Hypersurfaces Levi-plates et leur complément dans les surfaces complexes

Carolina Canales Gonzalez

NNT : 2015SACLS249

THÈSE DE DOCTORAT

DE

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

PRÉPARÉE À

L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

École Doctorale n° 574 :
École Doctorale de Mathématiques Hadamard

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Par

Carolina CANALES GONZÁLEZ

Hypersurfaces Levi-plates et leur complément dans les surfaces complexes

Soutenue à Orsay le 14 décembre 2015 devant la commission d'examen:

M. Bertrand DEROIN	CNRS & ENS	(Directeur de thèse)
Mme. Julie DÉSERTI	Université Paris Diderot	(Rapporteur)
M. Christophe DUPONT	Université de Rennes 1	(Directeur de thèse)
M. Julien DUVAL	Université Paris Sud	(Président du Jury)
M. Andrei IORDAN	Université Pierre et Marie Curie	(Examinateur)
M. Joël MERKER	Université Paris Sud	(Examinateur)

Rapporteur absent le jour de la soutenance :

M. Jorge Vitório PEREIRA IMPA, Rio de Janeiro

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Hypersurfaces Levi-plates et leur complément dans les surfaces complexes

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions les hypersurfaces Levi-plates analytiques dans les surfaces algébriques complexes. Il s'agit des hypersurfaces réelles qui admettent un feuilletage par des courbes holomorphes, appelé le feuilletage de Cauchy Riemann (CR). Dans un premier temps nous montrons que si ce dernier admet une dynamique chaotique (i.e. s'il n'admet pas de mesure transverse invariante) alors les composantes connexes de l'extérieur de l'hypersurface sont des modifications de domaines de Stein. Ceci permet d'étendre le feuilletage CR en un feuilletage algébrique singulier sur la surface complexe ambiante. Nous appliquons ce résultat pour montrer, par l'absurde, qu'une hypersurface Levi-plate analytique qui admet une structure affine transverse dans une surface algébrique complexe possède une mesure transverse invariante. Ceci nous amène à conjecturer que les hypersurfaces Levi-plates dans les surfaces algébriques complexes qui sont difféomorphes à un fibré hyperbolique en tores sur le cercle sont des fibrations par courbes algébriques.

Mots-clefs : analyse et géométrie complexes, théorie des feuilletages, hypersurfaces Levi-plates, mesure transverse invariante, variété Stein, convexité holomorphe, prolongement analytique.

Levi-flat hypersurfaces and their complement in complex surfaces

Abstract

In this work we study analytic Levi-flat hypersurfaces in complex algebraic surfaces. These are real hypersurfaces that admit a foliation by holomorphic curves, called Cauchy Riemann foliation (CR). First, we show that if this foliation admits chaotic dynamics (i.e. if it does not admit an invariant transverse measure), then the connected components of the complement of the hypersurface are Stein. This allows us to extend the CR foliation to a singular algebraic foliation on the ambient complex surface. We apply this result to prove, by contradiction, that analytic Levi-flat hypersurfaces admitting a transverse affine structure in a complex algebraic surface have a transverse invariant measure. This leads us to conjecture that Levi-flat hypersurfaces in complex algebraic surfaces that are diffeomorphic to a hyperbolic tori bundle over the circle are fibrations by algebraic curves.

Keywords : complex analysis and complex geometry, theory of foliations, Levi-flat hypersurfaces, invariant measure, Stein manifold, holomorphic convexity, analytic extension.

A mi Tata

Remerciements

En premier lieu, un grand merci à mes directeurs, Bertrand Deroin et Christophe Dupont, pour leur grande patience, pour leur aide, leur soutien, leurs explications méticuleuses, leurs exemples, leurs idées, leurs conseils et pour m'avoir toujours fait tout écrire jusqu'au dernier détail. Je leur en serai toujours reconnaissante.

Je remercie aussi Julie Déserti et Jorge Vitório Pereira qui ont accepté d'être mes rapporteurs et ont pris le temps de lire mon manuscrit. Merci en particulier à Julie Déserti pour les journées passées à lui expliquer ma thèse, pour ses questions et ses remarques.

Je voudrais remercier Julien Duval et Joël Merker pour être dans mon jury, pour nos discussions et leurs questions sur le chapitre 3 de ce manuscrit. Je remercie également Andrei Iordan d'avoir aussi accepté d'être dans mon jury.

Je remercie le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay et l'École Doctorale pour la bonne ambiance (et le joli endroit) pour faire de la recherche. Un grand merci à Valérie Lavigne pour toute son aide avec les démarches administratives (même avec celles qui ne la concernent pas). Sans elle l'administration et la bureaucratie m'auraient mangée vivante. Je tiens à remercier aussi le Département de Mathématiques de l'École Normale Supérieure et l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes qui m'ont toujours très bien accueillie.

Merci beaucoup aux doctorants pour les pauses café qui rendent les journées de travail plus agréables. À mes cobureaux, de l'ENS et d'Orsay : Arthur, Jérémy, Olivier, Ramon, Valérie, Vincent et tous les autres (tant les nouveaux que ceux qui sont déjà partis), ainsi que tant d'autres doctorants du bâtiment 430 : Çağrı (lire Tchare), Diego, Lionel, etc. . .

Un merci spécial à Arthur, Olivier et Cyrielle pour les merveilleuses vacances et les soirées jeux passées ensemble. À Ramon et Archibald, camarades de master et mes petits frères adoptifs pour les soirées et les discussions sur la vie. À Tatiana et Gwenaël pour les crumbles avec plein de beurre. À Felipe, pour les discussions de math, les crêpes et cafés pris ensemble. À Sandrine, pour son excellent travail en organisant le séminaire des jeunes dynamiques et d'autres événements sociaux. À Séverine, pour s'intéresser toujours à ma recherche.

Merci encore à la prof d'italien et aux profs de sport de Orsay qui chaque semaine m'ont permis de changer d'air et me vider de mon stress.

Aux amis que j'ai rencontrés à Paris : Quelly, Caro, Lore, Flor, Daniel, Vale etc... ma famille adoptive. Merci pour les nouveaux restos testés une fois par mois, pour les soirées en musique, pour les discussions philosophiques et les conseils.

À mon copain, Luco, pour m'encourager à venir en France, pour sa grande patience et son amour inconditionnel, pour être toujours avec moi dans les moments de joie et de tristesse et surtout pour m'avoir supportée dans les moments de stress. J'espère que la vie nous réserve un futur ensemble, peut-être en France, peut-être au Chili ou, qui sait, peut-être ailleurs dans le monde.

Gracias a mi familia por su apoyo incondicional, por las horas pasadas al teléfono cada fin de semana y por hacer lo imposible para estar presentes el día de mi defensa.

Table des matières

Introduction

Dans ce manuscrit, on étudie les hypersurfaces réelles analytiques dans les surfaces algébriques complexes qui vérifient une certaine équation aux dérivées partielles que nous décrivons à présent. Étant donnée une hypersurface réelle M dans une surface complexe X, on définit la distribution de Cauchy-Riemann sur M, appelée de manière abrégée distribution CR, qui en un point p de M est l'unique droite complexe contenue dans T_pM, c'est à dire la distribution $TM \cap iTM$. L'hypersurface M est appelée Levi-plate si la distribution CR est intégrable. Cela signifie que par tout point de M passe une courbe holomorphe non singulière de X qui est complètement contenue dans M. Ces courbes sont alors les feuilles d'un feuilletage de M, appelé le feuilletage de Cauchy-Riemann, ou encore feuilletage CR, qui sera noté $\mathcal{F}$ dans la suite. La condition qui assure qu'une hypersurface réelle est Levi-plate peut être synthétisée par l'annulation de la forme de Levi. Nous renvoyons à 1.1.3 pour la définition de cette dernière. Le but de ce travail est de comprendre l'interaction entre la dynamique du feuilletage CR, la topologie de l'hypersurface, et la géométrie de son complément dans la surface ambiante.

Avant d'énoncer nos résultats, donnons des exemples d'hypersurfaces Levi-plates, que nous organisons suivant la complexité dynamique de leur feuilletage CR, ce qui nous donne l'occasion d'introduire un peu de terminologie empruntée à la théorie des systèmes dynamiques.

Les hypersurfaces Levi-plates périodiques. Ce sont celles qui sont fibrées par des courbes algébriques. Elles apparaissent dans toutes les classes d'équivalence birationnelle de surface algébrique. En effet, toute surface algébrique complexe admet un pinceau qui, après un certain nombre fini d'éclatements, devient une fibration singulière. Une famille de fibres d'une telle fibration paramétrée par le cercle décrit une hypersurface Levi-plate périodique. La topologie de ces hypersurfaces Levi-plates peut être très riche : toutes les géométries de Thurston en dehors de la géométrie sphérique sont réalisées par des hypersurfaces Levi-plates de ce type. Certains quotients compacts de chacun des modèles suivants apparait donc comme une hypersurface Levi-plate périodique

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R},\ \mathbb{R}^3,\ \mathrm{Nil},\ \mathrm{Sol},\ \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R},\ \widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})},\ \mathbb{H}^3. \tag{1}$$

Nous renvoyons à [DD15] pour plus de détails sur ces constructions.

Les hypersurfaces Levi-plates quasi-périodiques. Les exemples emblématiques sont les hypersurfaces linéaires dans un tore complexe. Dans ce cas, le feuilletage CR est un feuilletage linéaire d'un tore de dimension trois. En général, nous dirons qu'une hypersurface Levi-plate est quasi-périodique si son feuilletage CR est défini (à un revêtement double près) par une forme fermée, ou de façon équivalente comme la pré-image par une application lisse d'un feuilletage linéaire de codimension 1 sur un tore. Des exemples de telles hypersurfaces apparaissent dans des fibrés en droites de degré nul sur une courbe, et donc au voisinage des courbes linéarisables dans les surfaces complexes. Arnol'd a notamment fourni de tels exemples dans les éclatés de $\mathbb{CP}^2$ en neuf points choisis génériquement par rapport à la mesure de Lebesgue [Arn84, § 27].

Les hypersurfaces Levi-plates chaotiques. Ce sont celles pour lesquelles le feuilletage CR n'admet pas de mesure transverse invariante. Une mesure transverse invariante est une famille de mesures boréliennes sur les transversales du feuilletage, qui sont invariantes par n'importe quelle transformation d'holonomie. Pour se faire une idée dans le cas où le lecteur n'est pas habitué à ce concept, une propriété satisfaite par les hypersurfaces Levi-plates chaotiques est l'existence de feuille à holonomie hyperbolique, voir [DK07] : certaines feuilles spiralent sur d'autres avec une vitesse exponentielle. Des exemples importants de telles hypersurfaces sont construits dans les fibrés plats en $\mathbb{CP}^1$ à monodromie réelle au dessus d'une courbe : il suffit de considérer le fibré en $\mathbb{RP}^1$ correspondant. [1]

Ces trois classes ne décrivent pas toutes les hypersurfaces Levi-plates des surfaces algébriques complexes. Par exemple, il existe des hypersurfaces Levi-plates contenant des courbes algébriques, mais qui ne sont pas périodiques. C'est le cas des hypersurfaces Levi-plates de Nemirovskiĭ dont on parlera par la suite, voir [Nem99]. D'autre part, même si nous ne connaissons aucun exemple de cette nature, on pourrait imaginer qu'il existe des hypersurfaces Levi-plates analytiques qui admettent une mesure transverse invariante non atomique mais qui soit singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. De telles hypersurfaces seraient similaires aux hypersurfaces Levi-plates quasi-périodiques, bien que différentes.

Une partie importante de ce travail concerne l'étude des propriétés géométriques des composantes connexes du complémentaire d'une hypersurface Levi-plate. Ces composantes extérieures sont par définition pseudo-convexes, et comme nous allons le voir, il est intéressant de comprendre à quel point cette propriété de convexité locale se globalise. Voici différentes notions de convexité globale, que nous présentons par ordre "croissant" de convexité :

1. faiblement pseudo-convexe : il existe une exhaustion plurisousharmonique.

1. Notamment, lorsque la monodromie du $\mathbb{CP}^1$-fibré est celle donnée par l'uniformisation de la base, le feuilletage CR de l'hypersurface considérée précédemment est analytiquement conjugué au feuilletage stable faible du flot géodésique sur C équipée de sa métrique conforme à courbure -1. Un tel flot est l'exemple emblématique d'un flot chaotique, ce qui renforce la terminologie utilisée ici.

2. holomorphiquement convexe : l'enveloppe holomorphe convexe de tout compact est un compact.
3. fortement pseudo-convexe : il existe une fonction d'exhaustion qui est strictement plurisousharmonique en dehors d'un certain compact.
4. Stein : il est holomorphiquement convexe et les fonctions holomorphes séparent les points.

Il est bien connu que dans le cas d'un domaine à bord de classe C^2 d'une variété complexe compacte, chacune de ces propriétés implique la précédente. L'implication 4. $\Rightarrow$ 3. est valable pour toute variété complexe, et découle de ce qu'une variété complexe est de Stein si et seulement si elle admet une exhaustion strictement plurisousharmonique, d'après un théorème de Grauert, voir [Gra58]. L'implication 3. $\Rightarrow$ 2. est un théorème dû à Grauert [Gra58] et Narasimhan [Nar62] : il montre en particulier que, via la réduction de Remmert, un domaine fortement pseudoconvexe est une modification d'une variété Stein. On voit donc que 3. et 4. sont très proches, on passe de l'une à l'autre par une procédure d'éclatement.

Il s'avère que les propriétés de convexité globales des composantes extérieures d'une hypersurface Levi-plate algébrique sont intimement liées à la dynamique du feuilletage CR. D'abord, un exemple célèbre de Grauert, voir [Gra62], montre que l'extérieur d'une hypersurface linéaire dans un tore complexe est toujours pseudo-convexe, et qu'il n'est holomorphiquement convexe que lorsque le feuilletage CR est périodique. Ce phénomène se généralise d'ailleurs aux hypersurfaces Levi-plates quasi-périodiques en général. En revanche, les composantes extérieures aux hypersurfaces Levi-plates quasi-périodiques ne sont jamais fortement pseudo-convexes, car il y a dans ces composantes des courbes holomorphes ou des hypersurfaces Levi-plates qui sont arbitrairement proches de leur bord, ce qui interdit la stricte sousharmonicité d'une fonction d'exhaustion près du bord.

Le résultat principal de cette thèse stipule que *les composantes extérieures des hypersurfaces Levi-plates (analytiques) chaotiques sont fortement pseudo-convexes*, c'est à dire des modifications d'une variété de Stein d'après le résultat de Grauert et Narasimhan sus-cité. Ce résultat était connu dans certains cas particuliers, notamment celui des hypersurfaces Levi-plates hypothétiques [2] du plan projectif complexe en vertu du théorème de Takeuchi, voir [Tak64], ou des fibrés plats en $\mathbb{CP}^1$ au dessus d'une courbe de genre ≥ 2 dont la monodromie est réelle et fidèle discrète (c'est à dire associée à l'uniformisation d'une courbe de même genre que la base), d'après un théorème de Diederich et Ohsawa [DO07]. Il est intéressant de noter que notre condition, bien qu'assez générale, n'est pas optimale : dans le très intéressant article [Nem99], Nemirovskiĭ définit des hypersurfaces Levi-plates dans certaines surfaces elliptiques, qui découpent la surface en domaines de Stein. Ces hypersurfaces Levi-plates contiennent des courbes elliptiques invariantes, et par conséquent ne sont pas chaotiques. Elles admettent cependant des

2. Un preprint récent de de Bartolomeis et Iordan annonce la non existence d'une hypersurface Levi-plate dans le plan projectif complexe, voir [dBI15].

propriétés de tourbillonement analogues à celles satisfaites par les hypersurfaces Levi-plates chaotiques. Il serait intéressant de comprendre quelle est la condition optimale pour ce problème, mais nous ne poursuivrons pas cette étude dans ce mémoire.

Pour démontrer ce résultat, nous analysons la géométrie des voisinages des hypersurfaces Levi-plates chaotiques, en construisant des métriques sur le fibré normal au feuilletage dont la courbure est strictement positive. Notre construction, via le principe de dualité de Hahn-Banach, repose sur un travail de Deroin-Kleptsyn [DK07], dans lequel l'équation de la chaleur le long des feuilles du feuilletage est considérée : il est notamment démontré que sous l'hypothèse chaotique, les feuilles du feuilletage convergent exponentiellement vite les unes vers les autres, le long de trajectoires browniennes feuilletées. C'est ce phénomène qui nous permet de construire la dite métrique sur le fibré normal au feuilletage CR. Un théorème de Brunella permet alors de déduire la forte convexité des composantes extérieures à l'hypersurface, voir [Bru08]. Nous reproduisons les arguments de Brunella dans ce mémoire par soucis de complétude.

Notre étude des propriétés de convexité globales des composantes extérieures d'un Levi-plat a plusieurs conséquences. La première est la propriété de rigidité suivante : *tout Levi-plat chaotique est tangent à un feuilletage algébrique complexe singulier de la surface ambiante, dès lors qu'il est analytique.* Ce fait découle de techniques d'extension analytique dans les modifications de domaines de Stein, qui sont maintenant classiques, voir [ST71, LN99, Iva12, MP09], mais que nous détaillons dans ce texte, notamment en ce qui concerne le passage délicat des niveaux critiques de la fonction d'exhaustion plurisousharmonique. Les hypersurfaces Levi-plates chaotiques apparaissent donc comme ensembles invariants réguliers d'équations différentielles algébriques. Il s'agit donc d'une nouvelle manifestation du principe "Géométrie Analytique Géométrie Algébrique" dans le contexte des hypersurfaces Levi-plates, mais dont la validité nécessite des hypothèses de nature dynamique, à la différence du cas classique. En effet, sans l'hypothèse chaotique, Sad a remarqué qu'il existe des contre-exemples : les hypersurfaces Levi-plates quasi-périodiques construites par Arnol'd dans les éclatés de $\mathbb{CP}^2$ en neuf points génériques ne sont pas tangentes à un feuilletage algébrique complexe.

Il semble raisonnable de penser que les équations différentielles algébriques, contraintes à préserver un ensemble analytique réel, soient suffisamment rares pour être classifiables. À titre de comparaison, en théorie de l'itération, nous connaissons toutes les applications rationnelles en une variable complexe dont les ensembles de Julia sont analytiques : il n'y a que les polynômes de Tschebychev et les produits de Blaschke. Ce problème intéressant mais sans doute difficile ne sera pas considéré dans cette généralité dans ce mémoire. Par contre, on peut utiliser les propriétés de rigidité sus-mentionnées pour étudier des classes particulières d'hypersurfaces Levi-plates. Cette technique nous permet par exemple de comprendre la structure des hypersurfaces Levi-plates analytiques transversalement affines, c'est à dire dont le pseudo-groupe d'holonomie est dans une coordonnée analytique formé de transformations affines de la forme

$x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Nous montrons, en alliant notre résultat de rigidité à un théorème de Ghys, qu'*une hypersurface Levi-plate transversalement affine d'une surface complexe algébrique est ou bien quasi-périodique, ou bien contient une courbe algébrique.* Ce résultat fait écho aux travaux récents de Cousin et Pereira sur la classification des feuilletages algébriques transversalement affines singuliers de codimension 1, voir [CP14].

Notre étude des Levi-plats analytiques transversalement affines a des conséquences intéressantes sur la géométrie des Levi-plats analytiques qui sont difféomorphes à un fibré hyperbolique en tores. Ces variétés sont des fibrés en tores $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dont la monodromie est isotope à un automorphisme linéaire $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ ayant des valeurs propres de module différent de 1. Nous conjecturons qu'*une hypersurface Levi-plate analytique d'une surface complexe algébrique qui est difféomorphe à un fibré hyperbolique en tore est périodique.* Nous ne sommes pas parvenus à établir cette conjecture, [3] mais nous avons néanmoins un résultat qui va dans cette direction : nous montrons qu'*une hypersurface Levi-plate analytique dans une surface algébrique complexe qui est difféomorphe à un fibré hyperbolique en tores contient une courbe elliptique.* Cela donne en particulier une démonstration alternative d'un théorème récent de Deroin-Dupont[DD15] dans le cas analytique : *une hypersurface Levi-plate analytique dans une surface de type général a un groupe fondamental non résoluble.* La démonstration de ces résultats est immédiate si l'on se rappelle la très jolie classification des feuilletages analytiques de codimension 1 sur les fibrés hyperboliques en tores, dûe à Ghys et Sergiescu, [GS80]. Ces feuilletages sont de deux types : ou bien ils sont analytiquement conjugués à la suspension d'un des feuilletages stables ou instables de la matrice A (et dans ce cas ils sont chaotiques et transversalement affines, ce qui est exclu pour le feuilletage CR d'une Levi plate dans une surface algébrique), ou bien ils admettent une feuille compacte qui est torique et isotope à une fibre du fibré.

Énoncé des résultats. On donne ici les énoncés complets de nos résultats ainsi que les principales idées pour les montrer.

Théorème 1. *Soit X une surface complexe compacte, M une hypersurface Levi-Plate analytique réelle compacte dans X. Si M ne possède pas de mesure transverse invariante, alors les composantes connexes de $X \setminus M$ sont des modifications de domaines Stein.*

Idée de la preuve. 1. On utilise un résultat de Deroin et Kleptsyn [DK07] qui nous permet de montrer que si le feuilletage CR $\mathcal{F}$ sur M n'a pas de mesure transverse invariante alors le fibré normal au feuilletage $N_{\mathcal{F}}$ sur M possède une métrique à courbure strictement positive $m_{\mathcal{F}}$.

3. Signalons ici que la Proposition 2 de [GS80] permettrait de démontrer cette conjecture, mais Étienne Ghys nous a averti de l'existence d'un contre-exemple à cet énoncé, qu'il nous a gentiment laissé reproduire dans ce texte.

2. On étend le feuilletage $\mathcal{F}$ sur un voisinage U de M dans la surface X, ce qui induit une extension naturelle de son fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ à U. On utilise ici l'analyticité de M. On montre ensuite que la métrique à courbure positive en direction des feuilles s'étend également dans un voisinage de M de façon à ce que sa courbure soit strictement positive dans toutes les directions.
3. Sous les conditions de l'étape 2, les travaux de Brunella [Bru08, Bru10] nous permettent d'affirmer que $X \backslash M$ est fortement pseudoconvexe. D'après les travaux de Grauert [Gra62] l'ensemble $X \setminus M$ est alors une modification d'un domaine Stein. □

Théorème 2. *Soit X une surface complexe algébrique compacte. Soit $V \Subset X$ un domaine fortement pseudoconvexe. Soit $K \subset V$ un compact tel que $U = V \backslash K$ soit connexe. Alors tout feuilletage holomorphe $\mathcal{G}$ de codimension 1 sur U se prolonge en un feuilletage holomorphe sur V.*

Idée de la preuve. On généralise ici la démarche d'extension de feuilletages suivie par Lins Neto dans [LN99] dans les variétés complexes Stein au cas des variétés fortement pseudoconvexes. On détaille notamment les arguments délicats qui permettent l'extension du feuilletage au niveau des points critiques de la fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique. □

Théorème 3. *Soit X une surface complexe algébrique. Soit M une hypersurface Levi-plate analytique de X. On suppose que le feuilletage de M est transversalement affine. Alors ce feuilletage possède une mesure transverse invariante.*

Idée de la preuve. Supposons par contradiction que $\mathcal{F}$, le feuilletage CR sur M, n'a pas de mesure transverse invariante. Ceci implique, par la première étape de la démonstration du théorème 1, que le fibré normal au feuilletage $N_{\mathcal{F}}$ sur M possède une métrique à courbure strictement positive le long des feuilles, que l'on note $m_{\mathcal{F}}$.

Il suffit, pour trouver une contradiction, d'établir l'existence d'une métrique sur $N_{\mathcal{F}}$ dont la courbure est nulle, en vertu du principe du maximum. Or la classe de Chern du fibré normal du feuilletage étendu à la surface ambiante tensorisé avec le fibré en droites associé au diviseur où la structure transverse dégénère est nulle sous les hypothèses que X est algébrique et que le feuilletage étendu est transversalement affine. Le lemme $\partial\bar{\partial}$ nous permet finalement de trouver une métrique à courbure nulle m_X sur le fibré normal au feuilletage sur X.

Notations

X	Surface complexe
$\mathcal{O}(U)$	Ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert U de X
M	Hypersurface Levi-plate dans X
$\mathcal{F}$	Feuilletage CR sur M
$\mathcal{G}$	Feuilletage holomorphe
$N_{\mathcal{F}}$	Fibré normal au feuilletage $\mathcal{F}$
$m_{\mathcal{F}}$	Métrique sur le fibré $N_{\mathcal{F}}$
Θ_m	Courbure de la métrique m
ω	1-forme différentielle donnant un feuilletage
η	1-forme différentielle fermée telle que $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$
ρ	Fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique
L_{ρ}	Forme de Levi de la fonction ρ
H	Boîte de Hartogs
V	Ouvert fortement pseudoconvexe
A	Ensemble exceptionnel dans un espace fortement pseudoconvexe

Chapitre 1

Préliminaires

Dans tout le texte une surface complexe est une variété complexe connexe de dimension 2. Sauf mention du contraire, elle n'est pas supposée compacte. On notera $\{(U_j, \phi_j)\}_{j\in J}$ un atlas d'une telle variété.

1.1 Éléments d'analyse et de géométrie complexes

Dans cette section on donne des éléments d'analyse et de géométrie sur les surfaces complexes. Pour plus de détails on consultera par exemple les livres de Demailly [Dem] et de Griffiths-Harris [GH78].

1.1.1 Positivité

La positivité de la forme de Levi d'une fonction et la positivité de la courbure d'une métrique sur un fibré en droites seront des notions essentielles dans notre travail. Nous rappellerons la définition de ces objets par la suite. Dans tout ce paragraphe, X est une surface complexe et $U \subset X$ est un ouvert avec coordonnées (z, w). En coordonnées réelles on écrit $z = x + iy$ et $w = u + iv$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On utilisera les notations classiques suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On définit de façon équivalente $\frac{\partial}{\partial w}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$. On notera

$$\partial f := \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial w}\mathrm{d}w \quad , \quad \bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\mathrm{d}\bar{w},$$

ainsi que

$$i\partial\bar{\partial}_X f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{w}} i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{w} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{z}} i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{w}} i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}.$$

On note aussi $\mathrm{vol}_X := i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \wedge i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}$.

Définition 1.1.1. Une (1,1)-forme différentielle Θ sur U est dite positive (resp. strictement positive) si pour toute (1,0)-forme (resp. non nulle) α la $(2,2)$-forme $\Theta \wedge i\alpha \wedge \bar{\alpha}$ s'écrit $f(z,w)\,\mathrm{vol}_X$, où f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (resp. dans $\mathbb{R}_+^*$).

Exemple 1.1.2. Sur $\mathbb{C}^2$, la (1,1)-forme $i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$ est positive car pour toute $(1,0)$-forme $\alpha = \alpha_1 \mathrm{d}z + \alpha_2 \mathrm{d}w$ on a $i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \wedge i\alpha \wedge \bar{\alpha} = |\alpha_2|^2 \,\mathrm{vol}_X$. Elle n'est pas strictement positive.

Définition 1.1.3. La forme de Levi de f au point $p \in U$ est la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ définie par

$$L_f(p)(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial z \partial \bar{z}}\zeta_1\bar{\zeta}_1 + \frac{\partial^2 f(p)}{\partial z \partial \bar{w}}\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \frac{\partial^2 f(p)}{\partial w \partial \bar{z}}\zeta_2\bar{\zeta}_1 + \frac{\partial^2 f(p)}{\partial w \partial \bar{w}}\zeta_2\bar{\zeta}_2.$$

On dit que L_f est positive (resp. strictement positive) sur U si $L_f(p)(\zeta_1,\zeta_2) \geq 0$ (resp. > 0) pour tout $p \in U$ et pour tout $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Lemme 1.1.4. *La (1,1)-forme $i\partial\bar{\partial}_X f$ est strictement positive sur U si et seulement si la forme de Levi L_f est strictement positive sur U.*

Démonstration. Soit $\alpha = \alpha_1 \mathrm{d}z + \alpha_2 \mathrm{d}w$ une (1,0)-forme jamais nulle sur U. Il s'agit de montrer que $(i\partial\bar{\partial}_X f \wedge i\alpha \wedge \bar{\alpha})_p$ est un multiple strictement positif de $i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \wedge i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}$ si et seulement si $L_f(p) > 0$ sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si $\alpha' := -\alpha_2 \mathrm{d}z + \alpha_1 \mathrm{d}w$, on obtient que $i\partial\bar{\partial}_X f \wedge i\alpha' \wedge \bar{\alpha}'$ est égal à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}\alpha_1\bar{\alpha}_1 i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \wedge i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{w}}\alpha_1\bar{\alpha}_2 i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{w} \wedge i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{z} \\ - \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{z}}\alpha_2\bar{\alpha}_1 i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{z} \wedge i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{w} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{w}}\alpha_2\bar{\alpha}_2 i\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w} \wedge i\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\end{aligned}$$

et donc

$$i\partial\bar{\partial} f \wedge i\alpha' \wedge \bar{\alpha}' = L_f(\alpha_1,\alpha_2)\,\mathrm{vol}_X,$$

ce qui termine la démonstration. □

Lemme 1.1.5. *Si $\frac{\partial^2 f(p)}{\partial z \partial \bar{z}} > 0$ et si $\left|\frac{\partial^2 f(p)}{\partial z \partial \bar{w}}\right|^2 < \frac{\partial^2 f(p)}{\partial z \partial \bar{z}}\frac{\partial^2 f(p)}{\partial w \partial \bar{w}}$ pour tout $p \in U$, alors la (1,1)-forme $i\partial\bar{\partial}_X f$ est strictement positive sur U.*

Démonstration. Remarquons que sous ces hypothèses $\frac{\partial^2 f(p)}{\partial z \partial \bar{z}} > 0$ si et seulement si $\frac{\partial^2 f(p)}{\partial w \partial \bar{w}} > 0$. D'après le lemme 1.1.4 il suffit de montrer que $L_f(p) > 0$ sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$ alors $L_f(p)(\alpha_1,\alpha_2) = |\alpha_2|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{w}}$ et c'est fini. Maintenant si $\alpha_1 \neq 0$ alors $L_f(p)(\alpha_1,\alpha_2) = |\alpha_1|^2 L_f(p)(1,\frac{\alpha_2}{\alpha_1})$. Il suffit alors de montrer

$$L_f(p)(1,\alpha) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{z}}\alpha\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{w}}|\alpha|^2 > 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Observons pour cela que

$$L_f(p)(1,\alpha) \geq \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - 2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{z}}\right| |\alpha| + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{w}} |\alpha|^2 .$$

Ce polynôme quadratique est bien strictement positif car son coefficient dominant l'est et son discriminant est strictement négatif. $\square$

1.1.2 Fonctions holomorphes et méromorphes

Soient X une surface complexe, $\{(U_j, \phi_j)\}_{j\in J}$ un atlas de X et $U \subset X$ un ouvert. On rappelle qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe si pour toute carte U_j qui intersecte U, la fonction $f \circ \phi_j^{-1}$ est holomorphe sur $\phi_j(U_j \cap U) \subset \mathbb{C}^2$. On note $\mathcal{O}_X(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U et $\mathcal{O}(X)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur X.

Soient $x \in X$ et f_1, f_2 deux fonctions holomorphes définies respectivement sur des voisinages U_1 et U_2 de x. On dit que f_1 et f_2 sont équivalentes s'il existe un ouvert $V \subset U_1 \cap U_2$ contenant x tel que $f_1|_V = f_2|_V$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'anneau des fonctions holomorphes près de x. On note $\mathcal{O}_{X,x}$ l'ensemble de classes d'équivalence, on l'appelle l'anneau des germes de fonctions holomorphes en x. On note f_x la classe de f dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Rappelons le théorème d'extension de Hartogs des fonctions holomorphes.

Théorème 1.1.6 (Théorème d'extension de Hartogs)**.** *Soit H une figure de Hartogs dans X et soit $f : H \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur H. Alors f peut s'étendre en une fonction holomorphe sur son enveloppe d'holomorphie $\hat{H}$.*

On rappelle qu'une figure de Hartogs $H \subset X$ est un ouvert biholomorphe à

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{D}(R_1) \times \mathbb{D}(R_2)\,,\ |z_1| > R_1 - r_1 \text{ ou } |z_2| < r_2)\} \subset \mathbb{C}^2\,, \tag{1.1}$$

avec $0 < r_k < R_k$ pour $k = 1, 2$. Son enveloppe d'holomorphie est $\hat{H} \simeq \mathbb{D}(R_1) \times \mathbb{D}(R_2)$.

Les fonctions méromorphes en deux variables diffèrent des fonctions méromorphes en une variable : elles possèdent un ensemble d'indétermination. Pour tout $x \in X$ on note $\mathcal{M}_{X,x}$ le corps des quotients de $\mathcal{O}_{X,x}$. C'est l'ensemble des quotients formels g/h avec $g, h \in \mathcal{O}_{X,x}$, où h n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_{X,x}$, avec les identifications $g/h = g'/h'$ si $gh' = g'h$. On munit

$$\mathcal{M}_X := \cup_{x\in X} \mathcal{M}_{X,x}$$

de la topologie pour laquelle les ouverts sont unions d'ensembles de type $\{g_x/h_x\,,\ x \in U\} \subset \mathcal{M}_X$, où U est un ouvert de X et $g, h \in \mathcal{O}_X(U)$. Alors $\mathcal{M}_X$ est un faisceau sur X et les sections de $\mathcal{M}_X$ au dessus de U s'appellent les fonctions méromorphes sur U.

Définition 1.1.7. Soit f une fonction méromorphe sur X. On dit que $x \in X$ est un pôle de f si $f_x \notin \mathcal{O}_{X,x}$. On note P_f l'ensemble de pôles de f. L'ensemble de zéros de f est par définition l'ensemble de pôles de $1/f$, on le note Z_f. L'ensemble $Z_f \cap P_f$ s'appelle l'ensemble d'indétermination de f.

Exemple 1.1.8. L'ensemble des pôles de la fonction méromorphe $f(z,w) = \frac{z}{w}$ sur $\mathbb{C}^2$ est $P_f = \{w = 0\}$, l'ensemble de ses zéros est $Z_f = \{z = 0\}$, et son ensemble d'indétermination est $\{(0,0)\}$.

Observons que les ensembles P_f et Z_f sont des sous ensembles analytiques de X de dimension 1 (s'ils ne sont pas vides). L'ensemble $Z_f \cap P_f$ est un ensemble fini de points. Pour tout $x \notin Z_f \cap P_f$, on a soit $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ ou $1/f \in \mathcal{O}_{X,x}$. Alors la restriction de f à $X \setminus (Z_f \cap P_f)$ définit une application holomorphe à valeurs dans la droite projective complexe. Le théorème d'extension suivant, dû à Levi, sera fondamental dans la suite, voir [Lev10].

Théorème 1.1.9 (Théorème d'extension de Levi)**.** *Soit X une surface complexe. Soit H une figure de Hartogs dans X et f une fonction méromorphe sur H. Alors f peut s'étendre en une fonction méromorphe sur $\hat{H}$.*

1.1.3 Fibrés en droites

Les feuilletages possèdent des fibrés en droites naturels dont on se servira par la suite. On rappelle ici leur définition et quelques propriétés.

Définition 1.1.10. Soit X une surface complexe. Un fibré en droites L sur X est la donnée d'un recouvrement de X par des ouverts $\{U_j\}_{j\in J}$ et de fonctions de transition holomorphes $t_{jk} : \phi_k(U_j \cap U_k) \to \mathbb{C}^*$. On pose

$$L = \bigcup_{j\in J} (U_j \times \mathbb{C})/\sim\ ,\ \text{où}$$

$$(z_j, w_j, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C} \sim (z_k, w_k, \xi_k) \in U_k \times \mathbb{C}$$
$$\Leftrightarrow (z_j, w_j) = \phi_{jk}(z_k, w_k), \quad \xi_j = t_{jk}(z_k, w_k) \cdot \xi_k.$$

Définition 1.1.11. Une section locale holomorphe (resp. méromorphe) du fibré en droites L sur X au dessus de U_j est une application $s_j : U_j \to L : (z_j, w_j) \mapsto (z_j, w_j, \xi_j(z_j, w_j))$ où $\xi_j : U_j \to \mathbb{C}$ est holomorphe (resp. méromorphe). Une section est globale si elle est définie sur tout X.

Proposition 1.1.12. *Soit X une surface algébrique complexe. Soit $L \to X$ un fibré en droites sur X. Alors il existe une section méromorphe globale de L.*

Démonstration. On considère le fibré $L' = L \otimes K^l$ où K est un fibré ample et l est grand. Un tel fibré existe car X est projective : il suffit juste de tirer en arrière le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ par un plongement de X dans $\mathbb{P}^n$. On prend une section globale holomorphe s de L', et r une section globale holomorphe de K^l. La section $\frac{s}{r}$ est une section globale méromorphe de L. □

Définition 1.1.13. Une métrique m sur un fibré en droites L est la donnée d'une collection de fonctions $m_j(z_j, w_j, \xi_j) = e^{-\sigma_j(z_j,w_j)} \left|\xi_j\right|^2$ sur $U_j \times \mathbb{C}$, où σ_j est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U_j, et qui vérifient sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$:

$$e^{-\sigma_j(z_j,w_j)} \left|\xi_j\right|^2 = e^{-\sigma_k(z_k,w_k)} \left|\xi_k\right|^2 .$$

Définition - Proposition 1.1.14. *Soit Θ_{m_j} la (1,1)-forme $\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_X\sigma_j$ définie sur U_j. Ces expressions locales se recollent pour former une (1,1)-forme Θ_m sur X que l'on appelle la courbure de la métrique m.*

Démonstration. La définition de métrique donne sur $U_j \cap U_k$:

$$e^{-\sigma_j(z_j,w_j)} \left|t_{jk}(z_k, w_k)\right|^2 = e^{-\sigma_k(z_k,w_k)}. \tag{1.2}$$

En appliquant $i\partial\bar{\partial}_X \log$ on obtient que $\Theta_{m_j} = \Theta_{m_k}$ sur $U_j \cap U_k$. En effet, $i\partial\bar{\partial}_X \log \left|t_{jk}(z_k, w_k)\right|^2$ est nul car le logarithme du module d'une fonction holomorphe qui ne s'annule pas est une fonction pluriharmonique. □

On vérifie facilement que deux métriques m et $\tilde{m}$ sur un fibré en droites L sont égales modulo multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive : $m = e^{-\tau}\tilde{m}$, où τ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les courbures de ces deux métriques sont reliées par

$$\Theta_m = \Theta_{\tilde{m}} + \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_X\tau. \tag{1.3}$$

Cette relation montre que la classe de cohomologie de la forme de courbure Θ_m dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ ne dépend pas de m. On la note $c_1(L)$, c'est la classe de Chern du fibré L.

1.1.4 Domaines Stein et réduction de Remmert

On rappelle des notions de convexité holomorphe sur les surfaces complexes. Pour plus de détails on pourra regarder l'article de synthèse de Peternell [Pet94]. On rappelle que $\mathcal{O}(X)$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes sur X.

Définition 1.1.15. Une surface complexe X est holomorphiquement convexe si pour tout compact $K \subset X$ l'ensemble suivant reste compact :

$$\hat{K} = \{x \in X \, , \, |f(x)| \leq \max_{p \in K} |f(p)| \, , \, \forall f \in \mathcal{O}(X)\}.$$

Une surface complexe compacte est holomorphiquement convexe car toutes ses fonctions holomorphes sont constantes. On s'intéressera plus loin aux surfaces Stein, qui sont holomorphiquement convexes et riches du point de vue des fonctions holomorphes.

Exemple 1.1.16. Grauert a donné un exemple d'un domaine pseudoconvexe dans un tore qui n'est pas holomorphiquement convexe, voir [Pet94, Section 3.2], détaillé dans l'exemple 1.1.30. Toutefois, on sait que tout domaine fortement pseudoconvexe dans une surface complexe est holomorphiquement convexe, d'après Grauert [Gra58] et Narasimhan [Nar62]. Ce résultat est fondamental pour notre travail car nous pouvons appliquer à tout domaine holomorphiquement convexe la réduction de Remmert (Proposition 1.1.19), autrement dit ces domaines sont des modifications de domaines Stein. Nous verrons tout cela dans la section 1.1.5

Définition 1.1.17. Une surface complexe X est dite Stein si elle est holomorphiquement convexe et si :

1. Pour tout paire de points distincts $p \neq q \in X$ il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(p) \neq f(q)$.
2. Pour tout $p \in X$ il existe des fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(X)$ telles que les formes différentielles $\mathrm{d}f_j$ en p soient $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

Exemple 1.1.18. L'espace $\mathbb{C}^2$ et tous ses domaines d'holomorphie sont des surfaces Stein. Tout domaine pseudoconvexe sur le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est Stein, d'après Takeuchi [Tak64].

Une obstruction pour une surface complexe holomorphiquement convexe pour être Stein est l'existence d'ensembles analytiques de dimension non nulle. La réduction de Remmert opère une contraction de ces ensembles. L'espace quotient est alors un espace Stein et normal du point de vue des singularités. Nous renvoyons à [Pet94, Section 2.1] pour la proposition suivante, dont on peut trouver une démonstration dans le livre de Grauert-Remmert [GR84, Chapitre 10, Section 6] et dans le livre de Camacho-Movasati [CM, Appendice A].

Proposition 1.1.19 (Reduction de Remmert)**.** *Soit V une surface complexe holomorphiquement convexe. Alors il existe un espace Stein normal Y et une fonction holomorphe, surjective et propre $\pi : V \to Y$ tel que :*

1. *Les fibres de π sont connexes.*
2. $\pi_*(\mathcal{O}_V) = \mathcal{O}_Y$.
3. *L'application canonique $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_V(V)$ est un isomorphisme.*
4. *Pour tout application holomorphe $\sigma : V \to Z$ avec Z espace de Stein il existe une unique application holomorphe $\tau : Y \to Z$ telle que $\sigma = \tau \circ \pi$.*

Géométriquement, la réduction de Remmert contracte tous les ensembles analytiques de dimension positive de V en des points.

Définition 1.1.20. L'ensemble analytique maximal contracté s'appelle l'ensemble exceptionnel de V.

La réduction de Remmert est un biholomorphisme en dehors de l'ensemble exceptionnel. C'est aussi une modification propre d'un espace Stein normal, voir [Gra62] et [GR84] pour la notion de modification. Un espace complexe réduit est normal s'il vérifie le premier théorème d'extension de Riemann :

Définition 1.1.21. Soit Y un espace complexe réduit. On dit que Y est normal si pour tout ensemble analytique A de Y dont l'adhérence n'a pas de point intérieur, toute fonction holomorphe f localement bornée sur $Y \setminus A$ s'étend en une fonction holomorphe sur Y.

Dans le chapitre 3 on aura besoin d'étendre des fonctions méromorphes sur une surface Stein normale. On utilisera le résultat suivant, voir par exemple l'article d'Ivashkovich [Iva13, Corollaire 1.5].

Lemme 1.1.22. *Soit Y une surface complexe réduite et normale. Soit $B \subset Y$ un ensemble fini de points. Alors toute fonction f méromorphe sur $Y \setminus B$ s'étend en un fonction méromorphe sur Y.*

1.1.5 Forte pseudoconvexité

On rappelle que L_ρ note la forme de Levi de la fonction ρ.

Définition 1.1.23. La fonction ρ est (resp. strictement) plurisousharmonique sur U si sa forme de Levi L_ρ est (resp. strictement) positive pour tout $p \in U$, ou de façon équivalente, si la (1,1)-forme $i\partial\bar{\partial}_X \rho$ est (resp. strictement) positive sur U.

La notion de fonction (strictement) plurisousharmonique est invariante par biholomorphisme, elle passe donc aux surfaces complexes. Précisons maintenant le lien avec les domaines Stein et la notion de forte pseudoconvexité. Dans toute la suite X est une surface complexe.

Définition 1.1.24. Une fonction $\rho : X \to [-\infty, \infty)$ est d'exhaustion si les ensembles $\{x \in X \, , \, \rho(x) < c\}$ sont relativement compacts dans X.

Le théorème suivant de Grauert [Gra58] est fondamental dans l'étude de la convexité des surfaces complexes.

Théorème 1.1.25. *(Grauert) Une surface complexe X est Stein si et seulement si elle admet une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique.*

Définition 1.1.26. Une surface complexe X est dite fortement pseudoconvexe si elle admet une fonction $\rho : X \to [-\infty, \infty)$ de classe C^2 qui est d'exhaustion et qui est strictement plurisousharmonique en dehors d'un ensemble compact.

Le théorème suivant est dû à Grauert [Gra58] et Narasimhan [Nar62]. Il montre que, via la réduction de Remmert, toute surface fortement pseudoconvexe est une surface Stein normale modifiée.

Théorème 1.1.27. *(Grauert, Narasimhan) Soit X une surface complexe compacte connexe et $V \Subset X$ un domaine fortement pseudoconvexe à bord C^2 par morceaux. Alors V est holomorphiquement convexe.*

Le théorème suivant simplifiera nos démarches puisqu'il fournit une fonction d'exhaustion pour les ensembles fortement pseudoconvexes qui est strictement plurisousharmonique et lisse en dehors de l'ensemble exceptionnel.

Théorème 1.1.28. *[CM85] Soit X une surface complexe fortement pseudoconvexe. Alors X possède une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique $\rho : X \to [-\infty, \infty[$ qui vaut $-\infty$ sur l'ensemble exceptionnel de X et qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ailleurs.*

1.1.6 Problème de Levi et exemple de Grauert

Levi a montré que tout domaine holomorphiquement convexe (lisse) de $\mathbb{C}^2$ est pseudoconvexe. La réciproque est connue sous le nom de Problème de Levi. Il possède une réponse positive dans $\mathbb{C}^2$ (Oka), dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (Takeuchi) et pour les domaines fortement pseudoconvexes d'après le théorème 1.1.27. L'exemple 1.1.30 montre qu'il existe des réponses négatives : l'hypothèse fortement pseudoconvexe ne peut donc pas être remplacée par pseudoconvexe dans le théorème 1.1.27. Commençons par la notion de pseudoconvexité.

Définition 1.1.29. Soit V un ouvert d'une surface complexe X et soit p un point du bord de V. On dit que V a un bord pseudoconvexe en p s'il existe un voisinage U de p dans X et une fonction plurisousharmonique $\rho : U \to \mathbb{R}$ telle que

1. $V \cap U = \{x \in X \,,\, \rho(x) < 0\}$,
2. $(\partial V) \cap U = \{\rho = 0\}$.

L'ouvert V est dit pseudoconvexe si son bord l'est en tout point.

Exemple 1.1.30. (Exemple de Grauert) Cet exemple est un domaine pseudoconvexe dans un tore complexe qui n'est pas holomorphiquement convexe. Il est particulièrement intéressant car son bord est une hypersurface Levi-plate. Soit X la variété abélienne $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et soit $p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to X$ le passage au quotient par le réseau $\mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Soit $H := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)\}$. Alors $M := p(H)$ est une hypersurface Levi Plate compacte dans X. L'ensemble $X \setminus M$ est alors un ensemble pseudoconvexe mais il n'est pas holomorphiquement convexe. Pour voir cela, il suffit de vérifier que les fonctions holomorphes sur $X \setminus M$ sont constantes.

Soit H' un hyperplan réel de $\mathbb{C}^2$ obtenu par translation de H, de sorte que $M' := \pi(H')$ est une hypersurface Levi-Plate (voir le paragraphe 1.2.2) contenue dans $X \setminus M$. Soit f une fonction holomorphe sur $X \setminus M$. Soit $p \in M'$ un point où la restriction de

f à M' réalise son maximum. La restriction de f à la feuille du feuilletage CR sur M' contenant p est constante, d'après le principe du maximum. Puisque les feuilles de ce feuilletage sont denses dans M', la restriction de f à M' est constante. La fonction f est donc constante sur chaque hypersurface Levi-plate M' translatée de M. Puisque ces hypersurfaces sont de codimension réelle 1, la fonction f est bien constante sur $X \setminus M$. On reviendra sur cette exemple dans la section 1.2.2.

1.2 Variétés feuilletées

On commence cette section par les 3-variétés compactes feuilletées par surfaces de Riemann, les hypersurfaces Levi-plates forment une classe importante d'exemples. Nous nous plaçons en régularité analytique, les définitions restent valables dans le cadre lisse. On aborde ensuite les feuilletages sur les surfaces complexes et les fibrés en droites sur les variétés feuilletées.

1.2.1 3-variétés feuilletées par surfaces de Riemann

Définition 1.2.1. Soit M une 3-variété compacte analytique. Un feuilletage $\mathcal{F}$ par surfaces de Riemann sur M est un atlas $\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ pour M qui est maximal par rapport aux propriétés suivantes :

1. Pour tout $j \in J$, $\varphi_j : U_j \to A_j \times B_j$ est un difféomorphisme analytique, où A_j est un disque ouvert dans $\mathbb{C}$ et $B_j =]0, 1[$.
2. Si (U_j, φ_j) et (U_k, φ_k) appartiennent à $\mathcal{A}$ avec $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, alors
$$\varphi_{jk} := \varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_j \cap U_k) \to \varphi_j(U_j \cap U_k)$$
est de la forme
$$\varphi_{jk}(z_k, t_k) = (f_{jk}(z_k, t_k), g_{jk}(t_k)),$$
où f_{jk} et g_{jk}, sont des fonctions analytiques et f_{jk} dépend holomorphiquement de z_k.

Chaque $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ est appelé boîte de flot. Les ensembles $\varphi_j^{-1}(A_j \times \{t\})$ avec $t \in B_j$ sont les plaques de $\mathcal{F}$ en U_j. On définit une relation d'équivalence sur M : deux points $p, q \in M$ sont dits équivalents s'il existe une suite de plaques $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_l$ telles que $p \in \mathcal{P}_1$, $q \in \mathcal{P}_l$ et $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_{j+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq j \leq k-1$. Les classes d'équivalence sous cette relation sont appelées les feuilles de $\mathcal{F}$. On note $\mathcal{L}_p$ la feuille de $\mathcal{F}$ passant par $p \in M$. Les feuilles de ce feuilletage sont des surfaces de Riemann immergées dans M.

De façon équivalente, on peut définir un feuilletage sur une 3-variété compacte par des submersions locales, par des champs de vecteurs ou par des formes différentielles. Ce fait vient du théorème de Frobenius.

Théorème 1.2.2 (Théorème de Frobenius)**.** *Soit M une 3-variété compacte analytique. Soit $E = \{E_p\}_{p\in M}$ un champ de plans analytique, soit $\{\omega_p\}_{p\in M}$ une famille de 1-formes différentielles telles que $\ker(\omega_p) = E_p$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $p \in M$, il existe N sous variété de M, tel que $\iota_*(T_pN) = E_p$, où $\iota : N \to M$ est l'inclusion naturelle.*
2. *Pour tous champs de vecteurs X_1, X_2 dans E on a que $[X_1, X_2]$ appartient à E, où $[\cdot,\cdot]$ dénote le crochet de Lie des champs de vecteurs.*
3. *Pour tout $p \in M$ la forme différentielle $\mathrm{d}\omega_p$ s'annule sur $\ker(\omega_p)$, c'est-à-dire que $\mathrm{d}\omega \wedge \omega = 0$.*
4. *Pour tout $p \in M$ il existe un voisinage U de p et η une 1-forme différentielle sur U telle que $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$.*
5. *Pour tout $p \in M$ il existe un voisinage U de p et des fonctions $f, g : U \to \mathbb{R}$ telles que $\omega = f\mathrm{d}g$.*

Si une des conditions du théorème est vérifiée, on dira que le champ de plans E est intégrable au sens de Frobenius.

1.2.2 Hypersurfaces Levi-plates

Les hypersurfaces Levi-plates sont les hypersurfaces réelles de surfaces complexes qui sont feuilletées par surfaces de Riemann. La structure complexe des feuilles est bien sûr compatible avec la structure complexe de la surface ambiante. Leur nom est justifié par l'annulation de la forme de Levi.

Définition 1.2.3. Soit X une surface complexe et $M \subset X$ une 3-variété compacte analytique. Soit $T_pM \subset T_pX$ l'espace tangent à M au point p. On dit que M est une hypersurface Levi-plate si le champ de plans $E_p := T_pM \cap iT_pM$ sur M est intégrable au sens de Frobenius. On note $\mathcal{F}$ le feuilletage par surfaces de Riemann sur M correspondant et on l'appelle feuilletage de Cauchy-Riemann ou feuilletage CR.

Dans la suite, nous donnons des exemples qui illustrent chacun les notions d'hypersurfaces Levi-plates périodiques, quasi-périodiques, et chaotiques, que nous avons mentionné dans l'introduction.

Exemple 1.2.4. Notre premier exemple est un Levi-plat périodique dans une surface algébrique qui est difféomorphe à un fibré hyperbolique en tores. Voici l'idée de sa construction, qui est détaillée dans [DD15].

Considérons un pinceau de cubiques de $\mathbb{CP}^2$, par exemple le pinceau de cubiques donné par la famille de courbes qui en coordonnées affines sont définies par

$$C_t := \overline{\{y^2 = x(x-1)(x-t)\}}, \tag{1.4}$$

où $t \in \mathbb{CP}^1$. Ces cubiques sont lisses dès que $t \neq \{0, 1, \infty\}$. Elles s'intersectent toutes en neuf points distincts $p_1, \ldots, p_9$ du plan projectif complexe. En éclatant $\mathbb{CP}^2$ en ces neuf points, nous obtenons une surface rationnelle X munie d'une fibration singulière dont les fibres sont les relevés stricts $\hat{C}_t$ des courbes C_t dans X.

Faisons maintenant varier la variable t le long d'un lacet de $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. L'union des courbes $\hat{C}_t$ dans X est une hypersurface Levi-plate immergée, qui est difféomorphe à un fibré en tores par construction. Si la courbe décrite par t est suffisamment compliquée, alors la monodromie de ce fibré est hyperbolique. Nous obtenons donc une hypersurface Levi-plate périodique difféomorphe à un fibré hyperbolique en tores dans une surface rationnelle, mais cette hypersurface n'est a priori qu'immergée si la courbe décrite par t n'est pas simple.

Pour obtenir une hypersurface Levi-plate de ce type qui est bien plongée, il suffit de prendre la préimage de cette construction par un revêtement au dessus de $\mathbb{CP}^1$, qui ne ramifie qu'au dessus des points $0, 1, \infty$, et dans lequel la courbe décrite par t se relève en une courbe fermée simple. Nous renvoyons à [DD15] pour plus de détails sur cette construction.

Exemple 1.2.5. Notre deuxième exemple est une perturbation du premier et est dû à Arnol'd, voir [Arn84].

Pour le détailler, nous aurons besoin de la notion suivante : une courbe C dans une surface complexe X est linéarisable si l'inclusion de C dans son fibré normal se prolonge en un biholomorphisme d'un voisinage de C dans un voisinage de son image dans le fibré normal. Si une courbe lisse d'auto-intersection nulle dans une surface complexe quelconque est linéarisable, alors il existe des hypersurfaces Levi-plates quasi-périodiques arbitrairement proches de C : en effet, cette propriété a lieu pour la section nulle dans le fibré normal, on peut prendre les niveaux de l'unique métrique plate sur ce dernier.

Si l'on choisit neuf points $p_1, \ldots, p_9$ génériquement dans $\mathbb{CP}^2$, alors il existe une unique cubique C passant par ces neuf points. Cette cubique est d'auto-intersection 9, si bien que le relevé strict $\hat{C}$ de C dans l'éclaté X de $\mathbb{CP}^2$ aux points $p_1, \ldots, p_9$ est d'auto-intersection nulle. Dans [Arn84] Arnol'd montre que cette courbe est linéarisable. Il y a donc dans son voisinage des hypersurfaces Levi-plates quasi-périodiques. Une remarque de Sad montre que ces hypersurfaces ne sont jamais tangentes à un feuilletage algébrique de X.

Exemple 1.2.6. Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre ≥ 2. Soit $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ une représentation du groupe fondamental de Σ dans le groupe des transformations de Moebius réelles. On définit une surface complexe X comme quotient de $\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$ par la relation $(z, t) \sim (\gamma \cdot z, \rho(\gamma)t)$ pour tout γ élément de $\pi_1(\Sigma)$. On la note $X := \Sigma \ltimes_\rho \mathbb{CP}^1$. Soit $p : \mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1 \to X$ la projection sur l'espace quotient X. Alors $M := p(\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1) = \Sigma \ltimes_\rho \mathbb{RP}^1$ est une hypersurface Levi-plate dans X. Comme on le verra, cette hypersurface Levi-plate est chaotique pour des représentations génériques ρ.

1.2.3 Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes

Dans cette partie X désigne une surface complexe.

Définition 1.2.7 (Feuilletage non singulier)**.** Un feuilletage holomorphe $\mathcal{G}$ non singulier sur X est un atlas $\mathcal{A} = \{(U_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{j\in J}$ pour X qui est maximal par rapport aux propriétés suivantes :

1. Pour tout $j \in J$, $\tilde{\varphi}_j : U_j \to A_j \times B_j$ est un biholomorphisme, où A_j et B_j sont des disques ouverts dans $\mathbb{C}$.
2. Si $(U_j, \tilde{\varphi}_j)$ et $(U_k, \tilde{\varphi}_k)$ appartiennent à $\mathcal{A}$ avec $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, alors
$$\tilde{\varphi}_{jk} := \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_k^{-1} : \tilde{\varphi}_k(U_j \cap U_k) \to \tilde{\varphi}_j(U_j \cap U_k)$$
est de la forme
$$\tilde{\varphi}_{jk}(z_k, w_k) = (\tilde{f}_{jk}(z_k, w_k), \tilde{g}_{jk}(w_k)),$$
où $\tilde{f}_{jk}$ et $\tilde{g}_{jk}$ sont des fonctions holomorphes.

Les feuilles d'un feuilletage holomorphe non singulier sur X sont des surfaces de Riemann immergées dans X. On définit boîte de flot, plaque et feuille comme dans la section précédente. La proposition suivante associe à tout feuilletage holomorphe non singulier une collection de submersions locales.

Proposition 1.2.8. *Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe non singulier. Il existe un recouvrement $\{U_j\}_{j\in J}$ de X par des ouverts et une famille de submersions $g_j : U_j \to \mathbb{C}$, telles que si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors $g_j = H_{jk} \circ g_k$, où $H_{jk} : g_k(U_j \cap U_k) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.*

Démonstration. D'après le point 1 de la définition il existe un recouvrement de X par des ouverts $\{U_j\}$ et des biholomorphismes $\tilde{\varphi}_j : U_j \to \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ tels que $\tilde{\varphi}_j(p) = (z_j(p), w_j(p))$. La fonction $g_j := w_j$ est une submersion car c'est une projection modulo un biholomorphisme. Le point 2 de la définition nous dit que $H_{jk} := \tilde{g}_{jk}$ est une fonction holomorphe qui vérifie $g_j = H_{jk} \circ g_k$. □

Définition 1.2.9. Un feuilletage holomorphe singulier sur X est la donnée d'un feuilletage holomorphe non singulier sur X privé d'un ensemble fini de points. On note $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ cet ensemble fini et on l'appelle l'ensemble singulier du feuilletage.

La proposition suivante caractérise les feuilletages holomorphes singuliers à l'aide des 1-formes holomorphes. Observons que sur une surface complexe, toute 1-forme holomorphe ω est intégrable, car $\mathrm{d}\omega \wedge \omega$ est une 3-forme.

Proposition 1.2.10. *Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe singulier sur X. Il existe un recouvrement ouvert $\{U_j\}_{j\in J}$ de X et une collection de 1-formes holomorphes ω_j sur U_j à zéros isolés telles que si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors*
$$\omega_j = h_{jk}\, \omega_k \ , \ \textit{où} \ \ h_{jk} \in \mathcal{O}^*(U_j \cap U_k).$$
L'ensemble $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ *est égal à* $\cup_{j\in J}\{\omega_j = 0\}$.

Démonstration. Soit $\{(U_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{j\in J}$ un recouvrement de $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ par des boîtes de flot. Dans U_j on pose $\omega_j := \tilde{\varphi}_j^*(\mathrm{d}w_j)$. Sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ on a

$$\omega_j = \tilde{\varphi}_j^*(\mathrm{d}w_j) = \tilde{\varphi}_k^*\tilde{\varphi}_{jk}^*(\mathrm{d}w_j) = \tilde{\varphi}_k^*\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{g}_{jk}}{\mathrm{d}w_k}(w_k)\mathrm{d}w_k\right) = \tilde{g}_{jk}'(w_k)\omega_k,$$

il suffit alors de poser $h_{jk} := \tilde{g}_{jk}'$. On prend maintenant en compte les singularités, soit $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. Soit $(U_p, (z, w))$ une carte de X contenant p, et recouvrons $U_p^* := U_p \setminus \{p\}$ par des boîtes de flot U_j. Pour tout j on écrit $\omega_{j|U_p^*\cap U_j} = a_j^1\mathrm{d}z + a_j^2\mathrm{d}w$ dans les coordonnées (z, w). Puisque les ω_j ne sont pas identiquement nulles, on peut supposer que a_j^1 n'est pas identiquement nulle sur $U_p^* \cap U_j$ pour tout j. On pose alors $F_j := a_j^2/a_j^1$, c'est une fonction méromorphe sur $U_p^* \cap U_j$. Comme $\omega_j = h_{jk}\omega_k$ sur $U_j \cap U_k$, on obtient $F_j = F_k$ sur $U_p^* \cap U_j \cap U_k$. On définit une fonction méromorphe F sur U_p^* en posant $F|_{U_j} = F_j$. Le théorème de Levi (théorème 1.1.9) permet d'étendre cette fonction sur U_p, notée encore F. Pour terminer on prend G une fonction holomorphe sur U_p telle que $\omega := G(\mathrm{d}z + F\mathrm{d}w)$ soit une 1-forme holomorphe à zéros isolés. Cette forme répond au problème posé. □

Remarque 1.2.11. La fonction F de la démonstration précédente représente la pente des feuilles du feuilletage $\mathcal{G}$. On utilisera plusieurs fois cette méthode pour prolonger un feuilletage.

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 1.2.12. *Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe non singulier sur X. Soit $g_j : U_j \to \mathbb{C}$ une famille de submersions holomorphes telles que $g_j = H_{jk} \circ g_k$ comme dans la proposition 1.2.8. Alors on peut prendre $\omega_j = \mathrm{d}g_j$ et $h_{jk} = H_{jk}'$ dans la proposition 1.2.10.*

Pour finir cette section on définit la notion de 1-forme méromorphe définissant un feuilletage singulier sur une surface complexe X.

Définition 1.2.13. Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe singulier sur X défini par une collection de 1-formes holomorphes $\{\omega_j\}_{j\in J}$ comme à la proposition 1.2.10. On dit qu'une 1-forme méromorphe ω sur X définit $\mathcal{G}$ si pour tout $j \in J$ et pour tout $p \in U_j$ qui n'est ni un zéro ni un pôle des coordonnées de ω on a $\ker\omega(p) = \ker\omega_j(p)$.

1.3 Fibrés en droites sur les variétés feuilletées

Nous introduisons le fibré normal et le fibré tangent à un feuilletage.

1.3.1 Fibré normal sur une 3-variété feuilletée

Rappelons les notations de la définition 1.2.1. Soit M une 3-variété compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ par surfaces de Riemann. Si (U_j, φ_j) et (U_k, φ_k) sont deux cartes du feuilletage telles que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors $\varphi_{jk} = \varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ vérifie

$$\varphi_{jk}(z_k, t_k) = (f_{jk}(z_k, t_k), g_{jk}(t_k)) = (z_j, t_j).$$

Nous commençons par introduire des notions d'analyse le long du feuilletage. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U_j)$ l'ensemble des fonctions continues sur U_j et holomorphes le long des feuilles et soit $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{F}}(U_j)$ l'ensemble des fonctions continues sur U_j lisses le long des feuilles et dont les dérivées le long des feuilles dépendent continûment de la coordonnée transverse. On a $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U_j) \subset \mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{F}}(U_j)$.

Soit $\Omega^{1,1}_{\mathcal{F}}(U_j)$ l'ensemble de formes différentielles définies sur U_j qui s'écrivent $u(z_j, t_j)\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$ avec $u \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{F}}(U_j)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{F}}(U_j)$ on note

$$\partial_{\mathcal{F}} f := \frac{\partial f}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j \ , \ \bar{\partial}_{\mathcal{F}} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\mathrm{d}\bar{z}_j \ , \ \partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}} f := \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j \in \Omega^{1,1}_{\mathcal{F}}(U_j).$$

Une (1,1)-forme $\omega \in \Omega^{1,1}_{\mathcal{F}}(M)$ est dite positive (resp. strictement positive) en la direction des feuilles si dans toute carte (U_j, z_j, t_j) elle est de la forme $u(z_j, t_j)\frac{i}{2}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$ avec $u(z_j, t_j) \geq 0$ (resp. > 0).

Définition 1.3.1. Soit M une 3-variété compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ par surfaces de Riemann. Le fibré normal au feuilletage $\mathcal{F}$ est le fibré en droites sur M défini par

$$N_{\mathcal{F}} = \bigcup_{j \in J} (U_j \times \mathbb{C}) / \sim,$$

où

$$\begin{aligned} &(z_j, t_j, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C} \sim (z_k, t_k, \xi_k) \in U_k \times \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow\ &(z_j, t_j) = \varphi_{jk}(z_k, t_k), \quad \xi_j = \frac{\mathrm{d}g_{jk}}{\mathrm{d}t_k}(t_k) \cdot \xi_k. \end{aligned}$$

On note $\pi : N_{\mathcal{F}} \to M$ la projection qui localement à tout élément $(z_j, t_j, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C}$ associe $(z_j, t_j) \in M$.

On remarque que $\frac{\mathrm{d}g_{jk}}{\mathrm{d}t_k}(t_k)$ est constant le long des feuilles. On définit le fibré conormal $N^*_{\mathcal{F}}$ en prenant $\{(\frac{\mathrm{d}g_{jk}}{\mathrm{d}t_k})^{-1}\}$ pour fonctions de transition.

Définition 1.3.2. Une section holomorphe du fibré en droites $N_{\mathcal{F}}$ au dessus de U_j est une application $s_j : U_j \to U_j \times \mathbb{C} : (z_j, t_j) \mapsto (z_j, t_j, \xi_j(z_j, t_j))$ où $\xi_j \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U_j)$. Une section est globale si elle est définie sur tout M.

Définition - Proposition 1.3.3. *Une métrique m sur le fibré en droites $N_{\mathcal{F}}$ sur M est la donnée d'une collection de fonctions $m_j(z_j, t_j, \xi_j) = e^{-\sigma_j(z_j, t_j)} |\xi_j|^2$ sur $U_j \times \mathbb{C}$, où σ_j est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, et telles que*

$$e^{-\sigma_j(z_j, t_j)} |\xi_j|^2 = e^{-\sigma_k(z_k, t_k)} |\xi_k|^2$$

sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Soit $\Theta_{m_j} := \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\sigma_j(z_j, t_j) \in \Omega^{1,1}_{\mathcal{F}}(U_j)$. Ces expressions locales se recollent pour former une (1,1)-forme $\Theta_m \in \Omega^{1,1}_{\mathcal{F}}(M)$ que l'on appelle la courbure de la métrique m.

Démonstration. La condition de recollement est équivalente à

$$e^{-\sigma_j(z_j,t_j)} \left| \frac{\mathrm{d}g_{jk}}{dt_k}(t_k) \right|^2 = e^{-\sigma_k(z_k,t_k)}. \tag{1.5}$$

En appliquant $\partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}} \log(\cdot)$ des deux cotés de (1.5) on obtient $\Theta_{m_j} = \Theta_{m_k}$ car la fonction $\left| \frac{\mathrm{d}g_{jk}}{dt_k}(t_k) \right|^2$ ne dépend pas de z_k. $\square$

Notons que la courbure de m est une $(1,1)$-forme (strictement) positive si $\frac{\partial^2 \sigma_j(p)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}$ est (strictement) positif pour tout $p \in M$ et pour tout j, voir le lemme 1.1.4. On obtient immédiatement le lemme suivant, nous en aurons besoin pour la démonstration du théorème 2.2.3.

Lemme 1.3.4. *Soit m une métrique sur $N_{\mathcal{F}}$ et soit $\tau : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors la courbure de la métrique $\tilde{m} := e^{-\tau} m$ est égale à*

$$\Theta_{\tilde{m}} = \Theta_m + \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}} \tau.$$

1.3.2 Fibré tangent sur une 3-variété feuilletée

On garde les notations de la section précédente.

Définition 1.3.5. Le fibré tangent au feuilletage $\mathcal{F}$ est le fibré en droites sur M défini par

$$T_{\mathcal{F}} = \bigcup_{j \in J} (U_j \times \mathbb{C}) / \sim,$$

où

$$\begin{aligned} (z_j, t_j, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C} &\sim (z_k, t_k, \xi_k) \in U_k \times \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow (z_j, t_j) = \varphi_{jk}(z_k, t_k), &\quad \xi_j = \frac{\mathrm{d}f_{jk}}{\mathrm{d}z_k}(z_k, w_k) \cdot \xi_k. \end{aligned}$$

Définition - Proposition 1.3.6. *Une métrique $\mathfrak{g}$ sur le fibré en droites $T_{\mathcal{F}}$ est la donnée d'une collection de fonctions $\mathfrak{g}_j(z_j, t_j, \xi_j) = e^{-\chi_j(z_j,t_j)} |\xi_j|^2$ sur $U_j \times \mathbb{C}$, où χ_j est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et telles que*

$$e^{-\chi_j(z_j,t_j)} |\xi_j|^2 = e^{-\chi_k(z_k,t_k)} |\xi_k|^2$$

sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Les expressions $e^{-\chi_j(z_j,t_j)} i\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$ se recollent pour former une $(1,1)$-forme strictement positive $\mathrm{vol}_{\mathfrak{g}} \in \Omega^{1,1}_{\mathcal{F}}(M)$. On l'appelle la forme volume de la métrique $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la condition de recollement est équivalente à

$$e^{-\chi_j(z_j,t_j)} \left| \frac{\mathrm{d}f_{jk}}{\mathrm{d}z_k}(z_k,t_k) \right|^2 = e^{-\chi_k(z_k,t_k)}.$$

□

Lemme 1.3.7. *Soit $\mathfrak{g}$ une métrique sur $T_{\mathcal{F}}$ et soit $\Theta \in \Omega^{1,1}_{\mathcal{F}}(M)$. Il existe une fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ dans $C^\infty_{\mathcal{F}}(M)$ telle que $\Theta = \varphi \cdot \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}$.*

Démonstration. Les $(1,1)$-formes Θ et $\mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}$ sont deux sections $C^\infty_{\mathcal{F}}(M)$ de $T_{\mathcal{F}}$, de plus $\mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}$ est strictement positive. □

Ce lemme permet d'introduire la définition suivante.

Définition 1.3.8. Soit f une fonction de $C^\infty_{\mathcal{F}}(M)$ et soit $\mathfrak{g}$ une métrique sur $T_{\mathcal{F}}$. On note $\Delta_{\mathfrak{g}} f$ la fonction de $C^\infty_{\mathcal{F}}(M)$ vérifiant

$$i\partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}} f = \Delta_{\mathfrak{g}} f \cdot \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}\,.$$

1.3.3 Fibré normal sur une surface complexe feuilletée

Soit X une surface complexe et soit $\mathcal{G}$ un feuilletage non singulier sur X. On rappelle les notations de la définition 1.2.7. Si $(U_j, \tilde{\varphi}_j)$ et $(U_k, \tilde{\varphi}_k)$ sont deux cartes du feuilletage telles que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors $\tilde{\varphi}_{jk} = \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_k^{-1}$ vérifie

$$\tilde{\varphi}_{jk}(z_k, w_k) = (\tilde{f}_{jk}(z_k, w_k), \tilde{g}_{jk}(w_k)) = (z_j, w_j).$$

Définition 1.3.9. Le fibré normal au feuilletage $\mathcal{G}$ est le fibré en droites sur X défini par

$$N_{\mathcal{G}} = \bigcup_{j \in J} (U_j \times \mathbb{C}) / \sim,$$

où

$$\begin{gathered} (z_j, w_j, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C} \sim (z_k, w_k, \xi_k) \in U_k \times \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow (z_j, w_j) = \tilde{\varphi}_{jk}(z_k, w_k), \quad \xi_j = \frac{\mathrm{d}\tilde{g}_{jk}}{\mathrm{d}w_k}(w_k) \cdot \xi_k. \end{gathered}$$

On remarque que $\frac{\mathrm{d}\tilde{g}_{jk}}{\mathrm{d}w_k}$ est holomorphe (car constant) le long des feuilles. Le fibré conormal $N^*_{\mathcal{G}}$ est défini par les fonctions de transition $\{(\frac{\mathrm{d}\tilde{g}_{jk}}{\mathrm{d}w_k})^{-1}\}$. Il est possible de définir le fibré normal $N_{\mathcal{G}}$ d'un feuilletage singulier. Pour ce faire on prolonge le fibré normal défini au dessus de la partie régulière à l'aide du théorème d'extension de Levi des fonctions méromorphes, voir par exemple l'article de Zakeri [Zak01].

Définition 1.3.10. Une métrique m sur le fibré $N_{\mathcal{G}}$ est la donnée d'une collection de fonctions $m_j(z_j, w_j, \xi_j) = e^{-\sigma_j(z_j,w_j)} |\xi_j|^2$ sur $U_j \times \mathbb{C}$, où σ_j est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U_j, telles que

$$e^{-\sigma_j(z_j,w_j)} |\xi_j|^2 = e^{-\sigma_k(z_k,w_k)} |\xi_k|^2$$

sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Comme précédemment on peut définir la courbure Θ_m de la métrique m en posant localement $\Theta_{m_j} := \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_X \sigma_j(z_j, w_j)$ sur U_j. Il s'agit ici de l'opérateur $\partial\bar{\partial}_X$ et non pas de l'opérateur feuilleté $\partial\bar{\partial}_{\mathcal{G}}$. La courbure de m est (strictement) positive si la forme de Levi de σ_j est (strictement) positive, autrement dit si la fonction σ_j est (strictement) plurisousharmonique sur U_j.

1.3.4 Sections méromorphes du fibré conormal

Nous expliquons dans cette section comment l'existence de sections méromorphes du fibré conormal $N^*_{\mathcal{G}}$ (donnée par la proposition 1.1.12) permet de construire des 1-formes méromorphes sur X qui définissent le feuilletage au sens de la définition 1.2.13. Cela sera utile dans la section 4.2.2.

Proposition 1.3.11. *Soit X une surface complexe et soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe singulier sur X. Soit $\{U_j\}_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ et soient $g_j : U_j \to \mathbb{C}$ des submersions qui définissent $\mathcal{G}$ comme dans la proposition 1.2.8. Soit $f = (f_j)$ une section méromorphe du fibré $N^*_{\mathcal{G}}$ donnée par la proposition 1.1.12. Alors la collection de 1-formes méromorphes $\omega_j := f_j \mathrm{d}g_j$ se recolle en une 1-forme méromorphe sur X qui définit le feuilletage au sens de la définition 1.2.13.*

Démonstration. D'après la proposition 1.2.8 si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors les submersions g_j et g_k sont reliées par

$$g_j = \tilde{g}_{jk} \circ g_k \tag{1.6}$$

où $\tilde{g}_{jk}$ est le changement de coordonnées transverse entre U_j et U_k. D'un autre coté, puisque f est une section méromorphe du fibré $N^*_{\mathcal{G}}$, on a

$$f_j = (\tilde{g}'_{jk})^{-1} f_k \tag{1.7}$$

sur $U_j \cap U_k$. En dérivant (1.6) et en multipliant le résultat avec (1.7) on obtient

$$f_j \mathrm{d}g_j = f_k \mathrm{d}g_k$$

sur $U_j \cap U_k$. On définit une 1-forme méromorphe ω sur X en posant $\omega|_{U_j} := f_j \mathrm{d}g_j$. Elle définit bien le feuilletage $\mathcal{G}$ au sens de la définition 1.2.13. $\square$

Chapitre 2

Dynamique des Levi-plats

L'objectif de ce chapitre est de montrer que si $\mathcal{F}$ est un feuilletage par surfaces de Riemann sur une 3-variété compacte qui n'a pas de mesure transverse invariante, alors le fibré $N_{\mathcal{F}}$ normal au feuilletage possède une métrique dont la courbure est strictement positive. Il s'agit de la partie cruciale de ce mémoire. On commencera par introduire la notion d'holonomie, de mesure transverse invariante et de mesures harmoniques.

2.1 Dynamique sur les 3-variétés feuilletées

2.1.1 Holonomie

Nous rappelons ici la définition d'application d'holonomie. Soit M une 3-variété compacte feuilletée par surfaces de Riemann. Soit $\{(U_j, \varphi_j)\}$ les cartes du feuilletage. Soient p et q deux points dans une feuille $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}$ et soient $\mathcal{T}_p, \mathcal{T}_q \simeq]-1,1[$ des sections transversales en p et q. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathcal{L}$ un chemin continu dans $\mathcal{L}$ avec $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. L'application d'holonomie h_γ associée à γ est définie comme suit.

On choisit une collection de cartes du feuilletage $\{(U_j, \varphi_j)\}_{0 \le j \le n}$ qui recouvrent le chemin γ et $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n < r_{n+1} = 1$ une partition de $[0,1]$ telle que $\gamma([r_j, r_{j+1}]) \subset U_j$ pour $0 \le j \le n$, et tel que si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors $U_j \cup U_k$ est contenu dans une carte du feuilletage.

Pour tout $1 \le j \le n$ on choisit une section $\mathcal{T}_j := \mathcal{T}_{\gamma(t_j)} \simeq]-1,1[$ transversale à $\mathcal{L}$ en $\gamma(r_j)$, de cette façon $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{\gamma(r_0)} = \mathcal{T}_p$ et $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_{\gamma(r_{n+1})} = \mathcal{T}_q$.

Alors pour chaque $t \in \mathcal{T}_j$ suffisamment proche de $\gamma(r_j)$ la plaque de U_j qui passe par t coupe $\mathcal{T}_{j+1}$ en un unique point $h_j(t)$. De plus $h_j(\gamma(r_j)) = \gamma(r_{j+1})$. La composition $h_\gamma := h_n \circ \cdots \circ h_0$ est donc bien définie sur un voisinage de p dans $\mathcal{T}_0$ et à valeurs dans $\mathcal{T}_1$. De plus cette application est inversible. On note $dom(h_\gamma)$ son domaine de définition.

2.1.2 Mesures transverses invariantes

Définition 2.1.1. Soit M une 3-variété compacte et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur M. Une mesure transverse invariante est une famille de mesures finies $\{\mu_{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{T}}$ sur chaque transversale $\mathcal{T}$ telle que toute application d'holonomie $h_\gamma : dom(h_\gamma) \subset \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ vérifie $\mu(h_\gamma(B)) = \mu(B)$ sur les boréliens de $dom(h_\gamma)$. Une mesure transverse invariante est ergodique si elle ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe non triviale de deux mesures transverses invariantes différentes.

Le théorème de Ghys suivant donne la nature des mesures transverses invariantes sur les 3-variétés feuilletées transversalement affines. On rappelle que $\mathcal{F}$ est transversalement affine s'il possède un atlas pour lequel les changements de cartes g_{jk} de la définition 1.2.1 sont affines.

Théorème 2.1.2. *[Ghy91] Soit M une 3-variété analytique compacte et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique de codimension 1 sur M. On suppose que $\mathcal{F}$ est transversalement affine et qu'il possède une mesure transverse invariante ergodique μ. Alors μ est de l'un des types suivants :*

1. *μ est concentrée sur une feuille compacte de $\mathcal{F}$.*
2. *$\mathcal{F}$ est Riemannien, c'est-à-dire qu'il existe une métrique riemannienne sur le fibré normal à $\mathcal{F}$ qui est invariante par holonomie, et μ est la mesure de volume associée à cette métrique.*

Il est très rare qu'un feuilletage possède une mesure transverse invariante. On dispose du résultat suivant dans le cas des représentations fuchsiennes.

Exemple 2.1.3. Soit Σ une surface de Riemann et $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ une représentation du groupe fondamental de Σ. On définit $M := \Sigma \ltimes_\rho \mathbb{RP}^1$. Alors il existe une mesure transverse invariante sur M si et seulement si la représentation ρ est élémentaire : l'image de $\pi_1(\Sigma)$ par ρ est conjuguée à

— un sous-groupe de $SO(2)$, ou
— un sous-groupe du groupe affine, ou
— un sous-groupe du groupe engendré par $z \mapsto \frac{1}{z}$ et $z \mapsto az$, où $a \in \mathbb{R}^*$.

Dans le premier cas la mesure transverse invariante est la mesure de Lebesgue, dans les autres cas c'est une somme de deux masses de Dirac. On pourra par exemple consulter le livre de Beardon sur ces aspects [Bea95, §5.1].

2.1.3 Mesures harmoniques

On s'intéresse ici aux mesures harmoniques. Celles-ci généralisent en un certain sens les mesures transverses invariantes : associée à une mesure harmonique, on peut construire une famille de mesures transverses qui sont invariantes en moyenne par les holonomies relativement à la diffusion de la chaleur dans les feuilles. Les mesures harmoniques ont été introduites par Garnett [Gar83].

Définition 2.1.4. Soit M une 3-variété compacte feuilletée par surfaces de Riemann. Soit $\mathfrak{g}$ une métrique sur $T_{\mathcal{F}}$ et soit $\Delta_{\mathfrak{g}}$ son laplacien. Une mesure μ de probabilité sur M est dite $\mathfrak{g}$-harmonique si pour toute $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathcal{F}}(M)$ on a

$$\int_M \Delta_{\mathfrak{g}} f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

De telles mesures existent toujours, on peut le démontrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach, voir [CC03, Chapitre 2.1]. Sur des exemples concrets il est possible de construire de telles mesures à la main. On renvoie à [CC03] pour le cas des fibrés hyperboliques en tores et à [Gar83] pour le cas des fibrés unitaires tangents aux surfaces de Riemann hyperboliques.

Nous donnons maintenant la définition de l'exposant de Lyapunov d'une mesure harmonique, voir les articles [DK07] et [DD15, Section 5.4].

Définition 2.1.5. Soit M une 3-variété compacte feuilletée par surfaces de Riemann. Soit $\mathfrak{g}$ une métrique sur $T_{\mathcal{F}}$ et soit μ une mesure $\mathfrak{g}$-harmonique ergodique sur M. L'exposant de Lyapunov de μ est défini par

$$\lambda(\mu) = -\int_M \varphi \, \mathrm{d}\mu,$$

où $\varphi : M \to \mathbb{R}$ est la fonction vérifiant $\Theta_{m_{\mathcal{F}}} = \varphi \cdot \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}$ et $m_{\mathcal{F}}$ est une métrique sur le fibré normal $N_{\mathcal{F}}$. Cette définition ne dépend pas de la métrique choisie car μ est $\mathfrak{g}$-harmonique.

On peut montrer que l'exposant de Lyapunov d'une mesure invariante est nul, voir [DK07]. Le résultat suivant stipule qu'il est strictement négatif dans le cas où il n'y a pas de mesure transverse invariante.

Théorème 2.1.6. *[DK07] Soit M une 3-variété compacte feuilletée par surfaces de Riemann. Soit $\mathfrak{g}$ une métrique sur $T_{\mathcal{F}}$. Si $\mathcal{F}$ n'a pas de mesure transverse invariante, alors $\mathcal{F}$ possède un nombre fini de minimaux $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_r$, chaque minimal supporte une unique mesure $\mathfrak{g}$-harmonique ν_i, et chaque exposant de Lyapunov $\lambda(\nu_i)$ est < 0. Toute mesure harmonique sur M est une combinaison convexe des $\nu_1, \ldots, \nu_r$.*

Remarque 2.1.7. Dans le cas d'une mesure harmonique ergodique (i.e. extrémale dans le compact convexe formé par les mesures harmoniques), l'exposant de Lyapunov mesure le taux d'écartement exponentiel des feuilles génériques vis à vis de la mesure harmonique le long des trajectoires browniennes. Nous ne développerons pas ce point de vue ici, nous nous contentons de renvoyer à [DK07].

2.2 Dynamique et courbure positive

Dans cette section on montre que si une 3-variété compacte feuilletée par surfaces de Riemann n'a pas de mesure transverse invariante alors le fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ possède une métrique dont la courbure est strictement positive. On commence par le lemme suivant, dont la preuve s'inspire de [DK07].

Lemme 2.2.1. *Soit M une 3-variété compacte et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage par surfaces de Riemann. Soit $\mathfrak{g}$ une métrique sur le fibré tangent $T_{\mathcal{F}}$. Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_M \varphi \, d\nu > 0$ pour toute mesure $\mathfrak{g}$-harmonique ν sur M. Alors il existe $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{F}}(M)$ telle que $\varphi - \Delta_{\mathfrak{g}} g > 0$.*

Démonstration. On considère l'espace $C^0(M)$ des fonctions continues $\phi : M \to \mathbb{R}$. C'est un espace de Banach pour la topologie de la convergence uniforme. On note E le sous-espace fermé

$$E := \{\phi \in C^0(M) | \exists (g_n)_n \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{F}}(M) \text{ telle que } \|\phi - \Delta_{\mathfrak{g}} g_n\|_\infty \to 0\}$$

et C le cône

$$C := \{\psi \in C^0(M) | \psi > 0 \text{ sur } M\}.$$

L'ensemble C est un cône convexe car pour tout $\alpha > 0$ et toute fonction $\psi \in C$ la fonction $\alpha\psi$ appartient à C. On note $F = C^0(M)/E$ et $\pi : C^0(M) \to F$ la projection canonique. Comme E est fermé, $\|\pi(\phi)\| := \inf_{e \in E} \|\phi - e\|_\infty$ définit une norme sur l'espace F, qui en fait un espace de Banach. De plus la projection π est linéaire et continue.

Soit $\varphi \in C^0(M)$ telle que $\int_M \varphi d\nu > 0$ pour toute mesure harmonique ν. Pour montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{F}}(M)$ telle que $\varphi - \Delta_{\mathfrak{g}} g > 0$, il suffit de montrer que $\pi(\varphi) \in \pi(C)$.

En effet, si $\pi(\varphi) \in \pi(C)$ il existe alors une fonction $c \in C$ et une fonction $e \in E$ telles que $\varphi = c + e$. Puisque M est compact et c est une fonction continue sur M il existe $\epsilon > 0$ tel que $c \geq \epsilon$. Donc on a $\varphi - e \geq \epsilon$ sur M. D'après la définition de l'ensemble E il existe $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{F}}(M)$ telle que $|e - g|_\infty < \epsilon/2$. On a alors $\varphi - \Delta_{\mathfrak{g}} g \geq \epsilon/2$ comme souhaité.

Montrons donc que $\pi(\varphi) \in \pi(C)$. Par contradiction on suppose que $\pi(\varphi) \notin \pi(C)$. L'ensemble $\pi(C)$ est un ouvert convexe de F. On utilise le résultat classique suivant avec $A = \pi(C)$ et $B = \{\pi(\varphi)\}$.

Théorème 2.2.2 (Hahn-Banach)**.** *[Bre83] Soit F un espace vectoriel normé. Soient A et B deux sous ensembles de F convexes, non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe une forme linéaire L sur F, continue et non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $L(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in A$ et $L(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in B$.*

Alors d'après ce théorème il existe une fonctionnelle linéaire continue $L : F \to \mathbb{R}$ tel que $L(\pi(\varphi)) \leq \alpha$ et $L \geq \alpha$ sur $\pi(C)$. Vérifions que cela entraîne

$$L(\pi(\varphi)) \leq 0 \text{ et } L \geq 0 \text{ sur } \pi(C). \tag{2.1}$$

Si on prend une suite de fonctions constantes $\epsilon_n \in C$ telles que $\epsilon_n \to 0$, alors puisque L et π sont linéaires et continues on a $\alpha \leq L(\pi(\epsilon_n)) \to L(\pi(0)) = 0$. On a bien $\alpha \leq 0$ et donc $L(\pi(\varphi)) \leq 0$. Pour vérifier $L \circ \pi \geq 0$ sur C, supposons par l'absurde qu'il existe

$g \in C$ tel que $L(\pi(g)) = \beta < 0$. Puisque C est un cône, et L et π sont linéaires, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$L(\pi(\lambda g)) = \lambda L(\pi(g)) = \lambda\beta \to -\infty, \text{ si } \lambda \to +\infty$$

ce qui contredit que $L(\pi(C)) \geq \alpha$. Cela montre (2.1).

On définit une forme linéaire $\tilde{L}$ sur l'espace $C^0(M)$ en posant $\tilde{L}(\phi) := L(\pi(\phi))$. La forme $\tilde{L}$ est positive car, par définition de $\tilde{L}$ sur C, on a $\tilde{L}(\psi) = L(\pi(\psi)) > 0$ pour toute fonction $\psi \in C$. Puisque $\tilde{L}$ est positif, le théorème de représentation de Riesz nous dit qu'il existe une mesure positive ν qui représente $\tilde{L}$, c'est-à-dire $\tilde{L}(\phi) = \int_M \phi \mathrm{d}\nu$ pour toute $\phi \in C^0(M)$. Cette mesure est $\mathfrak{g}$-harmonique car pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ on a $\tilde{L}(\Delta_{\mathfrak{g}} g) = L(\pi(\Delta_{\mathfrak{g}} g)) = 0$, car $\Delta_{\mathfrak{g}} g \in E$.

On a donc construit une mesure harmonique ν telle que

$$\int_M \varphi \,\mathrm{d}\nu = L(\pi(\varphi)) = \tilde{L}(\varphi) \leq 0.$$

Mais par hypothèse la moyenne de φ contre toute mesure harmonique sur M est > 0. Cette contradiction montre que $\pi(\varphi) \in \pi(C)$. □

Théorème 2.2.3. *Soit M une 3-variété compacte et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage par surfaces de Riemann sur M. Si $\mathcal{F}$ n'a pas de mesure transverse invariante alors $N_{\mathcal{F}}$ possède une métrique à courbure strictement positive.*

Démonstration. Soit $\tilde{m}$ une métrique sur le fibré $N_{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{g}$ une métrique sur $T_{\mathcal{F}}$. Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ la fonction continue telle que $\Theta_{m_{\mathcal{F}}} = \varphi \cdot \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}$ (voir le lemme 1.3.7). D'après le théorème 2.1.6, comme le feuilletage $\mathcal{F}$ n'a pas de mesure transverse invariante, toute mesure $\mathfrak{g}$-harmonique ν supportée sur M est une combinaison convexe $\nu = \sum_i t_i \nu_i$, avec ν_i mesure harmonique ergodique d'exposant de Lyapunov $\lambda(\nu_i) < 0$. En particulier, on a

$$-\int_M \varphi \,\mathrm{d}\nu = -\sum_i t_i \int_M \varphi \,\mathrm{d}\nu_i = \sum_i t_i \lambda(\nu_i) < 0.$$

Le lemme 2.2.1 fournit alors une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\varphi - \Delta_{\mathfrak{g}} g > 0 \quad \text{sur } M.$$

On définit

$$m_{\mathcal{F}} = \tilde{m} \cdot e^g.$$

D'après le lemme 1.3.4 et la définition 1.3.8, cette métrique sur $N_{\mathcal{F}}$ vérifie

$$\Theta_{m_{\mathcal{F}}} = \Theta_{\tilde{m}} - \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}} g = (\varphi - \Delta_{\mathfrak{g}} g)\, \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}.$$

La courbure de $m_{\mathcal{F}}$ est donc strictement positive car $\varphi - \Delta_{\mathfrak{g}} g$ est strictement positive sur M. □

Nous concluons cette partie par des exemples particuliers où l'on peut expliciter une métrique sur le fibré normal au feuilletage CR qui est à courbure positive.

Exemple 2.2.4. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage par surfaces de Riemann d'une 3-variété compacte, et $\mathfrak{g}$ une métrique sur $T\mathcal{F}$. Soit également μ une mesure harmonique. Supposons que μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et que sa densité soit une fonction continue strictement positive partout. Dans ce cas, on peut désintégrer la mesure harmonique en le produit de la forme de volume le long des feuilles associée à la métrique $\mathfrak{g}$, et d'un élément de volume transverse. Cet élément de volume nous permet de construire une métrique sur le fibré normal au feuilletage. L'harmonicité de μ nous dit que la norme d'une section plate non nulle du fibré normal, vis à vis de la connexion de Bott, est une fonction strictement positive qui est harmonique le long des feuilles. La courbure de cette métrique est donc positive ou nulle, car le laplacien du logarithme d'une fonction harmonique strictement positive est négatif ou nul.

L'existence d'une mesure harmonique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue n'arrive que très rarement. En effet, il peut arriver que $\mathcal{F}$ ait des minimaux exceptionnels, et dans ce cas μ est supportée sur la réunion de ces minimaux, d'après [DK07]. Ces minimaux exceptionnels sont conjecturés être de mesure de Lebesgue nulle. De plus, même dans le cas où le feuilletage est minimal, les mesures harmoniques seront la plupart du temps singulières par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous renvoyons aux articles [DKN09, DKN13] pour ces questions délicates. Il existe néanmoins un certain nombre de cas particuliers où les mesures harmoniques sont des mesures lisses avec une densité strictement positive. C'est le cas par exemple des feuilletages homogènes.

Exemple 2.2.5. Soit G un groupe de Lie de dimension 3. Nous supposons que G contient un réseau Γ et une copie du groupe affine

$$A = \{x \mapsto ux + v | u \in \mathbb{R}_+^*, u \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $M := \Gamma\backslash G$ et soit $\mathcal{F}$ le feuilletage de M défini par l'action localement libre de A sur M par multiplication à droite, donnée par

$$a \cdot \Gamma g := \Gamma g a^{-1} \text{ pour tous } a \in A,\ g \in G.$$

Considérons sur A la métrique $\mathfrak{g} = \frac{du^2+dv^2}{u^2}$ à courbure constante -1. On vérifie qu'elle est invariante par multiplication à gauche. Observons que $\mathfrak{g}$ n'est pas invariante par multiplication à droite, ni même son volume. Si $D_a : a' \in A \mapsto a'a^{-1} \in A$ désigne la multiplication à droite par a^{-1}, on a en effet la formule

$$D_a^* \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}} = u \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}. \tag{2.2}$$

Les orbites de l'action de A sur M sont des quotients de A par un sous-groupe discret de A agissant à gauche. Par conséquent $\mathfrak{g}$ munit les feuilles de $\mathcal{F}$ d'une métrique riemannienne à courbure constante -1.

Soit $\tilde{\mu}$ une mesure de Haar de G. Cette mesure est bi-invariante par Γ, et donc descend en une mesure de volume μ sur M qui est invariante par l'action du groupe affine A. Cette forme se décompose en le produit $\mu = d\mathrm{vol}_{\mathfrak{g}} \wedge \omega$, où ω est une certaine forme qui définit le feuilletage $\mathcal{F}$. En vertu de la relation 2.2, et de l'invariance de μ par multiplication à droite, on obtient que

$$D_a^* \omega = \frac{1}{u} \omega, \text{ pour tout } a \in A.$$

En particulier, si s désigne une section plate du fibré normal à $\mathcal{F}$ le long d'une feuille, on a $\omega(s) = \mathrm{cst} u$, pour n'importe quelle paramétrisation de la feuille vue comme orbite du groupe affine. Ceci montre que la courbure de la métrique $m_{\mathcal{F}} := |\omega|$ sur le fibré normal à $\mathcal{F}$ est donnée par $\Theta_{m_{\mathcal{F}}} = \frac{1}{4\pi} \mathrm{vol}_{\mathfrak{g}}$. Elle est en particulier strictement positive.

Observons que dans le cas où G est le groupe Sol $:= \mathbb{R}^{>0} \ltimes \mathbb{R}^2$, où $\mathbb{R}^{>0}$ agit sur $\mathbb{R}^2$ par $u \cdot (v, w) := (uv, u^{-1} w)$, les variétés M qu'on obtient de cette façon sont à revêtement fini près les fibrés hyperboliques en tores. Nous reviendrons sur leur construction au chapitre 4. Nous renvoyons à [Gar83] pour un point de vue plus géométrique dans le cas où $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Chapitre 3

Extension de feuilletages

Dans la première section de ce chapitre on montre que, dans une surface Kählérienne complexe, les composantes connexes du complément d'une hypersurface Levi-plate, dont le fibré normal au feuilletage CR possède une métrique à courbure strictement positive, sont fortement pseudoconvexes. Il s'agit d'un résultat de Brunella que nous retranscrivons ici, voir [Bru08]. On pourra donc appliquer ce résultat aux hypersurfaces Levi-plates analytiques chaotiques contenues dans les surfaces Kählériennes, d'après le Théorème 2.2.3.

Dans la deuxième section on démontre un résultat d'extension de feuilletages sur des domaines fortement pseudoconvexes dans les surfaces complexes algébriques compactes, en suivant la méthode de [ST71]. Elle consiste à étendre le feuilletage de proche en proche sur les surniveaux d'une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique. Le passage des niveaux non critiques est classique et consiste en la construction de boîtes de Hartogs convenablement placées. Nous détaillons le recollement des extensions dans les différentes boîtes de Hartogs sur un niveau donné de l'exhaustion strictement plurisousharmonique. D'autre part nous détaillons le passage des niveaux critiques de l'exhaustion, qui n'utilise pas la construction délicate de boîtes de Hartogs au voisinage des points critiques, voir [ST71, MP09, Iva12].

Tout ceci nous permettra d'étendre le feuilletage CR d'une hypersurface Levi-plate analytique chaotique dans une surface algébrique complexe en un feuilletage algébrique complexe global. Cette démarche a été utilisée par Lins Neto [LN99] pour démontrer la non existence des hypersurfaces Levi-plates dans les espaces projectifs complexes de dimension ≥ 3. Dans ce cas, les composantes extérieures sont Stein par un théorème de Takeuchi [Tak64].

3.1 Forte pseudoconvexité du complémentaire

On montre dans cette section le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit X une surface complexe compacte, M une hypersurface Levi-Plate analytique réelle compacte dans X et $\mathcal{F}$ le feuilletage de Cauchy-Riemann de M. On suppose que le fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ sur M possède une métrique à courbure strictement positive le long des feuilles. Alors les composantes connexes de $V := X \setminus M$ sont fortement pseudoconvexes.*

La démonstration consiste à construire une fonction d'exhaustion du complément de M qui est strictement plurisousharmonique en dehors d'un ensemble compact. Pour faire ceci, grâce à l'analyticité de M, on commence par étendre le feuilletage $\mathcal{F}$ en un feuilletage $\mathcal{G}$ sur un voisinage U de M dans X. Ceci est un fait bien connu, on peut regarder par exemple [LN99] ou [Car33]. Deuxièmement, on va étendre la métrique à courbure positive sur $N_{\mathcal{F}}$ en direction des feuilles en une métrique à courbure positive en toutes directions sur $N_{\mathcal{G}}$ au dessus de U. Finalement la technique de Brunella [Bru08] nous fournit la fonction d'exhaustion voulue.

Les théorèmes 2.2.3 et 3.1.1 et le fait qu'un domaine fortement pseudoconvexe est une modification d'un domaine Stein nous donnent :

Théorème 3.1.2. *Soit X une surface complexe compacte, M une hypersurface Levi-Plate analytique réelle compacte dans X. Si M ne possède pas de mesure transverse invariante, alors les composantes connexes de $X \setminus M$ sont des modifications de domaines Stein.*

Avant de procéder à la preuve du théorème 3.1.1, nous donnons dans la section suivante des exemples d'applications du théorème 3.1.2.

3.1.1 Exemples de complémentaires Stein modifiés

Dans les $\mathbb{CP}^1$-fibrés plats avec monodromie réelle Dans ce paragraphe nous considérons les exemples des fibrés plats au dessus d'une courbe Σ associés à la représentation réelle $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ que nous avons introduit dans l'exemple 2.1.3. Dans ce cas l'hypersurface $M := \Sigma \ltimes_\rho \mathbb{RP}^1$ de $X := \Sigma \ltimes_\rho \mathbb{CP}^1$ est Levi-plate, et sépare X en deux domaines $D^\pm := \Sigma \ltimes_\rho \mathbb{H}^\pm$, où $\mathbb{H}^\pm := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ désignent les demi-plans supérieur et inférieur. [1] Nous avons vu que M admet une mesure transverse invariante seulement dans le cas où ρ est élémentaire, voir 2.1.3. Nous en déduisons donc le

Corollaire 3.1.3. *Si ρ est non élémentaire, alors les domaines $D^\pm$ sont des modifications de domaines de Stein.*

1. Remarquez qu'on pourrait adapter nos arguments au cas des représentations à valeurs dans $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, ce qui permettrait de produire en particulier des exemples d'hypersurfaces Levi-plates non orientables, qui ne séparent pas X en deux composantes connexes $D^\pm$, mais en une unique composante D. Cependant nous ne nous placerons pas dans cette généralité pour simplifier l'exposition.

Ce résultat est démontré dans [DO07] dans le cas où ρ est une représentation fidèle discrète à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, c'est à dire correspond à l'uniformisation d'une courbe de même genre que celui de Σ. Dans un article antérieur [DO85], ils montrent sans condition sur ρ que les domaines $D^{\pm}$ sont toujours faiblement pseudoconvexes. Dans les deux cas, l'argument repose sur l'existence d'applications harmoniques équivariantes. Dans le cas où la monodromie est discrète fidèle, l'argument pour montrer la forte convexité repose sur le théorème de Schoen-Yau, selon lequel une application harmonique équivariante entre deux surfaces hyperboliques compactes est un difféomorphisme [SY78].

Il est intéressant de remarquer que les composantes $D^{\pm}$ ne sont pas toujours des surfaces de Stein, bien qu'elles soient minimales (elles ne contiennent aucune courbe rationnelle). En effet, il peut arriver que ces domaines contiennent des sections de la fibration naturelle $X \to \Sigma$.

Pour voir cela, prenons un nombre entier $0 \leq k < 2g-2$, où g est le genre de Σ, et donnons nous k points $p_1, \ldots, p_k$ de Σ que nous supposerons deux à deux distincts pour simplifier. Un théorème de Troyanov affirme alors qu'il existe une unique métrique hermitienne g sur $\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$, qui est de courbure -1, et qui admet des singularités coniques d'angle 4π en les p_i. Nous renvoyons à [Tro91] pour plus de détail.

Le fait que ces angles coniques soient des multiples de 2π montre qu'au niveau du revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ de Σ, la métrique g est la préimage de la métrique de Poincaré $\frac{|dz|^2}{(\operatorname{Im} z)^2}$ sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}^+$, par une application holomorphe $D : \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{H}^+$, i.e.

$$\pi^* g = D^* \frac{|dz|^2}{(\operatorname{Im} z)^2}$$

où $\pi : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ désigne l'application de revêtement. Comme la métrique $\pi^* g$ est invariante par le groupe fondamental de Σ, l'application D est équivariante par rapport à une certaine représentation

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{Isom}^+ \left(\mathbb{H}^+, \frac{|dz|}{(\operatorname{Im} z)^2} \right) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}),$$

appelée l'holonomie de la métrique conique.

L'application ρ-équivariante $D : \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{H}^+$ définit une section holomorphe $\Sigma \to D^+ = \Sigma \ltimes_\rho \mathbb{H}^+$. La représentation ρ est de classe d'Euler $k - 2g + 2$, et par conséquent elle est non élémentaire. Par suite, le domaine D^+ est un exemple d'une modification de domaine de Stein, qui est minimal, mais qui admet un ensemble exceptionnel contenant une courbe de genre $g \geq 2$ (en fait il est réduit à cette courbe, mais cela nous amènerait trop loin).

Dans les fibrations en tores Cet exemple, donné par Nemirovskiĭ [Nem99], est un Levi-plat avec complément Stein dans une surface complexe obtenue comme quotient d'un fibré en droites sur une courbe elliptique. Ce qui est intéressant est que ce Levi-plat contient des courbes algébriques, ce qui montre que notre théorème 3.1.2 n'est pas optimal.

Soit Σ une surface de Riemann compacte et $L \to \Sigma$ un fibré en droites holomorphe. On considère une section méromorphe $s : \Sigma \to L$ possédant des zéros et pôles simples. On note $Z = \{p_1, \ldots, p_j\}$ les zéros et $P = \{p_{j+1}, \ldots, p_{j+k}\}$ les pôles et on suppose qu'il existe au moins un zéro ou un pôle. Soit $\Sigma^* = \Sigma \setminus (Z \cup P)$. On note L^* le fibré L privé de la section nulle. Sur chaque fibre L^*_x de L^* au dessus de $x \in \Sigma^*$, on considère la droite réelle passant par $s(x)$ que l'on note l_x. L'ensemble $\mathbb{R}s = \{l_x\}_{x \in \Sigma^*}$ de toutes ces droites est un Levi-plat analytique qui a pour feuilles des courbes biholomorphes à Σ^*.

On considère l'ensemble $E := \overline{\mathbb{R}s}$. Il s'agit d'un Levi-plat analytique dans le fibré L^*. La seule difficulté est de voir que c'est un Levi-plat près des pôles et des zéros de la section s. Pour chaque point $p_l \in Z$ on peut trouver un voisinage U de p_l dans L^* et des coordonnées (z, w) sur U telles que $s(z) = (z, z)$. L'ensemble E est alors donné localement par la formule $\mathrm{Im}(\bar{z}w) = 0$ ce qui montre qu'il est un Levi-plat analytique près du point p_l dans L^*. Pour chaque point $p_l \in P$ on peut trouver un voisinage U de p_l dans L^* et des coordonnées (z, w) sur U telles que $s(z) = (z, \frac{1}{z})$. Dans ces coordonnées l'ensemble E est donné localement par la formule $\mathrm{Im}(\bar{z}w) = 0$. Donc il est un Levi-Plat analytique en dehors du pôle p_l.

On considère la relation d'équivalence sur L^* donnée par $p \sim 2p$. On note $X := L^*/\sim$. L'espace quotient est alors une fibration en tores au dessus de Σ. Le quotient de $\overline{\mathbb{R}s}$ par cette relation est une hypersurface Levi-plate qui sépare X en deux domaines Stein. En effet chaque composante du complément est une fibration triviale en anneaux sur Σ^*. L'anneau et la surface Σ^* sont des surfaces de Riemann ouvertes, elles sont donc Stein d'après un théorème de Behnke et Stein. Finalement, le produit de deux espaces Stein est Stein.

3.1.2 Extension locale du feuilletage CR

Dans cette section on utilise l'analyticité de l'hypersurface Levi-plate M pour étendre son feuilletage de Cauchy-Riemann à l'un de ses voisinages dans la surface complexe X. Le lemme suivant est classique, voir [LN99].

Lemme 3.1.4 (Forme locale des Levi plats). *Soit X une surface complexe. Soit M une hypersurface Levi-plate analytique réelle dans M. Pour tout $p \in M$ il existe un voisinage U_p de p homéomorphe à une boule, et une fonction holomorphe $H = u + iv$ définie sur U_p telle que $\mathrm{d}H(p) \neq 0$ et $M \cap U_p = \{v = 0\}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage de Cauchy-Riemann de M, qui est analytique réel. Soit $p \in M$ et (U, φ) une carte de X centrée en p ($\varphi(p) = 0$) telle que :

1. $\varphi = (z, w)$ où $z, w : U \to \mathbb{C}$.
2. La surface $\{z = 0\}$ est transversale aux feuilles de $\mathcal{F}$.

La deuxième condition implique que $M \cap \{z = 0\}$ est une courbe $\gamma(r) = (0, w(r))$ analytique réelle. Quitte à faire un changement de coordonnées holomorphe on peut supposer que $w(r) = r$, c'est-à-dire que $M \cap \{z = 0\}$ est l'axe réel dans le plan de w.

Soit $\mathcal{L}_r$ la feuille de $\mathcal{F}$ qui passe par $\gamma(r)$. Comme $\mathcal{L}_r$ est une courbe holomorphe, elle peut s'écrire localement comme le graphe d'une fonction $w = f(z, r)$, où f est analytique réelle, holomorphe par rapport à z et telle que $f(0, r) = r$.

On pose $w = t+is$ et $f = u+iv$, où $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. Alors l'hypersurface M peut être définie localement près de p en éliminant la variable r de l'équation $t = u(z, r)$, ce qui est possible grâce au théorème de la fonction implicite appliqué à la fonction $F(z, r, t) = t - u(z, r)$.

On pose $r = h(z, t)$ et on utilise cette expression dans $s = v(z, r)$ pour obtenir que dans un voisinage de p, M est donné par $s = v(z, h(z, t))$.

Soit $f(z, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) r^n$ le développement en série de Taylor en r de f près de $\varphi(p) = (0, 0)$. On étend f à un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{C}^2$ en posant $\tilde{f}(z, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) y^n, y \in \mathbb{C}$.

Soit $F(z, w, y) = w - \tilde{f}(z, y)$. Le théorème de la fonction implicite assure l'existence d'une fonction $H(z, w)$ définie en un voisinage de $(0, 0)$ telle que $\tilde{f}(z, H(z, w)) = w$. Donc en un voisinage de $(0, 0)$ on peut définir M par $\mathrm{Im}(H(z, w)) = 0$. □

On trouve la proposition suivante dans l'article [LN99].

Proposition 3.1.5. *Soit X une surface complexe, M une hypersurface Levi plate analytique réelle dans X et $\mathcal{F}$ le feuilletage de Cauchy-Riemann de M. Alors il existe un voisinage U de M dans X et un feuilletage holomorphe non singulier $\mathcal{G}$ sur U tel que $\mathcal{G}|_M = \mathcal{F}$.*

Démonstration. Le lemme 3.1.4 nous dit que pour tout $p \in M$ il existe une boule ouverte U_p de X contenant p et des coordonnées holomorphes $\varphi_p = (z_p, w_p) : U_p \to \mathbb{C}^2$ sur U_p, où $w_p = t + is$, telles que $M \cap U_p = \{s = 0\}$. Par compacité de M on peut trouver un atlas fini $(U_j, \varphi_j = (z_j, w_j))_{j \in J}$ d'un voisinage U de M tel que les U_j soient des ouverts U_p et tel que les coordonnées φ_j soient les coordonnées φ_p.

Soient $j, k \in J$ tels que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. On considère le changement de coordonnées

$$\varphi_{jk} = \varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_{jk}) \to \varphi_j(U_{jk})$$
$$\varphi_{jk}(z_k, w_k) = (\tilde{f}_{jk}(z_k, w_k), \tilde{g}_{jk}(z_k, w_k)) = (z_j, w_j).$$

On doit montrer alors que $\tilde{g}_{jk}$ ne dépend pas de la deuxième coordonnée.

L'application $\tilde{g}_{jk}$ est définie sur l'ouvert $\varphi_k(U_{jk})$ qui est connexe et contient un ensemble connexe B homéomorphe à une boule. Le développement en série de $\tilde{g}_{kj}$ sur B est $\tilde{g}_{jk}(z_k, w_k) = \sum_{u,v=0}^{\infty} c_{uv} z_k^u w_k^v$.

On a que si $(z_k, t_k) \in B, t_k \in \mathbb{R}$ fixé, alors $\tilde{g}_{jk}(z_k, t_k) = \sum_{u,v=0}^{\infty} c_{uv} z_k^u t_k^v \in \mathbb{R}$. En effet, l'hypersurface Levi plate M s'écrit $\{\mathrm{Im}(w_j) = 0\}$ dans les cartes $(U_j)_{j \in J}$ choisies. Cela implique que $c_{uv} = 0$ pour tout $u \geq 1$ et alors $\tilde{g}_{jk}(z_k, w_k) = \sum_{v=0}^{\infty} c_{0v} w_k^v$. Ainsi l'atlas $\{U_j, \varphi_j\}_{j \in J}$ définit un feuilletage holomorphe sur le voisinage $U = \cup_j U_j$ de M.

Donc le feuilletage $\mathcal{F}$ s'étend en un feuilletage holomorphe $\mathcal{G}$ non singulier sur un voisinage U de M. Ainsi, le fibré $N_{\mathcal{F}}$ s'étend de façon naturelle en le fibré $N_{\mathcal{G}}$. $\square$

3.1.3 Extension locale de la métrique à courbure positive

Ayant étendu le feuilletage de l'hypersurface Levi-plate à un voisinage de celle-ci dans la surface complexe X, on va maintenant étendre la métrique à courbure positive. On étend la métrique de sorte que non seulement la courbure en direction des feuilles soit positive, mais que la courbure en toute direction soit positive. La continuité de la courbure jouera un rôle important.

Proposition 3.1.6. *Soit X une surface complexe, M une hypersurface Levi plate analytique réelle dans X et $\mathcal{F}$ le feuilletage de Cauchy-Riemann de M. On suppose que le fibré $N_{\mathcal{F}}$ normal au feuilletage sur M possède une métrique à courbure strictement positive en direction des feuilles. Alors il existe un voisinage U' de M dans X sur lequel le feuilletage $\mathcal{F}$ s'étend en un feuilletage holomorphe non singulier $\mathcal{G}$ dont le fibré normal $N_{\mathcal{G}}$ possède une métrique à courbure strictement positive dans toutes les directions.*

Démonstration. On note $m_{\mathcal{F}}$ une métrique à courbure positive en direction des feuilles du fibré $N_{\mathcal{F}}$ normal au feuilletage sur M.

D'après la proposition 3.1.5 il existe un voisinage U de M dans X et un feuilletage holomorphe non singulier $\mathcal{G}$ défini sur U tel que $\mathcal{G}|_M = \mathcal{F}$.

On prend un recouvrement de U par des cartes $(U_j, (z_j, w_j))$ tels que $M \cap U_j = \{\mathrm{Im}(w_j) = 0\}$ comme dans le lemme 3.1.4. Dans ces cartes on note $m_j := m_{\mathcal{F}}|_{U_j}$, $m_j(z_j, t_j, \xi_j) = e^{-\sigma_j(z_j,t_j)} |\xi_j|^2$.

On étend m_j sur U_j en posant $\tilde{m}_j(z_j, w_j, \tilde{\xi}_j) := m_j(z_j, \mathrm{Re}(w_j)) \left|\tilde{\xi}_j\right|^2$. On considère une partition de l'unité $\{\phi_j\}_{j\in J}$ subordonnée au recouvrement $\{U_j\}_{j\in J}$ et on pose $\tilde{m} = \sum_j \phi_j \tilde{m}_j$. Par continuité, ceci étend la métrique $m_{\mathcal{F}}$ en une métrique $\tilde{m}$ sur le fibré $N_{\mathcal{G}}$ qui est à courbure positive en direction des feuilles. Pour obtenir une courbure positive en toutes directions, posons

$$m_{\mathcal{G}} := \tilde{m} \exp(-C d_M^2)$$

où d_M est la distance à M (relativement à une métrique fixée sur la surface X) et C est une constante. La courbure de $m_{\mathcal{G}}$ est alors égale à

$$\Theta_{m_{\mathcal{G}}} = \Theta_{\tilde{m}} + C\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_X d_M^2,$$

que nous noterons

$$\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_X \left[-\log(m_{\mathcal{G}})\right] = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_X \left[-\log(\tilde{m}\exp(-Cd_M^2))\right].$$

Nous allons montrer que cette $(1,1)$-forme est positive quand C est suffisamment grand. D'après le lemme 1.1.5 il suffit de vérifier l'inégalité

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{z}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right]\right|^2 \\ < \left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right]\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{w}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right]\right)$$

sur un voisinage de M. Par continuité de ces dérivées, il suffit en fait de la vérifier sur M. Soit $p\in U$ et soit U_j un ouvert du recouvrement de U contenant p. Sur U_j on peut écrire la distance d_M sous la forme

$$d_M^2(z_j(p),w_j(p)) = \mathrm{Im}(w_j(p))^2 h(z_j(p),w_j(p))$$

où h est une fonction lisse positive. Le laplacien en direction des feuilles vaut

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}[-\log(\tilde{m})] + C\,\mathrm{Im}(w_j)^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}h(z_j,w_j).$$

Au point $p\in M$ le premier terme est une $(1,1)$-forme strictement positive, il correspond en effet à la courbure de $\tilde{m}$ en direction des feuilles. Le terme suivant est nul au point $p\in M$ car $\mathrm{Im}(w_j)=0$. Ce laplacien en direction des feuilles est donc positif. Maintenant, le laplacien transverse est égal à

$$\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{w}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{w}}[-\log(\tilde{m})] \\ +\frac{C}{4}\left(2h(z_j,t_j)+(2w_j-2\bar{w}_j)\frac{\partial}{\partial w_j}h(z_j,w_j)-(2w_j-2\bar{w}_j)\frac{\partial}{\partial\bar{w}_j}h(z_j,w_j)\right. \\ \left. +4\,\mathrm{Im}(w_j)^2\frac{\partial^2}{\partial w_j\partial\bar{w}_j}h(z_j,w_j)\right)$$

Sur M, puisque $\mathrm{Im}(w_j)=0$, le laplacien transverse est donc égal à

$$\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{w}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{w}}[-\log(\tilde{m})] + \frac{C}{2}h(z_j,t_j)$$

qui est strictement positive et grand si C est suffisamment grand. On calcule finalement la dérivée mixte

$$\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{z}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{z}}[-\log(\tilde{m})] \\ +C\left(\frac{-1}{4}(2w_j-2\bar{w}_j)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}h(z_j,w_j)+\mathrm{Im}(w_j)^2\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{z}}h(z_j,w_j)\right).$$

En restriction à M cette dérivée mixte est égale à

$$\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{z}}\left[-\log(\tilde{m})+Cd_M(\cdot)^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{z}}[-\log(\tilde{m})].$$

On voit donc qu'en prenant une constante C suffisamment grande l'inégalité voulue est bien vérifiée sur M, ce que l'on voulait. $\square$

3.1.4 Construction d'une exhaustion strictement plurisousharmonique près de l'hypersurface Levi-plate

On a étendu le feuilletage de Cauchy-Riemann d'une hypersurface Levi-plate analytique M en conservant une courbure strictement positive pour le fibré normal. Lorsque X est l'espace projectif, le complémentaire d'une hypersurface Levi-plate est Stein (résolution du problème de Levi) et il est alors possible d'étendre le feuilletage à tout l'espace, voir l'article de Lins-Neto [LN99]. Dans notre contexte, nous ne savons pas si le complémentaire de M est Stein, l'exemple de Grauert nous montre que ce n'est pas toujours le cas. Nous avons donc besoin d'un certain degré de pseudoconvexité (au moins près du Levi-plat) pour pouvoir étendre le feuilletage à la surface X. Cette pseudoconvexité va résulter de la positivité du fibré normal. Nous allons reprendre une construction due à Brunella.

Théorème 3.1.7. *[Bru08] Soit X une surface complexe et soit M une hypersurface Levi-plate analytique dans X. On suppose que le fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ possède une métrique dont la courbure est strictement positive. Alors il existe un voisinage U de M dans X et une fonction $h : U \to \mathbb{R}$ strictement plurisousharmonique telle que*

1. *$h(p) \to +\infty$ quand $p \to M$.*
2. *h est une fonction d'exhaustion de $U \setminus M$.*

Notons que dans [Bru08] Brunella montre ce résultat en régularité plus faible (M est de classe $C^{2,\alpha}$) en supposant que le feuilletage de Cauchy-Riemann sur le Levi-plat s'étend à un voisinage de M. La preuve que l'on expose reprend les arguments de [Bru08] et [Bru10]. L'idée est de construire des fonctions d'exhaustion strictement plurisousharmoniques locales pour le complémentaire de M, la difficulté consiste ensuite à les recoller.

Démonstration du théorème 3.1.7. Utilisons la proposition 3.1.5 : soit $\mathcal{G}$ un feuilletage non singulier sur U tel que $\mathcal{G}$ étend le feuilletage de Cauchy-Riemann sur M. Le fibré $N_{\mathcal{G}}$ possède une métrique dont la courbure est strictement positive. Soit $\{U_j\}_{j=1,\dots,l}$ un recouvrement fini de U par des boites de flot. En chaque U_j le feuilletage $\mathcal{G}$ est défini par une submersion holomorphe $g_j : U_j \to V_j \subset \mathbb{C}$. La forme différentielle $\mathrm{d}g_j \in \Omega^1(U_j)$ est alors une section du fibré $N^*_{\mathcal{G}}$ sur U_j ne s'annulant pas. On note $\|\mathrm{d}g_j\|$ la norme de $\mathrm{d}g_j$, qui est calculée en utilisant la norme induite sur $N^*_{\mathcal{F}}$ par la métrique de courbure positive sur $N_{\mathcal{F}}$. Alors

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_X(\log \|\mathrm{d}g_j\|) \tag{3.1}$$

est la courbure de la métrique sur $N_{\mathcal{G}}$, c'est une forme positive. Dans la suite on va oublier le 2π pour simplifier les notations. Quitte à diminuer U_j on peut supposer qu'il existe des constantes α_j, β_j telles que

$$\alpha_j \leq \|\mathrm{d}g_j\| \leq \beta_j. \tag{3.2}$$

Soit $M_j := M \cap U_j$ et $K_j := g_j(M_j) \subset V_j$. On note $\delta_j : V_j \to \mathbb{R}$ la distance euclidienne à K_j, autrement dit

$$\delta_j(z) = \inf_{w \in K_j} |z - w|, \quad \forall z \in V_j.$$

Remarquons que $-\log \delta_j$ est une fonction continue et sousharmonique sur $V_j \setminus K_j$ (supremum de fonctions harmoniques) et que $-\log \delta_j(z) \to +\infty$ quand $z \to K_j$. Pour tout j on définit la fonction $h_j : U_j \setminus M_j \to \mathbb{R}$ par

$$h_j(p) = \log \frac{\|\mathrm{d}g_j(p)\|}{\delta_j(g_j(p))}.$$

Cette fonction est continue et $h_j(p) \to +\infty$ quand $p \to M_j$ d'après (3.2). De plus (on rappelle que ω est définie par (3.1)) :

$$i\partial\bar{\partial}_X h_j = i\partial\bar{\partial}_X(\log \|\mathrm{d}g_j(p)\|) + i\partial\bar{\partial}_X(-\log \delta_j(g_j(p))) \geq \omega \tag{3.3}$$

car le second terme $i\partial\bar{\partial}(-\log \delta_j(g_j(p)))$ est positif au sens des courants. On veut recoller les fonctions h_j, pour cela nous allons estimer la différence $h_j - h_k$ sur $U_j \cap U_k$.

Lemme 3.1.8. *$h_j(p) - h_k(p) \to 0$ quand $p \to M_j \cap M_k$.*

Démonstration. Par définition

$$h_j(p) - h_k(p) = \log \left[\frac{\|\mathrm{d}g_j(p)\|}{\|\mathrm{d}g_k(p)\|} \frac{\delta_k(g_k(p))}{\delta_j(g_j(p))} \right] \tag{3.4}$$

Sur $U_j \cap U_k$ on a $g_j = H_{jk} \circ g_k$, où H_{jk} est une fonction holomorphe, et

$$\|\mathrm{d}g_j(p)\| = \left|H'_{jk}(g_k(p))\right| \|\mathrm{d}g_k(p)\|. \tag{3.5}$$

Puisque les quotients $\frac{\|\mathrm{d}g_j\|}{\|\mathrm{d}g_k\|}$ et $\frac{\delta_k \circ g_k}{\delta_j \circ g_j}$ sont constants le long des feuilles, la différence $h_j - h_k$ est aussi constante le long des feuilles. Prenons maintenant la carte U_k comme référence. Soit $V := g_k(U_j \cap U_k)$ et $K := g_k(M \cap U_j \cap U_k)$. On note $H := H_{jk}$. Par définition, sur un voisinage de $M \cap U_j \cap U_k$ on a

$$\delta_k(g_k(p)) = \inf_{w \in K} |(g_k(p)) - w| \tag{3.6}$$

Alors, pour tout $p \in U_j \cap U_k$, on a

$$\delta_j(g_j(p)) = \inf_{w' \in K_j} |g_j(p) - w'| = \inf_{w' \in K_j} |H(g_k(p)) - w'|.$$

Sur un voisinage de $M \cap U_j \cap U_k$ cette expression peut se réécrire comme

$$\delta_j(g_j(p)) = \inf_{w \in K} |H(g_k(p)) - H(w)|. \tag{3.7}$$

D'après (3.5), (3.6) et (3.7), l'équation (3.4) devient finalement

$$h_j(p) - h_k(p) = \log \left[|H'(g_k(p))| \frac{\inf_{w \in K} |g_k(p) - w|}{\inf_{w \in K} |H(g_k(p)) - H(w)|} \right].$$

La conclusion vient alors du lemme suivant. $\square$

Lemme 3.1.9. *La fonction $\lambda : V \setminus K \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\lambda(z) = |H'(z)| \frac{\inf_{w\in K} |z-w|}{\inf_{w\in K} |H(z)-H(w)|}$$

tend vers 1 quand z tend vers K.

Démonstration. On écrit $H(z) - H(w) = \psi(z,w)(z-w)$ où ψ est une fonction holomorphe sur $V \times V$ et $\psi(z,z) = H'(z)$. On prend une suite $\{z_n\}$ qui tend vers un élément z_∞ dans K. Soit $w_n \in K$ le point qui réalise la distance $\inf_{w\in K} |z_n - w|$. Alors

$$\lambda(z_n) = \frac{|H'(z_n)|\,|z_n - w_n|}{\inf_{w\in K} |H(z_n) - H(w)|} \geq \frac{|H'(z_n)|\,|z_n - w_n|}{|H(z_n) - H(w_n)|} = \frac{|H'(z_n)|}{|\psi(z_n, w_n)|}$$

Cette dernière quantité tend vers 1 car w_n tends vers z_∞. On obtient que $\liminf_{n\to+\infty} \lambda(z_n) \geq 1$. De même façon on obtient $\limsup_{n\to+\infty} \lambda(z_n) \leq 1$. Donc $\lambda(z_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$. $\square$

La deuxième partie de la preuve consiste à recoller les fonctions h_j pour $j = 1, \dots, l$. Ici il y a au moins deux méthodes de recollement qui marchent, celle de [Bru08] et celle de [Bru10]. On va suivre la méthode de [Bru08]. On prend une partition de l'unité $\{\phi_j\}_{j=1,\dots,l}$ subordonnée au recouvrement $\{U_j\}_{j=1,\dots,l}$ et on définit

$$h = \sum_{j=1}^{l} \phi_j h_j : U \to \mathbb{R}.$$

On calcule la forme de Levi de h. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
\bar\partial_X h &= \sum_{j=1}^{l} h_j \bar\partial_X \phi_j + \sum_{j=1}^{l} \phi_j \bar\partial_X h_j \\
&= \sum_{j=1}^{l-1} (h_j - h_l) \bar\partial_X \phi_j + h_l \bar\partial_X \left(\sum_{j=1}^{l} \phi_j \right) + \sum_{j=1}^{l} \phi_j \bar\partial_X h_j \\
&= \sum_{j=1}^{l-1} (h_j - h_l) \bar\partial_X \phi_j + \sum_{j=1}^{l} \phi_j \bar\partial_X h_j,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que $\sum \phi_j = 1$. On en déduit

$$\begin{aligned}
i\partial\bar\partial_X h &= i\partial_X \left(\sum_{j=1}^{l-1} (h_j - h_l) \bar\partial_X \phi_j + \sum_{j=1}^{l} \phi_j \bar\partial_X h_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{l-1} (h_j - h_l) i\partial\bar\partial_X \phi_j + \sum_{j=1}^{l-1} i\partial_X (h_j - h_l) \wedge \bar\partial_X \phi_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} \phi_j i\partial\bar\partial_X h_j + \sum_{j=1}^{l} i\partial_X \phi_j \wedge \bar\partial_X h_j.
\end{aligned}$$

Mais comme précédemment, le dernier terme est égal à :

$$\sum_{j=1}^{l} i\partial_X\phi_j \wedge \bar{\partial}_X h_j = \sum_{j=1}^{l-1} i\partial_X\phi_j \wedge \bar{\partial}_X(h_j - h_l) + i\partial_X\left(\sum_{j=1}^{l}\phi_j\right) \wedge \bar{\partial}_X h_l.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} i\partial\bar{\partial}_X h = &\sum_{j=1}^{l-1}(h_j - h_l) i\partial\bar{\partial}_X\phi_j + \sum_{j=1}^{l-1} i\partial_X(h_j - h_l) \wedge \bar{\partial}_X\phi_j \\ &+ \sum_{j=1}^{l}\phi_j i\partial\bar{\partial}_X h_j + \sum_{j=1}^{l-1} i\partial_X\phi_j \wedge \bar{\partial}_X(h_j - h_l). \end{aligned}$$

Le troisième terme est $\geq \omega$ car pour tout j, $i\partial\bar{\partial}_X h_j \geq \omega$ d'après (3.3). Le premier terme tend vers 0 uniformément si $p \to M$ d'après le lemme 3.1.8. Le deuxième et le quatrième termes sont conjugués. Ils tendent vers 0 quand $p \to M$ au sens des courants car pour toute fonction test g on a

$$\langle i\partial\bar{\partial}_X(h_j - h_l), g\rangle = \langle h_j - h_l, i\partial\bar{\partial}_X g\rangle$$

et la dernière expression tend vers 0 d'après le lemme 3.1.8.

Donc sur un voisinage suffisamment petit de M, on a $i\partial\bar{\partial}_X h \geq \frac{1}{2}\omega > 0$, c'est-à-dire que h est strictement plurisousharmonique. Le fait que $h_j(p) - h_k(p) \to 0$ quand $p \to M_j \cap M_k$ implique que $h(p) \to +\infty$ quand $p \to M$.

Donc h est une fonction d'exhaustion de $U\backslash M$. On peut maintenant approximer h par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement plurisousharmonique qui est encore d'exhaustion [Ric68].

On trouve alors une fonction d'exhaustion de $X\backslash M$ strictement plurisousharmonique en dehors d'un ensemble compact. □

Conclusion de la section 3.1.4 On a montré le théorème 3.1.1 : les composantes connexes du complément d'une hypersurface Levi-plate, telle que son fibré normal au feuilletage CR possède une métrique à courbure positive, sont des modifications de domaines Stein. D'après [CM85] une telle composante connexe possède une fonction d'exhaustion continue $\rho : V \to [-\infty, \infty)$ qui vaut $-\infty$ sur l'ensemble exceptionnel A, et qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement plurisousharmonique à l'extérieur de A. De plus, on pourra supposer quitte à perturber ρ dans $V \setminus A$ dans la topologie C^2, que $\rho_{|V\setminus A}$ est une fonction de Morse, c'est à dire que ses points critiques ne sont pas dégénérés et que les niveaux $\rho^{-1}(t)$ ne contiennent pas plus qu'un point critique, pour $t \in \mathbb{R}$. Cette fonction nous aidera à étendre le feuilletage, défini dans un voisinage de l'hypersurface Levi-plate, à toute la surface complexe.

3.2 Extension globale du feuilletage CR

Nous pouvons maintenant étendre à toute la surface complexe X le feuilletage de Cauchy-Riemann de notre hypersurface Levi-plate M.

Théorème 3.2.1. *Soit X une surface complexe algébrique et soit $V \Subset X$ un domaine fortement pseudoconvexe. Soit $K \subset V$ un compact qui contient l'ensemble exceptionnel A de V, et tel que $U = V \setminus K$ soit connexe. Alors tout feuilletage holomorphe $\mathcal{G}$ sur U se prolonge en un feuilletage holomorphe sur V.*

On commencera par étendre le feuilletage à V privé de son ensemble exceptionnel A (sections 3.2.1 et 3.2.2). Pour ce faire on utilisera les boîtes de Hartogs et le théorème d'extension des fonctions méromorphes de Levi. On étend ensuite le feuilletage sur A (section 3.2.3). Cela reviendra, via la réduction de Remmert, à étendre une fonction méromorphe (celle représentant la pente des feuilles) sur un espace singulier.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$K_t := \{\rho \leq t\} \quad , \quad V_t := V \setminus K_t,$$

et

$$E = \{\, t \in \mathbb{R}\,,\ \text{il existe un feuilletage } \mathcal{G}_t \text{ sur } V_t \text{ tel que } \mathcal{G}_t|_{U\cap V_t} = \mathcal{G}\,\}.$$

Observons que si $t \in E$, alors l'extension $\mathcal{G}_t$ de $\mathcal{G}_{|U\cap V_t}$ à V_t est unique. Cela est dû au fait que la fonction d'exhaustion ρ n'a pas de maximum local (car elle est plurisousharmonique) et que par conséquent chaque composante connexe de V_t intersecte U. En particulier, pour tout $t, t' \in E$, avec $t < t'$, on a $(\mathcal{G}_t)_{|V_{t'}} = \mathcal{G}_{t'}$. Par conséquent, si t_* désigne l'infimum de E, il existe un feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{G}_*$ sur V_{t_*} qui étend tous les $\mathcal{G}_t$ pour $t \in E$. Ce qu'il nous faut montrer, c'est que $t_* = -\infty$.

3.2.1 Passage des niveaux non critiques

Dans ce paragraphe nous montrons que t_* ne peut être une valeur non critique de ρ. Cela découle immédiatement du résultat classique suivant

Lemme 3.2.2. *Si t est une valeur non critique de ρ, et si $\mathcal{G}_t$ est un feuilletage holomorphe singulier défini sur V_t, alors il existe $\epsilon > 0$ et un feuilletage $\mathcal{G}_{t-\epsilon}$ défini sur $V_{t-\epsilon}$ qui étend $\mathcal{G}_t$.*

Pour cela, nous allons appliquer les théorèmes d'extensions de Hartogs et de Levi vus à la section 1.1.2, qui prolongent les fonctions holomorphes et les fonctions méromorphes définies sur une boîte de Hartogs à son enveloppe convexe.

Nous aurons besoin du résultat suivant, qui donne la forme normale des fonctions strictement plurisousharmoniques au voisinage d'un point non critique, voir le livre de Henkin-Leiterer [HL84, Théorème 1.4.14].

Théorème 3.2.3. *Soit ρ une fonction strictement plurisousharmonique de classe C^2 définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$. Si $\mathrm{d}\rho(0) \neq 0$ alors il existe un biholomorphisme $h : U \to V$ défini sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^2$ vers un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^2$ telle que la fonction $\rho \circ h^{-1}$ est strictement convexe (au sens réel) sur V.*

Démonstration. Puisque $\mathrm{d}\rho(0) \neq 0$ on peut supposer que $\frac{\partial \rho}{\partial z_1}(0) \neq 0$. Pour $z = (z_1, z_2)$ près de 0, on définit la fonction

$$h(z) := (F_\rho(z), z_2),$$

où F_ρ est défini par la formule

$$F_\rho(z_1, z_2) = 2\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \rho(0)}{\partial z_j} z_j + \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \partial z_k} z_j z_k.$$

C'est à dire que l'on conserve la variable z_2 et on change la variable z_1 par le polynôme de Levi $F_\rho(z)$. La fonction h est un biholomorphisme d'un voisinage U de 0 sur un voisinage V de $0 = h(0)$, car $\frac{\partial}{\partial z_1} F_\rho(0) \neq 0$.

On considère maintenant la fonction réciproque de h, que l'on désigne par $g : V \to U, g = (g_1, g_2)$. On fait le développement limité à l'ordre 2 près de $0 = g(0)$ de la fonction ρ

$$\rho(g(z)) = \rho(0) + \operatorname{Re} F_\rho(g(z)) + L_\rho(0)(g_1(z), g_2(z)) + o(\|g(z)\|^2).$$

D'après les définitions de F_ρ et g on a que $F_\rho(g(z)) = z_1$. Pour exprimer le polynôme de Levi, on fait le développement limité à l'ordre 1 de g près de 0

$$g(z) = D_g(z) + O(\|z\|^2) = (D_1(z), D_2(z)) + O(\|z\|^2).$$

Alors

$$\rho \circ g(z) = \rho(0) + \operatorname{Re}(z_1) + L_\rho(0)(D_1(z), D_2(z)) + o(\|z\|^2).$$

Isolons maintenant la partie de degré 2 dans chacun des membres de cette équation. Puisque le développement en série de Taylor est unique on a pour tout $z = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ près de 0

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 (\rho \circ g)(0)}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k + 2\frac{\partial^2 (\rho \circ g)(0)}{\partial x_j \partial y_k} x_j y_k + \frac{\partial^2 (\rho \circ g)(0)}{\partial y_j \partial y_k} y_j y_k \right]$$
$$= \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 (\rho \circ g)(0)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} D_j(z) \overline{D_k(z)}.$$

Le terme de droite de la dernière égalité est la forme de Levi de ρ appliquée à (D_1, D_2). De plus, la fonction g est un biholomorphisme alors $D(z) \neq 0$ si $z \neq 0$. Puisque ρ est strictement plurisousharmonique on trouve

$$\sum_{j,k=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 (\rho \circ g)(0)}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k + 2\frac{\partial^2 (\rho \circ g)(0)}{\partial x_j \partial y_k} x_j y_k + \frac{\partial^2 (\rho \circ g)(0)}{\partial y_j \partial y_k} y_j y_k \right] > 0$$

si $z \neq 0$, ce qui veut dire que la fonction $\rho \circ g$ est strictement convexe. □

Ce théorème permet de placer des boîtes de Hartogs près des niveaux d'une fonction strictement plurisousharmonique :

Proposition 3.2.4. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \rho^{-1}(t)$ non critique, il existe un plongement $\iota : \hat{H} \to V$, tel que*

1. $\iota(H) \subset V_t$,
2. $\iota(\hat{H})$ *contient un voisinage de* p,
3. $\iota(\hat{H}) \cap V_t$ *est connexe.*

Démonstration. On choisit des coordonnées z_1, z_2 centrées en p telles que la fonction ρ est une fonction strictement convexe (au sens réel). Quitte à appliquer un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer que le noyau de $d\rho(0,0)$ contient $\mathbb{C} \times 0$.

Considérons la boîte de Hartogs H définie par l'équation (1.1) avec R_1, R_2 très petit et R_2 beaucoup plus petit que r_1. Par stricte convexité de ρ, la boîte de Hartogs $H' = H + (0, \frac{r_2+R_2}{2})$ est complètement contenue dans V_t, mais son enveloppe convexe $\hat{H}' = \hat{H} + (0, \frac{r_2+R_2}{2})$ contient l'origine.

Pour démontrer que l'intersection $\hat{H}' \cap V_t$ est connexe, on observe que les tranches $(z_1 \times \mathbb{C}) \cap (\hat{H}' \cap V_t)$ sont dans la coordonnée z_2, des disques $|z_2| < R_2$ auxquels on a retiré un ensemble convexe de $\mathbb{C}$ n'intersectant pas le disque $|z_2| < \frac{r_2+R_2}{2}$ (car le sous-niveau $\rho \leq t$ est convexe). Un tel ensemble est connexe et contient toujours l'anneau $r_2 < |z_2| < \frac{r_2+R_2}{2}$; on en déduit que l'union fibrée de ces ensembles (i.e. $\hat{H}+(0, \frac{r_2+R_2}{2}) \cap V_t)$ est également connexe. □

Démonstration du Lemme 3.2.2. Nous commençons par démontrer le résultat suivant

Lemme 3.2.5. *Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout point régulier $p \in \rho^{-1}(t)$, il existe un voisinage W_p de p dans V tel que $\mathcal{G}_t$ s'étend à $V_t \cup W_p$.*

Démonstration. Soit (U_p, ϕ_p) une carte de X centrée en p. La fonction $\tilde{\rho} := \rho \circ \phi_p^{-1}$ est strictement plurisousharmonique sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$. On considère la fonction ι de la proposition 3.2.4 qui place une boîte de Hartogs H dans $\phi_p(V_t \cap U_p)$. Soit $\mathcal{G}'$ la restriction de $\phi_{p_*}(\mathcal{G}_t)$ à $H \subset \mathbb{C}^2$. On va prouver qu'il existe une 1-forme différentielle ω avec zéros isolés sur $\hat{H}$ qui définit $\mathcal{G}'$ sur H.

Soit $\{U_j\}_{j \in J}$ un recouvrement de H par des boîtes de flot et $\{\omega_j\}_{j \in J}$ des 1-formes définies sur les ouverts U_j qui donnent le feuilletage $\mathcal{F}'$ comme dans la proposition 1.2.10. En prenant (z, w) comme coordonnées dans la carte ϕ_p, on peut écrire

$$\omega_j = g_j^1 \mathrm{d}z + g_j^2 \mathrm{d}w,$$

où $g_j^1, g_j^2 \in \mathcal{O}(U_j)$. D'après la proposition 1.2.10 il existe des fonctions holomorphes h_{jk} définies sur $U_j \cap U_k$ et ne s'annulant pas telles que

$$\omega_j = h_{jk} \omega_k.$$

Les deux dernières expressions impliquent que si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors

$$g_j^1 = h_{jk} g_k^1 \quad , \quad g_j^2 = h_{jk} g_k^2. \tag{3.8}$$

Si jamais g_j^l est identiquement nulle pour un $j \in J$, la dernière équation et le fait que H est connexe nous disent que g_j^l est nulle pour tout $j \in J$. Puisque les formes ω_j ne sont pas identiquement nulles, la fonction g_j^l n'est pas identiquement nulle pour au moins un $l \in \{1,2\}$ et tout $j \in J$. Supposons que c'est g_j^1, alors $\frac{g_j^2}{g_j^1}$ définit une fonction méromorphe f_j sur U_j. L'équation (3.8) implique que si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors $f_j = f_k$ sur $U_j \cap U_k$. Donc il existe une fonction méromorphe f définie sur H telle que $f|_{U_j} = f_j$. D'après le théorème d'extension de Levi 1.1.9 cette fonction f s'étend en une fonction méromorphe sur $\hat{H}$, que l'on appelle $\hat{f}$. On définit une 1-forme méromorphe sur $\hat{H}$ en posant

$$\eta := \mathrm{d}z + \hat{f}\mathrm{d}w.$$

Comme $\hat{H}$ est un polydisque, il existe une fonction $h \in \mathcal{O}(\hat{H})$ et une 1-forme différentielle holomorphe ω définie sur $\hat{H}$ avec zéros isolés telle que $h\eta = \omega$. On voit que pour tout $j \in J$ il existe $g_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$ telle que $\omega|_{U_j} = g_j \omega_j$. Donc le feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}$ défini par ω sur $\hat{H}$ étend $\mathcal{G}'$. Cette extension coïncide avec $\phi_{p_*}(\mathcal{G}_t)$ sur l'ensemble $\{\tilde{\rho} > 0\} \cap \hat{H}$ car, par construction de notre boîte de Hartogs, la dernière intersection est connexe.

Cette extension est unique car pour toute autre 1-forme différentielle ω' sur $\hat{H}$ dont le feuilletage étend $\phi_{p_*}(\mathcal{G}_t)$, il existe une fonction holomorphe a sur $\phi_p(V_t \cap U_p)$ ne s'annulant pas telle que $\omega = a\omega'$. L'ouvert $\hat{H}$ étant connexe, la forme $\omega \wedge \omega'$ est nulle sur $\hat{H}$. Ainsi il existe une fonction holomorphe $\tilde{a}$ sur $\hat{H}$ ne s'annulant pas telle que $\omega = \tilde{a}\omega'$. Pour finir on rapatrie le feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}$ sur V par la carte ϕ_p. L'ouvert W_p est alors $\phi_p^{-1}(\hat{H})$. □

D'après le lemme 3.2.5, pour tout $p \in \rho^{-1}(t)$, on a un ouvert W_p de V contenant p tel que $\mathcal{G}$ s'étend à W_p. Son intersection avec $\rho^{-1}(t)$ définit un ouvert V_p' de $\rho^{-1}(t)$ contenant p. La famille des V_p', pour p parcourant $\rho^{-1}(t)$, est alors un recouvrement de $\rho^{-1}(t)$. Puisque cette hypersurface est compacte, on peut choisir un sous-recouvrement fini $\{V_j'\}_{j=1,\dots,n}$, où $V_j' = V_{p_j}'$.

Pour $p \in \rho^{-1}(t)$, on définit $J_p \subset \{1,\dots,n\}$ l'ensemble des indices j tels que $p \in W_{p_j}$. L'intersection $W_{0,p} := \bigcap_{j \in J_p} W_j$ est un voisinage ouvert de p. En notant $r_p := dist(p, \partial W_{0,p})$, on définit

$$W_p' := B_p(r_p/3) \quad , \quad W' := \bigcup_{p \in \rho^{-1}(t)} W_p'.$$

On note $W_j := W_{p_j}$ et on note $\mathcal{G}_j$ l'extension de $\mathcal{G}$ à W_j donnée par le lemme 3.2.5. Soit ω_j une 1-forme holomorphe sur W_j qui définit le feuilletage $\mathcal{G}_j$.

Lemme 3.2.6. *Pour tout $p \in \rho^{-1}(t)$ et pour tout $j \in J_p$, les feuilletages $\mathcal{G}_j|_{W_p'}$ coïncident. Plus précisément, il existe une fonction holomorphe h non nulle sur $W_p' \subset W_j \cap W_k$ telle que $\omega_j = h_{jk}\omega_k$ sur W_p'.*

Démonstration. Les feuilletages $\mathcal{G}_j|_{W'_p}$ et $\mathcal{G}_k|_{W'_p}$ coïncident sur $W'_p \cap V_t$ par construction. Donc $\omega_j \wedge \omega_k = 0$ en restriction à $W'_p \cap V_t$. Puisque W'_p est connexe, le produit de ces deux formes est encore nul sur W'_p. Ainsi il existe bien une fonction holomorphe h non nulle sur $W'_p \subset W_j \cap W_k$ telle que $\omega_j = h_{jk}\omega_k$ sur W'_p. □

Lemme 3.2.7. *Le feuilletage $\mathcal{G}_t$ s'étend de façon unique à W'.*

Démonstration. On montre d'abord l'unicité. Soient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux extensions de $\mathcal{G}_t$ à W'. Puisque les W'_p recouvrent W' par définition, il suffit de démontrer que $\mathcal{G}_1|_{W'_p} = \mathcal{G}_2|_{W'_p}$ pour tout $p \in \rho^{-1}(t)$. Les arguments utilisés pour la preuve du lemme 3.2.6 donnent le résultat.

Montrons maintenant l'existence. On recouvre W' par les ouverts

$$W'_j := \bigcup_{q \in W_j \cap \rho^{-1}(t)} W'_q \subset W_j.$$

Puisque $\mathcal{G}_t$ s'étend à W_j alors $\mathcal{G}_t$ s'étend à W'_j. Il suffit alors de démontrer que, pour $j \neq k \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\omega_j = h_{jk}\omega_k$ sur $W'_j \cap W'_k$ avec h_{jk} une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Pour ce faire, vérifions que

$$W'_j \cap W'_k = \bigcup_{q \in W_j \cap W_k \cap \rho^{-1}(t)} W'_q.$$

L'inclusion $\supset$ vient de la définition de W'_j. Dans l'autre sens, si $x \in W'_j \cap W'_k$, alors il existe $q_j, q_k \in \rho^{-1}(t)$ tels que $q_j \in W_j$, $q_k \in W_k$ et $x \in W'_{q_j} \cap W'_{q_k}$. Il suffit pour conclure que q_j ou q_k soit dans $W_j \cap W_k$. Si ce n'était pas le cas, alors $d(q_j, q_k) \geq d(q_j, \partial W_j) \geq r_{q_j}$ et de même $d(q_j, q_k) \geq d(q_k, \partial W_k) \geq r_{q_k}$. Puisque par définition $W'_p = B_p(r_p/3)$, on obtiendrait que W'_{q_j} et W'_{q_k} sont disjoints, contradiction.

Soit $q_0 \in W'_j \cap W'_k$. Il existe alors $q_1 \in W_j \cap W_k \cap \rho^{-1}(t)$ tel que $q_0 \in W'_{q_1} \subset W_j \cap W_k$. D'après le lemme 3.2.6 il existe une fonction holomorphe h^1_{jk} ne s'annulant pas sur W'_{q_1} telle que $\omega_j = h^1_{jk}\omega_k$ sur W'_{q_1}. Or, si $q_2 \in W_j \cap W_k \cap \rho^{-1}(t)$ et vérifie $q_0 \in W'_{q_2}$, on a de même $\omega_j = h^2_{jk}\omega_k$ sur W'_{q_2}. On en déduit

$$h^1_{jk}(q_0) = h^2_{jk}(q_0).$$

Pour tout $q_0 \in W'_j \cap W'_k$ on peut donc poser $h_{jk}(q_0) := h^1_{jk}(q_0)$, cela ne dépend pas du choix de q_1. La fonction h_{jk} est holomorphe et non nulle puisqu'elle vérifie ces propriétés partout localement. Puisque $\omega_j = h_{jk}\omega_k$ sur $W'_j \cap W'_k$, cela conclut la preuve. □

Lemme 3.2.8. *W' est un voisinage ouvert de $\rho^{-1}(t)$ dans X. En particulier, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\rho^{-1}(]t - \epsilon, t + \epsilon[) \subset W'$.*

Démonstration. Pour tout $q \in \rho^{-1}(t)$ on définit

$$d_{\partial W'}(q) := \inf_{q' \in \partial W'} |\rho(q) - \rho(q')|,$$

c'est la distance entre q et le bord de W' mesurée par la fonction ρ. Cette fonction est continue et définie sur le compact $\rho^{-1}(t)$, par conséquent elle atteint son minimum en un point $q_0 \in \rho^{-1}(t)$. Ce minimum n'est pas nul car l'ensemble des points critiques de ρ est discret dans V. Finalement W' contient $\rho^{-1}(]t-\epsilon, t+\epsilon[)$ où $\epsilon = d_{\partial W'}(q_0)$. $\square$

Les lemmes 3.2.7 et 3.2.8 impliquent le lemme 3.2.2 que l'on voulait établir. $\square$

3.2.2 Passage des niveaux critiques

Dans ce paragraphe nous montrons que t_* ne peut être une valeur critique de la restriction de ρ à $V \setminus A$. Ceci découle essentiellement du fait que les indices de la fonction ρ en ses points critiques ne peuvent prendre pour valeur que les nombres $0, 1$ ou 2. Rappelons que l'indice d'un point critique est la dimension maximale d'un sous-espace de l'espace tangent à ce point en lequel le Hessien de la fonction est strictement négatif. Pour une fonction strictement plurisousharmonique sur une surface complexe un tel espace ne peut avoir une dimension ≥ 3 car sinon il contiendrait une droite complexe sur laquelle la forme de Levi de la fonction serait strictement négative.

Formellement, le passage des valeurs critiques sera possible grâce au résultat de perturbation suivant

Lemme 3.2.9. *Soient p_* un point critique de la fonction d'exhaustion $\rho_{|V\setminus A}$ et I_* un voisinage de $t_* = \rho(t_*)$ tel que $\rho^{-1}(I_*)$ ne contient que p_* comme point critique. Alors il existe fonction continue $\rho' : V \to [-\infty, +\infty)$ telle que*

1. *ρ' coïncide avec ρ sur $V \setminus \rho^{-1}(I_*)$*
2. *ρ' est lisse et strictement plurisousharmonique sur $V \setminus A$*
3. *ρ' admet un unique point critique p'_* dans $\rho^{-1}(I_*)$ et $\rho'(p_*) > \rho'(p'_*)$.*
4. *Les surniveaux critiques $\rho^{-1}(]t_*, +\infty))$ et $\rho'^{-1}(]t'_*, +\infty))$ s'intersectent de façon connexe, où $t'_* = \rho(p'_*)$.*

Avant de démontrer ce lemme, expliquons pourquoi il mène à une contradiction si t_* est supposé $> -\infty$ et une valeur critique de ρ. En effet, en appliquant les techniques du paragraphe 3.2.1 à la fonction ρ', on serait en mesure d'étendre le feuilletage $\mathcal{G}$ en un feuilletage holomorphe singulier $(\mathcal{G})'_{t'_*}$ défini sur le surniveau critique $\rho' > t'_*$ (en effet, si l'on désigne par t_*^+ l'extrémité de I_* supérieure à t_*, le feuilletage $\mathcal{G}_{t_*}$ est défini sur $(\rho')^{-1}(t_*^+)$ et par conséquent on pourra l'étendre jusqu'au prochain niveau critique de ρ', c'est à dire le niveau $(\rho')^{-1}(t'_*)$).

Comme l'intersection des niveaux $\rho^{-1}(]t_*, +\infty))$ et $\rho'^{-1}(]t'_*, +\infty))$ est connexe, les feuilletages $\mathcal{G}_{t_*}$ et $(\mathcal{G})'_{t'_*}$ coïncident sur l'intersection de leur domaine de définition. On peut donc étendre le feuilletage $\mathcal{G}$ en un feuilletage défini sur $\rho^{-1}(]t_*, +\infty)) \cup \rho'^{-1}(]t'_*, +\infty))$ qui contient un voisinage de p_*. En reprenant les techniques du paragraphe 3.2.1, ceci permet de montrer qu'en fait $\mathcal{G}$ s'étend en un feuilletage sur un surniveau du type $\rho^{-1}(]t_* - \epsilon, +\infty))$ où $\epsilon > 0$. Ceci contredit la minimalité de t_*.

Démonstration du lemme 3.2.9. Comme l'indice de ρ en p_* est ≤ 2, le lemme de Morse nous fournit des coordonnées (x_1, x_2, y_1, y_2) centrées en p_0 telles que [2]

$$\rho = x_1^2 + x_2^2 \pm y_1^2 \pm y_2^2. \tag{3.9}$$

On considère un voisinage W_* de p_* et un nombre $\epsilon_* > 0$ tel que les coordonnées (x_1, x_2, y_1, y_2) appliquent W_* sur le bidisque

$$\mathbb{D}_{\epsilon_*} \times \mathbb{D}_\epsilon := \{x_1^2 + x_2^2 \leq \epsilon_*^2 \text{ et } y_1^2 + y_2^2 \leq \epsilon^2\}.$$

On choisira $\epsilon_* > \epsilon > 0$ suffisament petits pour que W_* soit contenu dans $\rho^{-1}(I_*)$, et on supposera dans ce qui suit que ϵ est très petit devant ϵ_*^2.

Pour simplifier les notations, on peut supposer que $t_* = 0$ quitte à considérer la fonction $\rho - t_*$. Nous introduisons

- une fonction lisse $\delta : \mathbb{D}_{\epsilon_*} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\delta(0,0) > 0$, $\delta(y_1, y_2) = 0$ si $y_1^2 + y_2^2 \geq \epsilon^2/2$, et dont la norme C^2 est majorée par ϵ
- une fonction lisse $\phi : [0, \epsilon_*^2] \to [0,1]$ qui vérifie $\phi = 1$ sur $[0, \epsilon_*^2/3]$ et $\phi = 0$ sur $[2\epsilon_*^2/3, \epsilon_*^2]$.

Nous posons alors

$$\rho'' = (x_1 - \delta(y_1, y_2))^2 + x_2^2 \pm y_1^2 \pm y_2^2,$$

et

$$\rho' = (1 - \phi(x_1^2 + x_2^2))\rho + \phi(x_1^2 + x_2^2)\rho''.$$

La fonction ρ' coïncide avec ρ à l'extérieur de W, donc vérifie l'assertion 1. De plus, elle est ϵ-proche de ρ dans la norme C^2, si bien qu'elle vérifiera l'assertion 2. si ϵ est suffisamment petit. Dans ce cas le point p'_* de coordonnées $(\delta(0,0), 0, 0, 0)$ est l'unique point critique de ρ' dans W, et par conséquent dans $\rho^{-1}(I_*)$. On a alors $\rho'(p_*) = \delta(0,0)^2 > 0$, donc la condition 3. est également satisfaite.

Reste à montrer la condition 4. Pour cela on raisonne par tranches $(y_1, y_2) = (c_1, c_2)$ comme dans la démonstration de la proposition 3.2.4, où ici $c_1^2 + c_2^2 \leq \epsilon^2$. Si $x_1^2 + x_2^2 \geq \epsilon_*^2/3$ alors on a

$$\rho = x_1^2 + x_2^2 \pm y_1^2 \pm y_2^2 \geq \epsilon_*^2/3 - \epsilon^2 > 0$$

et

$$\rho'' = (x_1 - \delta(y_1, y_2))^2 + x_2^2 \pm y_1^2 \pm y_2^2 = \epsilon_*^2/3 + O(\epsilon) > 0.$$

et par conséquent $\rho' > 0$. Si $x_1^2 + x_2^2 < \epsilon_*^2/3$, alors $\phi = 1$, et donc $\rho > 0$ et $\rho' > 0$ sont l'équation de l'extérieur de petits disques contenus dans $x_1^2 + x_2^2 < \epsilon_*^2/3$. En résumé, dans la tranche $(y_1, y_2) = (c_1, c_2)$ le lieu où ρ et ρ' sont > 0 est décrit par l'extérieur de l'union de deux petits disques contenus dans le disque centré en l'origine de rayon $\epsilon_*/\sqrt{3}$. En particulier, ceci montre que l'ensemble

$$\{\rho > 0\} \cap \{\rho' > 0\} \cap W$$

2. Ces coordonnées réelles n'ont aucune raison d'être holomorphes !

est connexe. Or, le surniveau $\{\rho > 0\}$ se rétracte par déformation sur $\{\rho > 0\} \cap V \setminus W$ (par une rétraction radiale dans les coordonnées x). L'égalité

$$\{\rho > 0\} \cap \{\rho' > 0\} = \big(\{\rho > 0\} \setminus W\big) \cup \big(\{\rho > 0\} \cap \{\rho' > 0\} \cap W\big)$$

montre bien que cet ensemble est connexe et conclut la démonstation du lemme 3.2.9. $\square$

3.2.3 Extension à travers l'ensemble exceptionnel

Proposition 3.2.10. *Soit X une surface complexe compacte, soit $V \Subset X$ un domaine fortement pseudoconvexe et soit A l'ensemble exceptionnel de V. Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe sur $V \setminus A$. Alors $\mathcal{G}$ s'étend en un feuilletage holomorphe $\tilde{\mathcal{G}}$ sur V.*

Démonstration. L'idée est similaire à celle utilisée pour exhiber des formes différentielles définissant le feuilletage au voisinage de singularités : il s'agit de prolonger la pente des feuilles.

Nous allons d'abord construire cette fonction pente en dehors de A. Soit $\Phi : X \to \mathbb{CP}^N$ un plongement de la surface algébrique X. Soient $[z_0 : \ldots : z_N]$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{CP}^N$. Quitte à diminuer N et à composer Φ par un automorphisme de $\mathbb{CP}^N$, on peut supposer que $\Phi(X)$ n'est pas contenu dans l'hyperplan $\{z_N = 0\}$ et que $\Omega_1 := \Phi^* \mathrm{d}(z_0/z_N)$ et $\Omega_2 := \Phi^* \mathrm{d}(z_1/z_N)$ forment une base de l'espace des 1-formes différentielles méromorphes sur X.

Soit $\{U_j\}_{j\in J}$ un recouvrement de $V \setminus A$ tel que sur chaque U_j le feuilletage $\mathcal{G}$ soit défini par $\omega_j := f_j\Omega_0 + g_j\Omega_1$, où f_j et g_j sont des fonctions méromorphes. Sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ on a

$$\Omega_0 + \frac{g_j}{f_j}\Omega_1 = \Omega_0 + \frac{g_k}{f_k}\Omega_1.$$

La collection $\{g_k/f_k\}$ définit donc une fonction méromorphe sur $V \setminus A$, notée F. Le feuilletage $\mathcal{G}$ est alors défini sur $V \setminus A$ par

$$\Omega := \Omega_0 + F\Omega_1,$$

la fonction F correspond à la pente du feuilletage. Soit $\pi : V \to Y$ la réduction de Remmert de V et soit $\tilde{F}$ la fonction méromorphe définie sur $Y \setminus \pi(A)$ par $\tilde{F} := F \circ \pi^{-1}$. Puisque $\pi(A)$ est un ensemble fini de points, et puisque V est un espace analytique normal, $\tilde{F}$ s'étend en une fonction méromorphe sur Y (voir le lemme 1.1.22), notée $\tilde{F}_{ext}$. On ramène cette fonction en une fonction méromorphe sur V en posant $\hat{F} := \tilde{F}_{ext} \circ \pi$. On définit ainsi une 1-forme différentielle méromorphe sur V

$$\hat{\Omega} := \Omega_0 + \hat{F}\Omega_1$$

qui prolonge la forme méromorphe Ω. Cela étend le feuilletage $\mathcal{G}$ à l'ensemble exceptionnel A. $\square$

Chapitre 4

Feuilletages transversalement affines

Dans ce chapitre nous appliquons les résultats des parties précédentes dans le contexte des feuilletages transversalement affines. Dans la première section on définit ces feuilletages sur les 3-variétés compactes et on étudie le cas des fibrés hyperboliques en tores d'après [GS80]. Dans la deuxième section on définit les feuilletages transversalement affines dégénérés sur les surfaces complexes d'après Scardua [Scá97]. La troisième section est dédiée à un théorème d'extension de feuilletages transversalement affines avec des idées analogues à celles du chapitre précédent.

On montre ensuite qu'une hypersurface Levi-plate transversalement affine dans une surface complexe algébrique compacte doit posséder une mesure transverse invariante. Cela nous permet d'établir que si un fibré hyperbolique en tores apparaît comme hypersurface Levi-plate dans une surface complexe algébrique compacte, alors son feuilletage de Cauchy-Riemann doit avoir une feuille compacte. En effet, Ghys et Sergiescu [GS80] donnent une classification des feuilletages sans feuilles compactes sur de tels fibrés : à conjugaison près ces feuilletages ont une feuille compacte ou bien correspondent aux feuilletages stable ou instable du flot d'Anosov. Ces derniers feuilletages transversalement affines ne possèdent pas de mesure transverse invariante.

4.1 Feuilletages transversalement affines sur les 3-variétés

On donne ici la définition de feuilletage transversalement affine et une caractérisation en termes de formes différentielles. Pour plus de précisions on pourra consulter le livre de Godbillon [God91, Chapitre III].

Définition 4.1.1. Soit M une 3-variété compacte et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage par surfaces de Riemann sur M. On dit que $\mathcal{F}$ possède une structure transversalement affine s'il possède un atlas pour lequel les changements de coordonnées transversales g_{jk} de la définition 1.2.1 sont affines.

Proposition 4.1.2. *Soit M une 3-variété compacte. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage par surfaces de Riemann sur M donné par un recouvrement $\{U_j\}_{j\in J}$ et par une famille de submersions locales $g_j : U_j \to \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}$ est transversalement affine si pour tout $j, k \in J$ sur $U_j \cap U_k$ il existe $a_{jk} \in \mathbb{R}^*, b_{jk} \in \mathbb{R}$ telles que*

$$g_j = a_{jk} g_k + b_k.$$

Proposition 4.1.3. *Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété réelle de dimension 3 feuilletée avec $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orientable. Les structures transversalement affines pour $\mathcal{F}$ sont classifiées par les couples de 1-formes différentielles (ω, η) sur M telles que*

1. *La forme ω définit $\mathcal{F}$,*
2. $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$,
3. *La forme η est fermée, c'est-à-dire $\mathrm{d}\eta = 0$,*

modulo l'équivalence identifiant les couples (ω_1, η_1) et (ω_2, η_2) s'il existe une fonction f sans zéros sur M telle que $\omega_2 = f\omega_1$ et $\eta_2 = \eta_1 + \frac{\mathrm{d}f}{f}$.

Dans la section 4.2.2 on verra un équivalent de cette proposition dans le cadre des feuilletages transversalement affines sur les surfaces complexes. Avant de passer aux surfaces complexes étudions l'exemple des fibrés hyperboliques en tores.

Exemple : Fibrés Hyperboliques en tores et feuilletages modèles [GS80] Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ un tore réel, et soit A une matrice dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Soit $\mathbb{T}^3_A$ la variété réelle de dimension 3 obtenue en quotientant $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence pour tout $p \in \mathbb{T}^2$

$$(p, 0) \sim (Ap, 1)$$

On appelle une telle variété un fibré en tores sur le cercle.

On dit que ce fibré est hyperbolique si A est hyperbolique, c'est-à-dire si $|\mathrm{tr}\, A| > 2$. On va se restreindre au cas $\det A = 1$ et $\mathrm{tr}\, A > 2$.

Une matrice hyperbolique A définit un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^2$. Cet automorphisme a deux directions propres réelles de pentes irrationnelles. Le feuilletage du plan $\mathbb{R}^2$ par droites parallèles à l'une de ces deux directions passe au quotient sur le tore $\mathbb{T}^2$ en un feuilletage linéaire par droites. De plus le feuilletage produit sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ est invariant par l'application $(p, 0) \sim (Ap, 1)$ et donc il définit un feuilletage par plans sur le fibré $\mathbb{T}^3_A$. On appelle ces feuilletages les feuilletages modèles de $\mathbb{T}^3_A$.

Proposition 4.1.4. *[GS80] Les feuilletages modèles sont transversalement affines.*

Démonstration. Soient λ et $\frac{1}{\lambda}$ les valeurs propres de la matrice A. Soient e_1 et e_2 des vecteurs propres correspondants à λ et $\frac{1}{\lambda}$ respectivement. Écrivons $\mathbb{R}^2$ en prenant comme base les vecteurs e_1 et e_2, $\mathbb{R}^2 = \{xe_1 + ye_2 | x, y \in \mathbb{R}\}$. Soit ω la 1-forme sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par $\omega = \lambda^t \mathrm{d}y$ dans les coordonnées $((x, y), t)$. Soit $\tilde{A} =: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par $\tilde{A}((x, y), t) = (A(x, y), t + 1)$. Alors $\tilde{A}^*\omega = \omega$, donc ω passe au quotient par $\tilde{A}$ et définit une 1-forme sur $\mathbb{T}^3_A$ qui donne l'un des feuilletages modèles. La forme $\eta = \log \lambda \mathrm{d}t$ passe aussi au quotient sur $\mathbb{T}^3_A$ et on a $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$ et $\mathrm{d}\eta = 0$. Donc les feuilletages modèles sont transversalement affines. $\square$

Théorème 4.1.5. *[GS80] Soit $\mathbb{T}^3_A$ un fibré hyperbolique en tores orientable. Alors tout feuilletage transversalement orientable de classe C^r sur $\mathbb{T}^3_A$ avec $r \geq 2$ sans feuille compacte est C^{r-2} conjugué à l'un des feuilletages modèles.*

On rappelle que deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de classe C^r sur une 3-variété M sont C^s-conjugués ($s \leq r$) s'il existe un difféomorphisme $f : M \to M$ de classe C^s tel que $\mathcal{G} = f_*\mathcal{F}$.

4.2 Feuilletages transversalement affines sur les surfaces complexes

Dans cette section on définit la notion de feuilletage transversalement dégénéré sur une surface complexe, on consultera les articles de Scárdua [Scá97], Camacho-Scárdua [CS01] et de Cousin-Pereira [CP14]. Le dernier article donne une jolie classification de ces feuilletages qui précise la caractérisation de Singer des feuilletages possédant une intégrale première liouvillienne.

4.2.1 Feuilletages transversalement affines

Définition 4.2.1. Soit X une surface complexe. Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe (non singulier) sur X. Le feuilletage $\mathcal{G}$ est dit transversalement affine s'il existe un atlas feuilleté $\{(U_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{j\in J}$ tel que sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ on a

$$\tilde{\varphi}_{jk}(z_k, w_k) = (\tilde{f}_{jk}(z_k, w_k), a_{jk}w_k + b_{jk}) = (z_j, w_j)$$

avec $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{C}$, $a_{jk} \neq 0$. Un feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{G}$ défini sur une surface complexe X est dit transversalement affine s'il est transversalement affine sur $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$.

Proposition 4.2.2. *Soit X une surface complexe, M une hypersurface Levi plate analytique dans X et $\mathcal{F}$ le feuilletage de Cauchy-Riemann de M. Soit U un voisinage de M dans X telle que $\mathcal{F}$ s'étend sur U en un feuilletage holomorphe non singulier $\mathcal{G}$ (un tel voisinage existe par la proposition 3.1.5). Si $\mathcal{F}$ est transversalement affine sur M alors $\mathcal{G}$ est transversalement affine sur U.*

Démonstration. Soit $\{(U_j, (z_j, w_j))\}$ une famille de cartes de M telle que $M \cap U_j = \{\mathrm{Im}(w_j) = 0\}$, voir le lemme 3.1.4. Puisque le feuilletage étendu $\mathcal{G}$ est holomorphe, il existe une suite $\{c_l\}$ de nombres complexes telle que

$$w_j = \sum_{l=0}^{\infty} c_l w_k^l.$$

Si $\mathcal{F}$ est transversalement affine alors pour $t_j = \mathrm{Re}(w_j)$ et $t_k = \mathrm{Re}(w_k)$ on a

$$t_j = a_{jk} t_k + b_{jk}$$

où $a_{jk} \in \mathbb{R}^*$ et $b_{jk} \in \mathbb{R}$. Ces deux équations nous disent que $c_0 = b_{jk}$, $c_1 = a_{jk}$ et $c_l = 0$ pour tout $l \geq 2$. Donc $w_j = a_{jk} w_k + b_{jk}$, le feuilletage $\mathcal{G}$ est bien transversalement affine. □

4.2.2 Feuilletages transversalement affines dégénérés

Définition 4.2.3. Soit X une surface complexe algébrique et soit $\mathcal{G}$ un feuilletage holomorphe sur X. Soit ω une 1-forme méromorphe sur X qui définit $\mathcal{G}$. On dit que $\mathcal{G}$ possède une structure transversalement affine dégénérée s'il existe une 1-forme méromorphe η fermée sur X telle que $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$.

Les feuilletages logarithmiques et les feuilletages de Bernoulli sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sont des exemples, voir plus loin. Les feuilletages transversalement affines dégénérés peuvent aussi être définis à l'aide de connexions, voir l'article de Cousin-Pereira [CP14]. Si $\tilde{\omega}$ est une section holomorphe de $N_{\mathcal{G}} \otimes \Omega_X^1$, alors $\mathcal{G}$ est transversalement affine dégénéré s'il existe un diviseur D de X et une connexion méromorphe plate

$$\nabla : N_{\mathcal{G}} \to N_{\mathcal{G}} \otimes \Omega_X^1(*D)$$

telle que $\nabla(\omega) = 0$, où $\Omega_X^1(*D)$ est le faisceau des 1-formes méromorphes sur X avec pôles le long de D. Les composantes irréductibles de D sont invariantes par le feuilletage $\mathcal{G}$. On a de plus la propriété suivante, voir [CP14, Proposition 2.2]

Proposition 4.2.4. *Dans $H^2(X, \mathbb{C})$, la classe de Chern du fibré normal $N_{\mathcal{G}}$ est égale à*

$$c_1(N_{\mathcal{G}}) = -\sum \alpha_C [C]$$

où la somme porte sur les composantes irréductibles de C, et où $\alpha_C \in \mathbb{C}$ est le résidu $Res_C(\nabla)$ d'une 1-forme méromorphe quelconque qui définit ∇ en un point générique de C.

Exemple 4.2.5 (Feuilletages logarithmiques sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$). Un feuilletage holomorphe $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est dit logarithmique s'il est donné dans une carte affine par une 1-forme méromorphe de la forme

$$\omega = f_1 \cdots f_k \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\mathrm{d}f_i}{f_i},$$

où les f_i sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^2$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$. Un tel feuilletage est transversalement affine dégénéré sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. En effet, la 1-forme méromorphe fermée $\eta := \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{d}f_i}{f_i}$ vérifie $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Le diviseur D est égal à $\cup\{f_i = 0\}$. Observons que pour $k = 2$, cet exemple donne

$$\omega = \lambda_1 f_2 \mathrm{d}f_1 + \lambda_2 f_1 \mathrm{d}f_2, \quad \eta = \frac{\mathrm{d}f_1}{f_1} + \frac{\mathrm{d}f_2}{f_2}.$$

Exemple 4.2.6 (Feuilletages de Bernoulli sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$)**.** Soient p, b, c des polynômes d'une variable complexe. Le feuilletage $\mathcal{G}$ donné dans une carte affine de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par la 1-forme holomorphe

$$\omega = p(x)\mathrm{d}y - (y^k c(x) - y b(x))\mathrm{d}x$$

est transversalement affine dégénéré. En effet, la 1-forme fermée

$$\eta := k\frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{p'(x) + (k-1)b(x)}{p(x)}\mathrm{d}x$$

vérifie $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Ici D est une union finie d'hyperplans.

4.2.3 Prolongement de feuilletages transversalement affines

Théorème 4.2.7. *Soit X une surface complexe algébrique et soit $V \Subset X$ un domaine fortement pseudoconvexe. Soit $K \subset V$ un compact tel que $U = V \setminus K$ soit connexe et contienne l'ensemble exceptionnel de V. Alors tout feuilletage transversalement affine régulier $\mathcal{G}$ sur U se prolonge en un feuilletage transversalement affine dégénéré sur V.*

D'après le théorème 3.2.1 le feuilletage $\mathcal{G}$ défini sur U se prolonge en un feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}$ sur V. Soit ω une 1-forme méromorphe sur X qui définit $\tilde{\mathcal{G}}$.

Lemme 4.2.8. *Il existe une 1-forme méromorphe fermée η sur U telle que $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$ sur U.*

Démonstration. Soit $\{U_j\}_{j\in J}$ un recouvrement de U par des boîtes de flot du feuilletage transversalement affine non singulier $\mathcal{G}$. Soit $\{g_j : U_j \to \mathbb{C}\}$ une collection de submersions locales holomorphes qui donnent la structure transverse affine de $\mathcal{G}$ sur U. Sur chaque $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, on a

$$g_j = a_{jk} g_k + b_{jk} \quad \text{où } (a_{jk}, b_{jk}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Soit $f = (f_j)_{j\in J}$ une section méromorphe de $N_{\mathcal{G}}$ associée à ω de façon que $\omega|_{U_j} = f_j \mathrm{d}g_j$ sur U_j (voir proposition 1.3.11). Vérifions que les 1-formes méromorphes $\frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}$ se recollent sur U. Puisque les $\omega|_{U_j}$ proviennent de la forme différentielle globale ω, on a sur chaque $U_j \cap U_k \neq \emptyset$:

$$f_j \mathrm{d}g_j = f_k \mathrm{d}g_k. \tag{4.2}$$

En dérivant l'équation (4.1) et en remplaçant le résultat dans (4.2) on obtient $f_j a_{jk} = f_k$. Il s'ensuit

$$\frac{\mathrm{d}f_j}{f_j} = \frac{\mathrm{d}f_k}{f_k}.$$

On peut donc définir une 1-forme méromorphe η sur U en posant $\eta|_{U_j} = \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}$. On a de plus $\mathrm{d}\omega|_{U_j} = \mathrm{d}f_j \wedge \mathrm{d}g_j = (df_j/f_j) \wedge f_j \mathrm{d}g_j = \eta|_{U_j} \wedge \omega|_{U_j}$, donc $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$ sur U. □

La forme η s'étend à V car V est fortement pseudo-convexe. Pour voir cela, il suffit d'appliquer à η les méthodes du chapitre 3. Cela établit le théorème 4.2.7.

4.3 Existence de mesures invariantes

Théorème 4.3.1. *Soit X une surface complexe algébrique. Soit M une hypersurface Levi-plate analytique de X. On suppose que le feuilletage de Cauchy-Riemann de M est transversalement affine. Alors ce feuilletage possède une mesure transverse invariante.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$, le feuilletage de Cauchy-Riemann sur M, n'ait pas de mesure transverse invariante. D'après le théorème 2.2.3, le fibré normal au feuilletage $N_{\mathcal{F}}$ sur M possède une métrique à courbure strictement positive le long des feuilles, que l'on note $m_{\mathcal{F}}$.

D'après le chapitre 3 le feuilletage $\mathcal{F}$ sur l'hypersurface Levi plate sur M s'étend en un feuilletage holomorphe $\tilde{G}$ sur toute la surface X. D'après le théorème 4.2.7 ce feuilletage étendu est transversalement affine sur un voisinage de M et transversalement affine dégénéré sur X. D'après la proposition 4.2.4 le fibré $N_{\tilde{\mathcal{G}}} \otimes \mathcal{O}(\sum \alpha_C[C])$ est plat sur X. Puisque X est kählérienne, ce fibré possède une métrique à courbure nulle d'après le lemme du $\partial\bar{\partial}$. Comme les composantes irréductibles C de D ne rencontrent pas un voisinage de M, le fibré $N_{\mathcal{F}}$ possède sur M une métrique m_0 dont la courbure est nulle.

Les métriques $m_{\mathcal{F}}$ et m_0 sur $N_{\mathcal{F}}$ sont reliées par $m_{\mathcal{F}} = e^{-\tau} m_0$, où $\tau : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les courbures de ces deux métriques sont alors reliées sur M par l'équation

$$\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}}(-\log m_{\mathcal{F}}) = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\tau + \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}}(-\log m_0). \tag{4.3}$$

Le dernier terme du côté droit est nul car il est égal à la courbure de la métrique m_0. Maintenant, puisque M est compact et τ est continue, la fonction τ atteint son maximum sur M en un point p. La restriction de τ à la feuille de $\mathcal{F}$ passant par p atteint aussi son maximum en p et donc $i\partial\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\tau$ est négatif en p. On obtient une contradiction puisque le terme de gauche de l'équation (4.3) est strictement positif. □

Comme on avait annoncé dans l'introduction, en alliant ce résultat au théorème de Ghys mentionné dans le chapitre 2 (théorème 2.1.2), on obtient qu'une hypersurface Levi-plate transversalement affine d'une surface complexe algébrique est ou bien quasi-périodique, ou bien contient une courbe algébrique.

4.4 Fibrés hyperboliques en tores comme hypersurface Levi-plate

Théorème 4.4.1. *Soit X une surface complexe algébrique. Soit M une hypersurface Levi-plate analytique dans X difféomorphe à un fibré hyperbolique en tores. Alors le feuilletage de Cauchy-Riemann sur M possède au moins une feuille compacte.*

Démonstration. Si le feuilletage de Cauchy-Riemann sur M n'a pas de feuille compacte alors, d'après le théorème 4.1.5 de Ghys-Sergiescu, il est conjugué au feuilletage stable ou instable sur M. Ces feuilletages sont transversalement affines et ne possèdent pas de mesure transverse invariante. Le théorème 4.3.1 fournit alors une contradiction. □

Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut se demander si le feuilletage de Cauchy-Riemann possède de nombreuses feuilles compactes, voire s'il constitue une fibration en surfaces de Riemann compactes. La proposition suivante, qui nous a été gentiment communiquée par Étienne Ghys, montre que cela n'est pas systématique ([GS80, Proposition 2, p194] s'avère en fait inexacte).

Proposition 4.4.2. *Tout fibré hyperbolique en tores $\mathbb{T}^3_A$ possède des feuilletages par surfaces de Riemann présentant simultanément des feuilles compactes et des feuilles non compactes.*

Démonstration. Regardons $\mathbb{T}^3_A$ comme quotient d'un groupe de Lie G de dimension 3 par un réseau $\Gamma \subset G$. Soit $G = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ où le produit semi direct est donné par l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$
$$t \cdot (x, y) = (e^t x, e^{-t} y),$$
ce qui veut dire que le produit entre deux éléments de G est donné par
$$(t_1, x_1, y_1) * (t_2, x_2, y_2) = (t_1 + t_2, x_1 + e^{t_1} x_2, y_1 + e^{t_1} y_2).$$
Soit A une matrice hyperbolique. Soit Λ un réseau invariant par la matrice A. On définit $\Gamma = \mathbb{Z} \log \lambda \ltimes \Lambda$. Alors
$$\mathbb{R}^2/\Lambda \to \Gamma\backslash G \to \mathbb{Z}\log\lambda\backslash\mathbb{R}$$
est une fibration en tores. On définit 3 groupes à un paramètre
$$\begin{aligned} \phi_t &: \mathbb{R} \to G : t \mapsto (t, 0, 0) \\ \phi_x &: \mathbb{R} \to G : x \mapsto (0, x, 0) \\ \phi_y &: \mathbb{R} \to G : y \mapsto (0, 0, y) \end{aligned}$$
qui nous donnent respectivement les champs de vecteurs Z, X et Y, et qui appliqués à une fonction $h : \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculés en un point (t_0, x_0, y_0) donnent
$$Z \cdot h(t_0, x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial t}(t_0, x_0, y_0),$$

$$\begin{aligned}X \cdot h(t_0, x_0, y_0) &= e^{t_0}\frac{\partial h}{\partial x}(t_0, x_0, y_0),\\ Y \cdot h(t_0, x_0, y_0) &= e^{-t_0}\frac{\partial h}{\partial y}(t_0, x_0, y_0).\end{aligned}$$

Ils vérifient les relations de commutateurs :

$$\begin{aligned}[Z, X]h(t_0, x_0, y_0) &= Z \cdot (X \cdot h(t_0, x_0, y_0)) - X \cdot (Z \cdot h(t_0, x_0, y_0))\\ &= Z \cdot (e^{t_0}\frac{\partial h}{\partial x}(t_0, x_0, y_0)) - X \cdot (\frac{\partial h}{\partial t}(t_0, x_0, y_0))\\ &= e^{t_0}\frac{\partial h}{\partial x}(t_0, x_0, y_0) + e^{t_0}\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}(t_0, x_0, y_0) - e^{t_0}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(t_0, x_0, y_0)\\ &= e^{t_0}\frac{\partial h}{\partial x}(t_0, x_0, y_0)\\ &= X \cdot h(t_0, x_0, y_0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[Z, Y]h(t_0, x_0, y_0) &= Z \cdot (Y \cdot h(t_0, x_0, y_0)) - Y \cdot (Z \cdot h(t_0, x_0, y_0))\\ &= Z \cdot (e^{-t_0}\frac{\partial h}{\partial y}(t_0, x_0, y_0)) - Y \cdot (\frac{\partial h}{\partial t}(t_0, x_0, y_0))\\ &= -e^{-t_0}\frac{\partial h}{\partial y}(t_0, x_0, y_0) + e^{-t_0}\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial y}(t_0, x_0, y_0) - e^{-t_0}\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial t}(t_0, x_0, y_0)\\ &= -e^{-t_0}\frac{\partial h}{\partial y}(t_0, x_0, y_0)\\ &= -Y \cdot h(t_0, x_0, y_0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X, Y]h(t_0, x_0, y_0) &= X \cdot (Y \cdot h(t_0, x_0, y_0)) - Y \cdot (X \cdot h(t_0, x_0, y_0))\\ &= X \cdot (e^{-t_0}\frac{\partial h}{\partial y}(t_0, x_0, y_0)) - Y \cdot (e^{t_0}\frac{\partial h}{\partial x}(t_0, x_0, y_0))\\ &= e^{t_0 - t_0}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(t_0, x_0, y_0) - e^{-t_0 + t_0}\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(t_0, x_0, y_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ces champs nous donnent un repère du fibré tangent au groupe G. Avec eux on peut se donner des feuilletages en se donnant des distributions de plans intégrables, par exemple

$$\mathbb{R}Z + \mathbb{R}X, \mathbb{R}Z + \mathbb{R}Y, \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y$$

qui correspondent aux feuilletages instable, stable et au feuilletage trivial en tores. Avec ces trois champs de vecteurs on peut construire un feuilletage sans composante de Reeb et avec des feuilles compactes sur notre fibré en tores. En effet, soit $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction analytique qui ne dépend que de t et soit

$$\mathcal{C} := \mathbb{R}X + \mathbb{R}(Z + f(t)Y)$$

une distribution de plans sur G/Γ. Vérifions que cette distribution est intégrable :

$$\begin{aligned}
[X, Y + f(t)Z] &= [X, Y] + [X, f(t)Z] \\
&= X(f(t)Z) - f(t)ZX \\
&= (X \cdot f)Z + f(t)XZ - f(t)ZX \\
&= (X \cdot f)Z + f(t)[X, Z] \\
&= (X \cdot f)Z - f(t)X \quad (\text{car } [X, Z] = -X) \\
&= -f(t)X \quad (\text{car } f \text{ ne dépend pas de } t).
\end{aligned}$$

Ainsi $[X, Y + f(t)Z] = -f(t)X$ appartient à $\mathcal{C}$ et notre distribution est bien intégrable. Ce feuilletage possède des feuilles compactes pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = 0$. Ce sont des tores de la fibration. Il ne possède pas de composante de Reeb. Entre deux feuilles compactes les feuilles sont denses et s'enroulent sur les feuilles compactes. $\square$

Bibliographie

[Arn84] V. Arnol'd : *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires.* “Mir”, Moscow, 1984. Translated from the Russian by Djilali Embarek, Reprint of the 1980 edition.

[Bea95] A. F. Beardon : *The geometry of discrete groups*, volume 91 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.

[Bre83] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[Bru08] M. Brunella : On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(7):3101–3113, 2008.

[Bru10] M. Brunella : Codimension one foliations on complex tori. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 19(2):405–418, 2010.

[Car33] E. Cartan : Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 11(1):17–90, 1933.

[CC03] A. Candel et L. Conlon : *Foliations. II*, volume 60 de *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[CM] C. Camacho et H. Movasati : Topics in complex geometry and holomorphic foliations. `http://w3.impa.br/~hossein/myarticles/ComplexGeometry.pdf`.

[CM85] M. Colţoiu et N. Mihalache : Strongly plurisubharmonic exhaustion functions on 1-convex spaces. *Math. Ann.*, 270(1):63–68, 1985.

[CP14] G. Cousin et J. Pereira : Transversely affine foliations on projective manifolds. *Math. Res. Lett.*, 21(5):985–1014, 2014.

[CS01] C. Camacho et B. Scárdua : Holomorphic foliations with Liouvillian first integrals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(3):717–756, 2001.

[dBI15] P. de Bartolomeis et A. Iordan : Maurer-cartan equations in the dgla of graded derivations and the non existence of levi-flat hypersurfaces in ı^2. arXiv :1506.06732, 2015.

[DD15] B. Deroin et C. Dupont : Topology and dynamics of laminations in surfaces of general type. *J. Amer. Math. Soc.*, 2015.

[Dem] J.-P. Demailly : Complex analytic and differential geometry. `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`.

[DK07] B. Deroin et V. Kleptsyn : Random conformal dynamical systems. *Geom. Funct. Anal.*, 17(4):1043–1105, 2007.

[DKN09] B. Deroin, V. Kleptsyn et A. Navas : On the question of ergodicity for minimal group actions on the circle. *Mosc. Math. J.*, 9(2):263–303, back matter, 2009.

[DKN13] B. Deroin, V. Kleptsyn et A. Navas : Towards the solution of some fundamental questions concerning group actions on the circle and codimension-one foliations. *arXiv :1302.4133*, 2013.

[DO85] K. Diederich et T. Ohsawa : Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 21(4):819–833, 1985.

[DO07] K. Diederich et T. Ohsawa : On the displacement rigidity of Levi flat hypersurfaces—the case of boundaries of disc bundles over compact Riemann surfaces. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 43(1):171–180, 2007.

[Gar83] L. Garnett : Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. *J. Funct. Anal.*, 51(3):285–311, 1983.

[GH78] P. Griffiths et J. Harris : *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.

[Ghy91] E. Ghys : Flots transversalement affines et tissus feuilletés. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (46):123–150, 1991. Analyse globale et physique mathématique (Lyon, 1989).

[God91] C. Godbillon : *Feuilletages*, volume 98 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb.

[GR84] H. Grauert et R. Remmert : *Coherent analytic sheaves*, volume 265 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Gra58] H. Grauert : On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 68:460–472, 1958.

[Gra62] H. Grauert : Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 146:331–368, 1962.

[GS80] E. Ghys et V. Sergiescu : Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology*, 19(2):179–197, 1980.

[HL84] G. Henkin et J. Leiterer : *Theory of functions on complex manifolds*, volume 79 de *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[Iva12] S. Ivashkovich : Bochner-Hartogs type extension theorem for roots and logarithms of holomorphic line bundles. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 279(Analiticheskie i Geometricheskie Voprosy Kompleksnogo Analiza):269–287, 2012.

[Iva13] S. Ivashkovich : *Extension properties of complex analytic objects.* Max Planck Institüt für Mathematik, 2013.

[Lev10] E. Levi : Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 17(1):61–87, 1910.

[LN99] A. Lins Neto : A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(4):1369–1385, 1999.

[MP09] J. Merker et E. Porten : The Hartogs extension theorem on $(n-1)$-complete complex spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 637:23–39, 2009.

[Nar62] R. Narasimhan : The Levi problem for complex spaces. II. *Math. Ann.*, 146:195–216, 1962.

[Nem99] S. Y. Nemirovskiĭ : Stein domains with Levi-plane boundaries on compact complex surfaces. *Mat. Zametki*, 66(4):632–635, 1999.

[Pet94] T. Peternell : Pseudoconvexity, the Levi problem and vanishing theorems. *In Several complex variables, VII*, volume 74 de *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 221–257. Springer, Berlin, 1994.

[Ric68] R. Richberg : Stetige streng pseudokonvexe Funktionen. *Math. Ann.*, 175: 257–286, 1968.

[Scá97] B. Scárdua : Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30(2):169–204, 1997.

[ST71] Y.-T. Siu et G. Trautmann : *Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 172. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[SY78] R. Schoen et S. T. Yau : On univalent harmonic maps between surfaces. *Invent. Math.*, 44(3):265–278, 1978.

[Tak64] A. Takeuchi : Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif. *J. Math. Soc. Japan*, 16:159–181, 1964.

[Tro91] M. Troyanov : Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):793–821, 1991.

[Zak01] S. Zakeri : Dynamics of singular holomorphic foliations on the complex projective plane. *In Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, volume 269 de *Contemp. Math.*, pages 179–233. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Hypersurfaces Levi-plates et leur complément dans les surfaces complexes

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions les hypersurfaces Levi-plates analytiques dans les surfaces algébriques complexes. Il s'agit des hypersurfaces réelles qui admettent un feuilletage par des courbes holomorphes, appelé le feuilletage de Cauchy Riemann (CR). Dans un premier temps nous montrons que si ce dernier admet une dynamique chaotique (i.e. s'il n'admet pas de mesure transverse invariante) alors les composantes connexes de l'extérieur de l'hypersurface sont des modifications de domaines de Stein. Ceci permet d'étendre le feuilletage CR en un feuilletage algébrique singulier sur la surface complexe ambiante. Nous appliquons ce résultat pour montrer, par l'absurde, qu'une hypersurface Levi-plate analytique qui admet une structure affine transverse dans une surface algébrique complexe possède une mesure transverse invariante. Ceci nous amène à conjecturer que les hypersurfaces Levi-plates dans les surfaces algébriques complexes qui sont difféomorphes à un fibré hyperbolique en tores sur le cercle sont des fibrations par courbes algébriques.

Mots-clefs : analyse et géométrie complexes, théorie des feuilletages, hypersurfaces Levi-plates, mesure transverse invariante, variété Stein, convexité holomorphe, prolongement analytique.

Levi-flat hypersurfaces and their complement in complex surfaces

Abstract

In this work we study analytic Levi-flat hypersurfaces in complex algebraic surfaces. These are real hypersurfaces that admit a foliation by holomorphic curves, called Cauchy Riemann foliation (CR). First, we show that if this foliation admits chaotic dynamics (i.e. if it does not admit an invariant transverse measure), then the connected components of the complement of the hypersurface are Stein. This allows us to extend the CR foliation to a singular algebraic foliation on the ambient complex surface. We apply this result to prove, by contradiction, that analytic Levi-flat hypersurfaces admitting a transverse affine structure in a complex algebraic surface have a transverse invariant measure. This leads us to conjecture that Levi-flat hypersurfaces in complex algebraic surfaces that are diffeomorphic to a hyperbolic tori bundle over the circle are fibrations by algebraic curves.

Keywords : complex analysis and complex geometry, theory of foliations, Levi-flat hypersurfaces, invariant measure, Stein manifold, holomorphic convexity, analytic extension.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France