Analyse asymptotique de systèmes hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre

Victor Wasiolek

N° D.U. : 2577

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL

U.F.R. Sciences et Technologies

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

N° 825

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : Mathématiques appliquées

Par : **Victor WASIOLEK**

Analyse Asymptotique de Systèmes Hyperboliques Quasi-Linéaires du Premier Ordre

Après avis de :

M. Jean-François Coulombel	Université de Nantes	Rapporteur
M. Olivier Guès	Université de Aix-Marseille	Rapporteur

Soutenue publiquement le 29/05/2015, devant la commission d'examen composée de :

Président : M. François Bouchut — Université Paris-Est, Marne-la-Vallée

Examinateurs :

M. Youcef Amirat	Université de Clermont-Ferrand	
M. Jean-François Coulombel	Université de Nantes	
M. Olivier Guès	Université de Aix-Marseille	
M. Nicolas Seguin	Université Pierre et Marie Curie	
M. Yue-Jun Peng	Université Blaise Pascal	Directeur de thèse

À ma famille

Analyse Asymptotique de Systèmes Hyperboliques Quasi-Linéaires du Premier Ordre

Résumé : Les systèmes hyperboliques interviennent dans de nombreuses branches des sciences : théorie cinétique, mécanique des fluides non visqueux, magnéto hydrodynamique, dynamique des gaz non visqueux, trafic routier, flux d'une rivière ou d'un glacier, processus de sédimentation, processus d'échanges chimiques, *etc.*. Et souvent, les systèmes qui régissent ces évènements font intervenir des petits paramètres, dont l'étude asymptotique permet d'envisager des simplifications mathématiques et/ou informatiques notoires. L'existence locale et l'existence globale de solutions, uniformément par rapport à ces paramètres, sont des questions fondamentales. Cette thèse regroupe à la fois des résultats généraux sur l'existence locale uniforme de solutions pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre ; et sur l'existence globale uniforme de solutions autour d'un équilibre constant pour ces mêmes systèmes. Le cas du système d'Euler-Maxwell ne satisfaisant pas les conditions requises pour l'existence uniforme globale, nous le traitons à part.

Mots-Clés : système hyperbolique quasi-linéaire du premier ordre, existence locale uniforme, existence globale uniforme, étude asymptotique

Asymptotic Analysis of First-Order Quasilinear Hyperbolic Systems

Abstract : Hyperbolic systems arise in a large field of sciences : kinetic theory, inviscid reactive flow, magnetohydrodynamics, inviscid gas dynamics, traffic flow, river or glacier flow, sedimentation processes, chemical exchange processes, *etc.*. In these kind of systems, small paramaters often appear, and an asymptotic study may lead to mathematical or computational simplifications. One fundamental problem that we may work on is local and global existence of solutions for these systems, uniformly with respect to these parameters. This Ph.D. thesis includes, on one hand, general results on uniform local existence of solutions for first order quasi-linear hyperbolic systems ; and on the other hand, results on uniform global existence of solutions near constant equilibriums for these same systems. In the case of Euler-Maxwell systems, required conditions are not fulfilled for uniform global existence, then we treat it separately.

Keywords : first-order quasilinear hyperbolic system, uniform local existence, uniform global existence, asymptotic analysis

Mes premiers remerciements iront évidemment à M. Yue-Jun Peng, mon directeur de thèse. S'il m'a appris énormément en mathématiques, il m'a également fait découvrir le métier passionnant d'enseignant-chercheur. Il a su allier de manière exemplaire mon suivi et mon indépendance tout au long de ces trois années, en mêlant sérieux, convivialité et efficacité, qualités que j'espère reconduire tout au long de ma carrière.

Je remercie ensuite mes rapporteurs, MM. Jean-François Coulombel et Olivier Guès, pour le temps qu'ils ont accepté de passer à lire mon manuscrit, et pour leurs avis sur mes travaux qui m'ont beaucoup flatté. Je remercie aussi les membres de mon jury de soutenance, MM. Youcef Amirat, François Bouchut et Nicolas Seguin, pour leur présence et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Je tiens à remercier tous les collègues avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer, que ce soit pour mes travaux de recherche, pour mon monitorat, ou pour d'autres activités tout aussi enrichissantes. En espérant ne pas en oublier : Christèle Bioche, Fabien Bruhier, Corentin Chedéville-Monzo, Jonathan Crespo, Romuald Ernst, William Farigoule, Yue-Hong Feng, Thierry Lambre, Audrey Lelong, Jordane Mathé, Malika More, Colin Mrozinski, Clémence Rose, Manon Thibault de Chanvalon, ...

Je remercie mes divers collègues de bureau pour les moments partagés : Arthur, Damien, Jordane, Mahdi, Marianne, Papa, ...

Côté administratif, je remercie grandement les secrétaires, d'une dévotion, d'une gentillesse, et d'une efficacité à toute épreuve : Marie-Paule Bressoulaly, Karine Darot, Laurence Schmitt et Valérie Sourlier. Je remercie également Patrice Malfreyt, directeur de l'école doctorale des sciences fondamentales, pour l'attention qu'il porte à ses étudiants et au bon fonctionnement de son école. Sans oublier Eliane Passemard, pour son professionnalisme et son efficacité.

De manière générale, je remercie tout le laboratoire de mathématiques, et particulièrement l'équipe EDPAN, ainsi que tous mes collègues doctorants.

Enfin, les derniers, mais pas les moindres, remerciements iront à mon entourage, qui a dû "subir" ma thèse et mes "mots compliqués" durant ces trois années. Je pense à ma famille, ma compagne, mes collocataires, mes amis, ...

Bref, merci à vous tous.

Index des notations principales (non exhaustif)

U, V, W, u	:	inconnues génériques d'un système d'E.D.P.
v	:	inconnue générique d'un système d'E.D.P., ou vitesse d'un fluide
ν	:	vitesse d'un fluide après changement de variables
n/ρ	:	densité d'un fluide avant/après changement de variables
p	:	pression
h	:	enthalpie
E/F	:	champ électrique, avant/après changement de variables
B/Z	:	champ magnétique, avant/après changement de variables
φ	:	potentiel électrique
ε	:	petit paramètre générique, destiné à tendre vers 0
γ	:	petit paramètre, inverse de la vitesse de la lumière
τ	:	petit paramètre, temps de relaxation
d	:	entier, dimension de l'espace
l	:	entier, nombre d'équations dans un système générique d'E.D.P.
r	:	entier fixé, $0 \leq r \leq l$
m	:	entier fixé ; généralement $m \geq 2$
s	:	entier fixé, lié à la régularité des fonctions ; généralement $s > d/2 + 1$
α, β	:	multi-indices génériques
i, j, k, σ	:	entiers génériques
Ω	:	espace d'état, dans lequel vit l'inconnue
ω	:	espace générique inclus dans Ω
$\mathbb{T}^d, \mathcal{S}^{d-1}$	:	tore unité en dimension d, sphère unité en dimension d
$L^\infty(.), L^1(.), L^2(.)$	:	espaces de fonctions bornées, intégrables
$H^s(.)$	:	espaces de Sobolev
$\mathcal{C}(.), \mathcal{C}^1(.), \mathcal{C}^\infty(.)$	:	espaces de fonctions continues, de classe $\mathcal{C}^1$, infiniment dérivables
Q, q	:	fonctionnelles décrivant le terme source dans un système d'E.D.P.
ζ, ξ	:	vecteurs génériques
$t/\tilde{t}$	:	variables temporelles avant/après changement de variables
$x = (x_1, ..., x_d)$	:	variable spatiale
e	:	fonction exponentielle
c, ϖ	:	constantes génériques
δ	:	constante utilisée dans l'inégalité de Young : $2ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2$
$C, C_0, C_1, \varpi_1, c_1, ...$	:	constantes fixes
$\overline{X}$	:	condition initiale sur la fonction X
$\underline{X}$	:	suite $(X_0, X_1, X_2, ...)$
X^T	:	transposée de la matrice ou du vecteur X
X^*	:	adjoint de la matrice ou du vecteur X
$\langle X, Y \rangle$	:	produit scalaire dans $L^2(.)$ des fonctions X et Y

Introduction générale

Cette thèse se compose de travaux théoriques concernant l'existence uniforme locale et globale de solutions pour des systèmes hyperboliques non linéaires du premier ordre. Plus précisément, les premiers résultats concernent une classe générale d'équations aux dérivées partielles hyperboliques (EDPH) : les systèmes hyperboliques symétrisables.

Le système d'Euler-Maxwell mono-fluide est un cas particulier de ces systèmes, et intervient dans la modélisation de plasmas, fluides composés d'ions de charge q_{ion} et d'électrons de charge $q_{elec} = -1$. Nous devons le traiter à part dans l'étude de l'existence globale uniforme.

Nous nous plaçons donc, de manière générale, en dimension $d \in \mathbb{N}^*$, en notant $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ la variable position, et $t \geq 0$ la variable temporelle. Les notations utilisées sont, pour deux fonctions vectorielles $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix}$ et $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{bmatrix}$:

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f_j, \quad f \otimes g = (f_i g_j)_{1 \leq i,j \leq d}, \quad (f.\nabla)\, g = \sum_{j=1}^{d} f_j \partial_{x_j} g.$$

De plus, lorsque $d = 3$, on note

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{bmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad f \wedge g = \begin{bmatrix} f_2 g_3 - f_3 g_2 \\ f_3 g_1 - f_1 g_3 \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{bmatrix}.$$

Pour une fonction scalaire f, on note

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_d} f \end{bmatrix}.$$

Il convient maintenant de décrire précisément ce que sont le système d'Euler-Maxwell et les systèmes hyperboliques symétrisables.

$*$ Le système d'Euler-Maxwell mono-fluide peut se décrire comme suit (voir également [11], [52] ou [53]).

Notons dans un premier temps $\gamma > 0$ l'inverse de la vitesse de la lumière, et $\tau > 0$ le temps de relaxation. Notons également $n(x,t)$, $v(x,t)$, $E(x,t)$, $B(x,t)$ respectivement la densité des électrons, la vitesse des électrons, le champ électrique et le champ magnétique à la position x et à l'instant t. Alors, si les ions sont supposés immobiles, de charge $q_{ion} = +1$, et de densité $b(x)$ indépendante du temps (on parle alors de système *mono-fluide*), les équations qui régissent ces quatre variables sont, d'une part, les équations de la mécanique des fluides appliquées aux électrons (système d'Euler : conservation de la masse, et conservation de la quantité de mouvement), et, d'autre part, les équations de l'électro-magnétisme (système de Maxwell). On peut les exprimer de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}(nv) = 0, \\ \partial_t(nv) + \operatorname{div}(nv \otimes v) + \nabla p(n) = -n(E + \gamma v \wedge B) - \dfrac{nv}{\tau}, \\ \partial_t E - \dfrac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(B) = nv, \quad \operatorname{div}(E) = b(x) - n, \\ \partial_t B + \dfrac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(E) = 0, \quad \operatorname{div}(B) = 0, \end{cases}$$

où $p(n)$ représente la pression du fluide, supposée strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Ce système, lorsque $n > 0$ (ce que la cohérence physique suggère), peut se réecrire

$$\begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}(nv) = 0, \\ \partial_t v + (v.\nabla)v + \nabla h(n) = -(E + \gamma v \wedge B) - \dfrac{v}{\tau}, \\ \partial_t E - \dfrac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(B) = nv, \quad \operatorname{div}(E) = b(x) - n, \\ \partial_t B + \dfrac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(E) = 0, \quad \operatorname{div}(B) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $h(n)$ représente l'*enthalpie*, définie par

$$h(n) = \int_1^n \frac{p'(y)}{y} dy. \tag{2}$$

Puisque p est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, h aussi.

$*$ Les systèmes hyperboliques symétrisables sont définis comme suit.

Définition 0.1. Soit $l \in \mathbb{N}^*$, et $(x,t) \mapsto U(x,t)$ une fonction vectorielle à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^l$. Donnons-nous d fonctions matricielles $A_j(.)$, de taille $l \times l$, définies sur Ω, et une fonction vectorielle $Q(.)$ également définie sur Ω. Alors le système suivant, d'inconnue U :

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} A_j(U)\partial_{x_j} U = Q(U), \tag{3}$$

est dit *hyperbolique symétrisable* lorsqu'il existe une fonction matricielle $A_0(.)$, appelée *symétriseur*, telle que, pour tout $U \in \Omega$:

(i) $A_0(U)\zeta.\zeta \geq C_0|\zeta|^2$, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^l$,

(ii) $\tilde{A}_j(U) \overset{def}{=} A_0(U)A_j(U)$ est symétrique pour tout $j \in \{1, ..., d\}$,

où $C_0 > 0$ est une constante, où "." est le produit scalaire classique de $\mathbb{R}^l$, et où $|.|$ est la norme Euclidienne classique de $\mathbb{R}^l$.

Les systèmes hyperboliques symétrisables sont, en particulier, hyperboliques (c'est-à-dire que la matrice $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \zeta_j A_j(U)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_d) \in \mathcal{S}^{d-1}$). Le système d'Euler-Maxwell mono-fluide est un exemple de système hyperbolique symétrisable, avec

$$U = \begin{bmatrix} n \\ v \\ E \\ B \end{bmatrix}, \quad A_j(U) = \begin{bmatrix} v_j & n\mathbf{e}_j^T & 0 & 0 \\ h'(n)\mathbf{e}_j & v_j\mathbf{I}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_j \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_j^T & 0 \end{bmatrix}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

où $\mathbf{e}_j$ désigne le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, où $\mathbf{I}_3$ est la matrice identité de taille 3×3, où

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et avec

$$A_0(U) = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h'(n)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Notons que pour un système hyperbolique symétrisable donné, le symétriseur n'est pas unique. Lorsque les matrices A_j sont constantes pour tout $j \in \{1, ..., d\}$, on parle de systèmes hyperboliques semi-linéaires.

Intéressons-nous maintenant aux paramètres γ et τ, intervenant dans le système d'Euler-Maxwell. La constante γ étant l'inverse de la vitesse de la lumière, il arrive très souvent que ce paramètre soit très petit par rapport aux autres données du problème, et il pourrait être judicieux de simplifier le problème en considérant que ce paramètre tend vers 0. On parle de limite non relativiste (*nonrelativistic limit*). De même, le temps de relaxation τ est parfois très court, et il peut être judicieux de considérer que ce paramètre tends vers 0. On parle alors de limite à relaxation nulle (*zero-relaxation limit*).

Ces deux paramètres peuvent être choisis indépendamment, et nous pouvons étudier chacune des deux limites séparément. Cependant le passage à la limite est loin d'être trivial. Imaginons, par exemple, que nous parvenions à montrer l'existence locale d'une solution au système (1) sur un temps $[0, T_*]$, $T_* > 0$, alors ce temps d'existence T_* dépend des deux constantes γ et τ, et il est tout à fait possible que

$$T_* \underset{\gamma \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et/ou} \quad T_* \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ce problème n'est pas inhérent au système d'Euler-Maxwell, et peut se généraliser aux systèmes hyperboliques symétrisables. Nous étudierons donc, par exemple, des systèmes hyperboliques symétrisables du type

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} A_j(U)\partial_{x_j} U = \frac{Q(\varepsilon, U)}{\varepsilon}, \tag{4}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre destiné à tendre vers 0. Ce système est une généralisation du cas de la constante τ dans le système (1). On le voit intervenir dans plusieurs domaines de la science : mécanique des fluides, dynamique des gaz, optique, *etc.*.

Ainsi, tout au long de ce travail, nous nous intéressons à l'étude de systèmes dépendant d'un petit paramètre, souvent présents dans des modèles issus des sciences (physique, biologie, chimie, géologie, volcanologie, *etc.*), le but étant, à terme, de considérer ce paramètre nul en vue de simplifications : simplification du système initial, mais aussi simplification des calculs numériques. Ces études permettent également le calcul rapide de solutions approchées. Ce mémoire se divise en trois majeures parties, qui sont autant de travaux menés à terme durant cette thèse. Ces résultats suivent l'ordre logique, et chronologique, de l'avancement de mes recherches.

1. La première partie traite de résultats théoriques sur l'existence locale de solutions pour un système hyperbolique symétrisable dépendant d'un petit paramètre. Lorsque le paramètre est fixe (système (3)), l'existence locale de solutions est prouvée depuis 1975 par Kato (cf. [27]). Quant à l'existence locale uniformément par rapport à une constante $\varepsilon > 0$, divers travaux ont déjà abouti, tant sur les systèmes hyperboliques symétrisables en général (système (4), cf. [68, 69, 70, 71, 32]) que sur le système d'Euler-Maxwell mono-fluide (système (1), cf. [19]). Cependant les résultats généraux sur les systèmes hyperboliques symétrisables n'incluaient pas la totalité des exemples connus, notamment le cas du système d'Euler, et le cas du système d'Euler-Maxwell mono-fluide. Mon premier but fut donc de généraliser les résultats obtenus dans [68, 69, 70, 71, 32] pour inclure, entre autres, le résultat obtenu dans [19]. Ainsi nous aurions un résultat plus général, incluant de manière non exhaustive les premiers résultats, ainsi que le résultat sur le système d'Euler-Maxwell. Ce résultat fit l'objet d'un article intitulé *Parabolic limit with differential constraints of first-order quasilinear hyperbolic systems*, à paraître (cf. [54]).

2. La deuxième partie traite de résultats théoriques sur l'existence globale de solutions pour un système de type (4), avec un terme source Q indépendant de ε. Lorsque le paramètre est fixe (système (3)), l'existence globale de solutions autour d'un équilibre constant a été démontré par Hanouzet et Natalini en dimension 1 dans [20], puis en dimension quelconque par Yong dans [72]. Il s'agit de reprendre les calculs en tenant compte du paramètre ε, comme l'ont fait Coulombel, Goudon et Lin dans [13, 35] pour le système d'Euler, ainsi que Beauchard et Zuazua dans [3] pour un cas particulier de système hyperbolique symétrisable. Ces travaux ont permis de confirmer, sous certaines hypothèses plus larges que [3], l'existence globale de ce type de systèmes uniformément par rapport à ε. Ce résultat a fait l'objet d'un article récemment soumis, intitulé *Uniform global existence and parabolic limit for partially dissipative hyperbolic systems* (cf. [55]). Cependant, les hypothèses excluent le cas du système (1), j'ai donc décidé ensuite de traiter ce cas.

3. La troisième partie décrit deux résultats d'existence globale pour (1), uniformément par rapport aux constantes γ et τ, respectivement. Ces deux résultats permettent ensuite de prouver la convergence vers deux systèmes limites, un pour chaque étude. Ils font l'objet d'un article récemment soumis, intitulé *Uniform global existence and convergence of Euler-Maxwell systems with small parameters* (cf. [66]). Un résultat d'existence locale uniforme avait déjà été démontré, cf. [49, 53] ; ainsi qu'un résultat d'existence globale sans prise en compte des paramètres, cf. [53].

Voyons maintenant en détails les résultats principaux démontrés dans chaque partie. Les notations utilisées dans ceux-ci sont les suivantes :

* Pour simplifier, nous notons H^s, L^2, L^∞ et W^{p_1,p_2} les espaces $H^s(\mathbb{K}^d)$, $L^2(\mathbb{K}^d)$, $L^\infty(\mathbb{K}^d)$ et $W^{p_1,p_2}(\mathbb{K}^d)$, respectivement, avec $\mathbb{K} = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (tore unité) dans le chapitre 1, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans le chapitre 2, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$ dans le chapitre 3. De même, les normes $\|.\|_{H^s(\mathbb{K}^d)}$, $\|.\|_{L^2(\mathbb{K}^d)}$, $\|.\|_{L^\infty(\mathbb{K}^d)}$ et $\|.\|_{W^{p_1,p_2}(\mathbb{K}^d)}$, sont abrégées en $\|.\|_s$, $\|.\|$, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_{p_1,p_2}$, respectivement. Le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{K}^d)$ est noté $\langle .,. \rangle$.
* Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, nous notons

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d.$$

Résultats de la première partie : Existence locale uniforme de solutions pour les systèmes hyperboliques symétrisables.

Cette première partie traite de systèmes hyperboliques non linéaires de taille $l \in \mathbb{N}^*$, de la forme

$$\partial_t U + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{d} A_j(U) \partial_{x_j} U = \frac{Q(\varepsilon, U)}{\varepsilon^2}, \tag{5}$$

où $U \in \mathbb{R}^l$ est l'inconnue, $(\varepsilon, U) \mapsto Q(\varepsilon, U) \in \mathbb{R}^l$ et $U \mapsto A_j(U) \in \mathbb{R}^{l\times l}$ sont des fonctions données, et $\varepsilon > 0$ est le petit paramètre destiné à tendre vers zéro.

Les conditions initiales peuvent dépendre de ce paramètre :

$$U(x,0) = \overline{U}(x,\varepsilon), \tag{6}$$

et le terme source Q est tel que

$$Q(0,U) = \begin{bmatrix} 0 \\ q(U) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

où $q\ :\Omega \to \mathbb{R}^r$ est une fonction régulière, $1 \leq r \leq l$, et

$$q(U) = 0 \Longleftrightarrow \Big(v = 0, \text{ et } \partial_v q(u,0) \text{ est inversible pour tout } u \in \mathbb{R}^{l-r} \Big), \tag{8}$$

où $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, $u \in \mathbb{R}^{l-r}$, $v \in \mathbb{R}^r$. Le choix de ce cadre est expliqué dans l'introduction du chapitre 1. Nous introduisons également des hypothèses, notées **(H1.1)**, ..., **(H1.6)**, dans le but de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.1.

*Soit U^ε la solution exacte de (5)-(6), définie sur l'intervalle de temps maximal $[0,T_\varepsilon)$. Soit $s > d/2+1$ un entier. Soit $m \geq 2$ un entier fixé, et soit U_m^ε une solution approchée de (5)-(6), définie sur $[0,T_m]$ avec $T_m > 0$ indépendant de ε. Supposons que les hypothèses **(H1.1)** à **(H1.6)** et (7)-(8) soient vérifiées. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, nous ayons $T_\varepsilon > T_m$, et*

$$\sup_{0 \leq t \leq T_m} \|U^\varepsilon(t) - U_m^\varepsilon(t)\|_s \leq c\varepsilon^m.$$

De plus,

$$\int_0^{T_m} \|v^\varepsilon(t) - v_\varepsilon^m(t)\|_s^2 \, dt \leq c\varepsilon^{2(m+1)}.$$

Ici, c désigne une constante générique indépendante de ε.

Notons que $m = 2$ suffit à démontrer l'existence locale uniforme par rapport au paramètre ($T_\varepsilon > T_2$), mais le fait de prouver le théorème pour tout $m \geq 2$ permet également d'avoir une solution approchée à ε^m près.

Ce résultat a fait l'objet d'un article récemment accepté pour publication (cf. [54]). La logique de cette partie suit celle de l'article dont elle est tirée.

Nous commencerons par introduire différents exemples concrets où peut intervenir ce genre de systèmes : deux exemples de systèmes semi-linéaires, puis le système d'Euler avec relaxation et le système d'Euler-Maxwell avec relaxation.

Nous rappellerons ensuite les différentes études qu'ont menées Kato (cf. [27]) dans le cadre de l'existence locale de solutions pour un tel système, puis celles de Yong et Lattanzio (cf. [32]) dans le cadre de leur étude asymptotique. Nous verrons les limites de leurs études grâce aux exemples cités, puis nous expliquerons l'intérêt de notre étude dans le but de pallier ces limites.

Nous prouverons alors le théorème 1.1 par une étude formelle puis exacte d'une solution approchée, à laquelle nous ferons suivre une méthode classique d'estimation d'énergie. Cette méthode nous donne à la fois la forme du système limite et le degré de convergence de la solution approchée, que nous construirons de manière inductive par la résolution d'un système parabolique non linéaire de taille $l-r$, $r>0$ (avec contraintes selon les cas), puis par la résolution de systèmes paraboliques linéaires de taille $l-r$ (avec contraintes selon les cas).

Nous discuterons un peu plus longuement du cas avec contraintes, qui à notre connaissance ne connaît pas de méthode de résolution systématique.

Résultats de la deuxième partie : Existence globale uniforme de solutions pour les systèmes hyperboliques symétrisables.

La deuxième partie traite de systèmes hyperboliques non linéaires de taille $l \in \mathbb{N}^*$, sous la forme non conservative

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} A_j(U)\partial_{x_j} U = \frac{Q(U)}{\varepsilon}, \tag{9}$$

où $U \in \mathbb{R}^l$ est l'inconnue, $U \mapsto Q(U) \in \mathbb{R}^l$ et $U \mapsto A_j(U) \in \mathbb{R}^{l\times l}$ sont des fonctions données, et $\varepsilon > 0$ est le petit paramètre destiné à tendre vers zéro.

Notre but est de montrer l'existence globale d'une solution de (9) autour d'un équilibre constant U_e, uniformément par rapport à ε. Les conditions initiales seront

$$U(0,x) = \overline{U}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{10}$$

Plus précisément, nous supposons comme en première partie que $Q(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ q(U) \end{bmatrix}$, nous effectuons le changement de variable $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \leftrightarrow V = \begin{bmatrix} u \\ q(u,v) \end{bmatrix}$, puis nous introduisons des hypothèses notées **(H2.1)**, ..., **(H2.5)**, ainsi que la condition de Shizuta-Kawashima, notée **(SK)**, dans le but de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.1.

*Soit $s > d/2+1$ un entier, et soit $\overline{U} \in U_e + H^s$. Supposons satisfaites les hypothèses **(H2.1)** à **(H2.5)** et **(SK)**. Il existe deux constantes $\varpi_1 > 0$ et $c_1 > 0$, indépendantes de ε, telles que, si $\|\overline{U} - U_e\|_s \leq \varpi_1$, alors pour tout $\varepsilon \in (0,1]$, le problème de Cauchy (9)-(10) admet une unique solution globale U^ε, satisfaisant*

$$U^\varepsilon - U_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s),$$

et, pour tout $t \geq 0$,

$$\|U^\varepsilon(t) - U_e\|_s^2 + \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon}\|q(u^\varepsilon(t'), v^\varepsilon(t'))\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla u^\varepsilon(t')\|_{s-1}^2\right) dt' \leq c_1\|\overline{U} - U_e\|_s^2.$$

Nous rappelons ensuite, tout comme dans la première partie, les différents résultats obtenus par Hanouzet, Natalini, Yong, Beauchard, Zuazua, Coulombel, Goudon, *etc.* pour aboutir aux limites de ces résultats, et donc aux motivations de l'article [55].

Nous prouvons alors le théorème 2.1 par des estimations d'énergie, faisant intervenir, tout comme dans les articles de Yong, Beauchard et Zuazua, transformations de Fourier et condition de Shizuta-Kawashima **(SK)**. Cette dernière peut prendre plusieurs formes légèrement différentes, nous l'utilisons telle que décrite dans [72] (pour les autres formes, voir [59, 61, 20, 3]) :

$$\textbf{(SK)} \qquad \left|\begin{array}{l} \text{Le noyau du Jacobien } \partial_U Q(U_e),\ \mathfrak{Ker}(\partial_U Q(U_e)), \\[2ex] \text{ne contient aucun vecteur propre de la matrice } \displaystyle\sum_{j=1}^d \zeta_j A_j(U_e), \\[2ex] \text{quel que soit } \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_d) \in \mathcal{S}^{d-1} \text{ (la sphère unité de } \mathbb{R}^d). \end{array}\right.$$

Nous nous intéressons ensuite à l'éventuel système limite qui en découle, et prouvons, après un changement de variables temporelles, la convergence de ces systèmes vers des systèmes paraboliques non linéaires d'ordre deux. Plus précisément, nous démontrons les trois résultats suivants :

Théorème 2.2.

Supposons les hypothèses du théorème 2.1 vérifiées. Alors pour tout $T > 0$ et tout $s_1 \in [0, s)$, lorsque $\varepsilon \to 0$, on a

$$\begin{aligned} u^\varepsilon - u_e \rightharpoonup u_0 - u_e, &\quad \text{faiblement-}* \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s), \\ u^\varepsilon \to u_0, &\quad \text{uniformément dans } \mathcal{C}\left([0,T]; H^{s_1}_{loc}\right), \\ q(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \to 0, &\quad \text{fortement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^s), \end{aligned}$$

où u_0 est l'unique solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{11}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_0 = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u_0(0, x) = \overline{u}(x), \end{cases}$$

et où $\mathcal{A}_j(V) = A_j(U)$.

Nous introduisons ensuite deux hypothèses un peu plus fortes, **(H2.6)** et **(H2.7)**, dans le but de démontrer :

Théorème 2.3.

*Supposons les hypothèses du théorème 2.1 vérifiées, ainsi que **(H2.6)** et **(H2.7)**.*

Alors, si l'on note

$$\mu^\varepsilon(\tilde{t},x) = u^\varepsilon(\tilde{t}/\varepsilon,x), \quad \lambda^\varepsilon(\tilde{t},x) = \frac{1}{\varepsilon} q\left(u^\varepsilon(\tilde{t}/\varepsilon,x), v^\varepsilon(\tilde{t}/\varepsilon,x)\right),$$

lorsque $\varepsilon \to 0$*, la suite* $(\mu^\varepsilon, \lambda^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *converge dans le sens suivant :*

$$\begin{aligned} \mu^\varepsilon - u_e \rightharpoonup \mu_0 - u_e, &\quad \text{faiblement-}* \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s), \\ \lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda_0, &\quad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^s), \end{aligned}$$

et pour tout $T > 0$ *et tout* $s_1 \in [0, s)$,

$$\mu^\varepsilon \to \mu_0, \quad \text{uniformément dans } \mathcal{C}\left([0,T]; H^{s_1}_{loc}\right),$$

où μ_0 *est la solution globale du problème suivant :*

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}}\mu_0 + \sum_{i,j=1}^d \Big[\mathcal{A}_i^{12}(\mu_0,0)\partial_{x_i}\left[[\partial_v q(\mu_0,v_e)]^{-1}\mathcal{A}_j^{21}(\mu_0,0)\partial_{x_j}\mu_0\right] & \\ - \partial_{\mathfrak{q}}\mathcal{A}_i^{11}(\mu_0,0)\,[\partial_v q(\mu_0,v_e)]^{-1}\mathcal{A}_j^{21}(\mu_0,0)\partial_{x_j}\mu_0\partial_{x_i}\mu_0\Big] &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

avec condition initiale

$$\mu_0(0,x) = \overline{u}(x), \tag{12}$$

et où λ_0 *est donné par*

$$\lambda_0 = [\partial_v q(\mu_0,v_e)]^{-1}\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{21}(\mu_0,0)\partial_{x_j}\mu_0. \tag{13}$$

Théorème 2.4.

Supposons les hypothèses du théorème 2.3 vérifiées. Il existe deux constantes $\varpi_2 > 0$ *et* $c_2 > 0$ *telles que, si* $\|\overline{u} - u_e\|_s \le \varpi_2$*, alors le problème de Cauchy (11)-(12) admet une unique solution* μ_0 *satisfaisant* $\mu_0 - u_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s)$ *et* $\nabla\mu_0 \in L^2(\mathbb{R}^+; H^s)$*. De plus, pour tout* $t \ge 0$,

$$\|\mu_0(t,.) - u_e\|_s^2 + \int_0^t \|\nabla\mu_0(t',.)\|_s^2\,dt' \le c_2\|\overline{u} - u_e\|_s^2.$$

Enfin, nous parlerons du cas particulier de l'existence globale lorsque le paramètre ε est fixé. Plus précisément, nous prouverons le résultat suivant :

Théorème 2.5.

Soit $s > d/2+1$ *un entier, et* $\varepsilon = 1$*. Supposons* $\overline{U} - U_e \in H^s$*, et les hypothèses* ***(H2.1)-(H2.2)-(SK)*** *vérifiées. Il existe une constante* $\varpi_3 > 0$ *telle que, si* $\|\overline{U} - U_e\|_s \le \varpi_3$*, alors le problème de Cauchy associé au système (9) avec condition initiale* $\overline{U}$ *admet une unique solution globale* U_0 *vérifiant* $U_0 - U_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s)$*, à supposer que nous ayons une des deux conditions suivantes :*

(i) ***(H2.4)-(H2.5)***,

(ii) $d \geq 3$.

Nous donnerons également des exemples où ces théorèmes peuvent s'appliquer.

Tous ces résultats ont fait l'objet d'un article récemment soumis (cf. [55]). La logique de cette partie suit également celle de l'article dont elle est tirée.

Résultats de la troisième partie : Existence globale uniforme de solutions pour le système d'Euler-Maxwell.

La troisième partie traite du système (1) avec conditions initiales $(\overline{n}, \overline{v}, \overline{E}, \overline{B})$ dépendants de τ ou γ. En particulier, $d = 3$. La densité des ions $b(x)$ est supposée constante égale à 1. Le système considéré est donc le suivant :

$$(14) \qquad \begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}(nv) = 0, \\ \partial_t v + (v.\nabla)v + \nabla h(n) = -(E + \gamma v \wedge B) - \dfrac{v}{\tau}, \\ \partial_t E - \dfrac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(B) = nv, \quad \operatorname{div}(E) = 1 - n, \\ \partial_t B + \dfrac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(E) = 0, \quad \operatorname{div}(B) = 0. \end{cases}$$

Et les conditions initiales sont :

$$(15) \qquad (n, v, E, B)(t = 0) = (\overline{n}^\varepsilon, \overline{v}^\varepsilon, \overline{E}^\varepsilon, \overline{B}^\varepsilon),$$

avec $\varepsilon = \tau$ et $\varepsilon = \gamma$ dans l'étude de la relaxation nulle et dans l'étude non relativiste, repectivement.

Puisque le système (14) ne satisfait pas les conditions données dans le chapitre 2, notamment **(SK)**, nous devons traiter le cas à part.

Notre but est alors de montrer l'existence globale d'une solution, autour d'un équilibre constant, uniformément par rapport à chacune des constantes τ et γ. Les résultats démontrés sont les suivants :

Théorème 3.1.

Soit $\gamma = 1$, et soit $s \geq 3$ un entier. Il existe trois constantes $\tau_0 > 0$, $\varpi_4 > 0$ et $c_4 > 0$, indépendantes de τ et du temps, telles que pour tout $\tau \in (0, \tau_0]$, si

$$\|\overline{n}^\tau - 1\|_s + \|\overline{v}^\tau\|_s + \|\overline{E}^\tau\|_s + \|\overline{B}^\tau - B_e\|_s \leq \varpi_4,$$

alors le problème périodique (14)-(15) admet une unique solution globale $(n^\tau, v^\tau, E^\tau, B^\tau)$, satisfaisant

$$n^\tau - 1, v^\tau, E^\tau, B^\tau - B_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s).$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
&\|n^\tau(t)-1\|_s^2+\|v^\tau(t)\|_s^2+\|E^\tau(t)\|_s^2+\|B^\tau(t)-B_e\|_s^2\\
&+\int_0^t\left[\frac{1}{\tau}\|v^\tau(t')\|_s^2+\tau\|n^\tau(t')-1\|_s^2\right]dt'\\
&\le c_4\left(\|\overline{n}^\tau-1\|_s^2+\|\overline{v}^\tau\|_s^2+\|\overline{E}^\tau\|_s^2+\|\overline{B}^\tau-B_e\|_s^2\right),\quad \forall t\ge 0.
\end{aligned}
$$

Théorème 3.2.

Soit $(n^\tau,v^\tau,E^\tau,B^\tau)$ la solution donnée par le théorème 3.1. On définit une suite en temps lent par

$$
(\rho^\tau,\nu^\tau,F^\tau,Z^\tau)(\tilde{t},x)=\left(n^\tau,\frac{v^\tau}{\tau},E^\tau,B^\tau\right)\left(\frac{\tilde{t}}{\tau},x\right).
$$

Supposons qu'il existe $\overline{n}_0$ indépendant de τ satisfaisant, lorsque $\tau\to 0$,

$$
\overline{n}^\tau-1\rightharpoonup \overline{n}_0-1,\quad \text{faiblement dans}\quad H^s.
$$

Alors il existe des fonctions ρ_0-1, F_0, $Z_0-B_e\in L^\infty(\mathbb{R}^+;H^s)$ et $\nu_0\in L^2(\mathbb{R}^+;H^s)$ telles que, lorsque $\tau\to 0$, on ait

$$
(\rho^\tau-1,F^\tau,Z^\tau-B_e)\rightharpoonup(\rho_0-1,F_0,Z_0-B_e),\quad \text{faiblement-}*\ \text{dans}\quad \left[L^\infty(\mathbb{R}^+;H^s)\right]^3,
$$

$$
\nu^\tau\rightharpoonup\nu_0,\quad \text{faiblement dans}\quad L^2(\mathbb{R}^+;H^s),
$$

De plus, pour tout $T>0$ et tout $s_1\in[0,s)$, on a, lorsque $\tau\to 0$,

$$
\rho^\tau\to\rho_0,\quad \text{uniformément dans}\quad \mathcal{C}\left([0,T];H^{s_1}\right),
$$

et (ρ_0,φ_0) est l'unique solution globale du système de dérive-diffusion suivant :

$$
\begin{cases}
\partial_t\rho_0-\operatorname{div}\left[\rho_0\left(\nabla h(\rho_0)-\nabla\varphi_0\right)\right]=0,\\
-\Delta\varphi_0=1-\rho_0,
\end{cases}
$$

avec condition initiale

$$
\rho_0(t=0)=\overline{n}_0.
$$

Notons que φ_0 est unique à une constante additive près. De plus,

$$
Z_0=cst.,\quad F_0=-\nabla\varphi_0,\quad \nu_0=-\nabla\left[h(\rho_0)-\varphi_0\right].
$$

Théorème 3.3.

Soit $\tau=1$, et $s\ge 3$ un entier. Il existe deux constantes $\varpi_5>0$ et $c_5>0$, indépendantes de γ et du temps, telles que pour tout $\gamma\in(0,1]$, si

$$
\|\overline{n}^\gamma-1\|_s+\|\overline{v}^\gamma\|_s+\|\overline{E}^\gamma\|_s+\|\overline{B}^\gamma-B_e\|_s\le\varpi_5,
$$

alors le problème périodique (14)-(15) *admet une unique solution globale* $(n^\gamma, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma)$ *satisfaisant*

$$n^\gamma - 1, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma - B_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\|n^\gamma(t) - 1\|_s^2 + \|v^\gamma(t)\|_s^2 + \|E^\gamma(t)\|_s^2 + \|B^\gamma(t) - B_e\|_s^2 \\
&+ \int_0^t \left[\|v^\gamma(t')\|_s^2 + \|n^\gamma(t') - 1\|_s^2\right] dt' \\
&\le c_5 \left(\|\overline{n}^\gamma - 1\|_s^2 + \|\overline{v}^\gamma\|_s^2 + \|\overline{E}^\gamma\|_s^2 + \|\overline{B}^\gamma - B_e\|_s^2\right), \quad \forall t \ge 0.
\end{aligned}$$

Théorème 3.4.

Soit $(n^\gamma, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma)$ *la solution globale donnée par le théorème 3.3. Supposons qu'il existe* $\overline{n}_0$ *et* $\overline{v}_0$ *indépendants de* γ *satisfaisant, lorsque* $\gamma \to 0$,

$$(\overline{n}^\gamma - 1, \overline{v}^\gamma) \rightharpoonup (\overline{n}_0 - 1, \overline{v}_0), \quad \text{faiblement dans} \quad (H^s)^2.$$

Alors il existe des fonctions $n_0 - 1$, v_0, E_0, $B_0 - B_e \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)$ *telles que, lorsque* $\gamma \to 0$, *nous ayons*

$$(n^\gamma - 1, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma - B_e) \rightharpoonup (n_0 - 1, v_0, E_0, B_0 - B_e), \quad \text{faiblement-}* \text{ dans} \quad \left[L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)\right]^4.$$

De plus, pour tout $T > 0$ *et tout* $s_1 \in [0, s)$, *nous avons, lorsque* $\gamma \to 0$,

$$(n^\gamma, v^\gamma) \to (n_0, v_0), \quad \text{fortement dans} \quad [\mathcal{C}([0, T]; H^{s_1})]^2,$$

et (n_0, v_0, φ_0) *est l'unique solution globale du système d'Euler-Poisson suivant :*

$$\begin{cases}
\partial_t n_0 + \operatorname{div}(n_0 v_0) = 0, \\
\partial_t v_0 + (v_0.\nabla) v_0 + \nabla h(n_0) = \nabla \varphi_0 - v_0, \\
-\Delta \varphi_0 = 1 - n_0,
\end{cases}$$

avec conditions initiales

$$(n_0, v_0)(t = 0) = (\overline{n}_0, \overline{v}_0).$$

Notons que φ_0 *est unique à une constante additive près. De plus, nous avons*

$$E_0 = -\nabla \varphi_0 \quad \text{et} \quad \begin{cases}
\operatorname{div}(B_0) = 0, \\
\operatorname{rot}(B_0) = -n_0 v_0.
\end{cases}$$

Ces résultats font l'objet d'un article récemment soumis (cf. [66]). La logique de ce chapitre suit également celle de l'article dont il est tiré.

Première partie

Existence locale uniforme de solutions pour les systèmes hyperboliques symétrisables

Introduction

Nous traiterons dans cette partie de systèmes hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre, avec terme source, de la forme (5), avec les conditions initiales (6). Ce système peut se déduire de (4) par un changement de variable temporelle $\varepsilon t \leftrightarrow t$. Comme décrit en introduction, $U : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d \to \Omega \subset \mathbb{R}^l$ est l'inconnue, avec $x = (x_1, ..., x_d)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ est un petit paramètre, et $Q : [0, 1] \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ est une fonction vectorielle régulière. L'espace Ω est appelé *espace d'état*, et les matrices A_j ($j \in \{1, ..., d\}$), de taille $l \times l$, sont des fonctions régulières définies sur Ω. On suppose que (5) est hyperbolique symétrisable, avec $A_0(U)$ comme symétriseur. En général, le terme source Q ne dépend que de U. Le fait qu'il puisse aussi dépendre de ε permet d'inclure le cas du système (1) (cf. paragraphe 1.1.2).

Dans (5), la variable t doit être vue comme un temps court, lié au temps usuel t' défini par $t = \varepsilon t'$. Ainsi (5) est équivalent à (4), qui est une forme très générale de système hyperbolique quasi-linéaire du premier ordre avec relaxation dans le terme source. Ce type de système fut étudié par de nombreux auteurs dans le cas où Q ne dépend que de U. Sous certaines conditions, appelées *conditions de stabilité*, le système limite, associé à (4) lorsque $\varepsilon \to 0$, est de type hyperbolique. Voir [67, 37, 12, 24, 46, 69, 58, 70] (et leurs références) pour des résultats mathématiques et des exemples physiques de (4).

Le but de cette première partie est d'étudier la limite de solutions locales régulières de (5)-(6) lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous considérons le problème sur le tore unité $\mathbb{T}^d$. La condition initiale $\overline{U}$ est supposée régulière et périodique en espace.

La plupart du temps, le terme source est de la forme (ou, par une transformation linéaire, peut être ramené à la forme) (7). Nous garderons cette hypothèse durant toute cette partie.

La partition $(l-r, r)$ étant utilisée à répétition, nous notons selon cette même partition

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{l-r}, \ \ v \in \mathbb{R}^r,$$

et de manière générale, nous décomposons selon cette partition un vecteur $X \in \mathbb{R}^l$ et une matrice M de taille $l \times l$ en $\begin{bmatrix} X^I \\ X^{II} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{21} & M^{22} \end{bmatrix}$, respectivement.

Dans le but d'obtenir le résultat souhaité, nous devons de plus supposer (8). Cette hypothèse est vérifiée dans tous les exemples donnés dans le paragraphe 1.1.2.

Lorsque $\varepsilon \to 0$, le système limite de (5) fut étudié dans [40, 39, 42] pour des modèles spécifiques. Dans [7] ont également été étudiées des approximations de systèmes paraboliques par des modèles BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) diffusifs. Contrairement au cas de (3), en général le système limite de (5) est de type parabolique.

Dans [32], Lattanzio et Yong ont considéré le cas d'un système hyperbolique symétrisable du premier ordre de la forme

$$\partial_t U + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d} A_j(\varepsilon U)\partial_{x_j} U + \sum_{j=1}^{d} \bar{A}_j(U)\partial_{x_j} U = \frac{Q(U)}{\varepsilon^2}, \tag{1.1}$$

avec les conditions initiales régulières et périodiques décrites dans (6). Sous certaines conditions de stabilité, ils ont prouvé la convergence de ce système vers un système de type parabolique, sur un intervalle de temps indépendant de ε. Dans leur cas, les singularités proviennent des termes $Q(U)/\varepsilon^2$ et $A_j(\varepsilon U)/\varepsilon$, il n'y a pas de difficulté à traiter le cas de $\bar{A}_j(U)$. L'avantage est que le terme $\partial_{x_j} A_j(\varepsilon U)$ est toujours un terme d'ordre $O(\varepsilon)$, propriété très utile lors des estimations d'énergie d'ordre supérieur à 1, permettant d'utiliser des inégalités de type Moser (cf. [28, 38]).

D'autre part, lorsque les matrices A_j sont constantes et les $\bar{A}_j$ nulles ($j \in \{1, ..., d\}$), le système (1.1) devient semi-linéaire, et fut déjà étudié dans [42] dans le cas de la dimension 1. Le résultat de [42] peut par exemple être appliqué aux équations des ondes linéaires avec conduction de chaleur (*linear wave equation of heat conduction*) et au modèle discret à deux vitesses généralisé (*generalized discrete two-velocity model*). Écrivons alors (1.1) comme suit :

$$\partial_t U + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d} A_j(0)\partial_{x_j} U + \sum_{j=1}^{d} \left[\bar{A}_j(U) + \frac{A_j(\varepsilon U) - A_j(0)}{\varepsilon}\right]\partial_{x_j} U = \frac{Q(U)}{\varepsilon^2}.$$

Puisque $\left[A_j(\varepsilon U) - A_j(0)\right]/\varepsilon$ est d'ordre $O(1)$, (1.1) apparaît essentiellement comme une extension du problème semi-linéaire en dimension supérieure. En outre, nous verrons que le résultat de [32] n'est pas applicable sur au moins deux exemples de systèmes hyperboliques quasi-linéaires, décrits dans le paragraphe 1.1.2.

Dans cette partie, nous étudions donc la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, du système quasi-linéaire de forme générale (5). Nous proposons des conditions de stabilité, satisfaites à la fois par les exemples semi-linéaires et par les exemples quasi-linéaires mentionnés ci-dessus. Tout comme dans les précédents travaux sur ce sujet, nous construisons une solution approchée grâce à un développement asymptotique de séries formelles, avec *correction de couches initiales*. La nouveauté provient du fait que les équations limites permettant de construire cette solution approchée sont généralement accompagnées de contraintes différentielles.

À notre connaissance, il n'existe pas de résultat général concernant l'existence d'une solution locale régulière pour ce type de systèmes, même dans le cas où (5) est semi-linéaire. La recherche d'un tel résultat est un peu éloigné du but de nos recherches, et serait sujette à de plus amples investigations. Nous donnons dans cette partie des conditions (suffisantes) pour que ces sytèmes soient paraboliques et sans contrainte différentielle.

Nous justifions ensuite, dans le cas où la solution approchée existe, que ce développement asymptotique est rigoureux sur un temps indépendant de ε. Les applications d'un tel résultat incluent les systèmes quasi-linéaires d'Euler et Euler-Maxwell, présentés en (1.20) et (1), respectivement. Pour ce dernier, il y a effectivement des contraintes différentielles dans les équations limites. S'il n'existe pas de résultat général pour l'existence d'une solution locale régulière, nous pouvons tout de même continuer l'étude dans le cas du système (1), car les équations limites satisfont un système de dérive-diffusion (*drift-diffusion system*), dont on sait l'existence de solution locale régulière (cf. [43]).

Puisque $\overline{U}$ est régulière et périodique en espace, selon le résultat de Kato (cf. [27]), pour tout entier $s > d/2+1$, il existe un temps maximal $T_\varepsilon > 0$ tel que le problème (5)-(6) admet une unique solution régulière locale U^ε, satisfaisant

$$U^\varepsilon \in \mathcal{C}([0,T_\varepsilon); H^s) \cap \mathcal{C}^1([0,T_\varepsilon); H^{s-1}).$$

Le problème principal, dans cette étude, est de montrer que U^ε converge lorsque $\varepsilon \to 0$, mais aussi de montrer que $\inf\limits_{0<\varepsilon\leq 1} T_\varepsilon > 0$. Plus précisément, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, nous noterons U_m^ε une solution régulière approchée de (5)-(6), définie sur $[0, T_m]$, où $T_m > 0$ est une constante indépendante de ε. Cette solution sera construite grâce à un développement asymptotique de la forme

$$U_m^\varepsilon(t,x) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \left[U_k(t,x) + I_k(\tilde{t},x)\right], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

avec $\tilde{t} = t/\varepsilon^2$ la variable temporelle rapide. Un tel T_m sera alors indépendant de ε car il sera défini comme

$$T_m = \min_{k\in\{0,\ldots,m\}} \{ \text{ temps d'existence des } U_k \text{ et } I_k \ \}.$$

Pour tout entier $m \geq 2$, nous voulons prouver que $T_\varepsilon > T_m$, et que

$$\sup_{0\leq t\leq T_m} \|U^\varepsilon(t,.) - U_m^\varepsilon(t,.)\|_s \leq c\varepsilon^m,$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de ε. Notons qu'il suffirait de prouver que $T_\varepsilon > T_2$ pour avoir l'existence locale uniforme, mais prouver le résultat pour tout m permet également d'avoir construit une solution approchée à ε^m près.

Le résultat principal de cette partie est le théorème 1.1, donné dans la section 1.1.1 et dans l'introduction générale. La preuve est basée sur des estimations d'énergie uniformes par rapport à ε. Cependant, les estimations d'énergie classiques ne nous permettraient pas de conclure. La difficulté principale provient du terme $\partial_{x_j} A_j(U^\varepsilon)$, désormais d'ordre $O(1)$ au lieu de $O(\varepsilon)$ dans (1.1).

Pour pallier cette difficulté, nous utilisons l'argument de continuité suivant. Supposons que

$$\|U^\varepsilon(0,.) - U_m^\varepsilon(0,.)\|_s \leq c\varepsilon^m.$$

Pour tout $T_\varepsilon^1 \in (0,T_\varepsilon) \cap (0,T_m]$, la fonction $t \longmapsto \|U^\varepsilon(t,.) - U_m^\varepsilon(t,.)\|_s$ est continue sur $[0, T_\varepsilon^1]$. Ainsi, si nous fixons un entier $m \geq 2$, et si ε est assez petit, il existe un temps maximal $T_\varepsilon^2 \in (0, T_\varepsilon) \cap (0, T_m]$ pour lequel

$$\sup_{0 \leq t \leq T_\varepsilon^2} \|U^\varepsilon(t, .) - U_m^\varepsilon(t, .)\|_s \leq \varepsilon.$$

Ce résultat fait l'objet du lemme 1.2. Dès lors, il suffit de montrer que

$$\sup_{0 \leq t \leq T_\varepsilon^2} \|U^\varepsilon(t, .) - U_m^\varepsilon(t, .)\|_s \leq c\varepsilon^m.$$

En effet, cette dernière égalité implique rapidement (nous le démontrerons) que $T_\varepsilon^2 = T_m$. On a donc $T_\varepsilon > T_m$.

En outre, cet argument de continuité nous permet de ne garder que les termes quadratiques dans les estimations d'énergie, ce qui évite des calculs compliqués, notamment l'utilisation d'une inégalité de type Gronwall non linéaire, comme procédé dans [69, 32].

Cette première partie peut se décomposer comme suit. Dans la section suivante (section 1.1), nous présentons les conditions de stabilité utilisées pour obtenir un système limite pour (5), puis nous énonçons le théorème 1.1. La section 1.2 est consacrée à la preuve de ce théorème, formée d'une succession de lemmes de type estimation d'énergie, couplée à une inégalité de Gronwall à coefficients variables. Dans la dernière section (section 1.3), nous détaillons les équations satisfaites par les U_k et I_k définis dans (1.2). Lorsque les données initiales sont petites, nous montrons que pour tout $k \in \{0, ..., m\}$, l'existence des I_k est assurée globalement, et ces derniers décroissent exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t} \to +\infty$. À propos des exemples quasi-linéaires, nous prouvons que les solutions approchées peuvent être construites rigoureusement, et donc que le théorème peut leur être appliqué. Enfin, dans l'annexe, nous donnons la preuve du lemme 1.1, et des propositions 1.2-1.3 (des résultats similaires ont déjà été établis dans de précédents travaux).

1.1 Résultats principaux et exemples

1.1.1 Hypothèses et théorème principal

Dans un premier temps, nous introduisons les notations suivantes, valables dans tout ce premier chapitre : $\mathbf{Im}(X)$ désigne l'image d'une fonction X ; et pour deux ensembles ω, $\Omega \in \mathbb{R}^l$, la notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est relativement compact dans Ω.

Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier. On désigne par U_m^ε une solution approchée de (5)-(6), définie sur $[0, T_m]$ avec $T_m > 0$ indépendant de ε. Alors l'erreur de cette approximation est définie par

$$R_m^\varepsilon = \partial_t U_m^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{d} A_j(U_m^\varepsilon) \partial_{x_j} U_m^\varepsilon - \frac{Q(\varepsilon, U_m^\varepsilon)}{\varepsilon^2}. \tag{1.3}$$

Ainsi, une condition nécessaire pour que U_m^ε soit une solution approchée de (5)-(6) est que $R_m^\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans la section 1.3, nous construisons une telle solution approchée grâce à un développement asymptotique avec correction de couche initiale. Ses propriétés dépendent principalement de son terme dominant $U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$, qui est la limite formelle de U^ε. Du système (5) et de la condition (8), on obtiendra $v_0 = 0$, ainsi que :

$$\sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_0 - \partial_\varepsilon Q^I(0, u_0, 0) = 0, \tag{1.4}$$

$$\partial_t u_0 + \sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(u_0, 0)\partial_{x_j} v_1 + \sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_1 + g_0(u_0, \nabla u_0, v_1) = 0, \tag{1.5}$$

et

$$v_1 = [\partial_v q(u_0, 0)]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{d} A_j^{21}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_0 - \partial_\varepsilon Q^{II}(0, u_0, 0)\right], \tag{1.6}$$

où

$$g_0(u_0, \nabla u_0, v_1) = \sum_{j=1}^{d} \partial_v A_j^{11}(U_0) v_1 \partial_{x_j} u_0 - \partial_v \partial_\varepsilon Q^I(0, u_0, 0) v_1 - \frac{1}{2}\partial_\varepsilon^2 Q^I(0, u_0, 0). \tag{1.7}$$

Ainsi, le système pour u_0 est (1.4)-(1.5). Comparé à l'étude de [32], l'équation (1.4) est nouvelle : il s'agit d'une contrainte différentielle sur u_0. Dans le cas de (1.1), puisque Q est indépendant de ε, la contrainte différentielle correspondante serait

$$\sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(0)\partial_{x_j} u_0 = 0,$$

contrainte trivialement satisfaite lorsque $A_j^{11}(0) = 0$ pour tout j, ce qui était une hypothèse de [32].

Il nous reste néanmoins à éliminer u_1 de l'équation (1.5). Pour cela, nous supposons qu'il existe une matrice constante D, carrée d'ordre $l - r$, telle que

$$DA_j^{11}(u, 0) = 0, \quad \forall 1 \le j \le d, \quad \forall u. \tag{1.8}$$

En appliquant D à (1.5), on obtient

$$D\partial_t u_0 + D\sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j} v_1 + Dg_0(u_0, \nabla u_0, v_1) = 0, \tag{1.9}$$

et (1.5) peut se réécrire

$$\sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(U_0)\partial_{x_j}u_1 + (\mathbf{I}_{l-r} - D)\left[\partial_t u_0 + \sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j}v_1 + g_0(u_0, \nabla u_0, v_1)\right] = 0. \tag{1.10}$$

En conclusion, lorsque u_0 est construit, on a v_1 grâce à (1.6), et il reste une contrainte (1.10) pour u_1. Regardons le système satisfait par u_0 de plus près.

En injectant (1.6) dans (1.9), on obtient

$$\begin{aligned} D\partial_t u_0 + D\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(u_0)\partial^2_{x_ix_j}u_0 + D\sum_{j=1}^{d} B_j(u_0)\partial_{x_j}u_0 \\ + D\sum_{i,j=1}^{d} C_{ij}(u_0)\partial_{x_i}u_0\partial_{x_j}u_0 + Df_0(u_0) = 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec

$$A_{ij}(u_0) = A_i^{12}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1} A_j^{21}(u_0,0), \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} B_j(u_0) = &- A_j^{12}(u_0,0)\partial_u\left[\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}\partial_\varepsilon Q^{II}(0,u_0,0)\right] \\ &- \partial_v A_j^{11}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}\partial_\varepsilon Q^{II}(0,u_0,0) \\ &- \partial_v\partial_\varepsilon Q^{I}(0,u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1} A_j^{21}(u_0,0), \end{aligned} \tag{1.13}$$

(1.14)
$$C_{ij}(u_0) = A_i^{12}(u_0,0)\partial_u\left[\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1} A_j^{21}(u_0,0)\right] + \partial_v A_j^{11}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1} A_i^{21}(u_0,0),$$

et

$$f_0(u_0) = -\frac{1}{2}\partial_\varepsilon^2 Q^I(0,u_0,0) + \partial_v\partial_\varepsilon Q^I(0,u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}\partial_\varepsilon Q^{II}(0,u_0,0). \tag{1.15}$$

Remarquons que u_0 est une fonction vectorielle, et qu'ainsi (1.11) est un système d'E.D.P. évolutif que l'on doit combiner aux contraintes différentielles (1.4). Si $D = \mathbf{I}_{l-r}$, trouver u_0 demande des conditions de compatibilité entre (1.11) et (1.4). Dans le cas simple où pour tout u

$$A_j^{11}(u,0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\varepsilon Q^I(0,u,0) = 0, \quad \forall j \in \{1, ..., d\},$$

les contraintes différentielles disparaissent, alors le terme principal dans (1.11) est gouverné par un opérateur différentiel de second ordre de la forme

$$\partial_t + \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(u_0)\partial^2_{x_ix_j}.$$

Si cet opérateur est parabolique, il est possible de résoudre (1.11) localement en temps (cf. [29]). En particulier, lorsque $l - r = 1$, u_0 satisfait une équation parabolique scalaire, qui peut être résolue par des techniques standard. C'est le cas des exemples semi-linéaires et des équations d'Euler données dans la section 1.1.2. Un autre cas intéressant advient lorsque les équations et les contraintes différentielles sont séparées. Par exemple, prenons $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, avec $r_1+r_2 = l-r$. Si les r_1 premières lignes de $A_j^{11}(U_0)$ et de $\partial_\varepsilon Q^I(0, u_0, 0)$ sont nulles, on prend $D = \operatorname{diag}(\mathbf{I}_{r_1}, \mathbf{0}_{r_2})$, alors (1.8) est satisfait, et (1.11) signifie que seules les r_1 premières composantes de u_0 satisfont un système d'E.D.P. d'ordre deux évolutif, avec r_2 contraintes différentielles données par (1.4). Un exemple type où cette situation se produit est le système d'Euler-Maxwell avec relaxation, décrit dans nos exemples.

Avant d'énoncer le théorème principal, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H1.1) *Les matrices* $A_j^{11}(u_0, 0)$ *et* $\tilde{A}_j^{11}(u_0, 0)$ *sont constantes, et* $\partial_u A_j^{11}(u_0, 0) = 0$ *pour tout* $j \in \{1, ..., d\}$ *;*

(H1.2) *Il existe une constante* $C_1 > 0$*, dépendant uniquement de* Ω*, telle que*

$$A_0(u, 0)\partial_U Q(0, u, 0)\zeta.\zeta \leq -C_1|\zeta^{II}|^2, \quad \textit{pour tout } (u, 0) \in \Omega \textit{ et tout } \zeta \in \mathbb{R}^l;$$

(H1.3) $\partial_u \partial_\varepsilon Q^I(0, u, 0) = 0$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}^{l-r}$ *;*

(H1.4) $\overline{U} \in H^s$*, et il existe un ensemble ouvert convexe* $\Omega_0 \subset \Omega$ *tel que* ***Im*** $\left(\overline{U}\right) \subset\subset \Omega_0$ *;*

(H1.5) *Pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit,* U_m^ε *satisfait* $U_m^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T_m]; H^{s+1}) \cap \mathcal{C}^1([0, T_m]; H^s)$*,* ***Im***$(U_m^\varepsilon) \subset\subset \Omega_0$*,*

$$\|U_m^\varepsilon(0, .) - \overline{U}(., \varepsilon)\|_s \leq c\varepsilon^m, \tag{1.16}$$

et

$$\|\partial_t U_m^\varepsilon(t, .)\|_s \leq c + c\varepsilon^{-2}e^{-\frac{\varpi t}{\varepsilon^2}}, \qquad \sup_{0 \leq t \leq T_m} \|U_m^\varepsilon(t, .) - U_0(t, .)\|_s \leq c\varepsilon + ce^{-\frac{\varpi t}{\varepsilon^2}}, \tag{1.17}$$

où $\varpi > 0$ *est une constante indépendante de* ε *;*

(H1.6) *L'erreur* R_m^ε *définie dans* (1.3) *peut se mettre sous la forme*

$$R_m^\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\begin{bmatrix} 0 \\ r_m \end{bmatrix} + \varepsilon^{m-1}F_m^\varepsilon,$$

avec $r_m \in \mathcal{C}([0, T_m]; H^s)$*,* $F_m^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T_m]; H^s)$ *et*

$$\|F_m^\varepsilon(t)\|_s \leq c\varepsilon + ce^{-\frac{\varpi t}{\varepsilon^2}}.$$

Théorème 1.1.

Soit U^ε *la solution exacte de* (5)-(6)*, définie sur l'intervalle de temps maximal* $[0, T_\varepsilon)$*. Soit* $s > d/2 + 1$ *un entier. Soit* $m \geq 2$ *un entier fixé, et soit* U_m^ε *une solution approchée de* (5)-(6)*, définie sur* $[0, T_m]$ *avec* $T_m > 0$ *indépendant de* ε*. Supposons que les hypothèses* ***(H1.1)-(H1.6)*** *et* (7)-(8) *soient vérifiées. Alors il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, pour tout* $\varepsilon \in$

$(0, \varepsilon_0]$, *nous ayons* $T_\varepsilon > T_m$, *et*

$$\sup_{0 \le t \le T_m} \|U^\varepsilon(t) - U_m^\varepsilon(t)\|_s \le c\varepsilon^m. \tag{1.18}$$

De plus,

$$\int_0^{T_m} \|v^\varepsilon(t) - v_\varepsilon^m(t)\|_s^2 \, dt \le c\varepsilon^{2(m+1)}. \tag{1.19}$$

Passons maintenant aux remarques associées à ces hypothèses.

Remarque 1.1.

– Les hypothèses **(H1.1)**-**(H1.3)**, couplées à (7)-(8), sont des conditions structurelles de stabilité pour le système quasi-linéaire (5), elles peuvent être vérifiées pour un système donné et un u_0 donné. En particulier, elles sont satisfaites pour tous les exemples donnés dans le paragraphe 1.1.2.
– L'hypothèse **(H1.1)** est utilisée dans les preuves des lemmes 1.3-1.4 et 1.7. C'est une amélioration de la condition $\left(A_j^{11}(0) = 0, j \in \{1, ..., d\}\right)$ étudiée pour la résolution du système (1.1) dans [32].
– L'hypothèse **(H1.1)** est en particulier satisfaite lorsque les matrices $A_j^{11}(u, 0)$ et $\tilde{A}_j^{11}(u, 0)$ sont constantes pour tout $j \in \{1, ..., d\}$ et tout u. C'est le cas dans tous les exemples étudiés dans le paragraphe 1.1.2. Elle est également satisfaite lorsque u_0 est constant et $\partial_u A_j^{11}(u_0, 0) = 0$, ou lorsque le système (5) est semi-linéaire.
– L'hypothèse **(H1.2)** est une hypothèse de dissipation partielle sur le système (5). Couplée aux conditions (7)-(8), elle implique une propriété utile sur le symétriseur (cf. lemme 1.1 ci-dessous). Lorsque $r = l$, c'est-à-dire que la dissipation est complète, on obtient $U = v$. Ce cas est plus facile à traiter que le cas partiel, c'est pourquoi nous supposerons directement que $r \in \{1, ..., l-1\}$.
– L'hypothèse **(H1.3)** est une hypothèse technique que doit satisfaire le terme source. Elle est trivialement satisfaite lorsque Q ne dépend que de U.
– L'hypothèse **(H1.4)** est nécessaire pour appliquer le théorème de Kato (cf. [38]).
– Dans l'hypothèse **(H1.5)**, (1.16) est une condition naturelle sur l'erreur initiale. Les conditions (1.17) et **(H1.6)** doivent être vérifiées lors de la construction de la solution approchée U_m^ε dans la section 1.3.

Lemme 1.1.

Pour tout $(u, 0) \in \Omega$, *l'hypothèse* ***(H1.2)****, couplée à* (7)-(8), *implique* $A_0^{12}(u, 0) = 0$.

Preuve.

Voir l'annexe de la première partie.

1.1.2 Exemples

Nous détaillons ici des exemples d'applications du théorème 1.1. Dans ce paragraphe, nous vérifions que chaque exemple satisfait les hypothèses présentées, puis, dans le paragraphe 1.3.4, nous voyons comment construire les solutions approchées pour ces exemples.

Exemples semi-linéaires

Voici maintenant deux exemples de systèmes semi-linéaires de la forme (5) avec $l = 2$ et $d = 1$. Ces deux exemples étaient déjà considérés dans [32] comme des applications de (1.1). Le premier exemple concerne l'équation des ondes avec conduction de chaleur suivante :

$$\varepsilon^2 \partial_{tt}^2 \Psi - \partial_{xx}^2 \Psi + \partial_t \Psi = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Ce système a déjà été étudié par plusieurs auteurs (cf. [21, 34] et leurs références). Posons

$$u = \partial_x \Psi, \quad v = -\varepsilon \partial_t \Psi.$$

Alors le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t u + \dfrac{1}{\varepsilon} \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \dfrac{1}{\varepsilon} \partial_x u = -\dfrac{v}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Il s'agit bien de la forme (5), avec

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -v \end{bmatrix}.$$

Posons alors $A_0 = I_2$ et $r = 1$. Il est facile de vérifier que le système est bien hyperbolique symétrisable, et satisfait (7)-(8) et les hypothèses **(H1.1)** à **(H1.3)**, avec $A_1^{11} = 0$ et

$$A_0 \partial_U Q(u, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les équations limites correspondantes sont, pour U_0, $v_0 = 0$, et l'équation de la chaleur mono-dimensionnelle

$$\partial_t u_0 - \partial_x^2 u_0 = 0.$$

Le deuxième exemple concerne le modèle discret à deux vitesses généralisé (*generalized discrete two-velocity model*) :

$$\begin{cases} \partial_t f + \varepsilon^{-1} \partial_x f = \varepsilon^{-2} (f+g)^{\chi} (g - f), \\ \partial_t g - \varepsilon^{-1} \partial_x g = \varepsilon^{-2} (f+g)^{\chi} (f - g), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où χ est un nombre réel et $f + g > 0$. Ce système fut étudié dans [63, 56, 36]. Après le changement de variables $u = f + g$ et $v = f - g$, le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t u + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x u = -\dfrac{2u^\chi v}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Posons alors $A_0 = I_2$, $r = 1$, et

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2u^\chi v \end{bmatrix}.$$

Pour $u \geq cst. > 0$, le système est hyperbolique symétrisable, et satisfait (7)-(8) et les hypothèses **(H1.1)** à **(H1.3)**, avec $A_1^{11} = 0$ et

$$A_0 \partial_U Q(u, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2u^\chi \end{bmatrix}.$$

Le système limite correspondant, pour U_0, est $v_0 = 0$, et

$$\partial_t u_0 - \frac{1}{2}\partial_x \left(u_0^{-\chi} \partial_x u_0 \right) = 0.$$

Système d'Euler avec relaxation

Le système d'Euler se décrit comme suit (cf. aussi, par exemple, [40, 39, 22, 60, 13]) :

$$\begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}(nv) = 0, \\ \partial_t (nv) + \operatorname{div}(nv \otimes v) + \nabla p(n) = -\dfrac{nv}{\tau}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1.20}$$

où $n > 0$ est la densité du fluide, v sa vitesse, et p sa pression, fonction uniquement de n, suffisamment régulière et satisfaisant $p'(n) > 0$ pour $n > 0$. Le terme τ est, tout comme dans le système (1), un temps de relaxation. Puisque $n > 0$, la seconde équation dans (1.20) peut se réécrire

$$\partial_t v + (v.\nabla)v + \nabla h(n) = -\frac{v}{\tau}, \tag{1.21}$$

où h est l'enthalpie introduite en (2).

Après un changement de variable temporelle $t \leftrightarrow \tau t$ (variable usuelle $\leftrightarrow$ variable lente), le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t n + \dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{div}(nv) = 0, \\ \partial_t v + \dfrac{1}{\tau}\left[(v.\nabla)v + \nabla h(\rho)\right] = -\dfrac{v}{\tau^2}, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Posons $\tau = \varepsilon$, $u = n$, $U = \begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix}$,

$$A_j(U) = \begin{bmatrix} v_j & n\mathbf{e}_j^T \\ h'(n)\mathbf{e}_j & v_j \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad j \in \{1, ..., d\},\ \text{et } Q(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -v \end{bmatrix}, \quad q(U) = -v.$$

Alors, puisque $n > 0$ et $h'(n) > 0$, le symétriseur suivant

$$A_0(U) = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & h'(n)^{-1}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

donne un système hyperbolique symétrisable, qui satisfait (7)-(8), ainsi que les hypothèses **(H1.1)** à **(H1.3)** avec $l = d + 1$ et $r = d$.

Il est important de noter ici que le système ne peut se mettre sous la forme (1.1). Ainsi le résultat dans [32] ne peut être appliqué.

Système d'Euler-Maxwell avec relaxation

On s'intéresse ici au cas du système (1) lorsque $\gamma = 1$. Il s'agit de (cf. [4, 11]) :

$$\begin{cases} \partial_t n + \mathrm{div}(nv) = 0, \\ \partial_t v + (v.\nabla)v + \nabla h(n) = -(E + v \wedge B) - \dfrac{v}{\tau}, \\ \partial_t E - \mathrm{rot}\, B = nv, \quad \mathrm{div}\, E = b(x) - n, \\ \partial_t B + \mathrm{rot}\, E = 0, \quad \mathrm{div}\, B = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Les contraintes différentielles

$$\mathrm{div}\, E = b(x) - n, \quad \mathrm{div}\, B = 0,$$

sont invariantes en temps, il s'agit donc d'un système à 10 équations. Après changement de variable temporelle $t \leftrightarrow \tau t$ (variable usuelle $\leftrightarrow$ variable lente), ce système peut s'écrire

$$\begin{cases} \partial_t n + \dfrac{1}{\tau}\operatorname{div}(nv) = 0, \\ \partial_t B + \dfrac{1}{\tau}\operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0, \\ \partial_t E - \dfrac{1}{\tau}\operatorname{rot} B = \dfrac{nv}{\tau}, \quad \operatorname{div} E = b(x) - n, \\ \partial_t v + \dfrac{1}{\tau}(v.\nabla)v + \dfrac{1}{\tau}\nabla h(n) = -\dfrac{1}{\tau^2}(\tau E + \tau v \wedge B + v). \end{cases}$$

Posons $\tau = \varepsilon$,

$$u = \begin{bmatrix} n \\ B \\ E \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} n \\ B \\ E \\ v \end{bmatrix}, \quad A_j(U) = \begin{bmatrix} v_j & 0 & 0 & n\mathbf{e}_j^T \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_j^T & 0 & 0 \\ h'(n)\mathbf{e}_j & 0 & 0 & v_j\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

et

$$Q(\varepsilon, U) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon nv \\ -v - \varepsilon E - \varepsilon v \times B \end{bmatrix}, \quad Q^I(\varepsilon, U) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon nv \end{bmatrix}, \quad q(U) = -v.$$

Alors le système est bien de la forme (5), et, en choisissant pour symétriseur

$$A_0(U) = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h'(n)^{-1}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

on vérifie rapidement que le système est hyperbolique symétrisable, et satisfait les conditions (7)-(8) ainsi que les hypothèses **(H1.1)** à **(H1.3)**, avec $l = 10$ et $r = 3$. Les détails de la justification pour le système limite sont dans [53, 19]. Cette partie s'en est inspirée pour généraliser le résultat.

De même que l'exemple précédent, ce système ne peut être mis sous la forme (1.1), et le résultat de [32] ne peut être appliqué.

1.2 Justification des développements formels

1.2.1 Préliminaires

Soit $m \geq 2$ un entier, et U_m^ε une solution approchée de (5)-(6) définie sur $[0, T_m]$, avec $T_m > 0$ indépendant de ε. Alors, pour tout $T_\varepsilon^1 \in (0, T_\varepsilon) \cap (0, T_m]$, les solutions exacte et approchée sont toutes deux définies sur l'intervalle $[0, T_\varepsilon^1]$, sur lequel on peut définir (pour alléger les calculs)

$$W^\varepsilon = U^\varepsilon - U_m^\varepsilon.$$

D'après (5) et (1.3), on obtient

$$\partial_t W^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j} W^\varepsilon = \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{b^\varepsilon}{\varepsilon^2} - R_m^\varepsilon, \tag{1.22}$$

avec

$$a^\varepsilon = \sum_{j=1}^d \left[A_j(U_m^\varepsilon) - A_j(U^\varepsilon)\right]\partial_{x_j} U_m^\varepsilon, \quad \text{et} \quad b^\varepsilon = Q(\varepsilon, U^\varepsilon) - Q(\varepsilon, U_m^\varepsilon).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$. Appliquons alors $\partial^\alpha(.)$ à (1.22), on obtient

$$\partial_t(\partial^\alpha W^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W^\varepsilon) = \frac{\partial^\alpha a^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\partial^\alpha b^\varepsilon}{\varepsilon^2} + \frac{f_\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} - \partial^\alpha R_m^\varepsilon, \tag{1.23}$$

avec

$$f_\alpha^\varepsilon = \sum_{j=1}^d \left[A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W^\varepsilon) - \partial^\alpha\left(A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j} W^\varepsilon\right)\right].$$

Prenons ensuite (1.23), et effectuons le produit scalaire L^2 avec $A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon$. Grâce à la symétrie de A_0 et $\tilde{A}_j$, on obtient l'égalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\right\rangle = {} & \left\langle \mathrm{div}_{A,\varepsilon}(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\right\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\right\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon^2}\left\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha b^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\right\rangle \\ & - 2\left\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha R_m^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\right\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0(U^\varepsilon)f_\alpha^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\right\rangle,\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{div}_{A,\varepsilon}(V) = \partial_t A_0(V) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}\tilde{A}_j(V).$$

Écrivons cette égalité comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\right\rangle = I_{1,\varepsilon}^\alpha + I_{2,\varepsilon}^\alpha + I_{3,\varepsilon}^\alpha + I_{4,\varepsilon}^\alpha + I_{5,\varepsilon}^\alpha,$$

avec les correspondances naturelles pour $I_{1,\varepsilon}^\alpha, ..., I_{5,\varepsilon}^\alpha$.

Nous avons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme 1.2.

*Sous l'hypothèse **(H1.5)**, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors il existe un temps maximal*

$T_\varepsilon^2 \in (0, T_\varepsilon) \cap (0, T_m]$, *tel que*

$$\|W^\varepsilon(t)\|_s \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon^2], \tag{1.24}$$

et l'on a

$$\text{ou bien} \quad \|W^\varepsilon(T_\varepsilon^2)\|_s = \varepsilon, \quad \text{ou bien} \quad T_\varepsilon^2 = T_m. \tag{1.25}$$

De plus,

$$\|U^\varepsilon(t) - U_0(t)\|_s \leq c\varepsilon + ce^{-\frac{\varpi t}{\varepsilon^2}}, \quad \|U^\varepsilon(t)\|_s \leq c, \quad \forall\ t \in [0, T_\varepsilon^2], \tag{1.26}$$

$$\boldsymbol{Im}(U^\varepsilon(t,x)) \subset\subset \Omega_0, \quad \forall\,(t,x) \in [0, T_\varepsilon^2] \times \mathbb{T}^d. \tag{1.27}$$

Preuve.

Pour tout $T_\varepsilon^1 \in (0, T_\varepsilon) \cap (0, T_m]$, puisque $W^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T_\varepsilon^1], H^s)$, la fonction $t \mapsto \|W^\varepsilon(t)\|_s$ est continue sur $[0, T_\varepsilon^1]$. De plus, pour un entier fixé $m \geq 2$, nous avons toujours, pour n'importe quelle constante $c > 0$, un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $c\varepsilon^m < \varepsilon$.

Si $T_m < T_\varepsilon$, alors $[0, T_\varepsilon) \cap [0, T_m] = [0, T_m]$, intervalle borné. Alors la condition (1.16) implique qu'il existe un temps maximal $T_\varepsilon^2 \in (0, T_m]$ tel que (1.24)-(1.25) soient satisfaits. Dans l'autre cas, $T_m \geq T_\varepsilon$, et $[0, T_\varepsilon) \cap [0, T_m] = [0, T_\varepsilon)$. Puisque T_ε est par définition le temps maximal d'existence pour U^ε, nous avons

$$\lim_{t \to T_\varepsilon^-} \|W^\varepsilon(t)\|_s = +\infty.$$

Ainsi, il existe encore un temps maximal $T_\varepsilon^2 \in (0, T_\varepsilon)$ tel que (1.24) soit satisfait, et $\|W^\varepsilon(T_\varepsilon^2)\|_s = \varepsilon$. On a donc aussi (1.24)-(1.25). Ensuite, (1.26) provient de (1.24) et de la condition (1.17), et (1.27) provient de (1.24), du fait que $\mathbf{Im}(U_m^\varepsilon) \subset\subset \Omega_0$ et de l'injection continue $H^s \hookrightarrow L^\infty$. □

Suivent maintenant 5 lemmes concernant les estimations de $I_{1,\varepsilon}^\alpha, ..., I_{5,\varepsilon}^\alpha$ sur $[0, T_\varepsilon^2]$. Pour calculer ces estimations, on supposera toujours que les conditions du théorème 1.1 sont satisfaites. Notons que l'on utilisera plusieurs fois (1.24), (1.26), et l'injection continue $H^s \hookrightarrow W^{1,\infty}$. Par souci de clarté, dans tout ce qui suit, on omet l'exposant et l'indice ε dans W^ε et dans $I_{1,\varepsilon}^\alpha, ..., I_{5,\varepsilon}^\alpha$, et nous noterons simplement

$$W = \begin{bmatrix} W^I \\ W^{II} \end{bmatrix}.$$

Notons également que, des conditions (7) et (8), nous obtenons

$$\partial_U Q(0,u,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial_v q(u,0) \end{bmatrix}, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^{l-r}.$$

Ainsi

$$\partial_U Q(0,u,0)W = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_v q(u,0)W^{II} \end{bmatrix}, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^{l-r}. \tag{1.28}$$

1.2.2 Estimations d'énergie

Généralement, les estimations d'énergie se font en plusieurs étapes : d'abord une estimation des normes L^2, lorsque $|\alpha| = 0$, puis les estimations d'ordre supérieur, lorsque $|\alpha| \geq 1$. Cependant, ces différentes estimations passent souvent par des calculs similaires, et dans le but d'éviter la répétition de tels calculs, on calculera directement une estimation générale, d'ordre $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, incluant le cas des normes L^2. C'est pourquoi la convention suivante est utilisée : $\|.\|_{-1} = 0$.

De plus, toujours dans le but de simplifier les notations dans la preuve des différents lemmes, on introduit

$$e_\varepsilon(t) = e^{-\frac{\varpi t}{\varepsilon^2}}. \tag{1.29}$$

Cette fonction apparaissait déjà dans les hypothèses **(H1.5)-(H1.6)** et dans (1.26).

Lemme 1.3.

On peut estimer I_1^α par

$$|I_1^\alpha(t)| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2 + c_\delta \left[1 + \frac{1}{\varepsilon}e_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s\right] \|W(t)\|_s^2, \tag{1.30}$$

pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^2]$, où $\delta > 0$ est une constante indépendante de ε, à fixer plus tard, et où c_δ est une constante générique dépendant uniquement de δ.

Preuve.

Rappelons que

$$I_1^\alpha = \langle \mathrm{div}_{A,\varepsilon}(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle\,,$$

avec

$$\mathrm{div}_{A,\varepsilon}(U^\varepsilon) = \partial_t A_0(U^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\tilde{A}_j(U^\varepsilon).$$

Ainsi

$$|I_1^\alpha| \leq \|\mathrm{div}_{A,\varepsilon}(U^\varepsilon)\|_\infty \|W\|_s^2.$$

Prouvons alors, dans un premier temps, que

$$\left|\Big\langle \partial_t A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\Big\rangle\right| \leq c\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}e_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|_s\Big)\|W\|_s^2. \tag{1.31}$$

En effet, le système (1.22) donne

$$\partial_t W = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j}W + \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{b^\varepsilon}{\varepsilon^2} - R_m^\varepsilon.$$

Or, on obtient rapidement que

$$\Big\|\sum_{j=1}^d A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j}W\Big\|_\infty \leq c\|W\|_s \leq c\varepsilon,$$

ainsi que

$$\|a^\varepsilon\|_\infty \leq c\|W\|_s \leq c\varepsilon.$$

D'après le fait que $m \geq 2$ et l'hypothèse **(H1.6)**, on a également

$$\|R_m^\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon^{m-1}\|r_m\|_\infty + \varepsilon^{m-1}\|F_m^\varepsilon\|_\infty \leq c.$$

Écrivons alors b^ε comme suit :

$$\begin{aligned}
b^\varepsilon &= Q(\varepsilon, U^\varepsilon) - Q(\varepsilon, U_m^\varepsilon)\\
&= Q(\varepsilon, U^\varepsilon) - Q(\varepsilon, U_m^\varepsilon) - \partial_U Q(\varepsilon, U_m^\varepsilon)W\\
&\quad + [\partial_U Q(\varepsilon, U_m^\varepsilon) - \partial_U Q(\varepsilon, U_0)]\,W + [\partial_U Q(\varepsilon, U_0) - \partial_U Q(0, U_0)]\,W\\
&\quad + \partial_U Q(0, U_0)W.
\end{aligned}$$

En prenant en compte (1.28), on obtient, d'après l'hypothèse **(H1.5)**, (1.24) et (1.26),

$$\|b^\varepsilon\|_\infty \leq c\varepsilon^2 + c\varepsilon e_\varepsilon + c\|W^{II}\|_s.$$

Ceci implique

$$\|\partial_t W\|_\infty \leq c + \frac{c}{\varepsilon}e_\varepsilon + \frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|_s.$$

Ainsi nous obtenons (1.31), grâce à **(H1.5)** et

$$\partial_t A_0(U^\varepsilon) = A_0'(U^\varepsilon)(\partial_t W + \partial_t U_m^\varepsilon).$$

Ensuite, puisque $\tilde{A}_j(U^\varepsilon)$ est symétrique, nous avons

$$\begin{aligned}
\Big\langle \partial_{x_j}\tilde{A}_j(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\Big\rangle &= \Big\langle \partial_{x_j}\tilde{A}_j^{11}(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\Big\rangle + 2\Big\langle \partial_{x_j}\tilde{A}_j^{12}(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^{II}, \partial^\alpha W^I\Big\rangle\\
&\quad + \Big\langle \partial_{x_j}\tilde{A}_j^{22}(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^{II}, \partial^\alpha W^{II}\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Dans le second membre de cette équation, les deux derniers termes sont majorés par

$$c\|W\|_s\|\partial^\alpha W^{II}\| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + c_\delta \varepsilon \|W\|_s^2.$$

Quant au premier terme, l'hypothèse **(H1.1)** implique

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \partial_{x_j} \tilde{A}_j^{11}(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\right\rangle\right| &= \left|\left\langle \partial_{x_j}\left[\tilde{A}_j^{11}(U^\varepsilon) - \tilde{A}_j^{11}(U_0)\right]\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\right\rangle\right| \\ &\leq c\|\partial_{x_j}(U^\varepsilon - U_0)\|_\infty \|W\|_s^2 \\ &\leq c(\varepsilon + e_\varepsilon)\|W\|_s^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\left\langle \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}\tilde{A}_j(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\right\rangle\right| \leq c_\delta\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2.$$

Couplé à (1.31), on obtient l'estimation (1.30). □

Lemme 1.4.

On peut estimer I_2^α par

$$(1.32)\qquad |I_2^\alpha(t)| \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2 + \frac{c_\delta}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_{|\alpha|-1}^2 + c_\delta\left[1 + \frac{1}{\varepsilon}e_\varepsilon(t)\right]\|W(t)\|_s^2,$$

pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^2]$, et pour tout $\delta > 0$.

Preuve.

Rappelons que

$$(1.33)\qquad \begin{aligned} I_2^\alpha &= \frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W\right\rangle \\ &= \frac{2}{\varepsilon}\left\langle [A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)]\,\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W\right\rangle + \frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0(U_0)\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W\right\rangle,\end{aligned}$$

avec

$$a^\varepsilon = \sum_{j=1}^d [A_j(U_m^\varepsilon) - A_j(U^\varepsilon)]\,\partial_{x_j}U_m^\varepsilon.$$

Grâce à l'hypothèse **(H1.5)** et à (1.24), on a clairement

$$\|\partial^\alpha a^\varepsilon\| \leq \|a^\varepsilon\|_s \leq c\|W\|_s.$$

De même, (1.26) donne

$$\|A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\|_\infty \leq c(\varepsilon + e_\varepsilon).$$

Ainsi,

$$(1.34)\qquad \frac{2}{\varepsilon}\left|\langle [A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)]\,\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W\rangle\right| \leq c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2.$$

Pour estimer le second terme dans (1.33), on utilise le fait que $A_0^{12}(U_0)=0$ (lemme 1.1). Alors un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\Big\langle A_0(U_0)\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle &= \sum_{j=1}^d \Big\langle A_0(U_0)\partial^\alpha\Big[(A_j(U_m^\varepsilon)-A_j(U^\varepsilon))\partial_{x_j}U_m^\varepsilon\Big], \partial^\alpha W\Big\rangle \\
&= \sum_{j=1}^d \Big\langle A_0^{11}(U_0)\partial^\alpha\Big[(A_j^{11}(U_m^\varepsilon)-A_j^{11}(U^\varepsilon))\partial_{x_j}u_\varepsilon^m\Big], \partial^\alpha W^I\Big\rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \Big\langle A_0^{11}(U_0)\partial^\alpha\Big[(A_j^{12}(U_m^\varepsilon)-A_j^{12}(U^\varepsilon))\partial_{x_j}v_\varepsilon^m\Big], \partial^\alpha W^I\Big\rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \Big\langle A_0^{22}(U_0)\partial^\alpha\Big[(A_j^{21}(U_m^\varepsilon)-A_j^{21}(U^\varepsilon))\partial_{x_j}u_\varepsilon^m\Big], \partial^\alpha W^{II}\Big\rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \Big\langle A_0^{22}(U_0)\partial^\alpha\Big[(A_j^{22}(U_m^\varepsilon)-A_j^{22}(U^\varepsilon))\partial_{x_j}v_\varepsilon^m\Big], \partial^\alpha W^{II}\Big\rangle.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Les deux derniers termes de (1.35) sont clairement majorés par

$$c\|W\|_s\|\partial^\alpha W^{II}\| \le \frac{\delta}{\varepsilon}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + c_\delta\varepsilon\|W\|_s^2, \text{ pour tout } \delta>0.$$

Puisque $v_0=0$, l'hypothèse **(H1.5)** implique $\|v_\varepsilon^m\|_s \le c\varepsilon + ce_\varepsilon$. Ainsi,

$$\left|\sum_{j=1}^d \Big\langle A_0^{11}(U_0)\partial^\alpha\Big[(A_j^{12}(U_m^\varepsilon)-A_j^{12}(U^\varepsilon))\partial_{x_j}v_\varepsilon^m\Big], \partial^\alpha W^I\Big\rangle\right| \le c\,(\varepsilon+e_\varepsilon)\,\|W\|_s^2.$$

Pour le premier terme de (1.35), on a

$$\begin{aligned}
A_j^{11}(U_m^\varepsilon)-A_j^{11}(U^\varepsilon) &= \Big[A_j^{11}(u_\varepsilon^m,v_\varepsilon^m)-A_j^{11}(u^\varepsilon,v_\varepsilon^m)\Big]+\Big[A_j^{11}(u^\varepsilon,v_\varepsilon^m)-A_j^{11}(u^\varepsilon,v^\varepsilon)\Big] \\
&= -\int_0^1 \partial_u A_j^{11}\left[u_\varepsilon^m+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m),v_\varepsilon^m\right] W^I\,d\theta \\
&\quad -\int_0^1 \partial_v A_j^{11}\left[u^\varepsilon,v_\varepsilon^m+\theta(v^\varepsilon-v_\varepsilon^m)\right] W^{II}\,d\theta.
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est majorable, grâce au terme en W^{II}. Quant à la première, elle se majore grâce à la condition $\partial_u A_j^{11}(u_0,0)=0$ de l'hypothèse **(H1.1)**. Plus précisément, on écrit

$$\begin{aligned}
&\partial_u A_j^{11}\left[u_\varepsilon^m+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m),v_\varepsilon^m\right] \\
&= \Big[\partial_u A_j^{11}\Big(u_\varepsilon^m+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m),v_\varepsilon^m\Big)-\partial_u A_j^{11}(u_0,v_\varepsilon^m)\Big]+\Big[\partial_u A_j^{11}(u_0,v_\varepsilon^m)-\partial_u A_j^{11}(u_0,0)\Big] \\
&= \int_0^1 \partial_{uu}^2 A_j^{11}\left[(1-\theta')u_0+\theta'(u_\varepsilon^m+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m)),v_\varepsilon^m\right]\left[u_\varepsilon^m-u_0+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m)\right]d\theta' \\
&\quad + \int_0^1 \partial_{uv}^2 A_j^{11}(u_0,\theta' v_\varepsilon^m)v_\varepsilon^m d\theta'.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^1 \partial_u A_j^{11}\left[u_\varepsilon^m+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m), v_\varepsilon^m\right] W^I\, d\theta \\
&=-\int_0^1\int_0^1 \partial_{uu}^2 A_j^{11}\left[(1-\theta')u_0+\theta'((u_\varepsilon^m+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m)), v_\varepsilon^m\right]\left[u_\varepsilon^m-u_0+\theta(u^\varepsilon-u_\varepsilon^m), W^I\right]\, d\theta d\theta' \\
&\quad -\int_0^1\int_0^1 \partial_{uv}^2 A_j^{11}(u_0,\theta' v_\varepsilon^m)(W^I, v_\varepsilon^m)\, d\theta d\theta'.
\end{aligned}
$$

Puisque $\|U_m^\varepsilon\|_s \le c\varepsilon + ce_\varepsilon$, cela implique

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^d \left\langle A_0^{11}(U_0)\partial^\alpha\Big[(A_j^{11}(U_m^\varepsilon)-A_j^{11}(U^\varepsilon))\partial_{x_j}u_\varepsilon^m\Big], \partial^\alpha W^I\right\rangle\right| \\
&\le \frac{\delta}{\varepsilon}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2+\frac{c_\delta}{\varepsilon}\|W^{II}(t)\|_{|\alpha|-1}^2+c_\delta\left(\varepsilon+e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2, \text{ pour tout } \delta>0.
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve, pour tout $\delta > 0$,

$$
\frac{2}{\varepsilon}\left|\langle A_0(U_0)\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W\rangle\right| \le \frac{\delta}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2+\frac{c_\delta}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_{|\alpha|-1}^2+c_\delta\left(1+\frac{1}{\varepsilon}e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2.
$$

Combiné à (1.33) et (1.34), cela implique (1.32). □

Lemme 1.5.

On peut estimer I_3^α par

$$
I_3^\alpha(t) \le \frac{4\delta - C_1}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2+\frac{c_\delta}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_{|\alpha|-1}+c_\delta\left[1+\frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon(t)\right]\|W(t)\|_s^2, \tag{1.36}
$$

*pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^2]$ et pour tout $\delta > 0$, où C_1 est la constante strictement positive donnée dans l'hypothèse **(H1.2)**.*

Preuve.

Rappelons que

$$
I_3^\alpha = \frac{2}{\varepsilon^2}\left\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha b^\varepsilon, \partial^\alpha W\right\rangle,
$$

avec

$$
b^\varepsilon = Q(\varepsilon, U^\varepsilon) - Q(\varepsilon, U_m^\varepsilon).
$$

On écrit dans un premier temps b^ε comme suit :

$$
\begin{aligned}
b^\varepsilon =\ & \partial_U Q(0,U_0)W \\
&+\varepsilon\partial_U\partial_\varepsilon Q(0,U_0)W \\
&+\left[Q(0,U^\varepsilon)-Q(0,U_m^\varepsilon)-\partial_U Q(0,U_0)W\right] \\
&+\varepsilon\Big[\partial_\varepsilon Q(0,U^\varepsilon)-\partial_\varepsilon Q(0,U_m^\varepsilon)-\partial_U\partial_\varepsilon Q(0,U_0)W\Big] \\
&+\left[Q(\varepsilon,U^\varepsilon)-Q(0,U^\varepsilon)-\varepsilon\partial_\varepsilon Q(0,U^\varepsilon)-(Q(\varepsilon,U_m^\varepsilon)-Q(0,U_m^\varepsilon)-\varepsilon\partial_\varepsilon Q(0,U_m^\varepsilon))\right],
\end{aligned}
$$

qui donne la notation suivante

$$I_3^\alpha = I_{31}^\alpha + I_{32}^\alpha + I_{33}^\alpha + I_{34}^\alpha + I_{35}^\alpha,$$

avec les correspondances naturelles pour $I_{31}^\alpha, ..., I_{35}^\alpha$.

Maintenant, estimons un à un chacun de ces termes.

(i) Pour I_{31}^α, on écrit

$$\begin{aligned} A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha\left[\partial_U Q(0,U_0)W\right] = & A_0(U_0)\partial_U Q(0,U_0)\partial^\alpha W \\ & + A_0(U_0)\left[\partial^\alpha\left(\partial_U Q(0,U_0)W\right) - \partial_U Q(0,U_0)\partial^\alpha W\right] \\ & + \left[A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\right]\partial^\alpha\left[\partial_U Q(0,U_0)W\right]. \end{aligned}$$

Alors l'hypothèse **(H1.2)** implique

$$\langle A_0(U_0)\partial_U Q(0,U_0)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle \leq -C_1\|\partial^\alpha W^{II}\|^2.$$

Considérant (1.28) et $A_0^{12}(U_0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \langle A_0(U_0)\left[\partial^\alpha\left(\partial_U Q(0,U_0)W\right) - \partial_U Q(0,U_0)\partial^\alpha W\right], \partial^\alpha W\rangle \\ = & \left\langle A_0^{22}(U_0)\left[\partial^\alpha\left(\partial_v q(U_0)W^{II}\right) - \partial_v q(U_0)\partial^\alpha W^{II}\right], \partial^\alpha W^{II}\right\rangle. \end{aligned}$$

Ce terme s'annule lorsque $\alpha = 0$. Ainsi, pour tout $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, par des calculs de type inégalités de Moser (cf. [28, 38]), on a toujours

$$\begin{aligned} & \langle A_0(U_0)\left[\partial^\alpha\left(\partial_U Q(0,U_0)W\right) - \partial_U Q(0,U_0)\partial^\alpha W\right], \partial^\alpha W\rangle \\ \leq & \, c\|W^{II}\|_{|\alpha|-1}.\|\partial^\alpha W^{II}\| \\ \leq & \, \frac{\delta}{2}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + c_\delta\|W^{II}\|_{|\alpha|-1}^2, \text{ pour tout } \delta > 0. \end{aligned}$$

Pour le dernier terme dans I_{31}^α, un calcul similaire permet d'aboutir à

$$\begin{aligned} & \langle\left[A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\right]\partial^\alpha\left[\partial_U Q(0,U_0)W\right], \partial^\alpha W\rangle \\ = & \left\langle\left[A_0^{12}(U^\varepsilon) - A_0^{12}(U_0)\right]\partial^\alpha\left[\partial_v q(U_0)W^{II}\right], \partial^\alpha W^I\right\rangle \\ & + \left\langle\left[A_0^{22}(U^\varepsilon) - A_0^{22}(U_0)\right]\partial^\alpha\left[\partial_v q(U_0)W^{II}\right], \partial^\alpha W^{II}\right\rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\|A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\|_\infty \leq c\varepsilon + ce_\varepsilon$ et $e_\varepsilon^2 \leq e_\varepsilon$, on a clairement

$$\begin{aligned} & \left\langle\left[A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\right]\partial^\alpha\left[\partial_U Q(0,U_0)W\right], \partial^\alpha W\right\rangle \\ \leq & \, c\left(\varepsilon + e_\varepsilon\right)\|\partial^\alpha W^{II}\|.\|W\|_{|\alpha|} \\ \leq & \, \frac{\delta}{2}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + c_\delta\|W^{II}\|_{|\alpha|-1}^2 + c_\delta(\varepsilon^2 + e_\varepsilon)\|W\|_s^2, \text{ pour tout } \delta > 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne, pour tout $\delta > 0$,

$$I_{31}^{\alpha} \leq \frac{\delta - C_1}{\varepsilon^2} \|\partial^{\alpha} W^{II}\|^2 + \frac{c_\delta}{\varepsilon^2} \|W^{II}\|_{|\alpha|-1}^2 + c_\delta \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e_\varepsilon\right) \|W\|_s^2.$$

(ii) Pour I_{32}^{α}, l'hypothèse **(H1.3)** donne

$$\partial_U \partial_\varepsilon Q(0, U_0) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_v \partial_\varepsilon Q^I(0, U_0) \\ \partial_u \partial_\varepsilon Q^{II}(0, U_0) & \partial_v \partial_\varepsilon Q^{II}(0, U_0) \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_{32}^{\alpha} = & \frac{2}{\varepsilon} \left\langle A_0^{11}(U^\varepsilon) \partial^{\alpha} \left[\partial_v \partial_\varepsilon Q^I(0, U_0) W^{II}\right], \partial^{\alpha} W^I \right\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon} \left\langle \left[A_0^{12}(U^\varepsilon) - A_0^{12}(U_0)\right] \partial^{\alpha} \left[\partial_u \partial_\varepsilon Q^{II}(0, U_0) W^I\right], \partial^{\alpha} W^I \right\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon} \left\langle A_0^{12}(U^\varepsilon) \partial^{\alpha} \left[\partial_v \partial_\varepsilon Q^{II}(0, U_0) W^{II}\right], \partial^{\alpha} W^I \right\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon} \left\langle A_0^{21}(U^\varepsilon) \partial^{\alpha} \left[\partial_v \partial_\varepsilon Q^I(0, U_0) W^{II}\right], \partial^{\alpha} W^{II} \right\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon} \left\langle A_0^{22}(U^\varepsilon) \partial^{\alpha} \left[\partial_u \partial_\varepsilon Q^{II}(0, U_0) W^I + \partial_v \partial_\varepsilon Q^{II}(0, U_0) W^{II}\right], \partial^{\alpha} W^{II} \right\rangle, \end{aligned}$$

dans lequel chaque terme est quadratique, et contient W^{II}, mis à part le second terme, majoré par $c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e_\varepsilon\right) \|W\|_s^2$ grâce au lemme 1.1. Ainsi,

$$|I_{32}^{\alpha}| \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} \|\partial^{\alpha} W^{II}\|^2 + \frac{c_\delta}{\varepsilon^2} \|W^{II}\|_{|\alpha|-1}^2 + c_\delta \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e_\varepsilon\right) \|W\|_s^2, \text{ pour tout } \delta > 0.$$

(iii) Pour I_{33}^{α}, puisque $\partial_u q(U_0) = 0$, on a (1.28), et $\partial_v q(U_0) W^{II} = \partial_U q(U_0) W$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & Q(0, U^\varepsilon) - Q(0, U_m^\varepsilon) - \partial_U Q(0, U_0) W \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ q(U^\varepsilon) - q(U_m^\varepsilon) - \partial_U q(U_m^\varepsilon) W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\partial_U q(U_m^\varepsilon) - \partial_U q(U_0)\right] W \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La formule de Taylor donne directement

$$\|\partial^{\alpha} \left[q(U^\varepsilon) - q(U_m^\varepsilon) - \partial_U q(U_m^\varepsilon) W\right]\| \leq c \|W\|_s^2 \leq c\varepsilon \|W\|_s$$

et

$$\|\partial^{\alpha} \left[\partial_U q(U_m^\varepsilon) - \partial_U q(U_0)) W\right]\| \leq c(\varepsilon + e_\varepsilon) \|W\|_s.$$

Puisque $A_0^{12}(U_0) = A_0^{21}(U_0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\varepsilon^2} \left|\langle A_0(U_0)\partial^\alpha \left[Q(0,U^\varepsilon) - Q(0,U_m^\varepsilon) - \partial_U Q(0,U_0)W\right], \partial^\alpha W\rangle\right| \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon^2} \left|\left\langle A_0^{22}(U_0)\partial^\alpha \left[q(U^\varepsilon) - q(U_m^\varepsilon) - \partial_U q(U_m^\varepsilon)W\right], \partial^\alpha W^{II}\right\rangle\right| \\
&\quad + \frac{2}{\varepsilon^2} \left|\left\langle A_0^{22}(U_0)\partial^\alpha \left[(\partial_U q(U_m^\varepsilon) - \partial_U q(U_0))W\right], \partial^\alpha W^{II}\right\rangle\right| \\
&\leq \frac{c}{\varepsilon^2}(\varepsilon + e_\varepsilon)\|W\|_s \|\partial^\alpha W^{II}\| \\
&\leq \frac{\delta}{2\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + c_\delta \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2, \text{ pour tout } \delta > 0.
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned}
I_{33}^\alpha = &\frac{2}{\varepsilon^2} \langle [A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)]\, \partial^\alpha \left[Q(0,U^\varepsilon) - Q(0,U_m^\varepsilon) - \partial_U Q(0,U_0)W\right], \partial^\alpha W\rangle \\
&+ \frac{2}{\varepsilon^2} \langle A_0(U_0)\partial^\alpha \left[Q(0,U^\varepsilon) - Q(0,U_m^\varepsilon) - \partial_U Q(0,U_0)W\right], \partial^\alpha W\rangle .
\end{aligned}$$

Le premier terme peut être majoré par les mêmes méthodes que ci-dessus, en utilisant $\|U^\varepsilon - U_0\|_s \leq c(\varepsilon + e_\varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\delta > 0$,

$$|I_{33}^\alpha| \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + c_\delta \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2.$$

(iv) Les mêmes méthodes permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
|I_{34}^\alpha| &= \varepsilon \left|\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha \left[\partial_\varepsilon Q(0,U^\varepsilon) - \partial_\varepsilon Q(0,U_m^\varepsilon) - \partial_U \partial_\varepsilon Q(0,U_0)W\right], \partial^\alpha W\rangle\right| \\
&\leq \frac{\delta}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + \frac{c_\delta}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|_{|\alpha|-1}^2 + c_\delta \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2, \text{ pour tout } \delta > 0.
\end{aligned}$$

(v) Pour I_{35}^α, on écrit

$$\begin{aligned}
&Q(\varepsilon,U^\varepsilon) - Q(0,U^\varepsilon) - \varepsilon\partial_\varepsilon Q(0,U^\varepsilon) - \left[Q(\varepsilon,U_m^\varepsilon) - Q(0,U_m^\varepsilon) - \varepsilon\partial_\varepsilon Q(0,U_m^\varepsilon)\right] \\
&= \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^1 \partial_U \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 Q\left[\theta\varepsilon, \theta' U^\varepsilon + (1-\theta')U_m^\varepsilon\right] W \, d\theta' d\theta,
\end{aligned}$$

qui implique

$$|I_{35}^\alpha| \leq \frac{2}{\varepsilon^2}c\varepsilon^2\|W\|_s\|W\|_s \leq c\|W\|_s^2.$$

Les estimations (i)-(v) permettent de conclure :

$$I_3^\alpha \leq \frac{4\delta - C_1}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + \frac{c_\delta}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|_{|\alpha|-1} + c_\delta \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon\right)\|W\|_s^2, \text{ pour tout } \delta > 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme 1.5. □

Lemme 1.6.

Le terme I_4^α peut être estimé par

$$|I_4^\alpha(t)| \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2 + c_\delta \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e_\varepsilon(t)\right] \|W(t)\|_s^2 + c\varepsilon^{2m}, \tag{1.37}$$

pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^2]$ et tout $\delta > 0$.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} I_4^\alpha =& -2\Big\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha R^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle \\ =& -2\Big\langle \left[A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\right]\partial^\alpha R^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle - 2\Big\langle A_0(U_0)\partial^\alpha R^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle. \end{aligned}$$

Puisque

$$\|A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\|_\infty \leq c\|U^\varepsilon - U_0\|_\infty \leq \|U^\varepsilon - U_0\|_s \leq c(\varepsilon + e_\varepsilon),$$

si l'on utilise l'hypothèse **(H1.6)** et (1.24), on obtient

$$\begin{aligned} \Big|\Big\langle \left[A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\right]\partial^\alpha R_m^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle\Big| \leq& c\varepsilon^m \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e_\varepsilon\right) (\|r_m\|_s + \|F_m^\varepsilon\|_s)\|W\|_s \\ \leq& c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e_\varepsilon\right) \|W\|_s^2 + c\varepsilon^{2m}. \end{aligned}$$

Pour le second terme de I_4^α, on utilise à nouveau $A_0^{12}(U_0) = A_0^{21}(U_0) = 0$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \Big|\Big\langle A_0(U_0)\partial^\alpha R_m^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle\Big| =& \varepsilon^{m-1}\Big|\Big\langle A_0^{22}(U_0)\partial^\alpha r_m, \partial^\alpha W^{II}\Big\rangle + \Big\langle A_0(U_0)\partial^\alpha F_m^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle\Big| \\ \leq& \frac{\delta}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + c_\delta\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e_\varepsilon\right) \|W\|_s^2 + c\varepsilon^{2m}, \text{ pour tout } \delta > 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve (1.37). □

Lemme 1.7.

On peut estimer I_5^α par

$$|I_5^\alpha(t)| \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2 + \frac{c_\delta}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_{|\alpha|-1}^2 + c_\delta \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} e_\varepsilon(t)\right] \|W(t)\|_s^2, \tag{1.38}$$

pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^2]$ et tout $\delta > 0$.

Preuve.

Rappelons que

$$I_5^\alpha = \frac{2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d \Big\langle A_0(U^\varepsilon) f_{\alpha j}^\varepsilon, \partial^\alpha W\Big\rangle,$$

avec

$$f_{\alpha j}^\varepsilon = A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W) - \partial^\alpha \left[A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j} W\right].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}A_0(U^\varepsilon) f^\varepsilon_{\alpha j} = A_0(U^\varepsilon) &\left[\left(A_j(U^\varepsilon) - A_j(U_0)\right) \partial_{x_j}(\partial^\alpha W) - \partial^\alpha \left(\left(A_j(U^\varepsilon) - A_j(U_0)\right) \partial_{x_j} W \right) \right] \\ &+ \left[A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\right] \left[A_j(U_0)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W) - \partial^\alpha \left(A_j(U_0)\partial_{x_j} W \right) \right] \\ &+ A_0(U_0) \left[A_j(U_0)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W) - \partial^\alpha \left(A_j(U_0)\partial_{x_j} W \right) \right].\end{aligned}$$

Utilisons alors les inégalités de type Moser. En utilisant le fait que

$$\|A_j(U^\varepsilon) - A_j(U_0)\|_s \leq c(\varepsilon + e_\varepsilon), \quad \|A_0(U^\varepsilon) - A_0(U_0)\|_s \leq c(\varepsilon + e_\varepsilon),$$

les deux premiers termes de $|I^\alpha_5|$ peuvent alors être majorés par $c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e_\varepsilon\right) \|W\|_s^2$.

Pour le dernier terme de $|I^\alpha_5|$, on utilise le lemme 1.1, qui donne $A_0^{12}(U_0) = A_0^{21}(U_0) = 0$. Puisque $A_j^{11}(U_0)$ est constante (hypothèse **(H1.1)**), un calcul direct donne

$$\begin{aligned}&\left\langle A_0(U_0) \left[A_j(U_0)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W) - \partial^\alpha \left(A_j(U_0)\partial_{x_j} W \right) \right], \partial^\alpha W \right\rangle \\ &= \left\langle A_0^{11}(U_0) \left[A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W^{II}) - \partial^\alpha \left(A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j} W^{II} \right) \right], \partial^\alpha W^I \right\rangle \\ &\quad + \left\langle A_0^{22}(U_0) \left[A_j^{21}(U_0)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W^I) - \partial^\alpha \left(A_j^{21}(U_0)\partial_{x_j} W^I \right) \right], \partial^\alpha W^{II} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle A_0^{22}(U_0) \left[A_j^{22}(U_0)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W^{II}) - \partial^\alpha \left(A_j^{22}(U_0)\partial_{x_j} W^{II} \right) \right], \partial^\alpha W^{II} \right\rangle,\end{aligned}$$

dans lequel chaque terme contient W^{II}. Grâce aux calculs de type inégalités de Moser, on obtient alors

$$\begin{aligned}&\left| \left\langle A_0(U_0) \left[A_j(U_0)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W) - \partial^\alpha \left(A_j(U_0)\partial_{x_j} W \right) \right], \partial^\alpha W \right\rangle \right| \\ &\leq c\|W^{II}\|_{|\alpha|} \|W\|_s \\ &\leq \frac{\delta}{\varepsilon} \|\partial^\alpha W^{II}\|^2 + \frac{c_\delta}{\varepsilon} \|W^{II}\|^2_{|\alpha|-1} + c_\delta \varepsilon \|W\|_s^2.\end{aligned}$$

Ceci implique (1.38). □

1.2.3 Preuve du théorème 1.1

À partir des lemmes 1.3 à 1.7, on peut conclure le résultat suivant.

Lemme 1.8.

Il existe une constante $C_2 \in (0, C_1]$, indépendante de ε, telle que pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^2]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} \langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W \rangle + \frac{C_2}{\varepsilon^2} \|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2 \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon^2} \|W^{II}(t)\|^2_{|\alpha|-1} + c\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e_\varepsilon(t)\right] \|W(t)\|_s^2 + \frac{c}{\varepsilon^2} \|W^{II}(t)\|_s \|W(t)\|_s^2 + c\varepsilon^{2m}.\end{aligned} \tag{1.39}$$

Preuve.

Ajoutons les estimations dans les lemmes 1.3 à 1.7, et prenons δ suffisamment petit, on obtient (1.39). $\square$

Corollaire 1.1.

Il existe $C_2 \in (0, C_1]$, indépendant de ε, tel que pour tout $t \in [0, T_\varepsilon^2]$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle A_0(U^\varepsilon)W, W\rangle &+ \frac{C_2}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|^2 \\ &\leq c\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon(t)\right]\|W(t)\|_s^2 + \frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s\|W(t)\|_s^2 + c\varepsilon^{2m}.\end{aligned} \tag{1.40}$$

Preuve.

Découle du lemme 1.8 avec $|\alpha| = 0$, et la convention $\|.\|_{-1} = 0$. $\square$

Le corollaire 1.1 donne une estimation de la solution dans L^2. Grâce à une induction et au résultat du lemme 1.8, on obtient l'estimation d'énergie dans H^s comme suit.

Proposition 1.1.

Sous les conditions décrites dans le théorème 1.1, on a

$$\|W(t)\|_s^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \|W^{II}(t')\|_s^2\, dt' \leq c\varepsilon^{2m}, \quad \forall\, t \in [0, T_\varepsilon^2]. \tag{1.41}$$

Preuve.

Appliquons le lemme 1.8 avec $|\alpha| = 1$, nous voyons que $\frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|^2$, dans le second membre de (1.39), peut être contrôlé par $\frac{C_2}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|^2$ dans le terme de gauche de (1.40), à une constante multiplicative près. Par récurrence sur $|\alpha|$, on en déduit l'existence de constantes $C_\alpha > 0$, indépendantes de ε, telles que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_{0\leq|\alpha|\leq s} C_\alpha\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle &+ \frac{1}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s^2 \\ &\leq c\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon(t)\right]\|W(t)\|_s^2 + \frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s\|W(t)\|_s^2 + c\varepsilon^{2m}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Young nous donne

$$c\|W^{II}(t)\|_s\,\|W(t)\|_s^2 \leq \frac{1}{2}\|W^{II}(t)\|_s^2 + c\|W(t)\|_s^4.$$

Puis le fait que $\|W(t)\|_s^2 \leq c\varepsilon^2$ implique

$$\frac{d}{dt}\sum_{0\leq|\alpha|\leq s} C_\alpha\Big\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\Big\rangle + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s^2 \leq c\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon(t)\right]\|W(t)\|_s^2 + c\varepsilon^{2m}.$$

Finalement, en intégrant cette inégalité sur $[0, T_\varepsilon^2]$, et en notant que $\sum_{0\leq|\alpha|\leq s} C_\alpha\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle$

est équivalent à $\|W\|_s^2$, on utilise l'hypothèse **(H1.6)** pour obtenir

$$\|W(t)\|_s^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \|W^{II}(t')\|_s^2\,dt' \leq c\int_0^t \left[1+\frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon(t')\right]\|W(t')\|_s^2\,dt' + c\varepsilon^{2m}, \quad \forall\, t \in [0, T_\varepsilon^2].$$

Ainsi, remarquant que $\int_0^t \left[1+\frac{1}{\varepsilon^2}e_\varepsilon(t')\right]dt' \leq cst.$ pour tout $t \leq T_\varepsilon^2 \leq T_m$, l'inégalité de Gronwall implique (1.41). □

Preuve du théorème 1.1.

Grâce aux estimations établies dans la proposition 1.1, il ne reste qu'à montrer que $T_\varepsilon^2 = T_m$, ce qui impliquerait $T_\varepsilon > T_m$. Rappelons que le lemme 1.2 nous donne $T_\varepsilon^2 \in (0, T_\varepsilon) \cap (0, T_m]$, et $[0, T_\varepsilon^2]$ est l'intervalle de temps maximal sur lequel (1.24)-(1.25) est satisfait, i.e.

$$\|W(t)\|_s \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0, T_\varepsilon^2],$$

et

$$\text{ou bien} \quad \|W^\varepsilon(T_\varepsilon^2)\|_s = \varepsilon, \quad \text{ou bien} \quad T_\varepsilon^2 = T_m.$$

D'un autre côté, la proposition 1.1 donne

$$\|W(t)\|_s \leq c\varepsilon^m, \quad \forall\, t \in [0, T_\varepsilon^2].$$

En particulier, $\|W(T_\varepsilon^2)\|_s \leq c\varepsilon^m$. Lorsque $m \geq 2$ et ε est suffisamment petit, on a toujours $c\varepsilon^m < \varepsilon$, quelque que soit la constante $c > 0$ fixée. Ainsi, $T_\varepsilon^2 = T_m$. □

1.3 Développement asymptotique formel

Dans cette partie nous construisons une solution approchée du système (5)-(6). La première idée que nous pourrions avoir serait de la mettre sous la forme

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k U_k(t, x), \tag{1.42}$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$, puisque le système (5) dépend du petit paramètre ε. Cependant, en général, une telle solution n'a aucune chance de satisfaire les conditions initiales (6). En effet, lorsque l'on regarde l'ordre 0 en ε, le système

$$\varepsilon^2\partial_t U + \varepsilon\sum_{j=1}^{d} A_j(U)\partial_{x_j}U = Q(\varepsilon, U)$$

implique $Q\left[0, U_0(t,x)\right] = 0$, donc, en particulier, $Q\left[0, U_0(0,x)\right] = 0$. Cela requiert donc une nouvelle condition sur $\overline{U}$: $Q\left[\varepsilon, \overline{U}(x,\varepsilon)\right] \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, condition qui n'a *a priori* aucune raison d'être satisfaite. Dans le but d'éviter cette situation, nous devons ajouter des termes dits de *correction de couches initiales* dans la solution approchée :

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \left[U_k(t,x) + I_k(\tilde{t},x)\right],$$

où $\tilde{t} = t/\varepsilon^2$ est une variable rapide.

Dans ce qui suit est présentée une construction détaillée des U_k et I_k, puis nous montrons que U_m^ε, défini dans (1.2) :

$$U_m^\varepsilon(t,x) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \Big(U_k(t,x) + I_k(\tilde{t},x)\Big), \quad \tilde{t} = t/\varepsilon^2,$$

satisfait les conditions **(H1.5)** et **(H1.6)**, conditions portant sur le reste R_m^ε associé à cette solution approchée, défini dans (1.3). Notons tout d'abord que, pour une fonction suffisamment régulière Ψ, dépendant d'une variable X de la forme $X = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k X_k$, nous avons formellement

$$\Psi(X) = \Psi(X_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \Big[\partial_X \Psi(X_0) X_k + \mathcal{H}(\Psi, k, \underline{X})\Big], \tag{1.43}$$

avec $\mathcal{H}(\Psi, k, \underline{X})$ termes dépendant uniquement de la fonction Ψ et des k premiers éléments de $\underline{X} = (X_0, X_1, X_2, ...)$. De plus, on a $\mathcal{H}(\Psi, 1, \underline{X}) = 0$.

1.3.1 Les équations satisfaites par les U_k

On introduit dans un premier temps une fonction décrivant l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée :

$$\mathcal{R}(V) = \partial_t V + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{d} A_j(V) \partial_{x_j} V - \frac{Q(\varepsilon, V)}{\varepsilon^2}.$$

Utilisant à plusieurs reprises (1.43), on obtient, formellement,

$$\mathcal{R}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k U_k\right) = \sum_{k=-2}^{+\infty} \varepsilon^k O_k,$$

où

$$\begin{cases} O_{-2} = Q(0, U_0), \\ O_{-1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(U_0)\partial_{x_j} U_0 - \partial_\varepsilon Q(0, U_0) - \partial_U Q(0, U_0) U_1, \\ \text{ et, pour tout } k \in \mathbb{N}, \\ O_k = \partial_t U_k + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(U_0)\partial_{x_j} U_{k+1} + \sum_{\sigma=0}^{k}\sum_{j=1}^{d} \left[\partial_U A_j(U_0) U_{\sigma+1} + \mathcal{H}(A_j, \sigma+1, \underline{U})\right] \partial_{x_j} U_{k-\sigma} \\ -\dfrac{1}{(k+2)!}\partial_\varepsilon^{k+2} Q(0, U_0) - \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{k+1} \frac{1}{\sigma!} \left[\partial_U \partial_\varepsilon^\sigma Q(0, U_0) U_{k+2-\sigma} + \mathcal{H}\left(\partial_\varepsilon^\sigma Q(0, .), k+2-\sigma, \underline{U}\right)\right]. \end{cases}$$

Si la série formelle (1.42) est solution du système (5), alors

$$\mathcal{R}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k U_k\right) = 0. \tag{1.44}$$

On a donc $O_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'égalité $O_{-2} = 0$ donne $v_0 = 0$ grâce à (8). Puis, si l'on décompose $O_{-1} = 0$ en deux blocs de $l - r$ et r équations, on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_0 - \partial_\varepsilon Q^I(0, u_0, 0) = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j^{21}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_0 - \partial_\varepsilon Q^{II}(0, u_0, 0) - \partial_v q(u_0, 0) v_1 = 0. \end{cases} \tag{1.45}$$

Le premier système dans (1.45) est une contrainte différentielle sur u_0 dont nous discuterons plus tard. Pour le second système, grâce à (8), on a

$$v_1 = \left[\partial_v q(u_0, 0)\right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{d} A_j^{21}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_0 - \partial_\varepsilon Q^{II}(0, u_0, 0)\right]. \tag{1.46}$$

De même, pour $k \in \mathbb{N}$, on sépare $O_k = 0$ en deux systèmes de $l - r$ et r équations. En notant que

$$\partial_u A_j^{11}(U_0) = 0, \quad \partial_U Q^I(0, U_0) = 0, \quad \left[\mathcal{H}\Big(Q(0, .), k+2, \underline{U}\Big)\right]^I = 0,$$

on obtient

$$\partial_t u_k + \sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j} v_{k+1} + \sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(U_0)\partial_{x_j} u_{k+1} + g_k\left[(U_i, \nabla U_i)_{0 \le i \le k}, v_{k+1}\right] = 0 \tag{1.47}$$

et

(1.48)

$$\partial_t v_k + \sum_{j=1}^{d} \Big[A_j^{21}(U_0)\partial_{x_j} u_{k+1} + A_j^{22}(U_0)\partial_{x_j} v_{k+1} \Big] - \frac{1}{(k+2)!}\partial_\varepsilon^{k+2} Q^{II}(0,U_0)$$

$$+ \sum_{\sigma=0}^{k}\sum_{j=1}^{d} \Big[\Big(\partial_u A_j^{21}(U_0) u_{\sigma+1} + \partial_v A_j^{21}(U_0) v_{\sigma+1} \Big) .\partial_{x_j} u_{k-\sigma}$$

$$+ \Big(\partial_u A_j^{22}(U_0) u_{\sigma+1} + \partial_v A_j^{22}(U_0) v_{\sigma+1} \Big) .\partial_{x_j} v_{k-\sigma} \Big]$$

$$+ \sum_{\sigma=0}^{k}\sum_{j=1}^{d} \Big[[\mathcal{H}(A_j,\sigma+1,\underline{U})]^{21}\,\partial_{x_j} u_{k-\sigma} + [\mathcal{H}(A_j,\sigma+1,\underline{U})]^{22}\,\partial_{x_j} v_{k-\sigma} \Big]$$

$$- \sum_{\sigma=0}^{k+1}\frac{1}{\sigma!}\Big[\partial_u\partial_\varepsilon^\sigma Q^{II}(0,U_0) u_{k+2-\sigma} + \partial_v\partial_\varepsilon^\sigma Q^{II}(0,U_0) v_{k+2-\sigma} + \Big[\mathcal{H}\Big(\partial_\varepsilon^\sigma Q(0,.), k+2-\sigma, \underline{U} \Big) \Big]^{II} \Big] = 0,$$

où

(1.49)

$$g_k \left[(U_i,\nabla U_i)_{0\le i\le k}, v_{k+1} \right] = \sum_{\sigma=0}^{k}\sum_{j=1}^{d} \Big[[\mathcal{H}(A_j,\sigma+1,\underline{U})]^{11}\,\partial_{x_j} u_{k-\sigma} + [\mathcal{H}(A_j,\sigma+1,\underline{U})]^{12}\,\partial_{x_j} v_{k-\sigma} \Big]$$

$$+ \sum_{\sigma=0}^{k}\sum_{j=1}^{d} \Big[\partial_v A_j^{11}(U_0) v_{\sigma+1}.\partial_{x_j} u_{k-\sigma} + \Big(\partial_u A_j^{12}(U_0) u_{\sigma+1} + \partial_v A_j^{12}(U_0) v_{\sigma+1} \Big) .\partial_{x_j} v_{k-\sigma} \Big]$$

$$- \sum_{\sigma=1}^{k+1}\frac{1}{\sigma!}\Big[\partial_u\partial_\varepsilon^\sigma Q^{I}(0,U_0) u_{k+2-\sigma} + \partial_v\partial_\varepsilon^\sigma Q^{I}(0,U_0) v_{k+2-\sigma} + \Big[\mathcal{H}\Big(\partial_\varepsilon^\sigma Q(0,.), k+2-\sigma, \underline{U} \Big) \Big]^{I} \Big]$$

$$- \frac{1}{(k+2)!}\partial_\varepsilon^{k+2} Q^{I}(0,U_0) = 0.$$

La dernière somme dans (1.48) contient

$$\partial_u\partial_\varepsilon^\sigma Q^{II}(0,U_0) u_{k+2-\sigma} + \partial_v\partial_\varepsilon^\sigma Q^{II}(0,U_0) v_{k+2-\sigma} = \partial_v q(U_0) v_{k+2}, \quad \text{pour } \sigma = 0.$$

Ainsi, (1.48) permet de réécrire v_{k+2} comme suit :

$$v_{k+2} = [\partial_v q(u_0,0)]^{-1} \sum_{j=1}^{d} A_j^{21}(u_0,0)\partial_{x_j} u_{k+1} + V_{k+2}^1\, u_{k+1} + V_{k+2}^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.50}$$

où V_{k+2}^1 et V_{k+2}^2 peuvent dépendre de $U_0, U_1, ..., U_k, v_{k+1}$ et leurs différentielles de premier ordre, mais sont indépendantes de u_{k+1}.

Détaillons maintenant ces équations selon la valeur de k. Pour $k = 0$, le système (1.47) devient

$$\partial_t u_0 + \sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j} v_1 + \sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(U_0)\partial_{x_j} u_1 + g_0(u_0,\nabla u_0, v_1) = 0, \tag{1.51}$$

où g_0 est défini en (1.7). Le système (1.51) est exactement celui introduit en (1.5) : dans (1.51), v_1 peut être remplacé par (1.46), en revanche u_1 est une inconnue à traiter indépendamment. D'après l'hypothèse **(H1.1)**, $A_j^{11}(U_0)$ est une matrice constante pour tout j. Dans le but d'éliminer u_1 dans (1.51), on suppose qu'il existe une matrice carrée constante D, d'ordre $l-r$, telle que (1.8) soit satisfait. Alors appliquer D à (1.51) donne le système d'E.D.P. d'ordre deux (1.9), et il reste une contrainte différentielle (1.10) sur u_1. Injecter (1.46) dans (1.9) donne le système (1.11), fermé pour u_0.

Supposons maintenant que (1.9) et (1.4) admet une solution régulière locale u_0 définie sur $[0, T_0]$, avec $T_0 > 0$ indépendant de ε. Alors nous venons de construire $U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et v_1, donné par (1.46). De plus, nous avons encore une contrainte différentielle (1.10) sur u_1.

Prenons maintenant $k \geq 1$, et débutons une récurrence. Supposons que $U_0, U_1, ..., U_{k-1}$ et v_k soient définis sur $[0, T_{k-1}]$ avec $T_{k-1} \in (0, T_0]$ indépendant de ε. Supposons aussi que nous avons une contrainte différentielle sur u_k du même type que (1.10) :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_k + (\mathbf{I}_{l-r} - D)\left[\partial_t u_{k-1} + \sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j} v_k\right] \\ + (\mathbf{I}_{l-r} - D) g_{k-1}\left[(U_i, \nabla U_i)_{0 \leq i \leq k-1}, v_k\right] = 0.\end{aligned} \tag{1.52}$$

De même que pour le cas $k = 0$, appliquer D à (1.47) donne un système d'E.D.P. pour u_k, cette fois-ci linéaire :

$$D\partial_t u_k + D\sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j} v_{k+1} + D g_k\left((U_i, \nabla U_i)_{0 \leq i \leq k}, v_{k+1}\right) = 0. \tag{1.53}$$

et (1.47) devient une contrainte différentielle linéaire pour u_{k+1} :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d} A_j^{11}(u_0, 0)\partial_{x_j} u_{k+1} + (\mathbf{I}_{l-r} - D)\left[\partial_t u_k + \sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0)\partial_{x_j} v_{k+1}\right] \\ + (\mathbf{I}_{l-r} - D) g_k\left((U_i, \nabla U_i)_{0 \leq i \leq k}, v_{k+1}\right) = 0.\end{aligned} \tag{1.54}$$

Regardons maintenant l'expression (1.50), avec $k+1$ au lieu de $k+2$, et injectons-la dans (1.53). Associons-les avec (1.52), on obtient les équations sur u_k suivantes :

$$D\partial_t u_k + D\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(u_0)\partial^2_{x_i x_j} u_k + D\sum_{j=1}^{d} B_j^k \partial_{x_j} u_k + D\sum_{j=1}^{d} C_j^k u_k + D f_k = 0, \tag{1.55}$$

où les B_j^k, C_j^k et f_k peuvent dépendre de $U_0, U_1, ..., U_{k-1}$ et de leur différentielles de premier ordre, mais sont indépendantes de u_k.

Supposons maintenant que les équations (1.55)-(1.52) admettent une solution locale régulière u_k, définie sur $[0, T_k]$ avec $T_k \in (0, T_{k-1}]$ indépendant de ε. Alors nous avons construit U_k, et v_{k+1}, donné par (1.50) avec $k+1$ au lieu de $k+2$. De plus, il nous reste une contrainte différentielle (1.54) sur u_{k+1}, ce qui achève l'induction.

Il est important de remarquer que l'opérateur d'ordre deux dans (1.55) et (1.11) est le même. Lorsque pour tout u, $A_j^{11}(u, 0) = 0$ ($j \in \{1, ..., d\}$) et $\partial_\varepsilon Q^I(0, u, 0) = 0$, alors les contraintes sont trivialement satisfaites pour $D = \mathbf{I}_{l-r}$. Ainsi, u_0 et les u_k sont uniquement déterminés par (1.11) et (1.55), respectivement. Dans ce cas, nous donnons ci-dessous une condition suffisante pour que ces deux systèmes soient paraboliques. La preuve de ce résultat est similaire à celles données dans [32, 69]. Un exemple type est le système d'Euler avec relaxation (cf. paragraphe 1.3.4).

Proposition 1.2.

Soit $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *et* $A^{21}(\zeta, u_0) = \sum_{j=1}^{d} A_j^{21}(u_0, 0)\zeta_j$. *Supposons que* $r \geq l - r$ *et que* $A^{21}(\zeta, u_0)$ *est de rang maximal, i.e.* $\mathfrak{Ker}\,[A^{21}(\zeta, u_0)] = \{0\}$. *Alors,*

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(u_0)\zeta_i\zeta_j$$

est une matrice négative. En d'autres termes, si $D = \boldsymbol{I}_{l-r}$, *alors les systèmes* (1.11) *et* (1.55) *sont strictement paraboliques.*

Preuve.

Voir l'annexe de la première partie.

1.3.2 Détermination des I_k et des conditions initiales de u_k

Si la série formelle $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \left[U_k(t,x) + I_k(\tilde{t},x)\right]$ est solution de (5), alors

$$\mathcal{R}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \Big(U_k(t,x) + I_k(\tilde{t},x)\Big)\right] = 0.$$

Puisque $t = \varepsilon^2 \tilde{t}$, on a formellement

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k U_k(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k P_k(\tilde{t},x), \tag{1.56}$$

avec

$$P_k(\tilde{t},x) = \sum_{h=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{\tilde{t}^h}{h!} \frac{\partial^h U_{k-2h}}{\partial t^h}(0,x).$$

Ainsi,

$$\mathcal{R}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \Big(P_k(\tilde{t},x) + I_k(\tilde{t},x)\Big)\right] = 0.$$

Utilisant alors (1.43) à plusieurs reprises, les mêmes arguments qu'en section 1.3.1 nous permettent d'obtenir

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}(I_0+P_0) = Q(0,I_0+P_0), \\ \partial_{\tilde{t}}(I_1+P_1) = \partial_U Q(0,I_0+P_0)(I_1+P_1) + \partial_\varepsilon Q(0,I_0+P_0) - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(I_0+P_0)\partial_{x_j}(I_0+P_0), \\ \partial_{\tilde{t}}(I_k+P_k) = \partial_U Q(0,I_0+P_0)(I_k+P_k) + \mathcal{F}(k,\underline{I+P}),\ \text{pour tout } k\geq 2, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(k,\underline{I+P}) &= \sum_{k=1}^{k-1}\frac{1}{l!}\Big[\partial_U\partial_\varepsilon^l Q(0,I_0+P_0)(I_{k-l}+P_{k-l}) + \mathcal{H}\Big(\partial_\varepsilon^l Q(0,.),k-l,\underline{I+P}\Big)\Big] \\ &+ \frac{1}{k!}\partial_\varepsilon^k Q(0,I_0+P_0) - \sum_{j=1}^{d} A_j(I_0+P_0)\partial_{x_j}(I_{k-1}+P_{k-1}) \\ &- \sum_{j=1}^{d}\sum_{l=0}^{k-2}\left[\partial_U A_j(I_0+P_0)(I_{l+1}+P_{l+1}) + \mathcal{H}(A_j,l+1,\underline{I+P})\right]\partial_{x_j}(I_{k-2-l}+P_{k-2-l}) \end{aligned}$$

ne dépendant que des k premiers termes de $\underline{I+P} = (I_0+P_0, I_1+P_1, ..., I_{k-1}+P_{k-1}, ...)$. De même, d'après (1.44) et (1.56), on a

$$\mathcal{R}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k P_k(\tilde{t},x)\right] = \mathcal{R}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k U_k(t,x)\right] = 0,$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}P_0 = Q(0,P_0), \\ \partial_{\tilde{t}}P_1 = \partial_U Q(0,P_0)P_1 + \partial_\varepsilon Q(0,I_0) - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(P_0)\partial_{x_j}P_0, \\ \partial_{\tilde{t}}P_k = \partial_U Q(0,P_0)P_k + \mathcal{F}(k,\underline{P}),\ \text{pour tout } k\geq 2. \end{cases}$$

Ensuite, de $P_0(\tilde{t},x) = U_0(0,x)$ et $Q(0,P_0)=0$, on obtient

$$\tag{1.57} \begin{cases} \partial_{\tilde{t}}I_0 = Q(0,I_0+P_0), \\ \partial_{\tilde{t}}I_k = \partial_U Q(0,I_0+P_0)I_k + \Big[\partial_U Q(0,I_0+P_0) - \partial_U Q(0,P_0)\Big]P_k(\tilde{t},x) \\ \qquad\quad + \mathcal{G}(k,\tilde{t},x),\quad \forall\, k\geq 1, \end{cases}$$

où

$$\mathcal{G}(k,\tilde{t},x) = \mathcal{F}(k,\underline{I+P}) - \mathcal{F}(k,\underline{P}),\quad \forall\, k\geq 1,$$

avec

$$\mathcal{F}(1,\underline{I+P}) = \partial_\varepsilon Q(0,I_0+P_0) - \sum_{j=1}^{d} A_j(I_0+P_0)\partial_{x_j}(I_0+P_0).$$

Nous pouvons maintenant décrire I_k, et déterminer les conditions initiales pour u_k. Soient $\overline{U}_k = \begin{bmatrix} \overline{u}_k \\ \overline{v}_k \end{bmatrix}$ des fonctions régulières données, dépendant de x, obtenues grâce à un développement asymptotique formel de la donnée initiale $\overline{U}$:

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \overline{U}_k(x).$$

Si $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \left[U_k(t,x) + I_k(\tilde{t},x)\right]$ est une solution du système (5)-(6), on doit avoir

$$U_k(0,x) + I_k(0,x) = \overline{U}_k(x),$$

i.e.

$$\begin{cases} u_k(0,x) + I_k^I(0,x) = \overline{u}_k(x), \\ v_k(0,x) + I_k^{II}(0,x) = \overline{v}_k(x), \quad \forall\, k \geq 0. \end{cases} \tag{1.58}$$

Grâce à $Q^I(0,U) = 0$ et à la première équation de (1.57), on a $\partial_{\tilde{t}} I_0^I = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de couche initiale d'ordre zéro pour u. Dans ce cas, on peut prendre $I_0^I = 0$. Puis, grâce à $v_0 = 0$, on obtient

$$u_0(0,x) = \overline{u}_0(x), \quad I_0^{II}(0,x) = \overline{v}_0(x),$$

qui sont les conditions initiales pour u_0 et I_0^{II}. Ainsi les équations sur I_0^{II} deviennent

$$\partial_{\tilde{t}} I_0^{II} = q\left[\overline{u}_0(x), I_0^{II}\right], \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

D'après le lemme 1.1, la condition dans **(H1.2)** peut se réécrire de manière équivalente :

$$A_0^{22}(u,0)\partial_v q(u,0) \leq -C_1 \mathbf{I}_r, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^{l-r}.$$

Puisque A_0 est symétrique définie positive, A_0^{22} l'est aussi. Cela implique que chaque valeur propre de $\partial_v q(u,0)$ est strictement négative, uniformément par rapport à u. Ainsi, pour une donnée initiale $\overline{v}_0$ suffisamment petite, il existe une unique solution globale $I_0^{II}(\tilde{t},x)$, qui décroît exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t} \to +\infty$ (cf. [2]). Ensuite, par induction, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq s+m$, $\partial_x^\alpha I_0^{II}$ satisfait une équation différentielle ordinaire, linéaire, de la forme :

$$\partial_{\tilde{t}} X = \partial_v q\left[\overline{u}_0(x), I_0^{II}\right] X + g(\tilde{t},x), \quad x \in \mathbb{T}^d, \tag{1.59}$$

avec décroissance exponentielle de g lorsque $\tilde{t} \to +\infty$. Cela implique que

$$\|I_0(\tilde{t},.)\|_{s+m} \to 0, \ \text{ exponentiellement lorsque } \ \tilde{t} \to +\infty.$$

On peut se référer à [68] pour la résolution de l'équation linéaire (1.59).

Ensuite, pour $k \geq 1$ fixé, supposons que, pour tout $i \leq k-1$, I_i existe globalement en temps, et supposons que $\|I_i(\tilde{t},.)\|_{s+m-i}$ décroît exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t}$ tend vers l'infini. Alors $\|\mathcal{G}(k,\tilde{t},x)\|_{s+m-k}$ aussi, puisque

$$\mathcal{G}(k,\tilde{t},x)=\mathcal{F}(k,\underline{I+P})-\mathcal{F}(k,\underline{P}),$$

et $\mathcal{F}$ ne dépend que des (I_i,P_i) pour $i\leq k-1$. Les $l-r$ premières équations dans (1.57) sont

$$\partial_{\tilde{t}}I_k^I=\mathcal{G}^I(k,\tilde{t},x).$$

Ainsi,

$$I_k^I(\tilde{t},x)=I_k^I(0,x)+\int_0^{\tilde{t}}\mathcal{G}^I(k,\tilde{t}',x)d\tilde{t}'.$$

Or cette équation admet pour limite zéro lorsque $\tilde{t}$ tend vers l'infini. Ainsi,

$$I_k^I(\tilde{t},x)=-\int_{\tilde{t}}^{+\infty}\mathcal{G}^I(k,\tilde{t}',x)d\tilde{t}'$$

et

$$\|I_k^I(\tilde{t},.)\|_{s+m-k}\to 0,\ \ \text{exponentiellement lorsque}\ \ \tilde{t}\to+\infty.$$

En particulier,

$$I_k^I(0,x)=-\int_0^{+\infty}\mathcal{G}^I(k,\tilde{t},x)d\tilde{t}.$$

Cette équation, couplée à (1.58), détermine la condition initiale de u_k :

$$u_k(0,x)=\overline{u}_k(x)+\int_0^{+\infty}\mathcal{G}^I(k,\tilde{t},x)d\tilde{t}.$$

Finalement, les r dernières équations de (1.57) impliquent que I_k^{II} satisfait encore un système linéaire de la forme (1.59). Ainsi, I_k^{II} existe, globalement en temps, et

$$\|I_k^{II}(\tilde{t},.)\|_{s+m-k}\to 0,\ \ \text{exponentiellement lorsque}\ \ \tilde{t}\to+\infty.$$

1.3.3 Estimations de l'erreur

Dans les deux dernières sous-parties 1.3.1 et 1.3.2, nous avons construit, pour tout $k\geq 0$, U_k et I_k sur l'intervalle de temps $[0,T_k]$, avec $0<T_{k+1}\leq T_k$. Maintenant nous prouvons que, pour un entier fixé m quelconque, la solution approchée U_m^ε définie par (1.2) satisfait **(H1.5)-(H1.6)**. En effet, puisque $I_0^I=0$,

$$\partial_t I_0^{II}(t/\varepsilon^2,.)=\varepsilon^{-2}\partial_{\tilde{t}}I_0^{II}(t/\varepsilon^2,.)=\varepsilon^{-2}\partial_v q(\overline{u}_0,I_0^{II}),$$

et $I_0^{II}(\tilde{t},.)$ décroît exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t}\to+\infty$, **(H1.5)** est clairement satisfaite.

Le résultat suivant implique que **(H1.6)** est aussi satisfaite.

Proposition 1.3.

Soit R_m^ε *le reste défini par* (1.3) *associé à la solution approchée construite en sections 1.3.1-1.3.2, i.e.,* $R_m^\varepsilon = \mathcal{R}(U_m^\varepsilon)$*. Alors*

$$R_m^\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\begin{bmatrix} 0 \\ r_m \end{bmatrix} + \varepsilon^{m-1}F_m^\varepsilon,$$

où $r_m \in \mathcal{C}([0,T_m];H^s)$ *et* $F_m^\varepsilon \in \mathcal{C}([0,T_m];H^s)$ *satisfont*

$$\|F_m^\varepsilon(t)\|_s \leq c\varepsilon + ce^{-\frac{\varpi t}{\varepsilon^2}}, \quad \forall\, t \in [0,T_m].$$

Preuve.

Voir l'annexe de la première partie.

1.3.4 Exemples

À propos des exemples semi-linéaires présentés dans le paragraphe 1.1.2, on a $A_1^{11} = 0$, et Q ne dépend que de U. Ainsi les contraintes différentielles disparaissent. Il est facile de vérifier que les solutions approchées U_m^ε peuvent être construites quel que soit l'entier m choisi, alors le théorème 1.1 peut être appliqué.

Considérons maintenant les exemples quasi-linéaires donnés dans 1.1.2.

Système d'Euler avec relaxation

Rappelons que dans ce système

$$U = \begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix}, \quad A_j(n,v) = \begin{bmatrix} v_j & n\mathbf{e}_j^T \\ h'(n)\mathbf{e}_j & v_j\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad j \in \{1,...,d\}.$$

Ainsi $A_j^{11}(n,v) = v_j$. Puisque $A_j^{11}(n,0) = 0$ et que Q ne dépend que de U, il n'y a pas de contrainte différentielle. Le terme dominant (n_0,v_0) satisfait $v_0 = 0$, et un système d'équations des milieux poreux

$$\partial_t n_0 - \Delta p(n_0) = 0,$$

qui est strictement parabolique puisque p est une fonction strictement croissante. Ainsi, ce système admet une solution locale régulière. On voit rapidement que $v_1 = -\nabla h(n_0)$.

Soit $I_0 = \begin{bmatrix} \tilde{n}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{bmatrix}$ le terme dominant de la couche initiale. Celui-ci satisfait

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}} \tilde{n}_0 = 0, \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{v}_0 = -\tilde{v}_0. \end{cases}$$

Il est donc clair que I_0 existe globalement en temps, et décroît exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t} \to +\infty$, même pour de grandes conditions initiales.

De même, par récurrence on peut construire les termes d'ordre supérieur n_k, $I_k = \begin{bmatrix} \tilde{n}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix}$ et v_{k+1} pour $k \geq 1$. Plus précisément, les équations satisfaites par n_k et I_k sont

$$\partial_t n_k - p'(n_0)\Delta n_k + b_k = 0,$$

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}} \tilde{n}_k = g_k^I(\tilde{t}, x), \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{v}_k = -\tilde{v}_k + g_k^{II}(\tilde{t}, x), \end{cases}$$

où les b_k ne dépendent que de (n_i, v_i) pour $0 \leq i \leq k$ et de leurs différentielles de premier ordre, et où g_k^I et g_k^{II} décroissent exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t} \to +\infty$. Enfin, v_{k+1} est donné par l'expression (1.50). Ainsi la solution approchée U_m^ε peut être construite pour tout entier m donné, et le théorème 1.1 peut être appliqué.

Système d'Euler-Maxwell avec relaxation

Rappelons que pour ce système $l = 10$, $r = 3$,

$$u = \begin{bmatrix} n \\ B \\ E \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} n \\ B \\ E \\ v \end{bmatrix}, \quad A_j(U) = \begin{bmatrix} v_j & 0 & 0 & n\mathbf{e}_j^T \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_j^T & 0 & 0 \\ h'(n)\mathbf{e}_j & 0 & 0 & v_j \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

et

$$Q(\varepsilon, U) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon n v \\ -v - \varepsilon E - \varepsilon v \times B \end{bmatrix}, \quad Q^I(\varepsilon, U) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon n v \end{bmatrix}, \quad q(U) = -v.$$

Puisque

$$A_j^{11}(u, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_j \\ 0 & \mathbf{J}_j^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \partial_\varepsilon Q^I(0, u, 0) = 0,$$

il y a des contraintes différentielles sur le terme dominant, de la forme

$$0 = \sum_{j=1}^{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_j \\ 0 & \mathbf{J}_j^T & 0 \end{bmatrix} \partial_{x_j} u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{rot} E_0 \\ -\operatorname{rot} B_0 \end{bmatrix},$$

que l'on réécrit plus simplement

$$\operatorname{rot} B_0 = \operatorname{rot} E_0 = 0.$$

Couplées avec les contraintes des équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} B_0 = 0, \quad \operatorname{div} E_0 = b - n_0,$$

on en déduit que B_0 est une constante, et qu'il existe un potentiel φ_0 tel que $E_0 = \nabla\varphi_0$. On a au final $v_0 = 0$, et l'équation satisfaite par n_0 :

$$\partial_t n_0 + \operatorname{div}(n_0 v_1) = 0, \quad v_1 = -\nabla\left[h(n_0) + \varphi_0\right].$$

Ainsi, (n_0, φ_0) satisfait un système de dérive-diffusion (*drift-diffusion system*) :

$$\begin{cases} \partial_t n_0 - \operatorname{div}\left[n_0 \nabla(h(n_0) + \varphi_0)\right] = 0, \\ \Delta\varphi_0 = b - n_0, \quad E_0 = \nabla\varphi_0. \end{cases}$$

On sait que ce système admet une unique solution locale régulière (cf. [43]). Ainsi, on a construit U_0 et v_1. Il est facile de vérifier que les contraintes sur u_1 sont

$$\operatorname{rot} B_1 = \partial_t E_0 - n_0 v_1, \quad \operatorname{rot} E_1 = -\partial_t B_0.$$

Maintenant, soit $I_0 = \begin{bmatrix} \tilde{n}_0 \\ \tilde{B}_0 \\ \tilde{E}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{bmatrix}$ le terme dominant de la couche initiale. Il satisfait

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}} \tilde{n}_0 = 0, \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{B}_0 = 0, \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{E}_0 = 0, \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{v}_0 = -\tilde{v}_0. \end{cases}$$

Ainsi, un tel I_0 existe globalement en temps, et décroît exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t} \to +\infty$.

De même, par récurrence, grâce aux contraintes différentielles sur les u_k, on peut construire les termes d'ordre supérieur u_k, I_k et v_{k+1} pour $k \geq 1$. En particulier, (n_k, φ_k)

satisfait un système de dérive-diffusion linéaire (*linear drift-diffusion system*) :

$$\begin{cases} \partial_t n_k - \operatorname{div}\left[n_0 \nabla (h'(n_0) n_k + \varphi_k)\right] + \operatorname{div}(n_k v_1) = \alpha_k, \\ \Delta \varphi_k = -n_k + \beta_k, \end{cases}$$

B_k satisfait un système $\operatorname{div} - \operatorname{rot}$ linéaire :

$$\operatorname{div} B_k = 0, \quad \operatorname{rot} B_k = \partial_t E_{k-1} - \Phi_{k-1},$$

et

$$E_k = \nabla \varphi_k - \partial_t \psi_{k-1}, \quad v_{k+1} = -\nabla \left[h'(n_0) n_k + \varphi_k\right] + \partial_t \psi_{k-1} + \gamma_k,$$

où α_k, β_k et γ_k ne dépendent que des U_i et ψ_i pour $0 \leq i \leq k-1$, et où

$$B_{k-1} = \operatorname{rot} \psi_{k-1}, \quad \Phi_{k-1} = -\sum_{i=0}^{k-1} n_i v_{k-i}, \quad k \geq 1.$$

De plus, il reste des contraintes différentielles sur v_{k+1} :

$$\operatorname{rot} B_{k+1} = \partial_t E_k - \Phi_k, \quad \operatorname{rot} E_{k+1} = -\partial_t B_k.$$

Le terme de couche initiale I_k satisfait une équation différentielle ordinaire linéaire, de même partie principale que I_0, et toujours avec un terme source décroissant exponentiellement vers zéro. Ainsi, la solution approchée U_m^ε peut être construite pour tout entier m donné, et le théorème 1.1 peut être appliqué.

Dans cet exemple, le choix correspondant de D et des fonctions g_k est

$$D = \operatorname{diag}(1, 0_6), \quad g_0(u_0, \nabla u_0, v_1) = \begin{bmatrix} v_1.\nabla n_0 \\ 0 \\ -n_0 v_1 \end{bmatrix},$$

et

$$g_k\left[(U_i, \nabla U_i)_{0 \leq i \leq k}, v_{k+1}\right] = \begin{bmatrix} v_{k+1}.\nabla n_0 + \operatorname{div}(n_k v_1) - \alpha_k \\ 0 \\ \Phi_k \end{bmatrix}, \quad k \geq 1.$$

Annexe :
Preuves du lemme 1.1 et des propositions 1.2-1.3

Les preuves de ces divers résultats sont assez similaires à celles développées dans [32, 69]. Voir aussi [68]. Nous les donnons ici dans un souci de complétude.

Preuve du lemme 1.1.

D'après les conditions (7) et $q(u,0)=0$, on a

$$\partial_U Q(0,u,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial_v q(u,0) \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
&A_0(u,0)\partial_U Q(0,u,0)+\partial_U Q(0,u,0)^T A_0(u,0)\\
&=\begin{bmatrix} 0 & A_0^{12}(u,0)\partial_v q(u,0) \\ \left[\partial_v q(u,0)\right]^T A_0^{12}(u,0)^T & A_0^{22}(u,0)\partial_v q(u,0)+\left[\partial_v q(u,0)\right]^T A_0^{22}(u,0) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

où T désigne la transposition. D'autre part, l'hypothèse **(H1.2)** implique que la dernière matrice est symétrique définie négative. Puisque le premier bloc diagonal est nul, on en déduit que $A_0^{12}(u,0)\partial_v q(u,0)=0$. Et puisque $\partial_v q(u,0)$ est inversible, on obtient $A_0^{12}(u,0)=0$. □

Preuve de la proposition 1.2.

Le lemme 1.1 implique que $A_0^{12}(u_0,0)=0$. Puisque $A_0(U)A_j(U)$ est une matrice symétrique, on a

$$A_0^{11}(u_0,0)A_j^{12}(u_0,0)=\left[A_j^{21}(u_0,0)\right]^T A_0^{22}(u_0,0).$$

Ainsi, pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^d\diagdown\{0\}$,

$$\begin{aligned}
&A_0^{11}(u_0,0)\sum_{i,j=1}^{d}A_i^{12}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}A_j^{21}(u_0,0)\zeta_i\zeta_j\\
&=\left[A^{21}(\zeta,u_0)\right]^T A_0^{22}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}A^{21}(\zeta,u_0).
\end{aligned}$$

De plus, l'hypothèse **(H1.2)** implique que

$$A_0^{22}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}\le -C_1\mathbf{I}_r.$$

Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^{l-r}\setminus\{0\}$, on a $A^{21}(\zeta,u_0)\xi\in\mathbb{R}^r$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\xi^T\left[A_0^{11}(u_0,0)\sum_{i,j=1}^{d}A_i^{12}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}A_j^{21}(u_0,0)\zeta_i\zeta_j\right]\xi\\
&=A_0^{22}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}A^{21}(\zeta,u_0)\xi\cdot A^{21}(\zeta,u_0)\xi\\
&\le -C_1|A^{21}(\zeta,u_0)\xi|^2<0,
\end{aligned}$$

puisque $\xi\neq 0$ et $\mathfrak{Ker}\left[A^{21}(\zeta,u_0)\right]=\{0\}$. Ainsi,

$$A_0^{11}(u_0,0)\sum_{i,j=1}^{d}A_i^{12}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1}A_j^{21}(u_0,0)\zeta_i\zeta_j$$

est une matrice négative, tout comme

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_i^{12}(u_0,0)\left[\partial_v q(u_0,0)\right]^{-1} A_j^{21}(u_0,0)\zeta_i\zeta_j,$$

puisque $A_0^{11}(u_0,0)$ est définie positive. $\square$

Preuve de la proposition 1.3.

Refaisons les calculs pour $\mathcal{R}\left(\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k\right)$ de la même façon que pour $\mathcal{R}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k U_k\right)$ dans le paragraphe 1.3.1, on obtient

$$\mathcal{R}\left(\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k\right) = \sum_{k=-2}^{m-1}\varepsilon^k O_k + \varepsilon^{m-1}\bar{R}_m + O(\varepsilon^m),$$

où

$$\begin{aligned}\bar{R}_m =\ & \partial_t U_{m-1} + \sum_{j=1}^{d} A_j(U_0)\partial_{x_j}U_m + \sum_{\sigma=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{d}\left[\partial_U A_j(U_0)U_{\sigma+1} + \mathcal{H}(A_j,\sigma+1,\underline{U})\right]\partial_{x_j}U_{m-\sigma-1}\\ & - \mathcal{H}\Big(Q(0,.),m+1,\underline{U}\Big) - \sum_{\sigma=1}^{m}\frac{1}{\sigma!}\left[\partial_U\partial_\varepsilon^\sigma Q(0,U_0)U_{m+1-\sigma} + \mathcal{H}\Big(\partial_\varepsilon^\sigma Q(0,.),m+1-\sigma,\underline{U}\Big)\right]\\ & - \frac{1}{(m+1)!}\partial_\varepsilon^{m+1}Q(0,U_0).\end{aligned}$$

Les fonctions U_k sont construites dans la section 1.3 de sorte que $O_k = 0$ pour $k \in \{-2,...,m-1\}$. De plus, grâce aux équations (1.54)-(1.55) et (1.50), il est facile de vérifier que

$$\bar{R}_m = \partial_U Q(0,U_0)U_{m+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_v q(u_0,0)v_{m+1}\end{bmatrix},$$

où v_{m+1} est donné par (1.50) avec $k=m-1$. Ainsi,

$$\mathcal{R}\left(\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k\right) = \varepsilon^{m-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \partial_v q(u_0,0)v_{m+1}\end{bmatrix} + O(\varepsilon^m).$$

Définissons

$$r_m = \partial_v q(u_0,0)v_{m+1}, \quad F_m^\varepsilon = \varepsilon^{1-m}R_m^\varepsilon - \bar{R}_m.$$

On veut alors montrer que

$$\|F_m^\varepsilon(t)\|_s \le c\varepsilon + ce^{-\frac{\varpi t}{\varepsilon^2}}.$$

Dans ce but, on écrit d'abord

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k(t,x) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k U_k(\varepsilon^2\tilde{t},x) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k P_k(\tilde{t},x) + \varepsilon^{m+1}\tilde{P},$$

avec $\tilde{P} = \tilde{P}(\varepsilon, t, \tilde{t}, x) = O(1)\tilde{t}^{1+\lfloor m/2 \rfloor}$. Ainsi

$$U_m^\varepsilon = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \left[U_k(t,x) + I_k(\tilde{t},x) \right] = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \left[P_k(\tilde{t},x) + I_k(\tilde{t},x) \right] + \varepsilon^{m+1}\tilde{P}.$$

On peut alors montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left[\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k U_k(t,x) \right] &= \varepsilon^{m-1} \left[\partial_{\tilde{t}} \tilde{P} + \mathcal{L}(\varepsilon, \tilde{P}, P_0, ..., P_m) \right], \\ \mathcal{R}(U_m^\varepsilon) &= \varepsilon^{m-1} \left[\partial_{\tilde{t}} \tilde{P} + \mathcal{L}(\varepsilon, \tilde{P}, I_0 + P_0, ..., P_m + I_m) \right], \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(\varepsilon, \tilde{P}, .)$ dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de ses variables et leurs différentielles de premier ordre en espace. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} F_m^\varepsilon =& \varepsilon^{1-m}\mathcal{R}(U_m^\varepsilon) - \varepsilon^{1-m}\mathcal{R}\left[\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k U_k(t,x) \right] + O(\varepsilon) \\ =& \mathcal{L}(\varepsilon, \tilde{P}, I_0 + P_0, ..., P_m + I_m) - \mathcal{L}(\varepsilon, \tilde{P}, P_0, ..., P_m) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Et, puisque les $I_k(\tilde{t}, x)$ décroissent exponentiellement vers zéro lorsque $\tilde{t} \to +\infty$, on obtient le résultat. $\square$

Deuxième partie

Existence globale uniforme de solutions pour les systèmes hyperboliques symétrisables

Dans cette partie nous recherchons des solutions régulières au problème de Cauchy associé aux systèmes hyperboliques quasi-linéaires d'ordre 1 avec terme source de la forme (9), avec conditions initiales (10). Le cadre est similaire à celui de la partie 1. Rappelons que la variable $U : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d \to \Omega \subset \mathbb{R}^l$ est l'inconnue, avec $x = (x_1, ..., x_d)$, et que $\varepsilon \in (0,1]$ est un petit paramètre. Les fonctions vectorielle $Q : \Omega \to \mathbb{R}^l$ et matricielles A_j $(j \in \{1, ..., d\}) : \Omega \to \mathbb{R}^{l\times l}$ sont régulières. L'espace Ω est l'espace d'état. On suppose de plus que le système (9) est hyperbolique symétrisable, avec un symétriseur noté $A_0(U)$.

La plupart du temps, $Q(U)$ est, à une transformation linéaire près, de la forme

$$Q(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ q(U) \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

où $q : \Omega \to \mathbb{R}^r$ est une fonction régulière, $1 \leq r \leq l$. C'est le cas dans la plupart des modèles physiques (cf. [20, 72]). Selon la même partition, on note

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{l-r}, \quad v \in \mathbb{R}^r,$$

et $M = \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{21} & M^{22} \end{bmatrix}$ pour toute matrice M de taille $l \times l$. Le terme $q(U)/\varepsilon$ correspond aux effets dissipatifs dans (9). Lorsque $r = l$ la dissipation est complète, et $U = v$. Ce cas étant plus facile à traiter, nous ne traiterons que le cas de la dissipation partielle (où $r \leq l - 1$). Par définition, un vecteur constant $U_e = (u_e, v_e) \in \Omega$ vérifiant $q(U_e) = 0$ est appelé un *état d'équilibre* pour (9).

Le système (9) est une forme générale d'équations hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre avec relaxation dans le terme source, il inclut le cas conservatif, de la forme

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} F_j(U) = \frac{Q(U)}{\varepsilon}, \tag{2.2}$$

avec $A_j(U) = F_j'(U)$. On sait (cf. partie 1) que, de manière générale, des solutions régulières pour (9) ou (2.2) existent seulement localement en temps, et des singularités peuvent apparaître en un temps fini. Cependant la structure dissipative du système prévient cette formation de singularité, et implique l'existence globale de solutions régulières au voisinage d'un équilibre constant. Pour (2.2), avec $\varepsilon = 1$, un tel résultat d'existence globale a été prouvé par Hanouzet et Natalini en dimension un (cf. [20]), et a été étendu aux dimensions supérieures par Yong (cf. [72]). Dans leurs résultats, les auteurs ont besoin de deux hypothèses importantes. La première est une condition de dissipation partielle autour de l'équilibre U_e. Elle s'écrit comme suit

$$[\mathfrak{E}'(U) - \mathfrak{E}'(U_e)]\, Q(U) \leq -c_e |Q(U)|^2, \quad \text{pour } U \text{ proche de } U_e, \tag{2.3}$$

où $c_e > 0$ est une constante, et où $\mathfrak{E}$ est une entropie strictement convexe pour (2.2). Cette condition permet de montrer une estimation en temps sur la dissipation de Q. La seconde hypothèse est la condition classique de Shizuta-Kawashima **(SK)** sur U_e, qui permet d'obtenir une estimation en temps de la dissipation de ∇U. Ces estimations sont essentielles dans la preuve de l'existence globale de solutions autour de U_e. Sous ces deux conditions, des travaux supplémentaires ont été effectués sur le comportement en temps long des solutions (cf. [5] et [3]). Notons que **(SK)** n'est pas une condition nécessaire pour l'existence globale. Citons par exemple [73, 9, 44, 53] où l'existence globale est démontrée tandis que **(SK)** n'est pas vérifiée. En général, l'existence globale de solutions pour (2.2) n'est pas uniforme par rapport à $\varepsilon \in (0, 1]$, car le voisinage de U_e dépend lui aussi de ε. Cela dit, dans [13], Coulombel et Goudon ont considéré les équations d'Euler avec un terme de relaxation (1.20) dans le cas où $p(n) = a^2 n$, avec $a > 0$ constante. Ces résultats furent améliorés par Lin et Coulombel au cas d'une pression $p(n)$ quelconque, croissante selon $n > 0$ (cf. [35]). Un autre résultat sur l'existence globale uniforme est dû à Beauchard et Zuazua (cf. [3]), où un système non conservatif de forme générale (9) fut étudié, mais dans un cas particulier de fonctions A_j et Q. Malheureusement, le cas présenté ne s'applique pas à beaucoup d'exemples (notamment ceux présentés en paragraphe 2.1.3). Ainsi, ils laissèrent dans leur article une conjecture sur l'existence globale uniforme par rapport à ε dans le cas général.

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier le problème pour une forme générale de A_j. Ce travail comporte trois résultats principaux. Premièrement, nous prouvons l'existence globale uniforme de solutions régulières $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ au problème de Cauchy (9)-(10), au voisinage d'un équilibre constant $U_e = \begin{bmatrix} u_e \\ v_e \end{bmatrix}$. Une application immédiate de ce résultat est la convergence globale du système (9) vers des équations hyperboliques linéaires lorsque $\varepsilon \to 0$. Une condition essentielle pour obtenir ces résultats est que $A_j^{11}(u, v_e)$ doit être une matrice constante pour tout $j \in \{1, ..., d\}$ et tout u au voisinage de u_e. Ensuite, nous supposerons de plus que $A_j^{11}(u, v_e) = 0$. Alors, lorsque $\varepsilon \to 0$, la suite de solutions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, dans un temps lent $\tilde{t} = \varepsilon t$, converge globalement en temps vers une solution d'un système non linéaire de type parabolique d'ordre deux. Cela implique l'existence globale de solutions régulières pour ce système limite. On montre de plus que le système limite est effectivement parabolique, et que le problème de Cauchy associé admet une unique solution dans un voisinage de u_e. Remarquons que le système limite est différent de celui que l'on obtient à partir du système (9) par le développement de Chapman-Enskog. Ces résultats demandent des conditions de stabilité supplémentaires, et peuvent s'appliquer à (au moins) quatre exemples, notamment les équations d'Euler (1.20) et les systèmes étudiés par Beauchard et Zuazua dans [3]. Leurs preuves reposent sur des estimations d'énergie uniformes par rapport au temps et à ε. Les conditions de stabilité et les exemples dont nous parlons sont décrits en détails dans la section suivante (paragraphe 2.1.3). Enfin, pour $\varepsilon = 1$, nous étendons le résultat d'existence globale, établi pour des systèmes conservatifs par Hanouzet et Natalini dans [20] et par Yong dans [72], au cas des systèmes non conservatifs. En particulier, pour $d \geq 3$, nous prouvons l'existence globale sous une condition de dissipation partielle et sous la condition **(SK)**, sans hypothèse supplémentaire.

Expliquons maintenant pourquoi nous considérons des systèmes non conservatifs :

(1) Ces systèmes offrent un résultat plus général, puisque tout système conservatif peut se mettre sous la forme d'un système non conservatif.

(2) Il existe effectivement des systèmes qui ne peuvent se mettre sous la forme conservative. Des exemples typiques sont les modèles multi-fluides (cf. [33, 57, 17]).

Cette partie est organisée comme suit. Dans la prochaine section (section 2.1), nous décrivons d'abord les hypothèses, et discutons des liens avec notre problème. Puis nous énonçons les théorèmes principaux, et donnons des exemples d'applications. La section 2.2 est dédiée à la preuve de l'existence globale uniforme, par le biais d'estimations d'énergie uniformes. Dans la section 2.3, nous prouvons la convergence, lorsque $\varepsilon \to 0$, du système vers des équations hyperboliques, puis paraboliques sous une échelle de temps lent. Dans la dernière section (section 2.4), nous prouvons l'existence globale de solutions, lorsque $\varepsilon = 1$, pour des systèmes hyperboliques non conservatifs.

2.1 Résultats principaux et exemples

2.1.1 Hypothèses

Durant cette partie, nous supposons premièrement que

(H2.1) *U_e est un état d'équilibre de Ω, et $\partial_v q(U_e)$ est une matrice inversible.*

Introduisons les variables suivantes :

$$\mathfrak{q} = q(U), \quad V = \begin{bmatrix} u \\ \mathfrak{q} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

La condition **(H2.1)** nous dit que $q_e \overset{def}{=} q(U_e) = 0$ et que $\phi : V \longmapsto U$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme dans un voisinage de $V_e = \begin{bmatrix} u_e \\ 0 \end{bmatrix}$, que l'on notera Ω_e. De plus, V satisfait le système suivant :

$$\partial_t V + \sum_{j=1}^{d} \mathcal{A}_j(V)\partial_{x_j} V = \frac{1}{\varepsilon} P(V) \tag{2.5}$$

où

$$\mathcal{A}_j(V) = \phi'(V)^{-1} A_j \left[\phi(V)\right] \phi'(V), \tag{2.6}$$

avec $\phi'(V)^{-1}$ la matrice inverse de $\phi'(V)$, et

$$P(V) = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_v q \left[\phi(V)\right] \mathfrak{q} \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Soit alors

$$\mathcal{A}_0(V) = \phi'(V)^T A_0 \left[\phi(V)\right] \phi'(V). \tag{2.8}$$

On voit rapidement que le système (2.5) est encore hyperbolique symétrisable, avec $\mathcal{A}_0(V)$ comme symétriseur. Ce système (2.5), d'inconnue V, fut introduit par Yong dans [72], et fut utilisé pour les estimations d'énergie d'ordres supérieurs à 1. Nous suivrons la même idée, et utiliserons (2.5) au lieu de (9) dans notre étude. L'avantage est que, sous une condition de dissipation partielle, $\mathfrak{q}$ peut être vue comme variable de dissipation dans les estimations d'énergie. Pour que $v - v_e$ puisse jouer un tel rôle, nous devrions faire une hypothèse plus forte que **(H2.1)** (voir **(H2.7)** ci-dessous).

Avant d'énoncer le résultat principal, nous faisons les hypothèses suivantes, portant sur la structure du système (2.5). L'espace ω_e désigne un voisinage de u_e (indépendant de ε) satisfaisant $\omega_e \times \{0\} \subset \Omega_e$.

(H2.2) *Il existe une constante $C_e > 0$ telle que*

$$\mathcal{A}_0(V_e)P'(V_e) + P'(V_e)^T \mathcal{A}_0(V_e) \leq -C_e \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_r \end{bmatrix}; \tag{2.9}$$

(H2.3) *Pour tout $u \in \omega_e$, $\partial_{\mathfrak{q}} \mathcal{A}_0^{11}(u,0) = 0$;*

(H2.4) *Pour tout $u \in \omega_e$, $\mathcal{A}_0^{12}(u,0) = 0$;*

(H2.5) *Pour tout $j \in \{1, ..., d\}$ et tout $u \in \omega_e$, $\mathcal{A}_j^{11}(u,0)$ et $\tilde{\mathcal{A}}_j^{11}(u,0)$ sont des matrices constantes, et $\partial_u \mathcal{A}_0^{11}(u,0)\mathcal{A}_j^{11}(u,0) = 0$, où $\tilde{\mathcal{A}}_j = \mathcal{A}_0\mathcal{A}_j$;*

(SK) Nous supposons également que V_e satisfait la condition **(SK)** décrite en introduction, et nous noterons

$$\mathcal{A}(\zeta, u_e) = \sum_{j=1}^{d} \zeta_j \mathcal{A}_j(V_e), \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

La condition de dissipation partielle **(H2.2)** fut abordée dans [12, 45] et introduite dans

[69] pour un système général de la forme (9). Elle fut utilisée plusieurs fois, dans différents travaux, cf. par exemple [32, 70, 72, 54]. En particulier, elle est vérifiée pour un système conservatif possédant une entropie strictement convexe $\mathfrak{E}$, cf. [72]. Les conditions **(H2.4)** et **(H2.5)** furent introduites dans [32] et [54], respectivement, dans l'étude de l'existence locale uniforme par rapport à ε et de la convergence vers un système de type parabolique lorsque $\varepsilon \to 0$. La condition **(H2.3)** est nouvelle, et est requise pour notre étude de l'existence globale uniforme. Dans [20, 72], l'existence globale de solutions régulières pour le système (2.2) fut prouvée sous les conditions **(H2.1)**, (2.3) et **(SK)**. Enfin, il est important de souligner que ces hypothèses sont indépendantes de ε.

Nous savons que la condition de Shizuta-Kawashima **(SK)** est invariante par difféomorphisme, et qu'il existe diverses formes, équivalentes, d'énoncer **(SK)** (cf. [59] ou [72]). Ci-dessous, nous énonçons deux de ces formes, nécessaires dans l'étude de notre problème.

Lemme 2.1.

*Supposons **(H2.1)** vérifiée. Alors la condition **(SK)** est équivalente à chacune des deux conditions suivantes :*

(SK') $\forall \zeta \in \mathcal{S}^{d-1}$, *le noyau de* $\mathcal{A}^{21}(\zeta, u_e)$ *ne contient aucun vecteur propre de* $\mathcal{A}^{11}(\zeta, u_e)$ *;*

(SK") *Il existe une constante* $c_{SK} > 0$ *et une matrice anti-symétrique réelle* $\mathcal{K} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^{d-1})$ *telles que* $\mathcal{K}(-\zeta) = -\mathcal{K}(\zeta)$*, et*

$$\mathcal{K}(\zeta)\mathcal{A}(\zeta, u_e) - \mathcal{A}^T(\zeta, u_e)\mathcal{K}(\zeta) \geq 2c_{SK}\boldsymbol{I}_l - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_r \end{bmatrix}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

Dans l'étude de la convergence du système en temps lent $\tilde{t} = \varepsilon t$, nous avons besoin de deux nouvelles hypothèses, plus fortes que les précédentes. Elles furent déjà utilisées dans [32, 54].

(H2.6) *Pour tout* $j \in \{1, ..., d\}$ *et tout* $u \in \omega_e$, $\mathcal{A}_j^{11}(u, 0) = 0$ *;*

(H2.7) $\partial_v q(U_e)$ *est une matrice inversible, et pour tout* $u \in \omega_e$, $q(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = v_e$.

Discutons maintenant des liens entre ces conditions. Clairement, **(H2.7)** implique **(H2.1)**. Nous avons de plus le résultat suivant.

Proposition 2.1.

*Supposons que l'hypothèse suivante, un peu plus forte que **(H2.2)**, soit vérifiée :*

$$\mathcal{A}_0(u, 0)P'(u, 0) + P'(u, 0)^T\mathcal{A}_0(u, 0) \leq -C_e\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_r \end{bmatrix}, \forall u \in \omega_e. \tag{2.10}$$

*Alors **(H2.7)** implique **(H2.4)**, et **(H2.6)**-**(H2.7)** impliquent **(H2.5)**.*

Preuve.

D'après (2.7) et **(H2.7)**, nous avons

$$P'(u,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial_v q(u,v_e) \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_0(u,0)P'(u,0) + P'(u,0)^T\mathcal{A}_0(u,0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_0^{12}(u,0)\partial_v q(u,v_e) \\ [\partial_v q(u,v_e)]^T \mathcal{A}_0^{12}(u,0)^T & \mathcal{A}_0^{22}(u,0)\partial_v q(u,v_e) + [\partial_v q(u,v_e)]^T \mathcal{A}_0^{22}(u,0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La condition (2.10) implique que la matrice ci-desssus est symétrique définie négative, et **(H2.7)** implique que $\partial_v q(u,v_e)$ est inversible, pour tout u sur un voisinage de u_e, que nous noterons encore ω_e. Puisque le premier bloc diagonal de la matrice est nul, cela implique que $\mathcal{A}_0^{12}(u,0)\partial_v q(u,v_e) = 0$, et donc $\mathcal{A}_0^{12}(u,0) = 0$, pour tout $u \in \omega_e$. Finalement, l'hypothèse **(H2.5)** provient de **(H2.6)** et de

$$\tilde{\mathcal{A}}_j^{11}(u,0) = \mathcal{A}_0^{11}(u,0)\mathcal{A}_j^{11}(u,0) + \mathcal{A}_0^{12}(u,0)\mathcal{A}_j^{21}(u,0) = 0, \quad \text{pour tout } u \in \omega_e.$$

La preuve est donc terminée. □

Les conditions **(H2.2)** à **(H2.6)** sont écrites pour le système (2.5), avec la variable V. Le résultat suivant montre que ces conditions peuvent aussi s'écrire pour le système (9) avec la variable U, à supposer que **(H2.7)** soit vérifiée.

Proposition 2.2.

*Supposons **(H2.7)** vérifiée. Alors les hypothèses **(H2.2)** à **(H2.6)** sont invariantes par le changement de variable ϕ. Plus précisément, on a*

$$A_0^{11}(u,v_e) = \mathcal{A}_0^{11}(u,0), \tag{2.11}$$

$$A_0^{12}(u,v_e) = \mathcal{A}_0^{12}(u,0)\partial_v q(u,v_e) \tag{2.12}$$

$$\partial_v A_0^{11}(u,v_e) = \partial_{\mathfrak{q}}\mathcal{A}_0^{11}(u,0)\partial_v q(u,v_e) + \left[\partial_{uv}^2 q(u,v_e)\right]^T \mathcal{A}_0^{21}(u,0) + \mathcal{A}_0^{12}(u,0)\partial_{uv}^2 q(u,v_e), \tag{2.13}$$

$$\partial_u A_0^{11}(u,v_e) = \partial_u\mathcal{A}_0^{11}(u,0) + \left[\partial_{uu}^2 q(u,v_e)\right]^T \mathcal{A}_0^{21}(u,0) + \mathcal{A}_0^{12}(u,0)\partial_{uu}^2 q(u,v_e), \tag{2.14}$$

$$A_j^{11}(u,v_e) = \mathcal{A}_j^{11}(u,0), \tag{2.15}$$

*et enfin **(H2.2)** est équivalent à*

$$A_0(U_e)Q'(U_e) + (Q'(U_e))^T A_0(U_e) \leq -C_e \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\partial_v q(u,v_e)]^T \partial_v q(u,v_e) \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

où $[\partial_v q(u,v_e)]^T \partial_v q(u,v_e)$ est une matrice symétrique définie positive.

Preuve.

Soit ψ l'inverse de ϕ. Alors

$$\psi(U) = \begin{bmatrix} u \\ q(u,v) \end{bmatrix}, \quad \psi'(U) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{l-r} & 0 \\ \partial_u q(u,v) & \partial_v q(u,v) \end{bmatrix}.$$

Si **(H2.7)** est vérifiée, alors $\partial_u q(u,v_e) = 0$, et on a vu dans la preuve de la proposition 2.1 que $\partial_v q(u,v_e)$ est inversible pour tout $u \in \omega_e$. Ainsi,

$$Q'(U_e) = P'(V_e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial_v q(U_e) \end{bmatrix}, \quad \psi'(U_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{l-r} & 0 \\ 0 & \partial_v q(U_e) \end{bmatrix}.$$

Or, d'après (2.8), on a

$$A_0(U_e)Q'(U_e) = \psi'(U_e)^T \left[\mathcal{A}_0(V_e)P'(V_e)\right] \psi'(U_e).$$

Donc **(H2.2)** équivalent à (2.16).

Ensuite, quelques calculs donnent

$$\begin{aligned} A_0(U) &= \psi'(U)^T \mathcal{A}_0\left[\phi(U)\right]\psi'(U) \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0^{11} + (\partial_u q)^T \mathcal{A}_0^{21} + \left[\mathcal{A}_0^{12} + (\partial_u q)^T \mathcal{A}_0^{22}\right]\partial_u q & \left[\mathcal{A}_0^{12} + (\partial_u q)^T \mathcal{A}_0^{22}\right]\partial_v q \\ (\partial_v q)^T \mathcal{A}_0^{21} + (\partial_v q)^T \mathcal{A}_0^{22}\partial_u q & (\partial_v q)^T \mathcal{A}_0^{22}\partial_v q \end{bmatrix}(U). \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$A_0^{11}(U) = \mathcal{A}_0^{11}\left[u,q(U)\right] + \left[\partial_u q(U)\right]^T \mathcal{A}_0^{21}\left[u,q(U)\right] + \left[\mathcal{A}_0^{12}\left[u,q(U)\right] + \left[\partial_u q(U)\right]^T \mathcal{A}_0^{22}\left[u,q(U)\right]\right]\partial_u q(U),$$

et

$$A_0^{12}(U) = \left[\mathcal{A}_0^{12}\left[u,q(U)\right] + \left[\partial_u q(U)\right]^T \mathcal{A}_0^{22}\left[u,q(U)\right]\right]\partial_v q(U).$$

Puisque $\partial_u q(u,v_e) = 0$, on a les égalités (2.11) à (2.14). De même, (2.6) implique l'égalité (2.15). Les résultats (2.11) à (2.16) prouvent l'invariance de **(H2.2)** à **(H2.6)** par ϕ. $\square$

2.1.2 Résultats principaux

Notre premier résultat concerne l'existence globale uniforme de solutions régulières au problème de Cauchy (9)-(10) par rapport à ε.

Théorème 2.1.

Soit $s > d/2+1$ un entier, et soit $\overline{U} \in U_e + H^s$. Supposons satisfaites les hypothèses ***(H2.1)*** *à* ***(H2.5)*** *et* ***(SK)****. Il existe deux constantes $\varpi_1 > 0$ et $c_1 > 0$, indépendantes de ε, telles que, si $\|\overline{U} - U_e\|_s \leq \varpi_1$, alors pour tout $\varepsilon \in (0,1]$, le problème de Cauchy* (9)-(10) *admet une unique solution globale $U^\varepsilon = \begin{bmatrix} u^\varepsilon \\ v^\varepsilon \end{bmatrix}$, satisfaisant $U^\varepsilon - U_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s)$ et, pour tout $t \geq 0$,*

$$\|U^\varepsilon(t) - U_e\|_s^2 + \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon} \|q\left[u^\varepsilon(t'), v^\varepsilon(t')\right]\|_s^2 + \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon(t')\|_{s-1}^2 \right) dt' \leq c_1 \|\overline{U} - U_e\|_s^2. \tag{2.17}$$

Le théorème 2.1 a pour application immédiate la convergence du système (2.5) vers des équations hyperboliques linéaires lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet, l'estimation (2.17) donne des bornes uniformes sur la suite de solutions $(U^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Associées au système, on obtient la compacité relative de $(U^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, nous permettant de passer à la limite dans le système.

Théorème 2.2.

Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 2.1. Alors pour tout $T > 0$ et tout $s_1 \in [0,s)$, lorsque $\varepsilon \to 0$, on a

$$u^\varepsilon - u_e \rightharpoonup u_0 - u_e, \quad \textit{faiblement-}* \ \textit{dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s), \tag{2.18}$$

$$u^\varepsilon \to u_0, \quad \textit{uniformément dans } \mathcal{C}\left([0,T]; H^{s_1}_{loc}\right), \tag{2.19}$$

$$q\left(u^\varepsilon, v^\varepsilon\right) \to 0, \quad \textit{fortement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^s), \tag{2.20}$$

où u_0 est l'unique solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{11}(u_0, 0) \partial_{x_j} u_0 = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \\ u_0(0,x) = \overline{u}(x). \end{cases} \tag{2.21}$$

Notons que le système (2.21) est linéaire car **(H2.5)** implique que $\mathcal{A}_j^{11}(u,0)$ est une matrice constante pour tout $u \in \omega_e$. Un résultat plus intéressant peut être prouvé sur la convergence du système en temps lent vers un système d'équations de type paraboliques non linéaires. Plus précisément, si nous notons $\mathfrak{q}^\varepsilon = q(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$, nous définissons une suite en temps lent $\tilde{t} = \varepsilon t$ par

$$\mu^\varepsilon(\tilde{t}, x) = u^\varepsilon(\tilde{t}/\varepsilon, x), \quad \lambda^\varepsilon(\tilde{t}, x) = \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{q}^\varepsilon(\tilde{t}/\varepsilon, x). \tag{2.22}$$

Nous voulons alors prouver la convergence de $(\mu^\varepsilon, \lambda^\varepsilon)$ vers une solution (μ_0, λ_0) au problème de Cauchy associé aux équations aux dérivées partielles de second ordre (11)-(13) avec condition initiale (12).

Théorème 2.3.

Supposons les hypothèses du théorème 2.1 vérifiées, ainsi que ***(H2.6)-(H2.7)****. Alors, lorsque* $\varepsilon \to 0$*, la suite* $(\mu^\varepsilon, \lambda^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *converge dans le sens suivant :*

$$\mu^\varepsilon - u_e \rightharpoonup \mu_0 - u_e, \quad \textit{faiblement-}* \ \textit{dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s), \tag{2.23}$$

$$\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda_0, \quad \textit{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^s), \tag{2.24}$$

et pour tout $T > 0$ *et tout* $s_1 \in [0, s)$*,*

$$\mu^\varepsilon \to \mu_0, \quad \textit{uniformément dans } \mathcal{C}\left([0,T]; H^{s_1}_{loc}\right), \tag{2.25}$$

où μ_0 *et* λ_0 *sont les solutions globales du problème* (11)-(13).

Le système (11) fait intervenir des équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre deux, dont le terme principal est gouverné par l'opérateur différentiel suivant :

$$\partial_{\tilde{t}} + \sum_{i,j=1}^{d} \mathcal{A}_{ij}(\mu)\partial^2_{x_i x_j}, \text{ avec } \mathcal{A}_{ij}(\mu) = \mathcal{A}^{12}_i(\mu, 0)\left[\partial_v q(\mu, v_e)\right]^{-1} \mathcal{A}^{21}_j(\mu, 0),$$

où $\mathcal{A}_{ij}(\mu)$ est bien définie grâce à **(H2.7)**. Pour ce type de système, l'existence de solutions régulières (même locale) n'est pas connu de manière systématique. Ainsi le théorème 2.3 peut paraître surprenant à ce stade, puisqu'il implique effectivement l'existence globale d'une solution régulière au problème de Cauchy (11)-(12). Pour mieux comprendre cette situation, nous établissons un résultat sur la structure du système (11).

Lemme 2.2.

Supposons les hypothèses ***(H2.6)-(H2.7)*** *et* ***(SK)*** *vérifiées. Alors il existe un voisinage* $\omega'_e \subset \omega_e$ *de* u_e *(indépendant de* ε*), tel que le système* (11) *est strictement parabolique sur* ω'_e*, au sens où*

$$\sum_{i,j=1}^{d} \mathcal{A}_{ij}(\mu)\zeta_i\zeta_j$$

est une matrice symétrique définie négative pour tout $\mu \in \omega'_e$ *et tout* $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_d) \in \mathcal{S}^{d-1}$.

Preuve.

Remarquons premièrement que $\mathcal{S}^{d-1}$ est un ensemble compact. Ainsi **(SK')** implique qu'il existe un voisinage (indépendant de ζ) $\omega'_e \subset \omega_e$ tel que $\mathfrak{Ker}\left[\mathcal{A}^{21}(\zeta, \mu)\right]$ ne contient aucun vecteur propre de $\mathcal{A}^{11}(\zeta, \mu)$, pour tout $\zeta \in \mathcal{S}^{d-1}$ et tout $\mu \in \omega'_e$. Grâce à **(H2.6)**, on a $\mathcal{A}^{11}(\zeta, \mu) = 0$, et ainsi $\mathfrak{Ker}\left[\mathcal{A}^{21}(\zeta, \mu)\right] = \{0\}$ pour tout $\zeta \in \mathcal{S}^{d-1}$ et tout $\mu \in \omega'_e$. Cela implique que $r \geq l - r$. D'après le théorème du rang, on obtient $\operatorname{rg}[\mathcal{A}^{21}(\zeta,\mu)] = l - r$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}^{21}(\zeta,\mu)$ est de rang plein, pour tout $\zeta \in \mathcal{S}^{d-1}$ et tout $\mu \in \omega_e'$. Ainsi, en suivant le même principe que le lemme 2.4 dans [32] ou la proposition 1.2 de la partie 1, on prouve que le système (11) est strictement parabolique. □

Théorème 2.4.

Supposons les hypothèses du théorème 2.3 vérifiées. Il existe deux constantes $\varpi_2 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que, si $\|\overline{u} - u_e\|_s \leq \varpi_2$, alors le problème de Cauchy (11)-(12) admet une unique solution μ_0 satisfaisant $\mu_0 - u_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s)$ et $\nabla\mu_0 \in L^2(\mathbb{R}^+; H^s)$. De plus, pour tout $t \geq 0$,

$$\|\mu_0(t,.) - u_e\|_s^2 + \int_0^t \|\nabla\mu_0(t',.)\|_s^2 \, dt' \leq c_2\|\overline{u} - u_e\|_s^2. \tag{2.26}$$

La preuve du théorème 2.4 provient de techniques standard utilisant les transformations de Fourier. Nous la laissons en annexe.

Le théorème 2.1 donne un résultat d'existence globale uniforme pour un système non conservatif par rapport à $\varepsilon \in (0,1]$. Considérons maintenant le cas où $\varepsilon = 1$. Rappelons que pour un système conservatif (2.2), l'existence globale est démontrée dès que **(H2.1)**, (2.3) et **(SK)** sont vérifiées. Nous établissons maintenant un résultat similaire pour des systèmes non conservatifs, sous les conditions **(H2.1)**-**(H2.2)**, **(H2.4)**-**(H2.5)** et **(SK)**. En particulier, pour $d \geq 3$, **(H2.4)** et **(H2.5)** ne sont plus requises. Ces résultats montrent notamment que **(H2.3)** n'est nécessaire que dans le problème de l'existence globale uniforme par rapport à ε.

Théorème 2.5.

*Soit $s > d/2+1$ un entier, et $\varepsilon = 1$. Soit $\overline{U} \in U_e + H^s$, et supposons **(H2.1)**, **(H2.2)** et **(SK)** vérifiées. Il existe une constante $\varpi_3 > 0$ telle que, si $\|\overline{U} - U_e\|_s \leq \varpi_3$, alors le problème de Cauchy associé au système (9) avec condition initiale $\overline{U}$ admet une unique solution globale U_0 vérifiant $U_0 - U_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s)$, à supposer que nous ayons*

*ou bien **(i)** **(H2.4)**-**(H2.5)**, ou bien **(ii)** $d \geq 3$.*

Remarque 2.1.

La condition **(H2.2)** implique que $\mathfrak{q}$ est une variable dissipative. Si **(H2.7)** est vérifiée, $v - v_e$ est également dissipative puisque

$$q(u,v) = \partial_v q(u,v_e)(v - v_e) + O(|v - v_e|^2).$$

Dans ce cas, le changement de variables ϕ n'est plus nécessaire pour obtenir les théorèmes 2.1 à 2.5, et nous pouvons travailler directement sur le système (9), en considérant que ϕ est l'indentité, pour comprendre les conditions **(H2.2)** à **(H2.6)** et **(SK)**. De plus, en regardant la preuve de la proposition 2.2, on voit rapidement que le système d'ordre deux (11) peut s'écrire

$$\partial_{\tilde{t}}\mu_0 + \sum_{i,j=1}^{d} \Big[A_i^{12}(\mu_0, v_e)\partial_{x_i}\left([\partial_v q(\mu_0, v_e)]^{-1} A_j^{21}(\mu_0, v_e)\partial_{x_j}\mu_0\right) \\ - \partial_v A_i^{11}(\mu_0, v_e)\,[\partial_v q(\mu_0, v_e)]^{-1} A_j^{21}(\mu_0, v_e)\partial_{x_j}\mu_0\partial_{x_i}\mu_0\Big] = 0.$$

Cette remarque est utile pour vérifier les hypothèses sur des exemples concrets.

2.1.3 Exemples

Nous donnons dès à présent quatre exemples pour lesquels les théorèmes 2.1 à 2.5 peuvent s'appliquer.

Exemple 1. *Modèle discret à deux vitesses généralisé*

Ce modèle, déjà étudié dans la partie 1 en variable lente, peut s'écrire comme un système semi-linéaire de la forme (cf. par exemple [63, 56, 36]) :

$$\begin{cases} \partial_t f + \partial_x f = \varepsilon^{-1}(f+g)^{\chi}(g-f), \\ \partial_t g - \partial_x g = \varepsilon^{-1}(f+g)^{\chi}(f-g), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

où χ est un réel et $f+g>0$. Avec un changement de variables $u = f+g$ et $v = f-g$, le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \partial_x u = -2\varepsilon^{-1}u^{\chi}v. \end{cases}$$

Soit

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q(U) = -2u^{\chi}v.$$

Alors le système est de la forme (2.5), et est hyperbolique symétrisable avec symétriseur $A_0 = I_2$, et $r=1$. Pour $u \geq cst. > 0$, la fonction q vérifie l'hypothèse **(H2.7)**. D'après la remarque 2.1, le changement de variables ϕ n'est donc pas nécessaire pour la preuve des théorèmes 2.1 à 2.4. Ainsi, en considérant la variable v comme la variable $\mathfrak{q}$, on voit rapidement que les hypothèses **(H2.1)** à **(H2.7)** et **(SK)** sont vérifiées. L'équation limite parabolique correspondante pour $\mu^{\varepsilon}(\tilde{t},x) = u^{\varepsilon}(\tilde{t}/\varepsilon, x)$ est

$$\partial_{\tilde{t}}\mu_0 - \frac{1}{2}\partial_x\left(\mu_0^{-\chi}\partial_x\mu_0\right) = 0.$$

Exemple 2. *Équations d'Euler avec relaxation*

Pour ce système (décrit en (1.20)), l'existence globale d'une solution (n,v), uniformément par rapport à τ, a été prouvée dans [13] dans le cas où $p(n) = a^2 n$, $a>0$, puis dans le cas général dans [35] (cf. également [39, 60]). Nous l'avons vu dans la partie 1, pour des solutions régulières avec $n > 0$, la conservation de la quantité de mouvement peut se réécrire sous la forme (1.21). Comme en partie 1, on suppose que $p'(n) > 0$ pour tout $n > 0$. On pose alors $r = d$, $\varepsilon = \tau$, et

$$U = \begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix}, \quad A_j(U) = \begin{bmatrix} v_j & n\mathbf{e}_j^T \\ h'(n)\mathbf{e}_j & v_j\mathbf{I}_d \end{bmatrix}, \quad j \in \{1, ..., d\}, \quad q(U) = -v.$$

Alors le système est bien de la forme (2.5), et est hyperbolique symétrisable avec symétriseur

$$A_0(U) = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & h'(n)^{-1}\mathbf{I}_d \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, on a exactement $\mathfrak{q} = -v$. On montre rapidement que les hypothèses **(H2.1)** à **(H2.7)** et **(SK)** sont satisfaites. L'équation limite parabolique correspondante pour $\mu^\varepsilon(\tilde{t}, x) = n^\varepsilon(\tilde{t}/\varepsilon, x)$ est

$$\partial_{\tilde{t}}\mu_0 - \Delta p(\mu_0) = 0.$$

Cette équation n'est linéaire que si p est lui-même linéaire.

Exemple 3. *Équations d'Euler avec relaxation en coordonnées Lagrangiennes*

Dans cet exemple nous considérons le cas du système (1.20) en dimension 1 ($d = 1$). Soit $dy = ndx - nvdt$. Les coordonnées Lagrangiennes (t, y) sont bien définies pour $n > 0$. Dans ces coordonnées, les équations d'Euler de l'exemple 2 deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y\pi(\rho) = -v/\varepsilon, \quad t > 0,\ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où

$$\rho = 1/n, \quad \pi(\rho) = p(1/n).$$

Puisque $p'(n) > 0$ pour $n > 0$, on a $\pi'(\rho) < 0$ pour tout $\rho > 0$. On pose alors

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ v \end{bmatrix}, \quad A_j(U) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \pi'(\rho) & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0(U) = \begin{bmatrix} -\pi'(\rho) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q(U) = -v.$$

Ainsi le système est de la forme (2.5), et est hyperbolique symétrisable. On montre rapidement que les hypothèses **(H2.1)** à **(H2.7)** et **(SK)** sont vérifiées pour ce système. L'équation limite parabolique correspondante pour $\mu^\varepsilon(\tilde{t}, y) = \rho^\varepsilon(\tilde{t}/\varepsilon, y)$ est

$$\partial_{\tilde{t}}\mu_0 + \partial^2_{yy}p(1/\mu_0) = 0.$$

Cette équation n'est linéaire que si $\mu_0 \mapsto p(1/\mu_0)$ est linéaire. C'est le cas, par exemple, d'un gas de Chaplygin, où $p(\mu_0) = -\mu_0^{-1}$.

Exemple 4. *Le modèle de Beauchard et Zuazua*

Ce dernier exemple fut étudié par Beauchard et Zuazua dans [3] pour un système non conservatif de la forme :

$$\partial_t V + \sum_{j=1}^{d} \mathcal{A}_j(\mathfrak{q})\partial_{x_j} V = -\frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} V, \quad V = \begin{bmatrix} u \\ \mathfrak{q} \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{l-r},\ \mathfrak{q} \in \mathbb{R}^r, \tag{2.27}$$

où $\mathcal{A}_j(\mathfrak{q})$, pour $j \in \{1, ..., d\}$, sont des matrices symétriques et ne dépendent que de la seconde variable $\mathfrak{q}$, et où Γ est une matrice définie positive constante d'ordre r. Ce système est bien de la forme (2.5), et est hyperbolique symétrisable avec symétriseur $\mathcal{A}_0 = \mathbf{I}_l$. Clairement, les hypothèses **(H2.1)** à **(H2.5)** et **(H2.7)** sont satisfaites. En supposant **(SK)** vérifiée, les auteurs prouvèrent l'existence globale uniforme de solutions autour de $V_e = 0$. C'est un cas particulier de notre théorème 2.1. En supposant de plus **(H2.6)**, c'est-à-dire $\mathcal{A}_j^{11}(0) = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., d\}$, on peut appliquer le théorème 2.3 à ce système. D'après (11), lorsque $\varepsilon \to 0$, la limite du système (2.27) en temps lent $\tilde{t} = \varepsilon t$ est un système d'équations aux dérivées partielles de second ordre avec coefficients constants :

$$\partial_{\tilde{t}}\mu_0 - \sum_{i,j=1}^{d} \left[\mathcal{A}_i^{12}(0)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_j^{21}(0)\partial^2_{x_i x_j}\mu_0 + (\mathcal{A}_i^{11})'(0)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_j^{21}(0)\partial_{x_j}\mu_0\partial_{x_i}\mu_0\right] = 0. \tag{2.28}$$

Ainsi, le lemme 2.2 implique que la matrice constante

$$\sum_{i,j=1}^{d} \left[\mathcal{A}_i^{12}(0)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_j^{21}(0)\right]\zeta_i\zeta_j$$

est définie positive pour tout $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_d) \in \mathcal{S}^{d-1}$. De plus, d'après le théorème 2.4, au voisinage de $u_e \in \mathbb{R}^{l-r}$, le problème de Cauchy associé au système (2.28) avec condition initiale $\mu(0, .) \in u_e + H^s$ admet une unique solution globale.

2.2 Existence globale uniforme

Dans cette section nous donnons une preuve du théorème 2.1. Soit $T > 0$ et soit U^ε une solution régulière du système (9) définie sur l'intervalle $[0, T]$. Par souci de simplicité, nous omettons désormais l'exposant ε de U^ε, et nous introduisons

$$W = V - V_e, \quad w = u - u_e,$$

où V est défini en (2.4). La preuve repose sur deux estimations d'énergie principales. La première est une estimation classique de la solution dans H^s, avec une estimation de dissipation sur $\mathfrak{q}$. La deuxième est une estimation de dissipation sur ∇u dans H^{s-1}.

Par la suite nous noterons

$$N_s(T) = \sup_{0 \le t \le T} \|W(t)\|_s,$$

et $c > 0$ désignera une constante générique indépendante de ε et du temps. Nous supposons de plus que $N_s(T)$ est borné par une constante suffisamment petite et indépendante de ε et du temps, et nous utiliserons plusieurs fois le fait que $s > d/2 + 1$, ce qui implique l'inégalité de Sobolev

$$\|W\|_\infty \leq c\|W\|_{s-1}.$$

2.2.1 L'estimation d'énergie sur W et de dissipation sur $\mathfrak{q}$

Dans cette sous-partie, nous supposons que les hypothèses **(H2.1)** à **(H2.5)** sont satisfaites. Le but est de montrer l'estimation suivante :

Lemme 2.3.

Pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\|W(t)\|_s^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 dt' \leq cK_\varepsilon(t), \tag{2.29}$$

où

$$K_\varepsilon(t) \overset{def}{=} \|\overline{U} - U_e\|_s^2 + \int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla u(t')\|_{s-1}^2\right] \|W(t')\|_s dt'.$$

La preuve de ce lemme s'effectuera par une suite de résultats que nous détaillons ci-dessous. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$. Appliquons $\mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha(.)$ au système (2.5), nous obtenons

$$\mathcal{A}_0(V)\partial_t(\partial^\alpha W) + \sum_{j=1}^d \tilde{\mathcal{A}}_j(V)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W) = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha P(V) + \mathcal{A}_0(V)Z_{\alpha,j},$$

où, pour tout $j \in \{1, ..., d\}$,

$$Z_{\alpha,j} = \mathcal{A}_j(V)\partial^\alpha(\partial_{x_j} W) - \partial^\alpha \left[\mathcal{A}_j(V)\partial_{x_j} W\right].$$

Effectuons le produit scalaire avec $\partial^\alpha W$ dans L^2, on obtient une égalité d'énergie classique sur W :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle &= \langle \partial_t\left[\mathcal{A}_0(V)\right]\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle + \sum_{j=1}^d \left\langle \partial_{x_j}\left[\tilde{\mathcal{A}}_j(V)\right]\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\right\rangle \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon}\langle \mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha P(V), \partial^\alpha W\rangle + 2\sum_{j=1}^d \langle \mathcal{A}_0(V)Z_{\alpha,j}, \partial^\alpha W\rangle .\end{aligned} \tag{2.30}$$

Cette égalité, nous l'écrivons :

$$\frac{d}{dt}\langle \mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle = I_1^\alpha + \sum_{j=1}^d I_{2j}^\alpha + \frac{2}{\varepsilon}I_3^\alpha + 2\sum_{j=1}^d I_{4j}^\alpha,$$

avec les correspondances naturelles pour I_1^α, I_{2j}^α, I_3^α et I_{4j}^α. Nous devons alors estimer ces termes. Remarquons d'abord que $Z_{0,j} = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., d\}$. Ainsi, $I_{4j}^0 = 0$, ce qui veut dire que les derniers termes de l'égalité (2.30) disparaissent dans l'estimation L^2.

Lemme 2.4.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$I_1^\alpha(t) \leq c\left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t)\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla W(t)\|_{s-1}^2\right]\|W(t)\|_s. \tag{2.31}$$

Preuve.

Rappelons que

$$I_1^\alpha = \langle \partial_t[\mathcal{A}_0(V)]\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\rangle .$$

Puisque $\mathcal{A}_0(V)$ est symétrique on a

$$I_1^\alpha = \left\langle \partial_t[\mathcal{A}_0^{11}(V)]\partial^\alpha w, \partial^\alpha w\right\rangle + 2\left\langle \partial_t[\mathcal{A}_0^{12}(V)]\partial^\alpha \mathfrak{q}, \partial^\alpha w\right\rangle + \left\langle \partial_t[\mathcal{A}_0^{22}(V)]\partial^\alpha \mathfrak{q}, \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle .$$

En utilisant (2.5), on obtient

$$\partial_t\mathcal{A}_0^{12}(V) = \left[\mathcal{A}_0^{12}\right]'(V)\partial_t W = \left[\mathcal{A}_0^{12}\right]'(V)\left[-\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j(V)\partial_{x_j}W + \frac{1}{\varepsilon}P(V)\right].$$

Si l'on regarde l'expression de $P(V)$, cela donne

$$\|\partial_t\mathcal{A}_0^{12}(V)\|_\infty \leq c\|\nabla W\|_{s-1} + \frac{c}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} 2\left\langle \partial_t[\mathcal{A}_0^{12}(V)]\partial^\alpha \mathfrak{q}, \partial^\alpha w\right\rangle &\leq c\|\mathfrak{q}\|_s\|\nabla W\|_{s-1}\|W\|_s + \tfrac{c}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2\|W\|_s \\ &\leq c\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla W\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s. \end{aligned}$$

De même,

$$\left\langle \partial_t[\mathcal{A}_0^{22}(V)]\partial^\alpha \mathfrak{q}, \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla W\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s.$$

Pour le premier terme de I_1^α, on utilise le fait que

$$\partial_t w = -\sum_{j=1}^d\left[\mathcal{A}_j^{11}(V)\partial_{x_j}w + \mathcal{A}_j^{12}(V)\partial_{x_j}\mathfrak{q}\right]$$

et

$$\partial_t \mathfrak{q} = -\sum_{j=1}^d\left[\mathcal{A}_j^{21}(V)\partial_{x_j}w + \mathcal{A}_j^{22}(V)\partial_{x_j}\mathfrak{q}\right] + \frac{1}{\varepsilon}\partial_v q(u, v)\mathfrak{q}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{A}_0^{11}(V) &= \partial_u \mathcal{A}_0^{11}(V)\partial_t w + \partial_{\mathfrak{q}} \mathcal{A}_0^{11}(V)\partial_t \mathfrak{q}\\ &= -\sum_{j=1}^{d}(y_{1j}+y_{2j}+y_{3j}+y_{4j}) + y_5,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}y_{1j} &= \partial_u \mathcal{A}_0^{11}(V)\mathcal{A}_j^{11}(V)\partial_{x_j} w,\\ y_{2j} &= \partial_{\mathfrak{q}} \mathcal{A}_0^{11}(V)\mathcal{A}_j^{21}(V)\partial_{x_j} w,\\ y_{3j} &= \partial_u \mathcal{A}_0^{11}(V)\mathcal{A}_j^{12}(V)\partial_{x_j} \mathfrak{q},\\ y_{4j} &= \partial_{\mathfrak{q}} \mathcal{A}_0^{11}(V)\mathcal{A}_j^{22}(V)\partial_{x_j} \mathfrak{q},\\ y_5 &= \tfrac{1}{\varepsilon}\partial_{\mathfrak{q}} \mathcal{A}_0^{11}(V)\partial_v q(u,v)\mathfrak{q}.\end{aligned}$$

D'après les hypothèses **(H2.3)** et **(H2.5)**, $\partial_{\mathfrak{q}}\mathcal{A}_0^{11}(u,0) = 0$ et $\partial_u \mathcal{A}_0^{11}(u,0)\mathcal{A}_j^{11}(u,0) = 0$ pour tout $u \in \omega_e$. Ainsi, y_{1j} et y_{2j} sont bornés par $c\|\mathfrak{q}\|_s\|\nabla W\|_{s-1}$, et y_{4j} et y_5 sont bornés par $c\|\mathfrak{q}\|_s^2/\varepsilon$. Quand $|\alpha| \in \{1, ..., s\}$, on a clairement

$$\langle y_{3j}\partial^\alpha w, \partial^\alpha w\rangle \leq c\|\mathfrak{q}\|_s\|\nabla W\|_{s-1}\|W\|_s.$$

Quand $|\alpha| = 0$, une intégration par parties nous donne la même borne. Ainsi,

$$I_1^\alpha \leq c\|\mathfrak{q}\|_s\|\nabla W\|_{s-1}\|W\|_s + \frac{c}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2\|W\|_s,$$

ce qui implique l'estimation (2.31). □

Lemme 2.5.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, on a, pour tout $t \in [0,T]$,

$$I_{2j}^\alpha(t) \leq c\left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t)\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla W(t)\|_{s-1}^2\right]\|W(t)\|_s. \tag{2.32}$$

Preuve.

Rappelons que

$$I_{2j}^\alpha = \left\langle \partial_{x_j}[\tilde{\mathcal{A}}_j(V)]\partial^\alpha W, \partial^\alpha W\right\rangle.$$

Grâce à la symétrie des $\tilde{\mathcal{A}}_j$, on obtient

$$I_{2j}^\alpha = \left\langle \partial_{x_j}[\tilde{\mathcal{A}}_j^{11}(V)]\partial^\alpha w, \partial^\alpha w\right\rangle + 2\left\langle \partial_{x_j}[\tilde{\mathcal{A}}_j^{12}(V)]\partial^\alpha w, \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle + \left\langle \partial_{x_j}[\tilde{\mathcal{A}}_j^{22}(V)]\partial^\alpha \mathfrak{q}, \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle.$$

Clairement, les deux derniers termes de I_{2j}^α sont majorés par $c\|\mathfrak{q}\|_s\|\nabla W\|_{s-1}\|W\|_s$. Pour le premier terme, on utilise **(H2.5)** pour obtenir

$$\left\langle \partial_{x_j}[\tilde{\mathcal{A}}_j^{11}(V)]\partial^\alpha w, \partial^\alpha w\right\rangle = \left\langle \partial_{x_j}[\tilde{\mathcal{A}}_j^{11}(u,\mathfrak{q}) - \tilde{\mathcal{A}}_j^{11}(u,0)]\partial^\alpha w, \partial^\alpha w\right\rangle.$$

Ce terme est donc également majoré par $c\|\mathfrak{q}\|_s\|\nabla W\|_{s-1}\|W\|_s$ quand $|\alpha| \in \{1, ..., s\}$. Pour $|\alpha| = 0$, une intégration par parties nous donne le même résultat. Ce qui prouve (2.32). □

Lemme 2.6.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$I_3^\alpha(t) \le \frac{c}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t)\|_s^2\|W(t)\|_s - \frac{2C_e}{\varepsilon}\|\partial^\alpha \mathfrak{q}(t)\|^2, \tag{2.33}$$

où $C_e > 0$ est la constante donnée dans (2.9).

Preuve.

Rappelons que

$$I_3^\alpha = \frac{2}{\varepsilon}\left\langle \mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha P(V), \partial^\alpha W\right\rangle.$$

Puisque

$$\mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha P(V) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0^{12}(V)\partial^\alpha\left[\partial_v q(U)\mathfrak{q}\right] \\ \mathcal{A}_0^{22}(V)\partial^\alpha\left[\partial_v q(U)\mathfrak{q}\right] \end{bmatrix},$$

on a

$$I_3^\alpha = \frac{2}{\varepsilon}\left\langle \mathcal{A}_0^{12}(V)\partial^\alpha\left[\partial_v q(U)\mathfrak{q}\right], \partial^\alpha w\right\rangle + \frac{2}{\varepsilon}\left\langle \mathcal{A}_0^{22}(V)\partial^\alpha\left[\partial_v q(U)\mathfrak{q}\right], \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle.$$

Le premier terme de I_3^α est majoré par $\frac{c}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2\|W\|_s$ grâce à **(H2.4)**. Nous réécrivons le second terme comme

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\varepsilon}\left\langle \mathcal{A}_0^{22}(V)\partial^\alpha\left[\partial_v q(U)\mathfrak{q}\right], \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle \\ &= \frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0^{22}(V)\partial_v q(U)\partial^\alpha \mathfrak{q}, \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle + \frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0^{22}(V)\left[\partial^\alpha\left[\partial_v q(U)\mathfrak{q}\right] - \partial_v q(U)\partial^\alpha \mathfrak{q}\right], \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.34}$$

En utilisant **(H2.2)**, on obtient

$$\frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0^{22}(V)\partial_v q(U)\partial^\alpha \mathfrak{q}, \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle \le -\frac{2C_e}{\varepsilon}\|\partial^\alpha \mathfrak{q}\|^2.$$

Le dernier terme de (2.34) disparaît lorsque $|\alpha| = 0$. Pour $|\alpha| \in \{1, ..., s\}$, une inégalité de type Moser (cf. [38]) donne

$$\frac{2}{\varepsilon}\left\langle A_0^{22}(V)\left[\partial^\alpha\left[\partial_v q(U)\mathfrak{q}\right] - \partial_v q(U)\partial^\alpha \mathfrak{q}\right], \partial^\alpha \mathfrak{q}\right\rangle \le \frac{c}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2\|W\|_s.$$

Ce qui prouve le lemme 2.6. □

Lemme 2.7.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$I_{4j}^\alpha(t) \le c\left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t)\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla W(t)\|_{s-1}^2\right]\|W(t)\|_s. \tag{2.35}$$

Preuve.

Rappelons que

$$I_{4j}^\alpha = \left\langle \mathcal{A}_0(V)Z_{\alpha,j}, \partial^\alpha W\right\rangle.$$

Puisque $I_{4j}^0 = 0$, on ne considère que $|\alpha| \in \{1, ..., s\}$. Développons $Z_{\alpha,j}$ comme suit :

$$Z_{\alpha,j} = \begin{bmatrix} z_j^1 + z_j^2 \\ z_j^3 + z_j^4, \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
z_j^1 &= \mathcal{A}_j^{11}(V)\partial^\alpha(\partial_{x_j} w) - \partial^\alpha \left[\mathcal{A}_j^{11}(V)\partial_{x_j} w\right], \\
z_j^2 &= \mathcal{A}_j^{12}(V)\partial^\alpha(\partial_{x_j} \mathfrak{q}) - \partial^\alpha \left[\mathcal{A}_j^{12}(V)\partial_{x_j} \mathfrak{q}\right], \\
z_j^3 &= \mathcal{A}_j^{21}(V)\partial^\alpha(\partial_{x_j} w) - \partial^\alpha \left[\mathcal{A}_j^{21}(V)\partial_{x_j} w\right], \\
z_j^4 &= \mathcal{A}_j^{22}(V)\partial^\alpha(\partial_{x_j} \mathfrak{q}) - \partial^\alpha \left[\mathcal{A}_j^{22}(V)\partial_{x_j} \mathfrak{q}\right].
\end{aligned}$$

L'hypothèse **(H2.5)** implique que $\mathcal{A}_j^{11}(u, 0)$ est une matrice constante. Ainsi, une inégalité de type Moser donne

$$\begin{aligned}
\|z_j^1\| &\leq c\|\mathfrak{q}\|_s \|\nabla W\|_{s-1}, \\
\|z_j^2\| &\leq c\|\mathfrak{q}\|_s \|W\|_s, \\
\|z_j^3\| &\leq c\|\nabla W\|_{s-1} \|W\|_s, \\
\|z_j^4\| &\leq c\|\mathfrak{q}\|_s \|W\|_s.
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau **(H2.4)**, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{4j}^\alpha \;=\; & \left\langle \mathcal{A}_0^{11}(u,0)(z_j^1 + z_j^2), \partial^\alpha w \right\rangle + \left\langle \mathcal{A}_0^{22}(u,0)(z_j^3 + z_j^4), \partial^\alpha \mathfrak{q} \right\rangle \\
& + \left\langle \left(\mathcal{A}_0(u,\mathfrak{q}) - \mathcal{A}_0(u,0)\right) Z_{\alpha,j}, \partial^\alpha W \right\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_{4j}^\alpha \leq c\|\mathfrak{q}\|_s \|\nabla W\|_{s-1} \|W\|_s,$$

ce qui implique l'estimation (2.35). □

Preuve du lemme 2.3.

En regroupant les résultats des lemmes 2.4 à 2.7, on obtient

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{A}_0(V)\partial^\alpha W, \partial^\alpha W \rangle + \frac{2C_e}{\varepsilon}\|\partial^\alpha \mathfrak{q}\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla W\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s.$$

Additionnons ces inégalités sur les α, $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, puis intégrons sur $[0, t]$. En remarquant que $\mathcal{A}_0$ est symétrique définie positive, on obtient

$$\|W(t)\|_s^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 dt' \leq c\|W(0,.)\|_s^2 + c\int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla W(t')\|_{s-1}^2\right]\|W(t')\|_s dt'.$$

Puisque $\varepsilon \leq 1$, nous avons

$$\varepsilon\|\nabla W\|_{s-1}^2 \leq \frac{c}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}\|_s^2 + c\varepsilon\|\nabla u\|_{s-1}^2.$$

Finalement,

$$\|W(0,.)\|_s = \|\phi^{-1}\left(\overline{U}\right) - \phi^{-1}(U_e)\|_s \leq c\|\overline{U} - U_e\|_s,$$

ce qui implique le lemme 2.3. □

2.2.2 Estimation de dissipation sur ∇u, et preuve du théorème 2.1

Le lemme 2.3 n'est pas suffisant pour prouver l'existence globale de solutions puisque le dernier terme dans l'inégalité (2.29) n'est pas contrôlé. En supposant de plus **(SK)**, nous voulons maintenant montrer l'estimation de dissipation sur ∇u suivante, qui mènera à l'existence globale.

Lemme 2.8.

*Sous les conditions **(H2.1)** à **(H2.5)** et **(SK)**, nous avons, pour tout* $t \in [0, T]$,

$$\|W(t)\|_s^2 + \int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla u(t')\|_{s-1}^2\right] dt' \leq c\|\overline{U} - U_e\|_s^2. \tag{2.36}$$

Preuve.

D'abord nous linéarisons le système (2.5) autour de V_e :

$$\partial_t W + \sum_{j=1}^{d} \mathcal{A}_j(V_e)\partial_{x_j} W = \mathfrak{h} + \frac{1}{\varepsilon}P(V),$$

avec

$$\mathfrak{h} = \sum_{j=1}^{d} \left[\mathcal{A}_j(V_e) - \mathcal{A}_j(V)\right] \partial_{x_j} W.$$

Alors, appliquer la transformation de Fourier donne

$$\partial_t \widehat{W} + i\sum_{j=1}^{d} \xi_j \mathcal{A}_j(V_e)\widehat{W} = \hat{\mathfrak{h}} + \frac{1}{\varepsilon}\widehat{P(V)},$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction f par rapport à x.

Soit $\mathcal{K}(\zeta)$ la matrice définie en **(SK")**, avec $\zeta = \frac{\xi}{|\xi|}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Multiplions alors le dernier système par $-i\widehat{W}^* K$. Puisque

$$2\mathfrak{Re}\left(-i\widehat{W}^*\mathcal{K}\partial_t\widehat{W}\right) = -i\partial_t\left(\widehat{W}^*\mathcal{K}\widehat{W}\right)$$

et

$$\mathfrak{Re}\left[-i\widehat{W}^*\mathcal{K}\left(\hat{\mathfrak{h}} + \frac{1}{\varepsilon}\widehat{P(V)}\right)\right] = \mathfrak{Im}\left[\widehat{W}^*\mathcal{K}\left(\hat{\mathfrak{h}} + \frac{1}{\varepsilon}\widehat{P(V)}\right)\right],$$

nous obtenons

$$-i\partial_t\left(\widehat{W}^*\mathcal{K}\widehat{W}\right)+\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2,$$

avec

$$\mathcal{T}_1=2\mathfrak{Re}\left(\widehat{W}^*\mathcal{K}\sum_{j=1}^d\xi_j\mathcal{A}_j(V_e)\widehat{W}\right),$$

et

$$\mathcal{T}_2=2\mathfrak{Im}\left[\widehat{W}^*\mathcal{K}\left(\widehat{\mathfrak{h}}+\frac{1}{\varepsilon}\widehat{P(V)}\right)\right].$$

Grâce à **(SK")**, on a

$$\mathcal{T}_1\geq 4|\xi|c_{SK}\left|\widehat{W}\right|^2-4|\xi|\left|\widehat{\mathfrak{q}}\right|^2.$$

On a également

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2&\leq c\left|\widehat{W}\right|\left|\widehat{\mathfrak{h}}+\frac{1}{\varepsilon}\widehat{P(V)}\right|\leq c_{SK}|\xi|\left|\widehat{W}\right|^2+\frac{c}{|\xi|}\left|\widehat{\mathfrak{h}}+\frac{1}{\varepsilon}\widehat{P(V)}\right|^2\\&\leq c_{SK}|\xi|\left|\widehat{W}\right|^2+\frac{c}{|\xi|}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\widehat{P(V)}\right|^2+\left|\widehat{\mathfrak{h}}\right|^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, si nous multiplions le système par $|\xi|^{2\sigma-1}$, avec $\sigma\in\{1,...,s\}$, cela donne

$$-i|\xi|^{2\sigma-1}\partial_t\left(\widehat{W}^*\mathcal{K}\widehat{W}\right)+3c_{SK}|\xi|^{2\sigma}\left|\widehat{W}\right|^2\leq 4|\xi|^{2\sigma}\left|\widehat{\mathfrak{q}}\right|^2+c|\xi|^{2\sigma-2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\widehat{P(V)}\right|^2+\left|\widehat{\mathfrak{h}}\right|^2\right).$$

Une intégration sur $[0,t]\times\mathbb{R}^d$ donne, en utilisant l'identité de Parseval et le fait que $|\xi|^{2\sigma-1}\leq|\xi|^{2\sigma-2}+|\xi|^{2\sigma}$,

$$\begin{aligned}3c_{SK}\int_0^t\sum_{|\alpha|=\sigma}\|\partial^\alpha W(t')\|^2dt'&\leq c\|W(t)\|_\sigma^2+c\|\overline{W}\|_\sigma^2+4\int_0^t\sum_{|\alpha|=\sigma}\|\partial^\alpha\mathfrak{q}(t')\|^2dt'\\&\quad+c\int_0^t\sum_{|\alpha|=\sigma-1}\left[\|\partial^\alpha\mathfrak{h}(t')\|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha(P(V(t')))\|^2\right]dt'.\end{aligned}$$

Multiplions alors l'inégalité par ε, et sommons sur les $\sigma\in\{1,...,s\}$. En utilisant le lemme 2.3 et l'expression de $P(V)$, on obtient

$$\begin{aligned}3\varepsilon c_{SK}\int_0^t\|\nabla u(t')\|_{s-1}^2dt'&\leq 3\varepsilon c_{SK}\int_0^t\|\nabla W(t')\|_{s-1}^2dt'\\&\leq K_\varepsilon(t)+c\varepsilon\int_0^t\|\mathfrak{h}(t')\|_{s-1}^2dt'+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^t\|\partial_v q\left[\phi(V(t'))\right]\mathfrak{q}(t')\|_{s-1}^2dt'.\end{aligned}$$

On a rapidement que

$$c\varepsilon\int_0^t\|\mathfrak{h}(t')\|_{s-1}^2dt'\leq cK_\varepsilon(t),$$

et d'après le lemme 2.3, on a

$$\frac{c}{\varepsilon}\int_0^t\|\partial_v q\left[\phi(V(t'))\right]\mathfrak{q}(t')\|_{s-1}^2dt'\leq cK_\varepsilon(t).$$

Ainsi,

$$3\varepsilon c_{SK}\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{s-1}^2 dt' \leq cK_\varepsilon(t). \tag{2.37}$$

Ajouté au lemme 2.3, cela donne

$$\|W(t)\|_s^2 + \int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla u(t')\|_{s-1}^2\right] dt' \leq cK_\varepsilon(t).$$

Et puisque

$$K_\varepsilon(t) \leq \|\overline{U} - U_e\|_s^2 + N_s(T)\int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 + \varepsilon\|\nabla u(t')\|_{s-1}^2\right] dt',$$

l'estimation (2.36) provient du fait que $N_s(T)$ est borné par une constante suffisamment petite et indépendante de ε et du temps. □

Preuve du théorème 2.1.

Le fait que (2.36) implique l'existence globale de solutions est classique. En particulier, l'estimation (2.17) provient de (2.36) et de

$$\|U - U_e\|_s = \|\phi(V) - \phi(V_e)\|_s \leq c\|W\|_s.$$

Le théorème 2.1 s'ensuit. □

2.3 Limites hyperbolique et parabolique

2.3.1 Limite hyperbolique - Preuve du théorème 2.2

D'après le lemme 2.3, la suite $(u^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)$, et la suite $(\mathfrak{q}^\varepsilon/\sqrt{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+; H^s)$. Ainsi, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\mathfrak{q}^\varepsilon \to 0, \quad \text{fortement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^s),$$

et il existe $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)$ telle que, à une sous-suite près,

$$u^\varepsilon - u_e \rightharpoonup u_0 - u_e, \quad \text{faiblement-}* \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s).$$

Soit $T > 0$. Alors $(u^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; H^s)$. D'autre part, u^ε vérifie

$$\partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{11}(u^\varepsilon, \mathfrak{q}^\varepsilon)\partial_{x_j} u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{12}(u^\varepsilon, \mathfrak{q}^\varepsilon)\partial_{x_j}\mathfrak{q}^\varepsilon = 0, \tag{2.38}$$

ce qui implique que $(\partial_t u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{s-1})$. Soit $R>0$ et B_R la boule centrée de rayon R dans $\mathbb{R}^d$. Par un théorème classique de compacité (cf. [61]), pour tout $s_1 \in [0,s)$, $(u^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}\left([0,T];H^{s_1}(B_R)\right)$. Ainsi, à une sous-suite près, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$u^\varepsilon \to u_0, \quad \text{uniformément dans } \mathcal{C}\left([0,T];H^{s_1}(B_R)\right).$$

La bornitude et la forte convergence de $(u^\varepsilon, \mathfrak{q}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ nous permet de passer à la limite dans l'égalité (2.38), et d'obtenir ainsi le système linéaire (2.21).

Regardons maintenant les conditions initiales pour u_0. La convergence uniforme de u^ε vers u_0 dans $\mathcal{C}([0,T];H^{s_1}(B_R))$ implique que, lorsque $\varepsilon \to 0$, on a

$$u^\varepsilon(0,.) \to u_0(0,.), \quad \text{fortement dans } H^{s_1}(B_R).$$

Puisque $u^\varepsilon(0,x) = \overline{u}(x)$, nous obtenons $u_0(0,.) = \overline{u}$, vérifié sur $H^{s_1}(B_R)$ pour tout $R>0$. Ainsi, $u_0(0,x) = \overline{u}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, puisque l'injection de $H^{s_1}(B_R)$ dans $\mathcal{C}(B_R)$ est continue.

Enfin, $\mathcal{A}_0^{12}(u,0) = 0$ implique que

$$\tilde{\mathcal{A}}_j^{11}(u,0) = \mathcal{A}_0^{11}(u,0)\mathcal{A}_j^{11}(u,0).$$

Puisque le système (2.5) est hyperbolique symétrique, le système linéaire (2.21) l'est aussi, avec symétriseur $\mathcal{A}_0^{11}(u,0)$. Ainsi, le problème de Cauchy (2.21) admet une unique solution globale, ce qui implique la convergence de toute la suite, et clot la preuve du théorème 2.2. □

2.3.2 Limite parabolique - Preuve du théorème 2.3.

On remarque d'abord que, d'après le système (2.5) et le changement de variables (2.22), le système vérifié par $(\mu^\varepsilon, \lambda^\varepsilon)$ est

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}\mu^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{11}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\partial_{x_j}\mu^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{12}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\partial_{x_j}\lambda^\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2\partial_{\tilde{t}}\lambda^\varepsilon + \displaystyle\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{21}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\partial_{x_j}\mu^\varepsilon + \varepsilon\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{22}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\partial_{x_j}\lambda^\varepsilon = \partial_v q\left[\phi(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\right].\lambda^\varepsilon, \end{cases} \tag{2.39}$$

et l'estimation (2.17) implique que

$$\sup_{\tilde{t}\geq 0} \|\mu^\varepsilon(\tilde{t}) - u_e\|_s^2 + \int_0^{+\infty} \|\lambda^\varepsilon(\tilde{t})\|_s^2 d\tilde{t} \leq c\|\overline{U} - U_e\|_s^2.$$

Ainsi, la suite $(\mu^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^+;H^s)$, et la suite $(\lambda^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+;H^s)$. On en déduit qu'il existe $\mu_0 - u_e \in L^\infty(\mathbb{R}^+;H^s)$ et $\lambda_0 \in L^2(\mathbb{R}^+;H^s)$ tels que, à une sous-suite près, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\mu^\varepsilon - u_e \rightharpoonup \mu_0 - u_e, \quad \text{faiblement-}* \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s),$$

$$\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda_0, \quad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^s),$$

$$\varepsilon\lambda^\varepsilon \to 0, \quad \text{fortement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^s).$$

En utilisant le premier système de (2.39) et le fait que $\mathcal{A}_j^{11}(u, 0) = 0$, on en déduit que $(\partial_{\tilde{t}}\mu^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+; H^{s-1})$. Ainsi, $\partial_{\tilde{t}}\mu_0 \in L^2(\mathbb{R}^+; H^{s-1})$, et, à une sous-suite près, lorsque $\varepsilon \to 0$, nous avons

$$\partial_{\tilde{t}}\mu^\varepsilon \rightharpoonup \partial_{\tilde{t}}\mu_0, \quad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+; H^{s-1}).$$

Soit $T > 0$ et $R > 0$. Alors $(\mu^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(0, T; H^s(B_R))$ et $(\partial_{\tilde{t}}\mu^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(0, T; H^{s-1}(B_R))$. On conclut par un théorème classique de compacité (cf. [61]) que $(\mu^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0, T]; H^{s_1}(B_R))$, pour tout $s_1 \in [0, s)$. Ainsi, à une sous-suite près, lorsque $\varepsilon \to 0$, on a

$$\mu^\varepsilon \to \mu_0, \quad \text{uniformément dans } \mathcal{C}([0, T]; H^{s_1}(B_R)).$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{A}_j(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon) \to \mathcal{A}_j(\mu_0, 0), \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; H^{s_1}(B_R)),$$

$$\partial_v q\left[\phi(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\right] \to \partial_v q\left[\phi(\mu_0, 0)\right], \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; H^{s_1}(B_R)),$$

où **(H2.7)** implique que

$$\partial_v q\left[\phi(\mu_0, 0)\right] = \partial_v q(\mu_0, v_e).$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$\mathcal{A}_j(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\begin{bmatrix} \partial_{x_j}\mu^\varepsilon \\ \partial_{x_j}\lambda^\varepsilon \end{bmatrix} \rightharpoonup \mathcal{A}_j(\mu_0, 0)\begin{bmatrix} \partial_{x_j}\mu_0 \\ \partial_{x_j}\lambda_0 \end{bmatrix}, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^{s-1}(B_R)),$$

$$\partial_v q\left[\phi(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\right]\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \partial_v q(\mu_0, v_e)\lambda_0, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^{s-1}(B_R)),$$

et

$$\varepsilon\sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j^{22}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\partial_{x_j}\lambda^\varepsilon \to 0, \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; H^{s-1}(B_R)).$$

D'autre part, l'hypothèse **(H2.6)** implique que $\mathcal{A}_j^{11}(\mu^\varepsilon, 0) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}_j^{11}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathcal{A}_j^{11}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon) - \mathcal{A}_j^{11}(\mu^\varepsilon, 0)\right] \\ &\rightharpoonup \partial_{\mathfrak{q}}\mathcal{A}_j^{11}(\mu_0, 0)\lambda_0, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^{s-1}(B_R)),\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}_j^{11}(\mu^\varepsilon, \varepsilon\lambda^\varepsilon)\partial_{x_j}\mu^\varepsilon \rightharpoonup \partial_{\mathfrak{q}}\mathcal{A}_j^{11}(\mu_0, 0)\lambda_0\partial_{x_j}\mu_0, \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^{s-1}(B_R)).$$

Nous pouvons donc passer à la limite, au sens des distributions, dans le système (2.39). On obtient

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}\mu_0 + \sum_{j=1}^{d} \partial_{\mathfrak{q}}\mathcal{A}_j^{11}(\mu_0, 0)\lambda_0\partial_{x_j}\mu_0 + \sum_{j=1}^{d} \mathcal{A}_j^{12}(\mu_0, 0)\partial_{x_j}\lambda_0 = 0, \\ \sum_{j=1}^{d} \mathcal{A}_j^{21}(\mu_0, 0)\partial_{x_j}\mu_0 = \partial_v q(\mu_0, v_e).\lambda_0, \end{cases}$$

ce qui implique (11)-(13), puisque $\partial_v q(\mu, v_e)$ est inversible pour tout $\mu \in \omega_e$. La condition initiale de μ_0 s'obtient de la même manière que dans la preuve du théorème 2.2. Enfin, l'unicité des solutions obtenue grâce au théorème 2.4 implique la convergence de toute la suite, ce qui clot la preuve du théorème 2.3. □

2.4 Existence globale pour les systèmes non conservatifs

Dans cette section nous montrons le théorème 2.5. Dans la preuve de l'existence globale pour un système conservatif, l'estimation d'énergie L^2 s'obtient grâce à une loi vérifiée par un couple entropie / flux d'entropie. Cette technique ne peut s'utiliser pour les estimations d'ordres supérieurs, ni pour l'estimation sur la dissipation de ∇u. Ces estimations sont obtenues de la même façon que pour un système non conservatif (cf. [20, 72]). Cela signifie, en particulier, que **(H2.3)** n'est pas requise dans cette partie, et qu'il suffit donc de considérer l'estimation d'énergie à l'ordre zéro (estimation L^2) dans les cas **(i)** et **(ii)**.

Dans le cas **(i)**, on doit juste vérifier que la preuve du lemme 2.3 est valide sans utiliser **(H2.3)**. Plus précisément, nous allons montrer, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} &\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|\mathfrak{q}(t')\|^2 dt' \\ &\le c\|\overline{U} - U_e\|^2 + c\|W(t)\|^3 + c\int_0^t \left[\|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 + \|\nabla u(t')\|_{s-1}^2\right] \|W(t')\|_s dt'. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pour des petites solutions, (2.40), ajoutée aux estimations d'ordres supérieurs et aux estimations de dissipation obtenues grâce à **(SK)**, implique que

$$\|W(t)\|_s^2 + \int_0^t \|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 dt' \le c\|\overline{U} - U_e\|_s^2, \quad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Notons que les deux derniers termes dans l'estimation (2.40) n'apparaissent pas dans l'estimation L^2 pour des systèmes conservatifs.

Pour la preuve dans le cas **(ii)**, l'idée majeure est de contrôler $\|W\|_\infty$ par $\|\nabla W\|_{s-1}$. Dans cette optique, nous utiliserons l'inégalité de Sobolev suivante.

Lemme 2.9.

Soient $d \geq 3$ et $s > d/2$ deux entiers. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|X\|_\infty \leq c\|\nabla X\|_{s-1}, \quad \textit{pour tout } X \in H^s.$$

Preuve.

Soit $X \in H^s$. Pour $d \geq 3$ on définit d' par $\frac{1}{d'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$. Alors l'injection $W^{s-1,d'}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty$ est continue, c'est-à-dire que,

$$\|X\|_\infty \leq c\|X\|_{W^{s-1,d'}(\mathbb{R}^d)}.$$

De plus, l'inégalité de Sobolev donne

$$\|X\|_{W^{s-1,d'}(\mathbb{R}^d)} \leq c\|\nabla X\|_{s-1}.$$

Ce qui prouve le lemme. □

Preuve du théorème 2.5.

(i) Remarquons d'abord que le lemme 2.3 est encore valide dans le cas où $\varepsilon = 1$, et l'hypothèse **(H2.3)** n'est utilisée que dans la preuve du lemme 2.4 pour I_1^α. Puisque **(H2.3)** n'est pas requise pour les estimations d'ordres supérieurs, il suffit de regarder I_1^0.

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} I_1^0 & = & \langle \partial_t[\mathcal{A}_0(V)]W, W\rangle \\ & = & \langle \partial_t[\mathcal{A}_0^{11}(V)]u, u\rangle + 2\left\langle [\mathcal{A}_0^{12}(V)]'(\partial_t V)\mathfrak{q}, u\right\rangle + \left\langle [\mathcal{A}_0^{22}(V)]'(\partial_t V)\mathfrak{q}, \mathfrak{q}\right\rangle. \end{array}$$

Puisque

$$\partial_t V = -\sum_{j=1}^{d} \mathcal{A}_j(V)\partial_{x_j} W + P(V), \tag{2.41}$$

avec $P(V) = O(\mathfrak{q})$, nous obtenons

$$2\left\langle [\mathcal{A}_0^{12}(V)]'(\partial_t V)\mathfrak{q}, u\right\rangle \leq c\left(\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \|\nabla u\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s,$$

et

$$\left\langle [\mathcal{A}_0^{22}(V)]'(\partial_t V)\mathfrak{q}, \mathfrak{q}\right\rangle \leq c\|\mathfrak{q}\|_s^2\|W\|_s.$$

Pour le premier terme de I_1^0, l'hypothèse **(H2.5)** et la symétrie de $\mathcal{A}_0^{11}$ impliquent que

$$\left\langle \partial_t[\mathcal{A}_0^{11}(V)]u, u\right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle [\mathcal{A}_0^{11}(V) - \mathcal{A}_0^{11}(u,0)]u, u\right\rangle + 2\left\langle [\mathcal{A}_0^{11}(V) - \mathcal{A}_0^{11}(u,0)]u, \partial_t u\right\rangle.$$

Puisque $\partial_t u = O(\nabla W)$ et $\mathcal{A}_0^{11}(V) - A_0^{11}(u,0) = O(\mathfrak{q})$, on a alors

$$I_1^0 - \frac{d}{dt}\left\langle [\mathcal{A}_0^{11}(V) - \mathcal{A}_0^{11}(u,0)]u, u\right\rangle \leq c\left(\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \|\nabla u\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s.$$

Cette estimation, ajoutée à celles obtenues dans les lemmes 2.5 à 2.7, implique que

$$\frac{d}{dt}\left(\langle \mathcal{A}_0(V)W, W\rangle - \left\langle [\mathcal{A}_0^{11}(V) - \mathcal{A}_0^{11}(u,0)]u, u\right\rangle\right) + 2C_e\|\mathfrak{q}\|^2 \leq c\left(\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \|\nabla u\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s.$$

Enfin, intégrons cette inégalité sur $[0,t]$. En remarquant que

$$\left|\left\langle [\mathcal{A}_0^{11}(V) - \mathcal{A}_0^{11}(u,0)]u, u\right\rangle\right| \leq c\|W\|^3,$$

on obtient l'estimation (2.40). $\square$

(ii) De même que pour l'égalité (2.30), on obtient l'égalité d'énergie suivante :

$$\frac{d}{dt}\langle \mathcal{A}_0(V)W, W\rangle = \langle \mathrm{div}_{\mathcal{A}}(V)W, W\rangle + 2\langle \mathcal{A}_0(V)P(V), W\rangle, \tag{2.42}$$

où

$$\mathrm{div}_{\mathcal{A}}(V) = \partial_t[\mathcal{A}_0(V)] + \sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}[\tilde{\mathcal{A}}_j(V)].$$

En utilisant (2.41), on obtient de plus

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_{\mathcal{A}}(V) &= \mathcal{A}_0'(V)\partial_t W + \sum_{j=1}^{d}\tilde{\mathcal{A}}_j'(V)\partial_{x_j}W \\ &= \mathcal{A}_0'(V)P(V) + \sum_{j=1}^{d}\left[\tilde{\mathcal{A}}_j'(V) - \mathcal{A}_0'(V)\mathcal{A}_j(V)\right]\partial_{x_j}W.\end{aligned}$$

Considérant l'expression de $P(V)$, on a

$$\|\mathrm{div}_{\mathcal{A}}(V)\| \leq c\left(\|\mathfrak{q}\| + \|\nabla W\|\right).$$

Appliquons le lemme 2.9, il vient

$$\begin{aligned}|\langle \mathrm{div}_{\mathcal{A}}(V)W, W\rangle| &\leq \|\mathrm{div}_{\mathcal{A}}(V)\|\|W\|_\infty\|W\| \\ &\leq c\left(\|\mathfrak{q}\|_s + \|\nabla W\|_{s-1}\right)\|\nabla W\|_{s-1}\|W\| \\ &\leq c\left(\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \|\nabla W\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s.\end{aligned}\tag{2.43}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_0(V)P(V), W\rangle &= \langle \mathcal{A}_0(V_e)P'(V_e)W, W\rangle + \langle \mathcal{A}_0(V)\left[P(V) - P'(V_e)W\right], W\rangle \\ &\quad + \langle [\mathcal{A}_0(V) - \mathcal{A}_0(V_e)]\, P'(V_e)W, W\rangle.\end{aligned}$$

Pour le premier terme dans le membre de droite, on utilise l'hypothèse **(H2.2)** pour obtenir

$$\langle \mathcal{A}_0(V_e)P'(V_e)W, W\rangle \leq -C_e\|\mathfrak{q}\|^2.$$

Pour les deux autres termes, on remarque que

$$P'(V_e)W = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_v q\,[\phi(V_e)]\,\mathfrak{q} \end{bmatrix}, \quad P(V) - P'(V_e)W = \begin{bmatrix} 0 \\ [\partial_v q(\phi(V)) - \partial_v q(\phi(V_e))]\,\mathfrak{q} \end{bmatrix}.$$

Alors le lemme 2.9 implique

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}_0(V)\,[P(V) - P'(V_e)W]\,, W\rangle| &\leq c\|\mathfrak{q}\|\|W\|_\infty\|W\| \\ &\leq c\|\mathfrak{q}\|\|\nabla W\|_{s-1}\|W\|, \end{aligned}$$

et, de même,

$$|\langle [\mathcal{A}_0(V) - \mathcal{A}_0(V_e)]\,P'(V_e)W, W\rangle| \leq c\|\mathfrak{q}\|\|\nabla W\|_{s-1}\|W\|.$$

Ces estimations nous donnent

$$\langle \mathcal{A}_0(V)P(V), W\rangle \leq -C_e\|\mathfrak{q}\|^2 + c\left(\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \|\nabla W\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s. \tag{2.44}$$

Enfin, ajoutée à (2.42)-(2.44), on obtient

$$\frac{d}{dt}\langle \mathcal{A}_0(V)W, W\rangle + 2C_e\|\mathfrak{q}\|^2 \leq c\left(\|\mathfrak{q}\|_s^2 + \|\nabla u\|_{s-1}^2\right)\|W\|_s.$$

Intégrons sur $[0, t]$, notons que $\mathcal{A}_0(V)$ est une matrice symétrique définie positive, on obtient, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|\mathfrak{q}(t')\|^2 dt' \leq c\|\overline{U} - U_e\|^2 + c\int_0^t \left[\|\mathfrak{q}(t')\|_s^2 + \|\nabla u(t')\|_{s-1}^2\right]\|W(t')\|_s dt',$$

ce qui est l'estimation L^2 recherchée. □

Annexe : Preuve du théorème 2.4

Clairement, l'existence globale est une conséquence du théorème 2.3. La régularité $\nabla\mu \in L^2(\mathbb{R}^+; H^s)$ provient de l'estimation (2.26), ce qui est une propriété classique des équations paraboliques. Ces preuves sont similaires à celle de l'unicité qui suit, c'est pourquoi nous nous permettons de les omettre.

Nous prouvons donc maintenant l'unicité de (11)-(12). Soit $\mu_1 \in u_e + H^s$ et $\mu_2 \in u_e + H^s$

deux solutions de (11) avec la même condition initiale $\overline{u}$. Alors, pour $\sigma \in \{1,2\}$,

$$\partial_{\tilde{t}}\mu_\sigma + \sum_{i,j=1}^{d} \mathcal{A}_{ij}(u_e)\partial^2_{x_ix_j}\mu_\sigma = \sum_{i,j=1}^{d} B_{ij}(\mu_\sigma)\partial_{x_i}\mu_\sigma\partial_{x_j}\mu_\sigma - \sum_{i,j=1}^{d} \left[\mathcal{A}_{ij}(\mu_\sigma) - \mathcal{A}_{ij}(u_e)\right]\partial^2_{x_ix_j}\mu_\sigma,$$

où

$$B_{ij}(\mu_\sigma) = -\mathcal{A}_i^{12}(\mu_\sigma,0)\left[[\partial_v q(\mu_\sigma,v_e)]^{-1}\mathcal{A}_j^{21}(\mu_\sigma,0)\right]' - \left[\partial_{\mathfrak{q}}\mathcal{A}_i^{11}(\mu_\sigma,0)\,[\partial_v q(\mu_\sigma,v_e)]^{-1}\mathcal{A}_j^{21}(\mu_\sigma,0)\right]^T.$$

Posons $\mu_{diff} = \mu_2 - \mu_1$. Alors $\mu_{diff} \in H^s$, et le système satisfait par μ_{diff} est

$$\partial_{\tilde{t}}\mu_{diff} + \sum_{i,j=1}^{d} \mathcal{A}_{ij}(u_e)\partial^2_{x_ix_j}\mu_{diff} = \mathfrak{f} + \mathfrak{g},$$

où

$$\mathfrak{f} = \sum_{i,j=1}^{d} \left\{\left[B_{ij}(\mu_2)\partial_{x_i}\mu_2\partial_{x_j}\mu_2 - B_{ij}(\mu_1)\partial_{x_i}\mu_1\partial_{x_j}\mu_1\right] + \left[\mathcal{A}_{ij}(\mu_1) - \mathcal{A}_{ij}(\mu_2)\right]\partial^2_{x_ix_j}\mu_2\right\},$$

et

$$\mathfrak{g} = \sum_{i,j=1}^{d} \left[\mathcal{A}_{ij}(u_e) - \mathcal{A}_{ij}(\mu_1)\right]\partial^2_{x_ix_j}\mu_{diff}.$$

Appliquons la transformée de Fourier au système, on obtient

$$\partial_{\tilde{t}}\widehat{\mu_{diff}} - \sum_{i,j=1}^{d} \mathcal{A}_{ij}(u_e)\xi_i\xi_j\widehat{\mu_{diff}} = \hat{\mathfrak{f}} + \hat{\mathfrak{g}}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tilde{t}}\|\widehat{\mu_{diff}}\|^2 + \left\langle \mathfrak{A}(\zeta,u_e)|\xi|\widehat{\mu_{diff}}, |\xi|\widehat{\mu_{diff}}\right\rangle = \left\langle \hat{\mathfrak{f}}, \widehat{\mu_{diff}}\right\rangle + \left\langle \hat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mu_{diff}}\right\rangle,$$

où $\zeta = \frac{\xi}{|\xi|}$ pour $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et où

$$\mathfrak{A}(\zeta,u_e) = \sum_{i,j=1}^{d} \mathcal{A}_{ij}(u_e)\zeta_i\zeta_j$$

est une matrice définie négative pour tout $\zeta \in \mathcal{S}^{d-1}$. Puisque $\mathcal{S}^{d-1}$ est compacte, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\left\langle \mathfrak{A}(\zeta,u_e)|\xi|\widehat{\mu_{diff}}, |\xi|\widehat{\mu_{diff}}\right\rangle \geq C_3\left\||\xi|\widehat{\mu_{diff}}\right\|^2, \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

D'après l'identité de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tilde{t}}\|\mu_{diff}\|^2 + C_3\|\nabla\mu_{diff}\|^2 \leq |\langle \mathfrak{f}, \mu_{diff}\rangle| + |\langle \mathfrak{g}, \mu_{diff}\rangle|.$$

D'autre part, puisque $\mu_1 - u_e \in H^s$, $\mu_2 - u_e \in H^s$ et $\mu_{diff} \in H^s$, un calcul direct donne

$$\begin{aligned} |\langle \mathfrak{f}, \mu_{diff} \rangle| &\leq c \left(\|\mu_{diff}\| + \|\nabla \mu_{diff}\| \right) \|\mu_{diff}\| \\ &\leq c\|\mu_{diff}\|^2 + \frac{C_3}{2} \|\nabla \mu_{diff}\|^2. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne également

$$|\langle \mathfrak{g}, \mu_{diff} \rangle| \leq c\|\nabla \mu_{diff}\| \|\mu_{diff}\| + \|\mu_1 - u_e\|_s \|\nabla \mu_{diff}\|^2.$$

Ainsi, lorsque $\|\mu_1 - u_e\|_s$ est suffisamment petit, on a

$$|\langle \mathfrak{g}, \mu_{diff} \rangle| \leq c\|\mu_{diff}\|^2 + \frac{C_3}{2} \|\nabla \mu_{diff}\|^2.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \|\mu_{diff}\|^2 \leq c\|\mu_{diff}\|^2.$$

Ainsi, l'inégalité de Gronwall, ajoutée au fait que $\mu_{diff}(0, .) = 0$, implique $\mu_{diff}(\tilde{t}, x) = 0$, pour tout $(\tilde{t}, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. $\square$

Troisième partie

Existence globale uniforme de solutions pour le système d'Euler-Maxwell

Introduction

Dans cette partie, rappelons que nous considérons le système d'Euler-Maxwell (14) avec conditions initiales (15). Plus précisément, nous voulons prouver l'existence globale de solutions régulières au voisinage d'un équilibre constant, uniformément par rapport aux constantes τ et γ. Notre résultat est valable sur l'espace entier $\mathbb{R}^3$, ou pour un problème périodique sur le tore unité $\mathbb{T}^3$.

Puisque h est strictement croissante, notons qu'il existe $\bar{\kappa} > 0$ tel que $h'(n) \geq \bar{\kappa}$ pour tout $n \geq 1/2$.

Ces deux analyses asymptotiques sont des problèmes bien connus. Les limites à relaxation nulle $\tau \to 0$ et non relativiste $\gamma \to 0$ sont justifiées dans [53] et [49], respectivement. Leurs résultats montrent que les limites du système (14) sont, respectivement, un système de dérive-diffusion, et un système d'Euler-Poisson compressible. Pour chacune des limites, les auteurs ont prouvé la validité de la convergence locale du système (14) vers ces sytèmes limites, sur un intervalle de temps indépendant du paramètre. On peut également se référer à [50, 51, 64, 65] pour d'autres analyses asymptotiques du système d'Euler-Maxwell. Le but ici est de montrer que ces résultats sont valables globalement en temps, au voisinage d'un équilibre constant.

L'existence globale de solutions régulières autour d'un équilibre constant, lorsque les paramètres sont fixes, est également bien connue. Ces équilibres sont de la forme $(1, 0, 0, B_e)$, avec $B_e \in \mathbb{R}^3$ constant. Dans [53], les auteurs ont établi un résultat d'existence globale autour de tels équilibres, cependant, ce résultat ne prenait pas en compte les paramètres τ et γ. Voir également [18], pour une étude de systèmes d'Euler-Maxwell sans le terme dissipatif $-nu/\tau$.

Ainsi, dans cette partie, nous établissons un résultat d'existence globale uniforme par rapport à chaque paramètre τ et γ, puis la convergence de (14)-(15) vers ces systèmes limites (dérive-diffusion et Euler-Poisson compressible). Pour cela, nous supposerons que $(\overline{n}^\varepsilon, \overline{v}^\varepsilon, \overline{E}^\varepsilon, \overline{B}^\varepsilon)$ reste dans un voisinage de $(1, 0, 0, B_e)$ indépendant du paramètre $\varepsilon \in \{\tau, \gamma\}$. En particulier, cela nous permet de considérer que $n \in [1/2, 3/2]$. Sous ces hypothèses, nous prouvons des estimations d'énergie et de dissipation uniformes par rapport au temps et par rapport aux paramètres. D'une part, ces estimations impliqueront l'existence globale de solutions uniformes autour du voisinage de $(1, 0, 0, B_e)$; et d'autre part, les mêmes estimations d'énergie impliqueront la compacité des suites de solutions. Alors, lorsque chaque paramètre tend vers zéro, nous pourrons passer à la limite de manière globale dans (14), pour retrouver le système limite associé au paramètre.

Pour les équations d'Euler isentropiques, l'existence globale uniforme de solutions et la limite à relaxation nulle ont été étudiées dans [13, 35].

Pour le système d'Euler-Poisson (cf. [11, 43]), la limite à relaxation nulle a été traitée par plusieurs auteurs. Voir, par exemple, [41, 26] pour des solutions entropiques globales en dimension 1 par la méthode de compacité par compensation ; voir aussi [31, 30, 68] pour des solutions locales régulières en dimensions supérieures par la méthode des estimations d'énergie. Récemment, dans [48], le résultat que nous souhaitons démontrer a été établi pour un système d'Euler-Poisson. En particulier, l'auteur a justifié la convergence globale du système d'Euler-Poisson dans le cas de la limite à relaxation nulle. Pour ce faire, l'auteur a établi une estimation d'énergie générale, incluant chaque paramètre, avant d'en regarder les conséquences séparément pour chacun des paramètres.

Dans cette partie, tout comme dans [48], nous prouvons une estimation d'énergie (cf. (3.17)) incluant chacun des paramètres τ et γ, puis nous montrons l'existence globale et uniforme de solutions dans chacun des cas. Ces deux résultats sont décrits dans les théorèmes 3.1 et 3.3.

Cette estimation d'énergie, associée à un argument classique de compacité (cf. [61]), nous permet d'obtenir un système limite pour chacun des paramètres τ et γ. Ces deux résultats sont décrits dans les théorèmes 3.2 et 3.4.

Remarquons que ces deux résultats ne sont pas triviaux, puisque le système (14) ne satisfait pas la condition **(SK)**, qui donne habituellement (cf. chapitre 2) l'existence globale et la stabilité asymptotique de solutions régulières pour des systèmes hyperboliques.

Nous énonçons maintenant un résultat de type inégalité de Moser, et nous rappelons le résultat de Kato sur l'existence locale de solutions régulières pour des systèmes hyperboliques symétrisables. Ils nous seront tous deux utiles dans cette partie.

Lemme 3.1. *(cf. [28])*

Soit $s \geq 3$ un entier. Soit $f \in H^s$. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tel que $|\alpha| \in \{1, ..., s\}$, si $g \in H^{|\alpha|}$, alors

$$\|\partial^\alpha(fg) - f\partial^\alpha g\| \leq c_s \|\nabla f\|_{s-1} \|g\|_{s-1},$$

où c_s désigne une constante ne dépendant que de s.

Proposition 3.1. *(cf. [27, 38])*

Soit $s \geq 3$ un entier, et $\overline{n}^\varepsilon$, $\overline{v}^\varepsilon$, $\overline{E}^\varepsilon$, $\overline{B}^\varepsilon \in H^s$ tels que $\overline{n}^\varepsilon \geq 1/2$. Alors il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que le problème (14)-(15) possède une unique solution $(n^\varepsilon, v^\varepsilon, E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ satisfaisant

$$n^\varepsilon, v^\varepsilon, E^\varepsilon, B^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T_\varepsilon); H^s) \cap \mathcal{C}^1\left([0, T_\varepsilon); H^{s-1}\right).$$

Cette partie se décompose comme suit : dans la prochaine section, nous énonçons les résultats principaux, les théorèmes 3.1-3.4. Il s'agit de l'existence globale uniforme de solutions régulières et de leur convergence lorsque chacun des paramètres tend vers zéro. La section suivante est dédiée à l'estimation principale (3.17), obtenue par une succession d'estimations d'énergie. La preuve des théorèmes 3.1-3.4 est donnée dans la quatrième section. En annexe se trouvent les preuves de deux résultats techniques.

3.1 Résultats principaux

Pour chacun des paramètres τ, $\gamma \in (0,1]$, nous donnons deux résultats : un sur l'existence globale uniforme, et l'autre sur la convergence de la solution lorsque le paramètre tend vers zéro. Ces résultats sont décrits d'abord pour τ, puis pour γ. L'hypothèse sur la condition initiale est la suivante :

$$\overline{n}^\varepsilon, \overline{v}^\varepsilon, \overline{E}^\varepsilon, \overline{B}^\varepsilon \in H^s, \quad \text{avec} \quad \overline{n}^\varepsilon \geq 1/2,$$

pour $\varepsilon \in \{\tau, \gamma\}$.

3.1.1 La limite à relaxation nulle $\tau \to 0$

Théorème 3.1.

Soit $\gamma = 1$, et soit $s \geq 3$ un entier. Il existe deux constantes $\varpi_4 > 0$ et $c_4 > 0$, indépendantes de τ et du temps, telles que, pour tout $\tau \in (0,1]$, si

$$\|\overline{n}^\tau - 1\|_s + \|\overline{v}^\tau\|_s + \|\overline{E}^\tau\|_s + \|\overline{B}^\tau - B_e\|_s \leq \varpi_4,$$

alors le problème périodique (14)-(15) admet une unique solution globale $(n^\tau, v^\tau, E^\tau, B^\tau)$, satisfaisant

$$n^\tau - 1, v^\tau, E^\tau, B^\tau - B_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H^{s-1}).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\|n^\tau(t) - 1\|_s^2 + \|v^\tau(t)\|_s^2 + \|E^\tau(t)\|_s^2 + \|B^\tau(t) - B_e\|_s^2 \\
&+ \int_0^t \left[\frac{1}{\tau}\|v^\tau(t')\|_s^2 + \tau\|n^\tau(t') - 1\|_s^2\right] dt' \\
&\leq c_4 \left(\|\overline{n}^\tau - 1\|_s^2 + \|\overline{v}^\tau\|_s^2 + \|\overline{E}^\tau\|_s^2 + \|\overline{B}^\tau - B_e\|_s^2\right), \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Théorème 3.2.

Soit $(n^\tau, v^\tau, E^\tau, B^\tau)$ la solution donnée par le théorème 3.1. On définit une suite en temps lent par

$$(\rho^\tau, \nu^\tau, F^\tau, Z^\tau)(\tilde{t}, x) = \left(n^\tau, \frac{v^\tau}{\tau}, E^\tau, B^\tau\right)\left(\frac{\tilde{t}}{\tau}, x\right). \tag{3.2}$$

Supposons qu'il existe $\overline{n}_0$ indépendant de τ satisfaisant, lorsque $\tau \to 0$,

$$\overline{n}^\tau \rightharpoonup \overline{n}_0, \quad \text{faiblement dans} \quad H^s. \tag{3.3}$$

Alors il existe des fonctions $\rho_0 - 1$, F_0, $Z_0 - B_e \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)$ et $\nu_0 \in L^2(\mathbb{R}^+; H^s)$ telles que, lorsque $\tau \to 0$, on ait

$$(\rho^\tau - 1, F^\tau, Z^\tau - B_e) \rightharpoonup (\rho_0 - 1, F_0, Z_0 - B_e), \quad \textit{faiblement-}* \textit{ dans} \quad \left[L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)\right]^3, \tag{3.4}$$

$$\nu^\tau \rightharpoonup \nu_0, \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(\mathbb{R}^+; H^s), \tag{3.5}$$

De plus, pour tout $T > 0$ et tout $s_1 \in [0, s)$, on a, lorsque $\tau \to 0$,

$$\rho^\tau \to \rho_0, \quad \textit{fortement dans} \quad \mathcal{C}\left([0,T]; H^{s_1}\right), \tag{3.6}$$

et (ρ_0, φ_0) est l'unique solution globale du système de dérive-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}\rho_0 - \operatorname{div}\left[\rho_0\left(\nabla h(\rho_0) - \nabla\varphi_0\right)\right] = 0, \\ -\Delta\varphi_0 = 1 - \rho_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

avec condition initiale

$$\rho_0(t = 0) = \overline{n}_0. \tag{3.8}$$

Notons que φ_0 est unique à une constante additive près. De plus,

$$Z_0 = cst., \quad F_0 = -\nabla\varphi_0, \quad \nu_0 = -\nabla\left[h(\rho_0) - \varphi_0\right]. \tag{3.9}$$

3.1.2 La limite non relativiste $\gamma \to 0$

Théorème 3.3.

Soit $\tau = 1$. Soit $s \geq 3$ un entier. Il existe deux constantes $\varpi_5 > 0$ et $c_5 > 0$, indépendantes de γ et du temps, telles que, pour tout $\gamma \in (0, 1]$, si

$$\|\overline{n}^\gamma - 1\|_s + \|\overline{v}^\gamma\|_s + \|\overline{E}^\gamma\|_s + \|\overline{B}^\gamma - B_e\|_s \leq \varpi_5,$$

alors le problème périodique (14)-(15) admet une unique solution globale $(n^\gamma, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma)$ satisfaisant

$$n^\gamma - 1, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma - B_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H^s) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H^{s-1}).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\|n^\gamma(t)-1\|_s^2+\|v^\gamma(t)\|_s^2+\|E^\gamma(t)\|_s^2+\|B^\gamma(t)-B_e\|_s^2\\
&+\int_0^t\left[\|v^\gamma(t')\|_s^2+\|n^\gamma(t')-1\|_s^2\right]dt'\\
&\le c_5\left(\|\overline{n}^\gamma-1\|_s^2+\|\overline{v}^\gamma\|_s^2+\|\overline{E}^\gamma\|_s^2+\|\overline{B}^\gamma-B_e\|_s^2\right),\quad \forall t\ge 0.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Théorème 3.4.

Soit $(n^\gamma, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma)$ la solution globale donnée par le théorème 3.3. Supposons qu'il existe $\overline{n}_0$ et $\overline{v}_0$ indépendants de γ satisfaisant, lorsque $\gamma \to 0$,

$$(\overline{n}^\gamma, \overline{v}^\gamma) \rightharpoonup (\overline{n}, \overline{v}), \quad \textit{faiblement dans} \quad (H^s)^2. \tag{3.11}$$

Alors il existe des fonctions $n_0 - 1$, v_0, E_0, $B_0 - B_e \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)$ telles que, lorsque $\gamma \to 0$, nous ayons

$$(n^\gamma-1, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma-B_e) \rightharpoonup (n_0-1, v_0, E_0, B_0-B_e), \quad \textit{faiblement-}* \textit{ dans} \quad \left[L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)\right]^4. \tag{3.12}$$

De plus, pour tout $T > 0$ et tout $s_1 \in [0, s)$, nous avons, lorsque $\gamma \to 0$,

$$(n^\gamma, v^\gamma) \to (n_0, v_0), \quad \textit{fortement dans} \quad \left[\mathcal{C}([0,T]; H^{s_1})\right]^2, \tag{3.13}$$

et (n_0, v_0, φ_0) est l'unique solution globale du système d'Euler-Poisson suivant :

$$\begin{cases}
\partial_t n_0 + \operatorname{div}(n_0 v_0) = 0,\\
\partial_t v_0 + (v_0.\nabla)v_0 + \nabla h(n_0) = \nabla\varphi_0 - v_0,\\
-\Delta\varphi_0 = 1 - n_0,
\end{cases}\tag{3.14}$$

avec conditions initiales

$$(n_0, v_0)(t=0) = (\overline{n}_0, \overline{v}_0). \tag{3.15}$$

Notons que φ_0 est unique à une constante additive près. De plus, nous avons

$$E_0 = -\nabla\varphi_0 \quad \textit{et} \quad \begin{cases}\operatorname{div}(B_0) = 0,\\ \operatorname{rot}(B_0) = -n_0 v_0.\end{cases}\tag{3.16}$$

3.2 Estimations globales uniformes par rapport aux paramètres

Soit τ, $\gamma \in (0,1]$. Posons

$$N = n - 1, \quad G = B - B_e, \quad W^I = \begin{bmatrix} N \\ v \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} N \\ v \\ E \\ G \end{bmatrix}.$$

Le système (14) est hyperbolique symétrisable, donc la proposition 3.1 peut s'appliquer. Soit $T > 0$, et soit W la solution régulière locale de (14) définie sur $[0,T]$. Soit $s \geq 3$ un entier. Dans cette partie comme dans les précédentes, $c > 0$ désigne une constante générique indépendante du temps et des paramètres (τ, γ).

Dans la section précédente, nous avons présenté quatre théorèmes, deux pour chaque étude limite. Pour chacune d'entre elles, l'estimation suivante nous permettra de conclure :

Pour τ assez petit, on a

$$\|W(t)\|_s^2 + \int_0^t \left[\tau \|N(t')\|_s^2 + \frac{1}{\tau}\|v(t')\|_s^2\right] dt' \leq c\|W(0)\|_s^2, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.17}$$

Cette estimation est similaire à celle que l'on obtient pour un système d'Euler-Poisson (voir [48]) ; elle est principalement due au fait que E et n sont liés par $\operatorname{div}(E) = 1 - n$ dans (14).

Durant la preuve nous utiliserons l'identité suivante, satisfaite pour tous vecteurs $f, g \in \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot}(f).g - \operatorname{rot}(g).f = \operatorname{div}(f \times g); \tag{3.18}$$

et nous utiliserons plusieurs fois l'injection continue $H^s \hookrightarrow W^{1,\infty}$, en particulier le fait qu'il existe une constante c_{em} telle que

$$\|z\|_\infty \leq c_{em}\|z\|_s, \quad \forall z \in H^s. \tag{3.19}$$

Nous introduisons également

$$N_s(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\|N(t)\|_s^2 + \|v(t)\|_s^2 + \|E(t)\|_s^2 + \|G(t)\|_s^2\right]^{1/2},$$

et

$$K_\tau(W^I) = \tau\|N\|_s^2 + \frac{1}{\tau}\|v\|_s^2,$$

et nous supposons que $N_s(T) \leq c$. Les deux lemmes suivants permettent de démontrer l'estimation (3.17).

Lemme 3.2.

Pour tout τ, $\gamma \in (0,1]$, on a

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{0\le|\alpha|\le s}\left\langle A_0(N)\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\right\rangle + \|E\|_s^2 + \|G\|_s^2\right] + \frac{1}{\tau}\|v\|_s^2 \le cN_s(T)K_\tau(W^I); \tag{3.20}$$

puis la deuxième équation de (14) permet d'aboutir à

Lemme 3.3.

Il existe une constante C_4, indépendante du temps et de (τ,γ), telle que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\sum_{0\le|\beta|\le s-1}\left\langle \frac{1}{1+N}\partial^\beta N, \partial^\beta N\right\rangle - C_4\tau\sum_{0\le|\beta|\le s-1}\left\langle \partial^\beta\left[\operatorname{div}(v)\right], \partial^\beta N\right\rangle\right]\\ &+\tau\|\nabla N\|_s^2 - C_4\tau\|v\|_s^2 \le cN_s(T)K_\tau(W^I).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ces deux résultats peuvent se rapprocher des résultats (2.29) et (2.37) obtenus dans le chapitre 2, cependant, le système d'Euler-Maxwell ne satisfaisant pas la condition **(SK)**, nous devons adapter les calculs au système (14) en particulier. L'avantage de ce dernier est l'obtention d'un résultat uniquement grâce aux dissipations sur $\frac{1}{\tau}\|v\|_s^2$ et sur $\tau\|N\|_s^2$. Ce résultat semble fonctionner grâce aux spécificités du système (14) : linéarité des équations de Maxwell, équation de compatibilité reliant $\operatorname{div}(E)$ et N, termes linéaires en E et B dans les équations d'Euler, *etc.* ; c'est pourquoi il me paraît non trivial de dégager un cadre général pour lequel ce type d'estimations fonctionnerait systématiquement.

Les preuves des lemmes 3.2 et 3.3 est assez technique, c'est pourquoi nous la laissons en annexe. En sommant (3.20) avec κ fois (3.21), $\kappa > 0$, puis en intégrant sur $[0,t]$, on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le|\alpha|\le s}\left\langle A_0\left[N(t)\right]\partial^\alpha W^I(t), \partial^\alpha W^I(t)\right\rangle + \|E(t)\|_s^2 + \|G(t)\|_s^2 + \kappa\|N(t)\|_{s-1}^2\\ &- C_4\kappa\tau\sum_{0\le|\beta|\le s-1}\left\langle \partial^\beta\left[\operatorname{div}(u(t))\right], \partial^\beta\left[N(t)\right]\right\rangle + \frac{1}{\tau}\int_0^t\left[(1-C_4\kappa\tau^2)\|u(\xi)\|_s^2 + \kappa\tau\|\nabla N(\xi)\|_s^2\right]d\xi\\ &\le c\|W(0)\|_s^2 + cN_s(T)\int_0^t K_\tau\left[W^I(\xi)\right]d\xi.\end{aligned}$$

Ensuite, on utilise le fait que $A_0(N)$ est symétrique définie positive et $n \in [1/2; 3/2]$, et on prend κ assez petit pour aboutir à

$$\|W(t)\|_s^2 + \int_0^t K_\tau\left[W^I(t')\right]dt' \le c\left[\|W(0)\|_s^2 + N_s(T)\int_0^t K_\tau\left[W^I(t')\right]dt'\right].$$

Alors, en prenant $N_s(T)$ assez petit, on obtient (3.17).

3.3 Conséquences de l'estimation (3.17)

Nous prouvons maintenant les théorèmes 3.1-3.4. On considère chacune des limites séparément.

3.3.1 La limite à relaxation nulle

Preuve du théorème 3.1.

Rappelons que $\gamma = 1$ et $\tau \in (0, 1]$ dans la limite à relaxation nulle. Ainsi (3.1) est une conséquence directe de l'estimation (3.17). Cela implique l'existence globale de solutions. □

Preuve du théorème 3.2.

Remarquons premièrement que le changement de variable temporelle (3.2) donne un nouveau système pour ρ^τ, ν^τ, F^τ et Z^τ :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\tau + \operatorname{div}(\rho^\tau \nu^\tau) = 0, \\ \tau^2 \left[\partial_t \nu^\tau + (\nu^\tau.\nabla)\nu^\tau\right] + \tau(\nu^\tau \times Z^\tau) + F^\tau + \nabla h(\rho^\tau) = -\nu^\tau, \\ \tau(\partial_t F^\tau - \rho^\tau \nu^\tau) = \operatorname{rot}(Z^\tau), \quad \operatorname{div}(F^\tau) = 1 - \rho^\tau, \\ \tau \partial_t Z^\tau + \operatorname{rot}(F^\tau) = 0, \quad \operatorname{div}(Z^\tau) = 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

et l'estimation (3.1) donne, en particulier,

$$\sup_{t \geq 0} \left(\|\rho^\tau(t) - 1\|_s^2 + \|F^\tau(t)\|_s^2 + \|Z^\tau(t) - B_e\|_s^2 \right) + \int_0^{+\infty} \|\nu^\tau(t')\|_s^2 dt' < +\infty.$$

Ainsi, les suites $(\rho^\tau - 1)_{\tau>0}$, $(F^\tau)_{\tau>0}$ et $(Z^\tau - B_e)_{\tau>0}$ sont bornées dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^s)$, et $(\nu^\tau)_{\tau>0}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}_+; H^s)$.

Il s'ensuit que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$,

$$\begin{aligned} \tau^2 \left[\partial_t \nu^\tau + (\nu^\tau.\nabla)\nu^\tau\right] + \tau(\nu^\tau \times Z^\tau) &\underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0, \\ \tau(\partial_t F^\tau - \rho^\tau \nu^\tau) &\underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0, \\ \tau \partial_t Z^\tau &\underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

et qu'il existe des fonctions $\rho_0 - 1$, F_0, $Z_0 - B_e \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^s)$ et $\nu_0 \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s)$ telles que, à une sous-suite près, les convergences (3.4)-(3.5) soient satisfaites.

De plus, la première équation de (3.22) nous permet de déduire que $(\partial_t \rho^\tau)_{\tau>0}$ est bornée dans $L^2(0, T; H^{s-1})$ pour tout $T > 0$.

Fixons un $T > 0$. La suite $(\rho^\tau)_{\tau>0}$ est aussi bornée dans $L^2(0, T; H^s)$, ainsi, un argument classique de compacité (voir [61]) permet de conclure que, pour tout $s_1 \in [0, s)$, la suite $(\rho^\tau)_{\tau>0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T];H^{s_1})$, et, à une sous-suite près, la convergence forte (3.6) est vérifiée, par unicité de la limite.

Par conséquent, nous pouvons passer à la limite dans chacun des termes non linéaires de (3.22), afin d'obtenir

$$\begin{cases} \partial_t\rho_0 + \mathrm{div}(\rho_0\nu_0) = 0, \\ F_0 + \nabla h(\rho_0) = -\nu_0, \\ \mathrm{rot}(Z_0) = 0, \quad \mathrm{div}(F_0) = 1-\rho_0, \\ \mathrm{rot}(F_0) = 0, \quad \mathrm{div}(Z_0) = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ceci implique directement l'existence de φ_0 satisfaisant $F_0 = -\nabla\varphi_0$, et, en remplaçant ν_0 dans la première équation de (3.23) par son expression dans (3.9), on obtient le système de dérive-diffusion (3.7).

Pour la condition initiale sur ρ_0, on considère la convergence forte (3.6) : étant uniforme sur $t\in[0,T]$, on obtient

$$\rho^\tau(0,.) \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} \rho_0(0,.), \quad \text{dans } H^{s_1}.$$

Puisque $\rho^\tau(0,.) = \overline{n}^\tau$, l'égalité (3.8) provient de (3.3) et de l'unicité de la limite.

Enfin, nous savons que la solution au système de dérive-diffusion (3.7) avec condition initiale régulière (3.8) est unique (voir par exemple [15, 25]), ce qui implique la convergence de toute la suite $((\rho^\tau,\nu^\tau,F^\tau,Z^\tau))_{\tau>0}$. □

3.3.2 La limite non relativiste

Preuve du théorème 3.3.

Rappelons que $\tau = 1$ et que $\gamma\in(0,1]$ dans la limite non relativiste. Alors (3.10) est une conséquence directe de l'estimation (3.17). Cela implique l'existence globale de solutions. □

Preuve du théorème 3.4.

Notons premièrement que le système satisfait par $(n^\gamma,v^\gamma,E^\gamma,B^\gamma)$ est

$$\begin{cases} \partial_t n^\gamma + \mathrm{div}(n^\gamma v^\gamma) = 0, \\ \partial_t v^\gamma + (v^\gamma.\nabla)v^\gamma + \nabla h(n^\gamma) = -E^\gamma - \gamma(v^\gamma\times B^\gamma) - v^\gamma, \\ \gamma\partial_t E^\gamma - \mathrm{rot}(B^\gamma) = \gamma n^\gamma v^\gamma, \quad \mathrm{div}(E^\gamma) = 1-n^\gamma, \\ \gamma\partial_t B^\gamma + \mathrm{rot}(E^\gamma) = 0, \quad \mathrm{div}(B^\gamma) = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

et que l'estimation (3.10) donne, en particulier,

$$\sup_{t\geq 0}\left(\|n^\gamma(t)-1\|_s^2+\|v^\gamma(t)\|_s^2+\|E^\gamma(t)\|_s^2+\|B^\gamma(t)-B_e\|_s^2\right)<+\infty.$$

Cela implique que les suites $(n^\gamma-1)_{\gamma>0}$, $(v^\gamma)_{\gamma>0}$, $(E^\gamma)_{\gamma>0}$ et $(B^\gamma-B_e)_{\gamma>0}$ sont bornées dans $L^\infty(\mathbb{R}_+;H^s)$.

Il s'ensuit que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^3)$,

$$\begin{aligned}\gamma(v^\gamma\times B^\gamma) &\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad & \gamma\partial_t E^\gamma &\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} 0,\\ \gamma\partial_t B^\gamma &\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad & \gamma n^\gamma v^\gamma &\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

et qu'il existe des fonctions n_0-1, v_0, E_0, $B_0-B_e\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H^s)$ telles que, à une sous-suite près, les convergences (3.12) sont satisfaites.

De plus, la première équation de (3.24) permet de déduire que $(\partial_t n^\gamma)_{\gamma>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{s-1})$ pour tout $T>0$.

Fixons donc $T>0$. La suite $(n^\gamma)_{\gamma>0}$ est également bornée dans $L^2(0,T;H^s)$. Ainsi, un théorème classique de compacité (voir [61]) implique que, pour tout $s_1\in[0,s)$, la suite $(n^\gamma)_{\gamma>0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T];H^{s_1})$. Ainsi, à une sous-suite près, la convergence forte pour n^γ dans (3.13) est satisfaite, par unicité de la limite.

De même, puisque $(v^\gamma)_{\gamma>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^s)$ et que $(v^\gamma.\nabla v^\gamma)_{\gamma>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{s-1})$ pour tout $T>0$, la deuxième équation de (3.24) implique que $(\partial_t v^\gamma)_{\gamma>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{s-1})$. Ainsi, par le même argument de compacité, pour tout $s_1\in[0,s)$, la suite $(u^\gamma)_{\gamma>0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T];H^{s_1})$. Par conséquent, à une sous-suite près, la convergence forte pour v^γ dans (3.13) est satisfaite, par unicité de la limite.

Nous pouvons donc passer à la limite dans chacun des termes non linéaires de (3.24), afin d'obtenir

$$\begin{cases}\partial_t n_0+\operatorname{div}(n_0v_0)=0,\\ \partial_t v_0+(v_0.\nabla)v_0+\nabla h(v_0)=-E_0-v_0,\\ \operatorname{rot}(B_0)=n_0v_0, \quad \operatorname{div}(E_0)=1-n_0,\\ \operatorname{rot}(E_0)=0, \quad \operatorname{div}(B_0)=0.\end{cases} \tag{3.25}$$

Cela donne directement l'existence d'un φ_0 satisfaisant $E_0=-\nabla\varphi_0$. Puis, en remplaçant E_0 dans (3.25), on obtient le système d'Euler-Poisson (3.14) avec les conditions sur E_0 et B_0 dans (3.16).

Concernant les conditions initiales sur (n_0,v_0), la convergence forte (3.13) est uniforme par rapport à $t\in[0,T]$. Ainsi, dans H^{s_1},

$$n^\gamma(0,.)\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} n_0(0,.) \quad \text{et} \quad v^\gamma(0,.)\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} v_0(0,.).$$

Puisque $(n^\gamma(0,.),v^\gamma(0,.))=(\overline{n}^\gamma,\overline{v}^\gamma)$, l'égalité (3.15) provient de (3.11) et de l'unicité de la limite.

Enfin, nous savons que la solution du système d'Euler-Poisson (3.14) avec conditions initiales (3.15) est unique (voir par exemple [1, 23]), ce qui implique la convergence de toute la suite $((n^\gamma, v^\gamma, E^\gamma, B^\gamma))_{\gamma>0}$. □

Annexe :
Preuve des lemmes 3.2 et 3.3

3.3.3 Preuve du lemme 3.2

L'estimation d'énergie du lemme 3.2 provient de deux études séparées de (14). D'abord, des deux premières équations, nous déduisons

Lemme 3.4.

$$\frac{d}{dt}\left\langle A_0(N)\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\right\rangle \leq -2\left\langle n\partial^\alpha E, \partial^\alpha v\right\rangle - \frac{1}{\tau}\|\partial^\alpha v\|^2 + cN_s(T)K_\tau(W^I). \tag{3.26}$$

Puis, des équations de Maxwell, nous déduisons

Lemme 3.5.

$$\frac{d}{dt}\left(\|\partial^\alpha E\|^2 + \|\partial^\alpha G\|^2\right) \leq 2\left\langle n\partial^\alpha v, \partial^\alpha E\right\rangle + cN_s(T)K_\tau(W^I). \tag{3.27}$$

Additionnons (3.26) et (3.27), on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle A_0(N)\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\right\rangle + \|\partial^\alpha E\|^2 + \|\partial^\alpha G\|^2\right] + \frac{1}{\tau}\|\partial^\alpha v\|^2 \leq cN_s(T)K_\tau(W^I).$$

Sommons alors sur tous les α tels que $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$, on obtient le lemme 3.2.

Prouvons maintenant les lemmes 3.4 et 3.5.

Preuve du lemme 3.4

Les deux premières équations de (14) peuvent se réécrire

$$\partial_t W^I + \sum_{j=1}^{3} A_j(W^I)\partial_{x_j} W^I = \begin{bmatrix} 0 \\ -E - \gamma v \times (G + B_e) - \frac{u}{\tau} \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

avec
$$A_j(W^I) = \left[\begin{array}{cc} v_j & (1+N)\mathbf{e}_j^T \\ h'(1+N)\mathbf{e}_j & v_j \mathbf{I}_3 \end{array} \right].$$
Puisque $n \geq 1/2$, la matrice
$$A_0(N) = \left[\begin{array}{cc} h'(1+N) & 0 \\ 0 & (1+N)\mathbf{I}_3 \end{array} \right]$$
est symétrique définie positive, et la matrice
$$\tilde{A}_j(W^I) = A_0(N)A_j(W^I) = \left[\begin{array}{cc} h'(1+N)v_j & p'(1+N)\mathbf{e}_j^T \\ p'(1+N)\mathbf{e}_j & (1+N)v_j\mathbf{I}_3 \end{array} \right]$$
est symétrique pour tout $j \in \{1,2,3\}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tel que $|\alpha| \in \{0, ..., s\}$. Appliquons $\partial^\alpha(.)$ au système (3.28), et prenons le produit scalaire dans L^2 avec $2A_0(N)\partial^\alpha W^I$; on aboutit à

$$(3.29) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\langle A_0(N)\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I \right\rangle \\ &= \left\langle \partial_t\left[A_0(N)\right]\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\right\rangle + \sum_{j=1}^{3}\left\langle \partial_{x_j}\left[\tilde{A}_j(W^I)\right]\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I \right\rangle \\ &\quad - 2\left\langle n\partial^\alpha E, \partial^\alpha v\right\rangle - 2\gamma\left\langle (1+N)\partial^\alpha v, \partial^\alpha(v\times G)\right\rangle \\ &\quad - \frac{2}{\tau}\left\langle (1+N)\partial^\alpha v, \partial^\alpha v\right\rangle + 2\left\langle J^\alpha, \partial^\alpha W^I\right\rangle, \end{aligned}$$

avec $J^0 = 0$ et, pour tout α tel que $|\alpha| \in \{1, ..., s\}$,
$$J^\alpha = A_0(N)\sum_{j=1}^{3}\left[A_j(W^I)\partial^\alpha(\partial_{x_j}W^I) - \partial^\alpha\left(A_j(W^I)\partial_{x_j}W^I\right)\right] = \sum_{j=1}^{3} J_j^\alpha,$$
avec la correspondance naturelle pour J_1^α, J_2^α, J_3^α.

Regardons alors l'égalité (3.29) comme
$$\frac{d}{dt}\left\langle A_0(N)\partial^\alpha W^I, \partial^\alpha W^I\right\rangle = I_1^\alpha + \sum_{j=1}^{3} I_{2,j}^\alpha + I_3^\alpha + I_4^\alpha + I_5^\alpha + \sum_{j=1}^{3} I_{6,j}^\alpha,$$
toujours avec les correspondances naturelles pour I_1^α, ..., $I_{6,3}^\alpha$. Analysons chacun de ces termes.

* En développant I_1^α, $I_{2,j}^\alpha$ et $I_{6,j}^\alpha$, et en utilisant plusieurs fois le lemme 3.1 ainsi que (3.19), on obtient directement

$$(3.30) \quad I_1^\alpha \leq cN_s(T)K_\tau(W^I), \quad I_{2,j}^\alpha \leq cN_s(T)K_\tau(W^I), \quad I_{6,j}^\alpha \leq cN_s(T)K_\tau(W^I).$$

* Puiqsue $n \in [1/2, 3/2]$, on a

$$(3.31) \quad I_5^\alpha = -\frac{2}{\tau}\left\langle (1+N)\partial^\alpha v, \partial^\alpha v\right\rangle \leq -\frac{1}{\tau}\|\partial^\alpha v\|^2.$$

$*$ Remarquons que I_4^α peut se réécrire

$$I_4^\alpha = -2\gamma \left\langle (1+N)\partial^\alpha(v\times G), \partial^\alpha v\right\rangle = -2\gamma \left\langle (1+N)\left[\partial^\alpha(v\times G) - (\partial^\alpha v)\times G\right], \partial^\alpha v\right\rangle,$$

ainsi le lemme 3.1 implique

$$I_4^\alpha \leq c\|\nabla G\|_{s-1}\|v\|_{s-1}\|\partial^\alpha v\| \leq c\|G\|_s\|v\|_s^2 \leq cN_s(T)K_\tau(W^I). \tag{3.32}$$

Sommons alors (3.30) jusqu'à (3.32), et utilisons-le dans (3.29), cela donne le lemme 3.4. □

Preuve du lemme 3.5

Prenons la troisième équation de (14) :

$$\partial_t E - \frac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(G) = nv.$$

Puis appliquons $\partial^\alpha(.)$, et prenons le produit scalaire avec $\partial^\alpha E$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\|\partial^\alpha E\|^2 - \frac{2}{\gamma}\left\langle \operatorname{rot}(\partial^\alpha G), \partial^\alpha E\right\rangle = 2\left\langle \partial^\alpha(nv), \partial^\alpha E\right\rangle, \tag{3.33}$$

Puis prenons la quatrième équation de (14) :

$$\partial_t G + \frac{1}{\gamma}\operatorname{rot}(E) = 0.$$

Appliquons $\partial^\alpha(.)$ et prenons le produit scalaire avec $\partial^\alpha G$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\|\partial^\alpha G\|^2 + \frac{2}{\gamma}\left\langle \operatorname{rot}(\partial^\alpha E), \partial^\alpha G\right\rangle = 0. \tag{3.34}$$

Additionnons alors (3.33) et (3.34), la relation (3.18) nous donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\partial^\alpha E\|^2 + \|\partial^\alpha G\|^2\right) &= 2\left\langle \partial^\alpha(nv), \partial^\alpha E\right\rangle. \\ &= 2\left\langle n\partial^\alpha v, \partial^\alpha E\right\rangle + 2\left\langle \partial^\alpha(Nv) - N\partial^\alpha v, \partial^\alpha E\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Le dernier terme, grâce au lemme 3.1, vérifie

$$\left\langle \partial^\alpha(Nv) - N\partial^\alpha v, \partial^\alpha E\right\rangle \leq cN_s(T)K_\tau(W^I).$$

Ajouté à (3.35), on obtient le lemme 3.5.

3.3.4 Preuve du lemme 3.3

Commençons avec la deuxième équation de (14) :

$$\partial_t v + (v.\nabla)v + \nabla h(n) = -(E + \gamma v \times B) - \frac{v}{\tau}.$$

Appliquons $\partial^\beta(.)$, avec $|\beta| \in \{0, ..., s-1\}$, et prenons le produit scalaire dans L^2 avec $\partial^\beta(\nabla N)$; nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left\langle h'(n)\partial^\beta(\nabla N), \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle + \left\langle \partial^\beta E, \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \\
&= \left\langle h'(n)\partial^\beta(\nabla N) - \partial^\beta\left[h'(n)\nabla N\right], \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \\
&\quad - \left\langle \partial_t(\partial^\beta v), \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle - \left\langle \partial^\beta\left[(v.\nabla)v\right], \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \\
&\quad - \gamma\left\langle \partial^\beta(v \times G), \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle - \gamma\left\langle (\partial^\beta v) \times B_e, \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle - \frac{1}{\tau}\left\langle \partial^\beta v, \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Cette égalité contient huit termes : deux à gauche, six à droite. Nous traitons chacun d'entre eux dans le lemme suivant :

Lemme 3.6.

$$\left\langle h'(n)\partial^\beta(\nabla N), \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \geq \bar{\kappa}\|\partial^\beta(\nabla N)\|^2 ; \tag{3.37}$$

$$\left\langle \partial^\beta E, \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle = \|\partial^\beta N\|^2 ; \tag{3.38}$$

$$\left\langle h'(n)\partial^\beta(\nabla N) - \partial^\beta\left[h'(n)\nabla N\right], \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \leq cN_s(T)\|N\|_s^2 ; \tag{3.39}$$

$$\left\langle \partial_t(\partial^\beta v), \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \leq \frac{d}{dt}\left\langle \partial^\beta\left[\mathrm{div}(v)\right], \partial^\beta N\right\rangle + c\|v\|_s^2 ; \tag{3.40}$$

$$\left\langle \partial^\beta\left[(v.\nabla)v\right], \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \leq c\|v\|_s^2 ; \tag{3.41}$$

$$-\gamma\left\langle \partial^\beta(v \times G), \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \leq c\|v\|_s^2 + cN_s(T)\|N\|_s^2 ; \tag{3.42}$$

$$\gamma\left\langle (\partial^\beta v) \times B_e, \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \leq c\|v\|_s\|\nabla N\|_{s-1} \leq \delta\|\nabla N\|_{s-1}^2 + c_\delta\|v\|_s^2, \quad \forall \delta > 0, \tag{3.43}$$

où $c_\delta > 0$ désigne une constante générique ne dépendant que de δ ;

$$-\frac{1}{\tau}\left\langle \partial^\beta v, \partial^\beta(\nabla N)\right\rangle + \frac{1}{2\tau}\frac{d}{dt}\left\langle \frac{1}{1+N}\partial^\beta N, \partial^\beta N\right\rangle \leq \frac{c}{\tau}N_s(T)K_\tau(W^I). \tag{3.44}$$

Preuve du lemme 3.6.

* Le fait que $h'(n) \geq \bar{\kappa} > 0$ permet d'obtenir (3.37).
* La première équation de compatibilité de (14) permet d'obtenir (3.38).
* Le lemme 3.1 permet d'obtenir (3.39).
* Une intégration par parties permet d'obtenir (3.40).
* L'estimation (3.41) provient de (3.19).
* L'estimation (3.42) s'effectue grâce à

$$\begin{aligned}-\gamma\left\langle\partial^\beta(v\times G),\partial^\beta(\nabla N)\right\rangle &\leq c\|\nabla G\|_\infty\|\partial^\beta v\|\|N\|_s + c\|\nabla v\|_\infty\|\partial^\beta G\|\|N\|_s\\ &\leq c\|G\|_s\|v\|_s\|N\|_s \leq c\|v\|_s^2 + cN_s(T)\|N\|_s^2.\end{aligned}$$

* Un calcul direct donne

$$\gamma\left\langle(\partial^\beta v)\times B_e,\partial^\beta(\nabla N)\right\rangle \leq c\|v\|_s\|\nabla N\|_{s-1} \leq \delta\|\nabla N\|_{s-1}^2 + c_\delta\|v\|_s^2,$$

pour tout $\delta > 0$. On a donc (3.43).

* La preuve de (3.44) demande plus de calculs. Remarquons que

$$-\frac{1}{\tau}\left\langle\partial^\beta v,\partial^\beta(\nabla N)\right\rangle = \frac{1}{\tau}\left\langle\partial^\beta\left[\mathrm{div}(v)\right],\partial^\beta N\right\rangle.$$

On utilise alors la première équation de (14) pour obtenir

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\tau}\left\langle\partial^\beta v,\partial^\beta(\nabla N)\right\rangle =& -\frac{1}{\tau}\left\langle\frac{\partial^\beta(\partial_t N)}{1+N},\partial^\beta N\right\rangle - \frac{1}{\tau}\left\langle\frac{v.\partial^\beta(\nabla N)}{1+N},\partial^\beta N\right\rangle\\ &+\frac{1}{\tau}\left\langle\frac{\partial^\beta(\partial_t N)}{1+N} - \partial^\beta\left(\frac{\partial_t N}{1+N}\right),\partial^\beta N\right\rangle\\ &+\frac{1}{\tau}\left\langle\frac{v.\partial^\beta(\nabla N)}{1+N} - \partial^\beta\left(\frac{v.\nabla N}{1+N}\right),\partial^\beta N\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.45}$$

On traite ensuite chaque terme de droite dans (3.45). Le premier satisfait

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\tau}\left\langle\frac{\partial^\beta(\partial_t N)}{1+N},\partial^\beta N\right\rangle + \frac{1}{2\tau}\frac{d}{dt}\left\langle\frac{1}{1+N}\partial^\beta N,\partial^\beta N\right\rangle\\ &= \frac{1}{2\tau}\left\langle\frac{\partial_t N}{(1+N)^2}\partial^\beta N,\partial^\beta N\right\rangle \leq \frac{c}{\tau}\|\partial_t N\|_\infty\|\partial^\beta N\|^2 \quad \leq \frac{c}{\tau}\|\mathrm{div}(nv)\|_\infty\|N\|_s^2\\ &\qquad \leq \frac{c}{\tau}N_s(T)K_\tau(W^I).\end{aligned}\tag{3.46}$$

Le second terme à droite dans (3.45) satisfait

$$\frac{1}{\tau}\left\langle\frac{v.\partial^\beta(\nabla N)}{1+N},\partial^\beta N\right\rangle \leq \frac{c}{\tau}N_s(T)K_\tau(W^I).\tag{3.47}$$

En utilisant le lemme 3.1, le troisième satisfait

$$\frac{1}{\tau}\left\langle\frac{\partial^\beta(\partial_t N)}{1+N} - \partial^\beta\left(\frac{\partial_t N}{1+N}\right),\partial^\beta N\right\rangle \leq \frac{c}{\tau}N_s(T)K_\tau(W^I),\tag{3.48}$$

et le dernier satisfait

$$\frac{1}{\tau}\left\langle \frac{v.\partial^\beta(\nabla N)}{1+N} - \partial^\beta\left(\frac{v.\nabla N}{1+N}\right), \partial^\beta N\right\rangle \le \frac{c}{\tau} N_s(T) K_\tau(W^I). \tag{3.49}$$

En combinant (3.45) jusqu'à (3.49), on obtient (3.44). $\square$

Fin de la preuve du lemme 3.3.

Sommons (3.37)-(3.44). On obtient, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\bar{\kappa}\|\partial^\beta(\nabla N)\|^2 + \|\partial^\beta N\|^2 + \frac{1}{2\tau}\frac{d}{dt}\left\langle \frac{1}{1+N}\partial^\beta N, \partial^\beta N\right\rangle \\
&\le \frac{d}{dt}\left\langle \partial^\beta\left[\operatorname{div}(v)\right], \partial^\beta N\right\rangle + c_\delta\|v\|_s^2 + \delta\|\nabla N\|_{s-1}^2 + \frac{c}{\tau} N_s(T) K_\tau(W^I)
\end{aligned}$$

En multipliant cette inégalité par τ, puis en sommant sur les β, $|\beta| \in \{0, ..., s-1\}$, puis en prenant δ suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tau\|\nabla N\|_{s-1}^2 + \tau\|N\|_{s-1}^2 + \frac{d}{dt}\left(\sum_{0\le|\beta|\le s-1}\left\langle \frac{1}{1+N}\partial^\beta N, \partial^\beta N\right\rangle\right) \\
&\le c\tau \sum_{0\le|\beta|\le s-1}\frac{d}{dt}\left\langle \partial^\beta\left[\operatorname{div}(v)\right], \partial^\beta N\right\rangle + c\tau\|v\|_s^2 + cN_s(T)K_\tau(W^I).
\end{aligned}$$

Pour conclure, remarquons qu'il existe une constante $C_5 > 0$ satisfaisant

$$\|\nabla N\|_{s-1}^2 + \|N\|_{s-1}^2 \ge C_5\|N\|_s^2.$$

Cela donne le lemme 3.3. $\square$

Bibliographie

[1] Giuseppe Alì, Global existence of smooth solutions of the N-Dimensional Euler-Poisson model, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35 (2003), pp. 389-422.

[2] Vladimir Arnold, *Équations Différentielles Ordinaires*, traduit du russe par Djilali Embarek, Quatrième édition, Éditions MIR, Moscow (1988).

[3] Karine Beauchard et Enrique Zuazua, Large Time Asymptotics for Partially Dissipative Hyperbolic Systems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 199 (2011), pp. 177-227.

[4] Christophe Besse, Jean Claudel, Pierre Degond, Fabrice Deluzet, Gérard Gallice et Christian Tessieras, A model hierarchy for ionospheric plasma modeling, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 14 (2004), pp. 393-415.

[5] Stefano Bianchini, Bernard Hanouzet et Roberto Natalini, Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 60 (2007), pp. 1559-1622.

[6] Guy Boillat et Tommaso Ruggeri, Hyperbolic principal subsystems : entropy convexity and subcarachteristic conditions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 137 (1997), pp. 305-320.

[7] François Bouchut, Francesca Romana Guarguaglini et Roberto Natalini, Diffusive BGK approximations for nonlinear multidimensional parabolic equations, *Indiana University Mathemathics Journal* 49 (2000), pp. 723-749.

[8] Yann Brenier, Norbert Mauser et Marjolaine Puel, Incompressible Euler and e-MHD as scaling limits of the Vlasov-Maxwell system, *Communications in Mathematical Sciences* 1-3, pp. 437-447.

[9] Gilles Carbou, Bernard Hanouzet et Roberto Natalini, Semilinear behavior for totally linearly degenerate hyperbolic systems with relaxation, *Journal of Differential Equations* 246-1 (2009), pp. 291-319.

[10] Jean-Yves Chemin, *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque No. 230 (1995).

[11] Francis F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Vol. 1, Plenum Press, New York (1984).

[12] Gui-Qiang Chen, Charles David Levermore et Tai-Ping Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 47 (1994), pp. 787-830.

[13] Jean-François Coulombel et Thierry Goudon, The strong relaxation limit of the multidimensional isothermal Euler equations, *Transactions of the American Mathematical Society* 359-2 (2007), pp. 637-648.

[14] Lawrence Craig Evans, *Weak Convergence Methods for Nonlinear PDE*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 74. Publié pour la Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington D.C., American Mathematical Society, Providence, RI (1990).

[15] Weifu Fang et Kazufumi Ito, Global solutions of the time-dependent drift-diffusion semiconductor equations, *Journal of Differential Equations* 123 (1995), pp. 523-566.

[16] Kurt Otto Friedrichs, Symmetric hyperbolic linear differential equations, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 7 (1954), pp. 345-392.

[17] Thierry Gallouët, Jean-Marc Hérard et Nicolas Seguin, Numerical Modeling of Two-Phase Flows Using the Two-Fluid Two-Pressure Approach, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 14-5 (2004), pp. 663-700.

[18] Pierre Germain et Nader Masmoudi, Global existence for the Euler-Maxwell system, *Annales Scientifiques de l'ENS* 47, fascicule 3 (2014), pp. 469-503.

[19] Mohamed-Lasmer Hajjej et Yue-Jun Peng, Initial layers and zero-relaxation limits of Euler-Maxwell equations, *Journal of Differential Equations* 252 (2012), pp. 1441-1465.

[20] Bernard Hanouzet et Roberto Natalini, Global Existence of Smooth Solutions for Partially Dissipative Hyperbolic Systems with a Convex Entropy, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 169 (2003), pp. 89-117.

[21] George Chia-Chu Hsiao et Richard J. Weinacht, Singular perturbations for a semilinear hyperbolic equation, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 14 (1983), pp. 1168-1179.

[22] Ling Hsiao et Tai-Ping Liu, Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping, *Communications in Mathematical Physics* 143 (1992), pp. 599-605.

[23] Ling Hsiao, Peter Alexander Markowich and Shu Wang, The asymptotic behavior of globally smooth solutions of the multidimensional isentropic hydrodynamic model for semiconductors, *Journal of Differential Equations* 192 (2003), pp. 111-133.

[24] Shi Jin et Zhou Ping Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 48 (1995), pp. 235-276.

[25] Ansgar Jüngel, On the existence and uniqueness of transient solutions of a degenerate nonlinear drift-diffusion model for semiconductors, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 4 (1994), pp. 677-703.

[26] Ansgar Jüngel et Yue Jun Peng, A hierarchy of hydrodynamic models for plasmas : Zero-relaxation-time limits, *Communications in Partial Differential Equations* 24 (1999), pp. 1007-1033.

[27] Tosio Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 58 (1975), pp. 181-205.

[28] Sergiu Klainerman et Andrew Majda, Singular Limits of Quasilinear Hyperbolic Systems with Large Parameters and the Incompressible Limit of Compressible Fluids, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 34 (1981), pp. 481-524.

[29] Olga Aleksandrovna Ladyženskaja, Vsevolod Alekseevich Solonnikov et Nina Nikolaevna Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of mathematical monographs, American Mathematical Society, Providence, R.I. Vol. 23 (1968).

[30] Corrado Lattanzio, On the 3-D bipolar isentropic Euler-Poisson model for semiconductors and the drift-diffusion limit, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 10 (2000), pp. 351-360.

[31] Corrado Lattanzio et Pierangelo Marcati, The relaxation to the drift-diffusion system for the 3-D isentropic Euler-Poisson model for semiconductors, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 5 (1999), pp. 449-455.

[32] Corrado Lattanzio et Wen An Yong, Hyperbolic-Parabolic Singular Limits for First-Order Nonlinear Systems, *Communications in Partial Differential Equations* 26 (2001), pp. 939-964.

[33] Philippe G. Le Floch, Shock Waves for Nonlinear Hyperbolic Systems in Nonconservative form, *Institute for Mathematics and its Applications, IMA Minneapolis* (1989).

[34] Ta-Tsien Li, Nonlinear heat conduction with finite speed of propagation, *China-Japan Symposium on Reaction-Diffusion Equations and their Applications and Computational Aspects (Shanghai, 1994)*, pp. 81-91, World Science Publisher River Edge, NJ (1997).

[35] Chunjin Lin et Jean-François Coulombel, The strong relaxation limit of the multidimensional Euler equations, *Nonlinear Differential Equations and Applications* 20 (2013), pp. 447-461.

[36] Pierre-Louis Lions et Giuseppe Toscani, Diffusive limit for finite velocity Boltzmann kinetic models, *Revista Matemática Iberoamericana* 13 (1997), pp. 473-513.

[37] Tai-Ping Liu, Hyperbolic conservation laws with relaxation, *Communications in Mathematical Physics* 108 (1987), pp. 153-175.

[38] Andrew Majda, *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, Springer-Verlag, New York (1984).

[39] Pierangelo Marcati et Albert J. Milani, The one-dimensional Darcy's law as the limit of a compressible Euler flow, *Journal of Differential Equations* 84 (1990), pp. 129-147.

[40] Pierangelo Marcati, Albert J. Milani et Paolo Secchi, Singular convergence of weak solutions for a quasilinear nonhomogeneous hyperbolic system, *Manuscripta Mathematica* 60 (1988), pp. 49-69.

[41] Pierangelo Marcati et Roberto Natalini, Weak solutions to a hydrodynamic model for semiconductors and relaxation to the drift-diffusion equations, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 129 (1995), pp. 129-145.

[42] Pierangelo Marcati et Bruno Rubino, Hyperbolic to parabolic relaxation theory for quasilinear first order systems, *Journal of Differential Equations* 162 (2000), pp. 359-399.

[43] Peter Alexander Markowich, Christian A. Ringhofer et Christian Schmeiser, *Semiconductor Equations*, Springer-Verlag, New York (1990).

[44] Corrado Mascia et Roberto Natalini, On relaxation hyperbolic systems violating the Shizuta-Kawashima condition, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 195 (2010), pp. 729-762.

[45] Ingo Müller et Tommaso Ruggeri, *Rational extended thermodynamics*, Second ed., Springer-Verlag, New York (1998). With supplementary chapters by H. Struchtrup and Wolf Weiss.

[46] Roberto Natalini, Recent results on hyperbolic relaxation problems, *Analysis of systems of conservation laws (Aachen, 1997)*, pp. 128-198, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., 99, Boca Raton, FL (1999).

[47] Yue-Jun Peng, Stability of non-constant equilibrium solutions for Euler-Maxwell equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 103 (2015), pp. 39-67.

[48] Yue-Jun Peng, Uniformly global smooth solutions and convergence of Euler-Poisson systems with small parameters, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 47 (2015), pp. 1355-1376.

[49] Yue-Jun Peng et Shu Wang, Convergence of compressible Euler-Maxwell equations to compressible Euler-Poisson equations, *Chinese Annals of Mathematics* 28B (2007), pp. 583-602.

[50] Yue-Jun Peng et Shu Wang, Convergence of compressible Euler-Maxwell equations to incompressible Euler equations, *Communications in Partial Differential Equations* 33 (2008), pp. 349-376.

[51] Yue-Jun Peng et Shu Wang, Rigorous derivation of incompressible e-MHD equations from compressible Euler-Maxwell equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 40 (2008), pp. 349-376.

[52] Yue-Jun Peng et Shu Wang, Asymptotic expansions in two-fluids compressible Euler-Maxwell equations with small parameters, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 23 (2009), pp. 415-433.

[53] Yue-Jun Peng, Shu Wang et Qilong Gu, Relaxation limit and global existence of smooth solution of compressible Euler-Maxwell equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 43 (2011), pp. 944-970.

[54] Yue-Jun Peng et Victor Wasiolek, Parabolic limit with differential constraints of first-order quasilinear hyperbolic systems, *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Linéaire*, à paraître (2015).

[55] Yue-Jun Peng et Victor Wasiolek, Uniform global existence and parabolic limit for partially dissipative hyperbolic systems, soumis (2014).

[56] Tadeusz Platkowski et Reinhard Illner, Discrete Velocity Models of the Boltzmann Equation : A Survey on the Mathematical Aspects of the Theory, *SIAM Review* 30 (1988), pp. 213-255.

[57] Lionel Sainsaulieu, Euler System Modeling Vaporizing Sprays, *Progress in Astronautics and Aeronautics* 152 (1993), pp. 280-305.

[58] Denis Serre, Relaxations semi-linéaire et cinétique des systèmes de lois de conservation, *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse Non Linéaire* 17 (2000), pp. 169-192.

[59] Yasushi Shizuta et Shuichi Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, *Hokkaido Mathematical Journal* 14 (1985), pp. 249-275.

[60] Thomas C. Sideris, Becca Thomases et Dehua Wang, Long time behavior of solutions to the 3D compressible Euler equations with damping, *Communications in Partial Differential Equations* 28 (2003), pp. 795-816.

[61] Jacques Simon, Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$, *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)* Vol. CXLVI (1987), pp. 65-96.

[62] Luc Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, Res. Notes in Math.*, vol. 39, Pitman, Boston, Mass. (1979), pp. 136–212.

[63] Luc Tartar, Solutions oscillantes des équations de Carleman, *Séminaire Équations aux dérivées partielles (École Polytechnique)*, Exp No.12 (1980-1981), pp. 1-15.

[64] Benjamin Texier, WKB asymptotics for the Euler-Maxwell equations, *Asymptotic Analysis* 42 (2005), pp. 211-250.

[65] Benjamin Texier, Derivation of the Zakharov equations, *Archives for Rational Mechanics Analysis* 184 (2007), pp. 121-183.

[66] Victor Wasiolek, Uniform global existence and convergence of Euler-Maxwell systems with small parameters, soumis (2015).

[67] Gerald Beresford Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York (1974).

[68] Wen-An Yong, Singular Perturbations of First-Order Hyperbolic Systems, *Ph.D. thesis, Universität Heidelberg* (1992).

[69] Wen-An Yong, Singular Perturbations of First-Order Hyperbolic Systems with Stiff Source Terms, *Journal of Differential Equations* 155 (1999), pp. 89-132.

[70] Wen-An Yong, *Basic aspects of hyperbolic relaxation systems*, Advances in the theory of shock waves, Birkhäuser Boston, Boston, MA (2001), pp. 259-305.

[71] Wen-An Yong, Basic aspects of hyperbolic relaxation systems, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 132A (2002), pp. 1259-1274.

[72] Wen-An Yong, Entropy and Global Existence for Hyperbolic Balance Laws, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 172 (2004), pp. 247-266.

[73] Yanni Zeng, Gas dynamics in thermal nonequilibrium and general hyperbolic systems with relaxation, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 150 (1999), pp. 225-279.