Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs

Monique Pézard

UNIVERSITE PARIS VII

THESE 3ème CYCLE

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR: Madame Monique PEZARD

SUJET de la THESE : Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs.

soutenue le 5 Juin 1985 devant la commission d'examen

JURY: Mr A. REVUZ
Mme A. ROBERT
Mme R. DOUADY
Mr D. LACOMBE

UNIVERSITE PARIS VII

THESE 3ème CYCLE

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR: Madame Monique PEZARD

SUJET de la THESE : Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs.

soutenue le 5 Juin 1985 devant la commission d'examen

JURY: Mr A. REVUZ
Mme A. ROBERT
Mme R. DOUADY
Mr D. LACOMBE

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Aline Robert qui m'a permis de réaliser ce travail en acceptant de diriger mes recherches. Ma reconnaissance va aussi à Régine Douady : je les remercie de l'aide constante qu'elles m'ont apportée, de la disponibilité dont elles ont fait preuve pendant toute la durée de cette étude.

Je remercie vivement Monsieur André Revuz qui a bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury, ainsi que Monsieur Lacombe qui a accepté de lire ma thèse et de faire partie de ce jury.

Je voudrais aussi remercier tous les collègues d'Ecole Normale qui ont bien voulu faire passer mon questionnaire, ainsi que Monsieur Richard, de l'Ecole Annexe de Moulins qui a accepté de me confier ses élèves pour quelques leçons.

Enfin, j'adresse mes remerciements à l'Ecole Normale de Moulins, à l'I.R.E.M. de Clermont-Ferrand et à l'I.R.E.M. de Paris-Sud pour la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La proportionnalité occupe une place essentielle dans l'enseignement des Mathématiques et des sciences. A l'école primaire dès le cours élémentaire et le cours moyen, elle peut servir de cadre à l'introduction de la multiplication et de la division. Dans le second cycle, elle joue un rôle important pour la compréhension des relations entre grandeurs physiques. Par l'intermédiaire des pourcentages, elle joue un rôle social fondamental; elle a aussi des applications importantes dans de nombreux secteurs de la vie professionnelle. Or depuis qu'elle est enseignée, la proportionnalité est source de difficultés, parfois durables, ches les élèves.

En tant que professeur d'Ecole Normale, chargée de la formation des futurs instituteurs, je m'intéresse à la proportionnalité de plusieurs points de vue :

a) Le premier est celui de l'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs : quel doit être cet enseignement pour que ceux-ci soient capables, dans leurs classes, d'enseigner "bien" la proportionnalité ?
Ce premier point de vue m'amène à en considérer deux autres :

b) le point de vue mathématique.

c) celui de l'enseignement de la proportionnalité aux élèves de l'Ecole Primaire.

La formation professionnelle des élèves-instituteurs pose un problème d'enseignement tout à fait différent de celui posé par la transmission de connaissances à des enfants. En effet, on peut envisager deux questions :

1°) Que doit savoir un élève-instituteur pour enseigner les contenus relatifs à l'Ecole Elémentaire ? (En ce qui concerne les contenus, on peut s'en tenir au programme, même si celui-ci n'est pas entièrement satisfaisant).

2°) Comment enseigner aux élèves-instituteurs, et quoi, pour obtenir les connaissances définies en 1°).

Pour la première question, la réponse traditionnelle consiste à dire que le niveau de connaissances dans chaque contenu à enseigner doit être supérieur au niveau attendu chez les élèves. De plus, les élèves-instituteurs devraient acquérir des connaissances en didactique des Mathématiques.

La deuxième question est nettement plus difficile : dans un premier temps, on peut chercher à enseigner aux normaliens comme on voudrait qu'ils enseignent à leurs futurs élèves; c'est le principe de reproductibilité. Mais alors, il y a un obstacle au niveau du contenu :

- Si on choisit un contenu vraiment nouveau pour les élèves-instituteurs, alors il est trop éloigné des contenus du primaire.

- Sinon, ce n'est pas la même situation qu'ils auront à reproduire puisque, pour les enfants, le contenu sera nouveau alors qu'il ne l'est pas pour les élèves-maîtres.

D'autre part, l'enseignement en direction des élèves-instituteurs n'a pas comme seule finalité l'acquisition de contenus. Il y a aussi une finalité professionnelle.

Les rapports Maître-Elève (rapports entre le professeur d'Ecole Normale et les normaliens d'une part, et entre les normaliens et les élèves du primaire d'autre part) sont donc différents.

Il faut aussi tenir compte du fait que les normaliens ont connu, pendant au moins douze ans un enseignement classique de type "j'apprends - j'applique". Cela peut expliquer les difficultés à promouvoir chez eux un enseignement différent.

Pour toutes ces raisons, on ne peut pas faire fonctionner uniquement le principe de reproductibilité "je vais enseigner comme on m'a appris" mais on peut le faire fonctionner partiellement : on peut construire un enseignement qui ressemble à ce qu'on voudrait que les élèves instituteurs réalisent dans les classes et qui en plus les fassent réfléchir d'un point de vue didactique à partir des séquences réalisées avec eux.

Mon hypothèse est alors la suivante :
Malgré les restrictions développées ci-dessus :

- Au moins 12 ans d'enseignement traditionnel pour les normaliens.
- Risques d'obsolescence au niveau du contenu.
- Rapports Maître-Elèves différents.

On peut améliorer la formation des élèves instituteurs et obtenir un progrès qualitatif en construisant un enseignement débouchant sur une double institutionnalisation* à la fois mathématique et didactique.

---

* Institutionnalisation : Officialisation des connaissances - Ce qui est fait dans un cours classique.

D'ailleurs, les restrictions développées sont peut-être moins importantes qu'il n'y paraît : en effet, on peut faire un parallèle entre les notions mathématiques utilisées comme outil implicite par les enfants dans la résolution de problèmes, et les notions mathématiques déjà rencontrées par les normaliens au cours de leur scolarité, mais en général mal connues.

En particulier, comme on estime que sur une notion donnée les élèves-instituteurs doivent avoir un niveau supérieur à celui exigé des enfants, on est amené à leur enseigner un contenu "en plus" qui est souvent nouveau pour eux. Il y a alors moins d'obstacles au niveau du contenu : par rapport à ce contenu "en plus", on retrouve les mêmes rapports Maître-Elèves entre le professeur d'Ecole Normale et les normaliens d'une part, et entre les normaliens et les élèves du primaire d'autre part. Par exemple, lors de la résolution d'un problème dont le contenu est nouveau pour eux, les normaliens peuvent utiliser le même type de procédures de proche en proche que des enfants dans une classe.

La proportionnalité est un exemple de contenu qui n'est pas nouveau pour les normaliens : même si certains n'ont plus qu'une idée vague sur cette notion, ils l'ont déjà rencontrée au cours de leur cursus scolaire.

L'objet de mon travail est de reprendre mon hypothèse dans le cas particulier de la proportionnalité et d'essayer de voir si elle est, ou non, vérifiée.

La Méthodologie suivie en découle :

A/ Exploration du champ conceptuel et Délimitation :

1. Côté élèves (primaire ou premier cycle) : c'est l'objet du chapitre I qui est aussi un essai de synthèse bibliographique sur le thème de la proportionnalité.

2. Côté Elèves-Instituteurs : le chapitre II consiste en l'analyse des résultats à un questionnaire sur la proportionnalité.

B/ Construction de séquences sur la proportionnalité en direction des élèves-instituteurs-Réalisation-Evaluation :

C'est l'objet du chapitre III.

Introduction au chapitre I

Le chapitre I comporte :

- Une analyse mathématique de la notion de proportionnalité.

- Une première partie qui est un essai de synthèse bibliographique faite à partir de différentes études sur le thème de la proportionnalité. Bien sûr, je ne prétends pas être exhaustive quant aux travaux cités.

Les différentes études sont présentées en les regroupant en trois grands thèmes :

I) Analyse des tâches.

II) Comportement des élèves (face à des problèmes de proportionnalité).

III) Enseignement de la proportionnalité.

I) comporte trois parties :

A) : Analyse de la structure des problèmes.

B) : Procédures de résolution des problèmes.

C) : Cas particulier des problèmes de pourcentages.

Dans II), je distingue :

Partie I : Ecole Elémentaire et 1er cycle des collèges.

Partie II : Second cycle des lycées et Ecoles Normales.

Il s'agit, selon les résultats des recherches citées, de décrire les comportements des élèves face à des problèmes de proportionnalité.

Pour cela, différents points de vue sont envisagés dans la partie I :

- Celui des procédures utilisées : A).
- Celui de la structure des problèmes proposés : B).
- Celui des domaines de référence et de la complexité relative des questions : C).
- Celui des représentations graphiques C).

La partie II, plus succinte, se borne à citer quelques recherches faites à ces niveaux.

Le III) analyse l'enseignement de la proportionnalité en France :

- Dans son évolution historique : A).
- Au travers des programmes actuels : B).

Dans cette partie B), j'essaie aussi de faire une synthèse des propositions de modification faites par les auteurs des différentes recherches citées.

Enfin les parties C) et D) concernent l'hétérogénéité des classes d'une part, et le rôle du "Modèle" mathématique d'autre part.

- Une deuxième partie qui relate une suite de séquences sur la proportionnalité que j'ai réalisées dans une classe de CM_2.

Analyse Mathématique

Une situation de proportionnalité se traduit par l'intervention de relations linéaires ou multilinéaires entre des variables qui représentent soit des valeurs d'une grandeur, soit des nombres. Pour chaque grandeur, on peut choisir une unité de mesure. Les unités ayant été choisies, toute relation entre deux grandeurs (par exemple, entre la longueur du côté d'un carré et son périmètre, ou entre le temps t et la distance parcourue par un mobile pendant le temps t...) se traduit par une relation entre les nombres qui les mesurent (ces nombres dépendant des unités choisies).

Quand utilise-t-on les mots de proportionnalité, proportionnel et quelles définitions mathématiques y sont attachées ?

On parle de "situation de proportionnalité" ou de "suites de nombres proportionnels" lorsqu'on a un ensemble d'au moins 2 couples de valeurs réelles (a_1, b_1) (a_2, b_2) ... et lorsque la correspondance $(a_i \to b_i)_{i=1,2..}$ est d'un type particulier.

Précisons.

La situation est du type proportionnel si cette correspondance est la restriction d'une fonction $y = Ax$ (de R dans R) aux valeurs $(a_i)_{i=1,2...}$ prises par la première variable.

Initialement, le terme "proportion" désignait tout ensemble de quatre nombres a, b, c, d entre lesquels on a l'égalité des rapports $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ainsi, connaissant 3 des termes a, b, c, d d'une proportion on peut déterminer le 4ème.

Il y a eu extension de l'utilisation du terme à plus de 2 rapports et par là même, glissement de sens.

On peut donc représenter la correspondance de diverses manières : couples de nombres, tableaux, points sur un quadrillage gradué... Dans ce dernier cas, les points sont alors alignés sur une droite passant par le point (0,0), dont la pente s'appelle "le coefficient de proportionnalité".

Nous allons développer les différents points de vue correspondant à la traduction du concept dans ses divers cadres d'intervention.

1) Rappel sur les fonctions linéaires (Point de vue numérique).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $x \to Ax$ où $A \in \mathbb{R}$. Ces fonctions dites linéaires sont les seules applications linéaires de R dans R ($\mathbb{R}$ étant

considéré comme un espace vectoriel sur R). Notons que les situations de proportionnalité se modélisent par f ou par une restriction de f à une partie continue ou discrète de R (et même plutôt de R^+), les enfants du cours moyen travaillant essentiellement sur N , D^+ , $\mathbb{Q}^+$ ... (ou une partie de ces ensembles) selon le moment de leur apprentissage.

A ce propos, rappelons qu'une fonction de $\mathbb{Q}$ dans R additive ($\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$) est $\mathbb{Q}$-linéaire ($\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$)

Plus généralement, notons que la connaissance d'un seul couple de nombre en correspondance (a,a'), si on sait que la situation étudiée est du type proportionnel, permet de déterminer le coefficient A donc de connaître la fonction linéaire :

En particulier : si $a = 1$ $a' = f(1) = A$

Une application linéaire de R dans R est donc entièrement déterminée par la donnée de l'image de 1.

Pour $x \in R$ on a : $f(x) = x \times f(1)$.

Remarque 1 : Si on ne considère que 2 couples en correspondance (a,a'),(b,b')

on a : $a' = A \times a$

$b' = A \times b$

Alors $a'b = A\,ab$ d'où $a'b = b'a$

$b'a = A\,ba$

C'est l'égalité du "produit en croix" (Elle permet d'exprimer l'égalité de 2 rapports sans faire intervenir la valeur de ce rapport).

Inversement, en divisant cette égalité par a'b' (non nul) on obtient : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

On retrouve donc :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \iff a\,b' = b\,a'$$

On disait autrefois "le produit des extrêmes est égal au produit des moyens" et pour la relation $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, on parlait de "proportion".

Dans une proposition, on peut permuter les extrêmes (et aussi les moyens) :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \iff \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \iff \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Remarque 2 (de vocabulaire) : On a l'habitude d'appeler proportionnalité inverse entre x et y une relation de proportionnalité entre $\frac{1}{x}$ et y .

2) Point de vue graphique.

(On se place dans $\mathbb{R}^2$ espace affine euclidien)
Un repère étant fixé, une relation de proportionnalité se représente graphiquement par une droite passant par l'origine dont la pente est le coefficient de proportionnalité.

3) Point de vue des Grandeurs.

Toute la description qui vient d'être faite dans le cadre numérique a sa formulation dans le cadre des grandeurs.

Qu'est-ce-qu'une grandeur ? Il est difficile d'exprimer correctement ce qu'est une grandeur sans faire appel à des notions élaborées. On peut dire que c'est une variable qui prend ses valeurs dans un ensemble où on sait les ajouter et les comparer.

Précisons cette définition dans le cas particulier de la longueur (d'après R. Douady RDM I 1.) :

Notons OM ensemble des objets matériels rigides marqués d'un couple de points, que nous appellerons objets marqués. Il est possible de comparer ces objets du point de vue de leur longueur :

Comparaison directe

Soient $\underline{A} = (A, a_1, a_2)$ et $\underline{B} = (B, b_1, b_2)$ 2 objets marqués.
Nous dirons que $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont mis en coïncidence si on peut attribuer à a_1 et b_1 la même position, à a_2 et b_2 la même position.

Nous dirons que $\underline{B}$ dépasse $\underline{A}$:

1) si on peut attribuer à a_1 et b_1 la même position,

2) si a_1, a_2, b_2 sont alignés avec a_2 strictement entre a_1 et b_2 .

Le résultat de la comparaison ne dépend ni des positions des points, ni du moment de l'expérience.

Comparaison indirecte (en utilisant un intermédiaire)

On ne peut pas toujours procéder par comparaison directe (objets non déplaçables par exemple). Mais on peut en général mettre en coïncidence le premier objet marqué $\underline{A}$ avec un objet intermédiaire $\underline{C}$ que l'on pourra comparer directement à $\underline{B}$.

Structure sur l'ensemble L des longueurs.

Définition : Notons L l'ensemble quotient $OM/\mathcal{R}$ par la relation d'équivalence "$\underline{A}$ a même longueur que $\underline{B}$" entre objets marqués. Notons $\lambda : OM \to L$ l'application canonique de passage au quotient qui à un objet marqué $\underline{A}$ associe sa longueur $\lambda(\underline{A})$.

Ordre. Soient $\ell_1 \in L$ et $\ell_2 \in L$. Soient $\underline{A_1}$ et $\underline{A_2}$ 2 éléments de OM tels que $\ell_1 = \lambda(\underline{A_1})$ et $\ell_2 = \lambda(\underline{A_2})$

On définit :

$\ell_1 < \ell_2$ si et seulement si $\underline{A_1}$ est plus court ou de même longueur que $\underline{A_2}$

La relation "$\ell_1 < \ell_2$" entre éléments de L est une relation d'ordre total.

Addition. La justaposition (notée $\perp$) sur OM étant compatible avec la relation $\mathcal{R}$, on pose :

$$\ell_1 + \ell_2 = \lambda(\underline{A_1} \perp \underline{A_2}) \quad \text{avec} \quad \ell_1 = \lambda(\underline{A_1}), \quad \ell_2 = \lambda(\underline{A_2})$$

On obtient ainsi une loi de composition partout définie entre longueurs, bien que la juxtaposition ne soit pas partout définie (mais on peut toujours trouver des représentants juxtaposables).

Les objets marqués de la forme (A,a,a) sont tous de même longueur. On pose (A,a,a) = 0 .

Muni de l'addition + et de l'ordre $<$, l'ensemble L est un demi groupe commutatif totalement ordonné.

En particulier $\mathbb{N}$ opère sur L .

Opération de $\mathbb{N}$ sur L

Soit $(n,\ell) < \mathbb{N} \times L$

Posons $n . \ell = \underbrace{\ell + \ell + \dots + \ell}_{n \text{ termes}}$ on a $n . \ell \in L$

L'application $\mathbb{N} \times L \longrightarrow L$, $(n,\ell) \longrightarrow n.\ell$ possède les propriétés suivantes :

$(\forall \ell' \in L)$ on a :

$p.(q.\ell) = (pq).\ell$

$(p+q).\ell = (p.\ell) + (q.\ell)$

$p.(\ell+\ell') = (p.\ell) + (p.\ell')$

$n.\ell = 0 \quad n = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 0$

Mesure

Une longueur u ayant été choisie, on peut définir la mesure de certaines longueurs avec u comme unité :

Définition : On dit qu'une longueur ℓ est $\mathbb{N}$ - mesurable de mesure n avec l'unité u s'il existe un entier n tel que $\ell = n.u$

Notons L_u l'ensemble des longueurs $\mathbb{N}$ - mesurables en u. Pour toute longueur ℓ, notons $g_u(\ell)$ sa mesure en u. L'application $g_u : L_u \to \mathbb{N}$ est un isomorphisme de demi-groupe commutatif compatible avec l'ordre de L_u et celui de $\mathbb{N}$. Mais toutes les longueurs ne sont pas $\mathbb{N}$ - mesurables en u.
Par exemple, si $v \in L$ et $v < u$, v n'est pas $\mathbb{N}$ - mesurable en u.
Cette remarque nous conduit à la question suivante :

Peut-on étendre $\mathbb{N}$ à un ensemble M de nombres tel que :

- Toutes les longueurs soient M - mesurables en u,
- Les longueurs qui étaient N - mesurables en u soient M mesurables en u avec le même nombre.
- Ordre et Opérations de $\mathbb{N}$ s'étendent à M.

Dans un premier temps, on peut étendre $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Q}^+$ Mais toutes les longueurs ne sont pas $\mathbb{Q}^+$ mesurables en u. On ne peut alors obtenir que des encadrements de plus en plus fins de la mesure "exacte" de telles longueurs. Si on désire respectivement par $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux suites de rationnels positifs satisfaisant aux conditions suivantes :

1°) Pour tout n, on a : $x_n < x_{n+1} < x'_{n+1} < x'_n$

2°) la différence $x'_n - x_n$ tend vers 0^*,

alors il existe un nombre x et un seul (limite des suites $(x_n)_n$ et (x'_n)) tel que pour tout n, $x_n < x < x'_n$. Ce nombre x désigne alors la "mesure exacte" cherchée.

Il faut donc étendre $\mathbb{N}$ à un ensemble de nombres où tout ensemble majoré admet une borne supérieure, c'est-à-dire à l'ensemble des nombres réels (positifs).

Une longueur u ayant été choisie comme unité :

Le demi-groupe commutatif totalement ordonné des longueurs est isomorphe au demi-groupe additif des nombres réels : c'est-à-dire qu'il existe une application μ_u unique de L dans $\mathbb{R}^+$

*exemple : les deux suites de nombres décimaux approchant x par défaut et par excès.

ayant les propriétés suivantes :

1°) μ_u est bijective

2°) $\mu_u(\ell_1+\ell_2) = \mu_u(\ell_1) + \mu_u(\ell_2)$

3°) μ_u est strictement croissante : si $\ell_1 < \ell_2$ alors $\mu_u(\ell_1) < \mu_u(\ell_2)$

4°) $\mu_u(u) = 1$.

Remarque :
Le mot "mesure" désigne à la fois :

- l'application μ_u
- la valeur $\mu_u(\ell)$ de cette application pour $\ell \in L$.

Une grandeur peut avoir plusieurs mesures, selon l'unité choisie.

Grandeur Produit : L'aire et le Volume en sont des exemples. La notion mathématique sous jacente est celle d'application bilinéaire de $R \times R$ dans R (trilinéaire de $R \times R \times R$ dans R pour le volume).

(Dire qu'une application est bilinéaire signifie qu'elle est définie sur un espace produit et qu'elle est linéaire par rapport à chacune des variables lorsque l'autre est fixée).

Les seules applications bilinéaires de $R \times R$ dans R sont de la forme :
$(x,y) \to k\ x\ y$ $(k \in R)$.

En effet :

Soit f une application bilinéaire de $R \times R$ dans R, f est linéaire par rapport à la 1ère variable, donc :

Pour tout $x \in R$:

$$f(x,y) = x\ f(1,y)$$

f est aussi linéaire par rapport à la 2ème variable, donc :

Pour tout $y \in R$:

$$f(1,y) = y\ f(1,1)$$

finalement : $f(x,y) = f(1,1)\ x\ y$,
donc f est de la forme : $(x,y) \to k\ x\ y$
avec $k = f(1,1)$.

Le produit est la fonction bilinéaire type de $R \times R$ dans R.

Grandeur quotient : La vitesse, la masse volumique en sont des exemples :

Si m désigne une masse et v le volume correspondant,

Si on a choisi u comme unité pour m et u' pour v, on a :

$$m = a\ u$$

$$v = a'\ u'$$

et $a = \alpha \times a'$. Le nombre α est alors la mesure d'une grandeur quotient qui est la masse volumique. Cette grandeur quotient est mesurée avec une unité quotient qui peut être $\underline{u}$ mais aussi $\frac{u1}{u'_1}$:

en effet, on peut mesurer la masse volumique en g/cm^3 mais aussi en g/dm^3, en kg/m^3 ...

de même, on peut mesurer une vitesse en km/h mais aussi en m/s , ...

En conclusion, on peut dire que l'analyse de la notion de proportionnalité présente des difficultés pour au moins trois raisons :

1. Le mot "proportionnel" est ambigü : il ne recouvre pas un concept particulier, mais il touche plusieurs concepts dans différents cadres. On ne peut le définir en toute généralité : ce n'est que lorsqu'on a fixé les domaines de référence (domaine numérique, cadre des grandeurs) qu'on est en mesure de donner des définitions précises.

2. Il faut distinguer entre :

- Le traitement d'une situation où la proportionnalité est reconnue.

- La reconnaissance de la proportionnalité (c'est-à-dire du modèle mathématique) dans une situation donnée. Pour l'enseignant, la reconnaissance du modèle risque de rester à l'état implicite soit parce qu'il considère cela comme évident, soit, à la limite, parce qu'il ne s'est pas posé le problème. Par contre, pour l'élève, la reconnaissance de la proportionnalité ne va pas de soi. Il semble donc nécessaire que l'enseignant explicite ce problème.

3. Quand dans une situation de proportionnalité, le cadre est fixé, il existe plusieurs procédures pour traiter ce problème. Cela doit évidemment être pris en compte par l'enseignant.

Cette variété des procédures est mise en évidence dans la partie I de ce chapitre qui est un essai de synthèse bibliographique des différentes recherches faites sur la notion de proportionnalité.

PARTIE I.

I - ANALYSE DES TACHES.

A) Analyse de la structure des problèmes : (d'après G. Vergnaud [1])

Dans cette recherche les problèmes de proportionnalité sont replacés dans le cadre des "structures multiplicatives" définies comme

" ... des relations, transformations, lois de composition ou opérations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions".

Dans l'ensemble des problèmes de type multiplicatif, les auteurs distinguent deux structures relationnelles :

1°) Celle de la proportion simple dans laquelle deux variables dépendent linéairement l'une de l'autre : des quantités de marchandises et leur prix, des volumes (dans une matière homogène) et les masses correspondantes, des durées et des distances parcourues à vitesse constante, etc ...
Les grandeurs peuvent être continues (Volume, Masse, Temps) ou discrètes (nombre d'objets).
Cette structure peut être représentée par un tableau :

$$\begin{array}{c|c} x & y = f(x) \\ x' & y' = f(x') \end{array}$$

f étant la fonction qui fait passer de la mesure de la première grandeur à la mesure de la deuxième grandeur correspondante.

Ce tableau peut être analysé :

a) en considérant l'expression analytique de la fonction linéaire :
$x \to f(x)$ où $f(x) = ax$
a étant le coefficient de proportionnalité.

b) en considérant les propriétés de la fonction linéaire :

1) si $x' = \lambda x$ alors $f(x') = \lambda f(x)$

2) si $x'' = x+x'$ alors $f(x'') = f(x)+f(x')$

3) Combinaison des propriétés 1) et 2) :
si $x'' = \lambda x + \lambda' x'$ alors $f(x'') = \lambda f(x)+ \lambda' f(x')$

Pour une telle relation de proportionnalité entre deux grandeurs, G. Vergnaud propose le terme d'"Isomorphisme de mesures".

2°) Celle de la proportion multiple dans laquelle une variable est une fonction multilinéaire de plusieurs autres variables indépendantes entre elles.

G. Vergnaud distingue deux cas :

2.1 Celui du "Produit de Mesures" dans lequel la grandeur est une grandeur produit : l'aire et le volume en sont les exemples les plus simples, mais de nombreux produits cartésiens relèvent aussi de cette structure (nombre de couples différents que l'on peut former avec n filles et m garçons).

D'après les auteurs, le "produit de mesures" pourrait s'analyser comme un double "isomorphisme de mesures" . Réciproquement, dans le cas de la vitesse uniforme ($d = v \times t$) , l'"isomorphisme de mesure" pourrait s'analyser comme un "produit de mesures" .

Néanmoins, les auteurs estiment qu'il est intéressant de distinguer ces deux structures :

- d'une part, pour faire une analyse aussi fine que possible des différentes classes de problèmes.

- d'autre part, parce que leurs études sur les "structures multiplicatives" (1 et 2) ont montré que le "produit de mesures" était une structure plus complexe que "l'isomorphisme de mesures" .

2.2 Celui de la "proportionnalité multiple ordinaire" :

Exemple : la consommation de mazout en fonction du temps et du nombre de radiateurs. Du point de vue mathématique, on est aussi en présence d'une fonction bilinéaire par rapport à 2 variables, mais G. Vergnaud pense qu'il faut distinguer cette structure de celle du "produit de mesures" .

En fait, toute fonction bilinéaire par rapport à 2 variables est par définition linéaire par rapport à chacune d'elles : on peut donc, à partir d'un problème de proportion multiple, obtenir un problème de proportion simple en fixant une des variables. Mais les auteurs de 1 et aussi de 12 pensent que cela ne suffit pas à décrire complètement une situation de proportion multiple. On peut aussi dire qu'en fixant le résultat, on obtient une situation de proportion inverse, qu'en "égalant" les 2 variables, on obtient une situation de proportion au carré (Aire du carré par rapport à celle du rectangle).
Les auteurs de 12 estiment que "les cas de portionnalité étudiés classiquement sont souvent des cas de proportionnalité multiple où l'on se refuse à faire varier plus d'une variable en même temps".

B) Procédures de Résolution des problèmes : (d'après [1]).

a) Analyse a priori

On a vu qu'un problème de proportionnalité pouvait être analysé :

- Soit en considérant l'expression analytique de la fonction linéaire : $x \to ax$: c'est l'Aspect Fonction qui mène à la recherche du coefficient de proportionnalité a.

- Soit en considérant les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire : c'est l'aspect isomorphisme.

Ces deux analyses, complémentaires l'une de l'autre, permettent aussi de distinguer différentes procédures de résolution d'un problème type "règle de trois" ; chaque procédure retenant certaines caractéristiques du problème :

A partir d'un tableau $\begin{array}{c|c} a & b \\ c & x \end{array}$ représentant un problème type "règle de trois", les auteurs de [1] distinguent 2 types de procédures :

- Dans la procédure de type scalaire, ils retiennent que "la relation entre x et b est la même que la relation entre c et a " : $\frac{x}{b} = \frac{c}{a}$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend right, "\times \frac{c}{a}"'] & b \arrow[d, bend left, "\times \frac{c}{a}"] \\ c & x \end{tikzcd}$$

$\frac{c}{a}$ peut être déterminé soit par un calcul direct, soit par des décompositions du type $c = \lambda_1 a + \lambda_2 a$

$\frac{c}{a}$ est un rapport sans dimension (ou scalaire).

Si $\frac{c}{a} = 3$, dire que c est 3 fois plus grand que a résume une situation additive : $c = a + a + a$ et a du sens dans le cadre des grandeurs.

Cette procédure est basée sur la propriété d'isomorphisme multiplicatif : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
Elle n'explicite pas le coefficient de proportionnalité.

- Dans la procédure de type fonction, les auteurs retiennent que "la relation entre x et c est la même que la relation entre b et a " : $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "\times b/a"] & b \\ c \arrow[r, bend right, "\times b/a"'] & x \end{tikzcd}$$

Cette procédure explicite le coefficient de proportionnalité α : on a $\alpha = \frac{b}{a}$

. Si a et b désignent les mesures de 2 grandeurs distinctes v et v' (une unité de mesure u ayant été choisie pour v , de même u' pour v'), le

nombre α est alors la mesure d'une grandeur quotient avec l'unité u'/u - (exemples : la vitesse, la masse volumique, etc...)
L'unité quotient dépend des unités avec lesquelles on a mesuré les grandeurs v et v' : par exemple, la vitesse peut être mesurée en km/heure, mais aussi en mètre/seconde et on a : 1 m/s = 3,6 km/heure.

. Si a et b désignent les mesures d'une même grandeur v : c'est le cas dans les problèmes d'échelle ou de pourcentage. Alors, si v est mesurée avec la même unité, la grandeur quotient est un nombre. Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité α est aussi un nombre.
Les auteurs de [12] font remarquer que si v et v' sont 2 grandeurs distinctes et si α est un entier, par exemple $\alpha = 3$, dire que b est 3 fois plus grand que a n'a de sens que dans le cadre numérique. En effet, si v' est une distance et v une durée, cela ne signifie pas que la distance b est égale à 3 fois la durée a mais seulement que la mesure de v' (en km) est égale à 3 fois la mesure de v (en heures).
La multiplication par α n'est donc pas une addition répétée dans le cadre des grandeurs, alors que, dans le cadre numérique, elle peut l'être lorsque α est un entier naturel.
Les auteurs de [12] remarquent aussi que la grandeur quotient α peut être familière aux élèves (km/h, F/kg...). Mais, dans ces mêmes cas, la grandeur quotient $1/\alpha$ l'est beaucoup moins. Pourtant, dans le cadre numérique les coefficients $\frac{1}{\alpha}$ et α jouent des rôles analogues. L'aspect fonction introduit donc une dissymétrie entre les rôles des deux grandeurs. Cela disparaît si on en reste à la formulation numérique sans chercher à traduire les calculs dans le cadre des grandeurs.

b) Analyse a postériori

L'analyse des procédures de résolution effectivement utilisées par les élèves dans un problème conduit à distinguer d'autres procédures. En particulier :

- La procédure "valeur unitaire" qui utilise à la fois l'aspect isomorphisme (calcul de $f(1) = \frac{1}{a} f(a)$) et l'aspect fonction (calcul de $\frac{b}{a}$)

- La procédure "règle de trois" qui consiste à calculer d'abord le produit $b \times c$ puis à diviser par a. Hors du cadre numérique, ces calculs n'ont aucun sens.

L'utilisation de ces différentes procédures par les élèves montre comment ils perçoivent, de façons très diverses, les données du problème et les relations entre ces données.

C) Cas particuliers des problèmes de pourcentage : (d'après [7])

Les problèmes de pourcentage entrent dans le cadre général des problèmes de proportionnalité, mais leur résolution présente sans doute des difficultés spécifiques. Dans son étude sur Pourcentages, P. Buisson propose une classification des problèmes de pourcentages.
Après avoir rappelé les deux aspects :

- Descriptif : "le candidat X a obtenu 25 % de voix"
- Fonctionnel : "Calculer 25 % d'un prix"

il propose de distinguer

1°) Les trois problèmes élémentaires de pourcentage :

a) Calcul de l'image :

$$x \xrightarrow{\times\ a\%} ?$$

b) Calcul de l'antécédent :

$$? \xrightarrow{\times\ a\%} y$$

Dans les 2 cas :

. le pourcentage a% est donné : c'est le coefficient de proportionnalité.
. le calcul de l'image se fait par une simple multiplication.
. le calcul de l'antécédent se fait à l'aide d'une division en résolvant une équation ou en déterminant l'opérateur inverse.

c) Calcul du pourcentage :

$$x \xrightarrow{?\ \%} y$$

Cela revient à chercher la "quatrième proportionnelle" :

x	y
100	?

2°) Problèmes de hausse et de baisse

Augmenter un nombre de 10 % revient à le multiplier par 1,1 : la résolution d'un tel problème est facilitée dès qu'on a remarqué l'existence d'un opérateur multiplicatif entre la valeur initiale et la valeur finale.

3°) Composition d'opérateurs multiplicatifs

Deux hausses successives de 10 % ne se traduisent pas par une hausse de 20 % mais de 21 %.
De même, une inflation mensuelle de 1 % ne se traduit pas par une inflation annuelle de 12 %, mais de 12,7 %.
De tels problèmes nécessitent la composition d'opérateurs multiplicatifs, ce qui se traduit par le produit des coefficients.

4°) Problèmes divers

Au premier janvier 1977, le taux de la T.V.A., pour certains articles, a été ramené de 20 % à 17,6 %. La baisse des prix correspondante est alors de 2 % et non de 2,4 % car la baisse de 2,4 porte sur 120 et non sur 100.
Cet exemple montre que certains problèmes de pourcentages sont assez complexes.

P. Buisson conclut en disant que la résolution des problèmes de pourcentage nécessite des connaissances acquises en cours de troisième : langage des variables et résolution d'équation d'une part, nombres réels d'autre part.

Seul le pourcentage descriptif ne nécessite que la compréhension de la structure multiplicative.

II - COMPORTEMENTS DES ELEVES.

Partie 1 : Ecole Elémentaire et 1er cycle des collèges.

A) Procédures

a) Evolution des procédures à l'Ecole Elémentaire (d'après [9])

Le travail de G. Ricco sur "les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire" a mis en évidence la hiérarchie des stratégies utilisées par les enfants de 7 à 11 ans lors de la résolution de problèmes de multiplication et de division.

Initialement, ces stragégies respectent certaines propriétés de la fonction linéaire (croissance et univocité à droite), mais ignorent la proportionnalité.

La notion de constante n'apparaît nettement qu'au cours élémentaire 2ème année (9 ans). Elle est liée soit à un opérateur additif (écarts constants), soit à un opérateur multiplicatif (procédure de type fonction). La procédure de type scalaire n'est employée que plus tardivement.

La proportionnalité est donc progressivement prise en compte par les enfants en même temps que la notion de rapport constant.
Cette étude montre également que les procédures conduisant à l'échec contiennent des éléments qui peuvent conduire à la réussite : par exemple, l'utilisation de certaines propriétés de la fonction linéaire, en particulier la croissance.
En cela, elle rejoint les conclusions de G. Vergnaud ([2]) à savoir que les enfants, lorsqu'ils échouent, font des tentatives qui révèlent une certaine rationnalité sur laquelle les maîtres pourraient s'appuyer.

b) Procédures utilisées dans le premier cycle (d'après [1] et [2])

Les recherches de G. Vergnaud ([1]) sur les "structures multiplicatives" semblent indiquer que la procédure scalaire est toujours plus employée que la procédure fonction, même dans les cas où elle est moins "simple".
Cette prédominance des procédures scalaires semble aussi attestée dans une expérience didactique de A. Rouchier et Al. faite en classe de quatrième ([4]) :

Les élèves avaient à compléter un tableau donnant les distances parcourues par un train à vitesse constante en fonction du temps.

A aucun moment, la constante de vitesse n'a été formulée par les élèves. Ils ont rempli le tableau en utilisant uniquement les propriétés d'isomorphisme.
D'après ces recherches, il semble donc que l'aspect isomorphisme soit l'aspect le plus naturellement utilisé par les élèves du premier cycle dans la résolution

d'un problème de proportionnalité.
Cela semble en contradiction avec les recherches de G. Ricco à l'Ecole Elémentaire ([9]) où elle constate que l'utilisation de l'aspect fonction est antérieure à celle de l'aspect isomorphisme : en effet, celle-ci n'apparaît qu'au cours moyen.
Cette apparente contradiction est-elle dûe à une évolution des procédures utilisées par les élèves entre l'Ecole primaire et le premier cycle ?
Selon R. Douady ([11]), il n'y a pas toujours prédominance de la procédure scalaire sur la procédure fonction : les élèves détermineraient plutôt leur choix de procédure selon la facilité ou la difficulté technique à calculer le rapport scalaire ou le rapport fonction. Ce sont donc les domaines numériques de ces rapports qui sont en jeu. Quand le rapport fonction est "simple" (entier naturel ou même fraction simple, par exemple $\frac{1}{2}$), la majorité des élèves utilise la procédure fonction (cf. test sur le puzzle dans II). Les variables numériques constituent donc une variable didactique à la disposition de l'enseignant pour favoriser ou au contraire bloquer une procédure.

Les recherches de G. Vergnaud ([2]) ont également montré que dans un problème de double proportionnalité, certaines procédures canoniques apparaissent nettement plus "naturelles" que d'autres pour les enfants. En particulier :

- Les procédures faisant intervenir un calcul intermédiaire sans signification physique sont très rares.

- Dans le cas d'une double proportionnalité par rapport au temps, c'est la procédure qui consiste à multiplier en second lieu par le temps qui est largement majoritaire.

B) Difficulté relative des deux structures : "Produit de Mesures" et "Isomorphisme de mesures".

Les mêmes recherches sur les "structures multiplicatives" ([1]) et d'autres plus récentes de G. Vergnaud, A. Rouchier et Al. sur le volume ([3]) ont montré que pour les auteurs la structure de "produit de mesures" (dont le volume est un exemple) est complexe, plus complexe que celle d'"Isomorphisme de mesures".

En effet, le calcul du volume d'un parallélépipède rectangle s'avère très difficile en 6e, même lorsque ce calcul est demandé explicitement dans une question isolée.

Par contre, la difficulté est moins grande pour des questions isolées faisant intervenir un "isomorphisme de mesures".

Les récentes recherches sur le volume, menées dans le premier cycle du second degré, ont montré l'extrême difficulté, pour les élèves, des propriétés de trilinéarité du volume.

Les représentations erronées du volume sont de type « périmètres » ou de type « surface ».
Elles traduisent sans doute un modèle additif du volume (décomposable en couches) ou un modèle géométrique (ensemble d'arêtes ou de surfaces).

Les élèves essaient de tenir compte des trois dimensions, mais ne se représentent par correctement la composition multiplicative de ces dimensions.

C) Rôle des domaines de référence, et de la complexité relative des questions

1°) Domaines de référence (différentes disciplines)

Dans une enquête faite en classe de 5ème par F. Pluvinage et C. Dupuis ([8]), chaque élève a été interrogé sur des problèmes de proportionnalité soit en physique, soit en géographie, et également en Mathématiques.
Les résultats montrent que des questions analogues obtiennent des résultats analogues d'une discipline à une autre. Et même, quand il y a une légère différence, ce serait plutôt en défaveur des mathématiques.

Il y a donc cohérence des résultats entre différentes disciplines.

2°) Complexité relative des questions

a) Différentes formes d'une même question

Cette même enquête a révélé des variations importantes de résultats pour différentes formes d'une même question :
Exemple :
A la question : résoudre $12 \times x = 36 \times 13$ on a 78 % de réussite mais à la question : résoudre $\frac{12 \times x}{36} = 13$, le taux de réussite tombe à 18 %.
Il semble que beaucoup d'élèves suivent pas à pas les opérations présentées par l'énoncé écrit, sans voir les simplifications possibles.

b) Difficultés cumulées

Cette enquête ainsi que les travaux de G. Vergnaud en classe de 6ème ([2]) montrente que l'addition de deux petites difficulutés peut être un difficulté considérable :

- le fait de devoir construire un résultat intermédiaire est une grande difficulté à ces niveaux (6ème - 5ème),

- les questions comportant un seul calcul sont relativement bien réussies, mais, si on demande en plus une comparaison des résultats, le taux de réussite chute,
- une question, insérée dans un problème "complexe", est nettement moins bien réussie que la même question, posée isolément.

D) Difficultés d'interprétation d'un Graphique

Une représentation graphique peut être un outil pour reconnaître une situation de proportionnalité. Mais elle peut aussi présenter un caractère opératoire immédiat (Détermination du point de croisement de 2 mobiles, de la formule la plus avantageuse pour le prix d'un taxi (avec prise en charge ou non), etc...).

La situation "les trains" proposée par A. Pouchier et Al. ([4]) à des élèves de 4ème tendrait à montrer que l'interprétation d'un graphique est un problème très difficile pour la grande majorité des élèves :

La représentation graphique et la relation fonctionnelle $d = f(t)$ ne sont pas mises en rapport : il y a confusion entre la trajectoire et la représentation du mouvement.
Un élément d'explication de ces difficultés pourrait être de dire que les graphiques* ne sont pas introduits assez tôt dans le cursus scolaire : un travail explicite sur les graphiques à l'école primaire permettrait peut-être une meilleure réussite des élèves dans le premier cycle, dans la mesure où le temps de familiarisation serait plus long. L'apprentissage se ferait ainsi dans la durée.*

Cette expérience de A. Rouchier et Al. montre en même temps que la notion de vitesse moyenne, pourtant manipulée implicitement, est une notion difficile. En effet, la vitesse est une grandeur quotient, pouvant se mesurer dans différentes unités quotients (km/heure mètre/seconde).
Son étude ne peut se restreindre au cadre numérique. Les aspects dimensionnels et graphiques doivent aussi être pris en compte.

---

* en interaction avec d'autres concepts (cf. [11]).

Partie II : Second cycle des lycées et Ecoles Normales.

Toutes les Recherches citées précédemment ont été faites dans le premier cycle du second degré, et plus particulièrement en sixième et cinquième.
Il y a peu de travaux concernant le second cycle, sans doute parce que la notion de proportionnalité est censée y être acquise.
Pourtant, la résolution de problèmes de pourcentages est source de grosses difficultés chez les élèves du second cycle.

En effet, l'enquête de P. Buisson ([7]) menée en particulier dans des classes de première, seconde et terminale montre que :

- Sauf en terminale C/D, le calcul d'un pourcentage d'augmentation est plutôt mal réussi.

- Dans des problèmes de composition de pourcentages, un bon quart des élèves du second cycle ajoute les pourcentages.

- Face à des questions plus difficiles (calcul d'une baisse des prix consécutive à une baisse du taux de la T.V.A.), il y a beaucoup de non-réponses, même en Terminale C.

Enfin, cette enquête montre que l'apprentissage de l'économie en Terminale B n'influe pas sur les résultats, qui sont plutôt plus faibles qu'en terminale C.

D'autre part dans cette enquête, une étude longitudinale des résultats (de la cinquième à la terminale) révèle deux discontinuités très nettes :

de la cinquième à la quatrième (les résultats de 4ème (resp$^{\underline{t}}$ de 2$^{\underline{nde}}$) sont meilleurs que ceux de 5ème (resp$^{\underline{t}}$ de 3ème), et de la troisième à la seconde.

L'auteur explique ce fait en disant que c'est en quatrième que les principales notions mathématiques (rapport, équation du premier degré) sont apprises pour la première fois.
On peut aussi proposer une explication sociologique à ces deux discontinuités : la fin de 5ème et la fin de 3ème sont des endroits où beaucoup d'élèves sortent du système éducatif pour aller vers des formations professionnelles courtes ou vers la vie active. Ce ne sont donc plus les mêmes populations que l'on compare et on peut ainsi expliquer que les résultats de 4ème soient nettement meilleurs que ceux de 5ème (de même que les résultats de 2$^{\underline{nde}}$ soient meilleurs que ceux de 3ème).

Une autre enquête (de F. Carayol [6]) en direction des élèves-instituteurs, montre les difficultés de ceux-ci face à des questions de mathématiques, et en particulier face à des problèmes de pourcentages.

Les élèves réussissent mal ces exercices : même en ne tenant compte que des exercices numériques, il y a seulement un tiers de résultats parfaitement exacts.
En particulier, la composition des pourcentages est très mal connue des Elèves-Instituteurs.

Mais le grand intérêt de cette étude est de montrer le comportement des Elèves-Instituteurs par rapport aux notations littérales :
L'introduction de lettres (implicite ou explicite) provoque une augmentation des blocages, des réponses non justifiées, et une diminution importante du taux de réponses justes (il peut tomber de 85 % à 20 %).

L'opposition se fait entre les exercices purement numériques et ceux où, de manière implicite ou explicite, interviennent des lettres.

Enfin, une Enquête de l'I.N.R.P. ([10]) montre que la notion de proportionnalité reste confuse, même pour des bacheliers amorçant leur formation à l'Ecole Normale.
En effet, pour les 4 question du test proposé :

1. La taille est-elle proportionnelle à l'âge ?
2. 12 est proportionnel à 4
3. 5 et 7 sont proportionnels à 20 et 28
4. 4,7,11 sont proportionnels à 12, 28, 33

} Vrai ou Faux ?

On note seulement 12 bonnes réponses sur 71.

En particulier :

18 sur 71 répondent oui à la première question, confondant sans doute les notions de proportionnalité et de croissance,

47 sur 71 répondent oui à la deuxième question alors qu'à la question "13 est-il proportionnel à 7 ?", ils répondent non.

Il y a sans doute confusion avec la notion de multiple.

III - L'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE.

A) Evolution de l'Enseignement de la Proportionnalité.

Si on reprend l'analyse de F. Pluvinage et C. Dupuis ([8]) il faudrait distinguer trois grandes périodes dans l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité à l'Ecole Elémentaire et au début du premier cycle.

1. Celle des "Mathématiques Traditonnelles" où les problèmes de proportionnalité se résolvent par une "règle de trois" : c'est une suite d'opérations présentée généralement sur trois lignes :

Exemple de problème :
"6 cm^3 d'un minerai homogène ont une masse de 25 g.
Quelle est la masse de 15 cm^3 de ce même minerai ?"

La solution était alors présentée ainsi :
Un volume de 6 cm^3 a une masse de 25 g.
Un volume de 1 cm^3 a une masse quinze fois plus grande : $\frac{25}{6} \times 15$ g
Un volume de 15 cm^3 a une masse six foix plus grande : $\frac{25}{6} \times 15$ g

Il n'y a pas vraiment apprentissage de la règle de trois, mais plutôt un "dressage".
Le "dressage" se caractérise par le respect de certains rites : solution présentée sur 3 lignes. Emploi de mots clefs "fois plus" - "fois moins".
Il se fait juste après l'apprentissage des opérations sur les nombres décimaux.

2. Celle des "Mathématiques Modernes"
Ce sont les structures qui sont importantes, notamment les structures numériques au détriment du rôle joué par les grandeurs.
Si on reprend le même problème, la solution s'énoncerait :

" la mesure g de la masse (en g) du minerai est une fonction linéaire de son volume (en cm^3) de mesure x
on a : $y = ax$
pour $x = 6$ $y = 25$ d'où $a = \frac{25}{6}$
donc pour $x = 15$ $y = \frac{25}{6} \times 15$

En fait, peu d'exercices de ce type sont proposés, sinon à titre d'application.

3. Celle des "Mathématiques Concrètes"
On définit des suites finies proportionnelles, le passage de l'une à l'autre se faisant par un opérateur multiplicatif.
La solution du même problème passe par la construction d'un tableau de proportionnalité :

6	25
15	x

A partir de là, plusieurs procédures sont possibles :

- Recherche d'un opérateur — interligne / intercolonne

- Former une équation en utilisant les produits en croix.

Les exercices proposés sont soit de type "traditionnel" , soit purement numériques.

B) Les programmes scolaires actuels : Quelles propositions de modification ? (par les auteurs des recherches)

1°) Analyse des programmes actuels.

Actuellement, l'apprentissage de la proportionnalité commence à l'Ecole Elémentaire (CM_1 et surtout CM_2) et se termine en cinquième.
Au cours Moyen, les programmes recommandent de mettre en évidence la proportionnalité et d'utiliser les propriétés de l'isomorphisme linéaire, sans formalisation, dans la résolution de problèmes (problèmes de pourcentages, de conversion, d'échelle ...)

En sixième, il est fait mention de "Suites finies proportionnelles - Calculs de pourcentages - Exercices de changement d'unité".
En cinquième, l'étude se fait en liaison avec les grandeurs (Volume - Masse volumique - Vitesse - Débit ...)

Dans les deux autres classes du premier cycle, la proportionnalité n'apparaît plus en tant que telle :

Pourtant, en quatrième, on propose d'étudier des exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré et en troisième, d'en faire une étude plus systématique et de travailler sur des "exemples variés de problèmes du premier degré".
Or les problèmes de pourcentages sont des exemples de problèmes du premier degré.
C'est également en troisième que l'on aborde les applications linéaires et affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et leurs représentations graphiques.

D'autre part, on peut remarquer qu'avec les nouveaux programmes de seconde, l'initiation à la statistique ne peut se faire qu'en s'appuyant sur le pourcentage.

Cette notion est alors considérée comme acquise.
En fait, on peut considérer, d'après les auteurs de [12] que les situations de proportionnalité apparaissent très tôt dans la scolarité des élèves : en effet, l'aspect élémentaire de la multiplication comme somme itérée fait déjà apparaître une propriété de l'isomorphisme :
Ils prennent deux exemples :

1) "Une mère de famille veut offrir 5 bonbons à chacun de ses 3 enfants. Combien de bonbons achètera-t-elle ?

2) J'achète 3 kg de pommes de terre à 5 F le kg. Combien vais-je payer ?"

Dans les deux cas l'écriture $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ est parfaitement adaptée.
Mais dans le 1er cas, il s'agit de grandeurs discrètes. Si on fait varier les données numériques, on peut utiliser une écriture analogue.
Par contre, dans le cas 2), si on fait varier les données, par exemple 3,275 kg et 5,80 F le kg, on ne peut plus réduire la multiplication à une suite d'additions (sans changer les unités).

Finalement, les programmes scolaires actuels consacrent une place au concept de proportionnalité, mais seulement jusqu'en cinquième, c'est-à-dire jusqu'à l'âge moyen de treize ans.

2°) Propositions de modification

Or, les Recherches de G. Vergnaud et Al. ([2]) ont montré que les élèves de sixième sont encore loin de maîtriser les structures multiplicatives élémentaires.
G. Vergnaud propose donc de prolonger, pendant une bonne partie du premier cycle secondaire, l'étude de ces structures, en prenant comme base les connaissances non négligeables des élèves.

a) Un exemple de "produit de mesures" : le Volume

D'autre part, les récentes recherches sur le Volume ([3]) ont montré la difficulté de ce concept :
En effet, le volume est à la fois une grandeur physique unidimensionnelle (qui se prête à des comparaisons, des mesures, des sommes) et une grandeur tridimensionnell (c'est une fonction trilinéaire de 3 variables).
C'est l'approche tridimensionnelle qui permet de donner leur sens le plus complet aux formules donnant les volumes usuels qui sont censées être connues et pratiquées en fin de cinquième.

Or d'après ces recherches, les propriétés de trilinéarité, qui justement ne sont guère analysées dans les manuels et dans l'enseignement actuel, sont d'une extrême difficulté pour les élèves du 1er cycle.
Les auteurs pensent donc qu'il ne faudrait pas réduire l'enseignement du volume à une application de formules, mais utiliser la richesse de ce concept à travers ses liens avec d'autres concepts (grandeurs, proportionnalité, fonctions de plusieurs variables ...).

b) Procédures.

Comme on l'a vu précédemment, les recherches de G. Vergnaud et Al. ([1]) semblent montrer que l'aspect isomorphisme est l'aspect le plus naturellement utilisé par les élèves lors de la résolution d'un problème de proportionnalité.
Or, il semble aux auteurs que les propriétés de l'Isomorphisme linéaire soient encore trop rarement mises en évidence et utilisées dans l'enseignement actuel.
Cela serait en particulier attesté par l'enquête de J. Julo ([5]) qui proposait à des classes de 6ème un questionnaire de reconnaissance de situations de proportionnalité.
Les résultats semblent indiquer que les propriétés de linéarité sont très peu utilisées par les élèves.

G. Vergnaud et Al. proposent donc de revoir l'enseignement de la proportionnalité au niveau élémentaire et premier cycle de façon à tenir compte des résultats de leurs recherches.

De plus, cet enseignement devrait utiliser la diversité des procédures de résolution d'un problème pour les confronter, les faire comparer, expliciter et pratiquer par les élèves.

c) Exemples.

A propos de son expérimentation didactique sur des contenus relatifs à la proportionnalité, A. Rouchier ([4]) souligne l'importance des situations - problèmes :
Il pense que c'est à travers la résolution de problèmes que l'élève manifeste sa maîtrise d'un concept. Le découpage entre Mathématiques et Applications des Mathématiques ne lui paraît pas forcément intéressant.
Il a donc choisi des situations - problèmes "riches", présentant à la fois des aspects numériques, dimensionnels et fonctionnels.
A partir de là, il a essayé de "créer les conditions d'un début de théorisation en respectant la richesse d'aspects des situations et des concepts".

Dans cette même recherche, il propose aussi de distinguer les différentes sortes de situations - problèmes où la proportionnalité intervient :

- Celles issues de "la vie quotidienne" où deux grandeurs sont proportionnelles : exemple : nombre d'objets et leur prix,

- La proportionnalité permet aussi de construire un modèle mathématique local d'un phénomène physique, biologique, etc ... : allongement d'un ressort, engrenages, ... Il se pose alors le problème de l'adéquation du modèle à la situation physique ou biologique ou ... : exemple : limites de l'élasticité du ressort, ...

- Enfin, elle intervient dans la construction de concepts :

  . produit de deux (ou plusieurs) grandeurs : Aire, Volume,

  . quotient de deux grandeurs : Vitesse moyenne, masse volumique, débit ..

Pour les auteurs, un problème de proportionnalité ne présente donc pas que des aspects strictement numériques ou fonctionnels. Les aspects dimensionnels, liés au rôle des grandeurs, ne sont pas moins importants.
De plus, il leur paraît difficile de séparer le concept de proportionnalité d'autres concepts : par exemple, ceux de fractions et de décimaux.

D'autre part, au cours de l'analyse des résultats de leur enquête, F. Pluvinage et C. Dupuis ([8]) posent le problème de la contrainte des énoncés écrits : ceux-ci apparaîtraient, pour beaucoup d'élèves, comme "des déterminants d'une suite rigide d'opérations". Ils préconisent alors des exercices de transformation d'énoncés, de confection d'énoncés qui pourraient être d'un grand intérêt dans l'enseignement.

C) Hétérogénéité des classes

Cette hétérogénéité a été mise en évidence, entre autres, dans l'enquête de F. Pluvinage et C. Dupuis où les résultats sont très variables d'une classe à l'autre.
En particulier, la différence entre la classe qui apparaît comme "nettement meilleure" et les autres correspond à un nombre important d'utilisations de tableaux de proportionnalité.
Cette liaison entre de bons résultats et l'utilisation d'un tableau de proportionnalité apparaît aussi dans l'enquête de J. Julo ([5]).

Ces résultats ont amené les auteurs à réfléchir sur le rôle des tableaux de proportionnalité. Le recours à ces tableaux est évidemment très lié à l'enseignement reçu.

F. Pluvinage et C. Dupuis pensent que ces tableaux peuvent constituer une aide efficace à la résolution de problèmes de proportionnalité dans la mesure où ce sont des Intermédiaires.

La résolution d'un problème se ferait alors en deux étapes :

1°) Reconnaissance d'une situation de proportionnalité. On pose

2°) Le tableau ne contient plus qu'une information numérique (indépendamment des grandeurs en jeu).

Résolution de ce problème numérique.

Bien sûr pour les auteurs, l'utilisation de ces tableaux ne doit pas être systématique; elle doit correspondre à une "compréhension du problème".
Il ne faudrait pas recréer un mécanisme identique à celui de la "règle de trois".

D) Rôle du "modèle" mathématique (J. Julo[5]).

Dans sa Thèse de psychologie J. Julo a essayé de voir dans quelles conditions les élèves avaient recours au "modèle" mathématique lors de la résolution de problèmes de proportionnalité.

Sa première conclusion est que la connaissance du "modèle" mathématique n'est pas une condition nécessaire pour résoudre le problème : en effet, certains élèves de 6e, n'ayant pas encore reçu d'enseignement de la proportionnalité réussissent tout de même.
On peut remarquer que ces élèves ont sans doute reçu un enseignement de la proportionnalité à l'Ecole Elémentaire, au cours moyen, et ont pu l'utiliser lors des épreuves.

Sa deuxième conclusion est que l'enseignement a un effet "non négligeable" sur la capacité des élèves à résoudre le problème (le taux de réussite passe de 49 % à 60 %). Mais cet effet n'est pas le même pour toutes les modalités du problème. Il est plus important pour les modalités qui incitent davantage à utiliser le modèle mathématique : par exemple, le changement dans l'ordre d'énumération de deux suites de nombres mesurant des grandeurs proportionnelles.

Enfin, la complexité du coefficient de proportionnalité est un facteur déterminant au niveau de la capacité à résoudre le problème : pour un coefficient fractionnaire, il y a supériorité très nette des élèves ayant compris le modèle mathématique.

Cela est beaucoup moins sensible pour les autres coefficients (entiers ou décimaux)
Finalement, les élèves auraient recours aux connaissances mathématiques seulement dans certains cas, lorsque les procédures "immédiatement" disponibles ne marchent pas.

Ce recours au modèle mathématique serait donc imposé par la difficulté du problème.

Partie II

Un exemple vécu avec des élèves de l'Ecole Primaire

Etant amenée à parler aux normaliens des problèmes posés par l'enseignement de la proportionnalité, il me semblait intéressant d'en avoir une connaissance non seulement livresque mais aussi vécue.
C'est la raison pour laquelle j'ai réalisé quelques séquences sur la proportionnalité dans une classe de CM_2 de l'école annexe.
Il ne s'agit pas du tout d'un modèle. Je disposais de peu de temps et je voulais simplement me rendre compte des difficultés rencontrées par les élèves au cours de l'apprentissage de la notion de proportionnalité. Au CM_1, les élèves n'ont pas travaillé la proportionnalité. Tout au plus ont-ils complété des tableaux "avec opérateurs" et réalisé quelques graphiques.
Mon intervention comporte 6 situations - problèmes (la dernière étant conçue comme une sorte de synthèse) et un post-test. Pour des raisons d'emploi du temps, il ne m'a pas toujours été possible de réaliser une séquence toutes les semaines. Certaines séquences ont donc été espacées de plus d'une semaine, ce qui a posé quelques problèmes (les élèves avaient oublié le contenu de la séance précédente). Il fallait du temps pour le leur rappeler).
C'est moi qui ai choisi les différentes situations. Mais le Maître de la classe a participé à l'organisation des séquences et à leur réalisation.

<u>1ère situation</u> : Il s'agit de déterminer le périmètre et l'aire d'un rectangle dont une dimension est fixée. Chaque élève a le choix de la seconde dimension. Les résultats de l'ensemble de la classe sont rassemblés dans 2 tableaux (voir Annexe 1).
Nous demandons aux élèves comment représenter les résultats d'une autre façon : certains proposent de faire un graphique. (Ils ont déjà fait des graphiques, notamment à propos de relevés de température).
La réalisation des graphiques pose de sérieux problèmes en particulier dans le cas de l'aire : en effet, il faut dans ce cas placer les points de 16 à 152 :

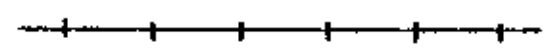
. Le choix de l'échelle pour la graduation de l'axe des ordonnées s'avère donc difficile. On ne peut pas prendre "1 carreau représente 1cm" comme pour l'axe des abscisses. (Dans le cas du périmètre, le choix de l'échelle pour les 2 axes est plus facile car on peut aussi prendre "1 carreau représente 1cm").*

*En fait, choizir une échelle, c'est déjà mettre en oeuvre la proportionnalité. Il y a donc là une sorte de cercle vicieux.

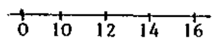
. Certains élèves marquent les points dans l'ordre où ils se présentent, sans tenir compte de la différence entre les nombres :
ex : 16, 24, 28, 32, 40, etc ... tous les 3 carreaux.

Dans ce cas, la notion de distance entre données est totalement absente; il y a seulement représentation de la succession des données par l'ordre spatial.

- Le problème de la régularité de l'échelle se rencontre aussi souvent : la graduation est correcte sauf pour quelques points :

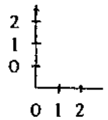
ex : 
30 32 36 38 40 42 etc ...

En particulier, il est très fréquent à l'origine : beaucoup d'enfants graduent ainsi leurs axes :

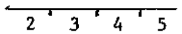

0 10 12 14 16 etc ... (La graduation est ensuite régulière).

- De façon générale, la coordination des origines des 2 axes pose problème : l'axe des abscisses est gradué à partir de 0 ; mais pour l'axe des ordonnées, faut-il, dans le cas de l'aire commencer à 10 ? ou à 16 ?

- Certains enfants ne font pas coïncider les 2 origines

ex : 

- Pour quelques graphiques, il semble que ce sont les espaces entre les points et non les points qui représentent les données :

ex : 

- Une fois les 2 axes gradués, il reste le problème de placer un point dans un intervalle :

ex : 

Où placer le point 128 ?

A la suite de la première séance, sur 22 élèves présents, seuls quatre ont choisi une bonne échelle pour la graduation de l'axe des ordonnées dans le cas de l'aire et une seule élève a terminé le graphique. Nous décidons donc de consacrer une deuxième séance à la construction de ces graphiques. A la fin de cette deuxième séance, 15 élèves (sur 19 présents) obtiennent des graphiques corrects; 2 autres ont terminé un seul graphique (celui de l'aire) et n'ont pas eu le temps de faire celui du périmètre. 2 autres n'obtiennent pas des points alignés :

Pour l'un, les graduations sont correctes, ce sont seulement les points qui sont mal placés dans le repère.

Pour l'autre, la graduation de l'axe des ordonnées dans le cas de l'aire n'est pas régulière :

$$\underbrace{0 \quad 8}_{\text{2 carreaux}} \quad 16 \quad \underbrace{24 \quad\quad 32}_{\text{3 carreaux}} \quad \text{etc ...}$$

A l'issue de ces deux séances, on peut dire que l'utilisation du cadre graphique dans l'apprentissage d'une notion suppose que les enfants aient préalablement appris un certain nombre de choses :

- Choisir une échelle convenable pour représenter des données sur un axe
- Représenter des données numériques sur un axe gradué
- Coordonner les graduations des 2 axes dans un repère cartésien (problème des 2 origines non confondus)
- Repérer un point dans un repère cartésien.

Dans le cas présent, les élèves de la classe avaient déjà fait quelques graphiques, mais cela s'est avéré insuffisant. Toutefois, les difficultés rencontrées n'ont pas été insurmontables puisque, à la fin des 2 séances, la grosse majorité des élèves a obtenu des graphiques corrects.

Une fois les graphiques construits, nous demandons aux élèves de les observer et de faire des remarques :

Certains élèves remarquent que les points sont alignés sur une droite, mais le fait que l'une des droites passe par l'origine et l'autre non ne semble pas les intriguer beaucoup. De plus, ils ne voient pas l'intérêt de joindre les points. D'ailleurs certains élèves conservent leurs graphiques en bâtons.

Le cas particulier du carré est évoqué par un élève qui remarque que personne n'a choisi 8cm comme mesure du 2e côté : la réponse de la classe est unanime : un carré n'est pas un rectangle ! Nous avons toutes les peines du monde à les convaincre du contraire et je ne crois pas que nous ayons vraiment réussi ...

3ème séance : Il s'agit de faire découvrir et utiliser les propriétés de la fonction linéaire :

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $f(\lambda x) = \lambda(x)$

(3) (combinaison de (1) et de (2) : $f(\lambda x+\lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$.

Consigne : On a dessiné un rectangle dont un des côtés mesure 35 cm (la mesure de l'autre côté étant toujours de 8cm). Quelle est l'aire de ce rectangle ? Quel est le périmètre de ce rectangle ? Compléter les 2 tableaux.

Tous les élèves trouvent les images de 35 par le calcul. Nous leur demandons alors de retrouver leurs résultats à partir de ceux rassemblés dans les tableaux :

La première proposition des élèves est : (pour l'aire)

$$\begin{array}{rr|rl} \times 10 & 3,5 & 28 & \times 10 \\ & 35 & 280 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|rl} \text{puis} \times 7 & 5 & 40 & \times 7 \\ & 35 & 280 & \end{array}$$

Nous demandons s'il y a d'autres cas où on pourrait utiliser cette façon de faire : les propositions des élèves fusent alors de toute la classe. La propriété $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ semble la plus spontanément utilisée par les élèves. Après avoir répertorié au tableau un certain nombre d'exemples parmi ceux proposés, je demande s'il s'agit toujours de la même propriété : A ce sujet, tout le monde n'est pas d'accord; une élève finit tout de même par dire "mais si, à chaque fois on multiplie par le même nombre". Cela montre la difficulté des élèves pour généraliser une propriété à partir de quelques exemples où elle est vérifiée.

Nous demandons si on ne pourrait pas utiliser les résultats du tableau (celui de l'aire) d'une autre façon pour en retrouver d'autres ou en trouver de nouveaux :

Au début, les exemples proposés sont toujours des conséquences de la propriété (2) : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Puis une élève propose

$$\begin{array}{rr|rl} & 10 & 80 & \\ \times 3 & 30 & 240 & \times 3 \\ + & 5 & 40 & + \\ & 35 & 280 & \end{array}$$

Je profite de cet exemple pour mettre en évidence la propriété (1)
D'autres exemples sont proposés par les élèves, faisant intervenir plus de 2 termes :

$$+\left(\begin{array}{c|c} 15{,}5 & 124 \\ 15{,}5 & 124 \\ 4 & 32 \\ 35 & 280 \end{array}\right)+ \quad \text{ou} \quad +\left(\begin{array}{c|c} 16 & 128 \\ 16 & 128 \\ 3 & 24 \\ 35 & 280 \end{array}\right)+$$

Un élève propose un exemple faisant intervenir la propriété des Ecarts Propor- proportionnels :

$$\begin{array}{r c|c l} \times 2 & 19 & 152 & \times 2 \\ & 38 & 304 & \\ -3 & & & -8\times 3 \\ & 35 & 280 & \end{array}$$

Finalement, la séance se termine par le calcul (dans le cas de l'Aire) de f(x) pour x = 13,5 ; 24 ; 29,5 etc.... La consigne étant d'utiliser, dans chaque cas, les propriétés qui viennent d'être mises en évidence.

Cette séance a montré la richesse des propositions des élèves : la recherche des propriétés de la fonction linéaire leur a semblé un jeu sur les nombres auquel ils se sont prêtés avec enthousiasme. Les exemples proposés témoignent de l'utilisation combinée de plusieurs propriétés. D'autre part, au cours de cette séance, la situation de départ (mesure de l'aire et du périmètre d'un rectangle dont une dimension est fixée) semble avoir été complètement oubliée : seul les aspects strictement numériques étaient en jeu.

<u>4ème séance</u> : Il s'agit de formuler dans le cas général les propriétés mises en évidence lors de la 3ème séance, puis de caractériser une situation de proportionnalité.

Les enfants ont l'habitude d'utiliser des lettres pour exprimer une propriété générale : nous n'avons donc pas trop de mal à faire traduire les propriétés par :

Propriété (1) : $$+\begin{array}{c|c} x & x' \\ y & y' \\ x+y & x'+y' \end{array}+$$

Propriété (2) : $$\times n \begin{array}{c|c} x & x' \\ n\times x & n\times x' \end{array} \times n \qquad \text{et : } n \begin{array}{c|c} n\times x & n\times x' \\ x & x' \end{array} : n \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$$

Nous demandons si ces propriétés sont vérifiées dans le cas du périmètre : c'est l'occasion de rappeler que pour montrer qu'une propriété n'est pas vérifiée, il suffit de donner un contre-exemple.

Dans le cas du périmètre, certains élèves remarquent que les écarts sont multipliés par 2.
Nous traduisons cela par :

Propriété (3) :
(cas du périmètre) $$+\,y \left(\begin{array}{c|c} x & x' \\ x+y & x+2y \end{array}\right) +(2\times y)$$

Après avoir vérifié que dans le cas de l'Aire, les écarts sont multipliés par 8, nous concluons que c'est la même propriété (les écarts sont toujours multipliés par le même nombre) qui est vérifiée dans les 2 cas (Périmètre et Aire).

Il nous reste à caractériser la proportionnalité à partir des 2 situations étudiées :

<u>Situation 1</u>

Etude de l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur d'un côté.

(La longueur de l'autre côté étant fixée : 8 cm)

1°) $a \xrightarrow{\times 8} 8a$

2°) Propriété (1) } sont
Propriété (2) } vérifiées

3°) Le graphique est une droite <u>passant par le point (0,0)</u> (Origine)

L'aire d'un rectangle est <u>proportionnelle</u> à la longueur d'un de ses côtés. (la longueur de l'autre étant fixée d'avance)

C'est un situation de proportionnalité

<u>Situation 2</u>

Etude du périmètre d'un rectangle en fonction de la longueur d'un côté.

1°) $a \rightarrow 2a + 16$

2°) Propriété (1) } ne sont pas
Propriété (2) } vérifiées.

3°) Le graphique est une droite <u>ne passant par par l'origine</u>

Le périmètre d'un rectangle n'est <u>pas proportionnel</u> à la longueur d'un de ses côtés.

Ce n'est pas un situation de proportionnalité

Cette caractérisation de la proportionnalité est faite par le Maître de la classe et moi-même. C'est une institutionnalisation des connaissances précédemment découvertes et utilisées par les enfants. Elle met en évidence 3 aspects de la proportionnalité : l'aspect fonction, l'aspect isomorphisme et l'aspect graphique.

2ème situation : Il s'agit de l'étude de l'aire, du périmètre et de la longueur de la diagonale d'un carré en fonction de la longueur du côté.

Consigne : - Dessiner un carré

- Calculer l'aire et le périmètre de ce carré.

(les mesures seront exprimées en cm^2 et cm).

- Mesurer (en cm) la longueur de la diagonale de ce carré.

Les résultats de l'ensemble de la classe sont rassemblés dans 3 tableaux (voir Annexe 2).

Remarques sur cette seconde situation

1 Comme la première, elle comporte à la fois exemple et contre-exemple. Mais, dans le cas du contre-exemple, les points ne sont plus alignés sur une droite. On a un exemple de non-proportionnalité différent du précédent.

2 Dans le cas de la diagonale du carré, le coefficient de proportionnalité est un nombre réel et non un entier naturel comme c'est le cas le plus souvent. D'autre part, dans cet exemple, les propriétés de linéarité peuvent être mobilisées pour faire des prévisions et compléter le tableau.

3 Le cadre graphique peut être utilisé pour déterminer s'il y a ou non proportionnalité (en particulier dans le cas de la diagonale). Dans le cas du périmètre et de l'aire, le cadre numérique peut être suffisant car les enfants connaissent bien les formules $a = x \times x$ et $p = 4 \times x$.

Déroulement de la 1ère séance :

- La construction des graphiques pose beaucoup moins de problèmes que lors de la première situation.
  On retrouve néanmoins quelques erreurs déjà observées :
  - Graduation non régulière : .... 30 32 36 38 .....
    +2 +4 +2
  - En particulier à l'origine : 0 8 16 24 32 etc...
    ou bien 0 10 12 14 16 18 etc...
  - Les 2 axes sont bien gradués, mais les points sont mal placés dans le repère cartésien.
- Nous nous heurtons de nouveau au problème : Pourquoi joindre les points ? Dans l'ensemble, les enfants sont plutôt réticents. Certains continuent à faire des graphiques en bâtons. Dans le cas de la parabole, ils joignent les points par

des segments de droite.

Il est vrai que c'est pour eux une anticipation puisqu'ils ne connaissent ni les nombres réels, ni la continuité sur R des fonctions $x \longrightarrow ax$ et $x \longrightarrow x^2$.

- L'observation des graphiques nous permet de reconnaître la proportionnalité dans le cas de diagonale et du périmètre, et la non proportionnalité dans le cas de l'aire.

- Pour préciser le statut des points intermédiaires (qui ne proviennent pas des tableaux), je leur propose plusieurs exercices :

1. Marquer un point sur un graphique (autre que ceux déjà marqués). Quelles sont ses coordonnées ?
2. Dans le cas de la diagonale, placer les points (5,5 , 3) et (8,5 , 18).
   Sont-ils sur la droite ?
   Qu'est-ce que cela signifie ?
3. Utilisation des graphiques : A l'aide des 3 graphiques, donner les images de $x = 11$ et de $x = 14$.
   Vérifier les résultats en utilisant une autre méthode (calculs pour aire et périmètre, mesure pour la diagonale)

Inversement : Toujours en utilisant les graphiques, donner les correspondants de 169 (Aire), 60 (Périmètre), 18,3 (Diagonale).

Vérifier les résultats en utilisant une autre méthode.

Ces exercices sont assez bien réussis : La recherche de l'abscisse d'un point connaissant son ordonnée semble plus complexe que l'inverse. De plus, dans le cas de $x = 14$, les enfants n'ont pas prolongé les courbes et sont revenus aux calculs ou à la mesure.

Il semble donc que le graphique ait un sens essentiellement pour les points marqués (ceux provenant de la traduction du tableau). Le statut des points intermédiaires est déjà plus vague. Quant à celui des points correspondant à un prolongement du graphique en dehors de l'intervalle d'étude, il est encore plus vague. L'idée de prolonger un graphique pour faire des prévisions ne semble pas venir spontanément aux enfants.

2ème séance : De nouveau, il s'agit

- d'utiliser les propriétés de la fonction linéaire
- de caractériser la proportionnalité.

Consigne : Prévoir la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté mesure $x = 36$ cm.

Trouver le périmètre et l'aire de ce carré.

Remarques : On ne peut pas dessiner sur une feuille un carré de côté 36 cm. La simple lecture du graphique ne suffit pas non plus. Il faut donc "se débrouiller" avec les résultats déjà trouvés pour prévoir la longueur de la diagonale.

Par contre, pour le périmètre et l'aire, on peut utiliser les formules connues : $a = x^2$ et $p = 4 \times x$.

Déroulement de la séance :

Comme pour la première situation, les enfants proposent différentes méthodes utilisant les propriétés 1) et 2) de la fonction linéaire ou une combinaison des 2.
Mais à la question "Pourquoi a-t-on le droit d'utiliser ces propriétés ?", beaucoup ne savent que répondre : ils ne se sont pas posé ce problème.
Seuls quelques enfants semblent comprendre que pour utiliser les propriétés de linéarité, il faut d'abord s'assurer qu'on est dans une situation de proportionnalité. (Dans le cas présent, on pouvait utiliser le graphique).
Par référence à la première situation, nous cherchons le coefficient de proportionnalité dans le cas de la diagonale : les quotients ne donnent pas tous le même nombre, mais les enfants admettent facilement qu'il existe un nombre a (a voisin de 1,4) tel que la "règle" associée au tableau de la diagonale soit

$$x \longrightarrow a \times x$$

- La recherche du périmètre et de l'aire ne pose pas de problèmes.
Les enfants observent que dans le cas de l'aire :

. Il n'y a pas proportionnalité (référence au graphique)

. On ne peut donc pas utiliser les propriétés 1) ou 2)

. Il n'y a pas de coefficient multiplicatif constant

. La "règle" associée est $x \longrightarrow x^2$.

Par contre, pour le périmètre :

. Il y a proportionnalité

. La "règle" associée est $x \longrightarrow 4 \times x$

. Les propriétés 1) et 2) sont vérifiées.

En ce qui concerne la propriété 3) (écarts proportionnels), nous faisons remarquer aux élèves qu'elle est vérifiée dans le cas du périmètre et de la diagonale, mais pas dans le cas de l'aire.

Il me reste à faire une synthèse :

Récapitulons :	Périmètre / Diagonale d'un carré	Aire d'un carré
1°) Parmi les 3 situations proposées quelles sont celles où les propriétés 1) et 2) sont vérifiées ?	Propriétés 1) et 2) vérifiées	non vérifiées
2°) Quelle est la "règle" associée à chaque tableau ? (Comment peut-on calculer le correspondant d'un nombre ?)	$x \xrightarrow{\times a} ax$ $x \xrightarrow{\times 4} 4x$ $x \xrightarrow{\times 1,4} 1,4x$ Chaque nombre est multiplié par un même coefficient	$x \longrightarrow x^2$
3°) Que donne la représentation graphique ?	Droite passant par (0,0) Il y a proportionnalité	pas une droite Il n'y a pas proportionnalité

<u>3ème situation</u> : Résolution de problèmes (voir annexe 3)

<u>Problème n°1</u> : Mon but était de voir laquelle des procédures était la plus utilisée par les enfants.

<u>1er cas</u> : il peut se représenter ainsi : $\begin{array}{c|c} 3 & 12 \\ 9 & ? \end{array}$

le rapport scalaire (9 : 3) semble aussi "facile" à calculer que le rapport fonction (12 : 3)

<u>2ème cas</u> : $\begin{array}{c|c} 3 & 12 \\ 7 & ? \end{array}$ Ici, le rapport fonction est plus "simple" que le rapport scalaire

<u>3ème cas</u> : (il a été rajouté par la suite)

$\begin{array}{c|c} 3 & 17 \\ 9 & ? \end{array}$ Ici, c'est le rapport scalaire qui est plus "simple" que le rapport fonction

Ce problème fait référence à la linéarité de l'aire par rapport à une des dimensions; cette situation avait fait l'objet d'une précédente étude (1ère situation).

<u>Problème n°2</u> :
Ce problème fait référence à la bilinéarité de l'aire du rectangle par rapport à ses dimensions (l'Aire est un exemple de "Produit de mesures"). Je voulais voir si l'étude faite au cours de la 1ère situation de proportionnalité proposée pouvait faciliter la compréhension de ce type de problème.

. <u>Pour le premier calcul du problème n°1</u>, on observe, sur 22 élèves présents :

- 12 procédures de type fonction,
- 5 procédures de type scalaire,
- 5 autres.

Il y a donc nettement plus de procédures de type fonction que de procédures de type scalaire. Les procédures "autres" consistent à multiplier 2 nombres pris dans les données du problème :

ex : 12 × 3 ; 12 × 9 ; 9 × 3

. <u>Pour le 2ème calcul</u>, ceux qui avaient utilisé la procédure de type fonction la réutilisent. Mais parmi ceux qui avaient utilisé la procédure de type scalaire, 2 changent de procédure (fonction) et les 3 autres écrivent :

" 7 : 3 = 2 reste 1
2 ×12 = 24
24 + 1 = 25 Avec 7m on peut couvrir 25 m2"

. <u>Pour le 3ème calcul</u>, ceux qui avaient utilisé la procédure fonction veulent la réutiliser de nouveau :
ils obtiennent :

soit $\begin{cases} 17 : 3 = 5{,}6 \\ 9 \times 5{,}6 = 50{,}4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 17 : 3 = 5 \text{ reste } 2 \\ (9 \times 5) + 2 = 47 \end{cases}$

Notre intervention est nécessaire pour les obliger à changer de procédure et à trouver le résultat exact.

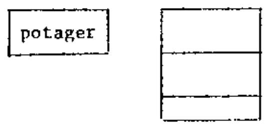
. Au cours de la résoltuion d'un problème, le changement de procédure ne va donc pas de soi; d'où l'utilité de proposer des exercices qui, de par le choix des valeurs numériques incitent à utiliser une procédure plutôt qu'une autre. On peut alors mettre en évidence les différentes procédures possibles et voir dans quels cas elles sont plus économiques.

<u>Problème n°2</u> :
La première réaction des enfants est que "le problème est impossible. On n'a pas les mesures du potager, ni de la pelouse..."
Cette réaction confirme un fait déjà observé : les élèves éprouvent beaucoup de difficultés à raisonner directement sur les rapports.
D'ailleurs, certains enfants essaient de prendre des exemples.
Pour les aider, je leur propose de faire un dessin. A la fin de la 1ère séance, seuls 3 élèves ont terminé l'exercice.
Nous décidons donc de consacrer une 2ème séance à ce problème.
Les enfants ont beaucoup de difficultés pour dessiner un rectangle 2 fois plus long et 3 fois plus large qu'un rectangle donné. Ils confondent "2 fois plus" et "ajouter 2"

<u>exemple</u> : Je trace le segment
Je demande à un enfant de tracer un segment 2 fois plus long :

+ 2

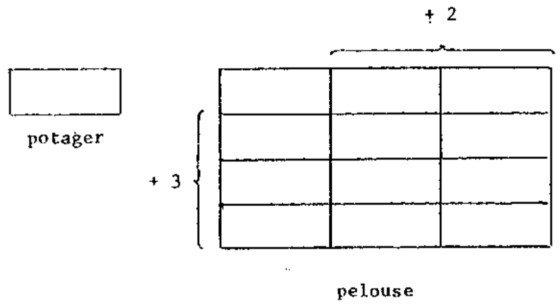
Il interprète comme "ajouter 2 segments de même longueur"
Pour les dessins, on obtient



"la pelouse est 1,5 fois plus grande que le potager"

pelouse

ou bien



Après de multiples interventions de notre part, nous obtenons finalement, à la fin des deux séances :

pour la question a) 17 bonnes réponses (sur 22 élèves présents)

b) 12 " "

c) 7

Trois élèves n'ont encore rien trouvé à la fin de ces deux séances et ont à peine ébauché un dessin. Par contre, il faut signaler le cas d'un élève (Julien) qui fait les calculs dans le cas général, en utilisant des notations littérales.

Ce problème montre la difficulté des propriétés de bilinéarité de l'aire pour des élèves de CM_2. Des résultats justes n'ont été obtenus que grâce à notre aide soutenue.
La réalisation des dessins a montré la prépondérance du modèle additif sur le modèle multiplicatif (confusion entre "2 fois plus" et "ajouter 2"). L'ambiguïté de l'expression "2 fois plus" peut expliquer cette confusion.
D'autre part, la situation de proportionnalité étudiée précédemment (étude des variations de l'aire d'un rectangle en fonction de l'une des dimensions, l'autre restant fixe) n'a été d'aucun secours pour les enfants. Ils n'ont pas vu de relations entre ces deux situations.

<u>4ème situation</u> : Représentation d'un parcours avec un obstacle à sauter (Situation de communication)

Les élèves ont déjà fait, en éducation physique, une course à pied en ligne droite
On leur demande de représenter sur une feuille le parcours par un segment de droite de la longueur de leur choix.
Dans la réalité, la longueur réelle du parcours sera de 50m.
Sur ce parcours, à un endroit donné, il y a un obstacle à sauter.
Chaque élève est à la fois émetteur et récepteur :

<u>En tant qu'émetteur</u> :
Chacun choisit la place de l'obstacle sur sa représentation.
Puis il envoie un message au récepteur pour que celui-ci place l'obstacle sur sa représentation au même endroit que celui choisi par l'émetteur : autrement dit, dans la réalité, l'endroit choisi par l'émetteur doit être le même que celui placé par le récepteur.
Le message ne doit pas comporter de dessin.

<u>En tant que récepteur</u> :
Compte-tenu du message reçu, chacun doit placer l'obstacle sur sa représentation de façon que, dans la réalité, il soit au même endroit que celui choisi par l'émetteur.

<u>1ère séance</u> :

La première version des messages est beaucoup trop imprécise pour permettre une communication entre élèves :

<u>ex</u> :"tu comptes 11 carreaux et l'obstacle est là"

- le plus souvent : la longueur de la représentation choisie est indiquée ainsi que la distance de l'obstacle à une extrémité du segment, mais on ne sait pas laquelle :

  <u>ex</u> :"la barrière sera placée au quart de ton parcours"
  "mettre l'obstacle au quart de 24cm"
  "sur ton parcours, calcule son échelle et place l'obstacle à 5cm d'un bord. J'ai un parcours de 20cm"
  "repère le milieu de ton segment. Fais une petite marque. Marque ensuite une autre petite marque qui départagerait également le bord du segment à la 1ère petite marque".

- Sur certains messages, la longueur de la représentation choisie n'est pas indiquée :

ex : "tu pars du départ. Sur ton segment, tu vas à l'arrivée mais tu enlèves 2cm".

- Certains élèves se repèrent par rapport au mur ou à la fenêtre :

  ex : "j'ai un parcours de 10cm. Je place mon obstacle à 8cm en partant du bord qui est vers la fenêtre"
  "j'ai pris 10cm. L'obstacle est à 5cm du bord de la fenêtre. L'obstacle est à 1cm du bord du mur"

- Certains indiquent une suite d'opérations à effectuer :

  ex : Echelle : 20cm - Avancer de 10cm - Reculer de 7cm
  Avance de 10cm".
  "Mon échelle est de 21cm. En partant du départ, repère son milieu et multiplie le par 2 et divise le par quatre".

- Quelques rares élèves retournent à la vrai grandeur :

  ex : "Sur 40m, il est à 45m"

- Les autres messages font référence au milieu.

  ex : "Mets l'obstacle au milieu du parcours"
  Le milieu peut être pris comme point de repère :
  ex : "Mon échelle est de 10cm. Repère le milieu de ton segment. Mon Obstacle est à 1cm du milieu du parcours et à 4cm de l'arrivée"

Conduites observées :

Sauf dans le cas du milieu qui ne pose pas de problèmes dans tous les autres cas, la proportionnalité ne fonctionne pas : les élèves se contentent de reporter le point indiquant la position de l'obstacle (du moins quand le message est assez précis pour cela) sans se soucier du fait que les deux représentations choisies par l'émetteur et le récepteur n'ont pas même longueur. Cela pose d'ailleurs problème puisque, dans certains cas, le récepteur obtient un point en dehors de sa représentation :

Certains élèves concluent alors que c'est impossible.
D'autres modifient le message de l'émetteur pour obtenir un point qui soit effectivement sur le segment choisi.

La situation semble bloquée.
Le maître intervient pour montrer qu'il ne suffit pas de reporter :

a) D ——x—— A
obstacle

b) D ——x———————————— A
obstacle

Dans le cas b) , l'obstacle est beaucoup plus proche du départ que dans le cas a) . a) et b) ne peuvent donc pas représenter la même situation réelle. Certains enfants semblent entrevoir le problème posé.

2ème séance : On se met d'accord sur ce que doivent contenir les messages :

- la longueur de la représentation choisie
- la distance de l'obstacle au point de départ.

Dans leur deuxième version, tous les messages ne sont pas de cette forme, mais la plupart sont utilisables.
Certains sont encore vagues : "Compte 40 carreaux puis arrête en 7".
D'autres se repèrent par rapport au milieu :

"à 1cm du milieu du parcours"

"2cm de plus que la moitié"

D'autres font référence à la vraie grandeur :

"Je place l'obstacle à 15m".

Conduites observées : Suite à l'intervention du maître lors de la séance précédente, certains enfants proposent des raisonnements faisant intervenir la proportionnalité :

ex :

Longueur de la représentation (cm)	Distance de l'obstacle au départ (cm)
10	4
18	x

18 : 10 = 1,8 donc x = 4 × 1,8 = 7,2

Dans ce cas, c'est la procédure du type scalaire qui est employée.

- Le modèle additif persiste chez certains élèves :

Emetteur :	10	8
Récepteur :	13	x

13 = 10 + 3 donc x = 8 + 3 = 11.

Je propose alors à ces élèves de faire le même raisonnement à partir de l'arrivée :

Emetteur : l'obstacle est à 2cm de l'arrivée
Récepteur : ——————— 2+3cm ———————
5

Les deux raisonnements ne donnent pas le même point...

- Une seule élève essaie de repasser par la vraie grandeur. (Cas g Virginie)

Finalement, à la fin de la séance, beaucoup d'élèves ont un résultat juste. Il semble que l'organisation des données sous forme de tableau les ait beaucoup aidé. En effet, ils ont retrouvé une disposition déjà vue lors de l'étude des précédentes situations. Ils ont alors réutilisé les procédures "associées" à cette disposition sous forme de tableau :
recherche de l'opérateur inter-lignes (type scalaire) ou
recherche de l'opérateur inter-colonnes (type fonction).

Mais il est manifeste qu'une certain nombre d'élèves ont fait les calculs mécaniquement, sans faire véritablement un lien avec la signification du problème. Le recours au tableau ne garde de la situation que les aspects strictement numériques. Il reste ensuite à comprendre, à l'intérieur de la situation, la signification des résultats numériques trouvés.

3ème séance : Il s'agit de :
- récapituler les différents résultats trouvés,
- faire expliciter par les enfants les procédures utilisées,
- corriger les erreurs et résoudre ensemble, si nécessaire, les cas encore sans solution.

Les différents cas sont répertoriés dans l'Annexe 4.

- Cas où le rapport scalaire est un entier naturel : (a , b , d , m , q) : ils sont résolus correctement (sauf a) en utilisant une procédure de type scalaire;
- Cas où le rapport scalaire est un nombre décimal : (h , j , k , ℓ_2 , r , ℓ_1 , n , s) : Ils sont aussi résolus correctement, sauf ℓ_1 (pour lequel il n'y a pas de réponse) et s .

Dans le cas s , le raisonnement est néanmoins juste :
l'élève calcule "25 : 13 = 1,923... puis 5 : 1,923 = 2,6001"
Dans tous les cas, les élèves emploient la procédure de type scalaire. On peut remarquer que dans les cas j et ℓ_2 , il était plus "facile" de calculer le rapport fonction (:4 pour j et :2 pour ℓ_2).

- Cas où le rapport scalaire est un nombre rationnel non décimal

. Cas où l'inverse de ce rapport est décimal : (C1 , C2 , i , o , g , p)
La procédure utilisée est toujours la procédure de type scalaire alors que, dans le cas p , le rapport fonction est bien plus simple : 1/2
Dans le cas o , l'élève n'obtient qu'une valeur approchée :
" 13 : 8 = 1,625 et 9 : 1,625 = 5,5384615 "

Dans le cas i , le raisonnement est juste : l'élève calcule
" 10 : 14 = 0,714 et 5 × 0, 714 = 3,57 "
D'ailleurs, il semble conscient que ce n'est qu'un ordre de grandeur puisqu'il écrit : "son obstacle (sur ma ligne) est à 3,6cm du départ".

Dans les cas C1 , C2 , g les résultats sont faux pour C1 et C2 , les élèves font des calculs avec les données numériques :
ex : pour C2 : " 18 : 10 = 1,8 ; 10 : 4 = 2,5 ; 2,5 + 1,8 = 4,3 "

Dans le cas g , il y a retour à la vraie grandeur :
" 20 : 50 = 0,4
1m en réalité égale 0,4cm sur le dessin
13 : 50 = 0,26
1m sur 50 m = 0,26cm sur 13cm "
Ensuite il y a hésitation entre 4,5 × 0,26 ou 4,5 : 0,26 ?

. Cas où l'inverse de ce rapport n'est pas décimal : f
L'élève calcule

$$\frac{19}{11} = 1,72 \ldots \text{ puis } 1,72 \times 4 = 6,88 \ldots$$

Finalement, on compte 12 bonnes réponses (sur 20) donnant un résultat correct.

Dans les cas i et s , le raisonnement est juste, mais le résultat n'est qu'approché.
On peut remarquer que c'est toujours la procédure scalaire qui a été utilisée, même dans les cas où la procédure fonction semblait "plus simple".

D'autre part, on n'observe qu'un seul retour à la vraie grandeur pour résoudre le problème posé.

A la fin de cette séance, un élève remarque que "c'est comme des fractions" puisque on peut écrire :

(cas b) : $\frac{21}{7} = \frac{7,5}{2,5}$

de même pour C1 : $\frac{21}{3} = \frac{2,5}{x}$ $x = \frac{2,5}{7}$ serait le résultat exact.
$x = 0,35 \ldots$ est une valeur approchée

Nous nous servons de cette remarque pour résoudre ensemble le cas f : le rapport scalaire peut être écrit sous forme de fraction : 11/19.

$$\times \frac{11}{19} \quad \begin{array}{c|c} 19 & 4 \\ 11 & x \end{array} \quad \times \frac{11}{19} \qquad \text{on a donc : } x = 4 \times \frac{11}{19}$$

$$\text{ou encore : } x = \frac{4 \times 11}{19} = \frac{44}{19}$$

Les enfants découvrent alors une nouvelle procédure, celle des "produits en croix" :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ c & x \end{array} \qquad x = \frac{b \times c}{a}$$

– Remarque : Dans le chapitre II, cette procédure a été notée R T .

4ème séance : Il s'agit de retrouver les résultats de la séance précédente avec un passage obligé par la vraie grandeur. Une seule élève avait procédé ainsi lors de la 3ème séance. Toute la classe travaille sur le cas a .
Le passage à la vraie grandeur pose des problèmes aux élèves. L'aide du maître s'avère nécessaire; d'ailleurs, il suffit parfois de disposer les données en tableau pour débloquer la situation. Finalement, 13 enfants (sur 22) réussissent à retrouver le résultat. Parmi les procédures employées, c'est la procédure "règle de trois", vue lors de la séance précédente, qui est la plus fréquente. Elle se double quelquefois d'une procédure scalaire ou d'une procédure fonction.
Parmi ceux qui ne réussissent pas à retrouver le résultat, on peut distinguer :

– Ceux qui ne font qu'un seul calcul (passage de la 1ère représentation à la vraie grandeur).

Exemple de Jean-Marc :

$$\times \quad \begin{array}{c|c} 3 & 0{,}75 \\ 5000 & 1250 \\ 18 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{" } (5000 : 3) \times 0{,}75 \\ (5000 \times 0{,}75) : 3 \\ 5000 \times (0{,}75 : 3) \text{ "} \end{array}$$

– Ceux qui font un raisonnement juste, mais prennent une valeur approchée pour les rapports non décimaux :

Exemple de Jérôme :

5000 : 3 = 1666,6 ; 1666,6 × 0,75 = 1249,95

– Ceux qui font des calculs (multiplication ou division) un peu au hasard. Il n'est pas toujours facile de savoir si l'enfant a compris ou non ce qu'il a fait :

Exemple de Eric :

"(5000 × 18) : 1250 = 72
72 : 4 = 18
18 : 4 = 4,5
(1250 avait été trouvé comme (5000 × 0,75) : 3).

Dans l'ensemble, les élèves ont fait des calculs sans être toujours capables de leur donner une signification. La disposition des données en tableau les a incité à faire certains calculs (calcul du rapport scalaire, du rapport fonction, procédure "règle de trois"), mais il n'est pas sûr qu'ils sachent donner un sens (par rapport à la situation de départ) aux résultats trouvés. L'utilisation d'un tableau a donc induit certains mécanismes (qui, dans la majorité des cas, ont conduit à des résultats justes) mais il reste le problème du retour à la situation initiale et de la compréhension, dans le cadre de cette situation, des résultats trouvés.

5ème situation : La Recette du Pain d'Epices

" Les proportions pour 6 personnes sont :

- 250g de miel
- 50g de sucre
- 250g de farine
- 1/2 verre de lait
- 1 paquet de levure

Quelles seraient les proportions pour 9, 12, 10, 15 , 18, 4, 8, 5, 25, 13, 33 personnes ? ".

Remarque : C'est une situation faisant intervenir les aspects scalaires de la proportionnalité. Mon objectif était de voir si ces aspects étaient utilisés par les enfants.

Tous les élèves, sauf trois, utilisent, au moins dans les cas simples, une procédure de type scalaire.
(J'entends par cas simples les cas où le rapport scalaire est 2, 3 ou 1/2).
Dans les autres cas : 5 élèves changent de procédure et utilisent la procédure fonction.

– 2 élèves font systématiquement le quotient scalaire par 6.

– Les autres élèves utilisent des décompositions de type scalaire et se resservent des résultats déjà trouvés :

Exemples : $9 = 6 + 3$

$15 = 18 - 3$ ou $15 = 9 + 6$

$5 = 15 : 3$

$33 = 2 \times 15 + 3$ ou $33 = 6 \times 6 - 3$

$25 = 5 \times 5$

On peut donc conclure que, dans l'ensemble, les élèves utilisent les aspects scalaires de la proportionnalité.

Les erreurs observées sont :

- des erreurs de calcul
- des erreurs dues à l'utilisation de valeurs approchées dans le cas de quotients non décimaux (division par 6 par exemple).
- une erreur qui consiste à calculer les proportions pour x en multipliant par x les proportions pour 6 personnes.
- une erreur due à la prédominance du modèle additif : $13 \xrightarrow{+\ 20} 33$

miel (g) $540{,}8 \xrightarrow{+\ 20} 560{,}8$.

6ème situation : Il s'agit de faire une synthèse sur la notion de proportionnalité :

Les élèves sont par groupes - chaque groupe reçoit 4 tableaux à compléter (voir Annexe 5).

Consigne 1 : Compléter les tableaux "comme ils ont été commencés"

La mise en commun des procédures utilisées permet, entre autres, de mettre en évidence les propriétés de linéarité associées à certains tableaux.

Consigne 2 : - Classer l'ensemble des tableaux en 2 classes : ceux qui vérifient les propriétés de linéarité et les autres.

- Chercher la règle associée à chaque tableau.

Le classement fait apparaître que seules les fonctions

$x \longrightarrow x \times a$ ($a \in \mathbb{N}$ ou $a \in D$ ou $a \in \mathbb{Q}$) vérifient les propriétés de linéarité.

Consigne 3 : Représenter graphiquement chacune des fonctions associées aux tableaux.

Cela permet d'observer que :

- Pour les fonctions vérifiant les propriétés de linéarité et pour elles seules, les points sont alignés sur une droite passant par l'origine.
- Pour les fonctions $x \longrightarrow x \times a + b$ $(b \neq 0)$ les points sont alignés sur une droite ne passant pas par l'origine.

- Dans les autres cas, les points ne sont pas alignés

Au cours de cette séance, les termes de "tableau de proportionnalité" et de "liste de nombres proportionnels" sont utilisés.

7°) Post-Test : Pour essayer d'évaluer ce que je venais de faire, j'ai proposé un questionnaire de contrôle (voir Annexe 6). Ce post-test reprend des questions du pré-test proposé aux normaliens.

La question 1 devait permettre de déceler deux confusions possibles :

- celle avec la propriété des écarts constants
- celle avec l'existence d'un opérateur additif :

$x \longrightarrow x + 2$.

La question 2 devait permettre de déceler :

- la confusion avec la propriété des écarts proportionnels (ici, les écarts sont multipliés par 2).
- la confusion avec la fonction affine $x \longrightarrow 2x + 2$

Pour la question 3 , il serait intéressant de voir quelles procédures sont utilisées par les enfants pour compléter le tableau :

La question 4 fait intervenir une fonction affine avec sa représentation graphique. Là aussi, il serait intéressant de voir si les enfants utilisent le graphique pour répondre à la deuxième question ou s'ils reviennent aux calculs.

La question 5 est un problème d'échelle; les valeurs numériques sont telles que les rapports scalaires sont plus "simples" que le rapport fonction.

La question 6 concerne la traduction graphique de la proportionnalité; le premier graphique propose une fonction croissante.

Pour 7 , il n'y a pas proportionnalité puisque la taille n'est pas proportionnelle à l'âge. Il est intéressant de voir si les enfants reviennent au sens de la situation.

Les questions 8 , 9 , 10 devaient permettre de mettre en évidence les différents types de conception de la proportionnalité chez les élèves.

J'ai donc fait passer ce post-test aux 21 élèves de la classe.

L'évaluation des questions est faite selon les mêmes principes que pour le questionnaire destiné aux normaliens : il y a deux types de réponse :

- Une réponse de reconnaissance (ou non) de la proportionnalité évaluée à 0, 1 ou 2 :

    Bonne réponse bien justifiée : 2

    Bonne réponse mal justifiée ou non justifiée : 1

    Mauvaise réponse : 0

    Ne sais pas : 0

    Non réponse : 0

- Une réponse faisant intervenir un calcul évalué à 0, 1 ou 2 :

    Tous les calculs justes : 2

    Calculs inachevés, avec au moins un résultat juste : 1

    Calculs faux / Non réponse : 0

Chaque copie peut ainsi être notée sur 28.

I - <u>Analyse des résultats question par question</u> :

<u>Question 1</u> :

On note 14 bonnes réponses bien justifiées, 4 bonnes réponses mal justifiées et 3 mauvaises réponses. Cette question est donc plutôt bien réussie.
La justification la plus fréquente consiste à dire que l'opérateur est additif (+ 2) et non multiplicatif. La formulation est quelquefois un peu vague :

"elles ne sont pas proportionnelles car elles ne sont pas multiplicatives"

"Ce n'est pas proportionnel car on rajoute, on ne multiplie pas"

On peut noter que pour deux élèves, cette justification est associée à la réponse "oui". Il y a alors confusion entre proportionnalité et existence d'un opérateur additif.
Deux élèves remarquent que les écarts sont constants.

<u>Question 2</u> :

Bonne réponse, bien justifiée : 9
———— mal ———— : 9
Mauvaise réponse : 3
Cette question est donc assez bien réussie.
Quatre élèves donnent explicitement la règle : $x \longrightarrow 2 \times x + 2$
Les autres constatent que le rapport n'est pas constant ou que "on multiplie et on ajoute".
Plusieurs élèves calculent le rapport 8 : 3 mais s'arrêtent là.

<u>Question 3</u> :

a) <u>Question de reconnaissance</u> :
Seulement six élèves répondent oui. Les autres soit ne savent pas, soit ne répondent pas.
Une élève répond "non" "parce qu'on ne multiplie pas".
Ceux qui répondent "oui" justifient en disant "c'est multiplicatif" ou "on peut multiplier". Une seule élève donne une valeur exacte pour le rapport fonction.
Les autres ne justifient pas leur réponse.

b) <u>Calculs</u> :

Note	0	1	2	Non réponse
Effectifs	5	7	2	7

(Je distingue : calcul faux : 0 et non réponse)

Deux élèves seulement réussissent les quatre calculs demandés. Beaucoup ne répondent pas ou font seulement un ou deux calculs.

- Parmi les procédures utilisées, on trouve :

. la procédure de type scalaire : c'est la seule qui conduise à une réussite. Aucun élève n'utilise la procédure fonction. Cela peut s'expliquer par la "complexité" du rapport fonction (21/8).
On peut remarquer que, dans les deux cas de réussite, l'image de 22 est aussi calculée en utilisant la procédure scalaire. On peut expliquer cela par une certaine résistance à changer de procédure. Dans les cas précédents, le rapport scalaire était entier; il est maintenant décimal, mais c'est la même procédure qui continue d'être utilisée.
Il faut noter tout de même qu'une élève calcule le rapport fonction mais elle ne fait pas les calculs pour compléter le tableau.

. les procédures d'échec sont celles faisant intervenir la propriété des écarts constants ou des écarts proportionnels :

- Ecarts proportionnels : $+ 8 \begin{array}{c|c} x & y \\ x+8 & y+21 \end{array} + 21$

Pour compléter le tableau, les élèves ajoutent systématiquement 21 sans tenir compte des écarts entre les nombres de la 1ère colonne.

- Ecarts constants : $+ 40 \begin{array}{c|c} 96 & . \\ 136 & . \end{array} + 40$

ou bien $\begin{array}{c} \times 2 \\ + 8 \end{array} \begin{array}{c|c} 16 & 42 \\ 40 & . \end{array} \times 2 + 8$

En conclusion, on peut dire :

- Les élèves ont eu du mal à reconnaître la proportionnalité et surtout à la justifier.

- Beaucoup ont été rebutés par les calculs.

- Il n'y a pas eu d'utilisation de la procédure fonction sauf, dans un cas, le calcul du rapport fonction.

Question 4 :

a) Question de reonnaissance :
18 élèves sur 21 reconnaissent qu'il n'y a pas proportionnalité. La justification utilisée est soit que "la courbe ne passe pas par 0", soit que "la droite ne passe pas par 0.

b) Calculs :
Pour le 1er calcul, il y a 12 bonne réponses évaluées à 2 et 6 réponses donnant une valeur approchée évaluées à 1.
Les enfants n'explicitent pas clairement leurs procédures. Il semble que beaucoup ne soient aidés du graphique, en particulier ceux donnant une valeur approchée.
Le 2ème calcul est nettement moins bien réussi : seulement 10 réponses donnant une valeur exacte ou approchée. Là aussi, certains enfants se sont aidés du graphique.

Question 5 :

1er calcul

Note	0	1	2	Non réponse
Effectifs	5		7	9

Ce calcul n'est pas bien réussi.
Il y a beaucoup de non réponse.

Ceux qui réussissent utilisent la procédure scalaire. Ici, le rapport scalaire est effectivement "plus simple" que le rapport fonction.
Les échecs sont dus :
- au calcul du produit 12×7
- à l'utilisation de l'opérateur additif + 3 .

2ème calcul

Note	0	1	2	Non réponse
Effectifs	7		5	9

Ce calcul est encore moins bien réussi que le premier.

Là aussi, ceux qui réussissent utilisent la procédure scalaire.
Les échecs sont dus :
- au calcul de 28×7
- au calcul de $28 : 4 = 7$ puis $7 \times 7 = 49$.
- à l'utilisation de l'opérateur - 3 .

Cette question, qui concerne une problème d'échelle, n'est donc pas bien réussie. Pourtant, une des situations proposées (représentation d'une course avec obstacle) était du même type. On peut peut-être voir là les difficultés des élèves à utiliser et à structurer les données contenues dans un énoncé de problème.

Question 6 :

1er graphique : Tous les enfants répondent "non" sauf un qui ne répond pas.
Il y a 3 types de justification :

- les points ne sont pas sur une droite passant par 0 (8 fois)
- les points ne sont pas sur une droite (6 fois)
- les points sont sur une courbe qui ne passe pas par O.

2ème graphique : Tout le monde répond "oui" sauf un qui ne répond pas (le même)
Là aussi, les justifications sont de 3 types :

- les points sont sur une droite passant par 0 (16 fois)
- les points sont sur une droite
- les points sont sur une courbe passant par O.

Les enfants semblent donc bien connaître la traduction graphique de la notion de proportionnalité. Cela vient confirmer les résultats de la question 4 . Néanmoins, pour quelques enfants, il n'est pas encore clair que les deux conditions "sur une droite" et "passant par O" doivent être réunies.

Question 7 :

La majorité des enfants trouve 2,40m. Bien que, lors du passage du questionnaire, certains enfants disent tout bas que c'est impossible, ils n'osent pas l'écrire. Certains se débrouillent d'ailleurs pour donner un résultat acceptable :

ex : 16 : 1,2 = 1,43   1,2 × 1,5 = 1,80

Ce type de problème "piège" indique la difficulté des enfants à avoir un regard critique sur ce qui leur est demandé. Traditionnellement, les problèmes proposés par le maître se résolvent en combinant les données à l'aide des 4 opérations. C'est ainsi que l'on trouve le résultat à la question posée. Toute question a effectivement une réponse que l'on peut calculer à l'aide de données.
Ici, les enfants ont voulu donner une réponse, quitte à modifier les données ou à faire d'autres calculs de façon à obtenir un résultat compatible avec la réalité.

Question 8 :

On compte 11 bonnes réponses. Les erreurs sont les mêmes que celles observées chez les normaliens :

1. Ecarts constants
2. Rapports scalaires égaux pour une même suite :

ex : (4, 8, 16, 32, 64) $(x_{i+1} = 2\ x_i)$

(5, 20, 80, 320, 1280) $(y_{i+1} = 4\ x_i)$

3. Ecarts proportionnels

ex : (5, 10, 15, 20, 25) $(x_{i+1} = x_i + 5)$

(2, 4, 6, 8, 10) $(x_{i+1} = x_i + 2)$

4. (x_i) et (y_i) avec $y_i = x_i^2$ (la fonction $x \rightarrow x^2$ avait été étudiée dans une situation précédente).

Comme pour les normaliens, on peut se demander si, pour certains enfants, le mot proportionnel ne s'applique pas qu'à une seule liste. (cas 2 et 3).

Question 9 :

Toutes les réponses sont bonnes. Il y a 2 non-réponses. On peut remarquer que certains enfants construisent 2 listes de nombres non proportionnelles en utilisant un opérateur additif.

Question 10 :

Près de la moitié de la classe (10 élèves sur 21) ne répond pas à cette question. On peut trouver plusieurs raisons à cela :

- C'est la dernière question.

- Les élèves, surtout à l'école primaire, ont beaucoup de mal à formuler les choses. Ils peuvent être capables de reconnaître la proportionnalité dans un problème, de faire des calculs justes, sans pouvoir formuler les choses de façon précise. D'ailleurs cette formulation générale nécessite l'utilisation de notations littérales, peu connues des élèves de CM_2.

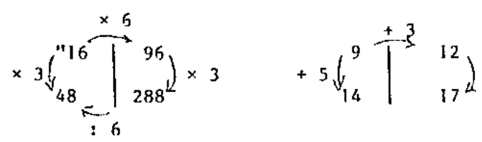
Parmi ceux qui répondent, 9 (sur 11 en tout) utilisent un argument graphique : "Sur un graphique, les points sont alignés sur une droite passant par O".
Le plus souvent, c'est le seul argument donné.
Pour 5 élèves, il y a en plus l'idée "qu'il faut multiplier" :

"Il faut que ce soit multiplicatif"
"Il faut que les nombres se plutiplient"

Une élève précise : "pas de +, −, x^2 ..."

"On peut multiplier les 2 nombres par le même nombre"

Une élève donne un exemple et un contre exemple :



Oui   Non

C'est donc l'argument graphique qui semble le mieux retenu par les élèves. L'existence d'un opérateur multiplicatif s'est transformé en l'idée vague "qu'il faut multiplier".

II Analyse globale des Résultats :

Chaque copie est notée sur 28.
Si on rassemble les résultats en 4 classes :

Classe 1 : Note < 11

Classe 2 : 11 < Note < 14

Classe 3 : 14 < Note < 17

Classe 4 : Note > 17

Classes	1	2	3	4
Effectifs (sur 21)	2	6	4	9

On observe que 13 élèves (sur 21) obtiennent une note supérieure à la moyenne.
Il y a peu de notes faibles (un élève obtient 6 et un autre 10).
Dans l'ensemble, les résultats de la classe sont moyens.
Si on veut essayer d'estimer les acquisitions des élèves à cette étape de l'apprentissage, on peut dire :

- La traduction graphique de la notion de proportionnalité semble connue de la majorité des élèves. Cependant, certains ne retiennent que l'idée de droite ou de "passant par O".

- Beaucoup de choses restent à faire notamment en ce qui concerne :

. La reconnaissance de la proportionnalité : selon quels critères ? Il faut préciser cette idée de "c'est multiplicatif"

. Les procédures empoyées pour compléter un tableau :

Quelles sont celles liées à la proportionnalité ?
Il est donc nécessaire de proposer d'autres situations aux élèves (exemples et contre-exemples), faisant intervenir des domaines de référence les plus variés possibles. L'apprentissage de la notion de proportionnalité (comme celui d'autres notions) nécessite du temps. Mon intervention était trop courte pour espérer déboucher sur de réelles acquisitions de la part d'élèves de CM_2.

Mesure du 2^{eme} côté (cm)	Aire du rectangle (cm^2)
2	16
3	24
3,5	28
4	32
5	40
10	80
10,5	84
14	112
15	120
15,5	124
16	128
19	152

Mesure du 2^{eme} côté (cm)	Périmètre du rectangle
2	20
3	22
3,5	23
4	24
10	36
10,5	37
14	44
15	46
15,5	47
16	48
19	54

Longueur du côté (cm)	Aire du carré (cm2)	Longueur du côté (cm)	Périmètre du carré (cm)
3	9	3	12
4	16	4	16
4,5	20,25	4,5	18
5	25	5	20
6	36	6	24
7	49	7	28
8	64	8	32
9	81	9	36
10	100	10	40
12	144	12	48

* Longueur du côté (cm)	Longueur de la diagonale (cm)
3	4,2
4	5,6
4,5	6,3
5	7
6	8,5
7	9,9
8	11,4
9	12,8
10	14,1
12	17

* Remarque : Pour une même longueur du côté du carré, plusieurs enfants obtiennent parfois des résultats différents pour la diagonale. Le fait que cela soit dû à des erreurs de mesure est bien admis par l'ensemble de la classe.

Problème n°1 : Achat de moquette

M. Durand et M. Dupont veulent mettre de la moquette dans leur maison.
La moquette se vend par rouleaux de même largeur.
M. Dupont achète un morceau de 3m de long avec lequel il pourra couvrir $12m^2$.
M. Durand achète un morceau de 9m de long de la même moquette.

Quelle surface pourra-t-il couvrir ?

Même question pour un morceau de 7m de long ?

Problème n°2 :

M. Dupont possède une maison à la campagne avec une pelouse, un potager et un pré qui sont tous les trois rectangulaires.

a) La pelouse a même longueur que le potager, mais est 2,5 foir plus large.
Combien de fois la pelouse est-elle plus grande que le potager ?

b) Le pré est 2 fois plus long que la pelouse et 3 fois plus large.
Combien de fois le pré est-il plus grand que la pelouse ?

c) Combien de fois le pré est-il plus grand que le potager ?

Julien

Vendredi 16 décembre

1er problème

$\frac{12}{3} = 4$

La moquette fait 4 m de large.

$\frac{12}{...} = 9 \times 4 = 36$

Mr Durand va recouvrir 36 m².

$7 \times 4 = 28$

Mr Dupuis doit recouvrir 28 m².

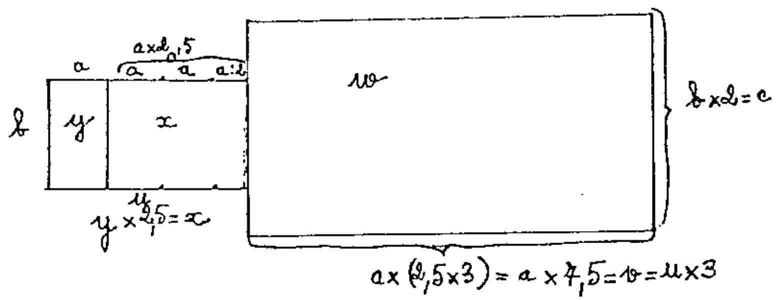
$17 \div 3 = 5,66$ (reste 20, 20)

(:3) (x3) 3 | 17 (x3) (:3)

9 | 51

$12 \times 3 = 36$

2ème problème



$6 \times 2,5 = 15$

$y \times 15 = w$ w : x = 6

x est 2,5 fois plus grand que y.

w est 6 fois plus grand que x.

w est 15 fois plus grand que y.

y < x < w

L : longueur de la représentation (en cm)

d : distance de l'obstacle au point de départ (en cm).

a

L	d
3	0,75
18	

b

L	d
7	2,5
21	

c1

L	d
21	2,5
2	

c2

L	d
18	4
10	

d

L	d
10	4
20	

f

L	d
19	4
11	

g

L	d
13	4,5
20	

h

L	d
20	15
10	

i

L	d
14	5
10	

j

L	d
20	5
7	

k

L	d
8	7
25	

ℓ1

L	d
10	7
19	

ℓ2

L	d
10	5
14	

m

L	d
11	7
22	

n

L	d
10	8
13	

o

L	d
13	9
8	

p

L	d
22	11
10	

q

L	d
10	8
20	16

r

L	d
20	18
10	9

s

L	d
25	5
13	

Groupe 1

13	7
15	9
10	4
18	.
25	.
.	37
.	370

$(x \longrightarrow x-6)$

21	3
70	10
14	2
28	.
91	.
.	15
.	150

$(x \longrightarrow x/7)$

2	4
8	64
10	100
5	.
13	.
.	36
.	81

$(x \longrightarrow x^2)$

4	7
20	35
24	42
40	70
28	.
68	.
.	112

$(x \longrightarrow 7/4\ x)$

Groupe 2

2	21
7	26
9	28
10	.
51	.
.	72
.	172

$(x \longrightarrow x + 19)$

6	18
4	12
10	30
14	.
60	.
.	36
.	150

$(x \longrightarrow x \times 3)$

25	12
15	2
30	17
45	.
63	.
.	4
.	14

$(x \longrightarrow x - 13)$

2	5
8	65
10	101
5	.
13	.
.	37
.	82

$(x \longrightarrow x^2 + 1)$

Groupe 3

10	23
20	43
25	53
30	.
50	.
.	83
.	283

$(x \longrightarrow 2x + 3)$

4	36
10	90
8	72
12	.
18	.
.	360
.	126

$(x \longrightarrow 9x)$

7	29
14	36
8	30
10	.
24	.
.	76
.	300

$(x \longrightarrow x + 22)$

3	4
6	8
15	20
18	24
21	.
60	.
.	44

$(x \longrightarrow 4/3\ x)$

Groupe 4

3	8
4	11
7	20
11	32
12	.
15	.
.	29

$(x \longrightarrow 3x - 1)$

2	4
8	64
10	100
5	.
13	.
.	36
.	81

$(x \longrightarrow x^2)$

2	5
4	10
12	30
16	.
36	.
.	35
.	50

$(x \longrightarrow 5/2\ x)$

13	7
15	9
10	4
18	.
25	.
.	37
.	370

$(x \longrightarrow x-6)$

Groupe 5

10	23
20	43
25	53
30	.
50	.
.	83
.	283

$(x \longrightarrow 2x + 3)$

2	5
8	65
10	101
5	.
13	.
.	37
.	82

$(x \longrightarrow 5/2\ x)$

3	4
6	8
15	20
18	24
21	.
60	.
.	44

$(x \longrightarrow 4/3\ x)$

7	29
14	36
8	30
10	.
24	.
.	76
.	300

$(x \longrightarrow x + 22)$

Annexe 6

Nom :

Prénom :

- Q U E S T I O N N A I R E -

1 - les listes de nombres (6,10,14,18,22)

et (8,12,16,20,24)

sont-elles proportionnelles ? oui non

Explique pourquoi :

2 - les liste de nombres (3,4,6,9,13)

et (8,10,14,20,28)

sont-elles proportionnelles ? oui non

Explique pourquoi :

3 - Sur une bicyclette, on a compté les nombres de tour de pédalier et de tours de roue correspondants :

On a obtenu :

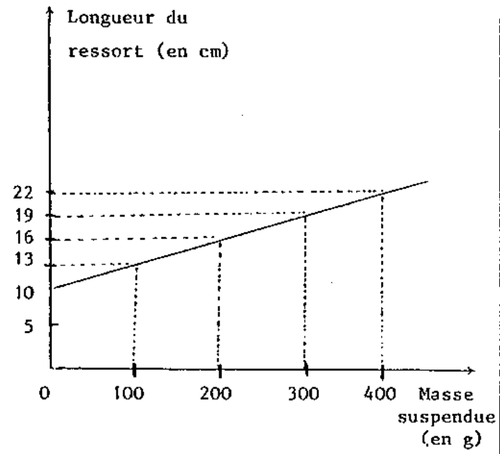
Nombre de tours de pédalier	Nombre de tours de roue
8	21
16	42
24	63
40	.
96	.
136	.
22	.

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? oui non je ne sais pas

Explique pourquoi ;

2. Complète le tableau en expliquant comment tu fais

4 - Dans une classe, on a mesuré la longueur d'un ressort en fonction de la masse suspendue à ce ressort. On a fait un graphique :



1. La masse suspendue est-elle proportionnel à la longueur du ressort ?

oui non je ne sais pa

Explique pourquoi

2. Pour une masse de 250g, quelle serait la longueur du ressort ?

Si le ressort a une longueur de 20,5cm, quelle est la masse suspendue ?

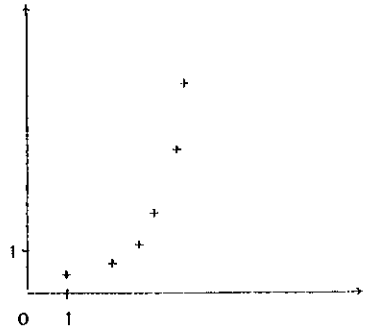
5 - Pour réaliser un plan de la cour de l'école, on a choisi l'échelle :

4cm sur le plan représentent 7cm en réalité.

Quelle est la largeur réelle de la cour, sachant qu'elle mesure 12cm sur le plan ?

Quelle est la longueur de la cour sur le plan, sachant qu'elle mesure 28m en vraie grandeur ?

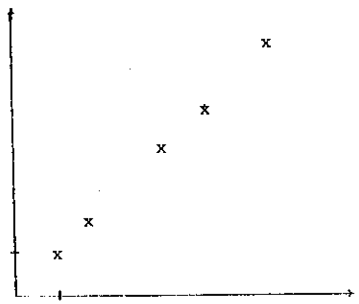
6 - Dans une classe, à la suite de mesures, on a obtenu les graphiques suivants :



Ce graphique représente-t-il une situation de proportionnalité ?

oui   non   je ne sais pas

Explique pourquoi



Ce graphique représente-t-il une situation de proportionnalité

oui   non   je ne sais pas

Explique pourquoi

7 - Pierre, qui a 8 ans mesure 1,20m. Quelle sera sa taille à 16 ans ?

8 - Donne deux listes de 5 nombres proportionnelles.

9 - Donne deux listes de 5 nombres non proportionnelles.

10 - Si tu avais à expliquer à un camarade ce qu'est une situation de proportionnalité, que dirais-tu ?

CHAPITRE II : QUESTIONNAIRE DESTINE AUX NORMALIENS

A] ELABORATION DU QUESTIONNAIRE

1 - Les raisons d'un questionnaire sur la proportionnalité.

Avant de travailler ce thème avec les normaliens, il était intéressant de savoir quelles représentations ils avaient de la proportionnalité.

Les questions que je me posais étaient alors :

1/ Qu'est-ce qu'une situation de proportionnalité pour les Normaliens ?

A quoi la reconnaissent-ils ?

2/ Quelles procédures utilisent-ils pour la traiter ?

3/ Quelles sont les erreurs possibles ?

Pour avoir un début de réponse à ces questions, j'ai cherché à fabriquer un questionnaire proposant des situations de proportionnalité suffisamment variées.

2 - 1ère version du questionnaire : Choix des questions (voir Annexe 1)

La première version comporte 3 parties :

PARTIE I :

Cette partie comprend 2 questions auxquelles il fallait répondre par oui ou par non.

Elle devait fournir les premières indications concernant les significations du mot "proportionnel" chez les Normaliens.

Question I (1) : "Entre 0 et 20 ans, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ?"

Cette question devait déceler la confusion entre "proportionnel" et"croissant".

Question I (2) : "Les suites de nombres (6, 10, 14, 18, 22) et (8; 12, 16, 20, 24) sont-elles proportionnelles ?"

Il s'agissait ici de déceler la confusion entre "proportionnel" et "Ecarts constants".

En fait, il y a 2 sources de confusion possibles :

1 . On passe de la première suite à la deuxième en ajoutant un nombre constant égal à 2.

Il existe donc un opérateur permettant de passer de la premièr suite à la seconde, mais cet opérateur, associé à une constante, est additif et non multiplicatif.

2 . Si (X_i) $1 \leqslant i \leqslant 5$ désigne la première suite et (Y_i) $1 \leqslant i \leqslant 5$ la second on a : pour $1 \leqslant i \leqslant 4$: $X_{i+1} - X_i = Y_{i+1} - Y_i = 4$

Les écarts entre 2 termes consécutifs de la première suite sont donc constants et égaux aux écarts entre 2 termes consécutifs de la deuxième suite.

La constante intervient alors 2 fois :

- Dans une même suite, entre 2 termes consécutifs.

- Entre les 2 suites.

Dans les 2 cas, c'est une constante additive et non multiplicative.

PARTIE II -

Il s'agit de reconnaître les situations où intervient la proportionnalité, de justifier sa réponse, puis de résoudre le problème posé en explicitant son raisonnement.

A chaque situation correspondent donc 2 types de réponse :

- Une réponse de reconnaissance de la proportionnalité pouvant s'exprimer par "oui", "non" ou "je ne sais pas".

- Une réponse faisant intervenir les calculs correspondant à la question posée.

Pour la recherche des différentes situations, je me suis appuyée sur l'analyse de G.VERGNAUD concernant la structure des problèmes de proportionnalité :

1 . Quand la proportionnalité intervient entre 2 grandeurs, j'ai donc distingué

a) : La Proportionnalité simple où une grandeur varie linéairement en fonction d'une autre.

Les situations (A) (Bicyclette); (B) et (C) (Masse Volumique), (D) (Echelle) relèvent de cette structure.
((C) est tiré de F.PLUVINAGE et C.DUPUIS (8))

b) : la Proportionnalité multiple : où une grandeur est une forme multilinéaire de 2 ou plusieurs autres grandeurs.

- La situation (I) fait intervenir la proportionnalité du volume d'un parallélépipède par rapport à chacune des trois dimensions.

C'est donc un exemple de ce que G.VERGNAUD appelle "Produit de Mesures".

- La situation (F) fait intervenir la double proportionnalité par rapport au temps et au nombre de vaches. C'est un exemple de ce que G.VERGNAUD appelle "la proportionnalité multiple ordinaire".

Cette situation est d'ailleurs extraite de G.VERGNAUD (2)

2 . La Proportionnalité intervient aussi comme modèle local en Physique : c'est la raison du choix de la situation (G) :

"On a mesuré la longueur d'un ressort en fonction de la masse suspendue - on a obtenu :

Masse (en g)	0	100	200	300	400
Longueur (en cm)	10	13	16	19	22

1. Dire si c'est une situation de proportionnalité - Justifier la réponse.

2 . a) Quelle serait la longueur du ressort pour une masse de 250 g ?

b) Même question pour une masse de 1 g ? de 5 kg ?"

la question 2 b) devait permettre de poser le problème de l'adéquation du modèle de la proportionnalité à la situation physique.

3 . D'autre part, il me semblait intéressant de proposer une situation relevant de la proportionnalité inverse.
C'est le cas de la situation (H) :

"A aire constante, comment varie la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur ? "

4 . Enfin, il me semblait aussi intéressant de proposer au moins 2 situations concernant la traduction graphique de la proportionnalité :

C'est le cas des situations (E) et E').

(E) représente une fonction croissante au sens large (Elle est constante pour 3 valeurs)

tandis que (E') représente une fonction strictement croissante.

Il s'agissait donc de voir s'il y avait confusion entre fonction affine par morceaux et fonction linéaire d'une part, fonction strictement croissante et fonction linéaire d'autre part.

En ce qui concerne le traitement des situations de la partie II (d'après les études relatées au chapitre I et le choix des valeurs numériques) certaines devraient plutôt induire des procédures de type scalaire, d'autres une procédure de type fonction :

- Dans la situation (A), les valeurs numériques sont choisies de telle sorte qu'elles devraient plutôt induire des procédures de type scalaire faisant intervenir les propriétés de la fonction linéaire :

1 .$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $(x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R})$ (pour f (40) avec 40 = 5 x 8)

2 .$f(x + y) = f(x) + f(y)$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ pour f (136) avec 136 = 40 + 96)

- Par contre, le choix des valeurs numériques pour (B) devrait plutôt induire la procédure de type fonction (le rapport fonction,qui est un nombre entier, est "plus simple" que le rapport scolaire)

- Pour résoudre (C), on peut soit se ramener à un même volume de liquide (75 cm3), soit se ramener à un même volume de solide (10 cm3) soit calculer la masse volumique qui représente ici le coefficient de proportionnalité.

- Dans la situation (D), le coefficient de proportionnalité (l'Echelle) est explicitement donné.

PARTIE III

Il s agit de traduire par une formule 2 énoncés de lois physiques où les mots "proportionnel" et inversement proportionnel" sont présents.

III (1) Concerne la loi de la chute libre des corps :

"Dans une chute libre sans vitesse initiale, les espaces parcourus à partir du point de départ sont proportionnels aux carrés des temps mis pour les parcourir.

Traduire cette loi par une formule".

III (2) concerne la loi de Mariotte de compressibilité des gaz :

"A température constante, le volume d'une masse gazeuse est inversement proportionnel à sa pression.

Traduire cette loi par une formule".

Enfin la dernière question III (3) : "Si vous aviez à expliquer à quelqu'un ce qu'est une situation de proportionnalité, que diriez-vous ? "

est destinée à voir quels types de conception de la proportionnalité on peut rencontrer chez les Normaliens.

Bien sûr, on doit être prudent dans l'interprétation des réponses à une telle question :

- Une absence de réponse peut aussi bien s'expliquer par la fatique, le manque de motivation, le manque de temps (c'est la dernière question) que par une réelle incapacité à répondre.

- D'autre part, la réponse exprimée ne traduit pas forcément l'intégralité de ce que représente, pour le normalien, la notion de proportionnalité.

En effet, certains normaliens ont du mal à s'exprimer par écrit : d'où leurs difficultés à donner une définition écrite d'une notion mathématique.

3 . Préexpérimentation :

A/ Résultats d'ensemble.

J'ai fait passer la première version du questionnaire dans 2 groupes de normaliens :

- Un groupe de 9 FP2 considéré comme relativement faible,
- Un groupe de 8 FP3 considéré comme plutôt fort.

Ma première inquiétude était que ce questionnaire soit trop simple pour des normaliens. Les résultats du groupe FP2 montrent que ce n'était pas le cas. En effet les erreurs, les "je ne sais pas", les non-réponses sont très fréquents dans ce groupe.

D'autre part, même dans le groupe FP3 réputé fort, certaines erreurs ou ambiguïtés persistent.

De façon générale, les normaliens ont beaucoup de mal à justifier leur réponse de reconnaissance ou non de la proportionnalité.

..../...

De plus, pour certaines situations, par exemple pour la situation (G) (Ressort) , on pouvait répondre par oui ou par non selon que les grandeur considérées étaient l'allongement du ressort et la masse ou bien la longueur du ressort de la masse.

C'est pourquoi, il était indispensable de faire préciser les grandeu en relation. C'est ce que j'ai fait dans la deuxième version. Cette précision est demandée chaque fois qu'il y a ambiguïté sur les grandeurs.

B/ Modifications de certaines questions.

1 - PARTIE 1

- La question I (1) est bien réussie dans les 2 groupes par contre, pour la question I (2), il n'y a qu'une seule bonne réponse dans le groupe FP2 et 2 erreurs dans le groupe FP3.

Ces premiers résultats montrent donc que les confusions possibles que ce soit avec un opérateur additif ou avec la propriété des écarts constants sont bien réelles.

- Pour déterminer si ces erreurs viennent plutôt de la confusion avec une fonction affine que de la confusion avec les écarts constants, j'ai rajouté la question I (3) :

"Les suites de nombres (3, 4, 6, 9, 13) et (8, 10, 14, 20, 28) sont-elles proportionnelles ?"

Si (X_i) désigne la première suite et (Y_i) la deuxième :

on a : $Y_i = 2X_i + 2$

D'autre part, les termes de la suite (X_i) ont été choisis de telle sorte que : $X_{i+1} - X_i = i \quad 1 \leqslant i \leqslant 4$

d'où $Y_{i+1} - Y_i = 2i \quad 1 \leqslant i \leqslant 4$

2 - PARTIE II

- Pour la situation (A) (bicyclette), on compte, dans l'ensemble des 2 groupes à peu près autant de procédures de type scalaire que de procédures de type fonction.

J'ai rajouté, 22 et X dans la colonne "nombre de tours de pédalier" pour voir si les normaliens qui utilisent une procédure de type scalaire sont capables de trouver l'image de deux nombres qui ne sont pas des multiples entiers de 8.

En effet, ils doivent alors trouver le coefficient de proportionnalité.

Pour des raisons de mise en page dans la version définitive du questionnaire cette situation relative à la bicyclette est la deuxième de la partie II.

Elle sera donc notée (B).

.../...

La situation (C) a comme domaine de référence la physique : Elle fait appel à la fois à la notion mathématique de la proportionnalité et à la notion physique de flottement d'un corps.

Pour essayer de séparer ce qui relève plutôt de la physique et ce qui relève plutôt des mathématiques, j'ai proposé 2 questions de difficulté croissante :

a) le solide et le liquide ont des volumes différents, mais ont même masse.

b) le solide et le liquide ont des volumes et des masses différents.

- Vu la longueur (déjà importante) du questionnaire, la question (B) de la première version, relative aussi à la masse volumique, a été supprimée dans la version définitive.

- Pour la question (D) (Echelle), on trouve très peu de justifications dans le groupe FP2 - La majorité des normaliens reconnaît une situation de proportionnalité, mais n'est pas capable de dire précisément quelle grandeur est proportionnelle à quelle autre grandeur.

Dans la version définitive du questionnaire, cette question est notée (A). De plus, dans la formulation j'ai rajouté "dans la réalité" pour les points correspondants.

(A) : "Sur une carte au 1/25000, à quelle distance sont représentés deux points qui, dans la réalité, sont distants de 375 m à vol d'oiseau ?"

- D'après les résultats des 2 groupes aux questions (E) et (E') (Graphiques), le maintien de la question (E) est justifié : En effet, un certain nombre de normaliens répondent "non" à la question (E) parce que "la courbe n'a pas de croissance constante" ou "la montée n'est pas régulière" alors qu'ils répondent "oui" à la question (E), souvent sans justifications.

Dans le groupe FP2, personne ne fait référence à une droite passant par l'origine (seul un normalien trace une droite passant par (0,0) sur un graphique, mais sans rien écrire).

Il était donc intéressant de proposer un cas où les points soient alignés sur une droite passant par l'origine, c'est l'objet de la situation (E), rajoutée à cet effet.

- Pour la situation (F) (production de lait), on trouve une seule référence à la double proportionnalité dans le groupe FP2.

Par contre, la majorité des FP3 font référence à la double proportionnalité.

- La situation (G) était ambigüe : on pouvait répondre à la fois oui et non selon que l'on considérait l'allongement du ressort ou la longueur du ressort par rapport à la masse.

Il était donc nécessaire de demander de préciser les grandeurs en relation : c'est ce qui a été fait dans la version définitive.

J'ai aussi modifié la valeur numérique (220 g au lieu de 250 g) pensant que la procédure utilisée serait mieux explicitée pour cette valeur "moins simple".

D'autre part, pour voir s'il y avait confusion avec fonction affine, il aurait été intéressant de proposer une quatrième situation graphique proposant des points alignés sur une droite ne passant par l'origine.

Vu la longueur du questionnaire, j'ai décidé de me limiter à 3 situations graphiques mais de demander en complément une représentation graphique de la longueur du ressort en fonction de la masse suspendue.

Il me suffirait ensuite de comparer les résultats des situations - graphiques et de (G).

- La situation (H) aussi était ambigüe : La longueur d'un rectangle, à aire constante, n'est pas proportionnelle à la largeur, mais elle est proportionnelle à l'inverse de la largeur.

Là aussi il était donc nécessaire de faire préciser les grandeurs en relation.

De plus, j'ai demandé une représentation graphique.

Dans le groupe FP2, personne ne reconnaît une proportion inverse et seulement 2 normaliens essaient de justifier leur réponse par des arguments du type :

"Quand la longueur augmente, la largeur est diminue"

"Quand la longueur est multipliée par x, la largeur est divisée par x"

Par contre, dans le groupe FP3, six sur huit normaliens, reconnaissent une proportion inverse.

- Comme pour les situations précédentes, il fallait, dans la situation (I) préciser les grandeurs en relation.

En effet :

On pouvait répondre "oui" en considérant la proportionnalité de la masse par rapport au volume.

Mais certains normaliens ont aussi répondu "non" en disant par exemple, *"le volume varie avec le cube des longueurs"*.

Alors qu'il n'y a qu'un seul calcul exact pour le groupe FP2, tous les calculs sont justes pour le groupe FP3.

PARTIE III

Les 2 questions concernant la traduction de lois physiques ont été supprimées : en effet, pour la loi de la chute libre des corps, il est manifeste que les normaliens se rappellaient la formule. Ce n'est donc plus une véritable traduction.

En revanche, il m'a semblé intéressant de demander aux normaliens des exemples de suites proportionnelles ou non.

C'est l'objet des questions :

III (1) : "Donner deux suites de cinq nombres proportionnelles"

et III (2) : "Donner deux suites de cinq nombres non proportionnelles".

D'autres part, les questions

III (3) : "Donner un exemple de problème, sur des questions de volume (niveau CM2 - 6ème) dont la solution relève de la proportionnalité".

et III (4) : "Donner un exemple de problème, sur des questions de volume (niveau CM2 - 6ème) dont la solution ne relève pas de la proportionnalité"

sont destinées à donner des informations sur la façon dont les normaliens se représentent un problème de proportionnalité. Les domaines de référence ont été volontairement restreints à des questions de volume.

Enfin j'ai conservé la question III (3) de la première version (notée III (5) dans la version définitive) :

"Si vous aviez à expliquer à quelqu'un ce qu'est une situation de proportionnalité, que diriez-vous ?"

En effet, dans la première version, les réponses à cette question s'avèrent déjà intéressantes :

Dans le groupe FP2 réputé plutôt faible, la moitié ne répondent pas ou déclarent qu'il faut "consulter un livre de maths".

Dans les autres réponses, on trouve l'idée de rapports entre différentes données, ces rapports pouvant être constants ou non.

Il y a aussi une réponse du type "plus ... plus" montrant une confusion avec une fonction croissante.

Dans le groupe FP3 réputé plutôt fort, on trouve plusieurs références à l'idée de rapport constant, mais aussi au procédé de la règle de trois ou à la notion de proportion inverse.

B] PASSATION - CORRECTION.

a] PASSATION

Au départ, ce questionnaire était surtout destiné aux FP1 de MOULINS avec qui je devais ensuite travailler sur le thème de proportionnalité.

Mais il a semblé intéressant de le faire passer dans d'autres Ecoles Normales pour élargir l'échantillon et voir si les tendances dégagées à MOULINS correspondaient à des tendances plus générales.

Bien sûr, il n'était pas question de faire une étude exhaustive, mais plutôt de donner des indications sur les conceptions des Normaliens concernant la proportionnalité, sur leurs confusions dans ce domaine, sur leurs erreurs.

Le questionnaire a donc été envoyé dans plusieurs Ecoles Normales de la

Région Parisienne et de Province pour le faire passer dans les trois promotions : FP1 - FP2 et FP3.

Etant donné que les résultats étaient susceptibles de varier selon que les Normaliens avaient reçu ou non un enseignement sur la proportionnalité à l'Ecole Normale, je leur ai demandé de le préciser.

La passation du questionnaire s'est faite en Mars ou Avril 1984. La durée prévue était 1 H 30 mn.

A cette époque de l'année, il était plus facile de toucher les FP1 que les FP2 ou FP3. C'est ce qui explique leur nombre plus important.

Les Ecoles Normales concernées sont :

AUTEUIL :	33 FP3		18 FP1
ANTONY :	23 FP3	6 FP2	2 FP1
VERSAILLES :		10 FP2	11 FP1
AMIENS :		26 FP2	28 FP1
AURILLAC :			15 FP1
MOULINS :			20 FP1

Au total, donc 66 FP3 42 FP2 et 94 FP1

soit 202 Normaliens.

b] CORRECTION

Les résultats sont analysés de 2 points de vue :

- Celui des Réussites / Echecs entraînant une évaluation des résultats.
- Celui des Justifications et des Procédures utilisées.

B.1. Evaluation des résultats en terme de Réussite / Echec.

Pour cette évaluation, ce qui importe c'est de voir si le normalien a été capable ou non de fournir une réponse correcte. C'est pourquoi je ne fais pas de différence entre les mauvaises réponses, les "je ne sais pas", et les non réponses qui sont évalués à 0.

- Les questions I (1), I (2) et I (3) d'une part, III (1), III (2) III (3) et III(4) d'autre part sont évaluées de 0 à 2 :
  . Bonne réponse : 2
  . Réponse ambigüe : 1 (surtout pour III (3) et III (4))
  . Mauvaise réponse : 0
  . Non réponse : 0

- Dans la partie II, à chaque question correspond 2 réponses.

  . Une réponse de reconnaissance ou non de la proportionnalité
  . Une réponse faisant intervenir un calcul ou un graphique ou les deux à la fois.

Remarques : Les questions (E), (E'), (E") concernant la traduction graphique de la proportionnalité n'appellent qu'une réponse de reconnaissance.

- Les réponses de reconnaissance (ou non) de la proportionnalité sont évaluées de 0 à 2.

Mais il fallait faire une différence entre les questions où la bonne réponse est sans ambiguïté "OUI" (ou "NON") et les questions où on peut répondre soit "OUI", soit "NON" . La justesse de la réponse dépendant de la justification associée.

J'ai donc distingué deux cas :

1) Celui des questions (A), (B), (C), (E"), (F) où la bonne réponse est "OUI" et (E), (E') où la bonne réponse est "NON".

Les réponses de reconnaissance sont alors évaluées de la façon suivante :

. Bonne réponse, bien justifiée : 2

. Bonne réponse { mal justifiée / insufisamment justifiée / non justifiée : 1

. Mauvaise réponse : 0

. Ne sais pas : 0

. Non réponse : 0

2) Celui des questions (G), (H), (I) où la bonne réponse peut-être "OUI" ou ""NON" ; cela dépend de la justification correspondante.

Dans ce cas, les réponses de reconnaissance sont ainsi évaluées :

"OUI" ou "NON" avec une bonne justification : 2

"OUI" ou "NON" { sans justification / avec justification ambigüe : 1

"OUI" ou "NON" avec une mauvaise justification : 0

Ne sais pas : 0

Non réponse : 0

- Les réponses avec calculs ou graphiques sont aussi évaluées de 0 à 2 :

. Calcul juste : 2

. Calcul avec procédure juste mais erreur de calcul / inachevé : 1

. Calcul faux : 0

. Non réponse : 0

De même pour les graphiques :

. Graphique juste : 2 (la courbe est tracée)

Graphique { .avec seulement quelques points justes / .manquant de netteté : 1

Graphique faux : 0

Non réponse : 0

Pour la situation (G) (Ressort), le problème de l'adéquation du modèle de la proportionnalité à la réalité physique n'a pas donné lieu à une évaluation.

J'ai seulement noté "M" chaque fois que le normalien reconnaissait que les calculs théoriques demandés étaient incompatibles avec la réalité physique.

De même la question III (5) n'a pas été évaluée.

Avec ce système d'évaluation, chaque copie peut être notée sur 50.

B.2. <u>Résultats en terme de justifications et de Procédures utilisées.</u>

- Pour chaque question, j'ai fait l'inventaire des justifications et des procédures couramment utilisées.

- Il y a un lien entre la répartition des justifications et les résultats à la question de reconnaissance, les bonnes justifications correspondant aux bons résultats.

../..

- De même, il y a un lien entre les procédures utilisées et les résultats aux calculs demandés : les procédures de réussite conduisent sauf erreur de calcul, à un bon résultat tandis que les procédures d'échec ne peuvent mener qu'à un mauvais résultat.

- J'ai également essayer de voir s'il y avait des cohérences dans les réponses à certaines questions, par exemple entre les justifications utilisées aux questions graphiques et les procédures utilisées en (B). j'ai donc été amenée à faire des tris croisés qui seront commentés à la suite de l'analyse des questions correspondantes.

C] Analyse des Résultats

1. Evaluation globale des copies

Chaque copie est notée sur 50. J'ai rassemblé les notes en 5 classes :

Classe 1 : Note < 20

Classe 2 : $20 \leq$ Note < 25

Classe 3 : $25 \leq$ Note < 30

Classe 4 : $30 \leq$ Note < 35

Classe 5 : Note $\geqslant 35$

Classes / FPi	1	2	3	4	5	TOTAL
FP 1	12 / 13	16 / 17	14 / 15	30 / 32	22 / 23	94
FP 2	4	7 / 17	5 / 12	13 / 31	13 / 31	42
FP 3	1	4	7 / 11	6	48 / 73	66
TOTAL	17 / 8	27 / 13	26 / 13	49 / 24	83 / 41	202

Tableau donnant la répartition des notes des FP1, FP2 et FP3 dans les 5 classes.

N.B. - Dans chaque case :
- le nombre en haut à gauche désigne l'effectif
- le nombre en bas à droite désigne le pourcentage par rapport à l'effectif de la promotion

Seuls les pourcentages supérieurs ou égaux à 10 % sont indiqués.

A partir du tableau et des graphiques 1 et 2, on peut faire les commentaires suivants :

Sur 202 normaliens, 132 (soit 65 %) obtiennent une note supérieure ou égale à 30 (classes 4 et 5) et 84 (soit 42 %) obtiennent une note supérieure ou égale à 35 (classe 5) 13 % se situent entre les notes 25 et 30 (classe 3).

Mais 21 % des normaliens se situent en dessous de la moyenne (classes 1 et 2) ; et parmi ceux-ci 18 (soit 9 % du total) ont une note inférieure à 20.

En résumé, on peut dire que, bien que la note ne soit qu'indicative le questionnaire est dans l'ensemble assez bien réussi. Néanmoins, le fait que 21 % de Normaliens se situent en dessous de la moyenne peut paraître tout de même inquiétant ; surtout qu'il est presque certain que ces normaliens deviendront effectivement des instituteurs ayant à enseigner la proportionnalité.

Mais ce qui me semble le plus intéressant, c'est la variation des résultats pour les 3 promotions FP1, FP2, FP3 (graphiques 3, 4, 5).

En effet, pour la classe 5, le pourcentage va croissant des FP1 (23 %), aux FP2 (31 %), pour arriver à 74 % pour les FP3. Il est donc multiplié par 3 des FP1 aux FP3. D'autre part, 72 % des normaliens de la classe 1 sont des FP1 (alors que les FP1 ne représentent que 46 % du total). Inversement, on trouve 1 seul FP3 dans la classe 1. Il semble donc que les années passées à l'Ecole Normale soient un facteur déterminant pour la réussite au questionnaire.

Cette hypothèse sera testée au cours de l'analyse des résultats des autres questions : à chaque fois, j'essaierai de comparer les réussites et les échecs de chaque promotion.

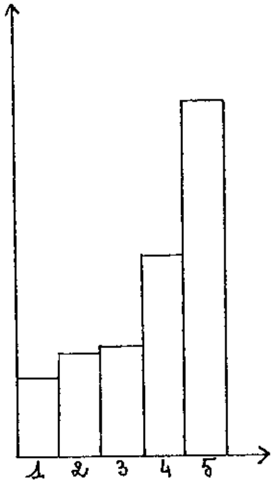
1' Comparaison des résultats Région Parisienne/Province

Les FP3 étant tous originaires de la Région Parisienne, on pourrait être tenté de relier leurs bons résultats à leur situation géographique.

Pour avoir une idée de l'homogénéité de mon échantillon, j'ai comparé les résultats des FP1 Paris/Province et des FP2 Paris/Province.

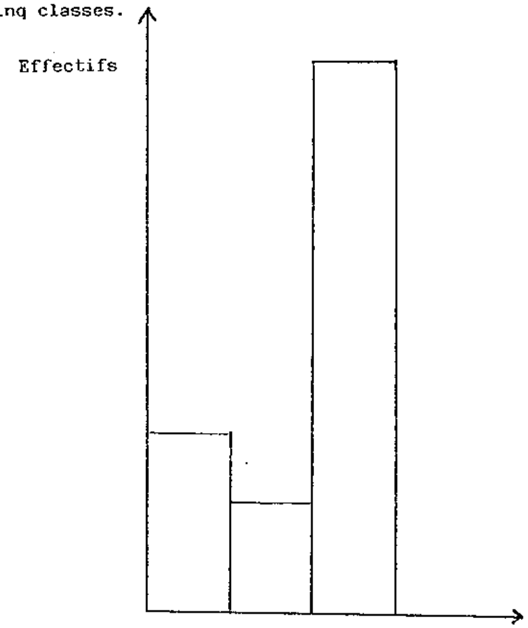
Classes / FP 1	1	2	3	4	5	TOTAL
PARIS	7 / 23	6 / 19	4 / 13	12 / 39	2 / 6	31
Province	6 / 9	8 / 13	11 / 17	18 / 29	20 / 32	63
TOTAL	13 / 14	14 / 15	15 / 16	30 / 32	22 / 23	94

Tableau donnant la répartition des FP1 Région Parisienne/Province dans les 5 classes.



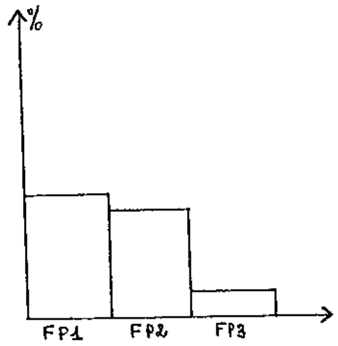
Graphique 1

Répartition des effectifs des normaliens dans les cinq classes.



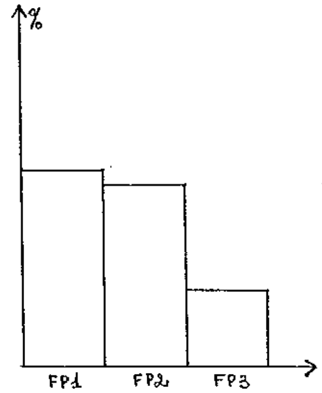
Graphique 2

Répartition des effectifs des normaliens dans 3 classes :
1 et 2 : Note < 25
3 : 25 ⩽ Note < 30
4 et 5 : Note ⩾ 30



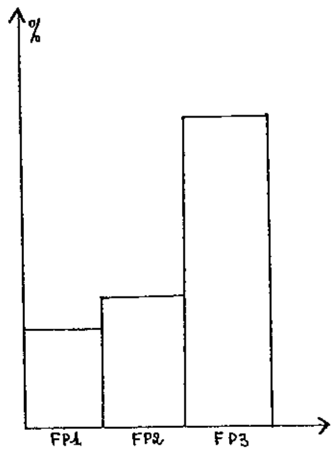
Graphique 3

Classes 1 et 2 : Note < 25
Répartition (en %) des Normaliens dans les 3 promotions



Graphique 4

Classes 3 et 4 : 25 ⩽ Note < 35
Répartition (en %) des normaliens dans les 3 promotions.



Graphique 5

Classe 5 : Note ⩾ 35
Réparition (en %) des normaliens dans les 3 promotions.

Classes / FP2	1	2	3	4	5	TOTAL
PARIS	3 / 19	5 / 31	1	4 / 25	3 / 19	16
Province	1	2	4 / 15	9 / 34	10 / 38	26
TOTAL	4	7 / 17	5 / 12	13 / 31	13 / 31	42

Tableau donnant la répartition des FP2 Région Parisienne/Province dans les 5 classes.

On constate que les résultats des FP1 de province sont nettement meilleurs que ceux des FP1 de la région parisienne. En effet :

Alors que 32 % des FP1 de province sont dans la classe 5, il n'y a que 6% des FP1 de la Région Parisienne dans cette même classe (le pourcentage global étant de 23 %).

Inversement, 23 % des FP1 de la région Parisienne sont dans la classe 1 contre seulement 9% pour les FP1 de province. (le pourcentage global étant de 14%).

de même, les résultats des FP2 de province sont meilleurs que ceux des FP2 de la région parisienne :

-19% seulement des FP2 de la région parisienne sont dans la classe 5 contre 38 % pour les FP2 de province et 31 % pour l'ensemble.

- Inversement, 31 % des FP2 de la Région Parisienne sont dans la classe 2 contre seulement 7 % pour la province et 17 % pour l'ensemble.

Enfin, on peut remarquer que sur les 4 FP2 de la classe 1, 3 sont de la région parisienne.

La comparaison entre les FP3 de la région parisienne et les FP3 de province n'est pas possible puisqu'il n'y a aucun FP3 de province dans mon échantillon.

Toutefois, l'analyse précédente tendrait à montrer qu'il n'y a pas de lien entre les meilleurs résultats des FP3 et leur situation géographique.

Les meilleurs résultats des FP3 par rapport aux deux promotions seraient donc surtout dus au fait qu'ils sont en troisième et dernière année d'Ecole Normale.

2. Analyse des Résultats pour chaque question

Question I (1)

"Entre 0 et 20 ans, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ?"

I (1)	B.R.	M.R.	N.R.
FP1	75	19	0
FP2	40	2	0
FP3	62	3	1
TOTAL	177	24	1

Tableau des résultats en effectifs

I (1)	B.R.	M.R.	N.R.
FP1	80	20	
FP2	95	5	
FP3	94	5	
TOTAL	88	12	

Tableau des résultats en pourcentages

B.R. : Bonne réponse

M.R. : Mauvaise réponse

N.R. : Non réponse

Cette question est bien réussie dans l'ensemble.

La confusion entre "proportionnel" et "croissant" ne semble donc pas très répandue, du moins en ce qui concerne les variations de la taille en fonction de l'âge. En effet, les résultats à la question (E') viendront infléchir un peu cette première constatation.

- Si on regarde la répartition des notes dans les 3 promotions, on voit que c'est en FP1 qu'il y a le plus de mauvaises réponses : (sur 24 au total, 19 proviennent de FP1). Par contre, elles sont très rares en FP2 et FP3.

.../...

Question I (2)

"les suites de nombres (6, 10, 14, 18, 22) et 8, 12, 16, 20, 24) sont elles proportionnelles ?"

I (2)	B.R.	M.R.	N.R.
FP1	49	43	2
FP2	30	12	0
FP3	58	7	1
TOTAL	137	62	3

Tableau des Résultats en effectifs

I (2)	B.R.	M.R	N.R.
FP1	52	46	
FP2	71	29	
FP3	88	11	
TOTAL	68	31	

Tableau des résultats en pourcentages

Cette question est moins bien réussie que la précédente, le taux d'échec étant de l'ordre de 30 %

Cette baisse de taux de réussite se retrouve pour les 3 promotions.

Là-aussi, cependant le taux de réussite croît sensiblement des FP1 aux FP3 et les mauvaises réponses sont nettement plus fréquentes en FP1.

D'ailleurs, en FP1, on obtient presque autant de mauvaises réponses que de bonnes réponses.

On a vu que pour cette question, il y avait 2 sources de confusion possibles :

* 1. Confusion avec l'opérateur additif (+2)
* 2. Confusion avec la propriété des "écarts constants" :

pour $1 \leqslant i \leqslant 4 \quad X_{i+1} - X_i = Y_{i+1} - Y_i = 4$

Dans les deux cas il y a une constante qui intervient, mais c'est une constante additive.

Les résultats de cette question montrent que ces confusions présumées sont bien réelles chez un certain nombre de normaliens.

En particulier, elles sont présentes chez près de la moitié des FP1.

Il sera intéressant de comparer les résultats de cette question aux résultats de III (1) où on demandait de donner un exemple de 2 suites proportionnelles.

En effet, il semble que la plupart des normaliens qui ont répondu oui à la question I (1) donnent un exemple du même type en III (1)

Question I (3)

"Les suites de nombres (3, 4, 6, 9, 13) et (8, 10, 14, 20, 28) sont elles proportionnelles ?"

I (3)	B.R.	M.R.	N.R.
FP1	77	16	1
FP2	39	2	1
FP3	57	8	1
TOTAL	173	26	3

Tableau des Résultats en effectifs

I (3)	B.R.	M.R.	N.R.
FP1	82	17	
FP2	93	5	
FP3	86	12	
TOTAL	86	13	

Tableau des Résultats en pourcentages

Les pourcentages de réussite à cette question sont comparables à ceux de I (1)

On peut remarquer un léger fléchissement du taux de réussite en FP3. Néanmoins, c'est encore en FP1 que l'on trouve le plus de mauvaises réponses.

On a vu que cette question devait déceler la confusion entre fonction linéaire et fonction affine.

Les résultats montrent que cette confusion existe ; mais elle est moindre par rapport à celles décelées à la question précédente I (2).

En fait, pour savoir laquelle des deux confusions était prépondérante :

(Celle avec la fonction affine particulière $x \longmapsto x + 2$ ou celle avec la propriété des "écarts constants") il aurait fallu proposer, par exemple, les deux suites (6, 10, 12, 17, 20) et (8, 12, 14, 19, 22).

Dans ce cas, la deuxième suite se déduit de la première par l'opérateur additif (+2), mais $X_{i+1} - X_i$ n'est pas constant pour toute valeur de i.

Les questions de la partie II sont associées à 2 types de réponse :

1/ Une réponse de reconnaissance ou non de la proportionnalité qui est évaluée de 0 à 2 selon la justification associée.

2/ Une réponse faisant intervenir un calcul, ou un graphique, ou les deux à la fois. Cette réponse est aussi évaluée de 0 à 2.

D'autre part, toutes les fois que cela a été possible, j'ai essayé de déterminer les procédures de calcul utilisées par les Normaliens.

Les résultats aux questions de la partie II seront donc analysés de 2 points de vue :

1. Reconnaissance (ou non) de la proportionnalité et justifications associées.

2. Calculs, (graphiques) et procédures utilisées.

QUESTION (A) :

1. Reconnaissance et justifications

a) Evaluation des justifications observées :

- La justification la plus courante consiste à écrire : "1 cm représente 250 m" (ou 25000 cm)

ou "1 mm représente 25000 mm"

ou "1 cm $\longrightarrow$ 250 m"

sans préciser vraiment quelles sont les grandeurs proportionnelles.

Cette justification codée S, me paraît insuffisante, je lui ai donc attribué 1 point à chaque fois qu'elle apparaissait comme seule justification.

- Mais souvent, elle a été associée à d'autres justifications concernant la proportionnalité entre la distance sur la carte et la distance sur le terrain : par exemple "1 cm sur la carte représente 250 m sur le terrain".

Sur certaines copies, on trouve simplement que les grandeurs en relation sont la distance sur la carte d'une part, et la distance sur le terrain d'autre part.

Enfin, on trouve aussi la justification qui me semble la plus complète : celle faisant intervenir l'échelle comme coefficient de proportionnalité entre les 2 grandeurs en relation : la distance sur la carte et la distance sur le terrain.

Exemple : "Ce sont les distances sur la carte et les distances réelles (sur le terrain) qui sont proportionnelles.

$$\text{Distance réelle} \times \underset{(1/25000)}{\text{Echelle}} = \text{distance sur la carte}",$$

L'idée explicitée de proportionnalité entre la distance sur la carte et la distance sur le terrain a été codée CR. Toute justification comprenant CR a été évaluée à 2. Chaque fois que l'échelle a été mentionnée comme coefficient de proportionnalité, j'ai codé E.

Les justifications du type E + CR ou S + CR ont donc été évaluées à 2.
Mais certaines justifications, faisant aussi intervenir l'échelle, ont été jugées insuffisantes et donc évaluées à 1 :

Exemples : "x $\frac{1}{25000}$" ou "k = $\frac{1}{25000}$"

ou "la grandeur en relation est le rapport $\frac{1}{25000}$"

ou "longueur réelle et échelle".

b) Résultats concernant les justifications :

A / J	2	1	0	Ne sais pas	Non réponse	Total
FP 1	42 / 45	43 / 46	0	9 / 10	0	94
FP 2	24 / 57	15 / 36	1	1	1	42
FP 3	49 / 74	16 / 24	0	0	1	66
Total	115 / 57	74 / 37	1	10 / 5	2	202

Tableau donnant l'évaluation des justifications en fonction des 3 promotions

Remarque :
- les nombres en haut à gauche représentent les effectifs absolus,
- les nombres en bas à droite représentent les pourcentages par rapport à l'effectif total de la promotion.
- Sur l'ensemble des 202 normaliens, 115 (57 %) justifient la proportionnalité correctement.
Mais 74 (37 %) justifient de façon insuffisante ou ne justifient pas du tout et 10 ne savent pas reconnaître la proportionnalité.
L'idée que les problèmes d'Echelle sont des problèmes de proportionnalité n'apparaît donc pas comme évidente pour l'ensemble des normaliens.
En tout cas, un fort pourcentage d'entre eux est incapable de dire précisément quelles sont les grandeurs en relation.
Ce résultat s'accentue encore davantage si on regarde la répartition dans les trois promotions : FP 1, FP 2, FP 3.
En effet, dans la colonne codée 2 correspondant aux bonnes justifications, le pourcentage décroît nettement des FP 3 aux FP 1.
D'autre part, en FP 1, on trouve autant de justifications insuffisantes (colonne "1") que de justifications correctes (colonne "2") ; alors que, pour les autres promotions, il y a toujours une majorité de bonnes justifications.
Cette majorité est d'ailleurs nettement plus marquée en FP 3.
Enfin, il faut remarquer que, parmi les dix normaliens qui ne savent pas reconnaître la proportionnalité, 9 proviennent de FP 1.

A / J	S (seul)	CR ou S + CR	(CR ou S + CR) + E	∅	Autres	Total
FP 1	22	32	10 11	22 23	8	94
FP 2	9	18	5 12	6 14	4	42
FP 3	4	30	19 29	5	8	66
Total	35	80	34	33	20	202

<u>Tableau donnant la répartition des Justifications en fonction des 3 promotions</u>

D'après ce tableau, on voit que la justification la plus satisfaisante (celle où l'échelle apparaît comme coefficient de proportionnalité entre les 2 grandeurs distance sur la carte et distance en réalité, codée CR + E ou (S + CR) + E) est plus fréquente en FP 3 (29 %) qu'en FP 1 ou FP 2 (11 % en FP 1).
Par contre, les réponses non justifiées (codées : ∅) proviennent essentiellement des FP 1.
Dans la colonne "autres", j'ai regroupé diverses justifications, souvent insuffisantes ou ambigues :
<u>Exemples</u> :
"x $\frac{1}{25000}$", "longueur réelle et échelle", "cm et m", "c'est une relation multiplicative", "elles sont toutes en relation".
En FP 1, on trouve aussi 3 justifications révélant une erreur sur l'interprétation de l'Echelle :

"1 cm $\rightarrow$ 2,5 km" ; "1 cm $\rightarrow$ 500 m" ; "1 cm $\rightarrow$ 2500 m".

Paradoxalement le calcul correspondant n'est pas toujours faux. Il ne l'est que pour la troisième citée

2. <u>Calculs et Procédures utilisées</u>

a) <u>Résultats des calculs</u>

A / C	2	1	0	Non réponse	Total
FP 1	74 79	5	4	11 12	94
FP 2	34 81	5	1	2	42
FP 3	58 88	6	1	1	66
Total	166 82	16 32	6	14 7	202

<u>Tableau donnant l'évaluation du calcul en fonction des 3 promotions</u>

Pour une forte majorité de normaliens (82 %) le calcul est juste.
On peut remarquer que c'est en FP 1 que l'on trouve le plus de non-réponses.
Les erreurs correspondent soit à une mauvaise interprétation de l'Echelle ("1 cm 2500 m", soit à une procédure fausse (250/375 ou 375/25).
On trouve aussi, en FP 2, un résultat aberrant : 93,75 km !
Dans leur grande majorité, les normaliens réussissent donc à résoudre, par le calcul, un problème d'Echelle.

Ce résultat n'est finalement pas très surprenant. C'est le contraire qui eût été vraiment inquiétant...
Par contre, même s'ils reconnaissent la proportionnalité, ils ne sont pas toujours capables de dire, de façon précise, quelles sont les grandeurs en relation.
Un fort pourcentage d'entre eux se contente d'une justification insuffisante ou ne justifie pas du tout.
Enfin, comme on l'a vu dans la partie I, les FP 3 réussissent nettement mieux ; le taux de réussite étant toujours croissant des FP 1 aux FP 3.
En particulier, une forte majorité de FP 3 (74 %) justifie correctement la proportionnalité, alors que ce pourcentage descend à 45 % pour les FP 1.

b) Procédures utilisées

b.1. Analyse des procédures de résolution utilisées :

M'appuyant sur l'analyse de G. VERGNAUD, j'ai essayé de distinguer les procédures de type scalaire et les procédures de type fonction.
J'en ai finalement distingué cinq :

1. Celle qui consiste à dire :
"1 cm représente 250 m
x cm représentent 375 m donc $x = \frac{375}{250}$ "

Cela peut représenter 2 raisonnements distincts :

1 Dire que le passage de 1 à x est le même que le passage de 250 à 375 : c'est une procédure de type scalaire,

2 ou bien, dire que le passage de 1 à 250 est le même que le passage de 250 à 375. C'est une procédure de type fonction.

Cette procédure, notée S , peut donc correspondre soit à une procédure de type scalaire, soit à une procédure de type fonction.

2. Celle où l'échelle est explicitement utilisée comme coefficient de proportionnalité :

Exemple : après une justification du type :

$$\text{Distance}_{\text{carte}} = \frac{1}{25000} \times \text{Distance}_{\text{réalité}}$$

On trouve l'application numérique :

$$x = \frac{1}{25000} \times 375$$

Cette procédure, de type fonction, est notée F.

3. La procédure "Valeur Unitaire" notée V qui correspond au raisonnement suivant :

"250 m sont représentés par 1 cm
1 m est représenté par $\frac{1}{250}$ cm
375 m sont représentés par $\frac{1}{250} \times 375$ cm".

Dans certaines copies, on trouve simplement :
"1 m est représenté par $\frac{1}{250}$ cm
375 m sont représentés par $\frac{1}{250} \times 375$"

Cette procédure a été notée S_V.

Comme pour S, les procédures V et S_V peuvent correspondre soit à une procédure de type scalaire, soit à une procédure de type fonction.

4. La procédure "décomposition additive de type scalaire" notée DS :

Elle correspond à la décomposition $375 = 250 + \frac{250}{2}$

d'où $x = 1 + 0,5 = 1,5$ cm.

5. La procédure "Règle de trois" correspondant le plus souvent à un "produit en croix" :

$$1 \text{ cm} \rightarrow 250 \text{ m} \qquad x \times 250 = 375 \times 1 \quad (1)$$
$$x \text{ cm} \rightarrow 375 \text{ m}$$
$$\text{d'où } x = \frac{375 \times 1}{250} \quad (2)$$

Dans certaines copies, on trouve seulement la deuxième égalité. Cette procédure est notée RT.
Dans de nombreux cas, il n'a pas été possible de déterminer la procédure utilisée. Seul figurait le résultat numérique. Cette "procédure" a été notée Ø.

b.2. Répartition des Procédures :

A / P	S	DS	S_V	V	F	Ø	RT	Autres
FP 1	22	7	3	6	10	40	4	2
FP 2	11	5	1	2	7	16		
FP 3	15	5	4	8	15	17	4	
Total	48	17	8	16	32	73	8	2

Tableau donnant la répartition des procédures dans les 3 promotions

Remarque : certains normaliens indiquent plusieurs procédures. Chacune d'elles a été répertoriée, ce qui explique que le nombre total de procédures observées soit supérieur au nombre de normaliens.

- Dans beaucoup de cas, il n'a pas été possible de déterminer la procédure utilisée.
Néanmoins, lorsqu'elle est explicitée, c'est la procédure S qui est la plus courante.
Toutefois, en FP 3, on trouve autant de procédures F que de procédures S . Cela peut s'expliquer par le fait que c'est en FP 3 que l'Echelle est le mieux reconnue comme coefficient de proportionnalité.
Si on considère les procédures S, DS, S_V comme étant plutôt de type scalaire, alors elles sont largement majoritaires par rapport à la procédure F de type fonction.

QUESTION (B) :

1. Reconnaissance de la proportionnalité et justifications

a) Evaluation des justifications observées.

a 1. Justification "de type fonction" : elle consiste à dire que le rapport $\frac{\text{nombre de tours de roue}}{\text{nombre de tours de pédalier}}$ est constant et égal à $\frac{21}{8}$ ou 2,625.

Cette justification est notée F et évaluée à 2.

Parmi ceux qui utilisent la justification F, certains font apparaître le rapport $\frac{21}{8}$ comme la valeur unitaire, c'est à dire le nombre de tours de roue correspondant à 1 tour de pédalier.

Cette justification, codée V, est aussi évaluée à 2.

a 2. Justifications "de type scalaire" : elles font intervenir les propriétés de la fonction linéaire :

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

- Justification codée S : elle consiste à dire :

$$f(8\ x) = 21\ x$$

L'ensemble de référence auquel x appartient n'étant pas toujours précisé.

On peut d'ailleurs penser que pour certains, x est un entier naturel puisqu'ils écrivent :

$$\begin{array}{ccc} 8 & \rightarrow & 21 \\ 8 \times 2 & \rightarrow & 21 \times 2 \\ 8 \times 3 & \rightarrow & 21 \times 3 \\ \vdots & & \vdots \\ 8 \times n & \rightarrow & 21 \times n \end{array}$$

- Il y a parfois un commentaire "8 tours de pédalier donnent 21 tours de roue. Si on multiplie le nombre de tours de pédalier par un chiffre entier ou non, on multiplie d'autant le nombre de tours de roue".

Cette justification, codée S, est évaluée à 2.

- Mais, dans certains cas, elle est incomplète puisque on se contente de dire :

$$\begin{array}{ccc} 8 & \rightarrow & 21 \\ 8 \times 2 & \rightarrow & 21 \times 2 \end{array}$$

sans donner l'idée que la propriété est vérifiée quel que soit le nombre avec lequel on multiplie 8.

Cette justification codée S x 2 n'est pas suffisante et est donc évaluée à 1.

- On trouve aussi (2 fois seulement) une justification du type :

$$\begin{array}{l} n = 8 \rightarrow 21 \\ n = 16 \rightarrow 42 \\ n = 24(16+8) \rightarrow 42 + 21 = 63 \end{array}$$

Cette justification, codée DS, est évaluée à 1.

a 3. Justification faisant intervenir l'égalité des produits en croix : cette justification, codée PC, consiste donc à écrire :

$$\begin{array}{l} 8 \times 42 = 21 \times 16 \\ 16 \times 63 = 24 \times 42 \\ \text{etc...} \end{array}$$

Elle est évaluée à 2

a 4. Justification faisant intervenir la propriété des Ecarts Proportionnels : elle consiste à dire :

$$+8 \begin{pmatrix} 8 \\ \downarrow \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 21 \\ \downarrow \end{pmatrix} +21 \qquad \text{soit :} \quad \begin{array}{l} \text{si } x - y = 8 \\ \text{alors } f(x) - f(y) = 21 \end{array}$$

Cette justification est évaluée à 1 et codée EP.

a 5. Autres justifications :

- Celles faisant référence à un graphique : "Si on traçait la courbe de ces données, on obtiendrait une droite". Elles sont codées G.

- Celles où apparaît une relation entre le nombre de tours de pédalier et le nombre de tours de roue :
  "à 8 tours de pédalier correspondent 21 tours de roue"
  "car il existe une formule telle qu'on peut toujours mettre en relation les nombres correspondants"
  "le nombre de tours de roue est fonction du nombre de tours de pédalier"
  "le nombre de tours de roue est proportionnel au nombre de tours de pédalier".
  "On a une relation multiplicative".
- Celles faisant référence à l'idée de croissance :
  "le nombre de tours de roue et le nombre de tours de pédalier augmentent dans les mêmes proportions"
  "le nombre de tours de roue augmente régulièrement en fonction du nombre de tours de pédalier".
- Celles faisant référence à la technologie :
  "c'est un phénomène physique"
  "les tours sont reliés directement par la chaîne $\Rightarrow$ en rapport avec les 2 diamètres"
  "la bicyclette n'est pas munie d'un changement de vitesse et le pédaleur ne s'est jamais arrêté de pédaler (jusq'à 24 tours de pédalier)".
  Toutes ces justifications, associées à la réponse "OUI", ont été évaluées à 1.

b) Résultats concernant les justifications.

B / R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	56 59	30 71	50 76	136 67
1	33 35	10 24	16 24	59 29
0	2	1		3
NS	3	1		4
NR				
Total	94	42	66	202

Tableau des Résultats dans les 3 promotions

Sur 202 normaliens, 195 reconnaissent une situation de proportionnalité, mais 59 (29 %) donnent une justification insuffisante ou ne justifient pas du tout.
On peut remarquer qu'il n'y a pas de non-réponse, mais 3 erreurs venant de FP 1 (2) et FP 2(1).
Dans ces 3 cas, il n'y a pas reconnaissance de la proportionnalité :
en FP 2, la justification donnée est $42 \neq \frac{21}{8} \times 16$.
On peut alors supposer qu'il y a seulement une erreur de calcul.
en FP 1, on trouve comme justification :
"non, car on ne peut pas traduire les relations par une fonction du type $y = ax$".
et
"le nombre de tours de roue n'égale pas le nombre de tours de pédalier $\times$ a".
Dans les 2 cas, on estime donc que le rapport n'est pas constant.
On peut remarquer que ces normaliens donnent tout de même les images de 40, 96, 136 mais pas celles de 22 et x.
Ces images semblent obtenues à l'aide de procédures scalaires (S ou DS).
Une fois encore, on peut remarquer que le pourcentage de réussite va croissant des FP 1 aux FP 3.
C'est en FP 1 que le pourcentage de justifications insuffisantes (évaluées à 1) est le plus fort (35 %). Ce pourcentage est plus faible en FP 2 et FP 3 (24 %). Tous les FP 3 reconnaissent la proportionnalité et la justifient de façon satisfaisante pour 76 %, non satisfaisante pour 24 %.

Répartition des justifications

Remarque : certaines réponses comportent plusieurs justifications. Chacune d'elle a été répertoriée.
Le nombre de justifications observées est donc supérieur au nombre de normaliens.
Pour analyser le tableau, il faut donc faire référence au nombre de justifications observées et non au nombre de normaliens.

B J	F	V	S	S_{x2}	DS	PC	EP	G	Autres	Ø
FP 1	46		6	11	1	2	3	3	18	7
FP 2	24	3	1	3	1	1	1		7	1
FP 3	40	7	5	7		1			9	1
Total	110	10	12	21	2	4	4	3	34	9

Tableau donnant la répartition des justifications de la question B dans les trois promotions

Ce tableau montre que la justification F est de loin la plus utilisée dans les 3 promotions.
Toutefois, elle apparaît plus fréquemment en FP 2 et FP 3 qu'en FP 1 ; surtout si on la regroupe avec la justification V. Par contre, la justification S est peu utilisée dans sa forme complète.
Dans sa forme incomplète (S_{x2}), elle apparaît plus fréquemment en FP 1 et, dans les 3 promotions, est plus fréquente que S.
Les normaliens qui utilisent une justification de type scalaire sont donc peu nombreux et beaucoup se contentent de vérifier la propriété $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ sur un ou deux exemples, sans généraliser à une valeur quelconque de λ.

D'autre part, en FP 1, il y a une plus grande diversité de justifications qu'en FP 2 ou FP 3 en particulier, on trouve plus de justifications codées EP, G, "autres" qui sont en général insuffisantes.
Enfin, il y a seulement 9 normaliens qui ne justifient pas leur réponse et parmi ces 9, 7 viennent de FP 1.

2. Calculs et procédures utilisées

1°/ Analyse des procédures de résolution utilisées :

Comme pour la question A, j'ai distingué, d'après l'analyse de G. VERGNAUD les deux grands types de procédures qui peuvent être utilisées pour résoudre un problème de "quatrième proportionnelle".
Si ce problème est représenté par un schéma du type :

a	b
c	x

on peut alors distinguer :

1. La procédure fonction, codée F, qui consiste à écrire l'égalité $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ et qui utilise explicitement le coefficient de proportionnalité.
Cette procédure est explicitée par les normaliens le plus souvent sous la forme : "Il suffit de multiplier le nombre de tours de pédalier par $\frac{21}{8}$ " (ou 2,625).

2. La procédure scalaire, codée S, qui consiste à écrire l'égalité $\frac{c}{a} = \frac{x}{b}$. Cette procédure, qui utilise la propriété de linéarité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ n'explicite pas le coefficient de proportionnalité.
Beaucoup de normaliens utilisant cette procédure réussissent à compléter le tableau pour des multiples entiers de 8, mais ne donnent ni l'image de 22, ni l'image de x.

En effet, pour ces 2 valeurs, le rapport scalaire n'est pas un nombre entier.
Il fallait donc, pour répondre à la question, soit calculer un rapport scalaire rationnel ou réel, soit, en particulier pour l'image de x, utiliser le coefficient de proportionnalité $\frac{21}{8}$. Mais alors, il y avait changement de procédure au profit de la procédure fonction.
C'est pour cette raison que j'ai distingué 2 procédures de type scalaire :

- la procédure scalaire "pure" codée S
- la procédure scalaire avec éventuellement, le calcul du rapport de proportionnalité pour 22 et x. Cette procédure est notée S_F.

D'autres procédures ont été observées :

3 La procédure "Décomposition de type scalaire" notée DS, basée sur la propriété de la fonction linéaire :

$$f\,(x + y) = f(x) + f(y)$$

4 La procédure "Valeur Unitaire" codée V correspondant au raisonnement suivant :

8 tours de pédalier $\longrightarrow$ 21 tours de roue

1 $\longrightarrow \frac{21}{8}$

x $\longrightarrow \frac{21}{8} \times x$

On a déjà vu que cette procédure pouvait s'interpréter :

- soit comme une procédure de type fonction : on calcule le rapport de proportionnalité $\frac{21}{8}$ et on dit que le passage de 1 à $\frac{21}{8}$ est le même que le passage de x à $\frac{21}{8} \times x$.

- soit comme une procédure de type scalaire en disant que le passage de 1 à x est le même que le passage de $\frac{21}{8}$ à $\frac{21}{8} \times x$.

5 La procésure "Règle de trois" notés RT qui correspond le plus souvent à une égalité de "produits en croix" :

$$a \times x = b \times c \quad \text{d'où} \quad x = \frac{b \times c}{a}$$

Certains normaliens calculent directement $\frac{b \times c}{a}$ ou $\frac{c \times b}{a}$.

6 La procédure "Ecarts Proportionnels" codée EP qui consiste à dire :
"à un écart de 8 entre 2 nombres de tours de pédalier correspond un écart de 21 entre 2 nombres de tours de roue".
C'est à dire, f étant la fonction linéaire correspondante :

si $x - y = 8$ alors $f(x) - f(y) = 21$.

7 Autres procédures :

- procédure Graphique notée G : elle consiste à faire une représentation graphique et à l'utiliser pour compléter le tableau :
"En traçant la droite correspondant à cette fonction (ou en la prolongeant) on trouve les points correspondant aux couples (40,..) ; (96,..) etc...".
- Procédures où le nombre de tours de roue est une fonction "non simplifiée" du nombre de tours de pédalier :

Exemples : $f(x) = x \times \frac{5}{2} + \frac{x}{8}$; $f(x) = 2\,x + \frac{x}{8} \times 5$

$f(x) = 3\,x - \frac{3\,x}{8}$

Ces procédures ont été répertoriées dans la colonne "autres".

2°/ Résultats des calculs :

Les calculs faits ont été évalués de la façon suivante :

- tous les calculs justes : 2
- 1 seule erreur de calcul, avec procédure juste, bien explicitée : 1
- calculs inachevés, avec procédure juste, bien explicitée : 1
- calculs inachevés, avec procédure mal explicitée et une seule valeur manquante : 1
- Autres cas : 0

B / C	2	1	0	NR	Total
FP 1	35 / 37	10 / 11	22 / 23	27 / 28	94
FP 2	21 / 50	4 / 10	5 / 12	12 / 28	42
FP 3	55 / 83	3		8 / 12	66
Total	111 / 55	17 / 8	27 / 13	47 / 23	202

Une majorité de normaliens (55 %) complète le tableau de façon correcte.
Néanmoins, 13 % d'entre eux se trompent ou ne complètent qu'une partie du tableau.
D'autre part, il faut noter le fort pourcentage de non-réponses.

Cela est sans doute en relation avec la mauvaise formulation de la question : il aurait fallu demander effectivement de compléter le tableau. Beaucoup de normaliens indiquent une procédure pour le faire, mais ne font pas les calculs correspondants.
Là aussi, il est intéressant de voir la répartition des résultats dans les trois promotions :
le taux de réussite (correspondant à la note 2) croît nettement des FP 1 (37 %) aux FP 3 (83 %). Il fait même plus que doubler. Celui des FP 2 est encore en position intermédiaire (50 %).
D'autre part, les normaliens qui obtiennent 1 sont en majorité des FP 1 ou FP 2.
Cette note correspond le plus souvent à des calculs inachevés : en particulier, certains savent compléter le tableau pour les valeurs numériques, mais ne savent pas calculer l'image de x que ce soit par une procédure de type scalaire ou une procédure de type fonction.
Certains normaliens semblent donc bloqués par les notations littérales, alors qu'il n'y aurait aucune difficulté à appliquer la procédure utilisée pour les valeurs numériques, en particulier la procédure fonction.
Ce blocage des normaliens devant les notations littérales a été largement mis en évidence par F. CARAYOL dans 6 .
Enfin, il faut remarquer que parmi les 27 qui obtiennent 0, 22 sont des FP 1. Cela vient encore renforcer l'hypothèse selon laquelle les FP 1 réussissent moins bien que les FP 2 ou FP 3.
La moitié de ceux qui obtiennent 0 ont rempli le tableau pour les multiples entiers de 8, mais n'ont pas su le faire pour 22 et x .

Ils ont utilisé une procédure de type scalaire (ou décomposition scalaire) de façon restreinte, en se basant uniquement sur la propriété $f(8\ n) = 21\ n$ avec n entier naturel.

Mais il n'y a pas eu généralisation de cette propriété à des valeurs rationnelles ou réelles de n.

Parmi ceux qui utilisent la procédure scalaire S "seule", 1 seul calcule l'image de 22.

2 donnent l'image de x en écrivant :

pour $x = 8\ a$ $\quad$ $y = 21\ a$

Les autres ou ne font pas les calculs, ou font tous les calculs sauf pour 22 et x.

Il faut tout de même remarquer que parmi ceux qui complètent le tableau sauf pour 22 et x, 2 utilisent la procédure fonction.

On peut interpréter cela soit comme un blocage (22 et x ne sont pas des multiples entiers de 8), soit comme une simple négligence.

Mais, pour les autres, la procédure scalaire "seule" était insuffisante. Il fallait soit l'élargir, soit rechercher le coefficient de proportionnalité et appliquer la procédure fonction.

Or cela n'a pas été fait.

On peut donc supposer que ces normaliens ne connaissaient pas l'existence d'un coefficient de proportionnalité qui pouvait ensuite être utilisé pour compléter le tableau.

Les autres erreurs proviennent :

- soit du fait que le coefficient de proportionnalité (2,625) a été arrondi à 2,62 ou à 2,6.

Tous les calculs sont alors faux.

A ce sujet, on peut d'ailleurs remarquer que les normaliens n'ont pas essayé de vérifier leurs résultats en utilisant les propriétés de linéarité ; peut-être parce que celles-ci sont finalement mal connues de façon explicite.

- Soit de l'utilisation systématique de la procédure "Ecarts Proportionnels" qui peut se résumer ainsi : "Quand on ajoute 8 à un nombre de la colonne de gauche, on ajoute 21 à son correspondant de la colonne de droite". Cette procédure, tout à fait légitime, a conduit à des erreurs lorsque le normalien n'a pas tenu compte des écarts entre les nombres de la colonne de gauche. Il a alors ajouté 21 systématiquement :

$$40 \longrightarrow 63 + 21 = 84$$

$$96 \longrightarrow 84 + 21 = 105$$

$$136 \longrightarrow 105 + 21 = 126$$

Parmi les 4 FP 1 qui utilisent la procédure des "Ecarts Proportionnels", 3 font cette erreur grossière.

Bien sûr, le procédé ne peut plus s'appliquer pour 22 et x. L'un d'eux donne alors comme image de 22 : $f(22) = 61$ peut-être parce que $22 = 24 - 2$ donc $61 = 63 - 2$!

Les autres ne donnent pas les images de 22 et x. 1 seul FP 1 utilise donc cette procédure correctement, mais lui non plus ne donne pas les images de 22 et x.

Je signale aussi cette variante utilisée par un FP 2, correspondant à la propriété :

$f(8\ n) = 8\ n + 13\ n$ $\quad$ Cela peut se schématiser :

$$8 \times n \xrightarrow{+\ 13\ n}$$

Cette procédure est correcte. Mais elle a été employée sans tenir compte des écarts entre les nombres de tours de pédalier, ce qui a donné :

$$8 \xrightarrow{+13} 21$$
$$16 \xrightarrow{+26} 42$$
$$24 \xrightarrow{+39} 63$$
$$40 \xrightarrow{+52} 92$$
$$96 \xrightarrow{+65} 161$$
$$136 \xrightarrow{+78} 214$$

Par contre, les images de 22 et x ont été obtenues en utilisant la procédure fonction.

3°/ Répartition des Procédures

B / P	F	V	S Seule	S_F	S +autre	DS	RT	G	EP	Autres	Ø
FP 1	55	1	9	5	8	7 dont 3 DS seule	6	4	4	3	6
FP 2	31	2	3	3	2	3	1		1	1	2
FP 3	39	11	2	8		1	5			1	
Total	125	14	14	16	10	11	12	4	5	5	8

Tableau donnant la répartition des procédures utilisées dans les 3 promotions

Remarque : - la colonne S(+ autre) correspond à l'utilisation de 2 procédures dont l'une est la procédure S.
- Les effectifs correspondent au nombre de fois où la procédure a été explicitée.

- Ce tableau montre que la procédure la plus utilisée est, de loin, la procédure fonction ; cela est vérifié dans les 3 promotions.
- Même si on ajoute les trois colonnes où la procédure scalaire apparaît (S seule, S_F, S(+ autre)), elle reste encore beaucoup moins fréquente que la procédure fonction puisqu'on obtient un total de 40 alors que la procédure fonction apparait 125 fois.

Cette fréquence de la procédure fonction est encore plus grande si on y ajoute celle de la procédure V.
En particulier, elle croît des FP 1 aux FP 2 et FP 3 :
si on calcule la fréquence d'apparition des procédures F ou V (par rapport au nombre total de procédures explicitées) on obtient environ :

55 % en FP 1
70 % en FP 2
74 % en FP 3

La prépondérance des procédures F ou V est donc encore plus nette en FP 3 que dans les autres promotions.
On voit que la procédure DS apparaît peu, alors qu'il pouvait être intéressant de remarquer, par exemple, que :

$$136 = 40 + 96$$

donc $f(136) = f(40) + f(96)$.

Il suffisait alors d'utiliser les résultats déjà trouvés.

- En ce qui concerne la répartition des procédures dans les 3 promotions, on observe une plus grande diversité en FP 1 plutôt qu'en FP 2 ou FP 3.
  En effet, en FP 3, les procédures utilisées sont en grande majorité les procédures F, V, et S_F.
  On peut remarquer que ces procédures sont des procédures de réussite, ce qui est en liaison, bien sûr, avec les bons résultats des FP 3.
  Par contre, en FP 1, les procédures autres que la procédure fonction se répartissent sur beaucoup plus de colonnes.
  En particulier, les procédures pouvant conduire à un échec (S_{seule}, DS_{seule}, G, EP) sont plus fréquentes en FP 1.
  Cela correspond évidemment au fait que les résultats sont moins bons en FP 1.
  Par exemple, il n'y a qu'en FP 1 que l'on trouve la procédure DS_{seule} qui est une procédure conduisant à l'échec puisqu'elle ne permet pas de calculer les images de 22 et de x .
  De même, la procédure "Ecarts Proportionnels" (EP), utilisée seule, ne se rencontre qu'en FP 1.
  Il est intéressant de rapprocher ce résultat des conclusions de G. RICCO concernant "les premières acquisitons de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans" (9).
  En effet, cette étude révèle que la découverte de la propriété des écarts proportionnels "est la conduite de réussite la plus primitive" utilisée par les enfants pour résoudre un problème de proportionnalité.
  Il est significatif que cette procédure "primitive" se retrouve chez quelques FP 1 et qu'elle suscite les mêmes erreurs que chez de jeunes enfants :

la démarche de proche ne proche réussit à condition que l'ensemble de départ croisse de 8 en 8.
Les procédures S_{seule} (procédure scalaire utilisée uniquement pour les multiples entiers de 8), DS_{seule}, EP sont des procédures que l'on pourrait donc qualifier de "primitives" puisqu'elles prennent en compte la proportionnalité, mais de façon restreinte.
En effet, seules les images des multiples entiers de 8 peuvent être calculées.
Les normaliens qui utilisent ces procédures "primitives", essentiellement des FP 1, se limitent donc au domaine numérique des entiers naturels et semblent déroutés par l'utilisation d'un rapport rationnel ou réel.
Il faut tout de même remarquer que parmi ceux qui utilisent la procédure S_{seule}, 2 donnent l'image de x en écrivant :

$$x = 8\,a \qquad f(x) = 21\,a$$

- La procédure graphique (G) ne se rencontre aussi qu'en FP 1.
  Mais, sauf dans un cas, elle est associée à une autre procédure qui permet alors de faire les calculs précis.
  Il semblait intéressant de voir si l'utilisation de certaines procédures était liée ou non à la note obtenue pour l'ensemble du questionnaire : en particulier, on pourrait faire l'hypothèse que l'utilisation de procédures "primitives" correspond à un faible niveau de connaissance de la proportionnalité en général.
  J'ai donc étudié la répartition des procédures utilisées dans les cinq classes définies lors de l'évaluation globale des copies.

4°/ Etude de la répartition des procédures utilisées à la question (B) dans les différentes classes :

(B) \ P	1	2	3	4	5	Total
F	9 8	9 8	15 13	23 21	55 50	111
V		1	2	4	7	14
S ou DS + Autre		2	1	5	10	18
S_F	1	1	4	4	6	16
S_{seule}	1	5	1 dont 1 seulement font effectivement les calculs	4	3	14
DS_{seule}	1	1		1		3
RT		1	1	3	3	8
EP_{seule}	2	1				3
G_{seule}				2		2
Autres	1	2	1	1		5
Total	15	23	25	47	84	194

Tableau donnant la répartition des Procédures utilisées à la question (B) dans les différentes classes définies lors de l'évaluation globale des copies

Remarques :

- Seuls les cas où la procédure utilisée en (B) est explicitée ont été répertoriés, soit en tout 194 cas.
- Classe 1 : Note < 20
  Classe 2 : 20 ≤ Note < 25
  Classe 3 : 25 ≤ Note < 30
  Classe 4 : 30 ≤ Note < 35
  Classe 5 : Note ≥ 35
- Les nombres en bas à gauche représentent les pourcentages par rapport au nombre total de procédures F (111).

On peut faire les commentaires suivants :

- La moitié des normaliens qui utilisent la procédure fonction se trouve dans la classe 5 et 71 % d'entre eux dans les classes 4 et 5.
  Ces pourcentages sont légèrement supérieurs à ceux obtenus pour l'ensemble des normaliens (42 % dans la classe 5 et 66 % dans les classes 4 et 5). Vu les effectifs, on est à la limite du significatif.
- Si on regarde les notes obtenues par les normaliens qui utilisent une procédure de type scalaire, il faut distinguer 2 cas :

(1) celui où la procédure scalaire (S ou DS) est utilisée avec une autre procédure (F ou RT) : les résultats sont alors légèrement supérieurs à ceux obtenus avec la procédure fonction.
L'Ecart avec les résultats d'ensemble est alors plus grand : 83 % sont dans les classes 4 et 5 contre 66 % pour l'ensemble.

(2) Celui où la procédure scalaire est employée seule (S_{seule} ou DS_{seule}) : les normaliens qui font effectivement les calculs en utilisant ces procédures se trouvent en majorité dans les classes 1 et 2, correspondant à une note inférieure à la moyenne (contre seulement 20 % pour l'ensemble). C'est aussi le cas de ceux qui utilisent la procédure EP_{seule}.
Cela vient donc renforcer l'idée que l'utilisation de ces procédures "primitives" correspond à un très faible niveau de connaissance de la proportionnalité en général.

Par contre, ce sont ceux qui utilisent plusieurs procédures (F ou RT) avec (S ou DS) qui semblent obtenir les meilleurs résultats.
D'autres travaux, en particulier ceux d'A. ROBERT ont amené à des conclusions similaires : les élèves capables de changer de stratégie au cours de la résolution d'un problème seraient aussi ceux qui réussissent le mieux.

En conclusion :

La majorité des normaliens qui réussissent à compléter le tableau utilisent la procédure fonction.
Cette procédure semble donc être la plus sûre, à condition de ne pas arrondir le coefficient de proportionnalité à 2,62 ou 2,6.
Mais le choix des valeurs numériques aurait dû inciter les normaliens à faire des remarques concernant l'utilisation d'une autre procédure (S ou DS).
Or, cela a été fait dans très peu de cas seulement. Sans doute parce que les normaliens ont jugé suffisant d'expliciter une procédure, mais aussi parce qu'ils connaissent mal les propriétés de la fonction linéaire.
Les mauvais résultats à la question (B) correspondent à l'utilisation de procédures "primitives" et sont surtout le fait des FP 1.
L'utilisation de ces procédures "primitives" est liée à un très faible niveau de connaissance de la proportionnalité en général.

QUESTION (C) :

1. Reconnaissance de la Proportionnalité et Justifications

a) Evaluation des justifications observées.

La justification la plus fréquente est celle de la proportionnalité entre la masse du liquide (ou du solide) et son volume ; le coefficient de proportionnalité étant la masse volumique.
Cette justification, codée ρ , est évaluée à 2.

(1) Autres Justifications :

Certains (2 FP 3) sont embarrassés pour répondre car il faut seulement comparer 2 rapports :
"... Donc on compare pour chaque corps sa masse caractéristique pour un cm^3, le fait de comparer ces rapports n'est pas une situation de proportionnalité. La proportionnalité est seulement utilisée si on cherche les masses successives d'un corps connaissant divers volumes. Mais ce type de comparaison ne correspond pas à une situation de proportionnalité".
Cette réponse est intéressante car elle révèle quelle représentation ont certains normaliens d'un problème de proportionnalité : c'est un problème où l'on doit chercher les correspondants de nombres exprimant différentes mesures d'une même grandeur dans une même unité ; c'est à dire où l'on doit compléter un tableau de valeurs numériques.

(2) Justifications ambigües

Exemples :
"Situation de proportionnalité entre 2 solides de même matière ou entre 2 volumes d'un même liquide".

"Masse du volume en relation avec la masse du liquide dans le récipient".

"Rapport de 2 densités en g/cm^3, ce qui donne un chiffre sans unité".

"10 cm^3/62 g et 75 cm^3/225 g".

Ces justifications, associées à la réponse "OUI" ont été évaluées à 1.

3 Justifications associées à la réponse "NON" :

- Celle qui consiste à dire que le liquide de la question a) n'a pas même masse volumique que le liquide de la question b) :

  Exemple :

  "Pour le solide, $\frac{M}{V}$, dans les 2 cas : $\frac{62}{10} = \frac{155}{25} = \frac{465}{75}$

  sont proportionnels.

  Pour que cette situation soit proportionnelle, il aurait fallu que pour le liquide, $\frac{M}{V}$ soit proportionnel, c'est à dire que $\frac{62}{25}$ soit égal à $\frac{225}{75}$ = k. Ce qui n'est pas le cas",

  ou bien :

  "la relation de proportionnalité des volumes de liquide est : x 3. Par contre, la relation entre la masse 62 g et la masse 225 n'est pas x 3. Il s'agit donc d'un autre liquide, donc d'un autre problème".

- Celle qui consiste à dire que la masse volumique du solide n'est pas la même que celle du liquide :

  Exemple :

  "V = 10 cm^3 V' = 25 cm^3

  M = 62 g M' = 62 g

  V' = 2,5 V Si proportionnelle M' = M x 2,5".

- Je citerai encore ces 2 justifications de la non proportionnalité :

  "mais il peut exister une situation de proportionnalité entre 2 volumes d'un même liquide ou entre 2 masses d'une même matière".

  "Ce n'est pas une situation de proportionnalité car la réaction de l'objet ne peut être que de 2 types : flotte - ne flotte pas.

  Il n'y a pas de progression proportionnelle".

  Toutes ces justifications, associées à la réponse "NON" ont été évaluées à 0.

- L'Absence de Justification a été codée Ø .

b) Résultats concernant les Justifications.

© R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	28 30	13 31	26 40	67 33
1	27 29	8 20	16 24	51 25
O	12 13	7 17	17 26	36 18
NS	23 24	7 17	1	31 15
NR	4	7 17	6 9	17 8
Total	94	42	66	202

Tableau des Résultats dans les 3 promotions

Ce tableau montre que sur l'ensemble des normaliens, 33 % seulement reconnaissent la proportionnalité et la justifient de façon correcte.
25 % reconnaissent aussi la proportionnalité, mais ne justifient pas leur réponse ou donnent une justification ambigüe.
Il faut remarquer les pourcentages assez importants de ceux qui répondent "NON" (18 %) et de ceux qui ne savent pas (15 %).
Enfin, un petit pourcentage (8 %) ne répond pas.
Si on compare les résultats des 3 promotions, c'est encore en FP 3 que le taux de Bonne Réponse est le plus fort : 40 %.
Par contre, le pourcentage de FP 3 qui répondent "NON" est plus important que celui des FP 1. Alors qu'il y a beaucoup plus de "Ne sais pas" chez les FP 1 que chez les FP 3 (1 seul "Ne sais pas").
Il semble donc que les FP 1 qui ont hésité devant la question (C) n'ont pas osé s'engager sur "OUI" ou "NON" mais se sont contentés du "je ne sais pas".
Alors que les FP 3 ont presque tous répondu "OUI" ou "NON" (seulement 1 "Je ne sais pas" et 9 non-réponses).
La suprématie des FP 3 sur les FP 1 est moins marquée pour cette question. Mais les FP 3 prennent plus de risques en choisissant de répondre "OUI" ou "NON" plutôt que "Je ne sais pas".

c) Répartition des Justifications

(C) J	FP 1	FP 2	FP 3	Total
ρ	28 / 30	13 / 31	26 / 40	67 / 33
Autres	4	7 / 17	11 / 17	21 / 10
$\emptyset$	62 / 66	22 / 52	29 / 44	113 / 55
Total	94	42	66	202

Tableau donnant la répartition des Justifications à la question (C) dans les 3 promotions

Le résultat le plus spectaculaire donné par ce tableau est le fort pourcentage de non-justification (55 % soit plus de la majorité des normaliens).
Ce pourcentage est important dans les 3 promotions, mais son importance décroît des FP 1 (66 %) aux FP 3 (44 %).
Les FP 2 étant encore en position intermédiaire (52 %).
En particulier, en FP 3, une majorité de normaliens justifient, bien ou mal, leur réponses.
On retrouve là un comportement déjà signalé des FP 3 à savoir qu'ils s'engageraient plus dans leurs réponses que les FP 1 ; d'où des justifications plus nombreuses en FP 3, qu'elles soient d'ailleurs bonnes ou mauvaises.

On retrouve les même effectifs pour la justification ρ que pour la note 2, ce qui est normal puisque les justifications autres que ρ ont été évaluées soit à 0, soit à 1.

2. Calculs et Procédures Utilisées

a) Evaluation des Réponses :

Elles ont été évaluées de la façon suivante :

- 2 bonnes réponses avec explicitation des calculs : 2
- 1 seule bonne réponse avec explicitation des calculs : 1
- 2 bonnes réponses sans explicitation des calculs : 1
- Autres cas : 0
  (2 mauvaises réponses ou 1 seule bonne réponse sans explicitation des calculs).

b) Résultats :

Ⓒ C	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	43 / 44	28 / 67	57 / 86	127 / 63
1	14 / 15	4 / 9	2	20 / 10
0	18 / 20	3	2	23 / 12
NR	19 / 20	7 / 17	5	31 / 15
Total	94	42	56	202

Tableau des Résultats à la question Ⓒ dans les 3 promotions

On voit donc que 63 % des normaliens donnent une bonne réponse en explicitant leurs calculs.
Ce pourcentage est pratiquement le double de celui donnant le nombre de normaliens capables de justifier correctement la proportionnalité (33 %).
On se trouve donc dans une situation analogue à celle de la question Ⓐ : les normaliens sont en majorité capables de résoudre un problème de proportionnalité, mais ils ont des difficultés pour préciser quelles grandeurs sont en relation.
Ils utilisent la proportionnalité dans leurs calculs, mais ne savent pas bien la justifier.
Il faut noter également les pourcentages de réponses fausses (12 %) et de non réponse (15 %).
Si on compare les résultats des 3 promotions, on voit là encore que le pourcentage de bonnes réponses croît nettement des FP 1 (44 %) aux FP 2 (67 %) et FP 3 (86 %). Il est même presque le double en FP 3.
D'autre part, les mauvaises réponses viennent essentiellement des FP 1 :
parmi ceux-ci, 3 répondent "OUI" en a) et b) et un répond "OUI" en a) et rien en b).
Les autres répondent "NON" en a) et, en b) répondent "OUI" ou ne répondent pas, sans expliciter leurs calculs.
Lors de l'élaboration du questionnaire, la question a) avait été rajoutée pour essayer de séparer ce qui relevait plutôt de la physique de ce qui relevait plutôt de la notion de proportionnalité.
Elle pouvait être considérée comme plus facile que la question b) puisque le liquide et le solide avaient même masse.

Effectivement, en FP 1, un certain nombre de normaliens répondent "NON" en a) (en explicitant ou non leurs calculs) mais répondent "OUI" ou ne répondent pas en b). En FP 1, ils sont 17 dans ce cas.
Par contre, ce phénomène apparaît beaucoup moins en FP 2 et FP 3 où on trouve seulement 3 normaliens dans chaque promotion qui donne une bonne réponse en a), mais une mauvaise réponse ou pas de réponse en b).
On observe une seule fois le résultat inverse, c'est à dire une mauvaise réponse en a) et une bonne réponse en b).
En FP 1, la question a) a donc bien été perçue comme plus facile que la question b), comme on pouvait s'y attendre. Mais cette différenciation entre les 2 questions disparaît pratiquement en FP 2 et FP 3 où les normaliens sont, dans leur grande majorité, capables de résoudre le problème posé par la question b).

c) Procédures Utilisées :

1°/ Analyse des Procédures Utilisées

(1) La procédure qui consiste à calculer les masses volumiques du solide et du liquide et à les comparer. Cette procédure est codée ρ .

(2) La procédure, valable uniquement en a), qui consiste à comparer uniquement le volume du liquide et celui du solide, puisque leur masse est la même.

Si $Vol_{solide} > Vol_{liquide}$ le solide flotte

$Vol_{solide} < Vol_{liquide}$ le solide ne flotte pas

Cette procédure est codée V .

(3) La procédure qui consiste à calculer la masse d'un solide de même matière, mais de volume égal à celui du liquide (25 cm^3 et 75 cm^3).

Alors si $Masse_{solide} < Masse_{liquide}$ le solide flotte

si $Masse_{solide} > Masse_{liquide}$ le solide ne flotte pas.

Cette procédure est codée L .

(4) La procédure qui consiste à calculer la masse de 10 cm^3 de liquide :

Alors si $Masse_{liquide} > Masse_{solide}$ le solide flotte

Autres procédures rencontrées

- Procédures de Réussite :
  - se ramener à un même volume de 100 cm^3 pour le liquide et le solide,
  - se ramener à une même masse pour le liquide et le solide et raisonner sur les volumes,
  - comparer $\frac{Vol_{solide}}{Masse_{solide}}$ et $\frac{Vol_{liquide}}{Masse_{liquide}}$

- Procédures d'Echec :
  - comparer le volume du liquide et le volume du solide :

$Vol_{liquide} > Vol_{solide}$ donc le solide flotte

- comparer la masse du liquide et la masse du solide :

$Masse_{liquide} > Masse_{solide}$ donc le solide flotte

- Je citerai aussi cet exemple :

"75 = 25 x 3
62 x 3 = 186 g donc il flotte".

. Ces procédures sont répertoriées dans la rubrique "autres".

. Quand une procédure n'a pas été explicitée, j'ai codée ∅.

2°/ Répartition des Procédures

© P	FP 1	FP 2	FP 3	Total
ρ	19	11	25	55
V	6	4	2	12
L	17	15	18	50
S	11	4	12	27
Autres	4	1	2	7
∅	43	12	10	65
Total	100	47	69	216

Tableau donnant la répartition des procédures utilisées pour © dans les 3 promotions
(les effectifs correspondent au nombre de fois où la procédure a été rencontrée)

- Il n'a pas toujours été possible de déterminer la procédure utilisée, ce qui explique le nombre important de procédures non explicitées. Là encore, il faut remarquer que c'est en FP 1 qu'elles sont les plus nombreuses.
Parmi les procédures explicitées par l'ensemble des normaliens, la plus fréquente est la procédure ρ , suivie de près par la procédure L.
La procédure S apparaît en gros deux fois moins souvent que les procédures ρ ou L.
Cet ordre d'utilisation des procédures varie si on regarde la répartition dans les 3 promotions :
en effet, en FP 1, la procédure L apparaît presque autant de fois que la procédure ρ et en FP 2, elle est plus fréquente.
La procédure S, qui paraît effectivement moins naturelle et qui, en outre, ne correspond pas à la définition donnée dans la question, est moins fréquente dans les 3 promotions.
- Il est intéressant de remarquer que la procédure V, valable pour a) seulement est très peu utilisée. Elle permettait pourtant de répondre à la question sans faire de calculs. Dans leur grande majorité, les normaliens n'ont pas tenu compte de ce cas particulier où le solide et le liquide avaient même masse.
- La moitié de ceux qui utilisent la procédure V donnent une bonne réponse pour a) mais se trompent ou ne donnent pas de réponse pour b).
Lorsque le normalien n'a pas été capable de trouver une procédure de calcul efficace pour b), la procédure V, employée en a), est donc liées à un échec.
Par contre, en cas de réussite, elle est très peu employée.

QUESTIONS (E) , (E') , (E") concernant la Traduction Graphique de la proportionnalité :

1. Reconnaissance de la Proportionnalité et Justifications

a) Evaluation des Justifications observées.

(1) Justifications faisant intervenir la croissance

Remarque :

Vu l'éventail très large des justifications, j'ai mis la note 2 chaque fois que l'argument proposé n'était pas faux, même s'il peut paraître insuffisant pour justifier la proportionnalité.

Question (E) : elles expriment que "la croissance n'est pas régulière" ou que "la progression n'est pas continue". Ces justifications sont codées $\overline{C}$ et, associées à la réponse "NON", elles sont évaluées à 2.
L'une d'elles fait explicitement référence aux 3 points ayant même ordonnée.
Elle est codée MV et est aussi évaluée à 2.

Question (E') :

Il y a 2 sortes de justifications faisant intervenir la croissance :
- celles qui expriment que la croissance n'est pas régulière sans doute dans le sens où le taux de croissance n'est pas constant. Mais cela n'est pas dit explicitement.
Exemples :
"la croissance n'est pas constante"
"la croissance est exponentielle"
"la courbe est croissante, mais non proportionnelle"
"la croissance de la courbe est irrégulière, le rapport $\frac{y}{x}$ ne donne pas une constante"

"la croissance est plus forte quand on va vers des nombres plus grands"
Ces justifications codées $\overline{C}$ et associées le plus souvent à un autre type de justification et à la réponse "NON" ont été évaluées à 2.
- celles qui expriment que la croissance est régulière dans le sens où elle est stricte, c'est à dire qu'il n'y a pas plusieurs points ayant même ordonnée.
Cette justification, codée C, est souvent associée à la réponse "OUI". Elle est alors évaluée à 0.
Si elle est associée à une autre justification (jugée suffisante) et à la réponse "NON", l'ensemble est alors évalué à 2.

Question (E") :

Les justifications faisant intervenir la croissance expriment que "la croissance est régulière" ou "la progression est continue" ou "la croissance est constante".
Ces justifications, codées C, sont associées à la bonne réponse "OUI" mais, étant insuffisantes, elles sont évaluées à 1.

(2) Justifications se référant à l'idée de droite

Elles sont de deux sortes :
- celles faisant référence à l'idée de droite :
"ce n'est pas une droite" codée $\overline{D}$
"c'est une droite" codée D.

Pour (E) et (E') , la justification $\overline{D}$ est évaluée à 2.

Pour (E") la justification D, associée à la bonne réponse "OUI" est évaluée à 1.

- Celles faisant référence à l'idée de droite passant par l'origine :
  "ce n'est pas une droite passant par l'origine" est codée $\overline{DO}$.
  "C'est une droite passant par l'origine" est codée DO.

Pour (E) et (E') , la justification $\overline{DO}$ est évaluée à 2.

Pour (E") , la justification DO est aussi évaluée à 2.

(3) Justifications faisant intervenir l'idée de Rapport constant

Elles expriment ou bien que le rapport $\frac{y}{x}$ ou $\frac{f(x)}{x}$ n'est pas constant (cas (E) et (E')) : codées $\overline{RC}$, elles sont évaluées à 2.

ou bien que ce rapport est constant (cas (E")) : codées RC, elles sont aussi évaluées à 2.

Certaines se réfèrent à l'Equation de la courbe qui est de la forme $y = ax$ ou qui n'est pas de cette forme.

(4) Justifications mentionnant les mots "fonction linéaire" ou "Relation linéaire"

On trouve surtout ces justifications dans le groupe d'AMIENS (FP 1 et FP 2) où l'Etude des Fonctions Numériques était en cours.

Elles expriment :

- soit que la fonction n'est pas linéaire : codée $\overline{FL}$, cette justification, utilisée pour (E) et (E') est alors évaluée à 2.
- soit que la fonction est linéaire : codée FL, cette justification, utilisée pour (E") est aussi évaluée à 2.

(5) Autres Justifications

On trouve, surtout en FP 1, beaucoup de justifications difficiles à répertorier.
Je donnerai seulement quelques exemples.

(1) Certains normaliens reconnaissent en (E') une parabole. A partir de là, ils cherchent une constante :

exemple :
"Il s'agit d'une courbe dont l'équation est $y = ax^2$ donc $\frac{y}{x^2} = a$ donc il s'agit d'une relation de proportionnalité"

ou bien :

"On a une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$
$a = cste$, $b = cste$ et $c = cste$

$$\frac{y}{x} = \frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$$

Si $c = 0$ $\frac{y}{x} = ax + b \longrightarrow$ proportionnalité

Si $c \neq 0$ non proportionnalité

Pour ce normalien, une relation de proportionnalité est représentée par une droite d'équation $y = ax + b$.
Cette confusion avec une fonction affine se retrouve dans d'autres copies, où la proportionnalité est justifiée en (E") en disant que les points sont alignés sur une droite d'équation $y = ax + b$.

Autre exemple :
Justification associée à la réponse "NON" en (E') :
"il s'agit d'une courbe, or celle-ci ne peut s'écrire sous la forme $x = ky$ ou $x = y + k$".
La même justification est utilisée pour (E) .

Dans ce cas, la proportionnalité est associée à une constante soit additive, soit multiplicative.

2 Plusieurs copies se réfèrent à l'existence d'un coefficient de proportionnalité, mais celui-ci n'est pas forcément constant :

Exemple de justification associée à un "je ne sais pas" en E' :

"D'après la courbe, la fonction est régulière, mais si coefficient de proportionnalité il y a, celui-ci sera variable".

3 Un certain nombre de normaliens comparent la croissance de l'ordonnée et de l'abscisse :

Exemples :

Pour E" : "les Ecarts entre les points augmentent à mesure que l'on augmente la valeur des points" (associée à la réponse "OUI").

Pour E' "non car l'espace séparant deux abscisses ne croît pas de la même façon que l'espace qui sépare les deux ordonnées correspondantes"

ou bien (associée à "OUI")

"l'augmentation entre 2 points consécutifs paraît être proportionnée"

ou bien (associée à "NON")

"les x varient mais les y varient de façon non proportionnelle".

4 Enfin, certaines justifications restent très vagues, bien que faisant souvent référence à l'idée de constante :

Exemple :

Pour E : "la Relation qui unit les deux données n'est pas constante".

Cette justification est reprise pour E' telle quelle et pour E" dans sa forme affirmative.
Dans ce cas, la notion de proportionnalité est associée à l'idée de "Relation constante".

Autres exemples :

Pour E : "la progression n'est pas constante".
Cette justification est aussi reprise pour E' et E" .

Pour E et E' : (associée à la réponse "NON") "car le coefficient directeur est différent du coefficient de proportionnalité".
On peut remarquer que dans les 3 cas, bien que les justifications soient insuffisantes, les réponses aux 3 questions sont justes.

- Pour E' (associée à "OUI") :
  "la progression de l'ordonnée est fonction de celle des valeurs mises en abscisse".
  La même justification est reprise pour E" .
  Là, il n'y a même plus l'idée de constante.
- Pour E' (associée à "je ne sais pas") :
  "On ne peut donner un résultat pour toute la courbe ne connaissant pas l'origine".

b) Résultats aux questions de Reconnaissance.

Question (E)

(E) R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	70 74	36 86	52 79	158 78
1	18 19	6 14	12 18	36 18
0	2		1	3
NS	3			3
NR	1		1	2
Total	94	42	66	202

Tableau des Résultats à la question de Reconnaissance

(E) dans les 3 promotions

Une très forte majorité de normaliens (78 %) ne reconnaît pas la proportionnalité et en donne une justification suffisante.
Néanmoins 18 % ne justifient pas de façon correcte la non-proportionnalité.
Les pourcentages de réussite sont à peu près les mêmes dans les 3 promotions, avec un léger avantage pour les FP 2.

2 FP 1 répondent "OUI", l'un sans justification, l'autre en exprimant les valeurs des abscisses x et des ordonnées y correspondantes.
1 FP 3 répond "OUI" en donnant comme justification :
"Il existe une relation de proportionnalité sur l'axe des x. Les points choisis ayant tous une origine de même rapport sur l'axe des x".
Il fait sans doute allusion au fait que les abscisses des points augmentent de 1 en 1.
Par contre, ce normalien répond correctement à (E') et (E") en se référant à l'idée de rapport constant.

Question (E')

(E') R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	48 51	30 71	36 54	114 56
1	21 22	7 17	15 23	43 21
0	14 15	4 9	5 7	23 11
NS	10 11	1	9 14	20 10
NR	1		1	2
Total	94	42	66	202

Tableau des Résultats à la question de Reconnaissance

(E') dans les 3 promotions

Cette question est moins bien réussie que la question (E) puisque seulement 56 % des normaliens ne reconnaissent pas la proportionnalité et en donnent une justification suffisante.
21 % répondent "NON", mais leur justification est insuffisante.
Enfin, 23 normaliens reconnaissent la proportionnalité et 20 ne savent pas.
Les premiers résultats montrent que la confusion entre fonction linéaire (représentant une relation de proportionnalité) et fonction strictement croissante existe réellement. Mais pour qu'il y ait confusion la croissance doit être stricte ou, pour reprendre les expressions des normaliens "continue", "régulière".

En effet, la question (E) proposait aussi une fonction croissante, mais au sens large, puisque 3 points avaient même ordonnée.
L'analyse des justifications des normaliens montre que c'est bien l'existence de ce "palier" qui les a conduits en majorité vers la réponse "NON".
La moitié de ceux qui répondent "OUI" ou "Je ne sais pas" en (E') évoquent la présence de ces 3 points dans leur réponse à la question (E) .
Les autres n'avaient pas justifié leur bonne réponse en (E) ou avaient donné une mauvaise réponse.
Mais il est intéressant de remarquer que certains (9) avaient donné une justification en (E) qu'ils auraient pu reprendre en (E') , du type "Ce n'est pas une droite" ou "les rapports ne sont pas constants".

La confusion Proportionnalité - Fonction strictement croissante était sans doute trop forte pour qu'ils pensent à reprendre leur justification précédente.
- Si on compare les résultats des 3 promotions, on voit que les pourcentages de réussite sont sensiblement les mêmes en FP 1 et FP 3. Par contre, les FP 2 ont mieux réussi cette question, tout comme la question (E) .
Il faut tout de même remarquer que sur les 23 qui obtiennent 0, 14 sont des FP 1.

<u>Question</u> (E")

(E") R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	43 46	24 57	33 50	100 50
1	41 44	16 38	30 45	87 43
0	1	1	1	3
NS	7	1	1	9
NR	2		1	3
Total	94	42	66	202

<u>Tableau des Résultats à la question de Reconnaissance</u>

(E") <u>dans les 3 promotions</u>

- La presque totalité des normaliens reconnaît la proportionnalité, mais seulement la moitié est capable de donner une justification suffisante.

L'autre moitié soit ne justifie pas, soit donne une justification insuffisante. En particulier, on trouve beaucoup la justification D ("c'est une droite") sans que soit précisé si elle doit passer ou non par l'origine.

Pour savoir si les normaliens qui se contentent de cette justification confondent réellement fonction linéaire et fonction affine, il aurait fallu rajouter un graphique avec des points alignés sur une droite ne passant pas par l'origine.

Cela n'a pas été fait car le questionnaire était déjà assez long.

Mais une comparaison avec les résultats de la question (G) pourrait peut-être nous permettre de savoir s'il y a eu ou non confusion.

- Parmi les 3 qui répondent "NON", un ne justifie pas sa réponse, un autre dit "non car $f(x)$ est sous la forme $f(x) = ax + b$ empêche la proportionnalité".

Celui-ci ne semble pas connaître les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines puisqu'il justifie sa réponse "OUI" à la question (E') en disant : "oui car $f(x)$ est sous la forme $f(x) = ax$ coefficient de proportionnalité".

Le troisième justifie sa réponse "NON" en disant : "la courbe ne semble pas augmenter selon un coefficient k.cad que les distances entre deux points n'ont pas une progression en fonction d'un k".

Si on compare les résultats des 3 promotions, on voit que les pourcentages de réussite sont sensiblement les mêmes avec, de nouveau, un léger avantage en FP 2.

Pour ces 3 questions concernant la Traduction Graphique de la proportionnalité, on ne peut donc pas conclure à une meilleure réussite des FP 3 par rapport aux FP 1 ou FP 2.

Par contre, pour les 3 questions, les résultats sont meilleurs en FP 2. Cela s'explique peut-être par le fait que sur 42 FP 2, 26 sont d'AMIENS où l'Etude des fonctions numériques était en cours au moment de la passation du questionnaire.

c) Répartition des Justifications.

(E) J	FP 1	FP 2	FP 3	Total
$\overline{C}$	12	4	9	25
MV	11	8	15	34
$\overline{D}$	36	14	19	69
$\overline{DO}$	8	4	1	13
$\overline{RC}$	7	12	25	44
$\overline{FL}$	6	4		10
Autres	8	4	9	21
Ø	16	4	6	26

Répartition des Justifications pour (E) dans les 3 promotions

(E') J	FP 1	FP 2	FP 3	Total
$\overline{C}$	3	2	6	8
C	3	1	5	9
$\overline{D}$	26	13	18	57
$\overline{DO}$	8	5	1	14
$\overline{RC}$	7	11	17	25
$\overline{FL}$	6	3		9
Autres	23	7	13	46
Ø	24	10	12	46

Répartition des Justifications pour (E') dans les 3 promotions

- Pour la question (E) , ce sont les justifications $\overline{D}$ et $\overline{DO}$, se référant à l'idée de droite, qui apparaissent le plus souvent (82 fois au total).
Elles sont suivies par les justifications $\overline{C}$ et $\overline{MV}$ faisant intervenir la croissance (59 fois), puis par $\overline{RC}$ (44 fois).
On peut remarquer que cette justification $\overline{RC}$, se référant au Rapport constant entre ordonnée et abscisse se rencontre nettement plus souvent en FP 2 et FP 3 qu'en FP 1.

- Pour la question (E') , ce sont encore les justifications $\overline{D}$ et $\overline{DO}$ qui sont les plus fréquentes (elles apparaissent 71 fois en tout).
Mais il faut surtout remarquer le nombre important de justifications classées "autres". (43).
Comme on l'a vu, ce sont souvent des commentaires ambigus, difficiles à interpréter et à répertorier.
La moitié de ces justifications viennent des FP 1.
Les justifications faisant intervenir la croissance (C et $\overline{C}$) sont finalement peu fréquentes.
La justification $\overline{RC}$ apparaît moins souvent que pour la question (E) , alors que c'est une bonne justification dans les 2 cas.
Enfin, il faut noter le nombre nettement plus important de réponses non justifiées.

(E") J	C	D	DO	RC	E	FL	Autres	∅
FP 1	7	28	24	13	8	4	12	19
FP 2	1	8	11	12	2	4	8	7
FP 3	4	29	8	26	3	2	6	4
Total	11	65	43	51	13	10	27	30

Tableau donnant la Répartition des Justifications pour (E") dans les 3 promotions

- Ce sont bien sûr les justifications D et DO qui apparaissent le plus souvent (108 fois au total).
Mais l'argument D, qui est insuffisant, est plus fréquent que l'argument DO.
Toutefois, il est souvent associé à l'argument RC ou E et devient alors suffisant.
On peut tout de même regretter que l'argument DO, qui traduit une bonne connaissance de l'aspect graphique de la proportionnalité apparaisse finalement peu souvent dans les justifications des normaliens. Cet argument est encore plus rare pour les questions (E) et (E') , alors qu'il constitue une rapide et bonne justification.

Cela semble traduire une mauvaise connaissance, de la part des normaliens, de l'aspect graphique de la proportionnalité.

On peut également regretter que les mots "fonction linéaire" soient si peu souvent mentionnés.

Ils ne sont mentionnés que par les normaliens d'AMIENS qui, au moment de la passation du questionnaire, étaient justement en train d'étudier les fonctions numériques.

Les autres semblent avoir tout à fait oublié ce qu'est une fonction linéaire.

- L'argument RC apparaît un peu plus souvent que l'argument DO (51 fois) et comme pour E et E' , il est plus fréquent en FP 3.
- Enfin, il y a grossièrement autant de justifications classées "autres" que pour E , donc nettement moins que pour E'.

Les arguments pour E" sont donc moins diversifiés que pour E'.

Etude de la Répartition des arguments graphiques dans les différentes classes définies lors de l'évaluation globale des copies :

Pour tenir compte de l'ensemble des arguments graphiques utilisés en E , E' , E" , j'ai essayé de classer les réponses à ces trois questions en plusieurs groupes :

ces différents groupes traduisent une certaine "hiérarchie" dans les arguments graphiques proposés. Il sera intéressant de les comparer avec les types de conception de la notion de proportionnalité définis à la question III 5 .

Groupe a : il regroupe les réponses où le seul argument valable est celui de croissance.

Exemples :

Justification pour E codée $\overline{C}$

Justification pour E' codée C

Justification pour E" codée C

ou bien

Justification pour E codée MV

Justification pour E' "la croissance est constante"

Justification pour E" "la croissance est constante"

Dans les réponses de ce groupe, il n'y a ni l'idée de droite, ni l'idée de rapport constant, ni l'idée de fonction linéaire.

Groupe b : il regroupe les réponses qui en plus de l'idée de croissance font intervenir l'idée de droite (passant ou non par l'origine ou de rapport (constant ou non), ou bien d'autres arguments supplémentaires.

Exemples :

Justification pour E codée $\overline{D}$

Justification pour E' codée C

Justification pour E" codée D

ou bien

Justification pour E codée MV

Justification pour E' codée Ø

Justification pour E" codée DO

Groupe c : il concerne les réponses faisant intervenir les arguments purements graphiques $\overline{D}$ ou D ("ce n'est pas une droite" ou "c'est une droite").
Mais il n'y a ni l'idée de croissance, ni l'idée de rapport constant, ni l'idée que la droite doit passer par l'origine.

Exemple :

Justification pour E codée $\overline{D}$

Justification pour E' codée $\overline{D}$

Justification pour E" codée D

Groupe d : il concerne aussi les réponses faisant intervenir des arguments purement graphiques, mais avec au moins une fois un argument $\overline{DO}$ ou DO ("ce n'est pas une droite passant par l'origine" ou "c'est une droite passant par l'origine").

Exemples :

Justification pour E codée $\overline{D}$

Justification pour E' codée $\overline{D}$

Justification pour E" codée DO

ou bien

Justification pour E codée $\overline{DO}$

Justification pour E' codée $\overline{DO}$

Justification pour E" codée DO

Groupe e : il regroupe les réponses faisant intervenir l'idée de rapport constant.

Exemple :

Justification pour E codée $\overline{RC}$

Justification pour E' codée $\overline{RC}$

Justification pour E" codée RC

Groupe f : il regroupe les réponses qui, en plus des justifications prédominantes RC ou $\overline{RC}$ fournissent des arguments purement graphiques D, $\overline{D}$, DO ou $\overline{DO}$.

Remarque : les réponses où on trouve en plus l'idée de croissance ont aussi été classées dans f.

Exemples :

Justification pour E codée $\overline{D}$, $\overline{RC}$

Justification pour E' codée $\overline{RC}$

Justification pour E" codée DO, RC

ou bien

Justification pour E codée $\overline{RC}$, $\overline{DO}$

Justification pour E' codée $\overline{RC}$, $\overline{DO}$

Justification pour E" codée RC, DO

Groupe g : dans ce groupe ont été classées les réponses faisant référence à la notion de fonction linéaire.
Cette référence peut être unique :

Exemple :

Justification pour E codée $\overline{FL}$

Justification pour E' codée $\overline{FL}$

Justification pour E" codée FL

ou bien, elle peut-être associée à d'autres arguments :

Exemple :

Justification pour E codée $\overline{D}$, $\overline{FL}$

Justification pour E' codée $\overline{D}$

Justification pour E" codée DO, FL

<u>Groupe h</u> : ont été classées dans ce groupe toutes les réponses "autres" :

<u>Exemples</u> :

Justification pour E : "la Relation n'est pas constante"

Justification pour E' : "la Relation n'est pas constante"

Justification pour E" : "la Relation n'est pas constante"

ou bien

Justification pour E : $\overline{RC}$

Justification pour E' : "il y a une relation constante entre x et y"

Justification pour E" : "il y a une relation constante entre x et y"

Enfin, certains normaliens ne justifient aucune des 3 réponses. Cela sera codée Ø.

Il me semble intéressant d'étudier la répartition de ces groupes d'arguments graphiques dans les différentes classes définies lors de l'évaluation globale des copies :

(voir tableau page suivante)

Classes / Argus graphiques	1	2	3	4	5	Total
a	3 14 16	7 33 28	4 19 15	5 24 10	2 10 2	21 10
b	1	3 12 12	6 25 22	2 8 4	12 50 14	24 12
c		2	6 20 22	11 37 23	11 37 13	30 15
d	1	1	2 8 7	8 32 17	13 52 15	25 12
e		2 10	1	3 18 6	13 68 15	19 9
f		3 8 12	2 7	7 18 15	26 68 31	38 19
g			4 27 14	6 40 12	5 33 6	15 7
h	4 33 22	1	1	4 33 8	2 17	12 6
Ø	9 50 50	6 33 24	1	2 11 4	0 0	18 9
Total	18 9	25 12	27 13	48 24	84 42	202

<u>Tableau donnant la répartition des groupes d'arguments dans les différentes classes</u>

Classe 1 : Note < 20

Classe 2 : 20 ≤ Note < 25

Classe 3 : 25 ≤ Note < 30

Classe 4 : 30 ≤ Note < 35

Classe 5 : Note ≥ 35

On peut faire les commentaires suivants :

- La repartition des normaliens du groupe a dans les cinq classes diffère de celle de l'ensemble des normaliens.

En effet, 33 % d'entre eux sont dans la classe 2 (contre 12 % pour l'ensemble) et seulement 10 % sont dans la classe 5 (contre 42 % pour l'ensemble).

Les arguments graphiques de type a qui font uniquement référence à l'idée de croissance, semblent donc correspondre à un faible niveau de connaissance de la proportionnalité en général.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec la répartition des effectifs du groupe b : en effet, dans ce cas, 50 % des normaliens sont dans la classe 5. Par contre 25 % sont dans la classe 3 contre 13 % pour l'ensemble. L'argument de croissance, utilisé avec d'autres arguments, correspondrait donc à un meilleur niveau.

Les normaliens du groupe c sont plus nombreux dans la classe 4 (37 % contre 24 % au total). On observe la même chose pour le groupe d, mais pour la classe 5 (52 % contre 42 % au total).

L'argument de la droite passant par l'origine semble donc correspondre à un meilleur niveau que l'argument de la droite "tout court", mais la différence n'est pas très marquée.

On peut tout de même remarquer que 3 normaliens du groupe b qui utilisent l'argument DO en plus de la croissance se situent tous les trois dans la classe 5.

Dans le cas des groupes e et f, le pourcentage de la classe 5 dépasse largement celui de l'ensemble des normaliens (68 % contre 42 %).

L'argument du "rapport constant", associé ou non à l'idée de droite correspond donc à un bon niveau de connaissance de la proportionnalité en général.

Contrairement au groupe a, l'utilisation d'autres arguments comme D, DO ou C en plus de l'argument RC ne modifie par les résultats.

L'argument "Rapport Constant" est à lui seul garant d'un bon niveau.

Pour le groupe g, les pourcentages des classes 3 et 4 dépassent ceux calculés pour l'ensemble ; par contre, pour la classe 5, il est inférieur (33 % contre 42 %). La référence à l'idée de fonction linéaire n'est donc pas associée à une bonne connaissance de la proportionnalité.

Pour le groupe h, le pourcentage de la classe 1 est nettement supérieur à celui de l'ensemble (33 % contre 9 %) et le pourcentage de la classe 5 est nettement inférieur (17 % contre 42 %). Les justifications de ce groupe, souvent vagues et ambigües, sont donc liées à une mauvaise connaissance de la proportionnalité en général.

De même, ceux qui ne justifient pas les questions graphiques sont dans les classes les plus faibles.

- Si on regarde la répartition des groupes dans les classes 1 et 2, on voit que les pourcentages sont nettement plus élevés que ceux de l'ensemble pour le groupe h (pour la classe 1 uniquement) et Ø :

- Pour la classe 5, la répartition des groupes est semblable à celle de l'ensemble sauf pour le groupe f : 31 % de ceux de la classe 5 utilisent l'argument f contre seulement 19 % pour l'ensemble.

En résumé :

- Les arguments graphiques faisant uniquement référence à l'idée de croissance correspondent à un faible niveau de connaissance de la proportionnalité en général.
- L'argument de la droite passant par l'origine correspondrait à un meilleur niveau que l'argument de la droite "tout court", mais la différence n'est pas très nette.
- L'argument du "Rapport constant", associé ou non à l'idée de droite correspond à un bon niveau de connaissance de la proportionnalité.
- Les arguments trop vagues ou l'absence d'arguments sont liés à une mauvaise connaissance de la proportionnalité.

Etude de la Répartition des groupes d'Arguments Graphiques dans les 3 promotions :

Arguts graphiques	a	b	c	d	e	f	g	h	∅	Total
FP 1	14 15 67	8 8	14 15	17 18	5 5	8 8	8 8	7 7	13 14 72	94 46
FP 2	5 24	3	5	6	4	7 17	6	3	3 17	42 21
FP 3	2 3 10	13 20	11 17	2 3	10 15	23 35	1	2 3	2 3 11	66 33
Total	21 10	24 12	30 15	25 12	19 9	38 19	15 7	12 6	18 9	202

Tableau donnant la répartition des groupes d'arguments graphiques dans les 3 promotions

- Sur l'ensemble des normaliens, la répartition des différents groupes d'arguments graphiques est très diversifiée :
  - . Environ 1/4 utilisent des arguments purement graphiques c et d.
  - . Un peu plus d'un quart utilisent les arguments e et f faisant référence à la notion de rapport constant.
  - . Un peu moins d'un quart utilisent les arguments de croissance seuls (a) ou avec d'autres arguments (b).

En ce qui concerne la répartition des groupes d'arguments dans les 3 promotions, on peut remarquer :

- Les arguments des FP 3 sont beaucoup moins diversifiés que ceux des autres promotions : en particulier 35 % d'entre eux utilisent l'argument f (contre 19 % pour l'ensemble) et la moitié utilise soit l'argument e, soit l'argument f contre seulement 28 % pour l'ensemble.

Les arguments e et f sont moins utilisés en FP 2 (un quart seulement), mais le contraste est surtout marqué avec les FP 1 où ces arguments ne sont utilisés que dans 13 % des cas.

- Par contre, l'argument a faisant uniquement référence à l'idée de croissance se rencontre surtout chez les FP 1. Dans l'effectif du groupe a, 67 % sont des FP 1 (contre 46 % pour l'ensemble) et seulement 10 % sont des FP 3 (contre 33 %).
- De plus, on peut remarquer que ceux qui ne répondent pas aux questions graphiques sont plus nombreux en FP 1.

On retrouve donc là un résultat déjà énoncé lors de l'analyse d'autres questions : les FP 3 utilisent des arguments graphiques plus "forts" que les FP 1 ou FP 2.

Cela est particulièrement vérifié en ce qui concerne l'argument "Rapport constant". Par contre l'argument a , qui révèle une connaissance insuffisante de la notion de proportionnalité se rencontre peu chez les FP 3.

- Une dernière remarque concerne l'argument "purement graphique" d : il est nettement moins fréquent en FP 3 qu'en FP 1.

Peut-être cela traduit-il une mauvaise connaissance, de la part des FP 3, de la traduction graphique de la notion de proportionnalité. On peut d'ailleurs étendre cela à l'ensemble des normaliens puisque 25 seulement sur (202) utilisent l'argument d (seul). On peut peut-être y rajouter certains normaliens des groupes f et g qui en plus de la référence à la notion de rapport constant ou de fonction linéaire utilisent celle de droite passant par l'origine.

Tri croisé des Arguments Graphiques et des Procédures utilisées en B :

(voir tableau page suivante)

Tri croisé des Arguments Graphiques et des Procédures utilisées en B :

B Arguts graphiques / P	a	b	c	d	e	f	g	h	∅	Total
F ou V	12 10 57	16 13 70	18 14 60	14 11 61	15 12 88	27 22 71	10 8 71	7 6 64	6 5 35	125 64
S ou DS + Autre	1	2	3	5	1	3	1	1	1	18 9
S_F + S_{seule} + DS_{seule}	6 18 28	4 12	4 12	1 3	0 0	6 18 16	3 9	3 9 27	6 18 35	33 17
RT			3	1	1	1			2	8 4
EP seule	2								1	3
G seule			1			1				2
Autres		1	1	2					1	5
Total	21 11	23 12	30 15	23 12	17 9	38 20	14 7	11 6	17 9	194

Tri croisé des Arguments Graphiques et des procédures utilisées en B

Remarque : seuls les cas où la procédure utilisée en B est explicitée ont été répertoriés soit en tout 194 cas.

On peut faire les remarques suivantes :

- la répartition des procédures F ou V dans les différents groupes d'arguments est très diversifiée. Mais elle est sensiblement la même que celle de l'ensemble des normaliens.
En ce qui concerne la répartition des procédures de type scalaire, on peut remarquer que 18 % emploient un argument graphique de type e ou f (contre 29 % au total). D'autre part, 15 % emploient un argument purement graphique type c ou d (contre 27 % au total) et 18 % ne justifient pas du tout (contre seulement 9 %).
Parmi ceux qui utilisent une procédure de type scalaire, il y aurait donc moins de références à l'idée de Rapport Constant ainsi qu'à l'idée de droite passant par l'origine.
On peut noter également que sur les trois normaliens qui utilisent la procédure EP seule, un ne justifie pas du tout et deux utilisent l'argument de croissance a , de niveau "le moins élevé".
- Si on regarde la répartition des groupes d'arguments graphiques dans les différents types de procédures, on note que :

. pour le groupe e, le pourcentage correspondant aux procédures F ou V est nettement plus élevé que celui du total (88 % contre 64 %).

. Par contre, pour le groupe Ø , ce pourcentage est nettement inférieur (35 % contre 64 %).

Parmi les normaliens qui utilisent l'argument e du "rapport constant", on en trouve donc un plus grand nombre qui emploie les procédures F ou V.

Par contre, ceux qui ne justifient pas les questions graphiques seraient plus nombreux à utiliser une procédure de type scalaire (S_F, S_{seule}, DS_{seule} : 35 % contre 17 % au total).
- D'autre part, le pourcentage du groupe a correspondant aux procédures de type scalaire (S_F, S_{seule}, DS_{seule}) est plus élevé que celui de l'ensemble (28 % contre 17 %).

On ne peut pas conclure à une liaison très nette entre une procédure et un type d'argument graphique. Néanmoins, les procédures de type scalaire semblent correspondre à des arguments graphiques "plus faibles" comme a, h , voire à une absence d'arguments graphiques.
Par contre, la procédure fonction (avec reconnaissance ou non de la valeur unitaire) semble plus liée à des arguments graphiques "forts" comme d, e, f .

QUESTION F

1. <u>Reconnaissance de la Proportionnalité et Justifications</u>

a) <u>Evaluation des Justifications observées</u>.

1 Justification reconnaissant la double proportionnalité de la quantité de lait par rapport au nombre de jours et au nombre de vaches : (c'est à dire que la quantité de lait est une forme bilinéaire du nombre de jours et nombre de vaches).
Cette justification, codée DP, est évaluée à 2.

(2) Justification reconnaissant uniquement la proportionnalité par rapport au nombre de jours :
Codée JO, elle est évaluée à 1.

(3) Justification reconnaissant uniquement la proportionnalité par rapport au nombre de vaches :
Codée V , elle est évaluée à 1.

(4) Autres Justifications

- Certains normaliens se contentent d'énumérer les grandeurs intervenant dans le problème :

Exemple : "le nombre de vaches - leur production journalière - le nombre de jours".
A cette liste, certains rajoutent la quantité de lait obtenue.

Autre exemple : associée à la réponse "OUI"

"180 jours
5 vaches
23 l de lait } Proportionnalité entre chacun des 3 éléments"

- Certains normaliens ne reconnaissent pas la proportionnalité car "il s'agit d'une moyenne" ou "il n'y a qu'à multiplier".
Dans un autre cas, la moyenne sert au contraire à justifier la proportionnalité :
"on a un calcul de moyenne donc une situation de proportionnalité".
- Enfin, même s'ils répondent "OUI", certains se contentent de peu :
Exemples : "180 jours - 5 vaches"
ou bien "Nombre de litres de lait par vache et par jour".
Associée à la réponse "OUI", toute justification classée "autre" est évaluée à 1.

b) Résultats à la Question de Reconnaissance

F / R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	15 16	11 26	11 17	37 18
1	54 57	19 45	31 47	104 51
0	15 16	10 24	23 35	48 24
NS	6	2		8
NR	4		1	5
Total	94	42	66	202

Tableau des Résultats à la question de Reconnaissance de F dans les 3 promotions

- Ce tableau montre qu'un petit pourcentage seulement de normaliens reconnaît la double proportionnalité (18 %).
La moitié donne une justification insuffisante ou ne justifie pas du tout.
Enfin, 24 % ne reconnaît pas la proportionnalité.
- Les difficultés des normaliens pour justifier la proportionnalité et préciser les grandeurs en relation, déjà observées dans les questions précédentes, se retrouvent donc ici de façon plus accentuée. Cela est sans doute en relation avec l'existence d'une double proportionnalité donc d'une forme bilinéaire et non plus d'une seule forme linéaire.

- Les taux de réussite sont ici les mêmes en FP 1 et FP 3 ; mais on observe de meilleurs résultats en FP 2.

Par contre, c'est en FP 1 que le pourcentage de mauvaises réponses est le plus faible (16 %) et ce pourcentage croît des FP 1 aux FP 2 (24 %) et FP 3 (35 %). Contrairement aux autres questions, on ne peut donc conclure ici à une meilleure réussite des FP 3.

Au contraire, ce sont les FP 3 qui fournissent le plus de mauvaises réponses.

c) Répartition des Justifications.

F J	DP	JO	V	Autres	∅	Total
FP 1	15 16	19 20	8	24 25	28 30	94
FP 2	11 26	9 21	4 10	6 14	12 28	42
FP 3	11 17	12 18	1	21 32	21 32	66
Total	37 18	40 20	13	51 25	61 30	202

Tableau donnant la répartition des Justifications pour F dans les 3 promotions

Il faut d'abord remarquer le pourcentage important (30 %) de non-justification.

Ce pourcentage est d'ailleurs sensiblement le même dans les 3 promotions.

Pour un quart des normaliens, les justifications fournies sont répertoriées dans la colonne "Autres". Ce sont des justifications ambigues et incomplètes.

Les normaliens qui reconnaissent la double proportionnalité sont ceux qui obtiennent 2 à la question de reconnaissance. On retrouve donc les mêmes effectifs.

- Le résultat le plus intéressant est sans doute la prépondérance de la justification JO (proportionnalité par rapport au nombre de jours) sur la justification V (proportionnalité par rapport au nombre de vaches). Cette prépondérance se retrouve d'ailleurs dans les 3 promotions, particulièrement en FP 3.

Si on ajoute les effectifs des colonnes DP et JO, on constate que la proportionnalité par rapport au nombre de jours est reconnue dans environ 40 % des cas.

- Dans un problème de double proportionnalité comme la question F, la proportionnalité par rapport au nombre de jours est donc celle qui est la mieux perçue par les normaliens.

La reconnaissance de la proportionnalité par rapport à une autre grandeur (ici le nombre de vaches) est plutôt rare.

2. Calculs et Procédures Utilisées

a) Calculs : Résultats.

F C	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	81 86	28 67	56 85	165 82
1	8	7	7	22 11
0	2	2	2	6
NR	3	5	1	9
Total	94	42	66	202

Résultats concernant le calcul de la question F dans les 3 promotions

82 % des normaliens donnent une réponse juste.
Bien qu'ils ne réussissent pas à justifier correctement la proportionnalité, les normaliens sont donc capables de résoudre un problème "simple" de double proportionnalité.
Ce type de comportement s'est déjà rencontré pour la question (A) (Problème d'Echelle).
Que les normaliens sachent faire les calculs est bien sûr rassurant, mais je pense que de futurs enseignants devraient tout de même être capables de reconnaître, dans un problème de simple ou de double proportionnalité, quelles sont les grandeurs en relation.
- Les réponses évaluées à 1 correspondent, soit à une erreur de calcul, soit un calcul inachevé : dans tous les cas, la procédure explicité est juste.
- les réponses fausses correspondent :
  - soit à une procédure fausse :
    Exemple : 23 x 180 ou 23 x 5
  - soit à un résultat faux pour lequel la procédure n'est pas explicitée :
    Exemple : 10350 ; 19200

b) Procédures utilisées.

1°/ Analyse des Procédures Utilisées :

(1) La procédure qui consiste à multiplier en dernier lieu par le temps c'est à dire à calculer d'abord :

23 x 5 = 115 (Quantité de lait produite par 5 vaches en 1 jour)

puis 115 x 180= 20700.

Toutefois, dans beaucoup de copies, on trouve seulement comme réponse : "23 x 5 x 180 = 20700" sans que l'ordre des calculs soit explicitement mentionné.
J'ai donc distingué 2 procédures :
- DT_+ pour laquelle la multiplication en dernier lieu par le temps est explicite.
- DT qui correspond seulement à l'écriture 23 x 5 x 180.

(2) La procédure qui consiste à multiplier en premier lieu par le temps, c'est à dire à calculer d'abord :

23 x 180 = 4140 (Quantité de lait produite par une vache en 180 jours)

puis 4140 x 5 = 20700.
Comme pour le cas précédent, j'ai distingué :
- PT_+ où la multiplication en premier par le temps est explicite.
- PT correspondant seulement à l'écriture 23 x 180 x 5.

(3) La procédure qui consiste à calculer d'abord :

180 x 5 = 900

puis 900 x 23 = 20700
Il faut remarquer que dans ce cas, le produit intermédiaire 180 x 5 ne correspond à aucune grandeur physique, ce qui implique qu'on se place ici sur un plan strictement numérique.
Cela est différent pour les procédures (1) ou (2) où, à chaque fois, le produit intermédiaire correspond à une grandeur physique.

2°/ Répartition des Procédures :

Ⓕ P	DT_+	DT	PT_+	PT	PS	∅	Autres	Total
FP 1	39 41	30 32	13	3		8	1	94
FP 2	11 26	11 26		7		11	2	42
FP 3	32 48	21 32	8	2	1	2		66
Total	82 41	62 31	21 10	12 6	1	21 10	3	202

Tableau donnant la répartition des procédures utilisées pour Ⓕ dans les 3 promotions

- On voit que la procédure qui consiste à multiplier en second lieu par le temps, qu'elle soit explicite (DT_+) ou implicite (DT) est largement majoritaire et cela est vérifié dans les 3 promotions.

Ce résultat rejoint ceux de G. VERGNAUD dans (2) (c'était le même problème proposé à des élèves de 6ème).

- L'analyse des justifications à la question de reconnaissance avait déjà montré la prépondérance de la justification JO (proportionnalité par rapport au nombre de jours). Cette place privilégiée accordée au temps se traduit dans les procédures par une multiplication en dernier lieu par le temps.

Cette constatation a déjà été faite par G. VERNAUD dans (2) où il explique : "la notion de procédure est une notion "finaliste" : ce qui est le mieux pris en compte est placé à la fin, l'ordre des priorités étant alors inversé".

- Enfin, il faut remarquer que la procédure PS , qui ne correspond au calcul intermédiaire d'aucune grandeur physique est pratiquement inexistante.

QUESTION (G)

1. Reconnaissance de la Proportionnalité et Justifications

a) Evaluation des Justifications observées.

(1) La justification, associée à la réponse "OUI" ou "NON" qui consiste à dire que c'est l'allongement du ressort qui est proportionnel à la masse suspendue et non pas la longueur du ressort.
Cette justification, codée AL , est évaluée à 2.

(2) La justification qui exprime que :
"Quand la masse augmente de 100 g, la longueur du Ressort augmente de 3 cm".
Cette justification, codée $100 \rightarrow 3$ est évaluée à 1.
En effet, elle n'explicite pas vraiment les grandeurs en relation.

(3) La justification, associée à la réponse "OUI" qui consiste à dire que la longueur du ressort est proportionnelle à la masse suspendue.
Cette justification, codée L/m est évaluée à 0.

(4) Autres justifications

1. Justification qui exprime que la longueur du ressort est une fonction affine de la masse suspendue.
   Cette justification ne se rencontre que 2 fois en FP 2.
   Elle est évaluée à 2.

2. Justification qui exprime que le graphique n'est pas une droite passant par l'origine.
   Cette justification ne se rencontre aussi que 2 fois.
   Elle est évaluée à 2.

3. Justification qui exprime que le rapport :

   $$\frac{\text{Longueur du Ressort}}{\text{Masse suspendue}}$$

   n'est pas constant (ou que le rapport :

   $$\frac{\text{Allongement du Ressort}}{\text{Masse suspendue}}$$

   est constant)
   La première est associée à la réponse "NON", la seconde à la réponse "OUI".
   Ces 2 justifications sont évaluées à 2.

4. Justifications ambigües ou incomplètes :
   Exemples :
   "longueur du Ressort à vide - longueur du Ressort à plein masse suspendue", "g cm", "3 %", "Constante de Raideur"
   ou encore :

"100	0	10	3"
	100	13	
100			3
	200	16	
100			3
	300	19	

Cette dernière justification, proche de celle codée 100 → 3 exprime que les écarts $f(x) - f(y)$ sont proportionnels aux écarts $x - y$.
Toutes ces justifications sont évaluées à 1.
Je signale aussi la justification :

"m = x x 100g
l = x x 3 cm" évaluée à 0.

b) Résultats à la question de Reconnaissance.

Ⓖ / R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	21 / 22	18 / 43	39 / 59	78 / 39
1	53 / 56	15 / 36	23 / 35	91 / 45
0	11 / 12	3 / 7	2 / 3	16 / 8
NS	4			4
NR	5	6 / 14	2	13
Total	94	42	66	202

Tableau des Résultats à la question de Reconnaissance de Ⓖ dans les 3 promotions

Le plus fort pourcentage (45 %) correspond à la note 1, c'est à dire à des justifications ambigües, qui ne précisent pas quelles sont les grandeurs proportionnelles, ou alors elle correspond à l'absence de justifications.

- Seulement 39 % des normaliens sont capables de dire clairement que c'est l'allongement du ressort qui est proportionnel à la masse suspendue et non pas la longueur du ressort.
- Par contre, seul un petit pourcentage (8 %) se trompe vraiment en affirmant que la longueur du ressort est proportionnelle à la masse suspendue.
- Comme pour les questions A , C et F , on retrouve donc ici les difficultés des normaliens quand il s'agit de préciser les grandeurs en relation et de justifier ainsi la proportionnalité.
- Si on regarde la répartition des résultats dans les 3 promotions, on retrouve un taux de réussite très nettement croissant des FP 1 (22 %) aux FP 3 (59 %), les FP 2 se situant encore en position intermédiaire (43 %).
- D'autre part, on peut remarquer que si une majorité de FP 3 (59 %) obtient la note 2, une majorité semblable de FP 1 (56 %) n'obtient que la note 1.
- Enfin, parmi les 16 qui obtiennent 0, 11 viennent de FP 1.

Cette analyse des résultats dans les 3 promotions montre, une fois de plus, la meilleure réussite, nettement marquée ici, des FP 3 par rapport aux FP 1 et aussi, dans une moindre mesure, par rapport aux FP 2.

c) Répartition des Justifications.

C J	AL	L/M	100 → 3	Autres	∅	Total
FP 1	20	10	18	14	33	95
FP 2	15	3	6	7	11	42
FP 3	39	2	7	6	13	67
Total	74	15	31	27	57	204

Tableau donnant la répartition des Justifications dans les 3 promotions

- On retrouve que la justification AL , évaluée à 2, est beaucoup plus fréquente chez les FP 3 que chez les FP 1.

Par contre, la justification L/m se rencontre plus souvent chez les FP 1 que chez les FP 3 (seulement 2 cas en FP 3).

Cela correspond à la répartition de la note 0 dans les 3 promotions.

On peut remarquer aussi qu'il y a beaucoup plus de FP 1 qui ne justifient pas leur réponse (environ un tiers) que de FP 2 et surtout de FP 3.

- L'analyse de la répartition des justifications dans les 3 promotions vient donc compléter les résultats précédents, à savoir que les FP 3 réussissent nettement mieux que les FP 1 sur une question de reconnaissance de la proportionnalité ; les FP 2 ayant des résultats intermédiaires par rapport aux 2 autres promotions.

2. Calculs et Procédures utilisées

a) Résultats des Calculs.

G C	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	51 54	17 40	47 71	115 57
1	15 16	8 19	10 15	33 16
0	19 20	9 21	6 9	34 17
NR	9 10	8 19	3	20 10
Total	94	42	66	202

Résultats des calculs de la question G dans les 3 promotions

- Les calculs ont été évalués de la façon suivante :
  - tous les calculs justes : 2
  - calculs inachevés / erreur de calcul > avec procédure juste : 1
  - autres cas : 0

Les résultats montrent qu'une petite majorité de normaliens (57 %) fournit des réponses justes.
16 % n'achèvent pas leurs calculs ou font des erreurs.
Mais, ce qu'il faut surtout remarquer, c'est le pourcentage non négligeable de normaliens (17 %) qui donnent des réponses fausses.
Dans la majorité des cas, ces calculs faux sont dûs à une procédure fausse faisant intervenir la proportionnalité de la longueur du ressort par rapport à la masse suspendue.
Si on compare ces résultats avec ceux concernant les justifications, on voit qu'il y a plus de calculs faux que de justifications L/m (environ le double).
En effet, ces résultats faux sont associés soit à une absence de justification, soit à une justification ambigüe (100 $\rightarrow$ 3 par exemple), soit même, dans certains cas, à une bonne justification (AL par exemple). Bien sûr, certains de ces résultats sont aussi associés à la justification L/m. Mais celle-ci ne correspond pas forcément à un calcul faux : bien qu'ayant reconnu le proportionnalité de la longueur du ressort par rapport à la masse suspendue, certains normalines ne la font pas intervenir dans les calculs et donnent des résultats justes.
Ces 2 attitudes tendraient à montrer qu'il n'y a pas forcément de lien entre la reconnaissance (ou non) de la proportionnalité et la réussite aux calculs demandés.
On a déjà vu, pour les questions A et F que, tout en étant capables de résoudre un problème de proportionnalité, les normaliens ne savent pas toujours identifier les grandeurs en relation.

Ici, on a l'exemple de quelques normaliens qui, tout en ayant bien répondu à la question de reconnaissance, utilisent une procédure fausse dans leurs calculs.

- En ce qui concerne le répartition des résultats dans les 3 promotions, on observe de nouveau une meilleure réussite des FP 3 par rapport aux FP 2 et FP 1. Le taux de réussite des FP 2 étant, dans ce cas, inférieur à celui des FP 1.

De même, le pourcentage de FP 1 qui obtiennent la note 0 est le double de celui des FP 3.

Comme pour la question de reconnaissance, on peut donc conclure à une meilleure réussite des FP 3 en ce qui concerne les calculs.

- Très peu de normaliens se sont préoccupés de l'adéquation du Modèle mathématique de la proportionnalité à la situation physique du ressort : 11 FP 3, 8 FP 2 et 5 FP 1 soit au total 24 normaliens ont exprimé que les calculs étaient théoriques et ne correspondaient pas à la réalité. Là encore, on peut remarquer le plus grand nombre de FP 3.

b) Résultats du Graphique.

© G	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	59 63	23 55	52 79	134 67
1	6	1	4	11
0	5	3	2	10
NR	24 25	15 35	8 12	47 23
Total	94	42	66	202

- En majorité, les normaliens font le graphique correctement : ils placent quelques points et les relient par une droite dont l'ordonnée à l'origine est 10.

Certains représentent l'allongement du ressort en fonction de la masse suspendue et obtiennent donc une droite passant par (0, 0).

On peut remarquer que la plupart de ceux qui avaient reconnu la proportionnalité entre la longueur du ressort et la masse suspendue ne s'étonnent pas d'obtenir comme graphique une droite ne passant pas par l'origine.

Pour ces normaliens, on peut donc craindre une confusion entre fonction linéaire et fonction affine et une méconnaissance de la traduction graphique de la proportionnalité.

- La note 1 correspond à des graphiques ambigus, c'est à dire où les points ne sont pas nettement sur une droite passant par (0, 10).

- La note 0 correspond à un graphique faux : les points sont reliés par une courbe qui n'est pas une droite.

Dans ces cas, on peut conclure à une méconnaissance totale de la traduction graphique d'une fonction linéaire ou affine.

Toutefois, la réussite au graphique n'implique pas une bonne connaissance de la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine : en effet, les normaliens peuvent avoir simplement relié les points correspondant aux valeurs numériques du tableau sans savoir à l'avance qu'ils devaient obtenir une droite.

De plus, comme on l'a vu, il y a un certain nombre de normaliens qui obtiennent 0 à la question de reconnaissance mais qui font un graphique juste.

La réussite au graphique ne permet donc pas de déterminer s'il y a une bonne connaissance des fonctions affines et linéaires et de leurs représentations graphiques ou s'il y a confusion entre ces 2 notions.
Enfin, il faut remarquer que très peu de normaliens donnent l'équation de la droite (seulement 18 au total).
D'autre part, très peu de normaliens (seulement deux) reconnaissent que la longueur du ressort est une fonction affine de la masse suspendue.
- Il faut remarquer aussi le taux de non réponse (23 % pour l'ensemble des normaliens). C'est en FP 3 que ce taux est le plus faible, mais il est plus élevé en FP 2 qu'en FP 1.

c) Procédures utilisées.

Les procédures sont les mêmes que celles décrites à la question B :

1 la procédure fonction codée F

2 la procédure "valeur unitaire" codée V correspondant au raisonnement :

$$100\text{ g} \longrightarrow 3\text{ cm}$$
$$1\text{ g} \longrightarrow \frac{3}{100}\text{ cm}$$
$$220\text{ g} \longrightarrow 220 \times \frac{3}{100}\text{ cm}$$

3 la procédure scalaire codée S qui, le plus souvent, est associée à une décomposition additive de 220 en 200 + 20.
Elle correspond au raisonnement suivant :

"$100 \longrightarrow 3$

$20 \longrightarrow \frac{3}{5} = 0{,}6$

pour 200 g, la longueur du ressort est 16 cm donc pour 220 g elle est de 16,6 cm".

4 la procédure "règle de trois" codée RT.

5 La procédure "Ecarts Proportionnels" codée EP : elle exprime que les écarts $f(x) - f(y)$ sont proportionnels aux écarts $x - y$:

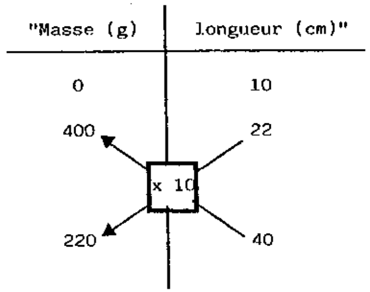
Exemple :
"pour un écart de 100 g ⟶ écart de 3 cm
pour un écart de 20 g ⟶ écart de 0,6 cm
200 g ⟶ 16 cm
220 g ⟶ 16,6 cm
1 kg : 0 à 1 kg ⟶ 10 écarts de 100 g
100g ⟶ 3 cm
donc : 10 écarts ⟶ 30 cm
pour 1 kg : $l = 30 + 10 = 40$ cm
5 kg : 0 à 5 kg ⟶ 50 écarts de 100 g
donc : 50 écarts ⟶ 150 cm
pour 5 kg : $l = 150 + 10 = 160$ cm".

6 2 autres procédures, conduisant à un échec ont été observées :
- La procédure consistant à écrire l'égalité des "quotients en croix" :
"200 g ⟶ 16 cm
220 g ⟶ x $\qquad \frac{200}{x} = \frac{220}{16}$ "

Ce normalien ne sait d'ailleurs pas résoudre une équation puisqu'il écrit ensuite :

"$x = \frac{16 + 200}{220}$ "

- La procédure ainsi explicitée :



Cette procédure revient aussi à écrire :

$$\frac{220}{22} = \frac{400}{40}$$

c'est à dire une égalité de quotients en croix".
On peut remarquer que ce normalien fait les calculs pour 1 g et 5 kg en utilisant que la longueur du ressort est proportionnelle à la masse suspendue.

Répartition des procédures utilisées.

Remarque : quand une procédure n'a pas pu être identifiée, elle a été codée Ø.

© P	F	V	S	RT	EP	Ø	Autres	Total (explicitées)
FP 1	15	4	27	11	3	39	2	62
FP 2	6	1	9		1	26		17
FP 3	13	6	11	9		27		39
Total	34	11	47	20	4	92	2	118

Tableau donnant la répartition des procédures utilisées pour la question © dans les 3 promotions

Dans presque la moitié des cas, il n'a pas été possible de déterminer la procédure utilisée.
Néanmoins, dans l'ensemble des procédures explicitées, c'est la procédure S qui est la plus fréquente (47 fois), suivie par la procédure F (34 fois).
On peut remarquer que si on ajoute les effectifs de F et de V, on obtient un total de 42, voisin de celui de la procédure S.
A part un léger avantage pour la procédure S, il n'y a donc pas de procédure largement majoritaire, comme cela avait été observé pour la question (B).
En particulier, la procédure F n'est pas celle qui est la plus utilisée.
Cela peut s'expliquer par la nature du problème : vu le choix des valeurs numériques, il était aussi facile et aussi rapide de calculer les rapports scalaires $520 = \frac{100}{5}$ ou $20 = \frac{200}{10}$; $5000 = 50 \times 100$) plutôt que le rapport de proportionnalité qu'il fallait ensuite multiplier systématiquement par les valeurs numériques 220, 1, 5000.
Pour cette question, la procédure F ne semble donc pas plus "performante" que la procédure S .
Alors que, dans la question (B) , elle paraît plus sûre puisqu'elle permet un calcul systématique de toutes les images, ce qui n'est pas le cas de la procédure S, du moins lorsqu'elle est restreinte à des rapports scalaires entiers.
On peut remarquer que, dans le cas des FP 3, la procédure fonction est encore majoritaire (surtout si on ajoute les effectifs de F et V).

Ce résultats est sans doute à mettre en relation avec la nette prépondérance des procédures F et V en FP 3 pour la question (B) :
les FP 3 semblent préférer la procédure fonction comme procédure de réussite "sûre" puisqu'il suffit de multiplier systématiquement par le coefficient de proportionnalité. Mais ce coefficient n'est pas toujours un entier et il faut alors se placer dans un domaine numérique autre que $\mathbb{N}$.
Ce n'est pas le cas des normaliens qui utilisent la procédure scalaire restreinte à des rapports entiers : ils se limitent alors au domaine numérique des entiers naturels.

3. Comparaison des Justifications concernant les questions de reconnaissance (E") et (G) :

L'analyse des justifications associées à la question (E") a montré qu'un certain nombre de normaliens répondent "OUI" en donnant comme seul argument que "c'est une droite". Pour ces normaliens, il était intéressant d'analyser leurs réponses à la question (G) :

(G) J / (E") J	AL	L/m	100 → 3	Autres	∅	Total
DO	20 46 48	2 5 33	5 12 45	7 16 70	9 21 43	43 48
D (seule)	22 47 50	4 8 66	6 13 54	3 6 30	12 25 57	47 52
Total	42 47	6 7	11 12	10 11	21 23	90

Comparaison des justifications utilisées en (E") (seulement D et DO) et en (G)

- La répartition des normaliens qui utilisent l'argument DO en (E") est semblable à celle de l'ensemble. Il en est de même pour ceux qui utilisent l'argument D.
- La seule chose à remarquer est que sur les 6 normaliens qui utilisent la justification L/m en (G) , les deux tiers utilisent l'argument D en (E") (contre 52 % pour l'ensemble).

Pour ces 4 normaliens, on peut estimer que la proportionnalité se traduit graphiquement par une droite ne passant pas forcément par l'origine.
L'analyse des réponses à la question (G) a montré que la justification L/m n'est pas forcément associée à un calcul faux et qu'inversement une justification suffisante voire bonne peut correspondre à un calcul faux faisant intervenir la proportionnalité de la masse par rapport à la longueur du ressort.
On peut donc aussi regarder comment ceux qui utilisent le seul argument graphique D réussissent les calculs de la question (G) :

(G) C / (E") J	2	1	0	NR	Total
DO	35 81 56	3 7 30	3 7 20	2	43 48
D (seule)	27 57 43	7 15 70	12 25 80	1	47 52
Total	62 69	10 11	15 17	3 3	90

Résultats aux calculs de la question (G) correspondant aux justifications D et DO utilisées en (E")

- Parmi les normaliens qui utilisent l'argument DO en (E") 81 % obtiennent la note 2 aux calculs de (G) (contre 69 % pour l'ensemble) et seulement 7 % obtiennent la note 0 (contre 17 % pour l'ensemble).

Ceux qui utilisent l'argument DO en (E") semblent donc obtenir de meilleurs résultats aux calculs de (G).

- Par contre, la répartition de ceux qui utilisent l'argument D (seul) en (E") est comparable à celle de l'ensemble des normaliens.

- Parmi les normaliens qui obtiennent la note 1, 70 % utilisent l'argument D (contre 52 % pour l'ensemble) ; et parmi ceux qui obtiennent la note 0,80 % utilisent l'argument D en (E").

Les mauvais résultats aux calculs de (G) sont donc liés à un argument graphique plus faible en (E").

En conclusion, on peut seulement dire que pour quelques normaliens, la proportionnalité se traduit graphiquement par une droite (ne passant pas forcément par l'origine) et qu'ils confondent ainsi fonction linéaire et fonction affine.

L'argument graphique D n'entraîne pas systématiquement une mauvaise réponse aux calculs de (G). Mais il est tout de même lié à des résultats plus faibles.

L'argument graphique DO n'entraîne pas forcément une bonne réponse en (G). Mais il semble lié à de meilleurs résultats aux calculs de (G).

4. Tri croisé des procédures utilisées aux questions B et G :

(G) / (B)	F	V	S	RT	EP	Autres	Total
F	16 28 47	5 9	25 44 57	10 17 50	1		57 51
V	5 15	2	3 7	1			11 10
SF ou F + S	9 50 26		6 33 14	2	1		18 16
S seule ou DS seule	2 6	1	9 70 20			1	13 12
RT ou RT+S	1		1	7 78			9 8
EP					1		1
Autres	1	1					2
Total	34 31	9 8	44 40	20 18	3 3	1	111

Remarque :

Seuls les cas où la procédure a été explicitée pour chacune des 2 questions ont été répertoriées, soit en tout 111 cas.

On retrouve que pour la question (B), la procédure fonction F est majoritaire (51 % des cas) tandis que, pour la question (G), c'est la procédure scalaire S qui vient en tête (40 % des cas).

Ceux qui utilisent la procédure fonction F en (B) se répartissent de la même façon que l'ensemble dans les différentes procédures utilisées en (G).
Par contre, ceux qui utilisent les procédures de type scalaire S ou DS (employées seules) en (B) les réutilisent à la question (G) (70 % de procédures S contre 40 % pour l'ensemble).
Mais, lorsque la procédure scalaire est employée avec une autre procédure (F ou RT) en (B), cette autre procédure est, dans la majorité des cas, réutilisée en (G) :
parmi ceux qui utilisent S_F ou F + S en (B), la moitié utilise F en (G) (contre 31 % pour l'ensemble).
Les normaliens qui utilisent la procédure S en G se répartissent de la même façon que l'ensemble dans les différentes procédures utilisées en (B)
Par contre, parmi ceux qui utilisent la procédure fonction en (G), 26 % avaient utilisé une procédure double S_F ou F + S en (B) (contre 16 % pour l'ensemble) et seulement 6 % avaient utilisé une procédure de type scalaire (S_{seule} ou DS_{seule} contre 12 % pour l'ensemble).
La plupart des normaliens qui utilisent la procédure F en (G) l'avaient déjà utilisée en (B) : en effet, sur 34 normaliens, 30 avaient déjà employé soit F seule, soit V, soit S_F ou F + S.

En conclusion :

Les normaliens qui utilisent la procédure F en (B) ne la réutilisent pas forcément en (G) : en particulier, une majorité d'entre eux utilise la procédure S en (G).

On a déjà vu, lors de l'analyse de la question (G), que ce changement de procédure pouvait s'expliquer par le choix des valeurs numériques : en effet, celles de la question (G) incitaient plutôt à utiliser des procédures de type scalaire ; alors que, pour la question (B), la procédure fonction semblait plus efficace, surtout pour calculer les images de 22 et x.
Mais les normaliens qui emploient pour (B) une procédure différente de la procédure fonction (S_{seule}, DS_{seule}, RT) ont plutôt tendance à réutiliser cette procédure à la question (G).
L'utilisation de la procédure fonction en (B) semble donc permettre un changement de procédure en (G). Dans les autres cas, ce changement semble plus difficile, en particulier dans le cas d'une procédure de type scalaire.

QUESTION (H)

1. Reconnaissance de la Proportionnalité et Justifications

a) Evaluation des Justifications observées.

(1) La justification qui exprime que la longueur est inversement proportionnelle à la largeur, c'est à dire qu'elle est proportionnelle à son inverse.
Cette justification, associée à la réponse "OUI" ou "NON" est codée PI 1 et évaluée à 2.

(2) La justification qui exprime seulement que la longueur et la largeur sont inversement proportionnelles.
Associée à "OUI" ou "NON", cette justification est codée PI 0 et évaluée à 2.

3 La justification qui exprime que si la longueur est multipliée par un nombre x, alors la largeur est divisée par le même nombre x.
Cette justification, codée P_x , est évaluée à 1.

4 La justification qui consiste à dire :
"quand la longueur augmente, la largeur diminue et inversement".
Cette justification, codée P_+ , est aussi évaluée à 1.

5 La justification qui exprime que le rapport :

$$\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} \text{ n'est pas constant.}$$

Cette justification, codée $\overline{RC}$, est évaluée à 2.

6 La justification qui consiste à dire que la longueur est proportionnelle à la largeur.
Associée à la réponse "OUI", cette justification, codée PO , est évaluée à 0.

7 Autres justifications

- Celles qui consistent à donner, comme grandeurs en relation "l'aire - la longueur - la largeur" ou à écrire seulement la formule "A = l x L".
Ces justifications, ambigües, sont évaluées à 1.
- Celles qui consistent à dire que le graphique n'est pas une droite ou que la longueur n'est pas proportionnelle à la largeur : associées à la réponse "NON", ces justifications sont évaluées à 2.
- Celles qui révèlent une représentation fausse de la notion de proportionnalité :

Exemples :

- Justifications associées à la réponse "OUI" :

"longueur - largeur $\frac{l - a}{l} = \frac{L + b}{L}$ "

"si la longueur augmente de 10 cm, la largeur diminue de 10 cm".
"Il faut ajouter et retrancher à chaque fois la même chose".
Ces 2 dernières justifications s'apparentent à P_+ , mais l'augmentation (ou la diminution) est comprise de façon additive et non multiplicative.
Il en est de même dans la première justification où la longueur L augmente de b pendant que la largeur l diminue de a .
Ces justifications sont évaluées à 0.

b) Résultats à la question de Reconnaissance.

(H) R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	16 17	9 21	15 23	40 20
1	42 45	16 38	33 50	91 45
0	14 15	5 12	9 14	28 14
NS	11 12	2	5	18 9
NR	11 12	10 24	4	25 12
Total	94	42	66	202

Tableau des résultats à la question de reconnaissance de (H) dans les 3 promotions

- On peut faire les commentaires suivants :
- Seulement 20 % des normaliens reconnaissent la proportionnalité inverse ou du moins, savent expliquer clairement pourquoi la longueur n'est pas proportionnelle à la largeur.
- 14 % des normaliens obtiennent 0, c'est à dire, dans la majorité des cas, répondent que la longueur est proportionnelle à la largeur.
Pour ceux-ci, on peut douter de leur compréhension de la notion de proportionnalité.
- Le pourcentage le plus important est celui correspondant à la note 1 (45 %). Elle correspond à la réponse "OUI" ou "NON" associée soit à une absence de justification soit à une justification ambigüe type P_x ou P_+ .
Parmi les justifications évaluées à 1, une bonne moitié est associée à la réponse "OUI". Il y a ambiguïté à cause de la proportionnalité entre la longueur et l'inverse de la largeur. Mais, vu le petit nombre de justifications de ce type, on pourrait penser que les normaliens ont répondu "OUI" sans avoir l'idée de la proportion inverse, simplement en observant que "quelque chose reste constant". Leur réponse "OUI" correspondrait alors à une mauvaise connaissance de la notion de proportionnalité.
En revanche, ceux sui ont répondu "NON" sans justification ou avec une justification type P_+ ou P_x ne reconnaissent pas la proportionnalité. Mais il est vraisemblable que les grandeurs auxquelles ils pensent soient la longueur et la largeur. Leur réponse ne serait alors pas fausse mais seulement incomplète.
- Il faut remarquer aussi le pourcentage de non réponse (12 %) dû essentiellement aux FP 1 et FP 2.
- Si on compare les résultats dans les 3 promotions, on observe de nouveau la croissance du taux de réussite des FP 1 (17 %) aux FP 2 (21 %) et FP 3 (23 %).

Là encore, on constate une meilleure réussite des FP 3, mais elle est moins marquée que pour d'autres questions (G par exemple).
Le pourcentage de ceux qui obtiennent 0 est à peu près le même dans les 3 promotions. Par contre, il y a moins de "je ne sais pas" et de non réponse en FP 3 que dans les autres promotions.
Comme on l'a déjà vu, cela correspond sans doute à un plus grand "engagement" des FP 3, alors que les FP 1 hésitent davantage à se prononcer.

c) <u>Répartition des Justifications</u>.

H / J	PI 1	PI 0	PO	P_x	P_+	$\overline{RC}$	Autres	∅
FP 1	1	13	14	5	10	4	15	39
FP 2	3	2	2	5	5	3	4	21
FP 3	1	4	9	15	10	6	13	12
Total	5	19	25	25	25	13	32	72

<u>Tableau donnant la répartition des justifications</u>
<u>à la question</u> H <u>dans les 3 promotions</u>

- Sur 202 normaliens, 72 ne justifient pas du tout leur réponse. Cette absence de justification révèle un embarras certain devant la question.

Si on compare les 3 promotions, le pourcentage de normaliens qui ne justifient pas est de l'ordre de 40 % en FP 1, 50 % en FP 2 mais il est beaucoup plus faible en FP 3 (18 % seulement).
On retrouve donc là les difficultés des normaliens à justifier leurs réponses aux questions de reconnaissance, ces difficultés étant moins grandes en FP 3.
- On observe que la justification PI 1 qui exprime que la longueur est proportionnelle à l'inverse de la largeur est très rare (5 fois seulement).
La justification PI 0 est plus fréquente.
Les justifications PO, P_x, P_+ se rencontrent le même nombre de fois : sur l'ensemble des justifications explicitées :

- P 0 est plus fréquente en FP 1 qu'en FP 2 ou FP 3,
- P_x est plus fréquente en FP 3 qu'en FP 1. De plus,

c'est la justification qui se rencontre le plus souvent en FP 3.
- Il faut aussi remarquer l'importance des justifications classées "autres" qui sont en général ambigües ou incomplètes.
Finalement, les justifications à la question de reconnaissance de (H) sont diverses. Aucune n'est prépondérante, si ce n'est l'absence de justification.
Les justifications les plus satisfaisantes, PI 1 et PI 0 sont plutôt rares.
On est donc tenté de conclure à une mauvaise connaissance de la notion de proportionnalité inverse chez les normaliens. Dans leur grandre majorité, ils sont incapables de reconnaître une situation où intervient cette notion et de la justifier en précisant quelles sont les grandeurs en relation.

2. Résultats concernant le graphique

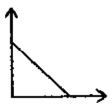
H / G	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	15 16	17 40	24 36	56 28
1	3	3	5	11
0	17 18	4 9	7 11	28 14
NR	59 62	18 43	30 45	107 53
Total	94	42	66	202

Tableau des résultats concernant le graphique de la question (H)

- La première chose à remarquer est le taux important de non réponse (53 %). Ce taux est d'ailleurs plus fort en FP 1 (62 %) qu'en FP 2 et FP 3.
- Seulement 28 % des normaliens font un graphique juste, c'est à dire placent quelques points correctement et les relient par une courbe ayant l'allure d'une branche d'hyperbole.
- La note 1 correspond à une courbe restreinte à quelques points correctement placés ou bien à une courbe n'ayant pas clairement l'allure d'une branche d'hyperbole.

La note 0 correspond à un graphique faux, c'est à dire :

a) Soit à une droite ne passant pas par l'origine et ayant une pente négative :



b) Soit à une droite passant par l'origine.

Elle est obtenue par 14 % des normaliens.

Dans le cas (a) , les normaliens marquent correctement 2 ou 3 points et les relient par une droite. Cela révèle leur méconnaissance totale de la représentation graphique d'une fonction f :

$$x \mapsto \frac{k}{x} \quad (k \in \mathbb{R}^+)$$

De plus, ils ne savent pas que l'équation de la droite qu'ils obtiennent est de la forme $y = ax + b$ et ne peut être de la forme $y = \frac{k}{x}$.

- Parmi tous ceux qui obtiennent une droite, aucun ne s'étonne du fait que son équation serait $y = \frac{Cste}{x}$

On peut d'ailleurs remarquer que l'obtention d'une droite comme graphique est toujours associée à la réponse "OUI" à la question de reconnaissance. En particulier, ceux qui obtiennent une droite passant par (0, 0) semblent logiques avec eux-mêmes.

Parmi ceux qui pensent que la longueur est proportionnelle à la largeur, la plupart ne font pas le graphique, 2 obtiennent une droite passant par l'origine et 3 font un graphique juste.

Il semble donc que les normaliens n'ont pas toujours fait le lien entre leur réponse à la question de reconnaissance et le graphique. Cela traduit une mauvaise connaissance de la traduction graphique de la proportionnalité simple et inverse.

D'ailleurs, on ne rencontre le mot "hyperbole" que dans 2 copies.

Si on compare les résultats des 3 promotions, on voit qu'une fois de plus ils sont meilleurs en FP 3.

(36 % de réussite en FP 3 contre seulement 16 % en FP 1).

Plus de la moitié des normaliens qui obtiennent 0 sont des FP 1 et on a vu que le taux de non réponse était plus fort en FP 1 que dans les 2 autres promotions.

En conclusion, la majorité des normaliens ne sait ni reconnaître (en la justifiant) une situation de proportionnalité inverse, ni que cette notion est liée à l'existence d'une fonction :

$f : x \mapsto \frac{k}{x}$ (k = cste) dont la représentation graphique est une hyperbole.

Les erreurs du graphique montrent aussi que certains normaliens ne connaissent pas l'équation d'une droite.

QUESTION I

1. <u>Reconnaissance de la Proportionnalité et Justifications</u>

a) <u>Evaluation des Justifications observées</u>.

1 La justification qui consiste à dire que la masse est proportionnelle au Volume.

Associée à la réponse "OUI", cette justification est codée ρ et évaluée à 2.

2 La justification qui exprime que la masse (ou le poids) est proportionnelle aux dimensions du parallélépipède (Longueur - largeur - hauteur).
Associée à la réponse "OUI", cette justification est codée m/dim et évaluée à 2.

3 La justification qui consiste à dire que si chaque dimension est divisée par 4, le volume est divisé par $4^3 = 64$, ou de façon générale, si chaque dimension est divisée par x, le volume est divisé par x^3.
Associée à la réponse "NON", cette justification est codée CU et évaluée à 2.

4 La justification qui exprime que le volume (ou la masse) est divisé par 64 :
Exemple :

"$V_o = L_o \times l_o \times h_o$

si $L'_o = \frac{L_o}{4}$, $l'_o = \frac{l_o}{4}$, $h'_o = \frac{h_o}{4}$ alors :

$$V'_o = L'_o \times h'_o \times l'_o = \frac{V_o}{64}$$

On détermine donc V'_o en divisant V_o par 64 :

$$V_o \longrightarrow V'_o = \frac{V_o}{64}$$

$$V_1 = kV_o \longrightarrow V'_1 = kV'_o$$

donc les proportions sont conservées, donc on se trouve dans une situation de proportionnalité de rapport $\frac{1}{64}$".
Cette justification exprime donc que le nouveau volume est une fonction linéaire de l'ancien.
Associée à la réponse "OUI", cette justification codée

$V \longrightarrow V/64$ est évaluée à 2.

5 Autres justifications :

Elles sont très diverses : je n'en donnerai que quelques exemples.
- Certains normaliens se contentent d'écrire la formule donnant le volume du bloc :

$$V = L \times l \times h \quad .$$

- Certains expriment que si le volume est divisé par 64, alors la masse est aussi divisée par 64 ou, en cas d'erreur, si les dimensions sont divisées par 4, alors la masse est divisée par 4.
- D'autres précisent comme grandeurs en relation : "Longueur du bloc - hauteur du bloc - largeur du bloc - Volume du bloc".
Ces justifications sont insuffisantes et évaluées à 1.
Je citerai aussi celle-ci, qui s'apparente à la justification.

4 mais avec une grossière erreur de calcul.
"$V_1 = l \times L \times h$

$$V_2 = \frac{1}{4} l \times \frac{1}{4} L \times \frac{1}{4} h = \frac{1}{4} (l \times L \times h)$$

la masse de V_2 sera $\frac{1}{4}$ de la masse de V_1".

b) Résultats à la question de reconnaissance.

① R	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	20 21	9 21	40 61	69 34
1	43 46	12 28	19 29	74 37
0				
NS	11 12	3	2	16 8
NR	20 21	18 43	5	43 21
Total	94	42	66	202

Tableau des Résultats à la question de reconnaissance de (I) dans les 3 promotions

- 34 % des normaliens donnent une justification estimée correcte mais 37 % ne justifient pas ou le font de façon non satisfaisante.

21 % des normaliens ne répondent pas à la question.

- Si on regarde la répartition des résultats dans les 3 promotions, on observe un taux de réussite nettement plus important en FP 3 (61 %) qu'en FP 1 ou FP 2 (21 %).

De même, le taux de "je ne sais pas" et de non réponse est nettement plus faible en FP 3 que dans les autres promotions.

Là encore, on peut donc conclure à une meilleure réussite des FP 3 par rapport aux FP 1 et FP 2. Mais dans l'ensemble, les normaliens ont du mal à justifier correctement leur réponse de reconnaissance (ou non) de la proportionnalité.

c) Répartition des Justifications.

(I) J	ρ	m/dim	CU	V→V/64 ou M→M/64	∅	Autres
FP 1	11	4	6	2	54	17
FP 2	8		1	2	28	5
FP 3	19	11	3	9	18	10
Total	38	15	10	13	100	32

Tableau donnant la répartition des justifications à la question (I) dans les 3 promotions

- Il faut d'abord remarquer le taux important de non réponse : plus de la moitié des FP 1 et FP 2 ne justifient pas leur réponse. Mais ce taux est nettement plus faible en FP 3 (27 % seulement).

- Si on regarde la répartition des justifications, la plus fréquente est ρ qui se rencontre 38 fois.

Elle apparaît d'ailleurs plus souvent en FP 3 qu'en FP 1 ou FP 2, ce qui est en liaison avec les meilleurs résultats des FP 3.

- Il y a beaucoup de justifications classées "autres" qui souvent sont incomplètes, ambigües et révèlent plutôt un certain embarras des normaliens pour justifier leur réponse.

- On peut aussi remarquer que la justification m/dim précisant comme grandeurs en relation la masse et chacune des dimensions apparaît surtout en FP 3.

- Finalement, la justification qu'on pourrait estimer la plus complète, à savoir que la masse est proportionnelle au volume et le volume à chacune des dimensions, ne se rencontre pas. Il semble que la structure du "produit de mesures" ne soit pas comprise par les normaliens comme une relation de proportionnalité.

Ils connaissent la formule donnant le volume d'un parallélépipède, mais ne l'ont pas analysée comme une forme trilinéaire par rapport aux 3 dimensions.

2. Résultats du Calcul

(I) C	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	28 30	6 14	37 56	71 35
1	9 9	13 31	8 12	30 15
0	22 23	5 12	10 15	37 18
NR	35 37	18 43	11 17	64 32
Total	94	42	66	202

Tableau donnant les résultats au calcul de la question

(I) dans les 3 promotions

On peut faire les commentaires suivants :

- Seulement 35 % des normaliens font un calcul juste, ce qui est peu compte tenu de sa relative simplicité.
- La note 1 correspond soit à un calcul inachevé, soit à une erreur de calcul mais dans les 2 cas, la procédure est juste.

Si on regroupe les notes 1 et 2, on voit que la moitié des normaliens utilise une procédure juste, c'est à dire divise la masse du bloc par 4^3.

Mais l'autre moitié soit ne répond pas (32 %), soit fournit un résultat faux.

- Les résultats faux correspondent le plus souvent à la division de la masse du bloc par 4.

Dans certains cas, ils sont dûs à une grossière erreur de calcul sur les fractions :

Exemple :

"Volume = L x l x h

$\frac{1}{4}$ L x $\frac{1}{4}$ l x $\frac{1}{4}$ h = $\frac{1}{4}$ (L x l x h) = $\frac{1}{4}$ Volume

masse = $\frac{200}{4}$ = 50 kg".

- D'autres erreurs proviennent de la division de la masse par 16 ou par 32.
- L'analyse de la répartition des résultats dans les 3 promotions révèle de nouveau une meilleure réussite des FP 3 par rapport aux 2 autres promotions.

Dans ce cas, les FP 2 sont peu nombreux à obtenir la note 2 mais, si on regroupe les notes 1 et 2, ils sont encore en position intermédiaire entre les FP 1 et les FP 3.

D'autre part, les FP 1 sont plus nombreux à donner un résultat faux que les FP 2 ou FP 3.

On peut aussi remarquer que le taux de non réponse est nettement plus faible en FP 3 que dans les 2 autres pro-promotions.

On peut donc conclure, comme pour la question de reconnaissance, à une meilleure réussite des FP 3 pour le calcul.

- En conclusion, les normaliens ont du mal à reconnaître la structure que G. VERGNAUD appelle "produit de mesures" comme une relation de proportionnalité. Un produit n'est pas analysé comme une forme multilinéaire, c'est à dire comme une forme linéaire par rapport à chacun des facteurs.

Il est vrai que dans l'enseignement qu'ils ont reçu, ils ont eu peu l'occasion de réfléchir sur la trilinéarité du Volume par rapport à chacune des dimensions ; l'essentiel était de connaître la formule et de savoir l'appliquer.
Il y a de grandes chances pour que cela se perpétue dans l'enseignement qu'ils dispenseront.
L'analyse des réponses aux autres questions avait déjà montré les difficultés des normaliens pour justifier la proportionnalité. Ces difficultés s'expriment ici par un taux de non réponse important. Elles sont accentuées par le fait qu'il s'agit d'une forme trilinéaire (le volume) et non plus d'une simple fonction linéaire.
On aurait pu s'attendre à une meilleure réussite dans le calcul, comme c'était en général le cas pour les autres questions. Mais il n'en est rien, sans doute parce que les calculs faux et les non-réponses sont liées à l'absence d'analyse du volume comme une forme trilinéaire par rapport aux 3 dimensions.

QUESTIONS III (1) et III (2)

III (1) Donner deux suites de cinq nombres proportionnelles.

III (2) Donner deux suites de cinq nombres non proportionnelles.

QUESTION III (1)

III (1)	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	54 57	28 67	52 79	134 66
1				
0	34 36	6 14	1 17	5 25
NR	6	8	2	16 8
Total	94	42	66	202

Tableau des résultats à la question III (1) dans les 3 promotions

- Ce tableau montre qu'une bonne majorité de normaliens (66 %) donne une réponse juste.
Mais un quart des normaliens fournit une mauvaise réponse révélant une représentation fausse de la notion de proportionnalité :
il y a plusieurs sources d'erreurs :

1. la plus fréquente (près de la moitié des FP 1 qui obtiennent 0 font cette erreur) consiste à donner 2 suites analogues à celles proposées à la question I (2) , c'est à dire vérifiant la propriété des "écarts constants" :

pour $1 \leq i \leq 4$: $x_{i+1} - x_i = y_{i+1} - y_i = \text{Cste}$.

Ces normaliens ont donc une représentation fausse de la notion de suites proportionnelles.
Ils conservent l'idée de constante, mais elle est additive et provient :

- soit de l'opérateur additif $(+a)$ tel que :

  $1 \leq i \leq 5 \qquad y_i = x_i + a$

- soit de la constante exprimant les écarts entre 2 termes consécutifs de chacune des suites.

2. Une autre erreur, que l'on rencontre chez dix normaliens consiste à proposer 2 suites telles que k quotient de 2 termes consécutifs soit une constante.

<u>Exemle</u> : $(2, 4, 8, 16, 32) = (x_i)_{1 \leq i \leq 5}$

$(5, 15, 45, 135, 405) = (y_i)_{1 \leq i \leq 5}$

pour la 1ère suite : $\dfrac{x_{i+1}}{x_i} = 2 = \text{cste}$

pour la seconde : $\dfrac{y_{i+1}}{y_i} = 3 = \text{cste}$.

Là aussi, les normaliens retiennent l'idée de constante, mais elle intervient comme rapport scalaire entre 2 termes consécutifs d'une même suite et non pas comme rapport fonction entre 2 termes de même rang pris dans 2 suites différentes.
Il y a peut-être une autre interprétation possible, qui m'a été suggérée par le fait que certains normaliens proposent une seule suite de 5 nombres.

Cette suite est construite de la manière suivante :

- soit l'écart entre 2 termes consécutifs est constant :

  <u>Exemple</u> : 2, 4, 6, 8, 10

- soit le quotient entre 2 termes consécutifs est constant :

  <u>Exemple</u> : 2, 4, 8, 16, 32.

Il semble que pour certains normaliens, le mot "proportionnel" puisse s'appliquer à une seule suite ; la construction de cette suite faisant toujours intervenir une constante soit additive, soit multiplicative.
Dans cette logique, il n'est pas étonnant que certains normaliens proposent 2 suites construites de cette façon.
D'ailleurs, certains en proposent une de type additif et l'autre de type multiplicatif.
<u>Exemple</u> : (5, 10, 15, 20, 25)
(100, 1000, 10000, 100000, 1000000).

Cette erreur me paraît grave car elle révèle une incompréhension totale de la notion de suites proportionnelles.
Seule subsiste l'idée d'une constante.

3. Une autre erreur, moins fréquente, consiste à proposer 2 suites telles que l'écart entre 2 termes consécutifs d'une même suite soit constant, mais cette constante n'est pas la même pour les 2 suites.

<u>Exemple</u> : $(x_i)_{1 \leq i \leq 5} = (8, 11, 14, 17, 20)$

$(y_i)_{1 \leq i \leq 5} = (10, 14, 18, 22, 26)$

on a : $x_{i+1} - x_i = \text{cste} = 3$

$y_{i+1} - y_i = \text{cste} = 4$.

Il y a 2 façons d'interpréter cette erreur :

- Confusion avec la fonction affine

$f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

ou, plus exactement, confusion avec la propriété des "écarts proportionnels" :

$$y_j - y_i = \frac{4}{3}(x_j - x_i).$$

- Non compréhension du mot "proportionnel" comme dans le cas précédent : les 2 suites sont alors construites en faisant intervenir une constante additive, mais elles n'ont aucun rapport l'une avec l'autre.

4. Les autres erreurs sont des erreurs de calcul, ou font intervenir des suites n'ayant pas le même nombre de termes ou des suites comprenant 0.
Ces erreurs révèlent donc une méconnaissance grave de la notion de suites proportionnelles chez près d'un quart des normaliens.
La comparaison des résultats dans les 3 promotions montre de nouveau une meilleure réussite des FP 3. En effet, le taux de réussite va croissant des FP 1 (57 %) aux FP 2 (67 %) et FP 3 (79 %).
Par contre, le pourcentage d'erreurs est, en FP 1 le double de celui de FP 3.
- Si on compare les résultats de cette question avec ceux de la question I (2), on peut remarquer que tous ceux qui proposent 2 suites ayant la propriété des "écarts constants" avaient répondu "OUI" à la question I (2).
Pour ces normaliens, la confusion de la proportionnalité avec le propriété des "écarts constants" est donc bien réelle.

QUESTION III (2)

III (2)	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	83 88	32 76	62 94	177 88
1				
0	5	2	1	8
NR	6	8	3	17
Total	94	42	66	202

Tableau des résultats à la question III (2) dans les 3 promotions

Cette question apporte peu d'informations. En choisissant les nombres au hasard, les normaliens avaient peu de chance de construire ainsi des suites proportionnelles. Les normaliens qui obtiennent 0 sont ceux qui proposent une seule suite ou bien 2 suites n'ayant pas le même nombre de termes.

QUESTIONS III (3) et III (4)

III (3) "Donner un exemple de problème, sur des questions de Volume (niveau CM_2-6e) dont la solution relève de la proportionnalité".

III (4) "Donner un exemple de problème, sur des questions de Volume (niveau CM_2-6e) dont la solution ne relève pas de la proportionnalité".

Ces deux questions devaient permettre d'avoir des renseignements sur la façon dont les normaliens se représentent un problème de proportionnalité.
Le domaine de référence a été volontairement restreint à des questions de volume pour que les normaliens se concentrent sur la notion mathématique de proportionnalité et ne se dispersent pas dans la recherche d'autres domaines de référence.
En fait il aurait sans doute été plus intéressant de laisser aux normaliens le choix du domaine de référence : ainsi, on aurait pu voir s'il y avait un domaine privilégié dans l'ensemble des problèmes proposés.
Comme pour les autres questions, j'ai essayé d'évaluer les réponses de 0 à 2, mais l'appréciation n'a pas toujours été aisée...
Dans l'ensemble, les normaliens se sont restreints à des questions de volume. On trouve quand même quelques problèmes relatifs à des quantités de marchandise et leurs prix et aussi quelques autres :
Exemple : "J'ai en moyenne 20 pommes de terre dans 1 kg. Combien ai-je de kg avec 40, 100, 10, 15, 500 pommes de terre ?
Combien ai-je de pommes de terre dans 12 kg, 3 kg ?
Les problèmes de proportionnalité que l'on rencontre le plus souvent font intervenir :

- soit la proportionnalité de la masse par rapport au volume.

- Soit la proportionnalité du volume par rapport au temps (débit constant).
- Soit la proportionnalité du volume par rapport à une des dimensions (longueur, largeur, hauteur).

Pour certains problèmes, il n'a pas été facile de déterminer si la solution faisait intervenir ou non la proportionnalité.
Je propose tout de même l'évaluation suivante :

a) Note égale à 2 :

Elle a été attribuée à toutes les réponses qui ne présentaient aucune ambiguïté :
Exemples de réponses à la question III (3)

1. Problème faisant intervenir la proportionnalité de la masse par rapport au volume :
"Un cube de 1 cm^3 pèse 1 kg. Soit un parallélépipède de 2 cm sur 1 cm et de 5 cm de hauteur, de même matière que le cube. Quel sera le poids de ce deuxième volume ?
Même question pour une pyramide de base un carré de 2 cm de côté et de hauteur 7 cm.
(Même question pour d'autres formes de volume).
Un normalien propose le même type de problème que la question (C) :
"Dites-moi lequel de ces 2 objets flottera le mieux, sachant leur masse et leur volume :

$$\begin{cases} 75\ cm^3 & \text{et} \quad 48\ g \\ 15\ mm^3 & \text{et} \quad 9\ mg \end{cases} \qquad \begin{cases} 49\ cm^3 & 0{,}047\ kg \\ 1{,}2\ m^3 & 625\ kg \end{cases}"$$

On peut d'ailleurs remarquer que cet énoncé ne précise pas quelles sont les valeurs numériques correspondant au volume et à la masse du liquide.

2. Problème faisant intervenir la proportionnalité du Volume par rapport au temps (débit constant) :
"Un baril de vin contient un volume de 20 cm^3 de Beaujolais. Un détaillant veut s'en procurer 6 barils. Quelle quantité aura-t-il ?
Une fois entreposé, il s'aperçoit que le baril a une fuite et qu'en 1 heure, 0,5 cm^3 sont partis.

1 heure	2 heures	3 heures
0,5 cm^3	1 cm^3	1,5 cm^3

Quelle sera la quantité de vin perdue en 24 heures ?"
Ce normalien propose alors comme réponse à la question III 4 :
"même problème sauf qu'au cours des 24 heures la fuite s'agrandit. Débit très irrégulier".
- Sans doute influencés par leurs souvenirs de l'Ecole Primaire, beaucoup de normaliens proposent comme problème le remplissage d'une baignoire ou d'une piscine à débit constant :
"Une baignoire contient 200 l. Le robinet qui l'alimente débite 1 l par minute. En combien de temps la baignoire sera-t-elle pleine ?"

3. Un certain nombre de normaliens, sans doute influencés par la question I proposent un problème faisant intervenir la proportionnalité du volume par rapport à chacune des dimensions.

Exemple :
"Un récipient parallélépipédique de 10 cm de haut, de 5 cm de large et 10 cm de long contient 100 cm^3 d'eau. Quelle est la hauteur du liquide ?
Calcule la hauteur du liquide dans un récipient dont chaque dimension est 2 fois plus grande".

Autre exemple :
"On a un récipient parallélépipédique contenant un certain volume d'eau :
$V = 100\ cm^3$ dont la hauteur h est $h = 10$ cm. On fait varier la base du récipient en la doublant. Calculer la hauteur qu'atteint l'eau". On peut d'ailleurs remarquer que ces deux problèmes utilisent le fait qu'à Volume constant, la hauteur est inversement proportionnelle à la surface de base $S = l \times L$.
Les problèmes proposés à la question III 4 qui ont été évalués à 2 sont aussi ceux pour lesquels il n'y a aucune ambiguïté.

Exemples :
1. Problèmes faisant intervenir un débit non contant.
2. Problèmes se résolvant par une addition ou une soustraction :

Exemple : "Un enfant joue avec des cubes de volumes différents ; il a 3 cubes de 5 cm^3, 4 de 8 cm^3 et 3 de 10 cm^3. Il les utilise tous pour faire une construction. Quel volume aura cette construction ?"

3. Problèmes où le volume n'est pas proportionnel à une des dimensions.

Exemple :
"Calculer le volume d'un sphère de rayon R_o.
$V = \frac{4}{3} R^3$. On constate que si l'on augmente le rayon :
$R = 2 \times R_o$, le volume ne double pas : $V \neq 2 V_o$".

b) Note égale à 1 :
Elle a été attribuée dans tous les cas où il y avait ambiguïté sur l'intervention ou non de la proportionnalité dans la résolution du problème.

Exemples de réponses à la question III (4) :

1. Problèmes faisant intervenir un seul calcul de volume : doit-on estimer que la solution relève de la proportionnalité ?

"Soit une maison de base un rectangle de 7 m sur 4 m ; la hauteur des murs est de 3 m. Le toit est une pyramide de base rectangulaire (7 m sur 4 m), de hauteur 4 m.
Calculer le volume de cette maison".
D'ailleurs, la normalienne rajoute entre parenthèses "pas de variable dans ce problème".
Or, sa réponse à la question précédente III (3) consistait à calculer la masse de plusieurs solides de même matière en fonction de leur volume.
Pour cette normalienne, la proportionnalité semble donc intervenir uniquement quand il s'agit de calculer les images $f(x_1)$, $f(x_2)$... $f(x_n)$ de plusieurs valeurs numériques x_1, x_2,... x_n par une fonction linéaire de coefficient a (a étant ici la masse volumique). Cette remarque "il n'y a pas de variable" se retrouve aussi dans une autre copie.
On trouve aussi plusieurs autres exemples proposant le calcul du volume d'une sphère dont le rayon mesure un certain nombre de cm.

2. Une normalienne propose une situation de proportion inverse analogue à (H) :
"Combien mesure la longueur d'un rectangle dont la largeur est 10 cm et l'aire 100 cm^2 ? Combien devrait mesurer la largeur d'un rectangle dont la longueur est 25 cm et l'aire 100 cm^2 ?"

- Que ce soit comme réponse à la question III (3) ou III (4), un certain nombre d'énoncés sont ambigüs ou imprécis :

Exemples :
(Question III (4)) : "Une baignoire contient 200 l. Elle est remplie aux $\frac{3}{5}$. Combien manque-t-il de l pour la remplir en totalité ?"

Question III 3 : "Calcul du volume d'un parallélépipède lorsque l'une des 3 dimensions change et pas les autres" le même normalien propose alors à la question III (4) : "Volume d'un parallélépipède dont 2 dimensions sur 3 changent", le mot "change" est imprécis.
Il s'agit sans doute des variations du Volume en fonction de l'une des dimensions : si les 2 autres restent constantes il y a proportionnalité - Sinon, il n'y a pas proportionnalité.

Autre exemple :
Question III (3) : "Soit une boule de volume V. On diminue le rayon de 1/3. Quel sera son nouveau volume ?"
Question III (4) : "Soit un parallélépipède de longueur l, de largeur L, de hauteur h, calculer son volume.
Sachant que ses mensurations deviennent $\frac{l}{3}$, $\frac{L}{4}$, $\frac{h}{5}$, déterminer son volume en fonction de l, L, h".
Dans le premier énoncé, l'expression "diminue de 1/3" est imprécise.
Dans le second énoncé, les 3 dimensions ne sont pas divisés par le même nombre, mais le volume est proportionnel à chacune d'entre elles.

- Certains problèmes proposent des valeurs numériques aberrantes ou sont très mal formulés :

Exemples :
"Un cube de 10 cm^3 contient 1 l d'eau. Quelle sera la quantité d'eau contenue dans un cube de 25 cm^3 ?"
(Question III (3))

Question III (4) : "Calculer le volume de 2 rectangles. Ajouter ces 2 volumes. Quel est le volume total ?"

c) Note égale à 0 :

Comme pour a), cette note a été attribuée dans tous les cas où on pouvait dire sans ambiguïté si la solution relevait ou non de la proportionnalité.

Exemples :

- Problèmes faisant intervenir un débit constant en III (4) : "Un robinet débite 100 cm^3 d'eau par minute. Combien de temps faudra-t-il pour remplir une baignoire de 1 m^3 ?"

- Problèmes se résolvant par une addition en III (3) : "On verse un liquide A dans un autre liquide B et on veut savoir quel nouveau volume on aura.

A (cm^3)	B cm^3
0	100
10	
20	
30	
x	

Complétez le tableau et représentez graphiquement"

- Un normalien propose en III (3) un problème faisant intervenir la propriété des "écarts proportionnels".

"Une pièce pesant 10 g fait 13 cm^3

Une pièce pesant 20 g fait 19 cm^3

Une pièce pesant 30 g fait 25 cm^3

Une pièce pesant 40 g fait 31 cm^3

Une pièce pesant 50 g fait ?

Combien fait une pièce pesant 5 kg?"

La même situation est proposée en III (4) , mais cette fois les écarts ne sont pas proportionnels :

"Une pièce pesant 10 g fait 13 cm^3

Une pièce pesant 20 g fait 19 cm^3

Une pièce pesant 30 g fait 22 cm^3

Une pièce pesant 40 g fait 20 cm^3"

On peut remarquer que ce normalien avait répondu "OUI" à la question I (2) , mais par contre avait donné un exemple juste en III (1) .

- Enfin, 3 normaliens proposent pour chaque question un problème de baignoire à remplir mais :

pour III (3) : le bouchon est mal fermé et il y a une fuite,

pour III (4) : il n'y a pas de fuite.

Exemple :

III (3) : "Un robinet remplit une baignoire de 300 l. Ce robinet écoule 6l/mn. Le bouchon mal fermé évacue 3 l/mn.

Dans combien de temps la baignoire sera-t-elle remplie ?"

III (4) : "Ce robinet remplit la même baignoire, mais cette fois ci le bouchon est bien fermé.

Combien de temps faudra-t-il pour remplir la baignoire ?"

d) Résultats :

III 3	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	25 26	11 26	40 61	76 38
1	13 14	3	6	22 11
0	4	1	1	6
NR	52 55	27 64	19 29	98 48
Total	94	42	66	202

Tableau des résultats à la question III 3 dans les 3 promotions

III 4	FP 1	FP 2	FP 3	Total
2	16 17	8 19	15 23	39 19
1	13 14	2	21 32	36 18
0	3	2	5	10
NR	62 66	30 71	25 38	117 58
Total	94	42	66	202

Tableau des résultats à la question III 4 dans les 3 promotions

On peut faire les commentaires suivants :

- Beaucoup de normaliens environ la moitié ne répondent pas ; cela est sans doute en relation avec la place de ces 2 questions dans un questionnaire déjà long ; mais aussi peut-être avec le fait qu'il fallait "inventer" quelque chose.
- Parmi ceux qui répondent à la question III 3, une bonne majorité donne une bonne réponse et il y a finalement très peu de mauvaises réponses.

- Par contre, parmi ceux qui répondent à la question III 4, beaucoup plus donnent une réponse jugée ambigüe et évaluée à 1. En effet, il n'a pas toujours été aisé de déterminer si la proportionnalité intervenait ou n'intervenait pas du tout dans la solution du problème proposé.

Pour cette question, il y a aussi très peu de mauvaises réponses.

Si on regarde la répartition des résultats dans les 3 promotions, on observe que le taux de non réponse est nettement plus fort en FP 1 et FP 2 plutôt qu'en FP 3 où il est presque divisé par 2.

- D'autre part, pour la question III 3 le pourcentage de bonnes réponses est nettement plus important en FP 3 qu'en FP 1 ou FP 2. Celui de FP 3 dépasse le double de celui de FP 1 et FP 2. Cela est moins marqué pour la question III 4.

Les FP 3 sont donc ceux qui ont le plus répondu à ces 2 questions et leurs réponses sont bonnes, surtout pour la question III 3.

- En conclusion, on peut dire que les problèmes proposés par les normaliens sont inspirés des situations C et I du questionnaire (proportionnalité de la masse par rapport au volume et du volume par rapport à chacune des dimensions). Mais les problèmes de débit sont aussi très nombreux : ce sont les "vieux" problèmes de robinets et de baignoire de fin de CM_2...

Finalement, le choix des normaliens reste très traditionnel...

- Un autre aspect intéressant concernant ces problèmes est celui des "tableaux" : beaucoup de normaliens proposent un tableau à compléter ou, tout au moins le calcul de plusieurs images $f(x_1)$, $f(x_2)$... $f(x_n)$ par un opérateur xa ou :a .

C'est ce que 2 normaliens traduisent en disant "qu'il y a des variables".
Cet aspect est encore renforcé si on analyse les exemples de situations de proportionnalité donnés à la question III 5 : dans la majorité des cas, il y a un "tableau" à compléter, ce tableau n'étant pas toujours construit explicitement ; dans certains cas, il s'agit seulement de trouver les images de plusieurs valeurs.
- Pour beaucoup de normaliens, un problème de proportionnalité consiste donc en la recherche des images $f(x_1)$, $f(x_2)$... $f(x_n)$ de plusieurs valeurs numériques x_1, x_2, ... x_n par une fonction linéaire de coefficient a.
On peut remarquer que très peu font allusion à la traduction graphique : cette constatation peut aussi être faite lors de l'analyse des réponses à la question III 5 . D'autre part, dans le cas des questions III 3 et III 4 le domaine de référence était imposé et les normaliens s'y sont en majorité tenus.
Mais les exemples de la question III 5 sont souvent des problèmes où intervient la proportionnalité entre des quantités de marchandises et leurs prix.
Le modèle de problème :
- faisant intervenir la proportionnalité entre des quantités de marchandises et leurs prix,
- demandant de compléter un tableau ou du moins de trouver les images de plusieurs valeurs numériques semble donc très répandu chez les normaliens.

Question III 5 : "Si vous aviez à expliquer à quelqu'un ce qu'est une situation de proportionnalité, que diriez-vous ?
Les réponses à cette question devaient apporter des renseignements sur les différents types de conception de la proportionnalité chez les normaliens.
Comme je l'ai déjà indiqué en A] 2 , il faut être prudent dans l'interprétation des réponses à cette question :
- Ce n'est pas une question habituelle et les normaliens ne sont pas habitués à exprimer par écrit ce que représente pour eux une notion mathématique : leur réponse ne traduit donc pas forcément leur véritable représentation mentale de cette notion.
- D'autre part, c'était la dernière question : beaucoup de normaliens n'ont pas répondu soit par manque de temps, soit parce qu'ils en avaient assez du questionnaire. En aucun cas, on ne peut conclure à une méconnaissance totale de la notion de proportionnalité.
J'ai essayé de classer ces différentes conceptions en plusieurs groupes et de les caractériser : différents types de conception ont ainsi été dégagés :

le type 0 : la proportionnalité est définie comme une relation entre grandeurs :
Exemple : "c'est une situation telle que 2 grandeurs sont en relation, c'est à dire qu'il existe une formule qui les mette en relation quelque soit leur valeur".
Aucune précision n'est donnée sur cette relation si ce n'est parfois que les 2 grandeurs "croissent ensemble" :
Exemple : "ce sont 2 choses qui croissent ensemble et en même temps de la même façon...".

le type 1 : la proportionnalité est aussi définie comme une relation entre grandeurs, mais il y a l'idée d'une constante.

Exemple : "c'est une situation qui, portée dans des circonstances différentes, donne des résultats qui correspondent à une constante près aux résultats initiaux".

Autre exemple :

"Quand une valeur grandit d'un côté (ex : tableau), la valeur qui lui correspond varie, soit en augmentant, soit en rétrécissant. Cette variation est fonction d'une constante ; les variations présentent donc des similitudes constantes".

Aucune précision n'est donnée sur la constante qui intervient.

le type 1' : on a toujours une relation entre 2 grandeurs, mais il est précisé que cette relation fait intervenir une multiplication ou une division.

Exemple : "une situation de proportionnalité est une relation entre 2 éléments que l'on peut expliquer par une division ou une multiplication (ou les 2 à la fois)".

La relation peut aussi faire intervenir une combinaison de plusieurs opérations :

Exemple : "qu'il existe une relation entre les chiffres qui utilise une combinaison avec la multiplication, la soustraction, la division. Et on peut appliquer cette combinaison à partir d'un chiffre et ceci jusqu'à l'infini".

Certains parlent d'opérateur sans aucune précision :

"2 choses sont proportionnelles quand on peut trouver un opérateur".

D'autres précisent que cet opérateur est multiplicatif. "Une situation de proportionnalité est une situation pour laquelle l'opération à effectuer est soit x soit : et le nombre (multiplier par ou diviser par) est constant pour tout l'exercice".

Dans ce dernier cas, il y a bien l'idée d'opérateur multiplicatif constant, mais cela reste vague.

En particulier, les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas précisés.

J'ai aussi classé comme type 1' les conceptions qui font allusion à un rapport ou à un coefficient ; mais où ceux-ci ne sont pas forcément constants.

Exemples :

"Il existe dans cette situation un rapport de divisibilité entre des nombres".

"Il faut expliciter le coefficient de proportionnalité et le trouver".

type 1" : les conceptions de ce type font allusion à un rapport constant mais :

- soit c'est un rapport entre 2 nombres :

Exemples : "2 nombres sont proportionnels si leur rapport est égal à une constante".

"On dit que 2 choses sont proportionnelles quand elles ont entre elles un rapport numérique faisant appel à la multiplication :

2 et 4 sont proportionnels : 4 = 2x 2"

- Soit les 2 termes du rapport sont ambigus ou non précisés :

Exemples: "On a un rapport constant entre les différentes composantes du problème".

"On a un rapport constant entre 2 termes consécutifs".

<u>type 2</u> : les conceptions de ce type expriment l'existence d'un rapport constant (de type fonction) entre 2 suites de nombres, ou entre 2 variables, ou entre 2 grandeurs... Elles s'expriment le plus souvent par une relation du type $y = ax$.

Seuls 2 normaliens font intervenir un rapport de type scalaire :

<u>Exemple</u> : "on aura une situation de proportionnalité si, pour 2 nombres x_1, x_2 caractérisés par $x_2 = q \times x_1$, leurs transformés sont par cette situation y_1 et y_2 et on retrouve $y_2 = q \times y_1$".

- Rares sont les normaliens qui parlent de la traduction graphique d'une situation de proportionnalité, que ce soit une droite (D) ou une droite passant par (0, 0) (DO).
- Ces arguments graphiques viennent d'ailleurs souvent compléter des conceptions de type 1 ou 2.
- Quelques uns parlent de fonction linéaire (FL).
- Au lieu de définir de façon générale la proportionnalité, certains normalines se contentent de donner un exemple. (Cela sera codé Ex).

D'autres complètent la définition générale en donnant un exemple.

Ces exemples font intervenir le plus souvent des quantités de marchandises et leurs prix. Sur 33 exemples répertoriés 12 sont dans ce cas. Mais on trouve aussi des exemples, de problèmes d'engrenages (bicyclette), d'échelle, de recette, de masse volumique, de débit constant, etc...

- Quelques rares normaliens reprennent aussi la propriété des "écarts constants" (EC) pour définir la proportionnalité.

- Enfin, beaucoup ne répondent pas ou donnent une réponse qui ne fournit aucun renseignement sur leur conception de la proportionnalité.

Certains avouent humblement qu'ils ne savent pas :

"Rien, parce que je ne sais pas"

"Je serais bien ennuyée pour répondre"

"Je ne sais pas - je voudrais qu'on m'explique d'abord".

Il y a aussi ceux qui affirment que :

"le sens mathématique est différent du sens courant"

ou

"il suffit de consulter ERMEL"

"C'est dur à expliquer quand on ne comprend pas bien soi-même".

Certaines réponses sont plutôt difficiles à interpréter et ne signifient pas grand'chose :

<u>Exemple</u> : "c'est une situation grâce à laquelle on peut savoir exactement la position d'un point sur la courbe la représentant".

Toutes ces réponses ont été codées Ø.

Il semblait intéressant d'étudier la répartition des différents types de conception dans l'ensemble des normaliens et aussi dans les 3 promotions.

Types	0	1	1'	1"	2	Ex	Autres	Ø	Total
FP 1	4 dt 1DO	13 dt 1D	7	7 dt 1D	19dt 1D 2FL 2DO 20	2	2FL	38 40	94
FP 2			6	4	5 12	3		23 55	42
FP 3		3	8	11	20 30	8	1DO 1FL	13 20	66
Total	4	16	21	22	44 22	13		74 37	202

<u>Tableau donnant la répartition des différents types de de conception dans les 3 promotions</u>

- La première chose à observer est le taux important de non réponse ou de réponse inexploitable : certains normaliens ont sans doute été pris par le temps mais il est vraisemblable qu'un certain nombre d'entre eux ont été embarrassés par cette question et ont abdiqué devant la difficulté à formuler une définition générale de la proportionnalité.

- Le type de conception 2, qui apparaît comme le meilleur est aussi le plus fréquent. Mais il ne se rencontre finalement que chez 22 % des normaliens.
Alors que les types de conception 0, 1, 1', 1" qui révèlent une représentation incomplète, voire fausse de la notion de proportionnalité sont au total beaucoup plus fréquents, ils se rencontrent chez environ 30 % des normaliens.

- Très peu de normaliens font référence à une représentation graphique.
Le plus souvent, l'argument graphique vient compléter une réponse type 1 ou 2.

- Très peu de normaliens font référence à l'idée de fonction linéaire : on a déjà vu, lors de l'analyse des autres questions que le mot "fonction linéaire" ne se rencontrait que très rarement.
Cette notion semble être inconnue des normaliens.

- Finalement, très peu de normaliens donnent une définition juste et complète de la notion de proportionnalité : seuls 4 normaliens ajoutent à leur définition de type 2 un argument graphique (DO) ou indiquent en plus qu'il s'agit d'une fonction linéaire.

Les propriétés de l'isomorphisme linéaire ne sont pas évoquées sauf dans une copie :
"Une situation de proportionnalité doit pouvoir s'imager par une fonction du type $y = ax$.
Elle doit répondre aux propriétés suivantes :
- les images se conservent par la multiplication
l'addition
la multiplication par une valeur constante $kf(x) = ky$".

Ces propriétés ne sont d'ailleurs pas très bien formulées. Cela vient donc renforcer l'idée que les propriétés de l'isomorphisme linéaire sont mal connues, voire même tout à fait inconnues des normaliens.
S'ils sont capables de les utiliser implicitement dans les calculs, ils ne pensent pas à les formuler explicitement dans une définition générale de la notion de proportionnalité.

- Si on regarde la répartition des différents types de conception dans les 3 promotions, on voit que la conception de type 2 est légèrement plus fréquente en FP 3.
Cela viendrait donc renforcer les tendances déjà observées lors de l'analyse des autres questions, à savoir que les FP 3 réussissent mieux et ont donc une conception plus juste et plus complète de la notion de proportionnalité.
On peut aussi remarquer que les conceptions nettement insuffisantes, type 0 et 1 se rencontrent surtout en FP 1.
Par contre, à peu près la moitié des FP 3 ont des conceptions de type 1" ou 2 faisant référence à l'idée de rapport constant.

- En conclusion, on peut dire que les normaliens qui donnent une bonne définition de la notion de proportionnalité sont peu nombreux.

D'autre part, même si leur définition est juste, ils se limitent pour la plupart à un seul aspect : celui du rapport constant (de type fonction) entre 2 suites de nombres (ces nombres pouvant être "abstraits" ou bien constituer différentes mesures d'une même grandeur).

Mais les 2 autres aspects :

- la traduction graphique de la notion de proportionnalité,
- les propriétés de la fonction linéaire (aspect isomorphisme) sont presque inexistants.

Ces 2 aspects sont pourtant fondamentaux dans l'étude de la proportionnalité : qu'ils n'apparaissent pas dans les définitions des normaliens révèle sans doute qu'ils sont mal connus de ceux-ci.

Il peut être intéressant de rapprocher la hiérarchie des types de conception exprimés par les normaliens et celle des stragégies utilisées par les enfants de 7 à 11 ans dans la résolution d'un problème de proportionnalité, (Travaux de G. RICCO (9)).

Initialement, ces stratégies ne tiennent compte que de certaines propriétés de la fonction linéaire, par exemple la croissance ; la proportionnalité est ensuite progressivement prise en compte en même temps que la notion de constante qui est d'abord additive (écarts constants), puis multiplicative (rapport fonction).

Chez les normaliens, le type de conception 0 ne retient au plus que l'idée de croissance ; dans les types 1, 1' il y a l'idée d'une constante, ou d'un coefficient et/ou d'une opération (multiplication ou division). Enfin les types 1" et 2 font référence à l'idée de rapport constant (de type fonction).

Bien sûr, du point de vue psycho-génétique, il n'est pas question de comparer les normaliens à des enfants de 7 à 11 ans. Mais, plusieurs "stades" pouvant coexister chez un adulte, il est intéressant de voir que les hiérarchies dans la référence à l'idée constante se correspondent : en particulier, on a vu que certains FP 1 utilisent la procédure des "écarts constants" utilisant une constante additive.

Tri croisé des types de conception et des cinq classes

Types \ Classes	1	2	3	4	5	Total
0				2	2	4 2
1	1	2 12	2 12	6 37	5 30 6	16 8
1'	1	2 10	5 25	6 28	7 30 8	21 10
1"			3 14	8 36	11 50 13	22 11
2	2 5 11		5 11	10 23	27 61 32	44 22
Ex		3	1	1	8	13 6
Autres		1 EC 1 EC	1 FL 1 EC	1 FL 1 D	1 FL 1 DO	
∅	14 77	16 64	9 33	13 27	22 26	74 37
Total	9 18	12 25	13 27	24 48	42 84	202

- Les nombres en haut à droite représentent les pourcentages par rapport à l'effectif total du type de conception.
- Les nombres en bas à droite représentent les pourcentages par rapport à l'effectif total de la classe.

On peut faire les remarques suivantes :

- 61 % des normaliens ayant le type de conception 2 se situent dans la classe 5 contre seulement 42 % au total, et la presque totalité de ces mêmes normaliens (84 %) sont dans les classes 4 et 5 (contre 66 % au total). Par contre, le pourcentage correspondant à la classe 5 passe à 30 % pour les types de conception "plus faibles" 1 et 1'.
- 36 % des normaliens ayant le type de conception 1" sont dans la classe 4 (contre 24 % au total).
- 25 % des normaliens ayant le type de conception 1' sont dans la classe 3 (contre 13 % au total).

Par contre, pour le type de conception 1, c'est le pourcentage correspondant à la classe 4 qui est supérieur au pourcentage global (37 % contre 24 %).

De même, les quatre normaliens correspondant au type 0 sont dans les classes 4 et 5 : on pourrait donc avoir une faible connaissance de la notion mathématique de la proportionnalité et réussir quand même à faire les problèmes... On peut aussi faire l'hypothèse que la réponse écrite à la question III 5 ne traduit pas l'intégralité de ce que représente pour ces normaliens la notion de proportionnalité.

On ne peut donc pas conclure à une relation systématique entre la hiérarchie des types de conception et la hiérarchie des classes : néanmoins, il y a une tendance.

Les types de conception "les plus élevés" correspondraient à une meilleure réussite au questionnaire.

- La grosse majorité des normaliens de la classe 1 n'ont pas répondu à la question III 5 (77 % contre 37 % au total). Ce pourcentage de non réponse est encore important pour la classe 2 (64 %), il se rapproche du pourcentage global pour la classe 3 (33 %) mais il lui devient inférieur pour les classes 4 et 5 (27 % et 26 %).

On peut donc dire que plus la note est élevée, plus on a de chances de trouver une réponse exprimant une conception de la notion de proportionnalité. Ceux qui réussissent le questionnaire sont aussi ceux qui sont capables de donner une définition de la notion de proportionnalité. Enfin, on peut remarquer que 2 normaliens de la classe 1 ont le type de conception 2, correspondant à une définition correcte. Cela viendrait confirmer le fait qu'il n'y a pas de lien systématique entre la conception exprimée à la question III 5 et la réussite au questionnaire. Toutefois, les normaliens de la classe 5 sont plus nombreux à avoir le type de conception 2 (32 % contre 22 % au total). Il y a donc bien une tendance.

Tri croisé des types de conception et des procédures utilisées en (B) :

(B) P \ Types de Conception	0	1	1'	1"	2	Ex	Autres	∅	Total
F ou V	2	6 5 37	13 10 65	13 10 59	35 28 81	7 6	2 FL 1 EC 1 DC 1 D	44 35 62	125 64
S ou DS + autre		3 19	1 5	3 14	4	2		5 7	18 9
S_F + S_{seule} + DS_{seule}	1	3 9 19	4 12 20	3 9 14	3 9 7	4	1 EC	14 42 20	33 17
RT		2	2	3 14				1	8 4
EP seule								3	3
G seule		1(DO)						1	2
Autres		1			1			3	5
Total	3	8 16	10 20	11 22	22 43	7 13	6	36 71	194

Tri croisé des Types de conception et des procédures utilisées en (B)

(Seuls les cas où la procédure utilisée en (B) est explicitée ont été répertoriés soit en tout 194 cas).

On peut faire les commentaires suivants :

- la répartition des normaliens qui utilisent la procédure fonction (avec reconnaissance ou non de la valeur unitaire) est sensiblement la même que celle de l'en- l'ensemble.
- Par contre, parmi ceux qui utilisent une procédure de type scalaire (S_F, S_{seule} ou DS_{seule}), seulement 9 % ont une conception de type 2 contre 22 % au total.

Ce pourcentage reste encore faible si on regroupe les types 1" et 2 (18 % contre 33 % au total).

- D'autre part, si on étudie la répartition des types de conception selon les différentes procédures, on voit que :
  - pour le type 2, le pourcentage correspondant aux procédures F ou V est nettement plus élevé que celui de l'ensemble (81 % contre 64 %).
  - Par contre, le pourcentage correspondant aux procédures de type scalaire (S_F, S_{seule}, DS_{seule}) est plus faible (7 % contre 17 % au total).
- Inversement, pour le type 1, le pourcentage correspondant aux procédures F ou V est inférieur à celui de l'ensemble (37 % contre 64 %).

On retrouve donc là les tendances qui semblaient se dégager lors du tri croisé des arguments graphiques et des procédures utilisées en (B) et aussi lors de l'étude de la répartition de ces procédures dans les différentes classes :

- la procédure fonction (avec reconnaissance ou non de la valeur unitaire) serait plutôt liée à des arguments graphiques "forts" faisant intervenir l'idée de droite passant par l'origine ou de rapport constant.

D'autre part, on a vu que les notes obtenues par les normaliens utilisant la procédure fonction étaient plutôt meilleures que celles obtenues par l'ensemble des normaliens. Il semble ici que le type de conception "le plus élevé" (type 2) soit lié à l'utilisation de la procédure fonction (avec reconnaissance ou non de la valeur unitaire).

- Au contraire, les procédures de type scalaire seraient liées à des arguments graphiques "plus faibles" faisant intervenir l'idée de croissance ou de droite.

De plus, on a vu que les procédures qualifiées de "primitives" (S_{seule}, DS_{seule}, EP_{seule}) étaient révélatrices d'un faible niveau de connaissance de la notion de proportionnalité.

L'analyse précédente montre que ces procédures seraient aussi plutôt liées à des types de conception peu élaborés, ne retenant de la proportionnalité que l'idée de croissance, ou de relation multiplicative, ou de constante.

Toutefois, ce ne sont que des tendances : il n'y a pas de relation systématique entre une procédure et un type d'argument graphique, ni entre une procédure et un type de conception de la notion de proportionnalité. D'ailleurs, la seule normalienne qui fasse allusion, dans sa réponse à la question III 5 , aux propriétés de l'isomorphisme linéaire avait en fait utilisé la procédure DS_{seule} en B et n'avait pas réussi à calculer les images de 22 et de x . Elle avait aussi utilisé l'argument DO aux questions E , E' , E" .

Tri croisé des Arguments Graphiques et des différents types de Conception :

Types / Arguments Graphiques	0	1	1'	1"	2	Ex	Autres (EC,D, DO,FL)	∅	Total
a	1 5	2 10 12	2 10		1 5	1 5		14 67	21 10
b		1 6	3	3 12 14	6 25 14	3	1(FL)	7 29	24 12
c		2 12	6 28	8 dt 26 1 D 36	6 dt 30 1 FL 14			8 27	30 15
d	1	3 18	1		11 dt 1 DO 25 1 FL	1	1 EC	7 28	25 12
e	1	1	1 .	1	8 42 18		1 DO 1 EC	5 26	19 9
f	1 (DO)	2	3 14	9 23 41	9 dt 23 1 D 20	3	1 D	10 26	38 19
g			3	1	1(DO)	1	2(FL)	7 47	15 7
h		3 dt 25 1 D 18	1			3		5 42	12 6
∅		2	1		2	1	1 EC	11 61	18 9
Total	2 4	8 16	10 21	11 22	22 44	6 13	8	37 74	202

Tri croisé des Arguments Graphiques et des différents types de Conception.

On peut faire les remarques suivantes :
- 67 % des normaliens du groupe a ne répondent pas à la question III (5) (contre 37 % au total). Cela peut s'expliquer par un manque de temps, mais aussi par des difficultés pour définir la notion de proportionnalité.
Face à ces difficultés et au manque de temps, les normaliens renoncent à répondre. Ceux qui répondent se situent plutôt dans les types 0, 1, 1' correspondant aux niveaux les plus faibles.
On ne trouve pas de type 1" et un seul type 2. La répartition du groupe b est semblable à celle de l'effectif total : on retrouve le même résultat que lors de l'étude de la répartition des arguments graphiques dans les différentes classes : l'argument de croissance, utilisé seul, correspond aux types de conception et aux notes les plus faibles ; mais, utilisé avec d'autres arguments, il correspond aux résultats d'ensemble.
- Si on regroupe les types de conception 1" et 2, faisant référence à l'idée de rapport constant, on voit que les 4 groupes c, d, e, f, ont, pour près de la moitié, un de ces 2 types de conception (contre seulement 33 % pour l'ensemble). Pour les groupes c et f, c'est le pourcentage correspondant au type 1" qui est supérieur au pourcentage global (26 % et 23 % contre 11 %).
Pour les groupes d et e, c'est le pourcentage correspondant au type 2 (44 % et 42 % contre 22 %).

D'autre part, si on regarde la répartition des types de conception dans les différents groupes d'arguments graphiques, on voit que :
- pour le type 1", les pourcentages des groupes c et f sont supérieurs aux pourcentages globaux (36 % contre 15 % et 41 % contre 19 %).
- Pour le type 2, ce sont les pourcentages des groupes d et e qui sont supérieurs aux pourcentages globaux (25 % contre 12 % et 18 % contre 9 %).
Des 2 arguments purement graphiques c et d, celui faisant uniquement référence à l'idée de droite serait donc lié au type 1" tandis que l'argument d, faisant référence à l'idée de droite passant par l'origine, serait lié au type 2 "plus élevé" que le type 1".
Par contre, pour les groupes e et f, on retrouve que l'utilisation d'un argument supplémentaire à celui du Rapport constant ne contribue pas à "élever" le type de conception.
- Dans le groupe h, on ne trouve aucune conception de type 1" ou 2. Le quart d'entre eux (contre 8 % au total) se situe dans le type 1.
Certaines réponses sont d'ailleurs très cohérentes :
<u>Exemple</u> :
Justification pour (E) : "la Relation n'est pas constante",
justification pour (E') : "la Relation n'est pas constante",
justification pour (E") : "la Relation est constante".
Réponse à la question III (5) : "on est en situation de proportionnalité si la relation qui unit les 2 données est constante".

- Enfin l'absence d'arguments graphiques est liée à l'absence de réponse à la question III (5) : 61 % des normaliens qui ne justifient pas les questions graphiques ne répondent pas à la question III (5) (contre 37 % au total).

En résumé, il n'y a pas de liaison très marquée entre un groupe d'arguments graphiques et un type de conception :

Toutefois, les arguments graphiques "faibles" ou l'absence d'arguments seraient plutôt liés aux types de conceptions "les moins élevés" ou à l'absence de définition de la notion de proportionnalité.

D'autre part, les types de conception "les plus élevés" seraient plutôt liés aux arguments graphiques "forts", faisant intervenir l'idée de rapport constant ou de droite passant par l'origine.

D CONCLUSION

Les conclusions les plus importantes que l'on peut tirer de l'analyse des résultats de ce questionnaire me semblent les suivantes :

1. Si les normaliens savent dans l'ensemble résoudre un problème de proportionnalité niveau CM_2-6ème, des erreurs graves subsistent : en (B) calcul des images par addition systématique d'un même nombre sans tenir compte des écarts entre les éléments de l'ensemble de départ ; en (G) utilisation de la proportionnalité de la longueur du ressort par rapport à la masse suspendue ; en (I) , la trilinéarité du volume par rapport à chacune des dimensions n'est pas toujours prise en compte.

De plus, un certain nombre de normaliens se limitent, dans leurs calculs, au domaine des entiers naturels et se trouvent bloqués devant un calcul faisant intervenir un rapport rationnel non entier ou une notation littérale.

Enfin, la situation (C) , faisant référence à des notions physiques, est aussi source de difficultés.

2. Dans un problème de proportionnalité, les normaliens ont beaucoup de mal à préciser quelles sont les grandeurs en relation.

Cette difficulté s'accentue quand la situation proposée relève de structures plus complexes que celle de la proportionnalité simple :

c'est le cas de la situation (H) (où une variable est proportionnelle à l'inverse de l'autre), des situations (F) et (I) faisant intervenir la multilinéarité d'une variable par rapport à 2 ou plusieurs autres.

Le taux de non réponse à la question de reconnaissance est alors très élevé.

On peut expliquer cela en disant que si les normaliens ont, au cours de leur scolarité antérieure, étudié la notion de fonction linéaire (au programme de troisième), il n'en est pas de même pour la notion de fonction multilinéaire. En effet, seuls les normaliens ayant fait des études scientifiques préalables ont pu recevoir un enseignement de cette notion.

3. Les questions II (2) et III (1) ont révélé des confusions graves en ce qui concerne la notion de suites proportionnelles : confusion avec la propriété des "écarts constants", avec celle des "écarts proportionnels", incompréhension du mot "proportionnel" attribué quelquefois à une seule suite du type $(x_o, ax_o, a^2x_o, a^3x_o, a^5x_o)$ a entier naturel fixé. Ces erreurs se rencontrent chez un quart des normaliens.

4. La traduction graphique de la notion de proportionnalité semble mal connue et celle de la proportionnalité inverse encore plus. L'argument graphique DO ("c'est une droite passant par l'origine") est plutôt rare, même dans les réponses à la question (E") qui proposait comme graphique une droite passant par l'origine.

Sur l'ensemble des types de conception de la proportionnalité, définis à la question III (5) , on en trouve seulement 4, faisant référence à l'idée de droite passant par l'origine.

- Pour un certain nombre de normaliens, il semble qu'une situation de proportionnalité se traduise simplement par une droite sur un graphique.

5. La notion de Fonction Linéaire semble inconnue à la plupart des normaliens, sauf à ceux qui étudiaient les fonctions numériques au moment de la passation du questionnaire. Il en est de même pour la notion de fonction affine, à laquelle les références sont encore plus rares.

Les propriétés de la fonction linéaire semblent aussi mal connues : peu de normaliens les utilisent pour compléter le tableau en (B) et ceux qui font les calculs avec un coefficient faux (arrondi à 2,62 ou 2,6 à la place de 2,625) ne les vérifient pas à l'aide de ces propriétés.

De plus, une seule normalienne fait référence à ces propriétés quand elle exprime sa conception de la notion de proportionnalité.

Les connaissances des normaliens concernant la traduction graphique de la proportionnalité et les propriétés de la fonction linéaire sont sans doute à mettre en relation avec l'enseignement qu'ils ont reçu de ces notions.

En effet, lorsqu'ils étaient au CM_2, le programme en vigueur était celui de 1970 correspondant à la réforme des "Mathématiques Modernes" : une seule ligne du programme du Cours Moyen concerne la proportionnalité :

"Exemples de Relations Numériques. Proportionnalité". Dans les commentaires du programme, la proportionnalité est présentée dans le cadre des opérateurs : "Lorsque l'opérateur est "multiplier par ..." ou "diviser par...", la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la proportionnalité".

Plusieurs exemples sont proposés où il s'agit de compléter un tableau en recherchant l'opérateur associé. Rien n'est dit sur la traduction graphique de la proportionnalité. Quant aux propriétés de linéarité, on se borne à les constater sur un exemple et à les généraliser ensuite. Mais elles ne font pas l'objet d'une étude systématique.

6. Sur 115 conceptions exprimées à la question III (5) , 41 ne retiennent de la notion de proportionnalité que l'idée de relation, croissante ou multiplicative, ou l'idée vague de constante ou de coefficient. Ce sont des conceptions nettement insuffisantes qui montrent que beaucoup de normaliens n'ont qu'une idée vague de la notion mathématique de proportionnalité. S'ils réussissent dans l'ensemble à résoudre les problèmes faisant appel à cette notion, ils ont beaucoup de difficultés à en formuler une définiton générale.

7. Le résultat le plus marqué de ce questionnaire est sûrement la très nette réussite des FP 3 par rapport aux 2 autres promotions FP 1 et FP 2 ; les FP 2 se situant le plus souvent dans une position intermédiaire entre les FP 1 et FP 3.

Cette "supériorité" des FP 3 est vérifiée pour toutes les questions sauf pour les questions graphiques (E) , (E') , (E") et la question (F) concernant la double proportionnalité où ce sont les FP 2 qui sont en tête.

On peut envisager plusieurs explications à ce phénomène :

- Les FP 3 ont reçu un enseignement à l'Ecole Normale : même s'ils déclarent n'avoir reçu aucun enseignement sur la proportionnalité, ils en ont sûrement entendu parler au cours de l'étude d'autres thèmes mathématiques.
- Les FP 3 ont effectué plusieurs stages dans les classes, et en particulier dans les classes de CM_2 où ils ont peut-être eu à enseigner la proportionnalité. Ils ont alors été amenés à consulter des livres et à remettre leurs connaissances à jour.
- Enfin, l'échantillon étudié est assez restreint et concerne uniquement la région parisienne : certains y verront peut-être une supériorité de la région parisienne sur la province...

Pourtant, la comparaison des résultats Région Parisienne/Province pour les FP 1 et FP 2 semble être en faveur de la province : il n'y aurait donc pas de lien entre la meilleure réussite des FP 3 et leur origine géographique ; elle serait plutôt liée au fait qu'ils sont en troisième et dernière année d'école normale.

Je pense que les trois années passées à l'Ecole Normale ont tout de même permis aux normaliens de mettre tant bien que mal leurs connaissances à jour en ce qui concerne les principales notions mathématiques enseignées à l'Ecole Elémentaire.

De toute façon, vu la taille de l'échantillon, il faut relativiser ce résultat.

8. L'Etude comparée de la question B (où il s'agissait de compléter un tableau) et des questions graphiques E , E' , E" n'a pas révélé de faits certains, mais plutôt des tendances :
Les procédures de type scalaire seraient plutôt liées à des arguments graphiques "faibles", voire à une absence d'arguments graphiques, tandis que la procédure fonction (avec reconnaissance ou non de la valeur unitaire) serait liée à des arguments graphiques "forts" faisant référence à l'idée de rapport constant ou de droite passant par l'origine.

9. La comparaison des procédures utilisées en B et en G a montré qu'il n'y avait pas stabilité : le choix d'une procédure semble dépendre de la situation proposée et des valeurs numériques. Toutefois, l'utilisation de la procédure fonction en B semble permettre un changement de procédure en G . Dans les autres cas, en particulier dans celui d'une procédure de type scalaire, ce changement serait plus difficile.
Les procédures de type scalaire correspondant par ailleurs à un score général plus faible, on retrouve un fait mis en évidence dans d'autres travaux (A. ROBERT) : les changements de stratégie au cours de la résolution d'un problème seraient liés à une meilleure réussite des élèves.

10. La confrontation des types de conception de la notion de proportionnalité et des réponses à la question B et aux questions graphiques n'a aussi décelé que des tendances :
- les procédures de type scalaire seraient plutôt liées à des types de conception "faibles", ne retenant de la proportionnalité que l'idée de croissance, de relation multiplicative ou de constante ; tandis que la procédure fonction (avec reconnaissance ou non de la valeur unitaire) serait plutôt liée aux types de conception "les plus élevés".
- D'autre part, les arguments graphiques "faibles" ou l'absence de tels arguments seraient plutôt liés aux types de conception "les moins élevés", ou à l'absence de définition de la notion de proportionnalité ; tandis que les arguments graphiques "forts" correspondraient aux types de conception "les plus élevés".

En résumé, il n'y a pas de relation systématique entre une procédure et un type d'argument graphique, ni entre une procédure et un type de conception de la notion de proportionnalité. Pourtant, les procédures de type scalaire semblent correspondre à de moins bons résultats d'ensemble, à des arguments graphiques "faibles" et à des types de conception peu élaborés. Elles semblent aussi liées à de plus grandes difficultés pour changer de stratégie.

Ecole Normale :

Promotion :

QUESTIONNAIRE

(version N° 1)

I Entourer la bonne réponse :

1. Entre 0 et 20 ans, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ? oui non

2. Les suites de nombres (6,10,14,18,22) et (8,12,16,20,24) sont-elles proportionnelles ? oui non

II Pour chaque situation proposée ci-dessous :

1. Dire si c'est une situation de proportionnalité. Justifier votre réponse.
2. Répondre à la question posée en explicitant votre raisonnement.

(A) Sur une bicyclette, on a compté les nombres de tours de pédalier et de tours de roue correspondants. On a obtenu :

nombre de tours de pédalier	nombre de tours de roue
8	21
16	42
24	63
40	
96	
136	

Peut-on compléter le tableau ? Si oui, comment ?

1. oui non je ne sais pas

Justification :

2.

(B) 6 cm^3 d'un minerai ont une masse de 24 g.
Peut-on calculer la masse de 35 cm^3 de ce minerai ? Si oui, comment ?

1. oui non je ne sais pas

Justification :

2.

(C) On plonge un solide de volume 10 cm^3 et de masse 62 g dans un récipient contenant 75 cm^3 d'un liquide. La masse du liquide dans le récipient est 225 g. Le solide flottera-t-il ? (Le solide flotte si, pour un même volume, il a une masse plus petite que le liquide).

1. oui non je ne sais pas

Justification :

2.

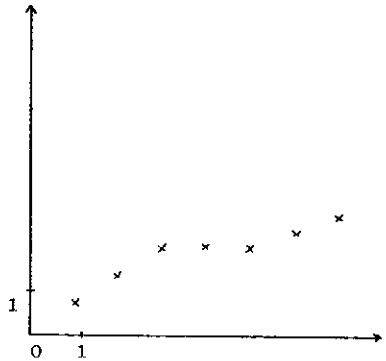
(D) Sur une carte au 1/25000, à quelle distance sont représentés deux points distants de 375 m à vol d'oiseau ?

1. oui non je ne sais pas

Justification :

2.

(E)

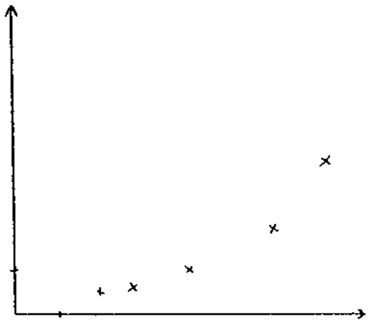


Ce graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

oui non je ne sais pas

Justification :

(E')



Ce graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

oui non je ne sais pas

Justification :

(F) Un fermier possède 5 vaches produisant chacune en moyenne 23 litres de lait par jour pendant les 180 meilleurs jours de l'année. Quelle quantité de lait obtient-il pendant cette période ?

oui non je ne sais pas

Justification :

(G) On a mesuré la longueur d'un ressort en fonction de la masse suspendue.
On a obtenu :

Masse (en g)	0	100	200	300	400
Longueur (en cm)	10	13	16	19	22

a) Quelle serait la longueur du ressort pour une masse de 250 g ?
b) Même question pour une masse de 1 g ? de 5 kg ?

1. oui non je ne sais pas

Justification :

2.

(H) A aire constante, comment varie la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur ?

1. oui non je ne sais pas

Justification :

2.

(I) Un bloc de pierre parallélépipédique pèse 200 kg.
Combien pèse un bloc dont chaque dimension est le quart des dimensions du bloc précédent ?

1. oui non je ne sais pas

Justification :

2.

III <u>La loi de la chute libre des corps s'énonce ainsi</u> : "Dans une chute libre sans vitesse initiale, les espaces parcourus à partir du point de départ sont proportionnels aux carrés des temps mis pour les parcourir". Traduire cette loi par une formule.	<u>Réponse</u>

(Version définitive)

Ecole Normale :
Promotion :
A déjà reçu, à l'E.N. un enseignant sur la proportionnalité : OUI NON
(Entourer la bonne réponse)

QUESTIONNAIRE

I <u>Entourer la bonne réponse</u>

1. Entre 0 et 20 ans, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ? OUI NON

2. Les suites de nombres (6, 10, 14, 18, 22) et (8, 12, 16, 20, 24) sont-elles proportionnelles ? OUI NON

3. Les suites de nombres (3, 4, 6, 9, 13) et (8, 10, 14, 20, 28) sont-elles proportionnelles ? OUI NON

II <u>Pour chaque situation proposée ci-dessous</u> :

1. Dire si c'est une situation de proportionnalité. Justifier la réponse en précisant, si nécessaire, les grandeurs en relation.

2. Répondre à la question posée en explicitant le raisonnement.

(A) Sur une carte au 1/25000, à quelle distance sont représentés deux points qui, dans la réalité, sont distants de 375 m à vol d'oiseau ?

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? OUI NON
   Si oui, préciser les grandeurs en relation.
   JE NE SAIS PAS

2. Explicitation des calculs.

(B) Sur une bicyclette, on a compté les nombres de tours de pédalier et de tours de roue correspondants.
On a obtenu :

Nbre de tours de pédalier	Nbre de tours de roue
8	21
16	42
24	63
40	
96	
136	
22	
x	

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? OUI NON JE NE SAIS PAS
   Justification :

2. Peut-on compléter le tableau ? Si oui, expliquer comment.

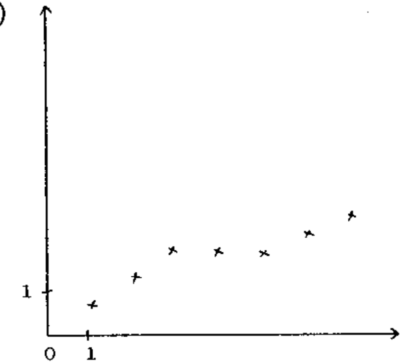
(C) a) On plonge un solide de volume 10 cm^3 et de masse 62 g dans un récipient contenant 25 cm^3 d'un liquide. La masse du liquide dans le récipient est 62 g.
Le solide flottera-t-il ?

b) Même question si le même solide est plongé dans un récipient contenant un liquide de volume 75 cm^3 et de masse 225 g. (Le solide flotte si, pour un même volume, il a une masse plus petite que le liquide).

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? OUI NON JE NE SAIS PAS
   Si oui, préciser les grandeurs en relation.

2. Explicitation des calculs.

(E)

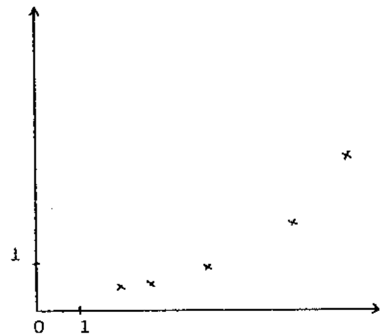


Le graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification :

(E')

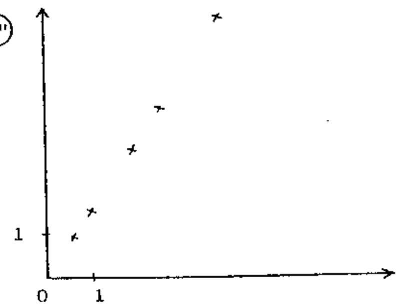


Le graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification

(E")



Le graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification

(F) Un fermier possède 5 vaches produisant chacune en moyenne 23 litres de lait par jour pendant les 180 meilleurs jours de l'année.
Quelle quantité de lait obtient-il pendant cette période ?

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? OUI NON JE NE SAIS PAS
   Si oui, préciser les grandeurs en relation.

2. Explicitation des calculs :

(G) On a mesuré la longueur d'un ressort en fonction de la masse suspendue.
On a obtenu :

Masse (en g)	0	100	200	300	400
Longueur (en cm)	10	13	16	19	22

a) Quelle serait la longueur du ressort pour une masse de 220 g ?
b) Même question pour une masse de 1 g ? de 5 kg ?
c) Faire une représentation graphique.

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? OUI NON JE NE SAIS PAS
   Si oui, préciser les grandeurs en relation.

2. Explicitation des Calculs et Graphique.

(H) A Aire constante, comment varie la longueur d'un rectangle en fonction de sa longueur ?
Faire une représentation graphique.

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? OUI NON JE NE SAIS PAS
   Si oui, préciser les grandeurs en relation.

2. Explicitation des calculs et graphique.

(I) Un bloc de pierre parallélépipédique pèse 200 kg. Combien pèse un bloc dont chaque dimension est le quart des dimensions du bloc précédent ?

1. Est-ce une situation de proportionnalité ? OUI NON JE NE SAIS PAS
   Si oui, préciser les grandeurs en relation.

2. Explicitation des calculs.

III

1 Donner deux suites de cinq nombres proportionnelles.	2 Donner deux suites de cinq nombres non proportionnelles.

3 Donner un exemple de problème, sur des questions de volume (niveau CM_2-6ème) dont la solution relève de la proportionnalité.

4 Donner un exemple de problème, sur des questions de volume (niveau CM_2-6ème) dont la solution ne relève pas de la proportionnalité.

5 Si vous aviez à expliquer à quelqu'un ce qu'est une situation de proportionnalité, que diriez-vous ?

CHAPITRE III

Ce chapitre est la description de la suite de mes interventions auprès des normaliens sur le thème particulier de la proportionnalité.

A QUESTIONNAIRE (1ère séance)

Avant de travailler sur le thème de la proportionnalité avec les normaliens, il me semblait intéressant de savoir "où ils en étaient" sur cette notion : qu'appelaient-ils situation de proportionnalité ? Comment traitaient-ils une telle situation ? Quelles étaient les erreurs possibles ? C'est une des raisons principales du questionnaire dont les résultats sont analysés au Chapitre II.
La première séance a donc consisté en la passation de ce questionnaire. Les résultats devaient m'indiquer s'il serait nécessaire de faire une mise au point sur la notion de proportionnalité et, si oui, sur quels aspects particuliers il faudrait insister.

B ACTIVITES AVEC LES NORMALIENS

Le plus difficile a été de chercher une situation de proportionnalité "qui ne soit pas trop simple" pour les normaliens.
En effet, une situation analogue à celles présentées à des élèves de cours moyen avait peu de chances de les mobiliser car elle aurait été résolue trop facilement.
La situation devait faire intervenir la proportionnalité, mais pas de façon immédiate : à défaut d'impliquer un réel apprentissage pour la majorité des normaliens (la notion n'est pas entièrement nouvelle), elle devait entraîner une réorganisation et une actualisation de leurs connaissances antérieures.
La situation devait être aussi suffisamment "riche" pour faire intervenir différents aspects de la notion de proportionnalité (Aspects numérique, graphique. Notion de Proportion inverse...).
J'ai finalement choisi une situation géométrique, proposant la construction de rectangles homothétiques : par rapport à ce qui vient d'être dit, ce choix est justifié car la géométrie est en général un domaine mal connu des normaliens. D'autre part, il me semblait intéressant de leur proposer une situation de proportionnalité dans un cadre géométrique et non pas dans un cadre purement numérique comme c'est le cas le plus souvent, surtout à l'école primaire.

A l'occasion de ce questionnaire, je leur ai aussi demandé en quelle année ils étaient au CM_2. Cela afin de connaître le type d'enseignement qu'ils ont reçu à l'école primaire et au collège sur le thème de la proportionnalité.
Il s'avère que tous les normaliens (sauf trois) ont connu les nouveaux programmes de 1970, correspondant à la réforme des "Mathématiques Modernes". Dans ces programmes, la proportionnalité apparaît au cours moyen et dans la classe de fin d'études :
au cours moyen, il est simplement dit : "Exemples de relations numériques. Proportionnalité".
Pour la classe de fin d'études, il y a 2 rubriques :

1. Pourcentages : "Application à des problèmes concrets intéressant la vie familiale...".
2. Echelles des plans et des cartes : "Représentation figurée des grandeurs... Graphiques des variations dans le temps de ces grandeurs. Construction et interprétation".

Dans les instructions Pédagogiques correspondantes, l'étude de la proportionnalité est un cas particulier de l'étude des Opérateurs.
Il est dit : "lorsque l'opérateur est "multiplier par..." ou "diviser par ...", la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la proportionnalité".
Les exemples donnés sont des tableaux à compléter. Ces tableaux sont construits à partir de situations concrètes (problèmes d'échelle par exemple).
Une seule procédure est indiquée pour compléter ces tableaux : c'est la procédure fonction. Les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire sont seulement l'objet de constatations sur quelques exemples.
Enfin, rien n'est dit sur la traduction graphique de la proportionnalité.
Dans les programmes du collège, il y a en sixième une ligne concernant les relations numériques : "Exemples et représentations graphiques de relations numériques".
Mais le mot "proportionnalité" n'est pas prononcé. De même, en cinquième, on ne trouve rien sur la proportionnalité.
Ce n'est qu'en troisième que les fonctions affines et linéaires avec leurs représentations graphiques, sont au programme. On parle aussi "d'exemples conduisant à une ou deux équations ou inéquations du premier degré à une ou deux inconnues..." En particulier, les problèmes de pourcentage peuvent constituer de tels exemples.

Finalement, dans les programmes du collège, le mot "proportionnalité" n'est pas prononcé.
L'enseignement reçu par les normaliens sur le thème de la proportionnalité concerne donc essentiellement le CM_2. L'Etude se limite à celle d'opérateurs particuliers et laisse tout à fait de côté l'aspect graphique. D'autre part, l'aspect fonction est privilégié par rapport à l'aspect isomorphisme.

1 UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE (2ème séance-environ 3h)

A Situation de communication : explicitation du critère "même forme".

Les élèves sont groupés par 2, chacun étant à tour de rôle émetteur puis récepteur.
Voici la consigne :

- dessinez un triangle,
- envoyez un message au récepteur pour que celui-ci construise un triangle "de même forme" que le vôtre.

La comparaison des 2 triangles devait permettre de valider ou non le message et d'expliciter ainsi le sens de "même forme".
Description de cettre première phase :
Dans leurs dessins de triangles, les normaliens se sont limités à des cas particuliers : triangles rectangles, isocèles, équilatéraux et, dans un premier temps ils ont pris "même forme" dans son sens le plus strict, c'est à dire au sens de "superposable". Beaucoup de messages comportent donc les dimensions du triangle initial.
Exemple de message : "c'est un triangle équilatéral dont la longueur du côté est ...".
Je pose la question de savoir si 2 triangles équilatéraux ont "même forme" et, de façon générale, je demande si on ne pourrait pas donner à "même forme" un sens plus large que "superposable".
Dans le cas de triangles quelconques, l'idée du report des angles vient assez vite, en particulier que 2 angles égaux suffisent.
Je pose alors la question de savoir si le report d'un seul angle est suffisant : un normalien pense que 2 triangles rectangles ont "même forme" puisqu'ils ont chacun un angle droit. Je donne alors un contre-exemple et demande quelle condition faut-il rajouter ?
L'idée de la conservation du rapport des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit est lente à venir.
De même, quand je demande si on pourrait se passer d'une condition sur les angles, la réponse est loin d'être évidente. Les normaliens ont l'idée de la conservation des longueurs des côtés, mais pas celle de la conservation du rapport des longueurs des côtés homologues.

Finalement, nous récapitulons les 3 cas de similitude des triangles avec les cas particuliers des triangles isocèles, équilatéraux, rectangles.

Puis je pose le problème de la généralisation à d'autres figures : quand deux rectangles, deux carrés, deux quadrilatères quelconques, deux cercles ont-ils "même forme" ?

En particulier, nous explicitons ce que signifie "même forme" pour deux rectangles.

B Construction de Rectangles Homothétiques

La situation proposée aux normaliens est la suivante :

a) Soient A et A' 2 rectangles identiques. Partager A' en deux dans le sens de la largeur ; on obtient deux rectangles A_1 et A'_1 identiques.

A_1 et A'_1 ont-ils la "même forme" que A ?

b) Caractériser tous les rectangles pour lesquels la réponse en a) est positive.

c) A partir de A_1 pour lequel la réponse est positive en a), construire une suite de rectangles A_2, A_3, $A_4 \ldots$, $A_i, \ldots$ tels que A_i soit obtenu par pliage en deux de A_{i-1}, et cela tant que le pliage en deux est matériellement possible.

La suite A_1, $A_2, \ldots$ $A_n, \ldots$ possède-t-elle la propriété définie en a) ?

d) Sur un graphique, représenter chaque rectangle A_i par un point A_i dont les coordonnées sont la longueur et la largeur du rectangle A_i.

Que peut-on dire des points A_i ? Justifier.

e) Pour un A_i donné, étudier tous les rectangles B_i de même périmètre que A_i.

f) Pour un A_i donné, étudier tous les rectangles C_i de même aire que A_i.

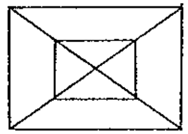
Analyse de la situation :

- Grâce à la phase précédente, les normaliens peuvent agir sur la situation : ils ont au moins un critère de reconnaissance de rectangles "de même forme".
- Cette situation permet d'aborder :
  - la traduction graphique de la proportionnalité,
  - la proportionnalité inverse et sa traduction graphique,
  - un exemple de non proportionnalité.

Description de cette seconde phase :

Pour la question a), certains normaliens avaient des rectangles de papier de format 21 x 29,7, d'autres des rectangles de format différent.

L'activité précédente avait permis de donner un sens à "même forme" dans le cas de rectangles : les normaliens proposent donc de mesurer les côtés et de calculer les rapports pour voir s'il y a égalité. Certains proposent aussi de regarder si les diagonales sont superposables et disposent alors leurs rectangles ainsi :

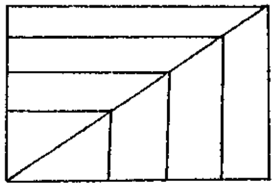


Pour b), tous les normaliens constatent, après mesurage, que les rectangles pour lesquels "ca marche" sont tels que le rapport :

$\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est constant et égal à $\sqrt{2}$.

La plupart ne se bornent pas à cette constatation et font le calcul. Mais certains ont beaucoup de mal à généraliser, à utiliser des notations littérales et à résoudre une équation. On retrouve là les blocages de certains normaliens devant les notations littérales, déjà mis en évidence par F. CARAYOL et évoqués aussi dans l'analyse des résultats du questionnaire, au Chapitre II.

La représentation graphique en elle-même ne pose pas de problèmes : les normaliens constatent que les points sont alignés sur une droite passant par l'origine. Mais la justification ne va pas de soi : il faudra faire une mise au point sur la traduction graphique de la proportionnalité.
Je demande aux normaliens de disposer les rectangles A_i de telle sorte qu'apparaisse la droite qu'ils viennent de tracer : grâce à cette disposition, qui n'est d'ailleurs pas trouvée tout de suite, nous constatons que des rectangles de "même forme" ont leurs diagonales superposables :



Les questions e) et f) posent des problèmes aux normaliens qui manipulent mal les notations littérales. Pour la majorité, la question f), relative à la proportionnalité inverse, s'avère plus difficile que la question e). Il est manifeste qu'une mise au point sera nécessaire sur cette notion tant du point de vue de sa définition que de sa traduction graphique.

2 3ème séance (environ 3 heures)

MISE AU POINT SUR LA NOTION DE PROPORTIONNALITE. Lors de la 2ème séance, le mot "proportionnel" a été prononcé plusieurs fois : "des rectangles ont même forme si et seulement si la suite des longueurs est proportionnelle à celle des largeurs". Mais aucune définition n'a été donnée. D'autre part, les résultats du questionnaire révèlent des erreurs déjà évoquées au Chapitre II : confusion avec la propriété des écarts constants, avec celle des écarts proportionnels. Confusion fonction linéaire/fonction croissante et fonction linéaire/fonction affine... etc...
Une mise au point sur la notion de proportionnalité était donc nécessaire : elle a été faite à l'occasion d'une sorte de "correction" du questionnaire. Cette "correction" a d'ailleurs été demandée par les normaliens eux-mêmes qui se sont bien rendu compte qu'il fallait préciser la notion de proportionnalité.

Dans l'ensemble, les résultats au questionnaire ne sont pas mauvais et sont même, nettement meilleurs que ceux de l'ensemble des FP1 testés : en effet, 55 % des normalines de Moulins sont dans la classe 5 contre seulement 23 % pour l'ensemble.
Il y a une explication possible à ce phénomène : à Moulins, le questionnaire était intégré au cours ; les normaliens ont effectivement essayé de répondre à toutes les questions.
D'ailleurs, il y a peu de non-réponses. Par contre, dans les autres écoles normales, le questionnaire était extérieur au cours et le fait de répondre ou de ne pas répondre n'engageait à rien : cela peut expliquer le nombre plus important de non-réponses.

Classes / Fli	1	2	3	4	5	Total
FP1 (Moulins)	1 5	4 20	2 10	2 10	11 55	20
FP1 (ensemble)	12 13	16 17	14 15	30 32	22 23	94

Tableau donnant la répartition des FP1 de MOULINS et de l'ensemble des FP1 dans les 5 classes.

Cette 3ème séance a donc consisté à faire une mise au point sur la notion de proportionnalité en s'appuyant, entre autres, sur les exemples de situations proposés par le questionnaire :

I a Définition de suites proportionnelles

- Exemple : la suite des longueurs et celle des largeurs pour des rectangles de "même forme"
- Reprise des exemples I 2 et I 3 du questionnaire et mise en garde contre :
  - la confusion avec la propriété des "écarts constants"
  - la confusion avec la propriété des "écarts proportionnels"
  - la confusion avec un opérateur additif.

b Propriétés des suites proportionnelles

Reprise du tableau de la situation B et mise en évidence des propriétés :

1.	2.	3.
$x_i \to y_i$	$x_i \to y_i$	$x_i \to y_i$
$x_j \to y_j$	$\lambda x_i \to \lambda y_i$	$x_j \to y_j$
$x_i + x_j \to y_i + y_j$	$(\lambda \in \mathbb{R})$	alors $x_i y_j = x_j y_i$ "égalité des produits en croix"

propriétés "de linéarité"

II Fonction Linéaire

(a) définition : lien avec suites proportionnelles.

- Recherche des fonctions linéaires liées aux situations de proportionnalité du questionnaire.
- Que représente alors le coefficient de linéarité ?

(b) Propriétés : les propriétés 1 et 2 des suites proportionnelles sont des propriétés de la fonction linéaire associée f :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
   Pour tout $y \in \mathbb{R}$ $\quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On a alors (combinaison de 1 et de 2).

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
   Pour tout $y \in \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda x + \lambda' y) = \lambda f(x) + \lambda' f(y)$
   Pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$

(c) Problème Réciproque : une fonction f vérifiant une des 2 propriétés (1 ou 2) est-elle une fonction linéaire ?
La recherche de ce problème par les normaliens s'avère laborieuse, même dans le cas de la propriété 2.
C'est finalement moi qui démontre que la propriété 1 entraîne :

$$f\left(\frac{p}{q} x\right) = \frac{p}{q} f(x) \qquad (x \in \mathbb{R} \ ; \ p \in \mathbb{Z} \ ; \ q \in \mathbb{N}^*)$$

Pour étendre la propriété à R, j'ai besoin de la notion de continuité (ou de monotonie). Or la continuité est mal connue des normaliens.
Je me contente de dire que la propriété 1 seule n'est pas suffisante, qu'il faut y rajouter une hypothèse de continuité, mais je n'insiste pas trop car il est manifeste que beaucoup de normaliens ont du mal à suivre.

(d) Représentation Graphique : reprise du graphique obtenu lors de la 2ème séance et des situations (E), (E'), (E") :
Une relation de proportionnalité se traduit graphiquement par des points alignés sur une droite passant par l'origine.
La situation (G) me permet d'introduire la notion de fonction affine puisque la longueur du ressort est une fonction affine de la masse suspendue.

III Fonction Affine

(a) Définition

Reprise des exemples du questionnaire et de l'activité précédente (variations de la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur à périmètre constant).
Remarque : les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines $(b = 0)$.
Mais si $b \neq 0$, on a une fonction affine qui n'est pas linéaire et qui ne vérifie pas les propriétés 1 et 2.

(b) Propriétés : reprise de la situation G ou on trouve comme justifications : "quand la masse augmente de 100 g, la longueur augmente de 3 cm".
De façon plus générale, on peut dire que les écarts entre les longueurs sont proportionnels aux écarts entre les masses, autrement dit :

$$\text{(i)} \quad f(x) - f(y) = a(x - y)$$

Problème : cette propriété caractérise t-elle une fonction linéaire ? une fonction affine ?
La propriété des écarts proportionnels est caractéristique des fonctions affines.
Pour qu'on ait une fonction linéaire, il faut en plus $f(0) = 0$

(c) Représentation Graphique

- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
- Si $f(0) = 0$, la fonction est linéaire et la droite passe par l'origine.

Mise en garde contre :

- la confusion fonction linéaire/fonction affine,
- la confusion fonction linéaire/fonction croissante.

IV Proportionnalité Inverse

Reprise de l'exemple de la 2ème séance et de la situation H du questionnaire :

a) Définition de suites inversement proportionnelles
Exemples : lien avec suites proportionnelles.

b) Représentation Graphique
Etude de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{k}{x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Une relation de proportionnalité inverse se traduit graphiquement par des points situés sur une branche d'hyperbole.

V Pourcentages

Le questionnaire proposé au début du cours ne comportait pas de problèmes de pourcentages.
Le pourcentage est un aspect particulier de la notion de proportionnalité, mais c'est un aspect très important, ne serait-ce que par son utilisation sociale. De plus, il est au programme du cours moyen. Les élèves-instituteurs auront donc à l'enseigner.
Il était donc nécessaire d'aborder la question des pourcentages avec les normaliens et, dans un premier temps, de s'assurer de leur maîtrise de cette notion.
J'ai donc fabriqué un petit questionnaire, très court, en m'inspirant des problèmes proposés dans l'enquête de P. BUISSON (7) sur les pourcentages. (Voir feuille 13)
1 et 2 sont des problèmes de hausse et de baisse, relevant de la composition d'opérateurs multiplicatifs.
3 est le problème sur la TVA proposé par P. BUISSON dans 7.
J'ai choisi en priorité des problèmes où le risque d'erreur était plus grand que dans ceux faisant intervenir un simple calcul d'image, d'antécédent ou de pourcentage.
Les résultats sont assez bons dans l'ensemble : la plupart des normaliens utilisent des notations littérales mais certains se contentent de raisonner sur un exemple (en particulier, ils raisonnent sur un prix initial de 100 F). On peut remarquer que ce sont toujours les mêmes qui raisonnent sur un exemple. On retrouve là les difficultés de certains normaliens à algébriser un problème et à utiliser des notations littérales.
La question qui entraîne le plus de réponses fausses et de non-réponses est la question 3, comme on pouvait s'y attendre

d'après les résultats de l'enquête de P. BUISSON.
Il y a aussi beaucoup d'erreurs à la question 4 surtout en ce qui concerne le périmètre : il semble que les normaliens répondent spontanément 12 % sans réfléchir alors que pour l'aire, ils font effectivement un calcul et trouvent donc une réponse juste.
Après ce petit questionnaire, j'ai fait une mise au point sur la notion de pourcentage en insistant en particulier sur ses 2 aspects :

1. L'Aspect Répartition :
   - Exemples : pourcentages de voix lors d'une élection, ... etc...
     Remarque : le pourcentage donné correspond à une approximation décimale d'un quotient.
   - lien avec les suites proportionnelles.
2. L'Aspect Fonction :
   - Exemples : "prendre les 25 % de" ; "augmenter de 20 %" ... etc...
   - "Correction" du questionnaire : lien avec la composition des fonctions :
     "augmenter de b %" revient à multiplier par $(1 + \frac{b}{100})$
     "diminuer de b %" revient à multiplier par $(1 - \frac{b}{100})$

VI

- A partir de la situation F du questionnaire : mise en évidence de la double proportionnalité.
- A partir de la situation I : mise en évidence de la trilinéarité du volume par rapport à chacune des dimensions longueur, largeur, hauteur.

Questionnaire sur Pourcentages

REPONSES

(1) Une somme d'argent est augmentée de 10 %, puis diminuée de 10 %.
La même somme d'argent est d'abord diminuée de 10 %, puis augmentée de 10 %.
Comparer les 2 résultats entre eux et avec la somme initiale.

(2) Une publicité des "3 Suisses" annonce :
Remise : 10 % sur tout le catalogue
+ 5 % sur un article de votre choix
Quelle est la remise totale sur un article de son choix ?

(3) Au 1er Janvier 1977, le taux de la TVA pour certains articles a été ramené de 20 % à 17,60 %.
Quelle est, en pourcentage, la baisse de prix correspondante ?

(4) Le côté d'un carré s'allonge de 3 %. De quel pourcentage croît le périmètre de ce carré ? L'Aire de ce carré ?

3 Recherche et Comparaison de problèmes de proportionnalité. Résultats d'enquêtes et de recherches (environ 1 séance ½)

(a) Le but de cette séance était de faire résoudre aux normaliens différents types de problèmes de proportionnalité (niveau CM_2, 6ème, 5ème), de les faire réfléchir sur la complexité relative de ces problèmes et sur les différentes façons de les traiter. Je voulais aussi les informer des résultats d'enquêtes et de recherches faites auprès d'élèves du primaire et du premier cycle sur le thème de la proportionnalité.

(b) Déroulement de la séance :
Les normaliens travaillent par groupes de 4 : ils doivent résoudre les problèmes et noter toutes leurs observations à propos de ceux-ci : présentation, complexité, procédure(s) de résolution, etc... (voir Annexe 1).
Il n'y a pas eu de difficultés quand à la résolution même des problèmes, mais un seul groupe fait des remarques intéressantes ; les autres se contentent le plus souvent de faire les calculs : il semble que les normaliens aient beaucoup de mal à réfléchir ainsi sur la structure d'un problème, sur les différentes façons de le traiter... C'est en effet une activité qu'ils ont peu l'habitude de pratiquer.
La mise en commun des observations de chaque groupe permet d'aborder différents aspects de la proportionnalité :
1. Le problème (2) est estimé plus complexe que le problème (3) car il nécessite un résultat intermédiaire. Il en est de même du problème (5) car "il met en jeu des fractions".
Pour le problème (6) , un groupe remarque que ce n'est qu'une question de présentation et pour le problème (7) le même groupe estime "qu'il faut savoir comment marche le tableau" et que le calcul de b est plus difficile car c'est une fraction.

Je donne alors des informations sur les résultats de l'Enquête dont sont extraits ces problèmes (Enquête faite en classe de 5ème) :

- Les résultats sont cohérents entre les différentes disciplines ; selon les auteurs "des questions analogues obtiennent des résultats analogues d'une discipline à une autre".

Cela me permet d'aborder la question du rôle du domaine de référence dans un problème. Dans le cas de la proportionnalité, il semble qu'aucune des trois disciplines utilisées dans l'enquête (Géographie - Physique - Mathématiques) ne soit privilégiée.
Mais d'autres recherches (en particulier de G. VERGNAUD) montrent le rôle fondamental joué par le domaine de référence dans un problème de proportionnalité : pour une même question mathématique, c'est le facteur principal de réussite (ou d'échec).

- Nous constatons que les remarques faites par un groupe correspondent aux difficultés mises en évidence par l'enquête :

. la présence d'un résultat intermédiaire fait chuter le taux de réussite.

. 2 présentations différentes d'une même question peuvent entraîner des taux de réussite très différents : (Problème 6), les élèves effectuent les opérations dans l'ordre où elles se présentent sans voir les simplifications.

. Le domaine numérique joue un rôle important :
dans le cas du problème 7 , le taux de réussite correspondant au calcul de b est nettement inférieur aux deux autres. C'est celui correspondant au calcul de a (domaine des entiers naturels) qui est le plus élevé.

- Ces problèmes sont aussi l'occasion de poser la question du rôle des tableaux de proportionnalité : peuvent-ils aider à la résolution d'un problème ? Si oui, en quoi ? Même si on ne peut pas donner de réponse sûre à cette question, il y a lieu de mettre en garde les normaliens contre une utilisation mécanique des tableaux, sans compréhension réelle ni raisonnement de la part des élèves.
En particulier, lorsque le tableau ne comporte que 4 termes, il ne permet pas de bien distinguer le rapport fonction et le rapport scalaire. En utilisant plusieurs lignes du tableau, on met mieux en évidence que les rapports scalaires sont variables tandis que le rapport fonction est le même sur toutes les lignes.

2. La comparaison des procédures utilisées dans 8 , 9 , 10 et aussi dans 1 permet d'expliciter avec les normaliens la procédure de type scalaire et la procédure de type fonction.
Un groupe remarque qu'on peut envisager deux types de résolution possible pour 1 :

a) calculer d'abord les proportions pour une personne,

b) utiliser les propriétés scalaires : 12 = 6 x 2, etc...

le cas a) lui semblant d'ailleurs nettement plus long que le cas b.

Cela me permet de dire que tous les problèmes de proportionnalité ne sont pas équivalents du point de vue de leurs procédures de résolution : la nature du problème, le choix des valeurs numériques peuvent inciter à utiliser une procédure plutôt qu'une autre.
Je donne aussi les résultats de l'enquête d'où sont extraits ces problèmes, à savoir que la procédure scalaire serait toujours plus employée que la procédure fonction, même dans les cas où elle est "moins simple". Toutefois, ces résultats sont à nuancer selon la familiarité des élèves avec les valeurs numériques en jeu.
Les résultats du problème 1 étonnent un peu les normaliens : ils pensaient que ce problème serait mieux réussi en CM_2.

3. Le problème 11 est un exemple de "fonction trilinéaire" : de trois variables : le Volume. Il permet de parler de la difficulté des propriétés de trilinéarité du volume pour les élèves du premier cycle et aussi de la répugnance des élèves à travailler uniquement sur les rapports de nombres et non pas sur les nombres eux-même.
Ces difficultés sont sans aucun doute en relation avec le fait que, dans l'enseignement, le volume est rarement abordé comme une forme trilinéaire de chacune des dimensions.
Là aussi, les faibles résultats de l'expérience étonnent les normaliens.
Je reviendrai ultérieurement sur la structure "produit de mesures" par rapport à la structure "isomorphisme de mesures".

4. Le problème (12) fait intervenir la proportionnalité dans un cadre géométrique. Il propose une situation intéressante car la sanction ne vient pas du maître, mais de la situation elle-même.
Je décris l'expérience faite par l'I.R.E.M. de Bordeaux en détaillant les différentes stratégies (d'échec puis de réussite) utilisées par les élèves pour résoudre le problème.

5. La situation (4) est un exemple de situation-problème "ouverte" où les enfants doivent formuler eux-mêmes les questions. Elle est l'occasion de discuter avec les normaliens de l'intérêt de telles situations, où les élèves sont amenés à explorer les relations entre les données pour pouvoir formuler des questions.
Un seul groupe trouve cette situation "un peu touffue" et déclare que "la présentation mériterait d'être plus claire".
Là aussi, je décris grossièrement l'expérience et j'insiste sur l'importance du rôle des grandeurs dans un problème de proportionnalité en particulier sur les notions de grandeur produit et de grandeur quotient (Cf. Analyse Mathématique).

6. La solution du problème (13) ne fait pas intervenir la proportionnalité. Aucun groupe ne tombe dans le piège.

7. Par contre, pour le problème (14) , un raisonnement utilisant les fonctions linéaires permet de trouver facilement la solution :

en 6 heures, Jean bêche l'équivalent de 3 jardins
en 6 heures, Jacques bêche l'équivalent de 2 jardins
en 6 heures, Jean et Jacques bêchent l'équivalent de 5 jardins.

Pour bêcher un jardin, il mettent donc $\frac{6}{5}$ h soit 1 h 12 mn.

4 L'enseignement de la Proportionnalité (1 séance de 3 h)

Au cours des séances précédentes, plusieurs aspects concernant la proportionnalité ont été abordés : le but de cette séance est essayé d'en faire une synthèse et d'en voir les incidences sur un enseignement de la proportionnalité.
Les différents points abordés sont les suivants :

I - Evolution de l'enseignement de la proportionnalité

a. Dans le temps.
Il me semble intéressant d'informer les normaliens de cette évolution : je m'appuie sur l'analyse de F. PLUVINAGE et C. DUPUIS ((8)) pour distinguer trois grandes périodes : celle des mathématiques "traditionnelles" (règle de trois) celle des mathématiques "modernes" et celle des mathématiques "concrètes".

b. Dans les classes.
Je fais remarquer que l'école élémentaire concerne seulement les premiers apprentissages : ceux-ci doivent se poursuivre dans le premier cycle en 6ème, 5ème mais aussi en 4ème et 3ème bien que dans les programmes actuels l'étude de la proportionnalité s'arrête en classe de 5ème. Faisant allusion aux recherche précédemment citées (en particulier (1)), je conclus à la nécessité de l'étalement dans le temps de l'apprentissage de la notion de proportionnalité.

II - Structure des Problèmes

Je m'appuie sur l'analyse de G. VERGNAUD ((1)) pour distinguer les deux structures :

- celle de la proportion simple : l'"isomorphisme de mesures" où une variable est une fonction linéaire d'une autre variable,
- celle de la proportion multiple : le "produit de mesures" ou la proportionnalité multiple ordinaire où une variable est une fonction multilinéaire de deux ou plusieurs autres variables.

III - procédures de résolution des problèmes

La séance précédente a déjà été l'occasion de décrire la procédure de type scalaire et la procédure de type fonction.
Je décris aussi les procédures "valeur unitaire" et "règle de trois" qui peuvent être observées.
J'insiste sur le fait que pour résoudre un problème de proportionnalité, il y a plusieurs procédures et non pas une seule et que les différentes procédures utilisées par les enfants doivent être confrontées, explicitées et validées.

D'autre part, comme j'y ai déjà fait allusion lors de la séance précédente, un problème peut induire une procédure plutôt qu'une autre de par sa nature et de par le choix des valeurs numériques. En effet, lors de l'étude d'engrenages par exemple, le fait de compter le nombre de tours de la grande roue et le nombre de tours de la petite roue correspondants met plutôt en jeu la proportionnalité scalaire :
"si la grande roue fait n fois plus de tours, alors la petite roue fait aussi n fois plus de tours".
- par contre, si on demande d'étudier l'aire d'un rectangle en fonction de l'une de ses dimensions (l'autre restant constante), on met plutôt en jeu la proportionnalité fonction (il suffit de multiplier par la dimension qui reste constante).
De même, dans toutes les situations-problèmes où intervient la proportionnalité, on peut mettre en évidence les propriétés de linéarité : mais, dans certaines situations (par exemple lorsque le rapport fonction est un entier naturel asses petit et connu), le fonctionnement de ces propriétés peut paraître "secondaire" pour compléter un tableau (par exemple, pour compléter :

4	7	11	18
8	14		

l'utilisation de l'opérateur x 2 semble plus "naturelle" que l'utilisation de la propriété :

$$4 \longrightarrow 8$$
$$7 \longrightarrow 14$$
$$4 + 7 \longrightarrow 8 + 14$$

Enfin, il me semble intéressant d'informer les normaliens des recherches de G. RICCO (9) concernant l'évolution des procédures à l'Ecole Elémentaire : nous concluons que la notion de constante est progressivement prise en compte par les enfants et que les procédures d'échec contiennent des éléments qui peuvent conduire à la réussite (en particulier par l'utilisation de certaines propriétés de la fonction linéaire, par exemple la croissance).

IV - Diversité des Situations-Problèmes

Au cours de la séance précédente, les normaliens ont déjà eu une idée de cette diversité :
la proportionnalité intervient :

- entre deux grandeurs : Marchandises - Prix
  Durées - Distances parcourues
  Volumes - Masses
  etc...
- C'est un modèle local en physique : allongement d'un ressort en fonction de la masse suspendue, etc...

Il se pose alors le problème de l'adéquation du modèle à la situation réelle.

- Elle intervient dans la construction des concepts de vitesse, débit, etc...

Je souligne que cette diversité devrait aussi se retrouver dans l'enseignement.
De façon générale, d'après la Théorie du "Jeu de Cadres" de R. DOUADY dont je développe les grandes lignes, les situations-problèmes doivent faire intervenir la proportionnalité dans des cadres différents : Numérique, Physique, Graphique, Géométrique, etc... En effet, les connaissances des élèves ne sont pas les mêmes dans les différents cadres : les connaissances plus grandes dans un des cadres provoqueront un déséquilibre qui les amènera à faire des conjectures dans les autres cadres et à construire ainsi la connaissance visée.
La proportionnalité se prête particulièrement bien à cette théorie du jeu de cadres : pour reconnaître et traîter une situation de proportionnalité, on peut utiliser les propriétés numériques ou graphiques de la fonction linéaire. D'autre part, la proportionnalité peut-être associée à un jeu de cadres pluridisciplinaire (Physique - Géographie etc...).
Enfin, je rappelle qu'il est important de présenter à la fois des situations-problèmes où la proportionnalité intervient et des situations où elle n'intervient pas : en effet, une propriété ne peut-être dégagée que si elle est mise en rapport avec des cas où elle n'est pas vérifiée.

V - Autour de la Proportionnalité

La lecture des programmes officiels du CM nous permet de replacer la proportionnalité dans le cadre général des fonctions numériques : en effet, la fonction linéaire est une fonction particulière. Elle doit être étudiée avec d'autres exemples de fonctions numériques (exemples et contre-exemples de proportionnalité).
D'autre part, je souligne qu'il est difficile de séparer le concept de proportionnalité d'autres concepts, en particulier de la mesure (Aire - Volume), des fractions, des nombres décimaux...
En ce qui concerne les nombres, je rappelle qu'il faut tenir compte de leur taille et de l'ensemble considéré : pour une même question, le passage de l'ensemble des entiers naturels à celui des nombres décimaux pose souvent des problèmes : il peut y avoir réussite pour des valeurs numériques dans N et échec pour des valeurs numériques dans D.
Enfin, l'étude de la proportionnalité peut aussi être liée à celle de certaines transformations géométriques, en particulier de l'homothétie.
Les instructions officielles du Cours Moyen insistent beaucoup sur les différentes façons de réprésenter une fonction numérique (tableaux de nombres - graphiques - formulaires etc...). Il me semble intéressant d'aborder cette question avec les normaliens : c'est l'objet de la dernière partie du cours.

5 Cadre Général des Fonctions Numériques (1 séance ½ h)

La fonction linéaire s'étudie au cours moyen dans le cadre des fonctions numériques en général :
Le but de cette séance est :

- de faire étudier aux normaliens des fonctions autres que les fonctions linéaire et affine,
- de rappeler des définitions, des propriétés des fonctions,
- d'aborder le problème des différentes représentations possibles d'une fonction, en particulier celui des représentations graphiques.

Déroulement de la Séance

1. Etude de Fonctions :
Les normaliens travaillent par 2, ils étudient les exemples de fonctions proposés par la fiche : (voir annexe 2).

2. Mise au point mathématique :
   A - Définitions :
   - Fonction de une ou plusieurs variables.
     Application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ - Injection - Surjection - Bijection.
   - Composition de fonctions.
   - Fonction paire, impaire, périodique } graphes
     Fonction inverse } correspondants
   - Fonction croissante, décroissante, constante.

Les exemples de la fiche sont repris au cours de cette phase.

   B - Différentes façons de représenter une fonction numérique. Représentations graphiques, tableaux de nombres, formules, phrases, histogrammes, etc...

   C - Avantages et inconvénients de ces différents types de représentation :

1 du point de vue de la précision et de la lisibilité des informations :
- Un tableau restitue l'information telle qu'elle y a été mise ; mais la fonction correspondantes est le plus souvent la restriction d'une fonction définie sur un ensemble infini, englobant les valeurs du tableau, il vaut mieux alors employer une formule, mais cela nécessite la connaissance des notations fonctionnelles : $x \longmapsto f(x)$.
- Dans une représentation graphique, on n'a accès ni à l'infiniment petit, ni à l'infiniment grand ; de plus, la lecture entraîne une certaine approximation.
- Traduire un texte par une formule n'est pas toujours facile.

2 Du point de vue de l'étude des propriétés de la fonction :
Avec un graphique, on se rend mieux compte qu'avec un tableau ou une formule de l'allure générale de la fonction (croissante, décroissante, périodique...). De même, on a des informations sur des propriétés comme les minima, maxima, point d'inflexion.

Certaines propriétés (conservation des écarts par exemple) deviennent spectaculaires sur un graphique (on a une droite) alors qu'elles sont peu visibles sur un tableau. C'est l'occasion de souligner avec les normaliens les limites de l'utilisation des représentations graphiques.

Ces limites sont dues :

1. à la nature de l'Outil :
   le choix de l'origine et celui de l'unité a une importance très grande et on peut "faire dire" à des graphiques des choses très différentes... (voir annexe 3).
2. à la conception des enfants :
   D'abord, avant d'utiliser des représentations graphiques, il faut apprendre un certain nombre de choses aux enfants : placer des points sur un plan repéré par un système d'axes, choisir une échelle et graduer les axes convenablement en utilisant cette échelle, utiliser le graphique pour trouver l'image ou l'antécédent, trouver les coordonnées d'un point du graphique etc...
   Tout cela ne va pas sans problème, en particulier la graduation des axes. L'expérience relatée au chapitre I dans une classe de CM2 en fournit la preuve. D'autre part, il y a souvent confusion chez les enfants entre la trajectoire et la représentation du mouvement. (voir feuille annexe 4).

3 Du point de vue de la Résolution de problèmes.
Les normaliens doivent résoudre un problème type "le problème des taxis" (voir ci-dessous).
La réflexion sur le rôle des graphiques dans ce problème permet de mettre en évidence qu'ils peuvent être un outil efficace de résolution de problèmes, alors que, le plus souvent, ils servent seulement à "visualiser" les choses.

Le problème des taxis :

4 compagnies de Taxi ont les tarifs suivants :

1. Prise en charge : 10 F ; 8 F par kilomètre parcouru.
2. 9 F par kilomètre parcouru.
3. Un forfait de 50 F jusqu'à 8 kilomètres ; 90 F jusqu'à 20 km.
4. Système mixte : forfait de 60 F jusqu'à 9 km ; 6 F du km supplémentaire.

Trouver, pour toutes les distances de 0 à 20 km, le taxi le plus économique.

Contrôle

Il y a eu 2 types de contrôle :

1°/ Contrôle du Contenu mathématique
Il consiste en un post-test qui reprend pour l'essentiel des questions du pré-test.

2°/ Chaque normalien a eu à élaborer un "projet de cours" niveau CM1-CM2 sur le thème de la proportionnalité.
De plus, j'ai pu observer 2 leçons sur la proportionnalité faites par 2 normaliens en stage dans une classe de CM2.

1°/ Contrôle du contenu : Post-Test (voir Annexe 5).
a) Elaboration : le post-test est pour l'essentiel une reprise du questionnaire ayant servi de prétest. Toutefois, quelques questions ont été soit modifiées, soit supprimées dans les cas où elles ne présentaient qu'un intérêt restreint.

Dans la partie I :

1 est conservée.

2 présente 2 suites (xi) et (yi) ayant la propriété des "écarts constants" :

$$\begin{cases} x_{i+1} - x_i = 6 & 1 \leq i \leq 4 \\ y_i = x_i + 4 & 1 \leq i \leq 5 \end{cases}$$

3 n'est pas conservée : toutes les réponses à la question I 3 du prétest étant justes, j'ai préféré proposer 2 suites révélatrices d'une confusion observée en III 1 dans le questionnaire :

les suites sont ainsi construites :

$$x_{i+1} = 2\,x_i \qquad 1 \leq i \leq 4$$
$$y_{i+1} = 3\,y_i \qquad 1 \leq i \leq 4$$

Ce sont les rapports scalaires $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ et $\frac{y_{i+1}}{y_i}$ qui sont constants et non les rapports fonctions $\frac{x_i}{y_i}$

Dans la partie II :

- Il n'y a pas de question analogue à la question A du questionnaire qui a été bien réussie dans l'ensemble.
- II 1 est analogue à B . Le tableau à compléter est construit de la même façon que celui de B ; le coefficient de proportionnalité a une écriture décimale comportant 4 chiffres après la virgule : cela à fin de voir si les erreurs de calcul dues à des arrondis de ce coefficient persistent.

- II (2) et II (3) concernent la traduction graphique de la proportionnalité : elles doivent permettre de voir si des confusions persistent entre fonction linéaire/fonction croissante d'une part et fonction linéaire/fonction affine d'autre part.
- II (5) , comme (F) est une situation de double-proportionnalité. Mais le domaine de référence est différent de celui de (F) . De plus, il demande une multiplication et une division et non pas 2 multiplications comme (F) .
- II (6) comporte 2 parties :
  II (6) a) propose, comme la question (G) du prétest une fonction affine,
  II (6) b) est une reprise de (H) (proportionnalité inverse).
- II (7) est une reprise de (I) .
- II (8) concerne des pourcentages d'augmentation.
- II (9) et II (10) reprennent les questions III (1) et III (5) du questionnaire.

b) Evaluation : l'évaluation des questions se fait sur les mêmes principes que pour le prétest : que ce soit une question de reconnaissance de la proportionnalité ou un calcul, une mauvaise réponse est évaluée à 0 ; une réponse ambigüe, non justifiée ou mal justifiée est évaluée à 1 et une bonne réponse, bien justifiée est évaluée à 2.

c) Résultats

1°/ Résultats d'Ensemble : (voir tableau ci-après).
Chaque copie peut-être notée sur 34. Si on répartit les notes en cinq classes analogues à celles définies dans le prétest, on observe que tous les normaliens sauf un sont dans la classe 5, alors que, pour le prétest, il y en avait seulement 11.
Il y a donc un progrès certain entre le prétest et le post-test ; en particulier, cinq normaliens qui se trouvaient au départ en dessous de la moyenne sont maintenant dans la classe 5.

Par contre, une normalienne passe de la classe 3 à la classe 2 (plus précisément, de 25/50 à 15/34). Dans ce cas, il y a régression.

Résultats \ classes	1	2	3	4	5
Pré-test	1	4	2	2	11
Post-test		1			19

Comparaison des résultats Pré-test/Post-test en ce qui concerne la répartition des notes dans les différentes classes.
Ces bons résultats ne permettent tout de même pas de conclure que tous les normaliens sont maintenant au point sur la notion de proportionnalité. En effet, le système de notation choisi pénalise surtout les mauvaises réponses ou l'absence de réponses : mais les réponses ambigües ou mal justifiées sont évaluées à 1.
Il est donc nécessaire de regarder plus en détail l'évolution des résultats entre le pré-test et le post-test.

2°/ Evolution des Résultats question par question

Partie I :

- On n'observe aucune erreur dans les questions I (1) et I (2) du post-test alors qu'il y en avait six dans la question I (2) du pré-test : il semble donc qu'il n'y ait plus de confusion avec la propriété des "écarts constants".
Toutefois, si on regarde les suites proposées à la question II 9 du post-test, un normalien propose encore 2 suites ayant la propriété des "écarts constants". Dans ce cas particulier, la confusion existe donc encore ; on peut d'ailleurs remarquer que ce normalien avait répondu "oui" à la question I 2 du pré-test.
- Pour la question I 3 , on observe 2 erreurs et une non-réponse : certains normaliens ont donc encore tendance à confondre des suites proportionnelles avec des suites telles que le rapport scalaire :

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \quad \text{soit constant.}$$

Partie II :

Question II ① : les erreurs observées (il y en a 5) sont des erreurs dues à des arrondis :

- $f(22)$ est arrondi à 28,8 (dans 3 cas),
- le coefficient $\frac{21}{16}$ est arrondi à 1,31 (dans 1 cas).
- l'autre erreur est une erreur de calcul.

Les erreurs d'arrondis se trouvaient déjà dans la question (B) du pré-test, mais pas forcément chez les mêmes personnes. D'autre part, on observe que 2 normaliens qui n'avaient pas su trouver les images de 22 et de x font maintenant les calculs correctement.
Enfin, il est intéressant de constater qu'en ce qui concerne les procédures, presque tous les normaliens en proposent plusieurs : procédures fonction, scalaire, "décomposition de type scalaire", "règle de trois"... ; alors que, dans le pré-test, une seule procédure était le plus souvent envisagée. Il semble donc que les normaliens aient retenu la multiplicité des procédures de résolution d'un problème de proportionnalité, certaines de ces procédures faisant intervenir les propriétés de la fonction linéaire.

Les questions II ② et II ③ : concernent la traduction graphique de la proportionnalité :

pour II ② on observe une seule mauvaise réponse et une non-réponse,

pour II ③ on observe une mauvaise réponse (avec comme justification : "c'est une droite") et une non-réponse.

Les résultats diffèrent peu de ceux des questions (E') et E" du pré-test. Néanmoins, on notait plus de "je ne sais pas". La différence se situe surtout dans le type d'arguments utilisés : alors que pour E" on comptait seulement sept arguments DO ("c'est une droite passant par l'origine"), pour II 3 , presque tous les normaliens (sauf 3) emploient l'argument $\overline{\text{DO}}$ ("ce n'est pas une droite passant par l'origine"). Cet argument $\overline{\text{DO}}$ est d'ailleurs souvent accompagné de l'équation de la droite du type $f(x) = ax + b$, et dans quelque cas de l'argument $\overline{\text{RC}}$ ("le rapport $\frac{y}{x}$ n'est pas constant).

La traduction graphique de la proportionnalité semble donc maintenant bien connue des normaliens.

Question II 5

- Cinq normaliens seulement (1/4) reconnaissent la double proportionnalité : ce nombre était le même pour la question F du pré-test. On peut remarquer que parmi ces cinq, trois sont les mêmes personnes,
- cinq normaliens reconnaissent la proportionnalité par rapport au temps,
- les dix autres fournissent des justifications ambigües.

Exemples :

"le temps par rapport à une quantité et une consommation moyenne",

"les secondes - les tonnes de carburant",

"lorsqu'un réacteur fonctionne, il consomme 1,6 tonnes de carburant par seconde : l'utilisation d'un réacteur $\longrightarrow$ dépense de carburant".

Certaines de ces justifications font plus ou moins allusion à la proportionnalité par rapport au temps, mais cela reste imprécis.

Pour cette question, il n'y a pas de progrès entre le pré-test et le post-test : les normaliens ont toujours du mal à reconnaître une double proportionnalité. Pour les calculs, on n'observe toutefois qu'une seule erreur (la normalienne se trouvant dans la classe 2) : elle consiste à faire le quotient 131,8/1,6 en oubliant de diviser par le nombre de réacteurs.

En ce qui concerne les procédures, on peut remarquer que tous les normaliens utilisent la même, qui consiste à multiplier d'abord 1,6 par 4, puis à diviser 131,8 par ce résultat.

Questions II 6

a) Cette situation propose une fonction affine. Pour la question de reconnaissance, il y a un seul "oui" (toujours la même normalienne de la classe 2). Tous les autres répondent "non", mais les justifications ne sont pas toujours satisfaisantes : en particulier, 3 normaliens parlent de proportionnalité inverse.

b) Pour cette question, il y a aussi un seul "oui" non justifié (toujours la même) mais, de même que pour a), les justifications ne sont guère satisfaisantes : un seul normalien parle de proportion inverse et un seul remarque que la longueur est proportionnelle à l'inverse de la largeur. Dans les autres cas, les arguments utilisés sont de type graphique : "ce n'est pas une droite" ou "ce n'est pas une droite passant par l'origine".

Pour le graphique, on constate une seule erreur (toujours la même normalienne : elle obtient une droite à pente négative). Tous les autres graphiques sont justes alors qu'on en comptait seulement sept dans la question H du pré-test. Pour le graphique, il y a donc un net progrès. Il faut dire que cela avait été traité en cours.

Question II 7

On compte seulement 2 erreurs (contre 4 à la question I du pré-test et 7 non réponses).

Les résultats sont donc meilleurs au post-test.

Question II 8

Cette question n'avait pas d'équivalent dans le pré-test, mais elle figurait dans le petit questionnaire sur Pourcentages proposé aux normaliens pendant le cours.

Comme cela a déjà été dit, il y a plus d'erreurs dans le cas du périmètre (4 erreurs) que dans le cas de l'aire (1 seule erreur et une non- réponse). Cela peut s'expliquer en disant que, pour le périmètre, les normaliens répondent spontanément, sans se donner la peine de faire le calcul.

Dans cette question, tous les normaliens, sauf 2, utilisent des notations littérales. Les 2 autres raisonnent sur un exemple dans les 2 cas : périmètre et aire.

Question II 9

On note une seule erreur pour cette question, qui consiste à proposer 2 suites ayant la propriété des "Ecarts Constants". Or cette erreur se rencontrait 4 fois dans la question analogue III 1 du prétest-il y avait aussi une erreur due à la confusion avec la propriété des "écarts proportionnels" et deux erreurs dues à la confusion avec des suites telles que le rapport est constant.

Dans ce cas, les résultats du post-test sont donc meilleurs que ceux du pré-test.

Question II 10

Pour cette question, il est intéressant d'étudier l'évolution des types de conception exprimés et cela pour chaque normalien :

TYPES DE CONCEPTIONS

Pré-Test		Post-Test
Ø	→	Ø
Ø	→	1'DO
Ø	→	2
0	→	2+Ex
0	→	2
Ex	→	Ø
EC	→	1
1	→	2
1D	→	1'DO
1	→	1
1'	→	2
1"D	→	2
1"	→	2FL
2	→	2
2	→	2
2	→	2DO
2	→	2
2	→	2
2	→	1"
2	→	0+Ex

Tableau donnant, pour chaque normalien, l'évolution du type de conception entre le pré-test et le post-test.

On peut faire les remarques suivantes :

1°/ Globalement, il y a une progression nette des types de conception entre le pré-test et le post-test : en effet, on compte 12 conceptions de type 2 au post-test contre 7 au pré-test.

On observe seulement 2 régressions :

- l'une est peu importante : 2 $\longrightarrow$ 1"
- mais l'autre est spectaculaire : 2 $\longrightarrow$ 0 (+Ex).

C'est le cas déjà signalé de la normalienne de la classe 2. Dans le pré-test, elle avait juste la moyenne mais sa définition de la proportionnalité était correcte. Dans le post-test, elle n'a plus la moyenne et donne comme réponse en

II 10 :

"Ce sont 2 suites de nombres qui ont une relation telle que

$a \mapsto a + b$ $\quad a \mapsto a \times b$

$a \mapsto a - b$ $\quad a \mapsto a/b$

Exemple : si pour une location tu paye 5 F par heure, quel prix paieras-tu pour 2 h, 3 h, 4 h, 5 h ?"

2°/ Dans le post-test comme dans le pré-test, il y a peu d'arguments graphiques : on peut seulement noter que les trois du post-test sont de type DO tandis que ceux du pré-test étaient de type D.

3°/ Les propriétés de la fonction linéaire apparaissent toujours très peu : (dans aucun cas lors du pré-test, dans 2 cas pour le post-test). Il y a une légère amélioration, mais elle est bien mince.

4°/ Une normalienne reconnaît qu'elle n'a pas assez bien assimilé la notion pour pouvoir la définir.

Voici sa réponse :

" Il ne suffit pas de comprendre et de pouvoir résoudre une situation de proportionnalité ! Je ne l'ai pas assez assimilée pour être capable de l'expliquer <u>clairement</u> à d'autres (d'autant plus à des enfants !) et surtout de façon abstraite, sans exemple comme support !"

CONCLUSION

- Globalement, il y a une progression nette entre le pré-test et le post-test :
  . les confusions possibles (avec la propriété des "écarts constants", avec une fonction croissante, avec une fonction affine ... etc...) sont devenues rares.
  . les normaliens ont une meilleure connaissance de la traduction graphique de la proportionnalité simple comme de la proportionnalité inverse.
  . Ils ont aussi une meilleure connaissance des différents types de procédures possibles pour résoudre un problème de proportionnalité ; cela est en liaison avec une meilleure connaissance des propriétés de la fonction linéaire.
  . Les types de conception exprimés au post-test révèlent une meilleure connaissance de la notion de proportionnalité.
- Mais il reste des insuffisances notables :
  . la notion de double proportionnalité est mal perçue,
  . la notion de proportion inverse reste mal connue.

On peut remarquer que ces 2 aspects de la proportionnalité étaient déjà source de difficultés au départ. N'ayant pas été l'objet d'une insistance particulière pendant le cours, ils posent encore des problèmes aux normaliens.

- Finalement, si la plupart des normaliens se sont mis à jour sur la notion de proportionnalité, cela semble bien fragile pour certains, en particulier pour ceux ayant eu des résultats médiocres au pré-test :
  - une avoue être incapable de définir cette notion. D'autre part, ses justifications graphiques montrent que le modèle "Ecarts Constants" est encore tenace.
  - Les réponses non justifiées ou mal justifiées au Post-test se rencontrent surtout chez ceux qui ont eu les moins bons résultats au Pré-test : ces normaliens ont donc franchi un pas puisqu'ils sont maintenant capables de reconnaître une situation de proportionnalité, mais ils sont toujours incapables de justifier correctement.
- Enfin, il faut retenir le cas d'une normalienne qui semble plutôt régresser entre le pré-test et le post-test.

2°/ Contrôle au niveau de la didactique

A Analyse des "projets de cours"

Pour tenter d'avoir une idée des retombées de mes interventions sur la question de l'enseignement de la proportionnalité, j'ai demandé aux normaliens d'élaborer personnellement un "projet de cours" niveau CM1-CM2 sur ce thème. C'est un travail individuel, fait en dehors des heures de cours. Pour faire ce travail, les normaliens disposent des manuels du cours moyen et d'un document distribué à chacun d'eux regroupant des propostions d'activités niveau CM1-CM2-6ème faites dans différents ouvrages (Publications I.R.E.M., Revues, autres manuels, etc...).
Dans ce document, j'ai essayé de sélectionner des activités originales, qui avaient peu de chances d'être proposées dans un manuel classique du cours moyen.
Le problème de la documentation est d'ailleurs quelque chose d'important dans la formation des élèves-instituteurs : ceux-ci disposent facilement des manuels de l'école primaire ; mais les publications I.R.E.M., les revues concernant l'école élémentaire, tous les ouvrages qui ont le plus de chances de proposer des choses nouvelles leur sont beaucoup plus difficilement accessibles, ne serait-ce que parce qu'ils sont en au plus un exemplaire à la bibliothèque de l'Ecole Normale.
Le document distribué comprend :

- les instructions officielles du Cours moyen (1980).
- Un extrait des "Aides Pédagogiques pour le cours élémentaire" (brochure APMEP) : chapitre des Relations Numériques.
- Un extrait du Bulletin N° 9 de l'I.R.E.M. de Lille intitulé "Proportionnalité sur du papier".
  Cet article propose, au niveau CM, une activité à partir de Rectangles Homothétiques, analogue à celle proposée aux normaliens dans le cours.

- Un extrait de ERMEL CM (Tome 3) sur les fonctions numériques concernant l'explicitation et l'utilisation des propriétés de la fonction linéaire : cet ouvrage est pratiquement le seul à proposer un travail systématique sur les propriétés de linéarité. Les autres manuels se contentent le plus souvent de faire des constatations à partir d'exemples.
- Un extrait du compte-rendu du Colloque CM2-6ème édité par l'I.R.E.M. de Limoges : il concerne la situation du puzzle (G. BROUSSEAU - Bordeaux).
- Un extrait d'une brochure de l'I.R.E.M. de Rennes intitulée "la recherche d'activités mathématiques en classe de 6ème" concernant la proportionnalité. Cette brochure est une mine d'activités possibles avec les enfants, en liaison avec d'autres disciplines (Physique, Géographie...).

A partir de ce document et des manuels de l'Ecole Elémentaire, les normaliens doivent donc construire un projet de cours niveau CM1-CM2 sur le thème de la proportionnalité. Ils doivent préciser leurs objectifs et justifier leur choix en ce qui concerne les situations-problèmes proposées. Les projets de cours seront analysés de 3 points de vue :

I. Présentation de la notion de proportionnalité
II. Etude de la notion de proportionnalité
III. Réflexion didactique

I - Présentation de la notion de proportionnalité

1. Cadre Général

Presque tous les normaliens présentent la proportionnalité dans le cadre général de l'étude des fonctions numériques. Même si les exemples de fonctions sont parfois seulement suggérés et non développés, ils proposent l'étude de fonctions croissantes ; de fonctions en escaliers, affines, périodiques, etc...
Une seule normalienne propose une situation de proportionnalité inverse. Sauf dans 3 cas, des situations de proportionnalité sont donc présentées parallèlement à des situations de non proportionnalité.

Les fonctions numériques que l'on retrouve le plus souvent sont les fonctions :

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad$ ($a \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{D}$)

$x \longmapsto x + a$

$x \longmapsto x - a$

$x \longmapsto x \times a$ $\quad$ $x \longmapsto x : a$

encore appelées "opérateurs".

Environ la moitié des normaliens pensent qu'une étude préalable de ces opérateurs est nécessaire avant d'aborder la proportionnalité. Ils proposent donc divers exercices sur des tableaux de nombres obtenus le plus souvent à partir de l'étude de situations : recherche de l'opérateur de passage, recherche d'images, d'antécédents, étude de certaines propriétés (croissance - conservation ou non des écarts - propriétés de linéarité). 2 normaliennes proposent même une étude longue et fastidieuse de la composition de ces opérateurs ("Chaînes d'Opérateurs").

C'est sans nul doute dans les manuels du Cours Moyen que les normaliens ont trouvé ces exercices. En effet, bien que la notion d'opérateur soit maintenant abandonnée par les programmes officiels, beaucoup de manuels continuent de proposer un nombre impressionnant de tableaux de nombres à compléter, avec recherche ou non de l'opérateur de passage. Or s'il y a eu un certain engouement des enseignants pour les opérateurs au moment de la réforme des "Mathématiques Modernes", on a depuis abandonné ce terme et on lui préfère celui de "fonction numérique". En effet, l'utilisation des opérateurs avec tableaux de nombres n'est pas sans poser quelques problèmes :

1°/ le domaine de définition de la fonction est forcément restreint (on ne considère qu'un nombre fini de valeurs). Ce n'est donc pas de la fonction $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto x + a$ qu'il est question, mais de sa restriction à un nombre fini de valeurs.

2°/ Bien sûr, il est intéressant de savoir organiser des données sous forme de tableau : cela peut faciliter la résolution d'un problème ; il y a alors 2 étapes :

1. Construire un tableau à partir des données de la situation : on ne conserve alors que les aspects numériques ; les aspects dimensionnels (rôle des grandeurs) sont laissés de côté.
2. Faire intervenir un opérateur (interlignes ou inter colonnes) pour résoudre le problème.

La phase N° 2 nécessite de savoir manipuler des tableaux de nombres avec opérateurs. Mais elle ne peut pas justifier l'inflation d'exercices sur les opérateurs que l'on trouve dans certains manuels. D'autant plus qu'ils proposent souvent des tableaux de nombres "abstraits", c'est à dire qui ne sont pas des mesures de grandeurs. La manipulation systématique de ces tableaux risque alors de devenir un simple mécanisme, sans contribuer à la construction d'une quelconque connaissance chez les élèves.

3°/ Un tableau n'est pas la seule façon de représenter une fonction numérique et on peut étudier au cours moyen d'autres fonctions que les opérateurs ajouter, soustraire, multiplier, diviser.

Finalement, l'étude préalable des opérateurs proposée par un certain nombre de normaliens montre surtout l'impact des manuels sur les oprtions pédagogiques des élèves-instituteurs.

2. Définition de la notion

Le plus souvent, la définition n'est pas énoncée clairement et on ne sait pas trop à quel moment les normaliens la situent dans leur projet de cours. Quand elle est énoncée, c'est après l'étude d'une situation de proportionnalité : elle consiste alors à dire qu'il existe un opérateur $\times a$ ou $: a$ (pour certains, c'est seulement un opérateur $\times a$) entre 2 listes de nombres.

L'ensemble auquel a appartient n'est pas précisé mais, d'après les exemples étudiés, a est dans presque tous les cas un entier naturel.

Quelques rares normaliens rajoutent à cette définition à l'aide d'un opérateur :

- les propriétés de linéarité,
- le fait que la représentation graphique est une droite passant par l'origine.

Mais certaines définitions sont plutôt vagues et peuvent même induire en erreur :

Exemple :

"Il existe un opérateur unique entre les nombres de la colonne de gauche et ceux de la colonne de droite".

Dans ce cas, il y a manifestement confusion entre "opérateur" et "opérateur multiplicatif". Cette définition est dangereuse !

Autres exemples :

"il existe une règle constante",

"la fonction numérique qui intervient est multiplicative, c'est une fonction proportionnelle".

Enfin, il faut signaler le cas d'une normalienne qui, dans un cadre interdisciplinaire (géographie) propose l'étude de l'avancée d'un glacier : elle définit la proportionnalité en disant que la longueur du glacier est proportionnelle au temps, ce qui est faux puisque pendant un intervalle de temps, on peut considérer que c'est une fonction affine du temps.

II - Etude de la Notion de Proportionnalité

J'analyse ici 4 aspects de cette étude :

1. Etude de l'aspect fonction.
2. Etude de l'aspect isomorphisme (aspects scalaires).
3. Traduction Graphique.
4. Diversité des Situations - Problèmes (du point de vue des domaines de référence).

1. Aspect Fonction

Il est toujours mis en évidence par l'existence d'un "opérateur de passage" du type xa ou :a ; l'ensemble auquel a appartient est le plus souvent $\mathbb{N}$, quelquefois $\mathbb{Q}$. Rien n'est dit (sauf peut-être dans le cas de la vitesse) sur le problème du choix de l'unité pour a, ni sur le fait que a représente la valeur unitaire.

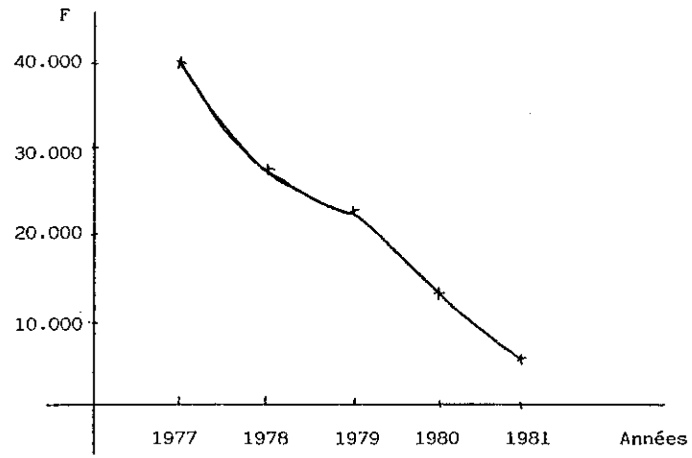
2. Aspect Isomorphisme

Sauf dans 2 cas, il est toujours mis en évidence lors de l'étude d'au moins une situation de proportionnalité. Mais seuls quelques rares normaliens proposent une étude systématique des propriétés de la fonction linéaire. Les autres se contentent de faire des constatations à partir d'exemples.

3. Traduction Graphique

Sauf dans un cas, le problème de la représentation graphique est toujours abordé.

Mais il semble que pour quelques normaliens l'interprétation d'un graphique pose encore problème : en effet, on peut citer une normalienne qui, comme exemple de fonction décroissante, propose d'étudier les variations du prix d'une voiture achetée en 1977. Elle trace alors ainsi le graphique de la fonction :



Dans ce cas, le passage du discret au continu pose incontestablement un problème : le trait qui relie les différents points ne correspond pas à la réalité !
Dans la majorité des cas, les 3 aspect de la proportionnalité :

- aspect fonction,
- aspect isomorphisme,
- aspect graphique

sont donc abordés.
Mais seuls quelques rares normaliens récapitulent clairement ces 3 aspects qui permettent, chacun, de reconnaître une situation de proportionnalité.

4. Diversité des situations-problèmes (du point de vue des domaines de référence).

Les domaines de référence les plus courants sont :

- ceux faisant intervenir des quantités de marchandises et leurs prix,
- les problèmes de recette,
- les problèmes d'échelle.
- Presque tous les normaliens abordent aussi les pourcentages.

Mais le lien avec la notion de suites proportionnelles n'est pas toujours fait. Il est vrai que, traditionnellement, les problèmes de pourcentages étaient traités "à part".
Les autres domaines abordés sont :

- problèmes de consommation en fonction du temps,
- vitesse,
- changement d'unités,
- échanges (billes - monnaie),
- périmètre du carré.
- Le cadre géométrique est très peu utilisé : une seule normalienne propose la situation du puzzle et personne ne fait le lien avec l'étude de l'homothétie.
- Quelques normaliens proposent des situations en liaison avec des expériences de physique :

- allongement d'un Ressort en fonction de la masse suspendue,
- allongement d'un élastique,
- engrenages,
- Masse Volumique,
- débit.

Dans l'ensemble, les normaliens ont tous le souci de proposer des situations "concrètes", "liées au vécu de la classe", intégrées le plus possible dans une activité interdisciplinaire.
Exemples : - les problèmes d'échelles sont étudiés lors de la représentation sur un plan d'un lieu familier aux enfants : classe, cour de l'école, quartier, etc...
- les pourcentages peuvent être étudiés après une enquête faite par les enfants eux-mêmes.

Toutefois, on peut remarquer que 2 normaliens proposent d'abord l'étude de tableaux de nombres "abstraits", puis ensuite une application de cette étude à des situations familières à l'enfant. Pour eux, il y a donc lieu de séparer les mathématiques "pures" d'une part et les mathématiques issues de l'étude de situations-problèmes d'autre part, qui ne peuvent être qu'une application des premières. Ce raisonnement a tendance à privilégier les aspects purement numériques par rapport aux aspects dimensionnels : or, dans le cas de la proportionnalité, on a vu, dans le chapitre I que le rôle joué par les grandeurs est très important.
En conclusion, on peut dire que, dans l'ensemble, les situations-problèmes proposées par les normaliens relèvent de domaines de référence divers et se veulent "liées le plus possible au vécu de la classe". Mais on peut regretter que les cadres géométriques et physiques soient encore trop peu souvent utilisés.

III - Réflexion Didactique

Elle est analysée selon plusieurs points de vue :

1. Objectifs des activités proposées : ils sont effectivement précisés dans la plupart des cas.

2. Comparaison des différentes situations proposées (quant à l'analyse des tâches, aux domaines de référence, aux procédures induites, etc...). Il y a peu de réflexion là-dessus. J'ai seulement relevé 2 idées :
a) pour compléter un tableau avec un coefficient fractionnaire "non simple" (par exemple un rationnel non décimal), il peut être intéressant d'utiliser les propriétés de la fonction linéaire.
b) Dans un problème de recette où il s'agit de calculer les proportions pour p personnes, connaissant celles pour n, il est souvent plus intéressant d'utiliser des procédures de type scalaire que la procédure fonction (par exemple lorsque p est un multiple entier de n).
3. Utilisation d'un graphique.
Quelques rares normaliens évoquent les problèmes de lecture et d'interprétation d'un graphique.
Un normalien fait remarquer qu'un graphique peut permettre de résoudre un problème : par exemple, rechercher à l'aide du graphique, l'image d'un élément de l'ensemble de départ lorsque le coefficient n'est "pas simple".
Personne ne dit que, dans un cadre physique, un graphique peut être utilisé comme outil de prévision ; la vérification étant ensuite possible par l'expérience.
4. Utilisation des tableaux.
Ils sont très utilisés dans les projets de cours, mais un seul normalien émet une réflexion au sujet de leur utilisation : pour lui, c'est une méthode "infaillible".
A propos de la situation :
"Une usine automobile met 14 h pour produire 37 voitures. Elle reçoit une commande de 125 voitures. En combien de temps les aura-t-elle produit ?"
Il écrit "Il suffit de voir quelles sont les grandeurs en relation et de mettre des voitures sous des voitures et des heures sous des heures". Pour lui, grâce à l'utilisation répétée des tableaux, l'enfant doit pouvoir résoudre tous les problèmes de proportionnalité.

D'autre part, un autre normalien fait allusion à la difficulté de transcrire un énoncé de problème dans un tableau.

B Observation de 2 leçons faites, à la suite du cours suivi à l'Ecole Normale, par 2 élèves-instituteurs en stage dans une classe de CM.

1°/ La leçon est faite dans une classe de CM2 par la seule normalienne ayant obtenu une note inférieure à la moyenne au post-test : il s'agit d'une leçon concernant la vitesse uniforme.

<u>Déroulement de la leçon</u> :

a) les élèves doivent résoudre l'exercice suivant : "un automobiliste roule à 80 km/h. Son trajet dure 4 h. Quelle distance a-t-il parcourue ?"
- Recherche individuelle des élèves.
- Correction au tableau faite par la normalienne.

b) Les élèves ont à compléter le tableau :

Durées	30 mn	45 mn	1 h	2 h
Vitesse km/h	20	20	20	20
Distance km				

- Recherche individuelle.
- Correction collective.

c) On demande aux élèves de trouver "une autre manière de présenter les résultats du tableau".
- Recherche individuelle.
- La normalienne fait le graphique au tableau.

d) Trouver, à l'aide du graphique, la distance parcourue en 3 heures.

Observations

Les solutions proposées par les élèves pour compléter le tableau sont :

- faire le produit 30 x 20 ou le quotient 30 : 20. A ce sujet, le petit exercice au départ était censé rappeler aux élèves que la distance parcourue est égale au produit de la vitesse par le temps. Mais, dans cet exercice, il n'y avait pas de problème d'unités, alors qu'il y en a dans le tableau. Il n'est donc pas étonnant que beaucoup d'élèves fassent le produit 30 x 20 sans se préoccuper des unités.

Quant au quotient 30 : 20, il s'explique sans doute par le fait que, dans des leçons antérieures, les élèves avaient eu à faire des calculs de vitesse.

- Quelques rares élèves proposent :

30 x 20 = 600 puis 600/60 = 10

Leurs résultats numériques sont justes ; mais ils ont beaucoup de mal à expliquer leur raisonnement.

En fait, avant l'intervention de la normalienne, très peu d'élèves pensent à convertir les minutes en heures. D'ailleurs, les conversions posent problème pour certains qui écrivent 30 mn = 0,3 h, restant ainsi dans le système décimal.

- D'autre part, un certain nombre d'élèves ne comprennent pas ce que signifie "une vitesse de 20 km/h".

Finalement, le fait d'avoir négligé les problèmes d'unités dans l'exercice de départ a induit les élèves en erreur dans la suite de la leçon.

D'ailleurs, le tableau à compléter n'est pas vraiment un tableau de proportionnalité puisque les durées ne sont pas toutes exprimées dans la même unité. De plus, ce tableau comporte peu de valeurs : en particulier, il aurait été intéressant de proposer comme durées 1 h 45 mn ou 2 h 30 pour mettre en évidence les propriétés de linéarité.

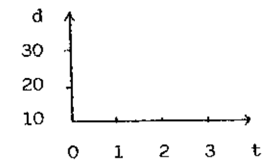
La correction de l'exercice de départ (pour lequel certains élèves avaient proposé 80 : 4) aurait dû être l'occasion d'expliciter les relations entre les grandeurs distance, vitesse et temps. Mais pour cela il aurait fallu proposer non seulement un calcul de distance, mais aussi des calculs de vitesse et de temps.

Lorsque la normalienne demande aux élèves de trouver "une autre manière de présenter les résultats du tableau" la solution du graphique donnant la distance parcourue en fonction de la durée n'apparaît pas tout de suite. Il est vrai qu'un graphique sert à mieux visualiser les résultats quand ceux-ci sont nombreux, ce qui n'est pas du tout le cas ici.

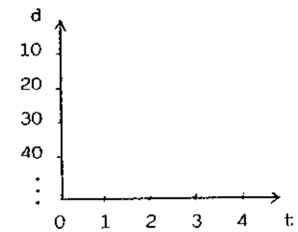
Dans un premier temps, un élève propose de représenter la distance sur une ligne en faisant des graduations. Puis, après intervention de la normalienne, l'idée de "faire des graduations aussi pour la durée" apparaît. Finalement, un élève propose "on met d'un côté la distance et de l'autre la durée".

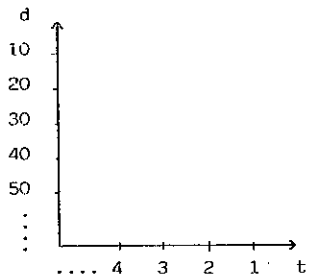
Chaque élève cherche alors à représenter graphiquement les distances en fonction des durées. Mais la graduation des axes pose de sérieux problèmes. En particulier :

- L'origine des distances et des durées ne coïncide pas :



- Une des 2 graduations (ou les 2 à la fois) "va en décroissant" :





Il est manifeste qu'un travail préalable sur la construction d'un graphique aurait été nécessaire.
Tous les élèves font finalement un graphique analogue à celui proposé par la normalienne au tableau, mais on peut douter de leur compréhension réelle.
Dans ce cas, le graphique n'est "qu'une autre façon de présenter les résultats", mais il n'intervient pas dans la résolution d'un problème.
Toutefois, la normalienne a le souci d'utiliser ce graphique puisqu'elle demande de déterminer, à l'aide du graphique, la distance parcourue en 3 h. La valeur numérique est d'ailleurs mal choisie puisque, dans ce cas, le calcul est très rapide. Il vaudrait mieux proposer par exemple 3 h 45 mn, où le calcul est "plus difficile". On retrouve alors avec les élèves le problème du passage du discret au continu : pourquoi joindre les points ? Quel est le statut d'un point "intermédiaire" ? (dont les coordonnées ne sont pas dans le tableau). La leçon s'arrête là : dans la discussion qui a suivi avec la normalienne, j'ai insisté sur plusieurs points :
- Dans un problème de proportionnalité, les aspects dimensionnels sont très importants : il ne faut donc pas négliger le rôle des unités dans lesquelles s'expriment les grandeurs en jeu. L'unité mesurant la grandeur quotient (la vitesse) est déterminée par les unités des autres grandeurs (distance et temps).

- La vitesse est une notion difficile, même si elle semble familière aux élèves. Il est donc nécessaire de bien expliciter les relations distance, vitesse et temps.
- Chaque situation de proportionnalité proposée aux élèves doit être mise en relation avec les autres. Dans le cas présent, il est inquiétant que le mot "proportionnel" n'ait pas été prononcé une seule fois : et pourtant, la reconnaissance de la proportionnalité pouvait se faire :

  - à partir du tableau (avec plus de valeurs) : mise en évidence du rapport fonction (qui représente la vitesse) entre 2 séries de nombres s'exprimant chacune dans une même unité ; mise en évidence des propriétés de linéarité.
  - A partir du Graphique.

- Avant de faire travailler les enfants dans un cadre graphique, il est indispensable de leur apprendre certaines choses, entre autres :

  - Repérer un point dans un système d'axes.
  - Graduer un axe en choisissant une échelle.

De plus, le rôle d'un graphique ne se limite pas, comme dans le cas présent à une simple "mise en forme différente des résultats". Il peut aussi servir à faire des prévisions (que l'on peut ensuite vérifier par le calcul ou par l'expérience) et à résoudre des problèmes.

2°/ La Seconde leçon est faite par un normalien qui, au pré-test comme au post-test se situe dans la classe 5. L'objectif de cette leçon est, d'après le normalien, de "dégager l'aspect graphique de la proportionnalité".

Déroulement de la leçon

a) Les enfants travaillent par groupe de 4. Chaque groupe dispose d'une feuille avec un tableau de nombres et un graphique (voir Annexe 6);
Au départ, le normalien ne dit rien de plus : la consigne est inexistante... puis, comme les élèves ne font rien, il sont finalement invités à " faire des remarques". Il faut attendre un certain temps pour que les choses se précisent :

- Pour le tableau, il s'agit de dire si c'est, ou non, un tableau de proportionnalité.
- Pour le graphique, il s'agit de "se ramener à quelque chose de connu".

On peut d'ailleurs remarquer qu'il y a des erreurs dans certains graphiques, en particulier dans le cas 4 : c'est la longueur du ressort qui est représentée en fonction du poids et non pas l'allongement.

Les remarques des élèves sont du type :
"C'est un tableau de proportionnalité car les opérateurs sont toujours les mêmes"
ou bien "Quand on croise, on obteint la même chose".

Certains ne savent pas lire un graphique : à partir du graphique (2) , ils proposent le tableau :

x 2

1	2
2	4
3	6
⋮	⋮

b) Synthèse par Groupes :

Elle consiste à rassembler les remarques des enfants pour chaque groupe. Ces remarques concernent surtout les tableaux, très peu les graphiques. Seul un groupe recherche l'opérateur correspondant au cas (4) et trouve (+ 5) ; mais, à partir de là, il ne sait pas conclure s'il y a ou non proportionnalité.

c) Synthèse collective.

Les remarques des élèves sont écrites au tableau par le normalien et recopiées sur le cahier :

Cas (1) : "c'est un tableau de proportionnalité car les opérateurs sont les mêmes.
Le tableau correspondant à la courbe n'est pas proportionnel car les opérateurs ne sont pas égaux".

Cas (2) : pour le tableau, il y a proportionnalité.
"En croisant, les résultats sont les mêmes et les opérateurs aussi".

Cas (3) : "Pour le tableau, il n'y a pas proportionnalité car si on divise l'allongement avec le poids, ça ne fait pas toujours le même opérateur".

Cas (4) : "pour le tableau, il y a proportionnalité car les opérateurs sont les mêmes".

La leçon s'arrête là. C'est dans la discussion qui a suivi que j'ai appris que l'objectif de cette leçon était "dégager l'aspect graphique de la proportionnalité".

En fait, en proposant à chaque groupe un tableau et un graphique, l'intention du normalien était :

- de faire construire un tableau à partir du graphique,
- de faire construire un graphique à partir du tableau.

Les enfants sachant reconnaître un tableau de proportionnalité, on pouvait, à partir de là, dégager l'aspect graphique de la proportionnalité.

Finalement, cet objectif a été complètement abandonné au cours de la leçon : rien n'est dit dans la synthèse sur la traduction graphique de la proportionnalité. Nous avons essayé de voir les raisons de cet échec :

- Il y a eu beaucoup de temps perdu au départ à cause de l'absence de consigne : les enfants ne savaient pas ce qu'ils avaient à faire.

Un maître ne peut pas compter ainsi sur une recherche spontanée des élèves. Il doit proposer des situations suffisamment riches et donner des consignes claires pour provoquer ces recherches.

- En ce qui concerne les tableaux et graphiques proposés, on ne sait pas trop quelles grandeurs sont en jeu, (Cas (1) et (2) par exemple). Bien sûr, il aurait été plus intéressant que les tableaux et graphiques soient obtenus par les enfants eux-mêmes, à la suite d'expériences ou de mesures. Le problème de savoir si telle grandeur est proportionnelle à telle autre prenait alors un sens.

- Enfin, il y a le grave problème de la définition même de la proportionnalité. On ne peut pas admettre que des élèves copient sur leur cahier "c'est un tableau de proportionnalité car les opérateurs sont les mêmes". La confusion Opérateur/Opérateur multiplicatif, déjà observée dans les projets de cours, est ici une fâcheuse réalité. Un groupe a d'ailleurs été effectivement gêné par cette définition : il avait trouvé que l'opérateur correspondant au graphique 4 était + 5 ; à partir de là, il n'a pas su dire si le graphique traduisait ou non une relation de proportionnalité. En effet, l'existence de cet opérateur "unique" + 5 correspondait bien à la définition donnée. Il y a tout de même des points positifs dans cette leçon, notamment :

- le souci d'aborder le problème de la traduction graphique de la proportionnalité,
- le souci de fournir à la fois des exemples et des contre-exemples,
- l'organisation du travail des enfants (travail par groupes suivi d'une synthèse collective).

De plus, comme dans le cas précédent, les élèves n'ont pas l'habitude de travailler sur des graphiques : les normaliens se heurtent donc à des problèmes qui, normalement, devraient être résolus (savoir graduer un axe, lire un graphique... etc...). Pendant leurs quinze jours de stage, ils n'ont pas le temps d'apporter aux enfants les connaissances préparatoires indispensables au travail dans un cadre graphique.

C CONCLUSION

- Finalement, sur les 20 projets de cours, 3 seulement sont nettement insuffisants : ils proposent une seule situation-problème et se contentent d'en suggérer quelques autres. De plus, l'étude mathématique de la notion de proportionnalité est quasiment inexistante.

Il est intéressant de remarquer que ces trois normaliens se situent en dessous de la moyenne au pré-test ; mais on trouve aussi 3 autres normaliens dans ce cas qui construisent des projets de cours jugés "corrects".

On ne peut donc conclure à un lien systématique entre de mauvais résultats au pré-test et un projet de cours nettement insuffisant.

- Si on reprend les différents points de vue selon lesquels les "projets de cours" ont été analysés, on peut dire :

1. Etudier la proportionnalité dans le cadre général des fonctions numériques est sans doute une bonne chose (cela permet en particulier de voir des exemples et des contre-exemples). Mais pourquoi se restreindre alors aux "quatre opérateurs" : ajouter, enlever, multiplier et diviser ? Une seule normalienne propose une situation de proportion inverse et personne ne propose de situation faisant intervenir une double proportionnalité. On peut remarquer que, d'après le post-test, ce sont justement ces 2 aspects de la proportionnalité qui semblent les moins bien connus des normaliens. D'autre part, le coefficient de proportionnalité ne doit pas être toujours un entier naturel. Il doit aussi prendre des valeurs rationnelles, décimales ou non.

2. Si différents aspects de la proportionnalité sont effectivement abordés (fonction, isomorphisme, graphique), on souhaiterait une étude plus systématique des propriétés de linéarité et en particulier une mise en évidence de la multiplicité des procédures utilisables pour résoudre un problème ainsi qu'une confrontation de ces procédures.

3. Les Domaines de référence sont assez variés, mais on souhaiterait un recours plus fréquent aux cadres géométriques et physiques (en liaison avec l'expérience).

Il est d'autre part significatif que la structure "produit de mesures" soit absente des projets des normaliens : dans l'enseignement actuel, l'aire (ou le volume) ne sont jamais analysés comme forme bilinéaire (ou trilinéaire) de chacune des dimensions. Mes interventions sur ce sujet n'ont pas été suffisantes pour faire bouger les choses. Dans les projets des normaliens, qui le plus souvent sont inspirés des manuels du cours moyen, on retrouve cette lacune de l'enseignement actuel.

4. J'ai déjà noté le peu de réflexion didactique de la part des normaliens : beaucoup se contentent de juxtaposer des exercices sans justifier leur choix.
L'analyse des tâches induites par le choix d'une situation-problème n'est jamais faite : cela peut expliquer que certaines structures soient absentes ("produit de mesures", proportion inverse, double proportionnalité), que certains aspects soient négligés (en particulier l'aspect dimensionnel, lié au rôle joué par les grandeurs).

5. L'Etude de la proportionnalité doit se faire en liaison avec celle d'autre thèmes (Géométrie - Mesure - Décimaux - Fractions...) les liaisons avec d'autres thèmes apparaissent très peu dans les projets des normaliens.

- Mais les projets de cours demandés ne sont, par définition, que des projets : de l'état de projet à la réalisation effective dans une classe, il y a une marge... les projets de cours n'augurent pas forcément des futurs leçons sur la proportionnalité qui seront faites par les normaliens devenus instituteurs...
Les 2 leçons observées montrent que :

- Même après une mise au point sur la notion, les normaliens ne sont pas à l'abri de confusions mathématiques graves pour les élèves (définition de la proportionnalité par l'existence d'un "même opérateur"),

- le manque de réflexion didactique, déjà mis en évidence lors de l'analyse des projets de cours, se retrouve ici : pourquoi le choix de telle situation ? Quelles procédures va-t-elle engendrer ? A quoi peut servir le graphique ? etc... Comme je l'ai déjà dit, il n'y a pas d'analyse précise des tâches qui seront à accomplir par les élèves,

- l'explicitation de la notion mathématique n'est pas claire. En particulier, il faudrait dire, à un moment ou à un autre, sur quels critères on peut reconnaître la proportionnalité et aussi faire le lien entre les différentes situations proposées : sont-elles, ou non, des situations de proportionnalité ? Pourquoi ?

3°/ <u>Post-Post Test</u> (voir Annexe 6).
Pour essayer d'évaluer à plus long terme mon enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs, j'ai fait passer un post-post test l'année suivante.
Le questionnaire comporte 2 parties : une première partie centrée sur le contenu mathématique et une deuxième partie qui concerne la didactique.

a) <u>Elaboration - Passation - Evaluation</u>

- La première partie reprend pour l'essentiel les questions du Post-Test. La question 5 faisant intervenir une proportion inverse a été modifiée : il s'agit maintenant de l'étude de l'équilibre d'une balance romaine. La question 6 fait intervenir la trilinéarité du Volume de la sphère par rapport au rayon. Plus précisément, le volume de la sphère est une fonction linéaire du cube du rayon.
La question 8 est empruntée au pré-test ; mais cette fois, le domaine de référence n'est pas précisé. Il est laissé au choix du normalien.
- La seconde partie (partie III dans le post-post test) concerne la didactique : elle doit fournir des renseignements sur la façon dont les normaliens envisagent l'enseignement de la proportionnalité dans une classe de CM.
Bien sûr, ces renseignements seront surtout indicatifs, les normaliens ayant été un peu pris au dépourvu. Lors de la passation du post-post test, j'ai tout de même donné des précisions concernant la question III : j'ai demandé aux Normaliens de réfléchir sur les conditions que doit remplir la situation proposée : "qu'est-ce que vous cherchez à appliquer ?"
Je leur ai aussi demandé de donner des indications :

- sur la façon dont-ils pensent poursuivre :
  Quelle "progression" envisagent-ils ?
- Sur ce qui leur paraît essentiel concernant l'enseignement de la notion de proportionnalité.

L'évaluation des questions se fait sur les mêmes principes que pour le pré-test ou le post-test : seule la partie concernant le contenu mathématique est notée (note sur 24). Les questions II (8) et III ne sont pas notées.

b) Résultats de la partie mathématique

Tous les normaliens sauf une se situent dans la classe 5 définie précédemment. Celle qui ne s'y trouve pas en est toutefois très proche.
Les progrès observés entre le pré-test et le post-test semblent donc durables. La normalienne qui semblait avoir régressé obtient maintenant une note correcte.

Résultats Question par Question :

- On n'observe aucune erreur dans les questions I (1) et 1 (2) . Par rapport au post-test, où il y avait encore quelques erreurs, il y aurait un certain progrès. Il semble donc que la confusion avec la propriété des "écarts constants" ou avec celle "des rapports scalaires constants" n'existe plus. Cela semble confirmé par les réponses à la question II (7) où toutes les suites proposées sont correctes.
- Question II (1) : parmi les erreurs observées (il y en a 3). Il y a :
  - une erreur due à un arrondi : f(22) est arrondi à 28,87,
  - une erreur de calcul,
  - une erreur due au calcul de l'image de x :

Dans un cas, $f(x)$ n'est pas donné. Dans l'autre, la réponse n'est pas claire $(\frac{21}{16})$.

On peut remarquer que ces 2 cas correspondent justement aux 2 normaliens qui n'avaient pas donné les images de 22 et de x dans le pré-test, mais qui les avaient trouvées dans le post-test. On retrouve là la gêne de certains normaliens devant les notations littérales.
D'autre part, l'analyse du post-test avait mis en évidence la multiplicité des procédures proposées par les normaliens pour compléter le tableau. Dans le post-post test, cette multiplicité des procédures n'apparaît plus que dans quelques cas. Le plus souvent, comme dans le pré-test, une seule procédure est envisagée.

Les questions II (2) et II (3) concernent la traduction graphique de la proportionnalité : celle-ci semble maintenant bien connue des normaliens puisque tous répondent "NON" en donnant le plus souvent comme justification l'argument $\overline{DO}$ ("Ce n'est pas une droite passant par l'origine"). Il y a un seul cas de justification du type "ça ne passe pas par l'origine".

- Question II (4)

Une seule normalienne fournit une justification faisant intervenir explicitement la double proportionnalité.
Les autres reconnaissent la proportionnalité par rapport au temps ou alors donnent des justifications ambiguës.
Les réulstats sont comparables avec ceux du pré-test et du post-test (avec une légère régression par rapport au post-test) : les normaliens ont toujours beaucoup de mal à reconnaître et à expliciter une double proportionnalité.

- Question II (5)

Seulement 3 normaliens reconnaissent une proportion inverse et un seul parle de proportionnalité entre la masse et l'inverse de la distance.
Les justifications utilisées sont :

"le rapport $\frac{m'}{d'}$ n'est pas constant"

"quand m' augmente, d' diminue et inversement"

"on n'obtient pas une droite passant par O"

"la courbe ne passe pas par O"...

5 normaliens ne répondent pas du tout.
Un normalien répond qu'il y a proportionnalité car :

"$\frac{m'}{d'} = \frac{d}{c}$ = cste".

Seulement la moitié des normaliens fait un graphjque correct. Les autres soit ne répondent pas, soit obtiennent une droite (passant pas O ou à pente négative).

Comme dans le pré-test, on retrouve donc la difficulté des normaliens pour reconnaître une situation de proportionnalité inverse et expliciter les grandeurs en relation. D'autre part, la traduction graphique est toujours mal connue.

Le léger progrès observé entre le pré-test et le post-test peut aussi s'expliquer par le fait que c'est la même situation qui est proposée dans les deux. Ce n'est pas le cas du post-post test où des difficultés dues à la compréhension physique du phénomène s'ajoutent aux difficultés purement mathématiques. Les normaliens qui écrivent correctement $m \times d = m' \times d'$ ne justifient pas tous leurs réponses de façons satisfaisante. Dans une relation du type $X \times Y = cste$, ils ont donc du mal à reconnaître la proportionnalité entre une variable et l'inverse de l'autre.

La question II (6) est presque toujours réussie : on note une non réponse et une erreur due à la multiplication de la masse par 2. Les normaliens connaissent la formule :

$$V = \frac{4}{3} \quad R^3$$ donnant le volume d'une sphère en fonction du rayon.

Pour la question II (7) , toutes les suites proposées sont bien proportionnelles.

La question II (8) est intéressante du point de vue des domaines de référence concernés : en fait, ils sont variés. Il n'y a pas un domaine de référence privilégié.

On trouve des problèmes faisant intervenir des quantités de marchandises et leurs prix, mais aussi des problèmes de recette, de vitesse, de débit, d'engrenages, etc...

Le plus souvent, il s'agit de la recherche d'une quatrième proportionnelle.

On peut remarquer que, dans la moitié des cas, l'image de 1 (la valeur unitaire) est une donnée du problème. Ce qui simplifie beaucoup le problème puisqu'il suffit alors de faire une multiplication.

On trouve aussi, à côté des problèmes de proportion simple, un problème de proportion inverse, un problème de double-proportionnalité et un problème faisant intervenir la composition de 2 fonctions linéaires.

Il faut aussi noter que la formulation de l'énoncé n'est pas toujours claire et qu'il manque parfois des données. Enfin, une représentation graphique n'est demandée que dans un cas seulement.

<u>Conclusions concernant la partie Mathématique</u>

. Les progrès observés entre le pré-test et le post-test sont aussi valables à plus long terme :

- les confusions possibles (avec la propriété des "écarts constants" ou avec la propriété des "rapports scalaires constants") n'existent plus dans le post-post test.
- Tous les normaliens connaissent la traduction graphique de la proportionnalité simple.

. On observe quand même de légères régressions concernant :

- les différents types de procédures possibles pour résoudre un problème de proportionnalité,
- la connaissance de la traduction graphique de la proportionnalité inverse.

. Enfin, les insuffisances déjà observées lors du post-test demeurent :

Les notions de double proportionnalité et de proportionnalité inverse sont toujours mal connues des normaliens. Ils ont en particulier du mal à reconnaître la proportionnalité et à préciser les grandeurs en relation dans de telles situations.

c) <u>Résultats de la question III</u> (partie Didactique)

Les normaliens ayant été pris au dépourvu, les réponses à cette question doivent être interprétées avec prudence. Entre les réponses formulées ici et ce qu'ils réaliseraient effectivement dans une classe (en s'aidant de documents : manuels, dossiers réalisés en cours à l'Ecole Normale, revues, etc...), il y a sûrement une différence. Il faut noter aussi un certain "ras le bol" des Normaliens pour remplir un nouveau questionnaire sur la proportionnalité. D'ailleurs l'un d'eux écrit "on aimerait faire autre chose que de la proportionnalité. Il n'y a pas que ça dans le programme de mathématique du primaire".

Néanmoins, les réponses à cette question III présentent tout de même un intérêt, ne serait-ce que parce qu'elles risquent de venir appuyer les observations déjà faites lors de l'analyse des projets de cours.

Les situations proposées consistent presque toutes à compléter des tableaux : recherche de l'opérateur de passage, d'images par cet opérateur, antécédents. Dans la moitié des cas, ces tableaux sont "abstraits" c'est à dire que les nombres n'expriment pas une mesure de grandeur. Pour l'autre moitié, ces tableaux sont construits à partir de situations : les nombres expriment alors une mesure de grandeur.

Les domaines de référence de ces situations ne sont pas toujours précisés. Certains se contentent de parler de "situations concrètes". Les autres précisent : quantité de marchandises et leurs prix - Recette - Vitesse - Engrenages... A partir de ces tableaux (ou non) la proportionnalité. Mais la formulation est loin d'être claire :

- "Mise en évidence de la constante"
- "Remarquer s'il y a une constante ou non"
- "Y a-t-il une grandeur constante ?"
- "Il y a une dépendance entre les grandeurs en proportionnalité".

Ceux qui parlent d'"opérateur multiplicatif" (xa) ne précisent pas à quel ensemble de nombres a appartient.

La confusion entre "opérateur" et "opérateur multiplicatif" persiste : en effet, une normalienne écrit :

"Tableau à opérateur unique $\longrightarrow$ Proportionnalité"
"Tableau à opérateur différent $\longrightarrow$ Non proportionnalité".

L'aspect fonctionnel de la proportionnalité est donc (parfois de façon beaucoup trop vague, ce qui peut entraîner des erreurs chez les élèves) pris en compte par les normaliens. Mais il est significatif de voir que l'aspect isomorphisme (liés aux propriétés de la fonction linéaire) est presque toujours oublié : une seule normalienne parle de l'étude des propriétés de la fonction linéaire de façon explicite.

De même, les aspects dimensionnels (liés au rôle des grandeurs) ne sont pas pris en compte.

Par contre, 12 normaliens (sur 20) évoquent la traduction graphique de la proportionnalité : ils proposent de représenter graphiquement la situation étudiée et mettent ainsi en évidence un critère graphique de reconnaissance de la proportionnalité.

Enfin, quelques normaliens précisent qu'il faut étudier à la fois des exemples et des contre-exemples de proportionnalité.

<u>Conclusion</u>

Les réponses des normaliens à la question III du post-post test viennent renforcer les tendances dégagées lors de l'analyse des "projets de cours" :

1 Tendance à restreindre le cadre général des fonctions numériques aux opérateurs "ajouter, soustraire, multiplier, diviser".

2 Tendance à ne considérer que des valeurs entières pour le coefficient de proportionnalité.

3 Tendance à privilégier l'étude de certains aspects de la proportionnalité (aspect fonctionnel) par rapport à d'autres (scalaires - dimensionnels). Si on s'en tient à la question III du post-post test, ces aspects sont entièrement négligés. Pourtant, l'étude des propriétés de la fonction linéaire était abordée dans la majorité des "projets de cours". Mais ce n'était pas une étude systématique, juste quelques constatations à partir d'exemples. Cette moindre importance donnée à l'aspect isomorphisme dans les "projets de cours" s'est transformée en oubli quasi général avec le temps.

4 Par contre, l'étude de l'aspect graphique (presque toujours abordée dans les "projets de cours") est aussi proposée dans le post-post test dans la majorité des cas.

5 Certaines définitions de la proportionnalité manquent de rigueur et peuvent entraîner des confusions graves chez les élèves :
"existence d'une constante", "existence d'un opérateur unique", ... Cela avait déjà été observé dans les "projets de cours". Il semble que dans le post-post test, ce type de définitions soit encore plus fréquent. Cela peut s'expliquer par le fait que l'étude de la notion est moins récente.

6 De façon générale, il n'y a pas d'analyse didactique des situations proposées (Analyse des têches - Procédures induites - Rôle du graphique etc...).

Conclusions

Par rapport à la problématique très générale exposée au départ, la recherche que j'ai menée ne peut apporter qu'une infime réponse dans un cas très particulier : celui de l'enseignement de la proportionnalité.
La question est la suivante :
Peut-on conclure à un progrès qualitatif de l'enseignement de la proportionnalité qui sera pratiqué par les normaliens devenus instituteurs dans une classe de CM ?
On peut essayer de répondre de deux points de vue :

1. D'un point de vue Mathématique : on a dit que, traditionnellement, il est admis qu'un maître doit au moins maîtriser le contenu enseigné à ses élèves. Dece point de vue, on peut dire que le travail fait avec les normaliens a permis sinon de maîtriser le contenu, du moins de réorganiser des connaissances, d'éviter des confusions graves, de combler des lacunes. Dans l'ensemble, ces progrès semblent durables, quoique fragiles pour certains normaliens. (En effet, certaines définitions de la proportionnalité données dans le post-post test sont très vagues et peuvent même induire les élèves en erreur). D'un point de vue mathématique, il est donc possible d'obtenir un progrès des connaissances des normaliens sur une notion donnée. Cela est vrai dans le cas de la proportionnalité simple, mais c'est déjà beaucoup plus incertain dans les cas plus complexes (Double proportionnalité - Proportion inverse - Enchaînement de 2 proportionnalités).

2. D'un point de vue Didactique : pour répondre de ce point de vue, on ne dispose ici que de projets de cours et non de suivis de séquences effectivement réalisées par les normaliens dans une classe sur le thème de la proportionnalité. Si l'on s'en tient à ces projets de cours, les acquis dans le domaine didactique semblent bien minces : j'en vois essentiellement deux :

a) L'Etude de la proportionnalité est replacée dans le cadre général de l'étude de fonction numériques (Encore qu'il y ait une tendance à restreindre les fonctions numériques aux opérateurs ajouter, soustraire, multiplier, diviser). Cela permet d'étudier parallèlement des exemples et des contre-exemples de proportionnalité et donc de mieux caractériser celle-ci.

b) La traduction graphique de la proportionnalité : elle est demandée dans presque tous les projets de cours et on peut penser qu'elle sera effectivement abordée plus tard dans les classes. Néanmoins, on aurait souhaité une certaine réflexion sur le rôle et l'utilisation d'un graphique ; or, dans l'ensemble, celle-ci n'apparaît pas.

Par contre, on a vu que l'étude des propriétés de la fonction linéaire, abordée sur quelques exemples dans les projets de cours, n'apparaît pratiquement plus dans le post-post test. Cette étude risque donc d'être négligée par les normaliens dans leur classe : l'aspect isomorphisme de la proportionnalité, pourtant souvent utilisé par les enfants pour résoudre un problème, ne sera pas suffisamment pris en compte par les futurs maîtres.

De façon générale, il est difficile de conclure à un progrès de la réflexion didactique des normaliens : l'analyse de la structure des problèmes, des procédures de résolution possibles n'est pas faite. C'est sans doute à cause de cela que certaines structures sont absentes des projets de cours ("produit de mesures", proportion inverse, double proportionnalité...).

De même, on ne retrouve pas dans les projets de cours la diversité des situations-problèmes mise en évidence lors des séquences avec les normaliens. En particulier, les cadres géométriques et physiques sont peu utilisés. Il est intéressant de remarquer que l'étude de la proportionnalité proposée par les normaliens présente des points faibles analogues à ceux de l'enseignement qu'ils ont reçu sur cette notion à l'école primaire :

- cas particulier dans l'étude des opérateurs,
- rôle privilégié de l'aspect fonction par rapport à l'aspect isomorphisme.

Par contre, il y a un aspect où le progrès est certain : c'est l'aspect graphique. Dans les programmes de 1970, il est absent alors qu'il est presque toujours présent dans les projets de cours des normaliens.

Si on revient à la question de départ, les éléments de réponse développés ci-dessus sont bien sûr dépendants de l'enseignement dispensé aux normaliens : des deux points de vue (Mathématique et Didactique), on aurait sûrement pu faire mieux :

<u>Du point de vue Mathématique</u> : les normaliens ayant surtout des difficultés dans les cas complexes (Proportionnalité multiple - Proportion Inverse - Enchaînement de deux proportionnalités), il faudrait peut-être commencer par là. L'Etude d'une (ou de plusieurs) loi(s) physique(s) pourrait en être l'occasion.

Cela permettrait aussi de mettre en évidence les aspects dimensionnels de la proportionnalité (largement négligés par les normaliens) et le rôle d'un graphique comme outil de prévision.

<u>Du point de vue Didactique</u> : ce qui a été fait se révèle insuffisant :

concernant le choix d'une situation-problème, il faudrait amener les normaliens à une analyse des tâches : structure du problème, domaine numérique, procédures possibles...

Il faudrait aussi montrer davantage le lien avec d'autres thèmes (mesure, géométrie...).

D'un point de vue plus général, il faudrait les amener à réfléchir sur les différentes situations didactiques utilisées avec eux (situation de communication par exemple), leur faire lire des articles de recherche en didactique, leur faire analyser des séquences réalisées par eux-mêmes dans une classe... Tout cela demande du temps et ne concerne pas seulement l'étude d'un thème particulier, mais de toutes les mathématiques au programme de l'Ecole Elémentaire.

Ma problématique de départ était très générale. Je ne prétend pas du tout avoir répondu. Je pense simplement avoir apporté quelques éléments de réponse dans le cas très particulier de l'enseignement de la proportionnalité. Les éléments de réponse sont bien sûr dépendants du type d'enseignement dispensé aux normaliens. D'autres recherches sont nécessaires : en particulier, si on construisait un enseignement en direction des normaliens plus centré sur la Didactique, peut-être obtiendrait-on des résultats plus probants ? C'est le problème de l'évaluation d'un enseignement qui est posé, problème très difficile, qui est loin d'être résolu : dans le cas de la formation des Maîtres, il se pose à deux niveaux :

1. Evaluation de l'enseignement pratiqué par l'instituteur dans sa classe : cela peut se faire par exemple en faisant passer des tests de connaissances aux élèves. Bien sûr, c'est une évaluation essentiellement indicative mais cela peut se faire et se fait.

2. Evaluation de l'enseignement dispensé à l'Ecole Normale en direction des futurs instituteurs : l'analyse de projets de cours et l'observation de quelques séquences réalisées par les normaliens ne suffisent pas. Il faudrait organiser un suivi des séquences réalisées par la suite dans les classes, sur un temps assez long. Or cela pose des problèmes de toutes sortes. En fait, ce type d'évaluation n'a jamais été fait jusqu'à présent.

Le travail présenté ici pourrait être une très modeste contribution à un début de réflexion sur l'évaluation d'un enseignement en direction de futurs enseignants.

Comparaison de problèmes sur la Proportionnalité.

Les "habillages" rendent le calcul plus ou moins aisé. Quel est le plus facile, le plus difficile pour vous ? Notez toutes vos observations.

1. On donne, dans un livre de cuisine la recette du Pudding. Il faut 150 g de sucre, 60 g de semoule, 3/4 l de lait : les proportions sont pour 6 personnes.
Indiquez les quantités nécessaires de sucre, de semoule, de lait pour faire ce gâteau pour 12 personnes ; pour 4 personnes ; pour 10 personnes.

2. En 1975, la population active en Alsace et en Lorraine était répartie comme le montre le tableau ci-dessous, en milliers de personnes :

	Hommes	Femmes
Alsace	395	216
Lorraine	610	294

Calculez, pour chaque région le pourcentage de femmes dans la population active, c'est à dire le nombre de femmes parmi 100 personnes actives. Comparez ces pourcentages.

3. Un alliage est composé de fer et de cuivre. La proportion de fer est 0,60 et celle de cuivre est 0,40.
Quelle masse de fer y a-t-il dans un solide fait dans cet alliage étayant une masse de 1800 g ?

4. Une ferme de Beauce a une superficie de 254,5 ha. La moitié de la superficie de cette ferme est consacrée à la culture du blé. Elle récolte en moyenne 28 quintaux de blé à l'hectare. Il faut 1,2 kg de blé pour faire 1 kg de farine, il faut 1,5 kg de farine pour faire 4 pains. Un pain représente la consommation journalière de 2 personnes en moyenne. Que peut-on chercher ?

5. Ranger par ordre croissant (sans calculatrice) les nombres suivants :

$$\frac{3}{7} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{9} ; \frac{1}{2} ; \frac{7}{9} .$$

6. Trouver x tel que $12 \times x = 36 \times 13$

Trouver x tel que $\frac{12 \times x}{36} = 13$.

ANNEXE 1 bis

(7) On veut voir apparaître, dans chacun des tableaux ci-dessous, des suites proportionnelles. Trouvez chaque fois le 4ème nombre.

1800	a
600	1200

21	9
16	b

c	10,5
7,3	5,25

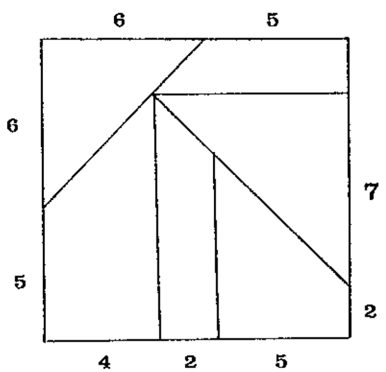
(8) En 7 heures, une installation de chauffage consomme 84 l de mazout. Combien consomme-t-elle en 21 heures ?

(9) En 7 heures, une installation de chauffage consomme 21 l de mazout. Combien consomme-t-elle en 84 heures ?

(10) En 21 heures, une installation de chauffage consomme 90 l de mazout. Combien consomme-t-elle en 7 heures ?

(11) Mr Dupont a un acquarium assez petit dans sa cuisine et un grand dans son salon. Celui du salon est 2 fois plus long, 3 fois plus large et 2 fois plus profond que celui de la cuisine. Combien de fois celui du salon est-il plus grand que celui de la cuisine ?

(12)



Source : IREM de Bordeaux.

Les enfants, répartis en groupe, doivent agrandir ce puzzle de la manière suivante : ce qui mesure 4 cm devra mesurer 7 cm.

(13) Un nénuphar double sa surface chaque jour. Il met 30 jours pour couvrir un bassin. Combien de temps faut-il à 2 nénuphars du même type pour couvrir un bassin ?

(14) Jean met 2 heures pour bêcher son jardin. Jacques, qui a moins l'habitude met 3 heures. Ils décident de travailler ensemble et s'organisent pour ne pas se gêner. Combien de temps vont-ils mettre ?

ANNEXE 1 ter

SOURCES :

(1) est extrait d'une enquête I.N.R.P. faite sur 947 enfants de CM2.

(2) , (3) , (5) , (6) , (7) sont extraits de F. PLUVINAGE et C. DUPUIS ((8)).

(8) , (9) , (10) sont extraits de G. VERGNAUD ((1))

(11) est extrait de G. VERGNAUD ((3))

(12) est empruntée à l'I.R.E.M. de Bordeaux

(4) est extraite de A. ROUCHIER et Al. ((4))

(13) et (14) sont extraits de ERMEL Cours Moyen Tome 3.

ANNEXE 2

Exemples de Fonctions Numériques

(1) Etudier comment varie :

- le périmètre d'un carré
- l'aire d'un carré   en fonction de la longueur du côté.
- le volume d'un cube

Faire une représentation graphique.

Peut-on croître plus rapidement ?

Prenons l'exemple de la Reproduction des Amibes : l'amibe se reproduit par simple division cellulaire.

A partir d'une amibe, quel est le nombre d'amibes à la $n^{\text{ième}}$ génération ? Faire une représentation graphique.

(2) Aux bornes d'un rhéostat à curseur, on maintient une tension constante U (U = 6 V). L'intensité I qui traverse le rhéostat est liée à la résistance variable R par la relation U = RI . La résistance peut varier entre 0,9 Ω et 23 Ω .

Représenter graphiquement les variations de I en fonction de R.

(3) On dispose de rectangles dont le périmètre est 20 cm.

Soit a la longueur en cm de l'un des côtés.

Soit b la longueur en cm de l'autre côté.

Soit s l'aire, en cm^2, du rectangle.

Etudier comment varie s en fonction de a . Faire une représentation graphique.

Quand s est-elle maximale ?

(4) Etudier les variations de la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur à périmètre constant.

Faire une représentation graphique.

(5) Un train par à 0 h de la ville A et va vers la ville B située à 350 km de A. Il s'arrête 3 mn en C située à 100 km de A et 3 mn en D située à 120 km de C. On admet qu'entre 2 arrêts, le mouvement du train est uniforme et que sa vitesse est 120 km/h.

Représenter graphiquement le mouvement du train en fonction du temps.

ANNEXE 2 bis

(6) On alimente une résistance R (constante) par une tension continue variable U et on relève l'intensité I du courant correspondant à chaque valeur de U :

(volts) U	0	7,5	9,9	13	17,4	22,6	30
(Ampères) I	0	1,5	2	2,6	3,5	4,5	6

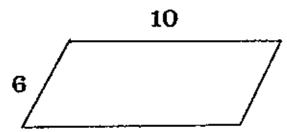
Faire une représentation graphique.

(7) Les tarifs pour un envoi recommandé de paquets-poste urgents sont les suivants :

jusqu'à	100 g (inclus)	250 g (inclus)	500 g (inclus)	1000 g (inclus)	2000 g (inclus)
	10,40 F	15,90 F	18,50 F	22,90 F	28,80 F

Représenter graphiquement la fonction traduisant ces tarifs.

(8)



ABCD est un parallélogramme articulé.

Etudier les variations de son aire.

Quand est-elle maximale ?

Limites de l'Utilisation des Représentations Graphiques.

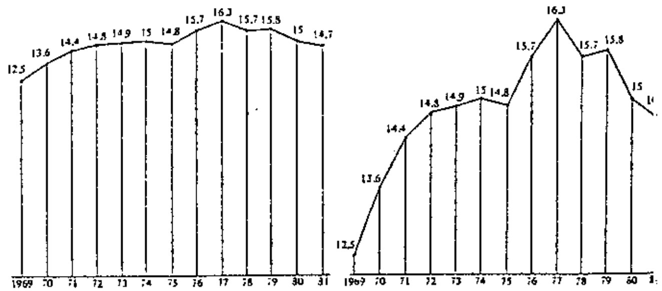
1. Nature de l'outil

Ex 1 : *Remarque* : Dans le cas des fonctions quelconques, une représentation graphique permet de visualiser les variations ; elle peut-être aussi utilisée pour les amplifier ou les minimiser, comme on peut le voir, ci-dessous, dans les deux représentations de la fonction qui, aux années comprises entre 1969 et 1981, associe la part du budget de l'Éducation dans le budget de l'État.

Dans le graphique de droite, l'origine des ordonnées a été ramenée à 11,5 % et les efforts en faveur de l'éducation, jusqu'en 1977, paraissent alors plus importants que sur le graphique de gauche.

(extrait de ERMEL CM T3)

PART DU BUDGET DE L'ÉDUCATION DANS LE BUDGET DE L'ÉTAT (en %)



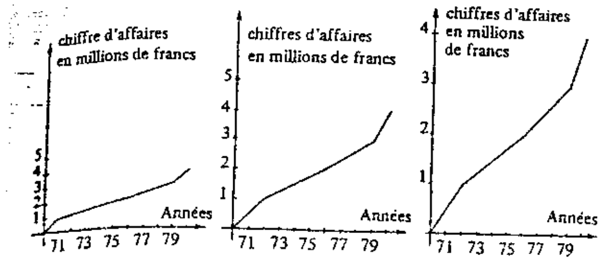
Courrier de l'Éducation, n° 40, novembre 1976. Chiffres complétés par le Ministère de l'Éducation Nationale.

Le choix de l'origine (ex 1) ou celui des unités (ex 2) a une importance très grande et on peut "faire dire" à des représentations graphiques des choses fort différentes ....

Il est donc nécessaire de regarder d'un œil critique toute représentation graphique : de voir dans ce cas, par exemple, quelle origine et quelles échelles ont été choisies, ainsi que l'intervalle de temps retenu.

Dans les situations expérimentales, la représentation graphique permet de faire des prévisions (éventuellement avec des réserves) et aussi de faire une hypothèse sur la formule associée si la courbe ressemble à une courbe connue. Ainsi, à propos de l'allongement du ressort, l'alignement des points suggère qu'il s'agit d'une fonction linéaire.

Ex 2 :



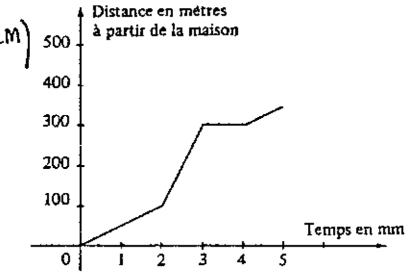
2. Conception que peuvent avoir les enfants :

Il y a souvent interférence chez les enfants entre la valeur spatiale du graphique et la signification du problème posé :

Exemple (vécu dans une classe de CM).

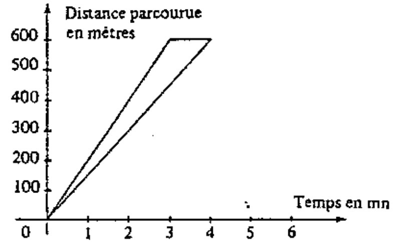
Après un travail sur les graphiques, les enfants décodent correctement une information du type suivant :

(extrait de ERMEL CM T3)



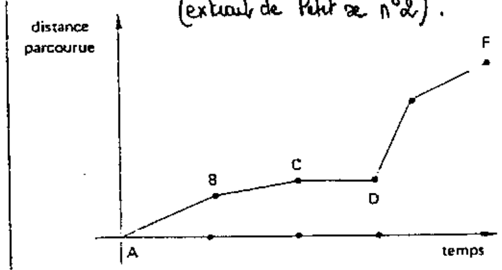
«Ce graphique raconte la triste histoire d'un garçon essayant d'avoir un bus. Raconte ce qui lui est arrivé à ton avis».

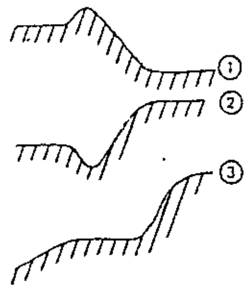
Cependant, à l'exercice : «Raconte par un graphique l'histoire suivante : Un garçon part de chez lui : il court pendant 3 minutes en faisant 200 m à chaque minute ; il se repose une minute ; puis il retourne chez lui en faisant 100 m à chaque minute», on obtient beaucoup de graphiques du type ci-dessous :



Et chez les Normaliens ?

(extrait de "Petit x" n°2).





Quel est le profil de la route qui correspond au graphique ?

① ☐ ② ☐ ③ ☐

NOM :

Prénom :

(Annexe 5)

POST-TEST sur PROPORTIONNALITE

(environ 1 h)

I Entourer la bonne réponse

1. Entre 0 et 20 ans, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ? OUI NON

2. Les suites de nombres (2, 8, 14, 20, 26) (6, 12, 18, 24, 30) sont-elles proportionnelles ? OUI NON

3. Les suites de nombres (2, 4, 8, 16) et (3, 9, 27, 81) sont-elles proportionnelles ? OUI NON

II 1. Lors de l'Etude d'un engrenage, on a compté les nombres de tours de la grande roue et de la petite roue correspondants. On a obtenu :

Nbre de tours de la grande roue	Nbre de tours de la petite roue
16	21
48	63
64	
112	
22	
x	

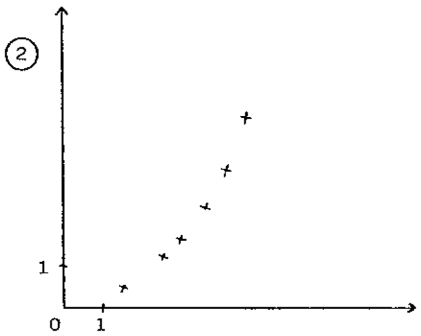
1. Est-ce une situation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification

2. Peut-on compléter le tableau ?
Si oui, le faire en expliquant comment.

2.

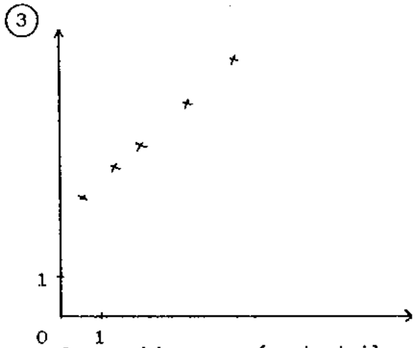


Le graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification

3.



Le graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification

5. On étudie la consommation d'une fusée propulsée par 4 réacteurs identiques. On sait qu'un réacteur consomme en moyenne 1,6 tonnes de carburant par seconde. Quel temps mettra la fusée, lorsque ses 4 réacteurs fonctionnent, pour consommer 131,8 tonnes de carburant ?

1. Est-ce une situation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Si oui, préciser les grandeurs en relation.

2. Répondre à la question posée en explicitant les calculs.

---

(6) a) Etudier les variations de la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur à périmètre constant.

b) Etudier les variations de la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur à aire constante.

Dans les 2 cas : - Faire une représentation graphique.
- Dire si c'est une situation de proportionnalité.

Justifier votre réponse en précisant, si nécessaire les grandeurs en relation.

---

a)

b)

(7) Un bloc de pierre parallélépipèdique pèse 200 kg. Combien pèse un bloc dont chaque dimension est le quart des dimensions du bloc précédent ?

---

(8) Le côté d'un carré s'allonge de 5 % . De quel pourcentage croît le périmètre de ce carré ? L'aire de ce carré ?

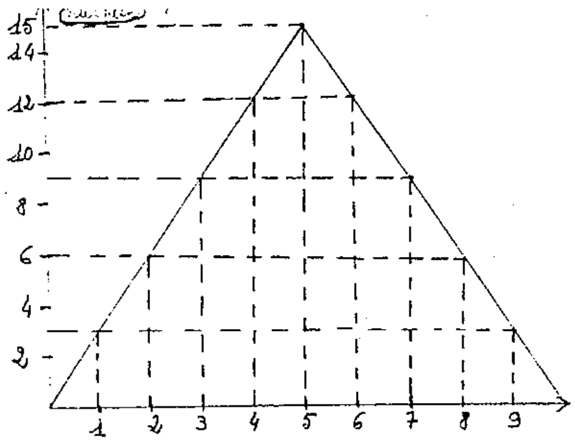
---

(9) Donner deux suites de cinq nombres proportionnelles.

---

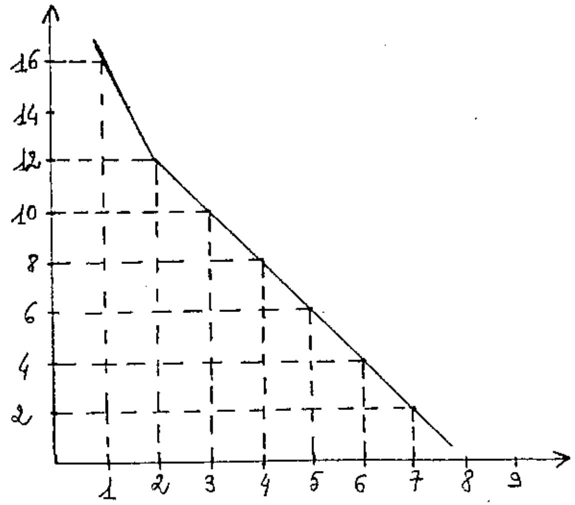
(10) Si vous aviez à expliquer à quelqu'un ce qu'est une situation de proportionnalité, que diriez-vous ?

ANNEXE 6

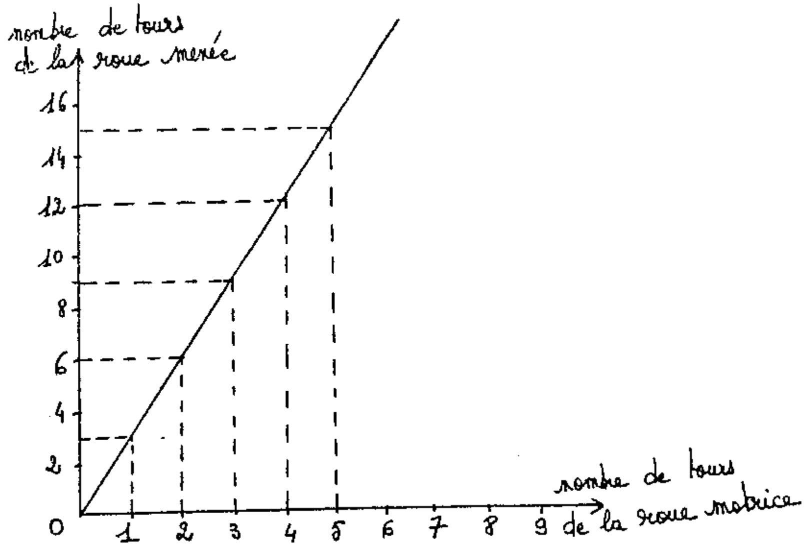


Somme placée	12	60	72	30	48
Intérêts	1,2	6	7,2	3	4,8

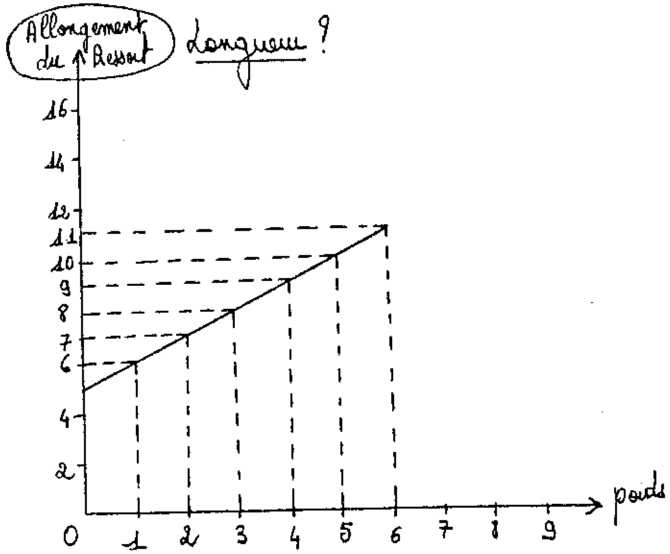
Prix	200	100	50	20
Remise	20	10	5	2



Poids	10	20	30	40	50	60
Allongement	8	16	24	28	32	36



heures (h)	0,5	1	2	3	4	5
Distance parcourue (km)	2	4	8	12	16	20



NOM :

Prénom :

(Annexe 7)

POST -POST-TEST sur PROPORTIONNALITE

(environ 1 h 15)

Précisez en quelle année vous étiez au CM_2 :

I Entourer la bonne réponse

1 Les suites de nombres (2, 8, 14, 20, 26) et (6, 12, 18, 24, 30) sont-elles proportionnelles ? OUI NON

2 Les suites de nombres (2, 4, 8, 16) et (3, 9, 27, 81) sont-elles proportionnelles ? OUI NON

II (1) Lors de l'étude d'un engrenage, on a compté les nombres de tours de la grande roue et de la petite roue correspondants. On a obtenu :

Nbre de tours de la grande roue	Nbre de tours de la petite roue
16	21
48	63
64	
112	
22	
x	

1. Est-ce une situation de proportionnalité :

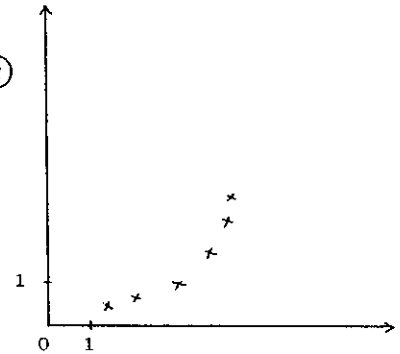
OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification :

2. Peut-on compléter le tableau ?

Si oui, le faire en expliquant comment.

(2)

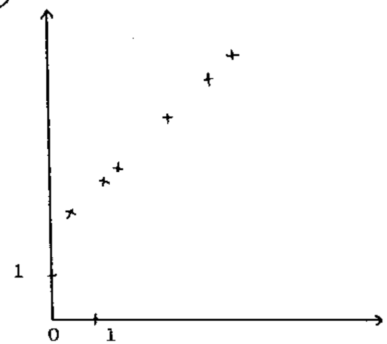


Le graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification :

(3)



Ce graphique représente-t-il une relation de proportionnalité ?

OUI NON JE NE SAIS PAS

Justification :

(4) On étudie la consommation d'une fusée propulsée par 4 réacteurs identiques. On sait qu'un réacteur consomme en moyenne 1,6 tonnes de carburant par seconde.

Quel temps mettra la fusée, lorsque ses 4 réacteurs fonctionnent, pour consommer 131,8 tonnes de carburant ?

1. Est-ce une situation de proportionnalité ?

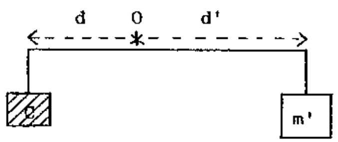
OUI NON JE NE SAIS PAS

Si oui, préciser les grandeurs en relation.

2. Répondre à la question posée en explicitant les calculs.

---

(5) Voici un schéma d'une balance romaine :



C : contrepoids (fixe)

d : distance du crochet au contrepoids (fixe)

Lorsque l'équilibre est réalisé, étudier comment varie la masse m' en fonction de la distance d' :

a) Dire si c'est une situation de proportionnalité. Justifier votre réponse en précisant, si nécessaire, les grandeurs en relation.

b) Faire une représentation graphique.

(6) Une bille de plomb pèse 200 g. Combien pèse une bille de plomb dont le rayon est double ?

---

(7) Donner deux suites de cinq nombres proportionnelles.

---

(8) Donner un exemple de problème de proportionnalité (niveau CM_2-6ème).

III Vous avez en vue l'enseignement de la proportionnalité :
imaginez la première séance sur ce sujet dans une classe de CM.

Bibliographie

1 Vergnaud Gérard, Ricco Graciela, Rouchier André et al :
Acquisition des "structures multiplicatives" dans le premier cycle du second degré.
IREM d'ORLEANS RO N°2 (1979).

2 Vergnaud Gérard, Ricco Graciela, Rouchier André et al :
Quelles connaissances les enfants ont-ils des structures multiplicatives élémentaires ? un sondage.
Bulletin de l'A.P.M. n°313 - Avril 1978 (331-357).

3 Vergnaud Gérard, Ricco Graciela, Rouchier André :
Didactique et Acquisition du concept de volume.
R.D.M. Vol.4.1. 1983.

4 Rouchier André et al :
Situations et Processus didactiques dans l'Etude des nombres rationnels positifs.
R.D.M. Vol.1.2. (1980).

5 Julo Jean : Acquisition de la proportionnalité et résolution de problème. Thèse de 3ème cycle (1982). IREM de RENNES.

6 Carayol Françoise : Comportements d'Elèves et de futurs maîtres de l'Ecole Elémentaire face à des questions de mathématiques.
Thèse de 3ème cycle (1983). IREM de TOULOUSE.

7 Buisson Pierre : Pourcentages : appropriation - transfert.
IREM de ROUEN (1981).

8 Pluvinage François, Dupuis Claire : La proportionnalité et son utilisation. IREM de STRASBOURG.
R.D.M. Vol. 2.2 (1981).

9 Ricco Graciela : Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans.
Un article est paru dans E.S.M. (Educational Studies in mathematics).

10 Ermel : Apprentissages mathématiques à l'Ecole Elémentaire.
CM 3 Tome 3. SERMAP-HATIER.

11 Douady Régine : Thèse d'Etat en didactique des mathématiques : Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.

12 Texte de la COPREM (Mars 1984) : "l'enseignement de et autour de la proportionnalité.

RESUME :

Mon travail ne constitue qu'un tout petit élément de réponse à la question très large : "quels contenus mathématiques et didactiques enseigner aux futurs professeurs des écoles ? comment quel est l'impact d'un tel enseignement sur la formation et quel moyen avons-nous pour l'évaluer ?

Dans un premier temps, je précise les notions mathématiques sous-jacentes à la notion de proportionnalité. C'est un contenu qui n'est pas nouveau pour les futurs professeurs des écoles, mais qui a besoin d'être réorganisé et réactualisé.

Dans un second temps, j'analyse les résultats à un questionnaire sur la proportionnalité visant à cerner l'état des connaissances chez les futurs instituteurs sur cette notion.

Dans un troisième temps, je décris une expérience d'enseignement de la proportionnalité avec mes élèves de deuxième année d'école normale. Cet enseignement débouche sur une double institutionnalisation mathématique et didactique.

Il m'a été difficile d'évaluer l'impact de ma formation sur l'enseignement dispensé car je ne disposais que de projets de cours.

MOTS CLES

enseignement,
proportionnalité,
instituteurs.

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Juin 1985
ISBN : 2-86612-055-8