d'identifier des zones où le mouchetis est défaillant. Dans le cadre de la fissuration, la discontinuité des déplacements n'est pas dans le champ d'approximation, la fissure apparaît donc dans le résidu de corrélation. Il est aisé (par seuillage), de retrouver la géométrie expérimentale de la fissure lorsque le saut de déplacements est suffisamment important. Il est alors possible d'enrichir le champ d'approximation de la corrélation avec la discontinuité [RÉT 08]. Cet enrichissement dédié permet d'améliorer la précision de la méthode.

Pour évaluer la précision de l'algorithme, il est possible de s'intéresser à un couple d'image par un "déplacement" numérique connu d'une image de référence (un mouchetis typiquement). En ajoutant un bruit connu à ces images, il est intéressant de quantifier la sensibilité de l'algorithme. Pour un bruit blanc Gaussien de variance  $\sigma^2$ , Leclerc *et al.* [LEC 12] ont montré que l'incertitude augmente lorsque la taille des éléments diminue (en  $h^{-3/2}$ ). En effet, l'identification de chaque degré de liberté repose alors sur moins de pixels et donc moins d'informations.

Enfin, l'incertitude permet de quantifier globalement les erreurs introduites à la fois par le dispositif d'acquisition et l'algorithme. L'incertitude est définie comme l'écart type de l'erreur pour un champ connu  $\mathbf{u}_{ex}$  (un déplacement de corps rigide par exemple)

$$inc_u = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_k - u_{ex}(\mathbf{x}_k))^2}, \quad (4.9)$$

où  $N$  est le nombre de degrés de liberté,  $u_{ex}(\mathbf{x}_k)$  le champ connu dans la direction correspondante au degré de liberté  $k$  et  $\mathbf{x}_k$  la position du nœud associé au degré de liberté  $k$ . Elle est généralement inférieure à un pixel, et peut descendre jusqu'à moins d'un centième de pixel.

#### 4.1.1.3 Régularisation mécanique

Une possibilité intéressante pour améliorer la précision est de régulariser le champ de déplacement. En effet, si l'on apporte des informations supplémentaires sur le

champ de déplacement, l'identification en sera d'autant plus précise. Dans le cadre de la mécanique, le champ mécanique doit être équilibré, on peut pour cela utiliser l'écart à l'équilibre [CLA 04, RÉT 09].

En utilisant une méthode de corrélation d'images globale basée sur les éléments finis, ces mêmes éléments peuvent être utilisés pour le problème d'équilibre. En pratique, on écrit la matrice de rigidité  $\bar{\mathbf{K}}$  du problème restreint aux nœuds où les efforts extérieurs sont nuls. L'équilibre se traduit donc par  $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \mathbf{0}$  (où  $\mathbf{U}$  est le vecteur des déplacements généralisés). On doit donc minimiser l'écart à l'équilibre

$$\Phi_m^{h^2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U})^2. \quad (4.10)$$

Cette fonctionnelle à minimiser est jointe à la fonctionnelle de corrélation. Le problème régularisé revient alors à minimiser

$$\Phi_m^{h^2}(\mathbf{u}) = \Phi_c^{k^2}(\mathbf{u}) + \omega_m \Phi_m^{h^2}(\mathbf{u}), \quad (4.11)$$

où  $\omega_m$  est un coefficient permettant de pondérer la régularisation mécanique. Ce coefficient peut être optimisé [LEC 12, LAC 14b] par rapport à la taille des éléments considéré et à la longueur d'onde de coupure du filtrage mécanique introduit par la régularisation.

## 4.1.2 Identification des coefficients asymptotiques de la fissure

La mesure du champ de déplacements fournit un grand nombre d'informations qui permettent une observation précise des phénomènes et des paramètres de rupture. Nous nous intéressons en particulier à la fatigue en plasticité confinée. Il est par exemple possible de s'intéresser au phénomène de refermeture à partir d'une série d'images lors de la décharge de l'éprouvette [SUT 99, SUT 00, LIM 10, CAR 09] (refermeture dont l'impact sur la vitesse de propagation en fatigue a été présenté à la Section 1.2.3.3). La méthode de simulation et de dépouillement expérimental proposé fournit la position du front, les FIC et les autres coefficients asymptotiques. Nous nous intéressons donc en particulier à des situations où ces paramètres pilotent la fatigue et aux méthodes d'identification de ces coefficients.

### 4.1.2.1 Présentation de la méthode

Puisque le champ de déplacements expérimental peut être approché, Réthoré *et al.* [RÉT 05a] ont étendu les méthodes intégrales présentées à la Section 1.2.4.1 à une intégrale de domaine basée uniquement sur le déplacement. Une autre approche possible est de projeter, au sens des moindres carrés, le champ de déplacements sur les champs singuliers de l'équation (1.27) pour obtenir une estimation des FIC. Cette démarche proposée par McNeill *et al.* [MCN 87], donne de résultats intéressants mais nécessite une mesure de champs localisée autour du front. En effet, la projection

doit avoir lieu dans une zone parfois restreinte (selon la géométrie considérée) autour du front, où les FIC sont dominants comme représenté sur la Figure 1.12.

Comme pour la simulation, Section 1.2.5.2, l'introduction d'autres ordres de la série permet une identification plus précise des FIC. Les termes d'ordres supérieurs accommodent les effets lointains. Ils permettent d'utiliser une zone de projection plus grande en améliorant l'identification des FIC. Roux *et al.* [ROU 06, ROU 09] ont proposé de projeter le champ de déplacements sur une troncature de la série de Williams

$$\mathbf{u}_p(r, \theta) = \sum_{i=I,II} \left[ \underbrace{\sum_{n_{min}}^{-1} b_i^n \mathbf{g}_i^n(\theta) r^{n/2}}_{\text{termes "super-singuliers"}} + \underbrace{b_i^0 \mathbf{g}_i^0}_{\text{translations}} + \underbrace{b_i^1 \mathbf{g}_i^1(\theta) \sqrt{r}}_{\text{terme singulier}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{n_{max}} b_i^n \mathbf{g}_i^n(\theta) r^{n/2}}_{\text{termes "sub-singuliers"}} \right]. \quad (4.12)$$

La projection au sens des moindres carrés sur cette série tronquée permet une identification d'un petit nombre de degrés de liberté (les coefficients asymptotiques  $b_i^n$ ) avec une incertitude faible. Les termes non-singuliers permettent de prendre en compte un certain nombre de phénomènes non-linéaires localisés en pointe de fissure. Ainsi ces phénomènes n'affectent pas l'évaluation des FIC. Les ordres  $n > 2$  ne sont pas singuliers, ils sont dit "sub-singuliers". Ils permettent de prendre en compte des phénomènes plus lointains, comme les conditions aux limites. À l'inverse, les ordres  $n < 0$  sont dits "super-singuliers", leur singularité est plus forte que celle permise sous l'hypothèse d'élasticité linéaire. Ils sont très localisés en pointe de fissure, et sont difficiles à identifier. Ils permettent néanmoins d'identifier la position du front [HAM 07, ROU 09], de quantifier les non-linéarités [HUI 95, ROU 09] en pointe. Ainsi, la taille de la *process zone* (où des non-linéarités importante existent) est quantifiée par

$$r_{PZ} = -8 \sqrt{\frac{b_I^{-3}}{b_I^1}}. \quad (4.13)$$

Ils permettent également de limiter l'impact de ces non-linéarités sur l'identification des FIC.

La pratique a montré [HEN 10, MAT 12] que  $n_{min} = -3$  et  $n_{max} = 7$  permettent une bonne identification des coefficients asymptotiques dominants (i.e., les facteurs d'intensité des contraintes, le  $T$ -stress et les termes super-singuliers).

Cette méthode de projection a fait ses preuves pour l'identification des facteurs d'intensité des contraintes [ROU 06, HAM 07, ROU 09, HEN 10, MAT 12] et l'identification du front. Comme la méthode DEK-FEM, elle est basée sur une troncature de la série de Williams. La combinaison de ces deux méthodes permet donc naturellement de disposer des mêmes coefficients asymptotiques. Il est donc possible d'identifier une loi basée sur ces coefficients et de l'utiliser dans la simulation. Une loi de Paris peut être utilisée mais des lois utilisant des termes de plus haut ordre sont également envisageables. De plus, lorsque la cinématique des séries de Williams permet une projection avec un résidu faible, la méthode DEK-FEM permet une

approximation pertinente.

Il est également possible de réaliser la corrélation d'images directement sur cette base tronquée des séries de Williams [ROU 06, RÉT 11, MAT 12]. L'opération de corrélation est donc simplifiée, puisque le nombre d'inconnues est plus petit que pour une discrétisation FEM. D'autre part, cette base vérifiant l'équilibre, la corrélation est donc naturellement "régularisée". Cette approche améliore légèrement l'identification des coefficients asymptotiques.

#### 4.1.2.2 La projection en pratique

La projection du champ de déplacements mesuré  $\mathbf{u}_{DIC}(\mathbf{x})$  sur la troncature des séries de Williams en déplacement  $\mathbf{u}_p(r, \theta)$  (équation (4.12)) est réalisée au sens des moindres carrés [HAM 07] sur un ensemble de points  $N_p$  uniformément répartis dans une zone autour du front. Elle revient à identifier les coefficients  $b_i^n$  qui minimisent le résidu

$$\Phi_p^2(\mathbf{u}_p) = \sum_{k=1}^{N_p} (\mathbf{u}_{DIC}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_k))^2. \quad (4.14)$$

Où  $\mathbf{x}_k$  est la position du nœud  $k$ . La projection étant discrète, il est possible d'écrire cette équation sous la forme matricielle

$$\Phi_p^2(\mathbf{u}_p) = \|\mathbf{U} - \mathbf{GB}\|^2 = \mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{GB} - \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \mathbf{U} + \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \mathbf{GB}. \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } U_j &= \mathbf{u}_{DIC}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{e}_m, \quad j \in \llbracket 1; 2N_p \rrbracket & \begin{cases} \text{si } j \text{ paire : } & m = 2 \text{ et } k = \frac{j}{2} \\ \text{sinon : } & m = 1 \text{ et } k = \frac{j-1}{2} \end{cases} \\ B_l &= b_i^n, \quad l \in \llbracket 1; 2(n_{max} - n_{min} + 1) \rrbracket & \begin{cases} \text{si } j \text{ paire : } & i = II \text{ et } n = \frac{j}{2} \\ \text{sinon : } & i = I \text{ et } n = \frac{j-1}{2} \end{cases} \\ G_{lj} &= r_k^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta_k) \cdot \mathbf{e}_m \quad \text{où } (r_k, \theta_k) \text{ correspondent à } \mathbf{x}_k. \end{aligned}$$

Cette fois le problème est linéaire, la recherche du minimum de la fonctionnelle  $\Phi_p^2(\mathbf{u}_p)$  peut être faite directement en trouvant la valeur qui annule sa dérivée

$$\min \Phi_m^2(\mathbf{u}_p) \implies \frac{\partial \Phi_m^2(\mathbf{u}_p)}{\partial \mathbf{u}_p} = 0 \iff \mathbf{G}^T \mathbf{GB} = \mathbf{G}^T \mathbf{U}. \quad (4.16)$$

La projection sur les séries de Williams pour identifier les coefficients asymptotiques consiste donc simplement à résoudre un problème linéaire. Suite à la corrélation d'images, le champ de déplacement  $\mathbf{u}_{DIC}$  est connu pour tout point de la zone de corrélation. Pour obtenir la matrice de projection  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ , il faut évaluer les expressions analytiques des séries de Williams aux points de projection choisis. Pour déterminer  $r_k$  et  $\theta_k$ , il faut connaître la géométrie de la fissure, la méthode utilisée est détaillée à la Section 4.1.3.

La projection est réalisée dans une zone autour du front où la troncature de la série de Williams décrit bien les déplacements. Pour que la projection reste identique

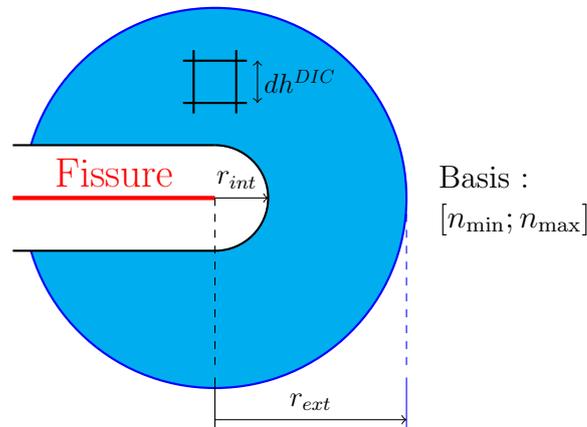


FIGURE 4.2 – Paramètres définissant la géométrie de la zone de projection autour du front.  $r_{ext}$  est le rayon extérieur autour du front,  $r_{int}$  est le rayon intérieur autour du front,  $dh^{DIC}$  la taille des éléments de corrélation Q4-DIC,  $n_{min}$  et  $n_{max}$  les bornes de la troncature de la série de Williams.

avec la propagation du front, la zone de projection reste de forme constante et suit le front. Le choix de cette zone est un compromis entre une zone suffisamment étendue pour que la projection soit précise malgré un champ de déplacements bruité issu de la corrélation  $\mathbf{u}_{DIC}$ , et restreinte autour du front pour que les hypothèses des séries de Williams soient vérifiées.

Autour du front, des non-linéarités existent (notamment dues au comportement du matériau). Une zone autour du front, de rayon  $r_{int}$  est exclue [RÉT 11], il est donc possible d'utiliser les termes super-singulier. La dimension extérieure de la zone de projection est déterminée par un rayon  $r_{ext}$  afin de limiter l'effet des conditions aux limites. Une zone autour de la fissure où la corrélation est perturbée par la discontinuité est également exclue. Pour limiter le nombre de paramètres qui définissent cette zone de projection, la largeur de cette dernière zone est la même que le rayon intérieur  $r_{int}$ . La zone de projection et son paramétrage sont représentés sur la Figure 4.2.

Une fois la projection réalisée, le champ de déplacements projeté  $\mathbf{u}_p$  est connu à partir des coefficients asymptotiques évalués. Il est alors intéressant de quantifier la capacité de ce champ à approcher le champ de déplacements expérimental obtenu par corrélation  $\mathbf{u}_{DIC}$ . Le champ de déplacements projeté  $\mathbf{u}_p$  étant connu en tout point, il est possible d'avoir une carte d'erreur en considérant par exemple  $\frac{|\mathbf{u}_{DIC} - \mathbf{u}_p|}{\max |\mathbf{u}_{DIC}|}$ . Cette carte permet de savoir si l'erreur est répartie uniformément ou localisée et de calculer l'ordre de l'incertitude de corrélation. On peut alors s'interroger sur son origine, en lien avec la carte de résidu de corrélation pour la relier à des difficultés expérimentales ou si elle reflète l'incapacité de la base à représenter les déplacements expérimentaux (non-linéarité trop importante, effets de bord,...).

Il est également intéressant de se doter d'un indicateur global pour jauger la projection au cours des cycles ou du temps par exemple. Nous utilisons un critère au sens des moindres carrés sur  $N$  points du domaine

$$\epsilon_{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}_j(\mathbf{x}_k))^2}}{N \max_k(\mathbf{u}_j(\mathbf{x}_k))}. \quad (4.17)$$

Où  $N$  peut par exemple être identique à  $N_p$ . Si ce domaine est la zone de projection, on souhaite que cette erreur soit de l'ordre de grandeur de l'incertitude de corrélation (liée au bruit de la mesure), pour s'assurer que la projection est bonne.

### 4.1.3 Identification de la géométrie de la fissure

Un étape préalable à la projection sur la série de Williams est de connaître la géométrie de la fissure. En effet, pour déterminer  $r$  et  $\theta$  en fonction de la position  $\mathbf{x}$ , il faut connaître la forme et la position des lèvres de la fissure ainsi que la position de la pointe de la fissure. L'identification de la position des lèvres de la fissure a un impact plus faible que celle de la position du front sur la projection et l'identification des facteurs d'intensité des contraintes.

Pour connaître la géométrie des lèvres de la fissure, une première méthode consiste à charger la structure concernée et à partir d'une image observer où l'ouverture est visible. La difficulté est alors d'automatiser le processus et de lier les observations à la géométrie de l'éprouvette. Une étude *post-mortem* est également possible. La corrélation d'images permet d'automatiser cette démarche en considérant le résidu de corrélation. Celui-ci sera élevé autour de la discontinuité qui est mal représentée par les éléments finis (ou des fonctions continues en général). Un seuillage de ce résidu permet une bonne identification des lèvres de la fissures aussi bien en 2D qu'en 3D [RÉT 08, ROU 09, FER 06, LAC 14b].

En pratique, la position des lèvres de la fissure (dans la direction  $\mathbf{e}_n$ , voir Figure 1.2) a peu d'influence sur la qualité de l'identification des facteurs d'intensité des contraintes. Pour une fissure plane chargée en mode  $I$  qui propage, la projection a été réalisée pour différentes positions de la fissure. Dans un premier temps, un champ de déplacements issu d'une simulation élasto-plastique est considéré (il s'agit de la simulation étudiée dans la Section 4.2.2). La fissure fait 3 mm et propage par pas de 40  $\mu\text{m}$ ,  $r_{int} \simeq 0.8$  mm et  $r_{ext} \simeq 2.4$  mm. Un pixel correspond à un pixel des images de l'essai Section 4.2 : 1 pixel  $\simeq 6$   $\mu\text{m}$ . Le champ est continu et il n'est pas bruité. Un  $K_I^{ref}$  de référence est identifié avec l'intégrale d'interaction. L'erreur sur l'identification du  $K_I$  par projection au cours de la propagation est représentée sur la Figure 4.3a. L'erreur introduite est symétrique par rapport au déplacement de la position de la fissure. On constate également que pour un décalage de la fissure de 45 pixel  $\simeq 0.28$  mm, qui correspond à une mesure grossière, l'erreur commise sur l'identification de  $K_I$  reste faible :  $< 0.15\%$ . Comme représenté sur la Figure 4.3b, ce

résultat est vrai malgré une erreur moyenne de projection  $\frac{\text{mean}|\mathbf{u}_{ref}-\mathbf{u}_p|}{\max|\mathbf{u}_p|}$  importante, de l'ordre de 2.5%, dix fois supérieure à celle commise pour le bonne position.

La faible influence de la position du front sur l'identification des FIC est également vérifiée sur des champs de déplacements issus de la corrélation. La géométrie de l'essai de fatigue considérée est la même que celle de la simulation précédente. Le champ de déplacements projeté est issu de la corrélation d'images (entre le chargement minimum et maximum, tout les 1 000 cycles comme détaillé Section 4.2.1). C'est un champ de déplacements expérimental bruité. La position de la fissure est identifiée avec les résidus de corrélation. L'évaluation de  $K_I$  avec cette position est considérée comme référence. Sur la Figure 4.3c, des identifications de  $K_I$  par projection pour différentes positions de la fissures sont représentées. Pour ce champ de déplacement, le facteur d'intensité des contraintes en mode  $I$  de référence est moins précis. On constate néanmoins que la modification de la position de la fissure à un impact modeste :  $< 4\%$  sur l'évaluation de  $K_I$  pour  $\pm 45 \text{ pixel} \simeq 0.28 \text{ mm}$ . L'impact est réduit à moins de  $< 2\%$  pour un décalage  $\pm 15 \text{ pixel} \simeq 92 \mu\text{m}$ . L'influence de la position de la fissure sur la qualité de l'identification est donc faible.

De son coté, la position du front de la fissure a une influence plus forte sur l'identification de  $K_I$  [ROU 09]. Elle est malheureusement difficile à identifier précisément expérimentalement avec des méthodes optiques. Même avec des images de bonne résolution autour de la pointe de fissure, on ne peut voir la fissure que lorsque son ouverture est de l'ordre du pixel. La projection sur les séries de Williams en considérant les termes super-singuliers permet une procédure d'identification automatique de la position du front. La méthode utilisée consiste à trouver la position du front qui annule  $b_I^{-1}$ , le premier coefficient super-singulier en mode  $I$  [HAM 07, ROU 09].

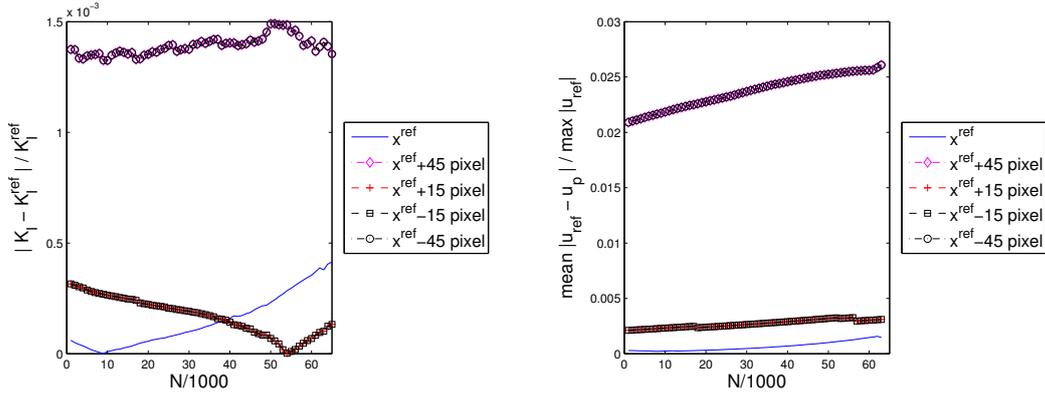
La mécanique linéaire élastique de la rupture suppose que les termes super-singuliers ne sont pas activés. Cependant, sous ces hypothèses et lorsque le voisinage du front est exclu, un décalage de la position du front d'une distance  $d$  dans la direction  $\mathbf{e}_t$  active ces termes. Pour introduire ce décalage facilement, les fonctions  $\phi_{\mathbf{w}_i}^n(r, \theta) = r^{n/2} \mathbf{g}_i^n(\theta)$  de la série de Williams (rappelées équation (4.12)) sont exprimées dans les coordonnées cartésiennes locales ( $x_t = r \cos \theta, x_n = r \sin \theta$ ) introduites à la Figure 1.2. Dans ce système de coordonnées, les termes de la série de Williams en déplacements s'écrivent  $\varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t, x_n) = \phi_{\mathbf{w}_i}^n(r, \theta)$ . Le champ de déplacements pour le décalage  $d$  est alors approché par les amplitudes décalées  $\tilde{b}_i^n$

$$\mathbf{u}(x_t, x_n) = \sum_{i,n} \tilde{b}_i^n \varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t + d, x_n). \quad (4.18)$$

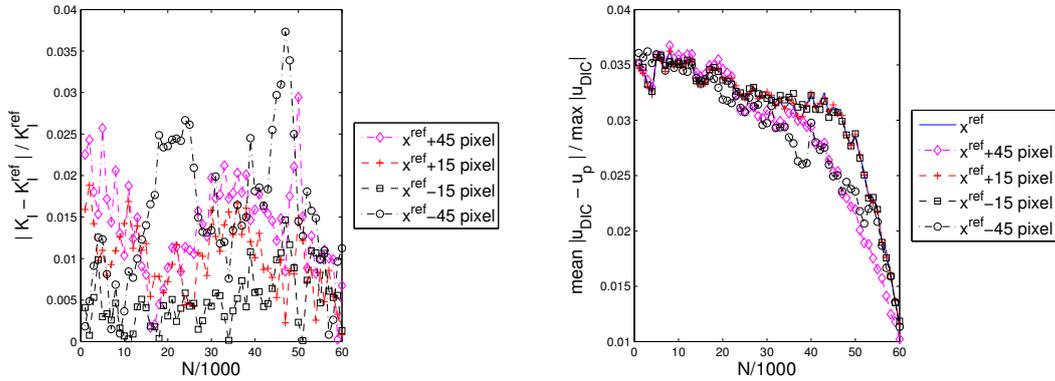
Lorsque la position du front est approchée, le décalage  $d$  est petit. Un développement de Taylor des fonctions  $\varphi_i^n$  par rapport à la première variable est considéré

$$\varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t + d, x_n) = \varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t, x_n) + \frac{\partial \varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t, x_n)}{\partial x_t} d + o(d). \quad (4.19)$$

La dérivée des fonctions de la série de Williams par rapport à la première variable


 (a) Simulation plastique : erreur sur  $K_I$ 

(b) Simulation plastique : erreur en déplacement


 (c) Corrélation d'images : erreur sur  $K_I$ 

(d) Corrélation d'images : erreur en déplacement

FIGURE 4.3 – Influence de la position de la fissure sur la projection. Projection de la variation de déplacements : (a) et (b) obtenue par simulation élasto-plastique, et (c) et (d) par corrélation d'images  $\Delta \mathbf{u}_{DIC}$  pour l'essai présenté à la Section 4.2. Il s'agit d'un essai symétrique, on s'intéresse donc à  $K_I$ .

est égale aux fonctions de deux ordres inférieurs

$$\partial \varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t, x_n) / \partial x_t = -\frac{n}{2} \varphi_{\mathbf{w}_i}^{n-2}(x_t, x_n).$$

Cette propriété permet d'exprimer le champ de déplacements en fonction des coefficients décalés et des fonctions à la bonne position

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_t, x_n) &= \sum_{i,n} \tilde{b}_i^n \left[ \varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t, x_n) - \frac{n}{2} \varphi_{\mathbf{w}_i}^{n-2}(x_t, x_n) d \right] \\ &= \sum_{i,n} \left[ \tilde{b}_i^n - \left( \frac{n+2}{2} \right) \tilde{b}_i^{n+2} d \right] \varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t, x_n) = \sum_{i,n} b_i^n \varphi_{\mathbf{w}_i}^n(x_t, x_n). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pour la position exacte, les coefficients super-singuliers sont nuls ( $b_i^n = 0, \forall n < 0$ ). La position qui annule le premier coefficient super-singulier est obtenue comme suit (les fonctions  $\varphi_{\mathbf{w}_i}^n$  sont linéairement indépendantes)

$$b_I^{-1} = 0 \iff \tilde{b}_I^{-1} - \frac{1}{2} \tilde{b}_I^1 d = 0 \iff d = \frac{2 \tilde{b}_I^{-1}}{\tilde{b}_I^1}. \quad (4.21)$$

Une autre interprétation de ce résultat est que pour un champ élastique linéaire, le coefficient super-singulier décalé  $\tilde{b}_I^{-1}$  résulte d'un mauvais positionnement du front de la fissure.

Ce premier résultat, équation (4.20), permet d'évaluer le décalage de la position du front supposée avec la position réelle. En effet, à partir d'une position supposée du front, il est possible d'écrire les séries de Williams et d'obtenir les coefficients  $\tilde{b}_i^n$ . Ces coefficients permettent alors d'approcher  $d$ . Cette valeur de  $d$  n'est qu'une approximation puisque le développement à l'équation (4.19) est au premier ordre. La procédure pour identifier la position du front est donc itérative. À partir d'une première approximation, elle consiste à projeter le champ de déplacements sur les séries de Williams en cette position et modifier la position du front avec l'approximation  $d$ . La procédure est répétée jusqu'à convergence. En général, on considère que la convergence est atteinte lorsque la correction sur la position  $d$  est plus petite qu'un pixel (quelques itérations  $< 10$  suffisent généralement).

Cette méthode permet de retrouver exactement la position du front lorsque le champ de déplacements considéré respecte les hypothèses de la mécanique élastique linéaire de la rupture. Cependant, la présence de non-linéarités en pointe de fissure active les termes super-singuliers [HUI 95, ROU 09]. Le choix que nous faisons est d'utiliser la position du front qui annule le premier coefficients super-singulier  $b_I^{-1}$ . Cette position est une position élastique équivalente qui sera également utilisée pour les simulations élastiques linéaires. Bien que ça ne soit pas le front matériel de la fissure, cette position permet une bonne projection du champ de déplacements sur les séries de Williams. L'efficacité de cette position pour comparer des valeurs de  $K_I$  obtenues par projection et par simulation sera validée sur l'exemple traité

Section 4.2. Elle permet de combiner efficacement la méthode de post-traitement expérimentale et les simulations DEK-FEM de propagation de fatigue.

Comme développé à la Section 4.3, il est possible d'étendre cette procédure en trois dimensions [LAC 14b]. La projection est alors réalisée dans des plans orthogonaux au front. Des difficultés supplémentaires existent : il faut définir la forme du front et répartir les plans le long de celui-ci. La principale problématique est la faible résolution de la images 3D reconstruites à partir des radiographies et le traitement des zones où le front approche les surfaces libres.

## 4.2 Essai CCT sur Ti35

La procédure d'identification de lois de propagation de fissure de fatigue, introduite à la Section 4.1 (et synthétisée sur la Figure 4.1), est menée sur un essai. L'essai CCT (*Center Crack Tension*) considéré est celui réalisé par Mathieu *et al.*, traité dans les articles [MAT 12, MAT 13]. Il s'agit d'une fissure centrée en tension en mode  $I$  sur une plaque fine de titane Ti35 sous un chargement de fatigue. Cet essai est présenté à la Section 4.2.1. Une simulation numérique élasto-plastique de cet essai est présentée à la Section 4.2.2. Elle permet d'étudier l'influence des différents paramètres de la projection sur l'identification des amplitudes de variation des coefficients asymptotiques.

La méthode de dépouillement proposée Section 4.1.2 est appliquée pour identifier la géométrie de la fissure et les coefficients asymptotiques. Dans le cas d'un chargement cyclique de fatigue, la vitesse de propagation est généralement liée à une variation de SIF  $\Delta K_I$ . Pour obtenir ce  $\Delta K_I$  et la position du front, on fait généralement le choix de projeter la variation de déplacements  $\Delta \mathbf{u}$  directement. Ce choix est discuté aux Sections 4.2.2.3 et 4.2.2.4. Les déplacements expérimentaux sont comparés à des déplacements issus de simulations DEK-FEM. Cette comparaison permet d'identifier des zones où la corrélation ne fonctionne pas et de vérifier que la simulation élastique permet d'approcher les champs mécaniques et d'identifier des FIC en adéquation avec la méthode de post-traitement.

Une loi de propagation de fissure de fatigue est alors identifiée. Dans la Section 4.2.7, une simulation DEK-FEM de l'expérience avec cette loi de propagation est alors menée, et la vitesse de propagation est comparée à celle identifiée expérimentalement. Cette simulation constitue une première vérification de la loi identifiée. En comparant ces résultats à ceux obtenus avec une expression analytique des FIC pour cette configuration, nous montrons l'importance des conditions aux limites. En effet, la procédure expérimentale d'identification des FIC utilise directement les déplacements mesurés sans faire d'hypothèse globale sur les conditions aux limites. D'autre part, pour la simulation, les conditions aux limites sont les déplacements (entre le chargement minimum et le chargement maximum) identifiés par corrélation sur un contour autour de la fissure.

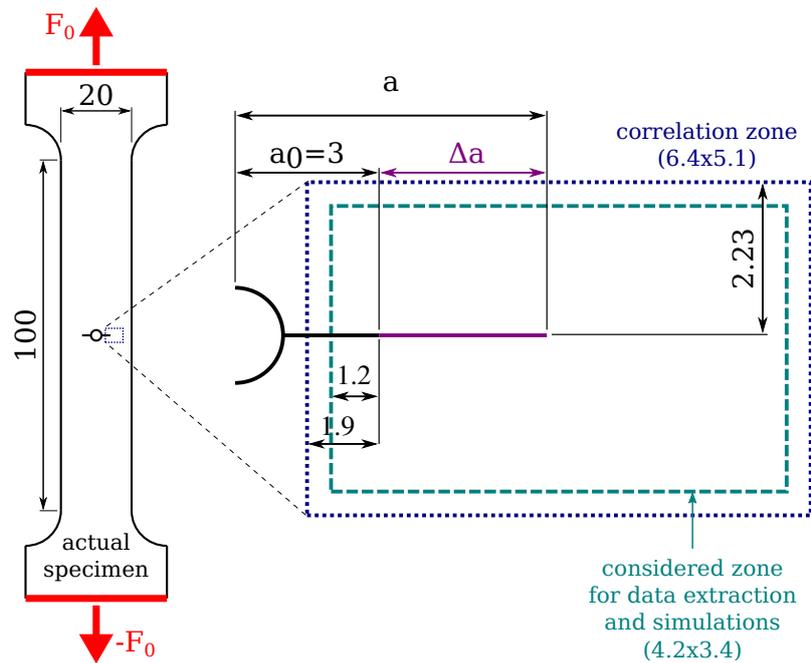


FIGURE 4.4 – Géométrie et conditions aux limites de l'éprouvette CCT. La zone de corrélation est représentée par un pointillé fin bleu. Le domaine considéré pour la simulation et la projection est délimité par un pointillé épais turquoise.

#### 4.2.1 Présentation de l'essai

L'éprouvette considérée est composée de Titane pur de grade T35 (max 0.2 wt.% Fe, max 0.18 wt.% O, max 0.08 wt.% C, max 0.03 wt.% N, max 0.015 wt.% H). Les propriétés matériau identifiées sont un module d'Young  $E = 100$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$  et une limite élastique  $\sigma_y = 210$  MPa. La géométrie de l'éprouvette est représentée sur la Figure 4.4. La largeur de l'éprouvette est de  $2W = 20$  mm, et son épaisseur  $t = 0.3$  mm. Aussi, l'hypothèse de contraintes planes est retenue pour la modélisation et la construction des séries de Williams. Avec une fissure initiale centrée de demi longueur  $a_0 = 3$  mm perpendiculaire à l'axe de traction, l'essai CCT est symétrique. Aussi, seul le mode  $I$  est activé. La fissure se propage pour atteindre une demi longueur  $a_f \approx 6$  mm.

Cette éprouvette est soumise à un chargement de traction cyclique de  $F_0 = 50$  à 500 N, le rapport de charge est donc constant  $R = 0.1$ . Elle est sollicitée jusqu'à rupture ( $\approx 120\,000$  cycles), à une fréquence de 10 Hz. De plus, l'environnement est maintenu constant. Comme illustré dans [MAT 12] pour le cycle 90 000, une zone de  $\Delta K_I$  dominance existe. L'hypothèse de plasticité confinée est donc vérifiée selon la définition proposée par Suresh [SUR 98]. Le paramètre principal pilotant la propagation de la fissure est donc l'amplitude du FIC  $\Delta K_I$  au cours d'une phase de chargement. En première approximation, pour cette géométrie, une loi de propagation de Paris (rappelée équation(1.81)) est pertinente [CIA 08]. Le fait que la

plasticité soit confinée au cours d'un cycle permet également de valider le recours à une simulation élastique linéaire et l'utilisation d'une méthode de post-traitement basée sur les séries de Williams.

Au cours de l'expérience, les deux pointes de la fissure propagent. Expérimentalement cette propagation n'est pas nécessairement symétrique (défauts matériaux ou conditions aux limites imparfaites). La propagation d'une des deux pointes est suivie en prenant des photographies autour de celle-ci. La zone qui est utilisée pour la corrélation ( $6,4 \times 5,1 \text{ mm}^2$ ) est représentée Figure 4.2. Cette zone étant limitée, la résolution spatiale des images est fine : 1 pixel =  $6,135 \text{ }\mu\text{m}$ .

La fissure ne commence pas directement à propager autour de l'entaille initiale. La propagation est observée entre les cycles 61 000 et 120 000. Une paire d'image est prise tout les  $\Delta N = 1000$  cycles. La première au chargement minimum et la seconde au chargement maximum. Une série de soixante paires est donc considérée aux cycles  $N_c = N_0 + c\Delta N$  avec  $c \in \llbracket 1; 60 \rrbracket$  et  $N_0 = 61\,000$ .

## 4.2.2 Validation de la méthode de dépouillement sur une simulation plastique

Les modèles et les méthodes de post-traitement et de simulation utilisés reposent sur un certain nombre d'hypothèses et de paramètres. Cela conduit aux interrogations suivantes :

- L'utilisation du champ de déplacements entre le chargement minimum et le chargement maximum permet-il une bonne identification de la variation de SIF  $\Delta K_I$  ?
- La troncature de la série de Williams considérée permet-elle de représenter suffisamment précisément le champ de déplacements en pointe de fissure ?
- La projection sur les séries de Williams permet-elle une identification précise de  $\Delta K_I$  malgré la plasticité en pointe de fissure et autour des lèvres ?
- Quels paramètres de projection ( $r_{int}$ ,  $r_{ext}$ ,  $n_{min}$  et  $n_{max}$ ) choisir pour permettre une bonne identification de  $\Delta K_I$  ?
- La position du front qui annule le premier terme super-singulier (voir Section 4.1.3) permet-elle une bonne identification de  $\Delta K_I$  ?
- Comment peut-on identifier la taille de la zone plastique à partir du champ de déplacement, et quel est le rôle des termes super-singuliers ?

Afin de répondre à ces interrogations pour l'essai considéré et de choisir les paramètres à utiliser, une simulation numérique de l'essai est réalisée. Pour ce matériau, la principale source de non-linéarités en pointe de fissure est la plasticité. La simulation est donc élasto-plastique, comme détaillé à la Section 4.2.2.1, les modèles utilisés sont choisis de manière à obtenir une zone non-linéaire comparable avec celle de l'expérience. Cette simulation permet d'avoir un champ de déplacements non bruité, pour lequel les non-linéarités sont bien connues. De plus l'intégrale de

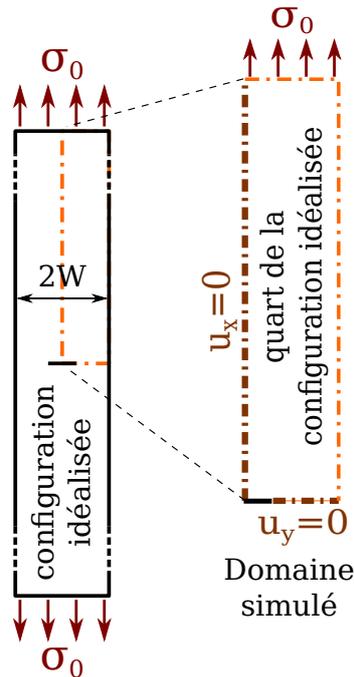


FIGURE 4.5 – Géométrie et conditions aux limites de l'éprouvette CCT idéalisée. A droite, le quart simulé avec les conditions aux limites symétriques.

Rice élasto-plastique fournit une valeur de  $\Delta K_I$  de référence, et la position matérielle du front est connue.

#### 4.2.2.1 Choix du problème simulé

Pour cette simulation, une éprouvette idéalisée est considérée. Comme représentée sur la Figure 4.5, seule la partie de largeur constante est considérée avec un chargement uniforme. Pour des raisons de symétrie il est possible de ne considérer qu'un quart de l'éprouvette avec des conditions aux limites symétriques. Elle est soumise à une contrainte surfacique  $\sigma_0$  uniforme (i.e.,  $\sigma_0 = \frac{F_0}{2tW}$ ) qui varie de  $\sigma_{\min} \simeq 8,3$  MPa à  $\sigma_{\max} = 83$  MPa.

Le choix d'une loi plastique pour ce matériau est délicate car nous ne disposons que d'essais sans décharge. Sans courbe pour plusieurs cycles de charge/décharge, nous ne pouvons déterminer la nature de l'écrouissage. Deux possibilités sont alors retenues, des lois normales avec un écrouissage isotrope qui suit la courbe expérimentale ou un écrouissage cinématique avec un module d'écrouissage constant. Des simulations élasto-plastiques d'un barreau soumis à un chargement cyclique (contrainte normale sur ses extrémités) sont réalisées. Ces simulations permettent de visualiser les courbes contraintes/déformations (Figure 4.6) pour ces différentes lois plastiques. On constate qu'un écrouissage isotrope augmente la limite élastique et réduit la taille de la zone plastique activée lors de la décharge. Un écrouissage cinématique est donc une situation plus défavorable pour la stratégie considérée. En

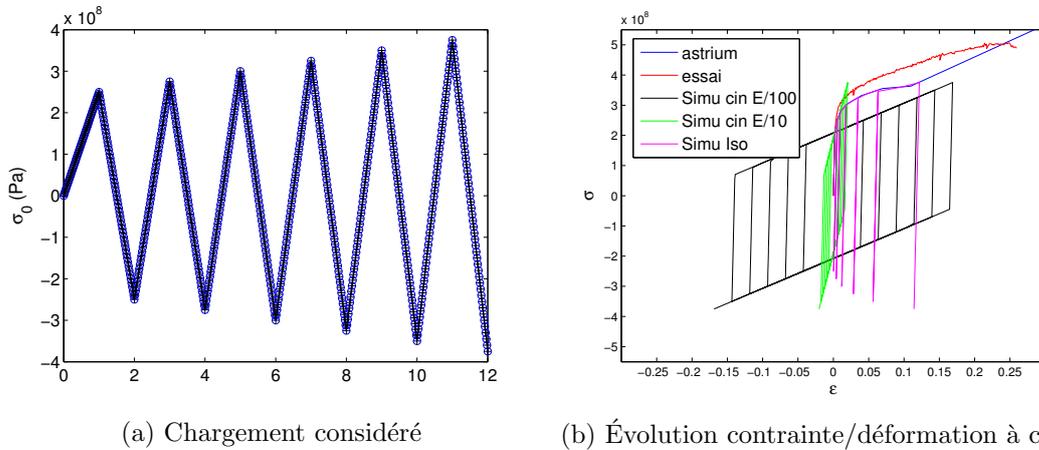


FIGURE 4.6 – Simulation d’un barreau plastique en contraintes planes pour différentes lois plastique. Sur (b), “astrium” et “essai” correspondent à des courbes de traction expérimentales, “Simu cin” à des simulations avec une loi plastique à écrouissage cinématique et “Simu iso” à une simulation avec une loi plastique à écrouissage cinématique.

effet, les effets de la plasticité seront plus importants sur un cycle et donc sur le  $\Delta \mathbf{u}$  qui sera projeté.

Les résultats ci dessous sont obtenus pour une loi plastique normale à écrouissage cinématique. Le module d’écrouissage choisi ( $E/10$ ) permet de représenter correctement le début de la courbe de traction et facilite la convergence de la simulation. Des conclusions similaires ont été obtenus avec un écrouissage isotrope.

#### 4.2.2.2 Présentation de la simulation

La simulation de la propagation sous chargement cyclique est réalisée par la FEM avec le logiciel Cast3M [VER 88, VER 91] (<http://www-cast3m.cea.fr/>). L’éprouvette étant très fine ( $\frac{t}{2W} = 1,5\%$ ), un état plan des contraintes est considéré. Le maillage fractal utilisé est représenté à la Figure 4.7. Il présente un raffinement local en pointe de fissure ( $dh^{sy} = 40 \mu\text{m}$ ) qui permet de s’assurer que la zone plastique est correctement représentée. Il y a au minimum 10 éléments dans le rayon de la zone plastique ( $r_y \geq 400 \mu\text{m}$ ). Au contraire, les zones lointaines (où les évolutions des champs mécaniques sont lentes) sont représentées avec peu d’éléments pour que le nombre de degrés de liberté soit raisonnable. La propagation est discrétisée, les 65 premiers nœuds situés sur l’axe de la fissure dans l’intervalle  $[a_0; a_0 + 2,6]$  mm constituent les positions successives du front de la fissure. Le pas de propagation est donc  $dh^{sy} = 40 \mu\text{m}$ . Pour chaque position du front, trois cycles de chargements sont simulés pour permettre la stabilisation de la zone plastique. La zone plastique activée autour du front est représentée sur la Figure 4.8.

Les données de sortie de cette simulation (repérées par l’exposant  $^{sy}$ ) sont :

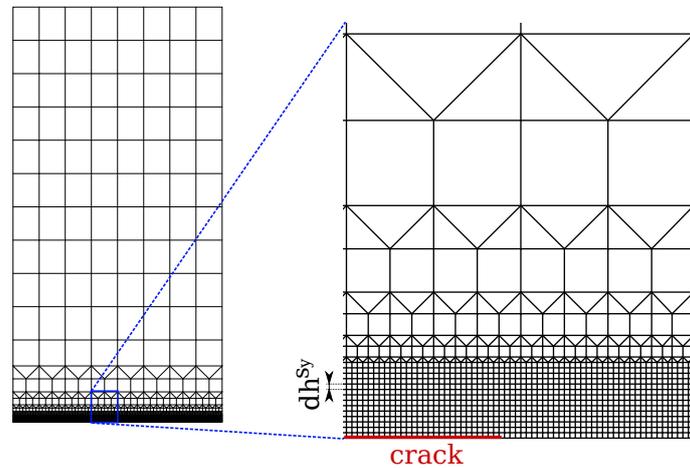


FIGURE 4.7 – Maillage fractal utilisé pour les simulations élasto-plastiques. À partir d'un maillage constitué de 80 quadrangles à quatre nœuds, le maillage est raffiné cinq fois par un facteur deux.  $dh^{sy}$  est finalement la taille du maillage autour de la zone plastique.

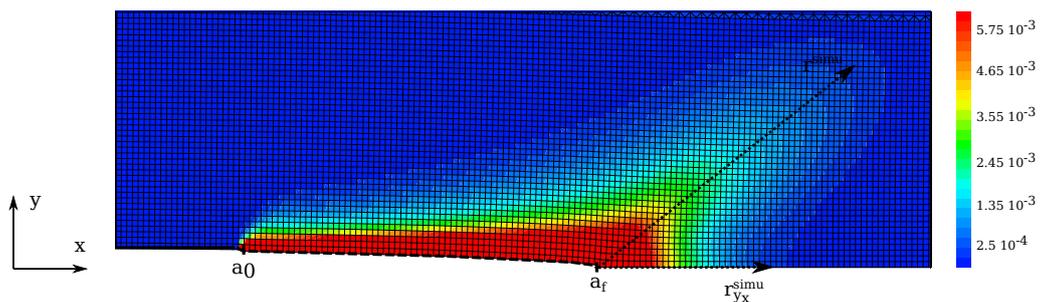


FIGURE 4.8 – Déformation plastique cumulée autour des lèvres de la fissure à la fin de la propagation. La fissure a propagé de  $a_0 = 3$  mm à  $a_f = 5,6$  mm. Le maillage représenté est déformé par le chargement maximal. Les flèches représentent les évaluations de la zone plastique, avec un seuil de déformation de 0.02%.

- les champs de déplacements sous chargement minimum  $\mathbf{u}_{min}^{sy}$  et sous le chargement maximum  $\mathbf{u}_{max}^{sy}$ ,
- la taille de la zone plastique devant la fissure  $r_{yx}^{sy}$ ,
- trois estimations  $K_{Imin}^{sy}$ ,  $K_{Imax}^{sy}$  et  $\Delta K_I^{sy}$  des facteurs d'intensité des contraintes pour des champs sous chargement minimum, sous chargement maximum et leurs variations entre ces deux chargements, respectivement.

Après stabilisation de la zone plastique, les champs de déplacements  $\mathbf{u}_{min}^{sy}$  et  $\mathbf{u}_{max}^{sy}$  correspondants aux chargements minimum et maximum de la dernière charge à une position donnée sont sauvegardés. Une fois les trois cycles de chargement terminés à une position, la longueur devant la fissure ou la déformation plastique cumulée dépasse 0.02% est calculée comme représenté sur la Figure 4.8. Cette mesure correspond à une évaluation de la taille de la zone plastique  $r_{yx}^{sy}$ . Enfin, des FIC de référence sont extraits avec l'intégrale de domaine  $J_d$  introduite équation 1.90. Puisque le problème est en mode  $I$  uniquement, l'hypothèse que  $J_d$  est directement proportionnel à  $(K_I)^2$  est faite (comme en élasticité linéaire)

$$J_d = (K_I)^2 / E^* = \int_D \left[ W_p \delta_{tk} - \sigma_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_t} \right] \frac{\partial q}{\partial x_t} dS. \quad (4.22)$$

Où  $E^* = E$  puisqu'un état plan des contraintes est considéré. La définition de l'énergie plastique  $W_p$  comme celle introduite à l'équation 1.92 n'est possible que pour certains modèles de comportement. En pratique, nous choisissons une surface d'intégration  $D$  qui englobe toute la zone qui a plastifiée. Le contour intérieur  $C_i$  (représenté sur la Figure 1.16) englobe la zone où la plasticité cumulée au cours de la propagation est non-nulle. L'énergie plastique est donc calculée comme l'énergie élastique. Pour construire le champ d'extension virtuelle  $q$  variant de zéro à un, un problème de diffusion thermique entre deux thermostats (un sur le contour intérieur et le second sur le contour extérieur) est résolu.

À chaque incrément de propagation du front, cette intégrale est calculée pour les champs mécaniques lorsque le chargement maximal du troisième cycle de chargement est atteint :  $K_{Imax}^{sy}$  et sous le chargement minimum immédiatement précédent :  $K_{Imin}^{sy}$ . Elle est également calculée pour les variations des champs mécaniques entre ces deux chargements :  $\Delta K_I^{sy}$ . Deux évaluations de la variation de FIC sont donc disponibles, la première en accord avec la définition  $\Delta K_{Idef}^{sy} = K_{Imax}^{sy} - K_{Imin}^{sy}$ , et la seconde résultant d'une seule intégrale  $\Delta K_I^{sy}$ . On constate sur la Figure 4.9a que ces deux définitions donnent des résultats très proches. Cette géométrie expérimentale est très classique, Tada *et al.* [TAD 85] en proposent une expression en fonction de la géométrie considérée

$$\Delta K_I^{Tada} = \Delta \sigma_0 \sqrt{\pi a} \left[ 1 - 0.025 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 0.06 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right] \sqrt{\frac{1}{\cos \left( \frac{\pi a}{2W} \right)}}. \quad (4.23)$$

Expression dans laquelle  $\Delta \sigma_0 = \sigma_{max} - \sigma_{min}$  représente la variation de chargement. Cette expression est légèrement faussée ici car le comportement n'est pas élastique

#### 4. Vers l'identification de lois de propagation de fissures 2D/3D par couplage simulation/mesure de champs

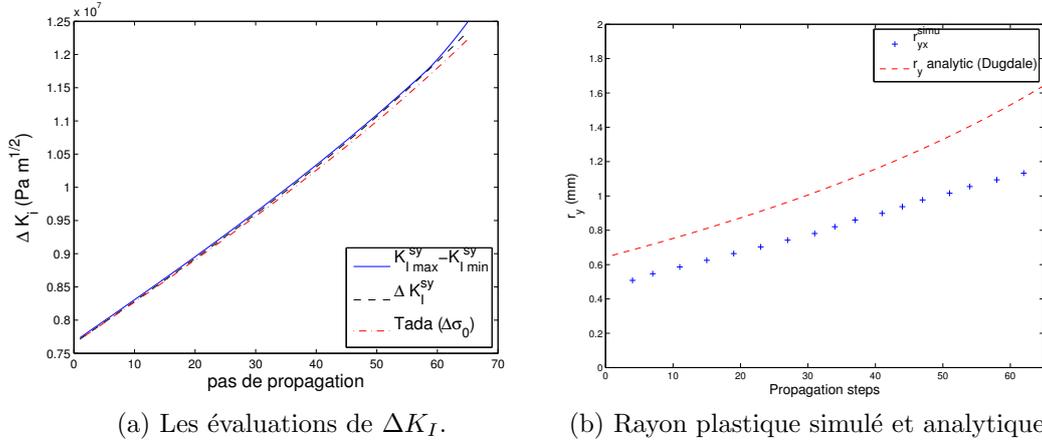


FIGURE 4.9 – Résultat de la simulation numérique.

linéaire. La taille du rayon plastique évaluée  $r_{yx}^{sy}$  est également représentée sur la Figure 4.9b. À partir d'un modèle de zone cohésive, Dugdale [DUG 60] a proposé une évaluation de ce rayon plastique (rappelée dans [SUR 98]) en fonction de  $K_I$

$$r_y^{DB} = (\pi/8)(K_I/\sigma_y)^2. \quad (4.24)$$

En utilisant l'expression de  $K_I$  proposée dans [TAD 85], cette expression fournit une estimation analytique de la taille de la zone plastique. On constate que cette expression est légèrement surévaluée ( $\approx 1\%$ ) mais qu'elle donne une bonne estimation de l'évolution au cours de la propagation.

#### 4.2.2.3 Identification de la géométrie de la fissure

Comme pour l'intégrale d'interaction, il est possible d'identifier  $\Delta K_I^{pW}$  par projection de plusieurs manières. La première consiste à projeter le champ sous le chargement maximum  $\mathbf{u}_{max}^{sy}$  et le champ sous le chargement minimum  $\mathbf{u}_{min}^{sy}$  pour obtenir  $K_{I_{max}}^{pW}$  et  $K_{I_{min}}^{pW}$  et ainsi pouvoir évaluer  $\Delta K_I^{pW}$  selon la définition. La deuxième possibilité envisagée est de projeter directement la variation de déplacements entre les deux chargements :  $\Delta \mathbf{u}^{sy} = \mathbf{u}_{max}^{sy} - \mathbf{u}_{min}^{sy}$ . Le coefficient singulier de cette projection est simplement appelé  $\Delta K_I^{pW}$ .

Pour réaliser ces projections, il faut au préalable avoir déterminé la position du front de la fissure. La méthode qui consiste à trouver la position qui annule le premier terme super-singulier (présentée à la Section 4.1.3) est utilisée. La projection des trois déplacements  $\Delta \mathbf{u}^{sy}$ ,  $\mathbf{u}_{max}^{sy}$  et  $\mathbf{u}_{min}^{sy}$  donne trois évaluations différentes de la position du front. Ces positions sont représentées sur la Figure 4.10a. Ici, puisqu'il s'agit d'une simulation, la position du front est connue. On constate que la position du front identifiée par la projection de la variation de déplacements est proche de la position du front simulé. La projection de ce champ de déplacements permet donc une bonne approximation de la position du front. D'autre part, la projection des

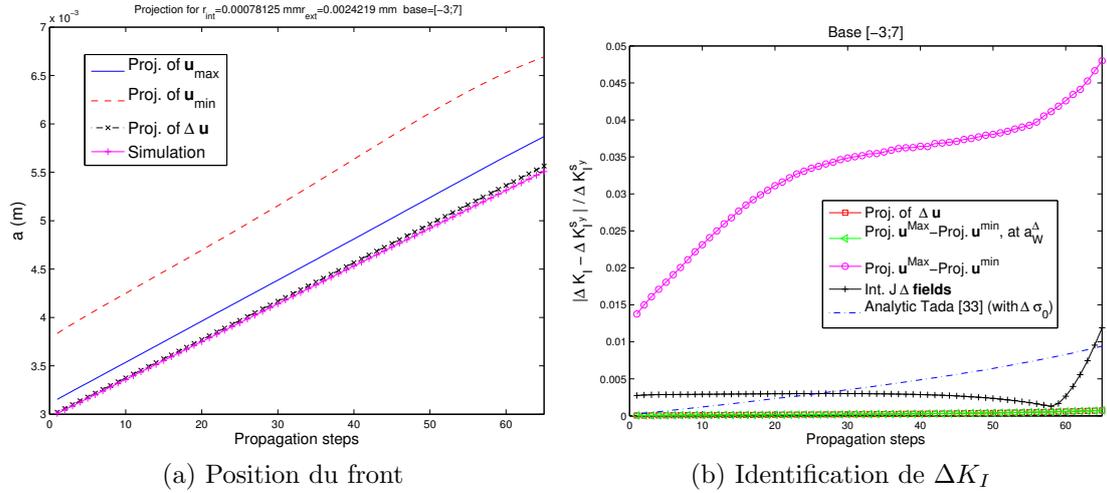


FIGURE 4.10 – Projection de différents déplacements élasto-plastiques simulés. Étude de leur influence sur l’identification de la position du front de fissure et de  $\Delta K_I$ .

déplacements  $\mathbf{u}_{max}^{sy}$  est assez éloignée ( $< 10\%$  d’écart) et enfin la projection de  $\mathbf{u}_{min}^{sy}$  est plus éloignée ( $> 20\%$  d’écart). Ces écarts sont dus à l’impact de la plasticité sur le champ de déplacements considéré. Pour le champ  $\Delta \mathbf{u}^{sy}$  seule la plasticité activée sur un cycle (proche du concept de zone plastique *reverse* [SUR 98], illustré Figure 1.15) est considérée. Par contre, le champ  $\mathbf{u}_{max}^{sy}$  est dû aux déformations élastiques et aux déformations plastiques cumulées lors des tous les cycles de chargement de la propagation. Enfin, les déformations plastiques cumulées sont principalement à l’origine de  $\mathbf{u}_{min}^{sy}$ . Les termes super-singuliers sont donc plus influents et la position qui annule le premier est plus éloignée de la position de la simulation.

La question est maintenant de savoir quelle position du front permet une bonne évaluation du facteur d’intensité des contraintes en mode  $I$ . Sur la Figure 4.10b, l’écart des différentes projections avec l’intégrale d’interaction pour la variation des champs mécaniques  $\Delta K_I^{sy}$  est représentée. Dans un premier temps, notons que la projection de la variation du champ de déplacement  $\Delta \mathbf{u}^{sy}$  et l’identification de la position du front  $a_W$  avec cette projection permet une identification de  $\Delta K_I^{pW}$  tout à fait en accord (erreur  $< 0,1\%$ ) avec l’intégrale d’interaction pour la variation des champs (qui diffère de  $\Delta K_{I_{def}}^{sy}$  de moins de  $1,2\%$ ). Ce résultat est fondamental, la position  $a_W$  permet une identification de  $\Delta K_I^{pW}$  en accord avec l’intégrale d’interaction pour la position du front (légèrement différente).

On considère maintenant les évaluations  $K_{I_{max}}^{pW}$  pour la projection du champ de déplacement  $\mathbf{u}_{max}^{sy}$  (avec laquelle on identifie également la position du front), et  $K_{I_{min}}^{pW}$  pour la projection du champ de déplacement  $\mathbf{u}_{min}^{sy}$  (avec laquelle on identifie une autre position du front). La différence entre ces estimations  $K_{I_{max}}^{pW} - K_{I_{min}}^{pW}$  induit un écart important avec l’intégrale d’interaction (écart  $> 4\%$ ). Cet écart est entièrement dû aux différentes positions du front évaluées pour ces deux projections. En effet,

si l'on réalise ces projections à la position du front  $a_W$ , on retrouve naturellement  $\Delta K_I^{pW}$  (l'opération de projection est bien linéaire). Enfin, il est intéressant de noter que puisque la plasticité est confinée, l'expression proposée par Tada *et al.* [TAD 85] donne une bonne estimation (erreur  $< 1\%$ ) de  $\Delta K_I$ . Toutefois, il sera difficile que l'expérience vérifie les conditions de cette expression, notamment des conditions aux limites uniformes et une propagation symétrique.

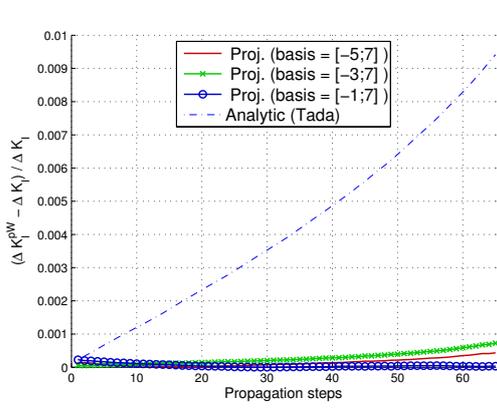
Cette étude confirme que la projection de la variation du champ de déplacement  $\Delta \mathbf{u}$  sur les séries de Williams permet d'identifier la position du front et la variation  $\Delta K_I$  avec précision pour une plasticité de l'ordre de celle présente dans l'expérience considérée. La base  $n_{min} = -3$  et  $n_{max} = 7$  généralement utilisée donne satisfaction. D'autre part, un rayon extérieur  $r_{ext} = 2,5$  mm (le maximum permis par la dimension de la zone photographiée) est suffisant. Enfin, exclure une zone  $r_{int} = 0,8$  mm (de la taille moyenne de la zone plastique totale) assez étendue n'est pas un obstacle à la bonne identification de  $\Delta K_I$ . Une étude est néanmoins menée pour mieux comprendre l'influence de ces paramètres sur la projection, pour des champs bien connus.

#### 4.2.2.4 Influence des paramètres de projection

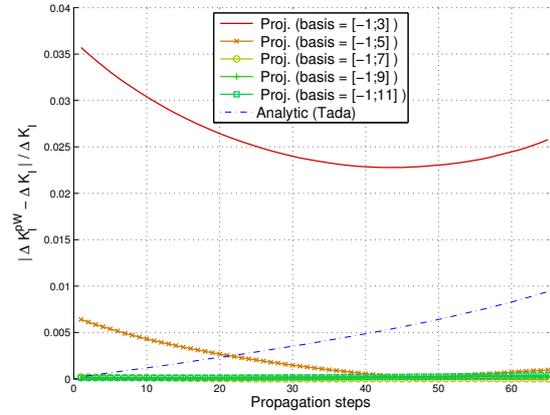
Dans un premier temps, l'influence de la troncature de la base est étudiée. La projection sur les séries de Williams est réalisée pour différentes bornes inférieures  $n_{min}$  et supérieures  $n_{max}$ . La Figure 4.11 montre les  $\Delta K_I^{pW}$  identifiées pour différents couples de ces bases. Elle présente aussi l'erreur moyenne de projection entre ces bases pour vérifier leur aptitude à représenter le champ de déplacements simulé. Enfin, le conditionnement de l'opérateur de projection associé à chacune de ces bases est représenté.

On constate que l'augmentation de la taille de la base de projection réduit le conditionnement de la matrice de projection (aussi bien la diminution de  $n_{min}$  que l'augmentation de  $n_{max}$ ). Cette augmentation est notamment due au fait que l'influence de ces termes est faible dans la zone considérée.  $n_{min} < -1$  a une influence très localisée et  $n_{max} > 5$  une influence lointaine. Les trois bornes inférieures  $n_{min} = \{-1; -3; -5\}$  permettent une bonne identification de  $\Delta K_I$ , l'influence de  $n_{min}$  est faible. Néanmoins  $n_{min} = \{-1; -3\}$  permettent une identification légèrement meilleure. L'erreur moyenne de projection est légèrement diminuée par l'ajout du terme  $n = -3$ , certainement parce qu'il permet de prendre en compte les non-linéarités. De plus, puisque ce terme  $n = -3$  permet de quantifier les non-linéarités (équation (4.13)), il est introduit dans la base de projection. C'est pourquoi  $n_{min} = -3$  est choisie.

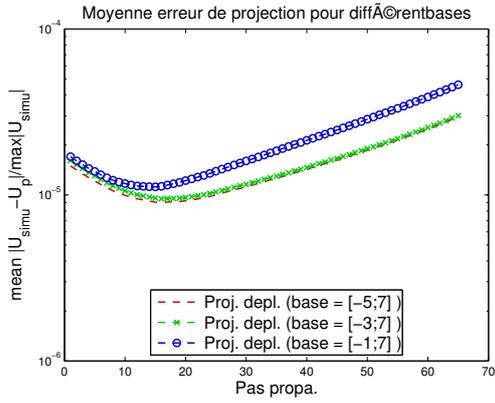
L'augmentation de la borne supérieure permet quant à elle d'identifier plus précisément  $\Delta K_I$ . L'augmentation de la précision est sensible jusqu'à l'introduction de l'ordre  $n_{max} = 7$ . Cette meilleure identification s'accompagne d'une diminution de l'erreur moyenne de projection. Cette diminution est naturelle puisque la base de projection est plus riche. L'introduction des termes  $n \in \{4, 5, 6, 7\}$  permet de mieux



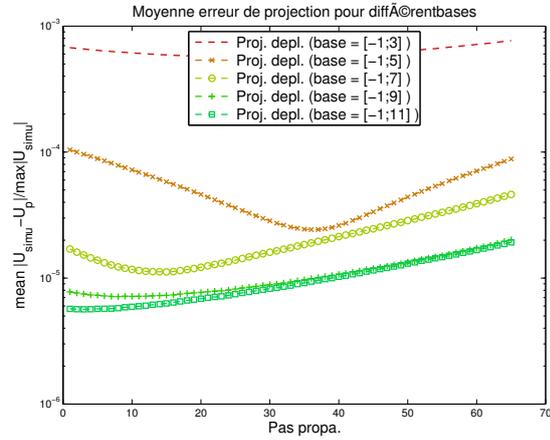
(a)  $N_{min}$  : identification de  $\Delta K_I$



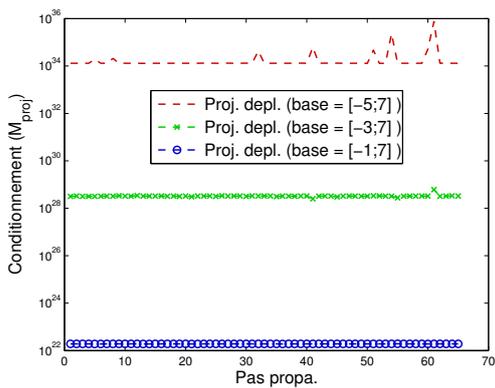
(b)  $N_{max}$  : identification de  $\Delta K_I$



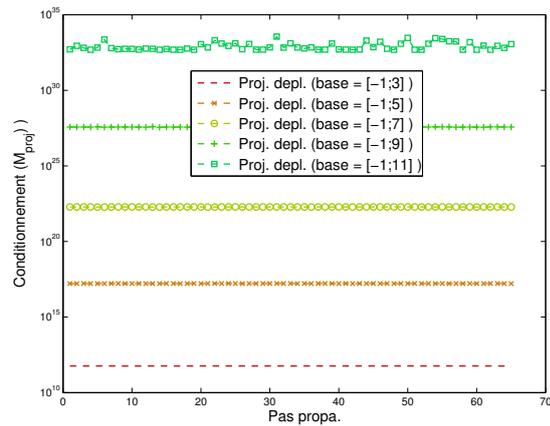
(c)  $N_{min}$  : erreur moyenne de projection



(d)  $N_{max}$  : erreur moyenne de projection



(e)  $N_{min}$  : conditionnement de la projection



(f)  $N_{max}$  : conditionnement de la projection

FIGURE 4.11 – Étude de l'influence de la base de projection sur l'identification de  $\Delta K_I$ .

#### 4. Vers l'identification de lois de propagation de fissures 2D/3D par couplage simulation/mesure de champs

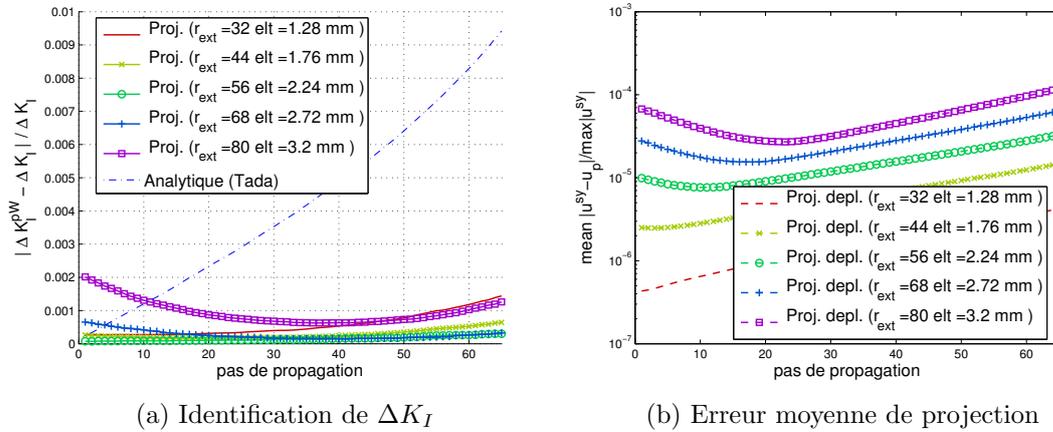


FIGURE 4.12 – Étude de l'influence de la dimension extérieure de la zone de projection sur l'identification de  $\Delta K_I$ .

prendre en compte les effets lointains comme les conditions aux limites. Les termes supérieurs  $n > 7$  semblent d'influence trop lointaine pour la zone de projection, il dégradent le conditionnement sans améliorer ni la projection, ni l'identification de  $\Delta K_I$ .

L'influence du rayon extérieur de la zone de projection sur la projection est étudiée. Sur la Figure 4.12a, on constate qu'un rayon extérieur trop petit dégrade la qualité de l'identification de  $\Delta K_I$  par projection. La zone de projection est trop petite pour assurer une bonne identification. D'autre part, une zone de projection trop grande englobe des informations qui viennent perturber l'identification de  $\Delta K_I$ . Les séries de Williams ne permettent plus de bien représenter les déplacements (confère Figure 4.12b). Pour ces raisons, il est intéressant de connaître les déplacements autour de la pointe de fissure, ce qui justifie le choix de la zone suivie par corrélation d'images. L'ajout de termes supplémentaires d'ordre supérieur ( $n > 7$ ) permettrait de mieux prendre en compte les zones lointaines ainsi introduites.

Enfin, l'influence du rayon intérieur  $r_{int}$  est considérée. On suspecte qu'il est préférable d'exclure la zone où ont lieu les non-linéarités [RÉT 11]. Pour vérifier cette hypothèse, nous considérons la projection du champ de déplacements sous le chargement maximum en utilisant la position  $a_W$ . Ainsi, les non-linéarités sont plus étendues et il est plus facile de mesurer leur impact. La projection est réalisée pour plusieurs rayons intérieurs comme représenté sur la Figure 4.13. On vérifie bien que lorsque la zone plastique (confère Figure 4.9a pour l'évolution de sa taille) grandit et dépasse le rayon intérieur  $r_{int}$ , la qualité de la projection est dégradée. Il est donc bien intéressant d'exclure la zone plastique de la projection. Pour la projection de  $\Delta \mathbf{u}$ , la zone plastique est plus petite puisqu'il s'agit de la plasticité qui s'est développée pendant un seul chargement (proche de la zone plastique *reverse* [SUR 98]).

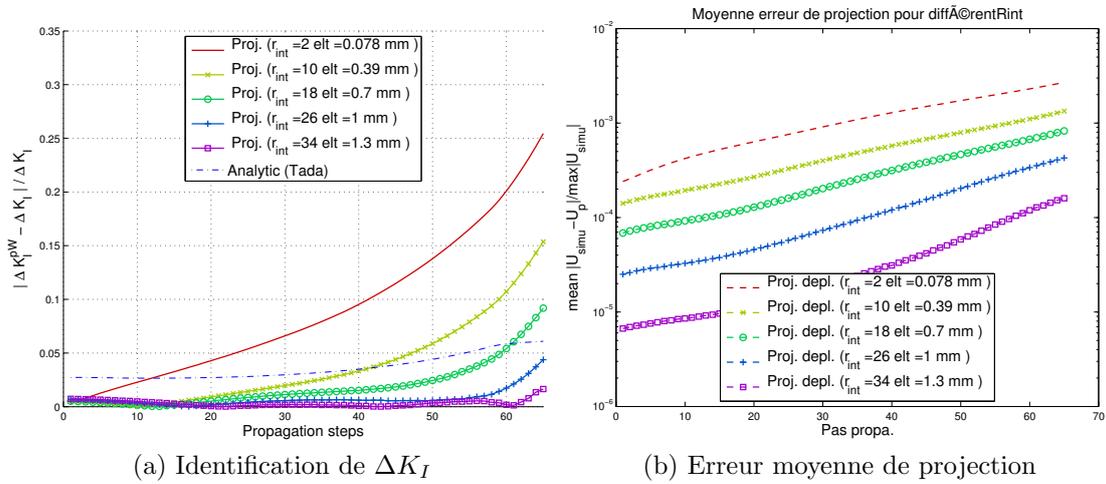


FIGURE 4.13 – Étude de l'influence de la dimension intérieure  $r_{int}$  de la zone de projection sur l'identification de  $K_I$ .

#### 4.2.2.5 Évaluation de la taille de la zone plastique et de son influence

Connaître la taille de la zone plastique est important pour s'assurer que la zone plastique est exclue de la projection et que l'hypothèse de plasticité confinée est vérifiée. Les méthodes pour évaluer la taille de la zone plastique à partir d'un champ de déplacements uniquement sont étudiées (comme lors du dépouillement d'une expérience par corrélation d'images). D'autre part, le lien entre les termes super-singuliers et la plasticité est vérifié.

Les différentes méthodes étudiées pour estimer la taille de la zone plastique en aval du front sont

1.  $r_y^{DB}$  (équation (4.24)), l'évaluation basée sur les éléments cohésifs [DUG 60, SUR 98] et le FIC analytique [TAD 85].
2.  $r_y^W$  la taille obtenue en appliquant le critère de von Mises au champ de contraintes asymptotiques (équations (1.18) et (1.19)) avec les coefficients  $b_i^n$  obtenus par projection. Cette évaluation donne également accès à la forme de la zone plastique et à l'influence des différents coefficients  $b_i^n$ .
3.  $r_{PZ} = -8\sqrt{b_I^{-3}/b_I^1}$  (équation (4.13)), la longueur obtenue avec le troisième terme super-singulier comme proposé dans [ROU 09].
4.  $a_W - a_{simu}$  la distance entre la position qui annule le coefficient  $b_I^{-1}$  et la position du front de la simulation (pour vérifier que cette position est bien influencée par la taille de la zone plastique).

Ces quatre méthodes d'estimations sont représentées normalisées (par la valeur constatée lors de la simulation  $r_y^{s_y}$ ) sur la Figure 4.14. L'expression (4.24) est sur-estimée ( $\approx 30\%$ ) mais proportionnelle au rayon plastique de la simulation. Les

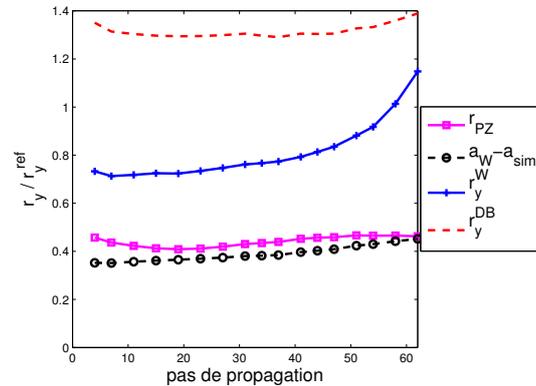
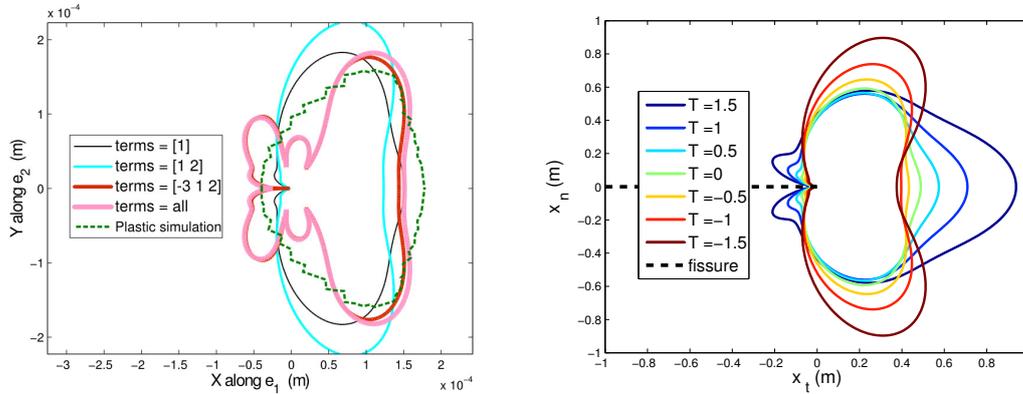


FIGURE 4.14 – Projection des déplacements élasto-plastiques simulés sous chargement maximal. Les différentes méthodes d'évaluation du rayon plastique sont normées par le rayon plastique de la simulation élasto-plastique  $r_y^{sy} = r_y^{ref}$ .

contraintes des séries de Williams (méthode 2) permettent l'identification la plus précise mais cette estimation est moins proportionnelle à  $r_y^{sy}$ . Les termes super-singuliers sont bien proportionnels au rayon plastique. La position du front qui annule le premier terme super-singulier est décalée de la position du front avec un biais systématique proportionnel à la taille de la zone plastique devant le front. Enfin, on démontre pour la première fois que l'estimation de la *process zone* basée sur le troisième coefficient super-singulier est bien proportionnelle à  $r_y^{sy}$ , c'est d'ailleurs l'estimation la plus stable.

Le critère 2 passe par l'utilisation du champ de contraintes des séries de Williams. Il permet donc de connaître une approximation de la forme de la zone où la contrainte de von Mises dépasse la limite élastique. C'est l'occasion de comparer cette forme à celle de la simulation et d'étudier l'influence des différents coefficients asymptotiques. Le *T-stress* est souvent considéré comme le second paramètre dominant [BRO 85, HAM 05] en pointe de fissure (seul terme sub-singulier dont les contraintes ne tendent pas vers zéro au voisinage du front). C'est pourquoi, des lois de propagation de fissures de fatigue fonction de  $K_I$  et de  $T$  ont été proposées, notamment par Hutař [HUT 06] comme rappelé équation (1.83). Ce terme influe donc sur la taille de la zone plastique comme illustré sur la Figure 4.15b. Sur cette Figure  $K_I = 1$  est donné en  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  et  $T$  est donné en  $\text{MPa}$ , les autres termes ne sont pas considérés. Sur la Figure 4.15a, la zone plastique pour la position  $a_0$  après cyclage est représentée. Les contours où la contrainte de von Mises associée aux contraintes des séries de Williams telles que  $\sigma(r, \theta) = \sum_{i=I, II} \sum_{n \in \text{terms}} b_i^n r^{n/2-1} f_i^n(\theta)$  est égale à la limite élastique  $y$  sont représentés. On constate que les termes les plus influents sont bien  $K_I$  et  $T$ , ainsi que le terme super-singulier d'ordre  $n = -3$  (la position du front est choisie telle que le terme d'ordre  $n = -1$  soit nul).



(a) Influence des différents ordres de la série.

(b) Rôle du  $T$ -stress.

FIGURE 4.15 – Contour des zones autour du front où la contrainte de von Mises dépasse la limite élastique. Avec les coefficients  $b_i^n$  obtenus par projection d'un champ de déplacements en mode  $I$  simulé sur les séries de Williams, le champ de contraintes associé est connu (équations (1.18) et (1.19)).

#### 4.2.2.6 Bilan

L'étude de ce champ plastique simulé autour d'une fissure de fatigue qui propage nous a permis

- de vérifier que la projection de  $\Delta \mathbf{u}$  permettait de retrouver le  $\Delta K_I$  de l'intégrale d'interaction malgré la plasticité de l'ordre de celle de l'expérience considérée (et également  $K_I$  malgré la plasticité cumulée),
- de montrer que la position du front  $a_W$  identifiée par la projection de  $\Delta \mathbf{u}$  permettait une bonne projection (erreur de projection faible) et une bonne identification des FIC,
- d'étudier l'influence des paramètres de la projection sur la qualité de la projection, et de mieux maîtriser le choix de ces paramètres en fonction du champ à projeter et du domaine où il est défini,
- d'évaluer différentes estimations de la taille de la zone plastique à partir du champ de déplacement,
- d'illustrer le lien entre les termes super-singuliers et la zone plastique, et la nécessité de les inclure pour une bonne identification des FIC.

### 4.2.3 Dépouillement de l'essai

La corrélation d'images sur des éléments Q4 de  $15 \times 15$  pixels<sup>2</sup> est réalisée entre les images prises aux chargements minimum et maximum tous les  $\Delta N = 1000$  cycles. Elle fournit  $N_c$  approximations  $\Delta \mathbf{u}_{DIC}(\mathbf{x})$  de la variation de déplacements sur la zone de corrélation. Sur la bande d'éléments extérieurs de la corrélation d'images, la

corrélation est moins précise (support des fonctions de forme réduit), elle est donc exclue. Le résidu de cette corrélation est utilisée pour identifier la position de la fissure.

Ce champ de déplacement  $\Delta \mathbf{u}_{DIC}$  est projeté sur les séries de Williams ( $n_{min} = -3$ ,  $n_{min} = 7$ ,  $r_{int} = 0,4$  mm et  $r_{ext} = 2,2$  mm) pour obtenir la position du front et une estimation de  $\Delta K_I^{pW}$ , la variation du FIC en mode  $I$ . L'erreur au sens des moindres carrés (aux nœuds de la corrélation dans la zone de projection) est  $> 0,13$  pixels. Cette erreur est un peu grande par rapport à la précision attendue sur le champ  $\Delta \mathbf{u}_{DIC}$  par corrélation d'images ( $< 0,1$  pixels) [ROU 09]. Elle peut venir soit de problèmes expérimentaux, soit d'une erreur de modèle (le champ asymptotique ne permettrait pas de représenter précisément le champ réel). Cette seconde hypothèse est dans un premier temps écartée par la simulation précédente.

Cette stratégie nous permet d'identifier une loi de propagation de Paris puisque la position et  $\Delta K_I^{pW}$  sont connus au cours des cycles de propagation. Une seconde méthode pour évaluer la variation de SIF est également étudiée. Elle consiste à utiliser directement le  $\Delta K_I^{Tada}$  de l'équation (4.23) et les positions précédentes. Avec l'hypothèse de plasticité confinée, elle revient à faire deux hypothèses supplémentaires :

- les deux fronts propagent à la même vitesse,
- les conditions aux limites sont parfaitement appliquées à l'éprouvette.

#### 4.2.4 Simulations dédiées aux essais

La stratégie d'identification de loi de propagation proposée repose sur la confrontation de ce dépouillement à la simulation. En particulier, ici, à des simulations élastique linéaires DEK-FEM en déformations planes qui sont basées sur les séries de Williams, comme la stratégie de dépouillement. Dans un premier temps, Sections 4.2.5, il est intéressant de vérifier que la simulation est en accord avec l'expérience, en terme de variations du champ de déplacements et de FIC. Ensuite, Section 4.2.7, les lois de propagation identifiées sont testées pour vérifier qu'elle permettent de retrouver la vitesse de propagation de l'expérience dans des simulations.

##### 4.2.4.1 DEK-FEM locale, avec des conditions aux limites issues de la corrélation

La corrélation d'images fournit la mesure la plus précise des conditions aux limites à laquelle la pointe de fissure est soumise. En effet, le champ de déplacements appliqué est mesuré localement. Au sein de la zone de corrélation, un domaine de simulation est choisi pour la simulation. Les conditions aux limites sur ce domaine sont la variation de déplacement  $\Delta \mathbf{u}_{DIC}$  au bord de ce domaine. Ces conditions aux limites locales issues de la corrélation ont déjà fait leur preuve [FED 09, RAN 10].

La simulation de ce domaine est réalisée avec la DEK-FEM, nous l'appellerons DEK-ABC (pour *Actual Boundary Condition*). Le maillage utilisé pour cette simulation est le même que celui de la corrélation. Ce maillage est assez fin pour une

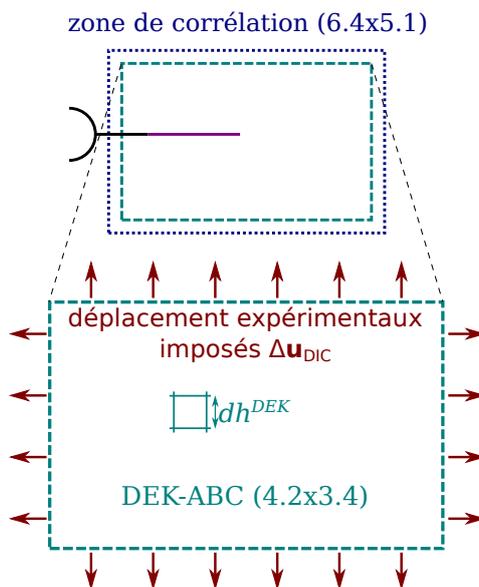


FIGURE 4.16 – Géométrie et conditions aux limites de la simulation locale avec des conditions aux limites issues de la corrélation DEK-ABC.

identification précise des FIC. Nous avons réalisé ces simulations pour un maillage 4 fois plus fin, la correction apportée sur les FIC est de moins de 1%. De plus l'utilisation du maillage de la corrélation (où d'un maillage  $2^n$  fois plus fin) permet d'imposer facilement les conditions aux limites et de comparer facilement les champs de déplacement.

#### 4.2.4.2 Simulation d'un essai idéalisé

La seconde option envisagée est de considérer un essai idéalisé. La géométrie est celle représentée à la Figure 4.5. Les conditions aux limites sont idéalisées, on suppose une répartition de contrainte normale parfaitement uniforme et symétrique ( $\Delta\sigma_0 = \Delta F_0/2Wt$ ). Enfin, on suppose que la propagation est identique pour les deux pointes de la fissure. Cette situation idéalisée est celle considérée par Tada *et al.* [TAD 85], pour laquelle une expression analytique du facteur d'intensité des contraintes existe en fonction de la longueur de la fissure (équation (4.23)). L'utilisation de cette expression comme une simulation est appelé "expression analytique [TAD 85]".

Pour vérifier le fonctionnement de l'algorithme DEK-FEM 2D utilisé, une simulation de cette configuration est réalisée en parallèle. Pour des raisons de symétrie, seul un quart de l'éprouvette CCT est considéré (confère Figure 4.5). Le chargement de traction est aussi  $\Delta\sigma_0 = \Delta F_0/2Wt$ . Cette simulation est appelée DEK-IBC (pour *Idealized Boundary Condition*)

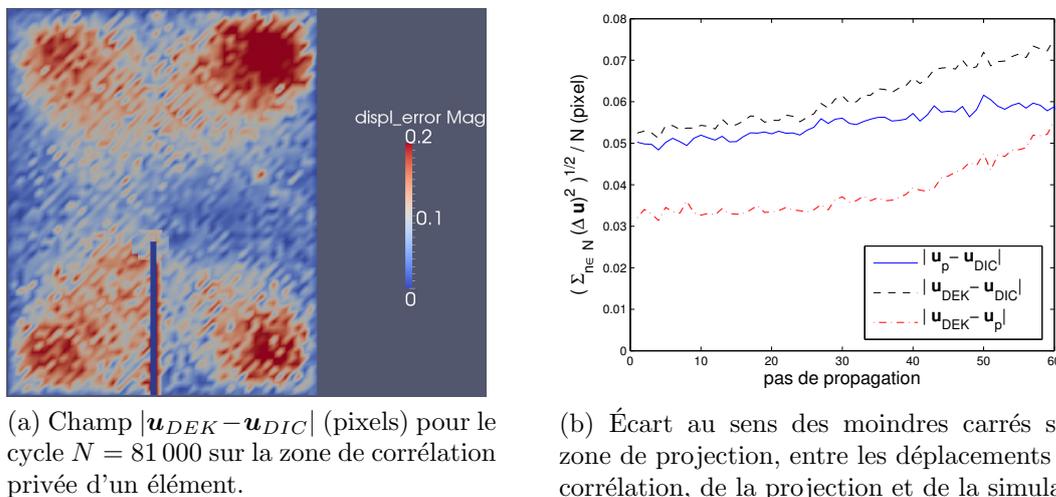


FIGURE 4.17 – Mesures des écarts entre les différents modèles.

#### 4.2.5 Couplage simulation/mesure de champs à la position $a_W$

Dans un premier temps, les simulations sont réalisées aux positions identifiées expérimentalement  $a_W$  (projection puis annulation du premier terme super-singulier). La simulation DEK-ABC est réalisée pour la zone de corrélation uniquement privée d'une rangée d'éléments. Sur la Figure 4.17a, le champ de déplacements obtenu est comparé au champ de déplacements de corrélation. On constate que le champ de déplacements est bien le même au bord. Des zones fortement entachées d'erreur apparaissent dans les coins de la simulation. Il est vraisemblable que cet écart systématique était dû à de la distorsion optique, le capteur CCD étant un peu grand pour le macro-objectif utilisé.

Pour s'affranchir de cette erreur, une partie de la zone de corrélation est exclue aussi bien de la projection que de la simulation. La zone considérée (représentée sur la Figure 4.16) est donc réduite à  $4,2 \times 3,4 \text{ mm}^2$ . Cette fois l'erreur au sens des moindres carrés (sur la zone de projection) est satisfaisante  $\approx 0.06$  pixels, de l'ordre de l'incertitude de mesure généralement constatée en corrélation d'images ( $Q4$  de  $15 \times 15$  pixels<sup>2</sup>). De même, le champ simulé est proche du champ expérimental (erreur au sens des moindres carrés sur la zone de projection  $< 0,075$  pixels<sup>2</sup>). Enfin il est intéressant de noter que le champ simulé (DEK-ABC) est très proche du champ projeté (erreur au sens des moindres carrés sur la zone de projection  $< 0,055$  pixels<sup>2</sup>). La simulation élastique et la projection sur les séries de Williams décrivent correctement les déplacements expérimentaux. La position du front identifiée  $a_W$  est également validée.

La Figure 4.18 trace les évolutions des FIC en fonction de la position du front  $a_W$ . On vérifie bien que la simulation DEK-FEM avec les conditions aux limites idéalisées

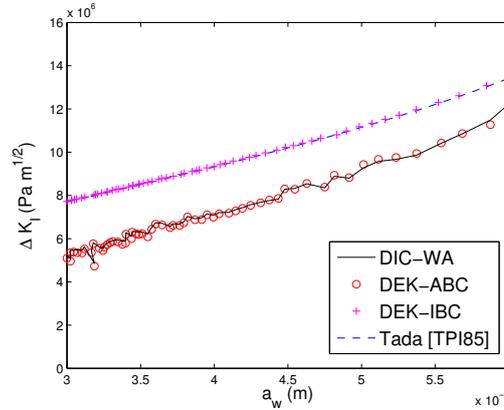


FIGURE 4.18 – Comparaison entre les  $\Delta K_I$  projetés et simulés aux positions identifiées lors de la projection  $a_W$ .

donne un  $\Delta K_I$  similaire à l'expression proposée par Tada *et al.* [TAD 85]. Nous avons donc confiance en cette expression et en la précision de la DEK-FEM 2D. La simulation DEK-ABC retourne des valeurs des FIC très proches des valeurs obtenues par projection sur les séries de Williams. Ce résultat confirme que l'hypothèse d'un comportement élastique et la projection sur les séries de Williams sont en accord pour la position qui annule le premier terme super-singulier.

D'un point de vu plus général, les  $\Delta K_I$  obtenus d'un coté par la corrélation d'images et l'utilisation de conditions aux limites locales (DEK-ABC), et de l'autre les simulations idéalisées (expression analytique [TAD 85]) sont assez différents (plus de 10%). Cette différence est certainement due à la difficulté d'appliquer expérimentalement les conditions aux limites souhaitées, et aux deux pointes de fissure de l'éprouvette CCT qui ne propagent pas nécessairement à la même vitesse. Il est alors intéressant de pouvoir s'affranchir de ces hypothèses globales, comme la méthode développée le propose : mesure de champs et simulation DEK-ABC.

#### 4.2.6 Identification de la loi de propagation

La seconde étape consiste à identifier la loi de propagation de fatigue. La démarche menée vise à montrer les capacités de la procédure d'identification. Le choix de la loi et du formalisme n'est pas étudié. Une loi de propagation de Paris [PAR 61] est simplement utilisée. Elle lie le taux de propagation par cycle à la variation du facteur d'intensité des contraintes en mode  $I$  au cours d'un cycle, comme rappelé à l'équation (1.81).

Nous disposons de la position du front  $a_W(N_c)$  et d'évaluations de  $\Delta K_I(N_c)$  pour différents cycles. Il faut donc approcher le taux de propagation par cycle, par exemple avec la méthode des différences centrées. L'évolution de  $\Delta K_I$  avec la longueur de la fissure  $a_W$  présente des oscillations. Une interpolation linéaire directe ne sera donc pas très précise. La méthode utilisée consiste à minimiser  $\mathcal{A}$  la différence quadratique

#### 4. Vers l'identification de lois de propagation de fissures 2D/3D par couplage simulation/mesure de champs

| Parameters                          | $10^{11} C$ | $\eta$ |
|-------------------------------------|-------------|--------|
| <i>ABC – Paris</i>                  | 5.3         | 3.4    |
| <i>IBC – Paris</i> [MAT 13]         | 0.3         | 4.4    |
| Adib <i>et al.</i> [ADI 07]         | 7.5         | 3.0    |
| Integrated DIC [MAT 12]             | 4.7         | 3.1    |
| Fully integrated procedure [MAT 13] | 2.5         | 3.4    |

TABLE 4.1 – Différentes estimations des coefficients de la loi de Paris pour ce matériau. Les unités sont celle obtenues lorsque  $a_W$  est en mm et  $\Delta K_I$  in MPa $\sqrt{\text{m}}$ .

entre la position identifiée  $a_W$  et prédite, cumulée sur les cycles, pour identifier les paramètres  $(C, \eta)$  [MAT 12]. La position prédite résulte de l'intégration de la loi de Paris approchée par une somme discrète sur les valeur  $\Delta K_I(N_c)$  connues. La fonction à minimiser est finalement

$$\mathcal{A}(C, \eta) = \sum_{c=1}^{60} \left[ a_W(N_0) - a_W(N_c) + \sum_{i \in [2..c]} C \frac{(\Delta K_I(N_{i-1}))^\eta + (\Delta K_I(N_i))^\eta}{2} (N_{i-1} - N_i) \right]^2. \quad (4.25)$$

Nous disposons de deux estimations des variations des FIC, celle obtenue par projection du champ mesuré  $\Delta K_I^{pW}$ , et celle pour la géométrie idéalisée  $\Delta K_I^{Tada}$ . Deux lois de Paris sont identifiées à partir de ces valeurs et de la position du front  $a_W$ . La première, dite loi *ABC – Paris*, utilise la valeur estimée avec une mesure locale du champ de déplacement  $\Delta K_I^{pW}$ . La seconde, dites loi *IBC – Paris*, repose sur l'hypothèse d'une configuration idéale pour identifier  $\Delta K_I^{Tada}$ . Soulignons que cette évaluation suppose que la géométrie et le chargement idéaux sont une bonne approximation.

Les lois de propagation ainsi identifiées sont réunies dans le Tableau 4.1. À titre de comparaison, des valeurs publiées précédemment apparaissent également. Mathieu *et al.* [MAT 12, MAT 13] ont considéré cette expérience, avec une méthode de post-traitement également basée sur la mesure de champs et les séries de Williams, mais sans comparaison avec la simulation. Adib et Baptista [ADI 07] s'intéressaient à un alliage de Titane légèrement différent. Les valeurs identifiées avec la mesure de champs autour du front sont proches des valeurs de ces références.

#### 4.2.7 Simulation 2D de la propagation en fatigue

Une fois la loi de propagation identifiée, la vitesse de propagation est simulée. À partir de la position initiale de la fissure  $a_W(N_0)$ , la variation de FIC est calculée, puis les positions successives du front sont calculées avec la loi de Paris. Des simulations statiques sont réalisées tous les  $\Delta N = 1000$  cycles, et la position suivante est calculée par intégration explicite en cycles. Les deux simulations considérées sont la simulation DEK-ABC, et la simulation DEK-IBC (qui revient simplement à

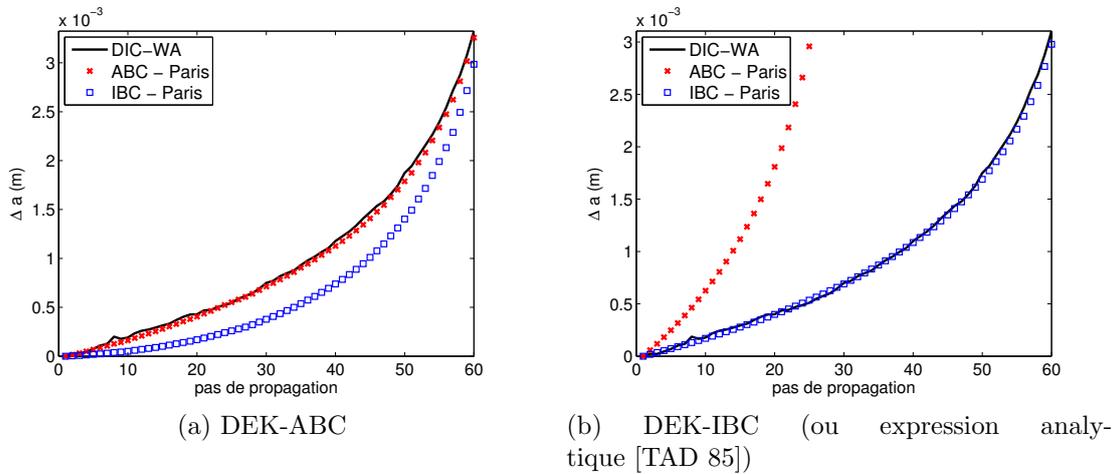


FIGURE 4.19 – Comparaison des vitesses de propagation pour les deux lois identifiées.

appliquer l'expression de  $\Delta K_I^{Tada}$ ). Les positions du front en fonction du pas de propagation  $c \in \llbracket 1; 60 \rrbracket$  sont représentées sur le Figure 4.19. La première Figure 4.19a représente les résultats pour la simulation DEK-FEM près du front (zone DEK-ABC) avec les conditions aux limites mesurées par corrélation d'images  $\Delta \mathbf{u}_{DIC}(N_c)$  (DEK-ABC). La seconde 4.19b représente les résultats pour la simulation de l'éprouvette complète dans la configuration idéalisée (expression analytique [TAD 85] ou DEK-IBC).

La vitesse de propagation de la simulation DEK-ABC avec la loi de propagation *ABC-Paris* est en accord avec la vitesse constatée expérimentalement, confère Figure 4.19a. Ce résultat est important puisque la loi de Paris est fortement non-linéaire. Des différences apparemment minimales entre les évaluations de  $\Delta K_I^{pW}$  et celui de la simulation DEK-ABC à la position  $a_W$  (représentée sur la Figure 4.18) auraient pu cacher un biais systématique. Ce biais aurait alors entraîné une mauvaise évaluation de la position du front au cours de la propagation. Pour cette expérience, la loi de Paris identifiée est fiable. Sur cette Figure, on constate que la loi de propagation *IBC-Paris* est erronée. C'est la conséquence naturelle de la différence entre les FIC évalués avec la simulation DEK-ABC et l'expression analytique (4.23) idéalisée constatée sur la Figure 4.18.

Le résultat plus surprenant sur la Figure 4.19b est que la loi *IBC-Paris* et la simulation DEK-IBC permettent de retrouver la vitesse de propagation de la simulation avec une précision comparable à la simulation DEK-ABC avec la loi *ABC-Paris*. Sans le recours à la mesure de champs, cette méthode pourrait sembler fonctionner (alors que la loi *IBC-Paris* est sensiblement différente de la loi *ABC-Paris*). La mesure de champs est donc nécessaire pour choisir parmi ces deux lois.

Cette analyse nous permet de conclure que l'utilisation d'une géométrie standard et l'approximation des conditions aux limites pour identifier les variations des

FIC pouvaient introduire des erreurs majeures dans la loi identifiée. La procédure proposée basée sur la corrélation d'images et les séries de Williams avec une simulation DEK-FEM en parallèle permet d'éviter cette approximation. Elle permet également de comparer le champ expérimental avec le champ simulé pour vérifier que les modèles utilisés sont pertinents. Enfin elle permet une première validation de la loi proposée.

#### 4.2.8 Bilan de l'application à l'essai CCT

La procédure d'identification d'une loi proposée à la Section 4.1 a été appliquée à un essai CCT sur une plaque fine de titane. Cette démarche a été l'occasion de confirmer l'intérêt de la mesure de champs pour l'identification de propriétés matériaux et donc de lois de propagation [ROU 06, FED 09, RÉT 10c, MAT 13]. L'information fournie est en effet riche, et permet de vérifier que la méthode d'identification est pertinente (incertitude faible, ici sur la corrélation et la projection sur les séries de Williams).

La démarche proposée va plus loin. En effet, pour permettre la comparaison entre la simulation et l'expérience, la méthode d'identification et la simulation sont compatibles. La compatibilité est assurée par la description des champs de déplacement, le champ identifié expérimentalement comme celui de la simulation sont décrits par une méthode éléments finis. De plus dans les deux situations la pointe de fissure est traitée avec une troncature de la série de Williams. La richesse des informations identifiées et le parallèle avec la simulation permet de valider les modèles utilisés, et de filtrer des biais expérimentaux.

D'un point de vu plus pratique, l'influence des différents paramètres de projection sur les séries a été étudiée dans le contexte de la fatigue. Nous avons validé la projection de la variation du champ de déplacement  $\Delta \mathbf{u}_{DIC}$  pour identifier la position du front  $a_W$  et  $\Delta K_I$ , la variation du FIC en mode  $I$ . La méthode d'identification de la position du front a également été validée pour faire le lien entre l'identification et la simulation. Enfin, l'influence des conditions aux limites sur les évaluation des  $\Delta K_I$  a été illustrée. Cette influence a un impact encore plus fort sur la loi de propagation et la vitesse de propagation simulée.

La démarche proposée ne permet cependant pas de connaître le domaine de validité de la loi de propagation étudiée, en terme de chargement, de rapport de charge, de géométrie d'éprouvette, d'environnement,.... D'autres expériences de propagation de fissures de fatigue sont alors nécessaires. Par exemple dans cette expérience le  $T$ -Stress variant très peu, nous ne pouvons pas quantifier son impact sur la propagation. Traiter des essais 3D permettrait d'avoir des plages de variation des paramètres de rupture (notamment  $\Delta K_I$ ,  $T$  et la refermeture) plus large directement sur une expérience. En effet, la propagation d'un front 3D conduit généralement à des coefficients asymptotiques (i.e., FIC,  $T$ -stress) non-uniforme le long du front. Ceci couvrent donc un spectre plus large de paramètres possibles.

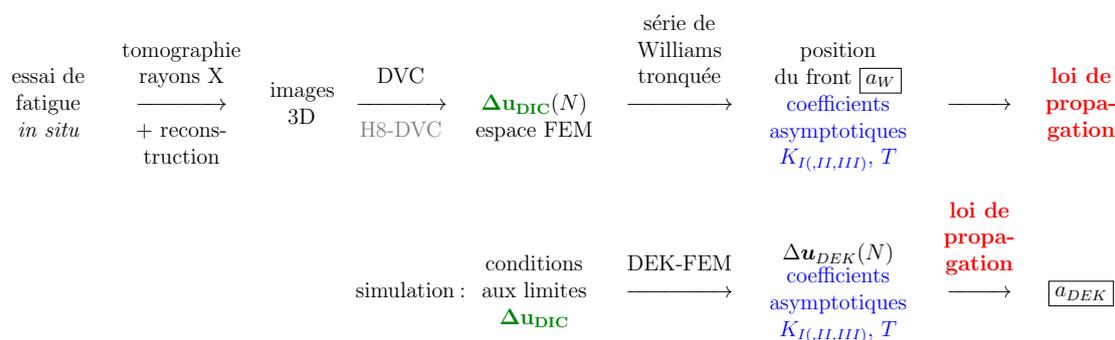


FIGURE 4.20 – Les différentes étapes de la stratégie d’identification de la loi de propagation de fatigue proposée en 3D.

### 4.3 Extension de l’approche au trois dimensions

Identifier des lois de propagation est également possible à partir de mesures de champs 3D [FER 06, GIA 11, LAC 14b]. La stratégie utilisée en 2D est étendue à des méthodes 3D, elle est schématisée sur le Figure 4.20. L’acquisition des “images” 3D est réalisée avec un tomographe à rayons X. pour cela, l’éprouvette doit tourner à l’intérieur de l’appareil. L’essai est donc réalisé *in situ*, par un montage à l’intérieur du tomographe. La corrélation est réalisée en 3D, globalement sur une discrétisation FEM.

Cette fois la projection est plus délicate car il faut extrapoler le champ de déplacements dans des plans orthogonaux au front. Elle permet néanmoins d’obtenir la position du front et une estimation des coefficients asymptotiques. Ces premières étapes sont introduites dans la Section suivante, et ont fait l’objet de la thèse de Lachambre [LAC 14b]. Elles introduisent des difficultés supplémentaires et les méthodes sont moins maîtrisées qu’en 2D.

À partir des positions du front et de l’estimation des coefficients asymptotiques le long du front, il est possible de s’intéresser à des lois de propagations 3D. Ce type d’identification est également à l’étude, et seul quelques résultats préliminaires existent [GIA 11]. Cette étape est également complexe, les difficultés et des pistes de réflexion sont données à la Section 4.3.3. Enfin, la méthode de simulation 3D basée sur les séries de Williams est celle présentée au Chapitre 2.

#### 4.3.1 Tomographie et mesure de champ

Le principe de la tomographie est de soumettre un échantillon à un faisceau (nous considérerons des rayons X) et d’observer spatialement comment il traverse le matériau. Le faisceau ayant traversé l’échantillon dans une direction est collecté sous la forme d’une radiographie. À partir d’une série de radiogra-

phies (éventuellement restreinte [ROU 14]), une “image” 3D peut alors être reconstruite [KAK 88, LAC 14b]. La reconstruction de l'image à partir des radiographies est une étape supplémentaire qui reste complexe. Des artefacts de mesures parfois importants perturbent la résolution des images obtenues.

Contrairement à l'étude à partir de photographies (2D), il est difficile d'ajouter des marqueurs visibles (mouchetis en 2D) sans changer les propriétés du matériau. Un certain nombre de propriétés de la microstructure perturbent néanmoins le faisceau, et sont donc visibles. Parmi ces perturbations on retiendra les surfaces libres, qui permettent de retrouver les frontières de l'échantillon, ainsi que la fissure. Il est alors possible de retrouver la géométrie de la fissure et du front au sein de l'échantillon directement à partir des images [FER 06, RAN 10].

Les changements de phases apparaissent également. Lorsqu'ils sont bien répartis dans le domaine, il peuvent jouer le rôle de mouchetis. Il est alors possible de faire de la corrélation entre deux de ces “images” pour obtenir le champ de déplacements. Une approche globale sur une base éléments finis a été développée par Roux *et al.* [ROU 08], elle est proche de sa version 2D présentée Section 4.1.1. Elle est appelée DVC pour *Digital Volume Correlation*, et des hexaèdres à 8 nœuds sont généralement utilisés. Le matériau doit donc être choisi avec des marqueurs naturels, comme par exemple des vides dans une mousse [ROU 08], des nodules de carbones dans de la fonte à graphite sphéroïdal [LIM 10, LAC 14a] ou des précipités dans des alliages d'aluminium [LAC 14b].

Une autre limitation de la tomographie est la puissance du faisceau qui pour certains matériaux (dont l'absorption est forte) ne permet pas de traiter de grandes éprouvettes. La microstructure joue alors un rôle important. Néanmoins, lorsque le matériau est bien choisi et les artefacts de mesures maîtrisés il est possible d'obtenir une résolution des déplacements plus petite qu'un voxel.

D'autre part, l'application de la méthode à la fatigue est également délicate. La première difficulté est la réalisation d'une éprouvette de dimension adaptée au faisceau en présence d'une fissure. La première méthode utilisée [LIM 10] a été de faire propager une pré-fissure de fatigue dans une grande éprouvette, puis d'y découper une petite éprouvette pour le tomographe. La fissure est alors directement présente, cependant les propriétés mécaniques du domaine autour ont été modifiées par la création de la pré-fissure. La loi de propagation qui pourrait être évaluée est alors celle pour cet état du matériau. Une seconde méthode (qui est celle utilisée dans l'essai 2D précédent) est de partir d'une éprouvette avec une entaille [LAC 14b], réalisée par exemple au laser. Avec cette méthode, les propriétés ne sont pas altérées mais la pointe de l'entaille est émoussée, la fissure mettra donc du temps à démarrer.

Une seconde difficulté est que l'acquisition des radiographies nécessaires à la reconstruction d'une image est relativement longue et assez intrusive. Il est possible de décharger l'éprouvette et de la radiographier mais une décharge complète modifie l'histoire du chargement et ne permet pas d'identifier  $\Delta \mathbf{u}$ . Pour y parvenir, des machines de traction *in situ* ont été développées [LIM 10, LAC 14b, LAC 14a]. Elles permettent de réaliser le cyclage dans le tomographe et de faire des radiogra-

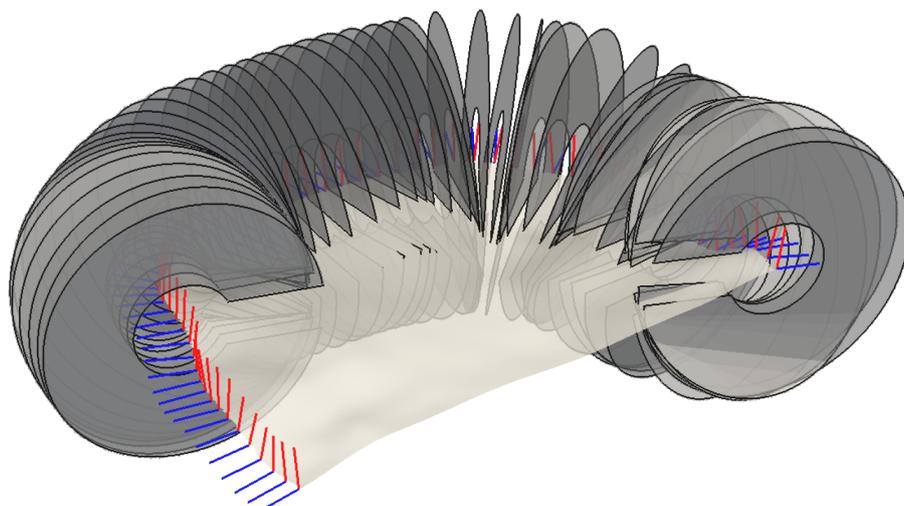


FIGURE 4.21 – Figure 4.8 de [LAC 14b] : représentation des plans de projection autour du front. Les repères locaux sont représentés le long du front,  $e_t$  en bleu et  $e_n$  en rouge.

phies sous charge. Grâce à ces dispositifs, il est possible d'obtenir la variation de déplacements sur un cycle par DVC régularisée.

### 4.3.2 Extraction des FIC en volume

Comme en deux dimensions, le résidu de corrélation peut être utilisé pour identifier la position des lèvres de la fissure [LIM 10, LAC 14b, LAC 14a]. À partir de la géométrie des lèvres de la fissure, et du champ de déplacements identifié, la méthode de projection est étendue au 3D. Comme en 2D, elle permet d'identifier la position du front et les facteurs d'intensité des contraintes. Comme pour la simulation, l'extension de la méthode au 3D est limitée par la définition des champs asymptotiques en 3D le long d'un front courbe. Une méthode [LIM 10, LAC 14b, LAC 14a] est de projeter les déplacements sur les séries 2D dans des plans orthogonaux au front, réparties le long du front.

Dans la thèse de Lachambre [LAC 14b], la méthode de projection est testée sur des champs de déplacements issus de simulations élastiques linéaires. Pour une fissure plane à front droit, la projection, sur des plans normaux au front, sur les séries 2D permet de retrouver précisément la position du front et permet une bonne évaluation des FIC ( $< 2\%$  d'erreur) à cœur. Pour une fissure plane à front courbe, cette projection permet d'identifier correctement la position du front à cœur. Cependant une erreur importante est commise sur l'identification des FIC ( $\approx 10\%$ ). Cette erreur peut être corrigée en ajoutant les termes dus à la courbure proposés par Leblond et Torlai [LEB 92] (voir équation (2.1)) dans la base de projection. L'évaluation des FIC est alors satisfaisante à cœur ( $< 2\%$  d'erreur). Ces essais montrent que la méthode de projection fonctionne pour identifier la position du front et les coeffi-

cients asymptotiques avec un champ de déplacements élastique simulé.

L'application à des champs expérimentaux issus de la tomographie est plus complexe. Les coefficients identifiés sont lissés [LAC 14b, GIA 11] le long du front car la discrétisation est grossière, la mesure bruitée et la taille des zones de projection restreinte. Ces zones de projection sont représentées pour une fissure expérimentale sur la Figure 4.21. De plus, il est difficile d'identifier la position du front de manière itérative. Une possibilité [LAC 14b] est alors de réaliser la projection pour de nombreuses positions et de choisir celle qui minimise le premier terme super-singulier pour un front lissé. Cette approche permet d'identifier l'ordre de grandeur de l'évolution des FIC en 3D au cours d'une expérience de fatigue. C'est une première avancée vers l'analyse expérimentale de fissures de fatigue 3D.

### 4.3.3 Vers des lois de propagation de fissures tridimensionnelles

Les différentes étapes de la stratégie présentée Figure 4.20 ont été abordées dans le projet ANR RUPXCUBE. Les outils pour identifier une loi de propagation de fissure de fatigue 3D semblent donc accessibles dans un futur proche. Cette identification est nécessaire pour permettre de prédire par la simulation la durée de vie d'une structure et d'organiser les opérations de maintenances. Elle présente cependant des challenges supplémentaires à l'approche 2D.

La première est simplement géométrique, car l'évolution du front en 3D est plus complexe. Elle fait intervenir au minimum un angle supplémentaire, l'angle de déversement, introduit à la Section 1.2.3. Expérimentalement, une difficulté supplémentaire existe : comment relier les abscisses curvilignes de deux fronts successifs ? Une approche consiste à résoudre un problème inverse avec la loi de propagation [GIA 11]. D'autre part, la vitesse de propagation évolue généralement à l'approche d'une surface libre. Une explication possible, étudiée par Giacomini [GIA 11] est l'augmentation du  $T$ -stress, qui pourrait être introduit dans la loi de propagation.

Néanmoins, l'identification en 3D est attractive car de nombreuses données sont disponibles par pas de propagation, tout le long du front. La mesure de champs 3D associée à des méthodes de post-traitement et de simulation intimement liées est un outils très prometteur pour identifier le formalisme pertinent d'une loi de propagation de fissure 3D.

# Conclusions et perspectives

Ce mémoire présente la DEK-FEM 3D, une méthode de simulation 3D de fissures courbes avec extraction directe des coefficients asymptotiques. En 2D, la DEK-FEM consiste à utiliser les séries de Williams seules comme discrétisation en pointe de fissure dans un patch analytique. Le reste du domaine est traité avec une méthode X-FEM. Les deux parties sont raccordées à leur interface au sens faible. Un maillage X-FEM de la structure complète est réalisé, les éléments autour du front (dans un rayon  $r_W$ ) constituent le patch analytique. Ces éléments ne servent alors plus qu'à l'intégration. L'extension de cette approche au 3D n'est pas directe puisqu'il n'existe pas de définition des champs asymptotiques pour une fissure quelconque en 3D, c'est l'objet principal de ces travaux de recherche.

Une définition primale des champs du patch analytique est proposée (équation (2.4)). La série de Williams (2D) en déplacements est utilisée dans un repère local autour du front. Une évolution continue de ce champ asymptotique est rendue possible le long du front par le produit de la série de Williams avec des fonctions de forme éléments finis 1D de l'abscisse curviligne. L'évolution des coefficients asymptotiques le long du front est donc directement connue (équation (2.31)). À partir de cette définition du champ de déplacements, les champs de déformations et de contraintes sont calculés. Lorsque le front est courbe, le calcul du gradient des déplacements est fait dans la base locale associée à la fissure.

La méthode est alors appliquée à des fissures planes à front droit. On constate que les champs auxiliaires de l'intégrale d'interaction sont identiques aux champs mécaniques du patch lorsque des éléments finis d'ordres zéros sont utilisés le long du front. Cette discrétisation dans la DEK-FEM ne permet pas de prendre correctement en compte des évolutions des coefficients asymptotiques le long du front. Une discrétisation d'ordre un corrige ce problème et permet d'identifier les évolutions continues non-bruitées des coefficients asymptotiques.

La DEK-FEM 3D est ensuite validée sur des cas tests pour lesquels des solutions analytiques sont connues. Les cas tests simulés sont des fissures planes à front courbe. Les évolutions des coefficients asymptotiques sont bien calculées mais les amplitudes ne sont pas très précises. Deux procédés permettent d'améliorer la précision. Le premier est de raffiner la discrétisation X-FEM autour du patch. Il est alors possible de diminuer la taille du patch et ainsi de s'approcher des hypothèses des séries de Williams. Le second est de faire évoluer la base. On a par exemple montré que l'ajout de la troisième rotation et l'augmentation de l'ordre des éléments finis le long du

front permettent d'améliorer la précision. Ces cas tests ont également été utilisés pour étudier l'influence des différents paramètres de la méthode.

Pour raffiner le maillage et traiter des problèmes où l'échelle de la structure est différente de l'échelle de la fissure, la méthode a été couplée avec un algorithme multigrilles localisées. Cet algorithme présente une complexité quasi-optimale. Il permet également de raffiner le maillage localement. Ces deux propriétés permettent de traiter efficacement des problèmes où différentes échelles cohabitent. Le patch analytique est introduit uniquement sur la grille la plus fine. Une première application de la DEK-FEM couplée avec la méthode multigrilles localisées est proposée. Comme attendu, l'ajout de grilles supplémentaires plus fines permet d'améliorer la précision de l'identification des coefficients asymptotiques.

Pour aller plus loin dans le développement de la méthode, il serait intéressant de travailler sur le choix de la base de discrétisation du patch analytique. La base proposée donne des premiers résultats encourageants et nous avons montré qu'elle jouait un rôle primordial sur la qualité de l'identification des facteurs d'intensité des contraintes. Une étape supplémentaire sera de considérer des fissures courbes, et d'étudier l'influence de la courbure. La méthode proposée traite naturellement la courbure du front comme la courbure de la fissure, le calcul du gradient est néanmoins plus délicat. Une autre piste de développement est de perfectionner le couplage du patch analytique avec le solveur multigrilles.

Le développement de ce type de simulation permet l'étude de la rupture lorsqu'une fissure micro-structurellement longue se propage avec des non-linéarités confinées en pointe de fissure. En effet, la méthode repose sur des champs asymptotiques obtenus sous les hypothèses de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Deux applications sont donc directement possibles : les matériaux fragiles fissurés et simulation de fissures fatigue. Il semble néanmoins possible d'étendre la méthode à la dynamique, en utilisant les développements asymptotiques dynamiques [FRE 98] ou aux non-linéarités, avec les champs HRR [RIC 68b, HUT 68]. D'autre part, certaines non-linéarités peuvent être prises en compte directement par la loi de propagation.

Enfin, la méthode proposée de simulation avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes est appliquée à la propagation de fissure de fatigue. Cette application s'inscrit dans le projet ANR RUPXCUBE qui traite de l'identification de loi de propagation de fatigue. La démarche proposée dans le projet allie post-traitements expérimentaux en parallèle de la méthode de simulation développée dans cette thèse. Le parallèle est basé sur un formalisme identique pour le post-traitement des expériences et la simulation. Il permet de comparer les champs de déplacements en présence pour valider les modèles et identifier des biais expérimentaux. Dans le cadre de cette thèse, cette démarche est appliquée à un essai 2D. Une loi de Paris est identifiée et on constate l'importance des conditions aux limites. La stratégie développée est basée sur la mesure de champs. Elle ne repose donc sur aucune approximation globale, et permet de traiter des expériences pour lesquelles les conditions aux limites sont imparfaites.

Les différents outils pour identifier des lois 3D avec cette stratégie ont été

développés au sein du projet. La tomographie à rayons X permet de mesurer des champs de déplacements 3D. La méthode d'identification des coefficients asymptotiques a été étendue aux 3D [LAC 14b]. Dans le cadre de cette thèse, la méthode DEK-FEM a été étendue au 3D. Une fois ces outils rodés, ils permettront de mieux appréhender l'identification de loi de propagation 3D. Plusieurs points qui restent assez ouverts pourront être étudiés : les directions de propagation du front, la vitesse de propagation en mode mixte ou le comportement particulier à l'approche des surfaces libres. Cette perspective est d'autant plus prometteuse que les données ne sont plus disponibles en un point (front de fissure ponctuelle en 2D) mais tout au long du front.



# Annexe 1

## Organisation du programme DEK-FEM multigrilles X-FEM localisées

Cette annexe présente l'organisation du programme multigrilles éléments finis étendus localisées avec extraction des FICs (i.e., le patch analytique est introduit dans la grille la plus fine). Ce programme ressemble fortement à celui proposé par Rannou [RAN 08] : multigrilles éléments finis étendus localisées, les opérations spécifiques au patch apparaissent en **gras**. Cette annexe est une grille de lecture intéressante du chapitre 2 qui présente la DEK-FEM 3D et son couplage avec l'algorithme multigrilles X-FEM localisées

### Génération du maillage

- Initialisation (géométrie, chargement et paramètres de la méthode)
- Construction ou lecture du maillage FEM grossier de la structure totale  
Nœuds, éléments, fonctions de forme et leur gradient
- Calcul des **trois** *levels sets* aux nœuds du maillage structuré dédié (Section 2.1.2.3)
- Boucle sur les  $n_g - 1$  grilles :  $k = 1$ 
  - Identification des nœuds enrichis de la grille  $k$  (approche topologique, Section 1.2.2.3 et Figure 1.5)
  - Création du maillage  $k + 1$  par sous découpage des éléments grossiers dans la zone choisie (Figures 2.6 et 2.7)
- Identification des nœuds enrichis de la grille  $n_g$
- **Décomposition de domaine sur la grille la plus fine  $n_g$  : les éléments ayant un nœud à moins de  $r_w$  élément du front constituent le patch (Figure 2.3)**
- Pour chacune des  $n_g$  grilles :
  - Génération de la table de connectivité adéquate
  - Génération des points d'intégration (intrinsèques aux éléments)

- Calcul des fonctions d'enrichissements et de leur gradient aux points de Gauss (intrinsèques aux éléments)
- **Pour le patch :**
  - **Génération des éléments unidimensionnels du patch : nœuds, éléments et connectivité (Figure 2.4)**
  - **Calcul des fonctions asymptotiques et de leur gradient aux points de Gauss de la grille  $n_g$  dans le patch (Figure 2.4)**
    - **pour un front qui rejoint les surfaces libres : les abscisses curviligne maximum et minimum du front sont calculées à partir de la troisième *level set*, cet intervalle est ensuite découpé en éléments**
    - **pour un front fermé sur lui-même : une origine de l'abscisse curviligne est choisie arbitrairement, l'intervalle entre les abscisses maximum et minimum est ensuite découpé en éléments, les nœuds initial et final de l'abscisse curviligne sont réunis**

## Génération de la matrice de rigidité et des opérateurs de couplage

- Pour chacune des  $n_g+1$  grilles (dont le patch) :
  - Calcul des matrices de rigidité élémentaires et assemblage (intégration sur les éléments du maillage FEM)
  - Calcul des efforts aux limites (second membre)
  - Application des conditions aux limites par substitution (connectivité)
  - Calcul des opérateurs de prolongement/restriction (Section 2.3.3.2)
- **Calcul de l'opérateur de raccord intégral (Section 2.2.5)**
  - **Identification des nœuds de l'interface  $\Gamma_W$**
  - **Réorganisation des faces en éléments 2D avec une normale sortante du patch**
  - **Génération des points d'intégration (intrinsèques aux éléments 2D)**
  - **Calcul de la connectivité de ces éléments avec les inconnues du patch, du domaine X-FEM et du raccord**
  - **Calcul des fonctions (déplacements du patch et du domaine X-FEM, et champ de raccord) aux points de Gauss**
  - **Calcul des matrices de raccord élémentaires et assemblage (intégration sur les éléments 2D)**

## Résolution et post-traitement

- Résolution à partir des opérateurs ainsi créés (Sections 2.3.3.1 et 2.3.4)
- Export des champs mécaniques sous paraview
- **Tracé des évolutions des coefficients asymptotiques désirées**



## Annexe 2

### Maillage raffiné localement pour les fissures *penny shaped* en tension

Les cas tests de fissures circulaires en tension ont pour référence des fissures dans des milieux infinis. Pour s'approcher de cette situation, une fissure petite par rapport à la dimension du milieu simulé est considérée :  $l = 10a$ . Le maillage est donc raffiné localement autour de la fissure pour manipuler un nombre de degrés de liberté acceptable. Des maillages approchants de ceux utilisés par Sukumar *et al.* [SUK 00] pour des simulations X-FEM sont utilisés. Ils sont générés avec le logiciel Gmsh développé par Geuzaine et Remacle [GEU 09].

#### Maillage dit grossier

```
l = 2;
rf = 0.1;

dh1 = 1/8;
dh2 = rf/Sqrt(13);

longfin = 2*6*dh2;
hfin = 6*dh2;
lf = longfin;

L[1]=2;
L[2]=2;
L[3]=10-(4+2*3/5+2*(3/5)^2+2*(3/5)^3+6/Sqrt(13));
L[4]=2*3/5;
L[5]=2*(3/5)^2;
L[6]=2*(3/5)^3;
L[7]=1/Sqrt(13);
L[8]=1/Sqrt(13);
L[9]=1/Sqrt(13);
L[10]=1/Sqrt(13);
L[11]=1/Sqrt(13);
L[12]=1/Sqrt(13);
```

```
p0=newp; Point(p0)={0,0,0};
inc = 1;
Lc[0]=0;
For (1:12)
    Lc[inc]=Lc[inc-1]+(L[inc]*rf/1);
    p1=newp; Point(p1)={Lc[inc]*1,0,0};
    inc=inc+1;
EndFor

For (1:12)
    Lc[inc]=Lc[inc-1]+(L[25-inc]*rf/1);
    p1=newp; Point(p1)={Lc[inc]*1,0,0};
    inc=inc+1;
EndFor

Extrude{1,0,0}{
    Point{p0};
    Layers{{2,1,1,1,1,12,1,1,1,1,2},
           {Lc[2],Lc[3],Lc[4],Lc[5],Lc[6],Lc[18],Lc[19],Lc[20],Lc[21],Lc[22],1}};
    Recombine;
}

Extrude{0,1,0}{
    Line{1};
    Layers{{2,1,1,1,1,12,1,1,1,1,2},
           {Lc[2],Lc[3],Lc[4],Lc[5],Lc[6],Lc[18],Lc[19],Lc[20],Lc[21],Lc[22],1}};
    Recombine;
}

Extrude{0,0,1}{
    Surface{5};
    Layers{{2,1,1,1,1,12,1,1,1,1,2},
           {Lc[2],Lc[3],Lc[4],Lc[5],Lc[6],Lc[18],Lc[19],Lc[20],Lc[21],Lc[22],1}};
    Recombine;
}
```

## Maillage dit fin

```
l = 2;
rf = 0.1;
dh1 = l/8;
dh2 = rf/Sqrt(13);

longfin = 2*6*dh2;
hfin = 6*dh2;
lf = longfin;

L[1]=2;
L[2]=2;
L[3]=10-(4+2*3/5+2*(3/5)^2+2*(3/5)^3+6/Sqrt(13));
L[4]=2*3/5;
```

```

L[5]=2*(3/5)^2;
L[6]=2*(3/5)^3;
L[7]=1/Sqrt(13);
L[8]=1/Sqrt(13);
L[9]=1/Sqrt(13);
L[10]=1/Sqrt(13);
L[11]=1/Sqrt(13);
L[12]=1/Sqrt(13);

p0=newp; Point(p0)={0,0,0};
inc = 1;
Lc[0]=0;
For (1:12)
  Lc[inc]=Lc[inc-1]+(L[inc]*rf/1);
  p1=newp; Point(p1)={Lc[inc]*1,0,0};
  inc=inc+1;
EndFor

For (1:12)
  Lc[inc]=Lc[inc-1]+(L[25-inc]*rf/1);
  p1=newp; Point(p1)={Lc[inc]*1,0,0};
  inc=inc+1;
EndFor

Extrude{1,0,0}{
  Point{p0};
  Layers{2*{2,1,1,1,1,12,1,1,1,1,2},
    {Lc[2],Lc[3],Lc[4],Lc[5],Lc[6],Lc[18],Lc[19],Lc[20],Lc[21],Lc[22],1}};
  Recombine;
}

Extrude{0,1,0}{
  Line{1};
  Layers{2*{2,1,1,1,1,12,1,1,1,1,2},
    {Lc[2],Lc[3],Lc[4],Lc[5],Lc[6],Lc[18],Lc[19],Lc[20],Lc[21],Lc[22],1}};
  Recombine;
}

Extrude{0,0,1}{
  Surface{5};
  Layers{2*{2,1,1,1,1,12,1,1,1,1,2},
    {Lc[2],Lc[3],Lc[4],Lc[5],Lc[6],Lc[18],Lc[19],Lc[20],Lc[21],Lc[22],1}};
  Recombine;
}

```



# Bibliographie

- [ADI 07] ADIB A. M. L., BAPTISTA C. A. R. P.  
An exponential equation of fatigue crack growth in titanium. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 452–453, 2007, p. 321–325.
- [AND 05] ANDERSON T. L.  
*Fracture mechanics : fundamentals and applications, 3rd ed.* CRC press, taylor & francis group édition, 2005.
- [ANQ 88] ANQUEZ L., BAUDIN G.  
*Mechanics of crack closure*, Chapitre Correlation between numerically predicted crack opening load and measured load history dependent crack growth threshold, p. 380–397. ASTM STP 982, 1988.
- [APE 08] APEL T., LEGUILLON D., PESTER C., YOSIBASH Z.  
Edge singularities and structure of the 3-D Williams expansion. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 336, n° 8, 2008, p. 629–635, Elsevier.
- [BAB 73] BABUŠKA I.  
The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, vol. 20, n° 3, 1973, p. 179–192, Springer-Verlag.
- [BAB 97] BABUŠKA I., MELENK J.  
The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 727–758.
- [BAB 12] BABUŠKA I., BANERJEE U.  
Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201–204, n° 0, 2012, p. 91–111.
- [BAI 87] BAI D., BRANDT A.  
Local Mesh Refinement Multilevel Techniques. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 8, n° 2, 1987, p. 109–134, SIAM.
- [BAI 13] BAIETTO M.-C., PIERRES E., GRAVOUIL A., BERTHEL B., FOUVRY S., TROLLE B.  
Fretting fatigue crack growth simulation based on a combined experimental and XFEM strategy. *International Journal of Fatigue*, vol. 47, n° 0, 2013, p. 31–43.
- [BAR 74] BARSOUM R. S.  
Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mecha-

- tics. *International Journal of Fracture*, vol. 10, 1974, p. 603–605, Springer Netherlands.
- [BAR 76] BARSOUM R. S.  
On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, n° 1, 1976, p. 25–37, John Wiley & Sons, Ltd.
- [BAR 98] BARTH T. J., SETHIAN J. A.  
Numerical Schemes for the Hamilton–Jacobi and Level Set Equations on Triangulated Domains. *Journal of Computational Physics*, vol. 145, n° 1, 1998, p. 1–40.
- [BAT 92] BATOZ J.-L., DHATT G.  
*Modélisation des structures par éléments finis, Vol. 3 : Coques*. 1992.
- [BAŽ 79] BAŽANT Z. P., ESTENSSORO L. F.  
Surface singularity and crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, n° 5, 1979, p. 405–426.
- [BAŽ 02] BAŽANT Z., JIRÀSEK M.  
Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, n° 11, 2002, p. 1119–1149.
- [BÉC 05] BÉCHET E., MINNEBO H., MOËS N., BURGARDT B.  
Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n° 8, 2005, p. 1033–1056, John Wiley & Sons, Ltd.
- [BEL 96] BELYTSCHKO T., KRONGAUZ Y., ORGAN D., FLEMING M., KRYSL P.  
Meshless methods : an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, n° 1, 1996, p. 3–47, Elsevier.
- [BEL 99a] BELGACEM F. B.  
The Mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, vol. 84, 1999, p. 173–197, Springer Berlin / Heidelberg.
- [BEL 99b] BELYTSCHKO T., BLACK T.  
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, n° 5, 1999, p. 601–620, John Wiley & Sons, Ltd.
- [BEL 01] BELYTSCHKO T., MOËS N., USUI S., PARIMI C.  
Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 4, 2001, p. 993–1013, Wiley Online Library.
- [BEL 09] BELYTSCHKO T., GRACIE R., VENTURA G.  
A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 17, n° 043001, 2009, page (24pp), IOP Publishing.
- [BES 06] BESNARD G., HILD F., ROUX S.  
“Finite-element” displacement fields analysis from digital images : application to Portevin-Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, vol. 46, 2006, p. 789–804.

- [BET 91] BETEGÒN C., HANCOCK J. W.  
Two-Parameter Characterization of Elastic-Plastic Crack-Tip Fields. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 58, n° 1, 1991, p. 104–110.
- [BIB 13] BIBOULET N., GRAVOUIL A., DUREISSEIX D., LUBRECHT A., COMBESCURE A.  
An efficient linear elastic FEM solver using automatic local grid refinement and accuracy control. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 68, n° 0, 2013, p. 28–38.
- [BIO 10] BIOTTEAU E., GRAVOUIL A., LUBRECHT A. A., COMBESCURE A.  
Multigrid solver with automatic mesh refinement for transient elastoplastic dynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, n° 8, 2010, p. 947–971, John Wiley & Sons, Ltd.
- [BON 99] BONNET M.  
*Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. Wiley, 1999.
- [BON 07] BONNET M., FRANGI A.  
*Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Edition de l'école Polytechnique, 2007.
- [BOU 08] BOURDIN B., FRANCFORT G. A., MARIGO J.-J.  
The Variational Approach to Fracture. *Journal of Elasticity*, vol. 91, n° 1–3, 2008, p. 5–148, Springer Netherlands.
- [BOW 76] BOWIE O., FREESE C.  
On the “overlapping” problem in crack analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 8, n° 2, 1976, p. 373–379, Elsevier.
- [BRA 77] BRANDT A.  
Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of computation*, vol. 31, n° 138, 1977, p. 333–390.
- [BRA 05] BRANCHERIE D., VILLON P., IBRAHIMBEGOVIC A., RASSINEUX A., BREITKOPF P.  
Transfer operator based on diffuse interpolation and energy conservation for damage materials. *In Third MIT Conference*, Boston, USA, juin 2005.
- [BRO 85] BROWN M. W., MILLER K. J.  
Mode I fatigue crack growth under biaxial stress at room and elevated temperature. *Multiaxial Fatigue, ASTM STP*, vol. 853, 1985, p. 135–152.
- [BRO 89] BROEK D.  
*The Practical Use of Fracture Mechanics*. Springer Netherlands, 1989.
- [BUD 73] BUDIANSKY B., RICE J. R.  
Conservation laws and energy-release rates. *Journal of applied mechanics*, vol. 40, n° 1, 1973, p. 201–203, American Society of Mechanical Engineers.
- [BUI 78] BUI H. D.  
*Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.

- [CAL 12] CALEYRON F., COMBESURE A., FAUCHER V., POTAPOV S.  
Dynamic simulation of damage-fracture transition in smoothed particles hydrodynamics shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 90, n° 6, 2012, p. 707–738, John Wiley & Sons, Ltd.
- [CAR 00] CARTER B. J., WAWRZYNEK P. A., INGRAFFEA A. R.  
Automated 3-D crack growth simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, 2000, p. 229–253.
- [CAR 09] CARROLL J., EFSTATHIOU C., LAMBROS J., SEHITOGLU H., HAUBER B., SPOTTSWOOD S., CHONA R.  
Investigation of fatigue crack closure using multiscale image correlation experiments. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76, n° 15, 2009, p. 2384–2398.
- [CAV 05] CAVIN P., GRAVOUIL A., LUBRECHT A. A., COMBESURE A.  
Efficient FEM calculation with predefined precision through automatic grid refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, n° 11–12, 2005, p. 1043–1055.
- [CAV 06] CAVIN P.  
Méthode éléments finis avec raffinement spatial et temporel adaptatif et automatique : “STAR-Method” (Space Time Automatic Refinement). Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- [CAZ 10a] CAZES F., SIMATOS A., CORET M., COMBESURE A.  
A cohesive zone model which is energetically equivalent to a gradient-enhanced coupled damage-plasticity model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 29, n° 6, 2010, p. 976–989.
- [CAZ 10b] CAZES F.  
Construction et implémentation de lois cohésives extrinsèques. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.
- [CHA 00] CHAUDHURI R. A., XIE M.  
A novel eigenfunction expansion solution for three-dimensional crack problems. *Composites Science and Technology*, vol. 60, n° 12–13, 2000, p. 2565–2580.
- [CHA 06] CHAHINE E., LABORDE P., RENARD Y.  
A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with X-FEM. *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 342, n° 7, 2006, p. 527–532, Elsevier.
- [CHA 11] CHAHINE E., LABORDE P., RENARD Y.  
A non-conformal eXtended Finite Element approach : Integral matching X-FEM. *Applied Numerical Mathematics*, vol. 61, n° 3, 2011, p. 322–343.
- [CHE 99] CHENG H., GREENGARD L., ROKHLIN V.  
A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, vol. 155, n° 2, 1999, p. 468–498, Elsevier.
- [CHE 02] CHEMA J., SMOLINSKI P., BELYTSCHKO T.  
The extended finite element method (XFEM) for solidification problems. *Inter-*

- national Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, n° 8, 2002, p. 1959–1977, Wiley Online Library.
- [CHE 03] CHESSA J., WANG H., BELYTSCHKO T.  
On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, n° 7, 2003, p. 1015–1038, John Wiley & Sons, Ltd.
- [CHE 04] CHESSA J., BELYTSCHKO T.  
Arbitrary discontinuities in space–time finite elements by level sets and X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n° 15, 2004, p. 2595–2614, John Wiley & Sons, Ltd.
- [CHI 13] CHIARUTTINI V., RIOLO V., FEYEL F.  
Advanced remeshing techniques for complex 3D crack propagation. *ICF13*, 2013.
- [CIA 08] CIAVARELLA M., PAGGI M., CARPINTERI A.  
One, no one, and one hundred thousand crack propagation laws : A generalized Barenblatt and Botvina dimensional analysis approach to fatigue crack growth. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 56, n° 12, 2008, p. 3416–3432.
- [CLA 04] CLAIRE D., HILD F., ROUX S.  
A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n° 2, 2004, p. 189–208, John Wiley & Sons, Ltd.
- [CLO 97] CLOETENS P., PATEYRON-SALOMÉ M., BUFFIERE J.-Y., PEIX G., BARUCHEL J., PEYRIN F., SCHLENKER M.  
Observation of microstructure and damage in materials by phase sensitive radiography and tomography. *Journal of Applied Physics*, vol. 81, n° 9, 1997, p. 5878–5886, AIP Publishing.
- [DHI 05] DHIA H. B., RATEAU G.  
The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, n° 11, 2005, p. 1442–1462, John Wiley & Sons, Ltd.
- [DHO 01] DHONDT G., CHERGUI A., BUCHHOLZ F.-G.  
Computational fracture analysis of different specimens regarding 3D and mode coupling effects. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 68, n° 4, 2001, p. 383–401.
- [DOL 01] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 51, 2001, p. 6825–6846, Elsevier.
- [DUA 01] DUARTE C. A., HAMZEH O. N., LISZKA T. J., TWORZYDLO W. W.  
A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 15, 2001, p. 2227–2262, Elsevier.

- [DUF 07] DUFLOT M.  
A study of the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, n° 11, 2007, p. 1261–1302, John Wiley & Sons, Ltd.
- [DUG 60] DUGDALE D.  
Yielding of Steel Sheets Containing Slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, 1960, p. 100-104.
- [DUR 06] DUREISSEIX D., BAVESTRELLO H.  
Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 44–47, 2006, p. 6523–6541.
- [ELB 70] ELBER W.  
Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, 1970, p. 37–45.
- [ELG 06a] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 7, 2006, p. 501–515, Elsevier.
- [ELG 06b] ELGUEDJ T.  
Simulation numérique de la propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- [ERD 63] ERDOGAN F., SIH G.  
On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, 1963, p. 519–527.
- [ESN 14] ESNAULT J.-B.  
Étude expérimentale et numérique en trois dimensions du développement en fatigue d’une fissure déversée dans une tôle mince. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2014.
- [ESP 03] ESPINOSA H. D., ZAVATTIERI P. D.  
A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials. Part I : Theory and numerical implementation. *Mechanics of Materials*, vol. 35, n° 3–6, 2003, p. 333–364.
- [FAW 79] FAWKES A. J., OWEN D. R. J., LUXMOORE A. R.  
An assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 11, n° 1, 1979, p. 143–159, Elsevier.
- [FED 09] FEDELE R., RAKA B., HILD F., ROUX S.  
Identification of adhesive properties in GLARE assemblies using digital image correlation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 57, n° 7, 2009, p. 1003 - 1016.

- [FER 06] FERRIE E.  
Caractérisation et modélisation tridimensionnelles de la propagation de fissures de fatigue dans les alliages d'aluminium modèles. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- [FEY 00] FEYEL F., CHABOCHE J.-L.  
FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, n° 3–4, 2000, p. 309–330.
- [FIS 05] FISH J., YUAN Z.  
Multiscale enrichment based on partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, n° 10, 2005, p. 1341–1359, John Wiley & Sons, Ltd.
- [FLE 97] FLEMING M., CHU Y. A., MORAN B., BELYTSCHKO T., LU Y. Y., GU L.  
Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 8, 1997, p. 1483–1504, Chichester, New York, Wiley [etc.].
- [FOR 91] FORTIN M., BREZZI F.  
*Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, 1991.
- [FRA 13] FRANÇOIS D., PINEAU A., ZAOUI A.  
*Mechanical behaviour of materials. Vol 2 : Fracture mechanics and damage*. Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 58, Springer, 2013.
- [FRE 91] FREUND R. W., NACHTIGAL N. M.  
QMR : a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems. *Numerische Mathematik*, vol. 60, n° 1, 1991, p. 315–339, Springer-Verlag.
- [FRE 98] FREUND L. B.  
*Dynamic fracture mechanics*. Cambridge university press, 1998.
- [FRI 08] FRIES T.-P.  
A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, n° 5, 2008, p. 503–532, Wiley Online Library.
- [FRI 10] FRIES T.-P., BELYTSCHKO T.  
The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, n° 3, 2010, p. 253–304, John Wiley & Sons, Ltd.
- [FRI 12] FRIES T.-P., BAYDOUN M.  
Crack propagation with the extended finite element method and a hybrid explicit–implicit crack description. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 89, n° 12, 2012, p. 1527–1558, John Wiley & Sons, Ltd.

- [GAL 11] GALLAND F.  
An adaptive model reduction approach for 3D fatigue crack growth in small scale yielding conditions. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.
- [GAS 05] GASSER T. C., HOLZAPFEL G. A.  
Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, n° 25, 2005, p. 2859–2896, Elsevier.
- [GER 73] GERMAIN P.  
*Cours de mécanique des milieux continus. Tome I. , Théorie générale.* Masson, Paris, 1973.
- [GEU 09] GEUZAINÉ C., REMACLE J.-F.  
Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, n° 11, 2009, p. 1309–1331, John Wiley & Sons, Ltd.
- [GIA 11] GIACOMA A.  
Vers une nouvelle loi de propagation de fissure tridimensionnelle : Stratégie multi-échelles adaptée aux structures complexes issues de l'ingénierie. Mémoire de master, INSA de Lyon, 2011.
- [GOL 74] GOL'DSTEIN R., SALGANIK R.  
Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture*, vol. 10, n° 4, 1974, p. 507–523, Kluwer Academic Publishers.
- [GON 13a] GONZÁLEZ-ALBUIXECH V. F., GINER E., TARANCÓN J. E., FUENMAYOR F. J., GRAVOUIL A.  
Convergence of domain integrals for stress intensity factor extraction in 2-D curved cracks problems with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 94, n° 8, 2013, p. 740–757.
- [GON 13b] GONZÁLEZ-ALBUIXECH V. F., GINER E., TARANCÓN J. E., FUENMAYOR F. J., GRAVOUIL A.  
Domain integral formulation for 3-D curved and non-planar cracks with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 264, n° 0, 2013, p. 129–144.
- [GOS 98] GOSZ M., DOLBOW J., MORAN B.  
Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, n° 15, 1998, p. 1763–1783.
- [GOS 02] GOSZ M., MORAN B.  
An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, n° 3, 2002, p. 299–319.
- [GRA 02] GRAVOUIL A., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part

- II : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, n° 11, 2002, p. 2569–2586, John Wiley & Sons, Ltd.
- [GRA 03] GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, n° 10, 2003, p. 1545–1569, John Wiley & Sons, Ltd.
- [GRÉ 07] GRÉGOIRE G., MAIGRE H., RÉTHORÉ J., COMBESURE A.  
Dynamic crack propagation under mixed-mode loading — Comparison between experiments and X-FEM simulations. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, n° 20, 2007, p. 6517–6534.
- [GUI 07] GUIDAULT P.-A., ALLIX O., CHAMPANEY L., NAVARRO J. P.  
A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures. *Computers & Structures*, vol. 85, n° 17–18, 2007, p. 1360–1371. Computational Structures Technology.
- [HAB 12a] HABOUSSA D.  
Modélisation de la transition traction-cisaillement des métaux sous choc par la X-FEM. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 22 November 2012.
- [HAB 12b] HABOUSSA D., ELGUEDJ T., LEBLÉ B., COMBESURE A.  
Simulation of the shear-tensile mode transition on dynamic crack propagations. *International Journal of Fracture*, vol. 178, n° 1–2, 2012, p. 195–213, Springer Netherlands.
- [HAM 05] HAMAM R., POMMIER S., BUMBIELER F.  
Mode I fatigue crack growth under biaxial loading. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, n° 10–12, 2005, p. 1342–1346. Fatigue Damage of Structural Materials V 5th International Conference on Fatigue Damage of Structural Materials.
- [HAM 07] HAMAM R., HILD F., ROUX S.  
Stress intensity factor gauging by digital image correlation : Application in cyclic fatigue. *Strain*, vol. 43, n° 3, 2007, p. 181–192, Wiley Online Library.
- [HEN 10] HENNINGER C., ROUX S., HILD F.  
Enriched kinematic fields of cracked structures. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, n° 24, 2010, p. 3305–3316.
- [HOL 88] HO-LE K.  
Finite element mesh generation methods : a review and classification. *Computer-aided design*, vol. 20, n° 1, 1988, p. 27–38, Elsevier.
- [HOU 85] HOURLIER F., D’HONDT H., TRUCHON M., PINEAU A.  
*Multiaxial Fatigue*, Chapitre Fatigue crack path behavior under polymodal loading, p. 228–248. ASTM STP 835, 1985.
- [HUE 99] HUERTA A., RODRÍGUEZ-FERRAN A., DÍEZ P., SARRATE J.  
Adaptive finite element strategies based on error assessment. *International Jour-*

- nal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n° 10, 1999, p. 1803–1818, John Wiley & Sons, Ltd.
- [HUG 88] HUGHES T. J. R., HULBERT G. M.  
Space-time finite element methods for elastodynamics : Formulations and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 66, n° 3, 1988, p. 339–363.
- [HUG 95] HUGHES T. J. R.  
Multiscale phenomena : Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 127, n° 1–4, 1995, p. 387–401.
- [HUG 00] HUGHES T. J. R.  
*The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, 2000.
- [HUI 95] HUI C., RUINA A.  
Why K ? High order singularities and small scale yielding. *International Journal of Fracture*, vol. 72, n° 2, 1995, p. 97–120, Kluwer Academic Publishers.
- [HUT 68] HUTCHINSON J. .  
Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, n° 1, 1968, p. 13–31, Elsevier.
- [HUT 06] HUTAŘ P., SEITL S., KNÉSL Z.  
Effect of constraint on fatigue crack propagation near threshold in medium carbon steel. *Computational Materials Science*, vol. 37, 2006, p. 51–57. Proceedings of the 14th International Workshop on Computational Mechanics of Materials.
- [JAC 08] JACQUOT P.  
Speckle interferometry : a review of the principal methods in use for experimental mechanics applications. *Strain*, vol. 44, n° 1, 2008, p. 57–69, Blackwell Publishing Ltd.
- [KAC 93] KACOU S., PARSONS I. D.  
A parallel multigrid method for history-dependent elastoplasticity computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 108, n° 1–2, 1993, p. 1–21.
- [KAK 88] KAK A. C., SLANEY M.  
*Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
- [KAN 85] KANNINEN M. F., POPELAR C. H.  
*Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, 6 June 1985.
- [KAR 01] KARIHALOO B. L., XIAO Q. Z.  
Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 68, n° 15, 2001, p. 1609–1630.

- [KAR 03a] KARIHALOO B. L., ABDALLA H., XIAO Q. Z.  
Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 17, 2003, p. 2407–2420.
- [KAR 03b] KARIHALOO B. L., XIAO Q. Z.  
Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing : a state-of-the-art review. *Computers & Structures*, vol. 81, n° 3, 2003, p. 119–129, Elsevier.
- [KAS 66] KASSIR M. K., SIH G. C.  
Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, n° 3, 1966, p. 601–611, American Society of Mechanical Engineers.
- [KFO 86] KFOURI A. P.  
Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby’s method. *International Journal of Fracture*, vol. 30, n° 4, 1986, p. 301–315, Martinus Nijhoff, The Hague/Kluwer Academic Publishers.
- [KOL 05] KOLK K., WEBER W., KUHN G.  
Investigation of 3D crack propagation problems via fast BEM formulations. *Computational Mechanics*, vol. 37, n° 1, 2005, p. 32–40, Springer-Verlag.
- [KOL 14] KOLEDNIK O., SCHÖNGRUNDNER R., FISCHER F. D.  
A new view on J-integrals in elastic-plastic materials. *International Journal of Fracture*, vol. 187, n° 1, 2014, p. 77–107, Springer Netherlands.
- [KRA 08] KRAFT R., MOLINARI J.-F.  
A statistical investigation of the effects of grain boundary properties on transgranular fracture. *Acta Materialia*, vol. 56, n° 17, 2008, p. 4739–4749.
- [KRY 99] KRYSL P., BELYTSCHKO T.  
The Element Free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, n° 6, 1999, p. 767–800, Wiley Online Library.
- [LAB 05] LABORDE P., POMMIER J., RENARD Y., SALAÜN M.  
High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n° 3, 2005, p. 354–381.
- [LAC 14a] LACHAMBRE J., RÉTHORÉ J., WECK A., BUFFIERE J.-Y.  
Extraction of stress intensity factors for 3D small fatigue cracks using digital volume correlation and X-ray tomography. *International Journal of Fatigue*, , 2014. In press.
- [LAC 14b] LACHAMBRE J.  
Développement d’une Méthode de Caractérisation 3D des Fissures de Fatigue à l’aide de la Corrélation d’Images Numériques obtenues par Tomographie X. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2014.

- [LAD 83] LADEVÈZE P., LEGUILLON D.  
Error estimate procedure in the finite element method and applications. *Journal on Numerical Analysis*, vol. 20, n° 3, 1983, p. 485–509, SIAM.
- [LAM 96] LAMACQ V., DUBOURG M.-C., VINCENT L.  
Crack path prediction under fretting fatigue—a theoretical and experimental approach. *Journal of tribology*, vol. 118, n° 4, 1996, p. 711–720, American Society of Mechanical Engineers.
- [LAR 73] LARSSON S. G., CARLSSON A. J.  
Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 21, n° 4, 1973, p. 263–277.
- [LAZ 08] LAZARUS V., BUCHHOLZ F.-G., FULLAND M., WIEBESIEK J.  
Comparison of predictions by mode II or mode III criteria on crack front twisting in three or four point bending experiments. *International Journal of Fracture*, vol. 153, n° 2, 2008, p. 141–151, Springer Netherlands.
- [LEB 92] LEBLOND J.-B., TORLAI O.  
The stress field near the front of an arbitrarily shaped crack in a three-dimensional elastic body. *Journal of Elasticity*, vol. 29, n° 2, 1992, p. 97–131, Kluwer Academic Publishers.
- [LEB 03] LEBLOND J. B.  
*Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes, 2003.
- [LEC 12] LECLERC H., PÉRIÉ J.-N., HILD F., ROUX S.  
Digital volume correlation : what are the limits to the spatial resolution ? *Mechanics & Industry*, vol. 13, n° 06, 2012, p. 361–371, Cambridge Univ Press.
- [LEM 96] LEMAITRE J.  
*A course on damage mechanics*. Springer, 1996.
- [LI 98] LI S., MEAR M. E., XIAO L.  
Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 151, n° 3-4, 1998, p. 435 - 459.
- [LIM 10] LIMODIN N., RÉTHORÉ J., BUFFIÈRE J.-Y., HILD F., ROUX S., LUDWIG W., RANNOU J., GRAVOUIL A.  
Influence of closure on the 3D propagation of fatigue cracks in a nodular cast iron investigated by X-ray tomography and 3D volume correlation. *Acta Materialia*, vol. 58, n° 8, 2010, p. 2957–2967, Elsevier.
- [LIU 04] LIU X. Y., XIAO Q. Z., KARIHALOO B. L.  
XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, n° 8, 2004, p. 1103–1118, John Wiley & Sons, Ltd.
- [LIU 10] LIU M. B., LIU G. R.  
Smoothed particle hydrodynamics (SPH) : an overview and recent developments.

- Archives of computational methods in engineering*, vol. 17, n° 1, 2010, p. 25–76, Springer.
- [LYN 88] LYNCH S.  
Environmentally assisted cracking : Overview of evidence for an adsorption-induced localised-slip process. *Acta Metallurgica*, vol. 36, n° 10, 1988, p. 2639–2661.
- [MAT 12] MATHIEU F., HILD F., ROUX S.  
Identification of a crack propagation law by digital image correlation. *International Journal of Fatigue*, vol. 36, n° 1, 2012, p. 146 - 154.
- [MAT 13] MATHIEU F., HILD F., ROUX S.  
Image-based identification procedure of a crack propagation law. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 103, n° 0, 2013, p. 48 - 59.
- [MAU 08] MAUREL B., COMBESCURE A.  
An SPH shell formulation for plasticity and fracture analysis in explicit dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 76, n° 7, 2008, p. 949–971, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MAU 11] MAUGIN G. A.  
*Configurational forces : thermomechanics, physics, mathematics, and numerics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2011.
- [MCE 58] MCEVILY JR. A. J., ILLG W.  
The rate of fatigue crack propagation in two aluminum alloys. Technical Note n° 4394, 1958, NACA.
- [MCN 87] MCNEILL S. R., PETERS W. H., SUTTON M. A.  
Estimation of stress intensity factor by digital image correlation. *Engineering fracture mechanics*, vol. 28, n° 1, 1987, p. 101–112, Elsevier.
- [MEN 11] MENK A., BORDAS S. P. A.  
A robust preconditioning technique for the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, n° 13, 2011, p. 1609–1632, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MI 94] MI Y., ALIABADI M.  
Three-dimensional crack growth simulation using BEM. *Computers & Structures*, vol. 52, n° 5, 1994, p. 871–878, Elsevier.
- [MI 96] MI Y.  
*Three-dimensional analysis of crack growth*. WIT Press, 1996.
- [MIE 07] MIEHE C., GÜRSSES E.  
A robust algorithm for configurational-force-driven brittle crack propagation with R-adaptive mesh alignment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, n° 2, 2007, p. 127–155, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MIK 08] MIKLASHEVICH I. A.  
*Micromechanics of Fracture in Generalized Spaces*. Academic Press, 2008.

- [MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.  
A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n° 1, 1999, p. 131–150, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOË 02a] MOËS N., GRAVOUIL A., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, n° 11, 2002, p. 2549–2568, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOË 02b] MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering fracture mechanics*, vol. 69, n° 7, 2002, p. 813–833, Elsevier.
- [MOË 03] MOËS N., CLOIREC M., CARTRAUD P., REMACLE J.-F.  
A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 192, n° 28, 2003, p. 3163–3177, Elsevier.
- [MOË 11] MOËS N., STOLZ C., BERNARD P.-E., CHEVAUGEON N.  
A level set based model for damage growth : The thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 86, n° 3, 2011, p. 358–380, John Wiley & Sons, Ltd.
- [MOR 87] MORAN B., SHIH C. F.  
Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 27, n° 6, 1987, p. 615–642.
- [MUS 53] MUSKHELISHVILI N. I.  
*Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. P. Noordhoff, 1953.
- [NEM 99] NEMAT-NASSER S., HORI M.  
*Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, vol. 2. Elsevier Amsterdam, 1999.
- [NEW 81] NEWMAN JR. J. C.  
*Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading*, Chapitre A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading, p. 53–84. ASTM STP 748, 1981.
- [NEW 84] NEWMAN JR. J. C., RAJU I. S.  
Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending loads. Technical Memorandum n° 85793, April 1984, NASA, Langley research center, Hampton, Virginia 23665.
- [NEW 98] NEWMAN JR. J. C.  
The merging of fatigue and fracture mechanics concepts : a historical perspective. *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 34, n° 5–6, 1998, p. 347–390.

- [NEW 03] NEWMAN JR. J. C., JAMES M. A., ZERBST U.  
A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 3–4, 2003, p. 371–385.
- [NGU 08] NGUYEN V. P., RABCZUK T., BORDAS S., DUFLOT M.  
Meshless methods : a review and computer implementation aspects. *Mathematics and computers in simulation*, vol. 79, n° 3, 2008, p. 763–813, Elsevier.
- [ORT 99] ORTIZ M., PANDOLFI A.  
Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, n° 9, 1999, p. 1267–1282.
- [OSH 88] OSHER S., SETHIAN J.  
Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, n° 79, 1988.
- [PAR 61] PARIS P., GOMEZ M., ANDERSON W.  
A rational Analytic Theory of Fatigue. *The Trend in Engineering*, vol. 13, 1961, p. 9–14.
- [PAR 91] PARKS D. M.  
*Defect Assessment in components – Fundamentals and Application*, Chapitre Three-Dimensional Aspects of HRR-Dominance, p. 205–231. Mechanical Engineering Publication, London, 1991.
- [PAS 11] PASSIEUX J. C., GRAVOUIL A., RÉTHORÉ J., BAIETTO M. C.  
Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multigrid X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, n° 13, 2011, p. 1648–1666, John Wiley & Sons, Ltd.
- [PAS 13] PASSIEUX J.-C., RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., BAIETTO M.-C.  
Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid X-FEM solver. *Computational Mechanics*, vol. 52, n° 6, 2013, p. 1381–1393.
- [PIE 10] PIERRES É.  
Simulation tridimensionnelle multi-échelle de la propagation de fissures expérimentales sous chargement de fretting fatigue par la méthode des éléments finis étendus. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.
- [POM 02] POMMIER S.  
Plane strain crack closure and cyclic hardening. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, n° 1, 2002, p. 25–44.
- [POM 07] POMMIER S., HAMAM R.  
Incremental model for fatigue crack growth based on a displacement partitioning hypothesis of mode I elastic–plastic displacement fields. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 30, n° 7, 2007, p. 582–598, Blackwell Publishing Ltd.
- [POM 09a] POMMIER S., GRAVOUIL A., MOËS N., COMBESURE A.  
*La simulation numérique de la propagation des fissures*. Hermes, 2009.

- [POM 09b] POMMIER S., LOPEZ-CRESPO P., DECREUSE P. Y.  
A multi-scale approach to condense the cyclic elastic-plastic behaviour of the crack tip region into an extended constitutive model. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 32, n° 11, 2009, p. 899–915, Blackwell Publishing Ltd.
- [POO 85] POOK L. P.  
The fatigue crack direction and threshold behaviour of mild steel under mixed Mode I and III loading. *International Journal of Fatigue*, vol. 7, n° 1, 1985, p. 21–30.
- [PRA 07] PRABEL B.  
Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l’arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP. Thèse de doctorat, INSA de Lyon / LaMCoS, 2007.
- [PRA 08] PRABEL B., MARIE S., COMBESURE A.  
Using the X-FEM method to model the dynamic propagation and arrest of cleavage cracks in ferritic steel. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, n° 10, 2008, p. 2984–3009.
- [QIA 96] QIAN J., FATEMI A.  
Mixed mode fatigue crack growth : A literature survey. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, n° 6, 1996, p. 969–990.
- [QU 06] QU J., WANG X.  
Solutions of T-stresses for quarter-elliptical corner cracks in finite thickness plates subject to tension and bending. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 83, n° 8, 2006, p. 593–606.
- [RAJ 79] RAJU I., NEWMAN J.  
Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 11, n° 4, 1979, p. 817–829.
- [RAM 13] RAMISETTI S. B., ANCIAUX G., MOLINARI J.-F.  
Spatial filters for bridging molecular dynamics with finite elements at finite temperatures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 253, 2013, p. 28–38.
- [RAN 07] RANNOU J., GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
A multi-grid extended finite element method for elastic crack growth simulation. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 16, n° 2, 2007, p. 161–182.
- [RAN 08] RANNOU J.  
Prise en compte d’effets d’échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2008.

- [RAN 09] RANNOU J., GRAVOUIL A., BAIETTO-DUBOURG M. C.  
A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, n° 4, 2009, p. 581–600, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RAN 10] RANNOU J., LIMODIN N., RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., LUDWIG A., BAIETTO-DUBOURG M. C., BUFFIÈRE J. Y., COMBESURE A., HILD F., ROUX S.  
Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, n° 21-22, 2010, p. 1307 - 1325. Multiscale Models and Mathematical Aspects in Solid and Fluid Mechanics.
- [RAV 84] RAVI-CHANDAR K., KNAUSS W. G.  
An experimental investigation into dynamic fracture : III. On steady-state crack propagation and crack branching. *International Journal of Fracture*, vol. 26, n° 2, 1984, p. 141–154, Nijhoff, M. , The Hague/Kluwer Academic Publishers.
- [REC 12] RECHO N.  
Hamiltonian Formalisms Applied to Continuum Mechanics : Potential Use for Fracture Mechanics. ÖCHSNER A., DA SILVA L. F. M., ALTENBACH H., Eds., *Materials with Complex Behaviour II*, vol. 16 de *Advanced Structured Materials*, p. 19–35 Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [RÉT 05a] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, n° 5, 2005, p. 631–659, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RÉT 05b] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., MORESTIN F., COMBESURE A.  
Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral. *International Journal of Fracture*, vol. 132, 2005, p. 65–79, Kluwer Academic Publishers.
- [RÉT 07] RÉTHORÉ J., HILD F., ROUX S.  
Shear-band capturing using a multiscale extended digital image correlation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 49–52, 2007, p. 5016–5030.
- [RÉT 08] RÉTHORÉ J., HILD F., ROUX S.  
Extended digital image correlation with crack shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 73, 2008, p. 248-272.
- [RÉT 09] RÉTHORÉ J., ROUX S., HILD F.  
An extended and integrated digital image correlation technique applied to the analysis of fractured samples. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 18, n° 3–4, 2009, p. 285–306.
- [RÉT 10a] RÉTHORÉ J., ROUX S., HILD F.  
Hybrid analytical and extended finite element method (HAX-FEM) : A new en-

- richment procedure for cracked solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, n° 3, 2010, p. 269–285, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RÉT 10b] RÉTHORÉ J., ROUX S., HILD F.  
Mixed-mode crack propagation using a Hybrid Analytical and eXtended finite element method. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 338, n° 3, 2010, p. 121–126, Elsevier.
- [RÉT 10c] RÉTHORÉ J.  
A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, n° 6, 2010, p. 631–660, John Wiley & Sons, Ltd.
- [RÉT 11] RÉTHORÉ J., ROUX S., HILD F.  
Optimal and noise-robust extraction of Fracture Mechanics parameters from kinematic measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 78, n° 9, 2011, p. 1827–1845.
- [REU 08] REUSKEN A.  
Analysis of an extended pressure finite element space for two-phase incompressible flows. *Computing and Visualization in Science*, vol. 11, n° 4–6, 2008, p. 293–305, Springer-Verlag.
- [RIB 07] RIBEAUCOURT R., BAIETTO-DUBOURG M.-C., GRAVOUIL A.  
A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled X-FEM/LATIN method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 33–34, 2007, p. 3230–3247.
- [RIC 68a] RICE J. R.  
A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, 1968, p. 379–386.
- [RIC 68b] RICE J. R., ROSENGREN G. F.  
Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, n° 1, 1968, p. 1–12.
- [RIC 74] RICE J. R.  
Limitations to small scale Yieldg approximation for crack tip plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 22, 1974, p. 17–26.
- [RIC 08] RICHARD H., SANDER M., FULLAND M., KULLMER G.  
Development of fatigue crack growth in real structures. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, n° 3–4, 2008, p. 331–340. International Conference of Crack Paths.
- [RIT 71] RITCHIE R. O., GARRETT G. G., KNOTT J. P.  
Crack-growth monitoring : Optimisation of the electrical potential technique using an analogue method. *International Journal of Fracture*, vol. 7, n° 4, 1971, p. 462–462, Springer.
- [RIT 73] RITCHIE R. O., KNOTT J. F., RICE J. R.  
On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild

- steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 21, n° 6, 1973, p. 395–410.
- [RIT 88] RITCHIE R.  
Mechanisms of fatigue crack propagation in metals, ceramics and composites : Role of crack tip shielding. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 103, n° 1, 1988, p. 15–28. Workshop on the Mechanics and Physics of Crack Growth : Application to Life Prediction.
- [ROU 06] ROUX S., HILD F.  
Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture*, vol. 140, n° 1–4, 2006, p. 141–157.
- [ROU 08] ROUX S., HILD F., VIOT P., BERNARD D.  
Three-dimensional image correlation from X-ray computed tomography of solid foam. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 39, n° 8, 2008, p. 1253–1265. Full-field Measurements in Composites Testing and Analysis.
- [ROU 09] ROUX S., RÉTHORÉ J., HILD F.  
Digital image correlation and fracture : an advanced technique for estimating stress intensity factors of 2D and 3D cracks. *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 42, n° 214004, 2009.
- [ROU 14] ROUX S., LECLERC H., HILD F.  
Efficient Binary Tomographic Reconstruction. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 49, n° 2, 2014, p. 335–351, Springer US.
- [RYB 77] RYBICKI E. F., KANNINEN M. F.  
A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 9, n° 4, 1977, p. 931–938.
- [SAX 78] SAXENA A., HUDAK JR. S. J.  
Review and extension of compliance information for common crack growth specimens. *International Journal of Fracture*, vol. 14, n° 5, 1978, p. 453–468, Springer.
- [SCH 89] SCHMITT W., KIENZLER R.  
The J-integral concept for elastic-plastic material behavior. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 32, n° 3, 1989, p. 409–418.
- [SCH 02] SCHÖLLMANN M., RICHARD H. A., KULLMER G., FULLAND M.  
A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures. *International Journal of Fracture*, vol. 117, n° 2, 2002, p. 129–141, Kluwer Academic Publishers.
- [SET 96] SETHIAN J. A.  
A fast marching level-set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, n° 93, 1996, p. 1591–1595.
- [SET 99] SETHIAN J. A.  
*Level set methods and fast marching methods*. Cambridge University Press, 1999.

- [SHA 73] SHAH R., KOBAYASHI A.  
Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid. *International Journal of Fracture*, vol. 9, n° 2, 1973, p. 133–146, Springer.
- [SIA 11] SIAVELIS M.  
Modélisation numérique X-FEM de grands glissements avec frottement le long d'un réseau de discontinuités. Thèse de doctorat, École centrale de Nantes, 2011.
- [SIM 10] SIMATOS A.  
Méthode XFEM pour la modélisation de grandes propagations de fissures en déchirure ductile. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.
- [SKO 98] SKORUPA M.  
Load interaction effects during fatigue crack growth under variable amplitude loading—a literature review. Part I : empirical trends. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 21, n° 8, 1998, p. 987–1006, Blackwell Science Ltd.
- [SKO 99] SKORUPA M.  
Load interaction effects during fatigue crack growth under variable amplitude loading—a literature review. Part II : qualitative interpretation. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 22, n° 10, 1999, p. 905–926, Blackwell Science Ltd.
- [STO 01] STOLARSKA M., CHOPP D. L., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, n° 8, 2001, p. 943–960, John Wiley & Sons, Ltd.
- [STR 00] STROUBOULIS T., BABUŠKA I., COPPS K.  
The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181, n° 1–3, 2000, p. 43–69.
- [STR 04] STRIKWERDA J. C.  
*Finite difference schemes and partial differential equations*. Siam, 2nd edition édition, 2004.
- [SUK 00] SUKUMAR N., MOËS N., MORAN B., BELYTSCHKO T.  
Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, n° 11, 2000, p. 1549–1570, John Wiley & Sons, Ltd.
- [SUK 01] SUKUMAR N., CHOPP D. L., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, n° 46, 2001, p. 6183–6200, Elsevier.
- [SUK 03] SUKUMAR N., CHOPP D., MORAN B.  
Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional

- fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 1, 2003, p. 29–48.
- [SUN 05] SUN Y., PANG J. H. L., WONG C. K., SU F.  
Finite element formulation for a digital image correlation method. *Applied Optics*, vol. 44, n° 34, 2005, p. 7357–7363, OSA.
- [SUO 92] SUO X.-Z., COMBESURE A.  
On the application of  $G(\theta)$  method and its comparison with De Lorenzi's approach. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 135, n° 2, 1992, p. 207–224.
- [SUR 82] SURESH S., RITCHIE R.  
A geometric model for fatigue crack closure induced by fracture surface roughness. *Metallurgical Transactions A*, vol. 13, n° 9, 1982, p. 1627–1631, Springer-Verlag.
- [SUR 98] SURESH S.  
*Fatigue of Materials*. Cambridge solid state science, Cambridge University Press, 1998.
- [SUT 83] SUTTON M. A., WOLTERS W. J., PETERS W. H., RANSON W. F., MCNEILL S. R.  
Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and vision computing*, vol. 1, n° 3, 1983, p. 133–139, Elsevier.
- [SUT 99] SUTTON M. A., ZHAO W., MCNEILL S. R., HELM J. D., PIASCIK R. S., RIDDELL W. T.  
Local crack closure measurements : Development of a measurement system using computer vision and a far-field microscope. *ASTM Special Technical Publication*, vol. 1343, 1999, p. 145–156, American Technical Publishers LTD.
- [SUT 00] SUTTON M. A., MCNEILL S. R., HELM J. D., CHAO Y. J.  
Advances in Two-Dimensional and Three-Dimensional Computer Vision. RASTOGI P. K., Ed., *Photomechanics*, vol. 77 de *Topics in Applied Physics*, p. 323–372 Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [SUT 09] SUTTON M. A., ORTEU J. J., SCHREIER H.  
*Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements : Basic Concepts, Theory and Applications*. Springer, 2009.
- [SVE 14] SVETLIZKY I., FINEBERG J.  
Classical shear cracks drive the onset of dry frictional motion. *Nature*, vol. 509, n° 7499, 2014, p. 205–208, Nature Publishing Group.
- [TAD 85] TADA H., PARIS P. C., IRWIN G. R.  
*The stress analysis of cracks handbook, 2nd ed.* ASME Press, 1985.
- [TAN 74] TANAKA K.  
Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 6, n° 3, 1974, p. 493–507.
- [TON 73a] TONG P., PIAN T. H. H.  
On the convergence of the finite element method for problems with singularity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 9, n° 3, 1973, p. 313–321.

- [TON 73b] TONG P., PIAN T. H. H., LASRY S. J.  
A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, n° 3, 1973, p. 297–308, John Wiley & Sons, Ltd.
- [TRO 14] TROLLÉ B.  
Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2014.
- [VEN 00] VENNER C. H., LUBRECHT A. A.  
*Multilevel Methods in Lubrication*. Elsevier Tribology Series, 2000.
- [VEN 06] VENTURA G.  
On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, n° 5, 2006, p. 761–795, John Wiley & Sons, Ltd.
- [VER 88] VERPEAUX P., CHARRAS T., MILLARD A.  
*CASTEM 2000 une approche moderne du calcul des structures*. In *Calcul des structures et intelligence artificielle*. Pluralis, 1988.
- [VER 91] VERPEAUX P., CHARRAS T., MILLARD A.  
CASTEM 2000, guide du développement. Commissariat à l’Energie Atomique, Rapport DMT, 1991.
- [VER 07] VERSTEEG H. K., MALALASEKERA W.  
*An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. Pearson Education, second édition, 2007.
- [WAG 01] WAGNER G. J., MOËS N., LIU W. K., BELYTSCHKO T.  
The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, n° 3, 2001, p. 293–313, Wiley Online Library.
- [WAN 04] WANG X.  
Elastic T-stress solutions for penny-shaped cracks under tension and bending. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, n° 16 - 17, 2004, p. 2283 - 2298.
- [WAN 06] WANG P., YAO Z.  
Fast multipole DBEM analysis of fatigue crack growth. *Computational Mechanics*, vol. 38, n° 3, 2006, p. 223–233, Springer.
- [WES 39] WESTERGAARD H.  
Bearing pressure and crack. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, 1939, p. 49–53.
- [WHE 72] WHEELER O. E.  
Spectrum loading and crack growth. *ASME Transactions, Journal of Basic Engineering*, vol. 94(1), 1972, p. 181–186.
- [WIL 57] WILLIAMS M.  
On the stress distribution at the base of a stationary crack. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, 1957, p. 109–114.

- 
- [XIA 03] XIAO Q. Z., KARIHALOO B. L.  
Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 26, n° 8, 2003, p. 719–729, Blackwell Science Ltd.
- [XIA 06] XIAO Q. Z., KARIHALOO B. L.  
Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, n° 9, 2006, p. 1378–1410, John Wiley & Sons, Ltd.
- [XIA 07] XIAO Q., KARIHALOO B.  
Implementation of hybrid crack element on a general finite element mesh and in combination with XFEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 13–16, 2007, p. 1864–1873.
- [YAU 80] YAU J. F., WANG S. S., CORTEN H. T.  
A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, n° 2, 1980, p. 335–341, American Society of Mechanical Engineers.
- [YOS 11] YOSIBASH Z., SHANNON S., DAUGE M., COSTABEL M.  
Circular edge singularities for the Laplace equation and the elasticity system in 3-D domains. *International Journal of Fracture*, vol. 168, n° 1, 2011, p. 31–52, Springer.
- [ZHO 04] ZHOU F., MOLINARI J. F.  
Dynamic crack propagation with cohesive elements : a methodology to address mesh dependency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, n° 1, 2004, p. 1–24, John Wiley & Sons, Ltd.



NOM : Roux-Langlois  
Prénoms : Clément, Pierre, Matthieu

DATE de SOUTENANCE : 25 Novembre 2014

TITRE : Simulation de fissures courbes en trois dimensions avec extraction directe des facteurs d'intensité des contraintes : en vue de l'identification de lois de propagation de fatigue.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2014-ISAL-0112

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ : La compréhension du comportement de structures jusqu'à leur ruine est nécessaire pour concevoir au mieux ces structures. Selon le matériau et les sollicitations considérées, les mécanismes physiques à l'origine de la rupture changent. Nous nous intéresserons à des matériaux homogènes pour lesquels la ruine passe par le développement de fissures autour desquelles les non-linéarités de comportement n'ont pas un rôle dominant. Ces conditions sont réunies pour les matériaux fragiles pour lesquels la source principale de dissipation est la génération non réversible d'une surface libre, et pour certaines fissures de fatigue. Sur un cycle de chargement, il existe de nombreuses applications pour lesquelles les non-linéarités restent confinées.

La théorie de la mécanique linéaire élastique de la rupture est alors un modèle pertinent pour approcher le comportement de la structure. Sous ces hypothèses, le front de la fissure introduit une singularité. L'étude asymptotique de cette singularité dans des situations plane et anti-plane permet de définir les séries de Williams. La singularité est alors d'ordre un demi et elle est quantifiée par les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) pour chacun des trois modes de sollicitations. En 3D, la fissure peut avoir une géométrie complexe, et aucune expression générale de la singularité n'existe. Dans cette thèse, les séries de Williams en déplacements sont utilisées et régularisées le long du front au sens des éléments finis.

À partir de cette définition 3D des séries asymptotiques en pointe de fissure, une méthode d'extraction directe des FIC (DEK-FEM) est étendue au cas 3D. Le domaine est décomposé en deux domaines, raccordés en moyenne sur l'interface. Au voisinage du front, les champs mécaniques sont approchés par une troncature des champs asymptotiques. La singularité est donc traitée avec des champs adaptés, et les degrés de liberté associés sont directement les coefficients asymptotiques. Parmi ces coefficients asymptotiques, on retrouve les FIC et les  $T$ -stresses. Pour des raisons d'efficacité numérique et pour pouvoir relier l'échelle de la structure à l'échelle de la fissure, cette méthode est intégrée dans un contexte multigrilles localisées X-FEM. Ainsi nous montrons que cette approche permet une bonne évaluation des évolutions des FIC et du  $T$ -stress.

Cette méthode est développée en parallèle d'une stratégie de post-traitement expérimental (mesure de champs de déplacements par corrélation d'images) basée sur les mêmes séries asymptotiques. Les images tridimensionnelles d'un essai de fatigue *in situ* sont obtenues par micro-tomographie à rayons X et reconstruction. La corrélation et la régularisation basées sur les séries asymptotiques permettent d'obtenir la géométrie de la fissure et les FIC pour pouvoir identifier des lois de propagation de fissures 3D en fatigue. L'efficacité de cette méthode en parallèle d'une simulation DEK-FEM est illustrée en 2D.

MOTS-CLÉS : Facteur d'intensité des contraintes, fissure courbe 3D, X-FEM, multigrilles localisées.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
18-20 rue des Sciences  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Pr. Anthony Gravouil, Pr. Marie-Christine Baidetto et Dr. Julien Réthoré.

Président du jury : Patrick Laborde

|                       |                          |                         |
|-----------------------|--------------------------|-------------------------|
| Composition du jury : | Marie-Christine Baidetto | Eugenio Giner-Maravilla |
|                       | Anthony Gravouil         | Patrick Laborde         |
|                       | Nicolas Moës             | Sylvie Pommier          |
|                       | Julien Réthoré           |                         |

Invité : Jean-Charles Passieux