La Ludique : une théorie de l'interaction, de la logique mathématique au langage naturel

Myriam Quatrini

Université Aix-Marseille

Institut de Mathématiques de Marseille

Thèse d'habilitation à diriger des recherches

La Ludique : une théorie de l'interaction, de la logique mathématique au langage naturel

Myriam QUATRINI

Soutenue le 23 mai 2014, devant le Jury composé de :

Michele Abrusci *(rapporteur)*
Philippe Blache
Jean-Yves Girard
Olivier Laurent *(rapporteur)*
Alexis Nasr
Laurent Régnier *(tuteur)*
Christian Rétoré *(rapporteur)*

Table des matières

Introduction

L'article séminal [35] dans lequel Jean-Yves Girard développe la “Ludique”, est intitulé “Locus Solum”. Il y est mentionné un titre alternatif, moins littéraire mais plus explicite : *une approche purement interactive de la logique*. Arrêtons-nous un instant sur cette présentation de la ludique comme une approche purement interactive de la logique, en interrogeant les termes constituant cette formulation.

Le domaine scientifique auquel se rapporte cette théorie est celui de la *logique*. Toutefois, cette désignation est fort large, de par son cheminement historique : de la philosophie aux mathématiques, de par ses nombreux domaines d'applications actuels : ingénierie, linguistique, psychologie cognitive, pour n'en citer que quelques uns. Ici, c'est dans le domaine de la logique mathématique que s'ancre cette théorie, et même, plus précisément encore, à l'interface d'une branche de la logique mathématique : la théorie de la démonstration et de l'informatique théorique. C'est d'ailleurs à partir de cet ancrage entre théorie de la démonstration et théorie de la computation que l'on peut comprendre ce que signifie l'adjectif *interactif*, utilisé dans l'intitulé que nous considérons.

En effet, la logique mathématique, et en particulier la théorie de la démonstration, a connu, ces dernières décennies, une évolution majeure, essentiellement en lien avec le développement et les enjeux de l'informatique théorique. Nous pouvons résumer cette évolution en pointant les successifs changements du paradigme articulant les recherches en théorie de la démonstration à l'interface de l'étude des langages de programmation. Alors que l'objet central de cette discipline était à l'origine la formule et ses propriétés de satisfaisabilité, on s'est ensuite intéressé à la preuve et donc aux propriétés de démontrabilité, pour finalement se focaliser sur la dynamique interne aux preuves : le processus de réécriture des preuves correspondant à l'élimination de la règle de coupure (ou élimination des détours). Ce processus lorsqu'il est muni de bonnes propriétés de terminaison et de confluence [1] est pertinent pour rendre compte de la normalisation, c'est-à-dire du processus de calcul dans un langage de

1. Le résultat du processus est indépendant de l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées.

programmation fonctionnelle. Ces changements de paradigme se sont faits au départ essentiellement dans le cadre de la logique intuitionniste, qui, en tant que système formel a l'avantage de manipuler des preuves pour lesquelles la normalisation est déterministe et peut donc se proposer comme modèle de calcul. Toutefois, ce gain d'une procédure déterministe de l'élimination des coupures, a une contrepartie : la perte d'une des propriétés majeures des systèmes logiques : la symétrie. Avec la logique linéaire [33], J.-Y. Girard, non seulement propose un système formel dans lequel la normalisation a les bonnes propriétés d'un calcul tout en retrouvant les symétries de la logique classique (notamment une négation involutive), mais fournit de surcroît de nouveaux outils, comme la sémantique cohérente et les réseaux de preuves, qui vont s'avérer précieux pour l'étude des modèles de calcul issus de systèmes logiques et de la correspondance preuves-programmes. Le nouveau point de vue dû à la logique linéaire va permettre de généraliser à la fois la notion de calcul (vers le parallélisme) et celle de preuves (d'abords interprétées par des fonctions puis par des relations, des graphes, puis enfin par des stratégies) pour s'intéresser finalement directement à *la dynamique* elle-même. Les réseaux de preuves permettent le développement d'un point de vue géométrique sur les preuves et la formulation d'un projet ambitieux appelé par J.-Y. Girard "Géométrie de l'Interaction" (GOI). L'enjeu de ce projet est de mettre au premier plan, dans la définition des preuves, leur potentialité à enclencher une dynamique, celle de la normalisation. Autrement dit, il s'agit de pouvoir considérer les preuves relativement à une notion de *dualité*[2] qui, dans le cadre de la dynamique des preuves, s'exprime relativement à une notion d'*interaction*.

Le projet GOI trouve une réalisation dans la Ludique, qualifiée d'approche *purement interactive* de la logique. En effet, alors que traditionnellement, les objets premiers de la logique sont les formules et les preuves, la notion primitive en Ludique est la notion d'interaction, notion qui recouvre à la fois le fait qu'une rencontre advient entre deux objets et que cette rencontre crée un processus dynamique. Cette notion est primitive en Ludique dans la mesure où les objets principaux de la Ludique, appelés desseins, ne sont définis que pour remplir ce rôle : pouvoir rencontrer des objets semblables et que cette rencontre entre objets homogènes crée une dynamique de transformation. Ce n'est qu'ensuite, une fois que ces objets sont définis en même temps que la notion d'interaction qui leur est consubstantielle, que les objets traditionnels de la logique peuvent être retrouvés.

Nous en arrivons alors au dernier terme de la formulation considérée ici : la ludique est une *approche* de la logique. En fait, comme nous venons de le souligner, la Ludique se développe autour d'objets qui sont avant tout les phénomènes de l'interaction. Ce faisant, elle se place dans un espace plus large que celui des objets logiques

2. ou *orthogonalité* selon le vocabulaire de la géométrie.

traditionnels : les formules et les preuves ne sont que des objets particuliers dans ce cadre plus vaste de l'interaction. Comme nous en donnons quelques aperçus dans ce texte, un regard nouveau sur la logique est alors possible, un nouveau point de vue sur ses objets en même temps que l'émergence de concepts propres à cette théorie permettent la formulation de questions nouvelles et le renouvellement d'approches traditionnelles.

Le contenu de ce texte est organisé autour de trois chapitres. Le premier, intitulé **Une théorie logique basée sur l'interaction** constitue une introduction, à l'intention des lecteurs non familiers de la Ludique. Les lecteurs déjà au fait des objets et des principaux résultats de cette théorie pourront directement accéder à la dernière section de ce chapitre (section 1.2.3), qui seule fait état de travaux personnels.

Dans ce chapitre nous présentons les objets principaux de la Ludique ainsi qu'ils ont été introduits par J.-Y. Girard dans l'article séminal [35]. Les *desseins* ont été obtenus au terme d'une déconstruction et d'une abstraction de l'objet preuve comme support de l'interaction. L'*interaction* en tant que rencontre/confrontation entre desseins découle immédiatement de leur définition. Les modes d'accès et les formulations du processus d'interaction sont multiples, témoignant de la richesse du cadre ludique. On peut se focaliser sur l'exploration des objets ou bien sur le processus de transformation des objets, auquel donne lieu l'interaction et dans chaque cas, l'interaction peut se résoudre, ou bien diverger, ou bien boucler. Nous rappelons ensuite les principaux résultats constituant l'ossature de la théorie. La définition des desseins remplit l'objectif qui lui était assigné : ceux-ci sont en effet exactement définis par leur comportement lors de l'interaction. C'est ce qu'assure le théorème de séparation disant que deux desseins qui ont le même comportement vis à vis de l'interaction sont égaux. La définition de l'interaction permet d'exprimer dans un même cadre les différentes propriétés requises pour qu'un processus de transformation ait les bonnes propriétés d'un calcul. C'est ce qu'établissent les théorèmes d'associativité, de monotonie et de stabilité. Traditionnellement ces propriétés sont énoncées, les unes dans la syntaxe, les autres dans la sémantique. En Ludique, ces propriétés ont une formulation uniforme : elles s'expriment sur les mêmes objets, les desseins. Cette formulation uniforme justifie les commentaires soulignant que la Ludique subsume la dualité syntaxe/sémantique [34].

Nous présentons enfin la reconstruction de la logique traditionnelle dans le cadre ludique. C'est parmi les desseins que l'on va retrouver les preuves. La notion de formule logique est pensée, elle, selon l'approche dite BHK, qui préconise de comprendre la signification des formules comme ensembles de leur preuves. Une lecture intuitive des desseins est de les considérer comme des tentatives de preuves, il est alors naturel de comprendre les formules logiques comme l'ensemble des tentatives tentant de les établir, aussi bien celles qui vont aboutir que celles qui vont échouer. On relève au passage un avantage indéniable de l'approche ludique qui a généralisé la notion de preuve en tentative de preuve, permettant ainsi d'interpréter de façon homogène les formules démontrables et celles qui ne le sont pas. Les formules sont interprétées par des ensembles de desseins clos par bi-orthogonalité, appelés *comportements*. Parmi les desseins appartenant à l'interprétation d'une formule, certains vérifient des propriétés supplémentaires et sont alors reconnus comme des interprétations de preuves. Sous cet angle, la ludique constitue une sémantique de la logique linéaire. Nous rappelons comment sont interprétées les formules de la logique linéaire en ludique, en décrivant les opérations ludiques qui correspondent aux connecteurs de la logique linéaire. Un concept inédit, propre à la ludique est le concept d'*incarnation*. A l'instar de la notion de *base* dans les espaces vectoriels, l'incarnation d'un comportement est le sous ensemble des objets minimaux qui l'engendrent. Nous rappelons alors les théorèmes de complétude relatifs à cette dimension de la Ludique comme sémantique de la logique linéaire. La *complétude interne* assure que les constructions associées aux connecteurs linéaires se décomposent au niveau des desseins *incarnés*. Le résultat de *full completeness* est une conséquence de la complétude interne. Ce résultat dit qu'un dessein qui appartient à l'interprétation d'une formule Π^1 de la logique linéaire additive multiplicative construite à partir de variables propositionnelles [3] est l'interprétation d'une preuve, pourvu qu'il vérifie certaines propriétés clairement définies, parmi lesquelles le fait d'être incarné. A cette occasion nous présentons le résumé d'un travail effectué en collaboration avec M.-R. Fleury [17], visant à étendre un tel résultat de complétude aux formules d'un calcul des prédicats de la Logique Linéaire additive, multiplicative du second ordre.

Le second chapitre s'intitule **Ludique et théorie du calcul**. Au delà de la logique, la Ludique est une théorie de l'interaction, et l'interaction y satisfait les bonnes propriétés d'un calcul. La Ludique semble donc constituer un cadre théorique pertinent pour penser les objets et questionner les méthodes de la théorie de la computation. On peut toutefois s'interroger sur la place et le rôle occupé par l'approche ludique dans le domaine de l'étude de la computation, à coté des approches éprouvées dont les plus notables sont : la théorie de la démonstration, la théorie des types, la sémantique des jeux. Bien que riche de concepts novateurs : la séparation, l'incarnation, la complétude interne, la ludique originelle présente des limitations qui paraissent obérer quelque peu ses prétentions de cadre formel de la computation. Les

3. Une formule Π^1 est une formule dont les quantifications sur les variables propositionnelles sont universelles en position positive et existentielles en position négative.

desseins sont strictement linéaires et séquentiels. Le pouvoir d'expression est alors extrêmement limité si l'on ne peut rendre compte uniquement que de fonctions qui utilisent une fois et une seule chacun de leurs arguments, et qui le font de manière rigoureusement séquentielle. Nous rappelons alors au début de ce chapitre les nombreux travaux qui ont été réalisés pour étendre la ludique et dépasser ces contraintes. Ces travaux ont été effectués en modifiant les objets originels de la Ludique, les enrichissant de traits propres soit aux réseaux de preuves, comme l'ont fait F. Maurel et C. Faggian [24] qui ont défini les *Ludics nets* en relâchant la contrainte de séquentialité pour développer un modèle pour le calcul concurrent, soit aux λ-termes, comme l'a fait K. Terui dans [73], en définissant les c-desseins qui ne sont pas nécessairement linéaires, soit aux stratégies comme l'ont fait M. Basaldella et C. Faggian, dans [6], afin de pouvoir traiter les exponentielles.

Une approche complémentaire peut être développée dans l'autre direction, plutôt que d'étendre la Ludique pour retrouver les propriétés vérifiées par les réseaux, les λ-termes, les stratégies, on peut partir des concepts propres à la Ludique et les utiliser pour mieux comprendre voire enrichir les autres approches théoriques du calcul. Pour ce faire, une première étape est de bien comprendre ces nouveaux concepts. C'est dans cette direction que nous avons travaillé. Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus et les pistes actuellement abordées autour de l'exploration de la théorie ludique elle-même. En collaboration avec Christophe Fouqueré, nous nous sommes attachés à étudier le concept d'*incarnation*. Nous avons montré dans [27] comment le calcul de l'incarnation du comportement engendré par un ensemble de desseins était possible sans qu'il soit nécessaire de calculer ce comportement. Nous poursuivons actuellement notre exploration de la Ludique en vue de comprendre quelles sont dans ce cadre les frontières entre ce qui relève de la Logique linéaire (multiplicative additive) et ce qui n'en relèverait pas. Peut-on caractériser, parmi les comportements, ceux qui sont décomposables selon la grammaire des formules linéaires ? Et alors, peut-on caractériser d'autres décompositions et retrouver des constructions pertinentes dans le cadre de la théorie des types ?

Nous nous attachons, dans le troisième chapitre : **Ludique et langage naturel** a mettre en évidence une autre potentialité de la Ludique : sa pertinence pour constituer un cadre théorique propre à la formalisation de différents aspects des langues naturelles. La Logique et la réflexion sur le langage ont une longue histoire commune. Dès l'origine, l'avènement de la Logique, que la tradition attribue à Aristote, est motivée par la réflexion philosophique que le Stagirite poursuit sur le langage. Il fonde une discipline : la dialectique, dont l'objet est l'enchaînement des propositions dans les débats, et les propriétés qui en sont constitutives : la vérité des propositions, la correction des enchaînements. Quelques vingt cinq siècles plus tard pourtant, un fossé semble s'être creusé entre la logique mathématique, qui est devenue une branche des mathématiques et qui ne se préoccupe plus de la langue naturelle, et l'épistémologie, branche de la philosophie, qui ne paraît plus vraiment partager d'objets communs avec les mathématiciens. Pourtant, la logique mathématique, sous les auspices de Frege, Russell, Tarski et leurs descendants, reste un moteur puissant de la réflexion sur le langage. Autour du concept tarskyen de vérité, la sémantique formelle va se développer et de nombreux travaux vont s'inscrire dans cette continuité d'une sémantique pensée et formalisée à partir de la validité des propositions. Cette tradition prend acte de certaines évolutions des concepts de la logique mathématique et du développement de l'informatique qui lui est étroitement lié. Ainsi la sémantique de Montague [74] constitue une sémantique logique des phrases en langue naturelle, définie via le λ-calcul. Dans le cadre de la formalisation des grammaires des langues naturelles, de nombreuses propositions, initiées par le travail d'Alain Lecomte et Christian Rétoré : [69], [54], ont été développées autour d'une utilisation des objets de la Logique Linéaire pour rendre compte des grammaires catégorielles. On assiste depuis quelques années à un regain d'intérêt pour la théorie des types comme cadre formel d'étude des objets du langage. C'est par exemple dans ce cadre que Richard Moot et Christian Rétoré proposent de formaliser la sémantique lexicale [19]. C'est également dans le cadre de la théorie des types de Martin-Löf [59] que Robin Cooper [10] comme Aarne Ranta [68] poursuivent leurs projets de développer un cadre unifié des différents aspects des langues naturelles.

Pourtant, bien qu'au fait des nouveaux outils forgés par la logique mathématique, les études sur le langage ne prennent pas acte du changement de paradigme qui s'est opéré en Logique. Le coeur de la théorie de la démonstration n'est plus la formule, ni même la démonstration formelle, mais plutôt le processus correspondant à l'élimination des coupures. La Ludique se développe sur la base assumée de ce nouveau paradigme : elle se présente explicitement comme une théorie de l'interaction. Nous pensons qu'il est alors temps de repenser les liens entre logique et langage, à partir de ce nouveau paradigme logique : l'interaction, qui est centrale, via le dialogue, dans les phénomènes langagiers. En outre, la Ludique, offre un cadre plus large que celui de la logique *pure*, dont les objets traditionnels que sont les formules et les preuves sont des cas particuliers. Ainsi le cadre ludique pour penser le langage nous offre alors la possibilité de dépasser les contraintes logiques qui ont très tôt été pointées par les philosophes dits "du langage ordinaire" (Austin, Strawson, le second Wittgenstein), comme trop restrictives pour s'appliquer au langage naturel.

La Ludique a été utilisée dans une série d'articles afin de rendre compte de différents aspects du langage naturel : de la sémantique [50], [51], à l'argumentation [26],

[29], en passant par les figures du discours [52]. Nous reconstruisons dans ce chapitre l'exposé de cette formalisation ludique des dialogues en langue naturelle.

Chapitre 1

Une théorie logique basée sur l'interaction

La ludique [35] est une reconstruction de la Logique basée sur l'*interaction*. Dans cette perspective les objets premiers de la Logique ne sont plus les formules et les preuves, mais l'*élimination des coupures* elle-même, sous la forme d'une interaction entre des objets appelé *desseins*. Ces objets ne sont pas nécessairement des preuves et celles-ci, n'étant plus premières, sont à reconstruire. Ces objets, que nous appelons pour l'instant *objets-preuves*, doivent être redéfinis pour jouer le rôle de supports de l'interaction. Ils seront alors des *desseins*. Nous pouvons reconstituer la génèse des desseins à partir des questions suivantes : quels éléments est-il nécessaire de connaître d'un objet-preuve lorsque l'on est uniquement intéressé par son comportement lors de l'élimination des coupures ? De tels éléments pertinents pour l'élimination des coupures suffisent-ils pour déterminer complètement l'objet preuve ?

La procédure d'élimination des coupures consiste à remonter le long de chaque preuve, depuis la coupure jusqu'aux pas initiaux de la preuve (les axiomes). S'intéresser au comportement d'un objet-preuve vis à vis de l'élimination des coupures, c'est déterminer les invariants de cet objet-preuve lorsque l'on fait varier les contre-preuves avec lesquelles une coupure peut advenir. Cette remontée le long d'une preuve correspond à l'exploration de cette preuve depuis la conclusion jusqu'à ses prémisses, c'est-à-dire en fait à une *recherche de preuves*. Ainsi, la question de déterminer les éléments des preuves qui sont pertinents pour l'élimination des coupures peut alors être reformulée ainsi : quels sont les éléments d'un objet preuve qui sont pertinents pour la recherche de preuves ? Dans ce domaine de la recherche de preuves, J.-M. Andréoli [3] a montré une intéressante propriété de *focalisation* des preuves du calcul des séquents de la logique linéaire. La focalisation repose sur un regroupement des connecteurs linéaires selon le caractère réversible ou irréversible des règles qui les introduisent. Les connecteurs linéaires $\oplus$ et $\otimes$ ont des règles d'introduction droite irréversibles : déterminer les prémisses d'une telle règle n'est pas systématique mais exige un choix. Ces connecteurs dont les règles d'introduction sont irréversibles sont dit *positifs*. Les connecteurs $\parr$ et & ont des règles d'introduction droite réversibles, les prémisses sont déterminés sans ambiguïté possible, ils sont dits *négatifs*. Les règles logiques se voient alors attribuer une polarité positive ou négative : celle du connecteur qu'elles introduisent. Une preuve (sans coupure) du calcul des séquents linéaires monolatères est dite *focalisée* lorsque, considérée depuis le séquent conclusion vers les séquents prémisses, elle respecte la discipline suivante : chaque fois qu'on décompose une formule, on continue à décomposer ses sous-formules de même polarité ; si un séquent contient des formules négatives, on commence par décomposer celles-ci. Le résultat intéressant pour la recherche de preuves est que l'ensemble des preuves focalisées est complet pour la prouvabilité. Ainsi, lors d'une recherche de preuves, on peut adopter un processus alternant des étapes *négatives (asynchrones, réversibles)* et des étapes positives (*synchrones, irréversibles)*. C'est-à-dire, dans l'arbre de preuves parcouru de la conclusion vers les axiomes, si on se trouve à l'étape d'un séquent contenant une formule négative, on décompose celle-ci jusqu'à ses sous-formules positives, si le séquent ne contient que des formules positives, on en choisit une et on la décompose jusqu'à ses sous-formules négatives. On peut restreindre encore davantage l'espace des preuves et introduire une version *hyperséquentialisée* du calcul des séquents de la logique linéaire additive et multiplicative [3, 34, 13]. Un tel calcul ne possède que deux règles logiques, une positive et une négative, qui alternent strictement, dont les formules sont uniquement positives et apparaissent dans des séquents $\Gamma \vdash \Delta$, soit en position positive (dans Δ), soit (au plus une) en position négative (dans Γ). Soulignons également que les connecteurs binaires habituels sont généralisés en connecteurs n-aires. On note $\downarrow F^{\perp}$ le cas unaire du tenseur.

Un ensemble de formules atomiques (notées P ci-dessous) étant donné, les formules, et les règles de ce calcul sont les suivantes :

Formules $\quad P|1|0|(F^{\perp} \otimes \cdots \otimes F^{\perp}) \oplus \cdots \oplus (F^{\perp} \otimes \cdots \otimes F^{\perp})$

Axiomes $\quad \dfrac{}{P \vdash P, \Delta} \qquad \dfrac{}{\vdash 1} \qquad \dfrac{}{\vdash \downarrow 0^{\perp}, \Delta}$

Coupure

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta_1 \quad A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

Règle négative

$$\frac{\vdash A_{11}, \ldots, A_{1n_1}, \Delta_1 \quad \ldots \quad \vdash A_{p1}, \ldots, A_{pn_p}, \Delta_p}{(A_{11}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{1n_1}^{\perp}) \oplus \cdots \oplus (A_{p1}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{pn_p}^{\perp}) \vdash \Delta}$$

où pour $i \in \{1, \ldots ; p\}$, $\Delta_i \subset \Delta$.

Règle positive

$$\frac{A_{i1} \vdash \Delta_1 \quad \ldots \quad A_{in_i} \vdash \Delta_{n_i}}{\vdash (A_{11}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{1n_1}^{\perp}) \oplus \cdots \oplus (A_{p1}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{pn_p}^{\perp}), \Delta}$$

où $\cup\Delta_k \subset \Delta$ et pour $k, l \in \{1, \ldots n_i\}$, $\Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset$.

Exemple **1** *Soient A, B et C des formules négatives, D et E des formules positives, les formules $A \otimes B \otimes C$ et $A \otimes (D^{\perp} \oplus E^{\perp})^{\perp}$ sont positives. Leurs preuves, de la conclusion vers les axiomes, utilisant les règles du calcul ci-dessus, commencent de la façon suivante :*

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ A^{\perp} \vdash\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ B^{\perp} \vdash\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ C^{\perp} \vdash\end{matrix}}{\vdash A \otimes B \otimes C}$$

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ A^{\perp} \vdash\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \vdash D\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \vdash E\end{matrix}}{D^{\perp} \oplus E^{\perp} \vdash}}{\vdash A \otimes (D^{\perp} \oplus E^{\perp})^{\perp}}$$

Les arbres de preuves peuvent aussi être représentés à l'aide des arbres de dérivation dont les nœuds sont les règles utilisées dans la preuve, indiquées par la formule principale et ses sous-formules et en notant + lorsque c'est une règle positive, − sinon :

$$\begin{matrix}\vdots \\ (+, A \otimes B \otimes C, \{A^{\perp}, B^{\perp}, C^{\perp}\})\end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{matrix}\vdots & \vdots \\ (+, D, ?) & (+, E, ?) \\ & | \end{matrix} \\ \begin{matrix}\vdots \\ A^{\perp}\end{matrix} & (-, D^{\perp} \oplus E^{\perp}, \{D\}, \{E\}) \\ \multicolumn{2}{c}{(+, A \otimes (D^{\perp} \oplus E^{\perp})^{\perp}, \{A^{\perp}, D^{\perp} \oplus E^{\perp}\})} \end{matrix}$$

Remarquons alors que la présentation hyperséquentialisée des preuves apporte une réponse à notre question de départ. Elle permet de se débarrasser des parties de l'objet preuve qui sont superflues pour la recherche de preuves et, de façon équivalente, sont superflues pour l'élimination des coupures. Considérons par exemple des formules négatives A, B et C. Que l'on cherche une preuve de $A \otimes (B \oplus C)$ ou bien une preuve de $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$, il suffit, dans les deux cas, de trouver soit une preuve de A et une de B, soit une preuve de A et une de C. De même, en terme d'élimination des coupures, partant d'une coupure sur $A \otimes (B \oplus C)$ ou sur $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$, la procédure se poursuit soit par des coupures sur A et sur B, ou bien par des coupures sur A et sur C. Du point de vue de la recherche de preuves, comme de celui de l'élimination des coupures, la distinction entre les formules $A \otimes (B \oplus C)$ et $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ n'a pas lieu d'être puisque ces dernières ont exactement le même comportement. En outre, nous pouvons remarquer que nous n'avons pas besoin de considérer les sous-formules $B \oplus C$, $A \otimes B$, $A \otimes C$. Les seules sous-formules pertinentes sont celles qui sont de polarité opposée, ici A, B et C. Le calcul hyperséquentialisé, qui ne retient qu'une seule formulation parmi des formules équivalentes (ici des formules $A \otimes (B \oplus C)$ et $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ on retiendra la seconde), et dont les règles logiques permettent d'accéder directement aux sous-formules de polarité opposée, évite ces redondances.

Pour construire les desseins, les choix du calcul hyperséquentialisé sont repris en Ludique, et sont même poussés encore plus loin : plutôt que de garder la forme canonique des formules linéaires (des plus de tenseurs de formules négatives), la ludique ne conserve que leur *adresse*, c'est-à-dire la position relative d'une formule par rapport à l'occurrence de la formule dont elle est sous-formule. Une telle adresse est un *lieu* sur lequel une *interaction*, *i.e.*, une coupure, peut advenir. En termes ludiques, une règle logique est remplacée par une règle faisant passer (du bas vers le haut) d'un lieu vers un nombre fini de sous-lieux suivants. Un lieu est dénoté par une suite finie d'entiers et ses sous-lieux immédiats sont obtenus en ajoutant à cette liste un entier différent pour chaque nouveau sous-lieu.

EXEMPLE **2** *Les parties de preuves de LL suivantes :*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \vdash A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \vdash B\end{matrix}}{\vdash A \otimes B}}{\vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)} \qquad et \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \vdash A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \vdash B\end{matrix}}{\vdash B \oplus C}}{\vdash A \otimes (B \oplus C)}$$

une fois hyperséquentialisées deviennent toutes deux $\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A^{\perp} \vdash\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B^{\perp} \vdash\end{matrix}}{\vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)}$

et en Ludique, elles sont toutes deux remplacées par :
$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \xi.1\vdash & & \xi.2\vdash\end{matrix}}{\vdash \xi}$$

Dans le calcul hyperséquentialisé, on peut s'attendre à ce qu'une recherche de preuves s'arrête parce qu'on arrive à des atomes qui ne sont plus décomposables. A ce moment, on aboutit soit à un échec de cette recherche, soit à des axiomes. Mais en Ludique, il n'y a plus de formules, donc ni formules atomiques, ni axiomes. Dans ce cadre ouvert, on a quand même besoin que certaines interactions aboutissent. Suivant toujours l'intuition de la recherche de preuves, une règle est rajoutée que l'on peut intuitivement comprendre comme un abandon dans la recherche et qui est appelée *daïmon*.

Une fois que la généralisation ci-dessus est réalisée, l'histoire n'est pas encore finie. En effet, les desseins ne sont pas encore complètement déterminés par leurs interactions. En fait, comme dans le cas de l'exemple 3 ci-dessous, deux présentations de desseins comme arbres de preuve qui diffèrent uniquement selon la répartition des contextes ne peuvent pas être distingués par leurs interactions. Il n'est pas possible de trouver un contre-dessein avec lequel l'interaction serait différente. Il faut alors trouver une présentation plus primitive que celle inspirée par les arbres de preuves. La Ludique retient alors les suites alternées d'*action*, où la notion d'action remplace celle de règle lorsque les objets ne sont plus des formules mais des lieux. Une *action* est de la forme $(+/-, \xi, \{i_1, \ldots, i_n\})$ où les i_j sont des entiers concaténés comme suffixes du lieu ξ afin de constituer ses sous-lieux. Et les suites alternées d'actions sont appelées des *chroniques*. Un dessein est alors défini comme un ensemble de chroniques vérifiant certaines contraintes de cohérence et clos par préfixes, et il peut être représenté comme un arbre d'actions, ou plus précisément, comme une forêt d'actions, afin de prendre en compte le cas additif.

Exemple **3** *Plutôt que les représentations par des arbres de preuve, la Ludique utilise des arbres d'actions (à droite).*

$$\dfrac{\dfrac{\xi.1.4 \vdash \xi.2 \quad \xi.1.7 \vdash \xi.3}{\vdash \xi.1, \xi.2, \xi.3}}{\xi \vdash} \quad \textit{et} \quad \dfrac{\dfrac{\xi.1.4 \vdash \xi.2, \xi.3 \quad \xi.1.7 \vdash}{\vdash \xi.1, \xi.2, \xi.3}}{\xi \vdash} \quad \textit{par} \quad \begin{matrix}(+, \xi.1, \{4, 7\})\\ |\\ (-, \xi, \{1, 2, 3\})\end{matrix}$$

Sous forme d'ensemble de chroniques, le dessein représenté par l'arbre d'action est :

$$\{(-, \xi, \{1, 2, 3\})\ ; (-, \xi, \{1, 2, 3\})(+, \xi.1, \{4, 7\})\}$$

1.1 Les objets de la Ludique

1.1.1 Actions, Desseins

La notion d'*action* et celle de *relation de justification* sont définies en Ludique à l'aide de la notion de *lieu* ou *adresse*. Si l'on veut garder une intuition logique des objets, on peut dire que, de la même façon que du concept de démonstration formelle n'est retenu que son aspect "support d'interaction" (dessein), les formules sont oubliées au profit de leur adresse : un lieu dans le chemin de l'interaction. Techniquement, les lieux ou adresses sont des suites finies d'entiers.

Définition 1 (Action) *Une* action propre κ *est un triple* (ϵ, ξ, I) *où :*
\- $\epsilon \in \{+, -\}$ *est la* **polarité** *de* κ*,*
\- *le lieu* ξ *est le* **focus** *de* κ*,*
\- *l'ensemble fini d'entiers* I *est la* **ramification** *de* κ*.*
En plus des actions propres, il existe une action positive impropre, appelée le **daïmon** *et notée* $\maltese$*.*

Dans ce qui suit, on note $\xi.i$ la suite d'entiers ξ suivie de l'entier i. On note $\overline{\epsilon}$ la polarité duale de ϵ, *e.g.* si $\epsilon = +$ alors $\overline{\epsilon} = -$ et réciproquement. Finalement, si $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, alors $\xi.I$ est l'ensemble des suites d'entiers $\{\xi.i_1, \xi.i_2, \ldots, \xi.i_n\}$. La ramification d'une action détermine les lieux qui peuvent être utilisés pour continuer une interaction. Les relations de justification et de dualité suivent la définition d'action. Une action $(\epsilon, \xi.i, J)$ est justifiée par l'action $(\overline{\epsilon}, \xi, I)$ lorsque $i \in I$. L'action duale de l'action (ϵ, ξ, I) est l'action $(\overline{\epsilon}, \xi, I)$.

Les objets principaux de la Ludique sont les desseins, *i.e.* des ensembles de *chroniques* satisfaisant des propriétés spécifiques. Une chronique est une séquence d'actions qui satisfait elle aussi certaines propriétés, en particulier des propriétés de justification et de linéarité.

Définition 2 (Chronique) *Une* **chronique** $\mathfrak{c}$ *est une suite finie non vide d'actions de polarisés alternées telle que :*

— Action positive propre : *Une action positive propre est soit justifiée,* i.e. *son focus a été produit par une action précédente dans la séquence, sinon elle est appelée une action initiale.*

— Action négative : *Sauf si elle est la première action de la chronique, et dans ce cas, elle est dite initiale, une action négative est justifiée par l'action positive qui la précède immédiatement dans la chronique.*

— Linéarité : *Les actions ont des foci distincts.*

Remarque : Une conséquence de la condition *action négative* est que, si l'action "daimon" occurre dans une chronique, c'est nécessairement en dernière position.

Définition 3 (Cohérence entre chroniques) *Deux chroniques* $\mathfrak{c}_1$ *et* $\mathfrak{c}_2$ *sont* **cohérentes**, i.e. $\mathfrak{c}_1 \supset\!\!\subset \mathfrak{c}_2$, *lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

— Comparabilité : *Soit une chronique étend l'autre, soit elles diffèrent sur des actions négatives,* i.e. *si* $w\kappa_1 \supset\!\!\subset w\kappa_2$ *alors soit* $\kappa_1 = \kappa_2$*, soit* κ_1 *et* κ_2 *sont des actions négatives.*

— Propagation : *si deux chroniques divergent sur des actions négatives dont les foci sont distincts, alors deux actions ultérieures dans chacune des deux chroniques n'ont jamais le même focus,* i.e. *si* $w(-, \xi_1, I_1)w_1\sigma_1 \supset\!\!\subset w(-, \xi_2, I_2)w_2\sigma_2$ *avec* $\xi_1 \neq \xi_2$ *alors* σ_1 *et* σ_2 *ont des foci distincts.*

Pour définir les desseins, nous avons besoin des notions de **fourche** et de **base**.

Définition 4 — *Une* **fourche** *est un séquent de lieux* $\Gamma \vdash \Delta$ *tels que :* Δ *est un ensemble fini de lieux;* Γ *contient au plus un lieu; les lieux de* $\Gamma \cup \Delta$ *sont deux à deux disjoints* i.e. *aucun lieu n'est sous-lieu d'un autre.*
Si Γ *est vide, la fourche est dite* positive*, sinon, elle est* négative.

— *Une chronique* $\mathfrak{c}$ *est de* **base** *la fourche* $\Gamma \vdash \Delta$ *lorsque : tous les foci des actions initiales positives (resp. négatives) de* $\mathfrak{c}$ *appartiennent à* Δ *(resp.* Γ*) et si la première action de* $\mathfrak{c}$ *est positive alors* Γ *est vide.*

Remarque : Si une chronique $\mathfrak{c}$ est de base $\Gamma \vdash \Delta$, et si $\Gamma \vdash \Delta'$ est une fourche telle que $\Delta \subset \Delta'$ alors $\mathfrak{c}$ est de base $\Gamma \vdash \Delta'$.

Définition 5 (Dessein) *Un* **dessein** $\mathfrak{D}$*, de base* $\Gamma \vdash \Delta$*, est un ensemble de chroniques de base* $\Gamma \vdash \Delta$*, satisfaisant les conditions suivantes :*
- Forêt : *L'ensemble* $\mathfrak{D}$ *est clos par préfixes.*
- Cohérence : *L'ensemble* $\mathfrak{D}$ *est une clique de chroniques,* i.e. $\forall \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{c}_1 \supset\!\!\subset \mathfrak{c}_2$.
- Positivité : *Une chronique sans extension dans* $\mathfrak{D}$ *se termine sur une action positive.*
- Totalité : *L'ensemble* $\mathfrak{D}$ *est non vide lorsque la base est positive.*

Définition 6 *Un* **réseau** *est un ensemble fini de desseins de bases disjointes deux à deux.*

Une présentation alternative des desseins, plus proche des démonstrations formelles, est donnée par la notion de **dessin**.

Définition 7 (Dessin)

— *Un* **dessin** *de base* $\Gamma \vdash \Delta$ *est un arbre de fourches, dont les feuilles sont des fourches négatives ou des fourches positives surmontées d'une règle* `daïmon`*, et qui sont construits à partir des trois règles suivantes :*

- DAIMON

$$\frac{}{\vdash \Delta}\ \maltese$$

- RÈGLE POSITIVE

$$\frac{\ldots \quad \xi.i \vdash \Delta_i \quad \ldots}{\vdash \Delta, \xi}\ (+, \xi, I)$$

pour $i \in I$*, les* Δ_i *sont deux à deux disjoints et contenus dans* Δ*.*

- RÈGLE NÉGATIVE

$$\frac{\ldots \quad \vdash \xi.I, \Delta_I \quad \ldots}{\xi \vdash \Delta}\ (-, \xi, \mathfrak{N})$$

$\mathfrak{N}$ *est un ensemble (qui peut être vide ou infini) de ramifications. Pour tout* $I \in \mathfrak{N}$*, les* Δ_I*, non nécessairement disjoints sont contenus dans* Δ*.*

— *La notion de réseau se transpose immédiatement dans le cas des dessins. Un réseau de dessins est un ensemble fini de dessins, de bases deux à deux disjointes.*

Les dessins ressemblent à des arbres de preuves en calcul des séquents. En considérant qu'un lieu est l'abstraction d'une formule, on peut lire les dessins comme des preuves, des preuves qui sont toutefois très contraintes. D'une part, toutes les formules sont des formules positives très particulières : des disjonctions additives de conjonctions multiplicatives de formules négatives et ces sous-formules négatives elles-même sont des négations de formules positives de cette forme. En outre les séquents bilatères sont contraints à ne contenir qu'au plus une formule à gauche. Ces contraintes très fortes sur les formules et les séquents permettent alors de ne considérer que deux règles "logique" : une règle positive lorsqu'il s'agit de décomposer une formule qui est dans la partie droite du séquent et une règle négative lorsqu'il s'agit de décomposer une formule qui est dans la partie gauche du séquent. Les preuves sont alors des alternances de telles règles et doivent se terminer sur une règle positive, qui elle même est soit la règle logique que l'on vient de décrire, soit un "axiome non logique" correspondant à la règle daïmon des dessins. Le calcul hyperséquentialisé qui correspond à ces contraintes a été présenté dans l'introduction de ce chapitre.

La notion de dessin permet également de considérer des *sous-dessins*, au sens de *sous-preuves*. Un sous-dessin d'un dessin $\mathfrak{D}$ est un sous arbre complet $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{D}$ dont la racine est une fourche prémisse d'une règle occurrant dans $\mathfrak{D}$. Nous verrons que l'usage des sous-dessins simplifie la définition de l'interaction.

Exemple 4 **Desseins, dessins, sous-dessins**

— *Le dessein de base* $\vdash \Gamma$ *contenant une seule chronique, elle même réduite à l'action* $\maltese$ *est noté* $\mathfrak{Dai}_+$. *On note de la même façon le dessin positif correspondant, consistant en une unique règle positive, la règle daïmon :* $\dfrac{}{\vdash\ \Gamma}\maltese$.

— *Le dessein vide de base* $\xi \vdash$ *est noté* $\mathcal{S}k_\xi$. *Le dessin qui lui correspond est l'arbre réduit à la racine* $\xi \vdash$.

— *Le fax, noté* $\mathcal{F}ax_{\xi,\xi'}$ *est un dessein récursivement défini :*

$$\mathcal{F}ax_{\xi,\xi'} = \{(-,\xi,I)(+,\xi',I)\mathfrak{c}_i;\ I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \quad \textit{et pour tout } i \in I\ \mathfrak{c}_i \in \mathcal{F}ax_{\xi'.i,\xi.i}\}$$

On note encore $\mathcal{F}ax_{\xi,\xi'}$, *sa représentation sous forme d'un dessin récursivement défini :*

$$\dfrac{\dots \qquad \dfrac{\dots \quad \begin{matrix}\mathcal{F}ax_{\xi'.i,\xi.i}\\ \xi'.i \vdash \xi.i\end{matrix} \quad \dots}{\vdash \xi.I,\xi'}\,(+,\xi',I) \qquad \dots}{\xi \vdash \xi'}\,(-,\xi,\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

Où $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ *est l'ensemble des parties finies de* $\mathbb{N}$.

Lorsque $I \in \mathbb{N}$ *et* $i \in I$, $\mathcal{F}ax_{\xi'.i,\xi.i}$ *est un sous-dessin de* $\mathcal{F}ax_{\xi,\xi'}$.

— *Les dessins suivants :*

$$\dfrac{\dfrac{0.0.2.0.0 \vdash}{\vdash 0.0.2.0}}{0.0.2 \vdash} \quad ; \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 0.0.3.0}\maltese}{0.0.3 \vdash}$$

sont des sous-dessins de

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0.0.1.0.0.0.0\vdash}{\vdash 0.0.1.0.0.0}}{0.0.1.0.0\vdash}}{\vdash 0.0.1.0}}{0.0.1\vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{0.0.2.0.0\vdash}{\vdash 0.0.2.0}}{0.0.2\vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 0.0.3.0}\maltese}{0.0.3\vdash}}{\vdash 0.0}}{0\vdash}$$

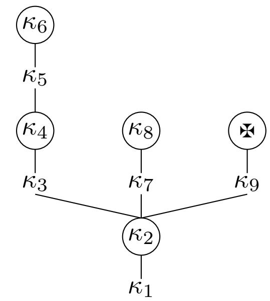
Mais le dessin suivant n'en est pas un :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{0.0.2.0.0\vdash}{\vdash 0.0.2.0}}{0.0.2\vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 0.0.3.0}\maltese}{0.0.3\vdash}}{\vdash 0.0}$$

La notion de dessein est plus primitive que celle de dessin. Un dessin est la représentation d'un dessein sous-jacent de même base. Ce dessein est l'ensemble des chroniques obtenues en retenant les actions successives qui sont utilisées dans les règles du dessin lorsque celui-ci est lu de bas en haut. Partant de la racine, on construit l'ensemble $\mathcal{S}$ de séquences en fonction des règles $\mathcal{R}$ que l'on traverse :
- si $\mathcal{R}$ est négative, pour toute chronique $\mathfrak{w}$ appartenant à $\mathcal{S}$ dont la dernière action crée le focus de $\mathcal{R}$ ou qui est vide si ce focus est initial, si $\kappa^- \in \mathcal{R}$ alors $\mathfrak{w}\kappa^- \in \mathcal{S}$.
- si $\mathcal{R}$ est positive, elle est constituée d'une unique action κ^+, alors, pour toute $\mathfrak{w}$ appartenant à $\mathcal{S}$, $\mathfrak{w}\kappa^+ \in \mathcal{S}$.

EXEMPLE **5**

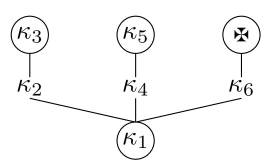
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0.0.1.0.0.0.0\vdash}{\vdash 0.0.1.0.0.0}\,\kappa_6}{0.0.1.0.0\vdash}\,\kappa_5}{\vdash 0.0.1.0}\,\kappa_4}{0.0.1\vdash}\,\kappa_3 \qquad \dfrac{\dfrac{0.0.2.0.0\vdash}{\vdash 0.0.2.0}\,\kappa_8}{0.0.2\vdash}\,\kappa_7 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 0.0.3.0}\,\maltese}{0.0.3\vdash}\,\kappa_9}{\vdash 0.0}\,\kappa_2}{0\vdash}\,\kappa_1$$



un dessin *le dessein associé*

Si à chaque dessin $\mathfrak{d}$ est associé un unique dessein $\mathfrak{D}$ de même base, l'inverse n'est pas vrai. On peut associer à un dessein, un dessin de même base, mais pas de façon unique.

EXEMPLE **6** *Le dessein suivant de base* $\vdash \xi, \sigma, \tau$ *:*



peut être associé aux deux dessins :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi.1.0.0\vdash\sigma,\tau}{\vdash\xi.1.0,\sigma,\tau}\,\kappa_3}{\xi.1\vdash\sigma,\tau}\,\kappa_2 \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash\xi.2.0}\,\kappa_5}{\xi.2\vdash}\,\kappa_4 \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash\xi.3.0}\,\maltese}{\xi.3\vdash}\,\kappa_6}{\vdash\xi,\sigma,\tau}\,\kappa_1 \qquad \textit{et} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi.1.0.0\vdash}{\vdash\xi.1.0}\,\kappa_3}{\xi.1\vdash}\,\kappa_2 \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash\xi.2.0,\sigma}\,\kappa_5}{\xi.2\vdash\sigma}\,\kappa_4 \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash\xi.3.0,\tau}\,\maltese}{\xi.3\vdash\tau}\,\kappa_6}{\vdash\xi,\sigma,\tau}\,\kappa_1$$

Nous observons dans l'exemple ci-dessus que ce qui est en cause et qui ne permet pas d'associer de façon univoque un dessin à un dessein, c'est que rien n'indique comment répartir dans les sous-dessins les lieux qui ne sont pas foyer d'une action. Autrement dit, suivant l'intuition de la notion de dessein comme une recherche de preuve, le problème qui se pose est celui du partage des contextes pendant la déconstruction d'une conjonction multiplicative. Un dessin est donné avec un partage des contextes déjà décidé. Dans un dessein, les chroniques contraignent également le partage des contextes, mais seulement pour les lieux du contexte qui vont être focus d'une action ultérieure, puisqu'on repère ainsi à quelles chroniques ils appartiennent.

Remarquons que si un dessein est *exact*, c'est-à-dire si tous les lieux initiaux ou créés par une action négative sont effectivement foyer d'une action [35], alors un unique dessin peut lui être associé. Ainsi, guidés par cette propriété, nous pouvons associer de façon univoque un dessin particulier à chaque dessein $\mathfrak{D}$, que nous appellerons *dessin sobre associé*. Pour ce faire, nous répartissons, à chaque étape les seuls lieux qui sont effectivement foyers d'une action ultérieure et nous effaçons les autres. Nous obtenons, de la même façon, une notion de sous-dessein que nous appellerons *sous-dessein sobre*.

Définition 8 (Sous-desseins sobres) — **Sous-dessein sobre immédiat**

- Soit $\mathfrak{D}$ un dessein négatif non vide de base $\xi \vdash \Delta$, soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des ramifications de ses premières actions. Pour tout $I \in \mathcal{N}$, l'ensemble suivant de chroniques :

$$\mathfrak{D}_I = \{\mathfrak{w};\ (-, \xi, I)\mathfrak{w} \in \mathfrak{D}\}$$

est un dessein de base $\vdash \xi.I, \Delta_I$ où Δ_I contient les adresses qui appartiennent à Δ et qui sont foyer d'une action dans une chronique $(-, \xi, I)\mathfrak{w}$ de $\mathfrak{D}$. Pour $I \in \mathcal{N}$, les desseins $\mathfrak{D}_I$ de base $\vdash \xi.I, \Delta_I$ sont les **sous-desseins sobres immédiats** *de $\mathfrak{D}$.*

- Soit $\mathfrak{D}$ un dessein positif de base $\vdash \xi, \Delta$ distinct de $\mathfrak{Dai}_+$. Sa première action est une action propre $(+, \xi, K)$. Pour tout $k \in K$, $\mathfrak{D}_k$ est défini de la façon suivante :

- *il contient les chroniques $\mathfrak{w}$ qui sont telles que $(+, \xi, K)\mathfrak{w} \in \mathfrak{D}$ et dont la première action (négative) est de focus $\xi.k$*
- *il est de base $\xi.k \vdash \Delta_k$ où Δ_k contient les adresses qui appartiennent à Δ et qui sont foyer d'une action dans une chronique $(+, \xi, K)\mathfrak{w}$ de $\mathfrak{D}$, lorsque la première action de $\mathfrak{w}$ est de focus $\xi.k$.*

Les desseins $\mathfrak{D}_k$ sont les **sous-desseins sobres immédiats** *de $\mathfrak{D}$.*

— **Sous-dessein sobres** *La relation de sous-dessein sobre est la clôture transitive de la relation de sous-dessein sobre immédiat.*

Définition 9 (Dessin sobre associé) *Le dessin sobre associé à un dessein $\mathfrak{D}$ est un dessin $\mathfrak{D}_m$ de même base, défini par induction de la façon suivante :*

- *Si* $\mathfrak{D} = \mathfrak{Dai}_+$ *de base* $\vdash \Delta$ *alors,* $\mathfrak{D}_m = \overset{\longrightarrow\maltese}{\vdash \Delta}$.
- *Si* $\mathfrak{D}$ *est négatif et vide de base* $\xi \vdash \Delta$*, alors* $\mathfrak{D}_m$ *est le dessin réduit à la racine* $\xi \vdash \Delta$.
- *Si* $\mathfrak{D}$ *est négatif et non vide, de base* $\xi \vdash \Delta$*, soit* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des ramification de ses premières actions. On considère l'ensemble de ses sous-desseins sobres immédiats* $\mathfrak{D}_I$ *de base* $\vdash \xi.I, \Delta_I$*, pour* $I \in \mathcal{N}$*,* $\mathfrak{D}_m$ *est le dessin suivant :*

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathfrak{D}_{Im} \\ \vdots \\ \vdash \xi.I, \Delta_I \end{matrix} \qquad \dots \qquad \begin{matrix} \mathfrak{D}_{Jm} \\ \vdots \\ \vdash \xi.J, \Delta_J \end{matrix}}{\Gamma \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\xi,\mathcal{N})}$$

où les $\mathfrak{D}_{Im}$ *sont les dessins sobres associés aux sous-desseins sobres immédiats de* $\mathfrak{D}$.

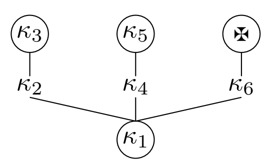
- *Si* $\mathfrak{D}$ *est un dessein de base* $\vdash \Delta$ *et de première action* $(+, \xi, K)$*. On considère l'ensemble de ses sous-desseins sobres immédiats* $\mathfrak{D}_k$ *de base* $\xi.k \vdash, \Delta_k$*, pour* $k \in K$*. Le dessin sobre associé à* $\mathfrak{D}$ *est le dessin suivant :*

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathfrak{D}_{km} \\ \vdots \\ \xi.k \vdash \Delta_k \end{matrix} \qquad \dots \qquad \begin{matrix} \mathfrak{D}_{hm} \\ \vdots \\ \xi.h \vdash \Delta_h \end{matrix}}{\vdash \xi, \Delta}\,{\scriptstyle(\xi,K)}$$

où les $\mathfrak{D}_{Im}$ *sont les dessins sobres associés aux sous-desseins sobres immédiats de* $\mathfrak{D}$.

Remarque : Par construction, le dessin sobre associé à un dessein est unique.

Exemple **7** *L'unique dessin sobre associé au dessein suivant de base* $\vdash \xi, \sigma, \tau$ *:*



est le dessin :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi.1.0.0 \vdash}{\vdash \xi.1.0}\kappa_3}{\xi.1 \vdash}\kappa_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.2.0}\kappa_5}{\xi.2 \vdash}\kappa_4 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.3.0}\maltese}{\xi.3 \vdash}\kappa_6}{}}{\vdash \xi, \sigma, \tau}\kappa_1$$

1.1.2 Interaction

L'interaction a lieu dans des réseaux de desseins spécifiques appelés *réseaux de coupures*. Un réseau de coupures est un ensemble fini de desseins, dont les bases vérifient la condition suivante : chaque adresse apparaît dans la base d'au plus deux desseins et dans ce cas, c'est en position duale dans les deux bases, c'est-à-dire dans la partie positive d'une base et dans la partie négative d'une autre base, elle est alors dite une *coupure* du réseau ; enfin, le graphe dont les nœuds sont les bases et dont les arêtes sont les coupures, est acyclique et connexe. La base du réseau contient les adresses non coupées, elle est donc de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ contient les adresses en position négative non coupées, donc au plus une, puisque le graphe des adresses est connexe et Δ est l'ensemble des adresses positives non coupées.

Afin de définir l'interaction, on introduit la notion de dessein [1] *principal* d'un réseau de coupure : c'est le dessein du réseau dont la partie négative de la base est soit vide, soit non coupée (il y a un unique tel dessein dans un réseau de coupure.), c'est-à-dire que le dessein principal est celui dont la base a la même partie négative que la base du réseau.

Une autre notion est encore à introduire : la distinction entre *cas clos* et *cas ouvert*. Si les adresses des bases d'un réseau de coupures sont toutes coupées, ce réseau de coupures est dit *clos*, sinon, il est dit *ouvert*. Ces deux situations sont également importantes. Le cas clos permet de définir la notion d'orthogonalité, c'est-à-dire le pendant technique de la notion de *dualité* ou de *négation logique*. C'est l'opération de base à partir de laquelle les formules logiques peuvent être reconstruites. Le cas ouvert permet de retrouver le caractère calculatoire, dynamique de l'interaction. En logique il correspond au *modus ponens*, c'est-à-dire à l'aspect inférentiel, au déploiement des raisonnements. Ainsi, en tenant les deux bouts on tient la dimension ontologique et la dimension effective de l'interaction : ce qu'elle permet de dire de ce que sont les choses, ce qu'elle permet de calculer.

Enfin, dans l'article séminal [35], l'interaction est d'abord définie sur les dessins, mettant ainsi l'accent sur l'interaction comme abstraction de l'élimination des coupures. La définition de l'interaction sur les desseins est une notion un peu plus subtile qui manipule la notion de chemin d'interaction sous le terme de *dispute* et qui manipule, dans le cas ouvert, une notion de "pull-back". Cette définition est moins habituelle en théorie de la démonstration que celle correspondant à l'élimination des coupures. Elle permet par contre une lecture en terme de sémantique des jeux, ainsi que l'ont montré Claudia Faggian et Martin Hyland [21], [23]. Ici nous présentons l'interaction comme élimination des coupures, c'est-à-dire entre dessins. Cette défi-

1. Notion qui se transpose directement aux dessins.

nition peut être immédiatement transposée à l'interaction entre desseins grâce à la notion de dessin sobre associé. Dans le chapitre suivant, nous évoquerons l'interaction définie à partir de la notion de dispute, à l'occasion de sa présentation en termes de chemins d'interaction.

Interaction : cas clos

Dans le cas clos, le dess(e)in principal est positif et la base du réseau est réduite à $\vdash$. Ainsi si une interaction se passe bien, c'est-à-dire se termine en un dess(e)in, celui-ci sera $\mathfrak{Dai}_+$. On voit bien que l'enjeu de l'interaction dans le cas clos n'est pas le résultat d'un calcul mais plutôt le bon déroulement de l'interaction.

Définition 10 (Interaction entre dessins, cas clos) *Soit $\mathfrak{R}$ un réseau de coupures clos. Le résultat de l'interaction, noté $[\![\mathfrak{R}]\!]$, est défini de la façon suivante : Soit $\mathfrak{D}$ le dessin principal de $\mathfrak{R}$, et soit κ la première règle de $\mathfrak{D}$,*

- *si κ est l'action daïmon, alors $[\![\mathfrak{R}]\!] = \mathfrak{Dai}_+$,*
- *sinon κ est une action positive propre $(+, \sigma, I)$ telle que σ est reliée par coupure à un autre dessin $\mathfrak{E}$ (du réseau clos) dont la première action est $(-, \sigma, \mathcal{N})$ (où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des ramifications des actions négatives de focus σ dans ce dessin) :*
  - *Si $I \notin \mathcal{N}$, alors l'interaction diverge. $[[\mathfrak{R}]]$ est l'ensemble vide de chronique de base $\vdash$, ce n'est pas un dess(e)in !*
  - *Sinon, l'interaction se poursuit sur le réseau constitué des sous dessins de $\mathfrak{D}$ et de $\mathfrak{E}$ déterminés par l'action (ϵ, σ, I) et le reste connecté de $\mathfrak{R}$.*

Il est alors immédiat de donner la définition de l'interaction dans un réseau de desseins. Il suffit d'associer à chacun des desseins du réseau, son dessin sobre associé ; les bases sont inchangées et on applique la définition de l'interaction entre dessins.

Ainsi l'interaction dans un réseau clos, soit converge, soit diverge car on ne trouve pas l'action négative duale de l'action positive courante, soit ne termine pas.

EXEMPLE **8**

- *L'interaction entre le dessein $\mathfrak{Dai}_+$ de base $\vdash \xi$ et n'importe quel dessein $\mathfrak{E}$ de base $\xi \vdash$ converge.*
- *Considérons le dessein $\mathfrak{F}$ de base $\vdash \xi$ et contenant l'unique chronique réduite à l'action $(+, \xi, \emptyset)$. L'interaction avec un dessein $\mathfrak{G}$ de base $\xi \vdash$ ne convergera que si ce dessein contient l'action $(-, \xi, \emptyset)$. C'est par exemple le cas du dessein qui contient toutes les chroniques réduites à une action négative de focus ξ*

suivie du daïmon ; ce n'est pas le cas du dessein vide de base $\xi \vdash$ avec lequel toute interaction diverge.

— *Considérons le dessein $\mathfrak{A}$ de base $\vdash \xi$ et contenant les chroniques récursivement définies par :*
- $(+, \xi, \{0\}) \in \mathfrak{A}$,
- si $w \in \mathfrak{A}$ est de dernière action $(+, \xi.0^n, \{0\})$ (resp. $(-, \xi.0^n, \{0\})$) alors $w.(-, \xi.0^{n+1}, \{0\}) \in \mathfrak{A}$ (resp. $w.(-, \xi.0^{n+1}, \{0\}) \in \mathfrak{A}$). Et considérons le dessein $\mathfrak{B}$ de base $\xi \vdash$ contenant exactement les chroniques duales. L'interaction entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne termine pas.

L'interaction dans le cas clos permet de définir la notion d'orthogonalité.

Définition 11 (Orthogonal)

— *Soit $\mathfrak{D}$ un dessein de base $\xi \vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (resp. $\vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$), le réseau de desseins $\mathfrak{R} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n)$ (resp. $\mathfrak{R} = (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n)$), où le dessein $\mathfrak{A}$ est de base $\vdash \xi$ et les desseins $\mathfrak{B}_i$ sont de base $\sigma_i \vdash$, appartiennent à l'orthogonal de $\mathfrak{D}$ noté $\mathfrak{D}^\perp$ lorsque $[\![\mathfrak{D}, \mathfrak{R}]\!] = \mathfrak{Dai}_+$.*

— *Deux desseins $\mathfrak{D}$ de base $\vdash \xi$ et $\mathfrak{E}$ de base $\xi \vdash$ sont orthogonaux lorsque $[[\mathfrak{D}, \mathfrak{E}]] = \mathfrak{Dai}_+$.*

Interaction : cas ouvert

Dans le cas ouvert, la base du réseau contient les adresses qui ne sont pas coupées ; cette base est donc de la forme $\xi \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ lorsque le dess(e)in principal est négatif ou de la forme $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sinon. Dans ce cas "ouvert" , définir l'interaction consiste en fait à définir les étapes de normalisation. Nous rappelons ci-dessous cette définition dans le cas d'un réseau ouvert de dessins. Comme précédemment, cette définition s'étend aux desseins via le passage par les dessins sobres associés.

Définition 12 (Interaction dans un réseau de dessins, cas ouvert) *Soit $\mathfrak{R}$ un réseau de coupures, le résultat de l'interaction, noté $[\![\mathfrak{R}]\!]$ est défini de la façon suivante : soit $\mathfrak{D}$ le dessin principal de $\mathfrak{R}$.*

— *Le dessin principal $\mathfrak{D}$ est négatif, de base $\xi \vdash \Delta$. Si $\mathfrak{D}$ est vide, $[\![\mathfrak{R}]\!]$ est $\mathcal{S}k_{\xi \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}$, c'est-à-dire le dessein vide de base $\xi \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sinon, soit $(-, \xi, \mathcal{N})$ la première règle de $\mathfrak{D}$. Pour chaque $I \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{I}}$ est le réseau de coupures, obtenu en remplaçant dans $\mathfrak{R}$ le dessin $\mathfrak{D}$ par le sous-dessin $\mathfrak{D}_I$ de $\mathfrak{D}$, de base $\vdash \xi.I, \Delta$.*

$$[\![\mathfrak{R}]\!] = \dfrac{\begin{matrix}[\![\mathfrak{R}_{\mathfrak{I}}]\!] & & [\![\mathfrak{R}_{\mathfrak{J}}]\!]\\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \xi.I,\alpha_1,\ldots,\alpha_n & \ldots & \vdash \xi.J,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\end{matrix}}{\xi \vdash \alpha_1,\ldots,\alpha_n}\,{\scriptstyle(\xi,\mathcal{N})}$$

— *Le dessin principal $\mathfrak{D}$ est positif de base $\vdash \sigma, \Delta$, soit κ sa première action.*
 — *Si κ est le daïmon, alors $[\![\mathfrak{R}]\!] = \mathfrak{Dai}_+$ de base $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*
 — *Sinon, κ est une action positive propre $(+, \sigma, I)$. Soit σ est une adresse coupée, soit c'est une adresse non coupée. Dans le premier cas, il y a une coupure avec un autre dessin $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{R}$, de base $\sigma \vdash \Sigma$ et dont la première règle est $(-, \sigma, \mathcal{N})$:*
  — *Si $I \notin \mathcal{N}$, alors l'interaction échoue (diverge). $[\![\mathfrak{R}]\!]$ est l'ensemble vide de chronique de base $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ce n'est pas un dess(e)in.*
  — *Sinon, soit $\mathfrak{E}_{\mathfrak{I}}$ le sous-dessin de $\mathfrak{E}$ de base la fourche $\vdash \sigma.I, \Sigma$. Dans ce cas $[\![\mathfrak{R}]\!] = [\![\mathfrak{R}_{\mathfrak{I}}]\!]$ où $\mathfrak{R}_{\mathfrak{I}}$ est le réseau de coupures, obtenu en substituant dans $\mathfrak{R}$, le dessein $\mathfrak{E}$ par $\mathfrak{E}_{\mathfrak{I}}$ et le dessein $\mathfrak{D}$ par ses sous desseins $\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}$, qui pour $i \in I$ sont de base $\sigma.i \vdash \Delta_i$. Le dessin principal de $\mathfrak{R}_{\mathfrak{I}}$ est $\mathfrak{E}_{\mathfrak{I}}$.*

 Si σ est une adresse non coupée, on considère pour $i \in I$ les réseaux de coupures $\mathfrak{R}_i$, contenant le sous-dessin $\mathfrak{D}_i$ de $\mathfrak{D}$ et les dessins de $\mathfrak{R}$ dont la base contient des adresses coupées avec des adresses de Δ_i. Chacun de ces réseaux est de dessin principal $\mathfrak{D}_i$. On a alors :

$$[\![\mathfrak{R}]\!] = \dfrac{\begin{matrix} & [\![\mathfrak{R}_i]\!] & \\ & \vdots & \\ \ldots & \xi.i \vdash \alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_n} & \ldots\end{matrix}}{\vdash \alpha_1,\ldots,\alpha_n}\,{\scriptstyle(\xi,I)}$$

EXEMPLE **9** *Soit $\mathfrak{D}$ un dessin de base $\vdash \xi$ sa normalisation avec le fax $\mathcal{F}ax_{\xi,\xi'}$ est le dessin $\mathfrak{D}'$ obtenu à partir de $\mathfrak{D}$ en substituant ξ par ξ' dans chaque adresse de chaque chronique de $\mathfrak{D}$. Par exemple, si la première action de $\mathfrak{D}$ est $(+, \xi, I)$, avec $I = \{1, \ldots, n\}$, l'interaction se présente de la façon suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_1 & & \mathfrak{D}_n\\ \xi.1 \vdash & \ldots & \xi.n \vdash\end{matrix}}{\vdash \xi}\,{\scriptstyle(+,\xi,I)} \qquad \dfrac{\ldots \quad \dfrac{\begin{matrix} & \mathcal{F}ax_{\xi'.i,\xi.i} & \\ \ldots & \xi'.i \vdash \xi.i & \ldots\end{matrix}}{\vdash \xi.I,\xi'}\,{\scriptstyle(+,\xi',I)} \quad \ldots}{\xi \vdash \xi'}\,{\scriptstyle(-,\xi,\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))}}{}$$

Après deux étapes de normalisation, nous avons :

$$\dfrac{\begin{matrix}[\![\mathfrak{D}_1,\mathcal{F}ax_{\xi'.1,\xi.1}]\!] & & [\![\mathfrak{D}_n,\mathcal{F}ax_{\xi'.n,\xi.n}]\!]\\ \xi'.1 \vdash & \ldots & \xi'.n \vdash\end{matrix}}{\vdash \xi'}\,{\scriptstyle(+,\xi',I)}$$

Puis le processus continue de façon récursive, en parcourant tout $\mathfrak{D}$.

1.1.3 Des résultats originaux au coeur de la théorie

Dès que les objets de base : les desseins et l'interaction entre desseins, ont été définis, des premiers résultats peuvent être énoncés. Ces résultats, établis dans l'article séminal [35], montrent que le contrat a été rempli : les desseins sont les objets adéquats pour manipuler la notion d'interaction, dans sa version la plus abstraite, qui correspond au cas clos, comme dans son aspect *modèle de calcul* via la notion de normalisation, qui correspond au cas ouvert.

Le théoréme de séparation

Les desseins étant des ensembles, on peut naturellement les comparer en utilisant la relation d'inclusion. On remarque alors que si le dessein $\mathfrak{D}$ est contenu dans le dessein $\mathfrak{E}$, tout dessein qui est orthogonal à $\mathfrak{D}$ est aussi orthogonal à $\mathfrak{E}$ (les chemins d'interaction sont évidemment conservés lorsque le dessein augmente). L'inclusion, toutefois, n'épuise pas cette relation de préservation des orthogonaux. Si on raccourcit certaines chroniques de $\mathfrak{D}$ et qu'on les termine par des daïmons, on préserve aussi l'orthogonalité. La relation pertinente entre les desseins (dont la raison d'être est de rendre compte des supports d'interaction) est alors la suivante :

Définition 13 *Soient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ deux desseins de même base. On dit que $\mathfrak{D}$ est plus défini que $\mathfrak{E}$, et on note $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{E}$ lorsque $\mathfrak{D}^{\perp} \subset \mathfrak{E}^{\perp}$.*

Cette relation $\preceq$ est bien entendu transitive et réflexive. Elle est aussi antisymétrique ; ainsi que l'établit le **théorème de séparation**. Ce théorème affirme en effet que, si deux desseins de même base $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ sont distincts alors il existe un dessein $\mathfrak{F}$ qui est orthogonal à l'un et pas à l'autre.

Ce résultat est l'une des propriétés remarquables de la Ludique *les desseins sont complètement définis par leurs interactions.*

Un même cadre pour des résultats standards habituellement hétérogènes

Habituellement, les propriétés des modèles de calcul s'expriment selon deux modes d'expression bien distincts. La stabilité et la monotonie sont des propriétés sémantiques, c'est à dire relatives au *contenu* des expressions calculées. La confluence est une propriété syntaxique, c'est à dire qu'elle concerne la procédure de calcul elle-même. Ici, il y a un unique mode d'expression : l'interaction entre desseins. Les propriétés de stabilité, de confluence et de monotonie peuvent être exprimées et sont satisfaites dans ce cadre unique [35] :

La normalisation est stable par intersection (stabilité), elle est associative (confluence) et monotone par rapport à la relation $\preceq$:

— *Soit K un ensemble non vide, si pour tout $k \in K$, $\mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{R}$ alors $[\![\bigcap_{k\in K} \mathfrak{R}_k]\!] = \bigcap_{k\in K}[\![\mathfrak{R}_k]\!]$.*
— *Soit $\{\mathfrak{R}_0, \ldots, \mathfrak{R}_n\}$ un réseau de réseaux, $[\![\mathfrak{R}_0 \cup \cdots \cup \mathfrak{R}_n]\!] = [\![[\![\mathfrak{R}_0]\!], \ldots, [\![\mathfrak{R}_n]\!]]\!]$.*
— *Si $\mathfrak{D}_0 \preceq \mathfrak{E}_0, \ldots, \mathfrak{D}_n \preceq \mathfrak{E}_n$ alors $[\![\mathfrak{D}_0, \ldots, \mathfrak{D}_n]\!] \preceq [\![\mathfrak{E}_0, \ldots, \mathfrak{E}_n]\!]$*

1.2 Un nouveau cadre logique

Après que le travail de déconstruction a été réalisé, en ne conservant que ce qui est pertinent pour manipuler le phénomène d'interaction, il s'agit de retrouver les concepts habituels de la logique. Girard montre dans [35] comment on peut retrouver les objets de la Logique Linéaire dans le cadre ludique. Les desseins, qui ont été construits sur le modèle des preuves d'un calcul des séquents sont les bons candidats pour retrouver la notion de *preuve*. Il s'agit alors d'expliciter les propriétés qui permettent de caractériser parmi les desseins ceux qui sont candidats à représenter correctement des preuves, ces desseins sont qualifiés de *desseins gagnants*. La notion de preuve est consubstantielle de celle de *formule*. Les formules sont définies en Ludique d'une façon qui réunifie les approches de la *réalisabilité* et les sémantiques *BHK*, c'est à dire qu'une formule n'est rien d'autre que l'ensemble de ses preuves. Il est possible alors de définir, dans le cadre de la Ludique, les opérations qui permettent d'interpréter les connecteurs linéaires, les séquents et les démonstrations. De cette façon, la Ludique fournit une sémantique à $MALL_2$: la Logique Linéaire propositionnelle au second ordre sans exponentielle, une sémantique qui a le bon goût de vérifier des propriétés de complétude. La Ludique satisfait la très recherchée propriété de *full completeness* : si un dessein gagnant appartient à l'interprétation d'une formule, alors ce dessein est l'interprétation d'une preuve de cette formule. Elle vérifie aussi une propriété de complétude plus originale, qualifiée par Girard de *complétude interne*, qui assure que l'on sait décomposer les objets appartenant à l'interprétation d'une formule logiquement décomposable, en des objets appartenant à l'interprétation des sous-formules. Au passage, on retrouve la complétude véri-conditionnelle : une formule est *vraie* si et seulement si elle possède une preuve (son interprétation possède un dessein gagnant.).

1.2.1 Les formules

Le pendant ludique de la notion de formule est la notion de **comportement**. C'est-à-dire un ensemble de desseins, clos par rapport à l'interaction avec les contre-desseins.
– Le comportement étant un ensemble de desseins, c'est à dire de tentatives de preuves, on rend ainsi compte d'une proposition par l'ensemble de ses justifications.
– Le comportement étant un ensemble clos, on rend ainsi compte de la nature formelle des formules logiques. En effet, un ensemble de desseins est clos lorsqu'il contient des desseins qui ont le même comportement par rapport à l'interaction. Dans un ensemble clos on peut repérer des régularités dans les justifications d'une proposition, et alors d'organiser cet ensemble de justifications en fonction de ces régularités qui correspondent en fait à la décomposition logique de la proposition, c'est à dire aux connecteurs logiques.

Définition 14 (Comportement) — *Soit* E *un ensemble de desseins de même base,* $\mathrm{E}^{\perp} = \bigcap_{\mathfrak{D} \in \mathrm{E}} \mathfrak{D}^{\perp}$.
— *Soit* E *un ensemble de desseins de même base* $\Gamma \vdash \Delta$*. Lorsque* $\mathrm{E} = \mathrm{E}^{\perp\perp}$, E *est un* comportement *de base* $\Gamma \vdash \Delta$*. Un comportement est* positif *(resp.* négatif*) si sa base est positive (resp. négative).*

Exemples:

1. Si $\mathbf{E}$ est un ensemble quelconque de desseins de même base alors $\mathbf{E}^{\perp}$ est un comportement.
   En effet, nous avons bien sûr pour tout ensemble $\mathbf{U}$ de desseins de même base, $\mathbf{U} \subset \mathbf{U}^{\perp\perp}$. Ainsi, $\mathbf{E}^{\perp} \subset \mathbf{E}^{\perp\perp\perp}$.
   En outre si un dessein $\mathfrak{E}$ appartient à $\mathbf{E}^{\perp\perp\perp}$, il est orthogonal à tout dessein de $\mathbf{E}^{\perp\perp}$ et donc a fortiori, à tout dessein de $\mathbf{E}$.
2. Soit $\mathbf{E} = \{\mathcal{S}k_{\xi}\}$. Le comportement $\mathbf{E}^{\perp}$ contient uniquement le dessein $\mathfrak{Dai}_{+}$ de base $\vdash \xi$. Alors, $\mathbf{E}^{\perp\perp}$ contient tous les desseins de base $\xi \vdash$. Ce comportement négatif est noté $\mathbf{T}$, alors que son dual réduit à $\{\mathfrak{Dai}_{+}\}$ est noté $\mathbf{0}$.
3. Soit $\mathbf{E} = \{\mathbb{O}ne_{\xi}\}$ où $\mathbb{O}ne_{\xi}$ est le dessein $\{(+, \xi, \emptyset)\}$, de base $\vdash \xi$. Le comportement $\mathbf{E}^{\perp}$ contient le dessein égal à $\{(-, \xi, \emptyset)\maltese\}$ et tous les desseins qui contiennent cette chronique. Ainsi, $\mathbf{E}^{\perp\perp}$ contient $\mathbb{O}ne_{\xi}$ et $\mathfrak{Dai}_{+\xi}$. Ce comportement positif est noté $\mathbf{1}$, alors que son dual est noté $\perp$.
4. Si $\mathfrak{D}$ est un dessein de base $\xi \vdash$ (resp. $\vdash \xi$) et $\mathbf{E} = \{\mathfrak{D}\}$, alors les desseins de $\mathbf{E}^{\perp\perp}$ sont tous les desseins moins définis que $\mathfrak{D}$.

On remarque sur ces exemples que lorsqu'un dessein appartient à un comportement, tous les desseins qui sont moins définis que lui appartiennent également à ce comportement [2]. Réciproquement, lorsqu'un dessein est dans un comportement, on peut se demander si des desseins plus définis sont dans le même comportement. Une réponse partielle à cette question est donnée par la notion d'incarnation.

Définition 1 — *Soit* $\mathbf{G}$ *un comportement et soit un dessein* $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$. *L'incarnation de* $\mathfrak{D}$ *relativement à* $\mathbf{G}$, *notée* $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$ *est le plus petit dessein contenu dans* $\mathfrak{D}$ *qui appartienne encore à* $\mathbf{G}$.

- *Un dessein* $\mathfrak{D}$ *est matériel dans un comportement* $\mathbf{G}$ *s'il est égal à son incarnation dans* $\mathbf{G}$.
- *Soit* $\mathbf{G}$ *un comportement, l'incarnation de* $\mathbf{G}$, *notée* $|\mathbf{G}|$ *est l'ensemble des desseins matériels de* $\mathbf{G}$.

Exemples:

1. L'incarnation du comportement $\mathbf{T}$, contient l'unique dessein $\mathcal{S}k_\xi$. $|\mathbf{0}| = \{\mathfrak{Dai}_+\}$.
2. $|\mathbf{1}| = \mathbf{1}$; $|\perp| = \{\{(-, \xi, \emptyset)\maltese\}\}$.
3. $|\{\mathfrak{D}\}^{\perp\perp}| = \mathfrak{D}^{\maltese}$ où $\mathfrak{D}^{\maltese}$ est l'ensemble des desseins obtenus en remplaçant de façon uniforme certaines chroniques de $\mathfrak{D}$ par leur section initiale terminée par un $\maltese$. Précisément un dessein $\mathfrak{E} \in \mathfrak{D}^{\maltese}$ ssi pour toute chronique $\mathfrak{c} \in \mathfrak{E}$ soit $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$, soit il existe une chronique $\mathfrak{w}\kappa^+ \in \mathfrak{D}$ telle que $\mathfrak{c} = \mathfrak{w}\maltese$.

Cette notion d'incarnation permet ainsi de préciser quelle est la partie d'un dessein qui est nécessaire pour assurer son appartenance à un comportement. On peut alors se demander si à partir d'un ensemble quelconque de desseins de même base, on peut déterminer les desseins incarnés du comportement engendré par cet ensemble sans nécessairement calculer le comportement tout entier. Cette question a été étudiée dans l'article [27] et nous y reviendrons en détail dans la section 2.2. Observons pour l'instant que la notion d'incarnation permet de dégager des éléments de description des comportements, en particulier le *répertoire*.

Définition 2 *Soit* $\mathbf{G}$ *un comportement. Le répertoire de* $\mathbf{G}$, *notée* $\mathcal{R}ep_{\mathbf{G}}$ *est l'ensemble des ramifications des premières actions des desseins matériels de* $\mathbf{G}$.

Exemples:

1. $\mathcal{R}ep_{\mathbf{T}} = \mathcal{R}ep_{\mathbf{0}} = \emptyset$.
2. $\mathcal{R}ep_{\mathbf{1}} = \mathcal{R}ep_{\perp} = \{\emptyset\}$.
3. $\mathcal{R}ep_{\{\mathfrak{D}\}^{\perp\perp}}$ est l'ensemble des ramifications des premières actions de $\mathfrak{D}$. Lorsque la base est positive, cet ensemble est un singleton.

2. Les comportements sont clos par surdesseins et par l'opération $(\ )^{\maltese}$ décrite ci-dessous.

Opérations sur les comportements

Proposition 1 *Soient* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{H}$ *deux comportements de même base*

- *Si* $\mathbf{G} \subset \mathbf{H}$ *alors* $\mathbf{H}^{\perp} \subset \mathbf{G}^{\perp}$.
- *Soit* $\mathbf{G_1}$ *et* $\mathbf{G_2}$ *deux comportements de même base,* $\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2}$ *est un comportement de même base.*

En effet, si $\mathfrak{D}$ est orthogonal à tous les desseins de $\mathbf{H}$, il est a fortiori orthogonal à tous les desseins de $\mathbf{G}$.
Puisque $\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2} \subset \mathbf{G_1}$ et $\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2} \subset \mathbf{G_2}$ alors $\mathbf{G_1}^{\perp} \subset (\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2})^{\perp}$ et $\mathbf{G_2}^{\perp} \subset (\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2})^{\perp}$. Ainsi, nous avons

$$(\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2})^{\perp\perp} \subset \mathbf{G_1}^{\perp\perp} = \mathbf{G_1} \quad \text{et} \quad (\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2})^{\perp\perp} \subset \mathbf{G_2}^{\perp\perp} = \mathbf{G_2}$$

Ainsi $(\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2})^{\perp\perp} = \mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2}$.

Exemples:

1. Nous avons $\perp_{\xi\vdash} \cap \mathbf{T}_{\xi\vdash} = \perp_{\xi\vdash}$. Et plus généralement, si $\mathbf{N}$ est un comportement de base $\xi \vdash$, $\mathbf{N} \cap \mathbf{T}_{\xi\vdash} = \mathbf{N}$.
2. Soit $\mathfrak{D}$ un dessein et soit $\mathfrak{E}$ un dessein moins défini que $\mathfrak{D}$, $\{\mathfrak{D}\}^{\perp\perp} \cap \{\mathfrak{E}\}^{\perp\perp} = \{\mathfrak{E}\}^{\perp\perp}$ (puisque $\{\mathfrak{E}\}^{\perp\perp} \subset \{\mathfrak{D}\}^{\perp\perp}$).
3. Soit $\mathfrak{D}_{\vdash\xi}$ un dessein dont la première ramification est non vide. Nous avons $\mathbf{1}_{\vdash\xi} \cap \{\mathfrak{D}\}^{\perp\perp} = \mathbf{0}$. Et plus généralement, si les répertoires de deux comportements positifs $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont disjoints, $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \mathbf{0}$.
4. Soit $\mathfrak{D}_{\xi\vdash}$ un dessein dont les premières ramifications sont non vides. Nous avons $\perp_{\xi\vdash} \cap \{\mathfrak{D}\}^{\perp\perp} = \{\mathfrak{D}'\}^{\perp\perp}$ où $\mathfrak{D}'$ est le dessein égal à $\mathfrak{D} \cup \{(-, \xi, \emptyset)\maltese\}$. Et plus généralement, si les répertoires de deux comportements négatifs $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont disjoints, $|\mathbf{G} \cap \mathbf{H}| = |\mathbf{G}| \cup |\mathbf{H}|$.

L'opération $\cap$ sur les comportements vérifie de très bonnes propriétés : elle est commutative, associative, possède un élément neutre : $\mathbf{T}$. On peut également considérer l'opération duale, celle qui à deux comportements de même base associe leur réunion. Il faut toutefois clôre par bi-orthogonalité dans ce cas, puisque l'union n'a pas de raison d'être complète dans le cas général. Et on obtient encore un "connecteur" muni des mêmes bonnes propriétés, $\mathbf{0}$ étant l'élément neutre. Ces opérations paraissent alors de bons candidats pour rendre compte des connecteurs additifs de la logique linéaire. En fait, on ne peut pas procéder aussi directement. Nous avons que, pour tout comportement $\mathbf{G}$, $\mathbf{G} \cap \mathbf{G} = \mathbf{G}$. Or, si nous escomptons bien l'équivalence entre une formule et la conjonction additive de deux occurrences de cette même formule, il ne s'agit quand même pas de confondre les deux expressions.

En fait, pour retrouver la logique, il va être nécessaire de séparer minutieusement les lieux et le codage des lieux sur lesquels les objets logiques sont ancrés. Pour ce faire un certain nombre de telles séparations des lieux vont être considérées.

Définition 3 *Deux comportements de même base sont dits* disjoints *lorsque leurs répertoires sont disjoints. Ils sont* aliénés *lorsque les réunions de leurs répertoires respectifs sont disjointes.*

Un comportement est connexe lorsque tous les desseins qui lui appartiennent ont la même première action.

Enfin, pour manipuler des formules logiques de façon habituelle, et en particulier des connecteurs *binaires*, on a besoin d'une opération qui permet de désynchroniser deux décompositions de même polarité.

Définition 4 (Décalage)

- *Soit* $\mathfrak{c}$ *une chronique de base* $\vdash \xi.i$ *(resp.* $\xi.i \vdash$*), on note* $\downarrow \mathfrak{c}$ *la chronique* $(-, \xi, \{i\}).\mathfrak{c}$ *de base* $\xi \vdash$ *(resp. la chronique* $(+, \xi, \{i\}).\mathfrak{c}$ *de base* $\vdash \xi$
- *Soit* $\mathfrak{D}$ *un dessein de base* $\vdash \xi.i$ *(resp.* $\xi.i \vdash$*), on définit le dessein* $\downarrow \mathfrak{D}$ *de la façon suivante :*

$$\downarrow \mathfrak{D} = \{\downarrow \mathfrak{c};\ \mathfrak{c} \in \mathfrak{D}\}$$

- *Soit* $\mathbf{G}$ *un comportement de base* $\vdash \xi.i$ *(resp.* $\xi.i \vdash$*), le comportement* $\uparrow \mathbf{G}$ *(resp.* $\downarrow \mathbf{G}$*) est égal à* $\{\downarrow \mathfrak{D};\ \mathfrak{D} \in \mathbf{G}\}^{\perp\perp}$*.*

Remarque : Lorsque $\mathbf{G}$ est positif, $\downarrow \mathbf{G} = \{\downarrow \mathfrak{D};\ \mathfrak{D} \in \mathbf{G}\}$. La clôture n'est pas nécessaire.

Nous pouvons alors donner la définition des opérations ludiques qui vont correspondre aux connecteurs additifs de la Logique Linéaire.

Définition 15

- *Soit* $\mathbf{G}_k$ *une famille de comportements positifs disjoints de même base,*

$$\bigoplus_k \mathbf{G}_k = (\bigcup_k \mathbf{G}_k)^{\perp\perp}$$

- *Soit* $\mathbf{G}_k$ *une famille de comportements négatifs disjoints de même base ,*

$$\mathop{\&}_k \mathbf{G}_k = \bigcap_k \mathbf{G}_k$$

Remarques :

1. Lorsque $\mathbf{G}_k$ est une famille de comportements négatifs disjoints, de même base, nous avons bien $(\&_k \mathbf{G}_k)^\perp = \bigoplus_k \mathbf{G}_k^\perp$. En effet, on a bien sûr que
$$(\bigcup_k \mathbf{G}_k^\perp)^\perp = \bigcap_k \mathbf{G}_k^{\perp\perp} = \bigcap_k \mathbf{G}_k$$
.
2. Lorsque deux comportements négatifs sont disjoints, ils n'ont aucun dessein matériel commun. Ainsi en découle le résultat suivant, qualifié par J.-Y. Girard de *Mystère de l'incarnation* : le connecteur & se comporte comme un produit cartésien sur l'incarnation,
$$|\mathbf{G}\&\mathbf{H}| = |\mathbf{G}| \times |\mathbf{H}|$$
3. Ces opérations ludiques sont donc pertinentes pour rendre compte des connecteurs linéaires. Elles sont néanmoins partielles :
- Elles sont polarisées. Il est néanmoins possible d'étendre ces opérations. Pour rendre compte d'une logique non polarisée, comme la Logique Linéaire, il suffit d'utiliser le décalage pour imposer la bonne polarité.
- Elles exigent des comportements disjoints. J.-Y. Girard parle à ce propos de *dilemme spirituel* [35]. Pour retrouver la logique habituelle, il est nécessaire de *délocaliser* les comportements associés aux formules, ; c'est à dire qu'un travail de changement de base des formules est effectué à chaque étape de la construction d'une formule. Une formule est a priori basée sur le lieu vide $< >$, mais dès qu'elle devient sous-formule, elle est déplacée sur un lieu adéquat, nécessairement disjoint des lieux sur lesquels sont basées les autres sous-formules de la formule considérée. Pour ce faire une opération de *délocalisation* qui agit sur le lieu de la base d'un comportement et tous ses sous-lieux, est définie. Bien sûr, le choix de ce cadre *spirituel* a un prix : les propriétés de stricte commutativité, associativité des connecteurs redeviennent de simples isomorphismes canoniques, comme c'est le cas dans la logique habituelle.

On définit ensuite les opérations qui permettent de retrouver les connecteurs multiplicatifs de la logique linéaire. Dans [35] Girard présente plusieurs façons de rendre compte d'un tenseur (dual d'une application fonction/argument) entre deux desseins positifs de même base, selon que les ramifications des premières actions de ces desseins s'intersectent ou pas. Ces diverses versions ouvrent des perspectives intéressantes d'applications fonction/argument droite ou gauche, de connecteurs non commutatifs. . .Ici nous présentons uniquement la version qui permet de retrouver les connecteurs multiplicatifs linéaires, et sur laquelle toutes les versions alternatives collapsent dans le cas qui nous intéresse : le cadre spirituel.

Définition 5 *Soient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ des desseins de même base $\vdash \xi$. On définit un nouveau dessein $\mathfrak{D} \odot \mathfrak{E}$ de la façon suivante :*

— *Si un des deux desseins au moins est $\mathcal{D}ai^+$ alors $\mathfrak{D} \odot \mathfrak{E} = \mathcal{D}ai^+$.*

— *Sinon, soit $(+, \xi, I)$ et $(+, \xi, J)$ les premières actions respectives de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$, :*
- si $I \cap J = \emptyset$, $\mathfrak{D} \odot \mathfrak{E} = \{(+, \xi, I \cup J).\mathfrak{c};\ (+, \xi, I)\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ ou $(+, \xi, J)\mathfrak{c} \in \mathfrak{E}\}$
- $\mathfrak{D} \odot \mathfrak{E} = \mathfrak{D}\mathfrak{ai}_+$ sinon.

Remarque : L'opération $\odot$ est commutative, associative et son élément neutre est le dessein $\mathbb{O}ne$.

On définit alors les opérations qui vont permettre de retrouver les connecteurs linéaires. Nous sommes toujours dans le cadre spirituel : les connecteurs linéaires additifs ont été définis sur des comportements disjoints, les connecteurs linéaires multiplicatifs sont définis sur des comportements aliénés.

Définition 16

— *Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ deux comportements positifs aliénés,*

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}\ ;\ \mathfrak{A} \in \mathbf{G}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}\}^{\perp\perp}$$

— *Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ deux comportements négatifs aliénés*

$$\mathbf{G} \parr \mathbf{H} = (\mathbf{H}^{\perp} \otimes \mathbf{G}^{\perp})^{\perp}$$

Définition 6 (Séquent de comportements) *Soit $\Gamma \vdash \Delta$ une base et soient $\mathbf{G}_\sigma$ des comportements positifs de bases respectives $\vdash \sigma$ pour $\sigma \in \Gamma \cup \Delta$. On définit alors le* séquent de comportement *$\mathbf{\Delta} \vdash \mathbf{\Gamma}$ de base $\Gamma \vdash \Delta$ comme étant l'orthogonal de l'ensemble des familles $(\mathfrak{D}_\sigma)$ de desseins $\mathfrak{D}_\sigma$ où $\mathfrak{D}_\sigma \in \mathbf{G}_\sigma$ pour $\sigma \in \Gamma$ et $\mathfrak{D}_\sigma \in \mathbf{G}_\sigma^{\perp}$ pour $\sigma \in \Delta$.*

1.2.2 Les résultats de complétude

Il y a deux niveaux de complétude. Le premier niveau est celui de la complétude interne. J.-Y. Girard exprime par ce terme que des comportements construits à l'aide de connecteurs sont aisément décomposables. Cela constitue en un certain sens la contrepartie ludique de la propriété de la sous-formule : le bi-orthogonal est superflu pour de tels comportements, pour les connaître, la description des desseins qui le constituent suffit (est complète). Par exemple, tout dessein de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ peut être décomposé en un dessein de $\mathbf{A}$ et un dessein de $\mathbf{B}$. Le deuxième niveau de complétude est le suivant : J-Y. Girard énonce dans [35] un théorème de *full completeness* en établissant une correspondance entre la (une partie de la) Ludique et un calcul propositionnel linéaire au second ordre $MALL_2$; $MALL_2$ est un calcul des séquents linéaire construit sur des formules positives, sans exponentielle et avec un "bénitier" (qui permet d'expliciter la propriété de focalisation). Le théorème de full completeness est énoncé pour des desseins *gagnants* associés aux preuves de séquents de $MALL_2$. Un dessein gagnant est un dessein qui est à la fois *obstiné*, c'est à dire qu'il ne contient pas de daimon, *exact*, c'est à dire que, si le dessein est non vide, toute adresse créée, et toute adresse de la base est le foyer d'une action et *uniforme* : une notion plus complexe que nous ne définissons pas dans ce texte mais que nous évoquerons dans la section suivante.

Les théorèmes

— **Complétude interne additive** Soit $K \neq \emptyset$, $\bigoplus_{k \in K} \mathbf{G}_k = \bigcup_{k \in K} \mathbf{G}_k$
— **Décomposition additive** Un comportement de base positive (resp. négative) est toujours décomposable comme un $\bigoplus$ (resp. un $\&$) de comportements connexes.
— **Adjonction** Soient $\mathfrak{F}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ trois desseins, $\mathfrak{F}$ est négatif , $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont positifs, il existe un unique dessein négatif $(\mathfrak{F})\mathfrak{A}$ (qui ne dépend pas de $\mathfrak{B}$) tel que $[\![\mathfrak{F}, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}]\!] = [\![(\mathfrak{F})\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\!]$.
— **Complétude interne multiplicative** Soient $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ deux comportements aliénés, alors $\mathbf{G} \otimes \mathbf{H} = \{\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} ; \mathfrak{A} \in \mathbf{G}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H}\}$
— **Adéquation :** *A toute preuve π d'un séquent clos $\Gamma \vdash \Delta; \Sigma$ de $MALL_2$ on associe un dessein $\pi^* \in \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}; \mathbf{\Sigma}$. Le dessein π^* est gagnant et matériel lorsque le séquent est Π^1. De plus, l'interprétation est invariante par rapport à l'élimination des coupures.*
— **Complétude :** *Soit $\Gamma \vdash \Delta;$ un $MALL_2$-séquent Π^1 et soit $\mathfrak{D} \in \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ un dessein gagnant et matériel. Il existe une preuve π de $\Gamma \vdash \Delta$ de $MALL_2$, telle que $\mathfrak{D} = \pi^*$.*

1.2.3 Quelques mots sur la quantification

Dans l'article séminal [35], le lien avec la logique linéaire usuelle s'exprime par des résultats de complétude et adéquation d'une interprétation des formules et des preuves de $MALL_2$ par des desseins et des comportements. Dans ce cadre, la notion de quantification qui s'exprime naturellement dans la théorie Ludique est la quantification au second ordre.

Quantification au second ordre

Le théorème de complétude est énoncé pour une logique propositionnelle au second ordre, c'est-à-dire dans laquelle les objets atomiques sont les variables propositionnelles. On peut intuitivement comprendre la bonne adéquation entre les objets ludique et la quantification au second ordre, en rappelant que la notion de lieu est plus primitive que celle de proposition. Plutôt que de retrouver directement une formule ou proposition associée à un lieu, on détermine quelles sont les propositions qui peuvent être ancrées en un tel lieu à partir des invariants du comportement des desseins basés en ce lieu. On procède ainsi à une décomposition logique jusqu'à, dans les bons cas [3], aboutir à des cas terminaux : ramification vide ou ensemble vide de ramification, qui correspondent aux constantes logiques ou bien on se retrouve dans un fax, qui correspond à un axiome identité sur des variables propositionnelles. En effet, nous avons vu dans la section 1.1.1 que le Fax est un dessein récursivement défini et qui est infini, à la fois en largeur et en hauteur. Cette infinité en largeur rend compte de la possiblité de considèrer n'importe quelle décomposition logique, l'infinité en hauteur rend compte du fait qu'il n'y a aucune raison de s'arrêter sur une proposition particulière.

En outre, le fait que les comportements, de part leur nature ensembliste, se comportent remarquablement bien par rapport à l'opération d'intersection, permet de concrétiser très simplement une interprétation de la quantification du second ordre : par une intersection sur tous les comportements qui peuvent être associés aux formules atomiques. L'interprétation de la logique linéaire propositionnelle du second ordre requiert toutefois une propriété assez délicate d'uniformité que nous ne présenterons pas dans ce texte, nous renvoyons le lecteur à l'article séminal [35] ou à sa présentation illustrée d'exemples que nous avons réalisée avec C. Faggian et M.-R. Fleury [22]. Nous donnons juste ici une intuition de cette notion. Cette propriété d'uniformité est requise pour discriminer les *bons* desseins, c'est-à-dire les desseins qui, selon le théorème de full completeness, sont des interprétations de preuves de $MALL_2$. L'exigence d'uniformité se pose en particulier pour des desseins appartenant à l'interprétation de séquents de la forme $X \vdash \Gamma$, contenant un atome X dans la partie gauche.

3. Dans le cas général, les décompositions logiques ne sont pas toujours possibles ou bien les cas terminaux ne correspondent pas aux axiomes logiques.

Exemple **10** *Considérons un dessein dans l'interprétation du séquent $X \vdash A \oplus B$ où X est un atome, A et B des formules.*

Pour appartenir à $\bigcap_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \vdash \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, lorsque $\mathbb{C}$ est un comportement positif quelconque et que $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont les comportements associés aux formules A et B, un tel dessein doit être de la forme :

$$\mathfrak{D} = \quad \dfrac{\cdots \qquad \begin{array}{c}\mathfrak{D}_I \\ \vdots \\ \vdash 1.I, \gamma\end{array} \qquad \cdots}{1 \vdash \gamma}\,(1, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

Et pour prétendre être l'interprétation d'une preuve, tous les sous-desseins $\mathfrak{D}_I$, de base $\vdash 1 \star I, \gamma$ qui forment les branches du dessein $\mathfrak{D}$ doivent être "équivalents" en ce sens qu'ils doivent correspondre à la même preuve, en particulier faire le même choix de la prémisse de la règle introduisant le $\oplus$: soit A, soit B.

Quantification au premier ordre

L'expression ludique de la quantification au premier ordre n'est pas aussi naturelle que celle au second ordre. Dans [35], J.-Y. Girard propose un traitement locatif des quantificateurs du premier ordre pour lesquels des résultats surprenants (parce que faux dans le cadre de la logique des prédicats) sont obtenus.

Avec M.-R. Fleury , nous avons proposé un traitement plus traditionnel, en vue d'étendre le résultat de complétude d'une logique linéaire propositionnelle du second ordre à un calcul des prédicats linéaire du second ordre. Nous résumons ci-dessous le contenu de l'article [17] qui présente ce travail.

Puisque le théorème de full completeness est énoncé pour une interprétation de la logique dans un cadre spirituel et puisque le traitement locatif de la quantification du premier ordre entraine des résultats de commutations des formules prénexes qui sont faux en logique traditionnelle, nous nous sommes intéressées à un traitement spirituel de la quantification. Le point crucial était d'exprimer les propriétés caractérisant les desseins susceptibles d'être les interprétations de preuves. Pour rendre compte des desseins associés aux preuves de formules universellement quantifiées, nous avons défini une propriété d'uniformité adaptée au premier ordre. Un dessein uniforme en ce sens doit permettre de passer ("déconstruire") une règle de quantification universelle en accédant à la *même* preuve pour chaque instantiation possible de la variable universellement quantifiée.

Le but à atteindre :

Un ensemble $\mathbb{D}$ étant donné, pour interpréter les termes du premier ordre (uniquement des variables dans le cadre de notre travail), le propos était d'associer à une formule dépendant de variables libres, une famille de comportements indexée sur $\mathbb{D}$. Comme suggéré dans [35], nous avons choisi d'interpréter la quantification universelle par l'intersection d'une famille de comportements disjoints indexée par $\mathbb{D}$.

Ainsi, si $P(x)$ désigne une formule linéaire dépendant d'une variable libre x, à laquelle est associée une famille $(\mathbf{C}_d)_{d\in\mathbb{D}}$ de comportements disjoints, à la formule $\forall x\ P(x)$ sera associé le comportement $\&_{d\in\mathfrak{D}}\mathbf{C}_d$. Un dessein $\mathfrak{D}$ matériel dans ce comportement est de la forme :

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}_d & & \mathfrak{D}_{d'}\\ \vdots & \ldots & \vdots\end{matrix}}{<>\vdash}\ (<>, \cup_{d\in\mathbb{D}}\mathcal{N}_d)$$

où pour chaque $d \in \mathbb{D}$ $(<>, \mathcal{N}_d)$ est la première règle d'un dessein matériel $\mathfrak{D}_d$ appartenant à $\mathbf{C}_d$.

Nous retenons alors l'intuition suivante. Pour qu'un dessein $\mathfrak{D} \in \&_{d\in\mathfrak{D}}\mathbf{C}_d$ soit susceptible de représenter une preuve de la formule $\forall x\ P(x)$, il doit vérifier que ses sous-desseins $\mathfrak{D}_d$ représentent tous la même preuve de $P(x)$.

Nous illustrons cette idée dans les exemples suivants, exprimés dans un calcul des prédicats linéaire non polarisé :

Exemple **11** *Considérons la formule* $\vdash A(x)\otimes A(x) \multimap A(x)\otimes A(x)$. *Cette formule possède (au moins) deux preuves : une première qui n'est rien d'autre que la* η*-preuve, développée à partir de deux occurrences de l'axiome identité* $A(x) \vdash A(x)$*, nous la noterons* I. *Une seconde preuve, que nous noterons* E*, diffère de la première, parce qu'on lui a ajouté une règle d'échange. En version hyperséquentialisée, ces deux preuves, dans lesquelles nous distinguons les différentes occurrences de la formule* $A(x)$ *sont les suivantes :*

$$I = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_1(x)\vdash A_3(x)}{\vdash A_1^\perp, A_3}}{A_3^\perp \vdash A_1^\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{A_2(x)\vdash A_4(x)}{\vdash A_2^\perp, A_4}}{A_4^\perp \vdash A_2^\perp}}{\vdash A_1(x)^\perp, A_2(x)^\perp, A_3(x)\otimes A_4(x)}}{(A_1(x)\otimes A_2(x) \multimap A_3(x)\otimes A_4(x))^\perp \vdash} \qquad E = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_2(x)\vdash A_3(x)}{\vdash A_2^\perp, A_3}}{A_3^\perp \vdash A_2^\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{A_1(x)\vdash A_4(x)}{\vdash A_1^\perp, A_4}}{A_4^\perp \vdash A_1^\perp}}{\vdash A_1(x)^\perp, A_2(x))^\perp, A_3(x)\otimes A_4(x)}}{(A_1(x)\otimes A_2(x) \multimap A_3(x)\otimes A_4(x))^\perp \vdash}$$

On considère alors les deux desseins $\mathfrak{E}$ *et* $\mathfrak{I}$ *respectivement associés aux preuves* E *et* I *et on construit les deux desseins suivants dans le comportement* $\&_{d\in\mathbb{D}}\mathbf{C}_d$ *:*

– Le premier $\mathfrak{M}$ utilise parmi les sous-desseins $\mathfrak{D}_d$, le dessein $\mathfrak{D}_{d_1}$ qui est une délocalisation de $\mathfrak{I}$ et le dessein $\mathfrak{D}_{d_2}$ qui est une délocalisation de $\mathfrak{E}$.

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{D}_{d_1} = \mathfrak{I} \qquad \cdots \qquad \mathfrak{D}_{d_2} = \mathfrak{E}}{<>\vdash} (<>, \cup_{d\in\mathbb{D}}\mathcal{N}_d)$$

– Dans le second dessein $\mathfrak{N}$, pour chaque $d \in \mathbb{D}$, le sous-dessein $\mathfrak{F}_d$ est une délocalisation de $\mathfrak{I}$.

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{F}_{d_1} \qquad \cdots \qquad \mathfrak{F}_{d_2}}{<>\vdash} (<>, \cup_{d\in\mathbb{D}}\mathcal{N}_d)$$

Il est clair que le dessein $\mathfrak{N}$ est un bon candidat pour représenter une preuve de $\forall x\ (A(x) \otimes A(x) \multimap A(x) \otimes A(x))$, alors que le dessein $\mathfrak{M}$ ne l'est pas.

Exemple **12** *Dans le second exemple, nous considérons les preuves de la formule $\exists y\ (R(x) \multimap R(y))$. Une preuve de ce séquent est par exemple :*

$$\pi \ = \ \cfrac{\cfrac{\cfrac{R(x) \vdash R(x)}{\vdash R(x)^{\perp},\ R(x)}}{\vdash R(x) \multimap R(x)}}{\vdash \exists y\ (R(x) \multimap R(y))}$$

Une famille de desseins $(\mathfrak{D}_d)_d$ associée à la preuve π est telle que pour tout $d \in \mathbb{D}$, $\mathfrak{D}_d \in \bigoplus_e \mathbf{C}_{d,e}$ où $(\mathbf{C}_{d,e})_{d,e}$ est une famille de comportements disjoints interprétant la formule $R(x) \multimap R(y)$. L'intuition est que "le bon choix" pour un dessein associé à la preuve de $\forall x \exists y\ (R(x) \multimap R(y))$ sera de prendre, pour tout $d \in \mathbb{D}$, $\mathfrak{D}_d \in \mathbf{C}_{d,d}$.

Notre approche

Un dessein $\mathfrak{D}$ dans un comportement $\&_{d\in\mathbb{D}}\mathbf{P}_d$ sera un bon candidat pour représenter la preuve d'une formule $\forall x P(x)$ obtenue par une règle de quantification universelle, à condition que ses sous-desseins $\mathfrak{D}_d$ soient des délocalisations d'un même dessein.Nous décrivons ci après les étapes de la construction de cette propriété que nous avons appelée $\mathbb{D}$-uniformité.

– Afin de manipuler des objets dépendants du domaine fixé $\mathbb{D}$, nous avons modifié les définitions basiques de la ludique : les lieux, desseins, comportements deviennent dépendants des éléments de $\mathbb{D}$. Pour ce faire, on définit tout d'abord les **biais dépendants** : $f_n^k(\vec{d})$ à l'aide de fonctions injectives à co-domaines disjoints de $\mathbb{D}^k$ dans

$\mathbb{N}$. On étend ensuite ces définitions aux **$\mathbb{D}$-adresses** construites avec des biais dépendants plutôt que des entiers et aux **$\mathbb{D}$-desseins** construits sur des $\mathbb{D}$-adresses plutôt que des adresses.

Alors, lorsque $(\mathbf{C}_{\vec{d}})_{\vec{d}\in\mathbb{D}^n}$ une famille de comportements de même base, on dit que la famille de $\mathbb{D}$-desseins $(\mathfrak{D}_{\vec{d}})_{\vec{d}}$ est dans la famille de comportements $(\mathbf{C}_{\vec{d}})_{\vec{d}\in\mathbb{D}^n}$ lorsque pour tout $\vec{d} \in \mathbb{D}^n$ $\mathbb{D}_{\vec{d}} \in \mathbf{C}_{\vec{d}}$.

– On définit alors les notions de famille de $\mathbb{D}$-desseins $\mathbb{D}$-uniforme et de $\mathbb{D}$-dessein $\mathbb{D}$-uniforme, via des fonctions sur les biais dépendants.
Soit ϕ une fonction de $\mathbb{D}$ dans lui-même.

— On définit une fonction $\overline{\phi}$ des biais dépendants dans les biais dépendants, en posant :
$$\overline{\phi}(f_p^k(d_1 \ldots, d_k)) = f_p^k(\phi(d_1), \cdots, \phi(d_k)).$$
— On étend alors cette fonction aux $\mathbb{D}$-adresses, aux $\mathbb{D}$-bases et aux $\mathbb{D}$-chroniques, aux $\mathbb{D}$-desseins. Ainsi, si $\mathfrak{D}$ est un $\mathbb{D}$-dessein, on pose : $\overline{\phi}(\mathbb{D}) = \{\overline{\phi}(\mathfrak{c}); \mathfrak{c} \in \mathbb{D}\}$

Remarque : L'ensemble de chroniques $\overline{\phi}(\mathbb{D})$ n'est pas toujours un dessein. Il l'est si ϕ est injective.

Définition 7 — *Soit $(\mathfrak{D}_{d_1,\ldots,d_n})_{d_1,\ldots,d_n}$ une famille de $\mathbb{D}$-desseins de même base. Cette famille est dite* $\mathbb{D}$-uniforme *lorsque pour toute fonction ϕ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, pour tout $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{D}^n$, $\phi(\mathfrak{D}_{d_1,\ldots,d_n})$ est un sous-dessein de $\mathfrak{D}_{\phi(d_1),\ldots\phi(d_n)}$.*
— *Un $\mathbb{D}$-dessein $\mathfrak{D}$ dans un comportement $\mathbf{C}$ est dit* $\mathbb{D}$-uniforme *lorsque pour toute fonction ϕ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, $\phi(\mathfrak{D})$ est un sous-dessein de $\mathfrak{D}$.*

Remarque : Une conséquence de la $\mathbb{D}$-uniformité est que $\phi(\mathfrak{D}_{d_1,\ldots,d_n})$ est un dessein.

Exemple **13** *Le dessein suivant, construit en utilisant une règle négative donnant accès aux sous-desseins $\mathfrak{D}_d$ définis ci-dessous, est un candidat pour interpréter la preuve de $\forall x \exists y\ (R(x) \multimap R(y))$ considérée dans l'exemple 12.*
Soient d et e_d des éléments de $\mathbb{D}$, le dessein $\mathfrak{D}_d$ est défini pour chaque $d \in \mathbb{D}$ par :

$$\mathfrak{D}_d = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{F}ax\\ \vdots\\ f(d).h(e_d) \vdash g(d)\end{matrix}}{\vdash f(d), g(d)}}{<>\vdash}$$

La famille $(\mathfrak{D}_d)_d$ n'est $\mathbb{D}$-uniforme que si pour tout $d \in \mathbb{D}$, $e_d = d$. Il suffit d'appliquer une fonction ϕ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, telle que $\phi(e_d) \neq e_d$ et $\phi(d) = d$ pour éliminer les autres cas.

Les résultats

Il s'agit tout d'abord de définir l'interprétations des formules quantifiées. Les quantificateurs du premier ordre sont interprétés comme des connecteurs additifs infinis. Pour concrétiser ces définitions, nous avons définis des délocalisations $\varphi_{\vec{d}}$ (pour tout $\vec{d} \in \mathbb{D}^n$) qui agissent sur des desseins de base constante[4].

Définition 8 (Les délocalisations $\varphi_{\vec{d}}$)
- Soit ξ une adresse et soit $\vec{d} \in \mathbb{D}^n$, la délocalisation $\varphi^{\xi}_{\vec{d}}$ est définie par :

$$\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(\xi.f^k_p(\vec{e}).\sigma) = \xi.f^{k+n}_p(\vec{d}, \vec{e}).\sigma$$

- Soit $\mathbf{C}$ un comportement de base $\vdash \xi$ ou $\xi \vdash$, on définit le comportement $\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(\mathbf{C})$ par :

$$\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(\mathbf{C}) = \{\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(\mathfrak{D}) \ ; \ \mathfrak{D} \in \mathbf{C}\}^{\perp\perp}$$

Remarques : Les délocalisations, $\varphi^{\xi}_{\vec{d}}$ agissent seulement sur les biais créés par une action de focus ξ, ainsi une base constante reste constante. En outre, ces délocalisations préservent la $\mathbb{D}$-uniformité, ainsi que la matérialité. Précisément, si $(\mathfrak{D}_{\vec{e},\vec{d}})_{\vec{e},\vec{d}}$ est une famille $\mathbb{D}$-uniforme de desseins, alors $(\varphi_{\vec{e}}(\mathfrak{D}_{\vec{e},\vec{d}}))_{\vec{e},\vec{d}}$ est une famille $\mathbb{D}$-uniforme de desseins. En outre, si $\mathbf{C}$ est un comportement de base constante ξ, alors :

$$\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(|\mathbf{C}|) = |\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(\mathbf{C})| \quad ; \quad |\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(\mathbf{C}^{\perp})| = |(\varphi^{\xi}_{\vec{d}}(\mathbf{C}))^{\perp}|$$

Les preuves de ces propriétés suivent le même schéma que dans [35] et reposent sur le fait que les délocalisations $\varphi^{\xi}_{\vec{d}}$ sont totales et injectives, et que les $\mathbb{D}$-biais sont définis à l'aide de fonctions injectives et à codomaines disjoints.

Définition 9 *Soit $(\mathbf{A}_{d,\vec{e}})_{d,\vec{e}}$ une famille de comportements négatifs basés sur $<>\vdash$, on définit une famille $(\forall d \in \mathbb{D}\ \mathbf{A}_{d,\vec{e}})_{\vec{e}}$ de comportements basés sur $<>\vdash$, par :*

$$\forall d \in \mathbb{D}\ \mathbf{A}_{d,\vec{e}} = \bigcap_{d\in\mathbb{D}} \varphi_d(\mathbf{A}_{d,\vec{e}})$$

Soit $(\mathbf{A}_{d,\vec{e}})_{d,\vec{e}}$ une famille de comportements positifs basés sur $\vdash<>$, on définit une famille de comportements positifs $(\exists d \in \mathbb{D}\ \mathbf{A}_{d,\vec{e}})_{\vec{e}}$, basés sur $\vdash<>$ par :

$$\exists d \in \mathbb{D}\ \mathbf{A}_{d,\vec{e}} = (\bigcup_{d\in\mathbb{D}} \varphi_d(\mathbf{A}_{d,\vec{e}}))^{\perp\perp}$$

4. Les biais constituant les adresses de la base sont indépendants de $\mathbb{D}$.

Selon une démarche semblable à celle utilisée dans le cas d'une intersection finie pour l'interprétation des connecteurs additifs, que l'on peut appliquer ici dans la mesure où les délocalisations φ_d assurent que les comportements sont disjoints, on obtient la propriété attendue :

$$(\bigcap_{d\in\mathbb{D}} \varphi_d(\mathbf{A}_{d,\vec{e}}))^{\perp} \;=\; (\bigcup_{d\in\mathbb{D}} \varphi_d(\mathbf{A}^{\perp}_{d,\vec{e}}))$$

De cette propriété découle directement le résultat de complétude interne :

$$(\bigcup_{d\in\mathbb{D}} \varphi_d(\mathbf{A}_{d,\vec{e}}))^{\perp\perp} = \bigcup_{d\in\mathbb{D}} \varphi_d(\mathbf{A}_{d,\vec{e}})$$

Il s'agit ensuite d'interpréter un calcul des prédicats linéaires $MALL^1_2$, étendant le calcul $MALL_2$. Précisément, les formules sont construites sur des variables de prédicats, en utilisant les connecteurs linéaires et les quantificateurs du premier ordre et on ajoute au calcul des séquents les règles suivantes :

$$\frac{\Gamma(\vec{u}) \vdash \Delta(\vec{u}); P[z/x, \vec{u}]}{\Gamma(\vec{u}) \vdash \Delta(\vec{u}); \exists x P(x, \vec{u})}\,\exists_r \qquad \text{où } z \text{ appartient à } \{\vec{u}\}$$

$$\frac{\Gamma(\vec{u}), P(x, \vec{u}) \vdash \Delta(\vec{u})\,;}{\Gamma(\vec{u}), \exists x P(x, \vec{u}) \vdash \Delta(\vec{u})\,;}\,\exists_l \qquad \text{où } x \notin \{\vec{u}\}$$

Il s'agit ensuite d'étendre la définition d'uniformité du second ordre aux familles de desseins indexées par $\mathbb{D}$ [5]. On obtient alors des résultats qui étendent à ce calcul $MALL^1_2$ les résultats obtenus dans [35] pour $MALL_2$.

Proposition 2 *Soit π une preuve dans $MALL^1_2$ du séquent Σ dont les variables libres sont parmi $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$ (deux à deux distinctes). On associe à π une famille* $\mathbb{D}$-uniforme *de desseins matériels et gagnants, $(\pi^*_{\vec{d}})_{\vec{d}\in\mathbb{D}^k}$. L'interprétation est invariante par rapport à l'élimination des coupures.*

5. En effet, bien que les notions d'uniformité et de $\mathbb{D}$-uniformité visent intuitivement le même objectif de contraindre des familles de desseins à avoir le même comportement, autrement dit de correspondre à une même preuve quoique instantiée sur des affectations distinctes des variables, ces deux notions sont indépendantes. Il y a des familles $\mathbb{D}$-uniformes de desseins non uniformes et des familles de desseins uniformes qui ne sont pas $\mathbb{D}$-uniformes. Or les deux conditions sont requises pour les interprétations de preuves de $MALL^1_2$.

Théorème 1 (Full completeness) *Soit* Σ *un séquent* Π^1 *de* $MALL_2^1$ *dont les variables libres sont parmi* $x_1 \ldots, x_k$. *Soit* $(\mathfrak{D}_{\vec{d}})_{\vec{d} \in D^k}$ *une famille* $\mathbb{D}$*-uniforme de desseins appartenant à* $(\mathbf{\Sigma}_{\vec{d}})_{\vec{d}}$. *Si pour tout* $\vec{d} \in \mathbb{D}^k$, *le dessein* $\mathfrak{D}_{\vec{d}}$ *est* matériel *et* gagnant *dans* $\mathbf{\Sigma}_{\vec{d}}$, *alors il existe une preuve* π *de* Σ *dans* $MALL_2^1$ *telle que, pour tout* $\vec{d} \in \mathbb{D}^k$, $\pi^*_{\vec{d}} = \mathfrak{D}_{\vec{d}}$.

Esquisse de la démonstration Comme dans le cas propositionnel, la preuve du théorème est par induction sur la complexité des séquents. Le point est : *trouver la dernière règle*, et vérifier que les propriétés des bons desseins sont préservées par le passage des règles (du bas vers le haut). Le nouveau point ici est que l'on manipule des familles $\mathbb{D}$-uniformes, indexées par $\mathbb{D}^k$, de desseins gagnants. On doit alors être sûr que pour chaque $\vec{d} \in \mathbb{D}^k$ il est possible de trouver la dernière règle, puis on doit vérifier que cette dernière règle est bien la même pour tous les éléments de la famille. Enfin, on doit vérifier qu'en plus de la préservation des propriétés des bons desseins, la $\mathbb{D}$-uniformité est également préservée lors des pas d'induction. Le résultat est articulé autour des arguments suivants :

– nous transposons, via une traduction des formules, le résultat obtenu pour $MALL_2$ à un calcul des séquents propositionnel infinitaire du second ordre. Ce dernier, noté $MALL_2^\infty$ est obtenu en ajoutant une disjonction additive infinie ($\oplus_{d \in \mathbb{D}}$) à $MALL_2$. Cette traduction permet de passer les pas propositionnels.

– La $\mathbb{D}$-uniformité et la délocalisation spécifique des quantificateurs du premier ordre permet de passer les règles des quatificateurs.

– Nous vérifions simultanément que la $\mathbb{D}$-uniformité est préservée lors de la traversée de la dernière règle, que celle-ci soit une règle introduisant les connecteurs ou les quantificateurs. Et la $\mathbb{D}$-uniformité assure que c'est bien la même règle pour chaque élément de la famille.

Chapitre 2

Ludique et théorie du calcul

Des travaux importants ont permis de donner à la Ludique une stature de cadre théorique de la computation en étendant la ludique de façon à dépasser les limites de stricte linéarité et de stricte séquentialité des desseins définis dans [35].

Ainsi, F. Maurel et C. Faggian [24] ont défini les *Ludics nets* en relâchant la contrainte de séquentialité pour développer un modèle pour le calcul concurrent. Les Ludics nets ont été ensuite analysés de façon plus exhaustive par P.-L. Curien et C. Faggian dans [12]. D'une certaine façon, les Ludics nets sont des abstractions de réseaux de la même façon que les desseins sont des abstractions d'arbres de preuves.

K. Terui a proposé dans [73] une c-Ludique, c'est-à-dire une reformulation de la Ludique mieux adaptée à une approche computationnelle (le c de c-desseins ou c-ludique). L'écriture des c-desseins est proche de celles des λ-termes, utilisant des variables et déclinant la dualité application/abstraction du λ-calcul à l'aide d'un ensemble (éventuellement infini) d'actions n-aires. En outre, les c-desseins étendent les desseins originels : ils ne sont pas nécessairement linéaires et ils contiennent des coupures internes explicites. Cette syntaxe est ainsi plus adaptée aux langages de programmation et elle est munie d'une grammaire qui permet une explicitation finie des objets infinis à l'aide de générateurs. K. Terui utilise ce modèle pour caractériser les différents langages qui sont classifiés dans la théorie des langages : la relation d'acceptation d'un mot par une grammaire est exprimée par l'orthogonalité entre c-desseins. K. Terui peut alors énoncer dans ce cadre un résultat reliant automates et c-desseins :
- les c-desseins correspondant aux desseins finis de Girard reconnaissent exactement les langages réguliers ;
- avec tous les c-desseins, on retrouve le pouvoir expressif des machines de Turing.

M. Basaldella et C. Faggian, dans [6], ont étendu la Ludique en une "Ludics with repetitions" afin de pouvoir traiter les exponentielles. A la différence des travaux de Terui, ils ont conservé la définition originelle des desseins comme ensembles de chroniques, mais ils les ont étendus en ajoutant des *actions neutres* pour représenter la possibilité de réutiliser une adresse au cours d'un même parcours d'interaction. Ils ont ainsi obtenu un résultat de full completeness pour un calcul hyperséquentialisé de toute la Logique Linéaire.

Les L-nets ont été défini en pensant les desseins comme des démonstrations formelles et en modifiant leur présentation séquentielle au profit d'une présentation comme réseau de preuve. Les c-desseins ont été définis en tirant les desseins vers une formulation semblable à celle des λ-termes. Les desseins de la *Ludics with repetitions* sont toujours des desseins comme ensembles de séquences alternées d'actions. C'est donc selon leur formulation proche de la *sémantique des jeux* qu'ils ont été étendus. Depuis les années 90, initiée par les travaux de Lafont et Streicher [42], la sémantique des jeux a été extrêmement fructueuse pour étudier divers fragments de la logique linéaire, de la logique intuitionniste et de la logique classique, en vue d'obtenir des résultats de complétude [39, 1, 55, 16], [2], [43], [47, 48], [14], [49]. Le fait que les objets basiques de la Ludique peuvent être exprimés en termes de sémantique des jeux a été explicité dans divers travaux [23, 12, 6]. La correspondance se décline ainsi :

— une action est un *coup*,
— la séquence d'actions utilisées durant une interaction est une *partie*,
— un dessein est une *stratégie innocente*,

Parmi les cadres théoriques et méthodologiques de l'étude de la computation, la Ludique est ontologiquement plus proche des sémantiques des jeux que de la théorie de la démonstration ou du λ-calcul. Dans ces dernières, l'interaction recouvre deux notions distinctes : la coupure et l'élimination des coupures dans le cas de la théorie de la démonstration, la règle d'application et la normalisation dans le cas du λ-calcul. Par ailleurs ces notions ne sont définies que dans un second temps, après que des objets plus primitifs ont été fixés : les formules et les preuves formelles dans le premier cas, les λ-termes, et éventuellement les types dans le second. Au contraire, en sémantique des jeux, l'interaction dans ses deux sens de rencontre et de processus s'exprime via une unique notion, celle de partie qui est une notion primitive dans la théorie, de la même façon que l'interaction en Ludique est une notion primitive, qui recouvre à la fois l'idée de rencontre et de processus. Il y a toutefois une différence fondamentale entre la Sémantique des Jeux et la Ludique. Les stratégies sont typées, alors que les desseins sont a priori non typés. Plus concrètement, un jeu définit un ensemble de parties, *i.e.* des séquences de coups qui satisfont des conditions particulières et une stratégie n'est rien d'autre qu'un ensemble de parties. En Ludique, une partie est ce qui résulte de l'interaction entre deux desseins. Ce qui est utilisé dans un dessein pour l'interaction dépend du comportement par rapport auquel on le considère, et alors, relativement à un comportement donné, seulement une partie du dessein peut être considérée comme une stratégie. Le comportement contraint l'utilisation d'un dessein ; le dessein étant vu comme un ensemble de parties *potentielles*, correspond plutôt à une stratégie *potentielle*.

On peut alors s'interroger sur l'intérêt et les conséquences d'un typage a priori versus a posteriori dans les différents cadres théoriques utilisés pour l'étude de la computation. Les deux approches existent dans le λ-calcul et les deux sont importantes. Le jeu entre les deux approches est lui-même objet d'étude, et il a donné naissance à une discipline très fructueuse pour l'étude des langages de programmation : la *réalisabilité*. [41], [60]. La Ludique rend possible la manipulation de preuves non typées a priori et suggère alors de transposer la réflexion entre typage a priori/a posteriori qui existe pour le λ-calcul aux autres cadres formels de la computation. La Ludique est d'ailleurs considérée, selon cette perspective, comme un modèle de réalisabilité de la Logique Linéaire multiplicative et additive. Elle a par exemple été récemment utilisée comme telle pour la recherche d'un modèle de réalisabilité pour la logique différentielle [77]. Une façon d'aborder une réflexion sur le typage dans les différents cadres théoriques du calcul peut être de comparer les statuts, les rôles et les propriétés respectives des types de la théorie des types, des types de la théorie des jeux, des formules logiques et des comportements. Les mêmes opérations sont-elles possibles pour ces différents objets ? Les constructions sont-elles transposables d'un cadre à l'autre ? Les propriétés que les types assurent à leurs habitants sont-elles comparables ?

Dans la perspective d'une contribution modeste aux questions ci-dessus évoquées, en collaboration avec Christophe Fouqueré, nous nous sommes attachés à forger des outils pour étudier les comportements, en approfondissant d'une part l'analyse de leurs propriétés spécifiques, en recherchant d'autre part à caractériser parmi les comportements ceux qui seraient transposables aux autres notions de types. Un concept original en Ludique est celui d'*incarnation*, qui fournit une manipulation inédite des comportements. Par exemple, grâce à l'incarnation, on dispose d'un double point de vue sur l'opération correspondant au connecteur & de la logique linéaire : deux comportements étant donnés, on a accès au comportement résultant de l'opération & sur ces deux derniers à la fois comme leur intersection et comme leur produit cartésien. Nous avons montré dans [27] comment le calcul de l'incarnation du comportement engendré par un ensemble de desseins était possible sans qu'il soit nécessaire de calculer ce comportement. L'approche que nous adoptons utilise une définition alternative des desseins : comme ensemble de *chemins*, plutôt que comme ensemble de chroniques. Nous montrons que les notions de *chemins de normalisation* et *chemins visitables* sont pertinentes dès qu'on étudie l'interaction relativement à des ensembles de desseins. C'est en utilisant encore la même approche de l'incarnation caractérisée à partir de chemins visitables, que nous poursuivons actuellement notre exploration de la Ludique en vue de comprendre quelles sont les frontières entre formules logiques, types, comportements. Plus précisément nous nous intéressons aux questions suivantes : peut-on caractériser, parmi les comportements, ceux qui sont décomposables selon la grammaire des formules linéaires ? Peut-on caractériser d'autres décompositions et retrouver des constructions pertinentes dans le cadre de la théorie des types ?

2.1 Chemin de normalisation, chemins visitables

2.1.1 Les desseins comme ensembles de chemins

Un chemin, intuitivement est la séquence alternée des actions visitées pendant une interaction entre deux desseins. Cette notion est très proche de celle de *partie* en sémantique des jeux. Les desseins néanmoins sont des objets qui ne sont pas typés a priori, ainsi ce qui est utilisé pendant l'interaction d'un dessein $\mathfrak{D}$ dépend de l'ensemble de desseins dans lequel $\mathfrak{D}$ est considéré. Concrètement, il est possible de considérer quels desseins sont orthogonaux, soit au seul dessein $\mathfrak{D}$, soit à l'ensemble des desseins de E (qui contient $\mathfrak{D}$). Les séquences d'actions qui sont visitées durant l'interaction ne sont pas forcément les mêmes dans les deux cas. La notion de *chemin de normalisation* d'un dessein $\mathfrak{D}$ désignera une séquence d'actions visitées lors d'une interaction entre ce dessein $\mathfrak{D}$ et un contre-dessein potentiel, sans prendre en compte l'ensemble de desseins auquel $\mathfrak{D}$ appartient. La *notion de chemin visitable* d'un ensemble E de desseins s'applique aux chemins de normalisation qui seront effectivement visités lors de l'interaction d'un dessein appartement à E et un dessein appartenant à $E^{\perp}$.

Définition 10 (Base, Séquence, Vue)

— *Une* **base de réseau** β *est un ensemble fini non vide de séquents de loci :* $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ *telle que chaque* Γ_i *contient exactement un locus* ξ_i*, sauf au plus un* Γ_i *qui peut être vide, les* Δ_j *sont des ensembles finis, et dans les* $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$*, les loci sont deux à deux disjoints .*

— *Une séquence d'actions* $\mathfrak{s}$ *est* **basée sur** β *si chaque action de* $\mathfrak{s}$ *est soit héréditairement justifiée par une action focalisée sur* Γ_i *ou* Δ_i*, ou bien est le*

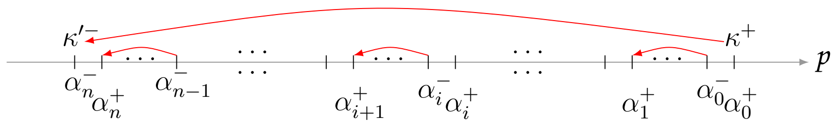


FIGURE 2.1 – Le chemin p : Contrainte de *saut négatif* entre κ^+ et son justifieur κ'^-

daimon et dans ce cas, c'est la dernière action de s. Une action est initiale *si elle est focalisée sur un lieu de Γ_i ou Δ_i.*

— *Soit s une séquence d'actions basée sur β, la* **vue** $\ulcorner s \urcorner$*est la sous-séquence de s définie comme suit :*
- $\ulcorner \epsilon \urcorner = \epsilon$ où ϵ est la séquence vide ;
- $\ulcorner \kappa \urcorner = \kappa$ lorsque la séquence est réduite à une action κ ;
- $\ulcorner w\kappa^+ \urcorner = \ulcorner w \urcorner \kappa^+$;
- $\ulcorner w\kappa^- \urcorner = \ulcorner w_0 \urcorner \kappa^-$ où w_0 est vide, lorsque κ^- est initiale ou bien la section initiale de w finissant par l'action positive justifiant κ^-.

La notion de *chemin*, que nous introduisons ici, subsume les notions de *chemin de normalisation* et *chemin visitable*.

Définition 11 (Chemin) *Un* **chemin** p *basé sur β est une séquence finie d'actions basée sur β telle que :*

— Alternance : *La polarité des actions alterne entre actions positives et actions négatives*

— Justification : *Une action propre est soit justifiée* , i.e., *son foyer est construit par l'une des actions précédentes dans la séquence, soit initiale et son foyer est l'un des éléments de Γ_i lorsque cette action est négative ou de Δ_i si elle est positive.*

— Saut négatif : *(Il n'y a pas de saut sur les actions positives) Soit $q\kappa$ une sous-séquence de p,*
- Si κ est une action positive, justifiée par une action négative κ' alors $\kappa' \in \ulcorner q \urcorner$.
- Si κ est une action positive propre et initiale alors son focus appartient à Δ_i et soit κ est la première action de p et Γ_i est vide, soit κ est immédiatement précédée dans p par une action négative dont le focus est héréditairement justifiée par un élément de $\Gamma_i \cup \Delta_i$.

— Linéarité : *Les actions ont des focus distincts.*

— Daimon : *Lorsque l'action daïmon apparaît, c'est à la fin de la séquence. Si c'est l'unique action de p alors un des Γ_i est vide.*

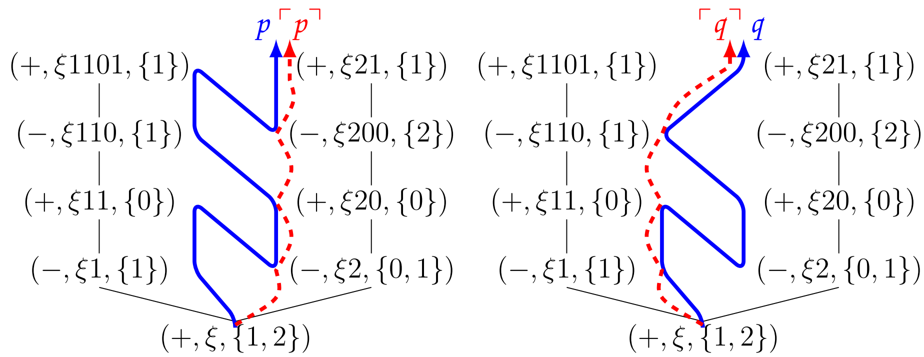


FIGURE 2.2 – La séquence $\mathfrak{p}$ est un chemin, la séquence $\mathfrak{q}$ n'en est pas un.

— Totalité : *Si un des* Γ_i *est vide, alors* $\mathfrak{p}$ *est non vide et commence soit par* ✠*, soit par une action positive dont le focus est dans* Δ_i*.*

Dans le reste de la section, nous utiliserons une formulation explicite de la condition *saut négatif*, de la façon suivante. Lorsque κ est une action positive justifiée par une action négative κ', et $\mathfrak{q}\kappa$ une séquence alternée, $\kappa' \in \ulcorner \mathfrak{q} \urcorner$ si et seulement si il y a une séquence $\alpha_0^+\alpha_0^- \dots \alpha_n^-$ commençant par $\kappa = \alpha_0^+$, et se terminant par $\kappa' = \alpha_n^-$ et telle que α_i^- précède immédiatement α_i^+ dans $\mathfrak{p}$ et α_{i+1}^+ justifie α_i^-. La figure 2.1 illustre la condition *saut négatif* ainsi formulée. La figure 2.2 donne l'exemple d'une séquence qui n'est pas un chemin : la séquence $\mathfrak{q}$ saute de l'action négative $(-, \xi 31, \{1\})$ qui est dans une chronique à l'action positive $(+, \xi 1, \{0\})$ d'une autre chronique. Remarquons également que la vue $\ulcorner \mathfrak{q} \urcorner$ n'est pas une chronique. La proposition 3 établit que la vue d'une chemin doit être une chronique, la proposition 4 est une généralisation de la propriété réciproque à un ensemble de chemins *cohérents*.

Un chemin est *positif* ou *négatif* selon la polarité de sa dernière action. Si P est un ensemble de chemins, nous notons P^+ le sous-ensemble de P de ses chemins positifs. Remarquons que le préfixe (non vide lorsque la base est positive) d'un chemin est un chemin. Remarquons également qu'une chronique basée sur $\Gamma \vdash \Delta$ est un chemin. Avant d'établir le lien entre ensemble de chemins et ensemble de chroniques, nous énonçons quelques lemmes.

Lemme 1 *Soit* $\mathfrak{p}$ *un chemin basé sur* β*, et soit* κ *une action propre apparaissant dans* $\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner$*.*

— *Si* κ *est initiale et négative dans* $\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner$ *alors c'est l'unique action initiale négative occurrant dans* $\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner$ *et c'est la première action de* $\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner$*.*

— *κ est initiale dans p ssi elle est initiale dans $\ulcorner p \urcorner$.*
— *κ est justifiée par κ' dans p ssi κ est justifiée par κ' dans $\ulcorner p \urcorner$.*

Preuve 1 *Observons tout d'abord que, par construction, si κ est une action propre occurrant dans $\ulcorner p \urcorner$ et si $w\kappa$ est un préfixe de p alors $\ulcorner w\kappa \urcorner$ est un préfixe de $\ulcorner p \urcorner$.*

— *Si κ est négative et initiale dans $\ulcorner p \urcorner$ alors c'est la première action de $\ulcorner p \urcorner$: nous avons que $p = w\kappa w'$ et $\ulcorner p \urcorner = \ulcorner w\kappa \urcorner w'_0 = \kappa w'_0$. Ainsi, cette action est unique.*
— *Par construction, si κ est initiale dans p alors elle est initiale dans $\ulcorner p \urcorner$. Similairement, si κ est justifiée par κ' dans $\ulcorner p \urcorner$ alors κ est justifiée par κ' dans p.*

La réciproque de ces deux dernières propriétés est montrée selon la polarité de κ.

— *Si κ est négative et justifiée par κ' dans p alors, par construction, κ est justifiée par κ' dans $\ulcorner p \urcorner$. Ainsi, si κ est initiale dans $\ulcorner p \urcorner$, elle doit l'être dans p.*
— *Si κ est positive et justifiée par une action κ' dans p alors il y a une séquence finie $\alpha_0^+\alpha_0^-, \ldots \alpha_n^-$ commençant par $\kappa = \alpha_0^+$, et se finissant par $\kappa' = \alpha_n^-$, telle que α_i^- précède immédiatement α_i^+ dans p et α_{i+1}^+ justifie α_i^-. Cela signifie que le préfixe $w\kappa$ de p peut être écrit $w_n\alpha_n^-\alpha_n^+w_{n-1}\ldots\alpha_i^-\alpha_i^+w_i\ldots\alpha_0^-\alpha_0^+$. Alors,*

$$\ulcorner w\kappa \urcorner = \ulcorner w_n\alpha_n^-\alpha_n^+w_{n-1}\ldots\alpha_0^-\alpha_0^+ \urcorner = \ulcorner w_n \urcorner \kappa' \alpha_n^+\alpha_{n-1}^-\ldots\alpha_i^-\alpha_i^+\ldots\alpha_0^-\kappa$$

Ainsi κ est justifiée par κ' dans $\ulcorner p \urcorner$. Et si κ est initiale dans $\ulcorner p \urcorner$, alors elle doit être initiale dans p.

Proposition 3 *Soit p un chemin non vide basé sur $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$. La séquence $\ulcorner p \urcorner$ est une chronique basée sur $\Gamma_k \vdash \Delta_k$ pour un $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Preuve 2 *Puisque p contient au moins une action, $\ulcorner p \urcorner$ contient au moins κ où κ est la dernière action de p. Par construction $\ulcorner p \urcorner$ est alternée. Une conséquence du lemme 1 est que les actions propres de $\ulcorner p \urcorner$ dont le focus n'est pas dans une des bases (autrement dit ne sont pas initiales dans p) sont justifiées dans $\ulcorner p \urcorner$. Et bien-sûr, s'il apparaît, le daimon termine $\ulcorner p \urcorner$. De plus, une action négative qui n'est pas initiale est justifiée par l'action positive qui la précède immédiatement dans $\ulcorner p \urcorner$. Finalement, $\ulcorner p \urcorner$ est bien une chronique. Il nous reste à vérifier que $\ulcorner p \urcorner$ est basée sur l'un des $\Gamma_k \vdash \Delta_k$. Ce qui est fait par induction sur la longueur de p.*

— *$p = \kappa$:*
Supposons que κ est négative. Elle est initiale, son focus est dans un des Γ_k, alors $\ulcorner p \urcorner$ est la chronique κ basée sur $\Gamma_k \vdash \Delta_k$.
Supposons que κ est positive. Dans ce cas, il existe un Γ_k vide et soit $\kappa = \maltese$ soit le focus de κ est Δ_k. Alors, $\ulcorner p \urcorner = \kappa$ est une chronique basée sur $\vdash \Delta_k$.

— $p = w\kappa_1\kappa$. *Par hypothèse d'induction, pour chaque préfixe non vide* q *de* p, *il y a un* k_q *tel que* $\ulcorner q \urcorner$ *est une chronique basée sur* $\Gamma_{k_q} \vdash \Delta_{k_q}$.
Supposons que κ *est négative. Si elle est initiale, son focus est dans un des* Γ_k, *alors* $\ulcorner p \urcorner$ *est la chronique* κ *basée sur* $\Gamma_k \vdash \Delta_k$. *Sinon, par construction,* κ *est justifiée par l'action positive* κ' *qui la précède immédiatement dans* $\ulcorner p \urcorner$. *Soit* $w_0\kappa'$ *le préfixe de* p *se terminant par* κ'. *C'est un préfixe strict, non vide, ainsi, il existe* k *tel que* $\ulcorner w_0\kappa' \urcorner$ *est une chronique basée sur* $\Gamma_k \vdash \Delta_k$ *et* $\ulcorner p \urcorner = \ulcorner w_0\kappa' \urcorner\kappa$ *est aussi une chronique basée sur* $\Gamma_k \vdash \Delta_k$.
Supposons que κ *est positive. Nous avons que* $\ulcorner p \urcorner = \ulcorner w\kappa_1 \urcorner\kappa$ *et* $\ulcorner w\kappa_1 \urcorner$ *est une chronique basée sur un* $\Gamma_k \vdash \Delta_k$. *Notons que* $\ulcorner w\kappa_1 \urcorner\maltese$ *est une chronique basée sur* $\Gamma_k \vdash \Delta_k$. *Si l'on suppose de plus que* $\kappa \neq \maltese$. *Si* κ *est initiale, son focus est dans* Δ_j *et le focus de* κ_1 *est héréditairement justifiée par un élément de* $\Gamma_j \cup \Delta_j$. *Ainsi* $j = k$ *et* $\ulcorner p \urcorner$ *est une chronique basée sur* $\Gamma_k \vdash \Delta_k$. *Si* κ *est justifiée par une action négative* κ' *alors* $p = w_0\kappa' w_1\kappa$ *et par le lemme 1,* κ' *est dans* $\ulcorner p \urcorner = \ulcorner w_0\kappa' w_1 \urcorner\kappa$. *Alors, comme par induction* $\ulcorner w_0\kappa' w_1 \urcorner$ *est une chronique basée sur un* $\Gamma_k \vdash \Delta_k$, *c'est aussi le cas de* $\ulcorner p \urcorner$.

Nous allons alors développer cette idée et montrer dans la proposition 4 que l'on peut construire un réseau de desseins, à partir des vues d'un ensemble de chemins. Dans cette perspective, il nous faut considérer les vues de *tous les préfixes* des chemins, chacun pouvant définir une chronique particulière. En outre, non seulement de tels chemins doivent avoir la même base, mais ils doivent aussi être deux à deux *cohérents*, la relation de cohérence étant une généralisation de celle définie sur les chroniques.

Définition 12 (Cohérence sur les chemins) *Deux chemins* p_1 *et* p_2 *de même base sont cohérents, noté* $p_1 \frown p_2$, *lorsque :*
- leurs premières actions ont la même polarité : soit positive et alors elles sont égales, soit négative ;
- pour toutes séquences $w_1\kappa_1^+$ *et* $w_2\kappa_2^+$ *respectivement préfixes de* p_1 *et* p_2 *:*
si $\ulcorner w_1 \urcorner = \ulcorner w_2 \urcorner$ *alors* $\kappa_1^+ = \kappa_2^+$ *;*
- pour toutes séquences $w_1\kappa_1^-$ *et* $w_2\kappa_2^-$, *respectivement préfixes de* p_1 *et* p_2, *soit* w_1^0 *(resp.* w_2^0*) qui est la séquence vide si* κ_1^- *(resp.* κ_2^-*) est initiale et qui sinon est le préfixe de* p_1 *(resp.* p_2*) et se terminant par l'action justifiant* κ_1^- *(resp.* κ_2^-*),*
si $\ulcorner w_1^0 \urcorner = \ulcorner w_2^0 \urcorner$ *et* κ_1^- *et* κ_2^- *ont des focus distincts*
alors, pour toutes actions σ_1 *et* σ_2, *qui sont telles que* $w_1\kappa_1^- w_1'\sigma_1$ *et* $w_2\kappa_2^- w_2'\sigma_2$ *sont respectivement préfixes de* p_1 *et de* p_2, *avec* $\kappa_1^- \in \ulcorner w_1\kappa_1^- w_1'\sigma_1 \urcorner$ *et* $\kappa_2^- \in \ulcorner w_2\kappa_2^- w_2'\sigma_2 \urcorner$, *les actions* σ_1 *et* σ_2 *ont des focus distincts.*

En d'autres termes, le dernier item signifie que lorsque κ_1^- et κ_2^- ont des focus distincts tout en étant justifiés par la même chronique, les actions σ_1 et σ_2 doivent avoir des focus distincts si elles sont des actions héréditairement justifiées par κ_1^- et κ_2^- dans respectivement $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$.

La relation $\frown$ est réflexive ; lorsqu'elle est appliquée aux chroniques, elle coïncide avec la notion de cohérence entre chroniques définie par Girard [35], que nous avons rappelée dans le chapitre précédent. Dans la suite du texte, nous utiliserons la notation $\frown$ pour parler aussi bien de la cohérence entre chroniques que de celle entre chemins. Notons encore que la propriété de comparabilité relative à la cohérence entre chroniques est encore satisfaite entre chemins cohérents : si $\mathfrak{p}_1 \frown \mathfrak{p}_2$ alors soit l'un étend l'autre, soit ils diffèrent d'abord sur des actions négatives. En fait, si $w\kappa_1^+$ et $w\kappa_2^+$ sont respectivement préfixes de $\mathfrak{p}_1$ et de $\mathfrak{p}_2$ avec $\kappa_1^+ \neq \kappa_2^+$, alors la condition de cohérence n'est pas satisfaite, $\mathfrak{p}_1 \not\frown \mathfrak{p}_2$.

Nous montrons ci-dessous que la réunion des vues des préfixes de chemins cohérents, à condition que les maximale soient positives, forme un réseau de desseins. En prenant un unique chemin, on trouve un réseau de tranches, i.e. un réseau de structures multiplicatives.
NOTATIONS :
- Soit $\mathfrak{p}$ un chemin non vide, $\mathfrak{p}^*$ est la clôture par préfixes de $\mathfrak{p}$, *i.e.*, l'ensemble des chemins qui sont des préfixes non vides de $\mathfrak{p}$. On pose $\epsilon^* = \{\epsilon\}$.
- Soit D un ensemble de chemins de même base, $\ulcorner D \urcorner = \{\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner ; \mathfrak{p} \in D\}$ et $D^* = \bigcup_{\mathfrak{p} \in D} \mathfrak{p}^*$.
- Soit $\mathfrak{p}$ un chemin, $\ulcorner \mathfrak{p}^* \urcorner$ est noté $\ulcorner\!\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner\!\urcorner$. Plus généralement , $\ulcorner D^* \urcorner$ est noté $\ulcorner\!\ulcorner D \urcorner\!\urcorner$.

Proposition 4 *Soit D un ensemble non vide de chemins non vides deux à deux cohérents, basés sur β et dont les maximaux sont positifs. L'ensemble de chroniques $\ulcorner\!\ulcorner D \urcorner\!\urcorner$ défini comme la réunion des vues des chemins de D^* forme un réseau de desseins basé sur β.*

Preuve 3 *Soit $\beta = \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$. On considère un élément ρ de β variant dans les Γ_k, si les chemins de D commencent par des actions négatives ou qui est le focus des premières actions de D si il existe i tel que $\Gamma_i = \emptyset$, et alors $\rho \in \Delta_i$. On considère le sous-ensemble D^*_ρ de D^* défini de la façon suivante :*

$$D^*_\rho = \{\mathfrak{p} \in D^*; \quad \ulcorner \mathfrak{p} \urcorner \textit{ commence par une action dont le focus est } \rho\}$$

On considère l'ensemble de chroniques $\ulcorner D^*_\rho \urcorner = \{\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner;\ \mathfrak{p} \in D^*_\rho\}$*. Supposons que* $\ulcorner D^*_\rho \urcorner$ *n'est pas vide. Nous savons, d'après la proposition 3 qu'il existe un i tel que toutes ces chroniques sont basées sur* $\Gamma_i \vdash \Delta_i$*, et soit* Γ_i *est vide et* $\rho \in \Delta_i$ *soit* $\Gamma_i = \{\rho\}$*. On vérifie alors que* $\ulcorner D^*_\rho \urcorner$ *est un dessein basé sur* $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ *:*

— *(Forêt) Supposons que* $\mathfrak{c} \in \ulcorner D^*_\rho \urcorner$ *et soit* w *un préfixe non vide de* $\mathfrak{c}$*. Comme* $\mathfrak{c} \in \ulcorner D^*_\rho \urcorner$*, il y a un chemin* $\mathfrak{p}$ *appartenant à* D *et un préfixe* $\mathfrak{p}'$ *de* $\mathfrak{p}$*, appartenant à* D^*_ρ*, tel que* $\ulcorner \mathfrak{p}' \urcorner = \mathfrak{c}$*. La dernière action* κ *de* w *appartient à* $\ulcorner \mathfrak{p}' \urcorner$*. Si* κ *est le daimon, alors c'est la dernière action de* $\mathfrak{c}$*, ainsi* $w = \mathfrak{c} \in \ulcorner D^*_\rho \urcorner$*. Sinon,* κ *est une action propre occurrant dans* $\ulcorner \mathfrak{p}' \urcorner$*, et donc dans* $\mathfrak{p}'$*, alors, il existe* w_0 *et* $w_0\kappa$ *est un préfixe de* $\mathfrak{p}'$*. Nous avons déjà observé que dans ce cas* $\ulcorner w_0\kappa \urcorner$ *est un préfixe de* $\ulcorner \mathfrak{p}' \urcorner$ *se terminant par* κ*. Ainsi* $w = \ulcorner w_0\kappa \urcorner$ *appartient à* $\ulcorner D^*_\rho \urcorner$*.*

— *(Cohérence) Supposons que* $w\kappa_1$ *et* $w\kappa_2$ *appartiennent à* $\ulcorner D^*_\rho \urcorner$*. Cela signifie qu'il y a deux chemins* $\mathfrak{p}_1$ *et* $\mathfrak{p}_2$*, appartenant à* D*, et deux préfixes* $\mathfrak{p}'_1$ *et* $\mathfrak{p}'_2$ *de respectivement* $\mathfrak{p}_1$ *et* $\mathfrak{p}_2$*, appartenant à* D^*_ρ*, tels que* $\ulcorner \mathfrak{p}'_i \urcorner = w\kappa_i$ *for* $i = 1, 2$*. Posons* $\mathfrak{p}'_1 = w_1\kappa_1$ *et* $\mathfrak{p}'_2 = w_2\kappa_2$*.*
- Si κ_1 *et* κ_2 *sont positives alors* $\ulcorner \mathfrak{p}'_i \urcorner = \ulcorner w_i\kappa_i \urcorner = \ulcorner w_i \urcorner \kappa_i$ *pour* $i = 1, 2$ *ainsi* $\ulcorner w_1 \urcorner = w = \ulcorner w_2 \urcorner$*. Alors, comme* $\mathfrak{p}_1$ *et* $\mathfrak{p}_2$ *sont cohérents,* $\kappa_1 = \kappa_2$*.*
- Si κ_1 *et* κ_2 *sont négatifs et de focus distincts alors toutes les actions ultérieures* σ_1 *et* σ_2 *héréditairement justifiées par respectivement* κ_1 *dans* $\mathfrak{p}_1$ *et* κ_2 *dans* $\mathfrak{p}_2$ *ont des focus distincts ; ceci est alors encore vrai dans* $\ulcorner \mathfrak{p}_1 \urcorner$ *et* $\ulcorner \mathfrak{p}_2 \urcorner$*,* i.e.*, si* $w_1\kappa_1^- w'_1\sigma_1$ *et* $w_2\kappa_2^- w'_2\sigma_2$ *sont des séquences initiales de respectivement* $\mathfrak{p}_1$ *et* $\mathfrak{p}_2$ *et sont telles que* $\kappa_1^- \in \ulcorner w_1\kappa_1^- w'_1\sigma_1 \urcorner$ *et* $\kappa_2^- \in \ulcorner w_2\kappa_2^- w'_2\sigma_2 \urcorner$*, alors* σ_1 *et* σ_2 *ont des focus distincts.*

— *(Positivité) Par construction, puisque les chemins maximaux de* D *sont positifs, les chroniques de* $\ulcorner D^*_\rho \urcorner$ *qui n'ont pas d'extension se terminent par des actions positives.*

— *(Totalité) C'est une conséquence immédiate de la condition de totalité des chemins.*

Notons que les ensembles $\ulcorner D^*_\rho \urcorner$ *sont soit vides, soit des desseins sur des bases disjointes. Nous avons alors le résultat.*

Nous savons comment reconstituer des desseins ou des réseaux de desseins à partir de cliques de chemins. En fait, un réseau de desseins $\mathfrak{R}$ basé sur β peut être reconstruit à partir de l'ensemble des *chemins de* $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire les chemins $\mathfrak{p}$ basés sur β tels que $\ulcorner\!\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner\!\urcorner$ est un sous-réseau de $\mathfrak{R}$:

Proposition 5 *Soit* $\mathfrak{R}$ *un réseau de desseins de base* β*, nous notons* $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *l'ensemble des chemins* $\mathfrak{p}$ *basés sur* β *tels que* $\ulcorner\!\ulcorner \mathfrak{p} \urcorner\!\urcorner$ *est un sous-réseau de* $\mathfrak{R}$*,*

- *Si $\mathfrak{c}$ est une chronique de $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ alors c'est une chronique de $\mathfrak{R}$.*
- *$\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ est clos par préfixe.*
- *Si $p \in \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ alors $\ulcorner p \urcorner \in \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$.*
- *$\ulcorner \mathcal{P}_{\mathfrak{R}} \urcorner = \mathfrak{R}$*

Preuve 4 *Nous avons déjà souligné que le préfixe d'un chemin est un chemin, et qu'une chronique est un chemin. Nous avons donc les deux premiers points de la proposition. En outre, la vue d'un chemin est une chronique, donc un chemin dans le réseau. Finalement, les vues des chemins d'un réseau sont exactement les chroniques du réseau.*

Nous donnerons, dans la proposition 7 une caractérisation inductive de l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$. Cette caractérisation utilise la proposition 6 ci-dessous, qui donne le moyen de construire un chemin $p_1 r$ à partir de deux chemins p_1 et $p_2 = qr$, *i.e.* d'étendre p_1 par un suffixe de p_2 : cette extension est un *saut négatif* à la fin de p_1, ainsi p_1 ne doit pas finir avec un daïmon, r doit commencer par une action négative et les actions de r doivent satisfaire des conditions de compatibilité par rapport à p_1.

Proposition 6 *Soient $p_1 = w_1\kappa_1^- w_1'\kappa_1^+$ et $p_2 = w_2\kappa_2^- w_2'$ deux chemins basés sur β. $p = w_1\kappa_1^- w_1'\kappa_1^+\kappa_2^- w_2'$ est un chemin basé sur β lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*
- *κ_1^+ est une action propre,*
- *$\ulcorner w_2\kappa_2^- \urcorner w_2'$ est un chemin basé sur β,*
- *les actions dans $\kappa_2^- w_2'$ et $w_1\kappa_1^- w_1'\kappa_1^+$ ont des foci distincts,*
- *κ_1^- et κ_2^- sont toutes deux initiales ou bien sont justifiées par la même action positive, ou bien[1] $w_1 = w_2 = \kappa^+$, l'action κ_1^- est justifiée par κ^+ et κ_2^- est initiale,*
- *$\ulcorner w_1\kappa_1^- \urcorner$ et $\ulcorner w_2\kappa_2^- \urcorner$ coïncident sauf sur les dernières actions ou bien sont respectivement égales à $\kappa^+\kappa_1^-$ et κ_2^-.*

Preuve 5 *Par construction, p est alterné, ses actions propres ont des foci distincts et sont soit justifiées, soit initiales avec un focus dans β. De plus, la linéarité et la totalité sont satisfaites et s'il y a l'action daïmon, celle-ci termine p_2, c'est-à-dire termine le chemin. Il reste à prouver que la contrainte (saut négatif) est satisfaite. Soit κ une action dans p.*
- Si κ est une action positive propre apparaissant dans w_2' et justifiée par l'action négative κ' dans p_2, alors κ' appartient à $\ulcorner w_2\kappa_2^- \urcorner w_2'$: le chemin $\ulcorner w_2\kappa_2^- \urcorner w_2'$ doit contenir le justifieur de κ. Ainsi, dans $\ulcorner w_2\kappa_2^- \urcorner w_2'$ il y a une séquence $\alpha_0^+\alpha_0^- \dots \alpha_n^-$

1. Lorsque β contient un séquent positif $\vdash \Delta_i$ et κ^+ est ancrée dans $\vdash \Delta_i$.

commençant par $\kappa = \alpha_0^+$, *finissant par* $\kappa' = \alpha_n^-$ *et telle que* α_{i+1}^+ *justifie* α_i^- *et* α_i^- *précède immédiatement* α_i^+ *dans* $\ulcorner w_2\kappa_2^- \urcorner w_2'$. *Alors, cette séquence est contenue dans* p.
- Si κ *est une action positive initiale apparaissant dans* w_2' *alors son focus appartient à un* Δ_i *(in* β*) et la seule possibilité est que* κ *est immédiatement précédée dans* $\ulcorner w_2\kappa_2^- \urcorner w_2'$ *par une action négative dont le focus est héréditairement justifié par un élément de* $\Gamma_i \cup \Delta_i$.

Proposition 7 *Soit* $\mathfrak{R}$ *un réseau de desseins, basé sur* β. *L'ensemble des chemins* $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *de* $\mathfrak{R}$ *peut être exactement caractérisé comme suit :*
- si β *est constitué uniquement de séquents négatifs, alors* $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *et le chemin vide est dans* $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *;*
- s'il y existe un dessein $\mathfrak{D}$ *de* $\mathfrak{R}$ *avec une base positive, alors* $\mathfrak{D} \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *et pour toute chronique* $\mathfrak{c}$ *de* $\mathfrak{R}$ *commençant par une action négative,* $\kappa^+\mathfrak{c} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *où* κ^+ *est la première action des chroniques de* $\mathfrak{D}$ *;*
- si $p_1 = w_1\kappa_1^- w_1'\kappa_1^+$ *et* $p_2 = w_2\kappa_2^- w_2'$ *sont deux chemins appartenant à* $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *et satisfaisant les conditions de la proposition 6 alors* $p = w_1\kappa_1^- w_1'\kappa_1^+\kappa_2^- w_2' \in \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$.

Preuve 6 *Soit un réseau* $\mathfrak{R}$, *donnons-nous un ensemble* $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}} = \bigcup_{i\geq 0} \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^i$ *défini inductivement comme :*
- $\forall i \geq 0, \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^i \subset \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^{i+1}$ *et*
- Si β *a seulement des séquents négatifs, alors* $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^0$ *et le chemin vide est dans* $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^0$ *;*
-S'il existe un dessein $\mathfrak{D}$ *de* $\mathfrak{R}$ *avec une base positive, soit* κ^+ *la première action positive de ses chroniques, alors* $\mathfrak{D} \subset \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^0$ *et pour toute chronique* $\mathfrak{c}$ *de* $\mathfrak{R}$ *commençant par une action négative,* $\kappa^+\mathfrak{c} \in \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^0$ *;*
- Si $p_1 = w_1\kappa_1^- w_1'\kappa_1^+$ *et* $p_2 = w_2\kappa_2^- w_2'$ *sont deux chemins appartenant à* $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^i$ *et satisfaisant les conditions de la proposition 6 alors* $p = w_1\kappa_1^- w_1'\kappa_1^+\kappa_2^- w_2' \in \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^{i+1}$.
Nous montrons ci-dessous que $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}} = \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}$.
Il est immédiat que nous avons $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^0 \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$.*De plus, avec les notations du dernier item,* $\ulcorner p \urcorner \subset \ulcorner p_1 \urcorner \cup \ulcorner p_2 \urcorner$. *Ainsi, par induction nous prouvons que* $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}} \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$.
Nous prouvons l'autre sens de l'inclusion par induction sur la longueur d'un chemin p *de* $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *:*
- La propriété est immédiate si p *est vide ou réduit à une seule action, ou est une chronique .*
- Si $p = \kappa^-\kappa^+$ *alors* p *est une chronique, si* $p = \kappa^+\kappa^-$ *alors soit* p *est une chronique, soit* κ^- *est une chronique et* κ^+ *est la première action d'un dessein de* $\mathfrak{R}$ *de base positive : dans ces trois cas* p *appartient à* $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}}$.
- Sinon, p *est de longueur au moins* 3 *et n'est pas une chronique, ainsi* $\ulcorner p \urcorner$ *a au*

moins deux actions de plus que p. Remarquons que le plus long suffixe commun de p et $\ulcorner p \urcorner$ n'est pas vide et commence avec une action négative, sinon ce serait p ainsi p serait une chronique. Notons $\kappa_2^- w_2'$ ce suffixe commun, et soit $p = p_1 \kappa_2^- w_2'$. Le chemin p_1 est un chemin non vide de $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ alors, par induction, c'est un élément d'un $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^i$. En outre p_1 finit avec une action positive propre. Soit p_1 est réduit à une action positive, ainsi la base de $\mathfrak{R}$ est positive et le résultat découle du second item dans la définition de $\mathbb{P}_{\mathfrak{R}}$. Soit p_1 contient au moins deux actions si β est négative ou trois actions si β est positive. Soit p_2 défini de la façon suivante : si la base de $\mathfrak{R}$ est négative ou si cette base est positive et $\ulcorner p \urcorner$ a une première action positive alors $p_2 = \ulcorner p \urcorner$, sinon, soit κ^+ la première action du dessein de base positive et posons $p_2 = \kappa^+ \ulcorner p \urcorner$. Dans les deux cas, $p_2 \in \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^0$ et est un chemin. De plus, $\kappa_2^- w_2'$ est un suffixe de $\ulcorner p \urcorner$. Les chemins p_1 et p_2 satisfont les conditions de la proposition 6 :

- la dernière action κ_1^+ de p_1 est une action propre,

- soit w_2 telle que $p_2 = w_2 \kappa_2^- w_2'$ alors $\ulcorner w_2 \kappa_2^- \urcorner w_2' = \ulcorner p_2 \urcorner$ est un chemin basé sur β,

- aucune action de $\kappa_2^- w_2'$ et de p_1 n'ont le même focus,

- si κ_2^- est initiale alors soit κ_1^- la première action (initiale) de p_1 si β est négative ou bien la seconde action de p_1 sinon. Si κ_2^- est justifiée par une action positive, alors cette dernière est suivie dans p_1 par une action négative κ_1^- : si ce n'était pas le cas, cette action positive serait la dernière de p_1 et alors serait dans le suffixe commun de p et $\ulcorner p \urcorner$ amenant une contradiction,

- $\ulcorner w_1 \kappa_1^- \urcorner$ et $\ulcorner w_2 \kappa_2^- \urcorner$ coïncident sauf sur leurs dernières actions qui sont respectivement κ_1^- et κ_2^-.

Ainsi $p \in \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^{i+1}$. Ceci termine l'induction sur la longueur des chemins de $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$. Et nous avons $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}} \subset \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}$.

2.1.2 Chemins et normalisation

Dans [35], Girard introduit le concept de *dispute*. En deux mots, une dispute est un chemin dans un réseau de coupure durant une normalisation. Ici, nous nous focalisons sur de telles disputes et plus précisément, sur les séquences d'actions qui sont parcourues d'un côté d'une interaction.

Après avoir considéré, dans la section précédente, les chemins dans des réseaux de desseins, nous nous focalisons maintenant sur les *chemins de normalisation i.e.* les séquences d'actions qui peuvent être parcourues pendant une normalisation. Nous considérons essentiellement le cas d'un réseau de coupures clos, c'est-à-dire constitué d'un dessein basé sur β égal à $\xi \vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (resp. égal à $\vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$) et un réseau de desseins dont la base est notée $\beta^\perp$ et est égale à $\vdash \xi$, $\sigma_1 \vdash$, …, $\sigma_n \vdash$ (resp. à $\sigma_1 \vdash$, …, $\sigma_n \vdash$). Si un chemin de normalisation est un chemin, l'inverse n'est pas vrai. Nous nous intéressons, dans cette section, à la caractérisation des chemins qui sont des chemins de normalisation. Plus particulièrement nous considérerons la question suivante : soit E un ensemble de desseins de même base [2], est-il possible de caractériser les chemins de $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$ qui peuvent être visités par un élément de $\mathrm{E}^{\perp}$?

Définition 13 (Chemin de normalisation) *Soit $(\mathfrak{D}, \mathfrak{R})$ un réseau clos convergent dont tous les lieux coupés appartiennent à la base de $\mathfrak{D}$. Le* chemin de normalisation *de l'interaction de $\mathfrak{D}$ avec $\mathfrak{R}$, noté $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$, est la séquence des actions de $\mathfrak{D}$ qui sont successivement visités pendant la normalisation. Il peut être défini par induction sur le nombre n d'étapes de normalisation :*

— *Cas $n = 1$:*
- Si l'interaction termine en une étape : soit $\mathfrak{D} = \mathfrak{Dai}_+$, dans ce cas $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle = \maltese$, soit le dessein principal (qui n'est pas $\mathfrak{D}$) est égal à $\mathfrak{Dai}_+$ et dans ce cas $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ est la séquence vide.
- Sinon, soit κ^+ la première action du dessein principal. La première action de $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ est κ^+ si $\mathfrak{D}$ est le dessein principal, et est $\overline{\kappa^+}$ sinon [3].

— *Cas $n = p + 1$: le préfixe $\kappa_1 \dots \kappa_p$ de $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ est déjà défini.*
Soit l'interaction se termine et $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle = \kappa_1 \dots \kappa_p$ si le dessein principal est un sous-dessein de $\mathfrak{R}$, soit $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle = \kappa_1 \dots \kappa_p \maltese$ si le dessein principal est un sous-dessein de $\mathfrak{D}$.
Sinon, soit κ^+ la première action du réseau clos obtenu après l'étape p, $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ commence avec $\kappa_1 \dots \kappa_p \overline{\kappa^+}$ si le dessein principal est un sous-dessein de $\mathfrak{R}$, ou bien il commence avec $\kappa_1 \dots \kappa_p \kappa^+$ si le dessein principal est un sous-dessein de $\mathfrak{D}$.

On note $\langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle$ la séquence d'actions visitées dans $\mathfrak{R}$ durant la normalisation avec $\mathfrak{D}$.

La définition précédente est correcte car la normalisation d'un réseau clos convergent est une procédure étape par étape qui satisfait le lemme 2.

Lemme 2 *Soit $(\mathfrak{D}, \mathfrak{R})$ un réseau clos convergent tel que la base de $\mathfrak{D}$ contient tous les lieux coupés. Toutes les étapes de normalisation (jusqu'à la dernière) sont des réseaux clos convergents $(\mathfrak{D}', \mathfrak{R}')$ où :*
- $\mathfrak{D}'$ est un sous-dessein de $\mathfrak{D}$,
- soit $\mathfrak{D}'$ est le dessein principal, soit $\mathfrak{D}'$ est tel que sa première action est la duale de celle du dessein principal, qui est un sous-dessein de $\mathfrak{R}$, soit $\mathfrak{Dai}_+$ est un dessein de $\mathfrak{R}'$.

2. Une *éthique* selon la terminologie de [35].

3. Où la notation $\overline{\kappa}$ est simplement $\overline{(\pm, \xi, I)} = (\mp, \xi, I)$ et peut être étendue aux séquences par $\overline{\epsilon} = \epsilon$ et $\overline{w\kappa} = \overline{w}\,\overline{\kappa}$.

Preuve 7 *Par induction sur le nombre d'étapes de normalisation, on prouve que a) l'étape de normalisation se déroule dans un réseau clos convergent* $(\mathfrak{D}', \mathfrak{R}')$ *où* $\mathfrak{D}'$ *est un sous-dessein de* $\mathfrak{D}$ *et soit il en est le dessein principal soit sa première action est la duale de celle du dessein principal (sauf lorsque ce dessein principal est* $\mathfrak{Dai}_+$*) et b) tous les lieux nouvellement créés apparaissent dans la base d'un sous-dessein de* $\mathfrak{D}$ *et dans la base d'un sous-dessein de* $\mathfrak{R}$*.*

1. *Considérons la première étape. La propriété b) est satisfaite par hypothèse, et la propriété a) est déduite de b) :*
   — *soit* $\mathfrak{D}$ *est le dessein principal, il est basé sur* $\vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *pendant que les autres desseins du réseau clos sont basés sur* $\sigma_i \vdash$*,*
   — *soit* $\mathfrak{D}$ *est de base* $\xi \vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$*. Puisque la base de* $\mathfrak{D}$ *contient tous les lieux coupés, les autres desseins sont* $\mathfrak{A}$ *basé sur* $\vdash \xi$*, et les desseins* $\mathfrak{B}_i$ *basés sur* $\sigma_i \vdash$*. Le dessein principal est* $\mathfrak{A}$ *et puisque l'interaction ne diverge pas soit* $\mathfrak{A}$ *est* $\mathfrak{Dai}_+$ *ou bien sa première action* κ^+ *est telle que l'action duale* $\overline{\kappa^+}$ *est l'une des premières actions de* $\mathfrak{D}$*, alors a) est satisfaite.*
2. *Prouvons que les propriétés a) et b) sont préservées durant une étape de normalisation :*
   — *Considérons un réseau clos convergent* $(\mathfrak{D}', \mathfrak{R}')$ *où* $\mathfrak{D}'$ *est un sous-dessein de* $\mathfrak{D}$ *et est le dessein principal, basé sur* $\vdash \sigma, \Delta$*. Si* $\mathfrak{D}'$ *n'est pas* $\mathfrak{Dai}_+$*, soit* σ *le foyer de sa première action. L'étape suivante de l'interaction est sur un réseau clos convergent qui contient le même dessein que l'étape précédente, sauf que* $\mathfrak{D}'$ *est remplacé par plusieurs desseins* $\mathfrak{D}'_i$ *basés sur* $\sigma i \vdash \Delta_i$ *et le dessein basé sur* $\sigma \vdash \Gamma$ *est remplacé par son sous-dessein* $\mathfrak{A}'$ *basé sur* $\vdash \sigma 1, \ldots, \sigma n, \Gamma$*. Le dessein principal est maintenant* $\mathfrak{A}'$ *:*
     — *Soit sa première action est* ✠ *alors a) est satisfaite,*
     — *Soit c'est une action propre* $(+, \xi, I)$*, où* $\xi = \sigma i_0$ *ou* $\xi \in \Gamma$*. Dans le premier cas, puisque l'interaction ne diverge pas, l'action duale* $(-, \sigma i_0, I)$ *est l'une des premières actions du sous-dessein* $\mathfrak{D}'_{i_0}$ *de* $\mathfrak{D}$*, alors a) est satisfaite. Sinon,* $\xi \in \Gamma$*. Les lieux appartenant à* Γ *ne sont pas initiaux, puisqu'ils ne peuvent pas apparaître dans la base de* $\mathfrak{D}$ *en position négative. Ainsi* ξ *a été créé durant la normalisation et il est dans la base d'un sous-dessein de* $\mathfrak{D}$*, c'est-à-dire qu'il y a un sous-dessein de* $\mathfrak{D}$ *basé sur* $\xi \vdash \Xi$ *et (puisque l'interaction ne diverge pas) ayant* $(-, \xi, I)$ *comme première action. Alors a) est satisfaite.*

     En outre, les seuls lieux nouvellement créés sont les σi *qui sont dans les bases de sous-desseins de* $\mathfrak{D}$*. Ainsi b) aussi est satisfaite.*
   — *Considérons un réseau clos convergent dont le principal dessein* $\mathfrak{A}'$ *n'est pas* $\mathfrak{Dai}_+$ *et dont la première action* $(+, \sigma, I)$ *est une des premières actions*

négatives d'un sous-dessein $\mathfrak{D}'$ basé sur $\sigma \vdash \Gamma$. L'étape de normalisation suivante est un réseau clos convergent qui contient les mêmes desseins que lors de l'étape précédente exceptés $\mathfrak{D}'$ qui est remplacé par son sous-dessein $\mathfrak{D}''$ basé sur $\vdash \sigma 1, \ldots, \sigma n, \Gamma$ et certains desseins $\mathfrak{A}'_i$ basés sur $\sigma i \vdash \Delta_i$. Puisque $\mathfrak{D}''$ est le dessein principal, a) est satisfaite. De plus, les seuls lieux nouvellement créés sont les σi qui sont dans la base de $\mathfrak{D}''$ qui est un sous-dessein de $\mathfrak{D}$. Ainsi b) aussi est satisfaite.

La proposition suivante montre que les chemins de normalisation sont bien des chemins.

Proposition 8 *$\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ est un chemin de $\mathfrak{D}$. $\langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle$ est un chemin de $\mathfrak{R}$.*

Preuve 8 *Nous prouvons la première propriété par induction sur la longueur d'un préfixe de $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$.*
- Le cas de base de l'induction dépend de la polarité de $\mathfrak{D}$: si $\mathfrak{D}$ a une base négative alors la séquence vide est un chemin de $\mathfrak{D}$, sinon $\mathfrak{D}$ a une base positive et il existe une première action dans la séquence $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$, cette action étant la première action de $\mathfrak{D}$, la séquence constituée de cette unique action est un chemin de $\mathfrak{D}$.
- Supposons que $\kappa_1 \ldots \kappa_p \kappa$ est un préfixe de $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ et que par hypothèse d'induction, $\kappa_1 \ldots \kappa_p$ est un chemin de $\mathfrak{D}$.
Si κ est une action positive alors, par rapport à la normalisation, $\ulcorner \kappa_1 \ldots \kappa_p \urcorner \kappa$ est une chronique de $\mathfrak{D}$ qui étend $\ulcorner \kappa_1 \ldots \kappa_p \urcorner$, ainsi $\kappa_1 \ldots \kappa_p \kappa$ est un chemin de $\mathfrak{D}$.
Si κ est une action négative initiale, c'est que $\mathfrak{D}$ est négatif et κ est la première action de la normalisation, i.e., *$p = 0$, et κ est un chemin de $\mathfrak{D}$.*
Sinon, le foyer de l'action négative κ a été créé durant l'interaction par une action positive présente $\kappa_1 \ldots \kappa_p$, ainsi $\kappa_1 \ldots \kappa_p \kappa$ est un chemin de $\mathfrak{D}$.
La seconde propriété se prouve de la même façon.

Notons que $\langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle$ est obtenu à partir de $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ en changeant seulement les polarités des actions propres et en ajoutant le daimon lorsque celui-ci n'est pas présent dans $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$. Plus précisément, on définit ainsi le *dual* d'une séquence alternée positive d'actions $\boldsymbol{p}$ (éventuellement vide) en une séquence alternée positive d'actions $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ (éventuellement vide) de la façon suivante :

— Si $\boldsymbol{p} = w\maltese$, $\widetilde{\boldsymbol{p}} := \overline{w}$.

— Sinon $\widetilde{\boldsymbol{p}} := \overline{\boldsymbol{p}}\maltese$.

Notons que $\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{p}}} = \boldsymbol{p}$. Il suit de la définition d'un chemin de normalisation que $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{R}$ ssi $\exists \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$ tel que $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$. Un tel $\boldsymbol{p}$ est unique et est en fait $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$. Tous les chemins de $\mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$ ne peuvent pas être visités par un réseau de $\mathfrak{D}^{\perp}$ comme l'illustre l'exemple suivant proposé par Faggian [21].

Exemple 1 *Considérons le dessein* $\mathfrak{D} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma 0 \vdash \xi 00}{\vdash \xi 00, \sigma}}{\xi 0 \vdash \sigma} \quad \dfrac{\dfrac{\tau 0 \vdash \xi 10}{\vdash \xi 10, \tau}}{\xi 1 \vdash \tau}}{\vdash \xi, \sigma, \tau}$ *, son orthogonal* $\mathfrak{D}^{\perp}$ *est l'ensemble suivant de réseaux (où les pointillés peuvent être remplacés par toutes forêts d'actions telles que le résultat est un dessein) :*

$$\left\{ \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 0, \xi 1}\maltese}{\xi \vdash} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \sigma \vdash\end{matrix} \; \begin{matrix}\vdots\\ \tau \vdash\end{matrix} \quad ; \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\xi 00 \vdash \xi 1}}{\vdash \xi 0, \xi 1}}{\xi \vdash} \; \dfrac{\dfrac{}{\vdash \sigma 0}\maltese}{\sigma \vdash} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \tau \vdash\end{matrix} \quad ; \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\xi 10 \vdash \xi 0}}{\vdash \xi 0, \xi 1}}{\xi \vdash} \; \begin{matrix}\vdots\\ \sigma \vdash\end{matrix} \; \dfrac{\dfrac{}{\vdash \tau 0}\maltese}{\tau \vdash} \right\}$$

Considérons le chemin $\boldsymbol{p} = (+, \xi, \{0, 1\})(-, \xi 0, \{0\})(+, \sigma, \{0\})(-, \xi 1, \{0\})(+, \tau, \{0\})$. *C'est un chemin de* $\mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$*, toutefois, il n'est pas visité par un réseau de* $\mathfrak{D}^{\perp}$ *: son dual* $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ *est* $(-, \xi, \{0, 1\})(+, \xi 0, \{0\})\ (-, \sigma, \{0\})(+, \xi 1, \{0\})(-, \tau, \{0\})\maltese$ *qui n'est pas un chemin.*

Dans [21], Faggian caractérise les *strong slices*, c'est-à-dire les slices ou tranches d'un dessein $\mathfrak{D}$ qui peuvent être complètement visitées lors d'une unique normalisation par un orthogonal de $\mathfrak{D}$. Nous ne rappelons pas ici cette étude. Nous rappelons seulement qu'une tranche d'un dessein est un sous-dessein *multiplicatif* de $\mathfrak{D}$, *i.e.* un foyer apparaît seulement dans une unique action négative. Et que lorsque $\boldsymbol{p}$ est une séquence d'actions basée sur β, $\ulcorner\!\ulcorner \boldsymbol{p} \urcorner\!\urcorner$ est une *strong slice* ssi $\boldsymbol{p}$ et $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ sont des chemins. En outre, que $\ulcorner\!\ulcorner \boldsymbol{p} \urcorner\!\urcorner$ soit une strong slice peut être uniquement déterminé par des contraintes sur $\boldsymbol{p}$. En fait, le dual d'un chemin $\boldsymbol{p}$ est un chemin si $\boldsymbol{p}$ satisfait le dual du premier item de la contrainte du saut négatif, ce que nous appelons *saut négatif restreint*. Notons que les deux contraintes de saut négatif et saut négatif restreint sont l'équivalent de la contrainte de visibilité en sémantique des jeux.

Proposition 9 *Soit* $\boldsymbol{p}$ *un chemin basé sur* β*,* $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ *est un chemin basé sur* $\beta^{\perp}$ *ssi* $\boldsymbol{p}$ *satisfait*

— Saut négatif restreint :
Si κ^- *est une action propre justifiée par l' action* κ'^+ *alors il y a une séquence* $\alpha_0^- \alpha_0^+ \ldots \alpha_n^+$ *commençant par* $\kappa^- = \alpha_0^-$*, se terminant par* $\kappa'^+ = \alpha_n^+$ *et telle que* α_i^+ *précède immédiatement* α_i^- *dans* $\boldsymbol{p}$ *et* α_{i+1}^- *justifie* α_i^+.

Preuve 9 *Supposons que* $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ *est un chemin, alors il satisfait la contrainte de saut négatif , ainsi* $\boldsymbol{p}$ *satisfait son dual, c'est à dire, en particulier la contrainte de saut négatif restreint.*

Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ satisfait la contrainte de saut négatif restreint, alors, étant donnée la définition de $\widetilde{\mathfrak{p}}$ et le fait que $\mathfrak{p}$ est un chemin, la séquence $\widetilde{\mathfrak{p}}$ satisfait les conditions (Alternance), (Justification), (Linéarité), (Daimon). Il reste à vérifier que $\widetilde{\mathfrak{p}}$ satisfait (Totalité) et (Saut Négatif) :

— *(Totalité) Notons que si β est négative alors soit $\mathfrak{p}$ est vide, et alors $\widetilde{\mathfrak{p}} = \maltese$ n'est pas vide, soit la première action de $\mathfrak{p}$ est négative et donc $\widetilde{\mathfrak{p}}$ n'est pas vide.*

— *(Saut Négatif)*
- Le premier item est satisfait par $\widetilde{\mathfrak{p}}$ car $\mathfrak{p}$ satisfait la contrainte de saut négatif restreint.
- Pour le second item, soit κ l'action positive propre initiale de $\widetilde{\mathfrak{p}}$, alors $\overline{\kappa}$ est négative et initiale dans $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire la première action de $\mathfrak{p}$ étant donné la sorte de base que l'on considère. Le résultat en découle.

Nous allons maintenant considérer une question plus générale que la caractérisation des chemins qui peuvent être visités par une normalisation. Soit E un ensemble de desseins de même base, est-il possible de caractériser les chemins $\mathfrak{p}$ de desseins de E qui peuvent être visités par un orthogonal,*i.e.*, un élément de $\mathrm{E}^{\perp}$? Une condition nécessaire est que $\widetilde{\mathfrak{p}}$ soit aussi un chemin, *i.e.*, $\ulcorner\!\ulcorner p \urcorner\!\urcorner$ est une strong slice. Cette condition n'est toutefois pas suffisante, supposons qu'un $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$ possède une première action négative κ^-, alors $\mathfrak{p} = \kappa^-$ est un chemin de $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{p}$ est visité par interaction avec un élément $\mathfrak{R}$ de $\mathrm{E}^{\perp}$ si $\mathfrak{R}$ contient un dessein avec une première action positive $\overline{\kappa^-}$; mais, comme $\mathfrak{R} \in \mathrm{E}^{\perp}$, κ^- doit être la première action négative de chaque dessein de E. Ceci est le point clé que nous utilisons dans la proposition 10 pour caractériser les chemins qui sont *visitables* dans un ensemble de desseins E. Une caractérisation qui ne réfère pas directement aux éléments de $\mathrm{E}^{\perp}$.

Définition 14 (Visitabilité dans un ensemble de desseins) *Soit* E *un ensemble de desseins de même base, un chemin $\mathfrak{p}$ est* visitable dans E *ssi il existe un dessein $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$ et un réseau $\mathfrak{R} \in \mathrm{E}^{\perp}$ tel que $\mathfrak{p} = \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$.*

Remarque : Un chemin visitable $\mathfrak{p}$ est positif (*i.e.*, sa dernière action est positive). En outre, avec les notations de la définition, $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$; de plus $\forall \mathfrak{D}' \in \mathrm{E}$ tel que $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}'}$ alors $\mathfrak{p} = \langle \mathfrak{D}' \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ car la normalisation est déterministe.

Proposition 10 *Soit* E *un ensemble de desseins, $\mathfrak{p}$ est un chemin positif d'un dessein de* E*,*
$\mathfrak{p}$ est visitable dans E *ssi ($\widetilde{\mathfrak{p}}$ est un chemin et pour tout préfixe $w\kappa^-$ de $\mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{D} \in \mathrm{E}$, si w est un chemin de $\mathfrak{D}$ alors $w\kappa^-$ est un chemin de $\mathfrak{D}$).*

Preuve 10 *Supposons que* $\boldsymbol{p}$ *est un chemin visitable dans* E, *alors il existe un dessein* $\mathfrak{D}_0 \in \mathrm{E}$ *et un réseau* $\mathfrak{R} \in \mathrm{E}^\perp$ *tel que* $\boldsymbol{p} = \langle \mathfrak{D}_0 \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$, *ainsi* $\widetilde{\boldsymbol{p}} = \langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D}_0 \rangle$ *est un chemin. Soit* $w\kappa^-$ *un préfixe de* $\boldsymbol{p}$ *et* $\mathfrak{D}$ *un dessein de* E *tel que* $w \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$. *Notons que* w *ne peut pas finir par un daimon.*

— *Si* w *est vide, la base des desseins de* E *est négative,* i.e., *de la forme* $\xi \vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *et les réseaux* $\mathfrak{R}$ *dans* $\mathrm{E}^\perp$ *ont des bases* $\vdash \xi$, $\sigma_1 \vdash$, ..., $\sigma_n \vdash$. *Ainsi la normalisation entre* $\mathfrak{R}$ *et les desseins de* E *doit commencer avec la même action positive* $\overline{\kappa^-}$ *de* $\mathfrak{R}$, *ainsi* κ^- *doit être la première action de tous les desseins de* E, *ainsi un chemin dans tous les desseins de* E.

— *Sinon, comme* $\boldsymbol{p}$ *est un chemin visitable dans* E, *il y a un dessein* $\mathfrak{D}_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}_0}$ *et il existe un réseau* $\mathfrak{R} \in \mathrm{E}^\perp$ *tel que* $\boldsymbol{p} = \langle \mathfrak{D}_0 \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$. *Ceci signifie que* $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ *et alors que* $\overline{w\kappa^-}$ *aussi. Puisque* w *est un chemin de* $\mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$, *et que la normalisation est déterministe et que* $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{R}$, *alors* w *est un préfixe de* $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$. *Notons que après* $|w|$ *pas de normalisation entre* $\mathfrak{D}$ *et* $\mathfrak{R}$, *le réseau de coupures est fait d'un réseau* $\mathfrak{X}_{\mathfrak{D}}$ *de sous-desseins de* $\mathfrak{D}$ *et d'un réseau* $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}$ *de sous-desseins de desseins de* $\mathfrak{R}$. *De plus, il y a exactement un dessein de base positive dans ce réseau de coupures et ce dessein appartient à* $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}$. *En outre,* $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}$ *est aussi un réseau obtenu à partir de* $\mathfrak{R}$ *après* $|w|$ *étapes dans la normalisation entre* $\mathfrak{D}_0$ *et* $\mathfrak{R}$. *Alors* $\overline{\kappa^-}$ *est l'action suivante utilisée dans la normalisation avec* $\mathfrak{D}_0$, *c'est-à-dire avec* $\mathfrak{D}$ *(pour que la normalisation se déroule). Ainsi,* $w\kappa^-$ *est un chemin de* $\mathfrak{D}$.

Réciproquement, supposons que $\boldsymbol{p}$ *est un chemin positif d'un dessein* $\mathfrak{D}_0$ *de* E *tel que pour tout préfixe* $w\kappa^-$ *de* $\boldsymbol{p}$, $\forall \mathfrak{D} \in \mathrm{E}$, *si* $w \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$ *alors* $w\kappa^- \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$. *On construit un ensemble de chemins* R :
pour tout préfixe $w_0\kappa_0^+$ *de* $\boldsymbol{p}$, *pour toute action positive* κ^+ *distincte de* κ_0^+ *telle que* $\ulcorner w_0\kappa^+ \urcorner$ *est une chronique d'un dessein* E *nous posons que* $\overline{w_0\kappa^+}\maltese$ *est un chemin de* R. *Nous ajoutons* $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ *à* R. *Soit* $\mathfrak{R} = \ulcorner\!\ulcorner R \urcorner\!\urcorner$. *Par construction,* R *est un ensemble de chemins finis, positifs et deux à deux cohérents, ainsi* $\mathfrak{R}$ *est un réseau de desseins bien défini. De plus* $\mathfrak{R}$ *est tel que pour chaque* $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$, $\mathfrak{R} \perp \mathfrak{D}$, i.e., $\mathfrak{R} \in \mathrm{E}^\perp$. *Finalement,* $\boldsymbol{p} = \langle \mathfrak{D}_0 \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ *par conséquent* $\boldsymbol{p}$ *est un chemin visitable dans* E.

Corollary 1 *L'ensemble des chemins visitables dans* E, *noté* V_{E}, *est clos par préfixes positifs : si* $\boldsymbol{p}\kappa^+ w \in V_{\mathrm{E}}$ *alors* $\boldsymbol{p}\kappa^+ \in V_{\mathrm{E}}$.

2.2 Le calcul de l'*incarnation*

2.2.1 Incarnation

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, un comportement contient des desseins inutiles par rapport à l'orthogonalité. Ceci est clair lorsqu'on considère un dessein comme un ensemble de chemins : si $\mathbf{B}$ est un comportement et $\mathfrak{D} \in \mathbf{B}$ alors les desseins dans $\mathbf{B}$ obtenus à partir de $\mathfrak{D}$ en étendant certains de ses chemins sont inutiles par rapport à l'appartenance à $\mathbf{B}$. Remarquons que $\bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \ulcorner \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \urcorner$ est un dessein : si $\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp$ alors $\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ est un chemin inclus dans $\mathfrak{D}$, ainsi $\bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \ulcorner \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \urcorner$ est un dessein inclus dans $\mathfrak{D}$. De plus, par construction, ce dessein $\bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \ulcorner \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \urcorner$ appartient à $\mathbf{B}^{\perp\perp} = \mathbf{B}$. Ceci suggère, comme alternative à la définition d'incarnation d'un dessein dans un comportement, la définition suivante

Définition 15 (Incarnation) *Soit* $\mathbf{B}$ *un comportement,* $\mathfrak{D}$ *un dessein dans* $\mathbf{B}$*.* $|\mathfrak{D}|_\mathbf{B} := \bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \ulcorner \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \urcorner$ *est l'*incarnation *de* $\mathfrak{D}$ *par rapport au comportement* $\mathbf{B}$*.*

Cette définition est équivalente à la définition donnée par Girard et rappelée dans le chapitre précédent, qui dit qu'un dessein est matériel dans un comportement lorsqu'il est minimal par rapport à l'inclusion parmi les desseins appartenant à ce comportement.

Proposition 11 *Soit* $\mathbf{B}$ *un comportement et soit* $\mathfrak{D}$ *un dessein dans* $\mathbf{B}$*. Le dessein* $\mathfrak{D}$ *est minimal dans* $\mathbf{B}$ *par rapport à l'inclusion ssi* $\mathfrak{D} \in |\mathbf{B}|$ *(au sens de la définition 15).*

Preuve 11 *L'implication directe est immédiate à partir de la remarque ci-dessus. Réciproquement, remarquons que* $\bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \ulcorner \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \urcorner = \ulcorner \bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \urcorner$*. Pour obtenir un dessein* $\mathfrak{D}_0$ *strictement contenu dans* $\bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \ulcorner \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \urcorner$*, nous devons effacer au moins une chronique* $\mathfrak{c}$ *(et ses extensions). Mais il y a au moins un chemin* $p_0 \in \bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathbf{B}^\perp} \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle$ *tel que* $\mathfrak{c} \in \ulcorner p_0 \urcorner$ *ainsi, si on note* $\mathfrak{R}_0$ *un réseau tel que* $p_0 = \langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R}_0 \rangle$*, par la contrainte de linéarité sur les desseins, nous avons que* $\mathfrak{D}_0 \not\perp \mathfrak{R}_0$*. Ainsi* $\mathfrak{D}_0 \notin \mathbf{B}$*.*

Notons que la première partie de cette équivalence est aussi vraie dans le cadre plus général défini par Basaldella et Faggian pour traiter des exponentielles en Ludique [6]. L'implication réciproque n'est pas vraie dans leur cadre, elle est due ici à la linéarité, *i.e.*, le fait que les actions ne peuvent être visitées qu'une fois lors de la normalisation. La linéarité induit le fait suivant : $\widetilde{\langle \mathfrak{D} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle} = \langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle$ (voir aussi [35]).

La définition de l'incarnation est étendue aux réseaux de desseins orthogonaux à un ensemble de desseins de même base :

Définition 16 *Soit* E *un ensemble de desseins de même base* $\beta = \delta_0 \vdash \delta_1, \ldots, \delta_n$ *(resp.* $\beta = \vdash \delta_1, \ldots, \delta_n$*),* $\mathfrak{R} = (\mathfrak{E}_i)$ *est un réseau de desseins appartenant à* $\mathrm{E}^\perp$*, avec* $\mathfrak{E}_i$ *de base* $\delta_i \vdash$ *for* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $\mathfrak{E}_0$ *basé sur* $\vdash \delta_0$*. Avec* $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$*, soit* $(\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{D}}) = \ulcorner\!\ulcorner \langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle \urcorner\!\urcorner$ *un réseau de desseins tels que* $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{D}}$ *est un dessein de même base que* $\mathfrak{E}_i$*.*
*L'*incarnation *de* $\mathfrak{R}$*, notée* $|\mathfrak{R}|_{\mathrm{E}^\perp}$*, est le réseau* $(\bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathrm{E}} \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{D}})$*.*
*L'*incarnation *de* $\mathrm{E}^\perp$*, notée* $|\mathrm{E}^\perp|$*, est* $\{|\mathfrak{R}|_{\mathrm{E}^\perp} ; \mathfrak{R} \in \mathrm{E}^\perp\}$*.*

L'incarnation de tels réseaux de desseins est bien définie : avec les notations de la définition ci-dessus, pour tout i, $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{E}_i$, ainsi $\bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathrm{E}} \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{D}}$ est un dessein inclus dans $\mathfrak{E}_i$. De plus, pour tout dessein $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$, $\mathfrak{D} \perp |\mathfrak{R}|_{\mathrm{E}^\perp}$. Ainsi $|\mathrm{E}^\perp| \subset \mathrm{E}^\perp$. Abusivement, on notera $|\mathfrak{R}|_{\mathrm{E}^\perp} = \bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathrm{E}} \ulcorner\!\ulcorner \langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle \urcorner\!\urcorner$.

Considérons un ensemble de desseins E de même base, nous caractérisons dans la proposition 10 les chemins qui sont visitables dans E. Notons que ceci est suffisant pour calculer l'incarnation d'un dessein dans le comportement engendré par E : la définition nous donne $|\mathfrak{D}|_{\mathrm{E}^{\perp\perp}} = \ulcorner\!\ulcorner \mathcal{P}_{\mathfrak{D}} \cap V_{\mathrm{E}} \urcorner\!\urcorner$ lorsque $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$.

Autrement dit, il n'est pas nécessaire de calculer le comportement engendré par un ensemble de desseins pour calculer l'incarnation de ces desseins dans ce comportement. Ceci suggère les questions suivantes : Est-il possible de calculer directement l'incarnation du comportement engendré par un ensemble de desseins E, seulement à partir des chemins visitables dans E ? Tous les desseins de E sont-ils nécessaires pour calculer cette incarnation ?

Nous remarquons ci-dessous qu'aucune de ces questions n'admet de réponse évidente : d'une part, le biorthogonal peut contenir des desseins qui sont construits à partir de morceaux de plusieurs desseins de E, d'autre part, même si certains desseins sont clairement redondants, certains cas sont difficiles à caractériser.

Certains desseins dont on peut dire à coup sûr qu'ils seront dans le comportement engendré par l'ensemble de desseins E sont ceux qui sont obtenus à partir des desseins déjà présents en remplaçant certains sous-arbres par des daimons. Ces desseins sont explicitement caractérisés à partir de la relation "être plus défini", notée $\preccurlyeq$, que nous avons rappelée dans le chapitre précédent. Ceci est déjà en partie pris en compte dans la notion d'incarnation, puisque la relation $\preccurlyeq$ subsume la relation d'inclusion, et qu'un dessein matériel est minimal par rapport à l'inclusion dans un comportement. L'autre manière de rendre un dessein $\mathfrak{D}$ plus défini qu'un dessein $\mathfrak{E}$ est de substituer certaines chroniques $w\kappa^+ w'$ de $\mathfrak{D}$ par la seule chronique $w\maltese$ dans $\mathfrak{E}$. Une conséquence est que si le dessein $\mathfrak{D}$ est dans le comportement $\mathrm{E}^{\perp\perp}$ alors il en est de même du dessein $\mathfrak{E}$, et si $\mathfrak{D}$ est dans l'incarnation $|\mathrm{E}^{\perp\perp}|$, il en est de même de $\mathfrak{E}$. Nous appelons un tel ensemble de desseins la *clôture par daimon* de $\mathfrak{D}$ et on le note $\mathfrak{D}^{\maltese}$ (voir la définition suivante). Les relations d'inclusion, de plus grande définition et d'appartenance à la

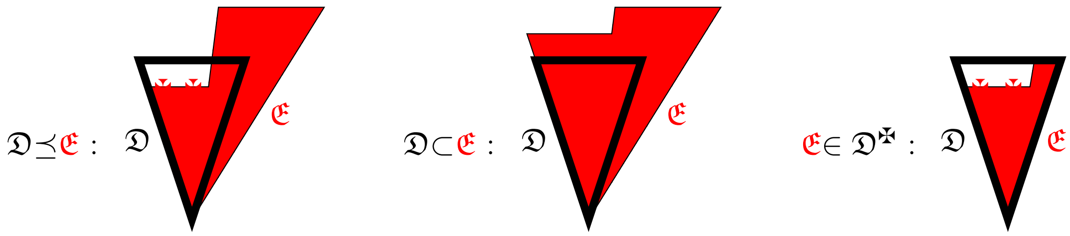


FIGURE 2.3 – Relations de plus grande définition et d'inclusion, et clôture par daimon d'un dessein.

clôture par daimon sont schématisées dans la figure 2.3.

Définition 17 (Clôture par daimon) *Soit $\mathfrak{D}$ un dessein, la* clôture par daimon *de $\mathfrak{D}$, notée $\mathfrak{D}^{\maltese}$, est l'ensemble de desseins obtenus à partir de $\mathfrak{D}$ en substituant, pour un ensemble donné de chroniques négatives $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$, toutes les chroniques $\mathfrak{c}\kappa^+ w \in \mathfrak{D}$ par les chroniques $\mathfrak{c}\maltese$.*
Soit E *un ensemble de desseins de même base, la clôture par daimon de* E *notée* $\mathrm{E}^{\maltese}$ *est l'ensemble* $\bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathrm{E}} \mathfrak{D}^{\maltese}$.

Autrement dit, les comportements et leurs incarnations sont "clos par daimon". Ainsi, $\mathrm{E} \backslash \mathrm{E}^{\maltese}$ est suffisant pour engendrer l'incarnation de E. Toutefois, ceci ne fournit par une réponse complète à la question, dans l'exemple 2, les desseins $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$ sont suffisants par engendrer l'incarnation de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}\}$.

EXEMPLE **2** *Nous avons que* $|\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}^{\perp\perp}| = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}\}^{\maltese}$ *où :*

$$\mathfrak{E} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.1.0, \sigma.1.0, \mu.1.0}\maltese}{\mu.1 \vdash \xi.1.0, \sigma.1.0}}{\vdash \xi.1.0, \sigma.1.0, \mu}}{\sigma.1 \vdash \xi.1.0, \mu}}{\vdash \xi.1.0, \sigma, \mu}}{\xi.1 \vdash \sigma, \mu}}{\vdash \xi, \sigma, \mu} \quad , \mathfrak{F} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.1.0, \sigma.1.0, \mu.1.0}\maltese}{\xi.1 \vdash \mu.1.0, \sigma.1.0}}{\vdash \mu.1.0, \sigma.1.0, \xi}}{\sigma.1 \vdash \mu.1.0, \xi}}{\vdash \mu.1.0, \sigma, \xi}}{\mu.1 \vdash \sigma, \xi}}{\vdash \xi, \sigma, \mu}$$

$$, \mathfrak{G} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.1.0, \sigma.1.0, \mu.1.0}\maltese}{\sigma.1 \vdash \xi.1.0, \mu.1.0}}{\vdash \xi.1.0, \mu.1.0, \sigma}}{\mu.1 \vdash \xi.1.0, \sigma}}{\vdash \xi.1.0, \sigma, \mu}}{\xi.1 \vdash \sigma, \mu}}{\vdash \xi, \sigma, \mu} \quad , \mathfrak{H} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.1.0, \sigma.1.0, \mu.1.0}\maltese}{\sigma.1 \vdash \mu.1.0, \xi.1.0}}{\vdash \mu.1.0, \xi.1.0, \sigma}}{\xi.1 \vdash \mu.1.0, \sigma}}{\vdash \mu.1.0, \sigma, \xi}}{\mu.1 \vdash \sigma, \xi}}{\vdash \xi, \sigma, \mu}$$

Notons que dans cet exemple, chaque dessein est obtenu en commutant les actions d'un des autres. De telles commutations ne fournissent pas toujours des éléments de l'incarnation car cela dépend du reste de l'ensemble de desseins considéré. De plus, les desseins de l'incarnation ne sont pas nécessairement obtenus de cette façon. Dans l'exemple 3, les desseins $\mathfrak{E}''$ et $\mathfrak{F}''$ sont construits en ajoutant les paires d'actions $(+, \mu, \{0\})(-, \mu.0, \{0\})$ dans des chemins qui deviennent visitables en renversant la proposition 10 : tous les chemins dans un dessein dual voyagent à travers cette paire.

Exemple 3 *Nous avons que* $|\{\mathfrak{E}', \mathfrak{F}', \mathfrak{G}'\}^{\perp\perp}| = \{\mathfrak{E}', \mathfrak{F}', \mathfrak{G}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}''\}^{\maltese}$ *où :*[4]

$$\mathfrak{E}' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi.1.0.0 \vdash \mu}{\vdash \xi.1.0, \mu}}{\xi.1 \vdash \mu} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma.1 \vdash \xi.2.0}{\vdash \xi.2.0, \sigma}}{\xi.2 \vdash \sigma}}{\vdash \xi, \sigma, \mu}\ , \mathfrak{F}' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi.1.0.1 \vdash \mu}{\vdash \xi.1.0, \mu}}{\xi.1 \vdash \mu} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma.2 \vdash \xi.2.0}{\vdash \xi.2.0, \sigma}}{\xi.2 \vdash \sigma}}{\vdash \xi, \sigma, \mu}\ , \mathfrak{G}' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.1.0, \mu.0.0}\maltese}{\mu.0 \vdash \xi.1.0}}{\vdash \xi.1.0, \mu}}{\xi.1 \vdash \mu} \qquad \xi.2 \vdash \sigma}{\vdash \xi, \sigma, \mu}$$

$$\mathfrak{E}'' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi.1.0.0 \vdash \mu.0.0}{\vdash \xi.1.0, \mu.0.0}}{\mu.0 \vdash \xi.1.0}}{\vdash \xi.1.0, \mu}}{\xi.1 \vdash \mu} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma.1 \vdash \xi.2.0}{\vdash \xi.2.0, \sigma}}{\xi.2 \vdash \sigma}}{\vdash \xi, \sigma, \mu}\ , \quad \mathfrak{F}'' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi.1.0.1 \vdash \mu.0.0}{\vdash \xi.1.0, \mu.0.0}}{\mu.0 \vdash \xi.1.0}}{\vdash \xi.1.0, \mu}}{\xi.1 \vdash \mu} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma.2 \vdash \xi.2.0}{\vdash \xi.2.0, \sigma}}{\xi.2 \vdash \sigma}}{\vdash \xi, \sigma, \mu}$$

Au vu des remarques précédentes, il semble qu'il n'y ait pas de méthode pour calculer directement l'incarnation. Pour circonvenir à cette difficulté, nous utilisons une approche indirecte pour le calcul de l'incarnation. Tout d'abord nous montrons que nous pouvons calculer l'incarnation $|\mathrm{E}^{\perp}|$ directement à partir de E lorsque E est un ensemble de desseins. Ensuite, nous utilisons la proposition suivante $|\mathrm{E}^{\perp\perp}| = |(|\mathrm{E}^{\perp}|)^{\perp}|$ pour teminer notre calcul. Ainsi, pour le calcul de l'incarnation, nous recourrons à une seule procédure que nous appliquons deux fois, cette procédure est le calcul direct de l'incarnation du dual.

Proposition 12 *Soit* E *un ensemble de desseins de même base* β, $\mathrm{E}^{\perp\perp} = |\mathrm{E}^{\perp}|^{\perp}$.

Preuve 12 *Nous avons déjà noté que* $|\mathrm{E}^{\perp}| \subset \mathrm{E}^{\perp}$. *Ainsi* $\mathrm{E}^{\perp\perp} \subset |\mathrm{E}^{\perp}|^{\perp}$. *Soit* $\mathfrak{D} \in |\mathrm{E}^{\perp}|^{\perp}$, *pour tout* $\mathfrak{R} \in \mathrm{E}^{\perp}$, $\mathfrak{D} \perp |\mathfrak{R}|_{\mathrm{E}^{\perp}}$ *ainsi* $\langle |\mathfrak{R}|_{\mathrm{E}^{\perp}} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle$ *est un chemin de normalisation dans* $|\mathfrak{R}|_{\mathrm{E}^{\perp}}$, *ainsi aussi dans* $\mathfrak{R}$. *Alors, nous avons bien* $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{R}$.

2.2.2 Calcul direct de l'incarnation du dual d'un ensemble de desseins

Nous avons vu dans la section 2.1, comment calculer V_{E}, l'ensemble des chemins visitables $\boldsymbol{p}$ d'un ensemble de desseins E, ainsi nous savons alors calculer $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ où

4. Dans la représentation des desseins, on peut choisir de mettre μ ou σ dans n'importe quelle branche lorsque ce lieu n'est pas le foyer d'une action. Le choix n'a aucune conséquence sur le résultat.

$\widetilde{V_{\mathrm{E}}} = \{\widetilde{p}; p \in V_{\mathrm{E}}\}$. Il est clair que si p est visitable dans E alors $\widetilde{p}$ est visitable dans $\mathrm{E}^{\perp}$. En d'autres mots, $\widetilde{V_{\mathrm{E}}} \subset V_{\mathrm{E}^{\perp}}$. Rappelons qu'un dessein de $|\mathrm{E}^{\perp}|$ peut être vu comme l'ensemble des vues des chemins cohérents de $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$. De plus, un tel dessein doit être orthogonal à chaque dessein de E, ainsi les cliques maximales de $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ sont les candidats naturels pour définir les desseins de $|\mathrm{E}^{\perp}|$. Ceci n'est pas suffisant comme nous allons l'illustrer avec un exemple transposé en Ludique à partir de celui utilisé par T. Ehrhard pour l'étude des hypercohérences [18] : si une suite croissante de chemins visitables est dans un dessein, alors sa limite doit aussi être dans ce dessein. Pourvu que l'on respecte cette contrainte, nous sommes capable de caractériser l'incarnation du dual (propositions 14 et 15). En préalable nous établissons dans la proposition suivante que le dual d'une clique de chemins visitables est une anticlique de chemins, cette propriété est nécessaire pour prouver la matérialité.

Proposition 13 *Soit* E *un ensemble de desseins basés sur β, et soient p et q deux chemins distincts appartenant à V_{E},*
- *si $p \supset q$ alors $\widetilde{p} \not\supset \widetilde{q}$,*
- *si C est une clique de chemins basés sur β et visitables dans* E *alors $\widetilde{C}$ est une anticlique de chemins basés sur $\beta^{\perp}$.*

Preuve 13 *Soient p, q deux chemins distincts de V_{E}, et supposons que $p \supset q$:*
- *Soit une des séquences étend strictement l'autre : sans perte de généralité, nous posons $p = q\kappa^{-}w$. Alors $\widetilde{q} = \overline{q}\maltese$ et $\widetilde{p} = \overline{q}\overline{\kappa^{-}}\widetilde{w}$. Les chemins $\widetilde{p}$ et $\widetilde{q}$ sont strictement incohérents.*
- *Soit il existe deux actions négatives distinctes κ_1^{-} et κ_2^{-} telles que $p = w\kappa_1^{-}w_1$ et $q = w\kappa_2^{-}w_2$. Alors $\widetilde{p} = \overline{w}\overline{\kappa_1^{-}}\widetilde{w_1}$ et $\widetilde{q} = \overline{w}\overline{\kappa_2^{-}}\widetilde{w_2}$ qui sont strictement incohérents.*

Il s'ensuit que si C est une clique de V_{E} alors $\widetilde{C}$ est une anticlique de chemins.

Soit C un ensemble de chemins visitables, que $\widetilde{C}$ soit une anticlique de chemins n'est pas suffisant pour que C soit une clique, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE **4** *Soit* $\mathrm{E} = \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\}$ *où :*

$$\mathfrak{E} = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\xi 110 \vdash}{\vdash \xi 11}}{\xi 1 \vdash} \quad \cfrac{\cfrac{\xi 210 \vdash}{\vdash \xi 21}}{\xi 2 \vdash}}{\vdash \xi} \qquad \textit{and} \qquad \mathfrak{F} = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\xi 110 \vdash}{\vdash \xi 11}}{\xi 1 \vdash} \quad \cfrac{\cfrac{\xi 211 \vdash}{\vdash \xi 21}}{\xi 2 \vdash}}{\vdash \xi}$$

Les chemins $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ définis ci-dessous sont deux chemins positifs incohérents, visitables dans E *et $\widetilde{\mathfrak{p}}$ et $\widetilde{\mathfrak{q}}$ sont aussi incohérents :*
$\mathfrak{p} = (+, \xi, \{1, 2\})(-, \xi 1, \{1\})(+, \xi 11, \{0\})(-, \xi 2, \{1\})(+, \xi 21, \{0\})$
$\mathfrak{q} = (+, \xi, \{1, 2\})(-, \xi 2, \{1\})(+, \xi 21, \{1\})$.

Etre une clique maximale de $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ n'est pas suffisant pour caractériser les desseins matériels de $\mathrm{E}^{\perp}$, lorsque E est un ensemble de desseins. Une contrainte supplémentaire est requise : l'intersection d'une anticlique faite de duaux avec les desseins de E doit être, en un certain sens, finie. Une situation similaire est celle que l'on peut observer avec les espaces cohérents séries-parallèles : étant donnée une famille de cliques maximales recouvrant un espace cohérent, les anticliques maximales coupent chacune des cliques de la famille lorsque l'espace est fini, mais ce n'est pas forcément le cas lorsque l'espace est infini. L'exemple 5 donné ci-dessous est une transposition en Ludique de celui donné par T. Ehrhard dans son étude des hypercohérences [18].

Exemple **5** *Considérons les desseins engendrés par la grammaire suivante ($n \geq 0$) :*

$$\mathfrak{D}^0_\xi := \begin{array}{c} \xi 00 \vdash \\ \hline \vdash \xi 0 \\ \hline \xi \vdash \end{array} \qquad \mathfrak{D}^1_\xi := \begin{array}{c} \xi 10 \vdash \\ \hline \vdash \xi 1 \\ \hline \xi \vdash \end{array} \qquad \mathfrak{D}^{2n+2}_\xi := \begin{array}{c} \vdots\ \mathfrak{D}^{2n}_{\xi 11} \\ \xi 11 \vdash \\ \hline \vdash \xi 1 \\ \hline \xi \vdash \end{array} \qquad \mathfrak{D}^{2n+3}_\xi := \begin{array}{c} \vdots\ \mathfrak{D}^{2n+1}_{\xi 11} \\ \xi 11 \vdash \\ \hline \vdash \xi 1 \\ \hline \xi \vdash \end{array}$$

. Pour $n \geq 0$, on note $\underline{n}$ la chronique maximale du dessein $\mathfrak{D}^n_\xi$. On note $\widetilde{\underline{n}}$ le dual de $\underline{n}$. Remarquons que, pour tout $n, p, k \geq 0$,

$$\underline{2n} \frown \underline{2p}, \quad \underline{2n} \frown \underline{2(n+k)+1} \ \textit{et, si } n \neq p, \quad \underline{2n+1} \not\frown \underline{2p+1}.$$

Ainsi pour tout $n \geq 0$,

$$\{\underline{0}, \underline{2}, \ldots, \underline{2n}, \underline{2n+1}\}^* \ \textit{est un dessein ainsi que}\ \{\underline{0}, \underline{2}, \underline{4}, \ldots, \underline{2n}, \ldots\}^*.$$

De plus pour tout $n \geq 0$, $\{\widetilde{\underline{1}}, \widetilde{\underline{3}}, \ldots, \widetilde{\underline{2n+1}}, \widetilde{\underline{2n+2}}\}^*$ est un dessein, comme $\{\widetilde{\underline{0}}\}^*$ et $\{\widetilde{\underline{1}}, \widetilde{\underline{3}}, \ldots, \widetilde{\underline{2n+1}}, \ldots\}^*$.

Par exemple, $\{\underline{0}, \underline{1}\}^* = \dfrac{\dfrac{\xi 00 \vdash}{\vdash \xi 0} \quad \dfrac{\xi 10 \vdash}{\vdash \xi 1}}{\xi \vdash}$, $\{\underline{0}, \underline{2}, \underline{3}\}^* = \dfrac{\dfrac{\xi 00 \vdash}{\vdash \xi 0} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi 1100 \vdash}{\vdash \xi 110} \quad \dfrac{\xi 1110 \vdash}{\vdash \xi 111}}{\xi 11 \vdash}}{\vdash \xi 1}}{\xi \vdash}$
et

$$\{\underline{\widetilde{0}}\}^* = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 00}\maltese}{\xi 0 \vdash}}{\vdash \xi} \quad , \{\underline{\widetilde{1}}, \underline{\widetilde{3}}, \underline{\widetilde{4}}\}^* = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 10}\maltese \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 1110}\maltese \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 111100}\maltese}{\xi 11110 \vdash}}{\vdash \xi 1111}}{\xi 111 \vdash}}{\vdash \xi 11}}{\xi 1 \vdash}}{\vdash \xi}$$

Considérons les deux desseins suivants :

$$\mathfrak{E} = \{\underline{0}, \underline{2}, \underline{4}, \ldots, \underline{2n}, \ldots\}^*, \quad \mathfrak{F} = \{\underline{\widetilde{1}}, \underline{\widetilde{3}}, \ldots, \underline{\widetilde{2n+1}}, \ldots\}^*,$$

et les deux ensembles de desseins :

$$\mathrm{E} = \{\{\underline{0}, \underline{2}, \ldots, \underline{2n}, \underline{2n+1}\}^*; \forall n \geq 0\}, \quad \mathrm{F} = \{\{\underline{\widetilde{0}}\}^*\} \cup \{\{\underline{\widetilde{1}}, \underline{\widetilde{3}}, \ldots, \underline{\widetilde{2n+1}}, \underline{\widetilde{2n+2}}\}^*; \forall n \geq 0\}.$$

Remarquons que $V_{\mathrm{E}} = V_{\{\mathfrak{E}\}\cup\mathrm{E}}$ *est l'ensemble des préfixes positifs des chemins* $\underline{n}$ *pour tout* $n \geq 0$*. Nous avons que* $\{\mathfrak{F}\} \cup \mathrm{F} \subset |\mathrm{E}^\perp|$ *et* $\mathrm{F} \subset |(\{\mathfrak{E}\} \cup \mathrm{E})^\perp|$*. Le reste de* $|\mathrm{E}^\perp|$ *et* $|(\{\mathfrak{E}\} \cup \mathrm{E})^\perp|$ *est obtenu à partir des desseins de* F *en remplaçant certaines chroniques positives propres* $\mathfrak{c}$ *et leurs extensions par les chroniques* $\widetilde{\mathfrak{c}}$*. L'ensemble des vues des cliques maximales de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ *sont exactement les desseins matériels de* E*. Notons que* $\mathfrak{F} \notin |(\{\mathfrak{E}\}\cup\mathrm{E})^\perp|$*. Ceci vient du fait que* $\mathfrak{E} \not\perp \mathfrak{F}$ *car l'interaction ne termine pas. Autrement dit, c'est parce* $(+, \xi, \{1\}), (-, \xi.1, \{1\}), \ldots$ *est une séquence infinie d'actions dans* $\mathfrak{F}$ *dont le dual est inclus dans* $\mathfrak{E}$*. Excepté ce cas, les autres ensembles de vues de cliques maximales de* $\widetilde{V_{\{\mathfrak{E}\}\cup\mathrm{E}}}$ *sont exactement les desseins matériels de* $\{\mathfrak{E}\} \cup \mathrm{E}$*.*

Définition 18 (Ensemble fini-stable) *Soit* E *un ensemble de desseins basés sur* β*. Soit* C *un ensemble de chemins de desseins de* E*. L'ensemble* C *est* **fini-stable** *lorsque pour toute suite strictement croissante* $(\mathpzc{p}_n)$ *de préfixes de chemins de* C*, si* $\bigcup \ulcorner \mathpzc{p}_n \urcorner$ *est contenu dans un dessein de* E *alors la suite* $(\mathpzc{p}_n)$ *est finie.*

Définition 19 (Ensemble saturé) *Soit* E *un ensemble de desseins basés sur* β*. Soit* C *un ensemble de chemins de desseins de* E*. L'ensemble* C *est* **saturé** *lorsque pour tout chemin* $\mathpzc{p} \in C$*, si* w *est un préfixe de* $\mathpzc{p}$*,* κ^+ *est une action propre et* $w\kappa^+ \in \mathpzc{q} \in V_{\mathrm{E}}$ *alors* $w\kappa^+$ *est préfixe d'un élément de* C*.*

Proposition 14 *Soit* E *un ensemble de desseins de base* β*. Soit* $C \subseteq V_{\mathrm{E}}$ *telle que* C *est fini-stable et saturé et telle que* $\widetilde{C}$ *est une clique maximale de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$*, alors* $\ulcorner \widetilde{C} \urcorner$ *appartient à* $|\mathrm{E}^\perp|$*.*

Preuve 14 *Supposons que* $V_{\mathrm{E}} = \{\epsilon\}$, *alors* $\mathrm{E}^{\perp} = \{\mathfrak{Dai}\}$ *et* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}} = \{\maltese\}$ *et le résultat suit. Dans la suite, nous considérons qu'il y a des chemins visitables non vides dans* E. *Comme* $\widetilde{C}$ *est une clique de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$, $\ulcorner\widetilde{C}\urcorner$ *est un réseau de desseins.*

— *Le réseau* $\ulcorner\widetilde{C}\urcorner$ *est dans* $\mathrm{E}^{\perp}$ *:*

Soit $\mathfrak{E} \in \mathrm{E}$. *Nous montrons qu'il y a un chemin* $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}} \cap C$. *De cette façon, nous montrons que* $\ulcorner\widetilde{C}\urcorner \perp \mathfrak{E}$. *Notons* $V_{\mathfrak{E}}^{C}$ *l'ensemble des chemins de* $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$ *qui sont positifs, propres et préfixes de chemins de* C *(et alors visitables dans* E*).*

— *Supposons que* $V_{\mathfrak{E}}^{C}$ *n'est pas vide. Puisque* C *est fini-stable, une suite d'éléments de* $V_{\mathfrak{E}}^{C}$ *ne peut pas être infinie et strictement croissante. Ainsi on peut considérer un chemin* $\mathfrak{q}$ *maximal dans* $V_{\mathfrak{E}}^{C}$, i.e., *maximal tel que* $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}} \cap V_{\mathrm{E}}$ *est préfixe d'un élément de* C. *Si* $\mathfrak{q} \in C$, *nous avons que* $\mathfrak{q} = \langle\mathfrak{E} \leftarrow \ulcorner\widetilde{C}\urcorner\rangle$, *et alors* $\mathfrak{E} \perp \ulcorner\widetilde{C}\urcorner$. *Sinon, il y a une action négative* κ^{-} *et une séquence* w *telle que* $\mathfrak{q}\kappa^{-}w \in C$. *Alors, d'après la proposition 10,* $\mathfrak{q}\kappa^{-} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$. *De plus* $\mathfrak{q}\kappa^{-}$ *a une extension dans* $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$. *Si* $\mathfrak{q}\kappa^{-}\maltese \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$, *nous avons que* $\mathfrak{E} \perp \ulcorner\widetilde{C}\urcorner$. *Sinon, il y a une action positive propre* κ_0^{+} *telle que* $\mathfrak{q}\kappa^{-}\kappa_0^{+} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}} \cap V_{\mathrm{E}}$. *Mais alors, comme* $\mathfrak{q}\kappa^{-}$ *est préfixe d'un chemin de* C, *que* κ_0^{+} *est propre, que* $\mathfrak{q}\kappa^{-}\kappa_0^{+} \in V_{\mathrm{E}}$ *et que* C *est saturée, nous avons que* $\mathfrak{q}\kappa^{-}\kappa_0^{+}$ *est préfixe d'un élément de* C, *contredisant la maximalité de* $\mathfrak{q}$.

— *Nous montrons alors que* $V_{\mathfrak{E}}^{C}$ *n'est pas vide.*
Supposons que la base de E *est positive. Soit* κ^{+} *la première action de* $\mathfrak{E}$, *le chemin* κ^{+} *est visitable dans* E. *S'il n'y a aucun chemin dans* $\widetilde{C}$ *commençant avec cette action* $\overline{\kappa^{+}}$, *le chemin* $\overline{\kappa^{+}}\maltese$ *est cohérent avec tous les éléments de la clique* $\widetilde{C}$ *contre la maximalité de celle-ci. Ainsi, soit* $\overline{\kappa^{+}}\maltese \in \widetilde{C}$ *soit il y a un chemin* $\overline{\kappa^{+}\kappa^{-}}w$ *dans* $\widetilde{C}$ *qui étend* $\overline{\kappa^{+}}$ *et* $\kappa^{+} \in V_{\mathfrak{E}}^{C}$.

Supposons maintenant que la base de E *est négative. Soit* $\widetilde{C} = \{\maltese\}$ *et le résultat suit, soit tous les chemins de* $\widetilde{C}$ *commencent avec la même action positive propre* $\overline{\kappa^{-}}$. *Ainsi, il y a des séquences* w *telles que* $\kappa^{-}w \in V_{\mathrm{E}}$ *et alors, pour tout* $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$, $\kappa^{-} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$, *en particulier* $\kappa^{-} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$. *Si* $\kappa^{-}\maltese \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$, *alors* $\mathfrak{E} \perp \ulcorner\widetilde{C}\urcorner$. *Sinon, il y a une unique action* κ^{+} *telle que* $\kappa^{-}\kappa^{+} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$. *En outre* $\kappa^{-}\kappa^{+} \in V_{\mathrm{E}}$ *: puisque* $\overline{\kappa^{-}} \in \overline{V_{\mathrm{E}}}$ *il y a au moins un réseau dans* $\mathrm{E}^{\perp}$ *contenant* $\overline{\kappa^{-}}$ *comme unique première action et alors, puisque ce réseau est orthogonal à* $\mathfrak{E}$, *il doit contenir un chemin étendant* $\overline{\kappa^{-}\kappa^{+}}$. *S'il n'y a pas de chemin dans* $\widetilde{C}$ *étendant* $\overline{\kappa^{-}}$ *avec l'action* $\overline{\kappa^{+}}$, *le chemin* $\overline{\kappa^{-}\kappa^{+}}\maltese$ *est cohérent avec tous les éléments de* $\widetilde{C}$ *contre la maximalité de* $\widetilde{C}$. *Sinon, il y a un chemin (propre)* $\overline{\kappa^{-}\kappa^{+}}w$ *dans* $\widetilde{C}$ *étendant* $\overline{\kappa^{-}\kappa^{+}}$ *et* $\kappa^{-}\kappa^{+} \in V_{\mathfrak{E}}^{C}$.

— *Le réseau* $\ulcorner\widetilde{C}\urcorner$ *est matériel dans* $\mathrm{E}^{\perp}$.
Supposons qu'il existe un sous-réseau strict $\mathfrak{R}$ *de* $\ulcorner\widetilde{C}\urcorner$ *qui appartienne à* $\mathrm{E}^{\perp}$. *Dans ce cas, il y a un chemin* $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \widetilde{C}$ *et* $\widetilde{\boldsymbol{p}} \notin \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$. *Comme* $\boldsymbol{p} \in V_{\mathrm{E}}$, *il existe un dessein* $\mathfrak{E} \in \mathrm{E}$ *et* $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$. *Notons qu'il existe un unique chemin de* $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}} \cap C$ *car* C *est anticlique et* $\mathfrak{E}$ *est un dessein. Comme* $\mathfrak{R} \in \mathrm{E}^{\perp}$, $\boldsymbol{q} = \langle \mathfrak{E} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle \in V_{\mathrm{E}}$. *Ainsi* $\boldsymbol{q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$. *De plus,* $\widetilde{\boldsymbol{q}} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$, *d'où* $\ulcorner\widetilde{\boldsymbol{q}}\urcorner \subset \ulcorner\widetilde{C}\urcorner$, *ainsi cohérent avec les chemins de* $\widetilde{C}$, *ainsi* $\widetilde{\boldsymbol{q}} \in \widetilde{C}$ *car* $\widetilde{C}$ *est une clique maximale. Mais* $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$ *et les deux chemins appartiennent à* $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}} \cap C$. *Contradiction.*

La proposition suivante garantit que l'on retrouve exactement $|\mathrm{E}^{\perp}|$ à partir de l'ensemble des cliques maximales de $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ qui sont les duales de sous-ensembles fini-stables et saturés de V_{E}.

Proposition 15 *Soit* E *un ensemble de desseins de même base. Soit* $\mathfrak{R} \in |\mathrm{E}^{\perp}|$ *alors il existe* $C \subset V_{\mathrm{E}}$ *tel que* C *est fini-stable et saturé,* $\widetilde{C}$ *est une clique maximale de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ *et* $\ulcorner\widetilde{C}\urcorner = \mathfrak{R}$.

Preuve 15 *Comme* $\mathfrak{R} \in |\mathrm{E}^{\perp}|$, *nous savons que* $\mathfrak{R} = \ulcorner\{\langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle\, ; \mathfrak{D} \in \mathrm{E}\}\urcorner$. *Nous considérons alors* $C = \widetilde{\widetilde{C}}$ *où* $\widetilde{C} = \{\langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle\, ; \mathfrak{D} \in \mathrm{E}\}$.

— *Par construction* $\widetilde{C}$ *est un sous-ensemble de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$.
— *Comme* $\mathfrak{R}$ *est un dessein et que* $\widetilde{C} \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$, $\widetilde{C}$ *est une clique.*
— *Supposons que* $\widetilde{C}$ *ne soit pas une clique maximale de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ *: il y a un chemin* $\boldsymbol{p} \in \widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ *tel que* $\forall \boldsymbol{q} \in \widetilde{C}, \boldsymbol{p} \frown \boldsymbol{q}$ *et* $\boldsymbol{p} \notin \widetilde{C}$. *Le chemin* $\boldsymbol{p} \in \widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ *d'où il existe* $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$ *et* $\mathfrak{R}' \in \mathrm{E}^{\perp}$ *et* $\boldsymbol{p} = \langle \mathfrak{R}' \leftarrow \mathfrak{D} \rangle$. *De plus, il existe* $\boldsymbol{q} \in \widetilde{C}$ *et* $\boldsymbol{q} = \langle \mathfrak{R} \leftarrow \mathfrak{D} \rangle$. *Comme* $\boldsymbol{p} \frown \boldsymbol{q}$, *alors* $\widetilde{\boldsymbol{p}} \not\frown \widetilde{\boldsymbol{q}}$. *Mais ces deux chemins* $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ *et* $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ *appartiennent au même dessein* $\mathfrak{D}$. *Contradiction. Alors* $\widetilde{C}$ *est une clique maximale de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$.
— *Supposons qu'il existe une suite strictement croissante* $(\boldsymbol{p}_n)$ *de préfixes de chemins de* C *et* $\mathfrak{D} \in \mathrm{E}$ *tel que* $\bigcup_n \ulcorner \boldsymbol{p}_n \urcorner \subset \mathfrak{D}$. *Notons que* $(\widetilde{\boldsymbol{p}_n})$ *est une suite de préfixes de chemins de* $\widetilde{C}$. *Si la suite est strictement croissante et infinie, la normalisation entre* $\ulcorner\widetilde{C}\urcorner$ *et* $\mathfrak{D}$ *ne termine pas, contredisant le fait que la normalisation entre* $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{D}$ *termine.*
— *Supposons qu'il existe un chemin* $\boldsymbol{p} \in C$ *de préfixe* w *et supposons que le chemin* $w\kappa^{+}$ *avec* κ^{+} *propre appartient à* V_{E}. *En particulier, il existe un dessein* $\mathfrak{E} \in \mathrm{E}$, *dont* $w\kappa^{+}$ *est un chemin. Comme* $\overline{w}$ *est un chemin de* $\mathfrak{R}$, *que la normalisation est déterminsiste et que* $\mathfrak{R} \perp \mathfrak{E}$, *il existe une séquence* w_0 *telle que* $\langle \mathfrak{E} \leftarrow \mathfrak{R} \rangle = w\kappa^{+}w_0$. *Ainsi,* $w\kappa^{+}$ *est bien le préfixe d'un élément de* C.

Proposition 16 *Soit* E *un ensemble de desseins basés sur* β. *L'incarnation du comportement engendré par* E *est calculée en deux étapes de la façon suivante :*

1. *On calcule, à l'aide de la proposition 10, l'ensemble* V_{E} *des chemins visitables de* E.
2. *On obtient* $|\mathrm{E}^{\perp}|$ *à partir de l'ensemble des cliques maximales* $\widetilde{C}$ *de* $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ *telles que* C *est fini-stable et saturé.*
3. *On calcule* $V' := V_{|\mathrm{E}^{\perp}|}$ *(à nouveau en utilisant la proposition 10) l'ensemble des chemins visitables de* $|\mathrm{E}^{\perp}|$.
4. *On obtient* $|\mathrm{E}^{\perp\perp}|$ *à partir de l'ensemble des cliques maximales* $\widetilde{C'}$ *de* $\widetilde{V'}$ *telles que* C' *est fini-stable et saturé.*

Preuve 16 *Les propositions 10, 14 et 15 permettent de calculer l'incarnation du* dual *d'un ensemble de desseins. Ainsi l'incarnation du comportement engendré par* E *est obtenue en utilisant deux fois ce même procédé (proposition 12).*

Remarque : Notre construction capture dans le même temps la partie de l'incarnation correspondant à la “ clôture par daimon” : $\widetilde{V_{\mathrm{E}}}$ est déjà clos par daimon car V_{E} est clos par préfixes.

2.3 Comportements, formules, types

Dans le cadre du résultat de full completeness pour $MALL_2$, obtenu par J.-Y. Girard dans [35], les comportements auxquels appartiennent les desseins gagnants qui sont des interprétations de preuves sont implicitement des dénotations de formules de $MALL_2$. Néanmoins, la caractérisation de la structure interne de tels comportements reste à faire. En outre, dans la mesure où la Ludique constitue un cadre prélogique muni d'une solide notion de dualité, l'étude systématique des comportements et de leurs possibles décompositions peut permettre de retrouver des opérations calculatoires dont la formulation outrepasse le cadre de la logique linéaire, voire de la logique tout court. Nous évoquons dans cette section deux directions de recherches qui utilisent la définition des desseins et des comportements comme ensemble de chemins et de cliques de chemins, introduite dans la section précédente. La première vise directement la caractérisation interne des comportements selon les opérations de déconstruction que l'on peut leur appliquer. La seconde étudie la possibilité de retrouver en Ludique, la notion de *type* de la théorie des types (dont les types dépendants) et les constructions qui leur sont relatives.

2.3.1 Décomposition des comportements

Le calcul de l'incarnation du comportement engendré par un ensemble de desseins de même base, nous fournit une caractérisation des comportements en fonction de leurs chemins visitables.

Proposition 17 *Lorsque* $\mathbf{A}$ *est un comportement, ses desseins matériels sont les cliques maximales* C *de* $V_{\mathbf{A}}$ *qui sont co-saturées et co-fini-stables (*$\widetilde{C}$ *est fini-stable et saturée).*

Preuve 17 *Tout d'abord, il est immédiat que si* $\mathbf{A}$ *est un comportement alors* $V_{\mathbf{A}} = \widetilde{V_{\mathbf{A}^\perp}}$*. Ainsi, si* $\mathfrak{D}$ *est un dessein matériel de* $\mathbf{A}$*, nous savons qu'il existe une partie* $C \subset V_{\mathbf{A}^\perp}$ *telle que : C est fini-stable et saturée,* $\widetilde{C}$ *est une clique maximale de* $\widetilde{V_{\mathbf{A}^\perp}}$*, c'est-à-dire de* $V_{\mathbf{A}}$*, et* $\ulcorner \widetilde{C} \urcorner = \mathfrak{D}$ *. Autrement dit, puisque* $\widetilde{C}$ *est contenue dans* $\mathcal{P}_{\mathfrak{D}}$ *et est maximale,* $\widetilde{C} = \mathcal{P}_{\mathfrak{D}} \cap V_{\mathbf{A}}$*.*

Réciproquement si C est une clique maximale de V_A*, co-saturée et co-fini-stable. Alors,* $\widetilde{C}$ *est une partie saturée et fini-stable d'éléments de* $\widetilde{V_{\mathbf{A}}} = V_{\mathbf{A}^\perp}$*. En outre* $\widetilde{\widetilde{C}} = C$ *est bien une clique maximale de* $\widetilde{V_{\mathbf{A}^\perp}}$*. Ainsi,* $\ulcorner C \urcorner$ *est un dessein matériel de* $\mathbf{A}^\perp$*.*

Ainsi, un comportement est caractérisé aussi bien par son incarnation que par ses chemins visitables : deux comportements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ coïncident ssi $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$, ssi $V_{\mathbf{A}} = V_{\mathbf{B}}$. Ainsi, il est possible d'étudier la structure d'un comportement en étudiant la structure de ses chemins visitables, et des cliques de chemins visitables.

Une première décomposition évidente pour un comportement positif est la décomposition additive. En effet si $\mathbf{A}$ est un comportement positif de base simple (une unique adresse dans la base), disons $\vdash \xi$, un chemin visitable commence nécessairement par une action positive focalisée sur ξ. Or, dans une clique de $V_{\mathbf{A}}$, les chemins visitables commencent tous par la même action positive. Pour chaque telle première action propre κ_i^+, on note $V_{\mathbf{A_i}}$ le sous-ensemble de $V_{\mathbf{A}}$ contenant les chemins visitables commençant soit par cette première action, soit par l'action daïmon. Chaque clique maximale de $V_{\mathbf{A}}$ est contenue dans un $V_{\mathbf{A_i}}$, la propriété d'être co-saturées et co-fini-stable est évidemment préservée, on a alors :
- d'une part $V_{\mathbf{A_i}}$ engendre un comportement $\mathbf{A}_i$ connexe ;
- et d'autre part : $\mathbf{A} = \cup_{i \in I} \mathbf{A}_i$ puisque $|\mathbf{A}| = \cup_{i \in I} |\mathbf{A}_i|$ ou autrement dit $V_{\mathbf{A}} = \cup_{i \in I} V_{\mathbf{A_i}}$. Finalement, on a la décomposition attendue :

$$\mathbf{A} = \oplus_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

Mais, cette décomposition nous l'avions déjà. Est-t-il possible d'aller plus loin et de décomposer ces comportements positifs connexes ? Cette fois, la formulation des comportements par leur chemins visitables est utile. Il est en effet possible de décomposer les chemins visitables d'un tenseur de comportements $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ comme un *shuffle* de chemins visitables de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$. Nous donnons ci-dessous une définition de l'opération de shuffle qui permet de construire des chemins en entrelaçant des chemins déjà connus :

Définition 20 (Shuffle de chemins) — *Soient p et q deux chemins positifs*[5]*, de bases négatives disjointes respectives β et γ, et tels qu'au moins un des deux ne termine pas par un daimon. Le* shuffle *de p et q, noté $p \sqcup\!\sqcup q$, est l'ensemble des séquences $s = p_1 q_1 \dots p_n q_n$, basées sur $\beta \cup \gamma$ telles que :*
- les chemins p_i et q_i sont des chemins positifs de bases négatives,
- $p_1 \dots p_n = p$ et $q_1 \dots q_n = q$
- si p_n se termine par $\maltese$ alors q_n est vide.
— La définition est étendue à $p\kappa_1\maltese$ et $q\kappa_2\maltese$ lorsque p et q sont deux chemins positifs, ancrés sur des bases négatives disjointes :

$$p\kappa_1\maltese \sqcup\!\sqcup q\kappa_2\maltese = p\kappa_1\maltese \sqcup\!\sqcup q \cup p \sqcup\!\sqcup q\kappa_2\maltese$$

— La définition est étendue à cp et cq où c est un chemin positif et p et q sont deux chemins positifs, ancrés sur des bases négatives disjointes :

$$cp \sqcup\!\sqcup cq = c.p \sqcup\!\sqcup q$$

Remarquons que cette définition est naturelle lorsque l'on considère le double accès aux desseins : comme ensembles de chroniques versus comme ensembles de chemins. En effet, les chemins d'un dessein sont exactement les shuffles de chroniques du desseins.

Nous montrons alors le résultat suivant :

Proposition 18 *Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des comportements aliénés,*

$$V_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}} = \{q \ ; \ \widetilde{q} \text{ est un chemin et } q \in V_{A_B} \sqcup\!\sqcup V_{B_A}\}$$

où V_{A_B} et V_{B_A} sont les chemins visitables de $\mathbf{A}$ et ceux de $\mathbf{B}$ dont on a remplacé la ramification de la première action par celle du comportement $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

On définit alors une notion de comportement *régulier*, c'est-à-dire un comportement dont toutes les chroniques de l'incarnation sont visitables et dont tous les shuffles de ces chroniques, pourvu qu'ils soient retournables[6], sont visitables.

5. Rappelons qu'un chemin est positif lorsque sa dernière action est positive
6. Un chemin est dit retournable lorsque son dual est un chemin.

Cette propriété de régularité est principalement due au fait que le tenseur est une opération commutative. Elle est trivialement vérifiée par les comportements associés aux constantes de la logique linéaire.Elle est également préservée par les constructions/déconstructions de comportements utilisant les opérations de décalage, de somme et de tenseur ; c'est une conséquence directe de la décomposition des chemins visitables par rapport à ces opérations. La préservation par dualité est plus délicate à montrer. L'étape difficile d'un raisonnement par induction est celle du dual du tenseur.

On considère également une propriété de finitude : un comportement est *essentiellement fini*, s'il possède un nombre fini de desseins matériels, et qu'eux-même sont des desseins finis. Cette propriété de finitude est nécessaire pour que les décompositions aboutissent, en un nombre fini d'étapes, aux comportements associés aux constantes linéaires.

On obtient alors une caractérisation des comportements qui sont des interprétations de formules linéaires. Plus précisément, un comportement est essentiellement fini et régulier ssi il est l'interprétation d'une formule construite à partir de la grammaire $F = F^+ \cup F^-$ suivante :

$$\begin{aligned} F^+ &= \mathbf{0}|\mathbf{1}| \bigoplus_{n\in[1,\infty[} (\bigotimes_{q\in[1,\infty[} \downarrow F^-) \\ F^- &= T| \perp | \mathop{\&}_{n\in[1,\infty[} (\mathop{⅋}_{q\in[1,\infty[} \uparrow F^+) \end{aligned}$$

La stabilisation de ces résultats et leur extension est en cours. Il semblerait que la tentative de caractérisation des comportements au delà de ces opérations correspondant aux connecteurs de la logique linéaire puisse être étendue en introduisant des *comportements dépendants*.

2.3.2 Théorie des Types et Ludique

Eugénia Sironi effectue actuellement un doctorat que je co-dirige avec Christophe Fouqueré. Le sujet de son travail de recherche est l'étude des types en ludique. Elle a étudié, lors de son stage de M2, l'apport de la notion d'incarnation pour l'expression des types records en Ludique. Elle s'intéresse, pour son travail de thèse, à la formulation en Ludique des types de la Théorie des Types de Martin-Löf [59]. Il faut noter que si une telle étude peut contribuer à l'approfondissement de la compréhension comparée des différentes approches théoriques de la théorie du calcul, elle est d'abord motivée par le développement de l'expressivité de la Ludique elle-même. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, la Ludique constitue le cadre théorique dans lequel nous développons un modèle formel des dialogues en langue naturelle. Il va sans dire qu'un des aspects, et non des moindres, pour rendre compte des dialogues, est leur dimension linguistique. Parmi les travaux les plus aboutis de linguistique computationnelle, le cadre formel de référence est celui de la Théorie des Types de Martin-Löf. La notion de types dépendants notamment est utilisée pour formaliser la sémantique lexicale [19], pour formaliser les dépendances syntactico/sémantiques [10, 68]. Afin d'articuler un modèle ludique des dialogues et la formalisation déjà existante de divers aspects de l'étude linguistique, il est important de pouvoir manipuler dans un langage commun les objets formels utilisés de part et d'autre.

Dans la perspective de formuler les types dépendants en Ludique, Eugénia Sironi s'intèresse donc à la Théorie des Types. Elle propose de représenter les types par des comportements engendrés par des éthiques contenant des desseins sans daimon associés aux termes canoniques du type considéré. L'enjeu est alors de montrer que ces éthiques sont complètes. Plus précisément, l'incarnation de ces comportement doit être égale à la clôture par daimon des éthiques constituées des éléments canoniques. Ceux-ci sont alors les desseins matériels sans daimon du comportement. Ce faisant, elle réalise concrètement une interprétation des types par l'ensemble de leurs éléments canoniques.

Elle a proposé dans ce cadre une interprétation des types standards : entiers, booléens, listes et des constructions de bases : $\Pi_{x \in A} B(x)$, $\Sigma_{x \in A} B(x)$. Elle a montré que les éthiques proposées étaient complètes, en utilisant la caractérisation des incarnations par les chemins visitables.

Il s'agit maintenant de stabiliser cette représentation, d'en étudier l'expressivité et les propriétés calculatoires. Par ailleurs, même si le travail a démarré dans le cadre strictement linéaire de la Ludique originelle, elle va devoir le transposer dans une formulation de la Ludique qui l'étend au cadre non linéaire, la c-ludique ou bien la Ludique avec répétitions.

Chapitre 3

Ludique et langage naturel

Dans le large spectre des domaines de réflexion sur le langage, allant de la linguistique computationnelle à la philosophie, en passant par la sémantique formelle, dès que l'on se préoccupe de formalisation, on a recours, peu ou prou, à la *logique*. Mais de quoi parle-t-on exactement lorsque l'on parle ici de logique ? Y-a-t-il des objets et des propriétés communs aux différents cadres logiques invoqués ou définis de façon plus ou moins ad hoc pour répondre aux besoins des applications étudiées ? Quel est le lien avec la logique mathématique, que ce lien soit direct ou via ses connexions avec les théories du calcul ?

Du côté de la linguistique computationnelle et de la sémantique formelle, de nombreux travaux se sont développés et de nouvelles approches ont été fondées sur l'utilisation des outils et des concepts émergeant des théories computationelles. En linguistique formelle on a aussi bien utilisé des concepts directement issus de la théorie de la démonstration que des outils issus de l'informatique théorique. Ainsi la logique linéaire, à la suite des travaux de Lambek [44] a fournit un cadre logique pour formaliser les grammaires catégorielles. Alain Lecomte et Christian Rétoré [69], [54], ont utilisé aussi bien le calcul des séquents linéaires que les réseaux de preuves comme supports de formalisation logique de la syntaxe des langues naturelles. Par exemple, les thèses soutenues par Richard Moot [61] en 1996, par Sylvain Pogodalla [65] en 2001, ou encore par Houda Anoun [4] en 2007, témoignent de la diversité et de la longévité de cette approche. Parallèlement, des propositions fructueuses ont été avancées pour formaliser les constituants syntaxiques eux-mêmes par des lambda-termes [15], [62]. C'est encore la théorie des types de Martin-Löf qui fournit le cadre théorique pour formaliser la sémantique lexicale en théorie des types [19], pour formaliser les dépendances syntactico/sémantiques en exploitant notamment la notion de type dépendant [10, 68]. Ce sont également des concepts issus du lambda-calcul qui fondent la grammaire de Montague [74], constituant le socle théorique des travaux ultérieurs en sémantique formelle.

Les approches développées dans le cadre plus directement philosophique, elles, que cela soit pour l'étude de la signification comme pour celle de l'argumentation, se sont plutôt tournées vers la théorie des jeux pour trouver un cadre de formalisation logique. De nombreuses tentatives de fonder le sens en utilisant les modèles de jeux ont été développées, ainsi les travaux de Hintikka, Kulas et Sandu [37], [38]. Dans leurs interprétations, les significations sont des stratégies dans un language game. Selon une approche assez similaire, s'inscrivant dans la continuité des travaux de Lorenzen [56], Rahman et Keiff [20], comme Castelnérac et Marion [8] se proposent d'analyser les dialogues argumentatifs, tels les dialogues de Platon ou les raisonnements d'Aristote, par les règles de la logique dialogique.

Peut-on espérer alors trouver un cadre formel commun, basé sur la logique et réconciliant les approches dialogiques utilisées dans le domaine philosophique de celles inspirées de l'évolution de la logique mathématique dans sa confrontation avec l'informatique théorique, qui se sont avérées fructueuses dans le domaine de la linguistique computationnelle et de la sémantique formelle ? Peut-être, est-ce en explorant un aspect du fonctionnement du langage, qui, quoique fondamental, reste pourtant mal exploré : l'interaction, que nous pourrons réaliser une telle synthèse ? L'interaction, dans le langage, nous apparaît bien sûr à partir du phénomène du dialogue. Et justement, les théories actuelles dans l'étude du langage privilégient des approches articulées autour du phénomène du dialogue. Citons par exemple les travaux de Nicolas Asher et Axel Lascaride [5] qui s'orientent de plus en plus vers une analyse des concepts langagiers à partir de leur ancrage dans le dialogue. Citons également les travaux de Jonathan Ginzburg [31] qui développe directement une théorie du dialogue. Citons enfin, sur le versant plus philosophique, l'approche de la sémantique préconisée par Robert Brandom, pour lequel le sens des propositions se construit à partir du jeu de l'offre et la demande de raisons [7].

D'une certaine manière, c'est à l'intersection de ces différentes nouvelles approches que nous nous plaçons en développant une étude des différents aspects du langage à partir de leur manifestation dans des situations d'interaction dialogique. Toutefois, le cadre utilisé (ludique) est non seulement centré sur l'interaction, mais en plus, il manipule, plutôt que des "preuves" figées par des contraintes externes (déductions dans un système formel, ou stratégies dans un jeu formalisées au moyen de règles définies *a priori*), des objets que nous pouvons considérer comme des "structures élémentaires de l'interaction", qui préexistent à tout système de règles. C'est la raison pour laquelle ce cadre nous paraît suffisamment général et plastique pour rendre compte aussi bien des phénomènes de l'argumentation que ceux de la construction du sens ou des règles syntaxiques.

Dans ce chapitre nous présentons comment le cadre ludique peut être utilisé pour renouveler l'approche logique du langage naturel. Au cœur de cette approche, nous trouvons une modélisation ludique des dialogues. La ludique qui décompose l'interaction en éléments primitifs se pose comme un cadre naturel pour une telle modélisation. En outre, prenant à la lettre une idée importante, popularisée entre autres par Steven Pinker [63], "le langage a émergé à partir de l'interaction entre des esprits (*minds*) humains ", nous assumons que le langage en porte la marque encore aujourd'hui et nous postulons que, pour représenter le langage, pour aborder ses différents aspects, il faut revenir à cette interaction, centrale, et au phénomène par excellence de l'interaction langagière : le dialogue. Nous présentons alors divers aspects de l'étude du langage, fondés sur la modélisation ludique du dialogue. Certaines dimensions comme l'étude de la signification ou de l'argumentation ont déjà été précisément étudiées [50, 51], [26], d'autres dimensions comme la formalisation ludique de la syntaxe ou la sémantique lexicale ne sont qu'à l'état d'ébauches. Néanmoins, toutes ces dimensions participent d'une théorie du dialogue en ludique que nous poursuivons actuellement et nous avons tenu à présenter ce cadre dans toutes ses facettes, la réalisation d'une formalisation des diverses dimensions du langage dans un cadre uniforme étant justement l'un de ses atouts.

3.1 Un cadre pour la formalisation des dialogues

Dire qu'un dialogue est une interaction est un truisme. A quelque faibles variations d'expression près, les différents lexiques présentent le même cœur de définition : *un dialogue est une communication ou un entretien entre plusieurs personnes ou plusieurs groupes de personnes.* Au gré des dictionnaires, nous relevons des éléments descriptifs qui permettent de préciser quelque peu la situation d'interaction dont il s'agit.

> Le dialogue comprend au minimum un émetteur et un récepteur. La donnée émise s'appelle le message, et le code quant à lui est la langue et/ou le jargon utilisé. Le but du message porte le nom d'objectif, et se transmet, se fait par signaux auditifs ou visuels.

Nous observons aussi que, presque consubstantiel à cette présentation, qui dans sa volonté de neutralité est presque tautologique, nous trouvons un sens plus philosophique selon lequel le dialogue est une *pensée* produite au terme d'une interaction ou collaboration.

> L'origine étymologique grecque du mot se réfère à un concept traduisible par "suivre une pensée" (dialogos : de dia à travers et logos la parole).
>
> Le dialogue n'est pas un discours : un discours est l'énoncé d'une démonstration, voire d'un avis sur n'importe quel sujet. Le dialogue n'est pas une conversation : une conversation est un enchainement de discours entrecoupés et non reliés entre eux pour produire un raisonnement commun entre les participants.
>
> Un dialogue consiste en un examen croisé de différentes paroles, qui toutes engagent leur auteur. Un dialogue réussi produit un diagnostic intégrant tous les arguments des participants et une conclusion dans laquelle ils se retrouvent tous.

La Ludique, en tant que théorie de l'interaction, nous fournit le cadre formel dans lequel nous pouvons déployer une modélisation du dialogue, dans toute la richesse et toutes les acceptions de ce concept. Tout d'abord, la Ludique décompose l'interaction en éléments primitifs et construit ainsi des objets formels qui permettent une manipulation mathématique de l'interaction. Ensuite, rappelons que la Ludique permet de décrire l'interaction selon deux modes : le mode clos et le mode ouvert. Le premier permet de décrire, d'observer l'interaction comme phénomène en tant que tel. Comment elle se déploie, comment elle se déroule, comment elle se poursuit et se termine ou bien échoue. Le second mode restitue la dimension opératoire de l'interaction en contexte. Comment elle reçoit, comment elle transmet des objets, comment elle modifie une situation.

La modélisation des dialogues que nous proposons utilise ces différents outils de la Ludique. Elle s'organise en deux étapes qui peuvent être rapprochées des deux modes ci-dessus évoqués. Tout d'abord nous considérons l'interaction dialogique en tant que telle, c'est-à-dire en tant qu'interaction entre différents agents qui échangent des interventions. Lors de cette première étape de la modélisation, nous oublions tout cadre externe, tout contexte, et en particulier, nous ne décomposons pas le contenu des interventions. Ce contenu est élaboré à partir d'éléments internes au langage : grammaticaux, lexicaux, pragmatiques, etc. . .et d'éléments externes au langage. Nous considérons que ces éléments, bien entendu sont constitutifs du dialogue, mais qu'ils existent à côté de la surface interactive du dialogue, constituant en quelque sorte le contexte de cette surface interactive du dialogue. Nous reportons à un second temps de l'analyse la question de comment ces interventions sont construites à partir de ce contexte et quelles traces elles laissent dans ce contexte.

Cette démarche en deux temps est un choix méthodologique. Le contenu des objets échangés dans un dialogue est pluridimensionnel : linguistique, pragmatique, logique, culturel ..., en outre ces dimensions sont possiblement très intriquées. De plus, il n'est pas du tout évident qu'une des lectures doive précéder les autres. Il nous paraît alors plus pertinent de différer la prise en compte du contenu des interventions après que le cadre de l'interaction a été précisé. Nous verrons néanmoins (section 3.1.2) que certaines dimensions affleurent déjà au niveau de la surface du dialogue.

Ce choix méthodologique reflète également le parti pris conceptuel présenté en introduction : nous reprenons à notre compte la position qui place le dialogue à l'origine du langage, de surcroît, nous considérons que dans le dialogue, l'interaction est le phénomène primitif.

3.1.1 La surface interactive des dialogues

L'objectif est de modéliser le dialogue en tant qu'interaction entre deux interlocuteurs qui échangent des interventions. C'est-à-dire que nous faisons attention au fait que les interventions sont produites par un locuteur et reçues par son interlocuteur ; nous faisons attention à l'alternance des interventions, au fait qu'elles s'enchaînent et que certaines en justifient d'autres. Par contre, nous ne modélisons pas le contenu des interventions, mais nous retenons uniquement la présence de signaux (auditifs ou visuels) par lesquels les interventions se manifestent.

Afin de simplifier la présentation de cette formalisation, nous l'effectuons en deux temps. Les interventions sont dans un premier temps considérées comme des blocs, elles coïncident essentiellement avec les tours de parole.

Les interventions comme des actions

Selon le point de vue que nous adoptons pour démarrer notre modélisation, un dialogue est une alternance d'interventions signées (en fonction du locuteur par lequel elles sont produites). Chacune des interventions s'ancre sur une des interventions précédentes, parce qu'il s'agit de la poursuite, de l'exploration, de la réaction à un point ouvert lors de cette intervention précédente, ou bien introduit un nouveau point dans le dialogue (c'est typiquement le cas d'une intervention qui initie un dialogue). Chaque intervention, à son tour, crée des ouvertures à partir desquelles l'interlocuteur pourra poursuivre le dialogue. Enfin, soit une intervention clôt l'échange (une information est donnée ; un acquiescement est obtenu ; ...) ; soit le dialogue "échoue" sur un désaccord, un sentiment d'incompréhension ...

En première approximation, notre modélisation procède en considérant que chaque intervention d'un dialogue entre deux protagonistes S et A est un objet élémentaire κ et nous codons $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ la succession de ces interventions. Nous considérons alors une relation de justification entre ces objets/interventions : lorsqu'une intervention κ_i, produite par un locuteur est directement motivée par une intervention κ_j de son interlocuteur qui la précède dans le dialogue, nous dirons que κ_i est justifiée par κ_j. A chacun de ces objets est ensuite associée une polarité. Pour ce faire, nous dédoublons la suite d'interventions $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ et nous considérons ainsi cette suite d'interventions suivant le point de vue de chacun des locuteurs. Le point de vue d'un locuteur étant fixé, les objets/interventions que lui-même produit sont positives, les objets/ interventions produites par son interlocuteur sont négatives. Les interventions polarisées et munies d'une relation de justification peuvent être considérées comme des actions de la Ludique. Les suites d'interventions $\kappa_1\kappa_2\ldots$ du point de vue d'un locuteur sont des suites alternées et permettent de reconstruire un dessein. Ce dessein correspond au dialogue considéré du point de vue de ce locuteur. Nous disposons ainsi de deux desseins, le dialogue est la trace de l'interaction entre les deux desseins.

Illustrons cette première étape de formalisation sur l'exemple suivant, tiré du roman de A. Dumas intitulé *Le comte de Monte-Cristo* et très légèrement modifié pour la simplicité de la présentation.

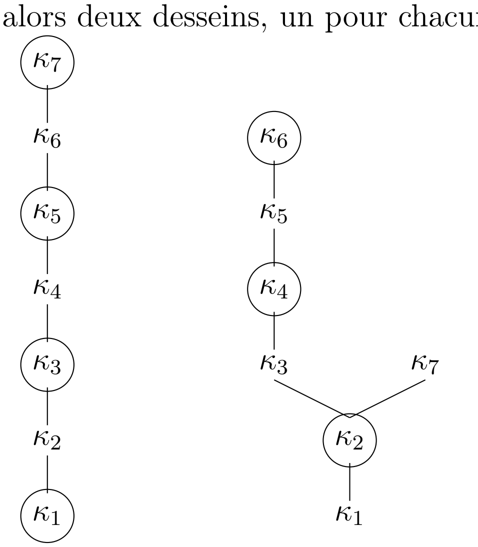
EXAMPLE **1 (A. Dumas, Le Comte de Montecristo)** *Les deux protagonistes sont Faria (F) et Edmond (E) ; le dialogue est initié par Faria qui tente d'aider Edmond à comprendre la situation dans laquelle il se trouve :*

F	I_1 :	*Quelle était votre vie à ce moment-là ?*
E	I_2 :	*J'allais devenir capitaine du Pharaon ;* *J'allais épouser une belle jeune fille.*
F	I_3 :	*Quelqu'un avait-il intérêt à ce que vous ne* *devinssiez pas capitaine du Pharaon ?*
E	I_4 :	[...] *un seul homme* [...],
F	I_5 :	*Comment se nommait-il ?*
E	I_6 :	*Danglars.*
F	I_7 :	*Bon... parlez-moi maintenant de cette* *belle jeune fille...*

— On associe à chaque intervention de I_1 à I_7, une action : $\kappa_1, \ldots, \kappa_7$. La relation de justification est la suivante : L'action κ_1 est initiale puisqu'elle correspond à l'intervention I_1 avec laquelle F initie le dialogue. Chaque intervention entre κ_2 et κ_6 est justifiée par l'action immédiatement précédente puisque les interventions auxquelles elles sont associées sont motivées par l'intervention immédiatement précédente. L'action κ_7 est justifiée par l'action κ_2 puisqu'elle est au sujet de la belle jeune fille introduite par l'intervention I_2. Ce que l'on résume par la représentation suivante où on indique par une flèche d'une action κ_i vers une action κ_j le fait que κ_i est justifiée par κ_j.

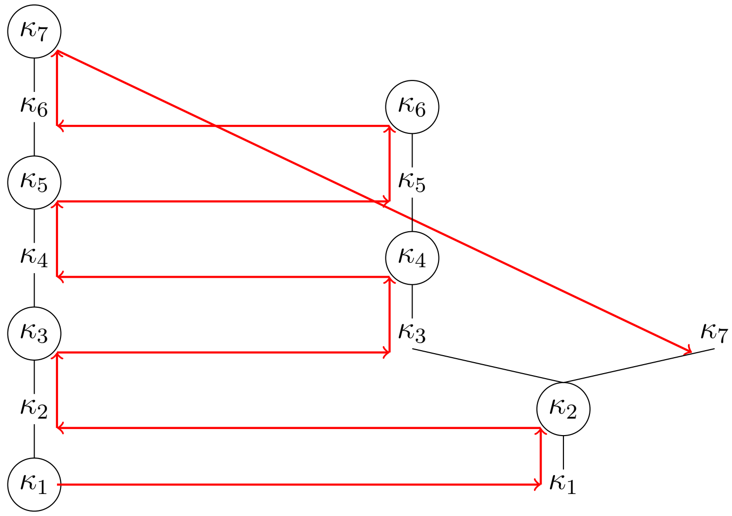
κ_7	Parlez moi maintenant…
κ_6	Danglars
κ_5	Comment se nommait-il ?
κ_4	Un seul homme
κ_3	Quelqun avait-il intérêt …
κ_2	J'allais devenir capitaine…J'allais épouser…
κ_1	Quelle était votre vie …

— Le point de vue d'un des locuteurs étant fixé, les actions sont polarisées. Les actions κ_1, κ_3, κ_5 et κ_7 sont positives pour Faria et négatives pour Edmond alors que les actions κ_2, κ_4 et κ_6 sont positives pour Edmond et négatives pour Faria. On obtient alors deux desseins, un pour chacun des locuteurs.



Le point de vue de Faria Le point de vue de Edmond

— Le dialogue est alors la trace de l'interaction entre ces deux desseins :



Remarque : Si la polarité d'une intervention [1] fait partie des données du problème, la relation de justification est déjà de l'ordre d'une interprétation. Ainsi, il n'est pas tout à fait exact que nous avons oublié, lors de cette première étape, le contenu des interventions. Il s'agit plutôt d'une prise en compte minimale de ce contenu. Pour l'instant, ce contenu est un bloc duquel nous n'essayons pas encore de démêler les éléments relevant de grilles d'analyse multiples : lexicale, pragmatique, logique, etc . . .Toutes ces lectures sont pertinentes mais tellement intriquées que la méthode pour dérouler les brins n'apparaît pas de façon évidente. A notre connaissance la question n'a pas été élucidée, ni même vraiment abordée. C'est justement un des enjeux de la modélisation proposée : fournir des outils pour repérer la pertinence de telle ou telle grille de lecture pour rendre compte de tel ou tel aspect du dialogue, mais aussi pour comprendre comment ces éléments sont articulés. Nous adoptons pour ce faire la démarche suivante : reconstruire formellement l'interaction en jeu dans un dialogue pour faire apparaître, au fur et à mesure, les différents éléments constituant le dialogue à partir de leur rôle dans l'interaction. Comme, dans un premier temps, nous regardons l'interaction uniquement dans son déroulement, son déploiement, sans considérer encore ses effets, nous avons retenu du contenu des interventions uniquement ce qui avait manifestement un rôle dans le déroulement de l'interaction : par exemple le thème des interventions permet d'établir la relation de justification entre elles [2]. Une autre raison d'établir une relation de justification entre

1. C'est-à-dire le fait que lors d'un dialogue entre deux locuteurs, cette intervention ou tour de parole est le fait de l'un ou l'autre des deux locuteurs.

2. Dans l'exemple étudié ci-dessus, c'est le thème de la jeune fille qui est introduite par l'intervention I_2, et qui est à nouveau le théme de l'intervention I_7 qui nous fait dire que I_7 est justifiée par I_2.

deux interventions est par exemple lorsque la seconde est une réponse à une question constituant la première. Ces choix seront bien sûr à réinterroger lorsque la théorie sera complétée par un module plus complet sur le contenu des interventions.

Nous terminons alors la présentation de la formalisation de la surface interactive des dialogues en introduisant la dernière étape. Puisque nous retenons des interventions, des éléments permettent de décrire le déroulement de l'interaction, en fonction d'une polarisation et d'une relation de justification, nous décomposons les tours de paroles eux-mêmes relativement à ces notions de polarité et de relation de justification. La notion pertinente, décomposant les interventions, est alors celle d'**acte de dialogue**.

Actes de langage versus actes de dialogue

L'acte de langage, acte que l'on fait en parlant, intègre, pour Searle [72], l'énoncé aussi bien que ses conditions et ses effets. Pour de nombreux auteurs, la prise en compte d'éléments extra-linguistiques est aussi nécessaire. Il en est ainsi du geste permettant de désigner un objet par exemple. C'est pourquoi, à ce terme d'*acte de langage*, est souvent substitué celui d'*acte de communication* ou d'*acte de dialogue*. Landragin [45] rappelle combien cette notion d'acte de dialogue n'est pas univoquement définie dans la littérature, il propose de définir l'acte de dialogue comme étant "l'unité minimale de communication dans un contexte dialogique". Cette définition correspond assez étroitement à celle qui émerge de la modélisation ludique, esquissée dans la section précédente, basée sur les actions comme éléments primitifs de l'interaction. Nous reprenons cette notion d'**acte de dialogue** comme élément de base de notre formalisation des dialogues. Nous définissons cette notion de la façon suivante.

Un acte de dialogue est un fait de langage, un fait communicationnel, ayant un rôle dans le dialogue, celui de nourrir sa dynamique et déterminer sa forme. Il peut être explicite ou implicite, verbal ou non verbal (comme un assentiment marquant la fin d'un dialogue et plus généralement tout signe utilisé dans un dialogue). Il peut être exprimé par une ou plusieurs propositions, mais aussi par une partie de proposition (un mot, un adverbe), ... Il ne recoupe donc pas nécessairement un tour de parole, même s'il peut souvent y avoir coïncidence ; les actes de dialogue explicitent les décisions et les engagements pris par chacun des locuteurs au cours de ses interventions, mais aussi leur reconnaissance par son interlocuteur. En un sens ils sont proches des actes de langage, pourtant, comme on va le voir à travers certains exemples, un acte de langage peut correspondre à plusieurs actes de dialogue. Les actes de dialogue sont en effet plus élémentaires, on peut les voir comme les briques de base dont aussi bien les actes de langage que les interventions dialogiques voire les énoncés sont faits.

Définition 21 (Acte de dialogue) *Un* **acte de dialogue** κ *est :*

- *soit un acte de dialogue propre, c'est-à-dire la donnée de quatre éléments :* (ϵ, L, I, e) *où*
  - L *est l'adresse de* κ *: le lieu sur lequel l'acte est localisé relativement à l'interaction dialogique que l'on considère,*
  - I *est la* **ramification** *de* κ *est un ensemble fini d'adresses sur lesquelles de nouveaux actes de dialogues vont pouvoir être localisés ou, en d'autres termes, les ouvertures créées par l'acte de dialogue sur lesquelles de nouveaux actes de dialogue vont pouvoir à leur tour être produits,*
  - e *est l'expression de l'acte de dialogue, c'est-à-dire le fait de langage ou de communication par lequel l'acte de dialogue se manifeste,*
  - *la polarité* ϵ *de l'acte peut être positive (+) ou négative (−). L'acte est positif pour le locuteur qui le produit sauf lorsque cet acte est une contrainte sur son interlocuteur, il est alors un acte de dialogue positif forcé pour cet interlocuteur, et donc un acte de dialogue négatif pour le locuteur qui le produit. Les actes ont la polarité duale lorsqu'ils sont reçus par l'interlocuteur.*
- *soit un acte de dialogue positif particulier, appelé* **daïmon** *et noté* $(\maltese, e)$*, qui marque la fin d'une interaction qui s'est correctement déroulée. Dans ce cas, l'expression* e *de l'acte de dialogue sera souvent vide.*

L'expression de l'acte de dialogue peut être une proposition, un mot (un simple adverbe par exemple), un élément prosodique, un signe non verbal (hochement de tête, gifle) ... Dans les cas très simples, chaque tour de parole est un unique acte de dialogue, qui est positif pour celui qui en est l'auteur, voir l'exemple 14 ci-dessous. Certains énoncés, plus complexes, certains actes de langage, devront être décomposés en séquences d'actes de dialogue, comme nous allons le voir dans de nombreux exemples dans la suite du texte.

Un dialogue est modélisé par une interaction entre deux *desseins de dialogue* construits incrémentalement à partir des interventions, des tours de parole des locuteurs. Un dessein de dialogue est un dessein au sens de la Ludique où la notion d'action est simplement remplacée par celle d'acte de dialogue. Les contraintes qui définissent un dessein de dialogue sont par ailleurs identiques à celles définissant un dessein au sens de la Ludique. Dans la suite, nous parlerons plus simplement de dessein sans faire plus référence au fait que ceux-ci sont établis à partir d'actes de dialogue. En première approche, nous considérons que, pour un dialogue donné, chaque dessein a pour base un lieu initial unique. C'est sur ce lieu que vient s'ancrer le premier acte de dialogue positif pour celui qui initie le dialogue, le ou les premiers actes de dialogue négatifs pour son interlocuteur (ce que l'interlocuteur accepte d'entendre).

A chaque intervention d'un des deux locuteurs correspond un ensemble d'actes de dialogue qui viennent compléter le dessein de celui qui prononce son intervention. Concrètement une intervention pourra donc être un unique acte de dialogue ou une séquence alternée d'actes de dialogues, voire un dessein partiel d'actes de dialogue. Le dessein complété par les actes de dialogue d'une intervention doit encore satisfaire les contraintes définissant un dessein. En particulier, en cours de dialogue, le premier acte de dialogue effectué dans une intervention doit avoir comme focus un lieu créé par une des interventions précédentes : un locuteur ne peut que répondre à un point évoqué précédemment. Par ailleurs, une intervention doit débuter et terminer par un acte de dialogue positif : ainsi, lorsque son dernier acte n'est pas le daïmon, l'intervention d'un locuteur permet de donner la parole à son interlocuteur.

Dualement, le dessein de l'interlocuteur est aussi augmenté à chaque tour de parole du locuteur d'un ensemble d'actes de dialogue. Le résultat obtenu doit encore satisfaire les contraintes définissant un dessein. Une des chroniques de ce dessein se termine par un acte de dialogue négatif (sauf lorsque le daïmon a été joué par le locuteur) ; c'est sur cette chronique que s'ancrera l'acte de dialogue positif initiant sa propre intervention.

La définition de l'interaction reprend celle de la Ludique, où la poursuite de l'interaction est conditionnée par la présence d'actions duales dans chaque dessein à toute étape : le dialogue peut se poursuivre si ce que dit un locuteur est attendu de son interlocuteur. Ainsi, après chaque intervention, si les deux desseins obtenus ne permettent pas l'interaction, il y a divergence et le dialogue échoue ; si l'interaction entre les deux desseins atteint une action daïmon alors le dialogue s'arrête ; sinon, le dialogue se poursuit en interprétant l'intervention suivante.

Exemples

— EXEMPLE **14** *Considérons le dialogue suivant entre un voyageur V et un employé de la* SNCF E *:*
– V *:* 'A quelle heure part le prochain train pour Paris ?'
– E *:* 'A 19h45.'
– V *:* 'Merci.'
Chacune des interventions est réduite à un unique acte de dialogue que nous représentons de la façon suivante :

- $\kappa_1/\overline{\kappa_1} = (+/-, \xi, \{0\}, e_1)$ où e_1 est la proposition '*A quelle heure part le prochain train pour Paris ?*'; ξ est un lieu arbitrairement choisi (puisque cet acte initie le dialogue, il n'y a rien de déjà disponible) sur lequel cet acte est localisé ; cet acte ne crée qu'une seule ouverture, celle sur laquelle E pourra ancrer sa réponse.
- $\kappa_2/\overline{\kappa_2} = (+/-, \xi.0, \emptyset, e_2)$ où e_2 est la proposition '*le prochain train pour Paris part à 19h45*'; $\xi.0$ est le lieu sur lequel cet acte est localisé (en effet cet acte est justifié par κ_1) ; cet acte ne crée pas d'ouverture, c'est justement la mise à disposition d'une donnée.
- $\kappa_3 = (\maltese, e_3)$ où e_3 est l'expression '*merci*'; par cet acte de dialogue V signifie que le dialogue est terminé et s'est bien déroulé.

Les actes κ_1 et κ_2 sont positifs du point de vue des locuteurs qui les produisent : V pour le premier, E pour le second, et négatifs pour le locuteur qui le reçoit. L'acte κ_3, positif, est produit par V.

— Tous les dialogues ne se terminent pas aussi bien, certains amènent à des malentendus, des incompréhensions, des mésententes... Notre modélisation permet de rendre compte aussi des interactions qui y conduisent. Le dialogue suivant est cité par M. Chemillier [9] pour illustrer les difficultés qui se posent quand on veut isoler le plan purement logique du discours dans une enquête de terrain :

Exemple **15** *Après avoir donné à un indigène les informations suivantes :* Tous les Kpelle cultivent le riz. Monsieur Smith ne cultive pas le riz*, l'enquêteur lui pose une question :*
- l'enquêteur : "Monsieur Smith est-il un Kpelle ?" (κ_1)
- l'indigène : "Je ne connais pas Monsieur Smith, je ne l'ai jamais vu." (κ_2)

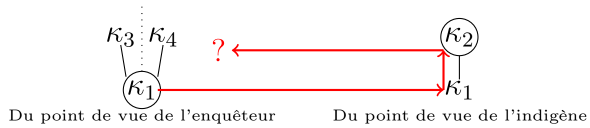
Nous nous focalisons ici sur l'échange[3] κ_1/κ_2. A ces deux interventions sont associées de simples actions.

L'enquêteur est prêt à recevoir la réponse logiquement correcte *"non"*, que l'on notera κ_3. Il envisage également de recevoir une réponse logiquement inexacte (*"oui "* ou bien *"c'est possible"*), notée κ_4. Par contre, il ne s'attend sans doute pas à une réponse telle que *"je ne connais pas monsieur Smith, je ne l'ai jamais vu."* Ainsi le dessein de l'enquêteur peut être soit κ_1 suivi de κ_3, soit κ_1 suivi de κ_4, mais il ne contient pas la branche κ_1 suivi de κ_2.

La représentation en Ludique permet de rendre compte de ce "dialogue de sourd" par une **divergence** lors de l'interaction : parmi les attentes du locu-

3. La représentation de l'intervention complète de l'enquêteur, qui intégre la transmission des informations préalables est bien plus complexe. Le traitement du cas simplifié suffit pour le propos de l'exemple.

teur sous forme d'actions négatives, il n'y a pas l'action positive correspondant à l'intervention de son interlocuteur. Le dialogue ne peut se poursuivre :



REMARQUES :
- La spécification précédente laisse entendre que les desseins sur lesquels se produit l'interaction se limitent aux actes de dialogue entrant en jeu dans le dialogue modélisé. On peut en fait élargir cette spécification si l'on se souvient que l'interaction entre deux desseins n'est pas modifiée quand on ajoute à ces desseins des chroniques (si tant est que l'on obtienne encore des desseins). On peut alors envisager de concevoir ce que pourrait être un schéma argumentatif d'un locuteur, ce que l'on pourrait appeler son *projet dialectal* (ou *dialogue frame* comme nous le faisons dans [52]), comme un dessein donné a priori : le dialogue devient exactement la verbalisation de l'interaction entre deux projets dialectaux donnés.
- Enfin, nous avons délibérément simplifié les conditions réelles d'un dialogue où le langage est souvent chargé d'ambiguïtés, non normalisé, où des actes de dialogue peuvent être mal reconnus par l'interlocuteur. Une approche possible pourrait consister à analyser un dialogue non comme une interaction entre deux desseins, un par locuteur, mais comme deux interactions : considérer qu'une personne A dialogue avec une personne B, c'est avoir un dessein propre à A (resp. B), son projet dialectal, P_A (resp. P_B), interagissant avec ce que A interprète des interventions de B, i.e. des énoncés de B, donc un dessein P'_B (resp. P'_A). Il est donc possible que P_B et P'_B diffèrent (de même que P_A et P'_A), cette différence n'apparaissant que plus ou moins tardivement (ou jamais) dans le dialogue, nécessitant alors une modification des projets dialectaux des locuteurs.

3.1.2 Premières applications : pragmatique, dialectique, réthorique

Même avec une prise en compte minimale du contenu, la modélisation esquissée apporte un éclairage intéressant de certains phénomènes langagiers. Dans le domaine de l'étude du langage, les disciplines telles que la pragmatique, la dialectique ou encore la réthorique s'intéressent au moins autant à la forme des échanges dialogiques qu'au contenu des énoncés échangés. Certaines figures du dialogue et des discours ont été depuis longtemps repérées et qualifiées relativement à la spécificité de leur forme. C'est éminemment le cas des *présuppositions*, des *pétitions de principes* , objets d'étude récurrents dans la dialectique. C'est également le cas des *stratagèmes*, dans l'étude des controverses ou encore des figures telles que : *narration, topicalisation, élaboration* dans l'étude du discours [52].

Figures du dialogue

Une **présupposition** est une assertion implicite sur le monde ou sur ses représentations, dont la validité est tenue pour acquise dans le discours. Nous avons proposé (par exemple dans [53]) de rendre compte des énoncés contenant une présupposition par une séquence d'actes de langage parmi lesquels un acte négatif qui rend compte de la contrainte exercée par le locuteur sur son interlocuteur. Cette proposition a été reprise et son interprétation linguistique élargie par G. Winterstein dans [76]. Elle est illustrée par l'exemple suivant.

EXEMPLE **16** *Reprenons l'exemple bien connu d'une intervention exprimée par un énoncé contenant une présupposition, comme dans l'extrait de dialogue suivant : P pose à O la question "Avez-vous cessé de fumer ?".*

Le locuteur P impose en quelque sorte que l'échange suivant ait eu lieu.
– *"Vous fumiez ?"*
– *"Oui."*
– *"Avez-vous cessé de le faire ?"*

Lorsqu'il intervient en disant "Avez-vous cessé de fumer ?", P déploie trois actions successives pour cette seule intervention :
- $\kappa_1 = (+, \xi, \{0\}, e_1)$, où e_1 est la question : '*vous fumiez ?*',
- $\kappa_2 = (-, \xi.0, \{1\}, e_2)$, où e_2 est la réponse : '*oui*' (réponse de O forcée par P),
- $\kappa_3 = (+, \xi.0.1, \{0\}, e_3)$, où e_3 est la question : '*avez-vous cessé de le faire ?*'.

Si O poursuit le dialogue à partir de l'ouverture ainsi créée par P, s'il accepte de répondre selon cette configuration, il assume implicitement une convergence entre l'intervention de P et la façon dont il la reçoit. C'est-à-dire qu'il accepte de justifier l'intervention avec laquelle il poursuit le dialogue sur la version négative de κ_3, elle-même ancrée sur la version positive de κ_2, c'est-à-dire qu'il assume qu'il aurait répondu "oui" dans l'échange virtuel évoqué.

Une **pétition de principe** est un raisonnement fallacieux dans lequel la proposition qui doit être prouvée est supposée implicitement ou explicitement dans les prémisses. Nous caractérisons un tel sophisme en Ludique par un bloc fermé à l'interaction, c'est-à-dire une intervention représentée par un dessein ne présentant aucune ouverture disponible à partir de laquelle l'interlocuteur pourrait insérer une réponse et poursuivre le dialogue.

Exemple **17** - I_Q *: Qu'est ce qui fait que ma fille est muette ?*
- I_R *: Elle est muette parce qu'elle a perdu l'usage de la parole*

Nous formalisons l'intervention I_R : *"votre fille est muette parce qu'elle a perdu l'usage de la parole"*, par une séquence d'actes de dialogue. Le premier acte est $(+, \xi.0, \{0\}, e_0)$: il est localisée en $\xi.0$, le lieu créé par l'intervention précédente : I_Q de l'interlocuteur. Il est exprimé par e_0 : "parce qu'elle a perdu l'usage de la parole." Il crée un unique lieu, sur lequel le dialogue peut continuer, le fait que cette fille a perdu l'usage de la parole. De plus, la forme de l'intervention indique que le locuteur est prêt à défendre cet argument. Ainsi, le locuteur intervient selon un projet de dialogue, implicite mais aisément reconstructible par l' interlocuteur. A la suite du premier acte de dialogue exprimé, il y a une séquence d'autres actes, organisée en un dessein basé en $\xi.0.0 \vdash$ qui est lui-même le décalage d'un dessein basé en $\vdash \xi.0.0.0$, lequel contient la défense d'un énoncé implicite *"votre fille a perdu la parole parce qu'elle est muette"*. Ce dessein basé sur $\vdash \xi.0.0.0$, enfin, a encore le même développement. Et ainsi de suite ..., le dessein correspondant au projet de dialogue du locuteur et dont il extrait la succession d'actes de dialogues constituant son intervention est en fait d'un dessein récursif : la même figure est réutilisée toutes les deux étapes, et le dessein résultant est infini.

$$\mathcal{D}_{\xi} = \cfrac{\mathcal{D}_{\xi.0.0} = \cfrac{\mathcal{D}_{\xi.0.0.0.0} = \cfrac{\vdots}{\xi.0.0.0.0.0 \vdash}\Big/\ \vdash \xi.0.0.0.0}{\cfrac{\xi.0.0.0 \vdash}{\vdash \xi.0.0}}}{\cfrac{\xi.0 \vdash}{\vdash \xi}}$$

Ainsi, nous modélisation ces figures du dialogue par des objets à la forme caractéristique, contenant des actes de dialogue forcés. La présupposition contient au moins un tel acte négatif, rendant compte ainsi de l'hypothèse sur le monde, implicitement tenue pour valide par l'interlocuteur. La pétition de principe est caractérisée par un dessein récursif infini dont les lieux ouverts à l'interlocuteur sont repoussés à l'infini. L'intervention contenant une pétition de principe est alors modélisée par un bloc fermé à l'interaction, rendant ainsi compte du fait que l'interlocuteur est bien en peine de répondre.

Gagner les controverses

Dans l'ouvrage *L'art d'avoir toujours raison* l'intention affirmée de Schopenhauer est de définir la dialectique comme "l'art de gagner les controverses". Il présente alors un florilège de *stratagèmes* comme autant d'armes utilisées dans la pratique de cet art. Le propos est sans doute provocateur et Schopenhauer utilise l'ironie pour dénoncer une pratique moralement douteuse. Néanmoins, l'ouvrage constitue une mine d'exemples de controverses ; il fournit également une étude très explicite de figures dialectiques, couramment observées dans les controverses, qu'elles soient œuvres de perfidies ou bien dues à l'ignorance ou à la maladresse des débateurs. La présentation de Schopenhauer, qui insiste sur la forme des interventions, nous a paru un terrain propice au déploiement d'une formalisation ludique. Schopenhauer répète à l'envie, dans cet ouvrage, que l'art de gagner les controverses ne s'embarrasse pas vraiment ni du bon respect de la vérité, ni du bon respect de l'honnêteté *si l'adversaire a aussi raison quant à l'objet du débat, mais qu'heureusement il a recours, pour le prouver, à une preuve exécrable, il nous est facile de réfuter cette preuve, et de prétendre que c'est là une réfutation du fait lui-même.* Il assume également le fait que l'art des controverses ne repose pas précisément sur une bonne maîtrise de la Logique qu'il qualifie de "communément admise". Il insiste sur le fait que la motivation dialectique est de poursuivre un dialogue avec l'adversaire dans l'unique but de gagner (avoir le dernier mot ; obliger l'adversaire à reconnaître que nous avons raison). La situation ainsi décrite est très proche de celle de la Ludique dans laquelle les desseins se déploient dans l'unique but d'interagir avec des contre-desseins et gagnent lorsque le contre-dessein abandonne. Et en effet la Ludique est un cadre pertinent pour formaliser les stratagèmes : en Ludique également les desseins, plus généraux que des preuves, ne cherchent pas à établir la vérité mais à gagner. Or gagner en Ludique signifie poursuivre l'interaction jusqu'à l'abandon du contre-dessein. On a alors une bonne épure de la motivation qui est à l'œuvre dans la construction des stratagèmes : poursuivre l'interaction jusqu'à l'abandon de l'adversaire, indépendamment de toute autre considération. Selon le vocabulaire ludique, le ressort des stratagèmes consiste à trouver un dessein gagnant dans l'interaction avec le contre dessein de l'adversaire (c'est à dire la manière dont l'adversaire va mener ses interventions lorsqu'il interagit dans le dialogue).

Nous présentons ci-dessous quelques uns des dialogues illustrant les controverses étudiées par Schopenhauer, que nous avons modélisés dans [67]. La plupart des interventions considérées dans les stratagèmes consistent à affirmer une thèse ou bien à avancer une justification ou bien encore à accepter l'argument de l'adversaire. La modélisation de ces interventions a constitué le socle d'une étude de l'argumentation présentée dans les articles [26], [25]. L'étude plus complète de ces actes de langages des dialogues argumentatifs sera l'objet de la section 3.3. Néanmoins, la modélisation de ces actes de langages en actes de dialogue est déjà posée au niveau de la surface du dialogue à laquelle nous nous intéressons ici.
- Si l'intervention consiste à avancer une proposition, qu'il s'agisse d'affirmer mais aussi de nier une thèse, qu'il s'agisse de produire un contre-argument, de justifier une affirmation par un certain nombre de prémisses, l'intervention est représentée par un acte de dialogue positif : $(+, \xi, I, e)$, où e est l'énoncé par lequel cet acte de langage s'exprime. Nous distinguons par le cardinal de la ramification, les ouvertures qui sont créées et sur lesquelles l'interlocuteur pourra choisir de poursuivre. Ainsi par exemple, lorsqu'une proposition sera avancée sans justification particulière, la ramification I sera un singleton ; si la proposition avancée est en même temps justifiée (par exemple l'affirmation d'une thèse A en la justifiant par B et $B \Rightarrow A$), la ramification I contiendra autant d'éléments que d'arguments articulés dans la justification (par exemple deux éléments pour B et $B \Rightarrow A$).
- Le fait d'abandonner la controverse est représenté par le fait de jouer le daïmon.

Dans l'idéal, la meilleure façon d'être assuré de gagner une controverse, c'est de posséder une stratégie gagnante contre n'importe quel adversaire, c'est à dire en Ludique : une preuve. C'est ce que Schopenhauer rappelle en introduction : *"l'art d'avoir raison sera d'autant plus facile que l'on a raison quant à l'objet du débat"* et indique à nouveau, indirectement, dans l'ultime stratagème : *les deux adversaires collaborent pour l'élaboration d'une meilleure défense d'une thèse (une stratégie), soit ultimement une recherche commune de la vérité...* Néanmoins, et Schopenhauer ne manque pas de le souligner, la plupart des controverses ne se déroulent pas ainsi et d'ailleurs on ne retrouve dans aucun stratagème le simple conseil de dérouler un raisonnement imparable (une preuve). Toutefois cet idéal impose la forme des règles de l'interaction et tout l'art des stratagèmes sera de se rapprocher, plus ou moins *impudemment* de cette forme.

Gagner les controverses : dominer l'interaction

L'élaboration des stratagèmes est sous-tendue par le but suivant : déployer, lors de l'interaction, un dessein gagnant contre celui de l'adversaire. Atteindre cet objectif dépend en premier lieu d'une bonne connaissance et une bonne maitrîse du jeu de l'interaction.

La façon la plus simple de "dominer l'interaction" est de réussir à exhiber un dessein gagnant contre celui de l'adversaire. Ce que nous illustrons par l'analyse du stratagème 26. Le dialogue suivant est une controverse entre P et O qui illustre le stratagéme 26, appelé *retorsio argumenti* : *l'argument que l'opposant veut utiliser en sa faveur peut être légitimement retourné contre lui.*

EXEMPLE **18** – *O : "C'est un enfant, il faut user d'indulgence avec lui"*
– P : "Justement parce que c'est un enfant, il faut le châtier, sinon, il s'endurcit dans les mauvaises habitudes."
Nous analysons cette controverse de la façon suivante :

— *O justifie sa thèse implicite (*vous auriez tort de punir cet enfant*) par deux prémisses :* c'est un enfant *et* il faut être indulgent avec les enfants*. Ce que l'on représente par un unique acte de dialogue :*

$$(+, \xi, \{1, 2\}, np)$$

où np est l'expression de cette assertion et la ramification contient deux éléments puisque la discussion peut continuer sur deux points : c'est un enfant. *et* il faut être indulgent avec les enfants..

— *P enregistre cette intervention par l'acte de dialogue* $(-, \xi, \{1, 2\}, np)$*. Puis il répond. Sa réponse commence par une concession sur le fait que* c'est un enfant.. *La réponse se poursuit par une contradiction du second élément précédemment avancé, la contradiction est implicite : (*il ne faut pas être indulgent avec les enfants*, elle est exprimée explicitement par :* il faut châtier les enfants*). En même temps P avance un contre-argument* sinon, il s'endurcit dans les mauvaises habitudes.

On représente cette intervention par une séquence d'actes de dialogues :
- la reprise soulignée de l'assertion de son interlocuteur : Justement parce que c'est un enfant *contient une concession :*

$$(+, \xi.1, \{0\}, jus)(-, \xi.1.0, \emptyset, enf)$$

Le premier de ces actes est exprimé par justement *(noté jus) et le second par la reprise* c'est un enfant *(noté enf).*

- *l'intervention de P se poursuit en niant l'assertion de O. Cette négation est un acte de dialogue :* $(+, \xi.2, \{0\}, cha)$ *exprimée par* il faut le châtier *(noté cha) ;*
- *la contre-argumentation correspond à une succession de deux actes : le premier* $(-, \xi.2.0, \{0\}, sin)$ *exprimé par* sinon *(noté sin) permet à P de garder la main (un acte forcé chez son interlocuteur), et par le second* $(+, \xi.2.0.0, \emptyset, mau)$ *il assène son argument ; ce dernier acte de l'intervention est exprimé par* il s'endurcit dans les mauvaises habitudes *(noté mau). Ici, dans la mesure où le dialogue n'est pas poursuivi, nous avons représenté ce dernier acte avec une ramification vide, rendant ainsi l'effet que cet argument semble sans appel (il ne contient aucune ouverture).*

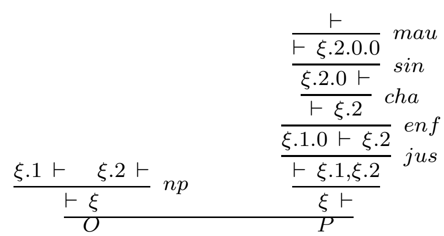


FIGURE 3.1 – Intervention de P (Schopenhauer - stratagème 26)

- *Lorsque O enregistre cette intervention (en grisé dans la figure 3.2), il n'y a plus de lieux disponibles dans son dessein de dialogue, à partir desquels il pourrait poursuivre. S'il accepte de préserver la convergence, il ne peut que jouer le daïmon. Nous verrons plus loin (section 3.3) que ceci permet de formaliser une notion de gain et est utile pour modéliser les dialogues argumentatifs.*

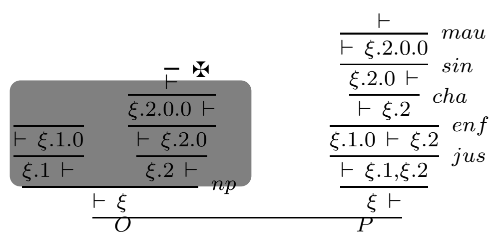


FIGURE 3.2 – Enregistrement par O de l'intervention de P (Schopenhauer - stratagème 26)

Afin de "dominer l'interaction" (ou au moins d'éviter de perdre la controverse) il peut être utile de comprendre le dessein selon lequel l'adversaire joue afin de modifier le déroulement de l'interaction, c'est par exemple le contenu du stratagème 18 : *Quand nous nous apercevons que notre adversaire s'est muni d'une argumentation capable de nous contraindre à déposer les armes, il ne faut pas que nous permettions à la controverse de prendre une pareille tournure, ni à lui d'aller jusque là, mais que nous rompions les chiens au moment voulu, en nous dérobant ou en détournant le débat vers d'autres propositions ; bref il faut provoquer une mutatio controversae.*

Supposons que le dialogue entre deux débateurs P et O se déroule et que P s'aperçoive, pendant une intervention de O que celui-ci possède une stratégie gagnante. Rapportée dans les termes de notre modélisation, cette situation, est un chemin d'interaction entre deux desseins dont la dernière intervention de O est un acte de dialogue localisé en ξ, et P devine l'existence d'un dessein gagnant basé en $\vdash \xi$. Plutôt que de poursuivre le dialogue sur le lieu créé par cet acte de dialogue, P détourne le débat en ancrant sa prochaine intervention sur un nouveau lieu σ, c'est-à-dire son intervention est un acte de dialogue initial. Selon les règles définissant le chemins de l'interaction, que nous avons présentées dans le chapitre 2, O ne pourra plus poursuivre l'interaction en parcourant le dessein gagnant basé sur $\vdash \xi$, si P ne le lui permet pas (pas de saut négatif).

Gagner les controverses : anticiper des stratégies gagnantes

Plutôt que d'exhiber un dessein gagnant en réagissant aux interventions de l'adversaire, il est encore plus sûr de jouer un dessein gagnant en ayant anticipé plusieurs "coups" à l'avance. Pour construire de telles stratégies, un grand nombre de stratagèmes utilisent abondamment des éléments annexes à l'échange en cours : des échanges antérieurs ou des positions connues de l'interlocuteur. C'est le cas du stratagème 4 : *Si l'on veut aboutir à une conclusion, qu'on ne laisse pas prévoir celle-ci, mais que l'on obtienne sans en avoir l'air l'approbation de ses prémisses, en les dispersant dans le cours de la conversation, sans quoi, l'adversaire se jettera dans de nombreuses arguties ; ou s'il est douteux que l'adversaire les concède, que l'on pose les prémisses de ces prémisses, que l'on édifie des pro-syllogismes ; que l'on s'arrange pour faire approuver les prémisses de plusieurs pro-syllogismes de ce genre mais sans ordre, et confusèment, que l'on cache par conséquent son jeu, jusqu'à ce qu'on ait fait approuver tout ce qu'on désire.* [...]

On résume et simplifie ce stratagème de la façon suivante :

EXEMPLE **19** *Il s'agit de faire admettre les prémisses d'une implication, de façon cachée dans la conversation, puis une fois qu'on sait que l'interlocuteur reconnaît toutes les prémisses, jouer alors l'implication.*

- Au cours de la conversation le proposant P a avancé différentes propositions qui ont été concédées par son interlocuteur O : les propositions A et B vont être les prémisses de sa thèse.

  On formalise ces échanges en localisant arbitrairement A en α et B en β. Les interactions ci-dessous représentent ces deux échanges. A gauche est représenté celle correspondant à l'échange autour de la proposition A. L'acte de dialogue $(+, \alpha, \{0\}, a)$ est l'affirmation de A par P, dans le dessein de O, après avoir reçu cet acte de dialogue, O le concède, c'est-à-dire effectue les actes de dialogues $(+, \alpha.0, \{0\}, \epsilon)(-, \alpha.0.0; \emptyset, con_A)$, en effet une concession a pour effet de faire disparaître le point concédé de la suite du dialogue en cours, ce qui est formalisé par une ramification vide. Puis, toujours dans le dessein de O, ces actes de dialogue sont suivis du daïmon, dans la mesure où lorsque c'est à son tour d'intervenir, après avoir concédé A, O n'a plus de lieu disponible et, afin de maintenir la convergence de l'interaction est obligé de jouer le daïmon. L'interaction au sujet de la proposition B est identique, à ceci près que α est remplacé par β, a est remplacé par b, et con_A par con_B.

$$\underbrace{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \alpha.0.0}\,\emptyset}{\alpha.0 \vdash}}{\vdash \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash}\,\maltese}{\alpha.0.0 \vdash}\,\emptyset}{\vdash \alpha.0}}{\alpha \vdash}}_{P \qquad\qquad O} \qquad\qquad \underbrace{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \beta.0.0}\,\emptyset}{\beta.0 \vdash}}{\vdash \beta} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash}\,\maltese}{\beta.0.0 \vdash}\,\emptyset}{\vdash \beta.0}}{\beta \vdash}}_{P \qquad\qquad O}$$

  On note $\mathcal{D}_\alpha$ et $\mathcal{D}_\beta$ de bases respectives $\vdash \alpha$ et $\vdash \beta$ les desseins gagnants de P.
- L'intervention de P "révélant le stratagème" est exprimée par un énoncé comme : *C est la conséquence de A et de B que vous avez admis.* Cette intervention est représentée par une séquence d'actes de dialogue : tout d'abord un premier acte $(+, \xi, \{1, 2, 3\}, s_1)$ où $\xi.1$ est le lieu de la prémisse A, $\xi.2$ celui de la prémisse B et $\xi.3$ le lieu de l'implication A et B entraînent C et où s_1 est l'énoncé *C est la conséquence de A et B*. Or, dans cette intervention, il n'y a pas seulement l'affirmation d'une thèse C, en même temps que sa justification comme conséquence de A et B ; il y a aussi le rappel que A et B ont déjà été admis par O. L'intervention contient donc d'autres actes de langage, codés dans les desseins $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ci-dessous, et explicités ci-après :

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \vdots \\ \xi.1 \vdash\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \vdots \\ \xi.2 \vdash\end{matrix} \qquad \xi.3 \vdash}{\vdash \xi}$$

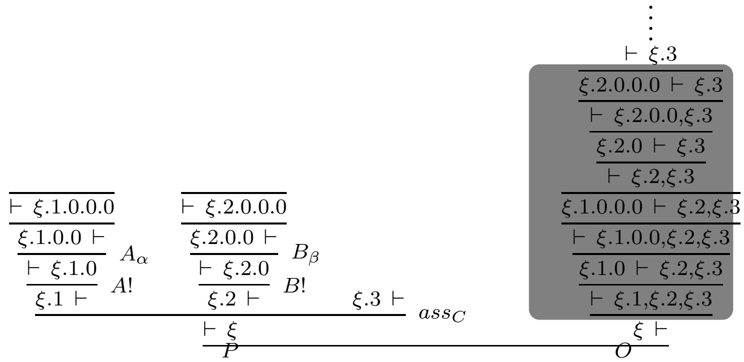


FIGURE 3.3 – Enregistrement par O de l'intervention de P (Schopenhauer - stratagème 4)

- Les actes de dialogue constituant la suite de l'intervention : *que vous avez admis* sont organisés dans les desseins $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui sont construits de la façon suivante :
  — le dessein $\mathcal{D}_1$ est construit à partir du dessein gagnant $\mathcal{D}_\alpha$ par :
  - déplacement (la proposition A affirmée en tant que telle en α ou affirmée dans la cadre de la défense de C en $\xi 10$)
  - décalage (la proposition A affirmée en $\xi 10$ est utilisée comme argument en $\xi 1$)
  Ainsi $\mathcal{D}_1 =\downarrow [[\mathcal{D}_\alpha, \mathfrak{F}ax_{\alpha,\xi.1.0}]]$ est de base $\xi.1 \vdash$;
  — De même $\mathcal{D}_2 =\downarrow [[\mathcal{D}_\beta, \mathfrak{F}ax_{\beta,\xi.2.0}]]$ est de base $\xi.2 \vdash$.
- P est en bonne position pour gagner la controverse. La réaction de O est largement contrainte. C'est à dire que O doit enregistrer le déploiement de tout un dessein, (le sous-dessein grisé dans la figure 3.3). La seule ouverture alors pour O est de jouer une action ancrée sur $\xi.3$; s'il n'a rien à opposer à l'implication (les prémisses A et B entraînent la thèse C) alors O ne peut qu'accepter cette thèse de P, en jouant le daïmon.

Gagner les controverses : rendre difficile la maîtrise de l'interaction par l'adversaire

Nous venons de voir que certains stratagèmes reposent sur l'avantage que donne une bonne maîtrise de l'interaction. Maîtrise réalisée par le contrôle de l'organisation de nos interventions dans le dialogue et que l'on peut résumer par le fait de jouer un dessein gagnant. De façon symétrique, on peut favoriser sa position dans la controverse en rendant difficile la position de l'adversaire, c'est à dire en contraignant le choix de ses interventions et leur organisation. Ceci peut être réalisé en le privant de possibilités d'intervention. C'est typiquement la cas du stratagème 6, qui est essentiellement la pétition de principe que nous avons traitée précédemment.

Ainsi, la forme de l'interaction est essentielle pour rendre compte des dimensions pragmatique, dialectique et réthorique du langage. Pourtant, quoique nous ayons veillé à laisser en suspens la question du sens des énoncés portés par les interventions, la modélisation que nous avons proposée des différents exemples de dialogues considérés est forcément le résultat de notre interprétation de ces énoncés. Le contenu, la signification des énoncés ne peut être mise plus longtemps de côté, ni les aspects lexicaux et syntaxiques avec lesquels le sens s'articule. Nous proposons alors le développement d'une théorie du dialogue, dans laquelle seront réintégrées ces dimensions que nous n'avons pas encore considérées.

3.1.3 Vers une théorie du dialogue

Nous voulons développer un cadre théorique des phénomènes linguistiques à partir de ce en quoi ils sont liés à l'interaction, c'est-à-dire à partir de leur manifestation dans une situation de dialogue. Notre analyse théorique est très proche de celle de J. Ginzburg lorsqu'il développe une théorie du dialogue, nommée *KoS* [31]. Nous partageons par conséquent un grand nombre de postulats méthodologiques de la KoS et notamment les suivants :

— La signification ne doit pas être étudiée sur des phrases décontextualisées auxquelles on ajoute ensuite des modules phonétique et pragmatique. Il convient d'aborder tous ces aspects en même temps.
— Pour étudier et décrire la communication, il convient de prendre au sérieux aussi bien ses succès de transmissions de contenu que ses échecs (incompréhension, malentendus, ...) et les réparations.
— Toute sa place doit être laissée à la dynamique. La sémantique des énoncés peut être élaborée au cours d'une conversation et les mises à jour, réparations, explicitations ont toute leur place.

Notre démarche se distingue néanmoins de la KoS par le choix du cadre formel dans lequel nous pensons pertinent de développer une telle théorie du dialogue. Nous venons de voir combien la Ludique, qui décompose l'interaction en éléments primitifs, et qui permet de reconstruire des objets à partir de leur comportement vis à vis de l'interaction, est pertinente pour rendre compte de nombreux aspects des interactions dialogiques. En outre, nous postulons que c'est la même interaction qui lie des objets élémentaires pour constituer les catégories familières avec lesquelles nous organisons notre regard réflexif sur le langage. En fait, plutôt que de parler de **composition**, entre les mots pour constituer des énoncés, entre les énoncés pour constituer des interventions, entre les propositions pour constituer des preuves, entre des représentations pour constituer des discours, nous préférons mettre en lumière la **dynamique** (le moteur) de cette composition, ce que nous appelons **l'interaction**. Ainsi, les objets utilisés pour la modélisation des différents éléments du langage seront des desseins de la Ludique, c'est-à-dire des objets dans lesquels la possibilité d'interaction est internalisée. Le regroupement de ces desseins en des objets plus ou moins figés (comme sont figés, c'est-à-dire stables, les comportements associés aux formules et aux types de la Logique) est, selon nous, le fait de la lecture réflexive qui a besoin de repérer des formes caractéristiques et de constituer des grilles de lecture. Les frontières posées sur de tels regroupements est le fait de l'analyse théorique et sa nécessité de délimiter des catégories.

Esquisse de théorie

Nous considérons des dialogues occurrant entre deux protagonistes[4]. C'est-à-dire une succession d'interventions successivement produites et reçues par chacun des interlocuteurs. Pour produire et recevoir ces interventions, sous forme d'énoncés, chaque interlocuteur mobilise des compétences physiques (pour émettre et entendre des sons), cognitives, intellectuelles (pour percevoir, reconnaître, comprendre et mémoriser des notions et des savoirs), culturelles, psycho-sociologiques (pour reconnaître et transmettre des intentions, des rapports de pouvoir, des rapports de séduction, des rapports de coopération etc ...), linguistiques (pour coder et décoder, organiser des messages). Nous nous intéressons a priori à toutes ces dimensions, que nous supposons éminemment imbriquées et que nous estimons toutes déterminantes pour rendre compte des processus responsables de la production et la réception d'interventions dialogiques. Toutefois, puisque la dimension la plus saillante des dialogues est celle du langage et que la tradition la plus développée et la plus globale sur cette question est celle de la linguistique, et qu'en outre nous prétendons recueillir des informations linguistiques à partir de cette formalisation des dialogues, c'est cette dimension que nous privilégions. Nous adopterons donc les catégories de la tradition linguistique pour rendre compte de ces compétences : phonétique, lexicale, syntaxique, sémantique, pragmatique, dialectique.

4. Nous aurons loisir ensuite d'étendre cette situation aux monologues ou aux dialogues dans lesquels plus que deux interlocuteurs interviennent. Le même cadre théorique pourra être étendu sans être essentiellement modifié.

Le cadre dans lequel nous développons notre approche s'organise de la façon suivante. Nous considérons que chacun des interlocuteurs d'un dialogue possède une *base cognitive* qui englobe toutes les compétences et les connaissances que ce locuteur met en jeu lorsqu'il produit ou reçoit une intervention. En un certain sens, le dialogue est une interaction entre deux bases cognitives, dans la mesure où non seulement, ses étapes successives sont produites à partir de ces bases cognitives, mais aussi les interventions tour à tour alimentent, sollicitent et modifient les bases cognitives des locuteurs. La proposition de modélisation que nous venons de présenter pour rendre compte de la partie visible, explicite, d'un dialogue se déploie à partir de la seule constatation que des interventions sont produites et reçues (ou non), sans se poser la question de comment ces interventions sont produites/reçues. Envisager de répondre à cette dernière question est justement le rôle de la base cognitive. Mais comment manipuler, formaliser cette notion de base cognitive qui est hétérogène, énorme et qui se transforme tout le temps ? Dans la mesure où on ne peut pas avoir accès complètement à cette base, ni on ne peut la décrire exhaustivement, et que de surcroît seule une partie est mobilisée pour le déroulement d'un dialogue, on se contentera de faire état d'un *contexte cognitif* pour chaque locuteur, c'est-à-dire la partie de la base cognitive qui est activée dans le dialogue. Dans notre formalisation, ce contexte cognitif contiendra les éléments utilisés pour produire et recevoir les interventions successives. Ces contextes évoluent au fur et à mesure du déroulement du dialogue et doivent être mis à jour après chaque intervention.

- La première question est celle du choix des éléments que nous retenons dans ce contexte cognitif. En participant au dialogue, en produisant et recevant des interventions, le locuteur mobilise des connaissances et compétences ; il est mu par des perceptions, des affects, des habitudes, des motivations, des projets ... Nous avons choisi de retenir ces différents éléments dans une formulation propice à l'analyse linguistique : des éléments phonétiques [5], pragmatiques, sémantiques, lexicaux, voire syntaxiques, liés aux interventions successives produites : c'est-à-dire des éléments de la sémantique des énoncés avancés (la forme logique, les éléments du lexique ...), des éléments pragmatiques liés à l'occurrence des énoncés dans le dialogue (leur dimension en tant qu'acte de langage), des éléments syntaxiques et phonétiques ... Répétons qu'on choisit de retenir ces éléments pour au moins deux raisons : parce qu'ils participent à la production et la réception des énoncés dont nous voulons rendre compte, parce qu'on veut à terme, utiliser cette formalisation des dialogues pour mieux comprendre ces éléments linguistiques à partir de leur rôle dans le dialogue [6].

5. Nous n'avons rien à en dire pour le moment, mais autant marquer la place pour ne pas l'oublier.

6. En distinguant ces éléments dans la formalisation des dialogues, nous envisageons un al-

- La question qui se pose ensuite est celle de la forme sous laquelle on retient ces éléments. Nous assumons que l'interaction est le principe selon lequel ces différents éléments se combinent, non seulement pour donner lieu à des invariants repérables : *formes logiques*, *sémantique lexicale*, *catégories grammaticales*, *actes de langage*, ..., mais aussi que le même principe d'interaction permet de rendre compte des calculs à l'œuvre dans la transformation des bases cognitives. Ainsi, nous prétendons qu'en retenant les éléments sous la forme de *desseins* de la Ludique, c'est-à-dire en retenant comme dimension la plus saillante, leur potentialité d'interaction, nous disposerons de formes pertinentes pour rendre compte de ces éléments constitutifs du dialogue.

Nous rassemblons alors, dans deux contextes de dialogues, associés chacun à un locuteur, des desseins correspondant aux éléments cognitifs pertinents pour le dialogue. Et parmi ces éléments cognitifs, nous nous intéressons essentiellement aux éléments "linguistiques". Parmi les éléments actifs dans le dialogue, certaines compétences et des attitudes dialogiques sont a priori communes à tous les locuteurs : des compétences logiques élémentaires concernant la négation et l'application du modus ponens, des attitudes minimales pour participer au dialogue, par exemple faire l'hypothèse que lorsque son interlocuteur avance un énoncé, cet énoncé a un sens qui est a priori connu par cet interlocuteur etc .... Nous ne les indiquerons pas dans les contextes de dialogue, même si bien-sur, nous les utiliserons pour rendre compte des transformations de ces contextes. Nous ne rendons compte dans ces contextes de dialogue que de la partie de la base cognitive qui est locale au dialogue en cours, celle qui contient des éléments de connaissance, de perception, des motivations directement concernées par ce dialogue. Les contextes des deux participants au dialogue sont alors mis en communication par les actes de dialogues qui sont avancés au fur et à mesure des interventions. La formalisation comportera donc aussi la trace de cette interaction sous la forme de l'interaction entre deux desseins chacun constitué des actes de dialogues, ce que nous avons appelé la surface du dialogue. Un des points de la formalisation sera de préciser comment les actes de dialogues sont produits par un contexte et modifie alors l'autre contexte.

Résumé

On considère un dialogue occurrant entre deux protagonistes A et B[7]. La formalisation de ce dialogue, lorsqu'il est terminé, s'exprime par un triplet $(C_A, C_B, [[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B]])$

ler/retour théorique : comment ces éléments déterminent les dialogues, comment les dialogues déterminent ces éléments.

7. En fait, rien n'interdira que le dialogue soit en fait un monologue.

où C_A et C_B sont les contextes de dialogue[8] des locuteurs A et B, et $[[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B]]$ est le réseau de coupure constitué des deux desseins contenant les actes de dialogues échangés. Néanmoins, notre ambition est de construire cette donnée pas à pas, c'est-à-dire de construire une suite : $(C_A^i, C_B^i, [[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B]]^i)$ pour i allant de 1 à n, incrémenté à chaque intervention successive. Ainsi, lorsque le dialogue est terminé $(C_A, C_B, [[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B]]) = (C_A^n, C_B^n, [[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B]]^n)$. Nous explicitons ci-dessous les différents axes de cette formalisation :
Soit X un des deux locuteurs., le contexte C_X contient, sous forme de desseins, les éléments de la base cognitive de X qui sont (ou peuvent être) mobilisés lors des interventions. Nous distinguons deux parties dans ce contexte :

— Nous listons les connaissances et perceptions directement concernées par les interventions. Cette partie du contexte sera cruciale pour rendre compte des dialogues argumentatifs (voir section 3.3). En quelque sorte, elle fait état des engagements qu'un locuteur assume lorsqu'il participe au dialogue. Cette partie du contexte d'un locuteur X est donc appelée `Engagements de` X et sera notée $\mathbb{E}_X$. Elle contient des desseins associés aux propositions assumées par un locuteur et aux objets auxquels il réfère lorsqu'il avance des énoncés. Par exemple si un locuteur X affirme *un chien aboie*, en plus de cette dernière proposition, il assume la proposition *j'entends du bruit*. Il assume également des compétences cognitives sur ce qu'est *un chien* et sur l'action d'*aboyer*. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{E}_X$ des engagements de ce locuteur contiendra des ensembles de desseins associés à chacun de ces éléments.

— Les éléments linguistiques utiles à la formation (et la compréhension) des énoncés sont restitués dans un ensemble de *records* $\mathcal{R}_X$, chacun étant associé à un des énoncés avancés dans le dialogue. Cette notion de record est pertinente pour souligner que ces éléments interviennent conjointement dans la formation des énoncés. Pour être formellement précis, un tel record devrait être représenté par un dessein dont les branches additives constituent les différents champs. Pour la simplicité de la présentation, nous le manipulerons de façon habituelle, c'est-à-dire comme une colonne de champs. Ce record contient les champs utiles pour telle ou telle investigation linguistique, comme l'expression phonétique, les éléments lexicaux occurrant dans les énoncés constituant l'intervention, la structure syntaxique et la forme logique des énoncés et enfin le statut de l'énoncé comme acte de langage.

Les deux parties du contextes `Engagements` et `Record` d'éléments linguistiques sont fortement liées, et sont éventuellement redondantes. Parmi les connaissance sur un objet comme *Chien* de la partie `Engagement` on trouvera des éléments lexicaux et sé-

8. Cette notion est assez proche de celle de *DGB* de Ginzburg.

mantiques que l'on utilise également dans la partie `Record d'éléments linguistiques`.

Enfin, les desseins $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ constitutifs du réseau de coupure, sont construits en rajoutant un certain nombre d'actes de dialogues à chaque intervention. Pour l'instant, avant d'éventuellement affiner les dialogues en deux dialogues correspondant à leur appréhension par chacun des locuteurs, nous considérons que lorsque une intervention de A (resp. B) est associée à une séquences $\kappa_1, \ldots \kappa_p$ d'actes de dialogues, alors, si l'interlocuteur B (resp. A) répond sans signaler explicitement de divergence, la séquence $\overline{\kappa_1, \ldots \kappa_p}$ est ajoutée au dessein $\mathcal{D}_B$.

Nous ne proposons ici que l'esquisse d'une théorie du dialogue. En effet, l'étude des éléments syntaxiques et lexicaux ne fait que démarrer, la dimension phonétique n'a pas encore été envisagée. Néanmoins, après avoir présenté dans la section suivante les premiers résultats obtenus concernant la sémantique des énoncés dans le cadre de la modélisation ludique des dialogues, et fait état des propositions avancées pour une formalisation lexicale et syntaxique, nous présentons en section 3.2.3 le traitement d'un exemple dans cette théorie du dialogue. Nous pourrons ainsi expliciter les points de recherches futures et en même temps illustrer les potentialités d'un cadre unifié autour de l'interaction.

3.2 Outils linguistiques

3.2.1 Une approche interactive de la sémantique

En collaboration avec A. Lecomte nous avons développé une approche de la signification ancrée sur la représentation des dialogues en Ludique [50], [51].

Ainsi que nous l'avons rappelé en introduction, l'approche ludique du langage et en particulier de la signification des énoncés, s'inscrit dans la tradition de l'approche logique du langage. Sans remonter jusqu'à Aristote et à la naissance de la Logique, motivée par l'étude du langage naturel, notre approche se place dans ce domaine, à l'interface entre réflexion sur le langage et logique mathématique, dont les illustres pionniers ont été Frege, Russel, Tarski. De cette époque, nous avons hérité d'une vision de la sémantique dont le concept central, premier, subsumant tout autre aspect est celui de *vérité*. Si la recherche en logique mathématique a vu le développement, à côté de la théorie des modèles ancrée sur cette tradition, d'autres approches tout aussi fructueuses et décisives pour l'essor de l'informatique, comme la théorie de la démonstration ou la théorie des types, les travaux en sémantique des langues naturelles sont encore très largement tributaires de l'approche vériconditionnelle. C'est le cas des travaux actuels en logique modale dont la référence est toujours la sémantique des mondes possibles. C'est aussi le cas des approches comme la sémantique de Montague [74] et ses développements récents [11], qui intégrant la dynamique de construction et d'évolution du sens, prennent acte de nouveaux outils issus de la théorie de la démonstration et la théorie des types mais sans forcément en assumer toutes les conséquences philosophiques, en particulier l'hypothèse dite de Brouwer-Heyting-Kolmogorov, selon laquelle le sens ne résidait nulle part ailleurs que dans la preuve.

Pourtant, les sémantiques vériconditionnelles, s'avèrent trop restrictives pour s'appliquer au langage naturel comme en firent tôt la remarque des philosophes comme Austin, Strawson, le second Wittgenstein. Sans vouloir négliger le concept de vérité qui est une des dimensions constitutives de la signification, il est important de donner toute leur place aux dimensions processuelles, dynamiques du sens, auxquelles on accède plutôt par les concepts logiques de preuve et d'interaction. Des tentatives se sont développées pour fonder le sens (et donc la sémantique des langues naturelles) à partir de la notion de preuve, telle celle d'A. Ranta [68] ou à partir de la notion d'interaction considérée comme un jeu, tels les travaux de Hintikka, Kulas et Sandu ([37, 38]). Dans ces interprétations, les significations sont des stratégies dans un *language game*. D'une certaine manière, c'est dans cette tradition que nous nous plaçons en développant une étude de la signification des phrases et des énoncés basée sur une interprétation possible en termes de jeu en même temps qu'en termes de démonstrations. Toutefois, le cadre utilisé (ludique) est non seulement centré sur l'interaction, mais en plus, il manipule, plutôt que des "preuves" ou "stratégies" figées par des contraintes externes (déductions dans un système formel au moyen de règles définies *a priori*), des objets, que nous nommons ici "structures élémentaires de l'interaction", qui préexistent à tout système de règles.

Ainsi nous considérons que la signification des énoncés est accessible (on peut la décrire, la connaître, l'utiliser) à partir des *contextes* d'interaction, autrement dit principalement à partir des dialogues dans lesquels l'énoncé apparaît. Pour ce faire, nous associons à la signification d'un énoncé un ensemble de desseins qui peuvent être compris intuitivement comme les supports des dialogues potentiellement suscités par cet énoncé, comme les explorations du sens de l'énoncé asserté, ou bien encore comme les justifications d'un argument ... Cette approche suppose quelques positions méthodologiques et philosophiques :

- Nous ne distinguons pas entre sémantique des phrases, objet de la tradition sémantique et sens des énoncés, objet de la tradition pragmatique. Notre approche nous amène plutôt à considérer les seconds comme des cas particuliers des premières. L'ensemble des desseins associés au sens d'un énoncé est contenu dans l'ensemble des desseins associés à la sémantique d'une phrase. Ce dernier ensemble est en quelque

sorte obtenu comme la réunion des sens de la phrase énoncée dans tel et tel contexte.
- En fait *la sémantique* d'une proposition ou d'un concept est essentiellement un objet théorique. La signification des énoncés comme des éléments qui les composent, et que l'on manipule sous forme d'éléments lexicaux ou de concepts est loin d'être figée et universellement partagée. Même si les dictionnaires précisent les définitions des termes du vocabulaire commun et les encyclopédies explicitent les concepts propres à tel ou tel domaine, la signification des énoncés varie selon les groupes, les lieux, les époques, les situations. Lorsqu'il s'agit du vocabulaire des émotions, le sens est même propre à chaque individu, résultat de son histoire personnelle. Bien évidemment des délimitations sont posées qui permettent de désigner sous la même appellation des phénomènes proches, rendant possible la communication et alors le langage. Selon les domaines, le sens est très stabilisé, c'est le cas du vocabulaire décrivant les objets de la vie quotidienne, c'est aussi le cas des concepts scientifiques, l'exemple par excellence d'une telle stabilisation étant celui des objets mathématiques dont une définition quasi complète est possible. Pourtant l'appropriation du langage dépend toujours d'une interprétation, le sens d'un concept peut toujours être enrichi d'une nouvelle compréhension du monde, résultant de découvertes scientifiques. Alors, nous préférons aborder cette question de la sémantique des énoncés comme un objet idéal et assumé comme tel, non donné a priori mais accessible par ses manifestions en situation, c'est-à-dire en dialogue et par le processus réflexif de reconnaissance qu'une signification est constituée. Selon notre modélisation, ces deux rôles d'accès à la signification d'un énoncé : la manifestation en dialogue et le processus réflexif sont joués par le dessein de dialogue déployé à partir de cet énoncé et l'ensemble de ces desseins de dialogues obtenu lorsque l'on fait varier les phrases duales, c'est-à-dire celles dont l'interaction avec l'énoncé considéré converge. Nous pouvons souligner que cette démarche, qui résonne assez fortement avec la Théorie Inférentialiste de Robert Brandom [7], semble fournir un cadre tout à fait adapté pour formaliser la sémantique que ce dernier envisage comme émergeant de l'offre et la demande de raisons.

Nous allons voir dans cette section qu'une sémantique formalisée en ludique permet de revisiter la notion de *forme logique* en même temps qu'elle fournit un cadre intéressant pour aborder différents aspects de la sémantique qui dépassent a priori la décomposition logique de l'énoncé comme par exemple le partage de sens entre des énoncés distincts.

Formes logiques

La notion de forme logique est centrale dans l'étude de la sémantique des langues naturelles et particulièrement dans la sémantique formelle. La possibilité d'associer à une phrase une formule du calcul des prédicats conditionne bien sûr l'existence d'une sémantique vériconditionnelle mais permet également de formuler et formaliser des questions majeures en sémantique comme celle de la portée des quantificateurs. Un des intérêts des formes logiques est qu'elles permettent de discriminer entre plusieurs significations d'un énoncé a priori ambigu, comme le suivant :

(1) *Tous les linguistes parlent une langue africaine.*

Traditionnellement deux formes logiques peuvent être associées à cette phrase selon que l'article indéfini "une" a une portée large ou étroite.

$$\begin{aligned} S_1 = &\quad \forall x(L(x) \Rightarrow \exists y(A(y) \wedge P(x,y))) \\ S_2 = &\quad \exists y(A(y) \wedge \forall x(L(x) \Rightarrow P(x,y))) \end{aligned}$$

Où $L(x)$, $A(y)$ et $P(x,y)$ sont respectivement des formules associées aux énoncés "x est un linguiste", "y est une langue africaine", et "x parle la langue y".
La question se pose alors de savoir comment trouver, déterminer, établir ces formes logiques. C'est un des plus jolis résultats de la sémantique de Montague et de l'interface syntaxe/sémantique des grammaires catégorielles que de permettre de calculer ces formes logiques à partir de l'analyse syntaxique des phrases. Toutefois le fait d'attribuer aux éléments terminaux (atomiques) que sont les articles définis ou indéfinis des termes construits à partir des quantificateurs universels ou existentiels n'est pas justifiée plus avant, il est admis comme allant de soi.
Nous proposons ici de retrouver une contrepartie ludique à la notion de forme logique à partir d'une interprétation interactive, ce qui met entre parenthèses, ne serait-ce que provisoirement, cette question de l'attribution de quantificateurs aux déterminants.
Pour cela, nous partons du constat qu'il existe des phrases possibles entrant "en résonnance" avec une phrase donnée. Ces phrases sont celles qui peuvent s'articuler à la phrase de référence en un dialogue. Nous faisons ici confiance en l'intuition du locuteur, qui sait toujours déterminer si un enchaînement dialogique est bien ou mal formé. Prenons d'abord l'exemple d'un énoncé en principe non ambigu comme :

(2) *Tout candidat au bac attend les résultats du bac avec angoisse.*

Il est alors admis qu'un échange comme le suivant :

a_1 *Tout candidat au bac attend les résultats du bac avec angoisse*

b_1 *même Paul, tu crois ?*

est acceptable, alors que :

a_2 *Tout candidat au bac attend les résultats du bac avec angoisse*

b_2 **oui, ils s'en fichent complètement*

ne l'est pas. Nous dirons en ce cas que b_1 est une phrase duale de a_1, mais certainement pas b_2. Ce genre de "test" peut être appliqué à de nombreux exemples, et c'est lui en particulier qui permet de discriminer les différents sens de (1), et pas une assignation de représentations a priori.

Tout d'abord, remarquons que les phrases suivantes peuvent être considérées comme duales au sens précédent de l'énoncé (1) dans les différents cas suivants :

— Lorsque "une" a une portée étroite l'interaction converge avec les énoncés :
  - (a) Il y a un linguiste qui ne parle aucune langue africaine.
  - (b) Est-ce que même Chomsky parle une langue africaine ?
  - (c) Quelle est la langue africaine parlée par Chomsky ?

— Lorsque "une" a une portée large, l'interaction est possible avec les énoncés :
  - (d) Il n'y a aucune langue africaine parlée par tous les linguistes.
  - (e) Quelle est cette langue africaine que parlent tous les linguistes ?

A partir de cette constatation, nous essayons de rendre compte de l'ambiguïté grâce à l'interaction, ce qui nous permettra de gagner de surcroît une manière d'obtenir des représentations qui ressemblent aux formules ci-dessus, mais d'une manière empiriquement fondée.

Supposons qu'un locuteur avance l'énoncé (1) en assumant le premier sens ("une" a la portée étroite) et en s'attendant à recevoir des questions sur un certain nombre de linguistes. Nous pouvons représenter cette intervention par un dessein de dialogue (reprenant alors la modélisation des projets de dialogues que nous avons présentée dans la section 3.1.2) :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n \ldots\vdash x.1.5 \ldots\vdash x.1.m}{x.1 \vdash}}{\vdash x}\,(1)$$

Les actes de dialogues sont :
$(+, x, \{1\}, \texttt{tous les linguistes} \ldots)$
et $(-, x.1, \{i\}, \texttt{qu'en est il de i ?'})$
pour chaque linguiste i.

Dans ce cas nous observons que l'interaction entre cette intervention et celle d'un interlocuteur qui rétorquerait (c) ("Quelle est la langue africaine parlée par Chomsky") peut se poursuivre :

$$
\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots\vdash x.1.5\ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x}\,(1)
\qquad\Bigg|\qquad
\dfrac{\dfrac{x.1.5\vdash}{\vdash x.1}\,(c)\qquad \vdash x.2}{x\vdash}
$$

Alors que l'interaction entre cette intervention et celle d'un interlocuteur qui rétorquerait (e) ("Quelle est cette langue africaine parlée par tous les linguistes ?") diverge :

$$
\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots\vdash x.1.5\ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x}\,(1)
\qquad\Bigg|\qquad
\dfrac{\vdash x.1 \qquad \dfrac{x.2.0\vdash}{\vdash x.2}\,(e)}{x\vdash}
$$

Nous pouvons ainsi repérer, dans l'ensemble des desseins associé à la sémantique de la phrase (1) deux "sous-ensembles" : des desseins qui ont comme premier acte de langage $(+, x, \{1\}, \texttt{tous les linguistes} \ldots)$ et d'autres qui ont comme premier acte de langage $(+, x, \{2\}, \texttt{tous les linguistes} \ldots)$, selon que le locuteur assume la portée large ou étroite du quantifieur "une". Dans le premier cas on commence un dessein de dialogue qui peut explorer le premier sens et apporter des justifications pour chaque linguiste, alors que ce n'est pas le cas du second dessein.

Poursuivons l'exploration d'une justification de (1) que nous venons de commencer ci-dessus. Le locuteur qui avait avancé (1) peut répondre :

$$
\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots \qquad \dfrac{x.1.5.8\vdash \quad x.1.5.9\vdash}{\vdash x.1.5}\,(c_2) \qquad \ldots\vdash x.1.m}{x.1\vdash}}{\vdash x}
\qquad\Bigg|\qquad
\dfrac{\dfrac{x.1.5\vdash}{\vdash x.1}\,(c)\qquad \vdash x.2}{x\vdash}
$$

(c_2) : La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe

(c) : Quelle est la langue africaine parlée par Chomsky ?

Où les lieux $x.1.5.8$ et $x.1.5.9$ correspondent respectivement aux énoncés contenus dans la dernière intervention du locuteur :*La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe.*, c'est-à-dire les énoncés : *L'arabe est une langue africaine* et *Chomsky parle arabe.*
Le locuteur est prêt à recevoir à nouveau des questions :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots \qquad \dfrac{x.1.5.8\vdash \quad x.1.5.9\vdash}{\vdash x.1.5}{\scriptstyle (c_2)} \qquad \ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x}$$

(c_2) : La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x.1.5.8.6\vdash x.1.5.9}{\vdash x.1.5.8, x.1.5.9}}{x.1.5\vdash}}{\vdash x.1}{\scriptstyle (c)} \qquad \vdash x.2}{x\vdash}$$

(c_3) : Que vous placez dans les langues africaines ?

ou :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots \qquad \dfrac{x.1.5.8\vdash \quad x.1.5.9\vdash}{\vdash x.1.5}{\scriptstyle (c_2)} \qquad \ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x}$$

(c_2) : La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x.1.5.9.4\vdash x.1.5.8}{\vdash x.1.5.8, x.1.5.9}{\scriptstyle (c'_3)}}{x.1.5\vdash}}{\vdash x.1} \qquad \vdash x.2}{x\vdash}$$

(c'_3) :Je ne crois pas que Chomsky connaisse vraiment l'arabe.

Cette exploration d'un échange possible permet de pointer une forme de desseins que l'on peut résumer comme ci-dessous et qui appartiennent vraisemblablement à l'ensemble des desseins associé à la sémantique de (1) :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_{d'}\\ \vdots\\ \vdash x.1.n\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}\\ \vdots\\ x.1.5.8\vdash\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{E}'\\ \vdots\\ x.1.5.9\vdash\end{array}}{\vdash x.1.5}{\scriptstyle E_3} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d''}\\ \vdots\\ \vdash x.1.m\end{array}}{x.1\vdash}}{\vdash x}{\scriptstyle E_1}$$

E_1 : Le locuteur assume l'énoncé (1) dans sa première acception.
L'interaction peut continuer sur chacun des linguistes ;
Un énoncé E_3 permet d'exhiber la langue parlée par tel linguiste. ;
Le dessein $\mathcal{E}$ est une justification de "Cette langue est une langue africaine"
Le dessein $\mathcal{E}'$ est une justification de "Le linguiste considéré parle telle langue ".

Nous pouvons alors revenir à une lecture "logique" de cette analyse. En effet, la correspondance entre dessein et preuve nous permet d'associer aux lieux des formules, aux actions des applications de règles et au déroulement du dessein lui-même une décomposition de formule. Le lieu x initial en vient alors à être occupé par une formule construite avec les connecteurs positifs de la logique linéaire que sont $\oplus$ et $\otimes$ et avec la négation. Ce faisant, les desseins peuvent être lus comme des tentatives de preuves, et le dessein précédent correspond à la preuve suivante :

$$\dfrac{\mathcal{D}_{d'} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A(e_d)}}{\downarrow A^{\perp}(e_d) \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash P(d, e_d)}}{\downarrow P^{\perp}(d, e_d) \vdash}}{\vdash \downarrow L^{\perp}(d), \oplus_y(\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(d,y))} \quad \mathcal{D}_{d''}}{\dfrac{S_1^{\perp} \vdash}{\vdash S_1 \oplus S_2}\,E_1}$$

où S_1 et S_2 sont respectivement des formulations en Logique Linéaire Hyperséquentialisée des formules $\forall x(L(x) \Rightarrow \exists y(A(y) \wedge P(x,y)))$ et $\exists y(A(y) \wedge \forall x(L(x) \Rightarrow P(x,y)))$.
Plus précisément, en utilisant un des résultats fondamentaux de la ludique qui est qu'à partir des opérations définissables sur les desseins et sur les ensembles de desseins, il est possible de retrouver les connecteurs de la logique linéaire, l'ensemble des desseins obtenus au terme de l'analyse ci-dessus peut être présenté de la façon suivante :

$$\mathbb{S} = (\&_x(\downarrow\mathbb{L}(x) \multimap \oplus_y(\downarrow\mathbb{A}(y) \otimes \downarrow\mathbb{P}(x,y)))) \oplus \downarrow(\oplus_y(\downarrow\mathbb{A}(y) \otimes \&_x(\downarrow\mathbb{L}(x) \multimap \downarrow\mathbb{P}(x,y)))).$$

qui est construit à partir d'ensembles de desseins $\mathbb{L}(x)$, $\mathbb{A}(y)$, et $\mathbb{P}(x,y)$ respectivement associés aux énoncés "x est un linguiste", "y est une langue africaine", et "x parle la langue y". On peut alors légitimement estimer qu'on a retrouvé une décomposition logique de la sémantique de l'énoncé (1). Et en particulier, si $\mathbb{L}(x)$, $\mathbb{A}(y)$, et $\mathbb{P}(x,y)$, sont des comportements, on retrouve la notion de "forme logique" et tout ce qui va avec : sémantique vériconditionnelle, portée des quantificateurs ...
Remarquons que cette décomposition logique est seulement une partie de la sémantique de l'énoncé (1) : un sous-ensemble de l'ensemble des desseins correspondant à sa sémantique ludique.
Remarquons également que l'interprétation ludique permet une approche plus fine de la forme logique. L'analyse ci-dessus a fait apparaître que les opération logiques pertinentes que l'on doit utiliser pour faire la décomposition logique de (1) ne sont pas les quantificateurs du premier ordre mais des connecteurs additifs généralisés. En effet, il n'y a aucune raison pour que les desseins (représentant des preuves) soient semblables (uniformes) au dessus des différentes instances de linguistes. Or l'étude

de la quantification du premier ordre en Ludique [17] a établi que pour prétendre à bon droit représenter la preuve d'une formule quantifiée universellement, la famille de desseins candidate doit être uniforme.

Au delà de la décomposition logique

Considérons maintenant une phrase dont la forme logique n'est pas aussi saillante, ni aussi centrale :

(2) : Les anglais sont supérieurs à toutes les autres nations quant à l'art dramatique.

Et renouvelons l'expérience de sa confrontation avec des phrases duales. Nous envisageons ci-après quelques phrases avec lesquelles l'énoncé (2) pourrait légitimement interagir [9] :

a Les comédies italiennes sont bien meilleures pourtant.
b Il y a beaucoup d'auteurs médiocres, joués sur les scènes londoniennes.
c Les anglais ne valent rien en musique, et donc, sont nuls en opéra.

A priori, la forme syntaxique ("toutes les autres nations") de cet énoncé, devrait amener à une forme logique contenant une quantification universelle (ou plutôt, comme nous venons de le souligner, une conjonction additive généralisée). Une autre "quantification" pourrait apparaître dans le déploiement de desseins appartenant à la sémantique de (2), correspondant à la déclinaison des "arts dramatiques". Sans anticiper sur une étude de la sémantique lexicale en lien avec la sémantique ludique des énoncés, il n'est pas clair toutefois qu'une telle quantification, pourtant pertinente pour l'interaction avec la phrase (c), apparaisse dans une décomposition logique de l'énoncé. En outre, même si la phrase (b) semble être à la limite du sens de (2), car elle nécessite un "glissement" de "art dramatique" vers "auteurs" et de "anglais" vers "scène londonienne", l'interaction semble néanmoins possible surtout si on introduit la phrase au moyen d'un marqueur comme "pourtant" et les conditions d'une telle interaction et la poursuite de cette interaction devraient justement nous apprendre quelque chose de la signification de l'énoncé (2).
Ainsi, bien qu'une forme logique obtenue à partir de la forme syntaxique de l'énoncé et contenant alors une quantification sur les nations peut être pertinente lors de l'interaction entre (2) et l'énoncé (a), elle semble sans réel intérêt pour comprendre l'interaction avec les deux autres phrases (b) et (c). Le sens de (2), sollicité lors de l' interaction avec ces deux dernières phrases n'utilise pas cette quantification. Les phrases (b) et (c) semblent plutôt interagir avec un énoncé non explicité mais qui est sous entendu/induit par (2) et qui serait simplement :

9. Tout simplement, là encore, parce que les fragments de dialogue correspondants paraissent bien formés.

(3) “Les anglais sont excellents en art dramatique”.

La sémantique ludique peut alors ouvrir les pistes d’une étude de ce phénomène de partage de sens. En première approche, la représentation de la sémantique des énoncés par des ensembles de desseins permet d’envisager que ces ensembles s’intersectent. Il s’agit alors d’étudier les frontières de telles intersections. On peut également envisager que des chemins de parcours de sens à partir de l’énoncé (3) amènent à (2) et réciproquement. Des opérateurs ludiques tels que les décalages semblent des candidats intéressants pour rendre compte de ces glissements sémantiques. Ainsi, le fait d’associer à la sémantique d’un énoncé un ensemble de desseins, sans limites fixées a priori, et surtout sans le réduire à correspondre seulement à une forme logique paraît plutôt une richesse qu’il va s’agir d’exploiter, en particulier en explorant le rôle de la sémantique dans la théorie des dialogues.

Remarque : Dans la proposition ci-dessus présentée d’une sémantique formalisée en Ludique, nous avons fait confiance à une notion de "dialogue bien formé" afin d’établir les discriminations sémantiques qui nous semblaient nécessaires. Après tout, cette confiance n’est certainement pas plus risquée que ne l’est l’intuition du sens d’une phrase représenté par une formule, elle l’est même sans doute moins dans la mesure où nous avons, semble-t-il, des jugements assez sûrs sur la bonne formation des dialogues, que nous n’avons pas toujours sur la manière d’associer des quantificateurs et des connecteurs à une phrase donnée. Par ailleurs, la sémantique formelle classique achoppe sur de nombreux problèmes concernant les quantifieurs. Dire *les Français ont voté pour X* n’est pas dire que *tous* les Français ont voté dans ce sens. L’emploi des génériques ne se ramène pas à la quantification universelle : *les chiens aboient* n’est pas remis en question par l’existence d’un canidé aphone, voire d’un chien qui miaule. Dans un intéressant débat autour de N. Chomsky, James Higginbotham ([36]) dit :

> Dogs bark, cats meow, fire burns, and so forth. From the point of view of the full understanding, as we work up our system of the world, they are in fact extremely complicated, these generic sentences. And I do agree with the critical comment, made by Nick Asher among others, that the fashionable use of a made up "generic quantifier" for the purpose of giving them an interpretation is not an advance. Rather, what you have to do is take *dogs bark* (if x is a dog, x barks), and you have to delimit through our understanding of the world what it is that will count as a principled objection to *dogs bark*, and what it is that will count as simply an exception.

Nous pensons que notre approche répond au moins partiellement à cette remarque. La signification d'un énoncé n'est pas que "compositionnelle", elle lui vient aussi de sa capacité d'interaction avec d'autres énoncés, qui peuvent être des négations, des questions ou de manière générale des demandes de justifications.
Penser les phénomènes de langage à partir de la notion d'interaction dans le cadre ludique ouvre ainsi une nouvelle voie à la sémantique, sans doute plus empirique que la sémantique formelle classique (montagovienne principalement). Cela peut paraître paradoxal si on considère la ludique comme ayant un niveau d'abstraction élevé. Mais n'est-ce pas tout simplement que si un peu de théorie nous éloigne du concret, beaucoup de théorie nous y ramène ?

3.2.2 Eléments d'analyse syntaxique

L'analyse syntaxique dans le cadre de la Ludique n'a pas précisément été abordée en tant que telle. Nous avons simplement initié la représentation en Ludique d'une telle analyse, de telle sorte que nous puissions l'intégrer dans la théorie des dialogues avant que de considérer si elle permettait une analyse intéressante des phénomènes syntaxiques. Nous avons adopté, pour ce faire, la méthodologie de la Syntaxe Dynamique [71] qui propose de rendre compte de la syntaxe et de la sémantique des énoncés, à partir de leur analyse incrémentale. C'est-à-dire que l'analyse formelle des énoncés est obtenue par un traitement successif des mots au fur et à mesure qu'ils adviennent dans un énoncé jusqu'à fournir, au terme d'un calcul, l'analyse syntaxique et la représentation sémantique de l'énoncé [10]. Autrement dit, l'analyse incrémentale est une interaction entre des éléments lexicaux qui sont successivement reçus et une connaissance déjà construite : la grammaire.

Pour cette formalisation ludique de l'analyse incrémentale, nous représentons aussi bien les expressions syntaxique : les phrases, les constituants, que les objets associés aux différents éléments de l'analyse incrémentale : les mots reçus, la grammaire, les analyses partielles et finales, par des desseins.

Formalisation des énoncés

Comme le rappelle C. Rétoré [70], quel que soit le formalisme considéré, les analyses syntaxiques produisent comme résultats, des arbres. Nous pouvons alors démarrer une formalisation ludique des analyses syntaxiques, par une correspondance

10. Cette dernière est une sémantique guidée par la syntaxe, comme la grande majorité des représentations sémantiques en sémantique formelle.

naïve : l'analyse syntaxique d'une phrase est un dessein, sous sa forme “arbre de preuve”.

Exemple **20** *Considérons la phrase : “Pierre dort”. Son arbre d'analyse, au choix des catégories syntaxiques près, est le suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \textit{Pierre} & & \textit{dort} \\ | & & | \\ NP & & V_i \\ | & & | \\ GN & & GV \\ \backslash & & / \\ & S & \end{array}$$

On peut représenter en Ludique cet arbre d'analyse par le dessein suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}ierre\\ \vdots \\ \vdash pierre\end{array}}{\downarrow NP^{\perp} \vdash}}{\vdash GN}}{\downarrow GN^{\perp} \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}ort\\ \vdots \\ \vdash dort\end{array}}{\downarrow V_i \vdash}}{\vdash GV}}{\downarrow GV^{\perp} \vdash}}{\vdash S}$$

où $\mathcal{P}ierre$ et $\mathcal{D}ort$ sont des desseins positifs associés aux éléments lexicaux.

Pour cette correspondance naïve, nous adoptons un choix très simple de formalisation des constituants comme des formules logiques, c'est-à-dire des comportements dans le cas de la Ludique. Ainsi par exemple, la catégorie des groupes nominaux, dénotée **GN** est représentée par un ensemble de desseins basés sur GN [11] et une des déclinaisons de cette catégorie est la catégorie des noms propres : NP. Dans cette section nous utilisons les catégories syntaxiques S, GN, GV, NP, N det, V_t, V_i pour respectivement : phrase, groupe nominal, groupe verbal, nom propre, nom commun, déterminant, verbe transitif, verbe intransitif. Les opérations sur les comportements

11. Nous prenons quelques libertés avec la définition originelle des desseins, utilisant des noms plutôt que des séquences d'entiers pour dénoter les lieux. En fait, nous allons, ci-dessous, utiliser une variante une peu plus conséquente de la ludique : la c-ludique, et nous l'anticipons ici par quelques abus de notation.

correspondant aux connecteurs linéaires permettent de formuler très simplement les liens de décompositions des catégories entre elles :

$$\begin{array}{rcc} S = \downarrow GN \otimes \downarrow GV & & \\ GN = \downarrow GN_1 \oplus \downarrow GN_2 & GN_1 = \downarrow NP & GN_2 = \downarrow det \otimes \downarrow N \\ GV = \downarrow GV_1 \oplus \downarrow GV_2 & GV_1 = \downarrow V_i & GV_2 = \downarrow V_t \otimes \downarrow GN \end{array}$$

Par exemple, dans la grammaire très simple que nous considérons ici, un groupe verbal est soit un verbe intransitif, soit la donnée conjointe d'un verbe transitif et d'un groupe nominal.

La locativité n'est pas importante lorsque nous utilisons les desseins pour l'analyse syntaxique. Par contre la désignation des actions par les noms des catégories syntaxiques permet une lecture plus aisée et correspond davantage au fait que ce qui est en cause, dans la grammaire, c'est de repérer les régularités de décompositions des constituants syntaxiques, autrement dit de réaliser une classification reflétant ces décompositions. Pour ces raisons nous allons manipuler dans la suite de cette section, plutôt que leur représentation par des arbres de preuves, une variante computationnelle des desseins due à K. Terui [73]. Les c-desseins étendent les desseins ordinaires et ont une formulation semblable à celles des λ-termes : ils contiennent des interactions "fonction/argument" explicites [12], ils acceptent des variables comme sous desseins négatifs terminaux. Une analyse incrémentale est un calcul entre des objets déjà codés, catégorisés ; l'enjeu d'un tel calcul est de retrouver la décomposition d'une phrase parmi tous les codage de phrases possibles. La c-Ludique organise le calcul autour d'une sorte d'unification entre des noms, elle apparaît alors un bon candidat pour rendre compte de cette opération de filtrage de l'analyse incrémentale.

Nous présentons ici très succinctement les c-desseins. Ceux-ci sont définis en utilisant un ensemble $\mathcal{A}$ d'actions (a, k) où a est le nom de l'action et k son arité ; ces actions sont polarisées :
- les actions positives sont soit des constantes : ✠ (daîmon) ou Ω (divergence), soit des actions propres (dénotée par $\overline{a}$ lorsque $(a, k) \in \mathcal{A}$) ;
- les actions négatives sont soit des variables (x, y, z,...) ou des actions négatives propres (dénotées par $a(x_1, ..., x_n)$ lorsque $(a, k) \in \mathcal{A}$).
Les c-desseins positifs (dénotés par P) et négatifs (dénotés par N) sont co-inductivement définis par la grammaire suivante, où l'action a est d'arité k :

$$\begin{array}{rl} P = & \maltese \quad | \quad \Omega \quad | \quad N|\overline{a} < N_1, \dots N_k > \\ N = & x \quad | \quad \Sigma_{a \in \mathcal{A}} a(x_1, \dots, x_k).P_a \end{array}$$

12. Alors que les desseins ordinaires sont sans coupures et que les coupures ou interactions sont externes.

La coupure (ou interaction) est contenue dans les c-desseins positifs, elle est dénotée par le signe $|$. Un rédex existe dans un c-dessein positif $b(\vec{x}).P|\overline{a} < \vec{N} >$ lorsque $b = a$ et la règle de normalisation élémentaire est la suivante :

$$(a(x_1, \ldots, x_k).P)|\overline{a} < N_1, \ldots, N_k > \mapsto P[N_i/x_i]$$

Un exemple de c-desseins, est la traduction de l'analyse syntaxique de la phrase étudiée dans l'exemple 20 :

$$S_{pierre-dort} = t|\overline{s} <\downarrow_{(y)} .y|\overline{gn_1} <\downarrow_{(x)} .x|\overline{np} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre >>, \downarrow_{(y)} .y|\overline{gv_1} <\downarrow_{(x)} .x|\overline{v_i} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{D}ort >>>$$

pourvu que $\mathcal{P}ierre$ et $\mathcal{D}ort$ soient des c-desseins positifs.

Eléments lexicaux et mots

Nous désignons par le terme *mot*, aussi bien les expressions lexicales élémentaires que les expressions phonétiques qui leur correspondent. Les mots sont ainsi représentés dans un lexique par des c-desseins appartenant à (au moins une) une catégorie lexicale. A terme, ces desseins pourront être développés pour intégrer des éléments de sémantique lexicale et des éléments phonétiques. Pour la présentation minimale que nous faisons ici, nous ne précisons pas le contenu de ces desseins mais les dénotons par leur expression phonétique, comme par exemple : $\mathcal{P}ierre$, $\mathcal{D}ort$. Dans le lexique, ces éléments seront accessible uniquement par le biais de leur catégorie syntaxique. On manipulera comme c-desseins respectivement associés aux entrées lexicales *Pierre* et *dort*, les objets $x|\overline{np} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre >$ et $x|\overline{v_i} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{D}ort >$.

Pour marquer le passage entre la production d'un énoncé à partir de mots successivement prononcés et sa réception, au moyen d'une suite de mots successivement reçus, nous utilisons une action $\overline{m}/m$. Cette action permet de marquer le moment où, après qu'ils ont été émis par le producteur, les mots doivent être reconnus par le récepteur. C'est en fait la catégorie syntaxique des mots qui doit être reconnue car c'est elle qui va guider la reconstruction syntaxique et sémantique de l'énoncé, c'est-à-dire une analyse produite au terme d'une interaction. Ainsi, lorsqu'ils sont émis, les éléments du lexique, deviennent momentanément des mots, on manipulera par exemple : $m(x).[x|\overline{np} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre >]$.

L'analyse incrémentale

La grammaire est le moteur de l'analyse incrémentale. Nous en rendons compte par un c-dessein positif avec lequel vont interagir les mots qui arrivent successivement. Comme en Syntaxe Dynamique, les interactions successives entre le dessein-grammaire et les desseins mots produisent des analyses partielles. Lorsque tous les mots auront interagi, la forme normale du c-dessein résultant des interactions successives fournit l'analyse complète de l'énoncé.

Nous donnons l'allure générale de ce c-dessein grammaire $\mathcal{G}$ avant d'étudier un exemple.

$$\mathcal{G} = u|\overline{m} < \mathfrak{c}_0(\vec{x}).P_0 + \mathfrak{c}_1(\vec{x}).P_1 + \cdots > .$$

Ce dessein attend l'interaction avec un mot, c'est-à-dire un c-dessein négatif $m_{(x)}.M_x$; l'interaction sera activée en substituant dans $\mathcal{G}$ la variable u par ce mot, ce qui se note : $\mathcal{G}[m_{(x)}.M_x/u]$. Selon la catégorie syntaxique $\mathfrak{c}_i$ de ce premier mot , l'interaction va se poursuivre avec $\mathfrak{c}_i(\vec{x}).P_i$. Si le premier mot constitue à lui tout seul une phrase, alors la normalisation va donner une forme normale correspondant à l'analyse de la phrase constituée par cet unique mot. Sinon, la forme normale de $\mathcal{G}[m_{(x)}.M_x/u]$ est une analyse partielle qui attend un second mot, et ainsi de suite. Nous décrivons la construction d'une telle grammaire sur un exemple.

Exemple **21** *L'énoncé reçu est :* Pierre dort.

Le récepteur reçoit un premier mot : *Pierre*, qui va interagir avec la grammaire. On a donc l'interaction suivante :

$$\mathcal{G}[\mathcal{M}_{pierre}/u] = (m(x).[x|\overline{np} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre >])|\overline{m} < \mathfrak{c}_0(\vec{x}).P_0 + \mathfrak{c}_1(\vec{x}).P_1 + \cdots > .$$

Où $\mathcal{M}_{pierre}$ est l'élément lexical *Pierre* encapsulé comme mot, c'est-à-dire :

$$m(x).[x|\overline{np} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre >]$$

Puisque les actions de polarités opposées coïncident (m et $\overline{m}$), on a un rédex et la première étape de réduction donne :

$$\mathcal{G}[\mathcal{M}_{pierre}/u] \mapsto (\mathfrak{c}_0(\vec{x}).P_0 + \mathfrak{c}_1(\vec{x}).P_1 + \dot{)}|\overline{np} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre >]$$

Dans le dessein grammaire, il y a l'anticipation de toutes les phrases correctes commençant par un élément de catégorie NP, c'est-à-dire qu'il existe un i tel que $\mathfrak{c}_i(\vec{x}).P_i = np(y).P_{np}$, où le c-dessein P_{np} représente la continuation des analyses partielles, parmi lesquelles celles qui attendent un second et dernier mot de la catégorie “verbe intransitif”. C'est-à-dire que la grammaire $\mathcal{G}$ contient comme sous-dessein, le dessein suivant :

$$P_{np} = t|\overline{m} < v_{i(v)}.P_{v_i} + \cdots > \text{ avec :}$$

$$P_{v_i} = u|\overline{s} <\downarrow_{(w)} .w|\overline{gn_1} <\downarrow_{(x)} .x|\overline{np} < y >, \downarrow_{(x)} .x|\overline{gv_1} <\downarrow_{(x)} .x|\overline{v_i} < v >>$$

C'est-à-dire l'analyse d'une phrase constituée d'un nom propre et d'un verbe intransitif. On arrive à cette analyse car on a reconnu un nom propre et un verbe intransitif.

En outre les étapes successives de normalisation auront permis de substituer respectivement, aux variables y et v les desseins correspondant à l'entrée lexicale qui a été reconnue comme "nom propre" et à l'entrée lexicale qui a été reconnue comme "verbe intransitif".

Reprenons l'interaction considérée dans l'exemple, nous en étions à l'étape de réception du premier mot. La forme normale du terme $\mathcal{G}[\mathcal{M}_{pierre}/u]$ correspond à une analyse partielle : un c-dessein qui attend encore un mot. Dans ce dessein, une variable a déjà été substituée : là où on attendait un nom propre, la variable a été remplacée par l'entrée lexicale *Pierre*. La réception du second mot donne lieu à une interaction entre celui-ci et l'analyse partielle. Comme précédemment, nous rendons compte de cette interaction par la substitution du c-dessein associé à l'entrée lexicale *Dort*, encapsulée comme mot à la variable de tête t du dessein "analyse partielle " .

$$(t|\overline{m} < v_i(v).P_{v_i}[\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre/y] + \cdots >)[\mathcal{M}_{dort}/t]$$

Après normalisation on obtient la forme normale suivante, correspondant à l'analyse syntaxique de la phrase "Piere dort" :

$$u|\overline{s} <\downarrow_{(w)} .w|\overline{gn_1} <\downarrow_{(x)} .x|\overline{np} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{P}ierre >>, \downarrow_{(x)} .x|\overline{gv_1} <\downarrow_{(x)} .x|\overline{v_i} <\downarrow_{(z)} .\mathcal{D}ort >>>$$

3.2.3 Etude d'un dialogue élémentaire

Nous sommes maintenant en mesure d'illustrer la théorie des dialogues esquissée dans la section 3.1.3. La formalisation des différentes dimensions linguistiques des énoncés n'est pas développée au point que nous puissions présenter le traitement complet d'un dialogue. Néanmoins, en mettant bout à bout les différents éléments déjà considérés, nous pouvons donner une idée un peu plus parlante de la théorie du dialogue que nous prétendons développer. Nous pourrons alors souligner les outils d'analyse que l'on peut en attendre. Dans cette section, nous allons considérer un dialogue très simple, puis quelques unes de ses variations.

Exemple **22** *Nous considérons le dialogue suivant entre deux protagonistes A et B :*
– Qui a écrit à Paul ?
– Pierre.

Nous considérons trois étapes dans ce dialogue. La première étape correspond à la question posée par A à B. La deuxième étape est la réponse donnée par B. La troisième étape n'est pas manifeste dans le dialogue, néanmoins on peut considérer que, le dialogue s'étant déroulé de façon standard, les interlocuteurs peuvent considérer qu'il est terminé et qu'il s'est correctement déroulé : il n'a pas donné lieu à un malentendu.

1. La première étape correspond à la première intervention, due à A et dont la manifestation phonétique est `Qui a écrit à Paul ?`. Nous noterons e_1 cet énoncé, $\mathcal{E}_A^1$ et $\mathcal{R}_A^1$ dénotent respectivement deux parties de la base cognitive de A : celle des engagements et celle des éléments linguistiques, qui sont mobilisées par A, à la première étape du dialogue pour produire l'énoncé e_1.

   L'ensemble d'engagements $\mathcal{E}_A^1$

   Cet ensemble contient les deux propositions suivantes :
   - *Quelqu'un a écrit à Paul.* (P_1)
   - *Il y a quelqu'un qui s'appelle Paul et que les interlocuteurs A et B connaissent tous les deux..* (P_2)

   Parmi les desseins disponibles dans $\mathcal{E}_A^1$ et qui sont relatifs à ces propositions, nous distinguerons :
   - un dessein $\mathcal{P}aul$ qui, pour simplifier, correspondra en même temps à l'entrée lexicale du nom propre *Paul* et aux éléments de connaissances relatifs à l'individu *Paul*
   - et un dessein $\mathcal{FL}_{e_0}$ correspondant à la forme logique de l'énoncé *quelqu'un a écrit à Paul* (e_0),. Ces deux desseins seront directement mobilisés dans le record des éléments linguistiques utilisés par A lors de la première étape du dialogue.

   Le record $\mathcal{R}_A^1$

   Les éléments linguistiques sont restitués dans un record $\mathcal{R}_A^1$

$$\mathcal{R}_A^1 = \begin{pmatrix} \mathcal{P}aul \\ \mathcal{D}_{a\ ecrit\ a} \\ \mathcal{FL}_{e_0} \\ \mathcal{FL}_{e_1} \\ \mathcal{AL}_{e_1} \\ \texttt{qui a ecrit a Paul}? \end{pmatrix}$$

   où les desseins du record peuvent dépendre des desseins précédents (ordonnés du haut vers le bas). Par exemple le dessein $\mathcal{FL}_{e_0}$ (la forme logique de e_0) va dépendre du dessein $\mathcal{P}aul$; le dessein $\mathcal{FL}_{e_1}$ va dépendre du dessein $\mathcal{FL}_{e_0}$.

   — En tant qu'acte de langage, l'énoncé e_1 : *Qui a écrit à Paul ?* est une question-wh [13]. Nous verrons plus précisément dans la section suivante

13. Ou question ouverte, qui à la différence des questions fermées n'offre pas un ensemble limité de réponses possibles connues a priori.

comment nous rendons compte de certains actes de langage ; pour l'instant nous introduisons seulement un codage : wh pour les question-wh, as pour les assertions, Q pour les questions fermées, R pour les réponses, etc...). Ce codage est utilisé pour préciser les actions dans les desseins associés aux actes de dialogue.
Le dessein suivant $\mathcal{AL}_{e_1}$ est un élément du record $\mathcal{R}_A^1$:

$$\mathcal{AL}_{e_1} = (+, AL, \{wh\})$$

— La forme logique de l'énoncé e_1 est un peu plus compliquée. Elle est construite à partir de la forme logique d'un énoncé basique (svo), dénoté e_0 et qui est ici `Quelqu'un a écrit à Paul`.
— Le dessein $\mathcal{FL}_{e_0}$, associé à la forme logique de l'énoncé e_0 est le c-dessein suivant :

$$\mathcal{FL}_{e_0} = t|\overline{s_1} <\uparrow |\overline{agent} < X >, \uparrow |\overline{action_2} <\uparrow |\overline{v} < \mathcal{D}_{a-ecrit-a} >, \uparrow |\overline{but} < \mathcal{P}aul >>>$$

Cette forme logique ou représentation sémantique sous forme de c-dessein est guidée par l'analyse syntaxique des phrases en Ludique que nous avons présentée dans la section 3.2.2. Ici le c-dessein correspondant à l'analyse syntaxique de e_0 est

$$t|\overline{s_1} <\uparrow |\overline{gn} < X >, \uparrow |\overline{gv_2} <\uparrow |\overline{v_t} < \mathcal{D}_{a-ecrit-a} >, \uparrow |\overline{gn} < \mathcal{P}aul >>>$$

$\mathcal{FL}_{e_0}$ possède le même squelette de dessein que celui modélisant l'analyse syntaxique de la phrase, sauf que les catégories sont sémantiques : *agent* ou *but* à la place de *gn*, *action2* (binaire) à la place du gv_2.
— Il s'agit ensuite de décrire comment la forme logique associée à l'énoncé e_1 : *Qui a écrit à Paul ?* est dérivée de celle associée à l'énoncé e_0. On pose :

$$\mathcal{FL}_{e_1} = y|\overline{\uparrow} < r(x).\mathcal{FL}_{e_0}(x) >$$

C'est-à-dire qu' on explicite le fait qu'une question-wh attend une réponse. On utilise, pour construire ce dessein, une action négative r. Dans le dessein $\mathcal{FL}_{e_1}$, $r(x)$ prévoit la place pour enregistrer la réponse à l'aide d'une interaction ; cette réponse est pour l'instant inconnue, on utilise alors une variable : x, pour indiquer la place que cette réponse devra occuper.
Lorsqu'une réponse sera donnée, par exemple sous la forme d'un énoncé e_2 : `Pierre`. La forme logique de ce dernier énoncé sera le dessein :

$$\mathcal{FL}_{e_2} = \uparrow |\overline{r} < \mathcal{P}ierre >$$

L'interaction entre la question $\mathcal{FL}_{e_1}$ et la réponse $\mathcal{FL}_{e_2}$ est interne au dessein $\mathcal{FL}_{e_1}[\mathcal{FL}_{e_2}/y]$ qui se réduit en

$$t|\overline{s_1} <\uparrow|\overline{agent} < \mathcal{P}ierre >, \uparrow|\overline{action_2} <\uparrow|\overline{v} < \mathcal{D}_{a-ecrit-a} >, \uparrow|\overline{but} < \mathcal{P}aul >>>$$

C'est-à-dire la forme logique de l'énoncé : *Pierre a écrit à Paul.*

Le premier acte de dialogue

Nous terminons l'analyse de cette première étape du dialogue en indiquant ce qui se passe au niveau de la surface du dialogue. Nous interprétons le fait de poser une question par un simple acte de dialogue positif. Ici, cet acte de dialogue positif est obtenu par une délocalisation du dessein précisant la nature de l'acte de langage dans $\mathcal{R}^1_A$ sur le lieu δ du dialogue et en ajoutant en quatrième élément l'expression phonétique de l'énoncé :

$$(+, \delta, \{wh\}, \texttt{qui a ecrit a Paul}?)$$

2. Passons alors à la deuxième étape du dialogue. La réponse de l'interlocuteur B est l'énoncé : `Pierre`, que l'on notera e_2. Il n'y a pas de divergence manifeste, nous sommes dans le cas le plus standard, à une question-wh une réponse est directement donnée, sans demande de précisions ou d'explicitations. Ainsi, on peut poser qu'à l'étape 2, le contexte de B, qui était vide au début de l'étape 1, contient maintenant les mêmes éléments que celui de A. C'est-à-dire que Pierre possède bien dans sa base cognitive l'accès aux propositions P_1 et P_2, et celles-ci deviennent des engagements de B si celui-ci reçoit l'intervention précédente de A sans diverger. B reconnaît un individu nommé *Paul* dont il partage la connaissance avec A ; B sait également que Paul a reçu une lettre. En outre B sait qui a écrit à Paul. La partie "engagements de son contexte est alors décrite par l'ensemble suivant $\mathcal{E}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{B}} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ où P_3 correspond à la proposition : *Pierre a écrit à Paul* et P_4 correspond à la proposition *Il y a quelqu'un, que nous (A et B) connaissons tous les deux et qui se prénomme Pierre.*
   La proposition P_3 est enregistrée sous forme d'un dessein correspondant à une forme logique $\mathcal{FL}_{e_3}$ qui utilise le dessein $\mathcal{P}ierre$.
   Et le record $\mathcal{R}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{B}}$ est de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{P}aul \\ \mathcal{P}ierre \\ \mathcal{D}_{ecrit-a} \\ \mathcal{FL}_{e_3} = t|\overline{s_1} <\uparrow|\overline{agent} < \mathcal{P}ierre >, \uparrow|\overline{act} <\uparrow|\overline{v} < \mathcal{D}_{aecrit-a} >, \uparrow|\overline{but} < \mathcal{P}aul > \\ \mathcal{FL}_{e_2} = \uparrow.|\overline{r} < \mathcal{P}ierre > \\ \mathcal{AL}_{e_2} = (+, AL, \{R\}) \\ \texttt{Pierre} \end{array}\right)$$

On pourrait montrer comment le dessein $\mathcal{FL}_{e_2}$ est calculé à partir de la forme logique $\mathcal{FL}_{e_3}$ (*Pierre a écrit à Paul*). C'est le résultat d'une interaction entre $\mathcal{FL}_{e_3}$ et un *filtre* (un espèce de fax) qui extrait l'élément de catégorie `acteur` de $\mathcal{FL}_{e_3}$ et l'encapsule sous une catégorie r pour constituer une réponse.

Enfin, l'**acte de dialogue** produit par B est

$$(+, \delta.wh, \{R\}, \texttt{Pierre})$$

Il est obtenu par une délocalisation de $\mathcal{AL}_{e_2}$ vers le lieu disponible pour B dans le dialogue en cours, en y ajoutant l'expression phonétique `Pierre`.

3. La troisième étape n'est pas manifeste dans le dialogue, néanmoins on peut considérer que, le dialogue s'étant déroulé de façon standard, les interlocuteurs peuvent considérer qu'il est terminé. Le contexte C_A^3 est augmenté de la réponse reçue par A, c'est-à-dire $\mathcal{E}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{3}} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

   Il y a enfin un troisième **acte de dialogue** de A qui est $(\maltese, \epsilon)$. En résumé, le dialogue vu de A est

$$(+, \lambda, \{wh\}, phon_{e_1})(-, \lambda.wh, \{R\}, phon_{e_2})(\maltese, \epsilon)$$

Les éléments formels du dialogue de l'exemple 22

— Surface du dialogue :

Etapes	Actes dial. de A	Actes dial de B
1	$(+, \lambda, \{wh\}, Qui\ a\ ecrit\ a\ paul)$	
2		$(-, \lambda, \{wh\}, Qui\ a\ ecrit\ a\ paul)$ $(+, \lambda.wh, \{R\}, Pierre)$
3	$(-, \lambda.wh, \{R\}, Pierre)$ $(\maltese, `\epsilon')$	

— Contextes du dialogue :

Etapes	C_A	C_B
1	$\mathcal{E}_A^1 = \{P_1, P_2\}$ $\mathcal{R}_A^1$	$\mathcal{E}_B^1 = \{\emptyset\}$
2	$\mathcal{E}_A^2 = \{P_1, P_2\}$	$\mathcal{E}_B^2 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ $\mathcal{R}_B^2$
3	$\mathcal{E}_A^3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	$\mathcal{E}_B^3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

Des dialogues alternatifs

Considérons maintenant les (débuts de) dialogues suivants entre A et B :

EXEMPLE **23** – *Qui a écrit à Paul ?*
– *Ah ? Paul a reçu une lettre ?*

EXEMPLE **24** – *Qui a écrit à Paul ?*
– *Quel Paul ?*

Dans les deux cas, la première étape, c'est-à-dire la question posée par A est formalisée exactement comme précédemment. Ensuite, dans l'exemple 23 comme dans l'exemple 24, l'interlocuteur B ne reçoit pas parfaitement cette intervention. Dans l'exemple 23, l'interlocuteur B ne peut pas activer la proposition P_1 : *Quelqu'un a écrit à Paul.* et l'utiliser dans la deuxième étape, car visiblement cette proposition n'est pas présente dans sa base cognitive au début du dialogue. Dans l'exemple 23, c'est la proposition P_2 : *Il y a quelqu'un qui s'appelle Paul et que nous connaissons tous les deux.* qui n'est pas dans la base cognitive de l'interlocuteur B. Dans les deux cas, la réaction de l'interlocuteur B est alors de “réparer” cette non correspondance des contextes. Toutefois, le parallèle entre les deux situations s'arrête là.

— Dans le premier dialogue, l'interlocuteur B, à partir du dessein $\mathcal{P}aul$, et de compétences syntaxico/sémantiques élémentaires peut recevoir sans difficultés l'intervention de A. Et finalement, à la réception de cette intervention, la partie engagements $\mathcal{E}_B^2$ de son contexte devient $\mathcal{E}_B^2 = \{P_1, P_2\}$.
  La question fermée *Ah, Paul a reçu une lettre ?*, par laquelle B initie un nouveau sous-dialogue, ancré sur γ, est surtout la manifestation qu'il enregistre cette information nouvelle pour lui. Que A réponde explicitement ou pas, le dialogue peut s'arrêter sur une convergence.
  Précisément nous avons :
  — Les contextes du dialogue23 sont :

Etapes	C_A	C_B
1	$\mathcal{E}_A^1 = \{P_1, P_2\}$ $\mathcal{R}_A^1$	$\mathcal{E}_B^1 = \{\emptyset\}$
2	$\mathcal{E}_A^2 = \{P_1, P_2\}$	$\mathcal{E}_B^2 = \{P_1 P_2\}$ $\mathcal{S}_B^2$
3	$\mathcal{E}_A^3 = \{P_1, P_2\}$	$\mathcal{E}_B^3 = \{P_1, P_2\}$

  L'intervention de B est concomittante à l'ajout à son contexte de la proposition P_1.

— Et le record $\mathcal{S}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}}$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}aul \\ \mathcal{D}_{a-ecrit-a} \\ \mathcal{FL}_{e_4} = t|\overline{s_1} <\uparrow |\overline{agent} < X >, \uparrow |\overline{action_2} <\uparrow |\overline{v} < \mathcal{D}_{a-ecrit-a} >, \overline{but} < \mathcal{P}aul > \\ \mathcal{AL}_{e_4} = (+, AL, \{Q\}) \\ \texttt{Ah Paul a recu une lettre}? \end{pmatrix}$$

La forme logique de *Paul a reçu une lettre* est ici la même que celle de *Quelqu'un a écrit à Paul.* Une proposition que B est en train d'intégrer à sa base cognitive.

— Surface du dialogue de l'exemple 23 :

Etapes	Actes dial. de A	Actes dial de B
1	$(+, \lambda, \{wh\}, Qui\ a\ ecrit\ a\ paul)$	
2		$(-, \lambda, \{wh\}, Qui\ a\ ecrit\ a\ paul)$ $(+, \gamma, \{Q\}, Ah\ paul\ a\ recu\ une\ lettre)$
3	$(-, \gamma, \{Q\}, Ah\ paul\ a\ recu\ une\ lettre)$ $(\maltese, oui)$	

Même si la réponse n'est pas explicitement donnée, l'interaction converge :

$$\dfrac{\dfrac{\lambda.wh \vdash}{\vdash \lambda} \qquad \dfrac{\dfrac{\gamma.Q \vdash \lambda.wh}{\vdash \lambda.wh, \gamma}}{\lambda \vdash \gamma} \qquad \dfrac{\dfrac{\xrightarrow{\maltese}}{\vdash \gamma.Q}}{\gamma \vdash}}{}$$

— Dans le second dialogue, B ne peut pas recevoir parfaitement l'intervention de A. En particulier, il ne peut pas recevoir et enregister les élements du record $\mathcal{R}_A^1$. Ceux-ci sont construits à partir d'un dessein $\mathcal{P}aul$ que B ne possède pas. Et il ne peut pas activer des propositions qui ne sont pas dans sa base cognitive. La partie engagements $\mathcal{E}_B^2$ de son contexte s'enrichit de deux propositions P_3 : *Quelqu'un, qui s'appelle Paul, a reçu une lettre.* et P_4 : *Je ne reconnais pas le Paul dont A parle.* B est obligé d'initier un *nouveau* dialogue (ancré en δ) afin de compléter son contexte et partager les mêmes informations que A. Il le fait au moyen d'une question-wh dont l' énoncé est e_5 : *Quel Paul ?*. S'il parvient à compléter son contexte, il sera en mesure d'envisager une poursuite du dialogue ancré sur λ que A avait initié à l'étape 1.

— Contextes dans l'exemple 24 :

Etapes	C_A	C_B
1	$\mathcal{E}_A^1 = \{P_1, P_2\}$ $\mathcal{R}_A^1$	$\mathcal{E}_B^1 = \{\emptyset\}$
2	$\mathcal{E}_A^2 = \{P_1, P_2\}$	$\mathcal{E}_B^2 = \{P_3, P_4\}$ $\mathcal{T}_B^2$
3	$\mathcal{E}_A^3 = \{P_1, P_2, P_4\}$	$\mathcal{E}_B^3 = \{P_3, P_4\}$

— Le record $\mathcal{T}_B^2$ utilisé par B est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{a-ecrit-a} \\ \mathcal{FL}_{e_6}[X,Y] = t|\overline{s_1} <\uparrow |\overline{agent} < X >, \uparrow |\overline{action_2} <\uparrow |\overline{v} < \mathcal{D}_{a-ecrit-a} >, \uparrow \overline{but} < Y > \\ \mathcal{FL}_{e_5} = z|\overline{\uparrow} < r(Y).\mathcal{FL}_{e_6}[Y] > \\ \mathcal{AL}_{e_4} = (+, AL, \{wh\}) \\ \texttt{Quel Paul ?} \end{pmatrix}$$

La situation est différente des précédentes : le record transmis par l'acte de dialogue d'un locuteur n'est pas parfaitement reçu par son interlocuteur. Ce dernier a besoin de compléter ses connaissances avant de pouvoir éventuellement pousuivre le dialogue initié précédemment. S'il reçoit la réponse à sa question, il pourra mettre à jour son contexte en substituant à la forme logique $\mathcal{FL}_{e_6}$ la forme logique $\mathcal{FL}_{e_0}$ partagée avec A.

— Surface du dialogue de l'exemple 24 :

Etapes	Actes dial. de A	Actes dial de B
1	$(+, \lambda, \{wh\}, Qui\ a\ ecrit\ a\ paul)$	
2		$(-, \lambda, \{wh\}, Qui\ a\ ecrit\ a\ paul)$ $(+, \delta, \{wh\}, Quel\ Paul\ ?)$
3	$(-, \delta, \{wh\}, Quel\ Paul\ ?)$	

L'interaction n'est pas terminée.

$$\dfrac{\dfrac{\lambda.wh \vdash}{\vdash \lambda} \qquad \dfrac{\dfrac{\delta.wh \vdash \lambda.wh}{\vdash \lambda.wh, \delta}}{\lambda \vdash \delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash \delta.wh}}{\delta \vdash}}{}$$

Quelques remarques

— Le dédoublement des contextes, c'est-à-dire des éléments des bases cognitives qui sont mobilisés par chacun des locuteurs lorsqu'il participe au dialogue, est central dans cette théorie du dialogue. C'est ce qui permet de prendre en compte les échecs de communication et les réparations dans les dialogues ; c'est d'ailleurs la même méthodologie qui a été choisie par Ginzburg [31] qui introduit la mise à jour des contextes au fur et à mesure du déroulement du dialogue.

Nous voulons souligner ici plusieurs traits constitutifs de la théorie ludique qui font, qu'à notre avis, elle constitue un cadre formel pertinent pour rendre compte d'une telle méthodologie :

- Tout d'abord, la Ludique suggère de manipuler des desseins, associés aux divers éléments d'un ensemble d'engagements, alors que, habituellement, c'est un unique objet formel qui joue ce rôle. Par exemple, les propositions sur lesquelles un locuteur s'engage, sont souvent formalisées par des formules logiques. Or un dessein n'est qu'une des instances d'un objet,. Typiquement, un dessein n'est qu'une des tentatives de preuves d'une proposition. Ceci offre une souplesse susceptible de rendre compte finement des situations de communication. Par exemple il suffit qu'il existe un dessein associé à l'individu *Paul* dans chacune des bases cognitives des deux locuteurs, pour que le dialogue se déroule correctement, même si les desseins ne sont pas exactement les mêmes. Ceci intervient encore plus crucialement dans la formalisation des dialogues argumentatifs. C'est souvent sous forme de propositions logiques que l'on rend compte des thèses avancées lors d'une controverse, surtout lorsqu'on souhaite restituer la dimension inférentielle de l'argumentation. En manipulant des desseins plutôt que des formules, on peut rendre compte de divergences et de réparations sans recourir à la logique modale et à la sémantique des mondes possibles qui lui est très souvent associée.
- Ensuite, la locativité constitutive des objets de la Ludique simule de façon très simple le fait que, pendant un dialogue, il y a une transmission, c'est-à-dire un déplacement d'une base cognitive à une autre, des éléments cognitifs qui sont en jeux dans la communication. Les éléments sont délocalisés depuis une base cognitive jusqu'au lieu du dialogue en cours, puis du dialogue en cours jusqu'à une base cognitive. C'est en explicitant ce déplacement que nous pouvons pointer des réussites ou des échecs de ces délocalisations. En outre, nous pouvons laisser prendre en charge par les opérations de délocalisation des transformations avérées mais inintéressantes pour l'analyse du dialogue. Par exemple, le changement nécessaire de pronom personnel dans la syntaxe d'énoncés sur lesquels les locuteurs s'engagent, *Tu connais machin et je le connais aussi.* versus *Je connais machin et tu le connais aussi.* Dans un développement du module syntaxique de la formalisation des dialogues, il sera assez facile de formaliser de telles opérations standard.

— Soulignons enfin l'importance de considérer les contextes à côté de la succession d'actes de dialogue. Dans les variantes 23 et 24 de dialogues initiés par le même énoncé `Qui a écrit à Paul ?`, l'ajout des contextes est essentiel pour discriminer les deux situations. En tant qu'interaction entre desseins de dialogues, les deux exemples ne sont pas différents. C'est la donnée des contextes qui permet de conclure que le premier peut se résoudre en une convergence immédiate alors que le second ne le peut pas. A l'étape 3 les contextes sont identiques dans le premier dialogue, mais ne le sont pas dans le second.

3.3 Etude de l'argumentation

En collaboration avec Christophe Fouqueré nous avons proposé une étude des dialogues argumentatifs en Ludique [26], [28]. Notre modélisation ludique utilise les objets "primitifs" de l'interaction, en amont de la reconstruction de la logique, ce qui explique à nos yeux sa pertinence pour l'étude des dialogues en général et de l'argumentation en particulier. Les études portant sur l'argumentation, que ce soit pour pouvoir déterminer la validité des arguments ou pour formaliser les actes de langage utilisés, se sont naturellement placées dans le cadre de la logique. En effet, pour formaliser l'idéal d'une démarche argumentative, le concept de *preuve formelle* semble s'imposer. Mais le concept de preuve formelle ne s'applique bien que dans le domaine pour lequel il est défini : la logique mathématique. Hors de ce domaine, lister de façon exhaustive toutes les étapes d'un raisonnement semble rédhibitoire, associer de façon univoque une proposition à tout énoncé semble trop réducteur. Ainsi, la notion de *preuve formelle* est à la fois trop exigeante et trop réductrice pour rendre compte d'une argumentation. On peut s'entendre sur la validité d'un énoncé avancé au cours d'une controverse, sans nécessairement l'avoir complètement déterminé en tant que proposition formelle, mais simplement parce qu'on a pris acte de la pertinence de son rôle au sein de la controverse elle-même, on peut concéder la justesse d'une position sans avoir nécessairement exploré tous ses soubassements, un contradicteur peut *gagner* un débat, simplement parce que son adversaire rend les armes. La Ludique qui manipule en quelque sorte des "proto-preuves" et des "proto-formules" est un cadre assez général pour rendre compte de ces approximations, de ces ambiguïtés inhérentes aux dialogues en langage naturel. Elle fournit un même cadre pour l'analyse proposée dans ce chapitre de deux cas extrêmes de dialogue argumentatif. Les stratagèmes de Schopenhauer dont nous avons ébauché la formalisation en section 3.1.2 sont des manœuvres permettant d'orienter le dialogue vers la fin désirée : gagner la controverse. Il peut s'agir de noyer l'opposant sous une masse d'arguments, comme de l'entraîner insidieusement à une certaine conclusion, ou d'utiliser des énoncés contenant des présuppositions cachées, ou encore de jouer sur les mots. Avec les stratagèmes, toute démarche dialogique est licite, a contrario le domaine juridique fournit un cadre fortement réglementé. D'une part, la loi s'y applique qui définit des termes du langage, qui codifie les arguments acceptables (et la loi s'impose, donc ne peut être réfutée). D'autre part, un juge est à la fois scrutateur du dialogue et celui qui clôt la dispute. Scrutateur, le juge peut bloquer une argumentation en rappelant la loi ou plus généralement des éléments qui doivent s'imposer à tous. Il est aussi celui qui tranche une dispute en déterminant le "gagnant", en fait il organise l'enchaînement d'interventions de telle sorte qu'une des parties aboutit à une impasse. Enfin, le cadre juridique est censé permettre à chaque partie de répondre à chaque attaque ou contre-argumentation : les interventions y sont en général élémentaires.

3.3.1 Les dialogues argumentatifs

Parmi les dialogues, les dialogues argumentatifs présentent certaines particularités. En particulier les actes de langage qui les composent sont en nombre restreint. Sans être exhaustif, nous pouvons en citer quelques-uns : assertions, argumentations, refus, concessions ... Nous retrouverons ces divers cas dans les dialogues argumentatifs, pourtant de type très éloigné l'un de l'autre, que sont les controverses de Schopenhauer et les controverses juridiques. En outre, une notion de "gain" apparaît, qui semble spécifique des dialogues argumentatifs. Lorsqu'un dialogue est poursuivi pour échanger une information, partager une connaissance, un ressenti, la question de savoir si l'un des locuteurs *gagne* est tout à fait hors de propos. Mais la question de savoir quel est le locuteur qui *a raison* au terme d'une controverse est essentielle, c'est elle qui détermine le type des actes de langage avancés par les locuteurs. Ainsi un dialogue argumentatif se distingue des dialogues ordinaires en ce sens que deux thèses s'y opposent, chaque partie ayant sa thèse à défendre ou avancer. Le dialogue est alors principalement un échange d'arguments et de contre-arguments avec pour unique objectif que le dialogue se termine quand une thèse est considérée *gagnante*. C'est sans doute une des raisons pour lesquelles les études portant sur l'argumentation, que ce soit pour pouvoir déterminer la pertinence des arguments, pour formaliser les actes de langage utilisés ou pour rendre compte de cette notion de gain, se sont naturellement placées dans le cadre de la logique (par exemple [46]) et/ou de la théorie des jeux ([75, 58, 64, 57, 66] entre autres). Dans le modèle des jeux, deux joueurs cherchent un gain en appliquant alternativement des règles précises. Le cadre des dialogues argumentatifs s'en rapproche : deux joueurs cherchent à avoir raison et la dispute se termine par une victoire de l'un ou l'autre. Il y a pourtant deux différences notables entre le cadre argumentatif et le modèle des jeux. D'une part, la seule règle qui vaille dans le cadre argumentatif est celle liée au maintien du dialogue lui-même : les interventions doivent être dans le fil du sujet débattu. Il n'existe pas a priori d'autres règles limitant les coups possibles. D'autre part, dans la plupart des jeux, dont les jeux théoriques, chaque joueur joue un coup élémentaire. Dans le cadre des dialogues, une intervention peut contenir plusieurs actes de langages : par exemple un seul tour de parole peut contenir à la fois des concessions, des contre-argumentations, comme nous le verrons dans la controverse juridique traitée dans la section 3.3.2.

Afin de rendre compte, dans notre contexte, de la nature des dialogues argumentatifs, il est nécessaire de préciser ce qu'est le "gain" d'une dispute. Dans un dialogue argumentatif, un des locuteurs devient "perdant" dans deux cas de figure : il abandonne la dispute en concédant sa défaite de façon prématurée alors que des contre-arguments n'ont pas encore été utilisés, ou bien il y est obligé, ayant épuisé tous les arguments à sa disposition. Ce deuxième cas est celui que Schopenhauer considère dans sa description des stratagèmes, il le décrit en disant que le "gagnant" a eu le dernier mot. C'est aussi la même situation de défaite qui apparaît dans le cadre juridique (quitte à ce que ce soit le juge qui guide la dispute vers le dénouement). La fin d'une dispute correspond aux deux cas possibles de terminaison du processus d'interaction : s'il y a divergence, la question du gain ne peut se poser, sinon c'est qu'une action daïmon a été avancée, celui des deux interlocuteurs qui l'utilise est *ipso facto* le "perdant". Il est intéressant de considérer ce que sont les lieux disponibles au moment où un des locuteurs utilise cette action daïmon : soit cet ensemble de lieux est vide et c'est que son interlocuteur aura "eu le dernier mot", soit cet ensemble n'est pas vide et il reste des lieux sur lesquels une suite de discussion pourrait être ancrée mais l'interlocuteur préfère arrêter là le dialogue. Il s'agit ici d'une notion de "gagnant" locale à un dialogue particulier : rien ne dit que, avec un même dessein du "gagnant" mais un autre dessein pour l'opposant, l'interaction aurait eu la même conclusion.

Nous précisons également, en termes d'actes de dialogue, des types d'actes de langage présents dans les dialogues argumentatifs et étudiés comme tels dans la littérature.

— **Avancer une thèse** (affirmer, clâmer, asserter). C'est poser un fait sur lequel l'interlocuteur peut poursuivre le dialogue en le niant, en le concédant, ou en demandant des explications complémentaires. Le fait peut être ce qui constitue la thèse initiale du dialogue, ce peut être aussi un élément complémentaire sur une discussion déjà entamée. Dans le cadre juridique, le fait posé est unique. Dans un autre cadre, on peut affirmer une conjonction de plusieurs propositions en même temps, ou susciter une reprise de l'interlocuteur sur une seule des parties de ce qu'on avance, quitte à ce qu'il revienne ensuite sur cette affirmation pour un autre traitement.

Cet acte de langage est représenté par un unique acte de dialogue positif $(+, \xi, I, e)$, qui peut être initial ou bien justifié par un acte de dialogue précédent introduisant un des thèmes de l'affirmation. Lorsque cet acte de langage est "pur" (il n'est pas "mélangé" à d'autre actes de langage, comme par exemple des justifications, dans l'énoncé qui le porte), la ramification I associée est un singleton.

— **Argumenter**. C'est poser des faits qui servent de prémisses argumentatives et dans le même temps l'articulation entre ces prémisses et la conclusion (le fait sur lequel on argumente, qui doit être un lieu ouvert à la discussion). Il peut s'agir, par exemple, de l'affirmation d'une thèse A en la justifiant par B et $B \Rightarrow A$, les faits avancés dans ce cas sont les deux éléments B et $B \Rightarrow A$. L'emploi, au cours d'un dialogue, d'une règle de loi rentre par exemple dans ce cadre.
Cet acte de langage est aussi représenté par un simple acte de dialogue positif propre $(+, \xi, I, e)$. Cette fois-ci, la ramification (donc les lieux créés par cette action) ne peut être un singleton. On y trouve nécessairement au moins l'articulation entre prémisses et conclusion, ainsi que l'ensemble des prémisses posées.

— **Refuser** (nier). Cet acte de langage peut être considéré comme une forme de thèse que l'on avance, étant entendu que ce ne peut être un élément initial de dialogue. Dans un cadre général, l'intervention peut à la fois nier et contre-argumenter en avançant des éléments supplémentaires.
Il s'agira donc d'un acte de dialogue positif propre $(+, \xi, I, e)$, nécessairement justifié par une action précédente introduisant l'affirmation qui est refusée et dont la ramification (dans le cadre juridique en tout cas) est a priori un singleton. Dans un cadre plus général, la ramification peut ne pas être un singleton.

— **Questionner**. En ce qui concerne la structure du dialogue, il n'y a pas de différences avec le cas précédent. Seule la forme de l'expression associée est différente [14]. Rentre aussi dans ce cadre la demande d'explication ou de justification.

— **Concéder**. La concession consiste à acquiescer à ce qu'a pu avancer l'interlocuteur. En d'autres termes, le dialogue ne peut se poursuivre sur cet élément. En tant que tel, la concession ne peut être qu'une partie d'intervention : soit le dialogue se termine sur cette ultime concession, ce qui signifie l'abandon du locuteur, soit le locuteur poursuit son intervention sur un autre élément

14. Ce n'est que dans la partie "contextes" de la formalisation du dialogue que cette différence est explicitée.

pouvant encore être discuté.

Le schéma associé à la concession consiste en une séquence de deux actes de dialogue $(+, \xi, \{0\}, e_0), (-, \xi.0, \emptyset, e_1)$: un acte de dialogue positif (par lequel on précise ce qui est concédé) dont le focus ξ est celui correspondant à l'affirmation que l'on concède et la ramification est un singleton, et un acte de dialogue négatif dont le focus $\xi.0$ est justement ce dernier lieu créé et la ramification est vide, faisant ainsi disparaître de la conversation l'affirmation concédée.

— **Abandonner**. Il s'agit de l'acte clôturant un dialogue. L'expression '*merci*' de l'exemple 14 en fournit un cas. La sentence prononcée par un juge inclut nécessairement aussi un tel acte.

L'acte de dialogue positif daïmon $(✠, e)$ correspond exactement à cette situation. Son utilisation termine l'interaction en cours.

Ceci étant posé, nous obtenons la modélisation de la surface des dialogues argumentatifs. Néanmoins, nous attendons d'un cadre formel pour l'étude de l'argumentation, non seulement une description du déroulement du dialogue, mais également des outils pour évaluer la pertinence et la cohérence des arguments avancés, pour juger la correction des positions de chacun des contradicteurs. C'est-à-dire qu'on doit compléter la modélisation en rendant compte du contenu des interventions échangées et de leur rôle inférentiel. Pour ce faire, nous déclinons dans le cadre argumentatif, la théorie des dialogues que nous avons proposée en section 3.1.3. Les éléments des bases cognitives de chacun des participants aux dialogues et qui sont mobilisés par ces derniers pour construire leurs interventions et affiner leur stratégie, au fur et à mesure du déroulement du débat, sont répertoriés dans des sous-ensembles des bases cognitives de chacun des locuteurs. Nous ne rendrons pas compte, ici, des éléments linguistiques constituant les énoncés. Nous nous contentons de faire état des propositions assumées par chacun des locuteurs et sur lesquelles ils s'engagent. Nous utilisons donc la partie `Engagements` des bases cognitives de chacun des locuteurs.

La modélisation que nous obtenons, en appliquant la théorie de dialogue esquissée en section 3.1.3, est très proche de celles de [30, 32] ou encore de [57], c'est-à-dire une séquence d'**états de dialogues**. La spécificité ici est dans la définition de ces états de dialogues. Nous formalisons un état de dialogue comme étant la triple donnée d'un ensemble d'engagements pour chacun des locuteurs et du réseau d'interaction des desseins de dialogue associé au dialogue en cours. Ci-dessous, nous décrivons successivement les éléments de cette formalisation [15] : la notion d'ensemble d'engagements,

15. Les définitions ne sont pas différentes de celles que nous avons présentées pour la théorie des dialogues "quelconques" en section 3.1.3, mais nous utilisons une présentation plus adaptée au cadre de l'argumentation.

puis celle d'état de dialogue et enfin celle de dialogue argumentatif.

Ensemble d'engagements

Dans le cadre de l'argumentation, nous devons retenir les énoncés sur lesquels un locuteur s'engage, lorsqu'il participe à un dialogue. Nous distinguons deux types d'énoncés, ceux que nous qualifions d'*inférentiels* parce qu'ils énoncent une relation d'inférence entre deux (sous)-énoncés, et les autres que nous qualifions de *factuels*. Nous associons à chacun de ces énoncés, un ensemble de desseins de même base [16]. En effet, la notion d'ensemble d'engagements, est assez proche des notions de *base de connaissances* ou de *contexte* que l'on trouve dans la littérature. Habituellement ces bases de connaissances sont des ensembles de formules logiques qui sont associées aux engagements du locuteur. Pour représenter ces derniers, nous utilisons une formalisation un peu plus fine, suggérée par la Ludique. En Ludique, la notion de formule logique est remplacée par la notion de comportement. Ici nous utiliserons une notion encore plus générale : des ensemble de desseins de même base, non nécessairement clos (alors que les comportements le sont), pour représenter les énoncés assumés par les locuteurs. De cette façon, nous rendons compte du fait que le sens d'un énoncé avancé dans un dialogue peut se stabiliser au cours du dialogue, une justification peut être affinée voire complètement remplacée par une autre plus pertinente. . En ajoutant des desseins sur une même base, nous complétons un ensemble que l'on peut éventuellement considérer alors comme une "proposition formelle", voire comme une "formule valide".

La notion d'engagements est ici plus étroite que celle que nous utilisons dans la théorie des dialogue. Nous faisons uniquement état, dans le cadre argumentatif, des propositions *explicitement* assumées par les locuteurs. Cette restriction est justifiée à deux niveau :
- l'objectif de la modélisation : si l'enjeu est d'évaluer la correction et la cohérence des positions de chacun des contradicteurs, seules les positions sur lesquelles ceux-ci s'engagent explicitement peuvent leur être imputées. C'est typiquement ce qu'on attend d'une formalisation des controverses juridiques.
- la position particulière des interlocuteurs participant, en connaissance de cause, à un débat : une règle tacite des débats est justement que les locuteurs ne sont engagés que sur les positions qu'ils ont publiquement (et donc explicitement) assumées.

Pour autant, les ensembles d'engagements de chaque locuteur ne sont pas réduits aux propositions que ceux-ci assument explicitement. Nous supposons que ces

16. La base des desseins associés à un énoncé factuel est positive, la base des desseins associés à un énoncé inférentiel est négative.

locuteurs sont munis de compétences logiques minimales. Ainsi, les ensembles d'engagements contiennent également, en plus des énoncés explicitement assumés, toutes les conséquences logiques pouvant être déduites de ces engagements. La formalisation ludique rend compte de ces compétences logiques par des interactions internes aux ensembles d'engagements.

Exemple **25** *Nous extrayons cet exemple de la controverse juridique étudiée en section 3.3.2. Un locuteur locuteur assume à la fois les énoncés* J'ai livré l'article *et* Si j'ai livré l'article alors le client doit payer. *Son ensemble d'engagements contient alors les desseins suivants :*

— *Le dessein $\mathcal{D}_{del}$ ci-dessous est associé à l'énoncé* J'ai livré l'article. *C'est un dessein élémentaire, semblable à une preuve réduite à un axiome. L'énoncé est ainsi traité comme une donnée.*

$$\mathcal{D}_{del} = \cfrac{}{\vdash L_{del}}\emptyset$$

— *Le dessein $\mathcal{D}_{r_2}$ ci-dessous est associé à l'énoncé* Si j'ai livré l'article alors le client doit payer.

$$\mathcal{D}_{r_2} = \cfrac{\cfrac{}{\vdash L_{pay}}\emptyset}{L_{del} \vdash L_{pay}}\emptyset$$

— *Les desseins $\mathcal{D}_{del}$ et $\mathcal{D}_{r_2}$ interagissent correctement entre eux. Le résultat de leur interaction est le dessein $\mathcal{D}_{pay}$ associé à l'énoncé* Le client doit payer. *Que ce dernier énoncé soit assumé ou pas par le locuteur, nous considérons qu'il fait partie de ses engagements.*

$$\mathcal{D}_{pay} = \cfrac{}{\vdash L_{pay}}\emptyset$$

Dialogue argumentatif

On considère un dialogue argumentatif entre deux locuteurs A et S.

Définition 22 Un état de dialogue *est un triple*

$$(\mathbb{E}_S^i, \mathbb{E}_A^i, [[\mathcal{D}_S^i, \mathcal{D}_A^i]])$$

où $\mathbb{E}_A^i$ et $\mathbb{E}_S^i$ sont respectivement les ensembles d'engagements de A et de S à l'étape i du dialogue, $\mathcal{D}_A^i$ et $\mathcal{D}_S^i$ sont respectivement les desseins de dialogues de A et de S à l'étape i.

La première étape correspond à la production de la première intervention. Le passage de l'étape i à l'étape $i+1$ correspond à un changement de tour de parole. Précisèment l'étape $i+1$ contient le moment de la réception de la i^{eme} intervention *et la production de la $(i+1)^{eme}$. La dernière étape (si le dialogue est effectivement terminé) est la réception de la dernière intervention.*

Définition 23 Un dialogue argumentatif *est une séquence d'états de dialogue telle que :*

1. *$\mathbb{E}_S^1$ (resp. $\mathbb{E}_A^1$) contient les dessein associés aux énoncés explicitement assumés par S (resp. A) lorsqu'il produit sa première intervention.*
2. *$\mathbb{E}_S^{i+1}$ (resp. $\mathbb{E}_A^{i+1}$) est obtenu à partir de $\mathbb{E}_S^i$ (resp. $\mathbb{E}_A^i$) :*
   - en ajoutant les desseins associés aux énoncés qui ont été assertés ou concédés pendant la i^{eme} intervention qui est due à S (resp. A).
   - en effaçant les desseins correspondant aux énoncés dont la négation a été concédées.
3. *$\mathcal{D}_S^{i+1}$ (resp. $\mathcal{D}_A^{i+1}$) est obtenu à partir de $\mathcal{D}_S^i$ (resp. A)en ajoutant :*
   - le dual de la séquence d'actes de dialogues correspondant à l'intervention immédiatement précédente de A (resp. S). En effet, puisque S (resp. A) continue de dialogue, il accepte l'intervention précédente de son interlocuteur.
   - la séquence d'actes de dialogue correspondant à l'intervention courante due à S (resp. A).

Les mises à jour des ensembles d'engagements sont réalisées par l'interaction ludique : en déplaçant les desseins depuis la surface du dialogue jusqu'aux ensembles d'engagements. C'est toujours cette même interaction qui modélise l'utilisation des desseins issus de l'ensemble d'engagement pour alimenter la surface du dialogue ainsi que l'illustre le traitement du stratagème 4 de Schopenhauer que nous avons déjà mentionné dans la section 3.1.2. Nous rappelons ci-dessous cet exemple :

Exemple **26** Le stratagème 4 *: Il s'agit de faire admettre les prémisses d'une implication, de façon cachée dans la conversation, puis une fois qu'on sait que l'interlocuteur reconnaît toutes les prémisses, jouer alors l'implication.*

La réalisation du stratagème *:*

- *Au cours de la conversation le proposant P a avancé différentes propositions qui ont été concédées par son interlocuteur O : les propositions A et B vont être les prémisses de sa thèse. Ceci a donné lieu à deux sous-dialogues modélisés par les interactions de desseins de dialogues suivantes :*

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \alpha.0.0}\emptyset}{\alpha.0 \vdash}}{\vdash \alpha} & \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash}\maltese}{\alpha.0.0 \vdash}\emptyset}{\vdash \alpha.0}}{\alpha \vdash} \\
P & O
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \beta.0.0}\emptyset}{\beta.0 \vdash}}{\vdash \beta} & \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash}\maltese}{\beta.0.0 \vdash}\emptyset}{\vdash \beta.0}}{\beta \vdash} \\
P & O
\end{array}$$

On note $\mathcal{D}_\alpha$ et $\mathcal{D}_\beta$ de bases respectives $\vdash \alpha$ et $\vdash \beta$ les desseins gagnants de P.

- *L'intervention de P "révélant le stratagème" est exprimée par un énoncé comme par exemple : C est la conséquence de A et de B que vous avez admis. Nous avons représentée par le dessein de dialogue suivant la suite des actes de dialogue associés à cette intervention :*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\downarrow [[\mathcal{D}_\alpha, \mathfrak{F}ax_{\alpha,\xi.1.0}]] \\ \vdots \\ \vdash \xi.1.0\end{array}}{\xi.1 \vdash} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\downarrow [[\mathcal{D}_\beta, \mathfrak{F}ax_{\beta,\xi.2.0}]] \\ \vdots \\ \vdash \xi.2.0\end{array}}{\xi.2 \vdash} \quad \xi.3 \vdash}{\vdash \xi}$$

Selon la modélisation des dialogues argumentatifs que nous proposons, les desseins $\mathcal{D}_\alpha$ et $\mathcal{D}_\beta$ sont dans l'ensemble des engagements de P. Ils sont également dans l'ensemble d'engagements de O qui les a concédés. Ainsi, lorsqu'il dévoile son stratagème en utilisant les échanges antérieurs, le locuteur P déplace, au moyen d'une interaction avec le $\mathcal{F}ax$, les desseins enregistrés dans les ensembles d'engagements, jusqu'au lieu de l'échange en cours.

3.3.2 Formalisation en Ludique d'un exemple juridique

Dans cette section, nous reprenons un exemple développé par Prakken dans [66]. Il s'agit d'un dialogue dans un cadre juridique entre un plaignant (*plaintiff*) et un défendeur (*defendant*). Les interventions d'un juge, au cours du dialogue, introduisent des applications de règles de droit qui, en tant que telles, peuvent clore un élément d'argumentation. Le juge termine le dialogue en exprimant une sentence argumentée. Nous reproduisons ci-dessous l'exemple proposé par Prakken. Nous nous sommes essentiellement attachés à représenter la surface de ce dialogue en ludique. Cette modélisation de l'échange par une interaction entre deux desseins de dialogues ouvre déjà des perspectives prometteuses pour l'étude de l'argumentation en général et pour la formalisation des disputes juridiques en particulier. Pour conforter l'analyse ainsi obtenue, il convient de rajouter à cette formalisation de la surface du dialogue, le relevé des ensembles d'engagements des deux parties opposées dans la controverse juridique. Ce complément à la formalisation des échanges est aussi la condition d'un traitement automatique des dialogues argumentatifs. Nous illustrons alors ce volet de notre modélisation en explicitant quelques uns des éléments de ces ensembles d'engagements.

L'exemple analysé par Prakken est repris *in extenso* ci-dessous, les règles juridiques auxquelles il est fait allusion dans le dialogue sont référencées r_1, r_2, ...

I_1	*Plaintiff :*	I claim that defendant owes me 500 euro.
I_2	*Defendant :*	I dispute plaintiff's claim.
I_3	*Plaintiff :*	Defendant owes me 500 euro by r_1 since we conclude a valid sales contract, I delivered but defendant did not pay.
I_4	*Defendant :*	I concede that plaintiff delivered and I did not pay, but I dispute that we have valid contract.
I_5	*Plaintiff :*	We have a valid contract by r_2 since this document is a contract signed by us.
I_6	*Defendant :*	I dispute that this is my signature.
I_7	*Plaintiff :*	Why ?
J_1	*Judge :*	By r_3 the party who invokes a signature under a document which is not an avidavit has the burden to prove that it is authentic when this is disputed so plaintiff must prove this is defendant's signature.
I_8	*Plaintiff :*	This is defendant's signature since it looks like these three signatures of which we know they are defendant's.
I_9	*Defendant :*	But it does not look like this signature, which is also mine. Besides, another reason why we have no contract is that I was insane when I agree so r_4 applies, which makes section r_2 inapplicable.
I_{10}	*Plaintiff :*	I dispute that you were insane.
I_{11}	*Defendant :*	My insanity is proven by this court's document, which declares me insane.
I_{12}	*Plaintiff :*	I dispute that this is a court's document.
J_2	*Judge :*	Plaintiff, since this document looks like a court's document, i.e. like an avidavit, by r_5 the burden is on you to prove that it is not.
I_{13}	*Plaintiff :*	This lab report proves that this document is forged.
J_3	*Judge :*	This document is inadmissible as evidence by r_6 since I received it after the written pleading phase.
I_{14}	*Plaintiff :*	Nevermind, even if defendant was insane, this could not be known to me during the negociations, so r_4 does not apply by r_7.

I_{15}	*Defendant :*	Why could my insanity not be known to you ?
I_{16}	*Plaintiff :*	Since you looked normal all the time.
J_4	*Judge (deciding the dispute) :*	
		I am conviced by plaintiff's evidence that defendant's signature under the contract is authentic. Yet I cannot grant plaintiff's claim since the fact that defendant looked normal during the negociations is insufficient to conclude that defendant's insanity could not be known to plaintiff : he might have known if he had checked the court's register. Therefore I deny plaitiff his claim.

La surface du dialogue

On représente la dispute entre *plaignant* et *défendeur* par une interaction entre deux desseins, comme si cette dispute était un dialogue entre ces deux seuls locuteurs. Les différentes interventions du juge sont représentées, à l'intérieur de cette interaction, par des actes de dialogue "forcés" chez l'un ou l'autre des locuteurs. C'est à dire que chacun des locuteurs peut être contraint, par les interventions du juge, à concéder certaines assertions de son interlocuteur en respect des obligations juridiques, ou être contraint à développer ses allégations. Ainsi, le juge institutionnalise le dialogue en le replaçant systématiquement dans un cadre juridique contraint par les textes de lois et en établissant celle des parties à qui revient la charge de la preuve. C'est le cas des trois premières interventions du juge qui s'appuie à chaque fois sur un article de loi. Sa dernière intervention clôt les argumentations encore pendantes pour aboutir à une décision juridique (en l'occurrence, le fait que le plaignant ait tort). Dans d'autres dialogues juridiques, les interventions du juge pourraient permettre d'établir ou de réfuter la cohérence interne d'interventions précédentes.

Afin de simplifier la présentation de l'interaction en Ludique, les lieux sont référencés par des labels L_i (lorsqu'ils sont produits par une intervention I_i du plaignant ou du défendeur) et J_j (lorsqu'ils sont produits par des interventions J_j du juge), L_0 est le lieu arbitrairement choisi sur lequel l'échange est initié. On rajoutera des sous-indices pour distinguer plusieurs lieux générés dans la même intervention (par exemple l'intervention I_3 est interprétée par un acte de dialogue positif avec une ramification contenant quatre éléments, on la notera $(+, L_2, \{L_{3_1}, L_{3_2}, L_{3_3}, L_{3_4}\}, e)$ où e est l'énoncé complet constituant l'intervention I_3. Dans les figures présentées dans la suite de cette section, une intervention est schématiquement associée à une zone grisée d'actions, correspondant à un sous-dessein particulier. Le dessein de l'interlocuteur doit présenter les actions duales pour qu'il n'y ait pas divergence dans l'interaction.

Les interventions I_1 à I_3

La figure 3.4 représente le début des desseins associés au plaignant et au défendeur. On y retrouve la modélisation des trois premières interventions : les zones grisées I_1 et I_3 modélisent les deux premières interventions du plaignant, la zone grisée I_2 modélise la première intervention du défendeur. Les deux premières interventions, I_1 et I_2, n'ouvrent chacune qu'un lieu, respectivement L_1 et L_2, seuls lieux sur lesquels l'autre locuteur peut répondre s'il veut prolonger la dispute. A contrario, l'intervention I_3, comme nous l'avons signalé ci-dessus, est représentée par un acte de dialogue dont la ramification contient quatre éléments : en effet, l'énoncé '*Defendant owes me 500 euro by* r_1 *since we conclude a valid sales contract, I delivered but defendant did not pay.*' explicite quatre éléments argumentatifs à l'appui de l'assertion '*Defendant owes me 500 euro.*' qui sont : un article de loi r_1 ; le fait que les parties ont conclu un contrat valide ; le fait que le plaignant a effectué le service et enfin le fait que le defendeur n'a pas payé les 500 euros. Ainsi, la formalisation indique que la poursuite du dialogue pourra s'effectuer à partir des lieux $L_{3_1}, \ldots, L_{3_4}$ respectivement associés à ces quatre éléments argumentatifs.[17]

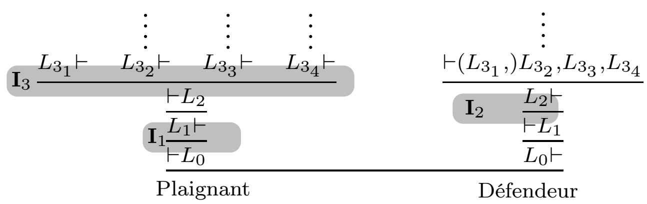


FIGURE 3.4 – Exemple juridique : Interventions I_1 à I_3

L'intervention I_4

L'intervention I_4 est plus complexe, nous n'en rendons pas compte par un unique acte de dialogue, mais par toute une séquence d'actes de dialogue. En effet, dans son intervention I_4, le défendeur concède deux éléments du plaignant, '*plaintiff delivered*' et '*I did not pay*'. Ces deux concessions sont représentées successivement par le fait de jouer séquentiellement, sur chacun des lieux correspondants L_{3_4} puis L_{3_3}, un acte de dialogue positif induisant un seul lieu sur lequel est joué un acte de dialogue

17. Nous pourrions affiner cette formalisation en nous intéressant de plus près à l'organisation interne des éléments argumentatifs à l'intérieur de cet acte de langage argumentatif. On peut d'abord distinguer deux arguments : la dette et le non paiement. Puis le fait que l'argument "dette" se décompose lui-même en trois arguments.

négatif à ramification vide. Enfin, l'intervention I_4 se termine en niant la thèse selon laquelle '*les parties ont conclu un accord valide'* : sur le lieu L_{3_2}, le défendeur joue un acte de dialogue positif dont la ramification est un singleton.
On obtient après cette quatrième intervention l'interaction représentée dans la figure 3.5.

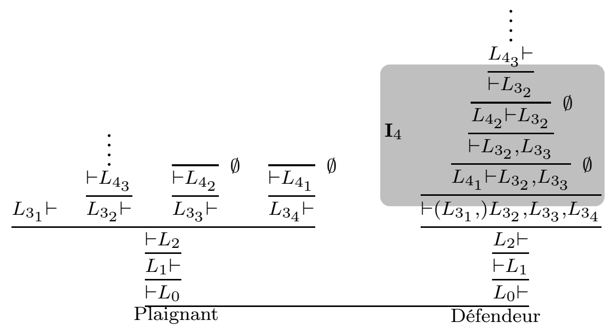


FIGURE 3.5 – Exemple juridique : Intervention I_4

Les interventions I_5 *à* J_1

Les trois interventions suivantes I_5, I_6, I_7, se modélisent de la même façon. L'intervention du juge J_1 introduit l'application d'une règle (r_3), d'une prémisse non discutable ('*le fait que le document ne soit pas un affidavit'*), et d'une obligation au plaignant de prouver l'authenticité de la signature. En tant que telle, dans l'interaction associée au dialogue entre le plaignant et le défendeur, l'intervention du juge s'apparente donc à une intervention du défendeur. Elle a pour effet de rendre le tour de parole au plaignant. Nous obtenons alors l'interaction modélisée dans la figure 3.6.

Les interventions I_8 *à* I_{16}

Le dialogue qui se poursuit se modélise de manière similaire (voir figure 3.7). L'intervention I_9 du défendeur mérite toutefois d'être commentée.

Lors de son intervention I_9, le défendeur, tout d'abord, contre-argumente sur la validité de sa signature sans laisser au plaignant la possibilité de répondre à ce contre-argument et enchaîne en introduisant immédiatement une nouvelle contre-argumentation commençant par '*Besides'*. Ainsi l'intervention I_9 du défendeur est constituée d'une succession d'actes de dialogue :
- un premier acte, positif : $(+, L_8, \{L_{9_1}\}, nosign)$, exprimée par "*But it does not look like this signature, which is also mine.*".

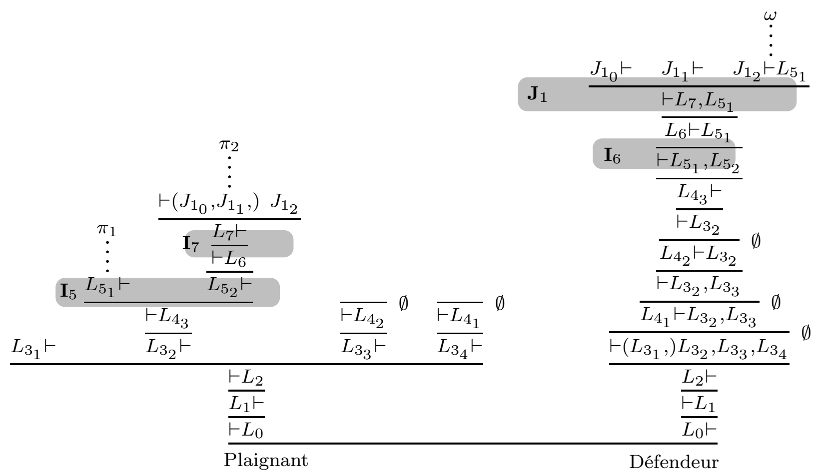


FIGURE 3.6 – Exemple juridique : Interventions I_5 à I_7 et J_1

- un second acte, négatif : $(-, L_{9_1}, \{L'_{9_1}\}, B)$, exprimé par $B=$ "*besides another reason why we have no contract*". Le défendeur se rend la main. Ce faisant, il prive son locuteur de la possibilité de répondre au contre-argument qu'il vient d'asséner, mais il reste dans son jeu un lieu positif L'_{9_1} : c'est toujours lui qui a la charge de prouver que la signature n'est pas bonne.
- un troisième acte, positif : $(+, L_{5_1}, \{L_{9_2}, L_{9_3}\}, noval)$. Il est ancré sur le lieu L_{5_1}, qui a été créé par l'intervention I_5 invoquant la règle r_2. Il crée deux lieux L_{9_2} et L_{9_3} sur lesquels la discussion pourra continuer concernant respectivement la règle r_4 et la maladie signalée par le défendeur. Il est exprimé par '*I was insane when I agree so r_4 applies, which makes section r_2 inapplicable'*.

L'intervention J_4

Le juge établit sa sentence lorsque la situation est la suivante : les seuls lieux "jouables" sont les lieux L_{16} et L'_{9_1}, et ils sont "jouables" par le défendeur. En effet, les lieux correspondant à des arguments juridiques établis (les règles r_i, sauf r_2 qui admet une exception, ainsi que les prémisses avancées par le juge) ne peuvent servir à poursuivre le dialogue : ceux-ci sont *affaiblis* dans la modélisation, i.e. les lieux créés ne servent pas ultérieurement de focus.[18] Le lieu L'_{9_1} modélise la question de la validité de la signature : le juge tranche en faveur du plaignant, il impose alors une concession au défendeur, c'est à dire la succession $(+, L'_{9_1}, \{J_{4_1}\}, valsig?)(-, J_{4_1}, \emptyset, valsig)$ dans le

18. Dans les figures nous avons mis ces lieux entre parenthèses.

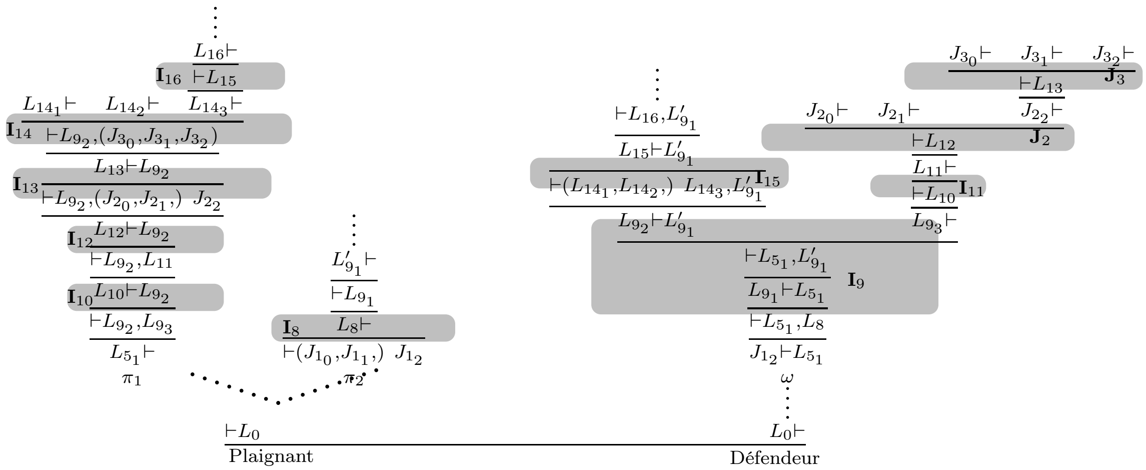


FIGURE 3.7 – Exemple juridique : Interventions I_8 à I_{16}

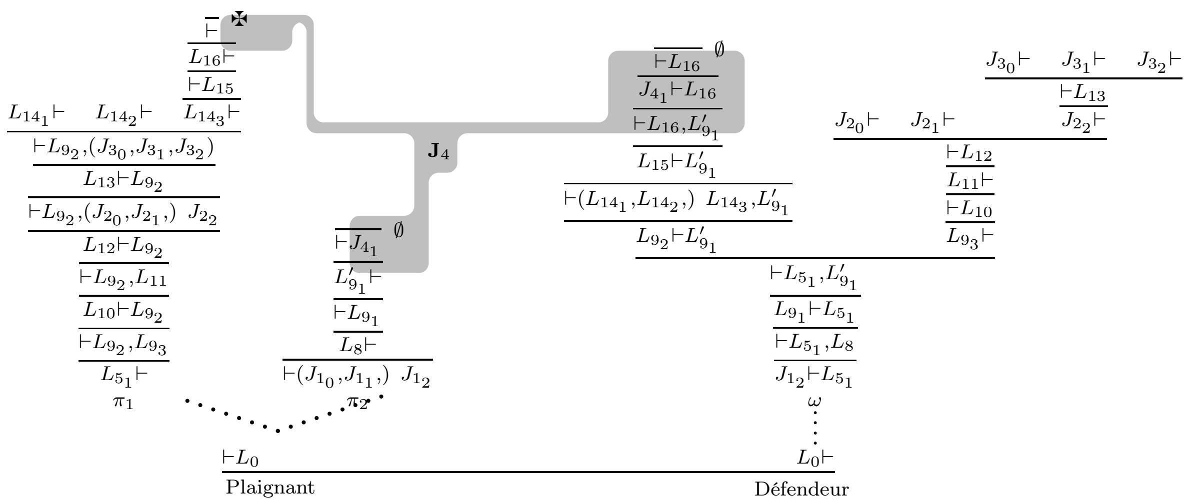


FIGURE 3.8 – Exemple juridique : Intervention J_4

dessein du défendeur (et le dual dans le dessein du plaignant). Le lieu L_{16} réfère à l'état normal ou non du défendeur, le juge donne raison au défendeur sur ce point, l'acte de dialogue induit dans le dessein de ce dernier est $(+, L_{16}, \emptyset, normal)$. Dès lors, le plaignant, à qui c'est le tour de jouer et qui n'a pas de lieu disponible, n'a plus aucune solution si ce n'est jouer un daïmon : la plainte est rejetée. La figure 3.8

reprend ses différents aspects.

Remarques sur la modélisation de l'exemple

L'exemple de dialogue proposé par Prakken a ainsi pu être en totalité modélisé en suivant la démarche exposée en section 3.1.2, c'est-à-dire en faisant état du strict échange dialogique. Nous reprenons, pour ce cas concret, les éléments essentiels de cette formalisation :

- Le dialogue n'est pas représenté par une preuve dans une logique particulière mais comme une interaction entre deux desseins (au sens de la Ludique), desseins reprenant les interventions des deux participants au dialogue. Si, dans ce cadre juridique, il y a un *gagnant*, c'est que cette interaction se termine sur un daïmon. La structure des desseins n'est toutefois pas *ad hoc*. En effet, la Ludique est un modèle adéquat et complet pour les preuves d'un large fragment de la logique linéaire. Ainsi, certains desseins peuvent effectivement dénoter des preuves de logique.
- Chaque tour de parole des deux parties plaignant et défendeur est modélisé par une suite d'actes de dialogue, et initié par un acte de dialogue positif. Dans l'exemple considéré, la plupart des interventions se résument à un acte de dialogue positif. Ce n'est pas le cas des interventions I_4 et I_9 du défendeur. On a vu que l'intervention I_4, qui contient deux concessions, est représentée par une suite alternée d'actes de dialogue, dont deux négatifs à ramification vide. L'intervention I_9 contient également un acte de dialogue négatif qui rend compte du fait que le locuteur (le défendeur) garde la main et ne s'attend pas vraiment à ce que son interlocuteur réponde, mais poursuit en assénant un second contre-argument. Ici, l'acte de dialogue négatif par lequel nous rendons compte de ce comportement contient une ramification singleton, faisant état que le locuteur n'a pas vraiment avancé un contre-argument.
- Dans l'interaction représentant le dialogue entre les deux parties, le juge intervient en lieu et place de ce que devrait être une intervention d'une des parties. Dans ses trois premières interventions, le juge intervient en imposant des actes de dialogue correspondant à des concessions. Ses interventions sont justifiées du reste par des règles juridiques, ce qui permet de poser la trace de ces règles dans l'explicitation de la plaidoirie que constitue l'interaction entre les deux desseins. Son intervention finale clôt le dialogue et explicite la sentence. Du point de vue de l'interaction, elle la poursuit, en achevant certaines branches encore pendantes par des concessions. L'ordre dans lequel ces concessions sont explicitées impose un tour de parole qui amène la conclusion : c'est au plaignant de pousuivre l'interaction alors qu'il n'a plus de lieu disponible dans son dessein, il ne peut que jouer le daïmon et s'avouer vaincu.

Comparaison avec l'analyse de Prakken

Dans son article, [66] définit un cadre permettant la modélisation de dialogues juridiques, en particulier des actes de langages explicites des différentes parties et du juge. Il cherche ainsi à caractériser les affirmations ou concessions, les argumentations et contre-argumentations des parties, et les décisions du juge portant sur l'application des règles juridiques, la validité des interventions des parties et la terminaison de la procédure. L'analyse du dialogue que fait Prakken de l'exemple juridique est assez similaire à la nôtre. La formalisation proposée par Prakken présente néanmoins des différences que nous analysons ici :

Prakken utilise, comme nous, une approche de type théorie des jeux, où les actes de langage sont vus comme des coups (*moves*) dans un jeu à plusieurs joueurs et les règles du jeu sont les règles autorisant les coups. Prakken reprend par ailleurs l'idée que les coups, sauf le coup initial, ne peuvent qu'être une réponse à un coup précédent. Les types de coups sont ceux exposés dans la section 3.3.1 : attaque, concession, réfutation, argumentation. Le protocole spécifiant un dialogue et tel qu'exposé par Prakken est défini à partir d'un ensemble de principes parmi lesquels : un argument ne peut être utilisé deux fois, réponse et attaque ne peuvent être effectuées par le même joueur, une concession clôt une ligne argumentative, ... La formalisation du dialogue est alors une séquence de coups typés respectant le protocole.

En plus du raffinement des actes de langage en actes de dialogues comme coups pertinents dans les dialogues, notre formalisation diverge de celle proposée par Prakken sur trois points importants : la modélisation du juge et de ses interventions, et le cadre formel dans lequel s'inscrit cette modélisation.

Prakken institue un jeu à trois joueurs, au comportement du juge étant associé un ensemble de règles de jeu particulières. D'une part, les interventions du juge s'intercalent entre celles du plaignant et du défendeur, le juge décidant si les coups des parties sont légalement admissibles, et s'il y a lieu d'intervenir pour préciser qui a la charge de la preuve. D'autre part, il revient au juge de terminer le dialogue. Ces actes n'admettent aucune réponse des autres joueurs, i.e. des parties en présence. Cette démarche revient à dissocier les échanges qui ont lieu de la formalisation logique d'un raisonnement. Le cadre inférentiel utilisé par Prakken est une extension de la logique du premier ordre avec gestion de préférences : le protocole détermine l'ordre et le type des interventions, chaque intervention "ajoutant" une ou des formules logiques à l'ensemble constitué à partir des interventions précédentes.

Cette démarche nous paraît présenter plusieurs inconvénients. D'abord, instituer le juge comme joueur à part entière ne rend pas compte du fait que ses actes peuvent être naturellement interprétés comme relevant d'une des deux parties : le dialogue pourrait avoir lieu sans intervention du juge si les deux parties suivaient un dialogue parfaitement rationnel en intégrant totalement la législation. Notre modélisation montre qu'il n'y a pas nécessité de distinguer à ce niveau les dialogues argumentatifs juridiques des autres types de dialogues argumentatifs, voire des dialogues en général. Ensuite, donner un rôle particulier au juge impose à Prakken d'instaurer un protocole particulier pour rendre compte de ses actions. Prakken doit aussi introduire des actes spécifiques de changement de tour de parole appelés `pass` et qui sont censés suivre un acte du juge. Ces actes n'ont pas de raison d'être mais sont artificiellement rajoutés pour les besoins de la formalisation.

Les ensembles d'engagements lors de la dispute juridique

Il est temps de compléter notre modélisation du dialogue en ajoutant la formalisation du contenu des interventions et de leur rôle inférentiel. Cette modélisation une fois complétée ouvre la voie à des modélisations automatiques des disputes juridiques. Nous nous focalisons, ici, sur l'intervention I_3 du plaignant.

Exemple **27** I_3 *: Defendant owes me 500 euro by r1 since we conclude a valid sales contract, I delivered but defendant did not pay.*

Cette intervention est le moment du dialogue où le plaignant explicite sa requête : le défenseur lui doit 500 euros. Il avance quatre propositions dont l'articulation constitue pour lui la justification de cette requête. Ces propositions sont $P_{val\ contrat}$: *Nous avons conclu un contrat valide*, P_{del} : *Lui-même a livré l'article commandé*, $P_{not\ pay}$:*Le défenseur n'a pas payé.* et la quatrième proposition enfin est une loi, codée r_1, qui doit permettre de conclure que le défenseur doit 500 euros au plaignant. Cette loi r_1 peut être formulée de la façon suivante, en tant que proposition assumée par le plaignant : *S'il y a un contrat valide et que le vendeur délivre l'article alors le client doit payer.*

Nous avons représenté cette intervention I_3 en termes d'actes de dialogue par :

$$(+, L_2, \{L_{3_1}, L_{3_2}, L_{3_3}, L_{3_4}\}, \texttt{Defendant owes me} \ldots \texttt{did not pay})$$

La notion de dessein de dialogue joue ici tout à fait son rôle de stratégie guidant le locuteur pour mener à bien la controverse. Nous pouvons en effet représenter cette stratégie qui est à l'arrière plan de l'acte de dialogue avancé par le plaignant :

$$\dfrac{\begin{array}{cccc}\mathcal{D}_{r_1} & \mathcal{D}_{val-contrat} & \mathcal{D}_{del} & \mathcal{D}_{not-pay}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ L_{3_1}\vdash & L_{3_2}\vdash & L_{3_3}\vdash & L_{3_4}\vdash\end{array}}{\vdash L_2}$$

Dans son ensemble d'engagements, le plaignant possède les desseins $\mathcal{D}_{r_1}$, $\mathcal{D}_{val-contrat}$, $\mathcal{D}_{del}$ et $\mathcal{D}_{not-pay}$ respectivement associés aux propositions assumées par ce locuteur à ce moment du dialogue. Il va pouvoir les utiliser pour poursuivre son argumentation. Nous précisons ces desseins :

— Correspondant aux propositions P_{del} et $P_{not\ pay}$ explicitement assumée par le plaignant, les desseins $\mathcal{D}_{del}$ et $\mathcal{D}_{not\ pay}$ sont des desseins très simples [19] :

$$\mathcal{D}_{del} = \dfrac{\quad}{\vdash L_{del}}{\scriptstyle\emptyset} \qquad \mathcal{D}_{not\ pay} = \dfrac{\quad}{\vdash L_{not\ pay}}{\scriptstyle\emptyset}$$

— Le dessein $\mathcal{D}_{val-contrat}$ associé à la proposition assumée $P_{val\ contrat}$ est un peu moins élémentaire : la validité du contrat, selon P, repose sur la validité d'une signature :

$$\mathcal{D}_{val\ contrat} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\quad}{\vdash L_{sign}}{\scriptstyle\emptyset}}{L_{\neg sign}\vdash}}{\vdash L_{val\ contrat}}$$

— Il y a aussi un dessein associé à la loi r_1, basé sur $L_{Cont\ and\ Del} \vdash L_{Pay}$ (il correspond à une proposition inférentielle).

$$\mathcal{D}_{r_1} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\quad}{\vdash L_{Pay}}{\scriptstyle\emptyset}}{L_{Del}\vdash, L_{Pay}}{\scriptstyle\emptyset}}{\vdash L_{\neg Del}, L_{Pay}}}{L_{sign}\vdash L_{\neg Del}, L_{Pay}}{\scriptstyle\emptyset}}{\vdash L_{\neg sign}, L_{\neg Del}, L_{Pay}}}{L_{val\ contrat}\vdash L_{\neg Del}, L_{Pay}}}{\vdash L_{\neg val\ cont}, L_{\neg Del}, L_{Pay}}}{L_{Cont\ and\ Del}\vdash L_{Pay}}$$

— Enfin, en plus de ces desseins correspondant aux propositions explicitement assumées par le plaignant, il y a dans son ensemble d'engagements, les desseins correspondant aux compétences logiques minimales que celui-ci possède naturellement. Ici la reconnaissance que le fait de payer est la négation logique de ne pas payer, le dessein exprimant cette négation logique est $\mathcal{D}_{\neg pay}$:

$$\mathcal{D}_{\neg pay} = \dfrac{\dfrac{\quad}{\vdash}{\scriptstyle\maltese}}{L_{Pay}\vdash}{\scriptstyle\emptyset}$$

19. Ils sont semblables à des preuves élémentaires, réduites à des axiomes.

Les desseins à l'intérieur d'un même ensemble d'engagements interagissent entre eux, pourvu que leurs bases possèdent des lieux duaux. Ainsi, on a l'interaction suivante dans l'ensemble d'engagements du plaignant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash L_{sign}}\emptyset}{L_{non-sign}\vdash}}{\vdash L_{val-contrat}}}{L_{nonCont}\vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash L_{Del}}\emptyset}{L_{nonDet}\vdash}}{\vdash L_{Cont-and-Del}} \quad \text{et} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash L_{Pay}}\emptyset}{L_{Del}\vdash, L_{Pay}}\emptyset}{\vdash L_{nonDel}, L_{Pay}}}{L_{sign}\vdash L_{nonDel}, L_{Pay}}\emptyset}{\vdash L_{non-sign}, L_{nonDel}, L_{Pay}}}{L_{val-contrat}\vdash L_{nonDel}, L_{Pay}}}{\vdash L_{nonCont}, L_{nonDel}, L_{Pay}}}{L_{Cont-and-Del}\vdash L_{Pay}}$$

Le dessein de gauche est (autre compétence logique minimale) la conjonction des desseins $\mathcal{D}_{val\ contrat}$ et $\mathcal{D}_{del}$. Cette interaction se normalise en le dessein suivant, qui ainsi est aussi dans l'ensemble d'engagements du plaignant.

$$\dfrac{}{\vdash L_{Pay}}\emptyset$$

Les desseins $\mathcal{D}_{Pay}$ et $\mathcal{D}_{\neg Pay}$ sont tous deux dans $\mathbb{E}_P$ du plaignant , ils sont tous deux d'adresses duales et donc interagissent. L'interaction a pour résultat une contradiction :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash L_{Pay}}\emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash}\maltese}{L_{Pay}\vdash}\emptyset}{} \quad \text{se réduit en} \quad \dfrac{}{\vdash}\maltese$$

La suite du dialogue (le rôle du juge) a pour but de résoudre cette contradiction. La contradiction va être levée car le juge va décider que la loi r_1 ne s'applique pas. Ce que l'on simplifie ici en disant r_1 est une loi plus exigeante que celle utilisée par le Plaignant. Elle exige qu'aucun signataire du contrat ne soit dément. Autrement dit la validité d'un contrat n'a pas une seule condition (une seule sous-formule) mais deux : la validité de la signature et la non démence des signataires. On peut rendre compte de la fin de la dispute juridique en précisant comment l'ensemble d'engagements du Plaignant : $\mathbb{E}_P$ est mis à jour. La sentence du juge a pour effet de faire disparaître la contradiction (le dessein $\dfrac{}{\vdash}\maltese$ de $\mathbb{E}_P$). Pour cela, l'ensemble de desseins associés à l'énoncé : *le contrat est valide* doit être raffiné. Selon la lecture "logique" de cet ensemble, la proposition (formule) associée à l'énoncé *le contrat est valide* n'a pas une unique sous-formule : *le contrat est signé* mais la conjonction de deux formules *le* *contrat est signé* et *les signataires ne sont pas déments*. Ainsi l'enchaînement d'interactions qui avait lieu dans l'ensemble $\mathbb{E}_P$ ne peut plus se produire. La contradiction qui en résultait a disparu.

REMARQUE : On observe l'intérêt d'associer aux énoncés assumés, non pas une formule logique a priori déjà connue mais un ensemble de desseins qui peut être augmenté au fur et à mesure du déroulement du dialogue. La formule logique associée à un énoncé utilisé et finalement assumé au terme du dialogue peut n'être déterminée qu'une fois que l'on connaît les desseins pertinents constituant l'ensemble engendrant le comportement correspondant à une telle formule.

Bibliographie

[1] Samson Abramsky and Radha Jagadeesan. Games and full completeness for multiplicative linear logic. *J. Symb. Log.*, 59(2) :543–574, 1994.

[2] Samson Abramsky and Paul-André Melliès. Concurrent games and full completeness. In *LICS* [40], pages 431–442.

[3] Jean-Marc Andreoli. Logic programming with focusing proofs in linear logic. *J. Log. Comput.*, 2(3) :297–347, 1992.

[4] Houda Announ. *Approche logique des grammaires pour les langues naturelles.* PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2007.

[5] Nicholas Asher and Axel Lascaride. *Logics of conversation.* Cambridge University Press, 2003.

[6] Michele Basaldella and Claudia Faggian. Ludics with repetitions (exponentials, interactive types and completeness). In *LICS*, pages 375–384, 2009.

[7] Robert Brandom. *L'articulation des raisons.* du cerf, Paris, du cerf edition, 2009.

[8] Benoît Castelnérac and Matthieu Marion. Arguing for inconsistency : Dialectic games in the academy. In G. Primiero et S. Rahman, editor, *Acts of Knowledge : History, Philosophy and Logic*, pages 37–76, Londres, 2009. College Publications.

[9] Marc Chemillier. Eléments pour une ethnomathématique de l'awélé. *Mathématiques et sciences humaines*, 181(Varia) :5–34, 2008.

[10] Robin Cooper. Austinian truth, attitudes and type theory. *Research on Language and Computation*, 3(2), 2005.

[11] Francis Corblin. *Représentation du discours et sémantique formelle. Introduction et applications au français.* Collection Linguistique nouvelle. PUF, 2002.

[12] Pierre-Louis Curien and Claudia Faggian. L-nets, strategies and proof-nets. In *CSL*, pages 167–183, 2005.

[13] Pierre-Louis Curien and Claudia Faggian. An approach to innocent strategies as graphs. *Inf. Comput.*, 214 :119–155, 2012.

[14] Ugo Dal Lago and Olivier Laurent. Quantitative game semantics for linear logic. In Michael Kaminski and Simone Martini, editors, *Computer Science Logic '08*, volume 5213 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–245. Springer, September 2008.

[15] Philippe de Groote. Toward abstract categorial grammars. In *39th Annual Meeting on Association for Computational Linguistic*, pages 252–259, 2001.

[16] Harish Devarajan, Dominic J. D. Hughes, Gordon D. Plotkin, and Vaughan R. Pratt. Full completeness of the multiplicative linear logic of chu spaces. In *LICS* [40], pages 234–243.

[17] Marie-Renée Fleury and Myriam Quatrini. First order in ludics. *Mathematical Structures in Computer Science*, 14(2) :189–213, 2004.

[18] Thomas Ehrhard. Parallel and serial hypercoherences. *Theor. Comput. Sci.*, 247(1-2) :39–81, 2000.

[19] Richard Moot et Christian Rétoré. Traitement automatique d'un corpus de récits de voyages pyrénéens : Analyse syntaxique, sémantique et pragmatique dans le cadre de la théorie des types. In *Congrès Mondial de Linguistique Française*, pages 2485–2497, 2012.

[20] Laurent Keiff et Shahid Rahman. La dialectique entre logique et réthorique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 66, 2010.

[21] Claudia Faggian. Interactive observability in ludics : The geometry of tests. *Theor. Comput. Sci.*, 350(2-3) :213–233, 2006.

[22] Claudia Faggian, Marie-Renée Fleury, and Myriam Quatrini. *Introduction to uniformity in Ludics*, volume Logic in Computer Sciences of *Lectures Notes series 316*. Cambridge University Press, 2005.

[23] Claudia Faggian and Martin Hyland. Designs, disputes and strategies. In *CSL*, pages 442–457, 2002.

[24] Claudia Faggian and François Maurel. Ludics nets, a game model of concurrent interaction. In *LICS*, pages 376–385, 2005.

[25] Christophe Fouqueré and Myriam Quatrini. Ludics and natural language. In Alexander Béchet, Denis ; Dikovsky, editor, *Logical aspects of computational linguistics : 7th International Conference, LACL 2012, Nantes, France, July 2-4, 2012. Proceedings*, volume 7351 of *Lecture notes in Computer Sciences*, pages 21–44, Berlin, New York, 2012. Springer.

[26] Christophe Fouqueré and Myriam Quatrini. Un cadre formel issu de de la théorie de la démonstration pour la théorie de l'argumentation. *Mathématiques et sciences humaines*, 198(2) :49–83, 2012.

[27] Christophe Fouqueré and Myriam Quatrini. Incarnation in ludics and maximal cliques of paths. *Logical Method in Computer Sciences*, abs/1307, 2013.

[28] Christophe Fouqueré and Myriam Quatrini. Inferences and dialogues in ludics. in Natural Language and Computer Sciences in New Orleans, 15 june 2013.

[29] Christophe Fouqueré and Myriam Quatrini. Argumentation and inference : a unified approach. In *Games, Game Theory and Game Semantics : Philosophical and Scientific Perspectives*, Riga, 18-20 May to appear. Symposium of Cognition, Logic and Communication.

[30] Gerald Gazdar. *Elements of Discourse Understanding, A. Joshi B. Webber I. Sag (eds)*, chapter Speech act assignment, pages 64–83. Cambridge University Press, cambridge university press edition, 1981.

[31] Jonathan Ginzburg. *The Interactive Stance : Meaning for Conversation*. Oxford University Press, 2012.

[32] Jonathan Ginzburg, Ivan A. Sag, , and Matthew Purver. Integrating conversational move types in the grammar of conversation. In P. Kühnlein, H. Rieser, and H. Zeevat, editors, *Perspectives on Dialogue in the New Millennium*, number 114 in Pragmatics and Beyond New Series. John Benjamins, 2003.

[33] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoritical Computer Sciences*, 50(1) :1–102, 1987.

[34] Jean-Yves Girard. On the meaning of logical rules i : syntax vs. semantics. In Berger and Schwichtenberg, editors, *Computational Logic*, pages 215–272, Heildelberg, 1999.

[35] Jean-Yves Girard. Locus solum : From the rules of logic to the logic of rules. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11(3) :301–506, 2001.

[36] J. Higginbotham. *Two interfaces : Of Minds and Languages, A dialogue with Noam Chomsky in the Basque Country, Piatelli-Palmarini, Uriagereka, Salaburu (eds)*. Oxford University Press, 2009.

[37] J. Hintikka and J. Kulas. The game of language. In D. Reitel, editor, *Game Theoretical Semantics and its Applications*, 1983.

[38] J Hintikka and G. Sandu. *Handbook of Logic and Language, J. Van Benthem and A. ter Meulen (eds)*, chapter Game Theoretical Semantics. Number 6 in Handbook of Logic and Language. Elsevier, north holland edition, 1997.

[39] J. M. E. Hyland and C.-H. Luke Ong. Fair games and full completeness for multiplicative linear logic without the mix-rule. preprint, 1993.

[40] IEEE. *14th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Trento, Italy, July 2-5, 1999*. IEEE Computer Society Press, 1999.

[41] Jean-Louis Krivine. Typed lambda-calculus in classical zermelo-fraenkel set theory. *Archives for Mathematical Logic*, 40(3) :189–205, 2001.

[42] Yves Lafont and Thomas Streicher. Games semantics for linear logic. In *LICS*, pages 43–50. IEEE, IEEE Computer Society Press, 1991.

[43] François Lamarche. Games semantics for full propositional linear logic. In *LICS*, pages 464–473. IEEE, IEEE Computer Society Press, 1995.

[44] J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *The American Mathematical Monthly*, 65(3) :154–170, 1958.

[45] Landragin. Vers l'identification et le traitement des actes de dialogue composites. In *Traitement Automatique du Langage Naturel*, pages 460–469, 2008.

[46] Alex Lascarides and Nicholas Asher. Agreement, disputes and commitments in dialogue. *Semantics*, 26(2) :109–158, 2009.

[47] Olivier Laurent. Polarized games. *Annals of Pure and Applied Logic*, 130(1–3) :79–123, December 2004.

[48] Olivier Laurent. Syntax vs. semantics : a polarized approach. *Theoretical Computer Science*, 343(1–2) :177–206, October 2005.

[49] Olivier Laurent. Game semantics for first-order logic. *Logical Methods in Computer Science*, 6(4) :3, October 2010.

[50] Alain Lecomte and Myriam Quatrini. Ludics and its applications to natural language semantics. In Ruy de Queiroz Hiroakira Ono, Makoto Kanazawa, editor, *Language, Information and Computation*, volume 5514, pages 242–255, Tokyo, Japan, June 21-24 2009. Wollic, Spronger Verlag.

[51] Alain Lecomte and Myriam Quatrini. Pour une étude du langage via l'interaction : dialogues et sémantique en Ludique. *Mathématiques et sciences humaines*, 189(varia) :37–67, 2010.

[52] Alain Lecomte and Myriam Quatrini. Figures of Dialogue : a View from Ludics. *Synthese*, 183(S1) :59–85, 2011.

[53] Alain Lecomte and Myriam Quatrini. Ludics and rethoric. In Alain Lecomte and Samuel Tronçon, editors, *Ludics, dialogue and interaction*, volume FOLLI of *LNAI*, pages 32–57. Springer Verlag, Berlin, Heilderberg, 2011.

[54] Alain Lecomte and Christian Rétoré. Towards a minimal logic for minimalist grammars. In G.-J. Kruijff, editor, *Formal Grammar'99*, pages 83–92, Utrecht, Aout 99. FoLLi.

[55] Ralph Loader. Linear logic, totality and full completeness. In *LICS*, pages 292–298. IEEE, IEEE Computer Society Press, 1994.

[56] P. Lorenzen and K. Lorenz. Dialogische logik. Darmstadt, 1978.

[57] Ronald Prescott Loui. Process and policy : Resource-bounded nondemonstrative reasoning. *Computational Intelligence*, 14(1) :1–38, 1998.

[58] Jim Mackenzie. Four dialogue systems. *Studia Logica*, 49 :567–583, 1990.

[59] Per Marin-Löf. *Intuitionnistic Type Theory*. Bibliopolis, Naples, 1984.

[60] Alexandre Miquel. A survey of classical realisability. In *Typed Lambda Calculi and Applications-10th International Conference, TLCA 2011*, volume 6690 of *Lecture notes in Computer Sciences*, pages 313–327, Serbie, 2011. Springer.

[61] Richard Moot. Proof nets and labeling for categorial grammar logics. Master's thesis, Utrecht University, Utrecht, 1996.

[62] Reinhard Muskens. Lambda grammars and the syntax-semantics interface. In In R. van Rooy and M. Stokhof, editors, *Proceedings of the Thirteenth Amsterdam Colloquium*, pages 150–155, Amsterdam, 2001.

[63] Samuel Pinker. The stuff of thought, language as a window into the human nature. Penguin Book, 2007.

[64] Massimo Poesio and Andrei Mikheev. The predictive power of game structure in dialogue act recognition : experimental results using maximum entropy estimation. In *ICSLP*. ISCA, 1998.

[65] Sylvain Pogodalla. *Réseaux de preuves et génération pour les grammaires de type logique*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2001.

[66] Henry Prakken. A formal model of adjudication dialogues. *Artificial Intelligence and Law*, 16(3) :305–328, 2008.

[67] Myriam Quatrini. Une relecture ludique des stratagèmes de schopenhauer. *Influxus*, (http ://www.influxus.eu/article615.html), 2013.

[68] Aarne Ranta. Grammatical framework : A type-theoretical grammar formalism. *.Journal of Functional Programming*, 14(2) :145–189, 2004.

[69] Christian Rétoré. Calcul de lambek et logique linéaire. *Traitement Automatique des Langues*, 37(2) :39–70, 1996.

[70] Christian Rétoré. Les mathématiques de la linguistique computationnelle. premier volet : la théorie des langages. *La gazette des mathématiciens*, 115 :35–62, 2008.

[71] Eleni Gregoromichelaki Ruth Kempson and Christine Howes. *The dynamics of Lexical Interfaces*. University of Chicago Press, 2011.

[72] John Searle. *Speech Acts*. Cambridge University Press, 1969.

[73] K. Terui. Computational ludics. *Theoretical Computer Science*, 412(20) :2048–2071, 2011.

[74] Richmond H. Thomason., editor. *Formal philosophy : Selected papers of Richard Montague*. Yale Univ. Press, 1974.

[75] Douglas N. Walton. New directions in the logic of dialogue. *Synthese*, 63 :259–274, 1985.

[76] Grégoire Winterstein. Ludics and presupposition projection,. In A. Butler, editor, *Proceedings of the Eighth International Workshop of Logic and Engineering of Natural Language Semantics*, volume 8, pages 94–105, Takamatsu, Japon, 2011.

[77] Stéphane Zimmermann. *Vers une Ludique différentielle*. PhD thesis, Paris 7, december 2013.