Thèse de doctorat

Université Paris-Sud
École Doctorale 142 : mathématiques de la région Paris-Sud

Contraintes de densité en transport optimal, EDP et jeux à champ moyen

par Alpár Richárd MÉSZÁROS

Date de soutenance : 10/09/2015

Composition du jury:

Directeur de thèse :	Filippo Santambrogio	Université Paris-Sud
Rapporteur :	Guillaume Carlier	Université Paris-Dauphine
Examinateurs :	Yann Brenier	CNRS et École Polytechnique
	Bertrand Maury	Université Paris-Sud
	Bruno Nazaret	Université Paris 1
	Francisco Silva	Université de Limoges

Synthèse

Dans cette thèse on étudie des modèles différens venant du transport optimal, des équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement des foules et des jeux à champ moyen. Dans tous ces modèles — comme le titre le souligne — le dénominateur commun est la notion de *contrainte de densité*. Les contraintes de densité apparaissent naturellement lorsqu'on veut modéliser les effets de congestion. On peut imaginer la situation suivante : nous venons de construire un nouveau département de mathématiques (comme il sera le cas à Orsay). Pour des raisons de sécurité on veut concevoir un dispositif qui dit aux gens comment évacuer le bâtiment de façon 'optimale' en cas d'une urgence. Dans ce contexte 'optimale' veut dire pas seulement de la manière la plus rapide/plus courte possible, mais on prend en considération les effets possibles de congestion aussi. Ceci est tout à fait une question importante, parce que dans des endroits étroits (par exemple à côté des portes) nous pouvons habituellement s'attendre à avoir une concentration plus élevée de personnes. Par conséquent, si notre dispositif pouvait prendre aussi en cosidération la contrainte que à chaque instant et chaque endroit du bâtiment la densité de la population reste en dessous d'un seuil donné (par exemple 5,4 personnes sur chaque mètre carré, une valeur qui est généralement utilisée dans les applications), la procédure d'évacuation serait parfaite.

La réalisation possible d'un dispositif comme ça serait sûrement une tâche difficile. L'une des principales raisons est que dans un cas d'une situation d'urgence, les gens ont la tendance à oublier de réfléchir rationnellement. Néanmoins, du point de vue mathématique cela crée des questions très intéressantes et non triviales. Décrit mathématiquement, le dispositif ci-dessus pourrait fonctionner de la façon suivante : comme entrée il reçoit à chaque instant la densité et le *champ de vitesse souhaité* de la population, et retourne un nouveau champ de vitesse (donc il dit aux gens à quelle vitesse et dans quelle direction aller). Ce nouveau champ de vitesse est construit de façon à ce que personne ne soit autorisé à se déplacer de manière telle que la densité dépasse le seuil de saturation. La vitesse souhaitée est supposée connue (elle peut dépendre de la distance de la porte la plus proche, etc.) et elle est la même pour tous.

À ce point là, on remarque que dans tous nos modèles à venir, nous allons décrire le mouvement d'une foule/population d'agents par l'évolution de leur densité. Donc, on considère des modèles macroscopiques.

Au cours des dernières années, de nombreux modèles différents ont été proposés pour étudier les mouvements de foule avec effets de congestion. En plus, ces modèles peuvent parfois servir de base pour comprendre certains phénomènes venant de la biologie (tels que la migration cellulaire, la croissance tumorale, la formation de structures et textures), la physique des particules ou de l'économie. Pour une liste non exhaustive de bibliographie dans ce cadre nous nous référons à [Cha07, CR05, CPT14, Dog08, Hel92, HM95, Hug02, Hug03, MV07, MRCS10, MRCSV11, MRCS14, RC11, PQV14, AKY14].

Dans ce contexte, la situation décrite précédemment modélise un soi-disant effet de *congestion forte* (nous nous référons par exemple à [MRCS10, MRCSV11, MV07, RC11]). Dans ce sens, le champ de vitesse souhaité doit être modifié pour éviter les zones très concentrées. Des modèles similaires, avec des effets de *congestion douce* existent également. Dans ceux-ci, les gens ralentissent dès que la densité de la zone se rapproche du seuil (au lieu d'être affectés seulement quand ils sont dans une zone totalement saturée).

Les modèles étudiés dans cette thèse sont motivés par le premier type de considération, par les modèles macroscopiques de mouvement de foule avec des effets de congestion forte. Le pilier central de notre analyse est la théorie du *transport optimal*. Cette théorie est très puissante et elle nous permet d'étudier et de comprendre plusieurs phénomènes liés à des contraintes de densité dans différents modèles de manière unifiée.

La genèse de cette thèse a commencé avec le *modest proposal* de F. Santambrogio (voir [San12]). Il a proposé un modèle de *jeux à champ moyen* (voir [LL06a, LL06b, LL07, Lio08]), où on impose une contrainte de densité. Nous allons présenter la théorie de MFG plus en détail en début de la Partie II. Néanmoins, nous soulignons que dans les modèles de MFG *les agents* jouent un jeu différentiel non coopératif, où chacun doit choisir une stratégie. Par conséquent, dans ces modèles on veut pas seulement comprendre l'évolution de la densité de la population, mais on veut décrire la fonction valeur et la stratégie optimale de chaque agent aussi. Les modèles de [San12] visent à généraliser ceux du mouvement de foule (discutés auparavant) dans le cas où les gens sont *stratégiques*. Dans [San12], le modèle a seulement été construit, et aucun résultat rigoureux n'a pas été fourni. Étant également le sujet du mémoire de M2 (voir [Més12]), il s'est avéré que les questions soulevées dans [San12] sont loin d'être triviales. Une des raisons est la faible régularité que l'on pouvait espérer pour la fonction valeur qui résout une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman de premier ordre. Cela nous a empêché de construire un schéma de point fixe raisonnable (une technique utilisée avec succès dans de nombreux autres modèles de MFG), en tenant compte également de la *pression*, la nouvelle variable venant en dualité avec la contrainte de densité.

Une première tentative pour résoudre ce problème, était l'étude d'un modèle diffusif, où une diffusion non dégénérée est incluse dans l'équation de HJB et dans l'équations de continuité (transformant ce dernier en une équation de Fokker-Planck). Comme première étape, cela nécessitait l'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution de l'équation de Fokker-Planck avec contrainte de densité. Cet objectif a été atteint avec succès et il a conduit à un nouveau modèle diffusif macroscopique de mouvement de foule avec contrainte de densité (ce sera l'objet du Chapitre 2 et le Chapitre 3 ; il a également fait l'objet de deux papiers, voir [MS15a, DMM15]). À un certain point dans l'analyse effectuée dans [MS15a], nous avions besoin de certaines estimations plus fines sur les mesures projetées en dessous d'un certain seuil dans le sens Wasserstein. Plus précisément, une estimation BV sur les mesures projetées nous permettrait d'obtenir des résultats de compacité pour certaines courbes dans l'espace Wasserstein, construits par un schéma de type *splitting*. Par ceci, on pouvait démontrer la convergence de l'algorithme et donc le résultat d'existence. Les estimations BV ont été réalisées non seulement pour les mesures projetées, mais pour les optimiseurs d'une grande classe de problèmes variationnels impliquant le transport optimal (ce qui est le sujet du Chapitre 1 et de [DPMSV14]).

En parallèle de la direction présentée ci-dessus, nous avons étudié les questions soulevées dans [San12] aussi d'un point de vue différent. Nous avons étudié deux types de modèles de MFG possédant une *structure variationnelle*. Dans ces deux modèles, les approches utilisées sont liés par leur formulation variationnelle. Les approches utilisées dans les deux modèles rappellent celle étudiée par J.-D. Benamou et Y. Brenier (voir [BB00]) pour donner une formulation dynamique du problème de transport optimal de Monge-Kantorovich.

Premièrement, nous avons montré le caractère bien-posé et on a caractérisé les solutions de certains systèmes de MFG diffusifs stationnaires sous contraintes de densité. L'effet régularisant de l'équation de Fokker-Planck stationnaire et la structure elliptique nous ont permis d'imposer la contrainte de densité (que nous avons montré être qualifiée) directement au niveau du problème d'optimisation. Cela fait l'objet du Chapitre 4 (voir aussi [MS15b]).

Deuxièmement, nous avons montré le caractère bien-posé des systèmes de MFG évolutifs de premier ordre avec contraintes de densité. Ici, nous avons obtenu la contrainte de densité par la limite de certaines pénalisations (une procédure initialement proposée également dans [San12]). De plus, nous avons obtenu un lien surprenant entre notre modèle de MFG avec des contraintes de densité et les équations d'Euler décrivant le mouvement des fluides parfaits incompressibles (voir [Bre99, AF09]). Ces modèles font l'objet du Chapitre 5 (voir aussi [CMS15]). Notons que les systèmes de MFG (obtenus comme conditions d'optimalité des problèmes variationnels correspondants) présentés dans la Partie II montrent quelques différences par rapport aux originaux dérivés formellement dans [San12]. Cela est dû à la différence de l'interprétation du champ de pression, considéré comme multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de densité.

Maintenant, nous allons décrire en détail les principaux résultats mathématiques inclus dans cette thèse. Nous allons voir comment ils sont présentés par rapport aux chapitres aussi. Chaque chapitre se concentre essentiellement sur un papier. Ceux-ci sont soit acceptés pour publication, soit soumis ou en préparation.

DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES RÉSULTATS

Chapitres 1, 2 et 3 construisent la Partie I de la thèse et ils contiennent les résultats sur les modèles venant purement de transport optimal et les mouvements de foule macroscopiques avec des contraintes de densité.

Le Chapitre 1 est basé sur un travail commun avec G. De Philippis, F. Santambrogio et B. Velichkov (voir [DPMSV14]). Ici, notre objectif principal était d'étudier certaines propriétés fines de l'opérateur de projection dans l'espace Wasserstein $\mathbb{W}_2(\Omega)$, $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^d)$. En fait, nous incorporons cette question dans un ensemble plus large de problèmes. Notamment, nous étudions certaines propriétés quantitatives et la régularité des minimiseurs du problème d'optimisation

$$\min_{\varrho \in \mathscr{P}_2(\Omega)} \frac{1}{2} W_2^2(\varrho, g) + \tau F(\varrho),$$

où W_2 indique la distance 2-Wasserstein sur $\mathscr{P}_2(\Omega)$, $F : \mathscr{P}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle donnée, $\tau > 0$ est un paramètre qui peut éventuellement être petit, et g est une probabilité donnée dans $\mathcal{P}_2(\Omega)$ (l'espace de mesures de probabilité sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ avec deuxième moment fini $\int_\Omega |x|^2 \, \mathrm{d}\varrho(x) < +\infty$). Le problème ci-dessus peut être reconnu comme une étape dans la discrétisation en temps (τ étant le paramètre de discrétisation, dans ce cas) du flot-gradient de la fonctionnelle F, où $g = \varrho_k^\tau$ est une mesure précédemment construite et le ϱ optimal est en effet la suivante. Les algorithmes, où chaque pas de temps a la forme du problème d'optimisation ci-dessus, sont généralement appelés des schémas de JKO dans la communauté du transport optimal (voir [JKO98]). Sous des hypothèses appropriées, à la limite lorsque $\tau \to 0$, la suite de mesures optimales converge vers une courbe de mesures qui est le flot-gradient de F. Notons ici que pour les flots-gradient, le paramètre de discrétisation τ tend vers zéro, donc, en ce qui concerne les estimations sur les optimiseurs, on peut vouloir les obtenir de manière indépendante de τ. Nous pouvons imaginer d'autres modèles qui rentrent dans le cadre du problème d'optimisation ci-dessus: g pourrait représenter certaines ressources, et ϱ la répartition des usines autour d'eux; g la distribution de certains magasins/banques/écoles, etc., et ϱ la répartition des personnes. D'autres modèles sophistiqués sur la planification urbaine, le traitement d'images, etc. existent aussi. Ici en général $\tau > 0$ est fixé.

Notre premier objectif était d'étudier le comportement de l'opérateur de projection, plus précisément les mesures projetées en-dessous d'un certain seuil. C'est bien le cas du problème ci-dessus, si on prend formellement F la fonction d'indicatrice de l'ensemble $\mathcal{K}_f := \{\rho \in \mathscr{P}_2(\Omega) : \rho \leq f\,\mathrm{d}x\}$, où f est une fonction positive avec $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1$. Dans les applications, en général, il est raisonnable de choisir f constant. Puisque ce type de problème ne nécessite pas une dépendance en $\tau > 0$, nous choisisons simplement $\tau = 1$.

Nos principaux résultats dans ce chapitre sont :

Théorème 0.0.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe (éventuellement non-borné), soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et s.c.i. et $g \in \mathscr{P}_2(\Omega) \cap BV(\Omega)$. Si $\bar\varrho$ est l'optimiseur du problème variationnel suivant*

$$\min_{\varrho \in \mathscr{P}_2(\Omega)} \frac{1}{2} W_2^2(\varrho, g) + \int_\Omega h(\varrho(x))\,\mathrm{d}x\,,$$

alors

$$\int_\Omega |\nabla \bar\varrho|\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla g|\,\mathrm{d}x\,. \tag{0.0.1}$$

Par un argument d'approximation (approximation de la fonction d'indicatrice de l'ensemble $\mathcal{K}_f$ par des fonctionnelles convexes s.c.i.), le résultat ci-dessus vaut en particulier pour le problème de projection sous la forme suivante:

Théorème 0.0.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe (possiblement non-borné), $g \in \mathscr{P}_2(\Omega) \cap BV(\Omega)$ et soit $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ une fonction avec $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x \geq 1$. Si*

$$\bar\varrho = \operatorname{argmin}\left\{ W_2^2(\varrho, g) \;:\; \varrho \in \mathscr{P}_2(\Omega),\ \varrho \in \mathcal{K}_f \right\}, \tag{0.0.2}$$

alors

$$\int_\Omega |\nabla \bar\varrho|\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla g|\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega |\nabla f|\,\mathrm{d}x. \tag{0.0.3}$$

Dans le cas où $f \equiv 1$, on obtient un résultat sur la décroissance de la variation totale par l'opérateur de projection. Nous remarquons que la constante 2 dans l'inégalité (0.0.3) est sharp. Les estimations BV sont utiles lorsque la projection est traitée comme une étape d'une procedure d'évolution discrétisée. Par exemple, une borne BV permet de transformer la convergence faible en convergence forte dans L^1. Aussi, si nous considérons une EDP mélangeant une évolution lisse, comme l'évolution de Fokker-Planck, et certaines étapes de projection (pour imposer une contrainte de densité, comme dans les problèmes de mouvement de foule : nous allons décrire cela plus tard, et ce sera traité en détail dans le Chapitre 2), on pourrait se demander quelles bornes sur la régularité de la solution sont conservées en temps. Du fait que les discontinuités dans la mesure projetée détruisent tout type de norme $W^{1,p}$, c'est naturel de chercher des bornes BV.

Le cœur de la preuve des estimations BV précédentes est l'inégalité suivante. Prenons $\varrho, g \in \mathscr{P}_2(\Omega)$ et (φ, ψ) un couple de potentiels de Kantorovich dans le transport optimal de ϱ à g et $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction paire et convexe (nous ne nous soucions pas des hypothèses de régularité dans cette description heuristique). Alors, on a

$$\int_\Omega \nabla H(\nabla\varphi) \cdot \nabla\varrho + \nabla H(\nabla\psi) \cdot \nabla g \,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Il semble que cette inégalité décrit certaines caractéristiques géométriques non triviales du problème de transport optimal entre ϱ et g, qui ne sont pas complètement comprises, sauf dans certains cas particuliers. Le cas $H(z) = |z|^2/2$, par exemple, est une conséquence de la convexité géodésique de la fonctionnelle entropie. Pour démontrer les estimations BV décrites ci-dessus, on utilise l'inégalité pour $H(z) = |z|$. Dans le même contexte, nous avons également donné une nouvelle preuve rigoureuse du fait que la mesure projetée sature la contrainte (ce qui est également connu dans le cadre du transport partiel). Plus précisément, il existe un optimiseur unique $\bar\varrho$ dans (0.0.2) et il existe un ensemble mesurable $B \subseteq \Omega$ tel que

$$\bar\varrho = g^{\mathrm{ac}}\mathbb{1}_B + f\mathbb{1}_{B^c}.$$

Notons que pour cette propriété, il n'y a pas besoin d'imposer la régularité BV sur g et f, qui est juste nécessaire pour l'estimation (0.0.3).

À la fin du chapitre, nous discutons des applications possibles (également sous forme de questions ouvertes) des estimations BV établies antérieurement. Premièrement, nous observons que certaines question de la théorie de *transport optimal partiel*, étudiée récemment par L.A. Caffarelli-R. McCann et A. Figalli (voir [CM10, Fig10], où l'objectif est de transporter de manière optimale seulement une partie donnée d'une mesure à l'autre) peuvent être formulées dans notre cadre (tels que la régularité de la frontière libre résultant quand on projette une mesure). Nos estimations BV peuvent être utiles dans l'étude du problème de transport partiel lui-même, qui peut être considéré en fait comme un problème de double projection. Nous discutons également d'autres applications possibles pour l'optimisation de forme et des problèmes d'évolution d'ensembles. Nous fournissons une nouvelle preuve, basée sur le transport optimal, de la décroissance de la variation totale pour les équations de diffusion dégénérés (comme l'équation des milieux poreux).

Dans le Chapitre 2 — basé sur un travail commun avec F. Santambrogio (voir [MS15a]) — nous proposons un nouveau modèle macroscopique de mouvement de foule avec contraintes de densité, soit avec congestion forte. Motivé par les modèles de premier ordre étudiés récemment, due à *Maury et al.* (voir

[MRCS10, MRCS14, MRCSV11]), on analyse un modèle de deuxième ordre. Du point de vue de la modélisation nous imposons un caractère aléatoire dans le mouvement des individus. Mathématiquement, cela peut être vu au niveau macroscopique comme une diffusion non dégénérée engendrée par un mouvement brownien et le modèle tout entier peut être décrit à l'aide d'une équation de Fokker-Planck 'modifiée'. Ici, le mot 'modifiée' fait référence au fait que l'on doit modifier le champ de vitesse des gens sur les zones saturées.

Nous décrivons notre modèle par l'évolution de la densité de la foule $[0,T] \ni t \mapsto \rho_t$, qui est une famille de mesures de probabilité dépendant du temps sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (un domaine borné et convexe avec bord lipschitzien). Il est donné un champ de vitesse spontané $\mathbf{u} : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, qui représente la vitesse souhaitée que chaque personne suivrait en l'absence des autres. On impose seulement une regularité L^∞ sur ce champ. Pour équiper le modèle avec des contraintes de densité — $\rho \leq 1$ p.p. dans $[0,T] \times \Omega$, ce qui implique que nous devons imposer $\mathscr{L}^d(\Omega) > 1$ —, nous introduisons l'ensemble des vitesses admissibles. Ce sont les champs qui n'augmentent pas la densité sur les zones déjà saturées, donc formellement nous posons

$$\mathrm{adm}(\rho) := \left\{ \mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d : \nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ sur } \{\rho = 1\} \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Maintenant, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Fokker-Planck modifiée

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t - \Delta \rho_t + \nabla \cdot \left(\rho_t P_{\mathrm{adm}(\rho_t)}[\mathbf{u}_t] \right) = 0, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{0.0.4}$$

où $P_{\mathrm{adm}(\rho)} : L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \to L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ représente la projection L^2 sur l'ensemble convexe fermé $\mathrm{adm}(\rho)$ et ρ_0 est la densité initiale donnée de la foule. Observons que l'on pourrait se demander si nous devrions projeter le 'champ de vitesse tout entier' $-\nabla \rho_t / \rho_t + \mathbf{u}_t$. En fait, cela est la même que projeter seulement $\mathbf{u}_t$, parce que dans la région $\{\rho_t = 1\}$ on a $-\nabla \rho_t / \rho_t = 0$. Ainsi, le point principal est que ρ est advecté par un champ de vecteur, compatible avec les contraintes, le plus proche possible de celui spontané.

Malgré le fait que nous avons ajouté une diffusion non dégénérée au modèle, ce qui a un effet de régularisation, en raison de l'opérateur de projection, le nouveau champ de vitesses est très irrégulier (seulement L^2) et il dépend de manière non-locale de la densité elle-même. Ainsi, la théorie classique échouera dans l'analyse du problème (0.0.4). Pour traiter cette question, nous devons redéfinir l'ensemble des vitesses admissibles par dualité (comme cela a été fait pour les modèles du premier ordre, voir [MRCS10, RC11]):

$$\mathrm{adm}(\rho) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\rho) : \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla p \leq 0,\ \forall p \in H^1(\Omega), p \geq 0, p(1-\rho) = 0 \text{ p.p.} \right\}.$$

À l'aide de cette formulation, nous avons toujours la décomposition orthogonale

$$\mathbf{u} = P_{\mathrm{adm}(\rho)}[\mathbf{u}] + \nabla p,$$

où
$$p \in \mathrm{press}(\rho) := \Big\{ p \in H^1(\Omega) : p \geq 0,\ p(1-\rho) = 0 \text{ p.p.} \Big\}.$$

En effet, les cônes $\mathrm{adm}(\rho)$ et $\nabla\mathrm{press}(\rho)$ sont en dualité. Via cette approche le système (0.0.4) peut être réécrit comme un système pour (ρ, p) :

$$\begin{cases} \partial_t\rho_t - \Delta\rho_t + \nabla\cdot(\rho_t(\mathbf{u}_t - \nabla p_t)) = 0 \\ p \geq 0,\ \rho \leq 1,\ p(1-\rho) = 0,\ \rho(0,x) = \rho_0(x),\ \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{0.0.5}$$

Nous pouvons naturellement équiper ce système de ses conditions de Neumann naturelles sur le bord.

L'une des principales contributions du Chapitre 2 est le résultat d'existence pour le système (0.0.5). Ceci est réalisé par un algorithm bien choisi, discret en temps, de type *splitting*. Il procède comme suit : pour un pas de temps $\tau > 0$ nous construisons de manière récursive les mesures ρ_k^τ ($k \in \{0, \dots, N\}$, où $N := [T/\tau]$) par notre *schéma principal.* Ce schéma est le suivant : on suit l'équation de Fokker-Planck sans contrainte pendant un temps τ avec donné initiale ρ_k^τ ; notons cette solution au temps τ par ρ_τ ; la nouvelle densité est ensuite construite comme $\rho_{k+1}^\tau := P_{\mathcal{K}_1}[\rho_\tau]$, où $P_{\mathcal{K}_1}$ désigne maintenant l'opérateur de projection 2-Wasserstein sur l'ensemble $\mathcal{K}_1 := \{\rho \in \mathscr{P}(\Omega) : \rho \leq 1 \text{ p.p.}\}$. Ensuite, il faut itérer ces deux étapes.

Nous continuons notre analyse en construisant des interpolations appropriées $\rho_t^\tau, t \in [0,T]$ entre les ρ_k^τ. Ces interpolations peuvent être considérées comme des courbes dans $\mathbb{W}_2(\Omega)$. Nous devons construire des vitesses $\mathbf{v}_k^\tau$ et des moments $\mathbf{E}_k^\tau$ discrets aussi. Pour démontrer la convergence quand $\tau \downarrow 0$, il faut des résultats de compacité pour les courbes ρ^τ. Ceux-ci reposent sur une comparaison standard entre le dérivé métrique en $\mathbb{W}_2(\Omega)$ et la dissipation de l'entropie le long des courbes ρ^τ. Par cela, on obtient la compacité dans l'espace $H^1([0,T];\mathbb{W}_2(\Omega))$. Pour identifier l'équation limite quand $\tau \downarrow 0$, en fait, nous utilisons plusieurs interpolations entre les $\rho_k^\tau, \mathbf{v}_k^\tau$ et $\mathbf{E}_k^\tau$. Enfin, par cette procédure, on obtient l'existence d'un couple (ρ, p) qui satisfait le système (0.0.5) dans le sens des distributions.

Comme manière alternative d'obtenir la compacité pour les courbes ρ^τ, nous montrons des bornes uniformes en $\tau > 0$ dans l'espace $\mathrm{Lip}([0,T];\mathbb{W}_1(\Omega))$. Ce résultat est obtenu en combinant certaines estimations "sharp" BV pour l'équation de Fokker-Planck sans la contrainte de densité d'une part avec des estimations BV pour les mesures projetées (fournies au Chapitre 1) d'autre part. Puisque notre *schéma principal* consiste à suivre l'équation de Fokker-Planck sans contrainte, puis projeter sur l'ensemble $\mathcal{K}_1$, et comme la dérivé métrique en $\mathbb{W}_1(\Omega)$ le long de la solution de l'équation de Fokker-Planck sans contrainte est de l'ordre de

$$\int_\Omega |\nabla\rho_t| + |\mathbf{u}_t|\rho_t \,\mathrm{d}x,$$

c'est facile de deviner pourquoi nous recherchons des estimations BV à la fois pour l'équation de Fokker-Planck et pour les mesures projetées. Ceci donne une motivation supplémentaire aux résultats établis dans le Chapitre 1. Notons que nous fournissons une courte section sur les variantes possibles de notre *schéma principal*. Ici, nous discutons les similitudes et les difficultés possibles sur les autres schémas, qui contiennent quelques étapes de flot-gradient aussi. Pour les champs de vecteurs purement gradient une approche de flot-gradient peut également être utilisé, de la même manière que dans [MRCS10].

Enfin, nous remarquons que l'estimation BV pour l'équation de Fokker-Planck (sans contrainte de densité) semble une question délicate et elle a son propre intérêt. Comme une sorte d'annexe dans la dernière section de ce chapitre, nous fournissons les estimations que nous avons pu trouver. Certains d'entre elles sont valables pour les champs de vecteur lipschitziens, certains ont seulement été prouvé pour des champs $C^{1,1}$ et leur validité pour les champs de vecteur lipschitziens en général est ouverte.

Le but du Chapitre 3 est de compléter le Chapitre 2 avec des résultats d'unicité. L'unicité des solutions est essentielle si l'on veut inclure un système comme (0.0.5) décrivant le mouvement de foules sous contraintes de densité dans un modèle plus grand, comme les *jeux à champ moyen*, et l'on vise à étudier la question de l'existence pour le système MFG avec un schéma de point fixe. Par ailleurs, la question de l'unicité pour les modèles diffusifs de mouvement de foule avec des contraintes de densité était une pièce manquante dans toute sa généralité. Pour les systèmes de premier ordre (voir [MRCS10, MRCSV11]), l'unicitié était bien connue (au moins parmi les spécialistes) dans certains cas (comme pour les champs de vecteurs monotones) et elle a été écrit d'abord dans [Més12]. Néanmoins, par souci de complétude, nous fournissons une preuve rigoureuse (et simplifiée) pour les modèles de premier ordre aussi.

Les deux stratégies utilisées dans les deux types de modèles sont cependant très différentes. Pour les systèmes du premier ordre, nous supposerons que le champ de vitesse souhaité, $\mathbf{u} : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est borné, convexe et avec bord lipschitzien) satisfait une propriété de monotonie : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$[\mathbf{u}_t(x) - \mathbf{u}_t(y)] \cdot (x-y) \leq \lambda |x-y|^2, \text{ p.p. } x, y \in \Omega, \ \forall t \in [0,T].$$

Puis l'idée est de prouver une propriété de contraction de la distance de Wasserstein W_2 le long de solutions. En utilisant la propriété de monotonie pour le champ de vecteur $\mathbf{u}$, avec la formule du dérivé en temps de $W_2^2(\rho_t^1, \rho_t^2)/2$ (voir [AGS08]) le long deux solutions (ρ^1, p^1) et (ρ^2, p^2) on obtient

$$W_2^2(\rho_t^1, \rho_t^2) \leq e^{2\lambda t} W_2^2(\rho_0^1, \rho_0^2), \text{ pour } \mathscr{L}^1 - \text{p.p. } t \in [0,T],$$

ce qui implique l'unicité pour ρ. Ici nous avons également utilisé la propriété qui dit que si φ^t est un potentiel de Kantorovich dans le transport optimal de ρ_t^1 à ρ_t^2, alors

$$\int_\Omega \nabla \varphi^t \cdot \nabla p_t \, dx \geq 0, \text{ pour } \mathscr{L}^1 - \text{p.p. } t \in [0,T].$$

L'unicité pour p résulte de l'observation que $p_t^1 - p_t^2$ est harmonique et p_t^1 et p_t^2 (pour $\mathscr{L}^1$ − p.p. $t \in [0,T]$) s'annulent sur le même ensemble de mesure de Lebesgue positive. Notons que pour obtenir une propriété de contraction pour W_2^2 le long de deux solutions, l'hypothèse de monotonie sur le champ de vitesse est naturelle. La même hypothèse a été imposée dans [NPS11] pour étudier la propriété de contraction le long les solutions de l'équation de Fokker-Planck pour une classe générale des distances de transport.

La stratégie pour le cas de deuxième ordre (0.0.5) repose fortement sur la propriété régularisante du laplacien. Cela nous permet de ne pas imposer de régularité supplémentaire sur le champ $\mathbf{u}$, et nous demandons seulement (comme pour l'existence) $\mathbf{u} \in L^\infty$. En utilisant la formulation faible de (0.0.5) pour deux solutions (ρ^1, p^1) et (ρ^2, p^2), on introduit le problème adjoint

$$\begin{cases} A\partial_t\phi + (A+B)\Delta\phi + A\mathbf{u}\cdot\nabla\phi = AG, & \text{dans } [0,T[\times\Omega, \\ \nabla\phi\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } [0,T]\times\partial\Omega, & \phi(T,\cdot) = 0 \text{ p.p dans } \Omega, \end{cases} \tag{0.0.6}$$

où

$$A := \frac{\rho^1-\rho^2}{(\rho^1-\rho^2)+(p^1-p^2)}, \quad B := \frac{p^1-p^2}{(\rho^1-\rho^2)+(p^1-p^2)}$$

et G est une function lisse arbitraire. Après la régularisation de A et B, nous obtenons une famille d'équations uniformément paraboliques. En utilisant certaines estimations paraboliques de base pour ces problèmes et la formulation faible pour la différence des deux solutions d'une manière appropriée, on obtient

$$\int_0^T\int_\Omega(\rho^1-\rho^2)G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,$$

ce qui, par le caractère arbitraire de G, donne l'unicité de ρ. L'unicité de p suit par le même argument que dans le cas de premier ordre.

Ce chapitre est basé sur un travail commun avec S. Di Marino (voir [DMM15]).

Composé du Chapitre 4 et du Chapitre 5, la Partie II est dédiée à l'étude de certains systèmes de *jeux à champ moyen* sous contraintes de densité. Motivé par les questions soulevées par F. Santambrogio dans [San12], en fait cette partie est considérée comme le cœur de la thèse.

Introduits il y a une dizaine d'années par J.-M. Lasry et P.-L. Lions (voir [LL06a, LL06b, LL07] et aussi [HMC06]), les jeux à champ moyen visent à modéliser des limites d'équilibres de Nash des jeux différentiels (stochastiques), lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini. Ainsi, les systèmes MFG sont liés au problème de commande optimale d'un agent typique, où la densité de la population intervient comme paramètre, plus précisément

$$u(t,x) := \inf_\gamma\left\{\int_t^T L(\gamma(s),\dot\gamma(s)) + f(\gamma(s), m(s,\gamma(s)))\,\mathrm{d}s + g(\gamma(T))\right\}, \tag{0.0.7}$$

où la minimisation est prise parmi les courbes (suffisamment régulières) $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ avec $\gamma(t) = x$; $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction lagrangienne donnée, $f : \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ represent le coût courant et le coût final du système, respectivement. Par des méthodes classiques de la théorie de la commande optimale, la fonction valeur résout formellement une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. La densité de population est transporté par le champ de vitesse donné par la commande optimale $\alpha^* := -D_pH(\cdot, Du)$ dans le problème ci-dessus, donc formellement on obtient un système d'EDP couplé, que nous allons appeler d'après Lasry et Lions un système de MFG:

$$\begin{cases} \text{(i)} & -\partial_t u + H(x, Du) = f(x,m) & \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^d \\ \text{(ii)} & \partial_t m - \nabla \cdot (mD_pH(x, Du)) = 0 & \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^d \\ \text{(iii)} & u(T,x) = g(x), \quad m(0,x) = m_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{0.0.8}$$

Ici $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est la transformée de Legendre-Fenchel p.r. à la deuxième variable du lagrangien L et $m_0 \in \mathscr{P}_1(\mathbb{R}^d)$ est la densité initiale de la population. Une solution (u, m) du système ci-dessus représente une configuration d'équilibre aussi. Notons que l'agent typique doit "prédire" en quelque sorte l'évolution de l'ensemble de la population des autres agents afin d'être en mesure de résoudre son problème de commande optimal. Après l'obtention de la commande optimale et le calcul de l'évolution de la "vraie" densité, si cela correspond à la prédiction on dit que m est une *équilibre de Nash*. En d'autres termes (u, m) est une solution du système de MFG (0.0.8).

F. Santambrogio dans [San12] se demandait si un système de MFG du type (0.0.8) peut être obtenu de façon rigoureuse avec la contrainte supplémentaire que $m(t,x) \leq 1$ pour p.p. $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d$. L'auteur a discuté deux façons possibles pour attaquer cette question. La première est au niveau du problème de contrôle optimal (0.0.7), où les vitesses des courbes γ devraient être affectées par le gradient du champ de pression introduit (de même que dans les modèles de mouvement de foule), plus précisément les compétiteurs γ et α satisfont $\gamma(t) = x$ et $\dot\gamma(s) = \alpha(s) - \nabla p_s(\gamma(s)), s > t$. Cela conduit formellement à un système comme (0.0.8), où la pression $p : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ intervient comme nouvelle variable. D'après nos connaissances, l'analyse rigoureuse de cette approche est encore ouverte.

La deuxième alternative proposée par F. Santambrogio était d'essayer d'obtenir un système comme (0.0.8) avec la contrainte de densité comme limites des conditions d'optimalité de certains problèmes variationnels pénalisés.

Il est bien connu déjà depuis les travaux de J.-M. Lasry et P.-L Lions, que le système de MFG correspond formellement aux conditions d'optimalité de certains problèmes de contrôle optimal d'EDP. Plus précisément, la fonction valeur u est (formellement) donnée comme un minimiseur de la fonctionnelle

$$\mathcal{A}(u) := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} F^*(x, -\partial_t u + H(x, Du))\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)\, dm_0(x), \tag{0.0.9}$$

sous la contrainte $u(T,x) = g(x)$, où $F = F(x,m)$ est une primitive de $f = f(x,m)$ p.r. à m et F^* est la transformée de Legendre-Fenchel p.r. à la deuxième variable. De la même manière, m est (formellement) donné comme le minimum du problème

$$\mathcal{B}(m,\mathbf{w}) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)m(T,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^d} m(t,x)L\left(x, -\frac{\mathbf{w}}{m}\right) + F(x,m(t,x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{0.0.10}$$

sous la contrainte

$$\partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0 \quad \text{in } (0,T)\times\mathbb{T}^d, \qquad m(0) = m_0.$$

La proposition de F. Santambrogio dans [San12] était d'utiliser $F(x,m) := m^n/n$ et de prendre la limite lorsque $n \to \infty$. Par cette méthode, formellement, à la limite, la fonction F disparaît et la contrainte supplémentaire $m \leq 1$ p.p. apparaît. En fait, ceci est l'un des résultats que nous allons prouver rigoureusement au Chapitre 5. Une autre idée, similaire, est utilisée dans le Chapitre 4 pour montrer le caractère bien-posé des modèles de MFG stationnaires du second ordre avec des contraintes de densité. On va décrire ces résultats maintenant en détails.

Basé sur un travail commun avec F.J. Silva (voir [MS15b]), dans le Chapitre 4 nous étudions une classe de modèles de MFG stationnaires de deuxième ordre avec contraintes de densité. Les systèmes stationnaires ont déjà été introduits dans les travaux originaux de J.-M Lasry et P.-L. Lions (et plus tard étudiés dans [CLLP13, CLLP12]). Ils peuvent être considérés comme la limite moyenne en temps long/limite ergodique des systèmes dépendant du temps.

Dans ce chapitre, nous utilisons une technique variationnelle (similaire à celle présentée avant) et nous obtenons le système de MFG avec des contraintes de densité comme conditions d'optimalité pour ce problème. Pour décrire cela, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) un ouvert borné non vide avec une frontère lisse, tel que $\mathscr{L}^d(\Omega) > 1$. De plus, soit $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante dans la deuxème variable, et on définie $\ell_q : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{B}_q : W^{1,q}(\Omega)\times L^q(\Omega)^d \to \overline{\mathbb{R}}$ comme

$$\ell_q(a,b) := \begin{cases} \frac{1}{q}\frac{|b|^q}{a^{q-1}}, & \text{si } a > 0, \\ 0, & \text{si } (a,b) = (0,0), \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \mathcal{B}_q(m,\mathbf{w}) := \int_\Omega \ell_q(m(x),\mathbf{w}(x))\,\mathrm{d}x. \tag{0.0.11}$$

La fonctionnelle convexe, s.c.i. $\mathcal{B}_q$ est précisément celle introduite par J.-D. Benamou et Y. Brenier pour etudier une reformulation dynamique du problème de transport optimal de Monge-Kantorovich. Dans notre contexte, nous travaillons en effet avec une restriction de cette dernière à l'espace $W^{1,q}(\Omega)\times L^q(\Omega)^d$.

On considère le probeème

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathcal{B}_q(m,\mathbf{w}) + \int_\Omega F(x,m(x))\,\mathrm{d}x, \\ \text{s.c.} \quad & -\Delta m + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0 \ \text{ in } \Omega, \quad (\nabla m - \mathbf{w})\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ & \int_\Omega m(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad m \le 1, \end{aligned} \tag{P_q}$$

où, comme avant, $F(x,m)$ est une primitive de $f(x,m)$ p.r. à la seconde variable. Remarquons que, au lieu d'utiliser une pénalisation de la contrainte de densité, nous l'incluons directement dans le problème. Pour travailler de cette façon, il faut assurer une *condition de qualification/condition de point intérieur* pour la contrainte. Comme pour un $\mathbf{w}$ donné l'équation de Fokker-Planck stationnaire fournit la régularité pour m, nous avons besoin de bien choisir nos espaces fonctionnels.

Notre premier résultat préparatoire (avant d'écrire les conditions d'optimalité pour le problème ci-dessus) est une description précise du sous-différentiel de la fonctionnelle $\mathcal{B}_q$. Il semble que ce type de résultat est nouveau dans la littérature. Nous divisons maintenant nos principaux résultats en deux catégories, en fonction de la valeur de q.

Premier cas : $q > d$. Dans ce cas, en utilisant la méthode directe classique du calcul des variations, nous démontrons l'existence d'une solution $(m,\mathbf{w})$ de (P_q). En utilisant que $m \in W^{1,q} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, nous sommes en mesure de calculer le sous-différentiel de $\mathcal{B}_r(m,\mathbf{w})$ pour tout $1 < r \le q$. En plus, l'injection dans L^∞ de m nous permet de démontrer que les contraintes dans (P_q) sont qualifiées. En utilisant la formule pour le sous-différentiel avec $r = q$ et des arguments classiques en analyse convexe, nous dérivons l'existence de $u \in W^{1,s}(\Omega)$ ($s \in [1, d/(d-1)[$), $\lambda \in \mathbb{R}$ et de deux mesures μ et p positives régulières telles que

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{1}{q'}|\nabla u|^{q'} + \mu - p - \lambda = f(x,m), & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta m - \nabla\cdot\left(m|\nabla u|^{\frac{2-q}{q-1}}\nabla u\right) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla m\cdot\mathbf{n} = \nabla u\cdot\mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_\Omega m\,\mathrm{d}x = 1, \ \ 0 \le m \le 1, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{spt}(\mu) \subseteq \{m = 0\}, \quad \operatorname{spt}(p) \subseteq \{m = 1\}, \end{cases} \tag{MFG_q}$$

où le système d'EDP est satisfait au sens faible et $q' := q/(q-1)$. Dans le système ci-dessus, p apparaît comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $m \le 1$ et peut être interprété comme une sorte de "pression". Notons que cette pression diffère de celle présentée dans les modèles précédents de mouvements de foule congestionnés. En effet, dans ces EPD la pression est apparue à travers son gradient (parce qu'elle était une variable duale pour une contrainte de divergence), ici, elle apparaît comme une variable duale pour la contrainte $m \leq 1$, donc il est naturel de l'avoir dans cette forme dans l'équation duale. Notons aussi le fait que la contrainte de densité implique $m \in L^\infty$ de façon naturelle et, dans cet espace, la condition de qualification de contrainte tient automatiquement. On peut se demander pourquoi nous avons besoin de passer à travers les espaces de Sobolev et de la théorie de la régularité elliptique. La raison en est très simple: si l'on a choisi la topologie L^∞ pour m, la pression p comme variable duale vivrait a priori dans $(L^\infty)^*$, un espace qui est difficile à manier. Contrairement, si $q > d$ on a $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, l'espace dual de ce dernier étant l'espace des mesures de Radon signées.

Nous calculons aussi le problème dual associé à (P_q) en récupérant (MFG_q) par dualité. Enfin, dans l'ensemble ouvert $\{0 < m < 1\}$ nous prouvons certains résultats de régularité locaux pour le couple (m, u) en utilisant un argument de *bootstrap*.

Deuxième cas : $1 < q \leq d$. Dans ce cas, même si l'existence d'une solution est toujours vraie, m est en général discontinu, ce qui implique que les arguments utilisés dans le calcul du sous-différentiel de $\mathcal{B}_q(m, \mathbf{w})$ ne sont plus valables. En plus, dans la topologie $W^{1,q}$ pour m la contrainte $0 \leq m \leq 1$ n'est pas en général qualifiée. Pour surmonter ces problèmes techniques, nous utilisons un argument d'approximation. En ajoutant le terme $\varepsilon\mathcal{B}_r(m, \mathbf{w})$ avec $r > d$ à la fonction de coût et en utilisant les arguments du *Premier cas*, on obtient un système similaire à (MFG_q) en fonction de $\varepsilon > 0$. Ensuite, par le biais de quelques limites uniformes par rapport à ε et de résultats connus sur les estimations du gradient pour les solutions d'équations elliptiques avec des données mesures (voir par exemple [Min07] pour des résultats récents de régularité qui traitent également des problèmes non linéaires), lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, nous pouvons prouver l'existence de points limites satisfaisant (MFG_q), où les propriétés de concentration pour p et μ doivent être interprétées au sens faible.

Puisque nous avons obtenu les systèmes de MFG dans ce chapitre par une manière directe, à l'aide de la caractérisation du sous-différentiel de la fonctionnelle $\mathcal{B}_q$, nous avons observé que l'on peut retirer l'hypothèse de convexité sur la fonction F. Par conséquent, il est possible de considerer une plus grande classe de problèmes non-convexes et l'analyse effectuée avant s'applique toujours. De plus, certains problèmes sans contraintes de densité peuvent être traités de cette façon. Nous avons également inclus ces remarques dans ce chapitre. Ces extensions possibles sont l'objet d'une collaboration en cours avec F.J. Silva (voir [MS]).

Le Chapitre 5 est le denier chapitre de cette thèse. Il est basé sur un travail commun avec P. Cardaliaguet et F. Santambrogio (voir [CMS15]). Comme nous l'avons souligné quelques pages avant, ici, nous étudions le caractère bien-posé des systèmes de MFG évolutifs de premier ordre sous des contraintes de densité. Notre stratégie est variationnelle, et repose sur une technique de pénalisation, mentionnée aussi dans [San12]. Ainsi nous obtenons un système de MFG avec la contrainte supplémentaire sur la densité comme conditions d'optimalité de deux problèmes de contrôle optimal en dualité. Ces deux problèmes sont ceux pour les fonctionnelles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ décrites dans (0.0.9) et (0.0.10). Pour éviter des technicités sur la frontière, dans l'ensemble de ce chapitre nous travaillons avec des conditions périodiques au bord, donc nous avons mis $\Omega := \mathbb{T}^d$, le tôre plat $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. La contrainte de densité est donnée par une constante positive $\overline{m} > 1 = 1/\mathscr{L}^d(\mathbb{T}^d)$ et elle peut être modélisée au moyen d'un prix infini à payer si un agent passe par une zone où $m > \overline{m}$.

Néanmoins, il y a plusieurs problèmes avec l'interprétation d'un système MFG quand on a affaire à une contrainte de densité. En effet, le problème de contrôle optimal pour les agents dans l'interprétation ci-dessus n'a pas plus de sens pour la raison suivante : si, d'une part, la contrainte $m \leq \overline{m}$ est satisfaite, alors le problème de minimisation pour les agents (en raison du fait qu'ils sont considérés négligeables par rapport aux autres) ne voit pas cette contrainte et le couple (u, m) est la solution d'un système de MFG standard ; mais cette solution n'a aucune raison de satisfaire la contrainte, et il y a une contradiction. D'autre part, s'il y a des endroits où $m(t, x) > \overline{m}$, alors les joueurs ne passent pas par ces endroits parce que leur coût est infini : mais alors la densité aux ces endroits est zéro, et il y a à nouveau une contradiction. Ainsi, afin de comprendre le système de MFG avec une contrainte de densité, il faut changer notre point de vue. Nous verrons qu'il existe plusieurs façons de comprendre plus profondément les phénomènes derrière cette question.

Une manière de résoudre la question ci-dessus est de travailler au niveau des deux problèmes d'optimisation. La contrainte de densité est incluse dans la fonction F, plus précisément nous posons $F = +\infty$ sur l'ensemble où la deuxième variable est dans $(-\infty, 0) \cup (\overline{m}, +\infty)$. En utilisent une relaxation similaire à celle du problème pour $\mathcal{A}$, comme dans [Car13], nous montrons l'existence d'une solution. L'existence pour le problème dual, qui porte sur $\mathcal{B}$, est une simple conséquence du théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar. Le système de conditions d'optimalité pour ces deux problèmes est le système de MFG suivant :

$$\begin{cases} \text{(i)} & -\partial_t u + H(x, Du) & = & f(x, m) + \beta & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{T}^d \\ \text{(ii)} & \partial_t m - \nabla \cdot (m D_p H(x, Du)) & = & 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{T}^d \\ \text{(iii)} & u(T, x) = g(x) + \beta_T, & & m(0, x) = m_0(x) & \text{dans } \mathbb{T}^d \\ \text{(iv)} & 0 \leq m \leq \overline{m} & & & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{T}^d \end{cases} \tag{0.0.12}$$

À côté de la contrainte de densité attendue (iv), deux termes supplémentaires apparaissent : β en (i) et β_T end (iii). On peut voir que ces deux quantités sont non négatives et se concentrent sur l'ensemble $\{m = \overline{m}\}$. Elles correspondent formellement à un prix supplémentaire payé par les joueurs s'ils passent par des zones où la concentration est saturée, plus précisément où $m = \overline{m}$. En d'autres termes, le nouveau problème de contrôle optimal pour les joueurs est maintenant (formellement)

$$u(t,x) = \inf_{\substack{\gamma \\ \gamma(t)=x}} \int_t^T L(\gamma(s),\dot\gamma(s)) + f(\gamma(s), m(s,\gamma(s)) + \beta(s,\gamma(s))\,\mathrm{d}s$$
$$+ g(\gamma(T)) + \beta_T(\gamma(T)), \tag{0.0.13}$$

et donc (encore formellement) u satisfait le principe de programmation dynamique : pour tout $0 \le t_1 \le t_2 < T$,

$$u(t_1,x) = \inf_{\substack{\gamma \\ \gamma(t_1)=x}} \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(s),\dot\gamma(s)) + f(\gamma(s), m(s,\gamma(s)) + \beta(s,\gamma(s))\,\mathrm{d}s$$
$$+ u(t_2,\gamma(t_2)). \tag{0.0.14}$$

Les "prix supplémentaires" β et β_T découragent un nombre trop élevé de joueurs à être attirés par la région où la contrainte est saturée, assurant ainsi que la contrainte de densité (iv) soit satisfaite.

Une autre façon d'interpréter la contrainte de densité, est par un argument d'approximation. On peut utiliser une approximation $f^\varepsilon(x,m)$ qui tend vers $f(x,m)$ uniformément si $m \in [0,\overline{m}]$ et $+\infty$ si $m \in (\overline{m},+\infty)$. Pour ces couplages la théorie classique s'applique, et nous montrons que (u,m) correspond à la configuration limite (à des sous-suites près) des $(u^\varepsilon, m^\varepsilon)$ correspondants, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

L'une des principales contributions de ce chapitre est la détermination de certains liens forts entre notre modèle de MFG avec contrainte de densité et les équations d'Euler incompressibles étudiés par Y. Brenier (voir [Bre99]) et aussi par L. Ambrosio et A. Figalli (voir [AF09]). En fait, cette connexion n'est pas surprenante. Tout d'abord, la contrainte d'incompressibilité dans le modèle de Brenier pour étudier des fluides parfaits introduit bien un champ de pression. Moralement le même effet se produit si on impose la contrainte de densité pour des MFG (avec la seule différence qu'on impose une contrainte de densité unilatérale, et donc la pression a un signe). Deuxièmement, à la fois le modèle de Brenier et le nôtre ont une structure variationnelle, similaire aussi à celle introduite par Benamou et Brenier dans [BB00]. Par conséquent, les termes β et β_T, que nous appelons "prix supplémentaires" pour les agents (qui apparaissent uniquement lorsqu'ils traversent des zones saturées) dans (0.0.12) correspondent à une sorte de pression de la mécanique des fluides. Cette observation motive le titre de ce chapitre aussi.

En utilisant des techniques similaires à celles de [Bre99] et [AF09, AF08], nous montrons que β est une fonction $L^2_{\rm loc}((0,T);BV(\mathbb{T}^d)) \hookrightarrow L^{d/(d-1)}_{\rm loc}((0,T)\times\mathbb{T}^d)$ (a priori, on ne pouvait que supposer qu'il s'agisse seulement d'une mesure) et β_T est $L^1(\mathbb{T}^d)$. À l'aide d'un exemple, nous montrons que cette intégrabilité peut échouer au voisinage du temps final $t = T$, montrant également une sorte d'*optimalité* du résultat. Cette propriété de régularité nous permettra de donner une meilleure (bien que faible) signification au problème du contrôle (0.0.13) et d'obtenir des conditions d'optimalité le long de trajectoires individuelles de chauque agent. Nos techniques pour procéder avec l'analyse reposent sur les propriétés des mesures définies sur des chemins, que nous appellerons des *flot sous contrainte de densité* dans notre contexte, et on exploite certaines propriétés d'une fonctionnelle maximale de type Hardy-Littlewood. Nous décrivons ces résultats plus en détail. Les preuves sont fortement inspirées de [AF09].

Soit Γ l'ensemble des courbes $\gamma : [0, T] \to \mathbb{T}^d$ absolument continues et $\mathscr{P}_2(\Gamma)$ l'ensemble des mesures de probabilité Borelliennes $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ définies sur Γ telles que

$$\int_\Gamma \int_0^T |\dot{\gamma}(s)|^2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(\gamma) < +\infty.$$

On appelle $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ un *flot sous contrainte de densité* si $0 \leq \tilde{m}_t \leq \overline{m}$ p.p. dans $\mathbb{T}^d$ pour tout $t \in [0, T]$, où $\tilde{m}_t := (e_t)_\# \tilde{\boldsymbol{\eta}}$. Ici $e_t : \Gamma \to \mathbb{T}^d$ désigne l'application d'évaluation au temps $t \in [0, T]$, $e_t(\gamma) := \gamma(t)$. Soit (u, m, β, β_T) une solution du système de MFG (0.0.12).

On dit que $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{P}_2(\Gamma)$ est un *flot sous contrainte de densité optimal* associé à la solution (u, m, β, β_T) si $m(t, \cdot) = (e_t)_\# \boldsymbol{\eta}$, pour tout $t \in [0, T]$ et l'égalité d'énergie suivante est satisfaite

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} u(0^+, x) m_0(x) \,\mathrm{d}x = &\int_{\mathbb{T}^d} g(x) m(T, x) \,\mathrm{d}x + \overline{m} \int_{\mathbb{T}^d} \beta_T \,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Gamma \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\gamma) \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (f(x, m(t, x)) + \beta(t, x))\, m(t, x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Soit $\alpha := f(\cdot, m) + \beta$. Pour décrire notre résultat final, nous allons définir la notion suivante. Pour $0 < t_1 < t_2 < T$, nous disons qu'un chemin $\gamma \in H^1([0, T]; \mathbb{T}^d)$ avec $M\hat{\alpha}(\cdot, \gamma) \in L^1_{\mathrm{loc}}((0, T))$ est *minimisant* sur l'interval de temps $[t_1, t_2]$ pour le problème (0.0.14) si on a

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t_2^+, \gamma(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + \hat{\alpha}(t, \gamma(t)) \,\mathrm{d}t &\leq \hat{u}(t_2^-, \gamma(t_2) + \omega(t_2)) + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t) + \omega(t), \dot{\gamma}(t) + \dot{\omega}(t)) + \hat{\alpha}(t, \gamma(t) + \omega(t)) \,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

pour tout $\omega \in H^1([t_1, t_2]; \mathbb{T}^d)$ tel que $\omega(t_1) = 0$ et $M\hat{\alpha}(\cdot, \gamma + \omega) \in L^1([t_1, t_2])$. Ici $\hat{\alpha}$ désigne un représentant spécial de $\alpha \in L^{d/(d-1)}_{\mathrm{loc}}((0, T) \times \mathbb{T}^d)$ défini comme étant

$$\hat{\alpha}(t, x) := \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} (\alpha(t, \cdot) \star \rho_\varepsilon)(x),$$

pour p.t. $t \in (0, T)$, où la mollification est réalisée avec le noyau de la chaleur ρ_ε. Cette hypothèse pour la classe des compétiteurs, plus précisément $M\hat{\alpha}(\cdot, \gamma) \in$

$L^1_{\rm loc}((0,T))$, est imposée pour être capable de gérer les passages à la limite (dans la régularisation, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$). Nous aurons besoin de certaines bornes uniformes ponctuelles sur $\alpha \star \rho_\varepsilon$, donc nous allons utiliser les propriétés de la fonctionnelle maximale de type Hardy-Littlewood définie à l'aide du noyau de la chaleur. Ainsi, pour tout $h \in L^1(\mathbb{T}^d)$ nous posons

$$(Mh)(x) := \sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}^d} |h(x+\varepsilon y)|\rho(y)\,\mathrm{d}y.$$

Notons que, en particulier, il existe une constante $C>0$ telle que $\|Mh\|_{L^r(\mathbb{T}^d)} \le C\|h\|_{L^r}$ pour tout $h \in L^r(\mathbb{T}^d)$ et $r>1$. En plus $M(h\star\rho_\varepsilon) \le Mh$. Notre résultat principal dans ce contexte est le suivant.

Théorème 0.0.3. *Il existe au moins un flot sous contrainte de densité optimal $\boldsymbol{\eta}$. De plus, pour tout $0<t_1<t_2<T$, $\boldsymbol{\eta}$ se concentre sur des chemins minimisants sur l'intervalle de temps $[t_1,t_2]$ pour le problème (0.0.14) au sens décrit auparavant.*

Enfin, ce théorème fournit l'existence d'une *faible équilibre de Nash locale* dans notre modèle.

Soit (u,m,β,β_T) une solutions du système de MFG avec des contraintes de densité sur $[0,T]\times\mathbb{T}^d$. On dit que (m,β,β_T) est un *équilibre de Nash local faible* s'il existe un flot sous contrainte de densité optimal $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{P}_2(\Gamma)$ (construit à l'aide de (m,β,β_T)) qui est concentré sur les chemins localement minimisants du problème (0.0.14). En particulier, on a que $m_t = (e_t)_\#\boldsymbol{\eta}$ et $0 \le m_t \le \overline{m}$ p.p. dans $\mathbb{T}^d$ pour tout $t\in[0,T]$.

Structurellement, à côté des cinq chapitres détaillés précédemment, la thèse contient deux petits chapitres non numérotés supplémentaires. Dans la Partie I nous avons inclus une "Boîte à outils de transport optimal" (*Optimal Transport toolbox*), où nous avons recueilli tous les résultats et les références classiques sur la théorie du transport optimal qui sont nécessaires par la suite. Comme la Partie II est entièrement dédiée aux systèmes de MFG avec des contraintes de densité, nous avons inclus un court chapitre sur l'histoire de MFG, juste avant les deux principaux chapitres de cette partie. Enfin, nous terminons la thèse avec un appendice, où nous avons recueilli quelques résultats bien connus d'analyse convexe, de théorie de $\Gamma-$convergence et des résultats bien connus sur l'existence et la régularité des solutions des équations elliptiques avec des données mesures.

Bibliography

[AF08] L. Ambrosio and A. Figalli. On the regularity of the pressure field of Brenier's weak solutions to incompressible Euler equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 31(4):497–509, (2008).

[AF09] L. Ambrosio and A. Figalli. Geodesics in the space of measure-preserving maps and plans. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 194(2):421–462, (2009).

[AGS08] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Second edition. Lecture notes in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Bassel, (2008).

[AKY14] D. Alexander, I. Kim, and Y. Yao. Quasi-static evolution and congested crowd transport. *Nonlinearity*, 27(4):823–858, (2014).

[BB00] J.-D. Benamou and Y. Brenier. A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem. *Numer. Math.*, 84(3):375–393, (2000).

[Bre99] Y. Brenier. Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(4):411–452, (1999).

[Car13] P. Cardaliaguet. Weak solutions for first order mean field games with local coupling. *preprint*, (2013).

[Cha07] C. Chalons. Numerical approximation of a macroscopic model of pedestrian flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(2):539–555, (2007).

[CLLP12] P. Cardaliaguet, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, and A. Porretta. Long time average of mean field games. *Netw. Heterog. Media*, 7(2):279–301, (2012).

[CLLP13] P. Cardaliaguet, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, and A. Porretta. Long time average of mean field games with a nonlocal coupling. *SIAM J. Control Optim.*, 51(5):3558–3591, (2013).

[CM10] L. A. Caffarelli and R. J. McCann. Free boundaries in optimal transport and Monge-Ampère obstacle problems. *Ann. of Math. (2)*, 171(2):673–730, (2010).

[CMS15] P. Cardaliaguet, A.R. Mészáros, and F. Santambrogio. First order Mean Field Games with density constraints: pressure equals price. *preprint*, (2015).

[CPT14] E. Cristiani, B. Piccoli, and A. Tosin. *Multiscale modeling of pedestrian dynamics*, volume 12 of *MS&A. Modeling, Simulation and Applications*. Springer, Cham, (2014).

[CR05] R.M. Colombo and M.D. Rosini. Pedestrian flows and non-classical shocks. *Math. Methods Appl. Sci.*, 28(13):1553–1567, (2005).

[DMM15] S. Di Marino and A.R. Mészáros. Uniqueness issues for evolution equations under density constraints. *preprint*, (2015).

[Dog08] C. Dogbé. On the numerical solutions of second order macroscopic models of pedestrian flows. *Comput. Math. Appl.*, 56(7):1884–1898, (2008).

[DPMSV14] G. De Philippis, A.R. Mészáros, F. Santambrogio, and B. Velichkov. BV estimates in optimal transportation and applications. *preprint available at* `http://cvgmt.sns.it/paper/2559/`, (2014).

[Fig10] A. Figalli. The optimal partial transport problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 195(2):533–560, (2010).

[Hel92] D. Helbing. A fluid-dynamic model for the movement of pedestrians. *Complex Systems*, 6(5):391–415, (1992).

[HM95] D. Helbing and P. Molnár. Social force model for pedestrian dynamics. *Phys. Rev. E*, 51:4282–4286, (1995).

[HMC06] M. Huang, R. P. Malhamé, and P. E. Caines. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. *Commun. Inf. Syst.*, 6(3):221–251, (2006).

[Hug02] R.L. Hughes. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(6):507 – 535, (2002).

[Hug03] R.L. Hughes. The flow of human crowds. In *Annual review of fluid mechanics, Vol. 35*, volume 35 of *Annu. Rev. Fluid Mech.*, pages 169–182. Annual Reviews, Palo Alto, CA, (2003).

[JKO98] R. Jordan, D. Kinderlehrer, and F. Otto. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(1):1–17, (1998).

[Lio08] P.-L. Lions. *Cours au Collège de France*. www.college-de-france.fr, (2007-2008).

[LL06a] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Jeux à champ moyen I. Le cas stationnaire. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343:619–625, (2006).

[LL06b] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Jeux à champ moyen II. Horizon fini et contrôle optimal. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343:679–684, (2006).

[LL07] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Mean field games. *Jpn. J. Math.*, 2:229–260, (2007).

[Més12] A.R. Mészáros. *Mean Field Games with density constraints*. MSc thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France, available at http://www.math.u-psud.fr/~meszaros/theses/msc_thesis_polytechnique.pdf, (2012).

[Min07] G. Mingione. The Calderón-Zygmund theory for elliptic problems with measure data. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 6(2):195–261, (2007).

[MRCS10] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, and F. Santambrogio. A macroscopic crowd motion model of gradient flow type. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(10):1787–1821, (2010).

[MRCS14] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, and F. Santambrogio. Congestion-driven dendritic growth. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34(4):1575–1604, (2014).

[MRCSV11] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio, and J. Venel. Handling congestion in crowd motion modeling. *Netw. Heterog. Media*, 6(3):485–519, (2011).

[MS] A.R. Mészáros and F.J. Silva. On the variational formulation of some stationary second order Mean Field Games. *in preparation*.

[MS15a] A.R. Mészáros and F. Santambrogio. A diffusive model for macroscopic crowd motion with density constraints. *preprint available at* *http://cvgmt.sns.it/paper/2644/*, (2015).

[MS15b] A.R. Mészáros and F.J. Silva. A variational approach to second order Mean Fidld Games with density constraints: the stationary case. *J. Math. Pures Appl., to appear*, preprint available at http://cvgmt.sns.it/paper/2630/, (2015).

[MV07] B. Maury and J. Venel. Un modèle de mouvements de foule. In *Paris-Sud Working Group on Modelling and Scientific Computing 2006–2007*, volume 18 of *ESAIM Proc.*, pages 143–152. EDP Sci., Les Ulis, (2007).

[NPS11] L. Natile, M.A. Peletier, and G. Savaré. Contraction of general transportation costs along solutions to Fokker-Planck equations with monotone drifts. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 95(1):18–35, (2011).

[PQV14] B. Perthame, F. Quirós, and J. L. Vázquez. The Hele-Shaw asymptotics for mechanical models of tumor growth. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 212(1):93–127, (2014).

[RC11] A. Roudneff-Chupin. *Modélisation macroscopique de mouvements de foule*. PhD Thesis, Université Paris-Sud, available at http://www.math.u-psud.fr/~roudneff/Images/these_roudneff.pdf, (2011).

[San12] F. Santambrogio. A modest proposal for MFG with density constraints. *Netw. Heterog. Media*, 7(2):337–347, (2012).