



# Structures sous chargements mobiles : aspects mécaniques et fatigue

Habibou Maitournam

► **To cite this version:**

| Habibou Maitournam. Structures sous chargements mobiles : aspects mécaniques et fatigue.  
| Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paris VI, 2002. <tel-01215797>

**HAL Id: tel-01215797**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01215797>**

Submitted on 16 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**STRUCTURES SOUS CHARGEMENTS MOBILES :  
ASPECTS MÉCANIQUES ET FATIGUE**

Mémoire en vue de l'obtention de  
l'Habilitation à Diriger des Recherches

H. MAITOURNAM

Juillet 2000



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Calcul des structures sous chargements cycliques</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.1.1	Problématique . . . . .	7
1.1.2	Méthodes stationnaires et cycliques directes . . . . .	8
1.2	Méthodes stationnaires . . . . .	9
1.2.1	Historique . . . . .	9
1.2.2	Rappels sur les principes du modèle . . . . .	9
1.2.3	Principe de la méthode stationnaire . . . . .	9
1.2.4	Équations du problème . . . . .	10
1.3	Méthodes stationnaires : cas purement mécanique . . . . .	13
1.3.1	Méthode stationnaire passage par passage . . . . .	13
1.3.2	Méthode stationnaire directe : stationnarité de l'état limite . . . . .	16
1.3.3	Algorithme de résolution . . . . .	18
1.3.4	Exemples d'illustration . . . . .	18
1.4	Méthodes stationnaires appliquées aux structures axisymétriques . . . . .	20
1.4.1	Présentation . . . . .	20
1.4.2	Régime permanent . . . . .	20
1.4.3	cas de chargement en rotation . . . . .	20
1.4.4	Stationnarité de l'état limite . . . . .	22
1.4.5	Algorithme de résolution . . . . .	23
1.4.6	Mise en oeuvre de la résolution . . . . .	23
1.4.7	Application de la méthode . . . . .	24
1.5	Méthode cyclique directe . . . . .	25
1.5.1	Principe de la méthode . . . . .	25
1.5.2	Application de la méthode cyclique directe : cas du chargement de type fretting . . . . .	27
1.6	Bilan et perspectives en méthodes numériques . . . . .	28
1.7	Bibliographie . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Critères de fatigue multiaxiaux</b>	<b>31</b>
2.1	Problématique . . . . .	31
2.2	Fatigue polycyclique anisotherme . . . . .	32
2.2.1	Approche macro-méso et reformulation . . . . .	32
2.2.2	Fatigue anisotherme . . . . .	35
2.3	Bilan . . . . .	36
2.4	Perspectives en fatigue . . . . .	36
2.5	Bibliographie . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Fatigue des rails</b>	<b>39</b>
3.1	Problématique . . . . .	39
3.2	Méthodes numériques pour la détermination de l'état limite et de la fatigue . . . . .	40
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	40
3.2.2	Traitement numérique de la fatigue . . . . .	40
3.2.3	Les critères de fatigue . . . . .	40
3.3	Étude de la tache ovale, du shelling et de l'usure . . . . .	41
3.4	Étude du squat . . . . .	42
3.4.1	Le problème du contact 3-D . . . . .	42
3.4.2	Évaluation de l'état mécanique du rail . . . . .	44
3.4.3	Prédiction du squat et comparaison avec les observations . . . . .	44
3.5	Conclusion et perspectives . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Application au fretting-fatigue</b>	<b>49</b>
4.1	Problématique . . . . .	49
4.2	Étude expérimentale du fretting . . . . .	50
4.2.1	Dispositifs expérimentaux . . . . .	50
4.2.2	Régimes de contact en fretting ; cartes de fretting . . . . .	51
4.2.3	Cartes de fretting . . . . .	52
4.3	Prédiction de l'endommagement en fretting-fatigue . . . . .	55
4.3.1	Méthodologie . . . . .	55
4.3.2	Structure étudiée . . . . .	55
4.3.3	Définition du chargement . . . . .	55
4.3.4	Simulation numérique et prédiction des endommagements . . . . .	61
4.4	Conclusion et perspectives . . . . .	63
4.5	Bibliographie . . . . .	65

# Introduction

Si la *compréhension et la prévision théorique des diverses dégradations* affectant la tenue des structures mécaniques en contact constituent des préoccupations majeures de l'industrie et de la recherche, il n'en reste pas moins que, malgré l'importance des travaux effectués, des verrous demeurent sur la voie qui mène à ces objectifs. Qu'il s'agisse de la fissuration sous ses divers aspects, macroscopiques (par exemple tache ovale et shelling observés dans les rails) ou microscopiques (par exemple squat naissant dans les rails, micropitting dans les engrenages), ou de l'usure sous toutes ses formes, douces ou sévères, contre lesquels il est important de se prémunir, un des enjeux est toujours l'établissement de modèles fiables de prédiction. Or dans la plupart des cas, cette fiabilité ne pourrait être obtenue que par l'utilisation d'une démarche globale prenant en compte la genèse de pièces et leur comportement en service. Et c'est là que résident les obstacles ; il s'agit en somme de retrouver toute l'histoire thermomécanique des pièces par la modélisation de leur procédé de fabrication (générateurs des contraintes résiduelles), le suivi de l'évolution de leur état thermomécanique sous les sollicitations variables de service, et d'appliquer les critères d'apparition et de cumul des dommages.

Ainsi, lorsqu'on considère les problèmes des endommagements induits par les contacts entre solides (écaillage, fretting, fatigue, etc.) l'absence d'une démarche globale prédictive tient essentiellement à deux raisons. La première est le manque de méthodes de calculs rapides et fiables permettant d'évaluer les grandeurs thermomécaniques pertinentes responsables de l'usure ou des autres dégradations au voisinage des contacts mobiles et répétés. En effet, les méthodes de calcul classiques incrémentales y sont mal adaptées à cause du grand nombre de cycles du chargement. La seconde provient des faiblesses des critères destinés à évaluer certains phénomènes d'endommagement sous sollicitations multiaxiales, comme c'est le cas des états de contraintes induits par les contacts entre solides. Devant la profusion des propositions de critères, un premier tri s'avère déjà nécessaire pour éliminer ceux établis dans un contexte particulier et souvent faisant intervenir des paramètres dont les définitions ne sont souvent pas claires, encore moins intrinsèques. Il faudrait aussi éliminer ceux, qui, de formulations complexes, ne sont pas adaptés au calcul de structure essentiellement à cause de coût "computationnel".

La démarche que nous développons vise précisément à surmonter ces deux difficultés dans un certain nombre de cas spécifiques. Les axes principaux de recherche qui, naturellement s'en dégagent, sont :

- la formulation et la mise en œuvre numérique d'algorithmes de calcul spécifiques pour traiter des problèmes importants (faisant essentiellement intervenir des sollicitations mobiles : rail/roue, dudgeonnage, roulements à billes, fretting, etc.) difficilement abordables par les méthodes classiques ;
- la formulation de lois de comportement de matériaux en relation avec les structures et les processus à étudier : divers degrés de finesse ou de sophistication sont à considérer, seuls certains phénomènes sont à prendre en compte ; selon qu'il s'agit de modéliser le soudage (acier), le rochet plastique dans le rail, le modèle de comportement serait bien sûr différent ;
- la recherche de critères d'apparition de défauts ;
- la modélisation de procédés tels que ceux d'assemblage (soudage, dudgeonnage) ou ceux destinés à introduire des contraintes résiduelles (galetage, grenailage, trempe laser, etc.) ; elle s'avère indispensable pour une prédiction quantitative du comportement à la fatigue des structures concernées.

Plus précisément, notre mémoire est organisé comme suit.

## chapitre 1

Dans le chapitre 1, nous abordons les méthodes de calcul des structures sous chargements cycliques. Il s'agit des cas de contacts répétés et mobiles sur de grandes distances (exemple du contact rail/roue) et de ceux de contacts intermittents ou à faibles débattements (exemple du contact essieu-axe/roue). Nous rappelons les travaux que nous avons effectués sur la mise au point de méthodes permettant d'accéder directement et manière fiable à l'état asymptotique de structures thermoélastoplastiques sous chargement cyclique. Ainsi, dans le cas de chargements mobiles et répétitifs, nous avons proposé *l'algorithme de thermoélastoplasticité stationnaire*. Cette procédure numérique permet de déterminer les états thermomécaniques générés par des sollicitations mobiles et répétées. Cette évaluation peut être effectuée cycle par cycle (*Méthode Stationnaire Passage par Passage*) ou directement à l'éventuel état stabilisé atteint généralement au bout d'un grand nombre de cycles (*Méthode Stationnaire Directe*).

Actuellement, nos travaux sur les *algorithmes de calcul des structures thermoélastoplastiques en contacts intermittents ou à faibles débattements* avec comme application immédiate le fretting-fatigue. *La méthode cyclique directe* que nous développons, qui s'apparente à une procédure de recherche de cycle limite à grand incrément de temps, s'appuie d'une part sur la méthode LATIN de Ladevèze et d'autre part sur la propriété de périodicité de l'état limite.

## Chapitre 2

Le deuxième chapitre est consacré à l'évaluation de l'endommagement induit par les contacts mobiles. Dans le cas de la fatigue oligocyclique nous avons utilisé des critères disponibles dans la littérature (essentiellement la loi de Manson-Coffin). En ce qui concerne la fatigue polycyclique, c'est l'approche multi-échelle initiée par Dang Van qui est développée et appliquée. Les critères qui en sont issus être identifiés par des expériences simples à réaliser, d'une autre nature que des essais de roulement. Nous présentons une extension de l'approche macro-méso au cas de la *fatigue polycyclique anisotherme* et montrons qu'elle permet d'obtenir des formulations anisothermes cohérentes des critères de fatigue polycyclique.

## Chapitre 3

Les chemins de fer constituent une source intéressante de problèmes des endommagements de contact : de la fatigue polycyclique s'initiant en profondeur (tache ovale) ou en surface (squat) en passant par la fatigue oligocyclique (shelling) jusqu'à l'usure douce ou sévère, régulière ou ondulatoire, une large palette d'avaries est rencontrée. C'est donc naturellement que ce domaine illustre bien l'intérêt des outils de calcul et des modèles de fatigue que nous avons mis au point : l'utilisation de la démarche couplant calcul stationnaire et critères de fatigue permet une étude systématique de tels problèmes en apportant des réponses quantitatives.

## Chapitre 4

On montre que le problème de fretting (endommagements induits par les contacts à faibles débattements peut être résolu par l'utilisation d'une démarche classique découplée consistant en un calcul de l'état stabilisé mécanique (par la méthode cyclique directe) et une prévision numérique d'endommagement qui est liée directement à la nature de l'état stabilisé. Ainsi la bonne concordance obtenue entre les simulations numériques et les essais dans le cas de la fissuration du fretting indique que celle-ci relève d'un problème de fatigue polycyclique classique.

# Chapitre 1

## Méthodes de calcul des structures sous chargements cycliques

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Problématique

Les zones de contacts entre solides constituent des points singuliers propices à toutes sortes de dégradations (écoulements plastiques, fissurations, usure, formations de couches tribologiquement transformées). Les sollicitations qui s'y exercent sont mal maîtrisées, variables, intermittentes, au mieux cycliques. Et il est clair que leur modélisation est des plus difficiles. Pour cette raison, de nombreuses études ont été entreprises par le passé avec des résultats dont les portées ne sont pas à la hauteur des moyens mis en œuvre. Ainsi, dans le cas de l'usure, malgré le grand nombre des études effectuées, on ne dispose actuellement d'aucune loi d'usure véritablement prédictive et générale ; il en est de même dans de nombreux autres problèmes d'endommagement induit par les contacts entre solides (écaillage, fretting, etc.).

Comme nous l'avons souligné, la raison essentielle à cela est l'absence de méthodes de calcul rapides et fiables permettant d'évaluer les grandeurs thermomécaniques pertinentes responsables de l'usure ou des autres dégradations (fatigue, endommagements, fissurations, etc.) au voisinage des contacts mobiles et répétés. Lorsque la structure reste élastique, on dispose de solutions analytiques (Hertz, Cerruti, Boussinesq, Hills-Nowell-Sackfiels [21], ect.). Les limitations de celles-ci sont connues : pas de prises en compte des géométries réelles (solutions calculées sur des demi-espaces) et des contraintes résiduelles. En effet dans la plupart des cas, les chargements de contact génèrent de la plasticité lors des premiers cycles de leur application, ce qui inévitablement produit des contraintes résiduelles influant la tenue en fatigue.

De même, les méthodes semi-analytiques développées par K.L. Johnson [5–10] ne permettent de prévoir que l'état limite des structures élastoplastiques sous chargements mobiles et répétés sans pouvoir accéder aux champs thermomécaniques locaux (contraintes, déformations plastiques, etc) qui sont à l'origine des dégradations constatées. Quant aux méthodes des "éléments finis" classiques, elles ne permettent pas d'atteindre, dans de tels cas, les états limites en de temps raisonnables de calcul. Ceci est lié au traitement incrémental du chargement qui entraîne une grande lourdeur dans les calculs (comme par exemple ceux de millions de passages de roues sur un rail, lequel est en général plastifié en surface dès les premiers passages).

Il existe les méthodes alternatives. On peut citer la méthode simplifiée de Zarka et al. [16], appliquée au problème du roulement par Keer et al. [17–19] mais aussi par Hassine [19], Mayeur [33]. C'est une méthode efficace dans le cas du modèle élastoplastique à écrouissage cinématique mais dont l'extension

au cas de couplage fort, notamment thermomécanique, reste à faire. Quant à la méthode à grand incrément de temps de Ladevèze [3, 26, 28], une adaptation de la solution proposée dans [28] aux problèmes de contacts mobiles et répétés pourrait être effectuée. Nous utiliserons plus loin la méthode à grand incrément de temps combinée avec la méthode proposée par Akel et Nguyen [1] pour traiter les problèmes des chargements intermittents.

### 1.1.2 Méthodes stationnaires et cycliques directes

Les méthodes que nous proposons permettent d'accéder directement et manière fiable au résultat recherché dans le cas de chargements mobiles et répétitifs. Il s'agit de :

- **Algorithme de thermoélastoplasticité stationnaire**

Cette procédure numérique permet d'évaluer les états thermomécaniques au voisinage des contacts mobiles avec ou sans frottement, en régime d'adhérence totale ou partielle. Par cette façon de faire, il est possible d'évaluer les grandeurs thermomécaniques cycle par cycle (Méthode Stationnaire Passage par Passage) ou directement à l'éventuel état stabilisé atteint généralement au bout d'un grand nombre de cycles (Méthode Stationnaire Directe). De nombreuses applications à des problèmes industriels dont les solutions par les méthodes classiques incrémentales sont quasi-impossibles à obtenir, ont été effectuées. Grâce à ces calculs, en utilisant les critères d'endurance sous sollicitations multiaxiales on a pu étudier de manière systématique des phénomènes tels que le pitting-écaillage des engrenages, le squat et la tache ovale dans les rails, et l'établissement des cartes de fatigue. Les traitements de surface tels que le galestage des vilebrequins ou les procédés d'assemblage tels que le dudgeonnage des tubes de générateurs de vapeur ont pu être optimisés.

- **Méthode cyclique directe**

La méthode cyclique directe permet la détermination directe de l'état asymptotique d'une structure soumise à un chargement périodique (général cette fois-ci, alors qu'il était mobile à vitesse constante dans le cas stationnaire) en évitant un traitement incrémental du trajet de chargement. Elle est fondée sur la méthode à grand incrément de temps à partir d'une proposition de Akel et Nguyen [1]. Nous l'avons pour l'instant, essentiellement utilisée lors des études sur le fretting.

## 1.2 Méthodes stationnaires

### 1.2.1 Historique

La méthode stationnaire a initialement été proposée par Nguyen & Rahimian [34] pour étudier numériquement le *mouvement permanent d'une fissure en milieu élastoplastique*. Elle a ensuite été appliquée à l'étude d'un chargement mobile sur un demi-espace élastoplastique par Dang Van et al. [9]. D'autres développements, théoriques (unicité de la solution) et numériques avec l'utilisation des méthodes SUGP (streamline upwind Petrov Galerkin) pour la résolution du problème thermoviscoplastique, ont été effectués dans ma thèse [1], et dans nos publications qui ont suivi [5, 10, 11, 29]. Avec Akel, Nguyen et Ouakka akel2,ouakka0, nous avons utilisé les techniques de développement en séries de Fourier (voir section 1.4) pour traiter les problèmes tridimensionnels de structures axisymétriques soumises à des chargements mobiles et non axisymétriques (comme c'est le cas pour le dudgeonnage) : à cette occasion la recherche directe du cycle stabilisé, sans la simulation des passages successifs a été élaborée. Ces techniques ont ensuite été appliquées au problème du galetage par Hanus et al. [18]. Parallèlement, en mécanique des roches la méthode stationnaire est utilisée, avec mon encadrement, pour le creusement des tunnels en milieu élasto et visco-plastiques [7, 15] et dans le cadre l'interaction outil/roche lors du processus de coupe des roches (forage) [14]. Avec Bonnet et Lederer [29], nous l'avons couplée avec les équations intégrales dans le but de traiter les problèmes de contact et de couches minces. Rajoutons pour finir que cette méthode est implémentée dans sysweld et Castem2000. Dans ce qui va suivre, je rappelle le principe de la méthode ainsi que quelques unes de mes contributions dans son développement et sa mise en œuvre.

### 1.2.2 Rappels sur les principes du modèle

La méthode stationnaire permet de déterminer l'état thermomécanique d'une structure soumise à un chargement thermique et/ou mécanique mobile après un nombre fini ou un très grand nombre de passages du chargement. Elle s'applique lorsque le chargement est stationnaire au cours du temps dans un repère en translation sur un solide prismatique infini, ou en rotation sur un solide immobile. Les principales hypothèses de la modélisation sont alors :

- hypothèse des petites transformations en plasticité incrémentale ;
- hypothèse du régime permanent par rapport au repère lié au chargement, ce dernier étant supposé se déplacer à vitesse constante ;
- hypothèse de la stationnarité de l'état limite signifiant que la réponse en contrainte et en déformation plastique (en cas de non rochet) est périodique à l'état stabilisé de roulement cyclique.

Nous verrons dans ce qui va suivre les conséquences de ces hypothèses sur les équations du problème considéré.

### 1.2.3 Principe de la méthode stationnaire

Une structure prismatique, constituée d'un matériau élastoplastique, est soumise à un chargement mobile se déplaçant à la vitesse

$$\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x \text{ (Fig. 1.1).}$$

On suppose qu'il y a un régime permanent dans le repère mobile lié au chargement. Ainsi toute dérivée particulaire d'une grandeur matérielle  $\mathbf{B}$ , devient :

$$\dot{\mathbf{B}} = -V\mathbf{B}_{,x} \quad (1.1)$$

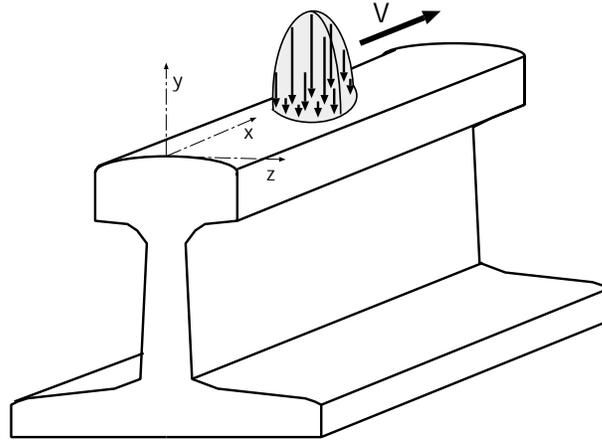


Figure 1.1: Type de problème considéré

## 1.2.4 Équations du problème

Les équations du problème sont :

*conservation de l'énergie*

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho \theta \dot{s} = r + \mathcal{D}_i \quad (1.2)$$

$\mathcal{D}_i$  la source de chaleur due à la dissipation intrinsèque mécanique,  $\rho \theta \dot{s}$  la source de chaleur réversible correspondant au couplage thermomécanique,  $r$  la source de chaleur volumique et  $\mathbf{q}$  le vecteur flux de chaleur ;

*équations de la dynamique*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.3)$$

*loi de comportement*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} : (\boldsymbol{\epsilon}^e - \alpha \theta \mathbf{I}) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{Z} : \boldsymbol{\alpha}_k \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p) \quad (1.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}_k} \end{array} \right. \quad f \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda f = 0 \quad (1.7)$$

*équation de compatibilité*

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + {}^t \mathbf{grad} \mathbf{u}) \quad (1.8)$$

*loi de conduction thermique*

$$\mathbf{q} = -k \mathbf{grad} \theta \quad (1.9)$$

avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\sigma_{ij}n_j = F_i^d \quad \text{sur } \partial V_{f_i}(t) \quad (1.10)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \partial V_{u_i}(t) \quad (1.11)$$

$$\epsilon^p(\mathbf{x}, 0) = \epsilon^p(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

$$\theta = \theta^d \quad \text{sur } \partial V_\theta(t) \quad (1.13)$$

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -c_s \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}] \quad \text{sur } \partial V_q(t) \quad (1.14)$$

$[\mathbf{v}]$  est la discontinuité de la vitesse au niveau du contact,  $c_s$  le coefficient de partage de la chaleur interfaciale générée.

En fait, dans l'équation (1.14), l'équation de discontinuité correspond à l'application du premier principe de la thermodynamique aux corps en contact. Elle est, dans le cas d'une surface de contact ne possédant d'énergie interne propre, rigoureusement donnée par :

$$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}] = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}] \quad (1.15)$$

$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]$  est la chaleur générée à l'interface des deux corps. Sa distribution entre ces derniers dépend de leurs propriétés respectives de conduction. Le second principe assure la positivité de celle-ci [13]. Dans le cas de deux corps similaires,  $c_s$  est bien sûr égal à 0,5. Dans le cas d'une interface plus complexe, une analyse énergétique peut être trouvée dans [37, 40]

### Le problème mécanique

La première idée de la méthode stationnaire consiste à se placer dans le repère lié au chargement (dans lequel le régime est supposé permanent). Toutes les équations précédentes sont alors re-écrites sous les formes suivantes :

-équation de la dynamique

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \rho V^2 \mathbf{u}_{,xx} \quad (1.16)$$

-loi de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.17)$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{Z} : \boldsymbol{\alpha}_k \quad (1.18)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p) \quad (1.19)$$

$$-\boldsymbol{\epsilon}^p_{,x} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad f \leq 0, \quad \Lambda \geq 0, \quad \Lambda f = 0 \quad (1.20)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{k,x} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}_k} \quad f \leq 0, \quad \Lambda \geq 0, \quad \Lambda f = 0 \quad (1.21)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{A}_k) : (\mathbf{s} - \mathbf{A}_k)} - k_e = \sqrt{\frac{1}{2}} \|\mathbf{s} - \mathbf{A}_k\| - k_e \quad (1.22)$$

avec

$$\Lambda = \frac{1}{H} \zeta \left\langle -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L} : \boldsymbol{\epsilon}_{,x} + \alpha \theta_{,x} \text{tr} \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right\rangle \quad (1.23)$$

$$\zeta = 1 \quad \text{si} \quad f = 0 \quad (1.24)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{si} \quad f < 0 \quad (1.25)$$

$\langle \cdot \rangle$  désigne la partie positive, et

$$H = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}_k} : \mathbf{Z} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}_k} \quad (1.26)$$

$\Lambda$  est le multiplicateur plastique, ( $f = 0$ ) définit la frontière du domaine élastique,  $k_e$  est la limite d'élasticité,  $\boldsymbol{\sigma}_0$  la contrainte initiale,  $\boldsymbol{\alpha}_k$  sont les paramètres internes et  $\mathbf{A}_k$  leurs forces associées,  $\mathbf{L}$  le tenseur d'élasticité et  $\mathbf{Z}$  sont donnés.

Dans ces équations, les dérivées spatiales ont remplacé les dérivées temporelles. Leur intégration est effectuée le long de la direction de mouvement, de sorte que numériquement (en utilisant les éléments finis) ni le chargement ni la structure ne sont translatés. Le comportement du matériau peut être quelconque. Dans le cas des rails, il a été considéré comme élastoplastique de type von Mises à écrouissage cinématique linéaire, ou à écrouissage cinématique non-linéaire du type proposé par Bower [4].

La seconde idée est d'utiliser la stationnarité de l'état limite (champ de contrainte périodique, champ de déformation périodique en l'absence de rochet) pour le déterminer directement.

Les deux méthodes de détermination de l'état limite qui en résultent sont :

- **la méthode Stationnaire Passage par Passage** : elle n'utilise pas directement, dans son algorithme de résolution, la condition de stationnarité. Elle permet de calculer la réponse de la structure *passage par passage* soit pour un nombre de cycle donné, soit jusqu'à l'éventuel état stabilisé.
- **la méthode Stationnaire Directe** : elle utilise dans son algorithme de résolution, la condition de stationnarité. Elle permet de calculer directement la réponse stabilisée de la structure sans donner le nombre de cycles nécessaire à l'obtention de celle-ci.

## Le problème thermique

Le couplage thermomécanique revient : (i) dans l'équation de la chaleur aux sources volumiques de chaleur (dissipation intrinsèque  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \mathbf{A}_k : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k$ , chaleur réversible  $\rho \theta \dot{s}$ ) et à la dissipation interfaciale; (ii) dans les équations mécaniques à l'expansion thermique [10]. L'équation thermique s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{div}(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad} \theta) - \rho c V \theta_{,x} = \\ r - V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^p_{,x} + V \mathbf{A}_k : \boldsymbol{\alpha}_{k,x} + V \alpha \theta \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})_{,x} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Les détails de la procédure de résolution du problème thermomécanique peuvent être trouvés dans [10].

## 1.3 Méthodes stationnaires : cas purement mécanique

### 1.3.1 Méthode stationnaire passage par passage

La méthode stationnaire passage par passage permet de calculer la réponse d'une structure prismatique ou axisymétrique soumise à un chargement mobile pour un cycle du chargement. Ainsi, on pourrait suivre cycle par cycle de l'évolution des grandeurs mécaniques jusqu'à l'éventuel état stabilisé. Ceci est effectué par intégration numérique (éléments finis) des équations (1.16 - 1.26) de la section précédente.

Une description détaillée de l'algorithme de résolution est donnée dans [5, 10, 11]. Nous rappelons qu'il permet d'obtenir les grandeurs thermomécaniques aux points géométriques du repère mobile lié au chargement : dans le problème tel qu'il est posé ici, la structure (domaine matériel) est en grand déplacement et petites transformations. La résolution revient à celle d'un problème non-linéaire avec une loi de comportement non-locale. Dans son principe, elle est identique à la construction dans un problème incrémental classique de la solution à un instant  $t + \Delta t$  connaissant la solution à l'instant  $t$  : la différence réside dans le calcul non-local des variables internes. Les principales étapes :

1. état initial de la structure connu ;
2. initialisation des contraintes, des déformations et des déformations plastiques ;
3. **détermination de la solution vérifiant la loi de comportement "stationnaire"** ;
4. recherche de la solution linéaire admissible (équilibre, comportement linéaire  $\sigma - \varepsilon$ , et liaison) ;
5. détermination de l'erreur ([28]) et arrêt éventuel ;
6. retour à 2.

Nous allons expliciter l'intégration implicite de la déformation plastique et des variables internes le long de la ligne de courant (et éventuellement le calcul de la rigidité tangente cohérente) pour un certain nombre de lois de comportement que nous avons utilisées.

#### Matériau à écrouissage cinématique linéaire et isotrope

On note par  $f$  le critère de plasticité (*fonction de charge*). La fonction  $f$  est donnée par :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \bar{\varepsilon}^P) = \|\boldsymbol{\xi}\| - k(\bar{\varepsilon}^P) = \|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\alpha}\| - k(\bar{\varepsilon}^P) \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{s} = \text{dev } \boldsymbol{\sigma} \quad (1.29)$$

$$\bar{\varepsilon}^P = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^P : \boldsymbol{\varepsilon}^P} dt \quad (1.30)$$

En affectant respectivement les indices  $(n)$  et  $(n + 1)$  aux quantités évaluées aux points (de Gauss)  $n$  et  $n + 1$ ,  $n$  en amont de  $n + 1$  sur la même ligne de courant, le calcul de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P$  à partir de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0(n+1)}^P$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{0(n+1)}$  supposés connus, se fait de manière implicite, par projection orthogonale (Nguyen [34, 35]) autrement dit par retour radial (Simo et Taylor [38]). Ce calcul s'effectue de la même manière que l'intégration temporelle avec une différence de signification pour les variables. Ainsi on écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_{(n+1)} &= \boldsymbol{s}_{0(n+1)} + 2\mu(\boldsymbol{e}_{(n+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P) \\ \boldsymbol{\xi}_{(n+1)} &= \boldsymbol{s}_{(n+1)} - C\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P \\ &= \boldsymbol{s}_{0(n+1)} - C\boldsymbol{\varepsilon}_{0(n+1)}^P - (C + 2\mu)\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P + 2\mu\boldsymbol{e}_{(n+1)} - (C + 2\mu)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^P \\ &= \boldsymbol{\xi}^* - (C + 2\mu)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^P \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{e} = \text{dev } \boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P$

La déformation plastique calculée point n+1 en aval du point n est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P + \Lambda \frac{\boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P + \Lambda \hat{\mathbf{n}} \quad (1.31)$$

$\Lambda$  déterminé par la méthode de Newton à partir de l'équation implicite de vérification du critère de charge au point d'arrivée (n+1) :

$$\|\boldsymbol{\xi}^*\| - (2\mu + C)\Lambda - k(\bar{\varepsilon}^P_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda) = 0$$

Dans le cas de l'écoulement cinématique linéaire, on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P + \frac{1}{2\mu + C} \left(1 - \frac{k}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|}\right) \quad (1.32)$$

avec  $\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{s}_{0(n+1)} - C\boldsymbol{\varepsilon}_{0(n+1)}^P + 2\mu\mathbf{e}_{(n+1)} - (2\mu + C)\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P$

En faisant l'analogie avec le cas de l'intégration temporelle, on voit qu'ici  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}$  joue le rôle de l'incrément de déformation  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  entre les instants d'intégration  $t_n$  et  $t_{n+1}$  et  $\mathbf{s}_{0(n+1)} - C\boldsymbol{\varepsilon}_{0(n+1)}^P - (C + 2\mu)\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P$  celui de  $\mathbf{s}(t_n)$ . La rigidité tangente cohérente se déduit alors par :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}} \\ &= \frac{E}{3(1-2\nu)} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\right) - \\ &\quad 4\mu^2 \left( \frac{1}{2\mu + C + k'} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \frac{\Lambda}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}\right) \right) \end{aligned}$$

### Matériau à écoulement cinématique non-linéaire

Nous considérons une loi qui a été proposée par Bower [4] pour pouvoir rendre compte du rochet à taux décroissant observé sur les rails. La fonction  $f$ , critère de plasticité, est donnée par :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}) = \|\boldsymbol{\xi}\| - k(\bar{\varepsilon}^P) = \|\boldsymbol{\sigma} - \text{dev } \mathbf{X}\| - k(\bar{\varepsilon}^P) \quad (1.33)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\mathbf{X}} &= C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P - \lambda\gamma_1(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \\ \dot{\mathbf{Y}} &= \lambda\gamma_2(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \end{cases} \quad (1.34)$$

En affectant respectivement les indices  $(n)$  et  $(n+1)$  aux quantités évaluées aux points (de Gauss) n et n+1, n en amont de n+1 sur la même ligne de courant, le calcul de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P$ ,  $\mathbf{X}_{(n+1)}$ ,  $\mathbf{Y}_{(n+1)}$  à partir de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0(n+1)}^P$ ,  $\mathbf{X}_{0(n+1)}$ ,  $\mathbf{Y}_{0(n+1)}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{0(n+1)}$  supposés connus, se fait de manière implicite, on écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{(n+1)} &= \mathbf{s}_{(n+1)} - \mathbf{X}_{(n+1)} \\ &= \mathbf{s}_{0(n+1)} - (\mathbf{X}_{0(n+1)} + \mathbf{X}_{(n)}) + 2\mu(\mathbf{e}_{(n+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P) - 2\mu\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P - \Delta \mathbf{X} \\ &= \boldsymbol{\xi}^* - 2\mu\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P - \Delta \mathbf{X} \end{aligned}$$

avec  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^P - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^P$  et  $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_{(n+1)} - \mathbf{X}_{(n)}$

Les variables internes calculés au point n+1 en aval du point n sont donnés par :

$$\Delta \mathbf{X} = \frac{1}{\beta(\Lambda)} [(1 + \Lambda\gamma_2)\Lambda C \hat{\mathbf{n}} - (\Lambda\gamma_1 + 2\Lambda^2\gamma_1\gamma_2)(\mathbf{X}_{t(n)} - \mathbf{Y}_{t(n)})] \quad (1.35)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \frac{1}{\beta(\Lambda)} [(1 + \Lambda\gamma_2)\Lambda C \hat{\mathbf{n}} - (\Lambda\gamma_1 + 2\Lambda^2\gamma_1\gamma_2)(\mathbf{Y}_{t(n)} - \mathbf{Y}_{t(n)})] \quad (1.36)$$

avec  $\beta(\Lambda) = 1 + \Lambda\gamma_1 + \Lambda\gamma_2 + 2\Lambda^2\gamma_1\gamma_2$  et  $\mathbf{X}_{t(n)} - \mathbf{Y}_{t(n)} = \mathbf{X}_{(n)} - \mathbf{Y}_{(n)} + \mathbf{X}_{(n+1)} - \mathbf{Y}_{(n+1)}$

$\Lambda$  déterminé par la méthode de Newton à partir de l'équation implicite de vérification du critère de charge au point d'arrivée (n+1) :

$$\| \boldsymbol{\xi}^* - (2\mu + \frac{1 + \Lambda\gamma_2}{\beta(\Lambda)}C)\Lambda \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{\beta(\Lambda)}\Lambda\gamma_1(\mathbf{X}_{t(n)} - \mathbf{Y}_{t(n)}) \| - k = 0$$

La déformation plastique est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p + \Lambda \frac{\boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{\beta(\Lambda)}\Lambda\gamma_1(\mathbf{X}_{t(n)} - \mathbf{Y}_{t(n)})}{\| \boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{\beta(\Lambda)}\Lambda\gamma_1(\mathbf{X}_{t(n)} - \mathbf{Y}_{t(n)}) \|} \quad (1.37)$$

Dans le cas où  $\gamma_2$  est nul, on obtient :

$$\beta(\Lambda) = 1 + \Lambda\gamma_1 \quad (1.38)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda\gamma_1} [C \hat{\mathbf{n}} - \gamma_1(\mathbf{X}_{t(n)} - \mathbf{Y}_{t(n)})] \quad (1.39)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p + \frac{1}{2\mu + C} (1 - \frac{k}{\| \boldsymbol{\xi}^* \|}) \quad (1.40)$$

avec  $\Lambda$  déterminé par :

$$\| \boldsymbol{\xi}^* - (2\mu + \frac{C}{1 + \Lambda\gamma_1})\Lambda \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{1 + \Lambda\gamma_1}\Lambda\gamma_1\mathbf{X}_{t(n)} \| - k = 0$$

$$\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{s}_{0(n+1)} - (\mathbf{X}_{0(n+1)} + \mathbf{X}_{(n)}) + 2\mu(\mathbf{e}_{(n+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p)$$

### Modèle associé de Cam-Clay

C'est un modèle [5, 14] destiné à rendre compte du comportement des argiles consolidées ou surconsolidées, fondé sur le concept de l'état critique. On considère ici un modèle élastoplastique isotrope. Le critère est une ellipse paramétrée par  $P_{cr}$  qui s'est :

$$F(p, q, \varepsilon_v^p) = p(p - P_{cr}) + (\frac{q}{M})^2 = 0 \quad (1.41)$$

$$P_{cr} = P_0 \exp(\beta \varepsilon_v^p) \quad (1.42)$$

$$(1.43)$$

avec  $q = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev } \boldsymbol{\sigma} : \text{dev } \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $p = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\varepsilon_v^p = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^p$ ,  $M$  est la pente de la droite caractérisant l'état critique initial,  $P_0$  est la pression effective de consolidation,  $\beta$  paramètre du matériau.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1}{3}(2p - P_{cr})\lambda \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2q}{M^2} \lambda \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_v^p \mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p \end{aligned} \quad (1.44)$$

En affectant respectivement les indices  $(n)$  et  $(n + 1)$  aux quantités évaluées aux points (de Gauss)  $n$  et  $n+1$ ,  $n$  en amont de  $n+1$  sur la même ligne de courant, le calcul de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^p$ , à partir de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^p$  supposées connus, se fait de manière implicite, par retour radial on écrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_{(n+1)} &= \boldsymbol{s}_{0(n+1)} + 2\mu(\boldsymbol{e}_{(n+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{d(n+1)}^p) \\
&= \boldsymbol{s}_{0(n+1)} + 2\mu(\boldsymbol{e}_{(n+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{d(n)}^p) - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_d^p \\
&= \boldsymbol{s}^* - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_d^p \\
p_{(n+1)} &= p_{0(n+1)} + K(\varepsilon_{v(n+1)} - \varepsilon_{v(n)}^p) - K\Delta\varepsilon_v^p \\
&= p^* - K\Delta\varepsilon_v^p \\
&= p^* - \Lambda K(2p_{(n+1)} - P_{cr(n+1)}) \\
&= \frac{p^* + \Lambda K P_{cr(n+1)}}{1 + 2\Lambda K} \\
P_{cr(n+1)} &= P_{cr(n)} \exp(\beta\Delta\varepsilon_v^p) \\
&= P_{cr(n)} \exp(\beta\Lambda(2p_{(n+1)} - P_{cr(n+1)})) \\
&= P_{cr(n)} \exp\left\{\beta\Lambda \frac{2p^* - P_{cr(n+1)}}{1 + 2\Lambda K}\right\}
\end{aligned}$$

$\Lambda$  est déterminé par la méthode de Newton à partir de l'équation implicite de vérification du critère de charge au point d'arrivée  $(n+1)$  :

$$\frac{3}{2}(\|\boldsymbol{s}^*\| - 2\mu\Lambda)^2 + M^2(p^* - K\Delta\varepsilon_v^p)(p^* - K\Delta\varepsilon_v^p - P_{cr}) = 0$$

soit les deux équations

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}(\|\boldsymbol{s}^*\| - 2\mu\Lambda)^2 + M^2(p^* - 2Kp_{(n+1)} + KP_{cr(n+1)})(p^* - 2Kp_{(n+1)} + (K+1)P_{cr(n+1)}) &= 0 \\
P_{cr(n)} \exp\left\{\beta\Lambda \frac{2p^* - P_{cr(n+1)}}{1 + 2\Lambda K}\right\} - P_{cr(n+1)} &= 0
\end{aligned}$$

permettant de déterminer  $\Lambda$  et  $P_{cr(n+1)}$  par une méthode de Newton.

La déformation plastique est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{d(n+1)}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_{d(n)}^p + \Lambda \frac{\boldsymbol{s}^*}{\|\boldsymbol{s}^*\|} \\
\varepsilon_{v(n+1)}^p &= \varepsilon_{v(n)}^p + \Lambda \frac{2p^* - 1P_{cr(n+1)}}{1 + 2\Lambda K}
\end{aligned}$$

### 1.3.2 Méthode stationnaire directe : stationnarité de l'état limite

#### Stationnarité de l'état limite

Les matériaux considérés sont à comportement élastoplastique standard. Il est connu (Halphen [16, 17], Ladevèze et Rougée [27]) que des structures constituées de tels matériaux et soumises à un chargement périodique ont une réponse asymptotique périodique en contrainte ; de plus la solution en contraintes est unique pour des conditions initiales données.

L'état asymptotique (lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini), caractérisé par l'évolution de la déformation inélastique et de l'écroutissage peut être :

- une **adaptation** : la structure peut subir (ou non) des déformations plastiques pendant les premiers cycles, mais sa réponse asymptotique est élastique. Autrement dit, il y a adaptation lorsque *l'énergie totale dissipée  $\bar{D}$  reste bornée*. Cette condition se traduit par :

$$\bar{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_V \mathcal{D}_i dv dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P(M, t) - \mathbf{A}_k : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k) dv dt \quad \text{est finie} \quad (1.45)$$

En tout point  $M$ , pour  $t$  suffisamment grand, on a alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\epsilon}^P(M, t) - \boldsymbol{\epsilon}_\infty^P(M)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k(M, t) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{k\infty}(M)\| = 0 \quad (1.46)$$

c'est-à-dire qu'en tout point la déformation permanente et l'écroutissage tendent vers des valeurs fixes quand  $t$  tend vers l'infini.

La fatigue qui risque de survenir est donc à grand nombre de cycles (polycyclique).

- une **accommodation** : la réponse limite est une boucle fermée de déformation plastique. En d'autres termes, la déformation plastique évolue pendant le cycle, mais à la fin du cycle, elle retrouve sa valeur initiale. En tout point  $M$ , pour  $t$  suffisamment grand, on a alors :

$$\int_{\text{cycle}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P(M, t) dt = \int_{\text{cycle}} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k(M, t) dt = 0 \quad (1.47)$$

La fatigue qui surviendra éventuellement sera à faible nombre de cycles (oligocyclique).

- un **rochet** (en parfaite plasticité) : la déformation plastique s'accumule cycle après cycle; la ruine de la structure survient alors très vite.

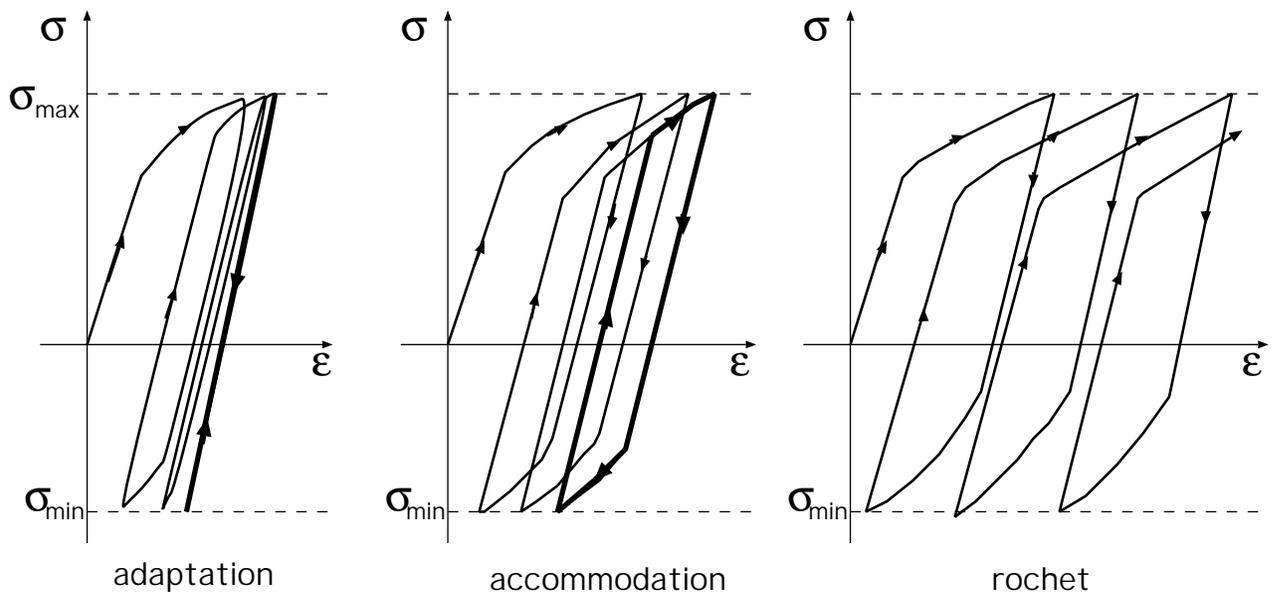


Figure 1.2: États limites sous chargement cyclique

L'état limite adapté ou accommodé est ainsi caractérisé par la tendance de la déformation plastique et des variables internes à devenir périodiques. Numériquement, nous rechercherons directement une solution possédant cette propriété, en partant d'un état initial connu. Ainsi, les solutions recherchées par notre algorithme de résolution vérifient la relation (1.47).

Ceci nous fournit des équations supplémentaires qui sont satisfaites lorsque l'état stabilisé est atteint.

On voit alors la différence entre cette méthode et un algorithme de plasticité incrémental classique; elle réside d'une part dans le calcul de la déformation plastique qui se fait ici le long d'une ligne de courant, et d'autre part dans l'existence d'un test de stationnarité de la réponse limite en déformation plastique. Les deux méthodes de détermination de l'état limite qui en résultent sont :

- **la méthode Stationnaire Passage par Passage** : elle n'utilise pas directement, dans son algorithme de résolution, la condition de stationnarité. Elle permet de calculer la réponse de la structure *passage par passage* soit pour un nombre de cycle donné, soit jusqu'à l'éventuel état stabilisé.
- **la méthode Stationnaire Directe** : elle utilise dans son algorithme de résolution, la condition de stationnarité. Elle permet de calculer directement la réponse stabilisée de la structure sans donner le nombre de cycles nécessaire à l'obtention de celle-ci.

### 1.3.3 Algorithme de résolution

Une description détaillée de l'algorithme de résolution est donnée dans [5, 10, 11]. Nous en rappelons les principales étapes :

1. initialisation des contraintes, des déformations et des déformations plastiques;
2. calcul des forces plastiques
3. calcul de la solution élastique avec un champ de déformation plastique initial;
4. vérification de l'admissibilité plastique (critère plastique) et arrêt éventuel si 4. et 6. sont vérifiés.
5. **détermination de la "déformation plastique stationnaire"** par projection sur le convexe d'élasticité;
6. **vérification de la stationnarité de l'état limite**; et retour à 2.

### 1.3.4 Exemples d'illustration

Dans le cas bidimensionnel, la méthode stationnaire a fait l'objet de nombreuses applications aussi bien en mécanique, qu'en thermomécanique couplée. Nous présentons ici quelques calculs tridimensionnels effectués sur des rails, en vue d'obtenir numériquement l'état stabilisé (adaptation, accommodation ou rochet). La structure considérée est un rail de profil UIC 60 montré sur la figure 1.3. Le chargement est une pression hertzienne (zone de contact circulaire de rayon  $a$ , pression hertzienne maximum  $P_0$ ) effectuant des passages répétés sur le rail. Les effets d'inertie sont négligés. Le matériau est élastoplastique à écrouissage cinématique non-linéaire, avec les caractéristiques suivantes :  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $k_e = 237$  MPa,  $C = 20$  GPa.

La figure 1.4 représente les déformations plastiques équivalentes obtenues lors du premier passage de la charge ( $P_0/k_e = 6.7$ ,  $a = 10$  mm et  $2a$  est la longueur de la zone raffinée). La figure Fig.1.5 représente la même quantité obtenue à l'état stabilisé. Comme on peut le voir cet état stabilisé est une accommodation : les déformations plastiques en amont et en aval sont les mêmes alors qu'elles varient sous le chargement.

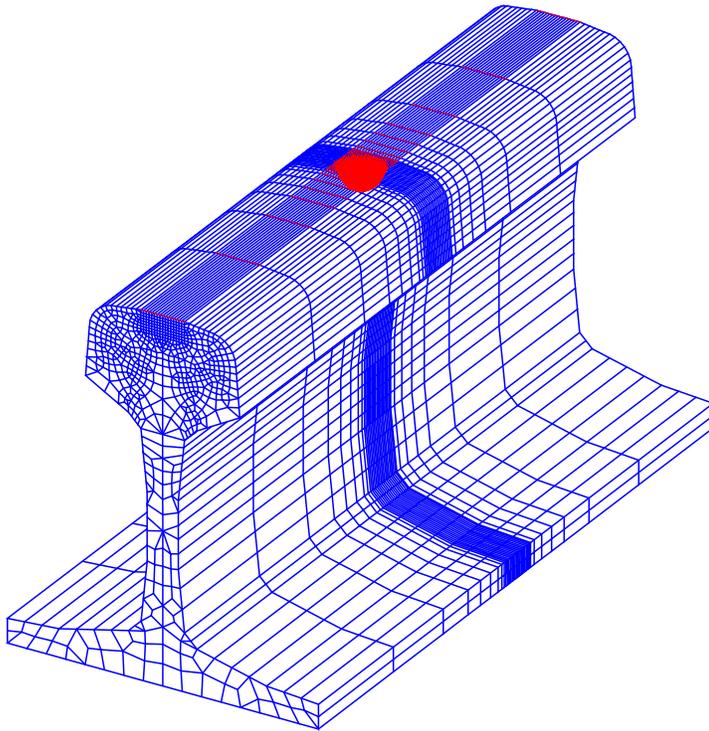


Figure 1.3: Un exemple de maillage de rail soumis à une distribution mobile de pression hertzienne

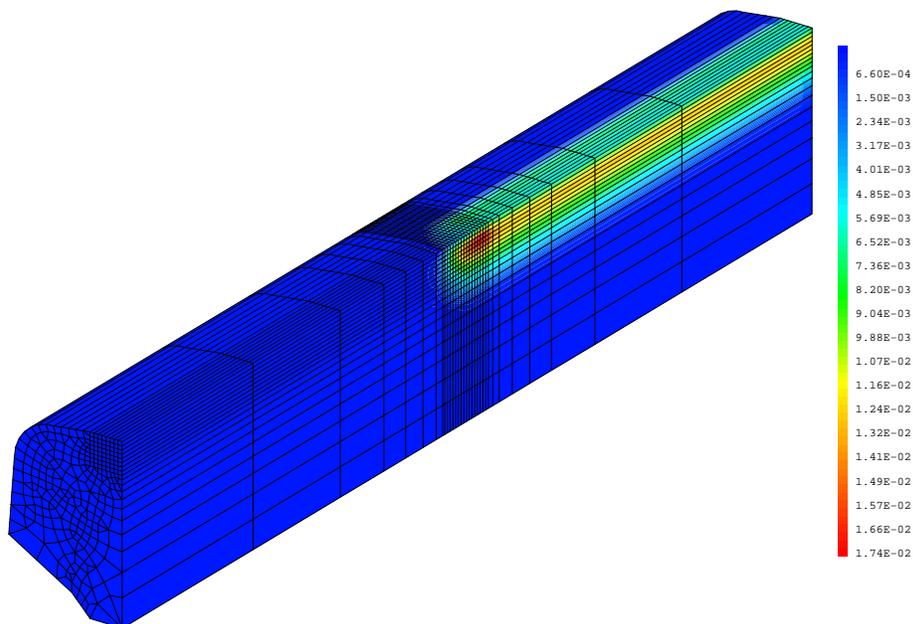


Figure 1.4: Isovaleurs de déformation plastique équivalente lors du premier passage d'une distribution de pression hémisphérique avec  $a = 10\text{mm}$ ,  $P_0/k_e=6.7$  et  $\mu=0$ .

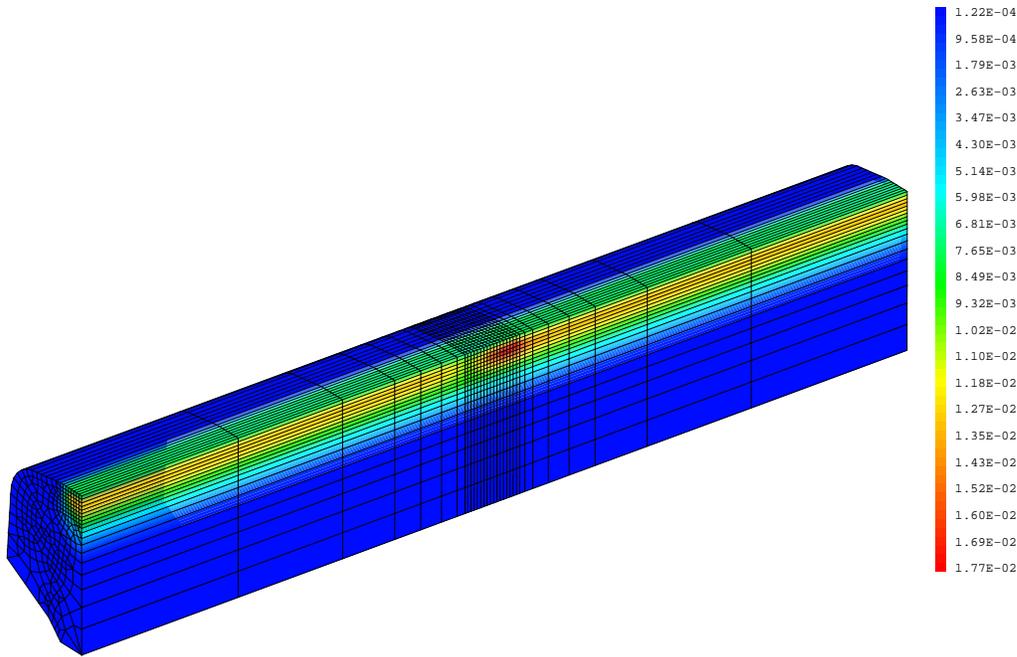


Figure 1.5: Isovaleurs de déformation plastique équivalente à l'état stabilisé lors du passage répété d'une distribution de pression hémisphérique avec  $a = 10\text{mm}$ ,  $P_0/k_e=6.7$  et  $\mu=0$ .

## 1.4 Méthodes stationnaires appliquées aux structures axisymétriques

### 1.4.1 Présentation

Dans cette partie, on s'intéresse aux structures élastoplastiques de révolution soumises à des chargements cycliques en rotation. L'objectif recherché est la détermination directe de l'état stabilisé obtenu après un grand nombre de passages du chargement. Pour cela, on utilise la méthode stationnaire combinée avec un développement en séries de Fourier en espace, selon la direction circonférentielle (Akel, Maitournam et Nguyen [2], Ouakka [36]). Nous ne présentons que les idées de base de la modélisation.

### 1.4.2 Régime permanent

### 1.4.3 cas de chargement en rotation

On se place ici dans le cas d'un chargement en rotation à vitesse constante, par rapport à l'axe de la pièce à vitesse constante. L'hypothèse du régime permanent dans le repère lié au chargement signifie qu'en tout point géométrique toute grandeur physique est indépendante du temps. La dérivée matérielle d'une grandeur physique  $G$  devient  $\dot{G} = -\omega.G_{,\theta}$ . Dans la formulation mathématique du problème, seule la loi de comportement élastoplastique fait intervenir une dérivée temporelle, car les effets d'inertie sont négligés. Nous allons rappeler dans ce qui suit comment elle va être réécrite et intégrée.

Le comportement mécanique est supposé élastoplastique de Mises à écrouissage cinématique linéaire. Il s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (1.48)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec} \quad f \leq 0, \quad \lambda \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda f = 0 \quad (1.49)$$

et

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^p) = \| dev \boldsymbol{\sigma} - c \boldsymbol{\epsilon}^p \| - \sqrt{2} \sigma_y \quad (1.50)$$

où

$$(dev \boldsymbol{\sigma})_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.51)$$

$$\| dev \boldsymbol{\sigma} - c \boldsymbol{\epsilon}^p \| = \sqrt{(dev \boldsymbol{\sigma} - c \boldsymbol{\epsilon}^p) : (dev \boldsymbol{\sigma} - c \boldsymbol{\epsilon}^p)} \quad (1.52)$$

$c = 2E_t E_t / 3(E - E_t)$  = module d'écrouissage ( $E_t$  module tangent)

$\sigma_y$  = limite d'élasticité en cisaillement

$\mathbf{L}$  = tenseur d'élasticité

$\lambda$  = multiplicateur plastique donné par :

$$\lambda = \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + c \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (1.53)$$

L'hypothèse de régime permanent permet d'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = -\omega \boldsymbol{\epsilon}_{,\theta}^p \quad ; \quad \lambda = -\omega \Lambda \quad (1.54)$$

d'où

$$\boldsymbol{\epsilon}_{,\theta}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(r, z, \theta) \quad (1.55)$$

La déformation plastique en un point de coordonnées  $(r, z, \theta)$  est donnée en fonction de celle d'une origine arbitraire  $(r, z, \theta_0)$  et des points situés en amont par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon}^p(r, z, \theta) = \boldsymbol{\epsilon}^p(r, z, \theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} \Lambda(r, z, \theta) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(r, z, \theta) d\theta \quad (1.56)$$

Ainsi le calcul de la déformation plastique se fera le long des lignes de courant qui sont des cercles centrés sur l'axe de révolution de la pièce.

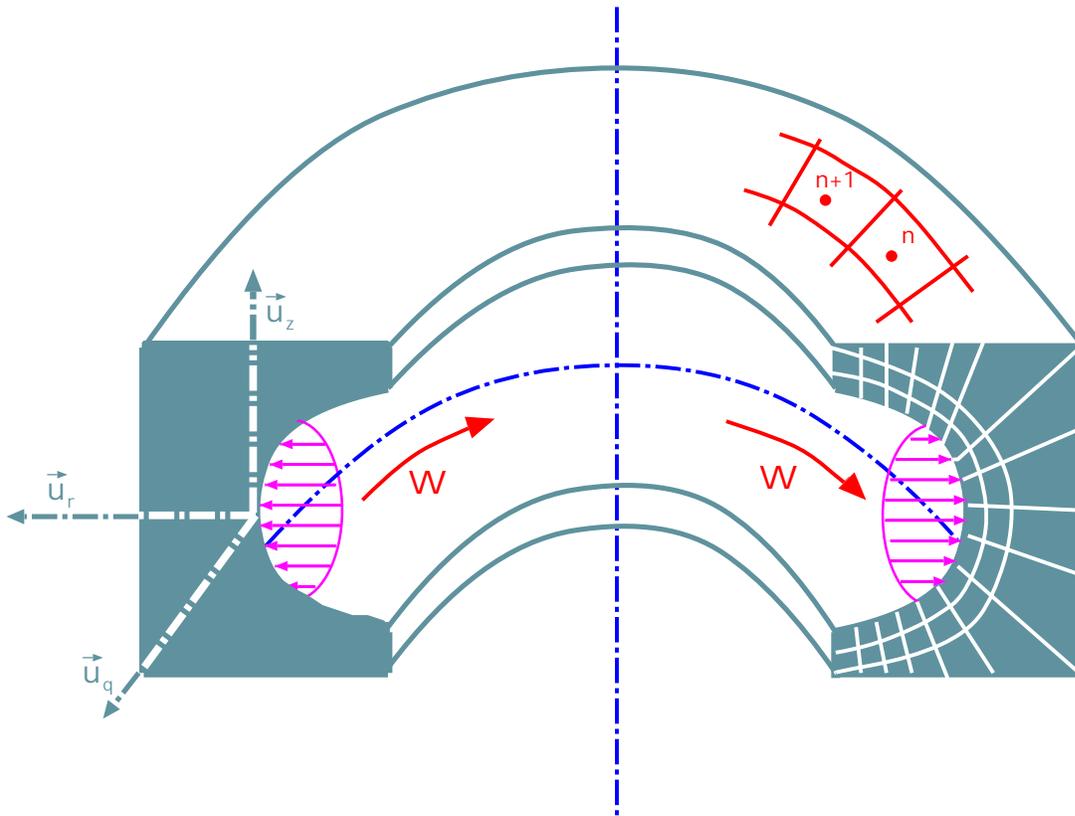


Figure 1.6: Schéma de principe de l'étude :

- structure axisymétrique et chargement non nécessairement axisymétrique
- repère mobile lié au chargement
- maillage "éléments finis" bidimensionnel
- intégration circulaire des déformations plastiques (points n et n+1, numérotés dans le sens du mouvement du solide)

#### 1.4.4 Stationnarité de l'état limite

Nous rappelons que le comportement asymptotique d'une structure élastoplastique soumise à un chargement cyclique peut être :

- adapté : la réponse limite est élastique, mais le matériau a pu se déformer plastiquement lors des premiers cycles;
- accommodé : la réponse en déformation plastique est périodique;
- rochet : accumulation progressive de déformation plastique entraînant la ruine de la structure.

Dans le cas d'un matériau à écrouissage strictement positif, l'état stabilisé est soit une adaptation, soit une accommodation. La périodicité de la réponse en déformation plastique s'écrit, dans le cas d'un chargement en rotation, sous la forme :  $\epsilon^p(r, z, \theta_o) = \epsilon^p(r, z, \theta_o + 2\pi)$  pour tout couple  $(r, z)$ .

Ceci nous fournit une équation supplémentaire qui est satisfaite lorsque l'état stabilisé de roulement est atteint.

### 1.4.5 Algorithme de résolution

Une description détaillée de l'algorithme de résolution est donnée dans 5, 10, 11. Nous en rappelons les principales étapes :

1. initialisation des contraintes, des déformations et des déformations plastiques;
2. calcul des forces plastiques
3. calcul de la solution élastique avec un champ de déformation plastique initial;
4. vérification de l'admissibilité plastique (critère plastique) et arrêt éventuel si 4. et 6. sont vérifiés.
5. **détermination de la "déformation plastique stationnaire"** par projection sur le convexe d'élasticité;
6. **vérification de la stationnarité de l'état limite;** et retour à 2.

### 1.4.6 Mise en oeuvre de la résolution

#### Solution élastique

La méthode de résolution utilisée permet de ramener la résolution du problème élastique tridimensionnel axisymétrique en une succession de problèmes bidimensionnels en combinant :

- un développement en séries de Fourier dans la direction circonférentielle : la solution globale  $\mathbf{u}(r, z, \theta)$  s'exprimant alors sous la forme d'une somme sur les harmoniques de solutions bidimensionnelles et par :

$$\mathbf{u}(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^L \mathbf{u}_n^c(r, z) \cos n\theta + \mathbf{u}_n^s(r, z) \sin n\theta \quad (1.57)$$

- une approche type "éléments finis" pour déterminer la "composante cosinus"  $\mathbf{u}_n^c(r, z)$  et la "composante sinus"  $\mathbf{u}_n^s(r, z)$  de chaque harmonique; le calcul est donc effectué en dimension deux, sur une section méridienne, à  $\theta_0$  par exemple;
- une recombinaison des déplacements par harmonique pour obtenir le déplacement total.

#### Calcul plastique

A partir du déplacement total sont calculées les contraintes et les déformations utilisées pour réaliser le test de plasticité et le calcul de la déformation plastique (projection plastique). Sur une ligne de courant, la déformation plastique est construite à l'abscisse  $\theta + d\theta$  (élément n+1, Fig. 1.6) à partir de la déformation plastique en  $\theta$  (élément n, Fig. 1.6) en procédant de la manière suivante :

soit

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{L}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p) + \boldsymbol{\sigma}^I \quad (1.58)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^I$  désigne un champ de contrainte initial,

- si  $f(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) < 0$  l'élément n+1 n'est pas en cours de plastification, alors :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p \quad (1.59)$$

- si  $f(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) \geq 0$  alors :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Lambda_{n+1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (1.60)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (1.61)$$

A ce niveau, la décomposition en séries de Fourier n'intervient pas.

En revanche, les déformations plastiques servent à calculer les "forces plastiques" décomposées en séries de Fourier pour effectuer le calcul élastique avec déformations initiales. Rappelons que dans la formulation globale servant à la résolution par "éléments finis", les forces plastiques sont données par :

$$2\mu \sum_{\text{éléments}} \left\{ \int_{\text{élément}} [B] \cdot [\epsilon^p] r dr dz d\theta \right\} \quad (1.62)$$

où [B] désigne la matrice reliant le vecteur déformation au vecteur des déplacements des nœuds de la maille considérée. En particulierisant cette expression au cas qui nous intéresse, on a :

$$\int_{\text{élément}} [B] \cdot [\epsilon^p] r dr dz d\theta = \int_{\text{élément}2D} \left\{ \int_0^{2\pi} [B] \cdot [\epsilon^p] d\theta \right\} r dr dz \quad (1.63)$$

La déformation plastique étant connue aux points de discrétisation circonférentielle,<sup>1</sup> son intégration entre 0 et  $2\pi$  se fait par la formule des rectangles.

Ce vecteur "force plastique" est ensuite décomposé numériquement en séries de Fourier.

### 1.4.7 Application de la méthode

Cette méthode a été utilisée pour traiter les problèmes suivants.

- Le dudgeonnage des tubes de générateurs de vapeurs dans les cuves de réacteur nucléaire. Il s'agit du problème de l'assemblage de tubes de générateurs de vapeur et d'une plaque. Il s'effectue à l'aide de quatre galets tournant à l'intérieur du tube en appliquant des pressions qui font qu'après retrait des galets le tube reste collé à la plaque. Seule la méthode stationnaire (et non l'application d'une pression axisymétrique à l'intérieur du tube) permet de retrouver les contraintes mesurées.
- Les essais de roulement galet cylindrique sur galet cylindrique. La méthode stationnaire permet de déterminer directement le cycle stabilisé de contrainte et de déformation plastique.
- Les essais de roulement de billes sur un plan (butée SNR).
- Le creusement stationnaire des tunnels dans des massifs (visco)plastiques. En se plaçant dans le repère du front, on évite l'utilisation des méthodes d'activation/désactivation des éléments.

---

1. Rappelons que la résolution d'un problème purement élastique par cette méthode ne demande pas de discrétisation circonférentielle, les relations déplacements-déformations-contraintes étant linéaires. En revanche, celle-ci est indispensable en présence de non-linéarité plastique. Le nombre de points de discrétisation doit alors être supérieur à deux fois le nombre d'harmoniques.

## 1.5 Méthode cyclique directe

Dans la plupart des études de fatigue (à grand ou à faible nombre de cycles) la prévision numérique des endommagements est découplée du calcul des grandeurs mécaniques telles que les contraintes, les déformations et les déformations plastiques. Elle vient en seconde étape, comme "post-traitement" des résultats du calcul des structures. Dans de tels cas, seul l'état stabilisé mécanique est important ; l'évolution vers cet état présente peu d'intérêt : des méthodes alternatives évitant la démarche incrémentale avec intégration le long du trajet de chargement sont nécessaires. La méthode simplifiée développée par Zarka et al. [16] est en une. Elle permet de calculer directement le cycle limite d'une structure sous chargements cycliques à partir de la connaissance de la réponse purement élastique et des domaines d'élasticité. Signalons aussi que la méthode à grand incrément de temps [Ladevèze, 28], grâce à une formulation à deux échelles de temps, permet de décrire aussi bien l'évolution "rapide" sur un cycle que celle "lente" d'un cycle à un autre.

L'approche que nous proposons, la méthode cyclique directe, a été initiée par Akel et Nguyen [1]. Elle permet la détermination directe de l'état asymptotique d'une structure soumise à un chargement périodique (général cette fois-ci, alors qu'il était mobile à vitesse constante dans le cas stationnaire) en évitant un traitement incrémental du trajet de chargement. Dans cette présentation, on se limitera au cas du matériau élastoplastique standard. Le chargement appliqué comprend, des efforts  $\mathbf{f}^d$  et des déplacements  $\mathbf{u}^d(t)$  imposés sur des parties complémentaires du contour de la structure, qui sont périodiques en temps, de période  $T$ .

### 1.5.1 Principe de la méthode

Nous recherchons directement un état mécanique stabilisé de la structure, en re-visitant la démarche initiée par Akel et Nguyen [1]. Dans ce but, nous utilisons les deux techniques suivantes : (i) méthode à grand incrément de temps développée par Ladevèze et al. [3, 26], qui, à la différence des schémas classiques "pas-à-pas", utilise un unique "grand" incrément ; ici l'incrément de temps est la période temporelle  $T$  ; (ii) recherche des solutions dans l'espace des réponses  $T$ -périodiques en contraintes et en déformations inélastiques [1, 22].

Dans la méthode incrémentale, l'intervalle de temps  $[0, T]$  est discrétisé en  $n$  sous-intervalles  $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Pour chaque incrément de chargement  $(\Delta \mathbf{f}^d, \Delta \mathbf{u}^d)$ , on évalue les quantités incrémentales  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  de façon à satisfaire les conditions d'admissibilité statiques, plastiques et cinématiques. Le trajet de chargement est suivi incrémentalement, cycle par cycle jusqu'à l'obtention éventuelle de la réponse limite.

La méthode cyclique directe que nous proposons, est aussi itérative. Mais elle consiste précisément

- (i) *d'abord, à déterminer pour tout le cycle, une réponse statiquement et cinématiquement admissible ; dans [22], nous la déterminons en des instants particuliers  $t_i$  du cycle, par la résolution de problèmes linéaires à déformations inélastiques données ; Ainsi, à chaque itération  $j$ , pour tout instant  $t_i$ , nous déterminons le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_i^{jS}$ , qui satisfait les équations d'équilibre avec le chargement  $(\mathbf{f}^d(t_i))$  et le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^j$ , compatible avec les déplacements imposés  $\mathbf{u}^d(t_i)$  à l'instant  $t_i$  ; Il s'agit donc de résoudre les équations d'équilibre en déplacement ; En fait, une technique meilleure est de décomposer la réponse sur une base choisie de fonctions temporelles, la décomposition en séries de Fourier est très bien adaptée ;*
- (ii) *dans un second temps, à déterminer pour tout le cycle, la réponse plastiquement admissible (le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{jP}$ , la déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^{p_j}$ , les paramètres internes  $\alpha_{k(i+1)}^j$ ) ; à chaque instant, la déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^{p_j}$  est obtenues en projetant l'incrément de déformation*

$\varepsilon_{i+1}^j - \varepsilon_i^j$  sur le domaine élastique défini par l'état initial (supposé connu)  $(\sigma_i^{jP}, \varepsilon_i^{p_j}, \alpha_{k_i}^j)$  à l'instant  $t_i$ ;  $\sigma_{i+1}^{jP}$  alors calculé à partir de la loi de comportement écrite sous la forme incrémentale.

- (iii) L'état stabilisé est atteint quand la déformation plastique  $\varepsilon^{p_j}$  et les paramètres internes  $(\alpha_k^j)$  sont périodiques i.e. leurs valeurs en début en début de cycle sont égales à celles en fin de cycle ( $\varepsilon_n^{p_j}$  et  $\alpha_{k_n}^j$ ) et que l'écart entre les champs statiquement admissibles et plastiquement admissibles est acceptable ; sinon, on passe à l'itération suivante  $j + 1$  en initialisant  $(\varepsilon_1^{p_{j+1}}, \alpha_{k_1}^{j+1})$  à  $(\varepsilon_n^{p_j}, \alpha_{k_n}^{j+1})$ ; la procédure est répétée jusqu'à obtention d'une adaptation ou d'une accommodation. La non convergence de l'algorithme est une indication de rochet plastique.

L'algorithme de la méthode cyclique se présente comme suit :

## PRINCIPE

Recherche de solutions **périodiques** définies

sur  $W \times [t_s, t_s + T]$

par un processus itératif comprenant :

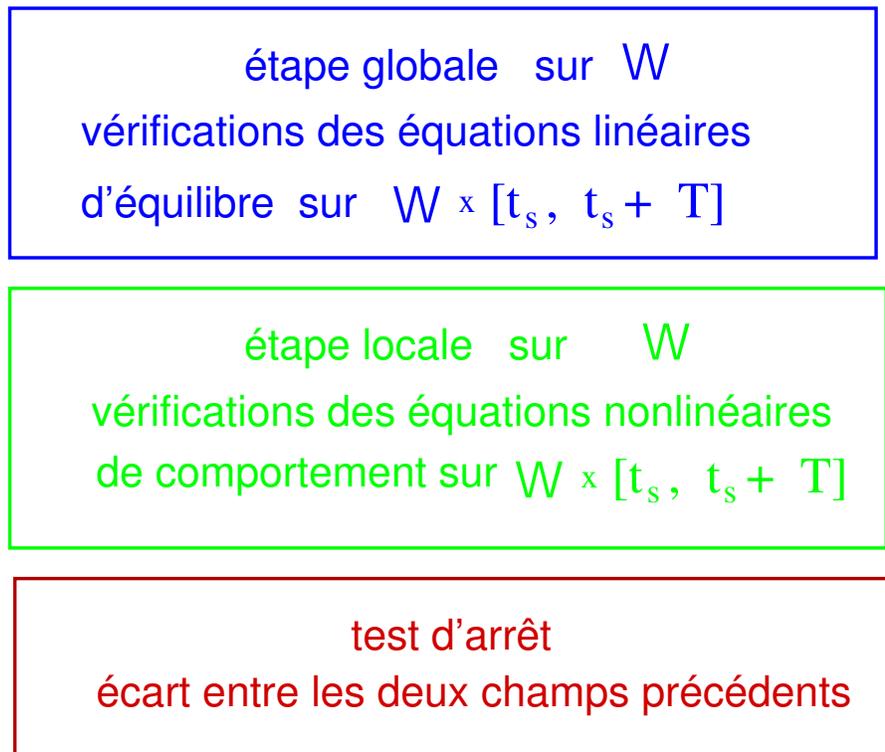


Figure 1.7: Principe de la méthode cyclique

### **1.5.2 Application de la méthode cyclique directe : cas du chargement de type fretting**

La méthode cyclique directe est testée et validée dans la détermination des grandeurs mécaniques stabilisées d'un demi-espace soumis à un chargement de fretting (voir la section 4 pour une étude complète de ce problème). Une étude paramétrique est aussi effectuée pour établir des cartes d'adaptation et d'accommodation pour les deux régimes de glissement [22]. On trouvera dans les références [22, 32] les détails de sa mise en œuvre, ainsi que des tests de comparaison avec la méthode incrémentale.

## 1.6 Bilan et perspectives en méthodes numériques

Rappelons que la méthode stationnaire a connu de nombreuses applications à des problèmes industriels dont les solutions par les méthodes incrémentales sont quasi-impossibles à obtenir. En plus des problèmes de contact rail-roue (présentés au chapitre 3), d'autres phénomènes tels que le pitting-écaillage des engrenages ont pu être étudiés de manière systématique avec l'établissement des cartes de fatigue. La question du renforcement de la résistance à la fatigue nous a fait aborder la modélisation des traitements de surface tels que le galetage des vilebrequins ou les procédés d'assemblage tels que le dudgeonnage des tubes de générateurs de vapeur. Toutes ces études sont menées, en collaboration permanente avec de nombreux industriels avec toujours pour objectif final la mise au point d'outils numériques de prédiction quantitative<sup>2</sup>.

La méthode stationnaire a aussi été appliquée à des problèmes de mécanique des roches (creusement de tunnel [7, 15], et forage [14]. Elle a aussi, grâce à un couplage avec les équations intégrales, ouvert la voie à l'étude des structures revêtues [29]. Son extension aux transformations finies a été ébauchée [36].

Les perspectives de recherche à moyen terme, portent surtout sur la méthode cyclique avec des applications à des problèmes thermoviscoplastiques en vue de l'évaluation de la durée de vie de structures soumises à de la fatigue thermique. Notre objectif, en matière de méthodes numériques demeure toujours l'établissement de procédures de calcul simplifiées, rapides permettant de traiter des problèmes de structures soumises soit à des chargements thermomécaniques mobiles et "instationnaires" (cas des freins) ou alors des structures périodiques soumises à des chargements constants. Ainsi le cas du frein s'apparente à celui de structure soumise à un chargement mobile mais de forme et d'intensité non constantes dans le temps : il pourrait être traité par une extension de la méthode stationnaire qui pourrait s'identifier à une méthode lagrangienne-eulérienne arbitraire (ALE). Un investissement sur les méthodes des volumes finis notamment pour les problèmes où interviennent des changements de phase (soudage) est envisagé.

---

2. voir les rapports de contrats de recherche dans la liste des travaux

## 1.7 Bibliographie

- [1] AKEL, S., NGUYEN, Q.S. Determination of the limit response in cyclic plasticity, Proceedings of the 2nd International Conference on Computational plasticity : Models, Software and Applications (Edited D.R.J. Owen, E.Hinton, E. Onate), Pineridge Press, Swansea, pp. 639-650, (1989).
- [2] AKEL, S., MAITOURNAM, H. M., NGUYEN, Q.S. Some Problems of Stationary thermoplasticity, European Conference on New Advances In Computational Structural Mechanics, Giens, France, (1991).
- [3] BOISSE, PH., LADEVÈZE, P., ROUGÉE, P. A large time increment method for elastoplastic problems, *Eur. J. Mech. A/solids*, N° 4, pp. 257-275, (1989).
- [4] BOWER, A.C. *Cyclic hardening properties of hard-drawn copper and rail steel*, *J. Mech. Phys. Solids*, 37(4), pp. 455-470, (1989).
- [5] BORJA, R.I., LEE, S.R. Cam-clay plasticity, part I: implicit integration of elasto-plastic constitutive relations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 78, pp. 49-72, (1990).
- [6] BOWER, A.F., JOHNSON, K.L. The influence of strain hardening on cumulative plastic deformation in rolling and sliding line contact, *J. Mech. Phys. Solids*, 37(4), 471-493, (1989).
- [7] CORBETTA, F. *Nouvelles méthodes d'étude des tunnels profonds : calculs analytiques et numériques*, thèse de l'École Nationale des Mines de Paris, (1990).
- [8] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. Steady-state flow in classical elastoplasticity : application to repeated rolling and sliding contact, *J. Mech. Phys. Solids* Vol.41, N° 11, pp. 1691-1710, (1993).
- [9] DANG VAN, K., INGLEBERT, G., PROIX, J. M. Sur un nouvel algorithme de calcul de structure élastoplastique en régime stationnaire, *3ème colloque "Tendances actuelles en calcul des structures"*, Ed. Pluralis, Paris, pp. 387-400, (1985).
- [10] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. Thermomechanical state near rolling contact area, *Dissipative Processes in tribology*, Edited by D. Dowson et al., Elsevier Science B.V. pp. 423-428, (1994).
- [11] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. Elastoplastic Calculations of the Mechanical State in Alternative Moving Contacts: Application to Fretting Fatigue, *FRETTING FATIGUE*, ESIS 18 (Edited by R.B. Waterhouse and T.C. Lindley), Mechanical Engineering Publications, London, pp. 161-168, (1994).
- [12] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. *On a New Methodology for Quantitative Modeling of Fretting Fatigue*", Fretting Fatigue: Current Technologies and Practices, ASTM STP 1367, D.W. Hoepfner, V. Chandrasekaran and C.B. Elliot, Eds., American Society of Testing Materials, West Conshohocken, PA, pp. 538-552 (1999).
- [13] GERMAIN, P. *Mécanique (tome I)*, Ed. Ellipses, Paris, (1986).
- [14] GEOFFROY, H. *Étude de l'interaction roche-outil de forage: influence de l'usure sur les paramètres de coupe*. Thèse de doctorat de l'École polytechnique, (1996).
- [15] GUO, C. *Calculs des tunnels profonds soutenus. Méthode stationnaire et méthode approchée*, thèse de l'ENPC, (1995).
- [16] Halphen, B. *Problèmes quasistatiques en viscoplasticité*. Thèse de doctorat d'état de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris6, (1978).
- [17] HALPHEN, B. L'accommodation des structures élastoplastiques à écrouissage cinématique, *C.R.A.S* 283, Série A, pp. 799-802, (1976).
- [18] HANUS, E., MAITOURNAM, M.H., DANG VAN K. Pressure Rolling Contact : Steady State Flow Analysis and comparison with experimental data, *Int. J. Solids Struct.* 33, pp. 3739-3753, (1996).
- [19] HASSINE, T. Plasticité et fatigue dans des pièces de révolution. Contribution à l'étude des roulements à billes. Thèse de l'ENSAM de Paris, (1993).

- [20] HEARLE, A.D., JOHNSON, K.L. Cumulative plastic flow in rolling and sliding line contact, *ASME J. Applied Mechanics*, 54, pp. 1-5, (1987).
- [21] HILLS, D.A., NOWELL, D., SACKFIELD, A. *Mechanics of Elastic Contacts*, Butterworth-Heinemann Ltd, Linacre House, Jordan Hill, Oxford (1993).
- [22] JOHNSON, K.L. The application of shakedown principles in rolling and sliding contact, *Eur. J. Mech., A/Solids 11*, Special Issue, pp. 155-172, (1992).
- [23] JOHNSON, K.L. Plastic flow, residual stress and shakedown in rolling contact, G.M.L. Gladwell, H. Ghonem and J. Kalousek (Ed.) in Proc. 2nd Int. Symp. on *Contact mechanics and wear of rail/wheel systems*, University of Waterloo Press, Canada, pp. 83-97, (1986).
- [24] JOHNSON, K.L. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [25] JOHNSON, K.L., JEFFERIS, J.A. Plastic flow and residual stresses in rolling and sliding contact, *Proc. Inst. Mech. Eng. Symp. on rolling contact fatigue*, London, pp. 50-61, (1963).
- [26] LADEVÈZE, P. La methode à grand increment pour l'analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes, *C.R.A.S 309, Série II, N° 11*, pp. 1095-1099, (1989).
- [27] LADEVÈZE, P., ROUGÉE, P. Plasticité et viscoplasticité sous chargement cyclique : propriétés et calcul du cycle limite, *C.R.A.S 301, Série II, N° 13*, pp. 891-894, (1985).
- [28] LADEVÈZE, P. *Mécanique non linéaire des structures*, Hermès (1996).
- [29] LEDERER, G., BONNET, M., MAITOURNAM, H.M. Modélisation par équations intégrales du frottement sur un demi-espace élasto-plastique. *Revue Européenne des Eléments finis* Vol 7, n° 1-2-3, pp 131-147, (1997).
- [30] MAITOURNAM, M.H. Formulation et résolution numérique des thermoélastoviscoplasticques en régime permanent, Thèse de l'ENPC, Paris (1989).
- [31] MAOUCHE, N. *Modélisation des phénomènes d'endommagements dus aux contacts à faible amplitude de débattement*, thèse de l'ENPC Paris, (1997).
- [32] MAOUCHE, N., MAITOURNAM, M.H., DANG VAN, K. On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts. *Wear 203-204*, pp. 139-147, (1997).
- [33] MAYEUR, C. Modélisation du contact rugueux élastoplastique. Thèse de l'INSA de Lyon, (1995).
- [34] NGUYEN, Q.S., RAHIMIAN, M. Mouvement permanent d'une fissure en milieu élastoplastique. *J. de Mech. Appl.* Vol. 5, N° 1, pp. 95-120, (1981).
- [35] NGUYEN, Q.S. On the elastic-plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 11, pp. 817-832, (1977).
- [36] OUAKKA, A. *Approches stationnaires en mécanique non-linéaire*, thèse de l'ENPC Paris, (1993).
- [37] PRADEILLES-DUVAL, R.P., STOLZ, C. Sur le problème d'évolution thermomécanique des solides avec changement de phase irréversible, *C.R.A.S 313, Série II*, pp. 297-302, (1991).
- [38] SIMO, J.C., TAYLOR, R.L. Consistent tangent operators for rate-independant elastoplasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48, pp. 101-118, (1985).
- [39] SAKAE, C., KEER, L.M. Application of a direct method for a nonlinear-kinematic-hardening material under rolling/sliding line contact: constant ratchetting rate, *J. Mech. Phys. Solids*, 45(9), pp. 1577-1594, (1997).
- [40] STOLZ, C. Sur le problème d'évolution thermomécanique des solides à changement brutal de caractéristiques, *C.R.A.S 318, Série II*, pp. 1425-1428, (1994).
- [41] YU, C.-C., MORAN, B., KEER, L.M. A simplified direct method for cyclic strain calculation: repeated rolling/sliding contact on a case hardened half space, *ASME J. Tribol.* 118, pp. 329-334, (1996).
- [42] YU, M., MORAN, B., KEER, L.M. A direct analysis of two-dimensional elastic-plastic rolling contact, *ASME J. Tribol.* 115, pp. 227-236, (1993).
- [43] ZARKA, J., FRELAT, J., INGLEBERT G., NAVIDI, P. *A new Approach to Inelastic Analysis of Structures*, Martinus Nijhoff Publisher, (1989).

## Chapitre 2

# Critères de fatigue multiaxiaux

## 2.1 Problématique

Dans notre démarche globale pour la prévision des dégradations des structures soumises à des chargements variables, nous avons opté pour un découplage entre le calcul des contraintes et l'application de critères de fatigue. Selon la nature asymptotique de l'état mécanique issu du calcul des contraintes, la structure se trouve confrontée à de la fatigue à faible nombre de cycles (fatigue oligocyclique survenant en régime plastique) ou à de la fatigue à grand nombre de cycles (fatigue polycyclique survenant en régime élastique ou adapté). Nous ne nous intéressons qu'à la fatigue à grand nombre de cycles.

En fatigue polycyclique, depuis Wöhler, l'existence d'une limite d'endurance est admise ; il s'agit, dans le cas d'une structure sollicitée de manière cyclique par une action uniaxiale, d'un seuil de sollicitation en dessous duquel la structure ne subit aucun endommagement de fatigue. Ce concept généralisé conduit à la notion de critère de fatigue multiaxiale. Un critère de fatigue polycyclique est donc un outil permettant de distinguer parmi tous les trajets de chargement dans l'espace des contraintes, ceux qui sont endommageants de ceux qui ne le sont pas.

Actuellement, d'innombrables propositions de critères de fatigue polycyclique sont disponibles. On pourrait consulter [Papadopoulos, 14, 15], où une revue importante est effectuée. On distingue des critères fondés sur la notion de plan critique (Findley, de McDiarmid, etc.), d'autres sur les invariants de contrainte (Sines, Crossland, etc.), ainsi que de critères fondés des concepts énergétiques (Smith-Watson-Topper, etc.). Une approche qui tranche avec toutes les précédentes est celle, macro-méso (ou multi-échelle) développée par Dang Van [4, 6, 8] en fatigue polycyclique des métaux. Elle a conduit à la formulation de critères largement utilisés dans l'industrie mécanique pour la prédiction sur structure de l'amorçage de fissure de fatigue. Le critère originel a été formulé par Dang Van en 1973. Diverses versions ont ensuite été proposées par ses différents collaborateurs notamment Déperrois [9] et plus particulièrement Papadopoulos [14, 17]. Parmi les questions qui demeurent, sont celles relatives aux chargements aléatoires, et aux chargements thermiques dans les domaines où les limites de fatigue sont dépendantes de la température.

En effet, de nombreux systèmes mécaniques tels que les moteurs, les réacteurs, les freins sont sujets à de la fatigue à grand nombre de cycles dans de domaines de température où les variations des caractéristiques mécaniques (et de fatigue bien sûr) ne sont pas négligeables. Les critères classiques de fatigue polycyclique isotherme doivent alors être ré-adaptés pour ces cas. Dans [Maitournam & Nguyen-Tajan, 11] nous avons proposé une démarche permettant l'extension en fatigue polycyclique anisotherme de l'approche multi-échelle. Nous reprenons cette approche dans ce qui suivra, en la particulierisant à d'autres formes de critères issus de l'approche macro-méso.

## 2.2 Fatigue polycyclique anisotherme

Dans une approche multi-échelle étendue en anisotherme [ 11], nous avons proposés une formulation des critères de fatigue polycyclique. Fondée sur la démarche classique de Dang Van, elle utilise un théorème local d'adaptation établi par Mandel et al. [12], pour fournir un cadre général de définition de critères anisothermes. Nous la reprenons pour l'étendre à d'autres formes de critères macro-méso.

### 2.2.1 Approche macro-méso et reformulation

#### Rappel de la démarche globale.

La fatigue à grand nombre de cycles est un phénomène qui apparaît alors même que le matériau a un comportement macroscopique élastique (du moins asymptotiquement). En fait, bien qu'aucune dégradation ne soit détectée à l'échelle macroscopique, les observations à l'échelle mésoscopique montrent que la fatigue est un phénomène débutant au niveau des grains, par des modifications structurales et des apparitions de bandes de glissement localisées dans les grains les plus défavorablement orientés. La particularité des critères de non-amorçage proposés par Dang Van et al. [ 1, 8, 17] est de porter sur les grandeurs évaluées à l'échelle mésoscopique et de postuler l'adaptation à toutes les échelles. Les principales étapes de leur élaboration sont : (i) détermination des contraintes macroscopiques élastiques ou adaptées (hypothèse d'adaptation macroscopique) ; (ii) passage macro-méso permettant de déterminer les contraintes mésoscopiques à partir des contraintes macroscopiques ; (iii) postulat d'un critère local de fatigue portant sur les contraintes mésoscopiques à l'état adapté, et réécriture en fonction des contraintes macroscopiques.

#### (i) Passage macro-méso.

Le passage des grandeurs macroscopiques aux grandeurs mésoscopiques est compliquée [2, 3] et nécessite la prise en compte des propriétés morphologiques et mécaniques des constituants à l'échelle mésoscopique. Ceci s'avère impossible sans hypothèses simplificatrices qui ont été formulées dans le cadre de plusieurs modèles (Sach :  $\sigma = \Sigma$ , Taylor :  $\epsilon = \mathbf{E}$ , Kröner généralisé par Zaoui :  $\sigma = \Sigma + \alpha(\mathbf{E}^P)(\mathbf{E}^P - \epsilon^p)$ ). Par souci de concision, nous nous limitons au modèle de Lin-Taylor dont les hypothèses sont les suivantes : (i) le grain est considéré comme une inclusion dans une matrice élastique infinie ; (ii) la matrice impose sa déformation au grain ; (iii) le grain et la matrice sont isotropes et possèdent les mêmes coefficients élastiques, la relation de passage des contraintes macroscopiques  $\Sigma(M, t)$  au point M (V.E.R.) aux contraintes mésoscopiques  $\sigma(M, t, m)$  au point m du V.E.R. s'écrit sous la forme :

$$\sigma(M, t, m) = \Sigma(M, t) + \rho(M, t, m). \quad (2.1)$$

$\rho$ , le champ de contraintes résiduelles mésoscopiques, est relié au champ de déformations plastiques mésoscopiques par :  $\rho = -2\mu\epsilon^p$ .

#### (ii) Adaptation.

On dit qu'une structure soumise à un chargement variable dans le temps s'adapte lorsque sa réponse asymptotique est élastique. Autrement dit, il y a adaptation si *en tout point la déformation permanente et l'écroutissement tendent vers des valeurs fixes et l'énergie dissipée reste bornée quand le temps  $t$  tend vers l'infini*.

Le premier théorème d'adaptation statique donnant une condition suffisante d'adaptation a été établi par Melan et précisé par Koiter dans le cas des matériaux parfaitement plastiques. Il a ensuite été généralisé par plusieurs auteurs au cas des matériaux écroutissables. Il repose sur la détermination de la solution purement élastique  $\sigma^{EL}(M, t)$  et sur la recherche d'un champ de contrainte auto-équilibré  $\rho(M)$  ainsi

que de variables d'érouissage cinématique  $\alpha(M)$  et isotrope  $\kappa(M)$  indépendants du temps qui vérifient :

$$\exists T, \forall M, \forall t > T, f(\sigma^{EL}(M, t) + \rho(M), \alpha(M), \kappa(M)) < 0 \quad (2.2)$$

où  $f(\sigma, \alpha, \kappa) \leq 0$  définit le domaine d'élasticité du matériau.

Ces conditions imposent au champ  $\rho$  de respecter l'équilibre global avec des sollicitations nulles, ce qui rend sa recherche assez difficile. Une condition locale, donc de vérification plus facile, a été proposée par Mandel et al. [12]. Elle s'applique dans le cas où les coefficients élastiques sont constants et l'espace des contraintes est de dimension finie. Elle s'énonce comme suit :

*s'il existe un champ de contraintes  $\sigma^*(M)$  indépendant du temps  $t$ , tel que :*

$$\exists T, \forall M \text{ et } \forall t > T, g(\sigma^{EL}(M, t) - \sigma^*(M)) < k(\kappa_s) \quad (2.3)$$

*où la fonction de charge est définie par  $f(\sigma, \alpha, \kappa) = g(\sigma - \alpha) - k(\kappa)$   
et  $\kappa_s$  est la plus grande valeur de  $\kappa$  compatible avec l'hypothèse des petites déformations ;  
si ce champ est proche d'un champ auto-équilibré  $\rho^s$  et si  $\mathbf{M} : (\rho^s - \rho_0)$  est petit ( $\mathbf{M}$   
matrice des complaisances élastiques,  $\rho_0$  champ des contraintes résiduelles initiales)  
alors il y a adaptation par petites déformations.*

L'inéquation (2.3) est équivalente à la condition

$$\inf_{\sigma_1} \sup_t \{ \sqrt{g[\sigma^{EL}(M, t) - \sigma_1]} \} < k(\kappa_s) \quad (2.4)$$

Pour un matériau de type Mises dont la fonction de charge est :

$$\begin{aligned} f(\sigma, C\epsilon^p) &= \sqrt{\frac{1}{2} [dev(\sigma) - C\epsilon^p] : [dev(\sigma) - C\epsilon^p]} - k(\kappa) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \| dev(\sigma) - C\epsilon^p \| - k(\kappa) \end{aligned} \quad (2.5)$$

La condition d'adaptation (eq:adap1) s'écrit :

$$k^* = \inf_{\sigma_1} \sup_t \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \| dev(\sigma^{EL}(M, t)) - dev(\sigma_1) \| \right\} < k(\kappa_s) \quad (2.6)$$

Autrement dit, il y a adaptation si le rayon  $\sqrt{2}k^*$  de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du déviateur des contraintes élastiques est inférieur à  $\sqrt{2}k(\kappa_s)$ . On obtient ainsi une condition locale d'adaptation particulièrement facile à mettre en œuvre numériquement.

### (iii) Critères de fatigue et réécriture.

Le critère de fatigue porte sur les contraintes mésoscopiques qu'on suppose adaptées. La détermination de celles-ci se fait grâce aux hypothèses de Lin-Taylor ainsi qu'à celle d'adaptation locale qui permettent d'écrire :

$$\sigma(t) = \Sigma(t) + \rho \quad (2.7)$$

$$p(t) = \frac{1}{3} tr(\sigma(t)) = \frac{1}{3} tr(\Sigma(t)) = \mathcal{P}(t) \quad (2.8)$$

$\rho$  désigne le champ de contraintes résiduelles mésoscopiques à l'état adapté ; il est alors indépendant du temps. En supposant que la limite de fatigue correspond à la limite d'adaptation, on choisit le champ  $\rho$  comme le centre de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du déviateur des contraintes macroscopiques.

La condition d'endurance illimitée en un point  $m$  est alors écrite sur le cycle stabilisé de contrainte de période  $T$ , sous la forme :

$$h(\boldsymbol{\sigma}(m, t), t \in [0, T]) < 0 \quad (2.9)$$

Les observations expérimentales montrent le rôle prépondérant du cisaillement et l'influence (bénéfique en compression, néfaste en traction) de la pression hydrostatique sur le comportement en fatigue. La fonction  $h$  doit en rendre compte.

**Critère originel de Dang Van.** Dans la première formulation du critère de Dang Van [1], la fonction  $h$  proposée est :

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = \max_{\underline{n}} \max_t \{ \tau(\underline{n}, t) + a_d \mathcal{P}(t) - b_d \} \quad (2.10)$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale à la facette considérée et  $a_d$  et  $b_d$  sont des constantes caractéristiques du matériau.

On peut s'affranchir de la maximisation sur  $\underline{n}$ , en considérant la cission mésoscopique maximale donnée par la plus grande des demi-différences des valeurs principales du déviateur des contraintes. Le critère précédent (2.10) s'écrit alors :

$$\max_t \{ \tau(t) + a_d \mathcal{P}(t) \} < b_d \quad (2.11)$$

En posant  $\boldsymbol{\Sigma}^*$  le tenseur de contrainte réalisant  $\min_{\boldsymbol{\Sigma}^T} \{ \max_t \| \tau[\boldsymbol{\Sigma}(t) - \boldsymbol{\Sigma}^T] \| \}$ , on écrit le critère de Dang Van en fonction des contraintes macroscopiques sous la forme :

$$\max_t \{ \tau[\boldsymbol{\Sigma}(t) - \boldsymbol{\Sigma}^*] - b_d + a_d \mathcal{P}(t) \} < 0 \quad (2.12)$$

où  $\tau[\boldsymbol{\Sigma}]$  est la cission maximale induite par  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

Rappelons que dans [11] c'est la version modifiée du critère de Dang Van suivante

$$\max_t \{ \tau(t) \} - b_d + a_d \mathcal{P}_{max} < 0 \quad (2.13)$$

qui est exprimée en fonction des contraintes macroscopiques sous la forme :

$$\min_{\boldsymbol{\Sigma}^T} \{ \max_t \| \tau[\boldsymbol{\Sigma}(t) - \boldsymbol{\Sigma}^T] \| \} - b_d + a_d \mathcal{P}_{max} < 0 \quad (2.14)$$

**Version de Papadopoulos.** La première modification du critère précédent a été proposée par Papadopoulos [1], sous la forme :

$$\min_{\boldsymbol{S}^T} \max_t \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \| \boldsymbol{S}(t) - \boldsymbol{S}^T \| \} - b_p + a_p \mathcal{P}_{max} < 0 \quad (2.15)$$

où  $a_p$  et  $b_p$  sont des constantes caractéristiques du matériau, et  $\boldsymbol{S} = \text{dev}(\boldsymbol{\Sigma})$ , correspond à la fonction  $h$  suivante :

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_t \{ \| \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \| \} - b_p + a_p \mathcal{P}_{max} \quad (2.16)$$

**Version modifiée de Déperrois.** Pour mieux tenir compte des chargements déphasés Déperrois a proposé un critère qui souffrait d'incohérence dans sa définition. Nous le rendons intrinsèque de la manière suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} R - b_{dp} + a_{dp} \mathcal{P}_{max} < 0 \quad (2.17)$$

$$R = \max_{\mathcal{S}_1} \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \quad (2.18)$$

où  $R_1$  est le rayon de la plus petite hypersphère, de centre  $\mathcal{S}_1^*$ , circonscrite au trajet de chargement des déviateurs  $\mathcal{S}(t), t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{S}_1$  étant les points du trajet distants du centre de  $R_1$ ; on définit  $\mathcal{S}_2(t), t \in [0, T]$  comme étant la projection sur l'hyperplan  $\mathcal{P}_1$  (dimension 4) orthogonal à  $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_1^*$  du trajet de chargement;  $R_2$  est le plus grand de tous les rayons des petites hypersphères circonscrites aux trajets de chargement projetés sur les hyperplans  $\mathcal{P}_1$ ;  $\mathcal{S}_2$  comme étant les points du trajet sur l'hyperplan  $\mathcal{P}_1$  optimal, distants du centre de  $R_2$ ; on définit de la même manière  $R_3$ , puis  $R_4$  et  $R_5$ .

### 2.2.2 Fatigue anisotherme

Le but est d'étendre les critères précédents aux cas des chargements variables anisothermes. On suppose que seuls la limite d'élasticité et les limites d'endurance du matériau dépendent de la température. La condition locale d'adaptation pour un matériau de type von Mises à écrouissage cinématique linéaire et isotrope devient [12]:

$$\inf_{\text{dev}(\sigma_1)} \sup_t \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \|\text{dev}(\sigma^{EL}(M, t)) - \text{dev}(\sigma_1)\| - k_s^*(\theta(M, t)) \right\} < 0 \quad (2.19)$$

Il apparaît que le critère écrit sous la forme (2.11) n'est plus compatible avec l'écriture anisotherme de la condition d'adaptation. La limite  $k_s^*(\theta(M, t))$  dépend maintenant de la température et donc du temps. De plus le cisaillement  $\tau(t)$  apparaissant dans le critère (2.11) est calculé à partir d'un centre  $\rho^*$  qui n'a plus de sens en anisotherme. En revanche, en partant des expressions des critères isothermes en fonction des grandeurs macroscopiques (2.14, 2.15), et en se fondant sur la condition d'adaptation locale (2.19) qui prend en compte les variations des limites d'élasticité en fonction de la température, on aboutit à des extensions cohérentes de ces critères en fatigue polycyclique anisotherme.

#### Critère de Dang Van.

Dans le cas d'un chargement isotherme, de Dang Van, est:

$$\min_{\mathcal{S}^T} \{ \max_t \|\tau[\mathcal{S}(t) - \mathcal{S}^T]\| \} - b_d + a_d \mathcal{P}_{max} < 0$$

Dans le cas d'un chargement anisotherme, une extension naturelle de la version modifiée du critère donnée dans [11], est:

$$\min_{\mathcal{S}^T} \left\{ \max_t \left[ \frac{\|\tau[\mathcal{S}(t) - \mathcal{S}^T]\|}{\beta(\theta(t))} - 1 \right] \right\} + \max_t \{ \alpha(\theta(t)) P(t) \} < 0 \quad (2.20)$$

où  $\alpha(\theta)$  et  $\beta(\theta)$  sont des fonctions caractéristiques du matériau.

La détermination des fonctions  $\alpha(\theta)$  et  $\beta(\theta)$  peut se faire à partir des limites d'endurance en flexion alternée  $f(\theta)$  et en torsion alternée  $w(\theta)$  évaluées sur des essais effectués à différentes températures  $\theta$  constantes. On obtient ainsi:  $\beta(\theta) = w(\theta)$  et  $\alpha(\theta) = (w(\theta) - \frac{f(\theta)}{2}) / (w(\theta) \frac{f(\theta)}{3})$ .

#### Critère de Papadopoulos.

Une extension naturelle du critère de Papadopoulos en fatigue polycyclique anisotherme donnée dans [11] est:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \min_{\mathcal{S}^T} \left\{ \max_t \left[ \frac{\|\mathcal{S}(t) - \mathcal{S}^T\|}{\beta_p(\theta(t))} - 1 \right] \right\} + \max_t \{ \alpha_p(\theta(t)) P(t) \} < 0 \quad (2.21)$$

où  $\alpha_p(\theta)$  et  $\beta_p(\theta)$  sont des fonctions caractéristiques du matériau.

Comme pour le critère précédent, la détermination des fonctions  $\alpha_p(\theta)$  et  $\beta_p(\theta)$  peut se faire à partir des limites d'endurance en flexion alternée  $f(\theta)$  et en torsion alternée  $w(\theta)$  évaluées sur des essais effectués à différentes températures  $\theta$  constantes. On obtient ainsi :  $\beta_p(\theta) = w(\theta)$  et  $\alpha_p(\theta) = (w(\theta) - \frac{f(\theta)}{\sqrt{3}}) / (w(\theta) \frac{f(\theta)}{3})$ .

### Critère de Déperrois.

Une extension naturelle du critère modifié de Déperrois en fatigue polycyclique anisotherme est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(R - 1) + \max_t \{\alpha_p(\theta(t))P(t)\} < 0 \quad (2.22)$$

Le calcul de  $R$  s'effectue de la même manière que dans le cas isotherme mais en remplaçant dans le calcul des rayons  $R_1, R_2, R_3, R_4$  et  $R_5$  les déviateurs  $\mathcal{S}(t)$  par  $\mathcal{S}(t)/\beta_p(\theta(t))$ .  $\alpha_p(\theta)$  et  $\beta_p(\theta)$  fonctions caractéristiques du matériau sont les mêmes que pour le critère précédent.

## 2.3 Bilan

Nous avons proposé une extension au cas anisotherme des critères de fatigue polycyclique ; extension dont la mise en œuvre numérique s'effectue avec les mêmes outils que ceux utilisés en fatigue polycyclique isotherme [10]. Dans ce cadre, nous avons reformulé de manière à le rendre intrinsèque le critère proposé par Déperrois & Dang Van, critère dont la pertinence dans le cas de chargements hors-phases a été montrée [9].

Le domaine de la fatigue polycyclique est sans conteste celui au LMS où les applications effectuées sont les plus nombreuses et de façon concomitante la valorisation industrielle la plus large : étude de la tache ovale et du squat des rails, fatigue de nombreux composants mécaniques d'automobile, structures aéronautiques, etc. C'est uniquement avec un tel souci que nous [Ballard, Dang Van & Maitournam] avons développé et commercialisé un logiciel de calcul à la fatigue polycyclique des structures, SOLSTICE, acquis par plus d'une dizaine de sociétés. Cela a bien sûr nécessité la recherche d'algorithmes performants pour une détermination numérique rapide des différents critères.

## 2.4 Perspectives en fatigue

Les premières perspectives de notre démarche en fatigue portent sur l'extension de l'approche macro-méso en fatigue polycyclique aux matériaux anisotropes et éventuellement non métalliques et aux chargements variables (problème d'intérêt réel). Un autre problème important est celui de l'endurance limitée en d'autres termes de l'introduction de la notion de nombre de cycles à la rupture de manière plus rigoureuse que ne le fait actuellement l'Industrie sur le critère de Dang Van (travail déjà initié par F. Morel [13]). Une fois ce travail achevé, il s'agira ensuite de mettre au point une démarche ayant un fondement mécanique permettant la prise en compte de chargements variables (pas forcément par la recherche d'un chargement cyclique équivalent).

Ceci nous mènera naturellement vers la formulation d'une approche unifiée de la fatigue partant de la fatigue oligocyclique jusqu'à l'endurance illimitée. Celle-ci assurera une synthèse de travaux au sein de notre équipe par [Charkaluk & Constantinescu, 4], qui ont proposé un critère énergétique pour la fatigue thermique à faible nombre de cycles, et des travaux relatifs à la fatigue polycyclique. Rappelons que cette dernière est fondée sur le concept d'adaptation (donc d'énergie dissipée bornée).

## 2.5 Bibliographie

- [1] BALLARD, P., DANG VAN, K., DEPERROIS A., PAPADOPOULOS, I.V. High cycle fatigue and finite element analysis, *Fatigue and Fracture of Eng. Mat. & Struct* 18, 4 (1995) 397-411.
- [2] BUI, H.D., DANG VAN, K., STOLZ, C. Relations entre grandeurs microscopiques et macroscopiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 292, Série II (1981) pp. 863-866.
- [3] BUI, H.D., DANG VAN, K., STOLZ, C. Relations entre grandeurs microscopiques et macroscopiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 292, Série II (1982) pp. 1155-1158.
- [4] CHARKALUK E., CONSTANTINESCU, A. Materials at High temperature, (2000) accepted.
- [5] CROSSLAND, B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel, *Proc. Int. Conf. Fatigue of Metals*, Institution of Mechanical Engineers, London (1956) 138-149.
- [6] DANG VAN, K. Sur la résistance à la fatigue des métaux, *Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'Artillerie française*, **47**, 3ème Fascicule, (1973) 647-722.
- [7] DANG VAN, K. Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, in D.L. McDowell and R. Ellis (eds), *Advances in multiaxial fatigue*, ASTM STP 1991, American Society for testing and Materials, Philadelphia, (1993) 120-130.
- [8] DANG VAN, K. Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach, in : Dang Van K., Papadopoulos I.V. (Éds), *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design*, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, (1999) 57-88.
- [9] DÉPERROIS, A. Sur le calcul de limites d'endurance des aciers. Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, (1991).
- [10] MAITOURNAM, M.H. Finite Elements Applications Numerical Tools and Specific Fatigue Problems, in : Dang Van K., Papadopoulos I.V. (Éds), *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design*, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, (1999), pp. 169-187.
- [11] MAITOURNAM, M.H., NGUYEN-TAJAN, T.M.L. Approche multi-échelle en fatigue polycyclique anisotherme, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série II b (2000) pp. 373-379.
- [12] MANDEL, J., ZARKA, J., HALPHEN, B. Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique, *Mechanics Research Communications* 4 (1977) 309-314.
- [13] MOREL, F. A fatigue prediction method based on a mesoscopic approach in constant amplitude multiaxial loading, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures* 21 (1998) 241-256.
- [14] PAPADOPOULOS, I.V. Fatigue polycyclique des métaux : une nouvelle approche. Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 18 décembre 1987.
- [15] PAPADOPOULOS, I.V. A review of multiaxial fatigue limit criteria, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures*.
- [16] PAPADOPOULOS, I.V. Critical Plane Approaches in High-cycle Fatigue : on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on a critical plane, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures* 21 (1998) 269-285.
- [17] PAPADOPOULOS, I.V. Multiaxial fatigue limit criterion of metals : a mesoscopic scale approach, in : Dang Van K., Papadopoulos I.V. (Éds), *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design*, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, (1999) 89-143.
- [18] SINES, G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses, *Metal Fatigue*, G. Sines & J.L. Waisman, Eds, McGraw Hill, New York, (1959) 145-169.
- [19] SURESH, S. *Fatigue of materials*, Cambridge University Press, (1991).
- [20] ZHOU, J.L., TITS, A.L. Non monotonic line search for minimax problems, *J. Optim. Theory Appl.* 76 (1993) 455-476.



## Chapitre 3

# Fatigue des rails

### 3.1 Problématique

La fatigue de roulement (RCF) est un problème important et préoccupant pour toutes les compagnies de chemins de fer. Rappelons que certains situent le début des études à la fatigue avec l'accident (rupture d'un essieu) de train Versailles-Paris en 1842. Depuis cette date, les recherches sur la fatigue de roulement, et notamment les avaries des rails, n'ont cessé. Les défauts apparaissant dans les rails sont de différentes natures, évoluant avec les améliorations des matériaux et du matériel. Ainsi, jusqu'aux années soixante-dix, la **tache ovale** est fréquemment rencontrée sur les voies; cette fissure s'amorce dans le champignon du rail, à partir d'impuretés, à une profondeur de l'ordre de quelques millimètres. Elle se propage vers le bas, dans la direction du roulement, suivant un plan faisant un angle d'environ  $30^\circ$  avec la verticale. Elle peut conduire, en stade final, à une rupture brutale du rail. Elle pose un problème d'amorçage de fissure de fatigue à grand nombre de cycles et de propagation de fissure de fatigue. Parallèlement, le **shelling** est observé dans les congés de roulement des rails en courbes ; c'est un écaillage débutant aussi en profondeur et se terminant par un défilage du congé de roulement. Il est associé à des cycles de déformation plastiques et s'apparente donc à un problème de fatigue à faible nombre de cycles. Actuellement, le **squat** et le **head-check** sont les défauts majeurs observés sur les voies. Le squat est rencontré en alignement ou sur des grandes courbes ; ce sont des fissurations qui s'amorcent dans certaines zones de la surface de roulement et quand elles atteignent une certaine taille (autour de cinq millimètres) elles sont susceptibles de se propager vers le bas pour former une fissure transverse qui se propage assez rapidement pour exiger un suivi de près. Les head-checks quant à eux, apparaissent en courbes ; ils s'initient du côté de la joue active et peuvent se joindre entraînant une rupture de la joue.

L'évolution de la nature des défauts observés est liée d'une part à celle métallurgique des aciers à rail (dans les années soixante les rails contenaient beaucoup d'inclusions), d'autre part à l'augmentation de la puissance et de la charge par essieu.

Les recherches entreprises par la SNCF en collaboration avec les fabricants de rails et les laboratoires de recherches universitaires visent à comprendre les conditions d'apparition de ces défauts, à pouvoir suivre leurs évolutions afin d'établir les périodicités des inspections qui garantiront un maximum de sécurité. Ainsi, la SNCF a besoin de réponses quantitatives ; ceci a motivé tous nos travaux sur ce sujet. Pour atteindre cet objectif quantitatif, il faudrait résoudre plusieurs problèmes.

(i) Le premier est l'évaluation de l'état thermomécanique du rail soumis au roulement répété ; en raison de la taille de la zone de contact, les contraintes dépassent la limite d'élasticité initiale du matériau qui plastifie lors des premiers passages du chargement générant ainsi des contraintes résiduelles dont le rôle sur la tenue à la fatigue peut être non négligeable. De plus, comme on le verra dans l'étude du squat, le contact réel résultant de la dynamique du système rail/véhicule est complexe avec des distributions de contraintes de contact normale et tangentielle de formes compliquées, dont certains effets ne peuvent

être modélisés que par une étude tridimensionnelle.

(ii) La seconde difficulté réside dans la prédiction des dommages qui sont bien sûr liés à la nature de l'état stabilisé de roulement. Dans tous les cas, il est indispensable de disposer de critères multiaxiaux applicables à de structures subissant des champs complexes de contraintes et de déformations anélastiques.

Pour résoudre le problème (i), nous avons développé la méthode stationnaire capable de déterminer l'éventuel état stabilisé de roulement pour n'importe quel type de lois de comportement, soit directement soit en suivant l'évolution passage par passage. La présentation de ces méthodes a été faite au chapitre 1.

En ce qui concerne le second problème, nous utilisons dans le cas de la fatigue à grand nombre de cycles, le critère proposé par Dang Van dont les fondements sont présentés par exemple dans [12–15]. Dans le cas de la fatigue à faible nombre de cycles, nous utilisons la loi de Manson-Coffin étendue au cas tridimensionnel. Dans ce qui suit, nous allons montrer comment la mise en œuvre de tous ces outils permet d'effectuer de prédictions quantitatives sur l'amorçage de tous ces défauts, en insistant particulièrement sur le squat.

## 3.2 Méthodes numériques pour la détermination de l'état limite et de la fatigue

### 3.2.1 Présentation du problème

La détermination de l'état thermomécanique de roulement est la première étape pour comprendre et prévoir les différents endommagements apparaissant dans le rail. Comment nous l'avons déjà montré, cette tâche présente des difficultés dues à la plasticité générée par les pressions élevées de contact. La simulation de tels problèmes par l'utilisation de méthodes numériques incrémentales nécessitant des translations de chargement est quasi impossible du fait du temps de calcul prohibitif. Rappelons aussi l'utilisation pour ce problème de la méthode simplifiée de Zarka et al. [16] notamment par Keer and al. [17–19]. Les insuffisances d'une telle approche sont connues : mise à part une évaluation approchée de la déformation plastique, c'est surtout la difficulté dans le cas thermomécanique de réaliser de couplages forts. Ce sont les raisons pour lesquelles nous utilisons systématiquement les méthodes stationnaires (passage par passage et directe), étendue si nécessaire au cas thermomécanique couplée. Le couplage est réalisé par l'éventuelle variation des constantes mécaniques en fonction de la température et la présence des déformations thermiques dans la partie mécanique et par la présence de sources volumiques de chaleur dues aux déformations anélastiques, aux variables internes, au couplage thermoélastique, de dissipations interfaciales dues au frottement et aux micro-glislements [Dang Van et Maitournam, 4].

### 3.2.2 Traitement numérique de la fatigue

### 3.2.3 Les critères de fatigue

Nous avons utilisé deux types de critères de fatigue pour la prédiction théorique de l'amorçage de fissure dans le rail. Dans le cas de la fatigue à faible nombre de cycles, cas où le rail subit des cycles de déformations plastiques, la loi de Manson-Coffin est utilisée pour prédire le nombre de cycles à l'amorçage [Maitournam, 1].

Dans le cas de la fatigue à grand nombre de cycles, c'est l'approche de Dang Van [12–14] qui est utilisée. Rappelons dans sa formulation actuelle, elle ne donne pas le nombre de cycles à la rupture, mais seulement permet de discerner parmi tous les trajets de chargement ceux qui sont endommageants de ceux qui ne le sont pas. Le critère s'exprime comme l'inégalité suivante, portant sur les contraintes

mésoscopiques sur tout le cycle :

$$\max_t \{\tau(t) + ap(t)\} \leq b$$

où  $\tau(t)$  et  $p(t)$  sont respectivement le cisaillement mésoscopique maximal et la pression hydrostatique à l'instant  $t$ ,  $a$  and  $b$  sont des caractéristiques du matériau déterminées par deux essais classiques de fatigue. Par exemple, elles sont reliées aux limites de fatigue classiques  $f_{-1}$  (flexion alternée) et  $t_{-1}$  (torsion alternée) par :

$$a = \frac{t_{-1} - f_{-1}/2}{f_{-1}/3} \quad b = t_{-1} \quad (3.1)$$

En pratique, la résistance de la structure à la fatigue est évaluée point par point, d'une des manières suivantes.

- La première est la représentation dans le diagramme  $(p, \tau)$  des quantités  $(p(t), \tau(t))$  en chaque point. Dans ce diagramme, les deux constantes  $a$  and  $b$  définissent un domaine de sécurité où il n'y a pas de fissures de fatigue, qui est la région  $(\tau + ap < b)$ .
- La seconde manière est l'évaluation en tout point de la quantité  $\alpha = \max_t \{(\tau(t) - ap(t) - b)/b\}$ . Une valeur positive de  $\alpha$  est synonyme de fatigue.

Ces deux représentations sont utilisées pour analyser le comportement à la fatigue à grand nombre de cycles des rails. Ainsi les prédictions de tache ovale et de squat sont fondées sur ce critère.

### 3.3 Étude de la tache ovale, du shelling et de l'usure

Toutes ces études ont été effectuées en déformations planes. Dans un premier temps nous sommes intéressés à l'évaluation de cartes d'états stabilisés sous roulements à l'instar de celles obtenues analytiquement par Johnson [5–10]. Rappelons que l'intérêt de ces diagrammes, établis en régime de glissement total ou partiel, est, pour un régime de fonctionnement donné, de connaître d'emblée la nature de l'état limite et la localisation des points critiques vis-à-vis de l'écoulement plastique. L'apport de notre modélisation numérique par rapport à l'énorme travail analytique de Johnson est de donner aussi les contraintes et leurs évolutions en tout point de la structure ouvrant ainsi la voie à une étude quantitative en fatigue. Ainsi l'application d'un critère de fatigue aux cycles de contraintes obtenus pour différentes conditions de fonctionnement conduit à enrichir les diagrammes de Johnson en rajoutant les localisations des points d'amorçage de fissures de fatigue pour obtenir des diagrammes de d'adaptation et de fatigue. Cette démarche peut être retrouvée dans [3]. Une illustration est donnée sur la figure (3.1) établie dans le cas de glissement total ; ainsi la tache ovale est le défaut apparaissant pour un point de fonctionnement dans la région (1) : initiation en profondeur, fatigue à grand nombre de cycle entre raison de l'état stabilisé élastique (adaptation). En revanche la région (2) correspond à de l'amorçage en surface qui en cas d'accommodation conduit au shelling. En cas de frottement important, l'écoulement plastique peut être important ce qui conduit à de l'usure sévère.

La méthodologie est maintenant appliquée au cas tridimensionnel. Nous considérons un rail de profil UIC 60 constitué d'un acier supposé comme un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire de caractéristiques :  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $k_e = 237$  MPa,  $C = 20$  GPa. La charge mobile est définie par  $a=10$ mm et  $P_0/k_e=4.25$ . Les limites de fatigue de l'acier sont :  $f_{-1} = 460$ MPa and  $t_{-1} = 270$ MPa.

L'état stabilisé obtenu est une adaptation. L'application du critère de fatigue de Dang Van conduit à la détermination du point critique vis-à-vis de l'amorçage de fissure de fatigue à grand nombre de cycles. La figure (3.2) montre les isovaleurs d'un tel critère ainsi que le trajet de chargement au point critique.

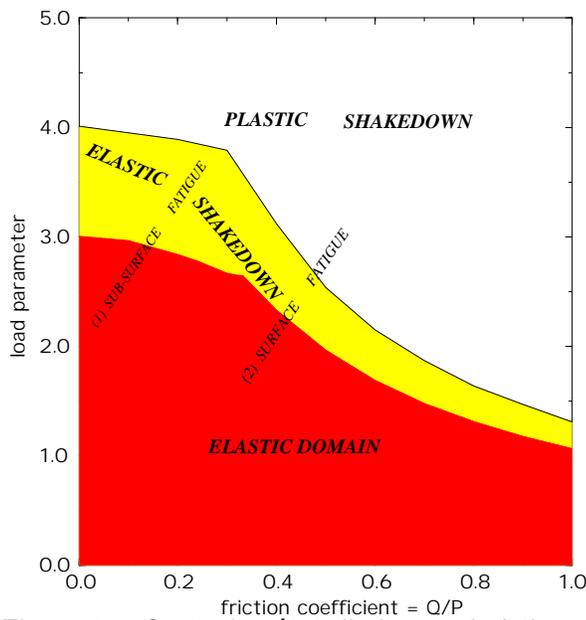


Figure 3.1: Carte des états limites et de fatigue dans le cas d'un contact linéique en glissement total, pour un matériau écrouissable

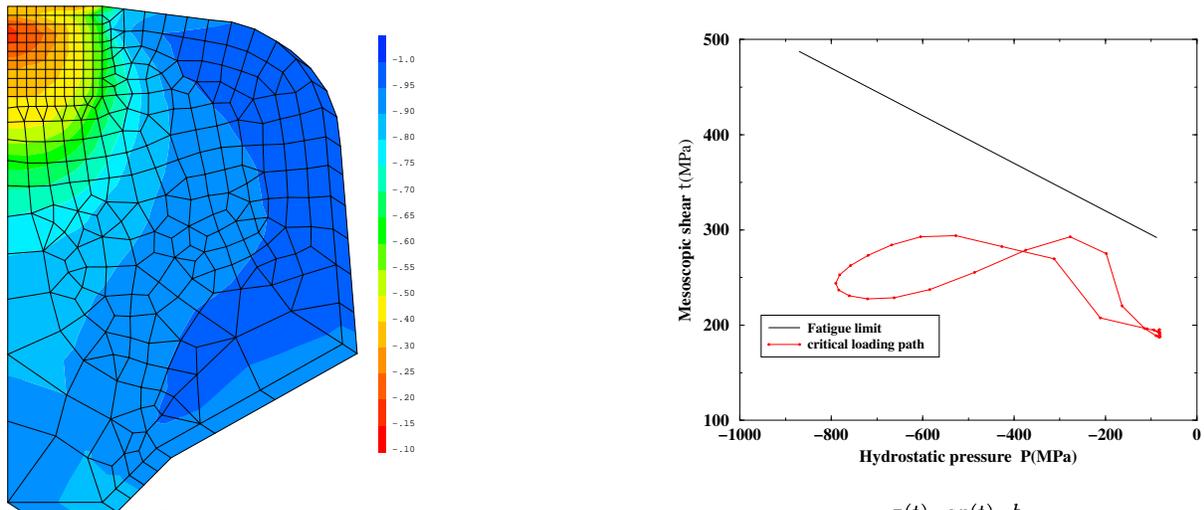


Figure 3.2: Isovaleurs du critère de Dang Van ( $\alpha = \max_t \frac{\tau(t) - ap(t) - b}{b}$ ) et trajet de chargement au point critique.

## 3.4 Étude du squat

### 3.4.1 Le problème du contact 3-D

Une analyse bidimensionnelle se révèle inefficace dans l'étude de la prévision du squat. En effet toutes les études effectuées en 2-D avec le chargement nominal de service conduisent à une absence de fissuration du rail.

La figure 3.3 montre une micrographie d'un squat, fissure de quelques centaines de micromètres de taille, apparaît dans une zone présentant de la déformation plastique avec en plus une couche superficielle tribologiquement transformée (TTS). Un examen micrographique (figure (3.4)) de toute la zone à squat montre différentes orientations de couchage de fibres (en partant de la joue active vers la joue non active, on observe une inversion du couchage), le squat apparaissant plutôt dans la zone centrale.

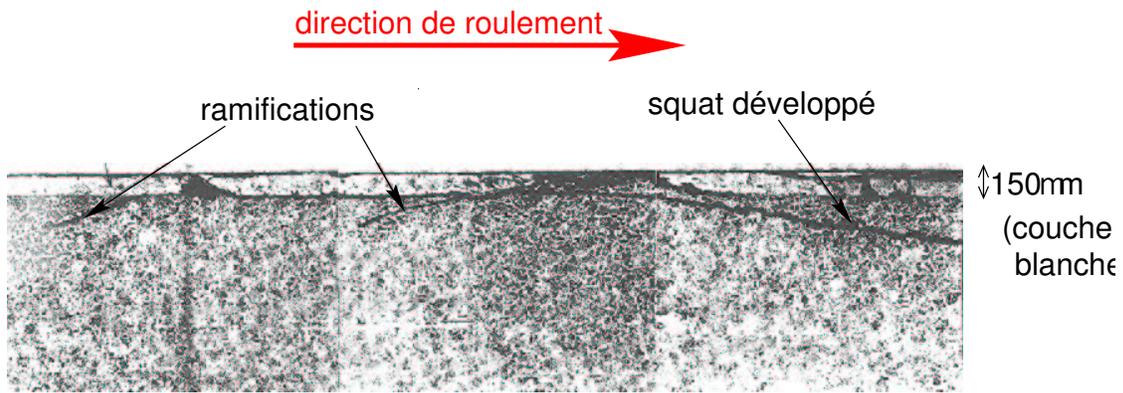


Figure 3.3: Fissuration de type squat (IRSID)

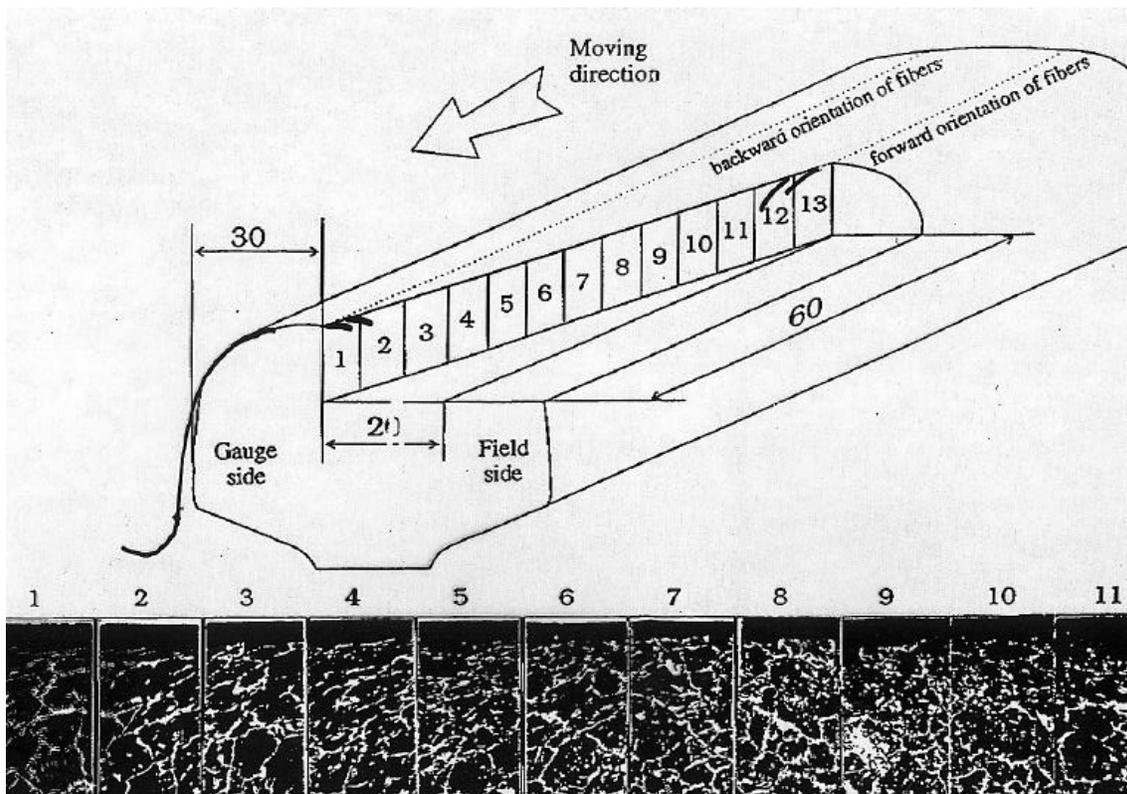


Figure 3.4: Observations des orientations des fibres sous la surface de roulement (IRSID): le squat apparaît dans la zone centrale

Ces observations sont en accord avec les calculs de dynamique du système rail/véhicule effectués par l'INRETS et fondés sur les méthodes de Kalker [20]. L'évolution du contact et des distributions des contraintes de contact est complexe comme cela est schématisé sur la figure (3.5). Le contact rail/roue peut s'effectuer en plusieurs points. Les contraintes tangentielles de contact qui en résultent, en raison du mouvement "sinusoïdale" sont beaucoup plus importantes (elles atteignent 500MPa) que les contraintes nominales calculées dans l'hypothèse d'un mouvement rectiligne avec glissement partiel. Quant aux contraintes normales, leur valeur maximale peut atteindre 1.6 GPa.

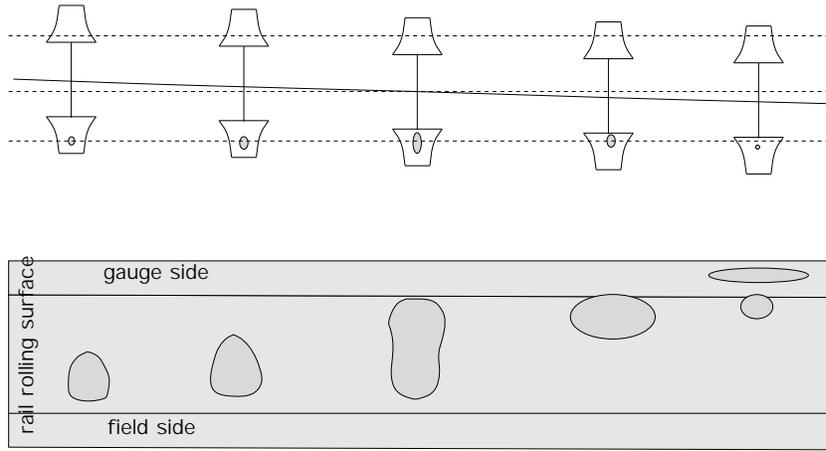


Figure 3.5: Exemple d'évolution du contact rail/roue (20).

### 3.4.2 Évaluation de l'état mécanique du rail

Il s'agit de simuler le mouvement décrit précédemment, et de déterminer l'état stabilisé de roulement auquel il conduit. Pour cela on simule les passages successifs de séquence de charges mobiles. Chaque séquence représentant le mouvement précédent est composée d'un nombre fini de charges constantes mobiles : par exemple les quatre charges de la figure (3.5) constituent une séquence.

Le calcul tridimensionnel est alors effectué passage par passage en utilisant la combinaison calcul-stationnaire-éléments finis-séries de Fourier. Nous présentons dans ce qui suit un seul exemple de calcul où le chargement est modélisé par des séquences constituées de huit charges mobiles. Le maillage d'une section transversale du rail est montré sur la figure (3.7). Les caractéristiques élastoplastiques du rail comme un matériau élastoplastique de von Mises à écrouissage cinématique linéaire sont :  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $k_e = 550 \text{ MPa}$ ,  $C = 20 \text{ GPa}$ . Sur la figure (3.7), on montre une distribution des contraintes équivalentes dans la section centrale (sous charge) du rail après le passage de la seconde charge de la séquence.

### 3.4.3 Prédiction du squat et comparaison avec les observations

Dans ce cas, l'état stabilisé étant adapté, le rail est susceptible de se fatiguer à grand nombre de cycles. Le critère de fatigue de Dang Van dans sa forme traditionnelle est alors appliqué au cycle de contraintes stabilisé. Les limites de fatigue du matériau sont :  $f_{-1} = 450 \text{ MPa}$  and  $t_{-1} = 270 \text{ MPa}$ . Sur la figure (3.8), on montre des trajets de chargement obtenus en différents points de la surface du rail (joue active, zone centrale, joue non active) : comme on peut le constater, la fissure (squat) apparaîtra préférentiellement dans la zone centrale.

## 3.5 Conclusion et perspectives

Cette étude complète des défauts du rail n'a pu être menée que grâce à la collaboration de la SNCF qui fournit non seulement les caractéristiques du matériels roulants et de la voie, mais aussi toutes les observations effectuées sur le terrain, de la Sidérurgie, des Laboratoires de recherche appliquée et fondamentale.

Elle nous a permis de mettre au point une démarche complète alliant la mise au point de méthodes numériques spécifiques au roulement, leur perfectionnement, l'utilisation de critères de fatigue pertinents pour permettre des prédictions quantitatives.

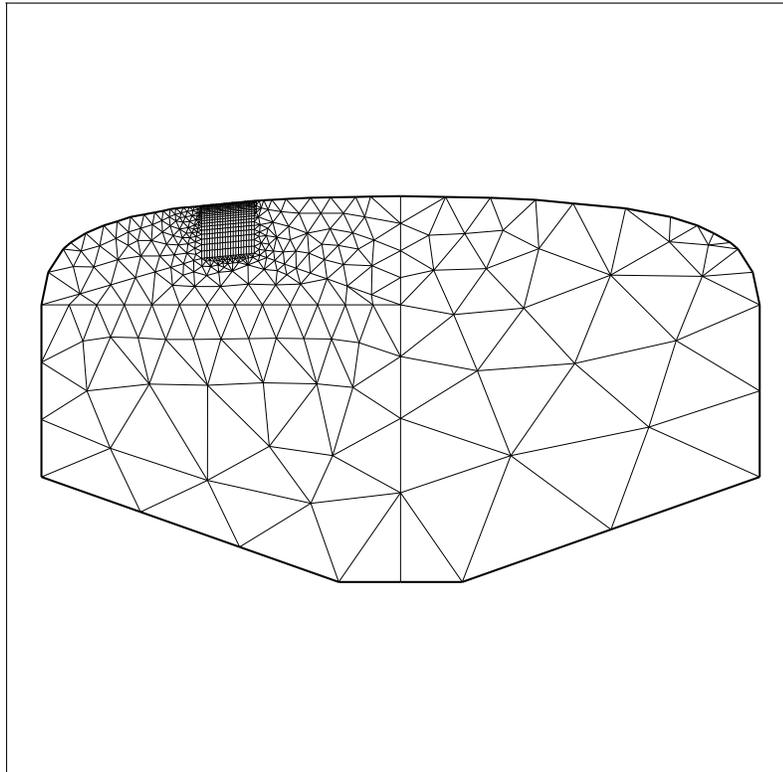


Figure 3.6: Maillage de champignon utilisé pour la prédiction du squat.

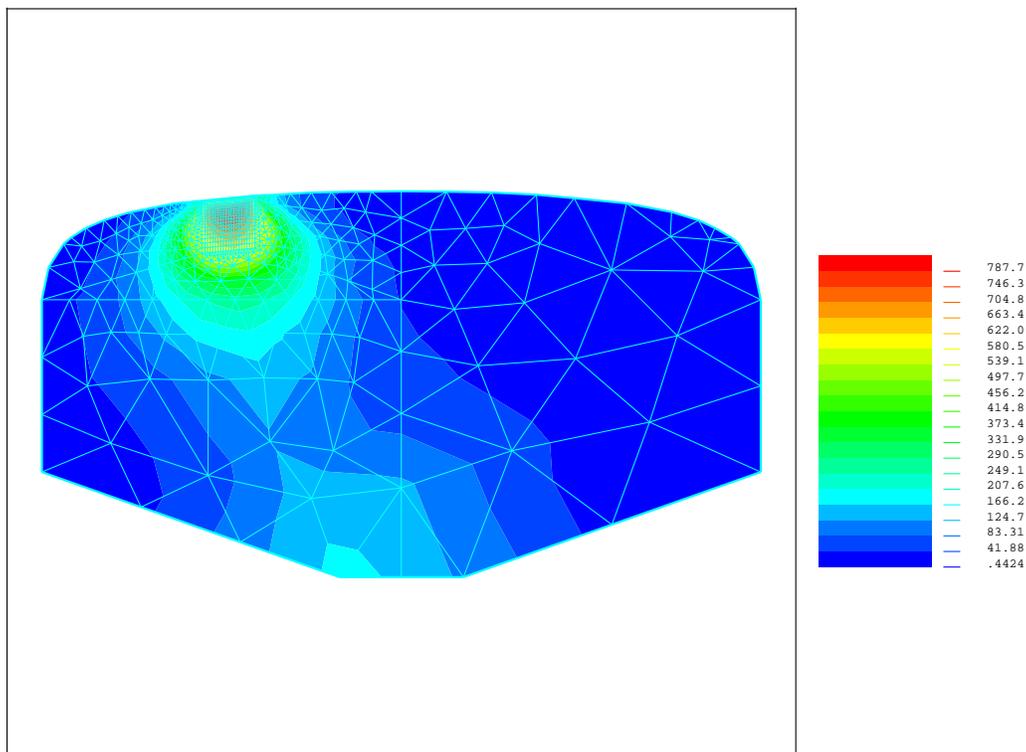


Figure 3.7: Isovaleurs des contraintes équivalentes de von Mises après le second passage du chargement

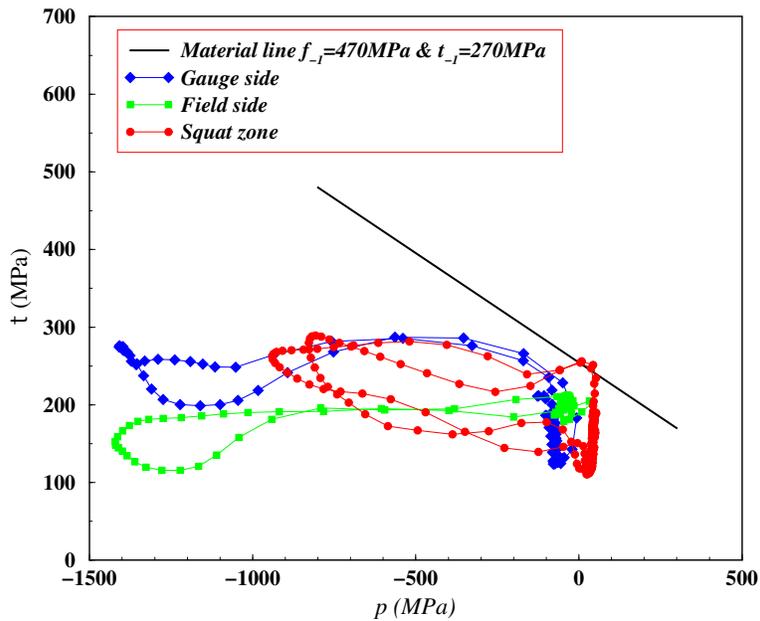


Figure 3.8: Prédiction de la fatigue : trajet de chargement en différents points de la surface

C'est un travail qui se poursuit et dont les développements futurs pourraient être :

- une meilleure prise en compte des chargements d'amplitude variable, ce qui constitue déjà le prolongement possible de nos études en fatigue polycyclique ;
- l'étude des transformations tribologiques de surfaces, notamment les couches blanches observées sur les rails et qui apparaissent comme un exemple de changement de phase métallurgique où la contrainte semble jouer un rôle primordial ;
- et enfin le problème de l'usure des rails (comme celui du meulage pour lutter contre la fatigue superficielle).

## Bibliographie

- [1] MAITOURNAM, M.H. Formulation et résolution numérique des thermoélastoviscoplasticques en régime permanent, Thèse de l'ENPC, Paris (1989).
- [2] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. Steady-state flow in classical elastoplasticity : application to repeated rolling and sliding contact, *J. Mech. Phys. Solids* Vol.41, N°11, pp. 1691-1710, (1993).
- [3] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H., PRASIL, P. Elastoplastic Analysis of Repeated Moving Contact: Application to railways damage phenomena, *Wear* 196, pp 77-81, (1996).
- [4] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. Thermomechanical state near rolling contact area, *Dissipative Processes in tribology*, Edited by D. Dowson et al., Elsevier Science B.V. pp. 423-428, (1994).
- [5] JOHNSON, K.L. The application of shakedown principles in rolling and sliding contact, *Eur. J. Mech., A/Solids 11* Special Issue, pp. 155-172, (1992).
- [6] BOWER, A.F., JOHNSON, K.L. The influence of strain hardening on cumulative plastic deformation in rolling and sliding line contact, *J. Mech. Phys. Solids*, 37(4) (1989) 471-493.
- [7] HEARLE, A.D., JOHNSON, K.L. Cumulative plastic flow in rolling and sliding line contact, *ASME J. Applied Mechanics*, 54 (1987) 1-5.

- [8] JOHNSON, K.L. Plastic flow, residual stress and shakedown in rolling contact, G.M.L. Gladwell, H. Ghonem and J. Kalousek (Ed.) in Proc. 2nd Int. Symp. on *Contact mechanics and wear of rail/wheel systems*, University of Waterloo Press, Canada, (1986) 83-97.
- [9] JOHNSON, K.L. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [10] JOHNSON, K.L., JEFFERIS, J.A. Plastic flow and residual stresses in rolling and sliding contact, *Proc. Inst. Mech. Eng. symp. on rolling contact fatigue*, London (1963) 50-61.
- [11] BOWER, A.F. Cyclic hardening properties of hard-drawn copper and rail steel, *J. Mech. Phys. Solids*, 37(4), pp. 455-470, (1989).
- [12] DANG VAN., K. Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach, in : Dang Van K., Papadopoulos I.V. (Éds), *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design*, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, pp. 57-88, (1999).
- [13] DANG VAN, K. Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, in D.L. McDowell and R. Ellis (eds), *Advances in multiaxial fatigue*, ASTM STP 1991, American Society for testing and Materials, Philadelphia, pp. 120-130, (1993).
- [14] DANG VAN, K. On structural integrity assessment for multiaxial loading paths, *Theoretical and concepts and numerical analysis of fatigue*, C.J. Beevers and A.F. Blom (Ed.), EMAS LTD (U.K.), pp. 343-357, (1993).
- [15] BALLARD, P., DANG VAN, K., DEPERROIS A., PAPADOPOULOS, I.V. High cycle fatigue and finite element analysis, *Fatigue and Fracture of Eng. Mat. & Struct* 18, 4, pp. 397-411, (1995).
- [16] ZARKA, J., FRELAT, J., INGLEBERT G., NAVIDI, P. *A new Approach to Inelastic Analysis of Structures*, Martinus Nijhoff Publisher, (1989).
- [17] SAKAE, C., KEER, L.M. Application of a direct method for a nonlinear-kinematic-hardening material under rolling/sliding line contact: constant ratchetting rate, *J. Mech. Phys. Solids*, 45(9), pp. 1577-1594, (1997).
- [18] YU, C.-C., MORAN, B., KEER, L.M. A simplified direct method for cyclic strain calculation: repeated rolling/sliding contact on a case hardened half space, *ASME J. Tribol.* 118, pp. 329-334, (1996).
- [19] YU, M., MORAN, B., KEER, L.M. A direct analysis of two-dimensional elastic-plastic rolling contact, *ASME J. Tribol.* 115, pp. 227-236, (1993).
- [20] LE THE HUNG Normal und Tangential Spanningsberechnung beim Rollen den Kontakt für Rotationskörper mit Nichtelliptischen Kontakt Flächen, *Fortschritts Ber. VDI*, 12, 87, (1987).



## Chapitre 4

# Application au fretting-fatigue

### 4.1 Problématique

Ce chapitre constitue une application des méthodes numériques de calcul de structures sous chargements cycliques et de prévision de la durée de vie en fatigue que nous avons développées à un problème particulier d'endommagement de contact : le problème du fretting-fatigue.

Le "fretting" désigne l'endommagement induit par le contact entre deux solides soumis des débattements de faible amplitude. Ces derniers en général n'entraînent pas de glissement total entre les surfaces en contact, mais produisent des glissements partiels (de l'ordre de quelques microns à quelques centaines de microns) dans une certaine zone du contact et une adhérence dans le reste du contact. Ce phénomène se rencontre dans les assemblages mécaniques de pièces localement en compression et soumises à des vibrations ou des fluctuations d'efforts. Dans le domaine de l'aéronautique, il est responsable de la diminution de la durée de vie des pièces d'hélicoptères et d'avions, telles que les chapes, les structures rivetées : il est crucial de le prendre en considération dans la maintenance des avions âgés. Il se manifeste aussi dans les essieux des trains par suite des petits débattements induits par les flexions rotatives au voisinage des zones de calage de roues sur les essieux-axes, comme au niveau hélices ou des aubes de moteurs de navires et d'avions. Le secteur du bâtiment et des travaux publics n'est pas à l'abri des avaries causées par le fretting notamment la rupture des câbles utilisés dans la construction des ponts suspendus ou à haubans du fait des frottements et des flexions répétés de service au voisinage de leur point d'ancrage.

Le fretting est responsable d'une compétition de divers endommagements tels que l'usure, la corrosion et la fissuration de fatigue. Selon le mode de sollicitation, mais en réalité selon surtout le type prédominant de dégradation, on parle de fretting-wear, de fretting-corrosion ou de fretting-fatigue. Le mode de fissuration est le plus dangereux pour la tenue des pièces en service. Le fretting agit comme facteur de réduction de la durée de vie de structure. Ainsi, dans certains cas, le fretting réduit la limite de fatigue jusqu'à de 60%. C'est pour cela qu'il constitue la préoccupation majeure des concepteurs. Son importance a généré beaucoup des travaux expérimentaux qui ont été menés pour donner des solutions et des règles pratiques aux bureaux d'études devant concevoir des pièces soumises au fretting. Pendant longtemps, l'influence du fretting sur la fatigue est traduite en terme d' "abattement" par rapport à la limite nominale de fatigue.

Les études théoriques effectuées sur le fretting souffraient de deux types de lacunes. Le premier était lié au calcul des contraintes induites par le contact oscillatoire. Celui est en général élastique, analytique. Ce calcul n'est plus valable lorsqu'on est présence de déformation plastique [Waterhouse, 38]. Il est alors nécessaire d'effectuer des calculs anélastiques jusqu'à l'obtention de l'éventuel état stabilisé. Le deuxième type de lacunes était lié aux critères d'endommagement utilisés notamment pour l'amorçage de fissures de fatigue. Divers critères spécifiques ont été proposés, comme le critère de Ruiz mis au point

pour des conditions particulières d'essais et de matériaux et dont de nombreux travaux ont montré le manque de généralité.

Il s'agit pour nous, de mettre au point une démarche permettant de prévoir par le calcul le type de dommage ainsi que l'amorçage de fissurations de fretting. Pour atteindre cet objectif, nous avons collaboré avec le Laboratoire de Tribologie et des Systèmes dynamiques de l'École Centrale de Lyon spécialiste des essais dans le domaine. Nous allons succinctement parler de la démarche expérimentale pour surtout évoquer la méthodologie globale que nous avons adoptée et appliquée. Il s'agit pour le calcul des contraintes dues aux contacts répétés de la méthode cyclique directe, méthode qui a initialement été développée pour ce problème particulier, et pour la fatigue à grand nombre de cycles de l'utilisation systématique des critères "macro-meso" développés par Dang Van et al.

## 4.2 Étude expérimentale du fretting

### 4.2.1 Dispositifs expérimentaux

Jusqu'à présent, la démarche expérimentale est primordiale dans l'étude du fretting. Elle vise à d'une part à comprendre le phénomène lui-même, l'interaction des différents processus mécaniques, métallurgiques et chimiques (plasticité, changements de phase, corrosion, fissuration, etc.), à établir des critères de sélection de matériaux et de traitements de surface. Deux types d'essais sont effectués [9, 10, 26, 34, 36].

- L'essai de fretting-wear (figure 4.1), constitué d'un échantillon fixe dont on veut tester la résistance au fretting mis en contact avec un poinçon mobile. Le poinçon peut être de diverses formes, en général cylindrique ou sphérique. Un effort normal constant  $N$  est exercé sur le poinçon. Ce dernier subit un mouvement oscillatoire de faible amplitude, dont le débattement  $D$  est fixé. La valeur de l'effort tangentiel  $T$  est mesurée tout au long de l'essai. Cette configuration est surtout utilisée pour étudier l'usure d'où le nom de fretting-wear.

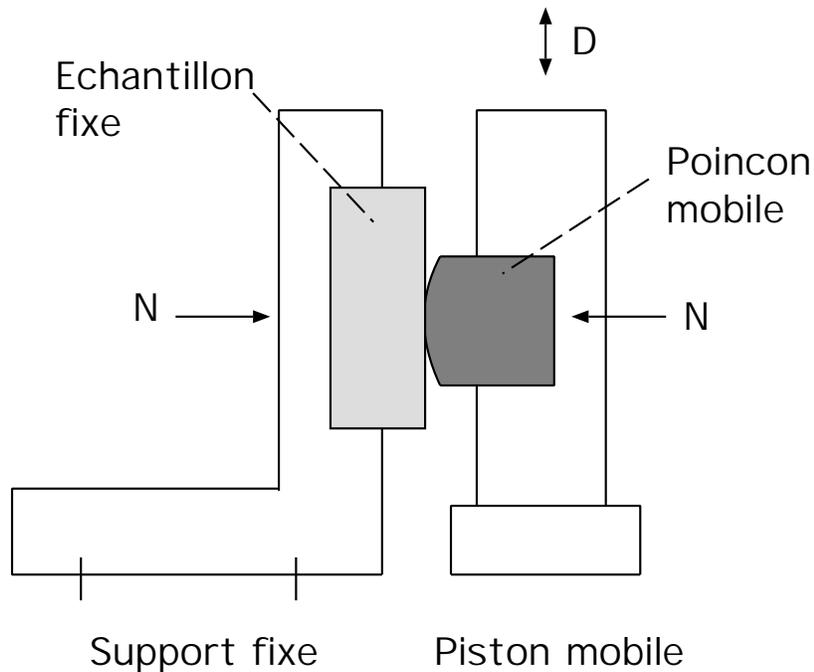


Figure 4.1: Schéma du montage expérimental du fretting

- L'essai de fretting-fatigue (figure 4.2), constitué par exemple d'une éprouvette mince d'une certaine épaisseur, sur laquelle est fixé un patin de forme cylindrique ou sphérique appuyé contre la surface de l'éprouvette avec un effort normal  $P$ . Elle est soumise à une contrainte de fatigue  $S(t)$ . Un mouvement relatif entre l'éprouvette et le patin, de débattement répétitif, est induit par la sollicitation de fatigue  $S(t)$ . L'effort tangentiel  $T(t)$  est mesuré dans le bras. Cette configuration est surtout utilisée pour étudier la fissuration dont la propagation, après amorçage, est favorisée par le champ de contrainte régnant dans l'échantillon.

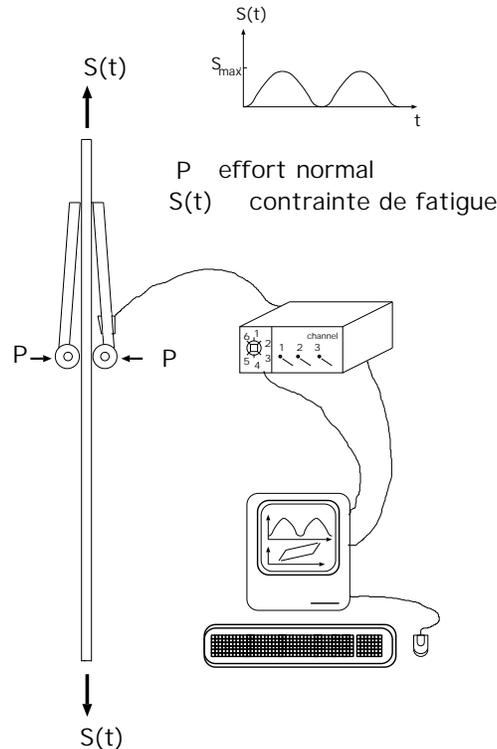


Figure 4.2: Schéma du montage expérimental du fretting-fatigue (Petiot)

### 4.2.2 Régimes de contact en fretting ; cartes de fretting

L'analyse des résultats d'essais de fretting est effectuée en termes de conditions de glissement, et d'effort tangentiel. Ainsi, l'évolution de ce dernier en fonction du débattement et du nombre de cycles donnent des courbes appelées "bûche de fretting" [Vincent et al., 33, 36]. Différents régimes de glissement, fonctions de la courbe stabilisée obtenue sont répertoriés (figure 4.3).

- Régime de collage. La courbe stabilisée effort tangentiel-déplacement est quasiment linéaire pour ces petites amplitudes de débattement. Le débattement imposé est (presque) entièrement accommodé au niveau des échantillons de manière élastique. Dans ce régime, on n'observe pas de dégradations.
- Régime mixte. Lorsque l'amplitude du débattement est plus grande, les boucles de fretting prennent une forme elliptique. Un glissement notable apparaît en périphérie de la zone de contact. Ce régime est associé à de la fissuration en bordure de la zone de contact ainsi qu'à de l'usure douce limitée.

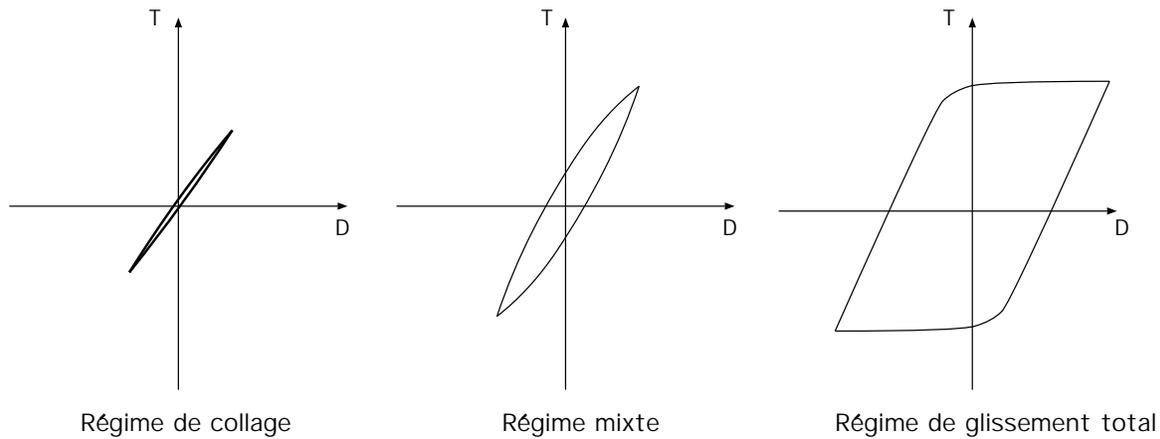


Figure 4.3: Régimes de fretting

- Régime de glissement total. Ce mode correspond à un glissement total des surfaces des deux échantillons. Les boucles de fretting prennent une forme de parallélogramme avec un palier de l'effort tangentiel correspondant à la phase de glissement total. La longueur de ce palier donne le déplacement réel à l'interface. Ce régime est caractérisé par un creusement notable au niveau de la zone de contact révélant ainsi une usure importante.

### 4.2.3 Cartes de fretting

Les réponses expérimentales de la structure sont analysées en termes de cartes de fretting. La carte définissant les différents régimes de glissement a été introduite par Vingsbo et al. [35] et complétée par Vincent et al. [34] : c'est la RCFM (Running Condition Fretting Map). Puis la MRFM (Material Response Fretting Map) donnant les types de dégradations obtenues pour les différents types de régimes, est établie. La figure (4.4) est un exemple de telles cartes, montrant les types d'endommagements pour un essai de fretting sur un alliage d'Aluminium [Zhou, 36]. Ainsi, on distingue les types suivants de réponses du matériau.

- Non dégradation. Elle survient en régime de collage, où jusqu'au delà du million de cycles, aucune dégradation des échantillons n'est révélée par l'expertise métallographique et la microscopie optique. Le profil du plan après coupe ne présente pas de fissures et ne révèle aucune trace d'usure.
- Fissuration. Elle apparaît en régime mixte avec des fissures qui s'amorcent en surface (figure 4.5) et se développent en périphérie de contact de manière symétrique. Les fissures se propagent, tout d'abord, de façon oblique vers l'intérieur de la zone de contact puis tournent pour devenir perpendiculaires à la surface. D'autres fissures de moindre importance, peuvent se développer près des bords, dans la zone de contact ; Elles s'arrêtent en général assez rapidement. L'examen de la surface montre des faibles traces d'usure en périphérie. La réponse en régime mixte est donc essentiellement de la fissuration.
- Détachement de particules. Il a lieu en régime de glissement total et se traduit par une usure sévère. Une coupe des échantillons en profondeur montre le creusement du profil dû au détachement de particules de la zone de contact. Les coupes micrographiques ne révèlent pas de fissures. Celles-ci peuvent s'initier mais sont éliminées par l'usure.

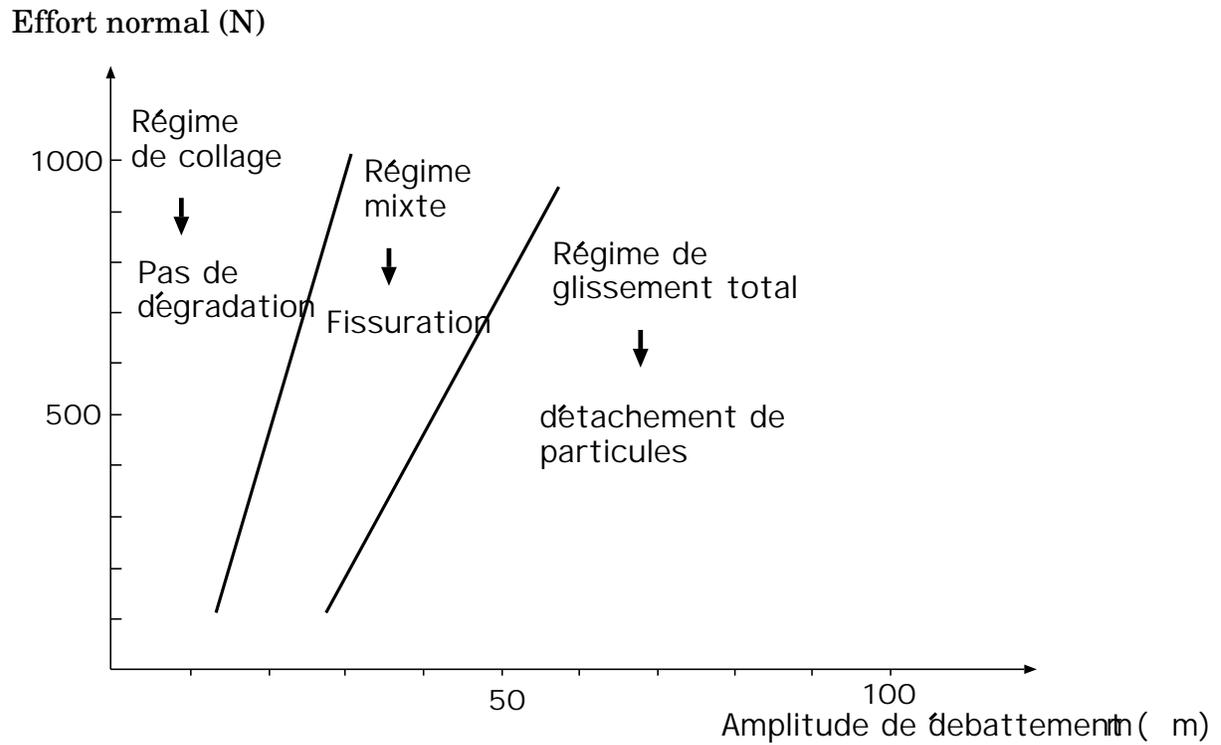


Figure 4.4: Carte de sollicitation et de réponse du matériau, d'après Zhou (1992)

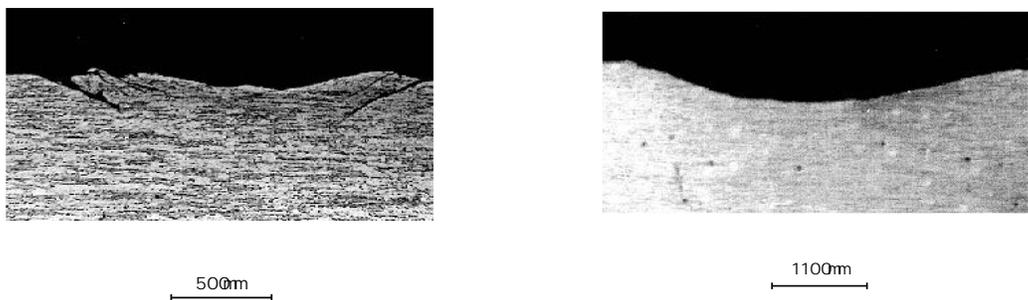


Figure 4.5: Fissuration et usure dues au fretting, d'après Zhou

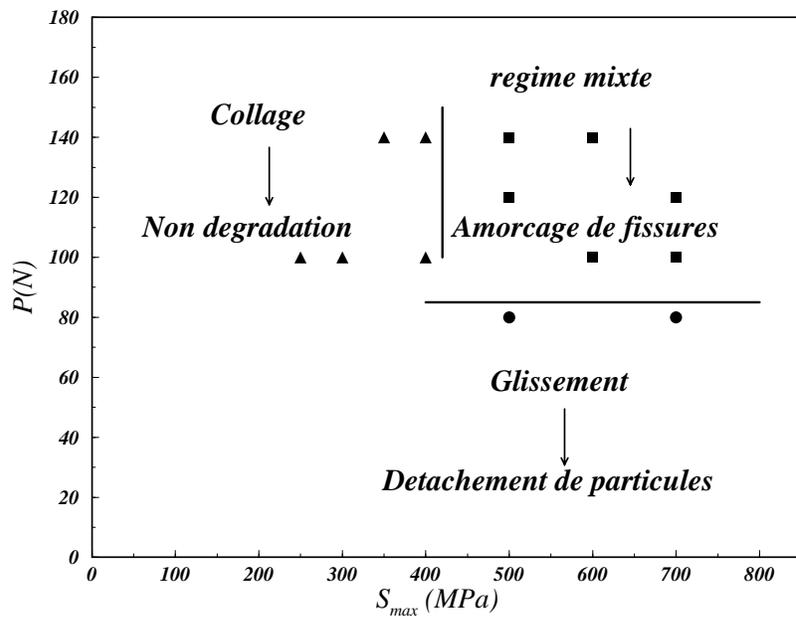


Figure 4.6: Carte de fretting-fatigue d'après C. Petiot (1994)

## 4.3 Prédiction de l'endommagement en fretting-fatigue

### 4.3.1 Méthodologie

L'étude expérimentale du fretting a ainsi abouti à l'établissement de cartes de fretting (RCFM et MRFM) qui, en fonction des sollicitations extérieures, donnent la nature des endommagements éventuels subis par l'échantillon (non dégradation, fissuration ou usure). Même si ces cartes permettent de comprendre qualitativement le lien entre le glissement et les avaries, elles peuvent difficilement permettre de dimensionner une structure vis-à-vis du fretting lorsque les échelles ou les configurations de celle-ci sont trop différentes de celles ayant servi à leurs établissements. C'est donc pourquoi, une démarche quantitative intrinsèque applicable aux structures est nécessaire. Dans ce but, nous avons considéré les dispositifs de fretting comme des structures auxquelles nous avons appliqué une approche classique nécessitant seulement la mise au point d'une méthode numérique appropriée. Cette méthodologie découplée, où on suppose l'établissement d'un régime mécanique stabilisé avant l'endommagement, comprend :

- le calcul, par la méthode cyclique directe, de l'état de contraintes à l'état stabilisé sous le chargement cyclique de fretting fatigue : cet état nous renseignera sur la nature du régime de fretting ; adaptation signifiera fatigue à grand nombre de cycles et fissuration ; accommodation équivaldrait à fatigue à nombre de cycles et usure ; enfin rochet entraînera de l'usure sévère ;
- l'application du critère d'avaries ad hoc ; ainsi dans le domaine de la fissuration nous montrons que l'utilisation d'un critère de fatigue multiaxiale comme celui de Dang Van, permet de prédire l'amorçage des fissures ; dans le domaine de l'usure, nous montrons que la structure est accommodée, mettant ainsi en évidence le mécanisme d'usure par plasticité superficielle cyclique.

Dans ce mémoire, nous rappelons seulement l'interprétation et la simulation numérique des essais effectués par Petiot [26] sur l'acier 32CDV13 utilisé dans les rotors d'hélicoptères à l'Aérospatiale. Cette étude comprend en grande partie des travaux effectués lors de la thèse de Maouche [22]. Il s'agit donc en considérant l'éprouvette comme une structure de donner une interprétation numérique complète de la carte de fretting (fig. 4.6).

### 4.3.2 Structure étudiée

Le montage considéré est celui de la figure (4.2). Il est constitué d'éprouvette plane et de deux patins cylindriques de diamètre de 10 mm venant s'appuyer avec un effort normal constant  $P$  sur deux faces opposées de celle-ci. Toutes les données géométriques et mécaniques de l'essai sont présentées [26]. L'éprouvette est soumise à une sollicitation de fatigue  $S(t)$  variant entre  $0.1S_{max}$  et  $S_{max}$  qui conduit à un déplacement du patin à petite amplitude de débattement. Un système d'acquisition donne, à l'aide de jauges fixées dans le bras, la déformation dans ce dernier et donc aussi l'effort tangentiel  $T(t)$  pendant le cycle. Les essais sont réalisés à une fréquence de 20 Hz. L'éprouvette est en acier 32CDV13 qui est un matériau utilisé dans les pièces tournantes d'hélicoptères. Le patin est en acier 100C6 beaucoup plus dur utilisé dans les bagues. Le tableau 4.1 donne les propriétés mécaniques de l'acier 32CDV13 de l'échantillon et de l'acier 100 C6 du patin.

Les limites de fatigue du 32CDV13 obtenues par des essais de fatigue classiques en flexion et en torsion alternée sont :

La carte de fretting-fatigue établie pour cet essai est reportée sur la figure 4.6.

### 4.3.3 Définition du chargement

Comme nous l'avons déjà annoncé, la détermination de l'état stabilisé sous le chargement cyclique du contact oscillant est la première étape de notre modélisation. En fait, nous avons préféré simplifier

	$\sigma_y$ (MPa)	$\sigma_R$ (MPa)	E (GPa)	C (GPa)	Dureté (Hv)
32CDV13	980	1140	215	60	360
100C6	1700	2000	210		62

Tableau 4.1: Propriétés mécaniques des aciers 32CDV13 et 100C6 ( $\sigma_y$  limite d'élasticité en traction,  $\sigma_R$  limite de rupture en traction, E module de Young, C module d'érouissage cinématique)

Limite de fatigue en flexion alternée	594 MPa
Limite de fatigue en torsion alternée	380 MPa

Tableau 4.2: Limites de fatigue du matériau

en ne traitant pas le problème du contact, mais en utilisant une estimation des contraintes de contact normales et tangentielles, effectuée par Nowell et Hills [25] pour le fretting-fatigue. Ces derniers les calculent analytiquement considérant un cylindre élastique soumis à un effort normal  $P$  en contact avec un demi-espace élastique à un effort tangentiel  $T$  et à une contrainte en volume  $S$ , avec une loi de frottement de Coulomb.

Les distributions de contraintes de contact obtenues, ainsi que les zones de glissement ou de collage (de largeur  $c$ ) sont données dans [Maouche et al., 23].

Dans les conditions de l'expérience de fretting-fatigue décrite auparavant, l'effort de cisaillement  $T(t)$  est lié à la contrainte cyclique de fatigue  $S(t)$ . L'effort ne peut être connu qu'en faisant un calcul de structures en maillant le patin et l'éprouvette et en mettant des éléments de contact à l'interface. Le calcul quoique coûteux a été effectué par Petiot [26].

On rappelle que, dans les essais, sont imposés l'effort normal  $P$  et l'effort de fatigue  $S$ , sont mesurés l'effort tangentiel  $T$  et le coefficient de frottement  $\mu$ . Le chargement considéré pour l'éprouvette modélisée par un demi-espace infini correspond à :

- une pression normale hertzienne constante :  $p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$   
où  $p_0$  et  $a$  sont calculés à partir du contact non conforme patin cylindrique de rayon  $R_2 = 5mm$  sur la facette plane  $R_1 = \infty$  de l'éprouvette (Le calcul général Hertzien est présenté dans l'annexe B). Pour les valeurs de l'effort normal imposé dans l'intervalle  $[80N, 140N]$ , la pression maximum de Hertz  $p_0$  est de ce fait dans l'intervalle  $[545 \text{ MPa}, 720 \text{ MPa}]$  et la demi-largeur de Hertz est dans la gamme  $[50 \mu m, 60 \mu m]$ .
- Une contrainte de fatigue  $S(t)$  variant entre  $S_{min} = 0.1S_{max}$  et  $S_{max}$ .
- Des contraintes tangentielles résultant de l'effort tangentiel cyclique qu'on définira par la suite.

A partir des régimes de glissement (partiel ou total) observé expérimentalement et des valeurs de l'effort tangentiel maximum mesuré à l'état stabilisé, on adopte pour l'effort tangentiel et les contraintes tangentielles les cycles stabilisés définis ci-dessous.

- Glissement partiel. Il survient en régime de collage ou en régime mixte. Les courbes  $T(t) - S(t)$  (boucles de fretting) à l'état stabilisé sont quasiment linéaires avec une forme elliptique plus prononcée pour le cas de régime mixte. La relation entre  $S(t)$  et  $T(t)$  est choisie linéaire :

$$T(t) = K S(t)$$

où :  $K = T_{max}/S_{max}$  et  $T_{max}$  est l'effort tangentiel maximum mesuré.

On va simuler les points correspondant aux  $(S_{max}, P)$  indiqués sur la carte de fretting (figure 4.6). Le tableau 4.3 donne les valeurs des paramètres pour les points simulés:

$P(N)$	$S_{max}(MPa)$	$T_{max}(N)$ (mesuré)
140	600	97
140	350	53
140	500	65
100	400	58
100	600	80

Tableau 4.3: Points simulés en régime en glissement partiel

On remarque que  $\frac{S}{\mu p_0} \leq 4(1 - \sqrt{1 - T/\mu P})$  pour toutes les valeurs du tableau, ce qui signifie que les contraintes tangentielles ont le profil de la figure 4.7 avec une zone d'adhérence excentrée. L'excentricité est peu importante (de l'ordre de  $0.2a$ ) dans les cas envisagés. Hills 25 montre analytiquement qu'il existe peu de différence entre les calculs effectués avec ces contraintes tangentielles et avec celles résultant des distributions de Mindlin. Nous avons adopté pour notre modélisation des contraintes tangentielles de Mindlin.

L'effort tangentiel décrit un cycle entre  $T_{min}$  et  $T_{max}$  non symétrique et les contraintes tangentielles deviennent cycliques au bout d'un demi cycle de chargement.

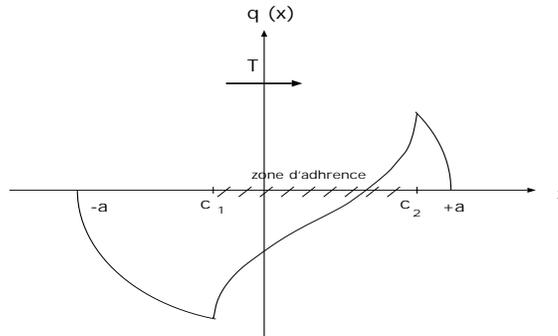


Figure 4.7: Contraintes tangentielles en fretting-fatigue

En A (figure 4.8) ( $T = T_{min}$ ), les contraintes tangentielles sont la superposition de celles résultantes du chargement pendant le premier demi-cycle jusqu'à  $T_{max}$  et de celles obtenues durant la décharge de la quantité  $\Delta T = T_{min} - T_{max}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad c_{min} \leq |x| \leq a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2 \frac{c_{min}}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{min}^2}} \right] \quad c_{min} \leq |x| \leq c_{max} \\ q(x) = -\mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2 \frac{c_{min}}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{min}^2}} \right. \\ \quad \left. + \frac{c_{max}}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{max}^2}} \right] \quad |x| \leq c_{max} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$c_{max}$  est donné par :

$$\frac{c_{max}}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max}}{\mu P}}$$

et  $c_{min}$  par :

$$\frac{c_{min}}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max} - T_{min}}{2\mu P}}$$

Celles correspondant à l'effort tangentiel en B sont obtenues par superposition de celles obtenues en A et de celles qui résultent de l'effort tangentiel  $T(t) - T_{min}$  avec une zone de collage  $c$  qui dépend de  $T(t)$ . Soit au total :

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad c \leq |x| \leq a \\ q(x) = \mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2\frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \right] \quad c_{min} \leq |x| \leq c \\ q(x) = \mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2\frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} + 2\frac{c_{min}}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{min}^2}} \right] \quad c_{min} \leq |x| \leq c_{max} \\ q(x) = \mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2\frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \right. \\ \left. + 2\frac{c_{min}}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{min}^2}} - 2\frac{c_{max}}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{max}^2}} \right] \quad |x| \leq c_{max} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec :  $c$  qui s'exprime en fonction de  $T$  par :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{T - T_{min}}{2\mu P}}$$

Entre la phase C et D, les contraintes pour l'effort s'obtiennent par superposition de celles correspondant à  $T_{max}$  et celles de  $T - T_{max}$  et sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad c \leq |x| \leq a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2\frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \right] \quad c_{max} \leq |x| \leq c \\ q(x) = -\mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2\frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \right. \\ \left. + \frac{c_{max}}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{max}^2}} \right] \quad |x| \leq c_{max} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où  $c$  est donné en fonction de  $T$  par :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max} - T}{2\mu P}}$$

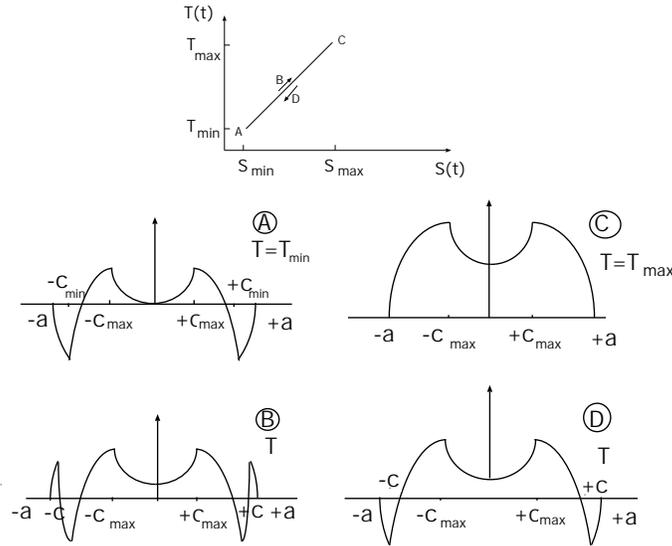


Figure 4.8: Chargement adopté en fretting-fatigue en cas de glissement partiel

- Glissement total. Pour certaines valeurs de  $(P, S_{max})$ , il est observé expérimentalement un glissement total qui induit une usure forte et un détachement de particules. Les courbes représentant l'effort tangentiel en fonction de la contrainte  $S(t)$  ont une forme de parallélogramme avec un palier horizontal qui correspond au glissement total. L'effort tangentiel varie donc linéairement en fonction de  $S(t)$  avec un coefficient de proportionnalité  $K$  (la même qu'en glissement partiel). Lorsque la contrainte  $S(t)$  atteint les valeurs critiques  $S_{g1} = S_{min} + 2K\mu P$  ou  $S_{g2} = S_{max} - 2K\mu P$ , il y a glissement total et l'effort tangentiel est saturé à  $\pm\mu P$  suivant le sens du glissement. La figure 4.6 montre les points simulés correspondants aux valeurs de l'effort normal  $P$  et du maximum de la contrainte  $S_{max}$  représentés dans le tableau 4.4.

$P(N)$	$S_{max}(MPa)$
80	500
80	700

Tableau 4.4: Points simulés en régime en glissement total

On vérifie que pour ces données, les contraintes tangentielles sont de type montrées sur la figure 4.9. Le décalage  $e$  de la zone de collage due à la contrainte  $S(t)$  n'est pas très important ( $e$  est de l'ordre de  $0.2a$ ). On adoptera comme dans le cas précédent des contraintes tangentielles de Mindlin.

Le cycle des contraintes tangentielles dues à l'évolution de l'effort tangentiel en fonction de la contrainte volumique de fatigue  $S(t)$  est représenté sur la figure 4.9.

Partant de la valeur  $-\mu P$  (configuration A), l'effort tangentiel varie donc linéairement en fonction de  $S(t)$ . Les contraintes tangentielles valent :

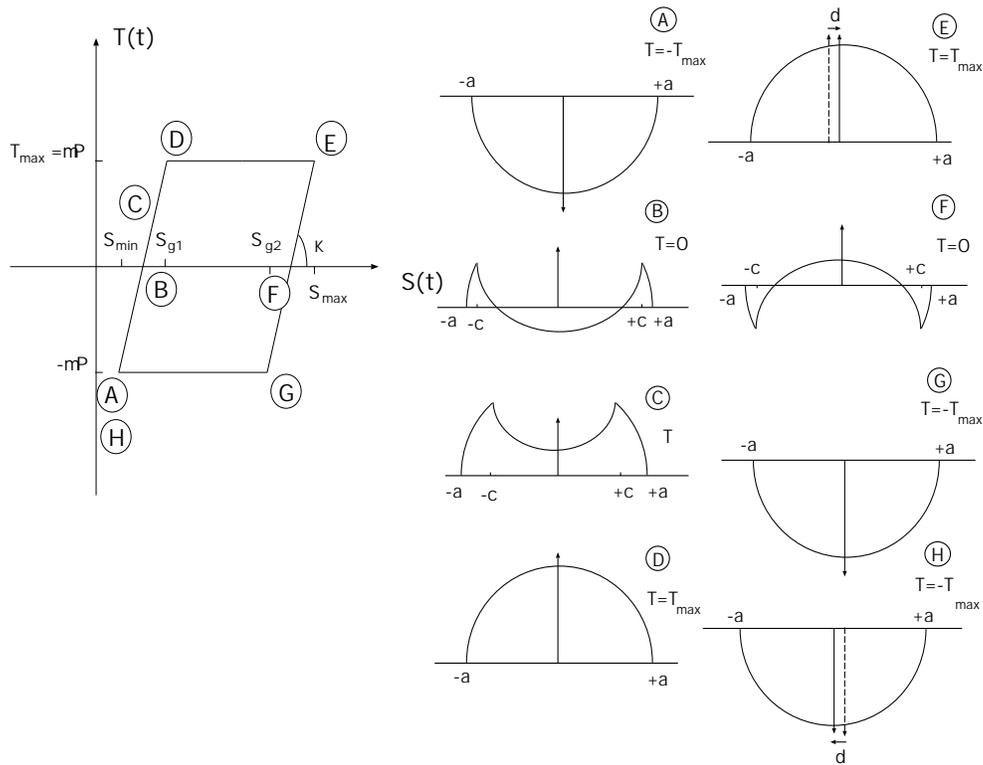


Figure 4.9: Chargement adopté en fretting-fatigue en cas de glissement total

$$\begin{cases} q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = \mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2\frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \right] & |x| \leq c \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $c$  vaut :  $\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{\mu P + T}{2\mu P}}$

Quand celle-ci atteint la valeur  $S_{g1}$ , il y a glissement total et l'effort tangential reste bloqué à la valeur  $\mu P$ , le chargement se déplace d'une valeur  $\delta$  dans le sens de l'effort précédent jusqu'à la configuration E où la contrainte  $S(t)$  atteint son maximum  $S_{max}$ .

Puis à partir de la configuration E,  $S(t)$  commence à diminuer et l'effort tangential diminue proportionnellement et les contraintes tangentielles résultantes valent dans cette phase :

$$\begin{cases} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - 2\frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \right] & |x| \leq c \end{cases} \quad (4.5)$$

$$c \text{ est donné par : } \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{\mu P - T}{2\mu P}}$$

Quand  $S(t)$  atteint en diminuant la valeur  $S_{g2}$  dans la configuration G, l'effort tangentiel atteint la valeur  $-\mu P$ . Il y a glissement total et déplacement du chargement d'une distance  $\delta$  dans le sens de l'effort tangentiel jusqu'à retrouver la position initiale H (qui est la même que A) décrivant ainsi un cycle entier.

L'amplitude de déplacement est prise égale à  $0.25a$ .

#### 4.3.4 Simulation numérique et prédiction des endommagements

Le calcul est effectué en déformations planes avec un maillage de quelques milliers éléments. La zone du contact est maillée d'une façon plus fine avec une taille de maille de l'ordre de  $a/10$  soit ici égale à  $6 \mu m - 8 \mu m$  (de l'ordre de la taille du grain).

Le comportement du matériau est supposé élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire avec les caractéristiques données dans le tableau 4.1. Les limites de fatigue sont quant à elles reportées dans la table 4.2.

##### Analyse numérique du cas du collage - glissement partiel

Les paramètres de chargement utilisés sont ceux du tableau 4.3. Ils conduisent tous à un état stabilisé adapté et donc vers un état de déformation plastique fixe. Ceci génère bien sûr des contraintes résiduelles qui se rajoutent aux contraintes purement élastiques influençant du même coup le comportement à la fatigue. Le maximum des déformations plastiques est localisé en bordure de contact du côté en traction sous l'effet de l'effort tangentiel ( $x = -a$ ).

L'état stabilisé étant élastique, le critère de fatigue multiaxiale de Dang Van est utilisé pour prédire l'amorçage des fissures pour ces différents cas de chargements. Comme pour la déformation plastique, le point le plus critique (susceptible de se fissurer en premier) se trouve en bordure de contact du côté en traction sous l'effet de l'effort tangentiel. Ceci coïncide bien avec les observations expérimentales. Les trajets de cisaillement mésoscopique-pression hydrostatique pour ce point sont représentés sur la figure 4.14. Celle-ci montre, pour les régimes dits mixtes, la concordance des prédictions numériques avec les observations expérimentales. De même, les calculs donnent pour les régime de collage des trajets  $(\tau, p)$  qui ne conduisent à aucun endommagement, comme l'ont montré les expertises faites après ces essais. A titre d'illustration, on s'intéresse au cas du chargement donné par les paramètres  $P = 100N$  et  $S_{max} = 600MPa$ . Les isovaleurs de la déformation plastique équivalente stabilisée sont représentées sur la figure 4.10. Le niveau d'endommagement de fatigue donné par la quantité  $\alpha = \max_t \frac{b - ap(t) - \tau(t)}{b}$  sont montrés sur la figure 4.11.

##### Analyse numérique du cas du glissement total

Les paramètres de chargement utilisés sont ceux du tableau 4.4. Ils conduisent tous à un état stabilisé accommodé, c'est-à-dire à un cycle fermée de déformation plastique. Ceci génère de la fatigue plastique en surface qui conduit à de l'enlèvement de matière. Il apparaît donc que l'usure, qui est le type d'endommagement obtenu en glissement total, est associée à un processus de plastification cyclique du matériau dans la zone de contact. Cette conclusion rejoint celle des travaux de Johnson et Kapoor [19] et Kim et Ludema [29] qui soulignent que le mécanisme d'usure est dû à la plasticité cyclique au niveau de la surface. L'usure par fatigue se fait par détachement de matière en forme de fines plaquettes connu sous le nom de délamination (Suh [32]). Ce mécanisme a été longtemps étudié en terme de fissures parallèles à la surface par l'application de la mécanique linéaire de la rupture [11, 16, 31]. Mais il est connu que l'usure se produit avec un frottement important, ce qui génère des déformations plastiques et un écrouissage du matériau à la surface. Ceci est confirmé par les coupes faites en dessous des zones usées mettant

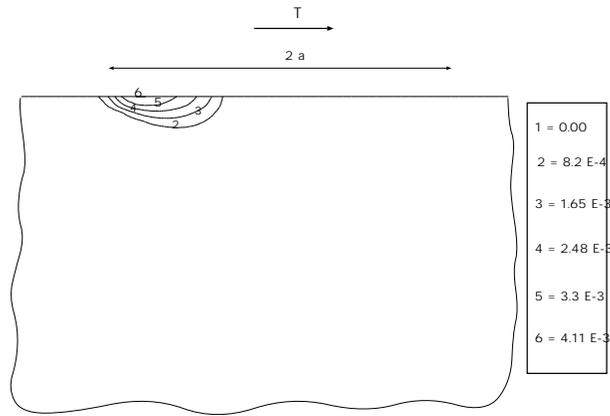


Figure 4.10: Isovaleurs de la déformation plastique équivalente à l'état adapté en glissement partiel ( $P = 100N$  et  $S_{max} = 600MPa$ )

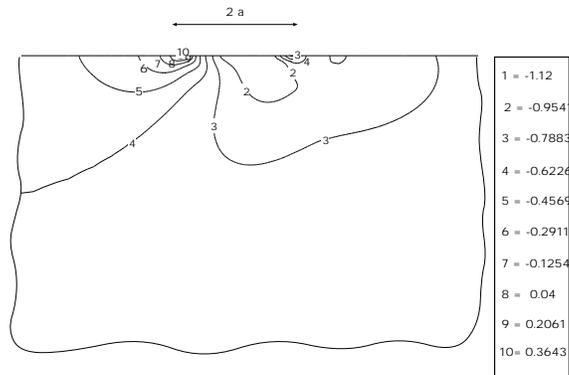


Figure 4.11: Isovaleurs du critère de Dang Van

en évidence un fort couchage de fibres. Ce qui conforte la thèse que l'usure est plus un phénomène induit par la plasticité cyclique et non par un mécanisme de fissuration fragile. Les expériences de glissement d'un pion sur disque avec différents conditions de chargements et différents matériaux, réalisées par Kim et Ludema [29] montrent une bonne corrélation entre le nombre de cycles à l'usure (sévère) de fatigue et les propriétés mesurées de fatigue oligocyclique (paramètres de la loi de Manson-Coffin). Rappelons aussi que Muller [30] a ébauché, sur cette idée, la construction d'un modèle quantitatif d'usure fondée sur les déformations plastiques et taux de rochet calculées.

A titre d'illustration, on s'intéresse au cas du chargement donné par les paramètres  $P = 80N$  et  $S_{max} = 500MPa$ . Les isovaleurs de la déformation plastique équivalente à l'instant du cycle stabilisé où l'effort tangentiel est nul (position F pour le cycle de chargement en glissement total dans la section 4.9) sont représentées sur la figure 4.12. Elles sont non nulles sur une zone de la dimension du contact et atteignent des valeurs de l'ordre de  $10^{-2}$ . Elles sont donc plus importantes qu'en glissement partiel où elles sont de l'ordre de  $10^{-3}$  (figure 4.10). Les niveaux d'endommagement de fatigue donnés par la quantité  $\alpha = \max_t \frac{b - ap(t) - \tau(t)}{b}$  sont montrés sur la figure 4.11. Le cycle contrainte-déformation à l'état stabilisé est non linéaire en certains points (figure 4.13).

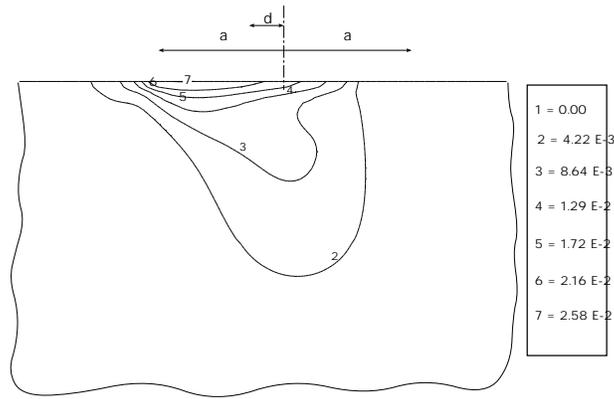


Figure 4.12: Isovaleurs des déformations plastiques équivalentes en régime de glissement total en fretting-fatigue  $P = 80\text{ N}$ ,  $S_{max} = 500\text{ MPa}$

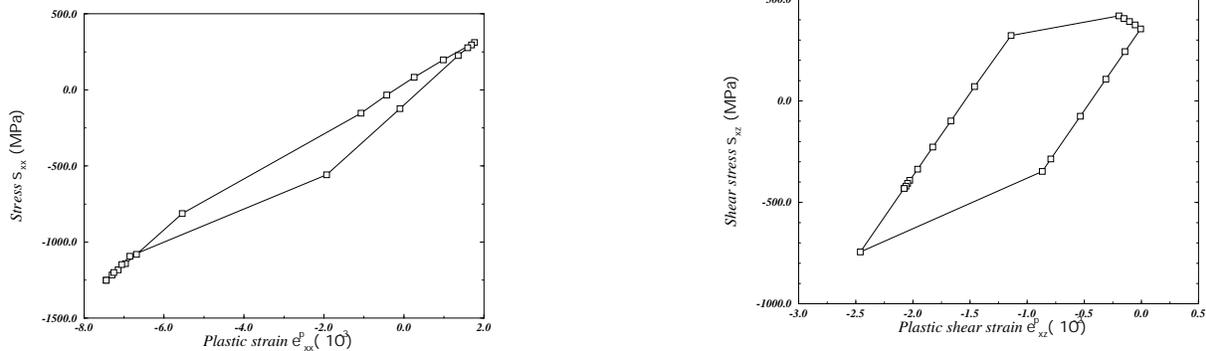


Figure 4.13: Cycle contrainte-déformation fretting-fatigue en glissement total  $P = 80\text{ N}$ ,  $S_{max} = 500\text{ MPa}$

## 4.4 Conclusion et perspectives

Un des intérêts de cette étude théorique, venant s'associer à un programme expérimental, est de montrer que la fissuration par fretting-fatigue relève d'un problème classique de fatigue ; sa prédiction se fait par un critère classique de fatigue polycyclique multiaxiale, identifié sur les essais usuels indépendamment de la structure étudiée.

Ainsi, une interprétation complète de la carte de fretting-fatigue a été effectuée grâce à une modélisation numérique qui allie le calcul cyclique directe et les critères de fatigue. La prédiction de l'endommagement est quantitative en fatigue à grand nombre de cycles, avec un bon accord avec les résultats expérimentaux sur les valeurs limites des paramètres de chargement et les sites d'amorçage. Elle est essentiellement qualitative en ce qui concerne les faibles nombre de cycles et l'usure. Néanmoins, les calculs effectués dans le domaine de l'accommodation sont un précieux indicateur sur le mécanisme d'usure dans ce régime. L'usure par fatigue est liée à la plasticité cyclique ou au rochet. Elle se ferait par détachement de matière en fines plaquettes suite à la rupture par fatigue oligocyclique, comme le montrent certains résultats expérimentaux.

Les suites de ce travail pour une modélisation quantitative complète de la carte de fretting porteront sur les lois d'endommagement en régime d'accommodation et de rochet, à savoir les lois de fatigue

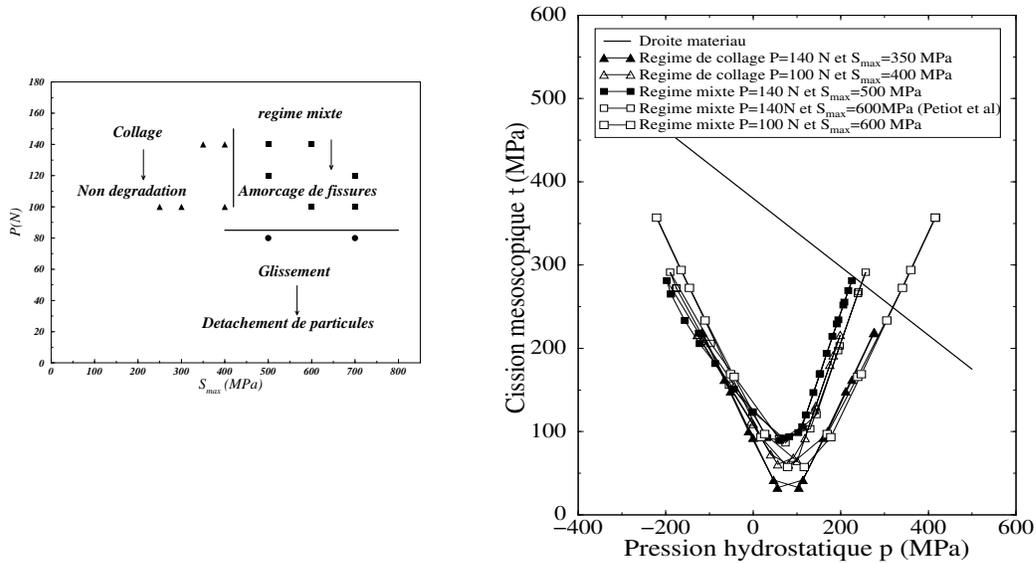


Figure 4.14: Chargements calculés et leurs trajets de chargement dans le diagramme de Dang Van

oligocyclique multiaxiale ainsi que les lois d'usure par fatigue oligocyclique. Ces deux points sont déjà abordés au LMS, grâce aux travaux de Muller (approche expérimentale et théorique de l'usure [30]), de Dragon-Louiset (modèle théorique de l'usure [8]) et de Charkaluk-Constantinescu (fatigue thermique [2]). D'autres approches énergétiques de l'usure sont disponibles dans (Fouvry [9]).

## 4.5 Bibliographie

- [1] ARCHARD, J.F. Contact and rubbing of flat surfaces, *J. Appl. Phys.*, 24, pp. 981-988, (1953).
- [2] CHARKALUK, E. AND CONSTANTINESCU, A., *Materials at High Temperatures*, accepted 2000
- [3] DANG VAN, K., GRIVEAU, B., MESSAGE, O. On a New Multiaxial Fatigue Limit Criterion: Theory and Application, *biaxial and multiaxial fatigue*, M.W. Brown and K. Miller (eds), EGF Publication 3, pp.479-496, (1982).
- [4] DANG VAN, K. Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, in D.L. McDowell and R. Ellis (eds), *Advances in multiaxial fatigue*, ASTM STP 1991, American Society for testing and Materials, Philadelphia, (1993) 120-130.
- [5] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. Steady-state flow in classical elastoplasticity : application to repeated rolling and sliding contact, *J. Mech. Phys. Solids* Vol.41, N°11, pp. 1691-1710, (1993).
- [6] DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. On a New Methodology for Quantitative Modeling of Fretting Fatigue, *Fretting Fatigue: Current Technologies and Practices*, ASTM STP 1367, D.W. Hoepfner, V. Chandrasekaran and C.B. Elliot, Eds., American Society of Testing Materials, West Conshohocken, PA, pp. 538-552 (1999).
- [7] DANG VAN, K. Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach, in : Dang Van K., Papadoupoulos I.V. (Éds), *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design*, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, (1999) 57-88.
- [8] DRAGON, M. Contribution à une approche théorique de la mécanique de l'usure, thèse de l'École polytechnique, Palaiseau (2000).
- [9] FOUVRY, S. Étude quantitative des dégradations en fretting. Thèse de l'École centrale de Lyon, (1997).
- [10] FOUVRY, S., KAPSA, P., VINCENT, L. Fretting-wear and fretting-fatigue : relation through a mapping concept, *Fretting Fatigue: Current Technologies and Practices*, ASTM STP 1367, D.W. Hoepfner, V. Chandrasekaran and C.B. Elliot, Eds., American Society of Testing Materials, West Conshohocken, PA, pp. 49-64 (1999).
- [11] HEARLE, A.D., JOHNSON, K.L. Mode II SIF for a crack parallel to the surface of an elastic half-space, *J. Mech. Phys. Solids* 33, pp. 61-81, (1985).
- [12] HILLS, D.A., NOWELL, D. *Mechanics of fretting fatigue*, Kluwer Academic Publishers, (1994).
- [13] HILLS, D.A. Mechanics of fretting fatigue, *Wear* 175, pp. 107-113, (1994).
- [14] HILLS, D.A., NOWELL, D., O'CONNOR, J.J. On the mechanics of fretting fatigue, *Wear* 125, pp. 129-146, (1988).
- [15] HILLS, D.A., NOWELL, D. Crack initiation criteria in fretting fatigue, *Wear* 136, pp. 329-343, (1990).
- [16] HILLS, D.A., ASHELBY, D.W. On the determination of SIF for a wearing half space, *Eng. Fract. Mech.*, 13 pp. 69-78, (1980).
- [17] HILLS, D.A., NOWELL, D., SACKFIELD, A. *Mechanics of elastic contacts*, Butterworth-Heinemann Ltd, (1988).
- [18] JOHNSON, K.L. *Contact mechanics*, Cambridge University Press, (1985).
- [19] JOHNSON, K.L. Contact mechanics and wear of metals, *Wear* 190 pp. 162-170, (1995).
- [20] JOHNSON, K.L. The application of shakedown principles in rolling and sliding contact, *Eur. J. Mech., A/solids*, Vol. 11, pp. 155-172, (1992).
- [21] KOENEN, A. Étude du fretting-fatigue du TA6V en ambiance cryotechnique, thèse de l'ENSAM, Paris (1995).
- [22] MAUCHE, N. Modélisation des phénomènes d'endommagements dus aux contacts à faible amplitude de détachement, thèse de l'ENPC, Paris (1997).

- [23] MAOUCHE, N., MAITOURNAM, H.M., DANG VAN, K. On a New Method of Evaluation of the Inelastic State due to Moving Contacts, *Wear* 203-204 pp. 139-147, (1997).
- [24] MINDLIN, R.D. Compliance of elastic bodies in contact, *J. Appl. Mech* Vol.16, pp.259-268, (1949).
- [25] NOWELL, D., HILLS, D.A. Mechanics of fretting fatigue tests, *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 29, N° 5, pp. 355-365, (1987).
- [26] PETIOT, C. *Développement d'une méthodologie prévisionnelle du comportement en fretting fatigue couplant les approches expérimentales et théoriques*, Thèse Centrale Lyon, (1994).
- [27] PETIOT, C., VINCENT, L., DANG VAN, K., MAOUCHE, N., FOULQUIER, J., JOURNET, B. An analysis of fretting-fatigue failure combined with numerical calculations to predict crack nucleation, *Wear* 181-183 pp. 101-111, (1995).
- [28] MAITOURNAM, M.H. Finite Elements Applications Numerical Tools and Specific Fatigue Problems, in : Dang Van K., Papadopoulos I.V. (Éds), High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, (1999), pp. 169-187.
- [29] KIM, K., LUDEMA, K.C. A Correlation Between Low Cycle Fatigue and Scuffing Properties of 4340 Steel, *Wear* 117 pp. 617-621, (1995).
- [30] MULLER, N. *Modélisation des phénomènes de l'usure - ébauche d'un modèle quantitatif*, Thèse École Polytechnique, (1996).
- [31] ROSEFIELD, A.R. A fracture mechanics approach to wear, *Wear* 61, pp. 125-132, (1980).
- [32] SUH, N.P. An overview of the delamination theory of wear, *Wear* 44, pp. 1-16, (1977).
- [33] VINCENT, L. Material and Fretting, *FRETTING FATIGUE*, ESIS 18 (Edited by R.B. Waterhouse and T.C. Lindley), Mechanical Engineering Publications, London, pp. 323-337, (1994).
- [34] VINCENT, L., BERTIER, Y., GODET, M. Testing Methods in Fretting Fatigue: a Critical Appraisal, *Standardisation of Fretting Fatigue Test Methods and Equipement*, in M. Helmi Attia and R.B. Waterhouse (eds), ASTM STP 1159, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, (1992), pp. 33-48.
- [35] VINGSBO, O., SODERBERG, S. On fretting maps, *Wear* 126 pp. 131-147, (1988).
- [36] ZHOU, Z.R. Fissuration induite en petits débattement: application au cas d'alliages d'Aluminium aéronautiques, Thèse de Doctorat, École Centrale de Lyon, (1992).
- [37] WATERHOUSE, R.B. *Fretting Corrosion*, Pergamon Press, Oxford, (1972).
- [38] WATERHOUSE, R.B. Plastic deformation in fretting processes - a review, *Fretting Fatigue: Current Technologies and Practices*, ASTM STP 1367, D.W. Hoepfner, V. Chandrasekaran and C.B. Elliot, Eds., American Society of Testing Materials, West Conshohocken, PA, pp. 3-18 (1999).

## Conclusion générale

*”Conçue pour la **prédiction** la modélisation doit revêtir une forme mathématique, pour laquelle on recherche la simplicité maximale compatible avec une représentation convenable des phénomènes observés”<sup>1</sup>.*

Cette recherche permettant, au travers d’une optimisation globale allant de la loi de comportement au critère de dommage en passant par les stratégies de résolution des problèmes, d’aboutir à des solutions utilisables par les ingénieurs préoccupés par la tenue de leurs structures sous chargement variable, constitue notre objectif. Ainsi, les méthodes stationnaires ont pendant longtemps été les seuls outils permettant pratiquement le suivi de l’évolution de l’état thermomécanique des structures anélastiques soumises à des chargements mobiles jusqu’à l’état stabilisé. Leur efficacité a été accrue par l’association à d’autres techniques telles que la décomposition en séries de Fourier ou les équations intégrales. D’autres méthodes alternatives pour des sollicitations (ou des structures) périodiques plus générales, sont en cours de développement. Ces stratégies numériques de détermination d’état thermomécanique sont associées, très souvent de manière découplée, à des modèles de prédiction de dégradations. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux critères de fatigue polycyclique macro-méso que nous cherchons à étendre aux domaines thermomécanique et de l’endurance limitée. Ce dernier point, ainsi que celui du traitement des chargements variables demeurent d’une grande importance pratique et qui sont encore sans réponse satisfaisante.

---

1. J. Salençon. Mécanique des milieux continus, Tome I, Les éditions de l’École polytechnique, (2000).