Sur la route des réels

Laurent Vivier

Sur la route des réels

Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique

Habilitation à diriger les recherches

Soutenue le 26 mai 2015 à l'Université Paris Diderot

Laurent VIVIER

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot

JURY :

Viviane DURAND-GUERRIER, PU

Ghislaine GUEUDET, PU – Rapporteur

Cécile de HOSSON, PU

Alain KUZNIAK, PU – Parrain

Christian MERCAT, PU – Président du Jury

Denis TANGUAY, PU – Rapporteur

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le domaine numérique est très vaste. Son enseignement débute dès la petite section de maternelle pour se poursuivre tout au long de la scolarité pour finalement ne jamais vraiment finir, même si l'on pourrait fixer un point important avec la construction de l'ensemble **R** – uniquement dans un cours universitaire avancé. Toutefois, l'apprentissage des nombres dépasse le cadre purement scolaire : les premiers nombres, un, deux, trois, sont appris dans la toute petite enfance, disons dans un cadre familial, une initiation aux nombres décimaux et aux fractions apparaît bien avant leur enseignement en fin de primaire par les usages sociaux. Le même phénomène apparaît avec les nombres négatifs. A *l'autre bout*, des recherches sur le nombre sont produites par des chercheurs. Bien entendu, certains types de nombres semblent ne pas être rencontrés hors d'une institution scolaire, c'est-à-dire dans la vie de *tous les jours*, comme les nombres réels ou les nombres complexes[1] rencontrés dans l'enseignement secondaire.

On peut penser que le rôle de l'enseignement est d'approfondir ces notions de nombres déjà rencontrées par les élèves hors institution scolaire afin d'optimiser leur utilisation et d'élargir le champ où ils interviennent ainsi que de donner une cohérence mathématique au champ numérique. C'est dans ce dernier sens que l'on peut comprendre la demande d'une synthèse sur les nombres par les anciens programmes français de troisième et de seconde du début des années 2000.

Cette synthèse se focalisait sur la nature des différents types de nombres (Vivier, 2008) comme l'ont remarqué Bronner et Larguier (2010a, 2010b) et Larguier (2012) en pointant un problème de la profession d'enseignant sur la synthèse sur les nombres en seconde à travers le type de tâches « *reconnaître à quels ensembles appartiennent des nombres donnés* ». Dans mon article de 2008, j'ai dissocié deux types de tâches : un type de tâches purement numérique sur la nature des nombres et un type de tâches ensembliste. Mais, dans chacune de ces trois études, on remarque que l'essentiel du travail est un travail d'écriture, de transformation d'écriture d'un nombre comme Bronner et Larguier (2010 a, 2010b) l'écrivent : « Ce n'est donc pas la connaissance de la nature du nombre en soi qui est importante, mais la connaissance pour un type de nombres donnés de son écriture canonique. » On pourrait discuter le terme « canonique » qui me paraît fort, mais l'important ici est de mettre en avant les écritures sémiotiques représentant les nombres et leurs liens avec les types de nombres, leurs propriétés en tant qu'objets mathématiques. On retrouve ici la notion de *représentations opaques et transparentes* de Zazkis et Sirotic (2004).

On peut évidemment interpréter, et c'est le choix que je fais, ces transformations d'écritures des nombres comme ce que Duval (1993, 1995, 1996, 2006,…) appelle des « conversions de registres de représentations sémiotiques ».

Depuis 2009, les programmes du secondaire ne demandent plus d'effectuer une synthèse sur les nombres. Toutefois, les conversions de registres n'ont pas complètement disparu des manuels du secondaire. Au-delà de ces questions institutionnelles, on peut se poser la question de l'importance de travailler les conversions entre registres. Bien entendu, Duval insiste sur le fait essentiel en

[1] On pourrait aussi penser aux anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

mathématiques d'avoir au moins deux registres de représentation, coordonnés par des conversions, afin de ne pas confondre l'objet de sa représentation. Ce besoin provient, écrit-il, d'une particularité des mathématiques par rapport à d'autres disciplines : « En mathématiques, […] les objets ne sont accessibles qu'à travers des représentations » et « les traitements dépendent des possibilités données par les représentations elles-mêmes » (Duval, 1996, p. 357-358).

En outre, le cadre numérique a la caractéristique suivante : on ne peut pas représenter n'importe quel nombre dans n'importe quel registre. Cela tranche, par exemple, avec la géométrie où, quel que soit le registre pour lequel on opte, on peut représenter les droites, les points, les polygones, etc. et même si les représentations sont partielles (comme pour la droite dans le registre graphique que l'on ne peut complètement tracer). Bien entendu, le cadre numérique n'est pas le seul cadre des mathématiques qui possède cette caractéristique et l'on peut en particulier penser au cadre fonctionnel.

Prenons le nombre π, il ne peut s'écrire sous forme de fraction d'entiers malgré la tentation, forte chez les élèves, d'écrire π/1. Bien sûr, l'enseignement incorpore la nouvelle notation π à celles existantes mais c'est une notation d'un tout autre ordre – un peu comme lorsque l'on incorpore la notation ln(*x*) –, ce qui n'est pas tout à fait identique avec les racines où l'on incorpore une nouvelle opération, √ au lieu de /.

On dispose néanmoins d'un registre pour représenter un nombre tel π, c'est celui des écritures décimales illimitées. Il est *partiel* dans le sens où on ne peut représenter toutes les décimales de π, c'est un peu comme une droite dans le registre graphique : on n'a pas tout, mais on peut indiquer ce qui manque avec des pointillés :

π=3,14159... ou la droite géométrique ...________________...

On reconnaît ici la différence entre un infini potentiel, on peut toujours ajouter des décimales et on peut toujours prolonger le trait, ces représentations ne se terminent jamais, et actuel qui consiste à interpréter l'ensemble infini de décimales ou la droite dans sa totalité.

Prenons un autre exemple, plus simple. On peut représenter 1/2 dans le registre décimal (fini) par 0,5 par une extension du registre décimal des entiers. Cela n'est plus possible avec 1/3 à moins d'étendre le registre des écritures décimales afin de pouvoir écrire 0,333… ou encore $0,\overline{3}$. A l'inverse, en base trois, 1/2 ne peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres – il s'agit de 0,111…=$0,\overline{1}$ – alors que un tiers, 1/10, s'écrit bien entendu 0,1 (nous sommes en base trois).

Bronner et Larguier (2010 a, 2010b), Larguier (2012), ont montré que des reprises du travail sur la nature des nombres étaient possible en classe de seconde mais que les enseignants localisaient de fait ce travail dans le chapitre sur les nombres, souvent le premier de l'année, avec l'introduction des ensembles de nombres et sans y revenir ultérieurement. Pour ma part, en dissociant les cadres numériques et ensemblistes, je me suis intéressé aux conversions : pour trouver la nature d'un nombre, il faut l'écrire dans un registre, par une conversion si l'on ne le voit pas immédiatement, où la nature du nombre peut être visualisée, où sa nature est *transparente* avec les termes de Zazkis et Sirotic (2004).

Mais au-delà de la demande institutionnelle, une synthèse semble nécessaire et notamment pour coordonner les différents registres que les élèves ont rencontrés, que l'on pense aux idées de Duval ou non. Quant au registre des Développements Décimaux Illimités[2] (DDI), il apparaît, aux côtés de la droite numérique, comme un registre important pour créer une cohérence du champ numérique. C'est cette notion de conversion entre registre numérique et l'introduction d'un nouveau registre que je me propose de discuter principalement dans ce document.

Néanmoins, si l'on se demande ce qu'est un nombre, à quoi ça sert ce n'est pas la question des registres[3] et des conversions qui nous viennent à l'esprit. Un nombre, ça sert à compter, calculer, comparer, ordonner, mesurer, repérer, etc. Autrement dit, et indépendamment des conversions, la question des traitements est elle aussi essentielle.

Peut-il y avoir des nombres sans calcul ? A ce propos, ce n'est sans doute pas un hasard que le rapport de la commission Kahane (2002) ne propose pas de section « nombres » mais des sections plus générales sur le « calcul ». Artigue (2007, p. 47), à la suite de Bronner (2007), précisent que « nombres et calcul vivent en symbiose ». Effectivement, un calcul avec des nombres est, du point de vue de Duval, un traitement dans un registre numérique. D'ailleurs, peut-il y avoir *calcul* sans représentation sémiotique ? Un calcul n'est-il pas qu'un traitement sémiotique ? Du moins en apparence et pour les calculs automatisés, basés sur un algorithme.

Je préfère aborder cette question des traitements par le point de vue des praxéologies (Chevallard, 1999), pour deux raisons. D'une part cela permet de mieux saisir le développement du champ numérique avec les éléments théoriques des praxéologies (*technologie* et *théorie*) et, d'autre part, il y a de nombreuses *techniques* qui ne sont pas à proprement parler des traitements, même en restant dans un cadre purement numérique (comme donner la parité d'un nombre écrit en base dix en regardant son chiffre des unités : « 392 a un chiffre des unités pair, donc le nombre est pair »).

Ce double point de vue, registre et praxéologie, guide systématiquement mes recherches sur le nombre, qu'il soit explicite ou non, avec d'un côté la nécessité d'avoir plusieurs registres et de l'autre la nécessité d'avoir des praxis dans ces registres. Dans une première partie, je développe ce double point de vue en élaborant un cadre d'analyse. Cette partie de mes recherches se focalise principalement sur le nombre entier, mais les conclusions que l'on peut en déduire dépasse le thème des entiers naturels. En particulier, ces recherches guident, posent des jalons, pour mes recherches sur le nombre rationnel. Nous sommes alors *au bord* des nombres réels et cela fait l'objet de la partie 2. La partie 3 propose une revue bibliographique qui se termine par des perspectives de recherche.

Ce texte reprend pour l'essentiel des recherches que j'ai menées, qui ont été publiées ou exposées et que j'ai ici réorganisées. Il est précisé, en note, les références des études exposées dans les sections concernées.

[2] On retrouve ici les idées de la thèse de Bronner (1997) où il introduit la notion de nombre *idécimal*.

[3] Hormis la production d'exemples souvent attachés à un registre, principalement le registre décimal avec les chiffres 0,1…9 et la confusion entre 10 et dix (voir la partie 1).

PARTIE 1 :

RÔLE DES CONVERSIONS NUMÉRIQUES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Introduction de la partie 1

Nous exposons dans cette section une manière de prendre en compte les registres de représentation (Duval, 1993) dans les praxis (Chevallard, 1999). Cette intégration a été utilisée dans plusieurs études (Vivier, 2008, 2011 ; Nikolantonakis & Vivier 2009, 2010, 2013 ; Block, Nikolantonakis & Vivier, 2012).

L'interrogation initiale provient de l'expérimentation, peut-être la plus célèbre hors de la didactique, en école élémentaire en 1979 par l'IREM de Grenoble que l'on désigne communément par l'un de ses items, « l'âge du capitaine » (IREM de Grenoble, 1979). Cette expérimentation est l'emblème du « contrat didactique » car on explique les réponses *absurdes* des enfants par ce concept didactique (voir par exemple Chevallard, 1988). Mais on peut y voir également un autre effet didactique, plus du côté sémiotique. En effet, les enfants de CP doivent trouver un âge, donc un nombre, à partir de deux nombres donnés en écriture chiffrée : 13 et 18. Or, que savent faire les enfants, au CP, avec de telles écritures ? Les additionner, et c'est ce qu'ils font, *incités* par les traitements de ce registre qui est fortement favorisé par l'institution scolaire. On pourrait faire de même pour les autres items relatifs aux autres opérations (cf. IREM de Grenoble, 1979). Il y aurait donc d'un côté la *tâche mathématique*[4] demandée avec tout le poids du contrat didactique et de l'autre un registre sémiotique qui a sa vie propre où « 13+18=31 », type de traitement largement étudié, hors contexte, à l'école par les élèves et il est à souligner que ce traitement est correct. (Je reviendrai sur le poids institutionnel du registre de l'écriture chiffrée au CP en section 2.2.)

Cela dit, cette expérimentation met également en lumière le fait que plus les élèves sont grands, plus ils sont réticents à donner la réponse absurde au problème de l'âge du capitaine. C'est plus généralement le cas pour tous les items, l'important semble être l'*âge* de l'opération pour les enfants : plus l'opération est familière, plus le contrôle des traitements à effectuer est efficace, comme s'il y avait, au fil du temps et du travail effectué dans l'institution, la construction d'une *technologie* qui permettrait de contrôler les *techniques* utilisées pour effectuer une tâche.

Après avoir exposé le cadre d'analyse en première section, je propose d'exposer des recherches sur deux publics différents, étudiants-professeurs et élèves de première année d'école élémentaire, sur deux thèmes différents, la numération en base quelconque et les représentations chiffrée et graphique. L'interrogation systématique concerne les conversions et ce que les conversions « embarquent » comme connaissances ou techniques, qui sont plus ou moins explicites. Cela est repris en fin de partie avec notamment une discussion sur les registres décimal et fractionnaire.

[4] Bien entendu, il n'y a pas de tâche mathématique mais, pour les élèves, c'est comme s'il y en avait une.

1. Cadre d'analyse

1.1 La Théorie Anthropologique du Didactique

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), c'est autour des *types de tâches* que s'élabore le travail en mathématiques (Chevallard, 1999) avec, en premier lieu, l'élaboration d'une technique τ pour effectuer un type de tâches T. Le bloc [T,τ] est nommé bloc des savoir-faire ou *praxis*. La production et la justification d'une technique nécessitent un regard théorique que Chevallard nomme une *technologie*, θ. Cette dernière est un élément du bloc des savoirs, ou *logos*, qui comporte un autre niveau, celui de la *théorie*. Une théorie Θ permet de produire et justifier les technologies.

Praxis et logos forment une *praxéologie*, ponctuelle lorsqu'elle ne se réfère qu'à un seul type de tâches, [T,τ,θ,Θ]. Une praxéologie est locale, régionale et globale selon que l'on considère une seule technologie, correspondant au niveau de codétermination[5] *thème d'étude*, une seule théorie, correspondant au *secteur d'étude*, ou plusieurs théories, correspondant au *domaine d'étude*.

1.2 Registre de Duval

Duval (1993, 1995, 2006) regroupe les signes utilisés dans le travail mathématique en registres de représentation sémiotique. Il distingue les *traitements*, une transformation sémiotique qui reste à l'intérieur d'un même registre de représentation R, et les *conversions*, une transformation sémiotique dont le résultat est exprimé dans un autre registre. Duval insiste particulièrement sur la différence cognitive entre ces deux transformations sémiotiques. Ce sont les fonctions cognitives de traitement et de conversion qui font qu'un système sémiotique est un registre de représentation (Duval, 2006). Dans son article de 2006, Duval s'appuie sur ces deux fonctions cognitives pour exposer « les deux sources d'incompréhension dans l'apprentissage des mathématiques ».

La première concerne les traitements dans les registres multifonctionnels comme le registre graphique de la géométrie (avec notamment les traitements iconiques, méréologiques et la nécessaire déconstruction dimensionnelle – voir (Duval, 2005)). Le choix du traitement, fondés sur la visualisation, et le traitement lui-même, ne va pas de soi. Cela est différent des registres monofonctionnels où les traitements prennent souvent la forme d'algorithme.

La deuxième concerne les conversions et la congruence entre les représentations. Dans (Duval, 1995, p. 49 ; voir aussi Duval, 2006, p. 122), il précise les trois critères de congruence :

- La possibilité d'une correspondance « sémantique » des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l'une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire. On considère comme unité signifiante élémentaire toute unité qui relève du « lexique » d'un registre. […]
- l'univocité « sémantique » terminale : à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée. […]

[5] Voir (Chevallard, 2002).

- l'organisation des unités signifiantes. […] Ce critère de correspondance dans l'ordre dans l'arrangement des unités composant chacune des deux représentations n'est pertinent que lorsque celles-ci présentent le même nombre de dimension.

1.3 Prise en compte du système et pas uniquement du signe

Le sémiotique en TAD est bien pris en compte à travers la notion d'*ostensif* (Bosch & Chevallard, 1999). Mais les ostensifs en TAD, même s'ils donnent lieu entre eux à une multiplicité d'interactions, ne sont pas constitués en système sémiotique avec, notamment, les notions de traitement et de conversion. En particulier, cette notion ne prétend pas rendre compte de la dépendance d'une technique aux systèmes sémiotiques sur lesquels elle repose. Car précisément, la notion de *valence instrumentale* est attachée à un ostensif et non au système sémiotique en jeu, même si elle est travaillée à l'intérieur de praxéologies et dans le cadre de complexes d'ostensifs. Cela a-t-il du sens de parler de la valence instrumentale d'un chiffre ? Bien entendu non, car c'est le système d'écriture des nombres, en base dix par exemple, qui est alors à considérer. On pourrait alors parler de la valence instrumentale de la base dix[6] mais, malgré l'intérêt de cette notion d'ostensif, elle ne peut rendre compte de certaines situations et notamment de celles qui nous intéressent ici. Par exemple, pour la recherche de la parité d'un nombre, la technique qui porte sur les chiffres est totalement différente selon que l'on soit en base paire (le nombre est de la même parité que son chiffre des unités) ou impaire (le nombre est de la même parité que la somme de ses chiffres). C'est pourquoi nous avons opté pour une prise en compte du sémiotique par les registres de représentation. Les objectifs sont ambitieux et sont de deux ordres :

- comprendre le rôle que peuvent avoir les registres de représentation utilisés dans une organisation mathématique – car il me paraît naturel d'introduire la notion de registre sémiotique au sein même des organisations mathématiques ;
- enrichir la présence du cognitif au sein de la TAD avec les notions de traitement et de conversion.

1.4 Les praxis

En TAD, un type de tâches n'est pas toujours énoncé en faisant référence aux registres de représentation utilisés. Or, une tâche est toujours exprimée à l'aide de registres sémiotiques et ces derniers peuvent, comme nous le constaterons, influencer l'activité mathématique[7]. Ainsi, nous indexons les types de tâches et techniques par le(s) registre(s) dans le(s)quel(s) ils sont exprimés. Un type de tâches T relatif au registre R est noté T_R. Bien entendu, il est tout à fait possible de considérer des types de tâches exprimés avec deux registres ou plus comme on peut le constater avec la tâche *comparer 2/3 et 0,6*. Ne sont considérés[8] ici que les types de tâches exprimés dans un seul registre (en revanche, les procédures de résolution peuvent utiliser plusieurs registres).

[6] Tempier (2013) conçoit la numération en base dix comme un ostensif.
[7] L'existence d'effets divers des types de représentations (description verbale, iconique, à travers de schémas, etc.) sur la performance des élèves en résolution de problèmes a été identifiée auparavant dans plusieurs recherches, comme par exemple (Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007).
[8] Dans (Vivier, 2011) des tâches de comparaison de deux nombres écrit dans deux registres différents ont été proposées.

Afin de prendre en compte les registres de représentations en TAD, nous distinguons, en nous restreignant au cadre numérique (voir la section suivante pour une justification de cette restriction) :

- une technique τ_R qui n'utilise qu'un seul registre mathématique R ;
- une technique $\tau_{R\rightarrow R'}$ qui correspond à une conversion d'un registre R vers un registre R'.

$$\boxed{T_R} \xrightarrow{\tau_R} \boxed{\text{Solution dans R}}$$

Figure 1a : praxis dans le registre R

$$\boxed{T_R} \xrightleftharpoons[\tau_{R'\rightarrow R}]{\tau_{R\rightarrow R'}} \boxed{T_{R'}}$$

Figure 1b : techniques de conversion

Ce point de vue élargi le champ couvert par les traitements qui restent nécessairement à l'intérieur d'un registre. L'expression « Solution dans R » est en effet à prendre dans un sens large où à l'issue des traitements dans R, la conclusion peut être soit exprimée dans R soit dans la langue naturelle (adaptée aux mathématiques). C'est par exemple le cas de la comparaison de 42,05 et 42,015 où on peut écrire 42,05>42,015 en restant dans le registre décimal ou bien en disant que *le premier nombre est plus grand que le deuxième* dans la langue naturelle. Nous appelons une praxis $[T_R ; \tau_R]$ relative à un registre R une R-praxis (figure 1a).

Duval affirme que le fonctionnement cognitif fondamental des mathématiques requière la coordination d'au moins deux registres de représentation (Duval, 1996, 2006). Je réinterprète cela dans le langage des praxéologies en considérant deux registres, R et R' et deux techniques de conversion réciproques $\tau_{R\rightarrow R'}$ et $\tau_{R'\rightarrow R}$ qui permettent la coordination des registres. Mais la coordination va plus loin car ces techniques de conversion permettent aussi la coordination des *traitements*, τ_R et $\tau_{R'}$, et aussi des types de tâches, T_R et $T_{R'}$. Finalement, les techniques de conversion permettent la coordination des R-*praxis*, $[T,\tau]_R$ et $[T,\tau]_{R'}$ (figure 1b).

À travers cette distinction des techniques, nous voulons conserver une partie de l'activité cognitive de l'élève révélée par Duval afin de préciser les rapports personnels aux savoirs en relation avec les registres. Précisons que nous n'avons pas la prétention d'articuler les cadres de Chevallard et de Duval. Il s'agit plus modestement d'une prise en compte des registres sémiotiques au sein d'une praxis en se restreignant au cadre numérique (cf. section 1.6). Outre une meilleure description praxéologique, cette approche fournit des résultats qui ne semblent pas facilement détectables par d'autres moyens expérimentaux.

1.5 Les techniques τ_R

Il faut ici distinguer deux types de techniques que nous notons τ_R. Ce peut être évidemment un traitement proprement dit (Duval, 1993), c'est-à-dire une transformation sémiotique interne à un registre R, ou bien un autre type de technique qui fournit une réponse externe au registre R. Reprenons l'exemple de la détermination de la parité d'un nombre écrit en base *a* : il n'y a pas forcément de transformation (si *a* est pair) et surtout le résultat n'est pas exprimé dans le registre initial – il ne s'agit donc pas d'un traitement au sens strict de Duval.

De même, s'il est clair qu'une technique mathématique ne se fait pas toujours de manière interne à un registre, ce cadre d'analyse permet de décomposer une technique mathématique comme une succession de techniques d'un des deux types précédents. Prenons l'exemple suivant issu de (Nikolantonakis & Vivier, 2009) sur la numération de position en base usuelle : pour trouver le successeur de $(66)_{sept}$, on peut :

- effectuer un traitement (ou technique) en base sept pour trouver $(100)_{sept}$.
- convertir $(66)_{sept}$ en base dix puis déterminer le successeur codé en base dix qui est 49 (et éventuellement reconvertir en base sept).

Prenons également cet exemple de (Block, Nikolantonakis et Vivier, 2012) sur une étude au grade 1 :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Figure 2a : tâche T^1_A
R_A est le registre d'écriture des entiers dans le système décimal</td>
<td>Figure 2b : tâche T^1_B
R_B est un système de représentation graphique des nombres</td>
</tr>
</table>

Pou le problème T^1_A (figure 2a), on dispose au niveau considéré de la technique τ_A qui consiste à comparer successivement les chiffres de gauche à droite des deux nombres. On dispose donc d'une R_A-praxis. Pour le problème T^1_B (figure 2b) plusieurs résolutions sont possibles :

- faire une conversion $R_B \rightarrow R_A$ ($\tau_{B \rightarrow A}$) pour obtenir les cardinaux des deux collections en écriture chiffrée puis utiliser τ_A (notons que $\tau_{B \rightarrow A}$ et τ_A sont deux techniques bien rodées à ce niveau d'enseignement, voir la section 2.2) ;
- faire un traitement dans R_B (ces traitements sont en fait externes, voir section 2.2.1).

1.6. Restriction au cadre numérique

L'objectif de cette reformulation des traitements et conversions dans le langage des praxéologies est de conserver leur différence cognitive tout en les considérant au sein d'une organisation mathématique que donne la TAD. Cette distinction des techniques permet une conciliation des deux cadres sur le point crucial des conversions. Bosch & Chevallard (1999, p. 117) commentent ainsi le cadre de Duval : « Or, dans ce qui est présenté comme un changement de registre qui ne dépendrait que du fonctionnement cognitif du sujet, nous voyons, quant à nous, la mise en œuvre d'une technique mathématique […] ». Les auteurs ont ainsi une position radicale qui identifie directement une conversion avec une technique mathématique $\tau_{R \rightarrow R'}$. Il nous semble que, dans un processus de changement de registre, pour bien rendre compte du phénomène, la technique mathématique en jeu et le fonctionnement cognitif du sujet sont tous deux à prendre en compte.

Néanmoins, afin que la reformulation que nous proposons soit didactiquement consistante, plusieurs précautions sont à prendre car assimiler sans précaution une conversion à une technique comme le font Bosch et Chevallard serait une négation de la distance cognitive irréductible entre conversion et traitement. Ce n'est certes pas notre objectif. Tout au contraire, nous voulons conserver une partie de cette distance.

Tout d'abord, la distinction entre traitement et conversion est maintenue et, à la suite de Duval, nous insistons sur le caractère fondamentalement différent des deux types de techniques que nous notons de manière générique τ_R et $\tau_{R \to R'}$. Mais cela ne suffit pas car il faut également que ce que nous appelons une *technique de conversion* soit consistante du point de vue didactique. C'est ce que nous explicitons ci-dessous.

Dans toute conversion on trouve une partie algorithmique (ou algorithmisable) qui correspond au travail mathématique proprement dit et qui constitue la partie tangible de la conversion (par les traces écrites notamment). Mais il ne serait être question de réduire une conversion à un travail algorithmique. En particulier, lors d'une conversion, il apparaît toujours le choix du sujet de faire une conversion dans un registre qui est initialement totalement absent. Parfois, le choix d'une conversion parmi un panel de conversions est nécessaire ce qui peut alors entraîner des interférences entre les différentes conversions possibles. Une conversion étant choisie, des éléments arbitraires sont souvent à la charge du sujet qui peuvent considérablement influencer, voire bloquer, la partie algorithmique notamment par une sensibilité importante aux variables didactiques. Enfin, de nombreuses autres variables cognitives sont à prendre en compte lors d'une conversion et notamment les critères de congruence (Duval, 1995, 2006).

Prenons un exemple étudié par Duval (1988). Considérons la conversion entre les deux représentations suivantes d'une droite (non *verticale* pour simplifier) : son tracé dans un repère (registre graphique avec repère, noté R) et une équation du type *y=ax+b* (registre de représentation fonctionnelle des droites, noté R') :

- Pour R→R'. On peut choisir deux points arbitraires sur la droite, lire leurs coordonnées puis appliquer des formules ou résoudre un système d'inconnues *a* et *b*. On peut également déterminer *b* par l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, mais cela peut se révéler impossible à effectuer selon le graphique considéré, et *a* par un calcul de pente en mesurant un triangle rectangle. Le repère (y compris la position de la droite) constitue une variable cognitive de première importance (unités sur les axes, graduations des axes, présence ou non d'une grille, angle entre les axes, orientations des axes, noms des axes) qui peut considérablement influencer l'activité cognitive du sujet.
- Pour R'→R. On peut choisir deux valeurs de *x* et calculer les valeurs de *y* correspondantes puis placer les points sur le graphique et tracer la droite. On peut également placer un point (le point de coordonnées (0,*b*) par exemple) et utiliser le vecteur directeur (1,*a*). Il est à noter qu'il faut également choisir un graphique avec une échelle pour chacun des deux axes. La nature et l'ordre de grandeurs des nombres *a* et *b* constituent des variables cognitives de première importance.

On relève donc une partie de choix de variables et une partie algorithmique. C'est cette partie algorithmique que nous dénommons *technique de conversion*. Par conséquence, et il s'agit ici d'une restriction importante et, à mon avis, incontournable, on ne peut raisonnablement considérer une *technique de conversion* $\tau_{R \to R'}$ que lorsque le passage de R à R' peut être décrit de manière algorithmique ou tout du moins lorsque les variables cognitives de la situation n'ont que peu d'influence sur le déroulement de l'algorithme. Or, Duval (1995, page 42) précise que l'on ne peut pas toujours définir les règles de conversion ce qui limite la portée de notre proposition. Par exemple, la citation de Bosch et Chevallard (1999) que nous reprenons ci-dessus est relative à une expérimentation de Lemonidis (1990, p. 115) sur une conversion du registre figuratif vers le registre de l'écriture symbolique. Sur un segment d'extrémité A et partagé en dix segments égaux figure un point B (à cinq graduations de A) et un point C (à huit graduations de A) et l'on demande de compléter les trois relations suivantes entre longueurs orientées (le segment n'est pas orienté) :

AB = … BC CB = … AB AC = … CB.

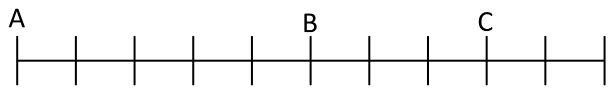


Figure 3

Bien que la tâche de conversion demandée soit totalement algorithmisable, la partie algorithmique ne rend pas compte fidèlement de la conversion. On peut en particulier avancer les objections suivantes :

- la variation de nombreuses unités signifiantes dans le registre figuratif ne correspond pas à des variations dans le registre symbolique – ce qui est vrai pour la conversion inverse ;
- la conversion demande de repérer l'objet à convertir alors que celui-ci n'est pas explicitement visible dans le registre figuratif.

C'est pourquoi nous nous restreignons au cadre numérique car, généralement, une conversion entre deux registres de représentation des nombres peut être décrite par un algorithme. Ce dernier rend fidèlement compte de la conversion en particulier parce qu'en général on ne retrouve pas les deux objections précédentes. En tout état de cause, la possibilité que nous soulevons dépend fortement des registres en jeu et il est nécessaire, pour chaque étude, de discuter de ce point.

Pour le cas de la figure 2b, la conversion de R_B vers R_A n'est pas purement algorithmique car il y a un choix de l'ordre des unités comptabilisées dans une énumération ou des paquets de dix à former. Nous faisons l'hypothèse que cela n'influence pas le déroulement de l'algorithme (cette hypothèse est largement confirmée pour la population étudiée par les taux de réussite à T^1_B, cf. (Block, Nikolantonakis et Vivier, 2012) et section 2.2).

Il est clair que, dans notre cadre d'analyse, du caractère cognitif spécifique d'une conversion nous ne conservons qu'une partie qui contient notamment le choix conscient d'un sujet de faire cette conversion. C'est ainsi que parfois la différence cognitive entre une conversion et un traitement peut s'effacer totalement car seule la composante algorithmique, est du ressort du sujet, soit parce que l'on demande explicitement au sujet de faire cette conversion, soit parce qu'elle correspond à une technique qui a été travaillée dans l'institution pour effectuer un certain type de tâches (cf. (Nikolantonakis et Vivier, 2010, 2013) et section 2.1 pour un exemple avec les bases de numération pour l'écriture des entiers).

1.7 Blocage des R-praxis

Mais les techniques de conversion permettent aussi des stratégies d'évitement : pour résoudre $T_{R'}$, la production d'une technique $\tau_{R'}$ spécifique au registre R' peut être bloquée par la connaissance de $[T,\tau]_R$. Il est suffisant d'utiliser $\tau_{R' \to R}$ puis de résoudre T_R en utilisant τ_R – et, éventuellement, de revenir au registre R' en utilisant $\tau_{R \to R'}$ (cf. le contrat institutionnel de calcul de Bronner (2007)). Du point de vue de la TAD, une technique de conversion est donc une technologie puisqu'elle permet de produire une technique : $\tau_{R'\to R}$ produit une technique pour résoudre $T_{R'}$ en s'appuyant sur $[T,\tau]_R$. Cependant, selon la situation, une conversion doit parfois être vue comme une technique plus que comme une technologie (voir section 2.1). On peut résumer la situation par la figure suivante, à comparer avec la figure 1a :

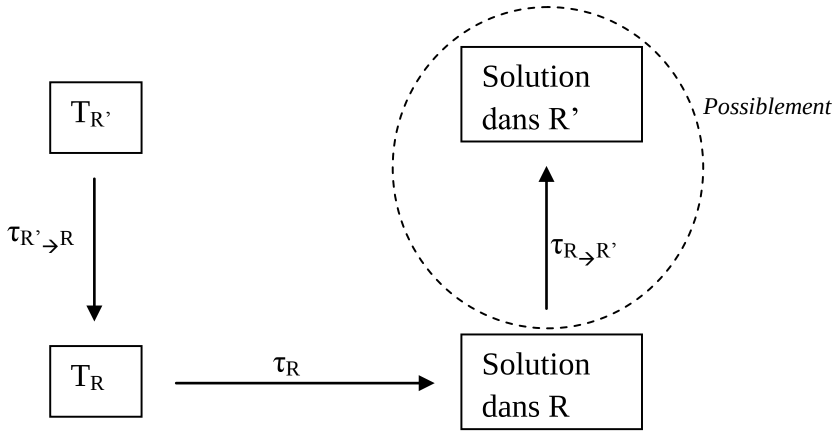


Figure 4 : évitement d'une technique $\tau_{R'}$, blocage de sa construction

Bien sûr, on pourrait comprendre la situation avec les praxéologies en spécifiant le registre dans l'énoncé d'un type de tâches. Une technique pour effectuer $T_{R'}$ serait indifféremment : une technique $\tau_{R'}$ dans un seul registre ou une technique de conversion $\tau_{R'\to R}$ suivie d'une technique τ_R dans le registre R. Mais en considérant de manière identique traitements et conversions, ce point de vue masque la différence cognitive essentielle révélée par Duval.

2 Études expérimentales

Le cadre exposé en section 1. est fonctionnel. Il a été mis en œuvre dans plusieurs études que nous rappelons dans cette section en mettant l'accent sur les conversions.

2.1 Les entiers : numération de position[9]

La numération en base autre que dix est absente du cursus primaire et secondaire[10] dans les deux pays et les étudiants de chaque nationalité se retrouvent dans la même situation face à ce savoir, totalement nouveau et déstabilisant pour la plupart d'entre eux. Les futurs enseignants n'auront à enseigner que la numération de position en base dix, ils n'ont donc pas une obligation de maîtriser ce nouveau savoir. Il s'agit plutôt de faire prendre conscience du caractère relatif de la base dix tout en faisant comprendre les mécanismes généraux de la numération de position.

Après une première étude (Nikolantonakis et Vivier, 2009), des questions se sont posées sur la question des registres et l'objectif est d'y répondre, notamment par une étude statistique. Les types de tâches proposés sont plus nombreux et les variables didactiques sont ajustées pour les besoins de

[9] Cette section reprend pour l'essentiel les papiers de Nikolantonakis & Vivier (2009, 2010, 2013). On pourra se référer à ces articles pour plus de détails et notamment pour les graphes statistiques qui ne sont pas tous reproduits ici.
[10] Excepté le système sexagésimal, plus lié aux grandeurs qu'aux nombres.

l'étude. Les données recueillies – 334 étudiants, 5 types de tâches – sont traitées à l'aide de l'Analyse Statistique Implicative.

2.1.1 Contexte de l'étude

Les étudiants grecs se destinant au professorat du premier degré doivent entrer dans une université pédagogique où ils préparent un diplôme en quatre ans. Ils peuvent ensuite passer un concours national de recrutement ou enseigner à l'école primaire comme contractuel. Le test faisait partie d'un examen de première année universitaire et a concerné les 139 étudiants de la faculté pédagogique de Florina, université de Macédoine-Ouest. En France, après avoir obtenu une licence de leur choix, les étudiants de l'étude[11] préparent en un an un concours pour enseigner à l'école primaire au sein des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM). Le test s'est déroulé lors d'un entraînement au concours, dans des conditions très proches de ce dernier. Il constituait le premier exercice d'une composition de 3 heures. Les 195 étudiants du centre de formation de Tours, université d'Orléans, ont été concernés. Ces deux populations sont semblables quant au thème de la numération en base quelconque, que ce soit pour le contenu ainsi que le faible nombre d'heures d'enseignement sur ce thème.

Nous avons proposé différents types de tâches, élargissant le spectre de l'étude préliminaire, toutes en liaison avec les apprentissages de l'école primaire. Nous avons relevé plusieurs indicateurs relatifs aux registres de représentation, traitements, conversions, techniques et technologies. L'objectif principal est de valider les deux hypothèses suivantes :

- (H1) les différents systèmes de numération de position peuvent s'interpréter comme des registres différents ;
- (H2) le jeu sur les variables didactiques permet de faire émerger une utilisation de l'écriture polynomiale comme un registre à part entière, avec son potentiel technologique, et non plus comme simple écriture transitoire dans la conversion entre une base *a* et la base dix.

L'étude utilise la statistique implicative et plus spécifiquement le logiciel CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) développé par Raphaël Couturier et Saddo Ag Almouloud à partir des travaux de Régis Gras (Gras et al., 2009). Le but est de relever des similarités entre variables afin de faire ressortir le caractère différent des traitements et conversions ainsi que, par les arbres implicatifs, des quasi-implications entre variables, notamment les variables relatives à l'utilisation du registre de l'écriture polynomiale R_{poly}.

Nous avons procédé en deux temps : en premier lieu nous étudions la population totale pour valider les deux hypothèses puis nous faisons une étude comparative des deux populations qui révèle des contrastes et tempère les conclusions sur la population totale.

2.1.2 Le test proposé

On donne à la suite les 5 types de tâches et les variables retenues pour chacun d'eux.

A- Trouver le successeur et le prédécesseur de : a. $(66)_{sept}$ **b.** $(10100)_{deux}$ **c.** $(504302155)_{six}$

[11] L'étude se place avant la réforme de la formation entrée en vigueur en 2010 (d'autres réformes suivront).

On regarde spécifiquement les réponses à : **SPa**, le successeur de l'item a $(66)_{sept}$; **SPb**, prédécesseur de l'item b $(10100)_{deux}$; **SPc**, successeur de l'item c $(504302155)_{six}$; **SPd** désigne les 3 autres réponses qui ne sont pas problématiques et sont donc traités ensemble. Pour chacun d'eux, on s'intéresse aux variables suivantes :

- **NR** : Non Réponse
- **OK** : Solution correcte (quelle que soit la base)
- **rés BI** : résultat dans la Base Initiale (quelle que soit la procédure)
- **Dix** : conversion en Base Dix (visible ou décelée par une analyse d'erreur) pour un traitement en Base Dix
- **errConv** : au moins une erreur dans une conversion (autre qu'une simple erreur de calcul)
- **errTrait** : au moins une erreur dans un traitement (autre qu'une simple erreur de calcul)
- Un indicateur global, **SP-errChif** : au moins une erreur de chiffre qui n'existe pas dans la base de numération dans les items sur successeur/prédécesseur (comme 67 ou 70 pour SPa, 10099 pour SPb ou encore 504302156 ou 504302160 pour SPc, aussi comptés dans « errTrait »).

B- Écrire les nombres de vingt à trente en base onze, noté **Onz**

- **NR, OK** (idem A-)
- **Conf :** confusion nombre/codage d'un nombre
- **« A » :** utilisation d'une lettre (ou n'importe quel signe).
- **« 1_10 » :** utilisation du codage 10 pour le nombre dix (hormis la réponse $(110)_{onze}$).

Cet item fait intervenir un registre verbal que nous jugeons non problématique pour la population étudiée.

C- Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants, noté **Class**

$(303)_{quatre}$; $(203)_{quatre}$; $(1003)_{quatre}$; $(33)_{quatre}$; $(100)_{quatre}$

NR, **OK**, **Dix** (idem A-)

D- Écrire le résultat de la multiplication de $(3405)_{huit}$ par huit, noté **×8**

- **NR**, **OK**, **rés BI**, **Dix**, **errConv**, **errTrait** (idem A- et B-)
- **Poly** : utilisation de l'écriture polynomiale, autre qu'un simple calcul, et traitement sur cette écriture ; aspect technologique du registre R_{poly}
- « **27240** » : utilisation de la technique de multiplication de la base dix en base huit.

E- Pour les nombres suivants, dire s'ils sont pairs ou impairs : a. $(65474)_{huit}$ **b.** $(623004261)_{sept}$ notés PIa et PIb.

- **NR**, **OK**, **Dix**, **errConv**, **errTrait**, **Poly** (idem A-, B- et D-)
- **Tech dix->BI** : utilisation illicite de la technique valable en base dix en Base Initiale

2.1.3 L'hypothèse H1

Nous notons R_a le registre de représentation des nombres entiers en base *a* dans le système de numération de position. Ces registres ont des modes de fonctionnement très proches. Citons par exemple les techniques opératoires qui fonctionnent de la même manière – au paramètre « base » près – et l'ordre qui est défini de manière identique. Mais plusieurs points montrent qu'il s'agit bien de registres différents. D'une part, il est clair que les signes relatifs à chaque registre diffèrent puisque les chiffres ne sont pas les mêmes, même si, lorsque $a>b$ tout chiffre de R_b peut s'interpréter comme un chiffre de R_a (il est donc important pour ce point de considérer des bases supérieures à dix). Certains traitements sont également différents. Par exemple, le critère de parité dans R_a est un traitement qui dépend essentiellement de la parité de *a*.

Enfin, l'arbre des similarités sur la population totale (figure 5) montre que les traitements et les conversions sont bien distincts. Les 7 variables d'erreurs de conversion se regroupent au niveau significatif 29 (indice 0,999) et les 11 variables d'erreurs de traitements se regroupent au niveau significatif 38 (indice 0,964) – ces deux blocs se regroupent au dernier niveau (indice 0,24). On retrouve ainsi la distinction cognitive entre traitement et conversion faite par Duval lorsque l'on a affaire à des registres distincts. Il est à noter que c'est seulement l'analyse statistique qui permet de retrouver cette distinction. En effet, lors de notre étude prospective, nous nous étions contentés d'une analyse en terme de pourcentage d'erreur ce qui ne permettait pas de distinguer traitement et conversion.

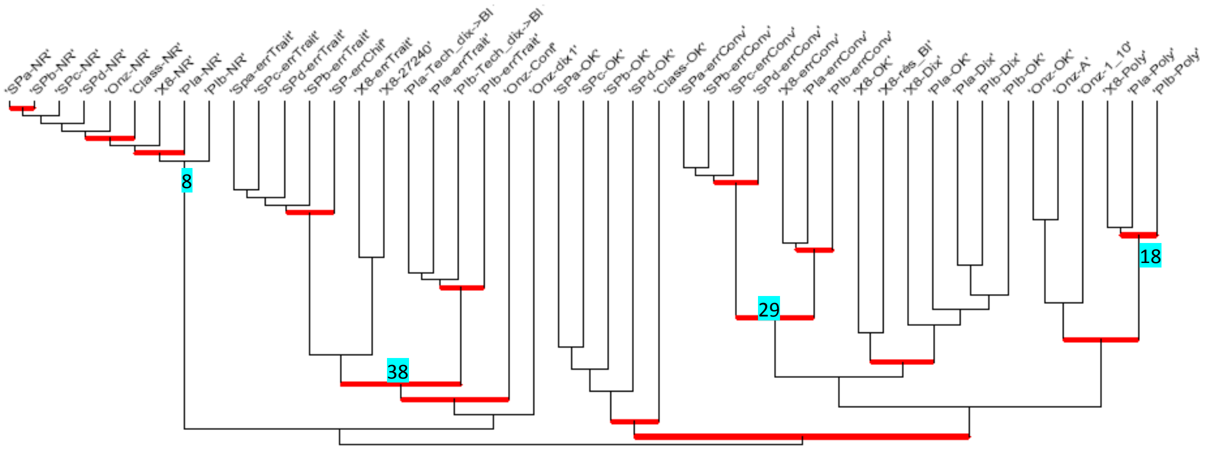


Figure 5 : Arbre des similarités pour la population totale (Fr+Gr)

Ainsi, si l'on peut toujours discuter des ressemblances ou des différences entre les registres R_a et R_b, nous validons statistiquement notre première hypothèse, du moins pour R_a et R_{dix}.

Dans cet arbre un autre bloc se distingue nettement : les Non Réponses aux 8 items constituent des variables très similaires qui se regroupent toutes au niveau 8 (indice de similarité 1). Elles concernent environ 20% des étudiants avec toutefois des disparités entre les items (cf. table 1).

Ces étudiants se répartissent en deux groupes : ceux qui sont rebutés par les registres R_a lorsque $a \neq dix$ (même si, parfois, ils essayent de résoudre quelques questions) et ceux qui sont gênés par le type de tâches dans le registre R_a, c'est-à-dire une R_a-praxis (ces étudiants peuvent réussir certains types de tâches dans R_a). Ainsi, les registres ne constituent pas le seul élément d'interprétation puisqu'il est conjugué avec les praxis.

	Class	SPa	SPd	SPc	SPb	PIa	×8	Onz	PIb
NR	6%	7%	10%	10%	10%	15%	16%	17%	19%
OK	82%	75%	85%	76%	67%	66%	61%	39%	51%

Table 1 : Non Réponses (NR) et réussites (OK) dans la population totale

2.1.4 Une hiérarchie des R-praxis

La table 1 montre, par les taux de réussite (OK) et de non réponse (NR), que les 5 types de tâches sont distincts[12]. De plus, que ce soit dans les blocs « errTrait », « errConv », « OK » ou même « NR » de la figure 5, on reconnaît des sous-blocs associés aux types de tâches SP et PI.

Le graphe implicatif pour la population totale (cf. Nikolantonakis et Vivier, 2010, 2013) donne une hiérarchie de l'ordre de difficulté des items. Les quasi-implications des « OK » et des « NR » proposent une hiérarchie identique à l'inversion SPa/SPc et au cas particulier de SPd près. Nous déduisons la hiérarchie des R-praxis suivante où, en indice, nous mettons les caractéristiques de la base *a* du registre R_a :

$$\mathrm{Onz}_{a>dix} - \mathrm{PI}_{a\ impair} - \times 8_{a\neq dix} - \mathrm{PI}_{a\ pair} - \mathrm{PS}_{a\neq dix} - \mathrm{Class}_{a\neq dix}.$$

Le type de tâches le plus simple est Class (6% de NR et 82% de OK) ce qui n'est pas surprenant puisqu'il constitue, avec SPd, le seul item qui peut être effectué de manière correct en appliquant les seules connaissances de la base dix. Les plus difficiles sont PI, notamment en base impaire, (PIb : 19% de NR et 51% de OK) et le codage en base onze (Onz : 17% de NR et 39% de OK). La difficulté de l'item PIb peut s'expliquer par le nombre proposé, qui a un grand nombre de chiffres, ainsi que par la parité de la base qui met en défaut la technique usuelle de R_{dix}. La difficulté du second type de tâches, Onz, est beaucoup plus surprenant dans la mesure où le codage des nombres dans des bases autres que dix a été travaillé, même s'il est clair que l'essentiel de la difficulté réside dans le fait que la base est strictement supérieure à dix et qu'il faut coder[13] ce nombre dix.

2.1.5 L'hypothèse H2

L'arbre des similarités sur l'ensemble de la population (figure 5) montre un regroupement au niveau significatif 18 (indice de similarité 1) des trois variables « poly » des trois items concernés. Ce n'est pas étonnant puisque l'écriture polynomiale constitue un registre très efficace pour traiter les types de tâches pour lesquels on ne dispose pas de technique institutionnelle[14]. Bien entendu, la procédure

---

[12] Il semble qu'il faille distinguer, dans SP, le type de tâches S (trouver le successeur d'un nombre) de P (trouver le prédécesseur d'un nombre). Les différences entre PIa et PIb semblent relever à la fois de la différence de parité de la base, donc de R_a, et de la différence des tailles des nombres proposés.

[13] Les étudiants codent principalement le nombre dix par une lettre, comme A, X ou α, ou bien par son codage en base dix, comme dans $(1(10))_{onze}$, $(1\ 10)_{onze}$ ou $(110)_{onze}$; tous considérés comme « OK » même si $(110)_{onze}$ est incomplet.

[14] Ceci n'est que partiellement vrai pour « ×8 » puisque l'on rencontre assez fréquemment la technique qui consiste à « ajouter un zéro ».

qui consiste à faire d'abord une conversion dans R_{dix} est toujours possible, mais la taille du nombre joue, pour PI, comme une variable didactique qui rend coûteux cette conversion. Ainsi, on peut penser que certains étudiants, sans doute sur le chemin d'une conversion, s'attardent sur l'écriture polynomiale en se demandant s'il est raisonnable de calculer cette *grosse* expression et se rendent comptent que, pour PIa, tous les termes de la somme sont pairs (à cause des puissances de 8 et du chiffre des unités). Ils sont alors à même de conclure, plus ou moins adroitement, sur la parité du nombre en procédant à un traitement dans R_{poly}. Certains vont même jusqu'à énoncer et justifier de manière correcte les techniques, c'est-à-dire les critères de parité, en fonction de la parité de la base (cf. figures 6a et 6b). Nous ne pensions pas que le potentiel technologique de R_{poly} serait réalisé avec autant de force.

Cherchons dans quel cas un nombre à 5 chiffres en base 8 est pair.

$$(abcde)_8 = e + d8 + 64c + 512b + 4096a$$
$$= e + \underbrace{2[4d + 32c + 256b + 2048a]}_{\text{multiple de deux.}}$$

On constate que pour qu'un nombre à 5 chiffres en base huit soit pair, il faut que e soit un multiple de deux.

Figure 6a : critère de parité dans R_{huit} (F66)

On prend ici $(abcdefghi)_7$ pour trouver le critère.

$$ax7^8 + bx7^7 + cx7^6 + dx7^5 + ex7^4 + fx7^3 + gx7^2 + hx7 + i$$
$$= 2(2882400a + 411771b + 58824c + 8403d + 1200e + 171f + 24g + 3h)$$
$$+ a + b + c + d + e + f + g + h + i$$

Donc le nombre sera pair si la somme de ses chiffres est pair : $6+2+3+0+0+4+2+6+1=24$

Figure 6b : critère de parité dans R_{sept} (F74)

Notre deuxième hypothèse est donc validée pour la population totale malgré le faible pourcentage d'étudiants qui utilisent R_{poly} comme élément technologique (4% pour ×8, 11% pour PIa et 8% pour PIb). Cet élément technologique n'est pas anecdotique comme on peut s'en rendre compte sur le graphe implicatif pour la population totale où les trois variables « poly » se trouvent en tête du sous graphe contenant les variables « OK » ce qui semble indiquer une variable importante pour la réussite aux types de tâches.

2.1.6 Comparaison des deux populations

Les deux populations ont des profils qui sont globalement proches de ceux évoqués dans les sections précédentes. Ainsi, la plupart de nos conclusions semblent résister à l'épreuve d'un changement de système éducatif et de culture. C'est le cas de notre première hypothèse dont la validation semble même meilleure dans chacune des deux sous-populations à partir des arbres de similarités. Plusieurs différences sont toutefois à noter.

La première concerne notre deuxième hypothèse et les variables « poly ». Aucun étudiant grec n'a utilisé le registre R_{poly} autrement que comme registre transitoire entre R_a et R_{dix} ; le registre R_{poly} n'est considéré que comme une étape de conversion. Pourtant, l'enseignement suivi par les étudiants grecs fait état d'une utilisation du registre R_{poly} pour justifier des résultats et notamment pour le type de tâches PI. Ainsi, notre deuxième hypothèse n'est finalement validée que pour la population française.

La deuxième différence concerne les types de tâches. L'arbre des similarités de la population française montre un regroupement de toutes les variables « OK » alors que l'arbre des similarités pour la population grecque montre, pour les mêmes variables, deux blocs distincts : le type de tâches SP d'une part et les autres d'autre part. SP est le seul type de tâches du test qui est effectivement travaillé par la population grecque dans les registres R_a alors que les autres types de tâches sont travaillés à l'aide d'une conversion en base dix. Ceci permet d'expliquer le fait que le type de tâches SP forme un bloc séparé des autres types de tâches pour la population grecque.

Les étudiants réussissent très bien ce type de tâches SP – un peu mieux en Grèce qu'en France, et avec une différence entre S et P –, sans doute parce qu'il est beaucoup travaillé dans les deux institutions d'enseignement. En revanche, les réussites sont faibles pour le type de tâches Onz car il s'agit d'un type de tâches qui n'est pas, ou peu, travaillé. Les étudiants grecs présentent plus de difficultés avec ce type de tâches (Gr : 20% NR et 22% OK ; Fr : 15% NR et 50% OK). Ceci est sans doute un effet d'enseignement : si, dans les deux institutions, plusieurs types de tâches sont travaillés dans R_a, avec l'élaboration de techniques de traitement, il est notable qu'en Grèce ces types de tâches soient aussi effectués, avec à peu près la même fréquence, par un traitement en base dix après une conversion. En outre, certains types de tâches sont travaillés en Grèce exclusivement à l'aide d'une conversion en base dix[15]. Ainsi, les étudiants grecs sont entraînés à effectuer une conversion en base dix pour résoudre un type de tâches. Or, cela n'est d'aucune utilité pour Onz qui est une conversion $R_{dix} \rightarrow R_{onze}$.

	Grèce	×8	PIa	PIb
Grèce	« dix »	77%	78%	76%
	« NR »	16%	15%	18%
France	« dix »	42%	43%	42%
	« NR »	17%	15%	19%

Table 2 : utilisation de la base dix dans les deux institutions d'enseignement

Le recours à la base *dix* est quasi-systématique pour les étudiants grecs puisque la somme des pourcentages « dix » et « NR » est proche de 100% (table 2). On retrouve des traces de ces rôles différents des variables « dix » dans les graphes implicatifs pour les deux populations. Alors que les variables « dix » sont en tête de graphe, aux côtés des variables « poly », « A » et « 1_10 », pour la population française, elles se retrouvent en queue de graphe pour la population grecque. Pour cette

[15] Comme la comparaison et la multiplication. Notons que les types de tâches proposés à la population grecque sont souvent exprimés sur deux registres différents ce qui explique un recours fréquent à la base dix.

dernière, c'est la réussite à un type de tâches – pour PI et ×8 – qui implique un traitement en base dix alors que pour les étudiants français, c'est l'utilisation de la base dix comme base pour les traitements qui implique la réussite aux types de tâches.

Pour les types de tâches proposés, l'activité mathématique des étudiants grecs semble moins souple que celle des étudiants français. Mais bien entendu, il ne serait être ici question d'étendre nos conclusions à l'ensemble des systèmes éducatifs.

2.1.7 Discussion sur le développement les R-praxis

A partir de notre étude, nous mettons en évidence les liens profonds qu'entretiennent les registres de représentations et les praxis. Nous concluons alors sur l'importance de prendre en compte ces deux aspects dans l'enseignement des mathématiques.

Il semble que le type de tâches Onz touche à un élément cognitif de première importance pour le thème de cette étude : les pourcentages donnés ci-dessus de « NR » et de « OK » tranchent avec les autres types de tâches ; les confusions relevées – variable « Onz-Conf » –, confusions parfois profondes, sont très similaires aux erreurs de traitements des autres items tout comme l'inversion entre 1 et 10 pour coder vingt-et-un en base onze[16] ; les variables « Onz-A » et « Onz-1_10 » ont des rôles identiques dans les graphes implicatifs où ils sont en tête des arbres contenant les variables OK. La compréhension du codage en général, notamment les chiffres et leur ordre, semble être une des clés pour résoudre les problèmes de traitements en base autre que dix. Cela n'est pas très étonnant car comment une technique τ_R pourrait-elle être fiable si l'on ne maîtrise pas le registre R dans lequel elle s'applique ? Par ailleurs, on comprend mieux ce qu'est un chiffre quand la base est supérieure à dix car des signes supplémentaires sont nécessaires.

Duval (1993, 1996) précise qu'il est important d'avoir plusieurs registres de représentation afin de ne pas confondre un objet mathématique avec une de ses représentations. Ceci est bien mis en évidence par le type de tâches Onz où le nombre dix est très souvent confondu avec son codage 10 en base dix. Mais cela va beaucoup plus loin. Chez certains étudiants, on sent une tension entre la technique en base dix (le critère de parité) et le codage d'un nombre. Certains en restent au stade de l'étonnement mais d'autres écrivent clairement qu'un nombre est impair en base sept et pair en base dix (figure 7).

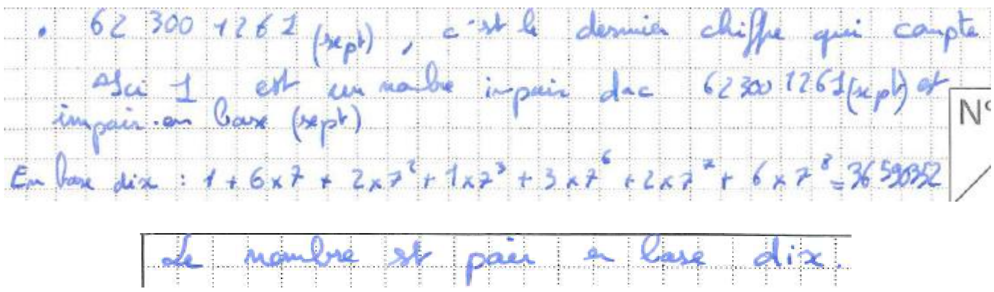


Figure 7 : la parité d'un nombre dépend de la base pour le coder (F122)

Ce problème provient d'une R-praxis élaborée sur un registre R naturalisé (R_{dix}) : le type de tâche « trouver la parité d'un nombre » est associé quelle que soit la base à la technique en base dix. Nous

[16] L'inversion entre 1 et 10, réponse $(101)_{onze}$, ne suffit pas pour être compté dans les « Conf ».

avions déjà rencontré ce problème avec des étudiants préparant le concours pour enseigner les mathématiques dans le secondaire en France. Une bonne étudiante demanda sérieusement si treize était aussi premier dans une base autre que dix.

Duval (1993, 1996) précise également qu'il est important de pouvoir choisir un registre plutôt qu'un autre pour effectuer les traitements. Il nous semble que la possibilité de ce choix masque une difficulté. En effet, et la population grecque l'atteste, la possibilité de faire systématiquement un traitement en base dix ne permet pas de développer les R-praxis dans les bases autres que dix. Dans cette population grecque, R_{poly} reste un registre transitoire pour effectuer une conversion en base dix : les registres R_a et R_{dix} ne jouent pas des rôles identiques. Dans R_{dix}, PI donne lieu à une véritable R-praxis, avec des techniques internes au registre R_{dix}, contrairement à R_a. Et si l'on ne peut que convertir sans possibilité de traitement, comment peut-on reconnaître la même *valeur mathématique* à $(19)_{onze}$ et 20 pour coder le nombre vingt ? Ont-ils la même *valeur* en tant que nombre ?

Il nous semble ainsi que non seulement il est important de travailler dans des bases autres que dix, mais qu'il est aussi nécessaire de développer les R-praxis associées, sans quoi les nouveaux registres risquent de ne pas remplir pleinement le rôle cognitif que leur prête Duval. Pour ce faire, et comme nous l'avons exposé, le rôle technologique joué par le registre R_{poly} dans la construction de ces R-praxis numériques semble particulièrement important.

Cela s'accompagne d'une prise en compte des conversions, dans les deux sens, car dans le travail des étudiants évoqué ci-dessus, $\tau_{a \to dix}$ n'apparaît que comme une technique. Par ailleurs, deux techniques différentes sont utilisées selon que l'on convertit <u>de</u> la base dix ou <u>vers</u> la base dix (divisions successives ou calculs à partir de l'écriture polynomiale). On ne comprend pas cette dissymétrie qui ne provient que de la connaissance de praxis en base dix et de l'absence de praxis dans les bases autres que dix. Dans ce contexte, la conversion entre deux bases ne peut se faire qu'en transitant par la base dix. Le développement des R-praxis dans les bases autres que dix permettrait de comprendre les deux conversions possibles, l'une basée sur la division euclidienne dans la base de départ et l'autre sur l'écriture polynomiale à calculer dans la base d'arrivée. On lèverait de cette manière les nombreux implicites des procédures utilisées par les étudiants.

2.1.8 Conclusion de l'étude

On relève deux difficultés cognitives particulièrement importantes pour le codage des nombres dans la numération de position :

- l'introduction de registres de représentation R_a avec $a \neq dix$;
- l'introduction des registre de représentation R_a avec $a > dix$.

Ces difficultés cognitives relatives aux registres R_a, avec $a \neq dix$ d'une part et $a > dix$ d'autre part, sont évidemment liées et semblent, d'après notre étude, stables d'une institution à une autre et d'un enseignement à un autre.

Toutefois, l'interprétation nécessite d'aller plus loin car les registres et les types de tâches influencent conjointement l'activité mathématique. On le voit particulièrement bien dans le deuxième item difficile, PIb, qui met en jeu un registre R_a, $a < dix$, mais où aucune technique interne à R_a n'est disponible. C'est dans ce sens que nous avons proposé une hiérarchie des R-praxis.

Il est à noter que si les pourcentages de réussite donnent quelques indications sur cette hiérarchie, il n'en reste pas moins que ce sont les arbres implicatifs qui ont été décisifs pour l'élaboration de ce classement des R-praxis. Ce point nous semble particulièrement riche du point de vue méthodologique. Le cadre théorique articulant registres et praxis permet d'étudier certains indicateurs-clés qui, en utilisant l'ASI, permet de montrer certains liens et donc, par retour, de justifier la validité et l'intérêt de notre cadre d'analyse didactique.

L'analyse *a priori* avait montré l'importance du registre de l'écriture polynomiale qui constitue un registre très efficace pour traiter les types de tâches pour lesquels on ne dispose pas de technique institutionnelle. Malheureusement, peu d'étudiants utilisent le potentiel technologique de ce registre. Il est majoritairement utilisé comme un registre transitoire lors d'une étape de conversion entre une base *a* et la base dix. Nous avons néanmoins validé notre deuxième hypothèse formulée à partir de nos analyses préalables sur le potentiel technologique de l'écriture polynomiale, notamment avec les similarités concernant deux types de tâches différents. L'ASI permet d'aller plus loin en montrant, par les quasi-implications, que ce registre R_{poly} est important pour la réussite aux types de tâches.

2.2 Les entiers : registres graphique et chiffrée[17]

Il a été proposé (mai et juin 2010) un test à environ 200 élèves de 6/7 ans contenant 5 types de tâches numériques (la comparaison et les quatre opérations de base) et en faisant systématiquement varier le type de représentation des nombres : numérique-chiffré ou graphique. L'objectif est d'étudier l'influence des représentations sémiotiques utilisées dans l'énoncé d'une tâche dans les démarches de résolution. Il est apparu un paramètre essentiel sur la nature du type de tâches étudié, selon qu'il est travaillé au cours de l'année scolaire ou non. Les analyses se focalisent sur ce point.

2.2.1 Description globale du test et de l'expérimentation

Nous considérons dans cette section les 5 types de tâches (Chevallard, 1999) suivants qui ont été proposés dans un contexte de résolution de problème relatif au nombre cardinal :

- T^1 : comparer deux nombres ;
- T^2 : déterminer la différence de deux nombres ;
- T^3 : déterminer la somme de deux nombres ;
- T^4 : déterminer le produit de deux nombres ;
- T^5 : déterminer le quotient d'un nombre par un autre.

Ce sont les cinq types de tâches numériques de base, la comparaison et les quatre opérations de base, restreints pour l'étude en première année de primaire aux *petits* entiers naturels. Le choix des types de tâches est donc mathématique mais il a également une fonction didactique essentielle pour notre propos car nous proposons des types de tâches devant être acquises en fin de première année de primaire (T^1 et T^3), des types de tâches en cours d'apprentissage (T^2) et des types de tâches normalement pas, ou très peu, travaillés à ce niveau (T^4 et T^5). Ainsi, nous étudions des types de tâches qui sont diversement influencés par l'enseignement scolaire et qui correspondent à notre questionnement général sur les nombres.

Afin d'étudier l'influence des représentations sémiotiques sur les activités des élèves, deux systèmes sémiotiques différents sont proposés et interprétés comme des registres (Duval, 1995) :

- R_A : le registre numérique des écritures chiffrées ;
- R_B : le *registre* graphique de représentation des quantités discrètes.

Dans la suite, pour simplifier le texte, les expressions « traitement numérique » et « procédure numérique » font explicitement référence au registre R_A.

Le choix de R_A est évidemment lié à son importance sociale et curriculaire. R_B a été choisi de sorte que les représentations soient connues des élèves, suffisamment éloignées de R_A (en particulier les collections ne sont pas organisées par paquets), et qu'il permette un choix de conversion (ici nous en avons au moins deux : l'énumération 1 à 1 ou le groupement par paquet de dix).

Si R_A est bien un registre de représentation des nombres, précisons que R_B n'est pas un registre de représentation au sens strict de Duval (1993). En effet, les traitements possibles sur les éléments figuraux sont externes à R_B car il n'y a pas de transformation interne. Cela aurait été le cas si l'on

[17] Cette section reprend pour l'essentiel l'article de Block, Nikolantonakis & Vivier (2012). On pourra se référer à cet article pour plus de détails et notamment pour des diagrammes et des tableaux de fréquences.

avait considéré une représentation matérielle des unités. Par exemple, pour comparer les deux collections de billes dans T^1_B avec des billes matérielles on pourrait réorganiser les collections en utilisant des sous-collections des billes blanches et noires de même cardinal ou bien mettre de côté simultanément une bille blanche et une bille noire jusqu'à épuisement d'une collection. Avec R_B cela est impossible et il faut alors simuler ces traitements[18] avec des traces externes : entourer des *ronds* pour faire des paquets ou bien cocher simultanément un *rond* blanc et un *rond* noir jusqu'à épuisement d'une collection[19]. En outre, le choix de représenter les nombres par des unités graphiques ressemblant aux matériels évoqués (billes, animaux, bonbons, …) déroge également aux canons des registres de représentation mais ce choix, conscient, permet une meilleure compréhension de la consigne pour des enfants de cet âge. Malgré l'abus de terminologie, nous utiliserons parfois le terme de *registre* pour désigner R_B car ce qui nous importe est : 1) la possibilité de représentation que permet un système sémiotique, 2) les possibles conversions entre système sémiotique et 3) les traitements – qu'ils soient internes ou externes.

Le test propose de faire une étude croisée systématique de ces deux groupes : d'abord les types de tâches T^1 à T^5 énoncés dans le registre R_A puis les mêmes types de tâches énoncés dans le système R_B. L'objectif est de proposer des couples de problèmes qui ne diffèrent que par le registre de l'énoncé. En particulier les nombres en jeu et les contextes sont identiques, sauf[20] pour T^4. Bien entendu, le changement de registre de l'énoncé peut modifier le type de tâches, comme par exemple pour T^3_A et T^3_B ou pour T^4_A et T^4_B. Nous conservons toutefois ce codage pour les problèmes posés tout en sachant, pour ces deux couples, qu'il ne s'agit pas des mêmes types de tâches. Nous étudions alors les stratégies et procédures que les élèves développent tout en pointant le registre dans lequel le type de tâches est effectué. Par exemple, pour T^1_B, il peut y avoir un traitement (externe) dans R_B ou bien une conversion dans R_A puis un traitement dans R_A.

Nous ne prenons pas en compte deux registres intermédiaires qui jouent pourtant un rôle important dans cette étude : le registre verbal (notamment dans une énumération) et le registre des doigts de la main (pour un comptage par exemple). Nous avons observé effectivement leur utilisation par de nombreux enfants. Mais leurs utilisations ne laissent aucune trace et il aurait fallu opter pour une autre méthodologie s'appuyant par exemple sur des entretiens filmés. Nous avons fait un autre choix expérimental en favorisant le nombre d'élèves afin de produire une étude statistique.

Le premier test est donné dans le registre R_A et le test dans R_B est donné une semaine plus tard pour que les enfants oublient les réponses, procédures, etc. Ils se sont déroulés à peu près en même temps dans les trois pays et ont concerné environ 213 élèves de la toute fin de la première année de l'école élémentaire. Finalement, 192 élèves ont réalisé l'ensemble du test dont la répartition est donnée dans la table 3. Une présentation de chaque problème a été faite et les réponses aux

[18] On peut aussi penser à donner les unités dessinés avec un crayon de papier. Ainsi, en gommant et en redessinant, on peut avoir les mêmes traitements qu'avec le registre matériel, internes donc. Toutefois, il ne paraît pas raisonnable de donner cette gestion des unités à des enfants de 6 ans.

[19] Précisons qu'il n'y a que peu de différences entre un trait de crayon entourant des unités graphiques et le fait de bouger des éléments matériels représentant les unités.

[20] Les dessins utilisés dans les tâches posées dans le registre graphique, ne sont pas « décoratifs », ils sont porteurs d'informations numériques. En revanche, dans le cas des tâches posées dans le registre numérique, les contextes, et non pas les données numériques, sont représentés par des dessins dont la fonction n'est pas uniquement décorative (Elia, et *al*. 2007) puisqu'ils facilitent la compréhension du contexte pour de jeunes enfants. Deux exceptions seront signalées dans l'analyse *a priori*.

différentes questions des enfants étaient formulées pour ne pas orienter leur travail. En section suivante, on trouvera le test proposé aux enfants dans la version française.

Nationalité	FR	GR	MX	Total
Nombre	61	45	86	192
Pourcentage	32%	23%	45%	100%

Table 3 : répartition des élèves par nationalité

2.2.2 Analyses a priori

Nous présentons ici une analyse *a priori*[21] des dix tâches proposées aux enfants et les principaux critères de codage. Les trois premières tâches impliquent des connaissances enseignées dès la première année de l'école (comparaison, soustraction et addition), dans les trois pays, et donc vis-à-vis desquelles les enfants disposaient probablement d'au moins une technique enseignée. En revanche, les tâches 4 et 5 impliquent des connaissances (multiplication et division) qui, en principe, ne sont pas enseignées à ce niveau. Ainsi, pour ces deux tâches, les enfants ne disposaient probablement pas d'une technique enseignée mais, comme nous le verrons, ils pouvaient mettre en œuvre d'autres types de raisonnement pour résoudre les problèmes posés.

Les problèmes impliquent une seule opération. Nous explicitons ci-dessous les variables numériques et les relations entre les données qui furent considérées. Nous montrerons aussi les procédures et stratégies envisagées. Nous utilisons les indicateurs suivants :

- nr : pas de réponse au problème posé ;
- ok : bonne réponse (avec parfois une tolérance) ;
- conv : présence d'une conversion de registre ;
- tRa : traitement dans R_A ;
- tRb : traitement dans R_B ;
- repR : réponse dans le registre de l'énoncé ;
- sign : utilisation d'un signe opératoire (+, –, × ou :).

T^1: la comparaison 29<31

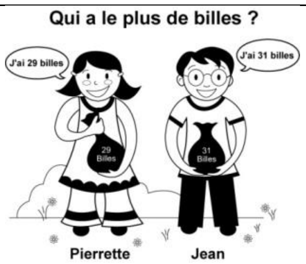


Figure 8a : tâche T^1_A

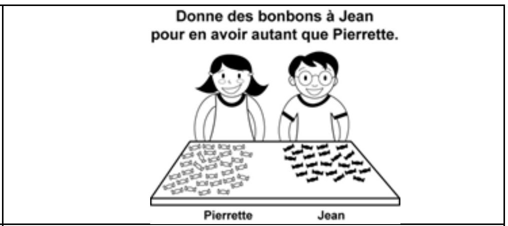
Figure 8b : tâche T^1_B

[21] Certaines procédures peu représentatives ne sont pas exposées ici.

T^1_A. Les nombres ont deux chiffres et une différence petite entre eux, on peut donc s'attendre a une reconnaissance immédiate du nombre le plus grand (nr=0 ; ok=1).

T^1_B. Les cardinaux des collections ne sont pas comparables par perception visuelle et les billes sont en désordre, ce qui favorise une stratégie d'énumération. La procédure probable est le dénombrement de chaque collection et la comparaison des nombres, ce qui implique une conversion (conv=1), et un traitement numérique (tRa=1). On s'attend à des erreurs d'énumération. Des procédures graphiques (tRb=1) sont aussi possibles : comparaison par perception visuelle des collections ou une correspondance 1 à 1, bien que cette dernière soit peu probable car bien moins économique que la procédure par conversion dans R_A.

T^2 : la soustraction 32–23

	
Figure 9a : tâche T^2_A	**Figure 9b** : tâche T^2_B

Il s'agit d'un problème de soustraction du genre rapport entre mesures, troisième catégorie de la classification de Vergnaud (1982, 1991). On applique, dans les deux tâches, une tolérance de +/–1.

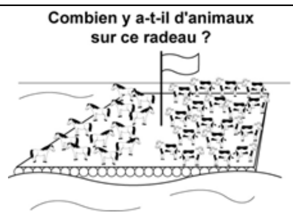
T^2_A. Les nombres ont deux chiffres, les mêmes (2 et 3) ce qui pourrait mener à les considérer égaux ; la différence (9) peut être contrôlée avec les doigts. La soustraction avec l'algorithme a une complication : le chiffre des unités du grand nombre est plus petit que celui du petit nombre, il y a donc une retenue. Le traitement le plus probable est numérique (tRa=1, tRb=0) par exemple par sur-comptage du petit nombre au grand nombre. Ce comptage peut s'effectuer à l'aide des doigts (le nombre de doigts levés étant le résultat cherché), sans laisser aucune trace, ou bien en dessinant les bonbons au fur et à mesure du sur-comptage (conv=1), ou encore en écrivant les nombres 24, 25…32. Dans ce cas, pour donner la réponse, il faut compter les bonbons ou les nombres et écrire le nombre trouvé (repR=1). Or, il est possible de laisser comme réponse les bonbons dessinés (repR=0) ou la liste des nombres écrits (repR=1). La procédure graphique est peu probable car elle est laborieuse : dessiner les bonbons (conv=1), les mettre en correspondance et donner comme réponse les bonbons non associés.

La tâche peut être interprétée aussi comme s'il s'agissait d'enlever des bonbons à la fille pour en donner au garçon. Dans ce cas la tâche devient plus complexe. Plusieurs procédures numériques sont possibles (trouver la différence, 9, et donner au garçon 4 ou 5 bonbons ; s'approcher peu à peu en enlevant chaque fois un bonbon à la fille et en le donnant au garçon). Les procédures graphiques sont à nouveau coûteuses : dessiner les collections puis faire passer quelques bonbons d'une collection à l'autre. Cette interprétation sera considérée correcte.

Une autre interprétation erronée possible consiste à écrire « 32 » ou bien dessiner 32 bonbons pour Jean (nr=1).

T^2_B. On peut déterminer visuellement quelle collection est la plus grande (ceci est précisé dans la consigne), mais on ne peut pas déterminer visuellement la différence. La tâche implique donc une soustraction. Cette fois le traitement numérique (tRa=1, tRb=0) n'est plus tellement avantageux vis-à-vis d'un traitement dans R_B. Il implique de dénombrer chaque collection (conv=1), éventuellement écrire les nombres (au moins un d'eux comme mémoire) puis faire la soustraction. Le traitement graphique (tRb=1) ne consiste qu'à faire une correspondance 1 à 1, ou par petits groupes. Une fois épuisée une collection, les bonbons de l'autre qui n'ont pas de couple, indiquent le résultat. Il faut encore compter ces éléments et écrire le nombre (conv=1) soit dessiner une collection équivalente.

T^3 : la somme 13+18

	
Figure 10a : tâche T^3_A	**Figure 10b** : tâche T^3_B

Il s'agit d'un problème additif de composition, première catégorie de la classification de Vergnaud (1982, 1991), la somme correspond à une classe (animaux) qui en contient deux autres (moutons et chèvres ou chevaux et vaches).

T^3_A. Les cardinaux des collections sont des nombres de deux chiffres entre 10 et 20. La somme fait apparaître une retenue. La somme peut être faite par calcul mental ou bien en posant l'addition écrite (les élèves des trois pays ont déjà commencé à étudier l'algorithme). Dans les deux cas nous avons un traitement numérique (tRa=1, tRb=0). On peut s'attendre à des oublis de la retenue si l'algorithme est utilisé. Il est aussi probable que certains élèves représentent graphiquement les deux nombres (conv=1) pour compter la collection totale (tRa=0), ou au moins une des deux pour appuyer le comptage (tRa=1). Nous avons considéré une tolérance de +/–1 (sommes correctes : 30, 31 ou 32).

T^3_B. Les collections sont dessinées et distinctes, les éléments de chaque sous-ensemble sont en désordre, une stratégie d'énumération est donc requise : comptage global (tRa=0, conv=1), ou bien comptage de chaque collection et somme, écrite ou par calcul mental (tRa=1, conv=1). Dans ce dernier cas il devrait y avoir au moins un nombre écrit, comme mémoire. L'écriture des deux cardinaux, sans faire la somme sera considérée comme une absence de réponse (nr=1, conv=1). Les dénombrements seront pris comme corrects à +/–1 ; dans le cas d'une somme effectuée, nouvelle tolérance de +/–1 (par exemple, si 12 chevaux et 18 vaches, on tolère 29, 30, 31 ; etc.).

T^4 : la multiplication 7×4

Dans une classe, il y a 7 rangées de 4 tables. Combien y a-t-il d'élèves ?	
Figure 11a : tâche T^4_A	**Figure 11b** : tâche T^4_B

T^4_A. Il s'agit d'un arrangement rectangulaire. La tâche T^4_A est la seule où l'énoncé est purement verbal, sans dessin explicitant le contexte. Nous avons considéré qu'une représentation même partielle de l'arrangement rectangulaire deviendrait une aide importante en orientant fortement vers une procédure graphique. Le traitement numérique est possible avec une addition réitérée (tRa=1, tRb=0). Le problème étant nouveau pour les enfants et l'énoncé faisant référence à une distribution spatiale, il est probable que plusieurs représentent graphiquement les rangées et comptent les éléments (conv=1, tRa=0), avec une représentation numérique du résultat (nouvelle conversion et repR=1). Étant donné que le registre est numérique et le problème est nouveau pour les enfants, une erreur possible consiste à faire la somme les données (indicateur supplémentaire rep11=1). Une tolérance de +/–1 est donnée sur la réponse lors d'un dénombrement ainsi qu'une tolérance de +/–1 sur le nombre de paquets de 4 tables.

T^4_B. Il s'agit de dénombrer une collection dessinée et structurée en lignes et colonnes. Il n'y pas de difficulté d'énumération, donc le dénombrement est facilité (conv=1). L'addition réitérée est possible (tRb=0, tRa=1).

T^5 : la division 24÷3

	
Figure 12a : tâche T^5_A	**Figure 12b** : tâche T^5_B

Le problème pose un partage équitable[22] et donne lieu à une plus grande diversité de procédures que dans les autres problèmes posés.

T^5_A. Le diviseur est suffisamment petit pour permettre l'utilisation de l'addition réitérée. Il n'y a pas de reste. C'est la seule parmi les tâches numériques où une des données (le diviseur) est doublement représentée, de façon numérique dans le texte et aussi graphique à travers le dessin des trois enfants. Nous avons considéré que le problème était suffisamment difficile avec le dividende exprimé uniquement de façon numérique. La représentation graphique du diviseur (les 3 enfants) a-t-elle pu favoriser les procédures graphiques ? Il est bien entendu possible que cela puisse renforcer le choix d'une stratégie graphique, mais nous faisons l'hypothèse que cette influence est faible étant donné que la donnée la plus pénible à représenter graphiquement est le dividende, celle des 24 gâteaux.

Le traitement numérique (tRa=1, tRb=0) probable est l'utilisation de la somme réitérée d'un quotient approché, puis la comparaison de la somme obtenue avec le dividende (24) et ensuite, ajustement du quotient jusqu'à atteindre l'exhaustivité. Les traitements graphiques (conv=1, tRa=0, tRb=1) sont moins probables puisqu'il faut dessiner la collection.

[22] La condition d'exhaustivité n'a pas été explicitée, elle fut donnée oralement en France et en Grèce, au Mexique dans deux des trois classes.

T^5_B. La collection à partager est dessinée, les éléments sont en désordre. On peut s'attendre à ce que les procédures graphiques soient fréquentes (tRb=1, tRa=0). Les enfants peuvent faire : une subdivision approchée, par perception visuelle, probablement non équitable, de toute la collection ; trois petits groupes de même cardinalité en laissant un reste ; une distribution cyclique 1 par 1, (ou 2 par 2, 3 par 3, pour aller plus vite) tout en contrôlant le nombre total de gâteaux repartis. Les procédures numériques restent possibles : dénombrer la collection (conv=1) puis utiliser la procédure décrite plus haut de la somme réitérée d'un quotient approché avec des ajustements (tRb=0 ; tRa=1). Lorsque des ajustements sont faits sur la collection dessinée, on considérera que le traitement est hybride puisqu'il utilise la représentation graphique pour faire une première subdivision et pour identifier le reste ainsi que le registre R_A pour contrôler l'égalité des groupements (tRa=1, tRb=1). Un autre traitement hybride consiste à écrire le nombre 1 sur trois gâteaux, le nombre 2 sur trois autres, etc. jusqu'à designer tous les gâteaux. Le dernier nombre utilisé est le résultat (tRa=1 et tRb=1). Les réponses 7, 8 et 9 sont considérées comme correctes et aussi 5 et 6 si la procédure est correcte et qu'il y a une idée du reste.

2.2.3 Influences sur l'activité mathématique

Les diagrammes que nous proposons sont des extraits du diagramme complet afin d'en augmenter la lisibilité. Les arbres de similarité sont construits à l'aide du logiciel CHIC en considérant les nationalités comme des variables secondaires (FR, GR et MX).

On distingue clairement dans l'arbre de similarités suivants (cf. figure 13) une structure relative aux deux registres de représentation et transversale aux types de tâches proposés : les traitements dans un des deux registres, R_A ou R_B, sont clairement séparés (on note toutefois deux exceptions : 3b-tRa et 1b-conv). On a donc effectivement accès, par notre analyse, à une partie de l'activité cognitive de l'élève lorsqu'il est confronté à un type de tâches numérique puisque l'on peut distinguer dans cet arbre de similarité les traitements et les conversions[23].

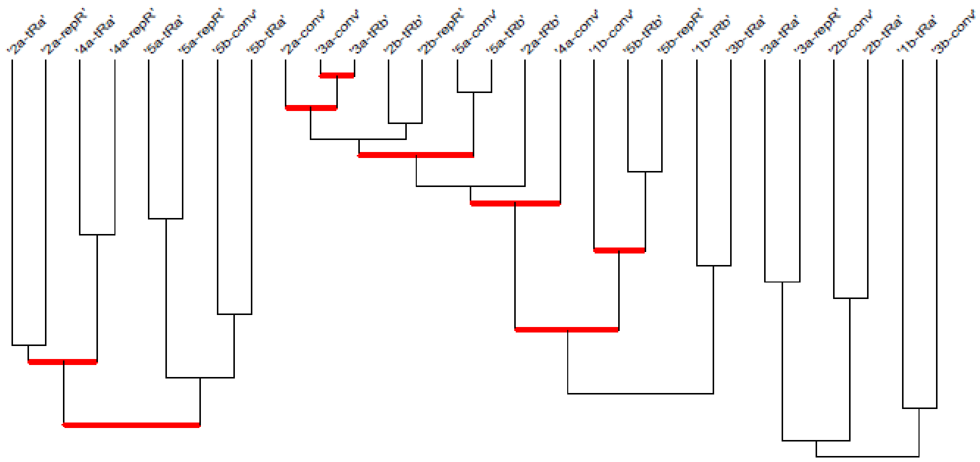


Figure 13

Cette structure se retrouve pour chaque type de tâches : les arbres des similarités pour chaque type de tâches montre, de manière moins marquée pour T^3 et T^5, deux blocs distincts selon le registre de

[23] Cf. aussi l'étude exposée en section 2.1.

traitement, R_A ou R_B, avec également une forte similarité entre les indicateurs « sign » d'utilisation des signes numériques d'opération (+, –, ×, ÷).

L'utilisation des signes est plus marquée lorsque le registre de l'énoncé est R_A ce qui montre que, sans surprise, les signes sont plutôt reliés au registre R_A. T^3_A-sign présente un taux (24%) largement supérieur aux autres indicateurs « sign ». Ceci s'explique par le fait que ce type de tâches est bien travaillé au cours de cette première année d'école primaire et cette situation de réunion de collection est emblématique de la somme et du signe « + ». Certains indices laissent penser que l'utilisation des signes opératoires gène l'entrée dans un problème et sa résolution.

Le calcul des typicalités (en risque) des variables secondaires FR, GR et MX dans l'arbre de similarité avec les indicateurs ok, tRa, tRb et sign montre trois profils différents pour chacun des trois pays :

- la population française (FR) est typique d'une utilisation des signes ;
- la population mexicaine (MX) est typique d'un traitement dans le registre graphique « tRb » ;
- la population grecque (GR) est typique des traitements numériques « tRa ».

Ainsi, il semble que les élèves français ont une plus grande tendance à la formalisation par l'utilisation des signes d'opérations, les élèves mexicains utilisent plus souvent la conversion pour un traitement dans R_B (ou hybride) d'un type de tâches, même s'il est exclusivement énoncé dans le registre R_A. À l'opposé des élèves mexicains, les élèves grecs semblent plutôt rester dans le registre R_A pour résoudre un problème posé dans R_A.

Des nuances seraient à apporter si l'on prenait en compte les classes dans les arbres de similarité. On pourrait ainsi parler de l'influence de l'enseignement reçu pendant l'année scolaire, ce qui pourrait préciser l'influence culturelle. Une étude plus approfondie sur un plus grand nombre de classes et mieux réparties dans chaque pays concerné serait nécessaire pour aller plus avant.

2.2.4. Le cas des types de tâches travaillés : T^1 ; T^2 ; T^3 ; T^4_B

Au-delà les nationalités, on s'aperçoit que les items T^1_A, T^1_B, T^3_B et T^4_B ont un fort taux de réussite (pour T^1_A et T^4_B aucune tolérance n'est appliquée). Ce n'est pas une surprise puisque l'on dispose à ce niveau d'enseignement d'une technique de conversion : le dénombrement par comptage des éléments des collections présentées. Les taux indiquent alors que non seulement le dénombrement de collection dont le cardinal est proche de trente est maîtrisé par beaucoup d'enfants, mais qu'il en est également de même pour la comparaison de deux nombres écrits dans R_A (effectuée souvent mentalement car, pour T^1_B, les nombres sont très rarement écrits). Les types de tâches *dénombrer une collection* et *comparer deux nombres dans R_A* sont routiniers pour une très large majorité d'élèves

Nous y voyons ici des types de tâches et des techniques qui sont reconnus et travaillés dans les trois pays. Ceci est confirmé par les manuels scolaires des trois pays où ces types de tâches et techniques sont travaillées dès les premières pages. Notons que l'investissement est sans doute plus fort pour la population grecque comme semble l'indiquer les taux de réussites plus élevés pour ces 4 items.

On note tout de même deux différences entre T^3_B d'une part et T^1_A, T^1_B et T^4_B d'autre part : il y a un plus grand taux de « nr » qui s'explique en partie par des élèves qui dénombrent les deux sous-collections sans répondre à la question et il y a un taux plus faible de « ok » qui s'explique aussi en partie par le fait que 13% d'élèves font une somme après dénombrement ce qui augmente la probabilité de faire des erreurs. Quoiqu'il en soit, il paraît clair que le fait d'avoir, pour T^3_B, deux sous-collections avec des unités graphiques différentes (vache ou cheval) modifie ce que l'on pourrait appeler la « composante cognitive » du type de tâches *dénombrer une collection*[24].

On remarque que si T^3_A est un type de tâches bien identifié et travaillé, la réussite pour les nombres donnés dépasse à peine la moitié de l'effectif, ce qui fait une différence avec le dénombrement d'une collection. Ainsi, une grande différence de traitement des deux versions de T^3 apparaît. Pour T^3_B, seul 13% des élèves font un traitement dans R_A après un dénombrement des deux sous-collections d'animaux, les autres reconnaissent un problème simple de dénombrement par comptage (ils dénombrent simplement une collection d'animaux).

Pour les types de tâches travaillés que sont T^1_A, T^1_B, T^3_A, T^3_B et T^4_B, si le registre de l'énoncé modifie évidemment l'activité des élèves, il ne semble pas influencer la stratégie de résolution qui consiste à choisir R_A comme registre pour effectuer les traitements (avec donc une conversion dans le cas d'un énoncé dans R_B). Majoritairement les procédures observées sont les suivantes :

- T^1_A : technique de comparaison dans R_A ;
- T^1_B : dénombrement par énumération (technique de conversion $R_B \rightarrow R_A$) puis technique de comparaison dans R_A ;
- T^3_A : technique de somme dans R_A ;
- T^3_B et T^4_B : dénombrement par énumération (technique de conversion $R_B \rightarrow R_A$).

T^2 est également, dans une moindre mesure, un type de tâches étudiés au niveau considéré. Globalement, pour T^2, on note une très forte tendance à faire un traitement dans R_A pour résoudre ce type de tâches[25]. Comme pour les types de tâches précédemment étudiés (T^1, T^3_A, T^3_B et T^4_B), pour ce type de tâches T^2 le registre de l'énoncé n'influence pas les stratégies des élèves (i.e. le choix du registre R_A pour effectuer les traitements).

La chute de réussite de 76% pour T^2_A à 51% pour T^2_B s'explique bien par le fait que les élèves ont appris à faire des soustractions de ce type, mais si le registre R_B permet une meilleure compréhension de l'énoncé, il n'en reste pas moins que l'usage de la soustraction dans R_A nécessite d'abord de dénombrer les collections, avec de possibles (mais sans doute rares) erreurs, et ensuite de faire la soustraction, avec un possible oubli des nombres car beaucoup d'enfants ne notent pas les nombres obtenus alors que l'on observe des traces de comptage[26].

Pour ces types de tâches travaillés et plus spécifiquement pour T^2, tout se passe comme si le registre R_A « happait » l'activité mathématique de l'élève alors que ce n'est pas nécessairement le registre le plus efficace et le plus sûr pour résoudre le problème.

[24] Le fait d'avoir une collection en désordre, il s'agit d'une différence avec T^4_B, ne semble pas jouer vu la réussite à T^1_B.

[25] On pourrait détailler selon le registre de l'énoncé : pour T^2_A, la procédure graphique est plus coûteuse, mais ce n'est plus le cas pour T^2_B.

[26] Cette explication est également valable pour la petite différence de réussite aux items T^1_A et T^1_B. Mais on note alors une grande différence dans la maîtrise des techniques pour effectuer une comparaison ou une soustraction dans R_A.

Notons que, si le registre R_A ne happe pas l'activité mathématique pour T^3_B – par exemple en faisant la somme des cardinaux des deux sous-collections – c'est en fait parce que l'élève le reconnaît comme un autre type de tâches *dénombrer une collection* qui a une forte présence institutionnelle.

2.2.5. Type de tâches non travaillés : T^4_A ; T^5

S'il semble que le registre de l'énoncé n'influence pas les stratégies de résolution des élèves pour les types de tâches travaillés, en revanche, l'influence est grande pour les types de tâches en marge de l'enseignement reçu. Ces types de tâches sont ici T^4_A et T^5.

T^4_A et T^5 sont deux types de tâches qui ne sont pas, ou très peu, travaillés et pour lesquels on ne dispose pas de l'opération idoine. L'arbre des similarités pour T^4_A et T^5_A (cf. figure 14) montre une grande similitude des deux problèmes (exception faite de l'indicateur « nr ») :

- Les réussites sont liées au niveau 5 et se regroupent avec les conversions dans R_B pour résoudre le problème. Plus spécifiquement pour T^4_A, le taux de réussite global de 45% passe à 62% pour la sous-population des élèves (effectif 76) qui ont fait une conversion à cet item[27].
- De leur côté les traitements dans R_A – avec l'erreur « 11 » – et les indicateurs « sign » forment un groupe séparé, notamment des indicateurs de réussite.

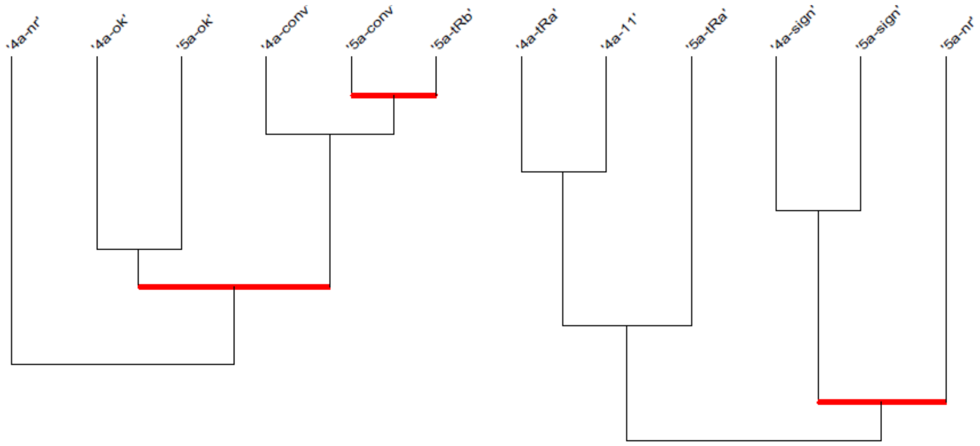


Figure 14

Nous avons repéré que très souvent, pour T^5_B, l'utilisation de R_B était rarement exclusive et que beaucoup d'élèves ont utilisé des procédures hybrides (codage tRa=tRb=1). En particulier, la stratégie qui consiste à faire une part, puis à faire deux autres parts équipotentes et enfin à rectifier ces quantités ne peut être faite que par une comparaison des nombres des trois parts, par comptage, la comparaison se faisant dans R_A (et mentalement, cf. la discussion sur T^1 en section précédente). Ceci explique sans doute le relatif bon taux de réussite à cet item T^5_B.

La différence de réussite entre T^5_A et T^5_B peut s'expliquer par le fait que les procédures hybrides sont favorisées par un énoncé dans R_B. On peut en effet supposer qu'une conversion $R_B \rightarrow R_A$ n'est pas

[27] Par une approximation normale, la différence des deux pourcentages de réussites est acceptable puisqu'au seuil 1% la fréquence d'un échantillon de la population totale est inférieure à 53%.

problématique et que, puisque l'on donne le problème dans R_B, la responsabilité d'utiliser R_B n'est pas à la charge de l'élève.

Par ailleurs, la différence de réussite entre T^5_B (65%) et T^2_B (51%) semble pouvoir s'expliquer en grande partie par le fait que T^2_B est travaillé, et donc R_A « happe » l'activité mathématique, contrairement à T^5_B. Ainsi, un travail dans R_B semble possible pour T^5_B et non pour T^2_B.

Ces résultats permettent d'émettre une hypothèse sur l'importance de coordonner ces deux registres, R_A et R_B, dans les procédures de résolution pour un type de tâches non routinier.

2.2.6 Conclusion de l'étude

À partir de cette étude internationale sur les problèmes numériques en fin de première année de l'école primaire, nous avons mis en évidence l'influence conjointe des registres de représentation et des praxis sur l'activité mathématique des élèves. Plus précisément, nous pouvons préciser une hypothèse sur l'importance du registre de représentation pour certains types de tâches.

Pour un type de tâches travaillé, on suppose qu'un élève reconnaît ce type de tâches, le registre dominant pour le traitement est R_A – et ce, même si celui-ci n'est pas le meilleur registre pour le traitement (cf. T^2_B). Il n'y a de ce fait pas de réelle influence du registre de l'énoncé sur les stratégies des élèves même si, comme nous l'avons dit, les activités changent puisque cette stratégie globale peut nécessiter une conversion selon l'énoncé. On peut avancer deux explications :

- le coût d'une procédure graphique par rapport à une procédure numérique, surtout lorsqu'il y a un minimum de maîtrise de la R_A-praxis – ce qui est notamment le cas pour les types de tâches qui ont été travaillés ;
- lorsque l'on traite d'un type de tâches qui a été travaillé, le rôle de l'institution est justement de développer une praxis qui est, étant donné que l'institution favorise R_A, une R_A-praxis.

Pour les autres types de tâches, le registre de l'énoncé influence largement les traitements et la réussite. Car si l'énoncé se situe dans R_A, on a tendance à y rester ce qui ne favorise pas forcément la réussite. Cette tendance semble venir directement du phénomène précédent qui favorise R_A. En revanche, un énoncé dans R_B permet de mieux appréhender un type de tâche non travaillé.

Comme le signale Duval, la coordination des registres est importante. Mais il nous semble que cette importance ne s'exprime pas de la même manière selon le type de tâches :

- s'il est travaillé, l'important est de maîtriser la conversion $R_B \rightarrow R_A$ et la R_A-praxis enseignée (par exemple beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas les techniques de l'addition ni de la soustraction) ;
- s'il n'est pas travaillé, l'important est une bonne coordination des deux registres, sans se limiter à la maîtrise des conversions, comme par exemple lors d'une procédure qui est principalement un traitement dans un des deux registres mais avec un contrôle de l'activité dans l'autre registre (cf. T^5_B).

Néanmoins, les différents points explicités sont directement liés à l'enseignement reçu que ce soit à travers des cultures différentes, comme nous l'avons mis en évidence avec les profils de chaque pays, ou plus vraisemblablement à travers des profils d'activité enseignante dans les classes, ce qui nécessite une étude plus approfondie. Globalement, il nous semble que l’enseignement se focalise un peu trop sur le registre de l’écriture chiffrée. Car si cela paraît normal pour le développement des praxis numériques (ce registre est tout de même plus puissant que le registre graphique), il n’en reste pas moins que cela entrave l’activité des élèves lorsqu’ils sont confrontés à un type de tâches nouveau car l’enseignement reçu ne permet pas d’entrer sereinement dans des problèmes plus complexes ni de choisir le(s) registre(s) pour les traitements.

Conclusion de la partie 1

Ces études permettent de comprendre les liens étroits qu'entretiennent, dans le travail mathématique, les techniques de résolution des tâches mathématiques et les signes utilisés dans l'énoncé de ces tâches et ces techniques. Pour ces études, le croisement entre la TAD et la sémiotique de Duval apparaît effectivement comme une démarche pertinente où il est précisé les liens entre les praxis et les registres de représentation.

Mais les interrogations vont plus loin. En effet, par la considération des changements de registre, au-delà d'une discussion sur la possibilité de les concevoir ou non comme des techniques dans le cadre des praxéologies, on peut prendre conscience de la sensibilité du travail mathématique effectué et développé selon le registre de l'énoncé d'une tâche et de la possibilité ou non de changer de registre. Bien sûr, il n'est pas nouveau en didactique des mathématiques d'annoncer le rôle producteur des changements de registres car ils peuvent permettre de débloquer une situation, mais ce que je montre c'est aussi le fait que, avoir un registre principal trop important, peut :

- bloquer le développement des mathématiques dans un certain registre, les R-praxis, et empêche par la même une conceptualisation de plus haut niveau des mathématiques ;
- se révéler inefficace pour la résolution d'un type de tâche travaillé.

La prise de conscience des autres registres de représentation des entiers, même en restant dans le cadre des systèmes de numération usuelle, demande un travail spécifique sur ce qui constitue les fondements de ces systèmes (Tempier, 2013) : le principe de position et les conversions entre les unités de rang. Une expérimentation en prenant en compte ces deux principes a été menée, avec succès, avec un public d'étudiants-professeurs du premier degré sur la base sept[28] (Vivier, soumis). Les analyses utilisent les points de vue de Hofstadter et Sander (2013) sur l'analogie.

Je voudrais terminer cette partie par une dernière réflexion sur les conversions numériques. Comme nous le verrons en partie 2, les *preuves* de l'égalité entre 0,999… et 1 font apparaître pour la plupart une soustraction. Or, précisément, ce qui manque dans la construction de **Q** par les développements décimaux c'est l'existence d'une soustraction qui est intrinsèquement liée à l'égalité que l'on tente de prouver. Néanmoins, certaines *preuves* n'utilisent pas de soustraction, et il est intéressant de les mentionner ici, comme la suivante : $1/3=0{,}333\ldots$ donc $3\times1/3=3\times0{,}333\ldots$ et finalement $1=0{,}999\ldots$. Ce qui fait fonctionner la *preuve* ici c'est une conversion entre les deux systèmes sémiotiques, fractionnaire et décimal illimité périodique. Ce que l'on perçoit ici, c'est qu'une conversion ne permet pas seulement de lier les praxis comme nous l'avons vu dans cette partie mais aussi qu'une conversion peut *embarquer* toute la structure mathématique. Car en affirmant l'existence d'une conversion entre les deux registres, on affirme le fait que les représentations réfèrent aux <u>mêmes objets</u> mathématiques avec les mêmes propriétés ce qui implique l'égalité $0{,}999\ldots=1$.

[28] Dans une deuxième phase, l'expérimentation proposait un travail dans le système de Zeckendorf (1972), basé sur la suite de Fibonacci. Mais les principes semblent trop éloignés de ceux de la base dix pour que les analogies puissent être productrices pour ce public.

PARTIE 2 :

LES RATIONNELS EN ÉCRITURE DÉCIMALE

Introduction

Cette partie a pour ambition de traiter de manière originale un nœud des mathématiques sur les nombres. Il s'agit de la constitution de l'ensemble **R**, de la représentation de ses éléments et, surtout, de la transition des nombres rationnels aux nombres réels.

Je me focalise sur les rationnels en écriture décimale que je considère comme un intermédiaire intéressant dans la *définition* des réels par les développements décimaux illimités. Je privilégie cet intermédiaire pour les possibilités de calcul dont on dispose.

Du côté des mathématiciens, l'étude des développements décimaux périodiques et des périodes n'a pas eu beaucoup d'écho et il semble plutôt que cela soit perçu plus comme des récréations mathématiques. J'espère que le point de vue développé dans cette partie 2 permettra de montrer l'intérêt de considérer les périodes comme des objets à part entière, les mots circulaires, et ainsi de modifier le regard sur les écritures décimales périodiques. Ce détour par la recherche en mathématiques permet en outre de revisiter cette fameuse égalité entre 0,999… et 1 en changeant radicalement de point de vue : au lieu de partir d'une construction supposée faite d'un ensemble de nombres contenant les rationnels et de redescendre pour montrer la nécessité de l'égalité, notre position originale est de partir du bas et de construire les rationnels en montrant la nécessité de l'égalité pour cette construction.

Dans une première section, je pose quelques questions sur l'enseignement des développements décimaux et des rationnels avant de me focaliser, en section 2, sur le cas de 0,999… dont l'égalité avec 1 est depuis très longtemps étudiée en didactique des mathématiques. La troisième section présente la genèse d'une double recherche, mathématique et didactique, qui a permis de (re)définir les opérations sur les rationnels en écriture décimale qui sont exposées en section 4. Je finirai cette partie 2 par des présentations de recherches en didactique qui ont été menées :

- la construction d'un algorithme de somme pour des rationnels en écriture décimale par des étudiants-professeurs de Master 2, mathématiques (Vivier, 2012) ;
- les premières études en seconde et en première année d'université (Vivier, 2011) ;
- une interprétation par la TAD (Rittaud et Vivier, 2014).

Cette partie se termine par deux perspectives de recherches dans la continuité des études présentées.

1. Trois questions pour l'enseignement secondaire

1.1 Pourquoi enseigner les DDI ?

La première question que l'on peut se poser est bien celle-ci : pourquoi vouloir réintroduire les Développements Décimaux Illimités (DDI) dans l'enseignement secondaire ? Rappelons que, lors de la réforme des mathématiques modernes du début des années 1970, les nombres réels étaient introduits dès la classe de quatrième par les DDI. Le programme de 1971 précise au sujet des opérations et de leurs propriétés : « sans évoquer devant les élèves les difficultés théoriques considérables soulevées par ces questions […] ».

Il n'est en effet peut-être pas nécessaire de revenir aux propositions des mathématiques modernes. Tentons simplement de dégager l'intérêt que peuvent présenter les DDI pour l'enseignement actuel des mathématiques.

L'enseignement secondaire actuel ne propose plus aucun registre numérique pour représenter les nombres réels. Ce n'était pas tout à fait le cas avant les nouveaux programmes de 2008/2009 où, en classes de troisième et de seconde, apparaissaient une synthèse sur les nombres. Cette synthèse reposait beaucoup sur les notations des ensembles de nombres ce qui avait pour conséquence de détourner l'enseignement des objectifs de la synthèse sur les nombres (Vivier, 2008). Malgré cela, un travail sur les DDI était réalisé. Ainsi, on pouvait entrevoir un registre numérique valable pour tous les nombres. Cette synthèse a disparu des programmes actuels du secondaire (Durand-Guerrier et Vergnac, 2013).

Le fait de ne pas avoir de registre numérique pour écrire les nombres réels marquent une rupture avec tous les autres types de nombres rencontrés par les élèves. La seule représentation valable pour tous les nombres réels est donnée par la droite géométrique en classe de seconde. Castela (1996) précise que si la droite permet une intuition globale, elle est cependant sans effet sur les points. Or, ce sont les points qui sont censés définir les nombres réels par leurs abscisses. Ainsi, non seulement l'enseignement actuel se contente d'une présentation des réels à l'aide d'une simple ostension géométrique, mais de plus cette ostension est inadaptée.

Cela pose également un sérieux problème mathématique : a-t-on réellement obtenu le corps **R** ? Car sans un minimum de topologie, la droite géométrique peut faire référence à n'importe quel corps entre **Q** et **R** (on pourrait ajouter : « et contenant les racines carrées et π »).

Il faut dépasser le seul registre de la droite géométrique pour définir les nombres réels. Car il faut les définir, même partiellement, puisque les nombres réels sont très importants pour l'enseignement de l'analyse au lycée. La plupart des résultats d'analyse sont faux si on ne considère pas des intervalles de **R** (théorème des valeurs intermédiaires, lien entre la monotonie et le signe de la dérivée, etc.). Mais bien plus que la construction, c'est bien plutôt le fait de ne pas laisser les élèves développer des connaissances fausses sur les réels qui me paraît important.

Pourquoi donc ne pas utiliser les DDI ? La constitution du registre des DDI ne constitue pas un problème pour les élèves. Bronner (2005) le montre avec son ingénierie menant aux nombres idécimaux. Nous avons également eu l'occasion de constater que l'opposition décimal/idécimal est bien plus naturelle et spontanée pour des élèves de seconde que la traditionnelle opposition rationnel/irrationnel comme on peut le lire dans l'échange, en classe de seconde, entre l'enseignant P et ses élèves (voir aussi (Vivier, 2008)) :

> P : Alors dites-moi, là ça se complique un p'tit peu, mais, est-ce que vous n'avez pas envie de fabriquer un nouvel ensemble ? A partir de ce qu'on vient de voir. Bah on a vu que les décimaux ça suffisait pas puisqu'il y avait des nombres vous m'avez donné une fraction, celle-là était un décimal, l'autre n'était pas un décimal. Qu'est-ce qu'on pourrait…
> Elève : (*inaudible*)
> P : tu as envie de dire les nombres ? Vas-y dis-le
> Elève : qui n'ont pas de fin
> P : Qui n'ont pas de fin, Ah ! C'est une idée ça. C'est à dire que tu voudrais fabriquer un ensemble dans lequel il y ait des nombres comme celui-ci, avec des chiffres, in-infinité de chiffres après la virgule. Ben oui c'est ça. Alors ce que l'on va faire déjà, et on voit que c'est difficile à, enfin difficile pour vous à le dire, à le trouver, mais on a vu que ce nombre là qui se notait avec une fraction - d'accord ? - et bien n'était pas un nombre décimal. Alors on n'a qu'à considérer, alors vous allez mettre l'ensemble des rationnel, des nombres rationnels, l'ensemble des nombres rationnels, alors ce sera le grand 4.

Et qu'on le veuille ou non, les DDI sont bien présents dans l'enseignement secondaire actuel puisqu'on laisse penser, sans aucune institutionnalisation, que l'on travaille avec des DDI. Même si l'on ne définit pas les objets auxquels font référence les valeurs approchées – très présentes dans l'enseignement secondaire actuel –, il est naturel de penser que ces dernières sont des troncatures d'objets un peu indistincts que sont les DDI. La pratique des valeurs approchées dans l'enseignement secondaire va dans ce sens avec le développement des moyens de calculs et l'introduction de l'algorithmique au lycée dans les programmes de 2009.

Pourquoi ne pas laisser les choses en l'état ? Nous répondons par une autre question : lors d'une anodine remarque d'un professeur disant qu'entre deux nombres il y en a toujours un autre, que répondre à un élève un peu futé qui donnerait le contre-exemple de 0,999… et 1 ? Laisser penser que 0,999…<1 a également des incidences sur la droite géométrique puisque l'on peut trouver deux points distincts (dont les abscisses sont 0,999… et 1) sans point entre eux. En particulier il n'y a pas de point *au milieu*. Ainsi, à cause de ce *grain de sable*, c'est tout l'édifice mathématique qui s'écroule. Récapitulons :

- l'ensemble des réels est défini de manière ostensive avec la droite géométrique ;
- on espère ainsi pouvoir définir les nombres réels par les abscisses des points, ce qui est loin d'être le cas ;
- parallèlement, le travail sur les valeurs approchées fait émerger, même implicitement, les DDI ;
- si le cas de 0,999… et de 1 n'est pas traité, il existe deux nombres distincts sans aucun nombre autre entre eux ;
- par un retour à la droite, il existe un segment sans milieu.

Jouons au catastrophisme : c'est toute l'analyse et toute la géométrie qui s'effondrent.

Il nous semble ainsi, qu'au minimum, la relation 0,999…=1 est à travailler. Nous développons dans cette partie 2 un nouveau point de vue pour la traiter.

1.2 Quel travail mathématique sur les DDI ?

Le problème est qu'il ne s'agit pas d'introduire une suite de signes, même numériques, pour obtenir un nombre. Chevallard (1989), dans sa définition des systèmes de nombres, précise bien qu'il est nécessaire de pouvoir comparer et faire des opérations de base avec les propriétés usuelles pour avoir des nombres. Si donc nous nous orientons vers une extension du champ numérique par les DDI, il est nécessaire de pouvoir faire des opérations – rappelons que l'ordre sur les DDI est pour l'essentiel un prolongement naturel de l'ordre de **D**. Sans cela, on pourrait dire que l'on introduit une représentation *inerte*.

Le programme de 1971 pour la classe de quatrième proposait d'ailleurs une approche des opérations sur les DDI. La difficulté résidait dans le fait que l'on devait impérativement passer par des encadrements puisque l'on voulait obtenir directement le corps **R**. Il est fort à parier que cette approche restait théorique et qu'aucune pratique de celles-ci ne reposait sur ces définitions par les approximations.

Nos recherches permettent de développer une étape intermédiaire : introduire les DDI, mais ne travailler que sur la somme et la différence de deux DDIP. Cela ne permet bien entendu pas de résoudre le difficile problème général, mais on donne un peu de poids aux DDI puisque pour certains DDI particuliers, les périodiques, nous sommes capables d'en faire de vrais nombres. Pour appuyer ce point, on peut penser à l'expérimentation en formation d'enseignant du premier degré de Weller, Arnon & Dubinsky (2009) qui montre que le travail sur les opérations permet de mieux comprendre les DDIP et notamment l'égalité 0,999…=1. Cela peut être interprété par le fait que ces objets acquièrent le statut de nombre. Mais, dans leur étude, ils utilisent un programme informatique qui calcule avec, faute de connaître un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale, une double conversion en utilisant le registre des fractions pour effectuer la somme. Cette double conversion est totalement masquée aux enseignants en formation. Dans cette perspective, les algorithmes présentés dans les sections suivantes pourraient être utilisés à la main ou sur informatique après programmation.

De plus, cette étape intermédiaire par les DDIP permet une nouvelle compréhension sur un point essentiel qui est l'identification nécessaire de 0,999… et 1 : puisque l'on veut des nombres avec les propriétés usuelles, il est impératif d'avoir l'égalité 0,999…=1 (voir la section 4.3.5).

1.3 Quelle représentation pour les rationnels : DDIP ou fractions ?

Cette question n'en est en fait pas une ou plutôt ne devrait pas en être une. Les travaux de Duval montrent à quel point il est essentiel pour un objet mathématique d'avoir au moins deux représentations dans des registres différents. Il commence par préciser que « les objets mathématiques ne sont jamais des objets accessibles par la perception comme cela peut l'être pour la plupart des objets dans d'autres disciplines » (Duval, 1996, page 351). Puis, en conséquence, il explique que :

« Le fonctionnement cognitif de base pour les mathématiques comprend les deux conditions suivantes :

- le fait de disposer non pas d'un mais de plusieurs systèmes de signes qui vont fonctionner comme des registres de représentation pour des fonctions cognitives de traitement et d'objectivation,

- la nécessaire coordination de ces registres. » (Duval, 1996, page 372).

Le registre des fractions et celui des DDIP constituent donc deux registres numériques pour représenter les nombres rationnels dont il faudrait se servir et coordonner. Or, l'enseignement secondaire actuel ne laisse guère de place aux DDIP. Non seulement cela peut entraver le fonctionnement cognitif mais de plus cela risque fortement d'avoir pour conséquence une confusion entre l'objet mathématique, le nombre rationnel, et son *unique* représentation[29], la fraction.

Par exemple, une propriété importante des fractions est que l'on n'en change pas la valeur en multipliant numérateur et dénominateur par un même nombre non nul. Certes, mais cette propriété est propre à cette représentation et est non pertinente pour les rationnels (une variation cognitivement non pertinente pour Duval). On le comprend immédiatement si l'on considère la représentation avec les DDIP. En effet, et c'est un intérêt important du registre des DDIP, contrairement aux fractions il y a unicité de la représentation en DDIP d'un rationnel, les décimaux mis à part.

À partir des travaux de Duval, les deux représentations des rationnels, en décimal et en fraction, sont importantes. Il peut même être très utile de combiner les deux registres lors d'un calcul, même si ce n'est pas l'usage. Par exemple, pour faire 8/7+2/3, on peut prendre sa calculatrice. Une calculatrice scientifique de base donne le résultat décimal 1,80952381 (nous ne parlons pas des calculatrices formelles) et nous pouvons :

- prendre ce résultat comme étant la somme cherchée (alors que ce n'est qu'une valeur approchée, mais certains élèves s'y laissent prendre) ;
- ne rien en faire car nous savons qu'après *ça continue* mais nous ne savons pas comment ;
- utiliser ce que l'on sait des DDIP et fractions : les DDIP de dénominateur 7 ont des périodes de longueurs 7–1=6 (ou en tous cas au plus 6) et les DDIP de dénominateur 3 ont des périodes de longueur 1, donc la somme cherchée aura une période de longueur (au plus) 6. Conclusion : la calculatrice permet d'avoir le résultat qui est $1,\overline{809523}$. (La période commence juste après la virgule puisque 7 et 3 sont premier avec 10.)

Pour conclure cette section, revenons au problème de la double représentation en DDIP des décimaux – ce sont les seuls nombres qui ont cette propriété. L'habitude fait que l'une d'elle est nommée *propre* et l'autre, que nous nous empressons en général d'éliminer, est nommée *impropre*. Nous verrons que cet usage va à l'encontre du bon sens mathématique. Il n'y a quasiment rien en faveur de la période $\overline{0}$ alors que des arguments forts sont en faveur de la période $\overline{9}$ (voir la section 4).

Ainsi, contrairement à l'usage, si l'on doit enlever une des deux représentations, c'est plutôt la représentation propre des décimaux qu'il faudrait éliminer ! Mais bien sûr, ce n'est que le point de vue mathématique et il ne faut certainement pas minimiser le point de vue psychologique. Plus raisonnablement, nous proposons de conserver les deux représentations, propre et impropre, tout en sachant quelles représentent le même nombre décimal. Identifier ces égalités constitue un travail spécifique.

[29] Il faudrait également discuter des registres non numériques, voir par exemple (Adjiage, 2003).

2. Position du problème : l'égalité 0,999...=1[30]

2.1 Depuis l'Antiquité

Commençons par poser le problème en nous référant aux arguments de Zénon d'Elée. Il n'est ici pas question de discuter de la validité de ces arguments ni de leur réfutation par Aristote (Physique VI) ou encore Bergson (1889). Il s'agit ici simplement de voir et de comprendre où nous conduisent ces arguments du point de vue mathématique et sémiotique. Pour simplifier, la distance totale est prise égale à 1. Un groupe de chiffres surligné signifie, comme usuellement, la répétition à l'infini vers la gauche de ce groupe de chiffres. Dans ce prologue, nous utilisons la base deux car elle est bien adaptée au problème de la dichotomie de Zénon.

Dans le premier argument de Zénon, la dichotomie, les distances à parcourir sont 1/2, 1/4, 1/8… ce qui s'écrit, en base deux : 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; etc. (figure 15) Allons-nous jusque $0{,}\overline{0}1$? Avons-nous pour autant zéro ? Symétriquement, les distances restantes à parcourir sont égales à 1/2, 1/2+1/4, 1/2+1/4+1/8,… , soit, toujours en base deux : 0,1; 0,11; 0,111 etc. 0,1…1. Allons-nous jusque $0{,}\overline{1}$? A-t-on finalement 1 ?

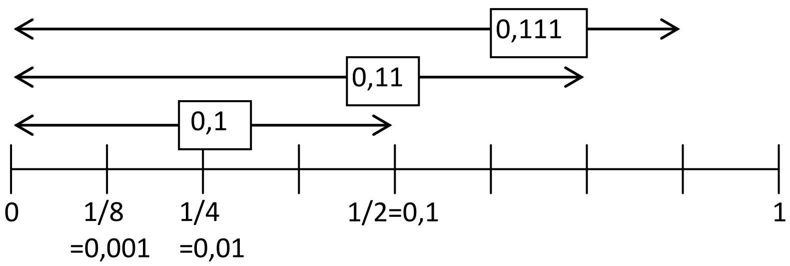


Figure 15 : la dichotomie (les nombres sont écrits en fraction et en base deux)

A partir de l'argument de Zénon, il y a deux points intéressants si l'on veut concilier les aspects mathématiques et la réalité (la notion de limite est bien sûr sous-jacente) :

1. le fait de considérer la totalité des distances, à l'infini ;
2. le fait de comprendre et de justifier que cette totalité est 1 (ou 0).

Du point de vue mathématique, la situation est identique en base dix avec 0,999… et 1. Les problèmes relatifs aux points (1) et (2) surgissent chez les étudiants comme dans la figure 16 où il s'agit d'un étudiant de première année de mathématiques ; l'égalité 0,999…=1 a pourtant été enseignée au premier semestre.

[30] Cette section reprend pour l'essentiel le texte d'une conférence donnée dans le cadre de la semaine des mathématiques de mars 2014 à Thessalonique, Grèce. Le contenu a également fait l'objet de séminaire à la PUCV (Valparaiso, avril 2014) et à l'I3M (Montpellier, octobre 2014).

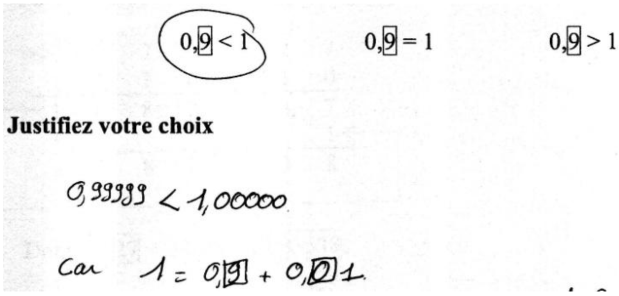


Figure 16 : production d'un étudiant de L1, mathématiques

2.2 Point de vue de la théorie APOS sur l'égalité 0,999…=1

La théorie APOS (figure 17) propose un point de vue génétique en décomposant les connaissances en stages : le stage des Actions sur des objets, le stage du Processus où on peut penser les actions sans les réaliser, le stage de l'Objet où le processus est *encapsulé* en un objet sur lequel on peut faire à nouveau des actions. Le Schéma permet un point de vue plus général dans lequel les objets, processus et actions ne sont pas isolés.

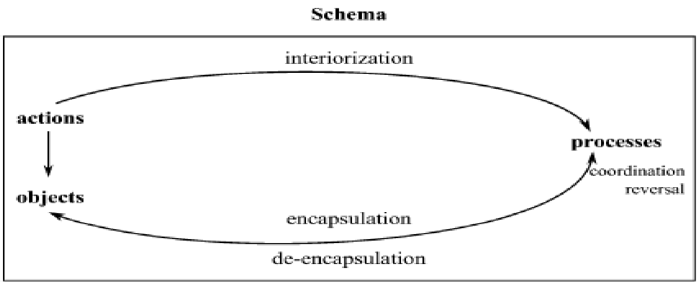


Figure 17 : Diagramme présentant la théorie APOS (Arnon et al., 2014)

En théorie APOS, ce problème est bien identifié comme on peut le comprendre à partir de la citation suivante (Dubinsky et al., 2005, pages 261-262) :

> "An individual who is limited to a process conception of .999… may see correctly that 1 is not directly produced by the process, but without having encapsulated the process, a conception of the "value" of the infinite decimal is meaningless. However, if an individual can see the process as a totality, and then perform an action of evaluation on the sequence .9, .99, .999, …, then it is possible to grasp the fact that the encapsulation of the process is the trancendent object. It is equal to 1 because, once .999… is considered as an object, it is a matter of comparing two static objects, 1 and the object that comes from the encapsulation. It is then reasonable to think of the latter as a number so one can note that the two fixed numbers differ in absolute value by an amount less than any positive number, so this difference can only be zero."

Cela a évidemment un lien avec la distinction entre l'infini actuel et l'infini potentiel – Dubinsky et al. le signalent par ailleurs dans leur article. Une critique toutefois : la question est de savoir quel objet mathématique émerge de l'encapsulation. Il y a notamment la période[31] qui peut être un objet émergeant, mais obtient-on pour autant un nombre au sens usuel ?

En effet, on peut voir, avec la figure 2, qu'un étudiant peut encapsuler la période (il considère la répétition des « 9 » comme un objet) mais la question est de savoir ce que l'on obtient au final. Avec cet étudiant, on perçoit la distance importante séparant la conception en jeu dans sa réponse de l'explication topologique de la fin de la citation ci-dessus. L'étudiant obtient un nombre, mais plutôt dans un contexte non standard (voir ci-dessous) où $0,\overline{0}1>0$.

2.3 Autres justifications classiques

Voici quelques justifications, recensées par Tall et Schwarzenberger (1978), de l'égalité $0,\overline{9}=1$:

1. $1/3=0,\overline{3}$ donc $3\times1/3 = 3\times0,\overline{3}$ d'où $1 = 0,\overline{9}$;
2. $10\times0,\overline{9} = 9+0,\overline{9}$ donc $9\times0,\overline{9} = 9$ et $0,\overline{9} = 1$.
3. $1/9=0,\overline{1}$, $2/9=0,\overline{2}$, etc. jusque $8/9=0,\overline{8}$ et $9/9=0,\overline{9}$;
4. de manière plus « légale », comme le dit Tall lui-même, faire une division par 2 pour prouver que $(1+a)/2=a$ pour $a=0,\overline{9}$ et que donc $a=1$ par des traitements algébriques.

Tall parle de légalité parce que l'on n'a pas défini ces opérations (addition et multiplication par un entier ; soustraction). Cela gêne d'ailleurs les enseignants lorsqu'ils produisent ces justifications avec ces calculs. En outre, malgré ces tentatives de justifications, cela ne convainc pas les étudiants même s'ils peuvent reproduire ces arguments (cela est sans doute lié à l'autorité de l'enseignant).

On note en effet une opposition frontale et forte avec des connaissances très anciennes sur l'ordre en écriture décimale, connaissances qui ont fait leur preuve et qui entraîne $0,\overline{9}<1$. Ainsi, la nécessaire réorganisation des connaissances s'avère complexe, plus complexe que dans le cas des nombres négatifs (Glaeser, 1981).

2.4 Les opérations

Comme dit en section 1.2, pour que ces écritures acquièrent un statut de nombre, il est nécessaire de pouvoir faire des opérations – du moins on peut le penser. Regardons comment on peut procéder avec un cas simple comme $0,\overline{5}+0,\overline{7}$ (les réponses d'étudiants à ce type de sommes seront exposées en sections 5 et 6) :

i. 0.55+0.77=1.32 ; 0.5555+0.7777=1.3332 etc.
ii. $5/9 + 7/9 = 12/9 = 1+3/9 = 1,\overline{3}$
iii. $0,\overline{3}+0,\overline{2}+0,\overline{7} = 0,\overline{3}+0,\overline{9} = 1,\overline{3}$
iv. $\sum_1^\infty \frac{9}{10^n} = 1$ par un calcul de limite

La procédure (i) nécessite d'avoir des connaissances sur les sommes d'écritures périodiques et en particulier de devoir supprimer les chiffres de droite comme on peut parfois le constater. Néanmoins, elle est source d'erreur et, comme pointé par Margolinas (1988), peut amener à des écritures infinitésimales (on les rencontre effectivement, notamment chez des étudiants-professeurs

[31] Récemment, pour ce type de problème rencontré dans les processus infinis, il a été incorporé le stage de la *Totalité* entre le processus et l'objet (Arnon et al. , 2014, chapitre 8).

de mathématiques en Master 2). Cette procédure se base essentiellement sur un point de vue processus des écritures décimales périodiques.

La procédure (ii), par une double conversion, est plus classique et permet de comprendre pourquoi l'on ne dispose pas de procédure directe de somme en écriture décimale puisque l'on n'en a pas besoin pratiquement. Elle apparaît aussi dans les réponses des étudiants. Néanmoins, comme nous l'avons vu en partie 1 sur les entiers, il semble difficile d'accéder à la notion de nombre si on évite les opérations par une conversion.

La production (iii) nécessite la connaissance de l'égalité. Elle n'apparaît pas chez les étudiants des études que nous avons menées (en première et cinquième années d'université, en mathématiques).

La procédure (iv) sur les séries semble être dans un autre *monde* et la coexistence de l'inégalité 0,999…<1 avec le calcul correct de la somme de la série $\Sigma 9/10^n$ est tout à fait possible comme le rapportent Njomgang Ngansop & Durand-Guerrier (2014) et Tall et Vinner (1981) : le calcul de la somme de la série est perçue comme valide ou est effectué correctement mais, malgré cela, des étudiants continuent d'affirmer l'inégalité. Tall et Vinner (1981) interprètent cela comme des activations de *concept images* différentes : « different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole.” (Tall et Vinner, 1981, page 152).

Force est de constater que l'on est démuni et, dans ce contexte, on comprend bien l'élaboration d'un logiciel pour l'étude de Weller et al. (2009) qui sert d'appui pour effectuer les opérations en restant dans le registre des écritures décimales en prenant un point de vue objet.

2.5 Les nombres réels du lycée à l'université

Contrairement aux anciens programmes en France, il n'y a désormais plus de synthèse sur les nombres (cf. Durand-Guerrier et Vergnac 2013 ; Vivier, 2008). Finalement, tout laisse croire que 0,999…<1 et les étudiants interrogés répondent majoritairement en faveur de l'inégalité.

Au début du lycée (113 élèves), on trouve sans surprise 100% pour l'inégalité et, au début d'université pour des étudiants de mathématiques nous avons trouvé (regroupement de deux expérimentations) 28 étudiants qui répondent l'inégalité sur 43 (65%). Cela est à rapprocher des résultats de Tall (1980) où ce sont 20 étudiants sur 36 qui répondent l'inégalité (56%) et les études de Mena et al. (2014) où, pour des professeurs de mathématiques et étudiants-professeurs ce sont 23 sur 40 (57,5%) et pour des étudiants de *maestria* en enseignement des mathématiques, des professeurs entre 3 et 11 ans d'expérience ce sont 12 sur 19 (63%). On relève ainsi une stabilité autour de 60% pour un public *mathématicien*, indépendamment des périodes et des cultures. Pour un public non mathématicien, signalons l'étude de Weller et al. (2009) qui, sur un effectif de 204 étudiants-Professeurs du 1er degré (Weller et al. 2009) 73,5% donne l'inégalité. Le taux est plus élevé pour ce public non mathématicien, mais pas de manière *écrasante*.

Et si 0,999…<1 ? Cette inégalité est en fait tout à fait valide en analyse non standard, théorie développée par Robinson, ce qui constitue une alternative à la structure classique de **R**. Cela n'est pas simplement une alternative théorique et Ely (2010) a montré que des étudiants avaient des conceptions non standard. Il y a ainsi d'autres points de vue possibles : peut-on voir dans l'enseignement une marche forcée vers $0,\overline{9}=1$? Il s'agit sans doute d'un élément fort de l'enseignement de l'analyse, un paradigme de travail (Kuzniak, 2011).

3. D’une recherche mathématique à une recherche didactique[32]

3.1 Introduction

L’objet de ce texte est de rendre compte d’un travail collaboratif entre deux chercheurs : Benoît Rittaud est un mathématicien qui s’intéresse à la suite de Fibonacci et aux codages symboliques des nombres et Laurent Vivier est un didacticien qui s’intéresse à la didactique du nombre et plus spécifiquement aux aspects praxéologique et sémiotique du cadre numérique. Précisons que la distinction mathématicien / didacticien que nous utilisons est un peu caricaturale : B. Rittaud s’intéresse à l’enseignement des mathématiques (premier et second degrés) et a publié de nombreux ouvrages de vulgarisation des mathématiques et L. Vivier a une formation doctorale de mathématicien. En outre, la recherche dont il est ici question ne constitue pas la première collaboration ≪ Rittaud & Vivier ≫.

Dans le chapitre 8 d’un livre de vulgarisation de Rittaud (2006) on trouve une extension infinie du codage des nombres entiers qui permet une représentation des nombres *p*-adiques. Le *didacticien*, très intéressé par la lecture de cette partie, se voit proposer par le *mathématicien* une recherche commune en mathématiques, ce qui fait l’objet d’une première partie. Nous exposons les points importants de cette recherche en pointant les apports du *mathématicien* et du *didacticien*.

3.2 Le cadre de la recherche mathématique

Le système d'écriture des entiers que nous utilisons s’appuie sur la suite des puissances de dix. Ce système se généralise en remplaçant dix par un entier $B>1$: on choisit alors la suite des puissances (B^n). D’autres suites sont utilisables pour coder les entiers et nous nous intéressons ici au système de numération de Zeckendorf (1972) défini par la suite de Fibonacci (cf. table 4). Dans ce système, tout entier positif s’écrit de manière unique comme une suite finie de 0 et de 1 ne montrant jamais deux 1 consécutifs. Ainsi, par exemple, les nombres entiers de un à onze sont[33] : 1, 01, 001, 101, 0001, 1001, 0101, 00001, 10001, 01001 et 00101. Le nombre cent s’écrit $3 + 8 + 89 = F_2 + F_4 + F_9$ soit 0010100001.

n	F_n	n	F_n	n	F_n	n	F_n	n	F_n
1	2	6	21	11	233	16	2584	21	28657
2	3	7	34	12	377	17	4181	22	46368
3	5	8	55	13	610	18	6765	23	75025
4	8	9	89	14	987	19	10946	24	121393
5	13	10	144	15	1597	20	17711	25	196418

Table 4 : la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et par la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Dans ce texte, nous nous focalisons sur la somme. En base de Fibonacci, une addition de deux entiers peut faire apparaître soit 11 soit 2 qu’il faut alors réduire pour avoir une forme admissible. On utilise pour cela les deux réductions suivantes (on souligne les chiffres pour marquer les rangs identiques avant et après réduction) : $\underline{11} \rightarrow \underline{00}1$ provenant de la définition de la suite de Fibonacci et $\underline{2} \rightarrow 10\underline{0}1$ car pour $n \geq 2$ on a $2 \times F_n = F_{n-2} + F_{n+1}$; les cas n=0 et n=1 sont traités à part : $2 \times F_0 = F_1$ et $2 \times F_1 = F_0 + F_2$. Par exemple : 7 + 4 = 0101 + 101 = 1111 = 00101 et 5 + 6 = 0001 + 1001 = 1002 = 11001 = 00101.

[32] Cette section reprend pour l’essentiel le papier de Rittaud et Vivier (2011). On pourra se référer à celui-ci pour plus de détails.

[33] Les nombres sont écrits ici de gauche à droite pour avoir une bonne congruence entre les écritures chiffrées et la décomposition additive comme $100101 = F_0 + F_3 + F_5$.

Plus généralement, on trouve les décompositions suivantes, hormis pour les premiers termes, de la multiplication des éléments de la base, F_n, par un entier : $\underline{3}\rightarrow 10\underline{0}01$; $\underline{4}\rightarrow 10\underline{1}01$; $\underline{5}\rightarrow 1001\underline{0}001$; $\underline{6}\rightarrow 1000\underline{0}101$; $\underline{7}\rightarrow 1000\underline{0}0001$; $\underline{8}\rightarrow 1000\underline{1}0001$; $\underline{9}\rightarrow 1010\underline{0}1001$; …

Les nombres *F*-adiques sont obtenus en considérant une série infinie de 0 et de 1 sans jamais avoir deux 1 consécutifs. Cela revient à considérer des séries *formelles* $\Sigma\ \varepsilon_i F_i$ où ε_i=0 ou 1 avec $(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1}) \neq (1,1)$. L'ensemble obtenu possède une structure de groupe topologique abélien totalement ordonné (Rittaud & Vivier, 2011, 2012). Deux séries jouent un rôle fondamental : 010101… = $\boxed{01}$ et 101010… = $\boxed{10}$ (le cadre sert à marquer une période) puisque si l'on ajoute 1 (ou 1000…) alors, par un *jeu de dominos* reproduisant successivement la réduction 110→001, on trouve 000….. Ce sont les deux solutions à l'équation x+1=0 et, plus généralement, l'équation x+N=0 possède deux solutions que l'on note (-N) et (-N)'.

Nous nous sommes tout d'abord attachés à prouver la conjecture suivante relative aux nombres rationnels : les éléments périodiques (sous-entendu périodiques à partir d'un certain rang) s'identifient avec les fractions d'entiers (c'est-à-dire une solution d'une équation $D \times x = N$ où D et N sont deux entiers naturels, D est non nul).

La détermination chiffrée de fractions simples a permis d'affiner la conjecture. Avec un travail *à la main*, il n'est pas trop difficile de déterminer certaines fractions et de constater qu'elles sont périodiques. Par exemple, les solutions de $2 \times x = 1$ sont 0010$\boxed{100100}$ et 010$\boxed{100100}$ et les solutions de $3 \times x = 1$ sont 1000$\boxed{10100000}$, 010000$\boxed{10100000}$ et 0010000$\boxed{10100000}$.

Ainsi, avec quelques autres exemples, nous avons rapidement conjecturé qu'une équation $D \times x = N$ possède exactement D solutions *F*-adiques. Pour tester cette conjecture, nous nous sommes attachés à déterminer les solutions de $5 \times x = 1$ en nous répartissant la tâche : le *mathématicien* cherchait une solution commençant par 10 et le *didacticien* une solution commençant par 010. Une minute plus tard, une solution était trouvée, 100$\boxed{1000}$, alors que l'autre résistait aux tentatives de recherche *à la main* par le *didacticien*. Cette répartition aléatoire du travail a peut-être joué un rôle important.

3.3 Les deux moments clés

Deux moments clés ont joué un rôle important dans cette recherche : le premier, lié à la didactique, a initié le travail notamment par l'utilisation de l'informatique et le second, essentiellement mathématique, a permis de débloquer une situation qui semblait dans l'impasse.

Pour la recherche d'une solution de $5 \times x = 1$ commençant par 010, le *didacticien* a développé plusieurs dispositifs dont l'idée provenait directement des connaissances didactiques sur l'enseignement des nombres à l'école primaire comme l'utilisation de feuille à carreaux (pour placer un chiffre par case) ou des essais de compteurs découpés dans du papier à carreaux (pour gérer les réductions). Bref, le *didacticien* s'attachait à trouver un bon artefact pour traiter le problème. Bien entendu, et dès le début de la recherche, le *mathématicien* avait mentionné la possibilité d'une programmation informatique qui permettrait de faire des recherches systématiques. Mais cette idée a été repoussée à cause de l'investissement important que demandait la programmation.

L'idée est alors venue d'utiliser un jeu de go comme abaque : les cases représentent les rangs d'un nombre *F*-adique (le nombre de cases est conséquent) et les jetons blancs permettent de signaler l'emplacement d'un 1. Les jetons noirs ont changé de statut dans le processus d'instrumentalisation (Trouche, 2000) : d'abord marquant la présence d'un 0, ils ont finalement marqué un chiffre inconnu, un 0 ou un 1. Les 0 effectifs sont alors marqués par une absence de jeton sur une case. Nous présentons en figure 18 une reconstitution du résultat obtenu sur le jeu de go (sans jeton noir).

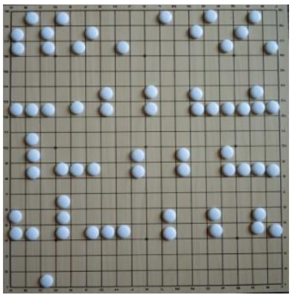


Figure 18. *Le jeu de go – abaque*.

Aux trois premières lignes on trouve le début du codage du nombre cherché qui multiplié par 5 donne 1. Ainsi, il faut considérer que chaque jeton blanc devient un 5 après multiplication (les « . » marquent les changements de ligne) :

050500000050050050.505005000000500500.505050050000005005

Il faut alors réduire ces 5 et c'est précisément le rôle des quatre lignes du dessous (les réductions font apparaître d'autres nombres que des 1 qui sont codés par des jetons blancs placés à la verticale) :

111010200200211121.030111002002002111.210301110020020021.001

qui se réduit, par le *jeu de dominos* utilisant 11 → 001, en 10…01 (avec 56 zéros). Les trois lignes du haut gardent en mémoire le nombre initial et les lignes du dessous sont le lieu des manipulations des jetons c'est-à-dire des transformations des écritures chiffrées. Par des allers-retours entre ces deux parties, l'abaque ainsi construit permet une recherche dynamique d'une valeur approchée de la solution.

Comme en écriture décimale, la valeur approchée, ici trouvée après de nombreuses heures de recherche avec le jeu de go, permet de déterminer la solution qui est 010$\boxed{10000001001001010100}$. La période est de 20 chiffres, ce qui implique un travail sur l'abaque avec une quarantaine de chiffres. Une vérification sur papier est bien entendu effectuée, mais c'est surtout la nécessité de l'informatique qui s'est naturellement imposée. Ainsi, un programme informatique, qui a été affiné au fur et à mesure des résultats, a été écrit.

Avec l'informatique, la recherche mathématique sur les rationnels a trouvé un nouveau souffle : des listings de nombres ont été produits, des périodes sont trouvées (la conjecture est toujours vérifiée) et de nouvelles conjectures ont vu le jour. Malgré tout cela, la recherche stagne et les règles de formation des rationnels restent particulièrement opaques : nous sommes face à des données brutes provenant des recherches informatiques dont on ne sait que faire. C'est l'impasse !

Nous avions compris que, pour trouver une solution à $D \times x = N$, qui serait périodique d'après la conjecture, il nous faudrait d'abord trouver la période π. Nous recherchions π par la propriété : $D \times (\pi\pi\pi\ldots)$ est de période 01 (tout simplement parce que 1+010101…=000000… par le *jeu de* *dominos*). Mais hormis des recherches informatiques systématiques basées sur la technique d'approximation, nous ne savions pas comment utiliser cette propriété puisque les retenues peuvent se répercuter sur plusieurs périodes. Par exemple pour $D = 5$, la réduction d'un 5 pour le calcul de $5 \times x$ *déborde* de 3 rangs à droite et de 4 rangs à gauche. La situation semblait inextricable. C'est alors que, lors d'une de nos réunions hebdomadaires, le *mathématicien* a eu une idée qui a tout débloqué. Au lieu de prendre le nombre x dans sa totalité, il suffit de prendre une période et de compter <u>sur elle-même</u> les retenues produites. La simplicité de cette idée est frappante car on simule ainsi les retenues provenant des autres périodes. Le travail de recherche est relancé. En particulier nous définissons un algorithme de somme pour les éléments périodiques en traitant de manière séparée le début du nombre et la partie périodique. Vérifier qu'une séquence est une période d'un dénominateur D devient simple puisqu'il suffit de ne considérer qu'une période sans faire appel à un argument du type valeur approchée. Prenons par exemple le cas de la période trouvée par le jeu de go :

5×10000001001001010100 = 50000005005005050500
= 10020020021112103011 (réduction de tous[34] les <u>5</u> en 1001<u>0</u>001)
= 20020020010102001010 (réduction de tous les 11 en partant de la gauche)
= …
= 10101010101010101010 (il faut réduire les 2 un à un)

Sans entrer dans les détails, signalons que les conjectures s'affinent, des résultats importants sont prouvés, le programme informatique est réécrit pour être plus efficace, de nouvelles conjectures sont avancées et prouvées, etc.

3.4 Avancement des recherches en mathématiques : analogies avec la base dix

Dès lors, les choses s'emballent. Le *didacticien* se demande si cette idée peut s'appliquer aux écritures illimitées périodiques en base de numération usuelle (en base dix ou autres). La réponse est positive et débouche sur une construction du corps **Q** uniquement à partir des *écritures à virgule* périodiques pour lesquelles nous obtenons des algorithmes pour les quatre opérations usuelles (Rittaud & Vivier, soumis ; voir section 4). La simplicité de l'algorithme de somme est particulièrement frappante. Par exemple, pour effectuer $0,\overline{5}+0,\overline{7}$ la somme des périodes fait 3 (2 plus 1 de retenue) et il y a un 1 de retenue à comptabiliser tout à gauche, soit $1,\overline{3}$.

Les analogies vont bon train, et dans les deux sens. Par exemple, en base usuelle, pour obtenir les périodes d'un dénominateur D, il suffit de trouver le nombre l tel que $10^l - 1$ soit divisible par D : l est la taille des périodes cherchées qui s'obtiennent toutes à partir du quotient de $10^l - 1$ par D. La forte similitude algébrique entre les nombres 9…9 en base dix (en base B, il faut remplacer 9 par $B - 1$) et 01…01 et 10…10 en base de Fibonacci amène rapidement à la conjecture suivante : pour avoir, dans l'ensemble des nombres F-adiques, les périodes de dénominateur D, il faut trouver un entier l tel que $F_{l-1} - 1$ et $F_l - 1$ soient tous deux divisibles par D et le quotient permet de déterminer les périodes qui sont alors de taille l (l est toujours un nombre pair). La conjecture est prouvée (Rittaud & Vivier, 2011, 2012). Pour chercher, par exemple, les périodes de dénominateur 5 on voit que la condition est remplie pour $F_{19} - 1$ et $F_{20} - 1$ qui sont tous deux divisibles par 5 (cf. annexe). Ainsi, les périodes de dénominateur 5 sont de taille 20 et on les obtient en calculant 17710 / 5 = 3542. Ce nombre

[34] L'algorithme général demande de réduire les 5 un à un et les 11 qui apparaissent alors.

s'écrit dans la base de Fibonacci : 3542 = $F_3 + F_6 + F_9 + F_{11} + F_{13} + F_{16}$ soit 00010010010101001 c'est-à-dire, pour avoir vingt chiffres, 00010010010101001000 qui est la période[35] obtenue par le jeu de go.

3.5 Conclusion

L'algorithme de somme de rationnels en écriture décimale a donné naissance à des recherches en didactique. Cet algorithme a été testé en classe de seconde et de première année d'université (section 6) et en formation d'enseignant (section 5). Dans toutes ces expérimentations, on étudie de fait une praxéologie ponctuelle (Chevallard, 1999) liée au type de tâches somme de deux rationnels dans le registre de l'écriture décimale. Elles sont détaillées dans les sections suivantes de cette partie 2.

Évidemment, il a été décisif d'avoir un mathématicien dans l'équipe de recherche. A-t-il été important d'avoir eu un didacticien ? Un programmeur qui aurait dès le début utilisé l'informatique aurait évité le problème soulevé dès le début. Y aurait-il eu la recherche plus modeste liée aux mathématiques de l'enseignement secondaire ? Peut-être, et ce point est important si l'on pense aux analogies entre les deux systèmes d'écriture des nombres qui ont été très productives en conjectures et résultats. Y aurait-il eu des recherches en didactique ? On peut fortement en douter et la recherche mathématique sur les nombres *F*-adiques aurait pu rester dans le strict domaine des mathématiques universitaires. Finalement, c'est le tandem mathématicien / didacticien, qui a fonctionné en symbiose et qui a été particulièrement fructueux.

[35] Toutes les périodes de dénominateur 5 s'obtiennent comme des multiples.

4. Algorithmes des 4 opérations de base sur les rationnels en écritures décimales et construction du corps Q

4.1 Introduction

Je propose ici une construction du corps **Q** à partir exclusivement des écritures décimales périodiques. Il s'agit d'une version française et plus accessible mathématiquement que le texte soumis (Rittaud & Vivier). Il y est également exposé des algorithmes pour effectuer les quatre opérations de base sur les rationnels en écriture décimale, sans passer par l'écriture fractionnaire. Ces algorithmes s'appuient sur ceux appris à l'école élémentaire pour les entiers codés en base dix. Les résultats mathématiques servent de base à une discussion sur l'enseignement des nombres dans l'enseignement secondaire et notamment sur l'égalité 0,999...=1.

Un point demande une attention particulière. Un développement décimal illimité périodique (DDIP) est avant tout une représentation sémiotique dont les signes sont numériques (les chiffres et la virgule pour l'essentiel). Or, nous voulons des nombres puisque l'on veut définir des opérations sur ces DDIP. Dès la première opération, la somme, nous sommes confrontés à une tension entre d'une part la représentation sémiotique choisie et d'autre part les nombres que l'on veut obtenir. Cette tension est résolue en identifiant ce que l'on appelle les représentations propres et impropres des décimaux et dont l'emblème est l'égalité 0,999…=1. En effet, si l'on n'impose pas ce type d'égalité, la relation $a+x=b+x$ pourrait avoir lieu sans que $a=b$. Nous introduisons alors les rationnels que nous distinguons des DDIP à l'*état brut* – pour lesquels il est évident que 0,999…<1.

Cette tension est souvent ressentie par les enseignants lorsqu'ils essaient de faire comprendre à leurs élèves pourquoi il y a égalité entre 0,999… et 1. Nous éclairons le problème en montrant qu'il n'y a pas d'égalité en soi, il s'agit simplement d'une nécessité si l'on veut utiliser les développements décimaux illimités (DDI) comme des nombres. C'est d'ailleurs de cette manière que procèdent les enseignants : soit en calculant $10\times0{,}999… – 0{,}999… = 9$ et ainsi conclure à $9\times0{,}999… = 9$ et donc 0,999…=1, soit en procédant aux calculs de l'égalité $3\times1/3 = 3\times0{,}333…$ qui mène directement à l'égalité voulue par une conversion (cf. la conclusion de la partie 1 et la section 2). On utilise bien des nombres dans ces procédés. Mais alors la question se pose, et nombreux sont les enseignants qui se la posent : est-ce licite d'effectuer de tels calculs ? Car même s'il ne semble pas y avoir de problème de retenue et que tout semble bien se passer, il n'en reste pas moins que ces opérations n'ont jamais été définies.

Notre proposition, notamment pour l'algorithme de la somme, permet de justifier pleinement ces procédés même s'il nous paraît plus simple d'invoquer la relation X+0,999…=X+1 pour tout X qui n'admet pas de période de 0 (Rittaud et Vivier, 2014 ; voir la section 7).

Nous ne produisons pas toutes les démonstrations afin de centrer le propos sur les aspects algorithmiques des opérations. La plupart des preuves sont simples mais longues et parfois techniques et il ne paraît pas important de les incorporer. Des indications sont données pour les justifications mathématiques.

Cette section est ponctuée de nombreux exemples, notamment pour montrer l'utilisation des algorithmes que nous proposons. Les calculs sont exclusivement effectués avec l'écriture décimale illimité périodique des rationnels. Cela étant, à aucun moment le registre fractionnaire ne servira à construire une technique pour une des opérations de base – nous ne nous servons des fractions seulement par commodité pour justifier que tout rationnel non nul admet un inverse. Pour reprendre les termes de Duval (1996), nous élaborons des traitements du registre des DDIP, ce qui peut se réinterpréter comme des praxis sur un certain registre (voir la Partie 1).

Afin de faciliter la lecture, la présentation s'appuie sur la numération de position en base dix, mais tous les résultats sont valables, ou adaptables, dans les autres bases de numération. Les suites de 9 sont simplement remplacées, en base B, par les suites du chiffre représentant B–1. Lorsque l'on note 10 et 10–1 il faut comprendre B et B–1.

La première partie précise rapidement le cadre sémiotique qui correspond à peu près à ce que l'on sait faire actuellement avec les DDIP. Le problème de la double représentation des décimaux est posé : du point de vue strictement sémiotique il vient naturellement « 0,999…<1 ».

En deuxième partie, après avoir exhibé la structure algébrique de l'ensemble des périodes, nous définissons une somme, et une différence, sur les rationnels en écriture décimale ainsi que la multiplication par un entier par l'addition réitérée. Cette voie mathématique permet de comprendre pourquoi il doit y avoir égalité entre 1 et 0,999… dans le groupe (**Q**,+).

La troisième partie est dévolue aux fractions. Nous identifions chaque rationnel à l'unique solution d'une équation du type $D \times x = N$ dans **Q** où D et N sont des entiers.

La quatrième partie se focalise sur le délicat problème de la multiplication. Le rôle des suites infinies de « 9 » est essentiel. On obtient alors le corps **Q** et l'on définit les algorithmes de la multiplication et de la division.

La présentation mathématique est ponctuée de remarques souvent en lien avec l'enseignement des mathématiques afin de montrer l'intérêt local de certains résultats. Enfin, en guise de conclusion, nous poserons trois questions essentielles sur le sujet pour l'enseignement secondaire.

4.2 Cadre sémiotique et comparaison

Dans cette première section nous introduisons les notations utilisées dans le texte et nécessaire pour avoir un discours mathématique cohérent.

4.2.1 Notations

Par extension du codage usuel des décimaux, nous appelons DDI une suite infinie de chiffres de la forme $a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \ldots$ où les a_i sont des éléments de {0,1,2,…,9}. Lorsque la suite est périodique (à droite) à partir d'un rang m, on dit que le DDI est périodique, DDIP en abrégé.

Nous commençons par définir ce qu'est un « mot » et les principales actions que l'on peut faire avec les mots. Il s'agit exactement de ce que l'on appelle en programmation une chaîne de caractères. L'objectif principal est de pouvoir facilement décrire les propriétés des écritures décimales périodiques en trois paquets qui seront interprétés comme des mots : la partie entière, une partie décimale finie et une période. Par exemple, 32,09702081081081… sera décrit par les trois mots E='32', W='09702' et Π='081'. Comme nous le constatons, tous les zéros sont importants pour la partie décimale et la période. En revanche, les zéros à gauche de la partie entière sont sans incidence pour notre propos. Nous n'en tiendrons donc pas compte ce qui revient à imposer que E commence par un chiffre non nul.

Plus généralement, un mot est une séquence finie ou infinie de chiffres, éventuellement vide. Si le mot est fini, le nombre de chiffres qui le composent est appelé taille du mot. Ainsi E='32' est un mot de taille 2, W='09702' est un mot de taille 5, Π='081' est un mot de taille 3 et '' est le mot vide qui est de taille 0.

Nous aurons souvent l'occasion d'associer à un mot l'entier qui lui correspond directement. Par exemple, le mot Π='081' (lire « 0, 8, 1 »), de taille 3, est associé au nombre 81 (lire « quatre-vingt un »). Mais attention ! '0020' est un mot de taille 4 et '020' est un mot de taille 3. Ce sont deux mots différents même s'ils sont tous deux associés au même entier 20.

Pour ne pas alourdir les notations, nous ne marquerons pas la distinction entre mot et nombre associé. Cela ne pose des problèmes que lorsque le mot commence par des zéros, il suffit alors de se souvenir de la taille du mot pour éviter les problèmes et de s'obliger à toujours écrire les zéros, ce que nous ferons. Un mot sera toujours représenté par une lettre majuscule (V, W, R, E), une lettre de l'alphabet grec lorsque le mot représentera une période (Π, Θ, Σ, Γ).

Il n'y a évidemment pas unicité de la description d'un DDIP à l'aide de trois mots. Reprenons notre exemple 32,09702081081081… : on peut également prendre E=32, V=097020 et Θ=810. Nous avons *ajouté* par concaténation un chiffre de la période à la partie décimale ce qui nécessite de procéder à une permutation des chiffres de la période et nous aurions tout aussi bien pu prendre Θ=810810. Les opérations suivantes vont nous être utiles.

Pour deux mots V et W, lorsque l'on note VW cela signifie que l'on fait une concaténation des deux mots. Par exemple, pour V=305 et W=61, on a : VW = 30561, mot de taille 3+2=5.

Pour un mot $\Pi=a_1a_2\ldots a_l$ et un entier k :

- $\sigma(\Pi)=a_2\ldots a_la_1$ désigne le mot de même taille l obtenu par permutation ;
- Π^k désigne la séquence ΠΠΠ…Π où Π est répétée k fois ;
- $\overline{\Pi}$ désigne la séquence infinie ΠΠΠ….

Par exemple, pour Π=081 : σ(Π)=810 et $\sigma^2(\Pi)=108$; Π^4 = 081081081081, mot de taille 4×3=12.

Deux mots Π et Θ de même taille l sont dits congrus modulo σ s'il existe une puissance $p\in\mathbf{N}$ de la permutation σ telle que $\Theta=\sigma^p(\Pi)$. Il s'agit évidemment d'une relation d'équivalence dans les mots de taille l. Par exemple, la classe d'équivalence de Π=081 est {081 ; 810 ; 108}. Cela donne toutes les périodes de 3 chiffres qui permettent de décrire 32,09702081081081….

Précisons enfin que, pour un chiffre a, a^l désignera toujours le mot $aa\ldots a$ de taille l constitué de l chiffres tous égaux à a. Ainsi, 1^4=1111, 9^3=999 et 0^6=000000.

4.2.2 Comparaisons

Avec les notations précédentes, un DDIP pourra être écrit sous une des formes suivantes :

- $X = a_na_{n-1}\ldots a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}\Pi\Pi\Pi\ldots$;

- X = $a_n a_{n-1}\dots a_0,a_{-1}a_{-2}\dots a_{-m}\overline{\Pi}$;
- X = E,W$\overline{\Pi}$ (W peut être le mot vide ; Π est appelée une période de X).

L'égalité de deux DDIP correspond à l'égalité chiffre à chiffre. Par exemple, on a $13{,}45\overline{813} = 13{,}458\overline{138} = 13{,}4581\overline{381} = 13{,}45813\overline{813} = 13{,}45\overline{813813}$ etc.

Cette égalité peut être formalisée par les notations de la section précédente ce qui revient en fait à déterminer toutes les manières de décrire un DDIP avec trois mots E, W et Π. En particulier, une période minimale[36] Π d'un DDIP permet d'obtenir toutes les autres périodes possibles en considérant les mots Π^k pour *k* entier non nul et leurs congrues modulo σ.

On peut remarquer que deux descriptions d'un même DDIP ont toujours des parties entières égales[37] et que $7{,}81\overline{9} \neq 7{,}82\overline{0}$. Nous parlons ici de DDIP et pas encore de nombres.

Un nombre décimal peut s'écrire avec une écriture décimale finie et peut évidemment être considéré comme un DDIP en *ajoutant* à droite le mot infini $\overline{0}$ comme par exemple 4,56 avec $4,56\overline{0}$ ou encore 67 avec $67,\overline{0}$. De cette manière, l'ensemble des DDIP contient l'ensemble **D** des décimaux. Nous ordonnons l'ensemble des DDIP par l'ordre lexicographique. Cet ordre constitue une extension naturelle de l'ordre de **D** – cet ordre sera adapté pour le cas de la comparaison des décimaux. L'ensemble des DDIP est donc un ensemble totalement ordonné qui contient l'ensemble **D** des décimaux et l'injection de **D** dans l'ensemble des DDIP est croissante. Notons que dans l'ensemble des DDIP, $0,\overline{9} < 1$ et que le segment [$0,\overline{9}$; 1] est de cardinal 2 – cela constitue une grande différence topologique avec **D**.

Cet ordre que nous définissons par une extension naturelle à l'ensemble des DDIP est qualifié de *sémiotique* afin de pouvoir l'opposer à l'ordre des nombres rationnels. Ce dernier, que nous qualifierons d'ordre *numérique*, est identique à l'ordre sémiotique sauf lorsque l'on compare deux DDIP qui définissent un même nombre décimal comme nous le verrons à la section suivante (voir aussi la section 7). Cette légère anticipation sur la suite n'est évidemment pas une surprise.

4.3 Groupes additifs

Avant de définir la somme de deux DDIP qui mènera au groupe abélien (**Q**,+), nous étudions la structure algébrique des périodes de taille fixée. La définition d'une somme de deux périodes de même taille sera essentielle pour définir la somme de deux DDIP.

4.3.1 Le groupe additif des périodes

Soit G_l l'ensemble des mots de *l* chiffres (y compris avec d'éventuels zéros à gauche comme $0031 \in G_4$). Les éléments de G_l sont appelés « périodes de taille *l* » ou simplement « périodes » car dans notre description des DDIP les éléments de G_l modéliseront les périodes.

Il peut paraître naturel de définir une somme sur G_l en utilisant la somme dans **N**. Mais il faut prendre des précautions. Prenons par exemple les périodes de taille 2 suivantes : Π=24 et Θ=96. Si

---

[36] Classiquement, tout DDIP admet une période de taille minimale qui n'est pas unique sauf lorsque cette taille est 1.

[37] Nous rappelons que nous ne tenons ici pas compte des éventuels zéros à gauche du mot E.

nous faisons la somme dans **N**, nous obtenons Π+Θ=120 qui n'est pas dans G_2 puisqu'il s'agit d'un mot de taille 3.

Nous convenons de procéder comme suit pour faire la somme de deux périodes de tailles *l* : faire la somme des deux entiers associés et, le cas échéant, ajouter la retenue, qui serait normalement placée au rang *l*+1, au premier rang. Dans les exemples suivants, la troisième ligne donne le résultat de la somme usuelle dans **N**, le résultat de la somme dans G_l se lit à la dernière ligne.

$$
\begin{array}{r} 24 \\ +\;17 \\ \hline 41 \\ \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 24 \\ +\;96 \\ \hline 120 \\ 21 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 2424 \\ +\;1097 \\ \hline 3521 \\ \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 242424 \\ +\;880703 \\ \hline 1123127 \\ 123128 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 83 \\ +\;17 \\ \hline 100 \\ 01 \end{array}
$$

Figure 19 : somme de périodes

En figure 19, les opérations 2, 4 et 5 montrent comment reporter la retenue dans G_l. La 5e opération montre qu'il faut conserver les 0 afin d'avoir des mots de la bonne taille.

Il ne faut pas s'étonner de la gestion un peu *exotique* de la dernière retenue car notre objectif est de faire la somme de deux DDIP dont les périodes sont répétées indéfiniment et l'on peut comprendre la somme dans G_l de cette manière : *il faut compter la retenue qui vient de la période juste à droite*. Nous notons ⊕ cette somme dans G_l afin de la distinguer de la somme + de **N**. On peut formaliser la somme de G_l de la manière suivante :

Soit deux périodes, Π et Θ, de même taille *l.* Soit W le mot de taille *l* et R=0 ou 1 le mot de taille 1 tel que RW = Π+Θ (somme dans **N**). Alors, Π⊕Θ = W+R qui est un mot de taille *l*.

Nous avons deux éléments neutres pour ⊕ qui sont 0^l et 9^l. Par exemple, dans G_3, on a 520⊕000=520⊕999=520. Il faut toutefois noter une restriction pour 9^l puisque l'on a $0^l \oplus 9^l = 9^l$. Regardons le problème des opposés. Il n'existe pas de période de G_3 qui, ajoutée à 520 donne 000 alors que l'on a 520⊕479=999. Ainsi, comme nous le voyons sur cet exemple, pour toute période de G_l distincte de 0^l, on peut trouver un *opposé* tel que leur somme soit égale à 9^l. Cette propriété est fausse pour 0^l.

9^l semble donc un meilleur candidat pour être l'élément neutre naturel de G_l. On obtient finalement une structure de groupe sur G_l^* qui est obtenu à partir de G_l, soit en excluant la période 0^l, soit en identifiant les éléments 0^l et 9^l :

<u>Théorème 1</u> : $(G_l^*,\oplus)$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbf{Z}/9^l\,\mathbf{Z}$.

Toutefois, s'il est naturel du point de vue algébrique de considérer que (-520)=479, il n'en reste pas moins que nous sommes portés à écrire 520–520=000 et non 520–520=999 ! Pour cette raison, dans la suite, nous n'optons pas pour une exclusion radicale et nous identifions les deux périodes, $0^l = 9^l$. En outre, nous ne ferons plus la distinction entre G_l^* et G_l.

4.3.2 Propriétés de la somme ⊕ des périodes

Cette somme ⊕ permet de compléter la structure de G_l. Mais nous avons également défini deux autres actions essentielles sur les périodes, la répétition et la permutation. Regardons deux exemples :

- Dans G_2 on a 56⊕78=35, et dans G_6 on a 565656⊕787878=353535, ainsi $56^3 \oplus 78^3=(56\oplus 78)^3$.
- Dans G_3 on a 845⊕603=449 et σ(845)⊕σ(603)=458⊕036=494=σ(449), ainsi σ(845⊕603)=σ(845)⊕σ(603)

La proposition suivante précise le résultat général qui montre que tout se passe convenablement entre la somme de deux périodes et les opérations de répétition et de permutation des périodes :

Proposition 1 : Soit Π et Θ deux périodes de G_l et *p* un entier :

- $\Pi^p \oplus \Theta^p = (\Pi\oplus\Theta)^p$ (égalité dans G_{pl}) ;
- $\sigma^p(\Pi) \oplus \sigma^p(\Theta) = \sigma^p(\Pi\oplus\Theta)$.

Pour conclure l'étude du groupe des périodes, nous mettons en évidence un résultat surprenant qui aura son importance pour définir la multiplication de deux rationnels par les DDIP. Prenons un exemple avec la période Π=340981 de G_6. Faisons des sommes successives de Π et de ses permutées $\sigma^p(\Pi)$ en prenant pour *p* des multiples d'un entier *l'*.

Pour *l'*=3, on calcule : $\Pi \oplus \sigma^3(\Pi) = 340981 \oplus 981340 = 322322 = 322^2$;

Pour *l'*=4, on calcule $\Pi \oplus \sigma^4(\Pi)$, puis $\Pi \oplus \sigma^4(\Pi) \oplus \sigma^8(\Pi)$, etc. On trouve :

- $\Pi \oplus \sigma^4(\Pi) = 340981 \oplus 813409 = 154391$;
- $\Pi \oplus \sigma^4(\Pi) \oplus \sigma^8(\Pi) = 340981 \oplus 813409 \oplus 098134 = 252525 = 25^3$.

On se rend compte que, pour certaines de ces sommes, le résultat est toujours une puissance (au sens des mots bien entendu). Le résultat général est donné par la proposition suivante.

Proposition 2 : Soit *l* et *l'* deux entiers, *d* leur PGCD, et *r* et *r'* les deux entiers tels que $r\times l=r'\times l'$=PPCM(*l*,*l'*). Soit Π une période de G_l. Il existe un mot Σ de taille *d* tel que

$$\Pi \oplus \sigma^{l'}(\Pi) \oplus \sigma^{2l'}(\Pi) \oplus \ldots \oplus \sigma^{(r'-1)l'}(\Pi) = \Sigma^{l/d}$$

La preuve est immédiate car deux chiffres dont les rangs diffèrent d'un multiple de *d* sont obtenus par les mêmes sommes (avec les éventuelles retenues).

4.3.3 Somme de deux DDIP

La somme des périodes de même taille définie à la section précédente permet, puisque cette somme à les *bonnes* propriétés de la proposition 1, de définir la somme de deux DDIP. Voyons quelques exemples.

- Le premier cas est le cas simple où il n'y a rien de nouveau : $34{,}0\overline{45} + 2{,}5\overline{27} = 36{,}5\overline{72}$

- Le deuxième cas est plus complexe car il montre comment gérer les retenues qui *sortent de la période*. Nous marquons en gras les retenues qu'il faut compter deux fois : au premier chiffre de la période et au premier chiffre à gauche de la période (le 0 trouvé en premier est donc barré et remplacer par un 1). On trouve : $3,\overline{24} + 4,\overline{96} = 8,\overline{21}$

- Le troisième cas $5{,}7\overline{24} + 8,\overline{3071}$ montre comment procéder lorsque les périodes ne commencent pas au même rang (il faut alors *décaler* la période en permutant ses chiffres par σ) et que les périodes n'ont pas la même taille (ici il suffit de répéter la période 24 ; en général, il faut prendre le PPCM des tailles).

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & \\ 3 & 4, & 0 & \overline{4} & \overline{5} \\ + & 2, & 5 & \overline{2} & \overline{7} \\ \hline 3 & 6, & 5 & \overline{7} & \overline{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & 1 & \\ & 3, & \overline{2} & \overline{4} \\ + & 4, & \overline{9} & \overline{6} \\ \hline & 8, & \overline{2} & \overline{\cancel{0}1} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & & & & & \\ & & 5, & 7 & \overline{2} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} \\ + & & 8, & 3 & \overline{0} & \overline{7} & \overline{1} & \overline{3} \\ \hline & 1 & 4, & 0 & \overline{3} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{7} \end{array}$$

Figure 20 : somme de DDIP

Avec ce dernier exemple, on voit l'intérêt de la proposition 1 qui permet de justifier la consistance de l'algorithme de la somme que nous présentons ici. Plus généralement, nous définissons la somme de deux DDIP de la manière suivante et qui étend naturellement la somme de deux décimaux en écriture décimale :

Soit $X_1=E_1,W_1\overline{\Pi_1}$ et $X_2= E_2,W_2\overline{\Pi_2}$ deux DDIP dont les périodes sont de même taille *l* et dont les mots W_1 et W_2 ont la même taille *t*. La somme $X_1+X_2=E,W\overline{\Pi}$ est définie par :

- $\Pi=\Pi_1\oplus\Pi_2$ (somme dans G_l) ;
- W est un mot de taille *t* et R'=0 ou 1 est un mot de taille 1 ;
- $R'W=W_1+W_2+R$ où R=0 ou 1 est la retenue dans le calcul de $\Pi_1\oplus\Pi_2$;
- $E=E_1+E_2+R'$.

Remarquons que deux DDIP X_1 et X_2 admettent toujours une représentation commune comme dans la définition :

- pour avoir des périodes de la même taille, on peut prendre le PPCM des tailles (ou tout autre multiple commun).
- si W_1 et W_2 n'ont pas la même taille, par exemple si W_1 a *k* chiffres de plus que W_2, il suffit de concaténer à W_2 les *k* premiers chiffres de la période Π_2, dans l'ordre, quitte à prendre plusieurs périodes Π_2, et de considérer la période $\sigma^k(\Pi_2)$.

La somme ainsi exposée est bien définie car les éventuelles modifications précédentes pour avoir des représentations au même format est sans incidence sur le résultat. La preuve est un peu longue mais relativement facile et repose essentiellement sur la proposition 1.

4.3.4 Des DDIP aux nombres rationnels

Regardons maintenant le cas particulier des décimaux. Il est facile de calculer $3{,}7\overline{45} + 0,\overline{9} = 4{,}7\overline{45}$, ce qui se généralise pour X un DDIP qui n'admet pas la période $\overline{0}$, on a $X + 0,\overline{9} = X + 1,\overline{0}$.

Ainsi, s'il est clair que les DDIP $0,\overline{9}$ et $1,\overline{0}$ sont différents, il est impératif de les identifier afin d'avoir un ensemble de nombres avec les propriétés usuelles. Il en est donc de même de tous les décimaux qui ont deux représentations et nous utilisons leurs notations usuelles comme par exemple $1,\overline{0}=1$ et $5{,}7\overline{9} = 5{,}8$.

Cette nécessaire identification est à rapprocher des preuves classiques (section 2.3). On remarque qu'elles font toutes appel à la soustraction (hormis celle s'appuyant sur l'égalité $0,\overline{9}=1,\overline{0}$ et celle s'appuyant sur une conversion). Or, sans l'identification, nous ne pouvons définir de soustraction et nous n'obtenons qu'un monoïde non régulier (Rittaud et Vivier 2014 ; voir aussi la section 7).

On définit alors $\mathbf{Q}_+$ comme étant l'ensemble des DDIP obtenu en identifiant les mots infinis $0\overline{9}$ et $1\overline{0}$. Les éléments de $\mathbf{Q}_+$ sont appelés nombres rationnels positifs. La somme de deux DDIP permet de définir une somme dans $\mathbf{Q}_+$. Cette somme est commutative, associative et elle admet l'élément neutre $0,\overline{0}$.

Insistons sur le fait que la nécessaire identification provient ici d'une caractéristique algébrique des nombres et non pas d'une caractéristique analytique ou sémiotique.

4.3.5 Différence de deux DDIP

On peut définir facilement une différence entre deux DDIP de la même manière que la somme avec le même système de retenue. Voyons deux exemples :

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 1 & & 1 & & & \\ & 5, & 7 & \overline{2} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} \\ - & 3, & 8 & \overline{0} & \overline{7} & \overline{1} & \overline{3} \\ \hline & 1, & 9 & \overline{1} & \overline{7} & \overline{1} & \overline{1} \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} & 1 & \mathbf{1} & & 1 & & \\ & 5, & 7 & \overline{2} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} \\ - & 3, & 8 & \overline{7} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{3} \\ \hline & 1, & 8 & \overline{5} & \overline{2} & \overline{9} & \overline{\cancel{1}0} \end{array}$$

Figure 21 : différences de deux DDIP : $5{,}7\overline{24} - 3{,}8\overline{0713} = 1{,}9\overline{1711}$ et $5{,}7\overline{24} - 3{,}8\overline{7133} = 1{,}8\overline{5290}$

Dans cet algorithme, pour effectuer $X_1 - X_2$, il est bien entendu nécessaire que $X_2 \leq X_1$. En revanche, on remarque que le cas de l'égalité pose un problème pour les décimaux. Car si cet algorithme donne bien la relation $1-0,\overline{9}=0$, il ne peut fonctionner avec $0,\overline{9}-1$. Ce cas particulier est intéressant car si nous cherchons à déterminer la différence de deux nombres, l'algorithme quant à lui fait la différence de deux représentations sémiotiques. Ainsi, lorsque l'on veut effectuer X_1-X_2, il est nécessaire que $X_2 \leq X_1$ au sens sémiotique (et non numérique) ce qui n'est précisément pas vérifié pour $X_1 = 0,\overline{9}$ et $X_2 = 1$.

Nous pouvons désormais définir l'ensemble des nombres rationnels en symétrisant $(\mathbf{Q}_+,+)$, on définit le groupe abélien $(\mathbf{Q},+)$ dont les éléments sont appelés nombres rationnels.

Nous nous en tenons dans la suite aux seuls rationnels *positifs*. Pour effectuer la somme de deux rationnels relatifs on procède de la manière usuelle en revenant à la somme ou à la différence de deux rationnels positifs comme lorsque l'on passe de **N** à **Z** (voir par exemple (Glaeser, 1981) pour un exposé didactique et épistémologique). On peut aussi montrer que la somme est compatible avec l'ordre de **Q**.

4.3.6 La multiplication par un entier

Une conséquence directe de la structure de groupe abélien est que, par addition réitérée, on définit immédiatement :

- la multiplication, notée $n\otimes\Pi$, d'une période Π de G_l par un entier n ;
- la multiplication, notée $n\times x$, d'un rationnel x de **Q** par un entier n.

Voyons quelques exemples : $7\otimes\overline{24}=\overline{69}$ et $38\otimes\overline{24}=\overline{21}$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & {}^{5} & {}^{\mathbf{1}} & {}^{2} & \\
 & 5, & 7 & \overline{2} & \overline{4} \\
\times & & & & 7 \\
\hline
4 & 0, & 0 & \overline{6} & \overline{\cancel{8}9}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 5 & 7, & \overline{2} & \overline{4} \\
 & \times & & & & 3 & 8 \\
\hline
 & & & {}^{5} & {}^{\mathbf{1}} & {}^{3} & \\
 & & 4 & 5 & 7, & \overline{9} & \overline{\cancel{1}3} \\
 & & {}^{2} & & {}^{1} & & \\
 & 1 & 7 & 1 & \overline{7,} & \overline{2} & \\
\hline
 & & 4 & 5 & 7, & \overline{9} & \overline{3} \\
+ & 1 & 7 & 1 & 7, & \overline{2} & \overline{7} \\
\hline
 & {}^{1} & & {}^{1} & {}^{\mathbf{1}} & {}^{1} & \\
 & 2 & 1 & 7 & 5, & \overline{2} & \overline{\cancel{0}1}
\end{array}
$$

Figure 22 : multiplications par un entier : $7\times 5{,}7\overline{24}=40{,}0\overline{69}$ et $38\times 57,\overline{24}=2175,\overline{21}$

Dans le dernier calcul, on constate qu'il peut être nécessaire de procéder à un décalage, indiqué par la flèche, pour que les périodes restent à droite de la virgule.

Les résultats suivants sont très importants car ils permettent d'avoir les solutions des équations du type $D\times x=N$ où D et N sont des entiers (cela sera précisé ci-dessous).

<u>**Proposition 3**</u>

- Pour tout Π de G_l, on a $\sigma(\Pi)=10\otimes\Pi$.
- Pour tout Π de G_l, on a : $9^l\otimes\Pi = 9^l$.
- Soit Π une période de G_l. Alors $9^l\times 0,\overline{\Pi}=\Pi$ (le résultat est dans **N**).
- La multiplication par 10 d'un DDIP correspond à un *shift*-gauche (gauche par rapport à la virgule).
- Si x est un rationnel non nul, alors pour tout entier D, le rationnel $D\times x$ est non nul.

Attention, au deuxième point on ne peut pas parler d'« élément absorbant » de G_l car on multiplie Π par <u>l'entier</u> 9^l pour obtenir la <u>période</u> 9^l, ainsi, les deux 9^l n'ont pas la même signification (avec la multiplication externe $\otimes$ sur G_l, nous retrouvons ici la distinction entre entier et mot).

4.4 Les fractions

On appelle fraction une solution d'une équation $D \times x = N$ où D et N sont deux entiers, D étant non nul. Nous allons montrer l'équivalence entre les fractions et les rationnels ce qui permettra d'avoir une nouvelle représentation des éléments de **Q**. Puis nous nous intéresserons à la taille des périodes.

4.4.1 Identification de Q comme l'ensemble des fractions

Pour une période Π de taille l, la proposition 3 permet de trouver un entier $s=9^l$ tel que $s \otimes \Pi$ soit égal à l'élément neutre 9^l et $s \times 0,\overline{\Pi}$ soit un entier. En fait, on peut trouver d'autres entiers s plus petits. Par exemple, pour $\Pi=18$, on peut prendre $s=11$ car on a $11 \otimes 18=99$ et $11 \times 0,\overline{18} = 1,\overline{99} = 2$. Précisons cela.

<u>Théorème 2</u> : Pour toute période Π de taille l, il existe un plus petit entier non nul D_Π tel que :

a) $D_\Pi \otimes \Pi = 9^l$ (égalité dans G_l) ;
b) $D_\Pi \times 0,\overline{\Pi}$ est un entier non nul ;
c) l'ensemble des entiers D qui vérifient *a-* ou *b-* est exactement l'ensemble des multiples de D_Π ;
d) pour toute période Π de taille l, D_Π est un diviseur de 9^l.
e) tout rationnel est une fraction.

Preuve- Les points *a* et *b* sont équivalents (il faut distinguer le cas $\Pi=0$) et proviennent directement de la proposition 3. Le point *c* se montre facilement en écrivant la division euclidienne de D par D_Π. Les points *d* et *e* sont des conséquences immédiates des points précédents.

On a par exemple les nombres suivants : $D_0=0$; $D_1=D_{11}=D_{111}=9$; $D_9=D_{99}=D_{999}=1$; $D_2=9$; $D_3=3$; $D_{18} = 11$.

Avant de terminer la preuve de l'identification de **Q** avec les fractions, nous caractérisons, pour un entier D non nul, les périodes de dénominateur D, c'est-à-dire les périodes des solutions aux équations du type $D \times x=N$ où N est un entier. Le résultat n'est pas nouveau, mais il est ici obtenu du seul point de vue des DDIP, sans passer par les fractions.

<u>Théorème 3</u>

a- Soit D un entier non nul. S'il existe deux entiers γ et l tels que $9^l = \gamma \times D$, alors pour tout entier N, l'équation $D \times x = N$ admet dans $\mathbf{Q}_+$ une unique solution qui est $x = N \times 0,\overline{\Gamma}$ où Γ est le mot de taille l associé au nombre γ.

b- Soit D un entier premier avec la base. On note l le plus petit entier tel que $9^l = \gamma \times D$ pour un certain entier γ. Alors, en notant Γ le mot de taille l associé au nombre γ, l'ensemble des périodes de dénominateur D :
- est l'ensemble à D éléments $\{n \otimes \Gamma \,;\, n=1,\dots, D\}$ contenu dans G_l.
- est un groupe abélien isomorphe à **Z/*D*Z**.

Nous rappelons que les périodes 0^l et 9^l sont identifiées l'une avec l'autre. En particulier, on a $0^l = 0 \otimes \Gamma = D \otimes \Gamma = 9^l$.

Regardons tout de suite un exemple avec $D=13$: on trouve $l=6$ avec $9^6=999999=13 \times 76923$, $\gamma=76923$, et les 13 périodes de taille 6 sont 000000=999999 et les suivantes :

076923 153846 **230769** **307692** 384615 461538 538461 615384 **692307** **769230** 846153 **923076**

On observe deux classes de périodes non triviales constituées par les six *shifts* de 076923 et les six *shifts* de 153846. Car bien entendu, dans la liste des périodes de dénominateur D, on retrouve les *shifts* de chacune des périodes. On a par exemple la solution de $13\times x=5$ qui est $5 \times 0,\overline{076923} = 0,\overline{384615}$.

Dans ce théorème, remarquons que, tant que $n\leq D$, alors le calcul de $n\otimes\Gamma$ s'effectue sans retenue puisque $n\times\gamma$ reste inférieur à 9^l qui représente le plus grand entier de taille l. Ainsi, $n\times\gamma$ est le nombre associé au mot $n\otimes\Gamma$ de taille l.

Indications pour la preuve du théorème 3- L'existence de la partie *a-* est immédiate avec ce qui précède ; l'unicité provient de l'unicité de la solution à $D\times x = 0$. Ce point *a-* s'applique pour tout entier D qui est premier avec la base de numération puisque pour un tel entier D il existe un rep-unit 1^l avec $1\leq l\leq D-1$ qui est un multiple de D. La preuve du point *b-* est immédiate avec ce qui précède, il n'y a qu'à vérifier.

On peut aussi considérer le cas des dénominateurs D non premiers avec la base. Il se traite en écrivant $D = A\times D'$ où D' est premier avec 10 et en considérant les solutions des équations $D'\times y=N$. La période de x commence au rang α où α est la plus grande puissance des nombres premiers divisant la base qui se trouvent dans la décomposition en facteur premier de D.

En conséquence de ces deux théorèmes on obtient le résultat annoncé et l'on note comme à l'habitude N/D le rationnel solution de l'équation $D\times x = N$: l'ensemble **Q** est exactement l'ensemble des fractions N/D où D est un entier non nul et N un entier (relatif).

Notons que ce théorème qui établit l'existence et l'unicité d'une solution aux équations $D\times x = N$ n'est pas une trivialité contrairement à ce que pourrait laisser penser le programme de la classe de sixième[38]. Ce résultat est fortement lié à la construction sémiotique des nombres. En particulier, le même type de construction avec les nombres *F-adiques* n'aboutit pas à l'unicité même si l'on dispose toujours de l'existence (Rittaud & Vivier, 2012).

4.4.2 Des fractions aux DDIP par divisions

La division euclidienne permet classiquement de déterminer le développement décimal périodique d'une fraction N/D.

Soit k un entier et $a_{k+n}\ldots a_{k+1}a_k a_{k-1}\ldots a_1$ le quotient euclidien de $10^k\times N$ par D (les a_i sont des chiffres). Alors, si le rationnel x est la solution de l'équation $D\times x = N$, il existe un mot infini W tel que

$$x = a_{k+n}\ldots a_{k+1}\,,\, a_k a_{k-1}\ldots a_1\,\mathrm{W}.$$

Preuve- La preuve est classique. On écrit la division euclidienne : $10^k\times N = D\times q_k + r_k$ avec $r_k<D$. Puis, en posant $x_k = 10^{-k}\times q_k$, on obtient $D\times(x-x_k) = 10^{-k}\times r_k$. Ainsi, nécessairement, les k premières décimales de x et x_k coïncident.

[38] « *Quotient exact : Interpréter a/b comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a.* » B.O.E.N. spécial n°6 du 28/08/2008 page 15.

Ce résultat permet bien entendu de construire un algorithme où l'on identifie la période dès que l'on retrouve un reste déjà obtenu. Mais il est notable que cet algorithme ne donne que les développements propres des décimaux, c'est-à-dire avec la période de 0. Cette sélection de la représentation d'un décimal peut paraître surprenante à première vue, mais il n'en est rien.

L'algorithme évoqué ci-dessus pour obtenir les DDIP utilise la division euclidienne usuelle. Cette dernière agit sur les représentations sémiotiques et non directement sur les nombres. L'algorithme donne donc comme résultat une représentation sémiotique qui est par conséquent liée à l'action de la division euclidienne sur les représentations sémiotiques. Changeons donc de division dans l'algorithme qui permet de déterminer les décimales d'une fraction : Pour deux nombres entiers a et b non nuls, les entiers q^* et r^* tels que $a = q^* \times b + r^*$ et $0 < r^* \leq b$ sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne* de a par b. Il y a peu de différences avec la division euclidienne classique :

- on s'interdit le reste nul ;
- on s'autorise donc un reste égal au diviseur ;
- le dividende a=0 n'est pas autorisé (cette différence sur le domaine de validité est sans doute la plus marquée).

L'algorithme qui détermine la représentation en DDIP d'une fraction *N/D* donne donc le même résultat pour les rationnels non décimaux puisque l'on n'obtient jamais un reste euclidien nul. Le plus intéressant concerne les décimaux : le résultat des divisions euclidiennes* successives est un DDIP avec une période de 9.

4.4.3 La taille des périodes

Le théorème suivant décrit totalement la taille des périodes à partir des tailles des périodes pour les dénominateurs premiers. Il met en lumière l'importance d'une fonction Ψ_B, du type indicatrice d'Euler, dont la description dépend fortement de la base B et plus particulièrement des diviseurs premiers de B–1. Nous la notons Ψ pour ne pas alourdir les énoncés.

Théorème 4

Pour un entier D, on note $\Psi(D)$ le plus petit entier l qui satisfait 9^l est divisible par D. On a les résultats suivants :

1. Si u et v sont premiers entre eux, alors $\Psi(u \times v) = \text{PPCM}(\Psi(u) ; \Psi(v))$;
2. Si u est un diviseur de 10, alors $\Psi(u)=1$;
3. Soit p un nombre premier qui ne divise ni 10 ni 10–1 alors :
   - *a-* pour tout entier $k>0$ on a $\Psi(p^k)=p^{k-1}\Psi(p)$;
   - *b-* $\Psi(p)$ est un diviseur de $p-1$;
4. Soit p un nombre premier différent de 2 tel que $p^{\alpha-1}$ divise 10–1 et p^{α} ne divise pas 10–1 pour un certain entier $\alpha>1$ alors :
   - *a-* pour tout entier $k>0$ on a $\Psi(p^{\alpha+k})=p^k\Psi(p^{\alpha})$;
   - *b-* si $k<\alpha$ alors $\Psi(p^k)=1$;
   - *c-* $\Psi(p^{\alpha}) = p$.
5. En base B impaire, on définit les entiers $\alpha>1$ et $n>0$ par : $B = 2^{\alpha-1} \times n+1$ et n est impair.
   - *a-* Si $\alpha>2$, pour tout entier $k \geq 0$ on a $\Psi(2^{\alpha+k}) = 2^{k+1}$;

b- Si $\alpha=2$, soit β le plus grand entier non nul tel que $n+1$ soit divisible par $2^{\beta-1}$ alors $\Psi(2^{\alpha})=\Psi(2^{\alpha+1})=\ldots=\Psi(2^{\alpha-1+\beta}) = 2$ et pour tout entier $k\geq 0$ on a $\Psi(2^{\alpha+\beta+k}) = 2^{k+1}$;

La preuve de ce théorème peut être trouvé à http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/34/13/PDF/Rittaud-Vivier-DDIP.pdf.

Il est remarquable que la fonction Ψ, bien que dépendant de la base de numération, ait des propriétés proches de l'indicatrice d'Euler que l'on note traditionnellement ϕ. En particulier, et quelle que soit la base de numération, on a immédiatement $\Psi_B \leq \phi$. Cette inégalité peut être (la base est dix dans les exemples suivants) :

- stricte : $\Psi(11)=2 < \phi(11)=10$ et $\Psi(13)=6 < \phi(13)=12$;
- une égalité : $\Psi(7)=6=\phi(7)$, $\Psi(17)=16=\phi(17)$ et $\Psi(19)=18=\phi(19)$.

La structure particulière des périodes en base dix de certains nombres premiers comme 7, 17 et 19 où toutes les périodes sont obtenues à partir des *shifts* d'une période non triviale est bien connu :

- $\gamma = 9^6/7$ et $\Gamma = 142857$ pour le dénominateur 7 ;
- $\gamma = 9^{16}/17$ et $\Gamma = 0588235294117647$ pour le dénominateur 17 ;
- $\gamma = 9^{18}/19$ et $\Gamma = 052631578947368421$ pour le dénominateur 19.

Le corollaire suivant explique le phénomène.

Corollaire : Soit D un nombre tel que $\Psi(D)=D-1$:

a. D est un nombre premier ;
b. toutes les périodes de dénominateur D sont obtenues par un shift d'une période non triviale.

Preuve- Le théorème 4 assure que D est nécessairement premier, car alors $\phi(D)\geq D-1$ ce qui ne peut se produire que si D est premier (et l'inégalité est alors une égalité). Soit Π une période non triviale. Supposons qu'il existe un mot Θ et un entier $p>1$ tels que $\Pi=\Theta^p$. Alors, par le théorème 2, D est un multiple, multiple strict puisque $p>1$, de D_Θ (qui n'est ni 0 ni 1) et D ne peut être un nombre premier. Par suite, il y en a exactement $D-1$ *shifts* différents de la période Π ce qui permet d'énumérer toutes les périodes non triviales de dénominateurs D.

4.5 Le corps Q

Dans cette section, nous terminons la construction du corps **Q** des rationnels, toujours à partir des DDIP. Avec la multiplication, nous abordons l'opération la plus difficile.

4.5.1 Multiplication de deux périodiques simples

La difficulté majeure pour définir la multiplication de deux rationnels par les DDIP consiste en l'identification de la période du produit et notamment de sa taille. Le principe repose sur des sommes triangulaires successives jusqu'à obtention d'une période de 9.

Regardons un exemple simple. Pour effectuer le produit $0,\overline{5} \times 0,\overline{3}$, on calcule $5 \times 0,\overline{3} = 1,\overline{6}$ ce qui permet de calculer successivement :

- $0{,}5 \times 0,\overline{3} = 0{,}1\overline{6}$;

- $(0{,}5 + 0{,}05) \times 0,\overline{3} = 0{,}1\overline{6} + 0{,}01\overline{6} = 0{,}18\overline{3}$
- $(0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005) \times 0,\overline{3} = 0{,}1\overline{6} + 0{,}01\overline{6} + 0{,}001\overline{6} = 0{,}184\overline{9}$

Cette dernière somme donne comme résultat le décimal 0,185. Cela permet de conclure à $0,\overline{5} \times 0,\overline{3} = 0,\overline{185}$ puisque le motif 185 va se répéter.

Entrons dans le vif du sujet avec le théorème 5 qui permet de définir le produit commutatif $0,\overline{\Theta} \times 0,\overline{\Theta}' = 0,\overline{\Phi}$ où la taille de Φ est un multiple du PPCM des tailles des périodes Θ et Θ'.

<u>Théorème 5</u> : Soit $0,\overline{\Theta}$ un rationnel de période Θ de taille *l* et $0,\overline{\Theta}'$ un rationnel de période Θ' de taille *l'*. Soit *r* et *r'* tels que $r\times l=r'\times l'$=PPCM(l,l') et d=PGCD(l,l').

Le produit $\Theta' \times 0,\overline{\Theta}$ est de la forme W, $\overline{\Pi}$ où W est un mot de taille *l'* (quitte à ajouter des 0 à gauche) et Π est une période de taille *l*.

Le produit $\Theta \times 0,\overline{\Theta}'$ est de la forme W', $\overline{\Pi}'$ où W' est un mot de taille *l* (quitte à ajouter des 0 à gauche) et Π' est une période de taille *l'*.

Pour un entier *k*, on définit les deux rationnels suivants :

$$x_k = 0,W\overline{\Pi} + 0,0^{l'}W\overline{\Pi} + \cdots + 0,0^{kl'}W\overline{\Pi} \qquad \text{et} \qquad y_k = 0,W'\overline{\Pi'} + 0,0^{l}W'\overline{\Pi'} + \cdots + 0,0^{kl}W'\overline{\Pi}'$$

1. On a $x_{r'-1} = y_{r-1}$ et il existe un mot Σ de taille d=PGCD(l,l') tel que $x_{r'-1}$ et y_{r-1} soient de période Σ.
2. Il existe un entier *s* tel que $s\otimes\Sigma = 9^d$ et un mot Φ de taille PPCM(l,l')×*s* tel que $x_{(r'-1)\times s} = y_{(r-1)\times s}$ = 0,Φ (ce sont des décimaux).

Preuve- 1- L'existence des deux mots Σ et Σ' de taille *d*, respectivement pour les périodes des deux rationnels, est acquise par la proposition 2. Il reste à montrer l'égalité des deux rationnels pour les indices *r*–1 et *r'*–1. La preuve est technique mais ne pose pas de difficulté particulière. Il suffit d'écrire les sommes dans chacun des deux cas en partant d'une décomposition du produit Θ×Θ' en (*l*+*l'*)/*d* paquets de *d* chiffres. On constate alors que l'on effectue les mêmes sommes. Ainsi, les mots de taille *d* qui définissent les périodes des deux rationnels sont également égaux.

2- Si $x_{r'-1} = y_{r-1}$ ne sont pas des décimaux (sinon la preuve est finie), alors Σ n'est pas nul. Comme on a $\sigma^{rl}(\Pi)=\Pi$ et $\sigma^{r'l'}(\Pi')=\Pi'$, alors $x_{2(r'-1)} = y_{2(r-1)}$ sont de période 2⊗Σ (produit dans G_d), $x_{3(r'-1)} = y_{3(r-1)}$ sont de période 3⊗Σ (produit dans G_d), etc. L'existence de *s* ne pose pas de problème puisque si *s* est l'entier 9^d, la période commune à $x_{s(r'-1)} = y_{s(r-1)}$ est *s*⊗Σ (produit dans G_d) qui est aussi égale (cf. proposition 3) à 9^d. On peut donc prendre le plus petit des entiers *s* tel que $s\otimes\Sigma = 9^d$ dans G_d. On a bien l'existence du mot Φ de taille PPCM(l,l')×*s* (il suffit de compter la taille, après avoir réduit la suite infinie $0\overline{9}$ par $1\overline{0}$) tel que $x_{(r'-1)\times s} = y_{(r-1)\times s}$ = 0,Φ qui sont donc des décimaux.

On trouve facilement $0,\overline{9} \times 0,\overline{9} = 0,\overline{9}$, mais prenons d'autres exemples pour mieux comprendre l'algorithme que l'on peut mettre en œuvre pour calculer le produit de deux DDIP simples.

<u>Exemple 1</u> : $0,\overline{5} \times 0,\overline{37}$; *l*=1 et *l'*=2.

On calcule d'abord $37 \times 0,\overline{5} = 20,\overline{5}$ (c'est W,$\overline{\Pi}$) et $5 \times 0,\overline{37} = 1,\overline{86}$ (c'est W',$\overline{\Pi}'$).

Regardons le premier point : x_1 = $0{,}20\overline{5}$ s'obtient directement sans effectuer de somme et on calcule également y_2 =$0{,}1\overline{86} + 0{,}01\overline{86} = 0{,}205\overline{55}$. La période commune à x_1 et y_2 est Σ=5 qui est de taille 1 Il faut alors itérer le processus pour s=9 :

			1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	3	4	4	**4**	
2	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
		2	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
				2	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
						2	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
								2	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5
										2	0	5	5	5	5	5	5	5
												2	0	5	5	5	5	5
														2	0	5	5	5
																2	0	5
2	0	7	6	3	1	8	7	4	2	9	8	5	4	0	9	6	4	9

Figure 23 : les sommes triangulaires pour une multiplication *simple*

On obtient alors Φ=207631874298540965 qui est bien de taille PPCM(1,2)×9=18 et $0,\overline{5} \times 0,\overline{37} = 0,\overline{\Phi}$

<u>Exemple 2</u> : $0,\overline{370} \times 0,\overline{25}$; l=3 et l'=2.

On calcule d'abord $25 \times 0,\overline{370} = 09,\overline{259}$ (c'est W,$\overline{\Pi}$) et $370 \times 0,\overline{25} = 093,\overline{43}$ (c'est W',$\overline{\Pi}$').

On doit ensuite calculer x_2= $0{,}09\overline{259} + 0{,}0009\overline{259} + 0{,}000009\overline{259}$ et y_1=$0{,}093\overline{43} + 0{,}00009\overline{343}$, sommes qu'il est préférable de poser afin de les effectuer :

			1	1	1	**1**	1	1	
0,	0	9	2	5	9	2	5	9	2
0,	0	0	0	9	2	5	9	2	5
0,	0	0	0	0	0	9	2	5	9
0,	0	9	3	5	2	7	7	7	~~6~~7

				1				
0,	0	9	3	4	3	4	3	4
0,	0	0	0	0	9	3	4	3
0,	0	9	3	5	2	7	7	7

Figure 24 : sommes intermédiaires.

Il faut, ici encore, itérer 9 fois le processus, ce qui est long, mais encore faisable *à la main* (nous préconisons toutefois l'usage du papier à petits carreaux !). On trouve alors :

$0{,}09352787130564908342866120463898241676019453797231574\overline{9}$ ce qui permet de trouver Φ qui a bien 54 chiffres : Φ=093527871305649083428661204638982416760194537972315750 et donc $0,\overline{370} \times 0,\overline{25} = 0,\overline{\Phi}$.

On voit qu'il est préférable de commencer l'algorithme de multiplication par les rationnels définis par la période la plus courte. Mais le plus grand problème dans cet algorithme est que, même si l'on peut *a priori* déterminer la taille de la période, elle est en général très grande. Ainsi, l'algorithme présenté est rapidement impraticable *à la main*. Mais il est tout à fait possible de l'effectuer de manière informatique à l'aide d'un programme. Cependant, un algorithme plus simple est envisageable en s'appuyant sur les fractions – elles-mêmes définies par les DDIP –, voir section 4.6.

4.5.2 Le corps Q

Le théorème 5 permet de définir une multiplication sur **Q** qui étend naturellement la multiplication des décimaux. Soit *x*=E,$\overline{\Pi}$ et *x'*=E',$\overline{\Pi}'$, alors : $x \times x' = \mathrm{E} \times \mathrm{E}' + \mathrm{E} \times 0,\overline{\Pi}' + \mathrm{E}' \times 0,\overline{\Pi} + 0,\overline{\Pi} \times 0,\overline{\Pi}'$. On procède de même si les périodes ne commencent pas directement après la virgule (on peut toujours utiliser des multiplications et des divisions par une puissance de 10). Nous présentons le résultat global, même si, comme annoncé, nous nous intéressons seulement aux rationnels positifs.

Théorème 6 : (**Q**, +,×) est un corps commutatif.

Preuve- Les seules démonstrations à faire sont l'associativité et la distributivité de la multiplication par rapport à la somme. Ce ne sont pas des démonstrations particulièrement difficiles du point de vue mathématique, mais elles sont bien techniques.

4.5.3 Algorithme de la division

L'algorithme de la division est relativement proche de l'algorithme usuel de la division euclidienne. Les deux différences avec la division de deux décimaux que l'on apprend au collège proviennent du fait que le diviseur a une infinité de chiffres et sont : 1) on ne peut pas éliminer la virgule au diviseur et 2) on ne peut pas faire de division chiffre à chiffre en abaissant les chiffres du dividende, on est donc amené à effectuer des décalages vers la gauche.

Le principe consiste toujours à déterminer un à un les chiffres du quotient en soustrayant au dividende un multiple du diviseur. Bien entendu, il s'agit de multiplications (par un nombre strictement inférieur à 10) et de soustractions avec des DDIP. Une fois la partie entière du quotient trouvée, on passe aux chiffres suivants du quotient en décalant les chiffres vers la gauche pour simuler une division par 10. Enfin, on identifie la période lorsque l'on retrouve le même reste partiel (ce qui est nécessaire puisque, pour un dividende et un diviseur fixés, il y a un nombre fini de restes possibles).

Il est préférable d'écrire les périodes du diviseur et du dividende avec le même nombre de chiffres en utilisant le PPCM car cela permet de faire cette modification une seule fois au début sans avoir à la refaire pour chaque soustraction.

Il est également possible de jouer sur la place de la virgule. On peut ainsi choisir de multiplier ou de diviser par une puissance de 10 (*décaler la virgule*) pour faire commencer la période du diviseur juste après la virgule ou bien d'avoir un diviseur avec une partie entière à un seul chiffre non nul. Cette dernière possibilité est sans doute la plus intéressante car elle permet d'avoir rapidement une idée des chiffres du quotient.

Exemple : Faisons la division de $13,8\overline{51}$ par $0,04\overline{5}$ que l'on va poser sous la forme $1385,\overline{15}$ divisé par $4,\overline{55}$. Pour être plus efficace, il est utile d'écrire la table du diviseur :

$4,\overline{5} \times 1 = 4,\overline{5}$ $\quad$ $4,\overline{5} \times 2 = 9,\overline{1}$ $\quad$ $4,\overline{5} \times 3 = 13,\overline{6}$

$4,\overline{5} \times 4 = 18,\overline{2}$ $\quad$ $4,\overline{5} \times 5 = 22,\overline{7}$ $\quad$ $4,\overline{5} \times 6 = 27,\overline{3}$

$4,\overline{5} \times 7 = 31,\overline{8}$ $\quad$ $4,\overline{5} \times 8 = 36,\overline{4}$ $\quad$ $4,\overline{5} \times 9 = 41$

La ligne en pointillés sert de point de repère pour les décalages à gauche afin de ne pas oublier de « 0 » au quotient. Elle sert en outre à indiquer la virgule dans les produits *a*×*diviseur* où *a* est un chiffre. Cette ligne en pointillés est placée juste à droite du premier chiffre de gauche du dividende. Nous n'avons pas écrit la première ligne qui ne présente qu'un décalage avec un 0 au quotient qui ne sert à rien (c'est comme cela que l'on procède lorsque l'on pose une division usuelle). On peut également se rendre compte dès le début que le quotient aura une partie entière à trois chiffres puisque après le premier chiffre non nul du quotient, il faudra faire deux décalages pour amener la virgule sur la ligne en pointillés.

	1	3	8	5,	1	5	
−	1	3	6	6	6	6	3
			1	8,	4	8	
		1	8,	4	8		0
	1	8,	4	8			
−	1	8	2	2			4,
			2	6			
		2	6	2			0
	2	6	2	6			
−	2	2	7	7			5
		3	4	8			
	3	4	8	4			
−	3	1	8	8			7
		2	9	5			
	2	9	5	9			
−	2	7	3	3			6
		2	2	6			
	2	2	6	2			
−	1	8	2	2			4
		4	4	0			
	4	4	0	4			
−	4	1					9
		3	0	4			
	3	0	4	0			
−	2	7	3	3			6
		3	0	7			
	3	0	7	0			
−	2	7	3	3			6
		3	3	7			
	3	3	7	3			
−	3	1	8	8			7
		1	8	4			
	1	8	4	8			

Figure 25 : un exemple de division

La partie entière du quotient s'obtient lorsque la virgule du dividende se retrouve sur la ligne en pointillés (ici, c'est 304). Ensuite, il n'est plus utile d'écrire les virgules.

On met en regard des restes partiels les chiffres successifs du quotient car cela permet facilement de repérer la période. C'est pour cette raison que la disposition en potence, bien que possible, n'a pas été retenue.

Il était prévisible que le quotient soit un rationnel avec une période de dix chiffres puisque si l'on écrit le quotient en fraction, le dénominateur est 99×41 et donc on a (cf. théorème 4) : Ψ(99×41) = PPCM(Ψ(9),Ψ(41),Ψ(11)) = PPCM(1,5,2) = 10.

On obtient donc finalement le résultat suivant : $13{,}8\overline{51} \div 0{,}04\overline{5} = 304{,}\overline{0576496674}$.

La nécessité de devoir travailler avec les virgules permet de revisiter la technique de division avec les décimaux : il n'est pas nécessaire d'avoir un entier au diviseur[39], car ce qui compte c'est la position

[39] Programme de la classe de cinquième : « Division par un décimal : - Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier. » (B.O.E.N. spécial n°6 du 28/08/2008, page 21).

relative des virgules au diviseur et dividende. Voici un exemple : 13,851 : 0,045 que l'on va poser sous la forme 1385,1 : 4,5.

	1	3	8	5,	1	
–	1	3	5			3
			3	5,	1	
		3	5,	1		0
	3	5,	1			
–	3	1	5			7,
		3	6			
	3	6				
–	3	6				8
		0				

Figure 26 : un exemple de division de deux décimaux par l'algorithme général

Enfin, les programmes du collège font état d'une *division décimale*[40], mais les manuels scolaires ne la définissent pas puisqu'il s'agit en fait de définir plusieurs divisions amenant chacune à un quotient approché à *n* décimales. L'algorithme que nous proposons permet de définir une division décimale dont se déduisent les divisions décimales du collège.

4.6 Un éclairage historique

Après ces développements mathématiques, je ne pouvais pas croire que cela n'avait jamais été développé dans l'histoire des mathématiques. Après plusieurs mois de recherche, la chance a souri et nous avons pu lire le livre de Marsh (1742). Effectivement, il énonce les algorithmes pour les écritures décimales périodiques (*circulating decimal*) en s'appuyant sur les travaux de Malcolm (1730). Il semble que l'histoire n'ait pas retenu ces auteurs au profit de Wallis qui, bien qu'ayant travaillé sur les écritures périodiques, n'avait pas défini d'algorithme sur ces objets.

Mais à côté de ce travail très algorithmique et algébrique de Marsh, on trouve une justification de 0,999…=1 par les infinitésimaux (figure 27), ce qui est étrange et très proche de la justification de Dubinsky et al. (2005) exposée ci-dessus (section 2.2).

[40] Programme de sixième : « La division décimale est limitée à la division d'un décimal par un entier. » (B.O.E.N. spécial n°6 du 28/08/2008, page 15).

13. If the Repetend of any circulating Expreſſion is 9, then the Value, or Sum, of that Series of 9's is an Unit in the Place next that Repetend on the left Hand.

Thus $,\dot{9}=1$. And $,0\dot{9}=,1$. And $,00\dot{9}=,01$. And $,000\dot{9}=,001$ Or $9,\dot{9}=10$. And $19,\dot{9}=20$. And $399,\dot{9}=400$ and ſo on.

Demonſtration.

The Reaſon is manifeſt ; for that $,9=\frac{9}{10}$ wants only $\frac{1}{10}$ of Unity ; And $,99=\frac{99}{100}$ wants but $\frac{1}{100}$ of Unity ; And $,999=\frac{999}{1000}$ wants but $\frac{1}{1000}$ of Unity ; And $,9999=\frac{9999}{10000}$ wants but $\frac{1}{10000}$ of Unity, &c. So that if the Series of 9's were infinitely continued, the Difference between that Series of 9's and 1 would be equal to Unity divided by Infinity, that is, nothing at all.

Figure 27 : la justification topologique de 0,999…=1 par John Marsh (1742, page 16)

Lambert, dans ses travaux sur l'irrationalité de π avait tout d'abord commencé à chercher une preuve en s'appuyant sur les écritures décimales périodiques (Bullynck, 2009) avant de se porter sur les fractions. Une preuve s'appuyant sur les rationnels en écriture décimale ne semble pas avoir été trouvée. Cependant, avec nos algorithmes, nous pouvons montrer l'irrationalité des racines carrées d'entiers qui ne sont pas des carrés parfaits. Pour cela, nous nous appuyons sur un algorithme de multiplication.

L'algorithme de multiplication exposé ci-dessus avait déjà été exposé, sur un cas et apparemment sans expliciter le rôle des périodes $\overline{9}$, par Hatton (1728). Il est à noter que Marsh propose un algorithme de la multiplication plus simple mais qui ne reste pas entièrement à l'intérieur du registre des DDIP. Par exemple, pour reprendre un exemple développé ci-dessus, pour effectuer $0,\overline{370} \times 0,\overline{25}$ on commence par calculer $0,\overline{370} \times 25 = 9,\overline{259}$ puis on divise ce nombre par 99 tout simplement parce que multiplier par $0,\overline{25}$ revient à multiplier par 25/99, soit multiplier par 25 et diviser par 99. Dans le travail soumis (Rittaud et Vivier), nous optons pour l'algorithme de Marsh qui simplifie considérablement les preuves.

Finalement, qu'avons-nous apporter de plus ? Bien sûr la redécouverte des algorithmes et des travaux de Marsh, mais pas uniquement :

- Une construction de **Q**, entièrement basée sur les écritures décimales, sans passer par les fractions contrairement à Marsh (il ne construit pas **Q**) ;
- Une explication de la nécessité de 0,999…=1 par le bas, en interne, sans invoquer une explication topologique afin d'avoir une structure mathématique suffisamment riche ;
- Une nouvelle démonstration de l'irrationalité de √n dans le cas où n est un entier non carré parfait (il ne peut pas être périodique) ;
- des recherches en didactique des mathématiques.

5. Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale[41]

5.1 Introduction

La somme de deux nombres rationnels est définie classiquement par les fractions – cette définition apparaît dès le début du collège en France. Mais il est également bien connu que, grâce à l'interprétation d'une fraction comme une division, tout nombre rationnel peut s'écrire à l'aide d'un développement décimal illimité périodique dont le nombre 1/3 joue le rôle de paradigme.

L'expérimentation proposée vise a faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants, de futurs enseignants en formation initiale inscrits au Master 2 Métier des Mathématiques et de l'Enseignement de l'université de Tours. Le déroulement expérimental est classique et s'appuie sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998).

5.2 Analyse a priori de la situation

La situation initialement prévue se décompose en trois phases :

0. une première activité individuelle d'une dizaine de minutes où les étudiants-professeurs doivent déterminer trois sommes de rationnels en écriture décimale (la convention d'écriture des périodes est rappelée) :

$$0,\overline{5}+0,\overline{7} \qquad 0,\overline{34}+0,\overline{51} \qquad 0,\overline{72}+0,\overline{3}$$

1. un travail de groupe de une à deux heures avec la consigne suivante : « trouver une manière générale pour faire ce type de somme et rédiger votre stratégie » ;
2. une présentation des résultats des groupes en classe entière suivie de débat pour une quinzaine de minutes environ par groupe.

La situation est fortement inspirée par la TSD (Brousseau, 1998) : la première activité joue le rôle de dévolution et le travail de groupe en autonomie totale (pas d'échange entre groupe, aucun d'indice mathématique donné par l'enseignant) permet une dimension adidactique dans les trois phases d'action, de validation et de formalisation.

Des feuilles de format A3 sont distribuées aux groupes pour la rédaction, la calculatrice est autorisée (elle sera très peu utilisée) et une durée totale de trois heures est prévue.

La phase 1 n'a d'importance que pour la dévolution. Toutefois, on s'attend aux procédures suivantes :

- conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (les étudiants ont vraisemblablement déjà rencontré cette conversion) avec éventuellement une reconversion dans le registre décimal à l'aide d'une division (cf. le contrat institutionnel de calcul (Bronner, 2005)) ;
- calcul correct à l'aide de valeurs approchées successives en utilisant implicitement la continuité de la somme et le fait que la somme de deux périodiques est périodique ;

[41] Cette section reprend pour l'essentiel le papier (Vivier, 2012).

- calculs à l'aide de valeurs approchées successives, sans aboutir à un résultat ou en donnant ce que Margolinas (1988) nomme une réponse *infinitésimale* (comme par exemple la somme $0,\overline{5}+0,\overline{7}=1,\overline{3}2$ effectuée par H).

Les dernières procédures sont vraisemblables, même à ce niveau (M2 enseignement des mathématiques) puisque les étudiants n'ont pas, ou très peu, travaillé avec ce type d'objets mathématiques et que le problème des retenues apparaît aux sommes 1 et 3. Les autres procédures qui consistent à ajouter séparément les parties entières et les périodes ne sont pas retenues pour la population étudiée vu le niveau d'étude mathématique – ce type de réponses est donné par des élèves de seconde en France (Vivier, 2011).

Les échanges à l'intérieur d'un groupe lors de la deuxième phase 2 doit permettre d'éliminer les réponses erronées. La consigne, en demandant une manière générale pour effectuer une somme en écriture décimale, demande de fait de formuler un algorithme et incite à donner le résultat final dans le registre décimal. Plusieurs choix sont alors possibles parmi les procédures exposées ci-dessus. En outre, la nécessité de rédiger un algorithme en vue d'une communication incite à formuler clairement et à valider les procédures envisagées. Les fractions peuvent constituer un élément de validation important et nous serons attentifs, dans les analyses a posteriori, à l'utilisation et au statut des fractions.

Dans cette phase 2, il est prévu que les trois éléments essentiels d'un algorithme de somme apparaissent globalement sur l'ensemble des groupes : les deux adaptations de format pour que les deux nombres aient des périodes de même taille (avec le PPCM) et débutent au même rang (en faisant des décalages) et le problème de la gestion de la retenue qui *sort* de la période. Bien qu'espéré, il n'est pas attendu qu'un groupe trouve un algorithme de manière complète. L'identification des trois problèmes provient de la phase d'action pourvu que les sommes testées soient suffisamment variées (les sommes proposées en phase 1 ne permettent pas de voir tous les problèmes). Or, les travaux d'un groupe peuvent reposer sur des implicites comme par exemple des périodes qui débutent juste après la virgule (sous une éventuelle influence des sommes proposées en phase 1). Vu le niveau mathématique des étudiants, il est attendu que les problèmes identifiés soient résolus sauf éventuellement la gestion de la retenue qui est plus délicate.

L'algorithme général de somme de deux rationnels en écriture décimale est l'objectif majeur de la phase 3 où il est prévu que, chaque groupe présente son travail. Ainsi, il est attendu que les éléments incontournables de l'algorithme apparus en phase 2 dans les groupes soient mutualisés pour ensuite construire, ensemble et guidé éventuellement par l'enseignant, un algorithme général.

5.3 Constitution des groupes : analyse de la phase de dévolution

À l'issue de la phase individuelle, quatre groupe de trois étudiants sont formés. Les douze étudiants sont nommés à l'aide d'une lettre (de A à L) et les groupes par les trois lettres désignant les étudiants (ABC, DEF, GHI et JKL). Les groupes ont été constitué dans un souci de mixité spatiale : lors de la phase individuelle, deux étudiants voisins ont pu s'influencer, aussi chaque groupe est constitué par 3 étudiants-professeurs dont aucun n'était voisin des deux autres. De ce fait, les groupes ne sont pas équivalents dans leur constitution comme on peut le constater avec la table 5.

	conversion et traitement dans le registre des fractions AVEC ou SANS reconversion dans le registre décimal	Calcul(s) avec un nombre FINI ou INDÉFINI de périodes	OK : a) et b) corrects et c) correct ou sans réponse NR : aucune réponse (a et b) INF : réponse infinitésimale
A		INDÉFINI	INF
B			autres problèmes
C	AVEC		OK
D		FINI	OK
E	AVEC		OK
F		INDÉFINI	OK
G	AVEC		OK
H			INF
I			OK
J		FINIS	NR
K	SANS		OK
L		FINIS	NR

Table 5 : constitution des groupes

Dans chaque groupe se trouve un étudiant qui a utilisé une conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (SANS reconversion pour le groupe JKL et AVEC reconversion pour les trois autres groupes) et dans chaque groupe se trouve au moins un étudiant qui a trouvé les bonnes sommes (codage OK). Toutefois, les groupes ABC et JKL semblent plus faibles que les deux autres puisqu'un seul étudiant donne les bonnes sommes (codage OK). Pour le groupe JKL, les étudiants J et L ne donnent pas de réponse (codage NR) et pour le groupe ABC, A donne une réponse infinitésimale (cf. figure 28) et B montre des problèmes de gestion de la retenue qui n'est pas comptabilisée à la partie entière et avec une inversion des chiffres de la période (cf. figures 29a et 29b).

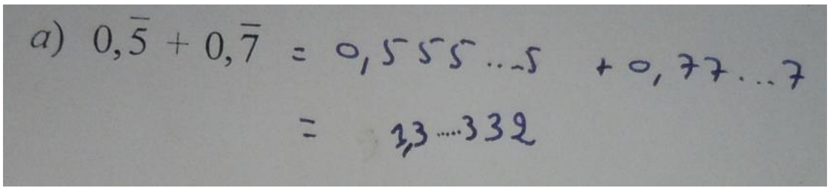


Figure 28 : réponse infinitésimale à la somme a) (production de A)

Figures 29a et 29b : problèmes de retenue et d'inversion de chiffres (productions de B)

En outre, le groupe DEF semble d'un meilleur niveau mathématique sur le sujet que les autres. En particulier, c'est dans ce groupe que se trouve les deux étudiants D et F qui effectuent les sommes correctement par des approximations (cf. figures 30a et 30b). Ces deux étudiants possèdent des technologies (au sens de Chevallard, 1999) sur la somme de deux nombres périodiques. Si on peut penser que la continuité de la somme est implicite, il semble clair (surtout pour F) que ces étudiants savent que la somme de deux périodiques set un nombre périodique.

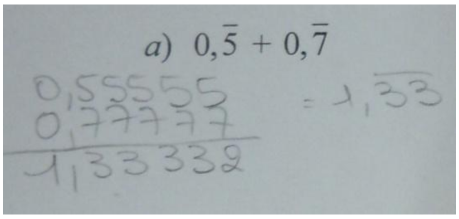


Figure 30a : somme a) par approximation (production de D)

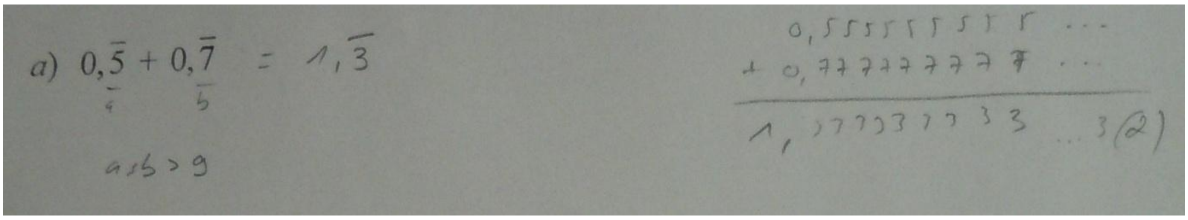


Figure 30b : somme a) par approximation (production de F)

Les étudiants se sont mis au travail sans aucun problème dans cette phase individuelle qui a parfaitement joué sont rôle de dévolution puisque l'investissement et l'intérêt n'ont pas faibli dans la phase 2.

5.4 Analyse des productions collectives

Comme prévu, le travail de groupe a permis d'éliminer rapidement toutes les erreurs apparues individuellement et les productions sont, globalement, toutes correctes. Il a fallu insister pour que les groupes se mettent à écrire. Il semble que les étudiants avaient beaucoup de mal à commencer une rédaction sur un sujet qui était en cours de constitution : sans doute voulaient ils écrire uniquement un texte sûr du point de vue du savoir mathématique en jeu. La rédaction s'est donc fortement accompagnée de justifications mathématiques : les phases de formulation et de validation ont largement été menées en parallèle.

	début période	taille période	retenue	fractions	décomposition des nombres
ABC		PPCM	report sur un exemple	conversion	
DEF	Totalement traité	PPCM	problème identifié	conversion (validation)	entier + partie décimale + partie *périodique*
GHI	partiel : rangs égaux	PPCM		conversion	décimal + partie *périodique*
JKL				conversion	décimal + partie *périodique*

Table 6 : production des groupes

Le groupe JKL décompose chacun des deux nombres à sommer en somme d'un décimal et d'un nombre de la forme $0,0\ldots0\overline{\pi}$ où π est une période. Puis les étudiants de ce groupe identifient le problème qui consiste en la somme des deux parties *périodiques*. Pour effectuer cette somme, ils proposent de les convertir en fraction (par une technique proche de la mise en équation) puis de reconvertir en écriture décimale la somme déterminée sous forme de fraction.

Le groupe ABC a une production proche du groupe JKL à deux différences près : la conversion écriture décimale → écriture fractionnaire est effectuée sur la *totalité* du nombre et non pas seulement sur la partie *périodique* $0{,}0\dots0\overline{\pi}$; le groupe ABC identifie la taille de la période de la somme comme étant le PPCM des tailles des périodes des deux nombres à sommer (on ne voit pas comment ils ont trouvé ce résultat, peut-être de manière empirique). L'étudiante B, en fin de phase 2, a fait une remarque essentielle que le groupe n'a malheureusement pas pu exploiter faute de temps. La remarque concerne le report de la retenue (cf. figure 31) : lorsque l'on prend deux nombres de la forme $0,\overline{\pi}$ et que leur somme dépasse 1 (ce qui correspond à un cas particulier de la somme de deux périodes de taille *l* lorsque celle-ci est supérieure à 10^l) alors la somme s'obtient comme si on sommait deux décimaux (avec une éventuelle mise au format de la taille des périodes en prenant le PPCM des tailles) et ensuite on ajoute 1 à la période obtenue. Cette remarque fait que ce groupe est très proche d'un algorithme général car ils ont de fait un algorithme pour faire une somme du type $0,\overline{\pi} + 0,\overline{\pi'}$: 1) écrire les nombres avec des périodes de même taille en utilisant le PPCM ; 2) faire la somme comme s'il s'agissait de deux nombres décimaux ; 3) ajouter 1 à la période si la somme dépasse 1. Cet algorithme s'étend rapidement et simplement à la somme de deux rationnels pourvu que les périodes débutent au même rang (le groupe n'a pas identifié ce problème). Ils n'ont pas trouvé de justification à cette remarque qui est restée contextualisée à un exemple.

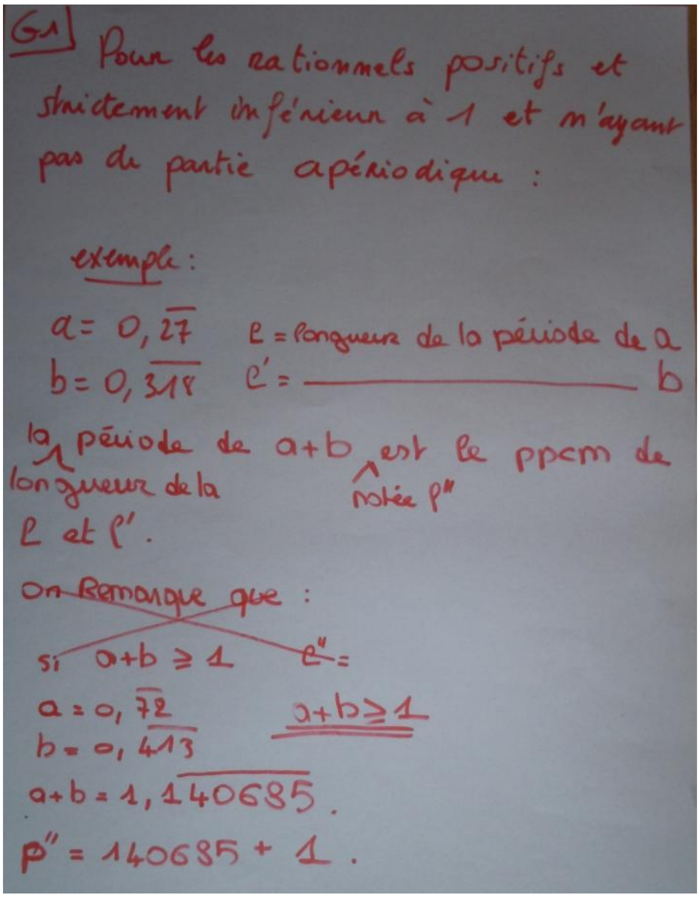


Figure 31 : la remarque du groupe ABC sur les retenues

Le groupe GHI, comme le groupe JKL, décompose un nombre en somme d'un décimal et d'une partie *périodique* (il y a un problème de notation car on ne sait pas combien de 0 il faut écrire, cf. figure 32). Les étudiants de ce groupe identifient le rôle joué par le PPCM des tailles des périodes et écrivent les parties *périodiques* pour qu'elles aient la même taille puis convertissent ces parties *périodiques* sous forme de fraction pour effectuer la somme. L'algorithme n'est présenté que pour deux nombres dont les périodes commence juste après la virgule. L'exemple traité montre qu'ils envisagent de reconvertir les nombres dans le système décimal. Le problème du début des périodes est partiellement identifié car, implicitement, ils considèrent que le rang de début de période est le même pour les deux nombres. Ils résolvent alors le problème en se ramenant au cas précédent en multipliant les deux nombres par une même puissance de 10.

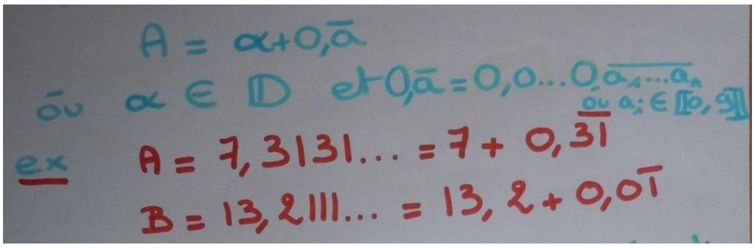
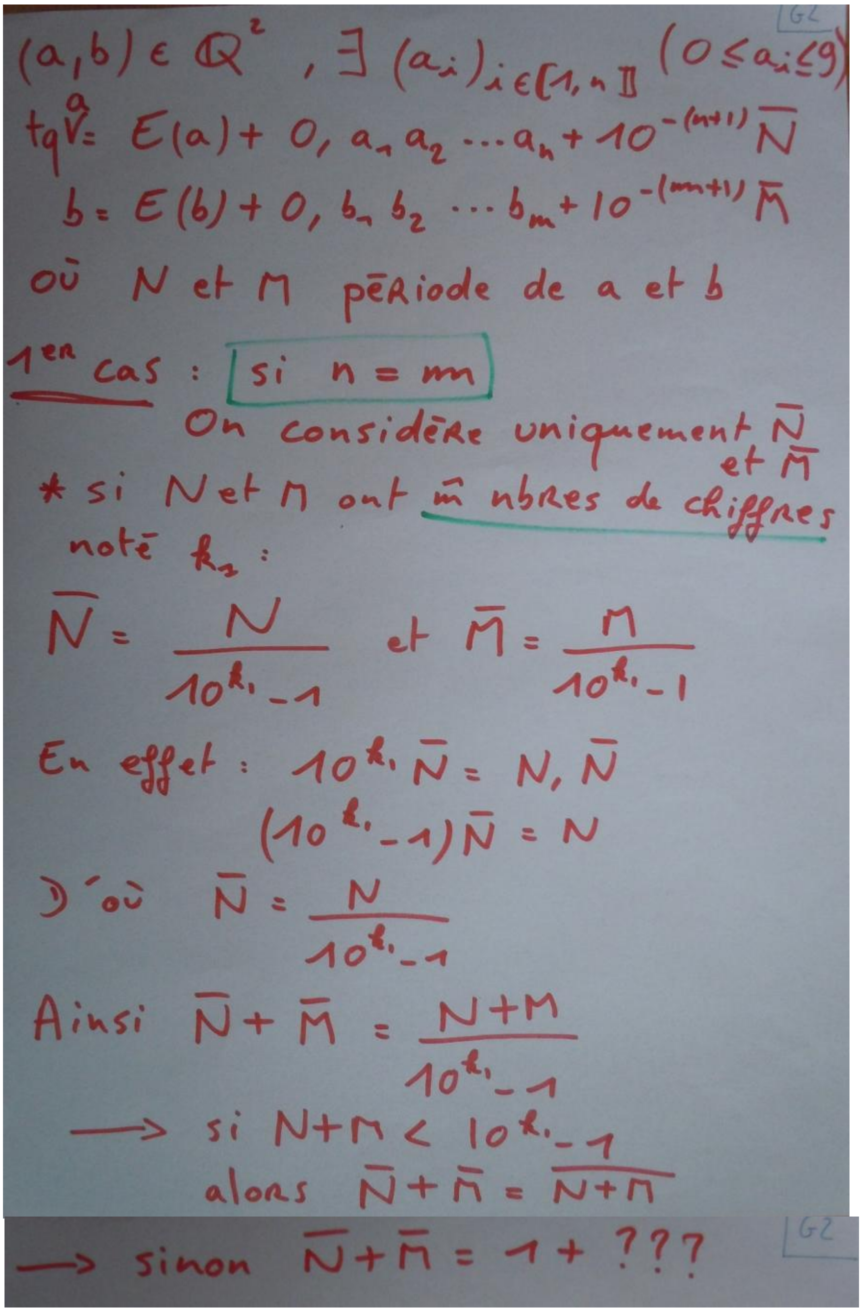


Figure 32 : imprécision dans la décomposition (production de GHI)

Le groupe DEF décompose également les nombres mais en trois parties : la partie entière, une partie décimale non périodique et une partie *périodique*. Les étudiants de ce groupe ont identifié le problème de la taille des périodes et, même s'ils ne le disent pas explicitement, ils résolvent le problème à l'aide du PPCM (sur un exemple avec les tailles 3 et 2). Le cas de deux nombres dont les périodes ne débutent pas au même rang est parfaitement traité et ils écrivent : « on complète avec les chiffres de la période (en respectant la périodicité restante) ». Ces deux traitements, pour la taille et le rang de début des périodes, sont envisagés successivement pour compléter leur première approche relatif au cas où les deux nombres ont des périodes de taille identique et qui débutent au même rang. Cela leur permet d'identifier, sans le résoudre, le problème de la retenue. Ce groupe a une position plus avancé que les autres dans le sens où il n'y a pas de focalisation sur un calcul dans le registre des fractions. S'il y a bien une conversion dans le registre fractionnaire, l'objectif est principalement d'identifier la nouvelle période. Plus précisément, ces trois étudiants considèrent les périodes comme des objets que l'on peut sommer (figure 33). Les fractions servent à définir cette somme, mais l'idée est bien d'obtenir une somme de deux périodes de même taille (cf. le groupe des périodes, section 4.3.1). Ils identifient le problème de la retenue mais, bien que la solution soit proche, il n'est pas résolu.

Pour reprendre les termes de la théorie APOS, la période est un objet émergeant qui encapsule le processus (cf. section 2.2).



G2

$(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $\exists\, (a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ $(0 \leq a_i \leq 9)$

tq $a = E(a) + 0,a_1 a_2 \ldots a_n + 10^{-(n+1)}\,\overline{N}$

$b = E(b) + 0,b_1 b_2 \ldots b_m + 10^{-(m+1)}\,\overline{M}$

où N et M période de a et b

1er cas : $\boxed{\text{si } n = m}$

On considère uniquement $\overline{N}$ et $\overline{M}$

* si N et M ont m̂ nbres de chiffres noté k_1 :

$$\overline{N} = \frac{N}{10^{k_1}-1} \quad \text{et} \quad \overline{M} = \frac{M}{10^{k_1}-1}$$

En effet : $10^{k_1}\,\overline{N} = N,\overline{N}$

$(10^{k_1}-1)\,\overline{N} = N$

D'où $\overline{N} = \dfrac{N}{10^{k_1}-1}$

Ainsi $\overline{N} + \overline{M} = \dfrac{N+M}{10^{k_1}-1}$

$\longrightarrow$ si $N+M < 10^{k_1}-1$

alors $\overline{N} + \overline{M} = \overline{N+M}$

$\longrightarrow$ sinon $\overline{N} + \overline{M} = 1 + ???$

G2

Figure 33 : somme des périodes (production du groupe DEF)

5.5 Production de la ressource visée

Les présentations en classe entière n'ont pas produit l'effet escompté. Les interactions entre groupe ont été peu nombreuses et la synthèse s'est avérée être plus difficile que prévue (plusieurs éléments à prendre en compte, homogénéiser les points de vue, etc.). De plus, le temps manquait car la situation proposée s'insérait dans un dispositif de formation de 3h et il fallait conserver au moins 15 minutes à la fin pour procéder à un bilan[42] de la séance (en outre, une durée non négligeable avaient été consacrée en début de séance à régler des problèmes d'emploi du temps).

[42] Il s'agissait de montrer la productivité et la dialectique des situations adidactiques d'action, de formulation et de validation.

Les productions des quatre groupes ont finalement été numérisées puis envoyées aux étudiants avec pour consigne de s'en inspirer pour produire un algorithme de somme pour la semaine suivante. C'est l'étudiante H qui présente son travail de synthèse à l'ensemble de la classe. Voici son algorithme :

1. Multiplier les deux nombres par 10^N pour faire débuter les périodes directement après la virgule (N est le maximum des rangs de début de période des deux nombres). Les chiffres des périodes des deux nombres subissent éventuellement une permutation, mais les tailles sont inchangées.
2. On utilise le PPCM des tailles des périodes pour avoir deux nombres avec des périodes de même taille.
3. La somme est écrite sous forme fractionnaire avec notamment la somme des deux périodes au numérateur et $10^{ppcm}-1$ au dénominateur.

Le formateur procède alors à quelques précisions, ajustements et simplifications notamment pour, à partir de cette formule :

- montrer que la multiplication par 10^N pour ensuite faire une multiplication par 10^{-N} peuvent être évitées par un travail direct sur l'écriture décimale ;
- montrer comment gérer la retenue pour aboutir à un algorithme de somme en écriture décimale sans utiliser les fractions.

Cela montre deux choses : d'une part, et comme on pouvait s'y attendre, la gestion de la retenue n'est pas triviale et d'autre part les fractions constituent un registre qui a tendance à supplanter le registre de l'écriture décimale dès que l'on traite des nombres rationnels.

5.6 Conclusion de l'étude

Au vu des analyses précédentes, et malgré le léger problème de temps, l'objectif est atteint : il est possible de faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants-professeurs. La recherche mathématique a donc permis l'élaboration d'une ressource, ici un algorithme, qui peut être reconstruite par l'activité proposée. Cette reconstruction se distingue cependant de la situation vécue par le chercheur en mathématique puisque les étudiants savent que le savoir existe – il est détenu en particulier par le formateur.

Pour un enseignant, l'existence de l'algorithme de somme possède un intérêt car il permet de définir par des sommes réitérées la multiplication d'un rationnel en écriture décimale et de justifier les opérations qui sont utilisées dans la conversion du registre décimal dans le registre fractionnaire. Souvent, les enseignants sont mal à l'aise avec la technique qui consiste à poser, par exemple, a=0,999… pour ensuite par une multiplication par 10 et une soustraction aboutir à a=1. Ils sont mal à l'aise car ils ont conscience du fait qu'il y a un vide mathématique et que les opérations utilisées, si simples soient-elles, manquent d'appui. Un algorithme tel celui présenté ici permet de constituer une ressource pour l'enseignant dans le but de soutenir mathématiquement son activité d'enseignant – sans forcément que cela soit visible pour l'élève.

6. La première étude

Je reprends ici quelques implications provenant d'une première étude sur le sujet des rationnels en écriture décimale (Vivier, 2011). Un test a été proposé, avec des adaptations, à 113 élèves de seconde et 14 étudiants de mathématiques en première année d'université.

6.1 Utilisation de l'algorithme de somme

L'application de l'algorithme de somme (cf. section 4.3.3) est possible en seconde, avec entre 50% et 70% de réussite dans sa réalisation, selon que l'on impose le marquage de la période ou non. Mais seul 12% d'élèves sont capables d'avancer une justification qui reste souvent rudimentaire avec une simple évocation des « retenues ». En revanche, en première année d'université, l'algorithme et sa justification ne semble pas poser de problème aux étudiants. Cela est confirmé par l'étude de (Rittaud & Vivier, 2014).

On peut alors envisager un usage de l'algorithme à l'université pour des étudiants de mathématiques mais pas pour des élèves de seconde à cause de la faible compréhension. Est-il envisageable de cibler un public de lycéens scientifiques (série S) ? On peut le penser, mais cela reste à tester. Il semble en outre que cet algorithme soit loin des possibilités conceptuelles des publics non scientifiques : des étudiants de fin de licence qui se destinent au professorat des écoles présentent les mêmes difficultés conceptuelles que les élèves de seconde avec une forte préférence pour l'utilisation de la période-processus et un refus de la considérer comme un objet, ce qui est nécessaire pour l'algorithme (analyse en cours).

Il est à noter également que, dans cette première étude, nous avions proposé un algorithme en deux temps comme cela est présenté mathématiquement pour faire apparaître la structure des périodes (cf. la section 4.3). Mais certains étudiants ont préféré une présentation plus proche de l'algorithme de somme de deux décimaux. Ils adaptent alors l'algorithme comme U9 (figure 34) qui ajoute en plus des flèches, ce qui constitue un indice fort de la compréhension de l'algorithme.

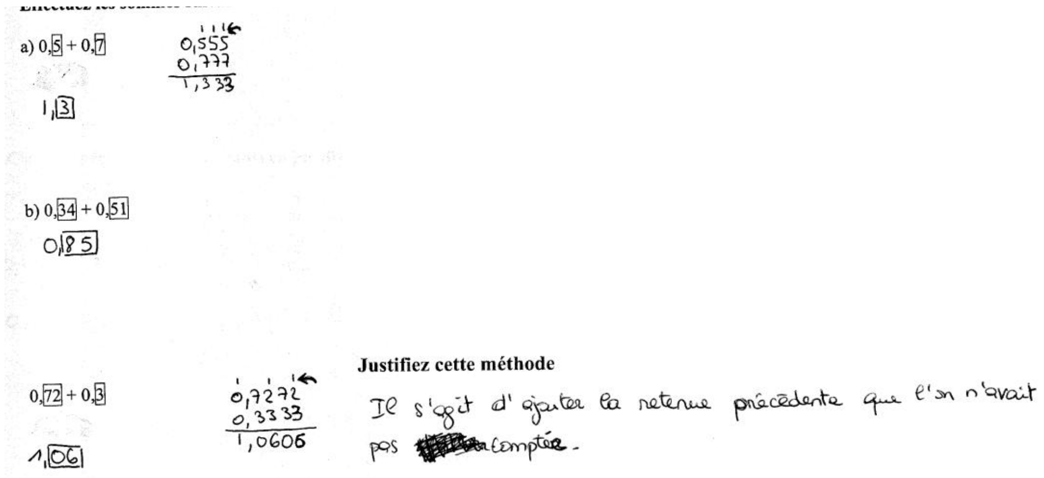


Figure 34 : Production de l'étudiant U9, niveau L1

6.2 La période : un processus à encapsuler

Les élèves de seconde ont été répartis en deux groupes avec deux tests. Les questions étaient identiques et de même difficulté mais différaient par la manière d'afficher la période : des points de suspension pour le test A, comme 0,272727…, et avec un cadre pour le test B, comme 0,$\boxed{27}$. Le test A propose ainsi la période comme un processus alors que le test B la propose comme un objet (cf. la théorie APOS, (Arnon et al., 2014)).

Globalement, la réussite est meilleure, voire largement supérieure, au test A qu'au test B pour les items mettant en jeu les rationnels en écriture décimale. Plus spécifiquement :

- les réponses concaténant les périodes (0,$\boxed{5}$+0,$\boxed{7}$=0,$\boxed{57}$) n'apparaissent pas dans le test A et concerne 9% des élèves du test B ;
- la notation « objet » renforce la séparation de deux entiers par la virgule, les réponses du type 0,$\boxed{5}$+0,$\boxed{7}$=0,$\boxed{12}$ apparaît dans 25% des cas au test A contre 47% au test B ;
- la gestion des retenues dans l'algorithme est plus difficile avec le test B ;
- La comparaison de deux rationnels en écriture décimale est *évidente* au test A (79% de réussite) alors qu'elle demande de désencapsuler la période au test B (39% de réussite) – il est à noter que les réussites aux comparaisons de décimaux et de fractions sont similaires dans les deux tests.

Ainsi, la perception de la période comme un objet est difficile pour la plupart des élèves de seconde, même si un nombre non négligeable d'élèves du test B en sont au *stage* de l'objet, avec donc un passage entre un infini potentiel et un infini actuel. On trouvera en figures 35 et 36 des exemples d'interprétations de la période.

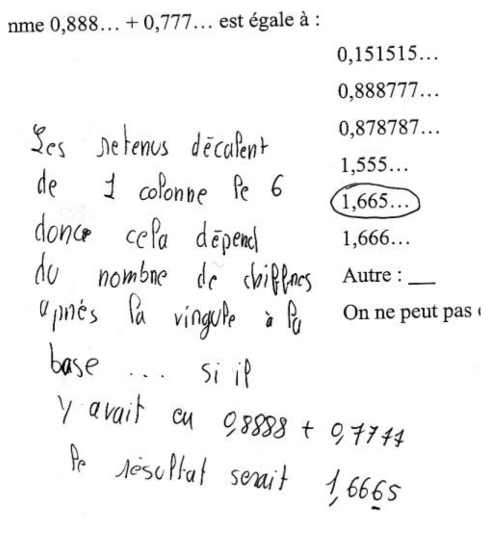
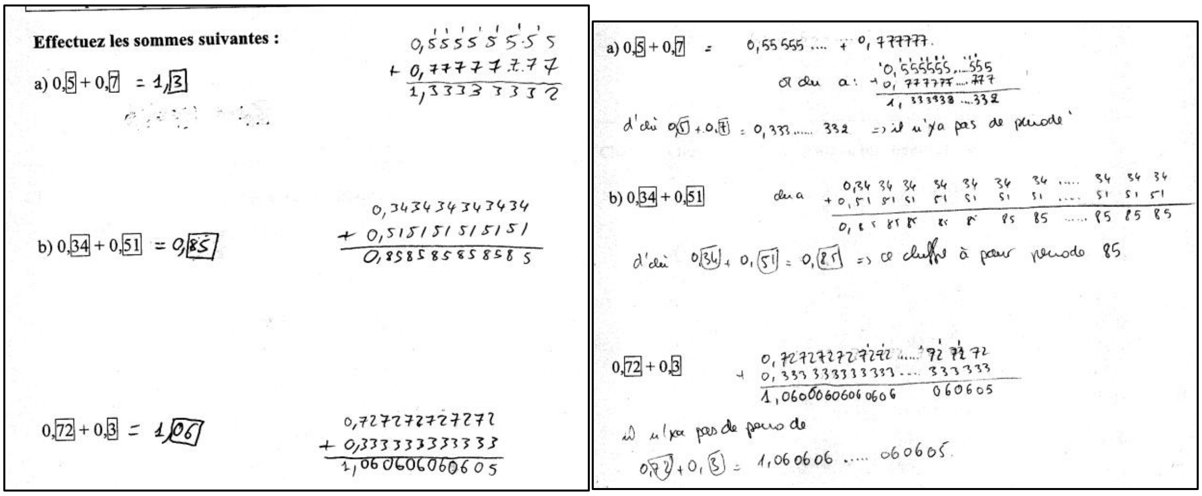


Figure 35 : Compréhension de la période par l'élève de seconde B17



Figures 36 : Interprétations par des étudiants de L1, U4 correcte (36a) et U10 incorrecte (36b)

Rarement, on trouve l'utilisation d'un autre registre, comme le registre de la droite (figure 37) :

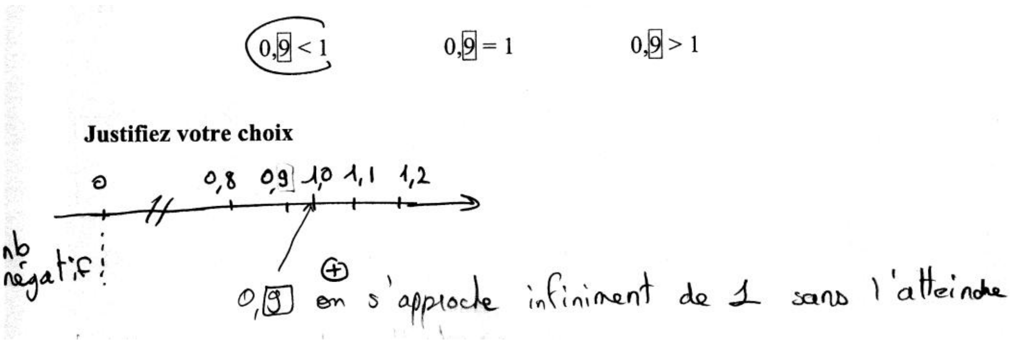
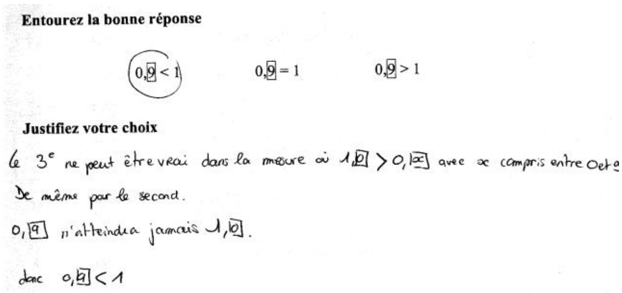


Figure 37 : La droite numérique par l'étudiant de L1, U7 (conception processus)

Néanmoins, la constitution de la période comme objet, puis du nombre comme objet, ne présume en rien du système mathématique qui est sous-jacent aux conceptions des étudiants comme on peut le constater avec U2, plus proche d'une conception non standard des nombres réels (figure 16 de la section 2) :

6.3 Quelques questions de logique

Dans cette étude, on remarque également des contradictions mathématiques propres à certains étudiants. Ces contradictions peuvent être explicites (figure 38) ou implicites (figure 39).



Entourez la bonne réponse

$0,\boxed{9} < 1$ $\quad$ $0,\boxed{9} = 1$ $\quad$ $0,\boxed{9} > 1$

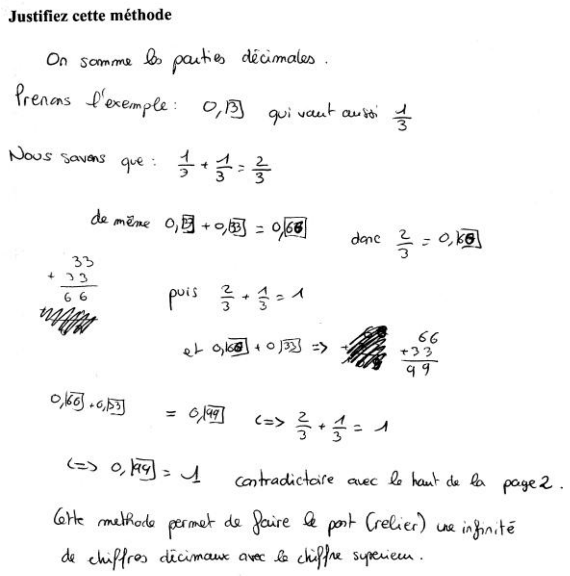
Justifiez votre choix

Le 3e ne peut être vrai dans la mesure où $1,\boxed{0} > 0,\boxed{x}$ avec x compris entre 0 et 9

De même par le second.

$0,\boxed{9}$ n'atteindra jamais $1,\boxed{0}$.

donc $0,\boxed{9} < 1$



Justifiez cette méthode

On somme les parties décimales.

Prenons l'exemple : $0,\boxed{3}$ qui vaut aussi $\frac{1}{3}$

Nous savons que : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

de même $0,\boxed{3} + 0,\boxed{3} = 0,\boxed{6}$ donc $\frac{2}{3} = 0,\boxed{6}$

$33 + 33 = 66$

puis $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

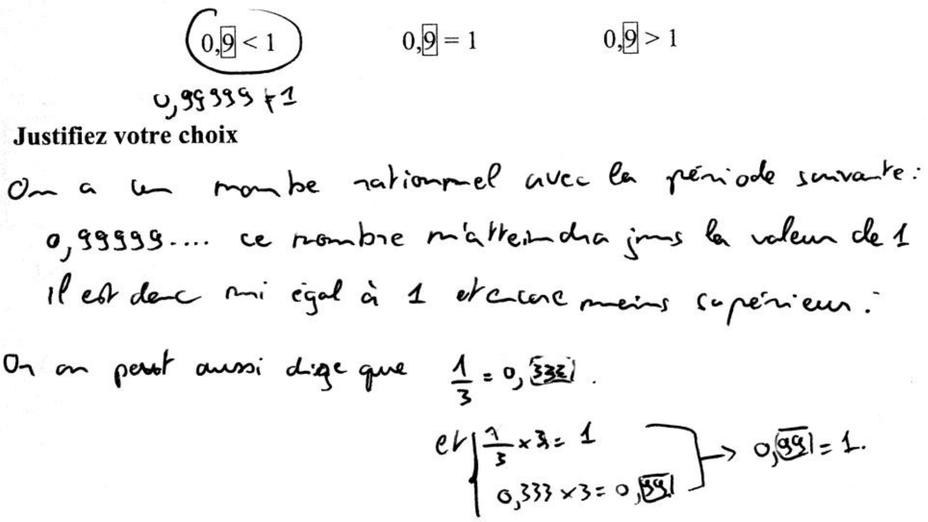
et $0,\boxed{6} + 0,\boxed{3} \Rightarrow 66 + 33 = 99$

$0,\boxed{6} + 0,\boxed{3} = 0,\boxed{9} \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\Leftrightarrow 0,\boxed{9} = 1$ contradictoire avec le haut de la page 2.

Cette méthode permet de faire le pont (relier) une infinité de chiffres décimaux avec le chiffre supérieur.

Figure 38a et 38b : Contradiction explicite de U1 (« faire le pont » = boucher les trous ?)



$0,\boxed{9} < 1$ $\quad$ $0,\boxed{9} = 1$ $\quad$ $0,\boxed{9} > 1$

$0,99999 \neq 1$

Justifiez votre choix

On a un nombre rationnel avec la période suivante :

0,99999.... ce nombre n'atteindra jamais la valeur de 1

il est donc ni égal à 1 et encore moins supérieur.

On on peut aussi dire que $\frac{1}{3} = 0,\boxed{333}$.

et $\left.\begin{cases} \frac{1}{3} \times 3 = 1 \\ 0,333 \times 3 = 0,\boxed{999} \end{cases}\right\} \rightarrow 0,\boxed{999} = 1.$

Figure 39 : Contradiction de U4

Cela rejoint les questions sur la vérité et la validité des preuves à propos de la relation entre 0,999… et 1 de Njomgang Ngansop & Durand-Guerrier (2014). Elles précisent que cette relation est un bon candidat pour créer un débat permettant de discuter les questions de vérité et de validité.

7. Une interprétation par la TAD[43]

Nous nous intéressons ici à deux types de tâches de bases sur les nombres, la comparaison et la somme, en les spécifiant aux écritures décimales périodiques.

7.1 Les praxis de comparaison

Comparer deux nombres en écriture décimale, type de tâche $T_<$, est simple, il suffit de comparer chiffre à chiffre de gauche à droite. Il s'agit d'une technique $\tau_<$ qui est une généralisation de la comparaison de deux décimaux en écriture décimale. Il n'y a pas de difficulté technique mais la technique $\tau_<$ s'applique aux écritures sémiotiques : ces écritures sont-elles des représentations de nombres rationnels ? sommes-nous bien en train de comparer deux nombres rationnels ?

En effet, comparer $0,\overline{9}$ et 1 par cette technique $\tau_<$ aboutit à $0,\overline{9}$<1 alors que dans le corps **Q** il est nécessaire d'avoir égalité. Nous identifions donc une nouvelle technique $\tau'_<$ proche de $\tau_<$ sauf en ce qui concerne les décimaux. Cela entraîne que, du type de tâche $T_<$, deux praxis relatives à deux types différents d'objets mathématiques peuvent émerger bien que les écritures sémiotiques soient identiques : $[T_<,\tau_<]_{rd}$ pour les développement décimaux périodiques et $[T_<,\tau'_<]_{\mathbf{Q}}$ pour les nombres rationnels (il n'est ici pas question de fraction).

Cela peut entraîner des confusions car tout est identique du point de vue sémiotique, la différence n'apparaissant que dans l'interprétation de ces écritures. De plus, ces deux techniques sont justifiées par la même technologie, θ_{sbd}, relative au système en base dix. Toutefois, $\tau'_<$ n'est pas entièrement justifiée car il manque l'égalité relative à la double représentation des décimaux. Nous avons de ce fait introduit une technologie, $\theta_=$, que nous avons qualifiée de *cachée*. $\theta_=$ ne peut apparaître avec la seule comparaison et il n'y a aucune indication sur sa nature, sur sa provenance. Bien sûr, on peut la justifier topologiquement (voir la citation de Dubinsky et al. (2005) en section 2.2 et la justification de Marsh (1742) en figure 27, section 4.6) ou par un calcul, en s'appuyant sur une théorie sur les nombres réels ou rationnels.

Après avoir introduit de nouveaux objets, qui étendent des objets déjà existant, il est naturel de désirer conserver un maximum de propriétés et surtout des propriétés sont privilégiées dans ce processus. Regardons l'extension du système des entiers naturels aux entiers relatifs. Dans **Z**, c'est surtout la multiplication, et le signe du produit, qui pose problème (Glaeser, 1981). Mais les conséquences ne sont pas les mêmes que dans la situation qui nous occupe avec les rationnels. Il n'y a pas d'opposition avec une connaissance ancienne lorsque, voulant conserver les propriétés de la multiplication, on affirme que, par exemple, (-2)×(-3)=(+6). Mais dans notre cas ce n'est pas aussi simple, car il y a une opposition directe et frontale avec une connaissance ancienne qui donne naissance à $\tau_<$. Et que pensera un étudiant à qui on montre l'égalité $0,\overline{9}$=1 ? Ne sera-t-il pas tenter de, malgré tout, conserver ses connaissances anciennes qui ont fait leurs preuves ? Ainsi, même si des calculs montrent le besoin de $\theta_=$, il apparaît ici une contradiction avec les connaissances anciennes sans apporter aucun explication. On peut penser que c'est bien là le problème, les étudiants préférant la contradiction, comprenant la validité de la preuve $0,\overline{9}$=1 mais tout en conservant l'inégalité (Njomgang Ngansop & Durand-Guerrier, 2014).

[43] Cette section reprend essentiellement et de manière synthétique l'étude de (Rittaud & Vivier, 2014).

7.2 Intérêt des praxis de somme

Nous pensons donc qu'un autre type de tâche est nécessaire pour montrer le besoin de $\theta_=$ et nous pensons que T_+, faire la somme de deux écritures décimales périodiques, possède un potentiel pour cela.

Nous avons vu plusieurs techniques pour effectuer T_+ (voir section 2.3) mais, excepté celle utilisant l'algorithme, elles font toutes référence à une théorie sur les nombres rationnels ou réels, $\Theta_{\mathbf{Q}}$ ou $\Theta_{\mathbf{R}}$, qui doivent ainsi être acceptée sans justification. Nous interprétons ici l'algorithme de somme que nous avons défini comme une technique τ_+ relative à T_+. Cette technique peut être justifiée, et les étudiants le font effectivement, par une technologie relative au système décimal, θ_{sbd} – cette justification est une différence notable avec les autres techniques de somme.

Nous commençons ainsi à construire une praxéologie $[T_<,T_+,\tau_<,\tau_+,\theta_{sbd}]$ relative au registre R_d des écritures décimales périodiques. Puis, nous obtenons rapidement pour un élément périodique a s'écrivant avec une période qui n'est pas $\overline{0}$: $a+0,\overline{9} = a+1$. Mais nous n'avons pas la *règle* de simplification usuelle pour déduire de $a+c = b+c$ l'égalité $a = b$. Si nous voulons conserver cette propriété algébrique, il est nécessaire d'identifier $0,\overline{9}$ et 1. C'est le moment du choix de $\theta_=$. On l'accepte ou non ? Cette alternative est directement liée au choix de l'organisation mathématique pour les deux types de tâches $T_<$ et T_+ et aussi aux objets en jeu :

- $OM_{\mathbf{Q}}=[T_<,T_+,\tau'_<,\tau_+,\theta_{sbd},\theta_=,\Theta_{\mathbf{Q}}]$ qui peut être étendu avec les autres opérations, dans R_d et R_f, et qui s'appuie sur une théorie $\Theta_{\mathbf{Q}}$ des nombres rationnels.
- $OM_m=[T_<,T_+,\tau_<,\tau_+,\theta_{sbd},\Theta_m]$ qui ne peut pas être étendu à d'autres opérations. Nous obtenons seulement un monoïde non régulier (ce n'est pas un semi-groupe).

7.3 Le test diagnostic individuel

Une expérimentation a été menée avec 29 étudiants de niveau L1 sur deux jours : la première journée un test diagnostic et le lendemain un travail de groupe autour de l'algorithme de somme et de l'équation $a+0,\overline{9} = a+1$.

L'utilisation et la compréhension du codage des rationnels avec la période ne pose pas de problème sauf à 6 étudiants qui ont eu beaucoup de difficulté avec le test. La comparaison est très bien réussi dans les cas non problématiques (pour lesquels $\tau_<$ et $\tau'_<$ coïncident).

Pour la comparaison entre $0,\overline{9}$ et 1, seuls 8 étudiants avancent l'égalité contre 21 pour l'inégalité. Et parmi les 8, 2 disent simplement que ce cas a été vu auparavant, un annonce que ce cas est « étrange » et une autre qui précise qu'il y a égalité parce que « ce n'est pas un nombre réel » mais annonçant l'inégalité par l'usage de $\tau_<$. On sent bien, avec cette dernière étudiante, la distance entre les deux organisations mathématiques $OM_{\mathbf{Q}}$ et OM_m.

7 étudiants concluent que $2 – 1,\overline{9}=0$, ils font partie des huit qui ont déclaré que $0,\overline{9}=1$. On relève pour ce calcul 11 étudiants qui donnent $0,\overline{0}1$, 6 qui donnent $0,\overline{1}$, 2 qui donnent 0,0001 (avec un nombre fini de 0) et un qui donne $0,\overline{10}$ comme réponse. Aucun étudiant affirmant $0,\overline{9}=1$ n'écrit une réponse *infinitésimale* (Margolinas, 1988) comme $0,\overline{0}1$. Plus généralement, cette égalité semble être un indice important des connaissances sur les rationnels en écriture décimale relatives à $OM_{\mathbf{Q}}$. Même si

les écritures sont écrites en extension pour les traitements, l'interprétation et le contrôle du résultat semble être une différence notable entre les deux organisations mathématiques, au-delà de la compréhension de $\theta_=$.

Pour conclure cette section, on peut affirmer que, malgré les rencontres dans l'enseignement secondaire et universitaire des rationnels en écriture décimale, une majorité d'étudiants ne sont pas d'accord avec l'égalité $0,\overline{9}=1$ et environ la moitié d'entre eux écrivent des réponses infinitésimales pour une somme. D'autre part, cette égalité joue bien le rôle d'emblème, car étant à la base de $OM_{\mathbf{Q}}$, elle permet de meilleurs contrôles des techniques effectuées que OM_m, même dans le cas de tâches n'impliquant pas $\theta_=$.

7.4 Découvrir la nécessité de l'égalité, en groupe

Il est aisé de voir, avec cet algorithme, que si *a* est un nombre qui a une période non égale à zéro alors $0,\overline{9} + a = 1 + a$ (Richman, 1999 ; voir sections 4.3.4). L'idée est de partir de $0,\overline{9}+a = 1+a$ pour faire émerger une opposition visuel/algèbre. **On effectue** $0,\overline{9} + 0,\overline{5}$ et **on voit** $1 + 0,\overline{5}$. Visuellement on voit deux résultats différents, mais forcément égaux, et on voudrait bien pouvoir simplifier algébriquement mais cela entraînerait l'égalité $0,\overline{9}=1$ visuellement difficile à tenir.

Cela a été testé en première année d'université (Rittaud et Vivier, 2014). l'opposition émerge effectivement, mais pas l'égalité. Cela est sans doute dû à la faible durée (une seule séance de travail sur l'algorithme) et aussi à l'enseignement de l'égalité au semestre 1 qui a sans doute biaisé les réponses.

Conclusion de la partie 2

Avec cette partie, on sent la complexité des notions abordées et également la complexité des moyens que l'on peut mettre en œuvre pour travailler ces notions et affronter certains obstacles comme l'égalité entre $0,\overline{9}$ et 1. Il me semble important de traiter ce nœud afin de ne pas laisser les élèves construire des conceptions inadéquates avec la notion de nombre réel et l'analyse. Mais il est sans doute nécessaire d'aborder le problème de plusieurs points de vue, dans des cadres différents, et de prendre le temps. Plusieurs années sont vraisemblablement nécessaires pour aboutir à une compréhension plus en profondeur que la simple répétition de ce qu'a fait l'enseignant (c'est ce que l'on rencontre, au mieux, chez les étudiants de première année d'université).

Dans cette partie, la plus longue de ce texte, j'ai développé un point de vue original qui s'appuie sur une recherche en mathématique. Les liens étroits entre recherche en didactique des mathématiques et recherche en mathématiques, qui permettent de faire émerger des idées novatrices, sont importants à mes yeux. Dans le cas présent, la collaboration avec Benoît Rittaud sur les deux disciplines a également permis de retrouver des ouvrages perdus dans l'histoire des mathématiques (pourtant pas si lointain) – j'emploie parfois le terme « exhumer » car c'est l'impression que cela me donne, presque avec le sens de « redonner vie ».

Il me semble que l'intérêt des recherches menées est évidente, mais la question qui se pose à la suite de ces études est : des algorithmes pour les rationnels en écritures décimales pour faire quoi ? pour quel public ?

D'une part, et comme je l'ai dit, je pense que ce peut-être intéressant pour un enseignant du secondaire de savoir que les calculs qu'il effectue pour *montrer* que $0,\overline{9}=1$ sont tout à fait justifiables en mathématiques et qu'il peut donc les mener sans arrière pensée (c'est souvent comme cela dans l'enseignement secondaire, mais précisément pas pour ces calculs sur les écritures décimales illimitées). D'autre part, cela donne un moyen supplémentaire de travailler sur les décimaux périodiques afin d'essayer de faire des écritures décimales illimitées des nombres à part entière, et donc de s'approcher de **R**. S'appuyant sur les algorithmes définis ci-dessus, et plus spécifiquement l'algorithme de somme, deux recherches peuvent être envisagées dans la continuité, et aboutir à l'élaboration d'ingénieries didactiques pour lesquelles des jalons importants ont été posés :

- La première concerne l'opposition entre les types de tâches de comparaison et de somme aboutissant à l'équation $0,\overline{9} + a = 1 + a$. Des études supplémentaires prenant en compte de manière précise les variables, notamment pour contrôler la durée de travail, sont en préparation.
- Avec des étudiants-professeurs du premier degré, en s'appuyant sur (Nikolantonakis & Vivier, 2013), on voudrait faire travailler un système de base usuelle (car cela est travaillé en formation initiale) et pousser l'étude vers les rationnels avec les quatre opérations et la comparaison. Une question que nous souhaitons tester est, pour la base six : est-ce que 0,555…=1 est plus simple à accepter ? On peut en effet penser que le poids des connaissances anciennes sera moindre.

PARTIE 3 :

LES RECHERCHES SUR LES NOMBRES RÉELS[44]

Introduction

Nous abordons ici la topologie de **R** dans sa généralité avec notamment les notions de nombre réel, nombre rationnel et irrationnel, décimaux et idécimaux, droite numérique, infini, suite, limite, borne supérieure,... Le rôle de l'égalité 0,999…=1, que l'on peut voir comme constitutif de l'ensemble des réels, fera l'objet d'une discussion particulière. Il est à noter que cela dépasse le seul point de vue numérique et concerne aussi l'analyse. Dans sa thèse, Bergé pointe la complétude de **R** comme un élément essentiel et central de la transition entre le calculus et l'analyse (Bergé, 2008).

Comme Bergé (2010) l'affirme, les nombres réels font l'objet de peu de travaux de recherche, hormis ceux sur la distinction rationnel/irrationnel pouvant inclure également des questions relatives aux ensembles de nombres classiques (Fishbein et al. 1995, Zachariades et al. 2013, Sirotic et Zazkis 2007a, Zazkis et Sirotic 2010, Voskoglou 2013). Au-delà de la distinction rationnel/irrationnel, ces études permettent malgré tout de mettre en évidence l'importance des changements de registres de représentation (Duval, 1995, 2006) dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres réels. Le thème des développements décimaux illimités, qui fait l'objet d'une seconde partie, est également abordé en didactique des mathématiques et a fait l'objet de nombreuses, et parfois anciennes, recherches, avec notamment une focalisation sur l'égalité entre 0,999… et 1.

1. Rationnels et irrationnels

Dans les recherches en didactique sur les nombres réels, on relève un intérêt pour la distinction rationnel/irrationnel pouvant inclure également des questions relatives aux ensembles de nombres classiques (**N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**). Est-ce une tradition dans la manière de percevoir les nombres réels ? Une tradition dont on pourrait voir une trace lorsque les enseignants, s'appuyant sur les manuels, disent à leurs élèves : les réels sont les rationnels et les irrationnels – ce qui ne définit en rien les irrationnels. Larguier (2012) identifie la recherche de la nature d'un nombre[45] comme une tâche emblématique du début du lycée (grade 10) en France. Elle associe directement cette question au problème de la recherche d'une *bonne* écriture pour un nombre. Toutefois, comme je le précise dans (Vivier 2008) pour le cas de l'enseignement secondaire en France, la question de l'écriture reste en retrait et les tâches sur la nature d'un nombre est plus proche d'une tradition, une *doxa*, que d'un réel problème mathématique.

Fishbein et al. (1995) avaient identifié a priori deux obstacles pouvant expliquer la difficulté dans la distinction rationnel/irrationnel : l'incommensurabilité entre deux grandeurs et les *trous* de l'ensemble des rationnels ce qui ne permet pas de rendre compte des points sur une droite. Leurs

[44] Cette partie est une version largement augmentée d'un chapitre, en cours de révision, d'un ouvrage en hommage à Michèle Artigue.

[45] Voir aussi Páez et al. (2012).

recherches n'ont pas validé ces deux hypothèses. Les questions posées étaient sur la nature de certains nombres particuliers, la relation entre **Q**, l'ensemble des irrationnels et des parties d'une droite géométrique.

Plus récemment, Zazkis et Sirotic (2007a, 2010) avancent l'idée de représentations *opaque* et *transparente* pour la question de la rationalité ou de l'irrationalité d'un nombre réel. Les réponses des futurs enseignants de leur étude sont en général bonnes vu que les questions sont posées avec une représentation *transparente* (Zazkis et Sirotic 2010). Il reste néanmoins une minorité des sujets interrogés qui montre des difficultés, sans doute révélatrices. Elles concluent par une nécessaire coordination des différentes représentations : écriture décimale, ou en une autre base, symbolique, géométrique, fractionnaire et ajoute même les fractions continues pour la recherche de la nature d'un nombre réel.

Dans cette perspective de coordination des différents types de représentation, Voskoglou (2013) a expérimenté une approche avec plusieurs représentations. S'appuyant sur l'étude de Weller et al. (2009), Voskoglou, toujours en théorie APOS, propose dans un premier temps d'identifier les deux manières de représenter les rationnels, dans les registres fractionnaire et décimal, avec également des nombres irrationnels comme π ou 2,0013131131113111131111113…. Il est à noter également qu'un travail en géométrie est proposé, notamment pour les nombres irrationnels, ce qui ajoute le registre géométrique, sans chiffres. Il semble que ce travail, sur plusieurs systèmes de représentation, permette une meilleure compréhension des notions de nombre rationnel et de nombre irrationnel.

2. Les registres

2.1 Importance des conversions

Au-delà de la distinction rationnel/irrationnel au sein des questions que l'on peut se poser sur la compréhension de l'ensemble **R**, ces études mettent en avant un point qui nous semble fondamental : on peut penser qu'un travail sur plusieurs systèmes de représentation est nécessaire pour arriver à saisir, au moins en partie, les nombres réels.

Du point de vue numérique et pour la question de l'irrationalité, deux systèmes de représentation sont en jeu. La comparaison des deux assertions de Fishbein et al. (1995, page 36) permet de mettre en évidence une différence essentielle entre ces deux systèmes :

> *We have considered as correct the following definitions: "An irrational number is that which cannot be expressed as the quotient of two integers" or "An irrational number is represented by a non-periodical decimal with an infinity of digits".*

La première est uniquement négative, on ne peut pas écrire, alors que la seconde s'insère dans un système plus large : on peut écrire le nombre mais cette écriture ne possède pas une certaine propriété. Au-delà des caractères opaque/transparent de Zazkis et Sirotic, c'est la portée du système de représentation qui est ici en jeu.

2.2 Le registre décimal

S'appuyant sur cette portée du système décimal, Bronner (1997, 2005) avance, avec la notion d'idécimalité[46], que les nombres réels peuvent aussi être perçus à travers la distinction entre les écritures décimales finie et infinie. Nous identifions deux avantages à ce changement de point de vue. D'une part on peut écrire les nombres avec un registre de représentation (Duval, 1995, 2006), même si les règles de traitement sont à définir, et par la même avoir une idée de leur définition et, d'autre part, la perspective est analytique et non plus algébrique. En effet, la distinction rationnel/irrationnel présentée dans les études secondaires et au début des études universitaires est essentiellement algébrique – il suffit de regarder la preuve classique de l'irrationalité de √2 pour s'en convaincre. De plus, ce registre de l'écriture décimale contient de manière naturelle les notions d'approximation et de voisinage (les boules de rayon 10^{-k} sont les cylindres de l'ordre lexicographique) qui sont au cœur de l'analyse réelle. Mais notons ici que cela n'est pas caractéristique de **R**, car ces mêmes notions sont valables dans **D** et **Q** – d'ailleurs, dans la définition formelle de la limite, on peut se restreindre à ε dans **D** comme avec les termes de la suites (10^{-n}) ou dans **Q** avec les termes de la suite ($1/n$).

Du point de vue de l'enseignement, c'est aussi plus naturel d'étendre le système des écritures décimales en optant pour une infinité de chiffres (voir le dialogue de classe de la partie 2, section 1.1) que de partir de l'écriture fractionnaire. Cette dernière peut bien entendu être étendue avec les fractions continues, mais cette notion n'a pas d'existence dans l'enseignement secondaire et n'est que très rarement évoquée dans le premier cycle universitaire.

Mais, si un travail sur différents registres sémiotiques semble important et remporter l'adhésion des chercheurs du domaine, la recherche ne peut sans doute pas s'y limiter. Il y a bien sûr la distinction opaque/transparent que l'on pourrait reprendre pour d'autres notions que rationnel/irrationnel (on peut par exemple penser à la comparaison des nombres). On peut aussi avancer un autre argument, (Estrella et al. 2014 ; Montoya et Vivier, 2014) qui consiste à reprendre les points de vue global, local et ponctuel de Vandebrouck (2011) énoncés pour les fonctions. On peut penser qu'une flexibilité entre ces points de vue est importante, mais celle-ci s'accompagne très souvent d'un changement de représentation. Par exemple, l'écriture décimale permet les points de vue ponctuel, la valeur d'un nombre comme 0,333… ou a=0,12112111211112…, et local avec une maîtrise des voisinages comme 0,12112 est dans une boule de a de rayon 10^{-5} ou est une approximation à 10^{-5} de a. Mais ne permet pas un point de vue global[47] comme le permet par exemple une représentation géométrique ou sous forme d'intervalle.

2.3 Le registre de la droite numérique

A côté de ces deux registres numériques, on trouve un autre registre très important : le registre géométrique où **R** se représente par une droite munie d'un repère. Cette représentation semble surtout être utilisée, avec des effets semble-t-il positifs, dans les travaux sur la distinction rationnel/irrationnel (Voskoglou 2013, Sirotic et Zazkis 2007b).

[46] Un nombre *idécimal*, par opposition à un nombre décimal, est un nombre qui ne peut s'écrire dans le système décimal avec un nombre fini de chiffres.
[47] Il ne s'agit pas de la globalité d'une représentation d'un nombre (une *totalité* au sens de APOS) mais d'un point de vue global sur les nombres.

Núñez et al. (1999) dans leur étude sur la continuité des fonctions distinguent deux manières de concevoir une droite : dans la *continuité naturelle*, la continuité émerge du mouvement et la droite (continue) est un tout non constitué d'éléments, les points sont des lieux sur la ligne, alors que dans la *continuité de Cauchy-Weierstrass* issue des travaux du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la continuité est statique et la droite est un ensemble de points (les points constituent donc la droite). Dans ces deux conceptions, la droite est « sans trou » mais alors que dans la première il s'agit d'une propriété du mouvement, on passe par tous les *lieux* sur la droite, dans la deuxième il s'agit d'une propriété de la droite elle-même.

Peu de travaux portent spécifiquement sur les liens topologiques entre la droite géométrique et **R** et nous ne pouvons citer que l'étude de Castela (1996) qui porte sur 58 élèves de début de lycée en France (grade 10). L'originalité de cette étude est le croisement des questions concernant les nombres réels et les points d'une droite. En particulier, aux questions : *entre deux points A et B, y en a-t-il un plus près de B que tous les autres ?* et *entre les nombres 0 et 8, y en a-t-il un plus grand que tous les autres ?* les réponses des élèves sont particulièrement cohérentes avec 17 réponses négatives aux deux questions et 30 réponses positives aux deux questions. Castela conclut en particulier sur le fait que le passage à un ensemble continu de nombres est un apprentissage complexe pour lequel la correspondance points-nombres ne constitue pas le point d'appui évident sur lequel semble compter l'enseignement. Cela est à rapprocher de la stabilisation de la droite numérique comme support théorique de l'ensemble **R** (Bronner, 2008), même si elle a désormais disparu des programmes institutionnels français.

Il est à noter que le lien entre la droite numérique et **R** n'est pas spontané, même pour des élèves scientifiques de fin de lycée (terminale S) : Durand-Guerrier et Vergnac (2013), relève uniquement 4 élèves sur 56 qui mentionnent une droite numérique (ou l'axe réel) à la question « comment peux-tu définir un nombre réel ? ». Néanmoins, le travail mathématique en groupe et sur le long terme à propos d'une tâche problématique (point fixe de fonctions de E→E avec E un ensemble fini, intervalle de **D**, **Q** et **R**) permet de faire émerger les questions relatives à la complétude de **R** (Pontille et al., 1996).

3. Du développement décimal périodique à l'objet nombre réel

Pour répondre à un problème relatif à 0,999… (voir la section suivante pour une discussion plus approfondie sur cet objet) en théorie APOS, Arnon et al. (2014) proposent d'introduire un *stage* intermédiaire entre le *processus* et l'*objet* qu'il nomme *totalité*. Il s'agit de concevoir 0,999… comme un tout, avec l'infinité de 9, avant de pouvoir prétendre accéder à l'objet, le nombre (reste à savoir après s'il est égal à 1 ou non). Vivier (2011) avait avancé une idée proche de cette étape intermédiaire en distinguant deux objets : le nombre et la période (voir aussi la partie 2, section 2.2). En effet, la totalité peut être perçue comme l'encapsulation du processus de la répétition des 9 qui donne l'objet période, usuellement notée $\overline{9}$ (c'est le passage d'un infini potentiel à un infini actuel). Il reste alors à constituer $0,\overline{9}$ comme un objet, comme un nombre, ce qui est une autre question.

L'étude de Weller et al. (2009, voir aussi (Arnon et al. 2014), chapitre 8) en théorie APOS donne des éléments pour comprendre comment les écritures décimales périodiques peuvent devenir des nombres. Ils proposent un enseignement sur les rationnels dans les deux registres, fractionnaire et décimal, en proposant des opérations sur les écritures décimales à effectuer à l'aide d'un logiciel. Ce logiciel effectue tous les calculs dans le registre fractionnaire, mais cela est totalement masqué pour l'utilisateur, les interfaces ne proposant que le registre décimal. Ils constatent une nette amélioration en quantité et en qualité des connaissances sur les rationnels en écriture décimale, et notamment autour de la double représentation des décimaux (groupe expérimental de 77 et groupe de contrôle de 127 étudiants-professeurs du premier degré). On peut interpréter les résultats cette étude comme la constitution des écritures décimales périodiques en tant que nombres puisque l'on peut effectuer, sur ces écritures, les opérations de base de l'arithmétique (Yopp et al. 2011 ; Vivier 2011). L'objet « nombre » peut émerger de ce travail. Ces nombres sont par ailleurs reliés aux fractions, un travail essentiel pour ne pas construire un ensemble de nombre *parallèle* (on retrouve également l'importance de considérer plusieurs registres de représentation).

C'est dans cette perspective que Rittaud et Vivier ont orienté leur travaux en prenant une voie différente. Dans leur étude mathématique sur une base exotique, Rittaud et Vivier (2011, 2012) ont identifié l'objet période comme un objet fondamental pour la compréhension des écritures chiffrées périodiques (voir partie 2). C'est ainsi qu'ils proposent une construction de **Q** par les écritures périodiques en proposant des algorithmes[48] simples des quatre opérations de base de l'arithmétique. Cela permet de renouveler le regard que l'on porte sur l'égalité entre 0,999… et 1. La somme ne pose aucun problème mais, comme l'avait remarqué par exemple Richman (1999), si a est une écriture avec une période qui n'est pas $\overline{0}$, $1+a=0,\overline{9}+a$. Cela pose problème pour la définition de la soustraction et cela est une raison (algébrique) suffisante pour identifier 1 et $0,\overline{9}$. D'ailleurs, si l'on regarde toutes les démonstrations (hormis les topologiques et celles utilisant une conversion, cf. partie 2, section 4.3.4) de cette égalité, on s'aperçoit qu'il y a toujours une soustraction à faire. Ainsi, supposant le fait qu'une soustraction est bien définie comme l'opération inverse de la somme, on suppose de fait l'égalité. Et c'est seulement en faisant l'identification que l'on peut obtenir **Q**, sinon nous n'obtenons qu'un monoïde non régulier (Rittaud et Vivier 2014 ; voir aussi la partie 2, section 7).

Il est tout de même surprenant de constater que cette égalité entre 0,999… et 1 est un élément fondamental de **R** alors qu'elle est simplement relative à **Q**. Il y a forcément un saut, un deuxième pas à franchir avant d'arriver à **R**. Si l'on ne considère que les séquences périodiques, tout peut être algébrisé, soit par une conversion dans le registre fractionnaire, soit en travaillant directement avec les algorithmes dans le registre décimal. Or, le passage à **R** par les écritures décimales illimitées est différent, de manière fondamentale. Il nécessite de considérer une *totalité* (au sens de APOS), mais qui n'est, en général, pas l'encapsulation d'un processus. On peut bien entendu considérer des processus comme dans 0,10110011101111011111… ou dans 0,123456789101112… ou encore dans des nombres définis par une limite tels e ou π. Mais en général, peut-on définir un processus qui mène à un nombre réel x sans parler de la suite des décimales de x ? Dans ce cas, cela signifie que x existe déjà comme objet, le processus est second car il est défini à partir de l'objet (peut-on alors parler de désencapsulation ?).

4. Le cas de la comparaison entre 0,999… et 1

Les études sur la comparaison entre 0,999… et 1 sont nombreuses et anciennes (Tall et Schwarzenberger 1978, Tall 1980, Sierpinska 1985). Elle est considérée comme un point clé de l'entrée dans les réels, au carrefour de plusieurs notions : la complétude (pas de trou entre 1 et

[48] Ces algorithmes ont été développés au 18ème siècle par des comptables ((Hatton 1728), (Marsh 1742)) mais semblent avoir été totalement oubliés par l'histoire des mathématiques. Voir la section 4.6 de la partie 2.

0,999…), la notion de limite (somme des termes d'une série géométrique ou de la suite des troncatures), les infinitésimaux (entre analyse standard et non standard), la double représentation des décimaux dans le système décimal (ou l'équivalent avec une autre base), les nombres rationnels (et irrationnels), l'impact sur la géométrie euclidienne (si tout nombre est l'abscisse d'un point sur une droite munie d'un repère), un infini potentiel et un infini actuel, et la liste peut sans doute être étendue. D'un autre point de vue, Yopp et al. (2011) pensent qu'il est important que les enseignants de la fin de l'école primaire (grade 5) aient des connaissances liées à cette égalité. Ils s'appuient pour cela sur la relation entre 1/3 et 2/3 d'une part et 0,333… et 0,666… d'autre part que l'on rencontre à ce niveau (on peut aussi penser à étendre cela aux études secondaires, même si les enseignants ont en général suivi un cursus universitaire mathématique).

On peut également faire le rapprochement avec les paradoxes des Eléates qui avaient pour objectif d'avancer le fait qu'il était autant absurde de supposer l'existence du mouvement que le contraire (Aristote, Physique VI). Ces paradoxes, surtout celui couramment nommé *Achille et la tortue*, sont très souvent mentionnés, comme une sorte de tradition ou de *doxa*, peut-être par manque d'originalité mais peut-être aussi parce qu'ils sont emblématiques. Reprenons ici (voir la partie 2, section 2.1) le premier argument[49] de Zénon, la *dichotomie*, et fixons le départ en 0 et l'arrivée en 1 (pour une discussion minutieuse de ce paradoxe, voir (Fishbein 2001), (Bergson, 1889). Le paradoxe s'appuie sur le processus suivant : avant d'arriver en 1, il faut d'abord arriver à la moitié du parcours, en 1/2, puis il faut aussi arriver à la moitié de la moitié, 1/4, etc. Prenons la base deux pour écrire les nombres qui représentent les longueurs. Les distances restant à parcourir sont, successivement, 0,1, 0,11, 0,111 etc. et, symétriquement, les distances déjà parcourues sont 0,1, 0,01, 0,001 etc. Si l'on en reste au *stage* du *processus* de APOS (Dubinsky et al. 2005, 2014), on voit que le mouvement ne peut jamais commencer, il reste toujours une distance, même petite, depuis le départ (c'est le paradoxe). On en reste ainsi à un infini potentiel. Mais si l'on s'autorise un infini actuel, ou un objet au sens de APOS, alors on peut espérer lever le paradoxe. Qu'avons-nous ? 0,111… et, évidemment, 0,00…01. Les « … » signalent une répétition infinie (c'est un infini actuel). On voit alors que la question, sans pour autant lever le paradoxe, revient à donner du sens à 0,111… et 0,00…01 ainsi qu'à les identifier, respectivement, avec 1 (identique à 0,999… et 1 en base dix) et avec 0.

La question est donc : comment savoir si deux nombres sont égaux ? Wilhelmi et al. (2007), proposent plusieurs manières de justifier l'égalité de deux nombres. Mais ils s'appuient, explicitement, sur le corps des réels qui est supposé déjà construit, avec ses propriétés. C'est de fait le cas de toutes les *preuves* de l'égalité entre 0,999… et 1 (voir par exemple (Tall et Schwarzenberger 1978), et la partie 2) qui s'appuient implicitement sur des propriétés d'un ensemble déjà construit. Mais, de fait, pour l'égalité entre 0,999… et 1, ce n'est pas **R** qui est supposé construit mais bien plutôt **Q**. Même la limite d'une série géométrique ou la propriété topologique, *deux nombres dont la distance est plus petite que tout nombre strictement positif sont égaux* ($\forall \varepsilon>0,\ |a-b|<\varepsilon \Rightarrow a=b$, c'est l'axiome de séparation pour la topologie usuelle), sont aussi valables dans **Q** et même dans **D**. Prenant un point de vue différent, Rittaud et Vivier (2014) avancent l'idée que l'égalité entre 0,999… et 1 (et donc par conséquence pour tous les nombres décimaux) est une technologie (Chevallard 1999) cachée.

[49] C'est finalement la même situation que celle d'*Achille et de la tortue* mais vue du référentiel de la tortue et en se posant la question du départ et non plus de l'arrivée.

Comme le signalent par exemple Mena et al. (2014), ces *preuves* ne sont en général pas convaincantes, et ce même si les sujets (des étudiants d'université et enseignants de mathématiques) reconnaissent la validité des arguments avancés. L'opposition sémiotique entre les deux expressions, 0,999… et 1, est trop forte. Il est d'ailleurs très significatif de voir que les taux de réponse proposant l'égalité dans la question de la comparaison de 0,999… et 1 varient très peu, pour un public *mathématicien*, d'une période à une autre, d'un pays à un autre, avec ou sans enseignement préalable (voir la partie 2, section 2.5).

Dubinsky et al. (2005) utilisent la propriété topologique (pages 261-262) tout en discutant de la *valeur* de 0,999…, obtenue après encapsulation du processus en un objet (d'un infini potentiel à un infini actuel). Quelle est donc cette valeur ? Est-elle forcément égale à 1 ? L'analyse non standard développée par Robinson dans les années 1960 propose une alternative. On peut tout à fait développer une théorie non standard des nombres pour laquelle 0,999…<1, qui donne du sens à des objets comme 0,00…01 (ce qui permet de renouer avec le premier paradoxe de Zénon). Toutefois, la construction est complexe car il faut la poursuivre et considérer, après la virgule, une série infinie du type $0,A_1A_2A_3\ldots$ où chaque A_i est une séquence infinie de chiffres (0,999… ne considère que A_1 et 0,00…01 considère, en plus de A_1, une séquence A_2 à un chiffre). Malgré des tentatives prometteuses d'introduction dans l'enseignement (Artigue 1991, Hodgson 1994), l'analyse non standard reste marginale. Il n'en reste pas moins que certains chercheurs continuent de développer ce point de vue qui enrichit la compréhension des nombres (voir par exemple (Katz et Katz 2010a, 2010b)). Toutefois, il ne faut pas voir l'analyse non standard comme une curiosité dont on pourrait se passer. Ce point de vue est important dans la compréhension des conceptions d'étudiants, essentielle pour un enseignant, car ceux-ci peuvent très bien avoir développé, contre l'enseignement traditionnel, des conceptions non standard des nombres (Ely 2010). Par exemple, dans (Manfreda Kolar & Hodnik Čadež 2012) en pages 404 et 405, à la question *what is the largest number?*, un étudiant répond 99… et à la questions *what number is closest to the number 0.5?* ce sont 67 étudiants qui répondent 0,4999… et trois qui répondent 0,500…1. Ces réponses sont classées dans une conception liée à l'infini potentiel. Mais on pourrait tout aussi y voir une conception non standard des nombres. On comprend ainsi toute l'importance pour un enseignant de mathématiques d'avoir des notions d'analyse non standard.

5. La complétude de R

Il y a peu de recherches sur la topologie de **R**, englobant les questions de complétude. On peut citer Bridoux (2011) qui, dans sa thèse, s'intéresse aux premières notions de topologie de $\mathbf{R}^N$ à l'université, ouvert, fermé, adhérence, qu'elle identifie comme des notions FUG, Formalisatrices, Unificatrices et Généralisatrices (Robert 1998). Mais elle ne traite pas spécifiquement de la topologie de **R**.

On pourrait penser aux recherches autour de la notion de limite, mais elles ne se focalisent pas directement sur des questions de topologie. Souvent, comme pour le thème des séries numériques, des points de topologie sont discutés mais sans être au centre des préoccupations comme dans (Durand-Guerrier et Arsac 2005). Il est également à signaler que le lien entre la complétude de **R** et la notion de limite est loin d'être évident comme on peut le constater avec les articles de Burn (2005) et Mamona-Downs (2010).

Burn (2005) expose un point de vue sur les limites des suites numériques qui permet de s'affranchir de la complétude de **R**. Il propose un développement de la notion de limite, s'appuyant sur le développement historique et les conceptions initiales des étudiants (notamment la convergence monotone) sans spécifier le domaine numérique : il suffit en effet d'avoir un sous ensemble de **R**, si possible stable pour les opérations usuelles, ayant des suites convergeant vers 0 comme **D**, **Q** ou les algébriques – la topologie spécifique de **R** n'est donc pas requise. Néanmoins, comme cela se voit déjà dans la méthode d'exhaustion de Grégoire de Saint Vincent, il est nécessaire de connaître la valeur pressentie de la limite car ce point de vue développé par Burn ne peut donner l'existence d'une limite. Pour l'existence, il est nécessaire de se référer à des théorèmes, comme celui de la convergence d'une suite monotone bornée, caractéristiques de **R** comme espace complet (voir aussi (Nardi 2008, ch. 6)).

A l'inverse, Mamona-Downs (2010) propose de s'appuyer sur l'ensemble des termes d'une suite plutôt que sur la suite elle-même. Cela a l'avantage d'écarter tout aspect dynamique au profit d'un point de vue statique. La reformulation de la notion de convergence est faite à l'aide des points d'accumulation et de leur existence par le théorème de Bolzano-Weierstrass mais nécessite de distinguer des cas particuliers, principalement les suites constantes (l'ensemble est alors fini). Néanmoins, ce point de vue novateur, s'appuyant fortement sur la topologie de **R**, nécessite d'être testé expérimentalement.

Les liens entre complétude de **R** et limite de suite de réels semblent être particulièrement complexes. Pour ce qui est de la complétude de **R** proprement dite, il semble que seule Bergé s'est vraiment emparée de cette question. Dans (Bergé 2010) elle étudie les réponses de 145 étudiants à un test sur la complétude. Sur les quatre cours où la complétude de **R** est en jeu, notamment sur les bornes supérieures et inférieures, c'est à partir du deuxième qu'elle devient explicite. Les étudiants de l'étude se répartissent dans les cours II, III et IV. Elle analyse uniquement deux tâches sur les cinq proposées. La première demande comment on pourrait expliquer à un jeune étudiant le fait qu'une suite croissante majorée converge. Seul 12 étudiants mentionne explicitement la complétude. La grande majorité des étudiants admettent comme un fait que la limite existe, sans discussion, avec pour presque la moitié d'entre eux un graphique (en une ou deux dimensions). Certains étudiants utilisent une métaphore extra-mathématique pour expliquer et quelques autres présentent des confusions importantes. On peut néanmoins penser qu'il y a un biais dans la question car on doit s'adresser à « un jeune étudiant » : est-ce que mentionner explicitement la complétude aide à comprendre alors que dans le cours I le travail mathématique ne requiert pas l'utilisation explicite de la complétude ?

La deuxième question porte sur la signification de la complétude de **R** pour les 21 étudiants des cours III et IV. Elle relève que 8 étudiants, dont 7 du cours IV, ont une conception opérationnelle de la complétude pouvant être utilisée dans les preuves, les 13 autres étudiants n'en n'ont qu'une vision naturelle, ne pouvant servir dans la preuves.

Alors que la complétude est une question que Bergé juge cruciale, elle remarque que la compréhension ne vient pas d'elle-même en résolvant des tâches et qu'il est donc nécessaire de penser les programmes d'enseignement avec cette objectif de conceptualisation. On rejoint ainsi la citation de Artigue (2006) sur la nécessité de penser l'enseignement de l'analyse, ici pour les nombres réels, sur le long terme.

Conclusion de la partie 3

Il apparaît dans de nombreuses études sur les nombres réels que, implicitement, la compréhension de l'ensemble **R** passe par la distinction rationnel/irrationnel. Or, la notion d'irrationnel ne caractérise en rien l'ensemble **R**, elle ne fait que montrer l'insuffisance de **Q** pour la géométrie et l'algèbre. On peut aussi se poser la question de l'intérêt de considérer l'ensemble des nombres irrationnels. Il n'a aucune structure mathématique intéressante, aucune propriété simple permettant de comprendre l'ensemble **R**. A notre avis, l'étude des nombres réels nécessite d'autres points de vue que la distinction rationnel/irrationnel afin de pouvoir appréhender de manière *élémentaire* cet ensemble **R**

On peut penser à la *densité*[50] qui est souvent évoquée dans les recherches, mais elle n'est cependant pas propre aux réels car les rationnels et les décimaux possèdent aussi cette propriété qui est plus liée à l'ordre qu'à la topologie de **R** (évidemment les deux sont liés). Plus généralement, les propriétés de **R** traitées dans les recherches ne sont que très rarement spécifiques de **R**. Par exemple, l'étude, par ailleurs intéressante, de Zachariades et al. (2013) propose 25 questions dont aucune n'est vraiment caractéristique de **R**. Bien entendu ils s'intéressent à des questions essentielles comme la densité, la reconnaissance de la nature d'un nombre ou la conversion entre écritures. C'est dans les entretiens qui suivent le questionnaire écrit que l'on peut avoir quelques idées centrales sur **R**, notamment autour de l'égalité entre 0,999… et 1.

Où donc est l'essence de **R** ? Quand donc avons-nous besoin de **R** ? Il semble que ce soit uniquement en analyse, sinon, on peut très bien se contenter d'un sous ensemble (**Q**, les algébriques,… quitte à ajouter π et quelques autres nombres transcendants). Bergé (2006, 2008), dans une étude sur l'analyse à l'université, identifie l'explicitation de la complétude de **R** comme l'élément essentiel du passage du *calculus* à l'analyse – le *calculus* est une sorte d'analyse algébrisée, un calcul sur les objet de l'analyse. Il semble ainsi que pour atteindre au moins en partie des caractéristiques essentielles de **R**, il faille s'intéresser, d'une manière ou d'une autre et plus ou moins directement, à la complétude de **R**. On peut penser à plusieurs notions comme le Théorème des Valeurs Intermédiaires, le théorème/axiome sur les suites croissantes majorées, les développements décimaux illimités, les bornes supérieure et inférieure,… sans oublier les liens topologiques entre le numérique et le géométrique, entre **R** et la droite.

Si la notion de limite est bien approfondie en recherche, la question des liens entre la complétude de **R** et la notion de limite mériterait à nos yeux des recherches spécifiques. Plus généralement on peut se demander quel est rôle des connaissances sur les nombres réels pour l'apprentissage de l'analyse. Cette question n'a pas encore été traitée en didactique des mathématiques.

[50] La *densité* souvent évoquée dans les recherches en didactique est une adaptation pour les ensembles de nombres de la notion topologique d'ensemble dense dans un autre. Elle est souvent mentionnée en lien avec l'ordre usuel qui définit la topologie usuelle : *il existe toujours un nombre entre deux nombres distincts*. **N** et **Z** n'ont pas cette propriété, **D**, **Q** et **R** la possèdent. On peut la formuler en : *tout nombre x de l'ensemble E est adhérent à* $E\backslash\{x\}$ ou encore en $E\backslash\{x\}$ *est dense dans E*.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion sur mes recherches

Avant de parler des perspectives, je voudrais revenir sur les points importants que j'ai abordés dans les parties 1 et 2.

En première partie, sur les entiers, j'ai voulu montrer l'importance d'un travail *numérique*, comparer et calculer, sur les écritures sémiotiques pour qu'elles puissent acquérir le statut de nombre. C'est dans cette perspective que j'ai développé un cadre d'analyse prenant en compte à la fois le caractère sémiotique, par les travaux de Duval, et le caractère praxique, par le travaux de Chevallard. Car il ne s'agit pas d'introduire un nouveau registre de représentation des nombres pour y voir des nombres. Tout au plus y voit-on une écriture chiffrée. Dans un premier temps, les conversions peuvent bloquer le développement des praxis dans le nouveau registre alors qu'un travail d'élaboration des praxis est nécessaire. C'est après cette élaboration, dans un deuxième temps donc, que l'on peut voir dans les conversions le statut que leur confère Duval.

C'est ce point de vue que je propose d'appliquer en partie 2 sur les rationnels en écriture décimale. Pour cela, je m'appuie sur une recherche en mathématiques qui permet de combler le vide praxéologique sur les rationnels en écriture décimale. A la suite de la partie 1, je pense qu'il s'agit d'une condition nécessaire pour que les développements décimaux illimités puissent devenir des nombres. Mais on se heurte ici à des obstacles importants qui sont représentés par l'égalité $0,\overline{9} = 1$. Les résultats de recherche sont encourageants et laissent penser qu'il y a, avec les algorithmes que nous développons, une nouvelle possibilité intéressante pour concevoir les rationnels en écriture décimale comme des nombres et pour aborder les liens entre $0,\overline{9}$ et 1.

Mais on n'est alors qu'au milieu du chemin. Car les développements décimaux illimités sont surtout intéressants pour les réels. Force est de constater que nous sommes loin d'atteindre les nombres réels. Néanmoins, je ne peux m'empêcher de penser que faire des développements décimaux périodiques des nombres participe à la constitution des nombres réels comme des développements décimaux illimités.

Sur la route des réels. C'est là où je me sens après cette centaine de pages où j'expose des recherches, dont les miennes, sur les nombres.

Perspective : un projet de recherche[51]

Les programmes actuels de mathématiques du lycée ne mentionnent aucun travail sur les nombres réels. Parallèlement, dès que l'on questionne les lycéens et les étudiants de licence sur ce thème, et même des étudiants-professeurs du second degré, on ne peut manquer de constater les difficultés que cela représente pour eux (Castela, 1996 ; Durand-Guerrier & Vergnac, 2013 ; Vivier, 2011, 2012). Comment pourrait-il en être autrement ? La notion de nombre réel est difficile. Mais l'évolution des

[51] Ce projet s'inscrit dans le cadre d'une délégation CNRS au laboratoire I3M de l'université Montpellier 2 (février-juillet 2015).

programmes actuels du lycée semble vouloir masquer ces problèmes – « est-ce pour ne pas les voir qu'on les cache *sous le tapis ?* ».

Le constat est clair : les lycéens et étudiants présentent des difficultés dans l'apprentissage des nombres réels et, dans le même temps, les programmes de l'enseignement secondaire semblent évacuer tout travail sur les nombres réels.

Isabelle Bloch (2000) énonce l'hypothèse selon laquelle les connaissances sur les nombres réels sont importantes pour l'apprentissage de l'analyse. Je m'inscris pleinement dans cette hypothèse qui rejoint celle que Viviane Durand-Guerrier et Vergnac énoncent à propos des nombres réels : « On peut faire l'hypothèse que les étudiants qui ne construisent pas de manière adéquate la signification des nombres réels en début de formation risquent de rencontrer des difficultés dans l'apprentissage des concepts de l'analyse » (Durand-Guerrier & Vergnac, 2013).

Si ces hypothèses sont valides, cela tranche avec le contexte institutionnel. Le projet que je développe ci-dessous s'intéresse au rôle que jouent les connaissances sur les nombres réels pour l'apprentissage de l'analyse.

Dans ce projet, nous devrons d'abord établir des constats précis liant connaissances sur les nombres réels et concepts de l'analyse – notamment pour valider les hypothèses. La première question est alors de savoir quelles sont ces connaissances importantes et surtout en quoi ces connaissances sont importantes pour le développement de l'analyse. La deuxième question s'appuie sur les réponses à la première. Comment faire pour que les élèves et les étudiants apprennent ces connaissances clés sur les nombres réels ? Ces questions sont développées ci-dessous en précisant les résultats escomptés.

Il s'agit tout d'abord d'identifier les connaissances importantes sur les nombres réels pour l'apprentissage de concepts de l'analyse. Bien entendu, du côté mathématique cela est clair car si on a un sous-corps de **R**, donc non complet, avec des « trous », le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème liant signe de la dérivée et sens de variations pour une fonction dérivable ne sont pas valides. Mais qu'en est-il du côté de l'enseignement et de l'apprentissage de l'analyse ?

Pour répondre à cette première question, on peut mener une étude sur des étudiants de licence, et sur des professeurs en formation initiale. Cette étude peut revêtir deux modalités complémentaires. La première modalité est statistique : sur un nombre suffisamment important d'étudiants, proposer des questionnaires (en cours d'élaboration) liant des questions sur les nombres réels ainsi que sur des concepts de l'analyse (sur les suites et les fonctions notamment), voire des questions sur la topologie. Le croisement des réponses aux différents types d'items permettra d'obtenir des éléments de réponse. La deuxième modalité peut se focaliser sur des entretiens semi-directifs. Le nombre d'étudiants concernés est alors forcément plus limité mais cela permet d'aller beaucoup plus en profondeur dans les analyses.

Les résultats escomptés concernent l'identification de connaissances essentielles sur les nombres réels pour l'apprentissage de l'analyse. Ces résultats seraient une grande avancée pour la didactique.

S'appuyant sur l'identification des connaissances à la première question, on peut se demander coment favoriser l'apprentissage de ces connaissances clés sur les nombres réels ? Il est certain que cet apprentissage est à penser sur plusieurs années, du lycée à l'université, car les nombres réels ne peuvent s'apprendre en une seule année. Les résultats concernant la première question permettront de focaliser l'attention sur des connaissances particulières et ainsi d'élaborer des scénarios didactiques ayant pour objectif de favoriser l'apprentissage des connaissances visées. Parmi ces connaissances clés, en prenant appui sur une étude de Pontille et al. (1996), on peut penser qu'un travail sur la complétude de **R** est possible dès le secondaire et peut permettre de répondre à ce problème de l'enseignement des nombres réels.

Une fois élaborés, ces scénarios didactiques seront à tester expérimentalement et le projet devra s'étendre sur au moins 2 à 3 ans.

BIBLIOGRAPHIE

Adjiage, R. (2003). Registres, grandeurs, proportions et fractions, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 8, p. 127 – 150, IREM de Strasbourg.

Aristote, *Physique,* Les belles Lettres, 1969, Paris.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory, a Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Springer.

Artigue, M. (1991). Didactical research in analysis. In D. Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, p. 167-196. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2006). Didactique du numérique : outils et instruments du calcul. In A. Rouchier & al. (eds), *Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 1-17. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bergé, A. (2006). Análisis institucional a propósito de la noción de completud del conjunto de los números reales. *Relime*, 9.1, 31-64.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis, *Educational Studies in Mathematics*, 67, 217–235.

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41.2, 217–227.

Bergson, H. (1889). *Essai sur les données immédiates de la conscience*, Alcan, Paris.

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université – Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de doctorat, université Bordeaux I, France.

Block, D., Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2012). Registre et praxis numérique en fin de première année de primaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 17, 59-86.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.1, 77-123.

Bridoux, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas*, Thèse de l'Université Paris VII.

Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels: Idécimalité et racine carré*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble I, 1997.

Bronner, A. (1997), Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17.3, 55–80.

Bronner, A. (2005). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires, *Actes de la XIII^ème^ école d'été de didactique des mathématiques*, Ste Livrade, 18-26 août 2005.

Bronner A. (2005). Vers la recherche d'un milieu perdu pour l'apprentissage des nombres réels au collège: racine carrée et idécimalité, In *Sur la théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvages Editions.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en questions.* HDR, université Montpellier 2.

Bronner, A., & Larguier, M. (2010a). The nature of numbers in grade 10: A professional problem, *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st 2009, Lyon France

Bronner, A., & Larguier, M. (2010b). Un problème de la profession en classe de seconde : quelles connaissances du professeur pour construire les connaissances des élèves à propos du numérique ?. Dans *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2009*, 6 au 10 avril 2009, Dakar (Kuzniak A. & Sokhna M. (Eds)., Vol. Numéro Spécial 2010).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, La pensée Sauvage.

Bullynck, M. (2009). *Decimal Periods and their Tables: A German Research Topic (1765-1801)*, Historia Mathematica 32, 2 (2009), 137–160.

Burn, B. (2005). The vice: some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequences, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 269–295.

Castela C. (1996), La droite des réels en seconde : point d'appui disponible ou enjeu clandestin ? *IREM de Rouen*.

Chevallard, Y. (1988). *Sur l'analyse didactique : Deux études sur les notions de contrat et de situation*, IREM de Marseille n°14.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x* 19, pp. 43-72.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2, 222-265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude : 3. Ecologie & régulation, Cours de la *XIe école d'été de didactique des mathématiques* (Corps, 21-30 août 2001), La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 41-56.

Dubinsky, E., Weller, K., Michael, A. Mc Donald, M. A. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part 2, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 149–172.

Durand-Guerrier, V. & Vergnac, M. (2013). Les réels à la transition secondaire-supérieur du discret au continu – quelle élaboration ? Dans *La réforme des programmes du lycée et alors?* Actes du colloque IREM, pages 135-147.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16/3, La Pensée Sauvage.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de L'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658-672.

Ely, R. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals, *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 117–146.

Estrella, S., Kuzniak, A., Montoya, E. & Vivier, L. (2014). El trabajo matemático en el Análisis: una aproximación A los ETM en Francia y Chile, *Actes du colloque ETM4*, 30 juin-04 juillet 2014, Madrid, Espagne.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 48, 309–329.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational number in high-school students and prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics,* 9, 29–44.

Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2/3, La Pensée Sauvage.

Gras, R., Régnier, J.-C., & Guillet, F. (Eds) (2009*). Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. RNTI-E-16 Toulouse Cépaduès.

Hatton, E. (1728). *A Mathematical Manual: or, Delightful Associate*, S. Illidge.

Hodgson, B.R. (1994). Le calcul infinitésimal, In : D.F. Robitaille, D.H. Wheeler et C. Kieran, dir., *Choix de conférence du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-7),* Presses de l'Université Laval, 157-170.

Hofstadter, D. et Sander, E. (2013). *L'analogie, cœur de la pensée,* Odile Jacob.

IREM de Grenoble (1979). Quel est l'âge du capitaine, Grand N, 19.

Kahane, J.-P. (2002), *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob.

Katz, K., & Katz, M. (2010). Zooming in on infinitesimal 1 − .9.. in a post-triumvirate era, *Educational Studies in Mathematics*, 74, 259-273.

Katz, K., & Katz, M. (2010). When is .999... less than 1?, *The Montana Mathematics Enthusiast*, 7(1), 3-30.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9 – 24.

Larguier, M. (2012). La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession en seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32.1, 101-144.

Lemonidis, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Thèse de Doctorat de l'Université de Strasbourg. IREM de Strasbourg.

Malcolm, A. (1730). *A New System of Arithmetick, Theorical and Practical*, J. Osborn.

Manfreda Kolar, V., & Hodnik Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 80, 389-412.

Malcolm, A. (1730). *A New System of Arithmetick, Theorical and Practical*, J. Osborn.

Mamona-Downs, J. (2010). On introducing a set perspective in the learning of limits of real sequences, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 277–291.

Margolinas, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels, *Petit x* 16, pp. 51-66.

Marsh, J. (1742). *Decimal arithmetic made perfect; or, the management of infinite decimals displayed*, London.

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A., Parraguez, M. (2014). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 1- 31.

Nardi, E. (2008). *Amongst Mathematicians: Teaching and Learning Mathematics at University Level*, Springer, New York.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre 2009.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*, Actes du 5^e colloque A.S.I., J.-C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola & R. Gras éds, Palermo 2010.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, MENON: Journal of Educational Research, journal en ligne, *MENON: Journal Of Educational Research*, (ISSN: 1792-8494) Full article: ISSUE 2a, 2013 (p. 99-114).

Njomgang Ngansop & Durand-Guerrier (2014**).** 0, 999….. = 1 an equality questioning the relationships between truth and validity, *Proceedings of Cerme 8*, Antalya, Turquie.

Núñez, R.E., Edwards, L.D. & Matos, J.F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 45-65.

Páez Murillo, R. E., Vivier, L., Martínez Ojeda, E. & Torres Martínez, C. A. (2012). Concepciones detectadas en estudiantes de primer semestre de universidad en relación al conjunto de números reales, Ac*tes du colloque en hommage à Michèle Artigue*[52] *31/05-02/06 2012*.

Pontille, M.-C., Feurly-Reynaud, J. & Tisseron, C. (1996). Et pourtant, ils trouvent, *Repères-IREM* 24.

Richman, F. (1999). Is .999. . .= 1?, *Mathematics Magazine*, 72(5), 396–400.

Rittaud, B. (2006). *Le fabuleux destin de* $\sqrt{2}$, éditions Le pommier.

Rittaud, B. & Vivier, L. (2011). Circular words and applications, *Electronic Proceedings of Theoretical Computer Science*, Vol. 63, *Proceedings 8th International Conference Words 2011*, Prague, Czech Republic, 12-16th September 2011, Edited by: Petr Ambrož, Štepán Holub and Zuzana Masáková en ligne <http://eptcs.org/Published/WORDS2011/Papers/i6/arXiv.pdf>.

Rittaud, B. & Vivier, L. (2012). Circular words, F-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320.…, *functiones et approximatio commentarii mathematici*, 47.2, 207-232.

Rittaud, B. & Vivier, L. (2014). Different praxeologies for rational numbers in decimal system – the $0.\overline{9}$ case, *Proceedings of Cerme 8*, Antalya, Turquie.

Rittaud, B. & Vivier, L. The fields Q from the standpoint of circular words, soumis. Une version simplifiee en francais est disponible sur Internet : <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/34/13/PDF/Rittaud-Vivier-DDIP.pdf>).

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18.2, 139-190.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

Sirotic, N. & Zazkis, A. (2007a). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49–76.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007b), Irrational numbers on the number line – where are they, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38 (4), 477-488.

Tall, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus, *Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Berkeley, 1980.

[52] Les actes du colloque en hommage à Michèle Artigue sont en ligne : https://docs.google.com/file/d/0B7H9DyVUr48lTVNiRk5zZ1lhQ00/edit?pli=1

Tall, D. O. & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits, *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and conception definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*, Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes, *Educational Studies in Mathematics* 41, 239–264.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 149 – 185.

Vergnaud, G. (1982). "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems" in: Carpenter, T., Moser, J. and Romberg, T. (eds). *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, hillsdale, New Jersey, pp. 39-59.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10 (2).

Vivier, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* Vol. 13, 63 - 92.

Vivier, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados, *El cálculo y su enseñanza*, Vol. III, México. < http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/>

Vivier, L. (2012). Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – *Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 919–932).

Vivier, L. (soumis). Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération, cahier du LDAR.

Voskoglou, M. (2013). An Application of the APOS/ACE Approach in Teaching the Irrational Numbers *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 8.1, 30-47.

Weller, K., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2009). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), Routeledge.

Wilhelmi, M., Godino, J. & Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistèmicas asociadas a la nocion de igualdad de nùmeros reales, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 27/1, 77-120.

Yopp, D. A., Burroughs, E. A. & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999. . . = 1, *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 304–318.

Zachariades, T., Christou, C. & Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers, *Educational Studies in Mathematics*, 82, 5–22.

Zazkis, R. & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation, in *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, Vol. 4, pp. 497–505.

Zazkis, R. & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link, *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 1-27.

Zeckendorf, E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. de la Société Royale des Sciences de Liège*, ***41***, 179-182.

SOMMAIRE

Introduction générale 2
Partie 1 : Rôle des conversions numériques dans le travail mathématique 5
Introduction de la partie 1 5
1. Cadre d'analyse 6
1.1 La Théorie Anthropologique du Didactique 6
1.2 Registre de Duval 6
1.3 Prise en compte du système et pas uniquement du signe 7
1.4 Les praxis 7
1.5 Les techniques τ_R 8
1.6. Restriction au cadre numérique 9
1.7 Blocage des R-praxis 11
2 Études expérimentales 12
2.1 Les entiers : numération de position 12
2.2 Les entiers : registres graphique et chiffrée 22
3. Conclusion – les rationnels : registres fractionnaire et décimal 34
PARTIE 2 : Les rationnels en écriture décimale 35
Introduction 35
1. Trois questions pour l'enseignement secondaire 36
1.1 Pourquoi enseigner les DDI ? 36
1.2 Quel travail mathématique sur les DDI ? 37
1.3 Quelle représentation pour les rationnels : DDIP ou fractions ? 38
2. Position du problème : l'égalité 0,999...=1 40
2.1 Depuis l'Antiquité 40
2.2 Point de vue de la théorie APOS sur l'égalité 0,999…=1 41
2.3 Autres justifications classiques 42
2.4 Les opérations 42
2.5 Les nombres réels du lycée à l'université 43
3. D'une recherche mathématique à une recherche didactique 45
3.1 Introduction 45
3.2 Le cadre de la recherche mathématique 45
3.3 Les deux moments clés 46
3.4 Avancement des recherches en mathématiques : analogies avec la base dix 48

3.5 Conclusion 49
4. Algorithmes des 4 opérations de base sur les rationnels en écritures décimales et construction du corps Q 50
4.1 Introduction 50
4.2 Cadre sémiotique et comparaison 51
4.3 Groupes additifs 53
4.4 Les fractions 59
4.5 Le corps Q 62
4.6 Un éclairage historique 67
5. Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale 69
5.1 Introduction 69
5.2 Analyse a priori de la situation 69
5.3 Constitution des groupes : analyse de la phase de dévolution 70
5.4 Analyse des productions collectives 72
5.5 Production de la ressource visée 75
5.6 Conclusion de l'étude 76
6. La première étude 77
6.1 Utilisation de l'algorithme de somme 77
6.2 La période : un processus à encapsuler 78
6.3 Quelques questions de logique 79
7. Une interprétation par la TAD 81
7.1 Les praxis de comparaison 81
7.2 Intérêt des praxis de somme 82
7.3 Le test diagnostic individuel 82
7.4 Découvrir la nécessité de l'égalité, en groupe 83
Conclusion de la partie 2 84
Partie 3 : les recherches sur les nombres réels 85
Introduction 85
1. Rationnels et irrationnels 85
2. Les registres 86
2.1 Importance des conversions 86
2.2 Le registre décimal 87
2.3 Le registre de la droite numérique 87
3. Du développement décimal périodique à l'objet nombre réel 88

4. Le cas de la comparaison entre 0,999… et 1 89
5. La complétude de R 91
Conclusion de la partie 3 93
Conclusion et perspectives 94
Conclusion sur mes recherches 94
Perspective : un projet de recherche 94
Bibliographie 97