Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation

Julia Pilet

UNIVERSITÉ PARIS.DIDEROT (Paris 7)
UFR de Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques :
épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Julia PILET

Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation

---

Thèse dirigée par Madame Brigitte GRUGEON-ALLYS

Soutenue publiquement le 11 décembre 2012

Membres du jury :

Marianna BOSCH, Universitat Ramon Llull, rapporteuse
Hamid CHAACHOUA, Université Joseph-Fourrier de Grenoble, rapporteur
Élisabeth DELOZANNE, Université Pierre-et-Marie-Curie, examinatrice
Brigitte GRUGEON-ALLYS, Université Paris-Créteil-Est, directrice de thèse
Éric RODITI, Université Paris-Descartes, examinateur
Fabrice VANDEBROUCK, Université Paris-Diderot, examinateur

Remerciements

Ces trois années de thèse ont été d'une richesse inestimable en questionnements et en rencontres. C'est avec émotion que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ma thèse.

J'adresse en premier lieu mes remerciements les plus sincères à Brigitte Grugreon-Allys pour avoir dirigé cette thèse. Sa confiance, son soutien, sa disponibilité sans limite et ses conseils avisés m'ont permis de réaliser mon travail dans les meilleures conditions. Je lui suis infiniment reconnaissante de m'avoir proposé de m'inscrire dans la lignée des travaux de recherche qu'elle mène depuis plusieurs années.

Je remercie Françoise Quentin-Chenevotot. Présente dès mes premiers pas en didactique des mathématiques, elle a toujours su porter un regard judicieux sur mon travail et effectuer des relectures méticuleuses.

Je remercie également Élisabeth Delozanne d'avoir accepté de faire partie mon jury de thèse. Ses conseils, toujours pertinents, m'ont beaucoup enrichie et encouragée.

Je remercie Michèle Artigue. Tous les entretiens qu'elle m'a accordés ont contribué à une prise de recul et à un nouvel élan dans ma recherche.

Je remercie tous les participants du projet PepiMeP et l'association Sésamath, grâce à qui j'ai pu vivre l'aventure tant professionnelle qu'humaine d'une recherche pluridisciplinaire. Nos rendez-vous du lundi, parfois vifs en discussions, ont contribué à la dynamique de ma recherche et à mon évolution de jeune chercheuse. Je tiens à remercier : Naima El-Kechai, Arnaud Rommens, Yvonnick Labed, Claire Cazes et particulièrement Dominique Prévit dont le travail de qualité a fortement contribué à la réalisation du projet.

Merci à Cécile, Fabrice, Françoise H., Françoise P., Bruno et Marianne pour s'être prêtés au jeu de la recherche et avoir si chaleureusement ouvert les portes de leurs classes. Nos discussions dans le groupe IREM ont considérablement fait évoluer mon regard sur l'enseignement de l'algèbre.

Je remercie Marianna Bosch et Hamid Chaachoua, les rapporteurs de cette thèse, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'adresse également mes remerciements à Éric Roditi et Fabrice Vandebrouck qui me font l'honneur d'être membres de mon jury. À cette occasion, je tiens à exprimer ma reconnaissance à Éric pour avoir contribué à mon recrutement en tant qu'ATER à l'Université Paris-Descartes ce qui me permet de terminer ma thèse dans les meilleures conditions.

Je remercie toute l'équipe du Laboratoire de Didactique André Revuz de l'Université Paris-Diderot pour son accueil chaleureux. Merci à Evelyne, Martine, Sandrine et Nadine pour leur travail de qualité et leurs encouragements. Merci à Vincent pour son assistance à la gestion des caméras et des dictaphones. Merci à Jérôme pour son aide précieuse dans mes recherches bibliographiques ; il a su divertir nos repas du midi par des récits qui donnaient lieu à des discussions toujours plus originales et variées.

J'ai une pensée émue pour tous les occupants des bureaux de doctorants 5C6 et 5B1. Grâce à eux, j'ai trouvé un espace de détente et d'échanges où je pouvais évoquer tous les petits soucis de la vie du thésard. Il y a ceux qui sont là depuis le début, merci à : Quellita pour son rôle de l'infirmière en Pologne, Carolina pour ses encouragements et sa bienveillance, Marc, le roi du LaTeX, sans qui ma bibliographie aurait été privée de majuscules, Pablo pour ses idées créatives et son camion dédié aux sorties en groupe et Laura dont la présence apportait la chaleur de l'Italie. Il y a les anciens. Merci à : Yann pour sa bonne humeur, David pour sa capacité à déconcentrer tout le monde, Avenilde pour son sourire, Brice pour ses séances de cinéma, Victor pour la salsa, Rémi à qui on dit « Vive la cryptographie ! » et Joseph qu'on espère revoir à Paris ! Et puis il y a ceux qui sont arrivés en cours de route. Merci à : Soraya, ma compagne sur le terrain des expérimentations (bon courage pour la suite !), Zoé pour la logique, Luis pour avoir persévéré dans ses visites en 5C6, Dominique pour sa gentillesse, Lynn pour les relectures en anglais, Katalin et Assia pour leur enthousiasme des débuts de thèse. Merci enfin à Nicole. Présente avant, pendant et après, tu n'as, certes, pas commencé ta thèse mais tu occupes ta place en 5C6 avec tes bons conseils, tes rigolades et tes coupes de cheveux.

Merci à toute l'équipe des jeunes chercheurs pour la vitalité de ses échanges scientifiques et toutes les soirées sans didactique : Nicolas, Hussein, Joris, Simon, Marie-Line, Stéphane, Marianne, Éric, Sara...

Merci à l'association En Act de m'avoir donné envie de faire du théâtre et à Yann de m'avoir embarquée dans le projet fou de monter une pièce durant la dernière année de la thèse. Merci à toute la troupe Pauline K., Pauline M., Jeanne, Soline, Romain, Antoine, Charlotte, Denis, Gaëlle, Sylvain, Violaine, Renaud, Céline, Vanessa.

Je tiens à remercier Yves Pineau, mon kinésithérapeute. Grâce à ses connaissances inépuisables sur le dos, j'ai pu éviter le drame du torticolis. Promis, maintenant, je me tiens droite !

Merci à mes voisins Ronan, Julien et Jacqueline avec qui c'est toujours un plaisir de gérer l'immeuble.

Merci à mes amis les plus chers. Momo, ton amitié, ta bonne humeur et nos discussions sur tout et n'importe quoi ont représenté un soutien inestimable. J'en profite pour saluer la « bande des Italiens » avec qui j'ai passé tant de soirées : Marco, Ilena, Nicole, Giulio, Claudia, Paolo et tous les autres. Sara, promis, je vais trouver un train pour te rendre visite dans ton nouveau chez toi. Meli et Christophe, en écrivant vos noms, j'ai le goût du maté et des rêves d'Argentine. Violaine et Rémi, le duo des anciens Beaumontois, vous êtes restés mes fidèles camarades de classe (et si on se remettait à la musique ?). Lorraine, tu as prouvé que tu étais l'amie de toujours. Andrea, merci pour l'énergie que tu as mise à me faire découvrir l'Italie. Mose, merci pour la découverte du Blue Note et de Berlin. Tessa, merci pour la gaieté de nos balades en Ile-de-France.

Mes remerciements s'adressent enfin à ma famille. À mes parents qui m'ont toujours épaulée, n'ont jamais douté de moi et ont su m'accompagner dans les moments les plus difficiles. Un immense merci à ma mère qui a surmonté les termes techniques du didacticien pour corriger l'orthographe et les phrases bancales. À mon père qui m'a aidé à me ressourcer en respirant l'air iodé de la Méditerranée. À Elsa dont la complicité, infaillible, même par-delà les monts, les vaux et, depuis l'an dernier, l'océan Atlantique, m'a été d'une aide précieuse. À Archie dont les petits plats, de plus en plus réussis, m'ont réconfortée à de nombreuses reprises et m'ont procuré de la nourriture spirituelle. À Papé, Mamie, Sig et Mémé pour leur soutien de toujours.

Enfin merci à Sido qui, depuis sa douillette couverture, est la seule à avoir assisté à toutes les étapes de la rédaction. Sa sagesse, son regard profond et ses roulades au soleil me donnent toujours plus de courage pour la suite...

Table des matières

1 Problématique et méthodologie **15**

1.1 Problématique 15

1.1.1 Gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et différenciation de l'enseignement 15

1.1.2 Hétérogénéité des apprentissages 17

1.1.3 Deux processus de différenciation 18

1.1.4 Question centrale et premières hypothèses de travail 21

1.1.5 Enjeu de notre travail 21

1.2 Contexte de la recherche : le projet PepiMeP et le logiciel de diagnostic Pépite 22

1.2.1 Les projets Pépite et Lingot 23

1.2.2 Le projet PepiMeP 27

1.2.3 Délimitation du sujet de thèse 28

1.2.4 Une troisième hypothèse de travail 30

1.3 Objectifs de la thèse 31

1.3.1 Modélisation de parcours d'enseignement différencié 31

1.3.2 Précisons notre questionnement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique 32

1.3.3 Des hypothèses 33

1.4 Principaux choix théoriques et méthodologiques 35

1.4.1 Le cadre de la théorie anthropologique de la didactique 35

1.4.2 Une analyse basée sur une OM épistémologique de référence relative aux expressions algébriques 38

1.4.3 Opérationnalisation de l'OM de référence 39

1.4.4 Modèle de parcours d'enseignement différencié 40

1.4.5 Une démarche itérative de conception du modèle de PED . . . 42

1.5 Plan d'étude 46

2 Une référence épistémologique à partir de travaux de didactique de l'algèbre **49**

2.1 Des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre dans la TAD . . . 50

2.1.1 La notion de modélisation dans les travaux de Chevallard . . . 51

2.1.2 Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire dans les travaux de Gascón . . . 52

2.1.3 Un modèle de l'algèbre élémentaire comme processus d'algébrisation de programmes de calcul dans les travaux de Ruiz-Munzón . . . 53

2.1.4 Conclusion . . . 56

2.2 Le modèle de l'activité algébrique dans les travaux de Kieran . . . 57

2.2.1 Les sources de signification de l'algèbre chez Kieran . . . 57

2.2.2 L'activité générative . . . 63

2.2.3 L'activité transformationnelle . . . 67

2.2.4 L'activité globale . . . 73

2.2.5 Complémentarité des trois types d'activité . . . 74

2.2.6 Conclusion . . . 74

2.3 En conclusion : une référence épistémologique pour nos travaux . . . 75

3 OM de référence et OM à enseigner relativement aux expressions algébriques **79**

3.1 Une OM de référence . . . 80

3.1.1 Place de l'OM régionale dans l'OM globale du domaine algébrique . . . 80

3.1.2 Trois OM locales . . . 81

3.1.3 OM1, Génération des expressions algébriques . . . 83

3.1.4 OM2, Équivalence des expressions algébriques . . . 86

3.1.5 OM3, Algèbre des polynômes . . . 89

3.1.6 Conclusion . . . 92

3.2 Questions et méthodologie . . . 93

3.3 Analyse des programmes . . . 95

3.3.1 Les programmes étudiés . . . 95

3.3.2 A propos de l'organisation des programmes . . . 95

3.3.3 A propos de la terminologie adoptée . . . 96

3.3.4 Analyse écologique . . . 97

3.3.5 Analyse praxéologique 105
3.3.6 Synthèse sur l'OM à enseigner dans les programmes 110
3.4 Analyse des manuels 112
3.4.1 Choix des manuels 112
3.4.2 Analyse écologique 115
3.4.3 Analyse praxéologique 122
3.4.4 Synthèse sur l'OM à enseigner dans les manuels 162
3.5 Synthèse 166
3.5.1 Caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner 167
3.5.2 Des implicites dans l'enseignement de l'algèbre 167
3.5.3 Deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié 169
3.5.4 A propos de la convocation de OM2 dans la résolution des problèmes du brevet des collèges, une évolution de l'OM à enseigner ? 170
3.5.5 A propos de l'OM enseignée 173

4 Modélisation de parcours d'enseignement différencié 175
4.1 Interprétation des OM apprises dans l'OM de référence 176
4.1.1 Les tâches diagnostiques 176
4.1.2 L'analyse *a priori* pour coder les réponses des élèves 180
4.1.3 Le regroupement des stéréotypes pour catégoriser les OM apprises 191
4.1.4 Une catégorisation des OM apprises 193
4.1.5 La part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises : des sous-questions génératrices 200
4.2 Le modèle de PED 201
4.2.1 Une démarche itérative et collaborative avec les enseignants et les chercheurs en informatique 202
4.2.2 Questions centrales dans la modélisation 203
4.2.3 Description du modèle de PED 204
4.3 Analyse *a priori* de trois PED 212
4.3.1 Méthodologie 213
4.3.2 Analyse *a priori* du parcours 1 213
4.3.3 Analyse *a priori* du parcours 2 232
4.3.4 Analyse *a priori* du parcours 3 240

4.4 Collaboration avec les différents partenaires du projet PépiMeP . . . 251
4.4.1 Collaboration avec les enseignants du groupe IREM 251
4.4.2 Collaboration avec les chercheurs en informatique, les développeurs et l'association Sésamath 253
4.5 Bilan 264

5 Analyses des expérimentations 265
5.1 Questions et méthodologie 266
5.1.1 Questions et cadres théoriques 266
5.1.2 Déroulement des expérimentations et données recueillies . . . 267
5.1.3 Méthodologie d'analyse des données 269
5.2 Analyse des expérimentations dans la classe de 3e de Garance 271
5.2.1 Un portrait de Garance et de ses élèves 271
5.2.2 La répartition des élèves en groupe 284
5.2.3 Parcours 1 : les choix de Garance 286
5.2.4 Analyse *a posteriori* sur le parcours 1 290
5.2.5 Parcours 2 : les choix de Garance 309
5.2.6 Analyse *a posteriori* du parcours 2 312
5.2.7 Parcours 3 : les choix de Garance 326
5.2.8 Analyse *a posteriori* du parcours 3 330
5.2.9 L'évolutions des technologies « dominantes » utilisées par les élèves sur le moyen terme 340
5.2.10 Conclusion sur les expérimentations 343
5.3 Evolution de la répartition des élèves en groupe sur l'ensemble des classes 348
5.3.1 Présentation des graphiques et premières analyses 348
5.3.2 Quelques analyses sur l'évolution de la répartition des élèves en groupe 354

6 Conclusion et perspectives 357
6.1 Une OM épistémologique de référence 359
6.1.1 Référence épistémologique 359
6.1.2 OM épistémologique de référence 359
6.2 Une opérationnalisation de l'OM de référence 360
6.2.1 Du côté de l'institution : OM à enseigner 360
6.2.2 Du côté des élèves : OM apprises et technologies dominantes . 361

6.3 Le modèle de parcours d'enseignement différencié . . . 362
6.3.1 La modélisation . . . 362
6.4 Perspectives . . . 366

Références **369**

A Le test diagnostic Pépite **385**
A.1 Les tâches diagnostiques . . . 385
A.2 Le codage des réponses des élèves sur l'exercice 9 du test Pépite . . . 394
A.3 L'algorithme du calcul du stéréotype . . . 407

B Les parcours d'enseignement différencié **415**
B.1 Présentation des groupes . . . 416
B.1.1 Présentation du groupe A . . . 416
B.1.2 Présentation du groupe B . . . 416
B.1.3 Présentation du groupe C . . . 417
B.2 Parcours à l'étape « Retour sur des connaissances anciennes » . . . 419
B.2.1 Revenir sur le rôle de l'algèbre pour résoudre des problèmes de généralisation ou de modélisation . . . 419
B.2.2 Valider des règles de formation et transformation des expressions pour travailler l'équivalence des expressions . . . 424
B.2.3 Etudier des expressions équivalentes . . . 428
B.2.4 Travailler l'aspect structural des expressions en les associant à d'autres représentations et vice-versa . . . 432
B.3 Parcours à l'étape « Travail sur des connaissances nouvelles » . . . 435
B.3.1 Etudier des expressions équivalentes . . . 435
B.3.2 Valider des règles de formation et transformation des expressions pour travailler l'équivalence des expressions . . . 436
B.3.3 Reconnaître la structure des expressions . . . 438
B.3.4 Travailler les techniques de développement et de factorisation . 439
B.3.5 Réinvestir les techniques de calcul algébrique pour résoudre des problèmes (modélisation, généralisation, preuve, calculs astucieux) . . . 448
B.4 Liste d'exercices . . . 449

C Liste des expérimentations et des PED expérimentés **499**
C.1 Liste des expérimentations et des données recueillies . . . 499

C.1.1 Pré-expérimentations entre janvier et juin 2011 499
C.1.2 Expérimentations menées entre octobre et juin 2012 501
C.2 Les parcours d'enseignement différencié expérimentés 504
C.2.1 Les PED pour la pré-expérimentation en seconde dans la classe de Pauline 504
C.2.2 Les PED pour la pré-expérimentation en troisième dans la classe de Fabien 515
C.2.3 Les PED pour l'expérimentation menée en seconde dans la classe de Caroline 534
C.2.4 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3A) 541
C.2.5 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3B) 553
C.2.6 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Benoît 558
C.2.7 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Fabien 561
C.3 Les bilans des enseignants sur le groupe IREM 571

D Données analysées de la classe de Garance 581
D.1 Les documents constitutifs de la progression en algèbre 581
D.2 Cahier de quelques élèves 595
D.3 Productions des élèves sur le parcours 1 615
D.4 Productions des élèves sur le parcours 2 642
D.5 Productions des élèves sur le parcours 3 652

E Transcriptions des séances observées chez Garance 663

F Perspectives pour un exercice interactif 749

G Indexation des exercices 765

Introduction

La gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la différenciation de l'enseignement sont deux thèmes d'actualité dans l'enseignement secondaire français. Les enseignants, qui s'appuient le plus souvent sur des catégories d'élèves du type « les bons, les moyens, les faibles », semblent démunis pour repérer et exploiter les manifestations des connaissances des élèves et ont peu accès à des ressources adaptées pour gérer l'hétérogénéité de leurs apprentissages. L'enjeu de notre thèse est donc de fournir des outils aux enseignants pour les aider à gérer l'hétérogénéité des apprentissages, prenant en compte les besoins des élèves dans un domaine mathématique à la fin de la scolarité obligatoire (3^{e}-2^{de}).

Notre travail de thèse porte sur la modélisation didactique de parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire articulés à un logiciel de diagnostic, le logiciel Pépite, en vue d'une implémentation informatique dans des systèmes de ressources en ligne. Dans cette thèse, il s'agit de la plateforme LaboMeP de l'association Sésamath. La thèse porte aussi sur l'évaluation de ce modèle, à la fois du point de vue de sa pertinence cognitive et épistémologique et du point de vue de son écologie possible dans l'enseignement secondaire actuel. Nous situons nos travaux dans une approche anthropologique afin de prendre en compte le contexte institutionnel dans lequel l'élève apprend.

Notre étude s'organise en cinq chapitres. Le chapitre 1 sert d'introduction à la problématique et aux origines de notre recherche. Nous y précisons nos questions de recherche, le cadre théorique retenu et les principaux choix méthodologiques. À l'issue de ce chapitre, nous précisons le plan d'étude retenu pour les cinq chapitres suivants.

Chapitre 1

Problématique et méthodologie

Dans ce chapitre, nous présentons la problématique et la méthodologie de notre recherche. Après avoir problématisé notre travail autour de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et de la différenciation de l'enseignement, nous situons notre recherche dans le contexte du projet de recherche PepiMeP. Nous précisons ensuite nos questions de recherche, les principaux choix théoriques et méthodologiques et le plan d'étude retenu.

1.1 Problématique

1.1.1 Gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et différenciation de l'enseignement

Notre travail de thèse porte sur une question vive dans l'enseignement français depuis plusieurs années : la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la régulation de l'enseignement différencié (cf. §1.1.2 et §1.1.3). On assiste à un décalage entre les politiques éducatives, qui préconisent la mise en place de dispositifs pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages, et les travaux des chercheurs en didactique et en science de l'éducation qui soulignent les limites de ces mêmes dispositifs.

D'un côté, les politiques éducatives, menées depuis plusieurs années, stipulent que, pour « *assurer la réussite de tous les élèves* », l'École apporte des réponses différenciées aux difficultés des élèves [1]. Elles multiplient les injonctions à la mise en

1. Voir par exemple les textes officiels de l'Éducation nationale à l'adresse `http://eduscol.education.fr/pid23251/personnalisation-des-parcours.html`, pour le lycée, `http://eduscol.education.fr/cid54928/accompagnement-personnalise.html` ou le rapport *Le mé-*

place de dispositifs de re-médiation, d'accompagnement personnalisé, d'individualisation et de personnalisation de l'enseignement hors du temps scolaire ou de pédagogie différenciée (Przesmycki, 2008). D'un autre côté, les enseignants éprouvent des difficultés à mettre en place ces dispositifs. Des études de didactique et de science de l'éducation (par exemple, Kahn, 2012 ; Meirieu, 2005 ; Bolon, 2002 ; Charnay & Mante, 1992 ; Perrenoud, 1998 ; D. Butlen & Pezard, 1991) mettent en évidence des limites de ces dispositifs lorsqu'ils ne prennent pas suffisamment en compte le contenu enseigné et l'évaluation des élèves. Bolon (2002) écrit :

> *« Les textes ministériels ne différencient pas les domaines d'apprentissage : tout se passe comme si les dispositifs pédagogiques étaient indépendants de la discipline enseignée et de ses finalités. » (p.70)*

Pour les chercheurs du réseau RESEIDA [2], s'ajoute « *un souci de faciliter la tâche aux élèves* », qui se traduit par un « *glissement de l'activité intellectuelle vers des activités à faible enjeu cognitif* ». Ils écrivent :

> *« L'intention de prendre en considération les différences et les difficultés que l'on perçoit chez les élèves et d'« adapter » les tâches, les exigences, les supports de travail ou les modalités d'aide qu'on leur propose est louable mais quand* ***elle ne se fonde pas sur une analyse et une prise en charge de ce qui fait difficulté d'apprentissage pour les élèves****, elle conduit fréquemment à leur proposer des* ***tâches restreintes, de plus en plus morcelées****, qu'ils peuvent effectuer et réussir les unes après les autres sans trop d'effort, mais au terme desquelles il n'y a pas de réel apprentissage et de réelle construction de savoir. » (Rochex & Crinon, 2011)*

La trop faible prise en compte des finalités du contenu enseigné pour évaluer les besoins d'apprentissage des élèves, la proposition de tâches avec un trop faible enjeu cognitif et la tendance à orienter l'enseignement vers l'individuel plutôt que le collectif conduiraient les dispositifs de différenciation proposés par les enseignants à construire des inégalités plutôt qu'à les réduire. Bien entendu, certains travaux tentent d'aller au-delà de ces limites. Par exemple, Charnay (1995) avec les nombres à l'école élémentaire dans le cadre du groupe E.R.M.E.L. [3] et, Frère (1997) avec la géométrie en classe de 4^{e} ont une réflexion orientée sur le contenu mathématique, qui toutefois ne s'appuie pas préalablement sur une évaluation diagnostique des connais-

tier d'enseignant `http://www.senat.fr/rap/r11-601/r11-601.html`

2. Le réseau RESEIDA est un regroupement interdisciplinaire de chercheurs issus de plusieurs laboratoires français et francophones. Piloté par E. Bautier et J-Y. Rochex, il porte sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages. Il a été créé en 2011 à l'initiative de l'équipe ESCOL (Éducation Scolarisation) de l'Université de Paris 8. Il a permis d'unifier et de consolider une approche originale, qualifiée d'approche relationnelle et contextuelle de la production des inégalités et, plus largement, des pratiques scolaires.

3. Équipe de Recherche en Mathématiques à l'École élémentaire.

sances des élèves dans le domaine étudié. Selon nous, les enseignants sont parfois démunis pour apporter une réponse adaptée à la mise en place de tels dispositifs.

Pour interroger les difficultés rencontrées par les enseignants dans la gestion de l'hétérogénéité et de la différenciation de l'enseignement, nous nous appuyons sur des travaux de didactique portant sur ces questions. Nous nous situons notamment par rapport aux travaux de la 13e École d'été de didactique des mathématiques dont un thème était intitulé « *Différenciations et hétérogénéités, une question vive* » (Coulange & Margolinas, 2007 ; Sarrazy, 2007 ; Castela, 2007 ; Bautier, 2007).

1.1.2 Hétérogénéité des apprentissages

Pour mieux situer la question de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves par les enseignants, nous nous situons par rapport aux travaux de Sarrazy (2007, 2002) et Chopin (2011). Pour examiner la question du lien entre les hétérogénéités pouvant caractériser un système didactique et l'enseignement des mathématiques, Sarrazy propose une typologie des formes d'hétérogénéité :

- l'*hétérogénéité exogène*, définie à partir de critères non-didactiques comme la catégorie socio-professionnelle d'origine des élèves. Elle n'est pas prise en compte dans notre recherche,
- l'*hétérogénéité péri-didactique* correspondant à un ensemble de critères liés aux acquisitions disciplinaires et indirectement à l'action didactique, par exemple « le niveau scolaire des élèves »,
- l'*hétérogénéité didactique* « *constitutive de l'action didactique elle-même, produit de la nécessité qu'a le professeur d'ajuster les exigences curriculaires aux contraintes effectives de sa classe (niveaux des élèves, temps disponible, niveau de difficulté des connaissances à transmettre...).* ». Sarrazy la définit plus précisément :

  > *« Toute action didactique trouve sa raison d'être dans une hétérogénéité initiale entre deux institutions : le professeur est celui qui sait ; l'élève est, par définition, celui qui ne sait pas ou sait mal. L'intention didactique visant à réduire cette distance, se manisfeste par tout un ensemble d'actions visant à faire naître ou à transformer les rapports des élèves à des objets dont la maîtrise nécessite les connaissances visées par l'enseignant. » (Sarrazy, 2007, p. 124)*

- l'*hétérogénéité des situations* « *sans laquelle on serait conduit à naturaliser la notion en considérant les critères de différenciation comme des caractéristiques « personnelles » des élèves* ». Les situations peuvent avoir des fonctions didactiques différenciées dépendantes de leurs propriétés et des décisions prises par l'enseignant.

Ainsi, la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves par les enseignants relève des quatre types d'hétérogénéité mentionnés par Sarrazy. Leur prise en compte les conduit à ajuster leur enseignement, et, comme le soulignent Sensevy, Maurice, et Murillo (2008), à produire une différenciation didactique :

> *« Dans son travail, le professeur a produit ce que nous avons pu appeler une* différenciation didactique ordinaire*, qui se réfère aux efforts habituels, « ordinaires », produits par le professeur pour « prendre en compte » la réception différentielle de son action didactique par chaque élève. » (Sensevy et al., 2008, p. 109)*

Dans le paragraphe suivant, nous interrogeons les différents types de processus de différenciation didactique rencontrés. En effet, cette notion permet de mettre en avant les difficultés des enseignants dans leur gestion de l'hétérogénéité des apprentissages.

1.1.3 Deux processus de différenciation

Plusieurs travaux font référence à des processus de différenciation dans l'enseignement. Pour structurer notre synthèse, nous reprenons les deux grands types de processus de différenciation distingués dans les travaux du réseau RESEIDA : les processus de différenciation « active » et « passive ».

a. Les processus de différenciation « active »

Les processus de différenciation « active » sont de deux natures. Le premier type de processus de différenciation « active » relève d'un dispositif mis volontairement en œuvre par l'enseignant, par exemple de pédagogie différenciée ou de personnalisation. Il consiste à organiser un enseignement différencié en adaptant les tâches, les exigences, les supports de travail ou la modalité d'aide proposée aux « *caractéristiques réelles ou supposées des élèves* ». Mais, comme nous l'avons déjà souligné, ces caractéristiques sont souvent réduites au niveau scolaire supposé des élèves, à leur aptitude à travailler vite ou lentement.

Le second processus de différenciation active relève de « contrats didactiques différentiels » [4]. Il agit à l'insu de l'enseignant, en dehors de tout groupement d'élèves. Alors que l'enseignant et les élèves pensent que tous sont confrontés à la même

4. Rochex et Crinon soulignent que ce terme est emprunté à Maria-Luisa Shubauer-Leoni dans son intervention au colloque *Le contrat didactique, différentes approches*, qui a eu lieu à Marseille en mars 1987.

tâche et aux mêmes exigences, ils sont en fait confrontés à des contrats didactiques différentiels [5]. Ces contrats...

> *« ... se présentent comme des formes récurrentes, souvent même ritualisées, d'interactions entre maître et élèves, qui diffèrent sensiblement d'un type d'élève à l'autre, et dont la réitération, constatée tout au long d'une année scolaire, ne peut que conduire à une différenciation, fort inégale, des univers de savoirs et d'activités fréquentés par les uns et par les autres. » (Rochex & Crinon, 2011, p. 92)*

Ce second type de différenciation active nourrit notre réflexion sur le rôle de l'évaluation, pour apporter des aides adaptées aux besoins des élèves, et sur le fait qu'une meilleure connaissance de ces besoins est nécessaire et pourrait réduire les contrats didactiques différentiels. Nous revenons sur la question de l'évaluation dans nos hypothèses de travail (cf. §1.1.4).

b. Les processus de différenciation « passive »

Le deuxième type relève de processus de différenciation « passive ». Nous l'avons rencontré dans trois travaux différents qui développent des points de vue proches.

La différenciation didactique passive chez Sensevy

Sensevy et al. (2008) définissent les processus de différenciation passive :

> *« Enseigner quelque chose à un groupe, c'est produire des différences dans ce groupe, c'est construire* in fine *de la normalité statistique, avec des élèves qui réussissent très bien, des élèves qui réussissent très mal, un « grand nombre d'élèves » qui réussissent moyennement, etc. Le professeur, dans son action usuelle, peut être vu* comme un constructeur de normalité statistique.
> *C'est bien ce phénomène que nous appelons* différenciation didactique passive *: cette différenciation est didactique, puisqu'elle est le résultat d'un rapport différencié des élèves et du professeur aux objets de savoir ; elle est passive, dans la mesure où elle ne constitue pas le résultat d'un projet explicite et déterminé. » (Sensevy et al., 2008, p. 117)*

Sensevy et al. (2008) utilisent la notion de distance à la performance attendue, introduite par Maurice et Murillo (2008), pour identifier l'écart entre les connaissances initiales de chaque élève et les connaissances enseignées par le professeur. Comme les élèves ont un rapport différencié aux connaissances enseignées, deux phénomènes peuvent conduire à des processus de différenciation et à des inégalités : soit l'enseignant choisit des tâches convenant mieux aux élèves dont les connaissances sont disponibles, soit il apporte une aide plus ou moins efficace en fonction de la distance à la performance attendue.

5. Cette idée est proche, par exemple, des travaux de Robert (2008b, p. 53), pour qui l'enseignant a une prise en compte « *différentielle des élèves* ». Sensevy et al. (2008) développent un point de vue proche : « *Enseigner quelque chose à un groupe, c'est produire des différences dans ce groupe* ».

Les processus de différenciation passive dans les travaux RESEIDA

Dans les travaux RESEIDA, les processus de différenciation didactique se définissent comme suit :

> *« Des processus de différenciation (ou de production d'inégalités) « passive », ou encore « par défaut » parce qu'ils mettent au jour des modes de faire des enseignants, des modes d'organisation, d'enchaînement et de pilotage des tâches et activités dans la classe, des types de discours et d'interactions langagières qui, faute de désigner et d'enseigner explicitement ce qui relève des enjeux d'apprentissage pertinents, conduisent à ce que soient exigés de tous les élèves des savoirs, des compétences, des modes de faire qui ne sont pas ou guère enseignés, ni même parfois nommés ou désignés à tous. Ce faisant, le caractère transparent ou incident des savoirs en jeu, leur disparition, leur mise au second plan ou non-élucidation derrière le privilège accordé à la « mise en activité » des élèves, et donc à la multiplicité et la succession des tâches, aboutissent souvent à laisser pour une large part à la seule charge des élèves la mise en relation des tâches entre elles, et de ces tâches avec des enjeux et des contenus de savoir qui s'en émancipent et puissent ainsi anticiper sur d'autres tâches. » (Rochex & Crinon, 2011, p. 91)*

Ainsi, des modes de faire des enseignants, comme le rôle du langage et de la gestuelle ou la multiplicité et la succession de tâches isolées les unes des autres, laisseraient à la charge des élèves certaines nécessités d'apprentissage sans qu'ils s'en aperçoivent et conduiraient à construire des inégalités entre les élèves.

Des processus différenciateurs dans les travaux de Castela

Selon Castela (2007), certains élèves réussissent alors que d'autres échouent en mathématiques, parce que certains rencontrent des conditions qui leur permettent de réaliser les apprentissages nécessaires à la réussite scolaire, quand d'autres n'y parviennent pas. Castela se place dans une approche anthropologique et étudie

> *« les* phénomènes silencieux d'apprentissage dans l'enseignement des mathématiques et des effets différenciateurs de ces besoins d'apprentissage ignorés du système d'enseignement*, ignorés au sens où, très peu explicités dans les textes officiels, les apprentissages en question ne sont pas organisés institutionnellement. » (Castela, 2007, p. 91)*

La prise en compte par les enseignants de l'hétérogénéité didactique et péri-didactique contribuerait à des processus différenciateurs entre les élèves. Il existerait des savoirs et des savoir-faire implicites qui conduiraient à une émergence de rapports personnels des élèves à un savoir pas toujours adaptés au rapport institutionnel attendu au sein de l'institution considérée. Cela nous amène à notre questionnement et à nous positionner par rapport au terme de différenciation.

1.1.4 Question centrale et premières hypothèses de travail

L'identification de différents processus de différenciation *passive* contribuent à nourrir notre questionnement sur les sources de difficulté des élèves en lien avec la gestion de l'hétérogénéité par les enseignants.

Les enseignants peuvent se trouver en difficulté pour repérer et exploiter les manifestations des connaissances des élèves et ne pas trouver de ressources pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages. Ils s'appuient le plus souvent sur des catégories d'élèves du type « les bons, les moyens, les faibles, les rapides » (Rogalski, 2005), supposés situer leur niveau en mathématiques. Mais ces catégories semblent peu exploitables pour organiser la régulation des apprentissages car pas suffisamment reliées aux contenus enseignés et aux besoins d'apprentissage des élèves dans un domaine donné.

Nous nous interrogeons sur les difficultés des enseignants à gérer l'hétérogénéité des apprentissages. Ne sont-elles pas renforcées par :

- leur méconnaissance de processus différenciateurs et en particulier d'effets différenciateurs liés à des besoins d'apprentissage ignorés du système d'enseignement et à des savoirs implicites laissés à la charge des élèves,
- le peu d'évaluations diagnostiques disponibles pour identifier les connaissances des élèves ?

Ce questionnement nous conduit à prendre en compte le fait que l'élève apprend dans une institution donnée où le savoir est transmis selon certaines conditions. Nous nous situons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999, 1998).

Nous formulons deux hypothèses :

H1 : L'identification des connaissances apprises des élèves à partir d'une évaluation diagnostique peut faciliter la constitution de groupes d'élèves, la proposition de types de tâches adaptées aux besoins d'apprentissage repérés par le diagnostic et l'organisation d'une gestion didactique de l'hétérogénéité minimisant les contrats différentiels.

H2 : Certaines difficultés des élèves sont liées à des besoins d'apprentissage ignorés du système d'enseignement de l'institution considérée. Mettre à la disposition des élèves et des enseignants des ressources permettant d'organiser ces apprentissages implicites peut favoriser une évolution plus idoine des rapports personnels des élèves à un savoir.

1.1.5 Enjeu de notre travail

Cet aperçu met en avant un besoin d'études et de recherches pour accompagner les enseignants face à la question de la prise en compte de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves dans l'avancée du temps didactique. C'est dans cette perspective que nous inscrivons notre travail de thèse. Notre enjeu est de proposer aux enseignants des outils adaptés à une gestion de l'hétérogénéité des apprentissages dans un domaine donné prenant en compte un diagnostic des besoins d'apprentissage des élèves dans ce domaine, relativement à l'institution dans laquelle l'élève apprend. Nous ne nous situons pas dans une perspective d'individualisation mais d'enseignement au sein de la classe. C'est dans ce sens que nous avons avons défini le terme de « parcours d'enseignement différencié » (cf. §1.4.4)

Les questions suivantes nous animent : Quels sont les besoins d'apprentissage des élèves sur un domaine ? Comment les repérer ? Quels exercices et quelles aides apporter ? Pour quels objectifs ? Avec quelle gestion didactique ? À quel moment de l'étude ? À quels élèves les proposer ?

Notre enjeu peut paraître vaste et ambitieux. Commençons par situer notre recherche dans son contexte pour en délimiter davantage le sujet.

1.2 Contexte de la recherche : le projet PepiMeP et le logiciel de diagnostic Pépite

Notre travail de thèse s'inscrit dans un contexte particulier. Il se situe dans la continuité de travaux de recherche réalisés dans le cadre des projets pluridisciplinaires Pépite, Lingot et actuellement le projet PepiMeP (cf. figure 1.1, pour une chronologie plus détaillée voir la figure 1.2), qui visent à la conception d'Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (E.I.A.H.).

FIGURE 1.1 – Historique des projets Pépite, Lingot et PepiMeP

Pour préciser dans quelle mesure notre travail s'inscrit dans la continuité de ces projets et délimiter notre sujet, nous retraçons brièvement leur historique de ces projets. Il s'agit de montrer que la conception et les évolutions successives d'un logiciel de test diagnostic, nommé Pépite, et de l'analyse des réponses au test ont été guidées par la volonté de l'équipe de chercheurs de créer un outil visant à permettre une régulation différenciée de l'enseignement de l'algèbre à la fin de la scolarité obligatoire (14-15 ans).

1.2.1 Les projets Pépite et Lingot

a. Des projets pluridisciplinaires

Le travail de recherche s'appuie sur les travaux de Grugeon (1995) qui a défini un modèle de la « compétence algébrique » attendue en fin de 3^e^, comme référence pour délimiter les types de problèmes à prendre en compte et organiser un diagnostic des compétences des élèves en algèbre élémentaire à la transition 3^e^ -2^de^. Les projets Pépite et Lingot [6] (2000-2008), qui regroupaient principalement des chercheurs en didactique des mathématiques de l'équipe de l'Université Paris 7, des chercheurs en informatique des laboratoires du LIUM (de l'Université du Maine, du LIP6 de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, des chercheurs en psycho-ergonomie de l'université Paris 8, ainsi que des enseignants et des formateurs d'enseignants (des I.U.F.M. de Rennes, Créteil, Lille et Amiens), ont permis l'automatisation du diagnostic, donnant naissance à la réalisation des versions successives du logiciel de diagnostic Pépite. Une chronologie détaillée des projets Pépite et Lingot est présentée à la figure 1.2. Pour davantage de précisions, nous dirigeons les lecteurs vers les publications (Jean, 2000 ; Prévit, 2008 ; Delozanne, Prévit, Grugeon, & Chenevotot, 2010 ; Grugeon, 2009 ; Chenevotot & Grugeon, 2009 ; Chenevotot, Grugeon, & Delozanne, 2009).

b. Au départ, les travaux de Grugeon

Au départ, ces projets s'appuient sur un modèle multidimensionnel du domaine algébrique. En référence à la dialectique outil-objet introduite par Douady (1986), Grugeon (1995, 1997) structure le domaine algébrique en deux dimensions non indépendantes et non hiérarchisées : la dimension *outil* et la dimension *objet*. Cette structuration s'inscrit dans les travaux de didactique de l'algèbre des années 90 qui remettent en question un enseignement de l'algèbre comme « arithmétique généralisée » (Chevallard, 1989 ; Gascón, 1994).

Nous en rappelons les principales caractéristiques qui seront développées dans le

6. Ce projet a été financé dans le cadre du programme Cognitique du MRT, *École et sciences cognitives, les apprentissages et leurs dysfonctionnements*, de 2002 à 2004.

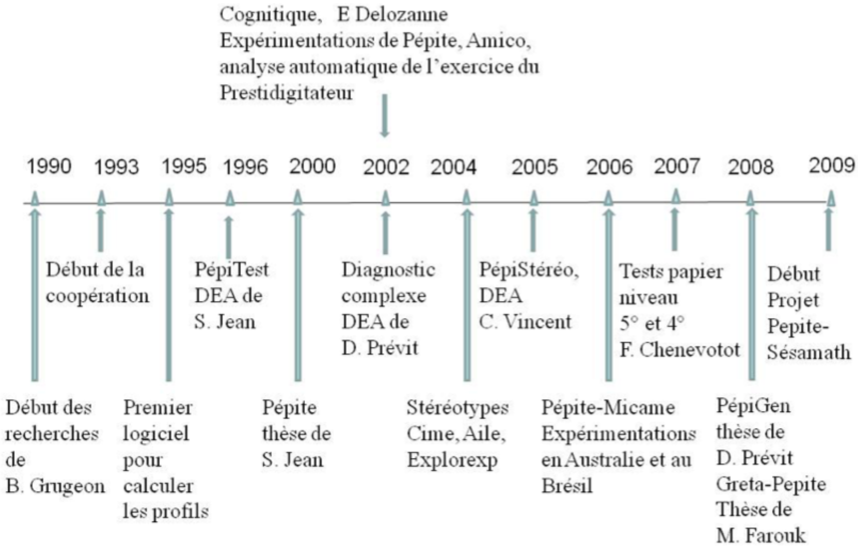


FIGURE 1.2 – Historique détaillé des projets Pépite et Lingot

chapitre 2. L'algèbre est considérée comme un outil pour résoudre des problèmes pris dans des contextes divers. Suite aux travaux de Chevallard (1985b, 1985a, 1989) et Gascón (1994), Grugeon distingue les problèmes arithmétiques, de généralisation et de preuve, de modélisation et de mise en équation issus des cadres numériques, algébriques et fonctionnels. Dans ces problèmes, l'outil algébrique a différentes fonctions. Il permet de produire des expressions et de traduire les relations mathématiques d'un problème, de les interpréter puis de les manipuler pour le résoudre. Dans sa dimension *objet*, l'algèbre est considérée comme un ensemble structuré d'objets ayant des propriétés, des modes de représentation et de traitement. Les objets mis en jeu au collège et au lycée en France sont, par exemple, les expressions algébriques, les formules ou les équations. Ils sont introduits au collège et sont en rupture avec les pratiques arithmétiques (Vergnaud, 1989a, 1989b, 1990) ou avec des fausses continuités (Kieran, 1992). Cette dimension prend en compte les usages du symbolisme, le statut et le sens à donner aux objets.

A partir de cette caractérisation du domaine de l'algèbre, Grugeon définit différents aspects de la « compétence algébrique » comme suit :

> *« Nous définissons les différents aspects de la compétence algébrique comme suit :*
>
> - *Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions outil et objet :*
>   - *sur le plan outil, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à*

sa résolution. Différents contextes, différents domaines d'emploi mettent en jeu la dimension outil de l'algèbre aussi bien dans des tâches de formulation, de résolution que de preuve, l'« arithmétique traditionnelle » n'en étant qu'un parmi d'autres. Un intérêt tout particulier est porté aux capacités à utiliser l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques.

- ◦ *sur le plan objet, il est nécessaire de prendre en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique (instrumentale et sémiotique) du traitement algébrique. La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et sémiotique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions algébriques. Elle peut aussi s'évaluer en termes de capacité à manipuler des ostensifs pilotés par des non-ostensifs.*

À ce niveau scolaire, nous devons prendre en compte deux autres éléments pour évaluer la compétence algébrique :

- *L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique.*
- *L'efficacité algébrique requiert une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et structural et à développer une nécessaire fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions pour en faire des usages variés.* » (Grugeon, 1997)

La compétence algébrique joue le rôle d'une référence. Indépendante des institutions tout en se situant dans leur champ d'action, elle permet d'étudier à la fois les rapports institutionnels et personnels à l'algèbre élémentaire.

Les différents aspects de la compétence algébrique ont permis de délimiter les types de problèmes à prendre en compte pour définir le test diagnostique papier-crayon, composé de vingt-deux tâches (cf. chapitre 4 et annexe A). Une grille d'analyse multidimensionnelle fondée sur le modèle du domaine algébrique permet de coder les réponses des élèves et d'établir le profil cognitif d'un élève. Ce profil cognitif situe le développement conceptuel de l'élève en algèbre et de décrire : « *les principaux traits de son comportement en algèbre élémentaire qui donne un modèle intelligible de son rapport personnel à l'algèbre.* ». Le passage d'une description à un niveau microscopique (codes des réponses de l'élève) à un niveau macroscopique (recoupement transversal des codes, composante par composante) s'est avéré nécessaire pour dresser le profil cognitif de l'élève en algèbre. Trois niveaux de description permettent de décrire les principaux traits de fonctionnement des élèves en algèbre à travers leur profil cognitif. Le premier niveau résume les compétences algébriques en termes de réussite et d'échec par rapport à un niveau attendu. Le deuxième pointe les cohérences de fonctionnement selon l'usage des lettres, le calcul algébrique, la traduction, les types de justification. Le troisième décrit la flexibilité dans l'articulation entre registres de représentation. Nous les présentons dans le chapitre 4.

Face à la complexité de l'analyse des réponses des élèves à partir de la grille multidimensionnelle et à son coût élevé en temps, l'automatisation du diagnostic (passage d'un test papier-crayon à un test informatisé et analyses automatique des réponses), qui a donné naissance au logiciel Pépite (Jean, 2000 ; Jean-Daubias, 2002) et à ses évolutions (Prévit, 2008), s'est révélée nécessaire pour en envisager la diffusion auprès des enseignants.

c. Des profils cognitifs aux stéréotypes

Les profils cognitifs se sont révélés donner une description trop fine des apprentissages de chaque élève pour assister la prise de décisions didactiques, au niveau de la classe, sur la constitution de groupes d'élèves et sur les exercices à proposer. Le travail mené dans le projet Pépite a évolué vers la définition de *stéréotypes*, une réification du profil cognitif plus exploitable pour une régulation de l'enseignement.

> *Nous avons émis deux hypothèses de travail :*
> - *H1 : Pour prendre des décisions didactiques sur les activités d'apprentissage adaptées au profil cognitif, il est nécessaire de disposer d'un niveau de modélisation d'abstraction plus élevé à côté du modèle cognitif très fin proposé par Pépite. Nous avons appelé les modèles de ce niveau des « profils types », puis des « classes de profils » et enfin des « stéréotypes » pour adopter une terminologie en cours dans la communauté de recherche [...].*
> - *H2 : Le concept de stéréotype constitue un outil conceptuel pour favoriser l'appropriation par les enseignants d'un artefact complexe comme l'est le logiciel Pépite car il permet d'articuler diagnostic individuel et « géographie de la classe » pour organiser la régulation des apprentissages en classe, c'est-à-dire de faire progresser la classe en respectant les différences individuelles.*
>
> *(Delozanne, Grugeon, Artigue, Rogalski, & Chenevotot, 2005, p. 3)*

Un stéréotype est défini comme une classe de profils équivalents, c'est-à-dire un ensemble de profils pour lesquels les compétences algébriques des élèves peuvent être jugées suffisamment proches pour bénéficier de situations d'apprentissage adaptées ayant les mêmes objectifs. Le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire situe l'élève sur trois composantes et de niveaux sur chaque composante (cf. chapitre 4) (Grugeon, 2009) : l'usage de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes (codé UA, quatre niveaux), la traduction entre différents registres sémiotiques (des écritures numériques, des écritures algébriques, des figures géométriques, des représentations graphiques, du langage naturel) (codé TA, trois niveaux), l'usage des règles de calcul algébrique (codé CA, trois niveaux). Nous les exploitons pour situer les besoins d'apprentissage des élèves en algèbre élémentaire et proposer aux enseignants des outils adaptés au diagnostic repéré. Cette étape s'incrit dans le projet PepiMeP.

1.2.2 Le projet PepiMeP

Actuellement, ce projet pluridisciplinaire se poursuit dans le cadre du projet PepiMeP [7] (2010-2012) qui regroupe des chercheurs en didactique des mathématiques du Laboratoire de Didactique André Revuz de l'Université Paris-Diderot, des chercheurs en informatique du Laboratoire d'Informatique de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, et les membres de l'association Sésamath [8] (Grugeon, Pilet, Chenevotot, & Delozanne, 2012 ; Chenevotot, Grugeon, Pilet, & Delozanne, 2012 ; Grugeon-Allys et al., 2011).

L'association Sésamath créée en 2001 et composée de professeurs de mathématiques développe des ressources en ligne diversifiées, libres et gratuites comme la plateforme LaboMeP, les exercices interactifs de MathenPoche et les manuels scolaires Sésamath. Les chiffres témoignent de son importance dans l'enseignement des mathématiques en France : y sont inscrits plus de 15 000 enseignants à Sésaprof et un collégien sur quatre [9]. Les collaborations fréquentes entre l'association Sésamath et les chercheurs en didactique des mathématiques (par exemple, Hyperpro, 2009 ; Sabra, 2011) illustrent à la fois une ouverture de l'association à la diffusion de situations issues de la recherche en didactique des mathématiques et une réelle demande des enseignants d'aide à la conception d'outils performants face à la « *multiplication exponentielle et la pénétration facile* » (Artigue & Gueudet, 2008) des ressources en ligne [10] dans l'enseignement secondaire [11].

Le projet a pour objectif de transférer des résultats de recherche dans une communauté d'enseignants et d'accompagner l'évolution des rapports entre conception,

7. Ce projet *Conception collaborative et itérative de ressources pour différencier l'enseignement en algèbre* débuté en 2010 est financé par la Région Ile-de-France (Convention n° 09003412) dans le cadre de l'appel d'offre PICRI dont l'objectif est de favoriser les liens entre les laboratoires de recherche et les associations.

8. http://www.sesamath.net/

9. http://www.vousnousils.fr/2012/01/16/sebastien-hache-un-collegien-sur-quatre-est-inscrit-a-notre-dispositif-labomep-519918

10. Une ressource en ligne est définie par Cazes et Vandebrouck dans (Vandebrouck, 2008, p. 183) de la façon suivante : « *une ressource Internet qui a les caractéristiques suivantes : 1/ il s'agit d'une ressource élaborée à des fins d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ; 2/ elle est disponible en ligne et seul un navigateur Internet est nécessaire ; 3/ elle est constituée d'exercices de mathématiques organisés selon un certain classement ; 4/ à chaque exercice est associé un environnement qui peut comporter des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices...), du cours, mais aussi des analyses de réponses ou la solution complète de l'exercice.* »

11. Parmi ces ressources en ligne, citons WIMS, Euler, les ressources de l'association Sésamath, MathenPoche pour les élèves et LaboMeP pour les enseignants ou encore Mathoumatheux.

développement et usage des ressources en ligne, pour favoriser des apprentissages en mathématiques. Il s'agit de mettre à disposition des enseignants, d'une part, l'outil de diagnostic Pépite développé et, d'autre part, des exercices adaptés aux besoins des élèves repérés par le diagnostic Pépite en algèbre élémentaire. L'enjeu de notre thèse porte sur ce dernier point. Le projet consiste d'abord de transférer ces outils sur la plateforme en ligne *LaboMeP*[12] (figure 1.3) de l'association Sésamath et ensuite d'en analyser les usages par les enseignants et d'en dégager des conditions de viabilité.

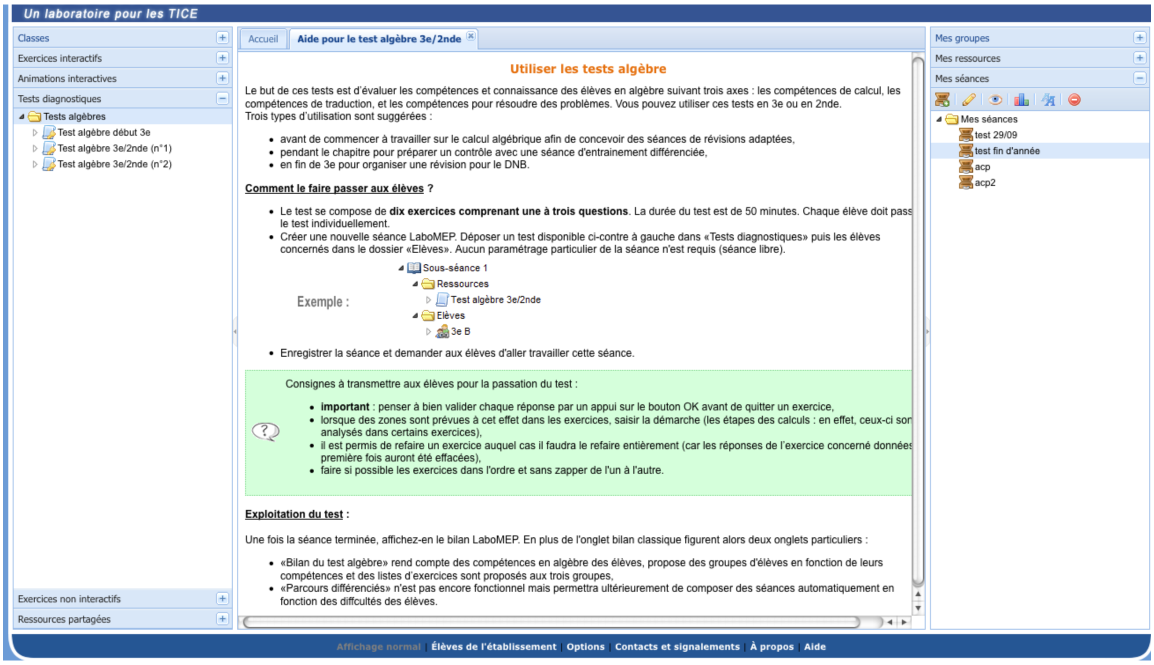


FIGURE 1.3 – Accès au logiciel Pépite depuis la plateforme LaboMeP

1.2.3 Délimitation du sujet de thèse

C'est dans le contexte du projet PepiMeP que nous délimitons notre problématique.

a. Retour sur notre questionnement

Notre enjeu est de proposer aux enseignants des outils adaptés à une gestion de l'hétérogénéité des apprentissages dans le domaine de l'algèbre élémentaire et

12. Consulter par exemple les articles relatifs à LaboMeP dans la revue MathémaTICE `http://revue.sesamath.net/spip.php?page=recherche\&recherche=labomep\&x=0\&y=0`

prenant en compte à la fois les besoins d'apprentissage des élèves repérés par un diagnostic dans ce domaine (ici le logiciel de diagnostic Pépite) et l'institution dans laquelle l'élève apprend. Les niveaux scolaires considérés sont la classe de troisième et la classe de seconde.

Considérons le scénario suivant. Des élèves viennent d'entrer en troisième. Préalablement au chapitre sur les *Identités remarquables*, le professeur décide de faire passer le test diagnostic Pépite. Parmi les stéréotypes présents, deux sont dominants : CA3 UA3 TA3 et CA2 UA3 TA2 [13]. Ces stéréotypes ne relèvent pas du même développement dans la construction de la compétence algébrique. Pour les élèves en CA3 UA3 TA3, la conduite des calculs des élèves s'appuie davantage sur la reconnaissance d'ostensifs (signes $+$, $-$, $=$, etc.) et rarement, au niveau technologico-théorique, sur la hiérarchie des opérateurs, les propriétés du calcul algébrique et le rôle des parenthèses. Les écritures algébriques ou numériques en ligne sont rarement interprétées selon leurs aspects procédural et structural, ce qui se traduit par un calcul non contrôlé, des erreurs de type concaténation ($3 + 2a = 5a$) ou linéarisation ($a^2 = 2a$) et un appui sur des démarches arithmétiques. En revanche, les élèves en CA2 UA3 TA2 s'appuient davantage sur la structure des expressions et leur équivalence pour transformer des expressions simples sans parenthèse. Mais ils privilégient encore majoritairement l'aspect procédural pour transformer des expressions complexes ce qui conduit souvent à des calculs « à l'aveugle », non contrôlés, ne préservant pas l'équivalence des expressions ainsi qu'à des règles de transformation erronées en lien avec le parenthésage du type $(a + 2)^2 = a^2 + 4$. Pour tous, l'algèbre comme outil de résolution de problèmes est immotivée et peu adaptée. Les élèves ont majoritairement recours à des démarches arithmétiques et mobilisent rarement les lettres. Quelle(s) tâches(s) proposer à ces élèves ? Bien souvent, les enseignants leur proposent de refaire des tâches de calcul algébrique de même nature.

Ce scénario met en évidence le rôle des stéréotypes pour définir des parcours d'enseignement différencié ainsi que l'intérêt du travail didactique à réaliser pour modéliser ces parcours. Il soulève la question principale suivante que nous serons amenés à préciser au fil de la thèse :

- Quels types de tâches concevoir, selon quels enjeux didactiques et comment les mettre en œuvre pour qu'ils soient adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves en algèbre élémentaire, repérés par le logiciel de diagnostic Pépite, et à la stratégie d'enseignement pour la classe ?

13. Les intitulés des composantes CA, UA et TA ont été introduits à la page 26, les niveaux sur chaque composante sont présentés au début du chapitre 4

b. Le domaine de l'algèbre

L'inscription de notre travail dans le projet PepiMeP nous a conduit à limiter notre sujet à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Le domaine de l'algèbre élémentaire semble porteur pour interroger l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. En France, comme dans la plupart des autres pays, l'algèbre constitue un élément pivot du curriculum mathématique de l'enseignement secondaire pour pouvoir poursuivre des études scientifiques ou technologiques. L'algèbre fournit des outils dans la plupart des domaines mathématiques comme la géométrie ou l'analyse ainsi que d'autres domaines non mathématiques. Pourtant, il constitue un obstacle difficilement surmontable pour beaucoup d'élèves. A ce propos, Kieran (1992) écrit :

> *« However, to cover their lack of understanding, it appears that students resort to memorizing rules and procedures and they eventually come to believe that this activity represents the essence of algebra. » (Kieran, 1992, p. 390)*

De nombreux travaux en didactique des mathématiques utilisant des approches différentes qu'elles soient épistémologiques, cognitives ou anthropologiques, mettent en évidence des difficultés d'apprentissage et d'enseignement en algèbre. Ces travaux peuvent nous donner des points d'appui pour les étudier.

c. Le choix de centrer l'étude sur les expressions algébriques

Le calcul sur les expressions algébriques étant convoqué dans la résolution des problèmes mettant en jeu des formules ou des équations, nous avons choisi de centrer notre étude sur les expressions algébriques. Nous nous intéressons plus particulièrement à la génération des expressions algébriques, au calcul sur ces expressions et à leur utilisation dans des contextes extra- ou intra-mathématiques.

1.2.4 Une troisième hypothèse de travail

Comme nous l'avons déjà évoqué dans notre première hypothèse de travail, la question de l'évaluation est centrale pour accéder aux besoins d'apprentissage des élèves et notamment en algèbre.

Certains travaux de didactique de l'algèbre comme ceux de Nicaud (2005), Croset (2009) et Chaachoua (2010) ont contribué à répondre à la question de l'évaluation en algèbre élémentaire en catégorisant les erreurs des élèves. Mais celles proposées portent sur une partie restreinte du domaine de l'algèbre, qui concerne principalement l'aspect technique (développer, factoriser, résoudre des équations) ou de la dimension *objet* (en référence à la dialectique outil/objet de Douady, 1986). Or, l'algèbre est aussi un outil pour résoudre des problèmes (Chevallard, 1985b ; Grugeon, 1997 ; Kieran, 2007).

Ces travaux apportent une connaissance des difficultés des élèves sur une partie restreinte de l'algèbre ce qui ne permet pas de les situer par rapport au domaine global. Or, des erreurs dans la transformation des expressions peuvent cacher des difficultés plus profondes sur le sens donné aux lettres et sur le rôle de l'algèbre dans la résolution de problème. Nous faisons l'hypothèse que la proposition d'exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves suppose d'accéder à une référence prenant en compte le domaine algébrique dans sa globalité et de relier les besoins d'apprentissage des élèves par rapport à cette référence. De ce point de vue, nous faisons l'hypothèse que le diagnostic et le modèle de stéréotype [14] apportent un cadre de recherche pertinent, puisqu'ils proposent un ensemble de tâches diagnostiques recouvrant le domaine algébrique dans ses dimensions *outil* et *objet*. La définition de stéréotypes en algèbre élémentaire constitue une avancée importante comparée aux catégories utilisées habituellement par les enseignants (de type « les bons, les moyens, les faibles »). C'est pourquoi nous posons la troisième hypothèse de travail suivante :

H3 : Le modèle de stéréotype est un outil pertinent pour organiser un enseignement différencié et des groupes d'élèves.

1.3 Objectifs de la thèse

1.3.1 Modélisation de parcours d'enseignement différencié

Le travail de thèse porte sur la modélisation didactique de parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire articulés à un logiciel de diagnostic, ici le logiciel Pépite, en vue d'une implémentation informatique dans des systèmes de ressources en ligne. Les niveaux scolaires considérés sont la troisième et le début de la seconde. Ce travail porte aussi sur l'évaluation de ce modèle, à la fois du point de vue de sa pertinence cognitive et épistémologique, et du point de vue de son écologie possible dans l'enseignement secondaire actuel. Nous nous centrons sur les effets possibles sur les apprentissages des élèves [15].

14. Ils sont introduits dans le paragraphe 1.2.1 et présentés plus en détails dans le chapitre 4.

15. L'analyse des usages de ces ressources du point de vue des enseignants fait l'objet d'une autre thèse en didactique des mathématiques rattachée au projet PepiMeP. Elle est menée par S. Bedja à l'Université de Paris-Diderot et dirigée par B. Grugeon et C. Cazes.

Voici une première définition d'un *parcours d'enseignement différencié*, noté PED, qui sera précisée au fil de la thèse :

> Un parcours d'enseignement différencié est déterminé par une question génératrice, fixant un objectif d'enseignement commun à la classe, choisi par l'enseignant, pour un certain moment de l'étude. Il est organisé autour de tâches différenciées, relevant de cet objetif d'enseignement commun, et adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves en algèbre repérés par un diagnostic et de leur gestion didactique.

1.3.2 Précisons notre questionnement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique

Nous commençons par envisager notre questionnement sous l'angle des sources de difficulté de l'apprentissage et de l'enseignement en algèbre. Des travaux de didactique de l'algèbre utilisant une approche cognitive mettent en avant des processus de conceptualisation des objets de l'algèbre liés à des difficultés d'apprentissage des élèves. Selon nous, ces difficultés peuvent être renforcées par le fait que l'élève apprend dans une institution donnée, où le savoir est transmis selon certaines conditions. Cette considération conduit à situer nos travaux dans l'approche anthropologique du didactique développée par Chevallard :

> *La TAD postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques « du savoir appris » sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition didactique.(Bosch & Gascón, 2005)*

Situons notre problématique en termes d'institution et de rapport au savoir. Le *rapport personnel* d'un individu (ici un élève) à un objet de savoir (ici les objets de l'algèbre élémentaire) est le système de toutes les interactions que cet individu peut avoir avec l'objet. Ce rapport révèle les significations qu'un élève donne aux objets de l'algèbre et dans quelles situations il les mobilise. Mais tout savoir vit d'abord dans une institution qui en assure la production, la gestion et le contrôle. A chaque institution est associée un ensemble d'objets d'enseignement, vis-à-vis desquels l'institution crée un *rapport institutionnel* au savoir. Lorsqu'un individu devient sujet d'une institution dans une position donnée (par exemple, celle d'élève), tout objet de cette institution « *va se mettre à vivre pour l'individu sous la contrainte* » (Chevallard 1989 ou Chevallard 2003) du rapport institutionnel lié à cette position. Le système éducatif français est une institution particulière qui manifeste, vis-à-vis de certains individus occupant la position d'élève l'intention de rendre leur rapport personnel à certains objets de savoir conformes aux rapports institutionnels correspondants.

En troisième et au début de la seconde, les élèves ont rencontré l'algèbre depuis au moins deux ans. Ils ont construit des rapports personnels à l'algèbre correspondant à des connaissances apprises dans le système d'enseignement français (classes et professeurs). Certains ne sont pas idoines [16] à la poursuite du cursus scolaire en mathématique. À ce propos, Chevallard (1989) écrit :

> *« Les distorsions provoquées [...] par les contraintes didactiques permanentes, engendrent chez l'élève un rapport personnel au savoir enseigné présentant des pathologies déterminées, ou, à tout le moins, certaines particularités qui le rendent peu idoine. » (Chevallard, 1989, p. 29)*

Notre questionnement peut être précisé :

- Sous quelles conditions et quelles contraintes le système éducatif français en mathématiques a-t-il conduit les élèves à construire des rapports personnels à l'algèbre non idoines ?
- Comment les amener à faire évoluer leur rapport personnel à l'algèbre vers un rapport idoine ?
- En quoi la mise en place de parcours d'enseignement différencié prenant en compte les besoins repérés des élèves peut-elle favoriser cette évolution ?

1.3.3 Des hypothèses

Cet objectif et ces nouveaux questionnements nous conduisent à formuler deux hypothèses de travail supplémentaires. La première concerne la nécessité d'une nouvelle référence commune entre évaluation diagnostique et modélisation de parcours d'enseignement différencié. La seconde concerne la nécessité de travailler en collaboration avec des enseignants du secondaire.

a. La nécessité d'une nouvelle référence commune

Dans le logiciel Pépite, les rapports personnels à l'algèbre sont modélisés par des stéréotypes pour mettre en relation rapport personnel des élèves à l'algèbre et rapports institutionnels à l'algèbre dans les institutions où les élèves ont appris.

16. Ce terme est introduit par Chevallard (1989) : le rapport personnel d'un élève à l'algèbre peut être adapté au rapport institutionnel attendu, sans être pour autant idoine aux emplois effectifs de l'algèbre : « *Vous pourrez douter, en revanche, que le rapport officiellement imposé se révèle bien adapté ou, comme nous dirons,* idoine, *à certains emplois effectifs que vous avez en tête (par exemple factoriser un polynôme $P(c)$ du troisième degré, afin de résoudre l'équation $P(x) = 0$).* »

La structure d'analyse construite vise à repérer les caractéristiques dominantes des rapports à l'algèbre. Mais elle est peu opératoire pour caractériser des questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

C'est pourquoi il s'est avère nécessaire de construire un modèle commun pour, à la fois, décrire les praxéologies apprises et les praxéologies institutionnelles et mieux prendre en compte la part des implicites institutionnels dans le développement des praxéologies apprises. C'est un point d'appui essentiel pour dégager les questions génératrices à aborder dans les parcours. Pour construire cette modélisation commune, nous nous appuyons sur une OM de référence permettant d'analyser les différentes étapes du processus de transposition didactique.

Notre quatrième hypothèse porte sur les conditions nécessaires à la modélisation didactique de parcours différenciés d'apprentissage en algèbre élémentaire, articulés à un diagnostic, en vue d'une implémentation informatique dans des systèmes de ressources en ligne.

H4 : Il est nécessaire de faire évoluer la modélisation didactique utilisée dans le logiciel Pépite pour unifier « évaluation diagnostique » et« parcours d'enseignement différencié » et répondre à l'exigence de formalisme de la modélisation en EIAH en vue d'une automatisation du diagnostic (déjà réalisé) et des parcours différenciés d'enseignement sur une plateforme en ligne.

b. La nécessité de travailler en collaboration avec des enseignants du secondaire

Notre objectif est de concevoir un modèle qui puisse être écologiquement viable dans les classes du collège et de seconde. Il doit permettre à la fois de s'intégrer de manière cohérente dans les progressions annuelles sur l'algèbre (projet global), et d'élaborer des séances avec des enjeux précis de construction de savoir (projet local). Il doit proposer également une gestion didactique adaptée aux objectifs d'apprentissages visés. Pour cela, nous postulons qu'il est nécessaire de travailler en collaboration avec des enseignants de l'enseignement secondaire.

H5 : Travailler avec une communauté d'enseignants pour proposer des ressources prenant en compte les pratiques existantes est incontournable pour garantir les conditions de leur viabilité dans l'enseignement secondaire actuel.

Nous avons maintenant réuni tous les éléments nécessaires pour présenter nos principaux choix théoriques et méthodologiques.

1.4 Principaux choix théoriques et méthodologiques

1.4.1 Le cadre de la théorie anthropologique de la didactique

Nous situons notre travail dans la Théorie anthropologique du didactique (TAD) développée par Chevallard (1999, 1992). Ce cadre nous permet de disposer de notions comme celles, déjà évoquées, de rapports institutionnels et personnels à un objet et de praxéologies. Deux raisons principales motivent ce choix. D'une part, nous postulons que la conception d'exercices adaptés aux besoins repérés des élèves doit tenir compte de l'institution dans laquelle l'élève apprend ainsi que des praxéologies mathématiques (Chevallard, 1999) qu'il y rencontre. D'autre part, la théorie anthropologique du didactique propose un modèle épistémologique de l'activité mathématique permettant l'étude des processus de production et de circulation du savoir. Ses outils s'avèrent particulièrement adaptés pour répondre à notre objectif : celui de modéliser les savoirs et savoir-faire en jeu au collège et ceux à mettre en jeu dans les parcours d'enseignement différencié.

Nous présentons une synthèse des notions utilisées dans cette thèse. Il s'agit des notions de praxéologie, d'agrégation des praxéologies, de niveau de convocation des types de tâches et d'ostensifs et de non-ostensifs.

a. La notion de praxéologie

La Théorie anthropologique du didactique propose un modèle épistémologique dans lequel toute activité humaine « *consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une certaine technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, toute activité met en œuvre une organisation qu'on peut noter $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique* ». (Chevallard, 1999, p.3)

L'étude du rapport personnel d'un élève à un objet de savoir nécessite d'observer comment il mobilise cet objet dans l'accomplissement de tâches relatives au type T au sein d'une institution. C'est pourquoi nous utilisons la notion de praxéologie.

Chevallard distingue les notions de tâches, de types de tâches et de genre de tâches. Chacune porte sur l'activité à réaliser mais à différents niveaux de généralité :

> *« ...la notion de tâche, ou plutôt de type de tâches, suppose un objet relativement précis. Monter un escalier est un type de tâches, mais monter, tout court, n'en est pas un. De même, calculer la valeur d'une fonction en un point est un type de tâches mais calculer, tout court, est ce qu'on appellera un genre de tâches, qui appelle un déterminatif. [...] » (Chevallard, 1999, p.3)*

On parle de praxéologie mathématique ou d'organisation mathématique pour désigner un « *objet de la réalité mathématique* » (Chevallard, 1999).

Toute praxéologie est constituée de deux blocs : un bloc pratico-technique $[T/\tau]$, ordinairement identifié comme un savoir-faire et d'un bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$, ordinairement identifié comme un savoir.

b. L'agrégation des praxéologies

Dans une institution, les praxéologies existent rarement comme praxéologies ponctuelles mais elles s'agrègent selon différents niveaux :

> *« Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques $\tau_{i,j}$ correspondant à autant de types de tâches $T_{i,j}$. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations* locales, *$[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations* régionales, *$[T_{i,j}/\tau_{i,j}/\theta_i/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ. » (Chevallard, 1998, p. 5)*

Autrement dit, dans une institution, les praxéologies s'emboîtent les unes dans les autres selon les différents niveaux : ponctuel, local, régional et global. Cet emboîtement suit la hiérarchie des niveaux de codétermination didactique Chevallard (1999) : sujet, thème, secteur, domaine et discipline. Le sujet est une organisation ponctuelle, le thème est une organisation locale, le secteur est une organisation régionale, le domaine est une organisation globale et la discipline est commune à tous les domaines.

Nous utilisons les notions de praxéologie ponctuelle, locale, régionale et globale pour modéliser l'agrégation des types de tâches impliqués dans les calculs sur et avec les expressions algébriques.

c. Niveau de convocation des types de tâches

Pour décrire et modéliser les enjeux d'apprentissage présents dans un corpus de problèmes, Castela (2008) introduit une nouvelle terminologie, s'inspirant des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances introduits par Robert (2008a). Elle distingue les OM ponctuelles R-convoquées (convoquées par le résolveur) et les OM T-convoquées (convoquées par la tâche) dans l'analyse des tâches proposées aux élèves.

> *« Si l'élève a la charge de reconnaître le type T_0 ou si, malgré les spécificités technologico/théoriques du problème et de son contexte, il doit choisir OM_0 parmi plusieurs OM relatives à T_0 pour mener à bien la résolution, nous dirons que l'organisation mathématiques efficace OM_0 intervient au niveau* OM R-convoquée*, avec ou sans choix de la technique suivant les cas, pour signifier que le résolveur a la responsabilité de convoquer lui-même cette OM pour*

résoudre le problème. Dans le cas contraire (l'énoncé mentionne explicitement le type de tâches et certains éléments de la tâche font qu'une seule technique est envisageable), nous dirons que OM_0 intervient au niveau OM t-convoquée, *autrement dit mobilisée par la tâche elle-même. » (Castela, 2008, p. 152)*

Pour analyser les différentes OM ponctuelles impliquées dans la résolution d'une tâche autour des expressions algébriques, nous serons souvent amené à utiliser la distinction introduite par Castela. Cela permet notamment de mettre en évidence des OM ponctuelles, ignorées par l'institution ou implicites mais pourtant requises, pour mener à terme le calcul algébrique et donner des raisons d'être aux questions abordées.

d. La dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs

Les notions d'ostensifs et de non-ostensifs sont introduites dans la TAD pour décrire les ingrédients (les matières premières) qui composent les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories des différentes organisations praxéologiques constitutives du savoir mathématique. L'observation de l'activité mathématiques conduit à distinguer les objets matériels et perceptibles, les objets ostensifs, des notions, des concepts et des idées, des objets non-ostensifs. Plus précisément, Chevallard (1993) écrit :

« On appelle ostensifs les objets qui ont pour nous une forme matérielle, sensible au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même pour les gestes, les mots, les schémas, les dessins, les graphismes et les écritures et formalismes.[...] Le propre des ostensifs est de pourvoir être manipulés.[...]

Au contraire des ostensifs, les non-ostensifs - soit ce que l'on nomme usuellement notions, concepts, idées, etc. - ne peuvent pas à strictement parler, être manipulés : ils peuvent seulement être convoqués à travers la manipulations d'ostensifs associés. » Chevallard (1993)

Les moyens écrits, les gestes, les discours, les graphismes instrumentent l'activité mathématique tout en conditionnant le développement. C'est ainsi qu'il y a une dialectique entre les ostensifs et les non-ostensifs :

« Comme on le verra maintenant, les objets ostensifs et les objets non-ostensifs sont unis par une dialectique qui considère les seconds comme des émergents de la manipulation des premiers et, en même temps, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation. [...] En toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non-ostensifs. » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 90)

Nous utilisons ces notions lorsque nous analysons les organisations mathématiques intervenant dans les manuels ou dans les programmes. La description des techniques mises en œuvre et de l'environnement technologico-théorique montre que la manipulation des expressions algébriques au collège peut rester au niveau de la manipulation d'ostensifs, sans entrer dans la dialectique avec les non-ostensifs et, par conséquent, donner des moyens de contrôle et de guidage adéquats. Par exemple, le recours à des ostensifs oraux, « On supprime les parenthèses », ou à l'ostensif graphique « flèches » pour guider le développement de l'expression de $3(x + 2)$, peuvent laisser implicite la co-activation des notions de distributivité de la multiplication sur l'addition et d'équivalence des expressions.

Le cadre théorique principal de cette thèse est celui de la théorie anthropologique du didactique dont nous venons de rappeler les principales notions. Nous présentons maintenant nos choix méthodologiques.

1.4.2 Une analyse basée sur une OM épistémologique de référence relative aux expressions algébriques

Les outils de la TAD s'avèrent particulièrement adaptés (opératoires et formels) pour modéliser les praxéologies apprises, relatives aux expressions algébriques et construire une référence commune. Nous faisons référence aux travaux de Bosch qui introduit l'idée d'une OM de référence dans les étapes de la transposition didactique (cf. figure 1.4) :

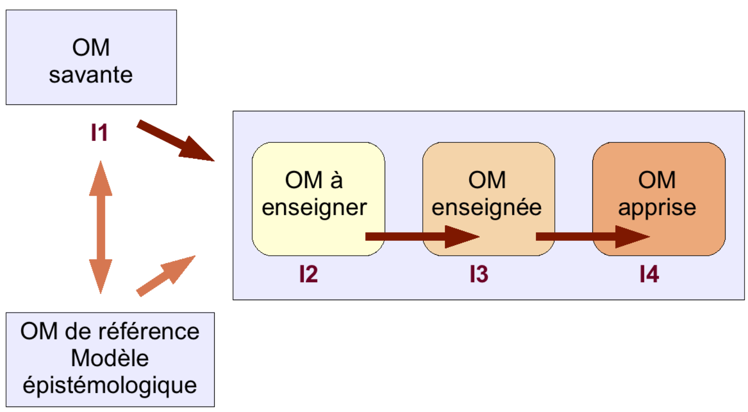


FIGURE 1.4 – Schéma du processus de transposition didactique (Bosch & Gascon, 2005)

- *(a) L'OM à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum de mathématiques. La base empirique pour élaborer ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et dans les manuels. Son influence sur [l'OM enseignée et l'OM apprise] est centrale bien que ni le professeur ni l'institution scolaire ne disposent explicitement de ce modèle mais uniquement de matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux.*

– *(b) Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniement.(Bosch & Gascón, 2005, p. 117)*

C'est pourquoi, dans notre étude, nous commençons par établir une référence épistémologique dans laquelle nous situons sur quels aspects épistémologiques reposent, selon nous, la génération des expressions algébriques, le calcul sur les expressions et leur utilisation dans des contextes intra- et extra-mathématiques. Nous construisons cette référence épistémologique dans le chapitre 2, à partir de la relecture de travaux de didactique de l'algèbre.

Cette référence épistémologique est un appui pour construire une OM de référence relativement aux expressions algébriques. L'OM de référence est centrale dans notre étude. Nous la rendons opérationnelle à deux niveaux.

1.4.3 Opérationnalisation de l'OM de référence

a. Opérationnalisation de l'OM de référence pour analyser les praxéologies à enseigner

Nous cherchons à caractériser les praxéologies à enseigner à travers l'étude des programmes et des manuels du collège et de la classe de seconde. L'OM à enseigner autour des expressions algébriques est-elle complète ? Permet-elle la construction d'un rapport personnel idoine au calcul sur et avec les expressions algébriques ? Les éléments du bloc technologico-théorique développés, en particulier, sont-ils suffisamment portés par les éléments épistémologiques nécessaires au calcul sur et avec les expressions algébriques ?

Pour ceci, nous analysons des besoins d'apprentissage ignorés par l'institution relativement à l'OM épistémologique de référence, à travers l'étude des habitats et des niches. Celles des OM ponctuelles principalement convoquées dans la résolution des tâches, des éléments technologiques et théoriques mobilisés ou absents dans les discours technologiques utilisés, de la dialectique entre ostensifs et non-ostensifs impliquées (chapitre 3).

Nous interprétons les écarts entre l'OM de référence et l'OM à enseigner comme des savoirs implicites de l'enseignement sur les expressions algébriques. Cette analyse met en évidence des contraintes institutionnelles qui sont imputables aux contenus mathématiques pour son enseignement, et qui, certainement en affectent son étude en classe.

Une analyse, en organisations mathématique et didactique et en niveaux de codétermination, peut mettre en évidence d'éventuels savoirs cachés. L'enjeu est de dégager des questions génératrices pour introduire des raisons d'être des expressions algébriques et travailler le bloc technologico-théorique relatif à l'OM des expressions algébriques.

b. Opérationnalisation de l'OM de référence pour analyser les praxéologies apprises

Une deuxième opérationnalisation de l'OM de référence vise à caractériser des praxéologies apprises (chapitre 4). Nous cherchons à interpréter le diagnostic et le modèle de stéréotype relativement à l'OM de référence pour caractériser des niveaux technologiques justifiant la constitution de groupes d'élèves ayant des besoins d'apprentissage proches en algèbre. Cela correspond à une catégorisation des praxéologies apprises.

Nous faisons l'hypothèse que seule une description des OM apprises au niveau des technologies donne accès à une vue d'ensemble de la cohérence des modes de fonctionnement et de raisonnement des élèves. Ce type d'analyse nous permet d'éclairer dans quelle mesure un niveau technologique laisse vivre des erreurs de calcul ou des dysfonctionnements dans les pratiques algébriques des élèves.

De plus, cette étude permet de faire des hypothèses sur l'existence ou non d'articulation entre des trois OM locales dans les catégories d'OM apprises correspondant aux groupes d'élèves constitués. Nous cherchons à mettre en évidence la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises, afin de dégager des sous-questions issues des questions génératrices à travailler dans les parcours.

1.4.4 Modèle de parcours d'enseignement différencié

a. Lien avec les notions d'AER et de PER

L'introduction de la notion de « parcours d'enseignement différencié » prend en compte celles de « parcours d'étude et de recherche » et d'« activité d'étude et de recherche » introduites par Chevallard (2011, 2005). L'auteur les définit comme suit :

> *« Les notions d'AER (« Activité d' Étude et de Recherche ») et de PER (« Parcours d'Étude et de Recherche ») ont pour objet de fonder une modélisation*

anthropologique des processus didactiques fonctionnels (et non formels), c'est-à-dire regardés dans une perspective non-monumentaliste, dans laquelle un savoir n'est pas un monument que l'on visite, mais un outillage immatériel et matériel fonctionnellement ordonné à l'étude de certains types de questions.
Le schéma de base de cette modélisation peut s'énoncer ainsi : un processus didactique - ou, plus exactement, un processus d'étude et de recherche - a son point de départ dans un projet social visant à apporter une réponse R (à valider selon divers critères) à une certaine question Q. Une AER (relative à Q) peut être « quasi-isolée », en ce sens que la question Q est rencontrée et étudiée ex abrupto. Elle peut, par contraste, prendre place au contraire dans un PER, au sein d'une lignée d'AER engendrées par l'étude d'une « sur-question » génératrice du PER. »

La notion de parcours d'enseignement différencié se rapproche de celle de PER et AER, dans le sens où nous recherchons des questions génératrices pour travailler des raisons d'être des expressions algébriques et du calcul sur et avec les expressions. Mais elle s'en éloigne. D'une part, parce qu'il s'agit d'une reprise de notions à enseigner, travaillées depuis plusieurs années. D'autre part, nous prenons en compte des besoins d'apprentissage des élèves à partir d'un diagnostic des connaissances apprises des élèves (le diagnostic Pépite). C'est pourquoi, pour nous démarquer des PER et des AER, nous choisissons la désignation de « parcours d'enseignement différencié » noté aussi PED.

Il s'agit de mettre en place une organisation didactique, c'est-à-dire, selon Bosch et Gascón (2005)

« un processus d'étude structuré en moments qui part d'une ou plusieurs OM ponctuelles et, qui par l'élargissement et le complément progressif des questions problématiques qui s'y posent, engendre une série d'OM intermédiaires qui finissent par s'intégrer en une nouvelle OM dont elles constituent la "raison d'être" » (Bosch & Gascón, 2005)

b. Appui sur la théorie des situations didactiques

Nous utilisons des éléments de la théorie des situations didactiques (TSD) pour associer la recherche de types de tâches à convoquer en fonction des besoins d'apprentissage des élèves repérés par le diagnostic à leur gestion didactique et les éléments du milieu à prévoir. Pour affiner la conception des situations à proposer aux élèves, nous nous appuyons sur les notions de milieu, de variable didactique et de contrat didactique. Selon les besoins d'apprentissage des élèves, nous proposons des situations reposant sur le même type de tâches, mais différenciées par les milieux proposés : nature et complexité des expressions, forme d'énoncés, aides proposées aux élèves.

Nous complétons les éléments d'analyse concernant l'analyse *a priori* des situations dans le chapitre 4 et *a posteriori* dans le chapitre 5.

1.4.5 Une démarche itérative de conception du modèle de PED

a. Une démarche itérative spécifique au contexte de recherche de la thèse

Notre thèse étant rattachée au projet de recherche PepiMeP pluridisciplinaire, le choix d'une démarche itérative, couramment utilisée en E.I.A.H. (Mackay & Fayard, 1997 ; Delozanne, 2006), s'impose pour concevoir le modèle de PED.

Cette démarche est décrite dans Delozanne et al. (2010). Le projet Lingot s'est structuré autour d'une démarche itérative fondée sur la réalisation de prototypes pour mettre à l'épreuve des hypothèses, produire des résultats et formuler de nouvelles questions de recherche. Il s'est organisé de la manière suivante : un outil de diagnostic papier-crayon, un logiciel de diagnostic assisté, un bilan de compétences individuel et un bilan de classe. Chaque cycle s'appuie d'abord sur une étude didactique pour élaborer un modèle didactique descriptif. Puis, les informaticiens mettent au point un modèle formel pour systématiser et rendre exécutables, par des machines, les modèles descriptifs. Un prototype est construit en prenant en compte les remarques des utilisateurs enseignants, puis il est expérimenté dans les classes. L'analyse des résultats de l'expérimentation conduit à une nouvelle recherche didactique pour faire évoluer les modèles.

b. Une démarche itérative pour les PED

Nous faisons l'hypothèse que cette démarche est efficace pour la recherche engagée. Elle consiste à élaborer et à affiner un modèle didactique par des itérations successives suite à la collaboration avec les différents partenaires du projet. L'objectif est, du côté informatique, de le systématiser, de dégager un prototype d'indexation des exercices pour automatiser la proposition des PED et de le peupler d'exercices et, du côté des élèves et des enseignants, de questionner l'efficacité et la viabilité des PED par le biais des pratiques d'enseignement de l'algèbre et de différenciation de l'enseignement. La collaboration avec les différents partenaires du projet joue un rôle important dans les différentes itérations de l'élaboration du modèle. Nous présentons la version actuellement stabilisée de la modélisation dans le chapitre 4. La collaboration concerne des chercheurs en didactique des mathématiques, des chercheurs en informatique, des membres de l'association Sésamath, des développeurs, et des enseignants (cf. figure 1.5). Nous, les chercheurs en didactique des mathématiques, jouons un rôle central : c'est à partir des modèles didactiques établis selon une étude théorique présentée précédemment que débute la collaboration avec les enseignants et les chercheurs en informatique.

FIGURE 1.5 – Un travail collaboratif

Au départ, un premier modèle est proposé ; il est issu de la recherche en didactique des mathématiques menée en amont. Puis, suite à des allers et retours, il est affiné pour prendre en compte les conditions et les contraintes d'enseignement et informatiques.

- Du point de vue des élèves, il s'agit de concevoir un modèle de PED qui les amène à convoquer des OM ponctuelles adaptées à leurs besoins d'apprentissage en algèbre pour déstabiliser des connaissances erronées et construire des modes d'interprétation et de justification ;
- Du point de vue des enseignants, il s'agit de concevoir un modèle de PED suffisamment flexible et adaptable qui puisse être écologiquement viable dans les classes du collège et de seconde. Il permet aux enseignants de s'intégrer de manière cohérente et économique dans les progressions annuelles sur l'algèbre (projet global), et d'élaborer des séances avec des enjeux précis de construction de savoir (projet local) et avec un déroulement et une gestion didactique adaptés aux objectifs d'apprentissages visés (dévolution de la situation, régulation de l'activité des élèves et institutionnalisation des savoirs visés) ;
- Du point de vue informatique, il s'agit de concevoir un modèle qui puisse être systématisé pour permettre son implémentation et le rendre accessible à un large public d'enseignants et d'élèves du collège et du lycée depuis la plateforme en ligne LaboMeP développée par l'association Sésamath.

Au début du projet, il était prévu que tous les PED soient constitués d'exercices interactifs mais l'analyse didactique a révélé la nécessité de convoquer des types de tâches souvent peu présents dans les manuels et dans le vivier d'exercices interactifs proposés par Sésamath. C'est pourquoi les PED sont peuplés majoritairement d'exercices papier-crayon et de quelques exercices interactifs de LaboMeP (cf. annexe A). Par ailleurs, il n'est pas été possible pendant le travail de recherche de travailler sur des logiciels tels que *Aplusix* (cf. §2.2.3) dans l'environnement LaboMep. Les exercices papier-crayon conçus ont été mis en ligne parmi les exercices non-interactifs de LaboMeP. Pour certains d'entre-eux, nous envisageons de les faire évoluer pour les rendre interactifs. Un première ébauche exploratoire de l'implémentation d'exercices papier-crayon est présentée à la fin du chapitre 5 (cf. annexe F).

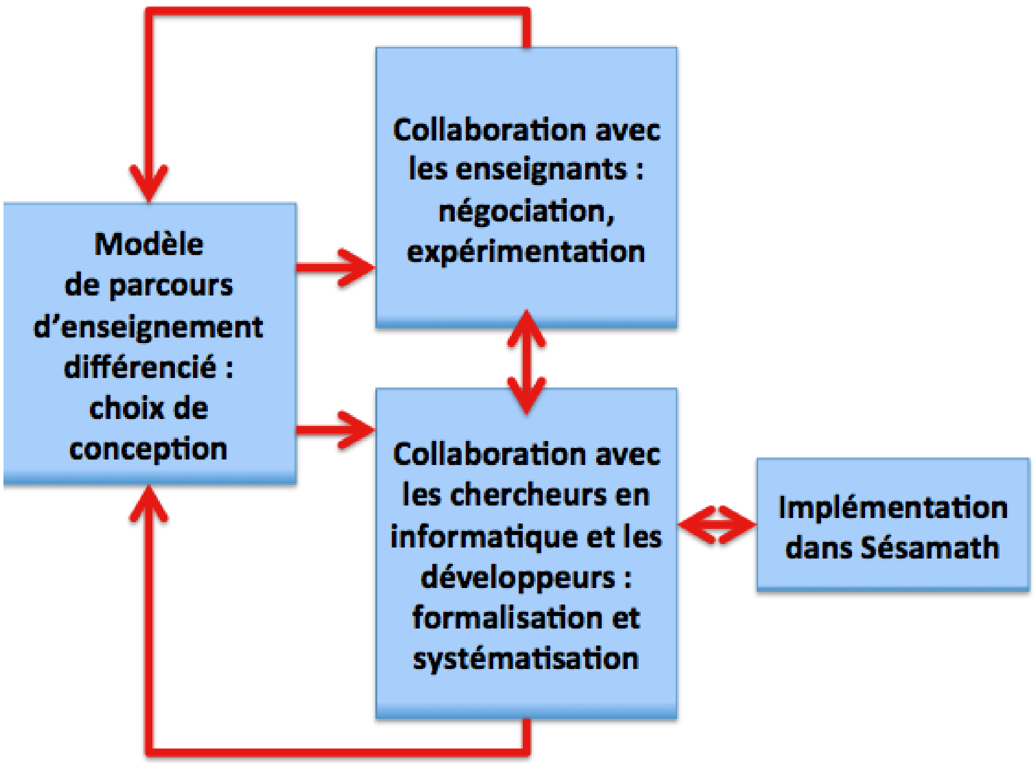


FIGURE 1.6 – Schéma général de méthodologie itérative

Cette démarche de recherche itérative est illustrée dans la figure 1.6. Nous la caractérisons par :

– une démarche itérative liée à la collaboration avec des enseignants qui consiste en la proposition, la négociation et l'expérimentation des PED à partir d'un document écrit. Les expérimentations et les retours des enseignants sont analysés et permettent de revenir sur nos choix [17] ;

17. Ce point de vue est proche de la notion d'ingénierie de développement de Perrin-Glorian (2011). L'auteur écrit à propose de la diffusion d'ingénierie didactique et de la production de

– une démarche itérative liée à la collaboration avec les chercheurs en informatique et avec des développeurs qui consiste à formaliser les PED et à réaliser un prototype d'indexation des exercices y intervenant pour permettre leur automatisation dans LaboMeP. Au départ, les chercheurs en didactique produisent un modèle discursif composé d'un texte et éventuellement de tableaux à caractères didactiques (expertise didactique). Il est transformé en un modèle formel, exécutable. Ces transformations s'accompagnent de la prise en compte des évolutions suggérées par la collaboration avec les enseignants. A cette étape, tous les cas limites doivent être pris en compte pour que le modèle formel et le prototype associé puissent fonctionner. Il est aussi peuplé par des exercices avec des critères bien définis pour que l'implémentation puisse associer à un PED les exercices correspondants. Cette dernière étape est complexe car elle amène inévitablement à faire évoluer le langage des enseignants au-delà du travail didactique réalisé.

Les deux démarches ne sont pas indépendantes mais s'influencent l'une l'autre. La collaboration avec les enseignants a un impact sur la formalisation et le peuplement du modèle ainsi que sur les choix réalisés pour favoriser la compatibilité des formulations utilisées avec les pratiques des enseignants et la culture de Sésamath. Dans l'autre sens, la nécessité de formaliser et de systématiser le modèle entraîne une réflexion avec les enseignants qui vise à affiner le modèle en envisageant tous les cas possibles.

Ainsi, la collaboration avec, d'une part, les chercheurs en informatique et les membres de Sésamath impliqués dans PepiMeP et, d'autre part, avec des enseignants regroupés au sein du groupe IREM de l'Université Paris-Diderot « Enseignement différencié en algèbre » joue un rôle important dans la modélisation des PED. Nous précisons cette démarche et les modes de collaboration qui ont guidé les relations avec ces différents partenaires dans le chapitre 4.

Les principaux choix méthodologiques de notre travail qui viennent d'être pré-

ressources pour l'enseignement ordinaire : « *La production et la diffusion de ressources pour l'enseignement et la formation des maîtres est devenue une question de recherche d'actualité avec le développement des outils informatiques de communication mais elle n'est pas nouvelle.* [. . .] *On peut en distinguer au moins deux types : d'une part la production directe de ressources par des recherches-action comme celles qui se sont développées depuis 40 ans dans les IREM ou dans les équipes INRP, d'autre part la transposition d'ingénieries didactiques issues de recherches visant aussi des questions plus théoriques. C'est au deuxième cas que je m'intéresserai dans la suite, c'est-à-dire au cas où il y a une volonté de production scientifique et pas seulement de partage d'expérience.* » (Perrin-Glorian, 2011, p. 8) sentés serons précisés au fur et à mesure de la thèse. Nous avons maintenant réuni tous les éléments nécessaires pour présenter notre plan d'étude.

1.5 Plan d'étude

Notre étude s'organise en cinq chapitres et suit les différentes étapes de la méthodologie qui vient d'être présentée.

Le chapitre 1, dans lequel s'insère ce paragraphe, fait l'objet de la présentation de la problématique, du contexte de la recherche, du cadre théorique et de la méthodologie.

Dans le chapitre 2, nous faisons une synthèse de travaux de didactique de l'algèbre pour établir une référence épistémologique des éléments qui fondent la génération des expressions algébriques, du calcul sur ces expressions et de leur utilisation dans des contextes intra ou extra-mathématiques. Nous organisons le chapitre en fonction de plusieurs types de travaux : d'une part ceux relevant d'une approche anthropologique, qui proposent des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre et, d'autre part, ceux relevant d'une approche cognitive du côté de l'activité de l'élève et des processus de conceptualisation de l'algèbre. Cette référence nous sert de fil directeur dans les analyses des chapitres suivants.

Le chapitre 3 est consacré à la mise en évidence de besoins d'apprentissage ignorés par l'institution et laissés à la charge des élèves pendant l'enseignement de l'algèbre au collège et en seconde. Nous commençons par dégager une OM de référence relativement aux expressions algébriques selon la référence épistémologique établie au chapitre 2. Cette OM de référence est opérationnalisée pour analyser les programmes officiels et des manuels du collège et de la classe de seconde. Nous en dégageons les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner relativement aux expressions algébriques dans ces institutions. Les niveaux de la classe de 5^{e} à la classe 2^{de} sont concernés afin d'avoir accès à toutes les étapes de construction de l'OM à enseigner et de l'OD associée. La mise en perspective de l'OM à enseigner dans l'OM de référence relativement aux expressions algébriques, nous permet de mettre en évidence l'incomplétude du bloc technologico-théorique de l'OM à enseigner au collège et au début de la seconde. Certaines nécessités d'apprentissages liées aux éléments épistémologiques au cœur du travail sur les expressions algébriques s'en trouvent ignorées ou laissées implicites. Cela nous conduit à formuler deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

Dans le chapitre 4, nous présentons le modèle de parcours d'enseignement différencié. Dans un premier temps, nous interprétons les tâches diagnostiques du logiciel Pépite et les stéréotypes à partir de l'OM de référence. Le nombre élevé de stéréotypes nous a conduit à les regrouper et à dégager des niveaux technologiques correspondant à des catégories d'OM apprises. Les niveaux sur les trois composantes du stéréotype permettent de catégoriser des niveaux technologiques. La mise en perspective des savoirs et savoirs-faire laissés implicites par l'institution avec ces niveaux technologiques éclaire sur les questions prioritaires à aborder pour les faire évoluer et fournit des éléments pour sélectionner des types de tâches souvent rarement abordés en classe et d'organiser leur gestion didactique. Dans un deuxième temps, les choix de modélisation des parcours d'enseignement différencié sont présentés. Nous proposons l'analyse *a priori* des énoncés et d'un processus didactique possible les accompagnant. Nous explicitons en quoi la catégorisation de niveaux technologiques nous permet d'attribuer un jeu sur les variables didactiques et de choisir un milieu en fonction des groupes. Le modèle est mis en perspective du travail collaboratif avec des enseignants et les partenaires du projet PepiMeP. Pour terminer, nous présentons l'indexation qui a été conçue pour automatiser la génération des parcours d'enseignement différencié.

Le chapitre 5 est consacré à l'analyse de certaines des expérimentations menées dans le cadre du groupe IREM de l'Université Paris-Diderot « Enseignement différencié en algèbre ». Dans un premier temps, nous analysons qualitativement les expérimentations menées dans la classe de 3^{e} d'une enseignante, appelée Garance, afin de tester nos choix de conception sur les rapports personnels des élèves à l'algèbre et leur compatibilité avec les choix d'enseignement de l'enseignante. Dans un deuxième temps, nous proposons une analyse des stéréotypes rencontrés et de leur répartition en groupes en fonction des niveaux scolaires sur l'ensemble des élèves ayant passés le test afin des tester nos choix de regroupement et d'évaluer les niveaux technologiques dominants présents dans les classes.

Dans le chapitre 6, nous concluons par des perspectives de recherche pour revenir sur nos choix théoriques et méthodologiques et sur les résultats de chaque chapitre.

Chapitre 2

Une référence épistémologique à partir de travaux de didactique de l'algèbre

La relecture de travaux de didactique de l'algèbre, qui fait l'objet de ce chapitre, vise à établir une référence épistémologique sur les éléments cruciaux pour la génération, la manipulation et l'utilisation des expressions algébriques. Nous cherchons donc à répondre à la question suivante : qu'est-ce qui est au cœur de la génération des expressions algébriques, du calcul sur ces expressions et de leur utilisation dans des contextes intra-ou extra-mathématiques ? Rappelons que, dans notre plan d'étude, cette référence épistémologique est un appui pour construire une OM de référence, présentée au chapitre 3. Cette OM de référence vise à faire le lien et à comparer les OM apprises et l'OM à enseigner dans l'objectif de mieux prendre en compte la part des implicites institutionnels dans le développement des praxéologies apprises et d'en dégager des questions génératrices pour concevoir des parcours d'enseignement différencié.

Le modèle de la « compétence algébrique » de Grugeon (1997) (cf. §1.2.1b.) permet de situer le rapport personnel de l'élève du point du vue du développement conceptuel des objets de l'algèbre et des difficultés rencontrées à l'entrée dans une nouvelle institution en lien avec le décalage entre les rapports institutionnels à l'algèbre des deux institutions. Mais, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, ce modèle n'est pas opératoire pour mettre en relation les rapports personnels des élèves à l'algèbre en lien avec des implicites institutionnels. C'est pourquoi nous avons besoin de faire évoluer et d'affiner cette référence autour des expressions algébriques. Nous envisageons notre questionnement sous l'angle des travaux de didactique de l'algèbre déjà présents chez Grugeon mais aussi de travaux plus récents.

Ce chapitre est structuré à partir de l'étude de plusieurs modèles de l'algèbre élémentaire relevant de deux approches théoriques différentes. D'abord, des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre présentés sont ceux développés dans une approche anthropologique (§2.1). Le domaine algébrique y est modélisé pour rendre compte des phénomènes didactiques et transpositifs qui déterminent la place et la fonction de l'algèbre à enseigner dans les curriculum. Nous exposons les travaux de Chevallard (1990, 1989, 1985b) et Gascón (1994), qui ont remis en question le modèle implicite de l'algèbre comme arithmétique généralisée en introduisant la notion de modélisation, ainsi qu'un modèle de l'enseignement de l'algèbre à enseigner plus récent (Ruiz-Munzón, 2010 ; Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch, & Gascón, 2012), qui présente la genèse de l'algèbre élémentaire en tant que processus d'algébrisation. Ensuite, nous développons des modèles de l'activité algébrique. Ils se situent dans une approche cognitive du côté de l'activité de l'élève et des processus de conceptualisation de l'algèbre (§2.2). Nous faisons référence au modèle de l'activité algébrique de Kieran (1996, 2007), ce qui permet de mettre en réseau de nombreux travaux de didactique de l'algèbre. Ces deux approches théoriques sont complémentaires vis-à-vis de notre problématique. Elles permettent de situer les rapports personnels des élèves et les processus de conceptualisation de l'algèbre des élèves relativement au rapport institutionnel à l'algèbre attendu dans l'institution où l'élève apprend. Nous tirons parti de cette complémentarité dans l'ensemble des travaux relatés pour dégager une référence épistémologique autour des expressions algébriques, qui sert de fil directeur dans nos analyses tout au long de la thèse (§2.3).

2.1 Des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre dans la TAD

Nous présentons ici des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre, conçus dans la théorie anthropologique du didactique. Comme annoncé dans l'introduction, nous exposons d'abord les travaux de Chevallard (1990, 1989, 1985b) et Gascón (1994) puis ceux de Ruiz-Munzón (2010) ; Ruiz-Munzón et al. (2012).

2.1.1 La notion de modélisation dans les travaux de Chevallard

Chevallard (1985b, 1989) étudie le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Une analyse des programmes et des manuels anciens jusqu'à ceux en vigueur à l'époque où les articles sont écrits, l'amène à établir un constat édifiant. La triade arithmétique-algèbre-géométrie, qui structurait le curriculum avant la réforme des mathématiques modernes, est délaissée. Les programmes scolaires des années 1980 manquent de « *référence explicite à l'algèbre* » et présentent une « *poussée vigoureuse du numérique* » et « *l'évanouissement de l'apprentissage des outils algébriques* ». Ils conduisent à un manque d'idonéité du rapport officiel au calcul algébrique, au collège, par rapport aux usages faits dans la suite du cursus mathématique. Chevallard met en avant que « *le rapport de l'élève au calcul algébrique n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation algébrique de l'expression, d'une part, et substitution de valeurs numériques, d'autre part* ». La dialectique du numérique et de l'algébrique est perdue :

> *« Au-delà de la disparition de la structure du corpus mathématique enseigné en arithmétique et en algèbre, c'est la dialectique du numérique et de l'algèbre - implicitement présente à travers l'"opposition" de l'arithmétique et de l'algèbre - qui va se trouver atteinte. Plus que jamais, les liens du numérique et de l'algébrique s'en trouveront relâchés. » (Chevallard, 1985b, p. 75)*

Pour lui, cette dialectique est centrale dans la maîtrise du calcul algébrique et de sa fonctionnalité :

> *« L'algébrique est un outil de l'étude du numérique, le premier outil, le plus élémentaire sans doute (à un niveau intermédiaire viendraient par exemple la théorie des séries entières, la théorie des fonctions analytiques, etc.). Mais, inversement (et c'est ce qui nous autorise à parler de* ***dialectique****), pour que le fonctionnement de cet outil soit efficace, il faut quelque peu* ***étudier*** *cet outil, par exemple se poser les problèmes de la factorisation des expressions algébriques (afin notamment de résoudre des équations algébriques). Or, en ce point, le numérique lui-même est un outil d'étude à l'algébrique.[1] » (Chevallard, 1985b, p. 75)*

Par exemple, dans l'enseignement secondaire, l'algébrique permet de prouver que la somme de deux entiers impairs consécutifs $2p-1$ et $2p+1$ est un multiple de 4 puisque $(2p-1)+(2p+1)=4p$ ou de calculer 101^2 en le transformant en $(100+1)^2$ pour utiliser une identité remarquable. Dans l'autre sens, le numérique est outil, par exemple, pour donner du sens aux propriétés des expressions algébriques, pour contrôler ses résultats en substituant des valeurs numériques aux variables de l'ex-

1. Chevallard fait référence à une méthode « *ingénieuse* » développée par Newton qui permet de trouver, à partir du numérique, les facteurs d'une expression algébrique.

pression algébrique étudiée ou pour la recherche de contre-exemple de l'équivalence de deux expressions algébriques.

Face à ce constat, Chevallard s'attache au problème didactique de la définition d'un curriculum, qui assure un rapport officiel à l'algébrique plus idoine aux tâches auxquelles l'algèbre est employée. Pour lui, le modèle de l'enseignement de l'algèbre doit assurer « *la maîtrise formelle du calcul fonctionnel* ». La maîtrise formelle du calcul algébrique ne peut avoir lieu sans une « *maîtrise du calcul algébrique fonctionnel* », c'est-à-dire « *sans que l'on fasse droit aux emplois du calcul algébrique* ». Il introduit la notion clef de modélisation mathématique Chevallard (1989, p. 53) :

> *« La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université. Grille de lecture et d'interrogation, elle fournit un cadre de référence au sein duquel il devient alors possible de faire surgir des différences significatives - entre arithmétique et algèbre notamment. » (Chevallard, 1985b, p. 61)*

« *Du mode clos* » des problèmes arithmétiques, le champ de problèmes de l'algèbre est élargi et structuré :

> *« D'emblée, la puissance algébrique est mise en relation avec le fait de désigner par des lettres, à côté des quantités inconnues, que l'on recherche, les quantités connues elles-mêmes - les données. » (Chevallard, 1985b, p. 65)*

Alors que Chevallard (1985b) se penche sur le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège et propose d'élargir les types de problèmes travaillés, Gascón (1994) propose un modèle alternatif au modèle de l'algèbre comme arithmétique généralisée.

2.1.2 Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire dans les travaux de Gascón

Dans la lignée des travaux de Chevallard, Gascón (1994) met en avant le côté réducteur de l'enseignement de l'algèbre comme une « arithmétique généralisée » :

> *« L'algèbre enseignée n'est pas à proprement parler une arithmétique généralisée étant donné qu'elle ne contient pas strictement l'arithmétique enseignée : d'une part, la résolution algébrique de certains problèmes arithmétiques suppose des instruments qui ne font plus partie de l'algèbre telle qu'elle est enseignée aujourd'hui ; d'autre part, l'algèbre enseignée possèderait une thématique propre qui n'est, en aucun sens, une généralisation de celle de l'arithmétique. » (Gascón, 1994, p. 47)*

L'auteur revisite le patron d'analyse-synthèse décrit par Pappus pour proposer un modèle alternatif de l'algèbre à enseigner comme arithmétique généralisée. Il montre que le patron d'analyse-synthèse est limité « *comme technique mathématique* » pour résoudre tous les problèmes algébriques. Il en propose des variations, ce qui met en évidence un nouveau champ de problèmes relevant de la modélisation mathématique. Dans le nouveau modèle de l'enseignement de l'algèbre, l'algèbre n'est plus introduite comme arithmétique généralisée mais comme un instrument nécessaire à la modélisation mathématique.

Dans des travaux plus récents, la notion clef de modélisation est toujours présente. Le modèle de l'enseignement de l'algèbre de Ruiz-Munzón (2010) se présente sous la forme d'un processus d'algébrisation des praxéologies mathématiques en articulation avec une modélisation algébrico-fonctionnelle.

2.1.3 Un modèle de l'algèbre élémentaire comme processus d'algébrisation de programmes de calcul dans les travaux de Ruiz-Munzón

Face à l'évolution de la transposition didactique qui a conduit à l'émiettement des contenus de l'algèbre (cf. §2.1.1), Ruiz-Munzón (2010) et Ruiz-Munzón et al. (2012) cherchent à rendre compte des phénomènes didactiques et transpositifs qui affectent l'écologie didactique de l'algèbre. Ruiz-Munzón propose un modèle épistémologique de référence selon lequel la genèse de l'algèbre élémentaire se situe dans un processus d'algébrisation de programmes de calcul. Partant d'un système initial formé des praxéologies relevant de l'exécution des programmes de calcul pas à pas, il évolue vers la construction de praxéologies de plus en plus algébrisées. L'algèbre élémentaire est ici présentée comme un processus de modélisation progressive de systèmes mathématiques partant des programmes de calcul arithmétiques jusqu'aux fonctions. Dans le modèle de Ruiz-Munzón, ce processus s'articule avec le développement de la modélisation algébrico-fonctionnelle, ce qui permet de relier les outils fonctionnels au processus d'algébrisation.

Notre étude étant centrée sur les expressions algébriques, nous présentons ici les différentes étapes que comporte le processus d'algébrisation de l'algèbre élémentaire. Mais, avant de présenter les trois étapes principales de ce processus, nous commençons par situer les programmes de calcul dans l'algèbre élémentaire.

a. L'algèbre élémentaire comme science des programmes de calcul

La conception de l'algèbre comme processus de modélisation progressive conduit à disposer d'un système initial à modéliser. Concernant l'algèbre, il s'agit de la modélisation de programmes de calcul (noté PC) en expression algébrique. Pour

Chevallard, la notion d'expression algébrique repose sur l'« *entité* » programme de calcul :

> *« Une "expression algébrique" est un énoncé symbolique qui exprime un certain programme de calcul. L'expression algébrique* $E(x) = 15x - 3(x+1)$ *exprime le programme de calcul* Π *dont une expression "rhétorique" est la suivante : "Multiplier le nombre donné par quinze puis retrancher au nombre obtenu le triple du successeur du nombre donné". » Chevallard et Bosch (2012)*

Pour Chevallard, l'algèbre élémentaire est motivée par un grand type de tâches qui est de déterminer si deux programmes de calcul sont équivalents, c'est-à-dire s'ils retournent la même valeur numérique pour toutes les valeurs de la variable. L'algèbre élémentaire trouve ainsi toute sa force en tant qu'outil de modélisation et de preuve. Elle peut être considérée comme une science pour décrire, étudier et calculer avec et sur les programmes de calcul.

b. Les trois étapes du processus d'algébrisation

Le processus d'algébrisation présenté par Ruiz-Munzón est structuré en trois étapes (cf. figure 2.1).

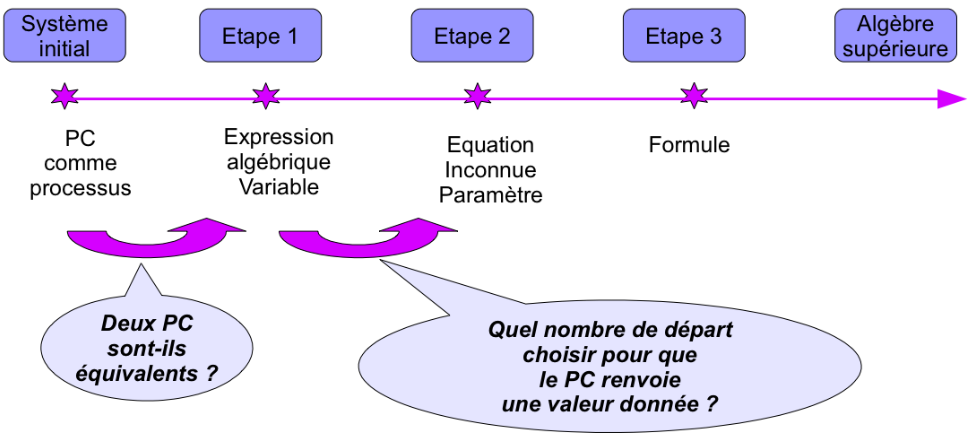


FIGURE 2.1 – Les trois étapes du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón

Au départ, le système est formé de praxéologies relevant du calcul arithmétique élémentaire. Les programmes de calcul sont donnés par leurs descriptions langagières, c'est-à-dire leur effectuation pas à pas. Le corpus des problèmes de l'arithmétique élémentaire peut être résolu par la description d'un programme de calcul et de son exécution. La première étape du processus d'algébrisation consiste à cesser de considérer le programme de calcul comme un processus et à le considérer comme un tout. Cette matérialisation nécessite une explicitation globale de sa structure.

Cette étape est introduite par le grand problème soulevé par Chevallard : deux programmes de calcul étant donnés, sont-ils équivalents ? Les techniques du système initial sont limitées et il devient nécessaire d'en introduire de nouvelles pour créer et de simplifier des écritures. Ce besoin introduit un nouvel environnement technologico-théorique avec la notion d'« expression algébrique ». Les expressions algébriques sont des modèles symboliques des programmes de calcul. Prenons par exemple le programme de calcul P1 : « Prendre un nombre, lui ajouter 1, multiplier le tout par 4 » et le programme de calcul P2 : « Prendre un nombre, le multiplier par 4, lui ajouter 4 ». P1 et P2 sont équivalents. En effet, si n désigne le nombre choisi, les expressions algébriques $(n+1) \times 4$ et $4n+4$ modélisent P1 et P2 et la propriété de distributivité permet de prouver leur équivalence. La prise en compte de la hiérarchie des opérations des programmes de calcul et des règles associées à l'usage des parenthèses est nécessaire.

La deuxième étape du processus d'algébrisation est motivée par une nouvelle question : un programme de calcul étant donné, quel nombre de départ choisir pour que le programme de calcul renvoie une valeur donnée ? Par exemple, Zoé pense à un nombre entier, le multiplie par 2, ajoute 3, multiplie le résultat par le nombre de départ et soustrait 2, elle trouve 12 ; à quel nombre a-t-elle pensé ? Cette question appelle de nouvelles techniques pour résoudre des équations du premier et du second degré et à un environnement technologico-théorique étendu avec les notions d'équation, d'inconnue et de paramètre. Le travail algébrique scolaire se situe principalement à cette étape avec la résolution de problèmes permettant de modéliser des relations mathématiques en équations.

La troisième étape du processus d'algébrisation apparaît lorsque le nombre d'arguments du programme de calcul n'est pas limité :

> *« [Il] se produit lorsqu'on ne limite pas le nombre de variables avec lesquelles on travaille et qu'on élimine la distinction entre inconnues et paramètres. » (Ruiz-Munzón et al., 2012)*

Il fait intervenir la notion de formule. Cette étape apparaît peu dans le travail algébrique scolaire. Il est présent en physique avec un travail de production, de transformation et d'interprétation de formules. Au-delà de cette étape, le processus se poursuit vers « l'algèbre supérieure », par le passage de l'algèbre élémentaire au calcul différentiel.

2.1.4 Conclusion

Les trois modèles épistémologiques de l'algèbre qui viennent d'être présentés se situent dans une approche anthropologique. La même préoccupation les rassemble. La conception de modèles épistémologiques de référence de l'algèbre vise à rendre compte des phénomènes didactiques et transpositifs qui affectent l'écologie didactique de l'algèbre (son statut et sa manière d'exister dans le curriculum et dans les classes), problème soulevé dès les premiers travaux de Chevallard. Pour Chevallard et Gascón, ce sont les notions de modélisation et de preuve qui permettent de démarquer la puissance de l'algèbre comme outil privilégié pour aborder des problèmes intra et extra-mathématiques face à une algèbre réduite à une arithmétique généralisée. Pour Ruiz-Munzón, c'est un processus d'algébrisation qui s'inscrit dans un processus de modélisation progressive où les praxéologies sont de plus en plus algébrisées. Les expressions algébriques, qui sont au centre de nos préoccupations, apparaissent dès la première étape de ce processus ce qui la rend fondamentale pour la poursuite du processus d'algébrisation. Ce modèle renforce notre choix de centrer nos travaux sur les expressions algébriques.

Trois éléments épistémologiques relatifs à la génération, à la manipulation et à l'utilisation des expressions algébriques ressortent dans ces travaux :

- le rôle des programmes de calcul et de l'étude de leur équivalence dans la génération des expressions algébriques et des règles du calcul algébrique,
- le passage de la considération d'un programme de calcul comme processus à un programme de calcul considéré comme un résultat,
- le rôle de la dialectique entre le numérique et l'algébrique dans l'apprentissage de la fonctionnalité du calcul algébrique.

Pourtant, comme le montrent Chevallard (1985b) et Chevallard et Bosch (2012), les processus de transposition didactique successifs depuis la réforme des mathématiques modernes montrent que les élèves ont peu l'occasion de rencontrer des praxéologies qui les font intervenir.

Nous proposons maintenant de tirer parti des travaux de didactique de l'algèbre issus d'une approche cognitive, du point de vue de l'activité de l'élève, pour interroger les processus de conceptualisation de l'algèbre. A l'issue de ces analyses, nous concluons en mettant en perspective les éléments épistémologiques retenus dans chaque approche.

2.2 Le modèle de l'activité algébrique dans les travaux de Kieran

Dans ce paragraphe, le modèle de l'algèbre élémentaire évoqué s'inscrit dans une approche cognitive du point du vue de l'activité de l'élève. Le modèle qui fait référence est celui introduit par Kieran (1996, 2007). Elle a développé un modèle de l'activité algébrique qui permet de mettre en réseau de nombreux travaux de didactique de l'algèbre. Nous en proposons une synthèse, orientée vers notre objet de recherche : les expressions algébriques. Lorsque cela s'avère pertinent, nous la complétons par des résultats issus d'autres travaux.

Kieran a développé un modèle, nommé « modèle GTG », qui distingue trois types d'activités algébriques élémentaires : l'activité générative, l'activité transformationnelle et l'activité globale (meta-activité algébrique). Ce modèle est construit sur un croisement entre les sources de signification de l'algèbre (qu'est-ce qui donne du sens à l'algèbre ?) et l'idée de l'algèbre comme activité (qu'est-ce que l'algèbre ?). Kieran conçoit l'algèbre comme activité en référence à différents travaux de didactique de l'algèbre. Elle s'appuie notamment sur une étude de Lee (1997), qui a posé à des mathématiciens, enseignants et étudiants la question suivante : « qu'est-ce que l'algèbre ? ». Un type de réponse domine, celui de l'algèbre comme une activité :

> *« Algebra emerges as an activity, something you do, an area of action in almost all of the interviews (p.187, Lee, 1997). » (Kieran, 2007, p. 713)*

Dans les paragraphes suivants, nous détaillons les différents types d'activités algébriques caractérisés par Kieran. Pour cela, nous évoquons différents travaux de didactique de l'algèbre empruntés à d'autres auteurs et significatifs pour travailler les expressions algébriques. Nous commençons par les différentes sources de signification de l'algèbre dans les travaux de Kieran.

2.2.1 Les sources de signification de l'algèbre chez Kieran

Dans une perspective épistémologique, Kieran (2007) s'attache à décrire ce qui peut rendre l'algèbre significative : « *Algebraic meaning : Where does it come from ?* ». Pour cela, l'auteure s'inspire d'une classification des sources de signification (« *sources of meaning* » en anglais) de l'algèbre proposée par Radford (2004).

> *« For Radford, meaning in school algebra is produced in the "crossroads of diverse semiotic mathematical and non-mathematical systems" and is deemed to come from three primary sources : (a) the algebraic "structure" itself, (b) the problem context, and (c) the exterior of the problem context. » (Kieran, 2007, p. 711)*

Selon Kieran, les trois sources de signification introduites par Radford ne prennent pas assez en compte le fait que les représentations mathématiques [2] (représentations graphiques, tableau de valeurs, etc) occupent une place importante dans les programmes scolaires actuels. C'est pourquoi elle adapte la classification de Radford et ajoute une quatrième source de signification « *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations* ». La nouvelle classification, qui fait l'objet d'une présentation approfondie, devient :

> *1. « Meaning from within mathematics :*
>
> **a.** *Meaning from the algebraic structure itself, involving the letter-symbolic form*
>
> **b.** *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations*
>
> *2. Meaning from the problem context*
>
> *3. Meaning derived from what which is exterior to the mathematics/problem context (e.g. linguistic activity, gestures and body language, metaphors, lived experience, image building) » (Kieran, 2007, p. 711)*

Il nous apparaît pertinent de retenir cette classification dans notre étude cas Kieran y décrit ce qui permet de donner du sens aux objets de l'algèbre, ce qui peut éclairer sur les difficultés des élèves et les classes d'erreurs. Quelles sont les sources de signification de l'algèbre auxquelles un élève se réfère, ne se réfère pas ? Quels liens font les élèves entre ces sources de signification ? Comment peut-on les exploiter pour penser des exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves ? Quelle source de signification faire intervenir en priorité ? Dans quelle mesure un jeu sur différentes sources de signification pourrait-il permettre d'amener les élèves à remettre en question des apprentissages erronés ?

Nous développons maintenant les principaux aspects de chaque source de signification.

a. A propos de *Meaning from the algebraic structure itself, involving the letter-symbolic form*

Cette source de signification est fondamentale dans la compréhension des objets de l'algèbre. Elle concerne la construction du symbolisme algébrique, à la fois à travers la dialectique du numérique et de l'algébrique (Chevallard, 1985b), et à travers la mise en relation des aspects syntaxique et sémantique et celle des aspects

2. Kieran utilise le terme de « *mathematical representations* » que nous avons traduit par « *représentations mathématiques* ». Par la suite, nous le traduirons dans les termes de Duval (1993) par « *registres de représentations sémiotiques* ».

structural et procédural des objets mathématiques et, en particulier, des expressions algébriques.

> « *This structural source of meaning not only links letter-symbolic representations to their numerical foundations but also provides connections among the symbolic forms of algebra, its equivalences, and its property-based manipulation activity. Although the algebra research literature often refers to* the structure of expressions*, the latter phrase both shuns definition and proves difficult for students to grasp. [. . .] This source of meaning is considered by many mathematics educators and researchers to be fundamental to algebra learning.(Kieran, 2007, p. 711)*

Kieran reprend une citation de Booth à propos de « l'aspect sémantique de l'algèbre » :

> *« Our ability to manipulate algebraic symbols successfully requires that we first understand the structural properties of mathematical operations and relations which distinguish allowable transformations from those that are not. These structural properties constitute the semantic aspects of algebra. (Booth, 1989, pp.57-58) » (Kieran, 2007, p. 711).*

Ces extraits montrent à quel point la manipulation des expressions algébriques est dirigée par une flexibilité, à travailler en s'appuyant à la fois sur les aspects syntaxiques et sémantiques et sur les aspects structural et procédural des expressions algébriques, développés aux paragraphes 2.2.2 et 2.2.3.

Nous complétons cette synthèse par deux approches.

D'une part, Bosch et Chevallard (1999) et (Chevallard, 1993), adoptent une approche, déjà présentée dans le chapitre d'introduction, par la dimension ostensive de l'activité algébrique. Le traitement algébrique y est décrit comme une manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs. Ils évoquent une double fonction des ostensifs : une fonction sémiotique, qui correspond à la capacité des ostensifs à produire du sens, et une fonction instrumentale qui traduit la capacité des ostensifs à s'intégrer dans des manipulations techniques, technologiques et théoriques.

D'autre part, dans le cadre de sa thèse de doctorat, Bardini (2003) s'est appuyée sur l'analyse épistémologique de Serfati (2005) de la construction du symbolisme pour analyser les rapports personnels des élèves aux expressions algébriques et notamment au symbolisme. La mise en perspective des erreurs persistantes des élèves avec les six figures de représentation développées par Serfati éclaire sur l'interprétation de ces erreurs. Nous présentons ici les principaux liens tissés par Bardini. Pour Serfati, l'écriture symbolique mathématique s'est constituée autour de six *figures de représentation* :

1. *La représentation du requis*, c'est-à-dire la représentation symbolique d'un élément, permanent dans le texte mais inconnu. Le symbole (la lettre) a alors le statut d'inconnue.

2. *La représentation du donné.* Le donné est aujourd'hui appelé « paramètre » [3]. Depuis Descartes, dans sa *Géométrie* (1637), l'usage veut que les inconnues soient représentées par les dernières lettres de l'alphabet (x, y, z) et les connues, les paramètres, par les premières (a, b, c). Le fait qu'un symbole puisse représenter à la fois le donné et le requis revient à accepter que les lettres puissent avoir différents statuts. Or, ce point peut être source de difficultés dans le contexte scolaire.

3. *La représentation des instructions opératoires élémentaires* comme, par exemple, l'addition, la multiplication et l'extraction de racines. Le cas de l'addition, développé par Bardini, met en évidence que l'erreur fréquente de concaténation $(a + b \rightarrow ab)$ est cohérente avec l'interprétation épistémologique du signe d'addition. L'addition est considérée sous l'angle opérationnel. Elle n'est plus interprétée comme un objet [4] ce qui, comme le souligne Serfati (2005, p. 71) », correspond à « *la fonction première véritable de tous les assemblages élémentaires [qui] est bien [. . .] d'assurer la codification d'une instruction d'exécution et non la valeur du résultat* ».

4. *La représentation de l'enchevêtrement des instructions* qui répond à la question de la séparation et de l'agrégation des signes dans le texte symbolique. C'est l'apparition de délimitants, comme les parenthèses et les crochets, qui permet de distinguer le produit de 2 par la somme de x et de 3, représentée symboliquement par $2(x + 3)$, de la somme du produit de 2 par x avec 3, représentée par $2x + 3$. L'interprétation des délimitants conduit à considérer les expressions du point de vue de leur structure (Sfard, 1991) et peut être mise en lien avec la tendance des élèves à se débarrasser au plus vite des signes délimitants, par exemple dans des erreurs du type : $a(b + c) \rightarrow ab + c$.

5. *La représentation de la mise en relation par égalité.* La mise à égalité dans le discours rhétorique suit le fil du texte sans pouvoir être considérée dans le sens inverse ce qui lui donne un caractère dissymétrique. Selon Serfati, cette dissymétrie a persisté dans les premières représentations symboliques du signe d'égalité puis elle s'est effacée à partir de la mise en place des « deux traits parallèles » dans le registre symbolique, introduits par le mathématicien Recorde.

3. Chevallard met en avant à plusieurs reprises (Chevallard, 1985b ; Chevallard & Bosch, 2012) la disparition des paramètres dans les programmes actuels comme une « dénaturation de "l'art algébrique" ».

4. Bardini fait le lien avec la notion de *procept* développée par Tall, c'est-à-dire le fait de pouvoir interpréter l'expression symbolique aussi bien en tant que procédure qu'en tant qu'objet.

Ceci rejoint, selon Bardini, les difficultés rencontrées par les élèves, soulignées à plusieurs reprises dans notre étude, vis-à-vis des différents statuts du signe d'égalité, notamment dans la rupture entre l'arithmétique et l'algébrique. La difficulté, pour les élèves, réside dans le passage d'une interprétation dissymétrique du signe d'égalité, caractéristique de l'écriture rhétorique, qui peut s'avérer très persistante, à une perception du signe d'égalité comme une relation d'équivalence (propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité).

6. *La représentation des concepts composés* comme les puissances (carré, cube) ou l'exponentielle.

b. A propos de *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations*

Cette source de signification concerne les liens entre les différents registres sémiotiques. Chez Duval (1995), la dimension sémiotique du travail algébrique réside dans le fait de mettre en jeu, parallèlement au registre des écritures algébriques, d'autres registres sémiotiques comme celui des écritures numériques, celui des représentations graphiques, celui des dessins en géométrie ou encore celui de la langue naturelle, afin, par exemple, de reformuler des énoncés, de faire apparaître les relations entre les variables. La conversion d'un registre sémiotique à un autre n'est pas transparente mais elle dépend du degré de complexité de son exécution, que Duval caractérise par la congruence ou la non-congruence entre les unités respectives des représentations de départ et d'arrivée. La congruence est caractérisée par la correspondance sémantique terme à terme entre les unités signifiantes des deux représentations ; la non-congruence demande une réorganisation entre les unités signifiantes du registre de départ et celui d'arrivée. Par exemple, la phrase « il y a six fois plus d'élèves (E) que de professeurs (P) » demande une réorganisation pour être traduite par $6P = E$ dans le langage algébrique alors que la phrase « le nombre d'élèves est égal à six fois celui des professeurs » lui est congruente.

La dimension sémiotique du travail algébrique est centrale dans l'apprentissage de l'algèbre :

> *« The opportunity to coordinate objects and actions within two different representations, such as the graphical and the letter-symbolic, is considered by many [mathematics educators and researchers] to be crucial in creating meaning in algebra (e.g. Fray, 1989 ; Romberg, Fennema & Carpenter, 1993 ; Yerushalmy & Schwartz, 1993). »* (Kieran, 2007, p.712)

Diversifier les liens entre les écritures algébriques et différents registres sémiotiques peut aider les élèves à conceptualiser les objets de l'algèbre et rendre l'activité algébrique plus significative.

> *« Kaput (1989) has argued that the problem of student learning in algebra is compounded by the inherent difficulties in dealing with the highly concise and implicit syntax of formal algebraic symbols and the lack of linkages to other representations that might provide feedback on the appropriate actions taken. As a consequence, he has promoted the kind of mathematical-meaning building that has its source in translations between mathematical representation systems. »* (Kieran, 2007, p. 712)

Aujourd'hui, l'enseignement de l'algèbre cherche à s'appuyer davantage sur les liens entre registres sémiotiques, par exemple par une approche fonctionnelle de l'algèbre. L'introduction d'environnements technologiques, comme les calculatrices graphiques, peut favoriser les liens entre le registre des expressions algébriques et celui des représentations graphiques. Cependant, comme le souligne Kieran, certains élèves peuvent éprouver des difficultés à établir ces liens.

Nous nous interrogeons : dans quelle mesure un jeu sur les différents registres sémiotiques peut-il être utilisé pour aider les élèves à donner davantage de sens aux objets de l'algèbre ?

c. A propos de *Meaning from the problem context*

Dans la lignée des travaux de Chevallard (1985b) et Gascón (1994), Kieran évoque plusieurs travaux en didactique de l'algèbre qui montrent l'importance de la résolution de problèmes internes ou externes aux mathématiques pour accompagner la construction du sens donné aux objets de l'algèbre. L'algèbre n'est pas seulement un ensemble d'objets avec des propriétés qui permettent de les manipuler, c'est aussi un outil pour résoudre des problèmes du domaine algébrique comme les problèmes de généralisation, de modélisation, de mise en équation ou les problèmes fonctionnels.

> *« In contrast to the internal semantics of algebra as a site for meaning making (Booth, 1989), the external semantics of a problem permit the algebra learner to fuse symbols and notations with events and situations, thereby creating an external meaning for certain objects and processes of algebra. A strongly held belief in algebra education is the notion that problem-solving contexts are foundational to the emergence and evolution of algebraic reasoning (e.g., Bednarz & Janvier, 1996; Bell, 1996). »* (Kieran, 2007, p. 712)

Quels types de problèmes mettre en jeu ? En quoi la résolution de problèmes peut-elle intervenir dans une régulation de l'enseignement de l'algèbre ? Comment faire intervenir l'algèbre comme outil implicite [5] avec pour objectif, par exemple, de

5. Douady écrit : « *Nous disons qu'*un concept est outil *lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite.* » (Douady, 1986, p. 9)

montrer les limites du numérique et de redonner du sens aux objets de l'algèbre, puis, comme outil explicite dans la résolution de problèmes plus complexes ?

d. A propos de *Meaning derived from what which is exterior to the mathematics/problem context*

D'après Kieran, seuls les travaux récents en didactique de l'algèbre (par exemple Arzarello & Robutti, 2001 ; Radford, Demers, Guzmàn & Cerulli, 2003) prennent en compte des éléments extérieurs aux mathématiques comme les gestes, les mouvements du corps, les mots, les métaphores, les artefacts. Bien que relevant de faits extérieurs aux mathématiques, ils participent à la constitution de l'activité algébrique.

> *« Hence it seems to us, one of the didactic questions with which to deal is that of the understanding of how those non-algebraic meanings are progressively transformed by students up to the point to attain the standards of the complex algebraic meanings of contemporary school mathematics. (Radford, 2000, p.240) » (Kieran, 2007, p. 713)*

Le rôle de cette source de signification pourra être questionné lors de la mise en œuvre des parcours d'enseignement différencié.

Kieran décrit les trois activités algébriques du modèle GTG en référence à la classification des sources de signification que nous venons de présenter. Dans les paragraphes suivants, nous décrivons ces trois activités.

2.2.2 L'activité générative

L'activité générative concerne la formation et l'interprétation des objets de l'algèbre élémentaire comme les expressions algébriques et les équations. Par exemple, il peut s'agir de la formation des équations à une inconnue qui traduisent un problème, de la formation des expressions générales traduisant des modèles géométriques ou numériques, souvent appelés « patterns », de la formation de règles traduisant des relations numériques. Pour Kieran, l'activité générative se situe la plupart du temps dans un contexte de résolution de problèmes de modélisation, de généralisation ou de preuve, mettant en jeu une activité globale :

> *« The generational activity of algebra involves forming and interpretating the objects of algebra, usually within the context of some global/meta-level activity. » (Kieran, 2007, p. 716)*

Cette activité joue un rôle majeur à l'entrée dans l'algèbre au niveau de la construction du symbolisme algébrique, de la rupture avec les pratiques arithmétiques, dans la flexibilité à relier différents registres sémiotiques et dans la flexibilité à interpréter les expressions à la fois structurellement et procéduralement. Nous complétons la synthèse la Kieran en revisitant chacun de ces points.

a. La construction du symbolisme algébrique et la rupture avec les pratiques arithmétiques

Les différents statuts de la lettre et du signe d'égalité commencent à se constituer dans l'activité générative et peuvent être en rupture avec les pratiques arithmétiques.

La lettre endosse différents statuts, répertoriés en fonction du contexte dans lequel elle est utilisée ; par exemple, dans le document d'accompagnement des programmes du collège, « Du numérique au littéral » [6], dans les travaux de Booth (1984) et de Kieran (1992). Voici les différents statuts que nous retenons :

- le statut de variable ou de nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs. Ce statut est utilisé dans le contexte fonctionnel, d'utilisation de formule, de généralisation ou de preuve.
- le statut d'indéterminée : la lettre représente des nombres quelconques comme dans les identités où l'égalité est universellement vraie. Par exemple, dans l'énoncé « pour toutes les valeurs réelles données aux lettres a, b et k, on a $k(a + b) = ka + kb$ », les lettres a, b et k sont des indéterminées.
- le statut d'inconnue : la lettre désigne un nombre inconnu à déterminer. C'est le contexte de la résolution, de la mise en équation et d'équation.
- le statut de paramètre : la lettre représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres qui ont le statut de variable, d'inconnue ou d'indéterminée. Par exemple, dans la définition d'une fonction linéaire de coefficient a déterminée par $x \to ax$, x a le statut de variable et a celui de paramètre.

Les élèves ont des difficultés à reconnaître et à mobiliser les différents statuts de la lettre en fonction du contexte dans lequel celles-ci interviennent. Diverses recherches dont celles de Küchemann (1981, 1978), synthétisées dans (Kieran, 1992, p. 396), ont mis en évidence différents statuts donnés aux lettres par les élèves comme :

- la lettre évaluée : la lettre est assimilée à une valeur numérique dès le début,
- la lettre non prise en considération : la lettre est ignorée ou aucun sens n'est donné à sa présence,

6. Ce document, intitulé « Du numérique au littéral », est téléchargeable à l'adresse : `http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf`.

– la lettre représentant un objet concret : la lettre est considérée comme l'abréviation d'un objet concret,
– la lettre représentant une inconnue : la lettre est considérée comme un nombre particulier mais inconnu,
– la lettre représentant un nombre généralisé : la lettre est considérée comme un représentant de plusieurs valeurs,
– la lettre représentant une variable : la lettre est considérée comme un représentant d'un ensemble de valeurs non spécifiées et il existe une relation systématique entre deux tels ensembles de valeurs.

Le signe d'égalité « = » a plusieurs statuts en algèbre, dont un certain nombre sont répertoriés dans le document d'accompagnement des programmes du collège déjà cité.

– Il peut annoncer un résultat comme en arithmétique. C'est par exemple le cas dans $42 + 9 = 51$. Dans ce cas, le signe apparaît comme orienté de la gauche vers la droite.
– Il peut indiquer une instanciation, par exemple lorsqu'on demande de calculer $3x + 7$ avec $x = 1$.
– Il peut indiquer que les objets mathématiques de part et d'autre du signe d'égalité sont équivalents. Il signifie que, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les deux expressions de part et d'autre du signe « = » sont égales. Cette utilisation apparaît dans la transformation des expressions ou dans des énoncés universels comme « pour toutes les valeurs réelles données aux lettres a, b et k, on a $k(a + b) = ka + kb$ ».
– Il est utilisé dans des énoncés dont on se demande s'ils peuvent être rendus vrais, par exemple dans la résolution d'équation.

Nous retenons deux difficultés dans la conceptualisation des différents usages du signe d'égalité. La première concerne le passage des pratiques arithmétiques, qui favorisent le signe d'égalité comme annonce de résultat et une lecture gauche-droite, aux pratiques algébriques, qui introduisent le signe d'égalité comme symbole d'équivalence. La deuxième concerne les différents statuts entre la manipulation des expressions algébriques, où le signe d'égalité sous-entend des énoncés universellement vrais, et la résolution d'équations, où le signe d'égalité sous-entend qu'on se demande si l'énoncé peut être rendu vrai.

Pour tenter d'expliquer et de comprendre les difficultés des élèves lors de l'acquisition du langage algébrique, plusieurs travaux de didactique de l'algèbre mettent en avant une « *rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre* ». Vergnaud, Cortes, et Favre-Artigue (1987) évoquent une double rupture épistémologique : la première, dans l'analyse des caractéristiques des démarches arithmétiques et algébriques et la deuxième, dans l'analyse des objets et des techniques intervenant dans la résolution (statut du signe d'égalité, statut des lettres, modes de contrôle dans la transformation des écritures). Ce point de vue est repris par Kieran (2001) dans les termes de *fausses continuités* (interprétations différentes des signes d'égalité et d'opération) et de *discontinuités* (démarches de résolution distinctes, utilisation de nouveaux objets) entre l'arithmétique et l'algèbre. Nous retenons les points suivants :

- Le changement du statut du signe d'égalité : dans le contexte arithmétique, il signifie une annonce de résultat, alors qu'il a différents statuts dans le contexte algébrique, notamment celui de l'équivalence ce qui peut entraîner chez les élèves des difficultés à travailler avec des identités (par exemple, $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ pour tout x ou $5+9 = 10+4$) ou des équations (par exemple, $3x+5 = 4x+3$).
- Le changement d'objets : le travail arithmétique se fait avec des « nombres concrets » (Gascón, 1994, p. 46), alors que le travail algébrique est une manipulation des symboles qui peuvent être interprétés de manières différentes en fonction du contexte : équations et inconnues, identités et nombres généralisés ou encore formules, fonctions et variables.
- L'évolution du sens donné aux signes et aux opérateurs : en arithmétique, on évalue toujours les opérations alors qu'en algèbre on suspend l'évaluation. Toute pratique algébrique peut aboutir à une expression ou à une nouvelle relation entre des grandeurs, ce qui va à l'encontre des calculs arithmétiques qui conduisent toujours à un nombre. Cette rupture peut expliquer des erreurs de type concaténation (par exemple $3 + x \rightarrow 3x$) chez les élèves qui, en accord avec ce qui est attendu en arithmétique, cherchent à donner un résultat sans aucun opérateur. Les expressions algébriques sont des objets construits à partir de nombres et de signes opératoires. Contrairement à l'arithmétique, l'algèbre ne distingue pas clairement le processus de calcul et le résultat. Une expression algébrique peut conserver des signes opératoires et rester non évaluée alors que, dans les pratiques arithmétiques, un signe opératoire indique un calcul à effectuer. En effet, en arithmétique, les signes « $+, -, \times, =$, etc. » représentent une action (par exemple, le $+$ et le $=$ dans $3+8=11$), tandis qu'en algèbre, ils peuvent représenter comme en arithmétique une action ($x + 3 = 8$) ou bien, pour les opérations, une permanence (par exemple pour la multiplication dans $a(b+c) = ac+ac$) ou encore, pour l'égalité, une équivalence

(par exemple, dans les identités remarquables). Cette dualité des signes en algèbre est en rupture avec les pratiques arithmétiques (Gascón, 1994, p. 46).
- Des schémas de résolution de problèmes distincts (Gascón, 1994).

b. Les liens entre les différents registres sémiotiques

L'activité générative est sollicitée dans le contexte de résolution de problèmes de type modélisation, généralisation ou preuve, ce qui permet de faire des liens entre les symboles et les notations avec des contextes et des situations plus ou moins concrets. Elle met donc en jeu la conversion entre le registre des expressions algébriques et d'autres registres sémiotiques comme celui des graphiques, des écritures numériques ou des programmes de calcul. L'importance et le rôle du lien entre les différents registres sémiotiques dans la construction du sens donné aux objets de l'algèbre ont déjà été soulignés dans le paragraphe sur la source de signification *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations*. Ces traductions entre différents registres offrent des possibilités de travailler sur les aspects procédural et structural, présentés dans le paragraphe 2.2.3 qui suit.

2.2.3 L'activité transformationnelle

Cette activité concerne les processus de manipulation algébrique des expressions comme développer, factoriser, transformer une expression en une autre équivalente, additionner ou multiplier des expressions polynomiales, résoudre des équations, des inégalités, simplifier des expressions, substituer par des valeurs numériques, travailler avec des équations et des expressions équivalentes. L'équivalence est au cœur de l'activité transformationnelle puisque le passage de la forme symbolique d'une expression à une autre a pour but de maintenir l'équivalence. Cette activité inclut la construction du sens donné à l'utilisation des propriétés algébriques dans la manipulation des expressions. Kieran s'intéresse aux éléments théoriques qui la fondent. Elle remarque que les travaux récents de didactique portent une attention particulière à fonder théoriquement le travail manipulatoire de l'algèbre.

> *« In other words, algebraic transformations are not viewed simply as procedural, but also as theoretical. Thus, notions of equivalence figure more prominently in some of this later work. » (Kieran, 2007, p. 722)*

Nous portons une attention particulière à l'équivalence des expressions et au contrôle théorique, aspects que Kieran met au cœur des éléments théoriques de l'activité transformationnelle.

a. Le contrôle théorique et l'équivalence des expressions

Kieran cite Pimm :

> *« One resource of algebra is a rich plurality of symbolic forms ; one core notion, that of equivalence. Equivalence and transformation are linked notions, indicating sameness perceived in difference for some purposes, or indifference with respect to others ? The existence of multiple expressions "for the same thing" can suggest the very possibility of transforming expressions directly to get from one to another. (Pimm, 1995, p. 89) » (Kieran, 2007, p. 722)*

Dans cet extrait, Pimm souligne certains éléments au cœur de l'activité algébrique : une même expression peut avoir plusieurs écritures, ces écritures sont équivalentes, le passage d'une expression à une autre s'effectue par une transformation qui conserve l'équivalence. Ces éléments font référence à la prise en compte du double aspect syntaxique et sémantique dans la manipulation d'une expression algébrique qui s'appuie sur le « sens » et la « dénotation » des expressions, termes introduits par Frege (1971) et repris dans les travaux de Drouhard [7]. Grâce à cette référence aux travaux de Frege et de Drouhard, nous complétons la synthèse de Kieran.

Drouhard (1992) étudie la signification d'une expression algébrique. Les expressions algébriques dépendent d'un ensemble de caractéristiques qui leur sont propres : leur « syntaxe », leur « dénotation », leur « sens » et leur « interprétation ». Par « syntaxe », Drouhard entend les conventions liées aux écritures algébriques (parenthèses, barre de fraction, etc.) et les transformations formelles des expressions algébriques associées aux règles algébriques. Pour ce qui concerne le « sens » et la « dénotation », Drouhard fait référence à la distinction établie par Frege (1971) entre « sens » et « dénotation ». Un objet mathématique a une unique dénotation mais peut avoir différentes représentations. Par exemple, le nombre 4 peut s'écrire 2×2, $\sqrt{16}$ ou encore $8/2$. Ces écritures sont différentes mais ont la même dénotation car elles se réfèrent au même nombre. Les expressions $4(x-1)$, $x^2-(x-2)^2$ ont la même dénotation mais ont des sens différents car elles ne relèvent ni du même domaine de description, ni du même point de vue. Les informations données par les écritures sont différentes ainsi que les transformations formelles qui leur sont applicables. L'« interprétation » d'une expression dépend du cadre [8] dans lequel elle intervient. Par exemple, $4(x+1)$ a pour interprétation, dans le cadre fonctionnel, l'image par x de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $4(x+1)$, ou dans le cadre géométrique, l'aire d'un rectangle de côtés 4 et $x+1$ pour des valeurs de x positives. Le calcul algébrique nécessite

7. Nous conseillons aux lecteurs de se reporter à (Bardini, 2003, chapitre 2) qui synthétise différents travaux de didactique de l'algèbre reprennant les termes de « sens » et de « dénotation » introduits par Frege.

8. Le terme « cadre » est à prendre dans le sens que lui donne Douady (1986).

un travail subtil entre le « sens » et la « dénotation » : le choix des transformations des expressions est guidé par le sens. Lorsqu'une expression est transformée en une autre, le but est d'obtenir deux expressions équivalentes, c'est-à-dire qui ont des sens différents mais une même dénotation. Il se pose la question du contrôle de cette transformation. Une référence aux propriétés du calcul algébrique utilisées permet d'assurer théoriquement que la première expression transformée est équivalente à la deuxième.

Cependant, comme le note Kieran dans l'extrait suivant, les élèves ont des difficultés à identifier les propriétés utilisées :

> *« Students have a great deal of difficulty in identifying the properties they use when they transform algebraic expressions. » (extrait de Demby, 1997) (Kieran, 2007, p. 723)*

Ces difficultés freinent la pratique d'un contrôle théorique adapté, ce qui empêche les élèves de complètement maîtriser leurs techniques.

b. Le contrôle théorique et la dialectique entre le numérique et l'algébrique

Selon Kieran, un second aspect du contrôle théorique est en lien avec la dialectique numérique-algébrique. Elle écrit :

> *« Another element of theoretical control that is considered basic to transformational activity is the knowledge that relates the algebraic domain with the arithmetical. For example, numerical substitution activity within expressions and equations can help students make connections between the arithmetical and the algebraic world. [...] In the case of equivalent expressions, students came to see that different expressions were being used to represent the same process. This activity also had an impact on students' view of expressions and variables, which suggests that a task that is transformational in nature can simultaneously be related to generational activity if it leads to an evolution of students' conceptions of the objects of algebra. » (Kieran, 2007, p. 723))*

Comme le souligne Chevallard (1985b) (cf. §2.1.1), l'algébrique est un outil d'étude du numérique et, inversement, le numérique est un outil d'étude de l'algébrique. Un retour au numérique est un moyen, par exemple, de contrôler le résultat d'une transformation. Or, comme le montre Chevallard dans cet extrait, cette dialectique et donc la possibilité d'un contrôle théorique par le numérique, s'est perdue.

> *« Sur ce patron, vous lui [un élève] proposez de factoriser par exemple l'expression suivante :* $(2x-3)2-4(x+1)(4x-6)+(4x2-9)$*. Il parvient sans retard au résultat « attendu », soit* $-4(2x-3)(x+2)$*, par un calcul dont le luxe de détails vous surprend mais où vous voyez le reflet d'un enseignement adressé à des débutants en calcul algébrique. Cet élève, pensez-vous, maîtrise fort bien ce type de problème de factorisation. Vous admirez même que, parvenu à l'expression* $(2x-3)(-4x-8)$*, il ait pensé à mettre en facteur le coefficient* -4*, et qu'il l'ait fait sans coup férir. Mais voici qu'il attend de vous une approbation,*

> *et vous le dit : ne se serait-il pas trompé ? Vous croyez habile de lui répondre qu'il pourrait tenter de procéder par lui-même à quelques vérifications, en donnant à x des valeurs numériques simples, « par exemple −2, qui annule la seconde expression et qui devrait donc annuler la première ». Votre élève d'occasion, pourtant, paraît ne rien entendre à ce discours. Son étonnement vous étonne. Vous répétez votre suggestion. « On n'a jamais fait ça ... », finit-il par avouer. Vous comprenez enfin qu'il n'y a pour lui, à cet instant, aucun lien entre la transformation qu'il a fait subir à l'expression algébrique proposée, d'une part, et le fait de substituer des valeurs numériques à ce... petit x qu'il a si habilement manipulé, d'autre part. Aucun. » (Chevallard, 1989, p. 46)*

Lorsqu'il demande à un élève, qui vient d'effectuer une factorisation, s'il ne s'est pas trompé, il s'aperçoit que celui-ci ne fait pas le lien entre la transformation des expressions et le fait de leur substituer des valeurs numériques. Chevallard met ainsi en évidence que le rapport institutionnel conduit à un rapport personnel des élèves dans lequel le calcul algébrique est employé sans que ne s'instaure une dialectique entre le numérique et l'algébrique.

Deux exemples d'environnements informatiques pour développer un contrôle théorique chez les élèves

Certains travaux de didactique de l'algèbre ont donné naissance à des environnements informatiques d'apprentissage de l'algèbre, basés sur l'équivalence des expressions et la dialectique numérique-algébrique. Nous en présenton deux, l'*Algebrista* de Cerulli et Mariotti (2009), cité par Kieran, et, *APLUSIX* de Nicaud (1994). Nous portons une attention particulière à ces travaux. En effet, l'intégration de notre thèse dans le projet PépiMeP ouvre des perspectives de conception et d'usage des technologies à prendre en considération dans la conception d'exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves.

L'objectif de l'*Algebrista* (Cerulli & Mariotti, 2009) est de développer chez les élèves une perspective théorique des manipulations algébriques. L'activité algébrique est fondée sur le concept d'équivalence en distinguant preuve et vérification. L'équivalence de deux expressions est prouvée si une expression est transformée en une autre au moyen d'axiomes. L'utilisation d'axiomes est le seul moyen de prouver l'équivalence de deux expressions. La vérification numérique, c'est-à-dire la substitution de nombres aux lettres puis le calcul de l'expression numérique, est le principal moyen de prouver que deux expressions ne sont pas équivalentes. Dans l'environnement l'*Algebrista*, les axiomes sont accessibles par des boutons, les élèves ont la possibilité de créer leurs propres boutons, dits « boutons transformation ou théorème ». Ainsi, le contrôle théorique peut s'opérer de deux façons :

– Prouver que les expressions sont équivalentes en se reportant aux propriétés utilisées pour passer d'une expression à une autre ;

– Vérifier que les expressions ne sont pas équivalentes en remplaçant les lettres par des valeurs numériques.

La preuve permet aux élèves de percevoir que plusieurs expressions peuvent représenter le même objet. La vérification leur permet de travailler sur la dialectique numérique-algébrique.

Nicaud (1994) adopte un autre point de vue dans le cadre du développement du système d'Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (E.I.A.H.) nommé *APLUSIX*. Il propose une analyse de l'évolution du sens du calcul algébrique en trois niveaux sémantiques. Le premier niveau consiste à donner des valeurs aux variables d'une expression et à la calculer. Le second niveau consiste à transformer une expression en une expression équivalente dans des calculs à un seul pas (développement ou factorisation). Le troisième niveau, considéré par Nicaud comme essentiel pour l'activité algébrique, consiste à organiser le raisonnement en étapes à partir de connaissances stratégiques, comme les règles de transformation syntaxique. Ainsi, le logiciel accompagne l'activité transformationnelle de l'élève.

c. La reconnaissance de la structure de l'expression

Kieran souligne dans cet extrait que la perception de la forme est une autre source de difficulté chez les élèves dans la manipulation des expressions :

> *« The kinds of errors that students can make in algebraic transformational activity (e.g., Carry et al., 1980 ; Lemoyne, Conne, & Brun, 1993 ; Matz 1982 ; Sleeman, 1984) have suggested to some researchers (e.g., Kirshner, 1989) that the issue is not an absence of theoretical control but rather a misperception of form. » (Kieran, 2007, p. 723)*

Ceci fait référence à la reconnaissance de la structure des expressions, c'est-à-dire l'interprétation d'une expression du point de vue de sa structure. Or, la reconnaissance de la structure est fondamentale pour développer une intelligence du calcul, c'est-à-dire pour faire le choix de l'écriture adaptée ou de la transformation à effectuer en fonction du but visé.

d. Les aspects procédural et structural des expressions algébriques

Sfard (1991) considère deux aspects fondamentaux des notions mathématiques abstraites comme les nombres, les expressions algébriques ou les fonctions. Elle distingue l'aspect structural qui considère la notion comme un objet et l'aspect opérationnel ou procédural qui considère la notion comme un processus. A une conception structurale correspond un concept conçu comme un objet (à prendre dans un sens différent de Douady). A une conception procédurale, correspond un concept conçu comme un processus. Ces deux aspects sont complémentaires. Mais, le processus d'apprentissage d'une notion s'accompagne de la construction d'une flexibilité entre son aspect structurel et son aspect opérationnel. Kieran (1992) explicite la distinction entre les termes procédural et structural en algèbre :

> *« Procedural refers to arithmetic operations carried out on numbers to yield numbers. For example, if we take the algebraic expression,* $3x + y$*, and replace* x *and* y *by 4 and 5, the result is 17. Another example involves the solving of* $2x+5 = 11$ *by substituting various values for until the correct one is found. In both these ostensibly algebraic examples, the objects that are operated on are not the algebraic expressions but their numerical instantiations. Furthermore, the operations that are carried out these numbers are computational - they yield a numerical result. Thus, both of these examples illustrate a procedural perspective in algebra.*
> *The term structural, on the other hand, refers to a different set of operations that are carried out, not I numbers, but on algebraic expressions. For example, if we take the algebraic expression* $3x + y + 8x$*, this can be simplified to yield* $11x + y$ *[. . .]. In this both examples, the objects that are operated on are the algebraic expressions, of some numerical instantiation. The operations that are carried out are not computational. Furthermore, the results are yet algebraic expressions. » (Kieran, 1992, p. 392)*

Une même expression algébrique peut être associée à plusieurs représentations reposant sur les aspects structural et procédural. L'aspect procédural d'une expression se réfère à un processus de calcul alors que l'aspect structural d'une expression se réfère à un objet dont la forme et la structure peuvent être décrites. Par exemple, l'expression $2x + 3$ peut être interprétée :

- du côté procédural : comme le processus opératoire « prendre un multiple de 2 et lui additionner 3 » qui est applicable sur des valeurs numériques ;
- du côté structural : comme le nombre résultant du processus opératoire consistant à prendre un nombre, le multiplier par 2 et lui ajouter 3, ou bien comme l'expression générique d'un nombre congru à 3 modulo 2, ou bien encore comme l'image de x par la fonction de la variable x qui à x associe $2x + 3$.

A la lumière d'analyses historiques et cognitives, Sfard fait l'hypothèse que, pour la plupart des humains, une nouvelle notion se conceptualise d'abord par son aspect procédural. La transition de l'aspect procédural à l'aspect structural peut être longue et difficile. Sfard la modélise en trois étapes :

1. l'intériorisation : la familiarisation avec les nouveaux objets,
2. la condensation : la mobilisation des objets à un niveau procédural,
3. la réification ou l'encapsulation : les objets sont envisagés comme des entités conceptuelles indépendamment de tout processus susceptible de l'engendrer ; l'aspect structural est mobilisé.

L'acquisition du langage algébrique se développe d'une part sur la construction des deux aspects et d'autre part sur une fonction d'adaptabilité en fonction des contextes : quel aspect de l'expression utiliser en fonction de l'usage visé ?

L'analyse historique de la construction du symbolisme algébrique proposée par Serfati (2005) suggère également que la conception des expressions se soit développée depuis une conception procédurale vers une conception structurale. Il distingue deux aspects dans la représentation symbolique : le premier consiste à représenter une instruction élémentaire (le procédural) et le second à représenter un résultat (le structural) (« procédure ou résultat ? » (Serfati, 2005, p. 76)).

> *« Nos deux exemples nous conduisent aussi à revenir sur le statut de l'interprétation des écritures symboliques : procédure, comme nous l'avons dès le début postulé, ou résultat ? Les intentions premières de l'auteur du texte avaient chaque fois été claires : il avait voulu coder une opération à effectuer, c'est-à-dire une action à exécuter, et non le résultat de celle-ci. » (Serfati, 2005, p. 77)*

Serfati montre que la distinction entre l'instruction d'exécution et le résultat, encore explicite chez Leibniz et ses contemporains au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, devient implicite au fil du temps. Il prend pour exemple les fonctions.

> *« D'une séparation implicitement assumée entre instruction d'exécution et résultat de celle-ci, naîtra peu à peu cependant, à partir du milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, du fait d'Euler et Riemann, l'objectivation du concept moderne de fonction (en termes modernes, elle s'articule dans la différence entre le $f(x)$ et le f) que Frege fut, à notre connaissances, le premier à mettre en forme philosophique dans Fonction et concept. » (Serfati, 2005, p. 78)*

Il est ensuite conduit à distinguer deux positions face à une expression : les positions d'auteur et de lecteur reprises par Bardini (2003) pour étudier « le rapport au symbolisme algébrique » chez les élèves.

2.2.4 L'activité globale

L'activité globale au niveau du meta fournit le contexte et la motivation pour engager les élèves dans les activités générative et transformationnelle.

> *« Although algebraic activity involving problem solving, more particularly word-problem solving, has been integrated into the previous sections, on generational and transformational activity, three types of global/meta-level activity for which a significant body of algebra research exists with this age group of learner have been reserved for this section : generalizing, proof and proving, and modeling. » (Kieran, 2007, p. 725)*

Cette activité consiste en la résolution de problèmes dans lesquels on ne peut s'engager sans utiliser le symbolisme. Il s'agit des problèmes intervenant dans la dimension *outil* de l'algèbre (cf. §1.2) comme la modélisation, la généralisation de « patterns », les prédictions et les conjectures, la justification et la preuve. L'activité globale fournit un cadre pour construire et travailler avec les objets de l'algèbre. La conceptualisation des objets de l'algèbre a lieu aussi dans l'activité globale :

> *« These [the global/meta-level activities] are the kind of activities that provide the surround for engaging in mathematical activity in general, and algebraic activity in particular – and, thus, for constructing and working algebraic objects and processes. » (Kieran, 2007, p. 714))*

L'activité globale recoupe certains aspects des activités transformationnelle et générative sans pour autant les égaler :

> *« Generalization and problem solving can be present in much of generational and transformational activity of algebra, especially during the early stages of learning, thus, the global/meta-level activity of algebra or both broader than and at the same time not quite as broad as algebra. » (Kieran, 2007, p. 714))*

Cette dernière citation nous conduit à quelques remarques sur la complémentarité des trois types d'activités.

2.2.5 Complémentarité des trois types d'activité

Dans le modèle GTG de Kieran, la conceptualisation des objets de l'algèbre a lieu dans les trois types d'activités. L'activité transformationnelle y joue une rôle important à condition qu'elle soit travaillée avec un contrôle théorique. Mais elle ne doit pas occuper une place prépondérante ni être minimisée face aux activités générative et globale. Par ailleurs, Kieran souligne la dynamique entre les activités générative et globale. La résolution d'un problème pourra engager plus ou moins une activité générative ou globale en fonction du niveau des élèves. Ainsi, aux premières étapes de l'apprentissage de l'algèbre, un problème de généralisation ou de modélisation engage principalement dans une activité générative.

2.2.6 Conclusion

Nous avons exposé les trois types d'activité du modèle développé par Kieran en nous centrant sur les expressions algébriques au cœur de notre recherche. La présentation de chaque activité nous a permis d'avoir un panorama de travaux de didactique de l'algèbre faisant état des processus et des difficultés de conceptualisation des objets de l'algèbre chez les élèves. La liste des travaux de recherche n'est pas exhaustive mais nous avons retenu ceux qui nous permettaient d'éclairer notre problématique.

Pour conclure, nous dégageons les aspects épistémologiques qui nous semblent les plus pertinents à retenir, pour interroger le travail avec et sur les expressions algébriques :

- Le jeu sur les différentes représentations sémiotiques pour donner du sens aux objets de l'algèbre et rendre nécessaire l'introduction des lettres permettant l'équivalence des expressions algébriques et des représentations sémiotiques,
- Le rôle essentiel du contrôle théorique des transformations algébriques, en lien avec l'équivalence des expressions et le numérique,
- L'importance de la reconnaissance de la structure des expressions pour guider l'activité transformationnelle,
- La dialectique entre l'aspect procédural et l'aspect structural des expressions algébriques pour organiser la traduction d'un registre sémiotique à un autre.

Dans le paragraphe suivant, nous concluons par une référence épistémologique en tirant parti des éléments épistémologiques retenus dans chacune des approches anthropologique et cognitive.

2.3 En conclusion : une référence épistémologique pour nos travaux

La relecture des travaux de didactique de l'algèbre considérés dans les approches anthropologique ou cognitive nous a conduit à dégager les éléments épistémologiques suivants, caractérisant ce qui est au cœur de la génération des expressions algébriques, de leur interprétation, du calcul contrôlé sur ces expressions et de leur utilisation dans des contextes intra- ou extra-mathématiques. Il s'agit de l'équivalence des expressions, la dialectique entre le numérique et l'algébrique, les aspects structural et procédural des expressions et l'interprétation des expressions algébriques dans d'autres registres de représentation. Nous mettons en évidence, dans cette synthèse, que ces éléments sont souvent communs aux deux approches. Nous les retenons comme constitutifs de la référence épistémologique aux expressions algébriques retenue dans notre travail pour construire un rapport idoine au calcul algébrique sur les expressions. D'une part, les approches cognitives montrent qu'ils sont source de difficultés chez élèves. D'autre part, les approches anthropologiques, retenues comme constitutives des modèles de l'enseignement de l'algèbre, mettent en évidence que, depuis la réforme des mathématiques modernes, les évolutions successives des processus de transposition didactique ont eu tendance à les dénaturer (par exemple, Chevallard & Bosch, 2012), ce qui peut favoriser la construction de rapports personnels des élèves à l'algèbre en décalage avec un rapport idoine. Bien qu'ils soient reliés les uns aux autres, nous détaillons séparément ces éléments.

L'équivalence des expressions

L'équivalence des expressions algébriques est centrale dans plusieurs des travaux rencontrés. Parmi les quatre caractéristiques d'une expression (syntaxe, dénotation, sens et interprétation) distinguées par Drouhard (cf. §2.2.3), la dénotation permet de caractériser les expressions équivalentes : deux expressions algébriques sont équivalentes si elles ont la même dénotation. Pour Chevallard et Ruiz-Munzón, la génération des expressions est avant tout motivée par la question centrale de l'équivalence des programmes de calcul et donc l'équivalence des expressions associées. L'équivalence des programmes de calcul donne des conditions à mettre en œuvre pour introduire les expressions algébriques et la hiérarchie des opérations en lien avec les règles de calcul. Pour Kieran, l'activité transformationnelle doit être développée avec un contrôle théorique des transformations algébriques effectuées ; qui est guidé par l'équivalence des expressions. Ainsi, l'équivalence des expressions est au cœur d'une maîtrise du calcul algébrique, parce qu'elle permet non seulement un contrôle théorique des transformations, mais aussi le développement d'une intelligence des calculs liée au sens des expressions, pour choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé.

La dialectique entre le numérique et l'algébrique

Cette dialectique, introduite par Chevallard (cf. §2.1.1), permet d'entretenir les liens entre le numérique et l'algébrique et inversement. Kieran y fait référence comme moyen de contrôler les transformations algébriques.

Les aspects structural et procédural des expressions

La flexibilité à passer d'une conception procédurale des expressions à une conception structurale est présente dans les deux approches théoriques rencontrées. Alors que chez Ruiz-Munzón, le passage du procédural au structural est central dans la première étape du processus d'algébrisation, les travaux de Sfard laissent supposer que les élèves qui rencontrent le plus de difficultés construisent une conception procédurale ou pseudo-structurale des expressions, ce qui peut être un obstacle au développement d'une activité transformationnelle adaptée avec un contrôle théorique et une intelligence des calculs. Un des enjeux du travail avec et sur les expressions est d'amener les élèves à travailler avec flexibilité les aspects procédural et structural des expressions. Les travaux de Bardini (2003) semblent ouvrir des possibilités pour développer le jeu entre différents registres de représentation des expressions algébriques. Écritures algébriques, programmes de calcul, schéma de calcul, représentation en arbre permettent de travailler les deux aspects procédural et structural des expressions algébriques.

L'interprétation des expressions algébriques dans d'autres registres de représentation

L'interprétation des expressions algébriques dans d'autres registres de représentation comme le registre graphique, les représentations en arbre, les programmes de calcul, les schémas de calcul ou le registre des grandeurs (Duval, 1993) joue un rôle important dans la conceptualisation de l'algèbre. Pour Kieran, la flexibilité à interpréter dans les différents registres de représentation participe à la signification donnée aux expressions algébriques.

Les éléments épistémologiques que nous retenons interviennent dans la mobilisation des techniques utilisées et dans la convocation des types de tâches pour la résolution des différents problèmes du domaine algébrique présentés plus haut, à savoir, les problèmes de généralisation, de modélisation, de mise en équation ou les problèmes fonctionnels. Nous nous interrogeons : les programmes scolaires, les manuels, les modes de faire des enseignants (discours, gestuelles, etc.), les organisations didactiques mises en place amènent-ils les élèves à travailler avec ces éléments épistémologiques pour construire des modes d'interprétation des expressions, de justification et des techniques pour anticiper et vérifier les transformations du calcul algébrique ? Les aident-ils à convoquer les types de tâches intermédiaires pour organiser et contrôler le calcul algébrique ? Dans le cas contraire, la non-prise en compte de ces éléments, ne favorise-t-elle pas des processus différenciateurs, comme évoqué au chapitre 1(cf. §1.1.2) ? Ces questionnements nous conduisent au chapitre suivant. Nous nous appuyons sur cette référence épistémologique pour construire une OM de référence permettant de mettre en relation les rapports personnels des élèves avec les rapports institutionnels à l'algèbre, en fin de collège et début de lycée.

Chapitre 3

OM de référence et OM à enseigner relativement aux expressions algébriques

Ce chapitre est consacré à la mise en évidence de besoins d'apprentissage ignorés par l'institution et laissés à la charge des élèves dans l'enseignement de l'algèbre au collège et en seconde. Nous commençons par dégager une OM de référence relativement aux expressions algébriques selon la référence épistémologique établie au chapitre 2. Cette OM de référence est opérationnalisée pour analyser les programmes officiels et des manuels du collège et de la classe de seconde. Nous dégageons les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner relativement aux expressions algébriques dans ces institutions. Les niveaux de la classe de 5^{e} à la classe 2de sont concernés afin d'avoir accès à toutes les étapes de construction de l'OM à enseigner et de l'OD associée. La mise en perspective de l'OM à enseigner dans l'OM de référence relativement aux expressions algébriques, nous permet de mettre en évidence l'incomplétude du bloc technologico-théorique de l'OM à enseigner au collège et au début de la seconde. Certaines nécessités d'apprentissages liées aux éléments épistémologiques au cœur du travail sur les expressions algébriques s'en trouvent ignorées ou laissées implicites. Cela nous conduit à formuler deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

Ce chapitre est constitué de cinq parties. D'abord, nous décrivons l'OM régionale de référence relativement aux expressions algébriques (§ 3.1). Ensuite, nous précisons la méthodologie adoptée (§ 3.2) pour l'analyse des programmes officiels (§ 3.3) et des manuels scolaires (§ 3.4). Ces analyses conduisent à dégager les caractéristiques de l'OM à enseigner ce qui nous permet de dégager des savoirs et savoir-faire implicites et des questions génératrices à travailler dans les parcours d'enseignement différencié (§ 3.5).

3.1 Une OM de référence

3.1.1 Place de l'OM régionale dans l'OM globale du domaine algébrique

Notre étude est centrée sur la première des trois étapes du processus d'algébrisation du modèle épistémologique de référence développé par Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012) présenté dans le chapitre 2 au paragraphe b.. Dans ce modèle, l'algèbre élémentaire est conçue comme un processus d'algébrisation de programmes de calcul. La première étape s'attache à une des difficultés majeures de l'apprentissage de l'algèbre, au centre de nos préoccupations, à savoir l'introduction des expressions algébriques et les fondements du calcul. Les programmes de calcul ne sont plus considérés comme un processus (processus de calcul en lien avec le numérique ou les « patterns » géométriques) mais comme un résultat, ce qui permet de les explorer du point de vue de leur structure et de les manipuler. Cette évolution rend compte de la limite du procédural pour interroger l'équivalence de deux programmes de calcul. Les élèves sont amenés à construire la notion d'expression algébrique comme modèle symbolique des programmes de calcul, à développer de nouvelles techniques pour les créer et les transformer. Ainsi, le traitement de programmes de calcul équivalents fait émerger un nouvel environnement technologico-théorique pour justifier la formation des expressions algébriques et les techniques de transformation (simplification, développement, factorisation).

Notre étude étant centrée sur la première étape du processus d'algébrisation, nous proposons de la spécifier en termes d'OM locales et régionales. Dans l'OM globale du domaine algébrique, nous distinguons au moins trois OM régionales : une première relative aux expressions algébriques, une seconde relative aux formules et une troisième relative aux équations (cf. figure 3.1). Nous situons les praxéologies constitutives de la première étape du processus d'algébrisation dans l'OM régionale relative aux expressions algébriques.

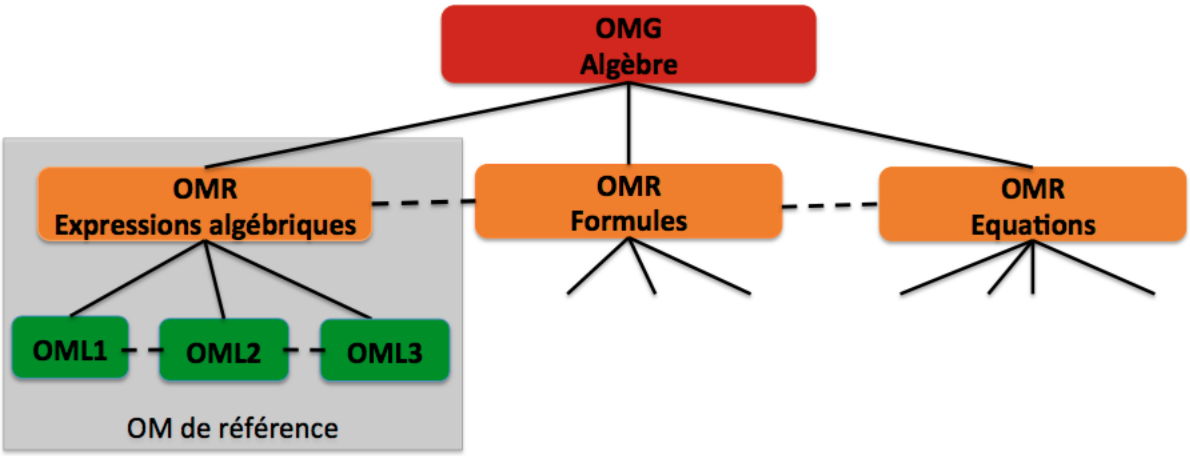


FIGURE 3.1 – OM globale du domaine algébrique

3.1.2 Trois OM locales

À la lumière des synthèses des travaux précédents et à l'image des travaux de Bosch, Espinoza, et Gascón (2003) sur les limites de fonctions, nous caractérisons l'OM de référence relative aux expressions algébriques en algèbre élémentaire comme une OM régionale relative aux expressions algébriques. Elle intègre **trois OM locales** (cf. figure 3.2) qui répondent à la référence épistémologique établie au chapitre 2. La première OM locale, **OM1**, vise à donner des raisons d'être à la génération des expressions algébriques. Celles-ci apparaissent nécessaires pour étudier les programmes de calcul et leur équivalence, ce qui conduit à solliciter les dialectiques numérique-algébrique et procédural-structural. OM1 est une OM locale autour de la génération des expressions algébriques dans la résolution de problèmes de généralisation et de preuve mais aussi de mise en équation et de modélisation. Elle permet de dégager une technologie justifiant la génération et la simplification des expressions algébriques. La généralisation s'appuie sur des processus de modélisation et donc de traduction de relations mathématiques entre un registre sémiotique et celui des écritures algébriques. L'étude de l'équivalence de programmes de calcul conduit à des expressions algébriques équivalentes, dont l'étude amène à l'émergence des propriétés du calcul algébrique et la hiérarchie des opérateurs. Ce travail sur les expressions équivalentes convoque des types de tâches de la seconde OM locale **OM2** qui concerne la dénotation et le sens des expressions algébriques. Elle est gérée par une technologie qui prend en compte l'interprétation des expressions algébriques pour les transformer et les mettre en lien avec d'autres registres de représentation. Enfin, OM1 et OM2 permettent de définir une technologie, basée sur les propriétés du calcul algébrique, pour justifier les transformations d'une expression algébrique en expressions équivalentes. Elle fait l'objet de la troisième OM locale, **OM3**, appelée algèbre des polynômes.

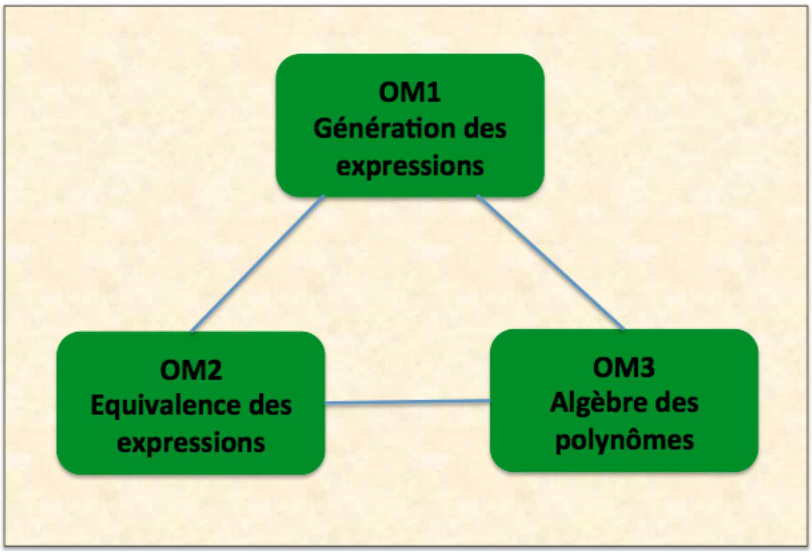


FIGURE 3.2 – Les trois OM locales de l'OM régionale de référence relative aux expressions algébriques

Chaque OM locale est décrite dans un paragraphe :

- OM1(§3.1.3) sur la génération des expressions algébriques ; la résolution de problèmes et les différents registres de représentation,
- OM2 (§3.1.4) sur l'équivalence des expressions algébriques,
- OM3 (§3.1.5) sur l'algèbre des polynômes.

Pour chaque OM locale, nous identifions les principaux genres de tâches constitutifs, les principales techniques impliquées et les éléments technologiques mis en jeu. Toutes les techniques ne sont pas codées, nous indiquons celles qui sont idoines. Notre présentation des genres de tâches n'est pas exhaustive, nous donnons suffisamment d'éléments pour, d'une part, rendre compte des principaux éléments techniques et technologies impliqués dans le calcul sur et avec les expressions algébriques et, d'autre part, mettre en évidence les liens entre les trois OM locales, notamment pas le fait qu'un type de tâche se décompose en plusieurs types de tâches de la même OM locale ou dans une autre. Nous revenons sur ce dernier point dans le paragraphe 3.1.6.

3.1.3 OM1, Génération des expressions algébriques

a. Présentation

OM1 est une organisation mathématique autour de la génération des expressions algébriques dans la résolution de problèmes de généralisation et de preuve. Elle donne des raisons d'être à l'OM régionale relative aux expressions algébriques, en abordant la notion d'expression algébrique comme modèle symbolique pour représenter des programmes de calcul et étudier leur équivalence.

b. Principaux genres de tâches

Les principaux genres de tâches constitutifs de cette organisation mathématique sont les suivants :

- $T_{P-Exp/Formule}$ Produire une expression algébrique pour résoudre un problème de généralisation, de preuve ou produire une formule, [1] c'est-à-dire une relation entre plusieurs variables non dissymétrisées, pour résoudre un problème de modélisation,
- T_T Traduire une expression algébrique dans un registre de représentation sémiotique et inversement,
- T_A Associer une expression algébrique à une représentation sémiotique dans d'autres registres.

Les types de tâches relatifs à chaque genre sont présentés dans le tableau 3.1. La liste des types de tâches n'est pas exhaustive.

La distinction entre les genres de tâches *Produire* et *Traduire* repose sur deux éléments. La première distinction relève du fait que, dans la production d'une expression, l'introduction d'une ou plusieurs lettres est à la charge de l'élève alors que ce n'est pas le cas dans la traduction. La deuxième distinction relève de la hiérarchie entre les deux genres de tâches. La production convoque la traduction. En effet, dans la résolution d'un problème de généralisation, de preuve ou de modélisation, la production d'une expression algébrique fait appel à la traduction entre un registre de représentation sémiotique et celui des écritures algébriques.

La distinction entre les genres de tâches *Traduire* et *Associer* relève du fait que, dans l'association, les deux représentations des objets ou relations mathématiques

1. Nous faisons ici le lien avec les formules. La production d'une expression algébrique précède la production d'une formule. En effet, lorsqu'un problème demande de produire une formule (« en fonction de »), c'est avant tout la production des deux expressions algébriques constituant les deux membres de la formule qui intervient.

sont données.

Parmi les types de tâches du genre *Traduire*, nous distinguons ceux qui demandent la traduction d'un registre de représentation vers celui des écritures algébriques, $T_{T-Registre \to Exp}$, de ceux qui demandent l'inverse $T_{T-Exp \to Registre}$. Dans le cas des programmes de calcul, le premier, $T_{T-Prog \to Exp}$, concerne la traduction d'un programme de calcul en une expression algébrique, donc le passage de l'aspect procédural des expressions au structural, alors que le second $T_{T-Exp \to Prog}$ met en jeu le passage de l'aspect structural vers le procédural. Cette différence est étudiée dans les travaux de Bardini (2003).

c. Techniques pour T_T Traduire

Nous donnons ici des techniques génériques pour les genres de tâches *Traduire* et *Associer* car les techniques dépendent des registres sémiotiques et des expressions en jeu. Cette technique générique, notée $\tau_{Traduction}$, consiste à :

- Interpréter la relation mathématique. Cette interprétation peut-être plus moins complexe en fonction de la congruence sémiotique [2], c'est-à-dire si la traduction nécessite une reformulation ou non (cf. §2.2.1),
- Appliquer les règles de conversion entre le registre sémiotique en jeu et celui des écritures algébriques.

De même, nous donnons une technique générique pour le genre de tâches *Produire*, notée $\tau_{Produire}$:

- Convoquer une ou plusieurs lettres,
- Traduire la relation entre les registres sémiotiques à partir de la technique présentée ci-dessus.

d. Éléments technologiques

Le discours technologique s'appuie sur les règles de formation des expressions algébriques, sur les règles de conversion d'un registre de représentation sémiotique à un autre, sur le rôle des opérateurs $+$, $-$, $\times$, : et .^ (puissance) et des délimitants (,), [et], et sur la hiérarchie des opérations (propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$).

2. La congruence sémiotique constitue une variable didactique du genre de tâches *Traduire*.

Genres	**Types de tâches**
Produire T_P	$T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ?
	$T_{P-Exp-Resultat-PC}$ Prouver le résultat d'un programme de calcul
	...
Traduire T_T	$T_{T-Exp \to Prog}$ Traduire une expression algébrique par un programme de calcul Exemple : $(3+x)2-3x$ se traduit par « Choisir un nombre, ajouter 3, multiplier le résultat par 2 (ou prendre le double du résultat) ; soustraire le triple du nombre initial » (aspect procédural en jeu)
	$T_{T-Prog \to Exp}$ Traduire un programme de calcul par une expression algébrique
	$T_{T-Exp \to LgNat}$ Traduire une expression algébrique dans le langage naturel Exemple : $(3+x)2-3x$ est la différence entre le double de la somme d'un nombre x et de 3 et le triple de ce nombre (aspect structural en jeu)
	$T_{T-LgNat \to Exp}$ Traduire une expression donnée en langage naturel par une expression algébrique Exemple : La différence entre le double de la somme d'un nombre x et de 3 et le triple de ce nombre se traduit par $(3+x)2-3x$
	$T_{T-Exp \to Longueur}$, $T_{Exp \to Perimetre}$, $T_{Exp \to Aire}$, $T_{Exp \to Volume}$, $T_{Exp \to Angle}$ Traduire une expression algébrique comme, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle
	$T_{T-Longueur \to Exp}$, $T_{Perimetre \to Exp}$, $T_{Aire \to Exp}$, $T_{Volume \to Exp}$, $T_{Angle \to Exp}$ Traduire, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle par une expression algébrique
	$T_{T-Relation \to Formule}$ Traduire une relation entre deux grandeurs ou deux quantités par une formule Exemple : Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs.
	$T_{T-Formule \to Relation}$ Traduire une formule par une relation entre deux grandeurs ou deux quantités Exemple : E=6P
	$T_{T-Pteari \to Exp}$ Traduire une propriété d'un nombre par une expression algébrique Exemple : un entier impair s'exprime sous la forme $2n+1$ avec $n \in \mathbb{Z}$
	$T_{T-Exp \to Pteari}$Traduire une expression algébrique comme la propriété d'un nombre
	$T_{T-Arbre \to Exp}$ Traduire un arbre par une expression algébrique
	$T_{T-Exp \to Arbre}$Traduire une expression algébrique par un arbre
Associer T_A	$T_{A-Exp-Aire}$, $T_{A-Exp-Perimetre}$, $T_{A-Exp-Longueur}$, $T_{A-Exp-Volume}$, $T_{A-Exp-Angle}$ Associer une expression algébrique à, respectivement, une aire, un périmètre d'une figure, une longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, un volume de solide, la mesure d'un angle et inversement
	$T_{A-Exp-Prog}$ Associer une expression algébrique à un programme de calcul et inversement (aspect procédural)
	$T_{A-Exp-LgNat}$ Associer une expression algébrique à une phrase en langage naturel (aspect structural) et inversement
	$T_{A-Relation \to Formule}$ Associer une relation entre deux grandeurs ou deux quantités à une formule et inversement

TABLEAU 3.1 – Les types de tâches de OM1

3.1.4 OM2, Équivalence des expressions algébriques

a. Présentation

OM2 est une organisation mathématique locale autour du concept d'expression algébrique. Elle aborde la question de l'équivalence des expressions rattachée à celle d'OM1 sur l'équivalence des programmes de calcul. Plusieurs caractéristiques des expressions sont concernées : leur dénotation, c'est-à-dire le fait que plusieurs expressions puissent avoir la même dénotation, leur sens et leur interprétation (au sens de Drouhard (1992)), correspondant à l'aspect sémantique des expressions ainsi que leurs aspects structural et procédural dans l'interprétation des expressions.

b. Principaux genres de tâches

Les principaux genres de tâches constitutifs de OM2 sont les suivants :

- $T_{Prouver-equiv}$ Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre,
- T_{Tester} Tester l'égalité de deux expressions,
- $T_{Structure}$ Identifier la structure d'une expression de type donné,
- $T_{Choisir}$ Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé.

Les types de tâches relatifs à chaque genre sont présentés dans le tableau 3.2.

Genres	Types de tâches
$T_{Prouver-equiv}$ Prouver	$T_{Prouver-equiv}$ Prouver que deux expressions algébriques (ne) sont (pas) égales pour toute valeur
T_{Tester} Tester l'égalité de deux expressions	T_{Tester} Tester l'égalité de deux expressions d'une ou de plusieurs variables
$T_{Structure}$ Identifier la structure	$T_{Structure-som}$ Identifier une somme algébrique de termes
	$T_{Structure-produit}$ Identifier un produit de facteurs
	$T_{Structure-carre}$ Identifier un carré
	$T_{Structure-cube}$ Identifier un cube
$T_{Choisir}$ Choisir	Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé
$T_{Associer}$ Associer	$T_{Associer}$ Associer deux expressions égales pour tout x Exemple : Associer les formes factorisées aux formes développées

TABLEAU 3.2 – Les types de tâches de l'OM2

c. Des techniques pour T_{Tester}

Les techniques associées au genre de tâches T_{Tester} peuvent être de plusieurs natures :

- $\tau_{Tester-1}$ Celle basée sur la dialectique de l'algébrique et du numérique qui consiste à tester l'égalité en calculant les expressions pour une ou plusieurs valeurs numériques. Cette technique convoque la substitution par une valeur numérique qui fait l'objet du type de tâches T_{C-num} de OM3 ,
- $\tau_{Tester-2}$ Celle qui consiste à tester l'égalité à partir des représentations graphiques des fonctions définies par les expressions. Cette technique est envisageable une fois l'étude des fonctions commencée,
- $\tau_{Tester-3}$ Celle basée sur les écritures algébriques qui consiste en une analyse symbolique des écritures algébriques, par exemple en comparant les coefficients des monômes de même degré ou les termes constants. Cette technique convoque l'identification de la structure, $T_{Structure}$.

Ces techniques peuvent être instaurées comme des moyens de vérification des calculs algébriques mais elles permettent seulement de conjecturer, d'augmenter le degré de certitude de l'égalité de deux expressions pour toutes les valeurs. Parfois, elles peuvent permettre d'obtenir une condition suffisante, par exemple, trois essais qui retournent la même valeur suffisent pour prouver l'équivalence dans le seconde degré ; mais dans la plupart des cas, c'est une procédure de preuve (au sens de Balacheff (1987)) qui permet de s'assurer de l'équivalence de deux expressions.

d. Des techniques pour $T_{Prouver-equiv}$

Les techniques associées au type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ abordent la notion d'égalité des expressions pour toutes les valeurs de la lettre (égalité des polynômes). Elles peuvent être de plusieurs natures :

- $\tau_{Prouver-equiv-1}$ Celle basée sur la propriété d'égalité des polynômes « Deux polynômes à coefficients réels de degré au plus n qui coïncident en $n+1$ valeurs sont égaux ». Elle consiste à tester l'égalité des expressions pour un nombre de valeurs suffisant dans le but de s'assurer de l'égalité des expressions. Par exemple, trois tests sur des valeurs différentes renvoyant la même valeur suffisent pour le second degré. Les programmes actuels du collège et de seconde rendent cette technique hors de la portée des élèves du collège.
- $\tau_{Prouver-equiv-2}$ Celle basée sur la propriété d'égalité des polynômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux ». Cette technique qui consiste, soit à s'appuyer sur la structure des expressions et à comparer les coefficients des monômes de même degré des écritures développées réduites après

transformation, soit à calculer la différence des deux expressions et montrer qu'elle est nulle.

– $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Celle basée sur la conjecture puis la preuve de l'équivalence des expressions. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ ou $\tau_{Tester-2}$ pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence ou non des expressions. Si elles ne le sont pas, elle consiste à donner un contre-exemple. Sinon, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre.

Au collège et au début du lycée, la technique la plus pertinente à mettre en œuvre est $\tau_{Prouver-equiv-3}$. Appuyée par la dialectique du l'algébrique et du numérique ou par le graphique, elle permet d'amener les élèves à appréhender la dénotation des expressions (elles dénotent le même nombre ou la même fonction en fonction du contexte). Dans le cas où c'est le numérique qui intervient, les aspects procédural et structural des expressions interviennent ce qui permet de faire le lien avec l'équivalence des programmes de calcul correspondant aux expressions. La technique $\tau_{Prouver-equiv-2}$ met en jeu une analyse symbolique des écritures algébrique et s'appuie sur la structure des expressions, ce qui la rend pertinente pour le niveau scolaire. $\tau_{Prouver-equiv-1}$ ne peut être attendue à ce niveau scolaire, la propriété en jeu est hors des programmes actuels du collège et de seconde.

e. Des techniques pour $T_{Structure}$

Une technique générique associée au genre de tâches $T_{Structure}$ consiste à identifier l'opérateur de plus haut niveau dans l'expression. Pour cela, les représentations des expressions mettant en jeu leur aspect structural comme la représentation en arbre ou la formulation en langage naturel peuvent être utilisées. Par exemple, l'expression $x(x+3)$ est un produit de deux facteurs. L'opérateur de plus haut niveau est la multiplication et sa formulation en langage naturel est le produit de x par la somme de x et de 3.

f. Éléments technologiques

Le discours technologique qui permet de justifier ces techniques est centré sur la propriété d'égalité des polynômes : deux polynômes sont égaux pour tout réel si et seulement si ils sont de même degré et les coefficients des monômes de même degré sont égaux. Au collège et au début du lycée, c'est la technique de conjecture et de preuve qui est principalement attendue. La conjecture s'appuie sur le test numérique ou graphique et la preuve s'appuie sur les propriétés du calcul algébrique permettant de s'assurer que l'équivalence est conservée dans les transformations algébrique. Pour prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur de la lettre, on utilise le calcul algébrique et, pour prouver que deux expressions ne sont pas égales, un contre-exemple suffit. Le discours technologico-théorique qui permet de justifier ces techniques fait appel à la quantification et est basé sur les règles de formation des expressions algébriques et sur le rôle des opérateurs $+$, $-$, $\times$, : et .^ et des délimitants (,), [et]. Il s'appuie au niveau théorique sur la dénotation et le sens des expressions et leurs aspects structural et procédural.

3.1.5 OM3, Algèbre des polynômes

a. Présentation

OM3 est une organisation mathématique locale autour de l'algèbre des polynômes qui s'appuie sur l'hypothèse de l'existence d'expressions équivalentes et pose la question de la transformation d'une expression en une autre, équivalente. En fin de scolarité obligatoire (16 ans en France), les polynômes considérés sont au maximum de degré 3 et les coefficients sont réels, même si, la plupart du temps, ils sont restreints aux entiers relatifs et aux fractions.

b. Principaux genres de tâches

Les genres de tâches constitutifs de OM3 sont les suivants :

- T_D Développer une expression algébrique de type donné,
- T_F Factoriser une expression algébrique de type donné,
- T_R Réécrire un monôme de type donné,
- T_C Calculer une expression algébrique.

Les types de tâches relatifs à chaque genre sont présentés dans le tableau 3.3. Nous renvoyons le lecteur à ce tableau pour une meilleure compréhension des notations utilisées.

Dans la classification du tableau 3.3, la présence des types de tâches $T_{FDA-mon+mon}$ et $T_{DDS-entier\times som}$ nécessite d'être précisée :

- la « réduction » d'une expression algébrique correspond au type de tâches $T_{FDA-mon+mon}$ *Factoriser une somme de monômes pour en donner la forme* *développée réduite*. Il s'agit d'un cas particulier T_{FDA} *Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun est apparent dans tous les termes*.

– la « suppression des parenthèses », souvent mentionnée dans les manuels scolaires dans des expressions du type $-2(x+3)$, correspond au type de tâches $T_{DDS-entier\times som}$ *Développer une expression en appliquant la distributivité simple de la multiplication sur l'addition* $k(a+b) = ka + kb$ *où* $k \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un cas particulier du type $T_{DDS-mon\times som}$ *Développer un produit de deux facteurs du type « monôme × somme » avec la distributivité simple de la multiplication sur l'addition.*

c. Une technique générique d'instanciation

Les techniques utilisées pour réaliser ces genres de tâches sont basées sur la technique générique d'instanciation, notée $\tau_{Instanciation}$, c'est-à-dire l'instanciation des règles de calcul et des conventions du calcul algébrique. Les techniques spécifiques dépendent des expressions algébriques. Par exemple, prenons le type de tâches $T_{FIR-diff}$ impliquant la factorisation d'une différence de deux carrés sur l'expression $64x^2 - 49$. La technique d'instanciation consiste à :

1. $T_{Structure}$: Reconnaître la structure de l'expression afin de déterminer la propriété à appliquer comme une différence de deux termes, sans facteur commun apparent,
2. Réécrire l'expression sous la forme d'une différence de deux carrés, convoquant $T_{R-carre}$: $64x^2 - 49 = 8^2x^2 - 7^2 = (8x)^2 - 7^2$,
3. Appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$: $(8x)^2 - 7^2 = (8x-7)(8x+7)$.

Certains types de tâches impliquent la convocation d'autres. Dans cet exemple, $T_{Structure}$ *Identifier la structure de l'expression* (type de tâches constitutif de OM2) et $T_{R-carre}$ *Réécrire un monôme sous la forme d'un carré* sont convoqués. La convocation de types de tâches dans les techniques est à la charge des élèves (elles interviennent au niveau R-convoqué) ce qui peut être source de difficultés. Pour des expressions de complexité faible, une reconnaissance de la forme de l'expression à partir des seuls ostensifs peut suffire pour réussir la transformation d'une expression sans que les types de tâches intermédiaires aient été convoquées. Ce fonctionnement de OM3 au seul niveau syntaxique, pour des expressions simples, peut amener à rarement faire le lien avec OM2. Nous montrons dans le paragraphe 3.4 que c'est

Genres	**Types de tâches**
T_D Développer	$T_{DDS-mon\times som}$ Développer un produit de deux facteurs avec la distributivité simple de la multiplication sur l'addition Exemple : $x(x+3)$
	$T_{DDS-entier\times som}$ Développer une expression en appliquant la distributivité simple de la multiplication sur l'addition $k(a+b) = ka + kb$ où $k \in \mathbb{R}$ Exemples : $-2(x+3)$, appelé « Supprimer les parenthèses »
	$T_{DDD-som\times som}$ Développer un produit de deux facteurs avec la double distributivité de la multiplication sur l'addition Exemple : $(3x+2)(x-3)$
	$T_{DIR-som\times diff}$ Développer un produit de deux facteurs du type $(a+b)(a-b)$ Exemple : $(x-3)(x+3)$
	$T_{DIR-car}$ Développer un carré Exemple : $(x-3)^2$
T_F Factoriser	T_{FA} Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun est apparent dans tous les termes – $T_{FA/mon} = T_{FA}$ sur des monômes : $(2x)^2 + 2x$ ou $7x + 7 \times 3$ – $T_{FA/som} = T_{FA}$ sur des sommes : $x(2x+1) + (2x+1)(x+5)$
	$T_{FA-mon+mon}$ Factoriser une somme de monômes pour en donner la forme développée réduite Exemple : $5x + 3 + 2x$, appelé « Réduire »
	T_{FA^*} Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun est apparent dans un des termes – $T_{FA^*/mon}$: $4x^2 + 2x$ ou $7x + 21$ – $T_{FA^*/som}$: $x(2x+1) + (4x+2)(x+5)$
	T_{FNA} Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun n'est pas apparent – $T_{FNA/mon}$: $16x + 12x^2$ – $T_{FNA/som}$: $(4x)^2 + 6x(2x+1)$
	$T_{FIR-diff}$ Factoriser une différence de deux carrés Exemple : $64x^2 - 49$
	$T_{FIR-som}$ Factoriser une somme algébrique de trois termes du type $a^2 \pm 2ab + b^2$ Exemple : $x^2 + 2x + 1$
T_R Réécrire un monôme	$T_{R-carre}$ Réécrire un monôme sous la forme d'un carré Exemple : $64x^2 = (8x)^2$, $49 = 7^2$
	$T_{R-canonique}$ Réécrire un monôme sous la forme canonique aX^n, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}_+$ Exemple : $a \times a$, $1 \times a$, $4 \times a \times 5 \times a$, $(3x)^2$
T_C Calculer	T_{C-num} Calculer la valeur d'une expression algébrique en donnant aux variables des valeurs numériques Exemple : $x^3 - 2x + 3(x+2)$ pour $x = 2$
	$T_{CDS-num}$ Calculer une exp. numérique en utilisant la distributivité simple Exemple : $8 \times 93 + 2 \times 93$ ou 103×15
	$T_{CIR-num}$ Calculer une exp. numérique en utilisant des identités remarquables Exemple : 102^2 ou 99×101

Notation. $DDS/DDD/DDIR$: Développer par la Distributivité Simple/Double/ Identité Remarquable
$FA/FA^*/FNA$: Factoriser par Distributivité avec facteur commun Apparent/ Apparent dans un des termes/ Non Apparent
FIR : Factoriser par Identité Remarquable ; CDS, CIR : Calculer par Distributivité Simple/Identité Remarquable

Tableau 3.3 – Les types de tâches constitutifs de OM3 ce qui se produit dans la plupart des manuels du collège où l'aspect syntaxique des expressions est davantage privilégié dans OM3.

d. Éléments technologiques

Les éléments technologiques qui permettent d'expliquer et justifier la transformation d'une expression en une autre peuvent être décrits par les propriétés et les conventions d'écritures du calcul algébrique. Nous rappelons celles qui structurent l'organisation des programmes du collège :

- Distributivité simple de la multiplication sur l'addition : pour tous nombres a, b et c, on a $a(b+c) = ab + ac$,
- Distributivité double de la multiplication sur l'addition : pour tous nombre a, b, c et d on a $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$,
- Identités remarquables : pour tous nombres a et b, on a $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
- Convention d'écriture du signe $\times$: $a \times b$ se note ab pour tous nombres a et b,
- Convention d'écriture sur les puissances : $a \times a$ se note a^2 pour tout nombre a.

Les propriétés et les conventions du calcul algébrique sont caractérisées, au niveau théorique par les propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$ et de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

3.1.6 Conclusion

En conclusion, l'OM de référence, relative aux expressions algébriques définies, s'organise en une OM régionale, qui intègre trois OM locales intimement liées. La manipulation des expressions algébriques (développer, factoriser), constitutive de OM3, trouve d'une part des raisons d'être dans OM1 à travers des problèmes de généralisation conduisant à l'étude de programmes de calcul équivalents et, d'autre part, des moyens de contrôle de la conservation de l'équivalence dans OM2. De plus, OM2, qui concerne l'équivalence des expressions, trouve aussi ses raisons d'être dans OM1. C'est donc une agrégation entre OM1, OM2 et OM3 qui donne du sens aux expressions algébriques et à leur manipulation.

Les liens entre les trois OM locales provient notamment du fait que la convocation de certains types de tâches d'une OM locale implique la convocation d'autres types de tâches de cette OM locale ou des autres. Nous donnons ici les trois exemples les plus représentatifs et qui sont au cœur de nos analyses :

1. Les genres de tâches de *Factoriser* et *Développer* (OM3) convoquent $T_{Structure}$ (OM2) et T_R (OM3).
2. Le genre de tâches $T_{Prouver-equiv}$(OM2) convoque $T_{Structure}$ (OM2), T_{Tester} (OM2) et T_D(OM3).
3. Le type de tâches $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ *Prouver que deux programmes de calcul sont équivalents* (OM1) convoque :
   – la mobilisation d'une lettre,
   – la traduction avec $T_{T-Prog\to Exp}$ (OM1),
   – la preuve que deux expressions sont équivalentes et donc
     ∘ la reconnaissance de la structure $T_{Structure}$ (OM2),
     ∘ le test par des valeurs numériques T_{Tester} (OM2),
     ∘ le développement T_D(OM3).

Selon nous, c'est la convocation des différents types de tâches impliqués dans la convocation du type de tâche principal qui peut rester implicite dans l'enseignement. Nous nous interrogeons notamment pour déterminer si le caractère implicite de la convocation de types de tâches « cachés » n'est pas accentué par les discours technologiques, les organisations didactiques et le curriculum praxique (Castela, 2007) que les élèves ont rencontrés.

Cette OM de référence nous donne des critères pour l'analyse praxéologique des programmes, du document d'accompagnement et des manuels du collège et de seconde qui est présentée dans le paragraphe suivant. Il s'agit de repérer comment les trois OM interviennent dans les rapports institutionnels à l'algèbre attendus au collège et en seconde et comment leur agrégation y est organisée.

3.2 Questions et méthodologie

Nous adoptons une approche écologique et praxéologique pour interpréter l'OM à enseigner relative aux expressions, au collège et en seconde. Elle caractérise le rapport institutionnel attendu à l'algèbre élémentaire en fin de scolarité obligatoire. Elle transparaît dans les programmes officiels, le document d'accompagnement *Du numérique au littéral au collège de 2008*[3], les manuels scolaires et les épreuves du brevet des collèges. L'OM à enseigner en seconde est analysée, afin d'éclairer et de mettre en perspective celle du collège.

3. Ce document est téléchargeable à l'adresse : `http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf`

Notre étude s'organise en trois parties : (1) l'analyse de l'OM à enseigner développées dans les programmes officiels et le document d'accompagnement au collège et au lycée (§3.3), (2) celle dans les manuels scolaires (§ 3.4) et, enfin, (3) une synthèse des caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner à l'issue de laquelle nous mettons en évidence des savoirs et savoir-faire implicites (§3.5). Les références des programmes et des manuels retenus sont précisées dans les paragraphes 3.3.1 et 3.4.1. Chacune de ces études s'organise en deux temps : une étude de l'OM globale des programmes relativement à l'algèbre précède une analyse plus fine de l'OM régionale sur les expressions algébriques. Cette deuxième analyse est menée à la lumière de l'OM de référence présentée en 3.1. Dans un premier temps, nous adoptons une approche écologique pour porter un regard global sur l'habitat et la niche de l'algèbre dans les programmes et les manuels. La structure des programmes et des manuels est étudiée relativement aux différents niveaux de codétermination didactique : domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude (Chevallard, 1999, 2003). Les questions suivantes nous animent :

- Quel est l'habitat de l'algèbre ? Où et comment apparaît-il dans les programmes officiels et dans les manuels ?
- Quelle est la fonction de l'algèbre ? A quelle fin est-elle introduite ? Quelles en sont les raisons d'être ?
- Avec quels objets est-elle mise en relation ? Comment sont mises en œuvre ces relations ?

Dans un deuxième temps, nous analysons plus finement les praxéologies en jeu, concernant les expressions algébriques. L'analyse des programmes officiels, du document d'accompagnement et des manuels s'attache à décrire, en référence aux trois OM locales de l'OM de référence, les types de tâches rencontrés, les techniques mathématiques développées et le discours technologico-théorique qui permet de justifier les techniques.

- Les types de tâches des trois OM locales apparaissent-ils dans les programmes et les manuels ?
- Les raisons d'être sont-elles travaillées ? Si oui, quelles sont-elles ?
- Quelles sont les relations entre ces types de tâches ? Comment s'agrègent ces types de tâches par rapport aux OM locales et régionales de référence ? Sont-elles travaillées uniquement au niveau ponctuel et indépendamment les unes des autres ? La convocation des types de tâches impliqués dans la résolution d'un autre de la même OM locale ou d'une différente est-elle présentée ?
- Quelles sont les techniques associées à chaque type de tâches ?

– Quelles sont les technologies et théories les justifiant ? Sont-elles explicitées ?
– Quels rôles sont attribués aux ostensifs dans la conduite du calcul algébrique ?

Pour chaque OM locale, nous relevons les types de tâches qui interviennent. Et, pour les manuels, nous analysons *a priori* les tâches pour dégager les types de tâches convoqués, leur fréquence, les techniques développées et les discours technologico-théoriques qui les justifient.

3.3 Analyse des programmes

3.3.1 Les programmes étudiés

Les programmes étudiés sont ceux en vigueur pour la rentrée scolaire 2011 : le bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008 pour le collège et le bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009 pour la classe de seconde. L'analyse des programmes du collège de 2008 est mise en perspective par rapport aux programmes antérieurs : ceux de l'arrêté du 10 janvier 1997 relatif aux programmes du cycle central des collèges (classes de 5^{e} et de 4^{e}) et le bulletin officiel spécial n°10 pour la classe de 3^{e}.

3.3.2 A propos de l'organisation des programmes

L'analyse anthropologique s'appuie sur l'étude de la structuration des programmes.

Depuis 2008, les programmes du collège sont structurés en quatre rubriques pour chaque niveau scolaire : « *Organisation et gestion de données, fonctions* », « *Nombres et Calculs* », « *Géométrie* », « *Grandeurs et mesures* ». Pour chaque rubrique, ils s'organisent dans une présentation en colonnes intitulées « Connaissances », « Capacités » et « Commentaires ». Les « capacités » exigibles dans le socle commun sont clairement identifiées. Les « connaissances » renvoient à ce que les élèves doivent savoir comme les définitions, les propriétés ou les théorèmes alors que les « capacités », exprimées avec des verbes d'action, renvoient à ce que les élèves doivent savoir faire [4]. Par exemple, en cinquième, la « capacité » *Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités* $k(a+b) = ka + kb$ *et* $k(a-b) = ka - kb$ *dans les deux sens* relève de la « connaissance » *Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.* Du point de vue de l'approche anthropologique, Chevallard écrit :

4. Le guide « *Enseigner et apprendre les mathématiques en 4^{e}* » qui accompagne le manuel de mathématiques de 4^{e} chez *Didier* de la collection *Horizon* sous la direction de J.-F. Chesné et M.-H. Le Yaouanq a une interprétation des programmes conforme à celle que nous adoptons.

> « *Le bloc* $[\theta, \Theta]$ *est, ordinairement, identifié comme* un savoir *(alors que le bloc* $[T, \tau]$ *constitue* un savoir-faire*) »* *(Chevallard, 1998, p. 5).*

C'est pourquoi nous interprétons les « capacités » comme des ingrédients du bloc pratico-technique ($[T, \tau]$) et les « connaissances » comme des ingrédients du bloc technologico-théorique ($[\theta, \Theta]$). Les commentaires apportent parfois des informations complémentaires qui nous aideront à définir les types de tâches, les techniques, les éléments technologiques et théoriques ou les intitulés des différents niveaux de co-détermination didactique. Par exemple, le commentaire « *Utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques* » peut amener à l'évaluation d'expressions algébriques pour des valeurs numériques ou bien à des tâches de calcul réfléchi.

Les programmes de seconde ont une organisation similaire. Les domaines d'études sont au nombre de trois : *Fonctions*, *Géométrie*, *Statistiques et probabilités*. Ils s'organisent en colonnes intitulées « Contenus », « Capacités » et « Commentaires ».

3.3.3 A propos de la terminologie adoptée

Il convient de situer la terminologie employée dans notre travail par rapport à celle des programmes officiels en France au collège et en seconde. Dans les instructions officielles, les termes « *algébrique* » et « *littéral* » sont utilisés en fonction du niveau scolaire. En effet, les termes « *calcul littéral* » et « *expression littérale* » sont privilégiés pour le collège. Ils disparaissent en seconde au profit des termes « *calcul algébrique* » et « *expression algébrique* ». Ceci peut s'expliquer par le fait qu'en seconde, l'algèbre est un outil au service des fonctions. Face à ces termes différents, il a semblé pertinent, pour faciliter la clarté de notre travail, de n'en retenir qu'un. Pour rester dans la continuité des travaux de didactique de l'algèbre, le terme « *algébrique* » s'est imposé. Nous utiliserons dans la suite les termes de « *calcul algébrique* » et « *expression algébrique* ».

L'absence du terme « *algèbre* » dans les programmes scolaires est notable. Chevallard et Bosch (2012) soulignent qu'il a en fait disparu :

> *Le substantif algèbre apparaît encore dans le texte de ces programmes [ceux des années 1980], où il a trois occurrences ; il n'apparaît plus du tout dans le texte des programmes actuels.*

Dans ce qui suit, nous adoptons une approche écologique pour porter un regard global sur l'habitat et la niche de l'algèbre dans les programmes scolaires du collège et de seconde.

3.3.4 Analyse écologique

a. Au collège : trois habitats pour l'algèbre

Comme nous l'avons dit, les programmes du collège de 2008 sont structurés en quatre rubriques pour chaque niveau scolaire : « *Organisation et gestion de données, fonctions* », « *Nombres et Calculs* », « *Géométrie* », « *Grandeurs et mesures* ». Nous identifions ces rubriques au niveau du domaine d'étude dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique. Les contenus relatifs à l'algèbre en 2008 apparaissent dans trois domaines : « *Organisation et gestion de données, fonctions* », « *Nombre et Calculs* » et « *Grandeurs et mesures* » ce qui met en évidence trois habitats pour l'algèbre (cf. tableau 3.4). Notons que, même si l'algèbre intervient comme outil explicite au service du calcul analytique, aucun contenu relatif à l'algèbre n'apparaît explicitement dans le domaine « *Géométrie* ». Nous n'étudierons pas cet aspect.

Classe	Organisation et gestion de données, fonctions	Nombres et Calculs	Grandeurs et mesures	Géométrie
5^{e}	x	x		
4^{e}		x		
3^{e}	x	x	x	

TABLEAU 3.4 – Présence de l'algèbre au collège en fonction des domaines et des niveaux scolaires dans les programmes de 2008

Le domaine « *Nombre et calculs* » se découpe en deux secteurs : les expressions algébriques et les équations.

Les programmes de 1997 et 1998 sont structurés différemment. Trois domaines d'étude les composent : « *Travaux géométriques*, « *Travaux numériques* », « *Organisation et gestion de données, fonctions* ». Les contenus relatifs à l'algèbre apparaissent dans les domaines « *Travaux numériques* », « *Organisation et gestion de données, fonctions* » ce qui met en évidence deux habitats pour l'algèbre (cf. tableau 3.5).

Classe	Travaux numériques	Organisation et gestion de données, fonctions	Travaux géométriques
5^{e}	x		
4^{e}	x		
3^{e}	x	x	

TABLEAU 3.5 – Présence de l'algèbre au collège en fonction des domaines et des niveaux scolaires dans les programmes de 1997 et 1998

Deux différences concernant les habitats entre les versions de 1997-1998 et 2008 sont notables et conduisent à interroger l'évolution de la niche écologique de l'algèbre dans les instructions officielles. La première concerne la présence de l'algèbre en 5^{e} dans « *Organisation et gestion de données, fonctions* » en 2008 : dans quelle mesure ce nouvel habitat a-t-il un rôle dans l'introduction de l'algèbre ? La seconde concerne l'apparition de l'algèbre, en 2008, dans le nouveau domaine « *Grandeurs et mesures* » : quelle est la fonction occupée par l'algèbre ?

Pour analyser la niche de l'algèbre, les contenus des programmes de 1997, 1998 et 2008 sont interprétés, pour chaque niveau scolaire et domaine d'étude, selon les trois niveaux de codétermination : secteurs, thèmes et sujets d'études. Lorsque cela était pertinent, nous avons conservé les commentaires. Cette interprétation des programmes, présentée dans les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8, éclaire sur l'OM globale à enseigner au collège en 2008 et sur ses évolutions par rapport aux versions antérieures.

Premièrement, l'apparition de l'algèbre en classe de 5^{e} dans le domaine « *Organisation et gestion de données* » sous les sujets d'étude « *Utiliser et produire une expression littérale* » marque un tournant dans la fonction donnée à l'algèbre dès son introduction. La production d'expressions algébriques apparaît pour la première fois explicitement pour résoudre des problèmes de généralisation, de modélisation et de mise en équation au collège. Or, comme nous l'avons déjà souligné dans l'OM de référence, c'est à travers ces problèmes que les expressions algébriques trouvent leur raison d'être. Cette évolution marque une volonté d'introduire l'algèbre non plus comme une arithmétique généralisée (Chevallard, 1985b ; Gascón, 1994) mais comme un outil au service de la résolution de problèmes de généralisation ou de preuve. Cela offre l'occasion de motiver l'introduction de l'algèbre, par exemple en lien avec l'étude de l'équivalence des programmes de calcul et de faire les liens entre les trois OM locales, comme nous l'avons souligné dans l'OM de référence (cf. §3.1). Cependant, on peut s'interroger sur la façon dont cette évolution est prise en compte par les enseignants et les auteurs des manuels.

Deuxièmement, depuis 2008, la preuve et la résolution de problèmes pris dans des contextes divers occupent une place importante dans les commentaires et objectifs des programmes. Donner du sens aux lettres et au calcul algébrique et favoriser la construction d'une rationalité algébrique chez les élèves en sont les principales raisons. Le recours à l'algèbre, dont l'initiation est amorcée en sixième par l'utilisation de formules (aire, périmètre,...), est instauré en classe de cinquième. À partir de la classe de quatrième, l'accent est mis sur l'utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes et, depuis 2008, pour prouver des résultats. Des problèmes arithmétiques, de modélisation, de généralisation, de preuve et de mise en équation peuvent être convoqués pour travailler les différentes directions de travail soulevées dans cet extrait des commentaires relatifs à la section « *Calcul littéral* » en quatrième, dans les programmes de 2008 :

> « *Les travaux se développent dans trois directions :*
> – *utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;*
> – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;
> – utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). » [5]

Troisièmement, la présence de l'algèbre, en 2008, dans « *Grandeurs et mesures* », même discrète, encourage à l'utilisation d'expressions et de formules dans le cadre des grandeurs.

Ainsi, la mise en perspective des programmes de 2008 avec ceux de 1997 et 1998 met en évidence des évolutions dans l'habitat et la niche de l'algèbre et plus particulièrement des expressions algébriques. Depuis 2008, elle apparaît davantage comme outil de modélisation dans la résolution de problèmes. Néanmoins, l'algèbre apparaît dispersée entre ses trois habitats. Les programmes apportent peu d'éléments concrets sur la façon dont ils s'articulent. Des OM ponctuelles sont développées et doivent s'agréger en des OM locales, régionales et globales qui trouvent leurs raisons d'être dans l'articulation entre les sujets d'étude développés. Seuls des éléments généraux ou des pistes à suivre sont donnés. Par exemple, en 5^{e}, en 2008, il est ajouté en commentaire « *de nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine "Grandeurs et mesures", conduisent à utiliser des expressions littérales* ». De même, en 4^{e}, les types de tâches explicités sont dans la rubrique « *Nombres et calculs* » mais les commentaires précisent que les travaux s'orientent vers l'utilisation de l'algèbre (extrait cité plus haut). L'analyse praxéologique qui suit (§3.3.5) éclairera sur la façon dont les OM ponctuelles s'agrègent.

b. En seconde : un habitat pour l'algèbre

Dans la classe de seconde, les programmes sont structurés en trois domaines d'études : « *Fonctions* », « *Géométrie* » et « *Statistiques et probabilités* ». Les contenus relatifs à l'algèbre apparaissent dans celui intitulé « *Fonctions* » (tableau 3.9), ce qui met en évidence que la niche de l'algèbre se réalise dans le contexte de la résolution de problèmes fonctionnels. Cette répartition est la même dans les programmes précédents de la classe de seconde, présentés dans le bulletin officiel spécial n°2 du

5. Les deux dernières phrases sont en italique dans le texte. Elles indiquent des points du programme qui ne sont pas exigibles pour le socle commun.

30 août 2001. Le principal habitat de l'algèbre est le domaine des fonctions. C'est la fonctionnalité de l'algèbre qui est visée en seconde, ce qui marque une différence importante avec les programmes du collège. Le développement de la maîtrise du calcul algébrique s'appuie sur l'anticipation et l'intelligence du calcul. Il est travaillé au service de la résolution de problèmes fonctionnels.

c. La place de l'algèbre du collège à la seconde

L'habitat et la niche de l'algèbre évoluent entre le collège et la seconde. Au collège, l'algèbre est travaillée dans trois domaines alors, qu'en seconde, l'algèbre est principalement travaillée au service des fonctions. Cette évolution dans les habitats nécessite d'être prise en compte dans notre étude. Elle peut être responsable de décalages entre le rapport à l'algèbre attendu en seconde et celui attendu en troisième. Ces décalages peuvent éclairer sur d'éventuels apprentissages laissés implicites et non problématisés au collège mais nécessaires pour la seconde.

d. Conclusion sur l'analyse écologique des programmes

En conclusion, l'analyse écologique montre des évolutions dans les niches et les habitats de l'algèbre, d'une part, par rapport aux programmes du collège de 1997 et 2008, et, d'autre part, entre la classe de troisième et la classe de seconde. Cette analyse n'explicite pas suffisamment les liens entre les différents domaines concernés par l'algèbre. C'est pourquoi nous avons étudié les programmes de façon plus approfondie au niveau des thèmes et des sujets d'étude en prenant comme point d'appui l'OM de référence définie plus haut.

<table>
<tr><th>Domaine</th><th>Secteurs</th><th>Thèmes</th><th>Sujets d'étude</th></tr>
<tr><td colspan="4">5^{e}, 1997</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Travaux numériques</td><td colspan="3">Introduction. Comme en 6^{e}, la résolution de problèmes constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Ces problèmes, en associant à une situation donnée une activité numérique, renforcent le sens des opérations et des écritures numériques et littérales figurant au programme et développent les qualités d'organisation et de gestion de données numériques. Il convient donc de ne pas multiplier les activités techniques pures.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Enchaînement d'opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs</td><td rowspan="2">Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition</td><td>Développer avec la distributivité simple</td></tr>
<tr><td>Factoriser avec la distributivité simple</td></tr>
<tr><td>Initiation à la notion d'équation</td><td>Égalité</td><td>Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques</td></tr>
<tr><td colspan="4">5^{e}, 2008</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Nombres et calculs</td><td colspan="3">Objectifs. La résolution de problèmes a pour objectifs : [...]
– de familiariser les élèves aux raisonnements conduisant à des expressions littérales
– d'apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers</td><td rowspan="2">Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition</td><td>Développer avec la distributivité simple</td></tr>
<tr><td>Factoriser avec la distributivité simple</td></tr>
<tr><td>Initiation à la notion d'équation</td><td>Égalité</td><td>Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires.
L'intégration des lettres dans ce type d'égalité est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numériques ou géométriques.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Organisation et gestion de données, fonctions</td><td rowspan="2">Expressions littérales</td><td rowspan="2">Expressions littérales</td><td>Utiliser une expression littérale</td></tr>
<tr><td>Produire une expression littérale</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires. De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules).</td></tr>
</table>

TABLEAU 3.6 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 5^{e} dans les programmes de 1997 et de 2008

Domaine	Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
4^e, 1997			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Développement	Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques
			Développer des expressions du type $(a+b)(c+d)$
			Réduire une expression littérale à une variable du type : $3x-(4x-2)$, $2x^2-3x+x^2$
	Commentaires. *L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement en cherchant des situations qui permettent aux élèves de donner du sens à l'introduction de ce type de calcul. Le travail proposé s'articule en deux axes :* – *utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ;* – *utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers.*		
4^e, 2008			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Développement	Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques
			Développer des expressions du type $(a+b)(c+d)$
			Factoriser une expression avec un facteur commun du type a, ax, x^2
			Réduire une expression littérale à une variable du type : $3x-(4x-2)$, $2x^2-3x+x^2$
	Commentaires. *L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. Le travail proposé s'articule autour de trois axes :* – utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques *;* – *utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;* – *utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).*		

Tableau 3.7 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 4^e dans les programmes de 1997 et de 2008

Domaine	Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
3e, 1998			
Travaux numériques	Écritures littérales, identités remarquables	Factorisation	Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$; $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$
		Identités remarquables	Factoriser une expression algébrique avec une identité remarquable
			Développer une expression algébrique avec une identité remarquable
	Commentaires. *Les travaux s'articuleront sur deux axes :* – *utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ;* – *utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers.*		
Organisation et gestion de données, Fonctions	Fonctions linéaires, fonctions affines	Fonction linéaire	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image
3e, 2008			
Nombres et calculs	Écritures littérales	Factorisation	Factoriser une expression algébrique avec un facteur commun apparent
		Identités remarquables	Factoriser une expression algébrique avec une identité remarquable
			Développer une expression algébrique avec une identité remarquable
	Commentaires. *Les travaux se développent dans trois directions :* – utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques *;* – *utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;* – *utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).*		
Organisation et gestion de données, fonctions	Fonctions linéaires, fonctions affines	Coefficient directeur de la droite représentant une fonction linéaire	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image
Grandeurs et mesures	Introduction. *Comparer des aires, des volumes, des figures ou des objets à partir d'expressions algébriques.*		

Tableau 3.8 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 3e dans les programmes de 1998 et de 2008

Domaine	Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
		2^{de}, 2009	
Fonction	Fonctions	Image, antécédent, courbe représentative	Traduire le lien entre deux quantités par une formule
	Expressions algébriques	Transformation d'expression algébrique en vue de la résolution de problème	Associer à un problème une expression algébrique
			Identifier la forme la plus adéquate d'une expression en vue de la résolution du problème donné
			Développer des expressions polynomiales et rationnelles simples
			Factoriser des expressions polynomiales et rationnelles simples
	Commentaires. *Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.*		

TABLEAU 3.9 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 2^{de} dans les programmes de 2009

3.3.5 Analyse praxéologique

L'analyse des programmes de 2008 pour le collège et de 2009 pour la classe de seconde est menée à partir des trois OM locales qui définissent l'OM régionale de référence relativement aux expressions algébriques. Notre étude est complétée par l'analyse du document d'accompagnement des programmes du collège.

Une partie de cette étude consiste à repérer les types de tâches présents de chaque OM locale puis les techniques et les éléments technologiques et théoriques mobilisés dans les programmes. Cela a parfois nécessité une interprétation des programmes. En effet, certaines « capacités » et « connaissances », spécifiées dans les programmes, donnent lieu directement à des types de tâches alors que d'autres sont sous-entendues par les commentaires ou les objectifs. Par exemple, le commentaire « *Les activités de comparaison d'aires d'une part, et de volumes d'autre part, de figures ou d'objets obtenus par agrandissement ou réduction, sont, en particulier, autant d'occasions de manipulations de formules et de transformations d'expressions algébriques* » (troisième, domaine « *Grandeurs et mesures* », 2008) peut donner lieu à plusieurs types de tâches comme ceux du genre *Traduire une expression algébrique dans un registre de représentation sémiotique et inversement* ou *Produire une expression pour résoudre un problème.*

a. OM1 - Génération des expressions algébriques

Au collège, les types de tâches du genre *Produire une expression algébrique* sont présents explicitement pour la première fois depuis 2008. Cette présence offre la possibilité d'introduire les expressions algébriques en amenant à considérer les programmes de calcul non plus uniquement comme des processus mais comme des résultats. Or, dans la présentation de OM1 (§ 3.1.3), nous avons déjà souligné l'importance de ces raisons d'être dans le premier processus d'algébrisation. Cependant, les programmes sont silencieux sur le rôle joué par la production d'expression relativement à l'introduction des expressions. Seul le document d'accompagnement, dont on peut s'interroger sur l'usage qu'en font les enseignants et les auteurs de manuels, apporte des éléments. La situation du carré bordé (cf. figure 3.3) sert d'exemple pour montrer comment un problème de généralisation peut permettre de motiver, d'une part, l'introduction de l'algèbre comme modèle symbolique de processus de calcul, et, d'autre part, l'introduction des propriétés du calcul algébrique à partir de l'existence de processus et donc d'expressions équivalentes. Cette situation répond à la question génératrice de la première étape du processus d'algébrisation de

Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012) (cf. §3.1). Cette situation consiste à :

> *Établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre [figure 3.3], quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.*
> *Dans un premier temps, les élèves sont invités à déterminer le nombre de carreaux grisés pour des valeurs déterminées du nombre de carreaux sur le côté du carré, puis, dans un second temps, à formuler en langage naturel une méthode de calcul, et, dans un dernier temps, à produire une formule mathématique. La nécessité d'avoir à désigner le nombre de carreaux sur le côté justifie l'emploi d'une lettre. Les méthodes de calcul utilisées et par conséquent les formules produites sont diverses. [. . .]*
> *Dans le problème du nombre de carreaux grisés, la diversité des méthodes de calcul et des formules produites amène la question de l'équivalence des expressions. Celle-ci peut être testée sur des valeurs numériques avant d'être prouvée en ayant recours au calcul littéral. Dans les transformations d'écritures ainsi effectuées, la lettre acquiert un statut d'indéterminée symbolisant un nombre quelconque. (Document d'accompagnement « Du numérique au littéral » de 2008, p.2)*

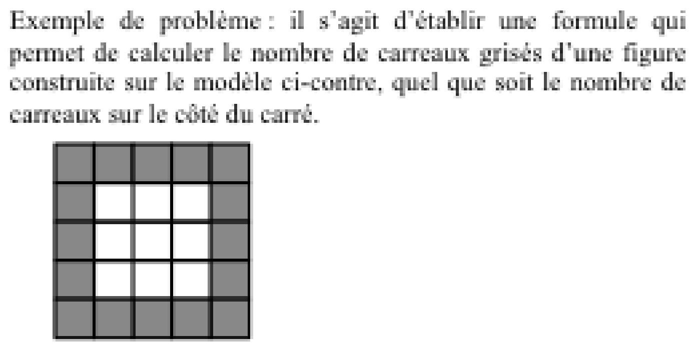


FIGURE 3.3 – La situation du carré bordé dans le document d'accompagnement « *Du numérique au littéral* » de 2008

Le document d'accompagnement met en avant toutes les potentialités de cette situation. Les différentes interprétations du nombre de carrés grisés sont exploitées pour faire émerger l'existence d'expressions équivalentes. Sa mise en œuvre peut s'appuyer sur l'utilisation du tableur et faire le lien avec le numérique. Son prolongement peut conduire à travailler différents statuts du signe d'égalité et de la lettre comme ceux de variable, d'indéterminée, d'inconnue ou encore de paramètre :

> *Un prolongement à la situation du nombre de carreaux grisés consiste à poser le problème de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal, par exemple à 112 ou à 74. [. . .]*
> *A propos de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré quand le nombre de carreaux hachurés est connu, l'existence de solution dépend des valeurs attribuées à ce dernier nombre. Un prolongement à ce problème consiste à déterminer des valeurs du nombre N de carreaux grisés pour lequel le problème a une solution, ce qui peut conduire à discuter, par exemple, l'existence*

d'une solution à l'équation $4n - 4 = N$ où la lettre N a alors le statut de paramètre. (Document d'accompagnement Du numérique au littéral » de 2008, p.2 et p.3)

De plus, l'étude de programmes de calcul équivalents à partir de leur modélisation symbolique présente des potentialités pour amener les élèves à un travail sur les expressions au niveau structural et non seulement au niveau procédural.

« La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». Pour rééquilibrer l'enseignement des deux aspects, l'étude du type de problèmes « Les programmes de calcul que traduisent deux expressions algébriques sont-ils équivalents ? » permet de motiver le travail « structural » sur les expressions algébriques, qui nécessite l'identification de la forme d'une expression et souvent le changement de cette forme (trans-formation), selon le but poursuivi. On est alors conduit à apprendre aux élèves à déterminer la forme d'un expression, selon des catégories qui évoluent au cours de l'enseignement. Savoir si une expression est une somme ou un produit est une tâche incontournable, que l'élève doit à terme savoir faire seul, sans indication de la part du professeur ou de l'énoncé de l'exercice. » (Document d'accompagnement « textitDu numérique au littéral » de 2008, p.5)

Les types de tâches du genre *Traduire* sont sous-entendus par des commentaires ou des objectifs faisant le lien entre l'utilisation des expressions algébriques et le domaine des grandeurs et mesures [6]. Le fait que ces types de tâches n'apparaissent pas explicitement comme sujet d'étude laisse supposer la délicate articulation entre la transformation des expressions algébriques avec des contextes qui leur donnent du sens. Le lien avec les différents registres de représentation pour travailler les deux aspects « procédural » et « structural » des expressions est mis en exergue dans le document d'accompagnement du collège :

« On peut faire un parallèle, en géométrie, avec la description d'une figure (aspect « structural ») et un programme de construction qui permet de la réaliser (aspect « procédural »). » (Document d'accompagnement Du numérique au littéral » de 2008, p.5)

En seconde, la situation est différente puisqu'il ne s'agit plus d'introduire les expressions algébriques mais de les rattacher au domaine des fonctions. La production et la traduction figurent explicitement comme sujet d'étude : *Traduire le lien entre deux quantités par une formule.*

b. OM2 - Équivalence des expressions algébriques

Les questions relatives à l'équivalence et la structure des expressions ne figurent pas dans les programmes du collège. Le seul type de tâches constitutif de OM2 qui

6. Voir par exemple les extraits de commentaire dans les tableaux 3.6 et 3.7 et la phrase d'introduction au domaine *Grandeurs et mesures* dans le tableau 3.8.

apparaît dans les programmes du collège est : *Tester l'égalité de deux expressions en leur attribuant des valeurs numériques.* Il est présent en cinquième sous la forme *Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques.* Il est rattaché au secteur des équations et non à celui des expressions algébriques (tableau 3.6), ce qui place davantage le statut de la lettre comme inconnue et non comme variable. Il permet de travailler le statut d'équivalence dans le contexte d'équation et non dans le contexte d'identité ce qui nécessite une quantification.

Si les programmes laissent implicites l'équivalence et la structure des expressions, le document d'accompagnement les mentionnent de manière explicite. Les principaux types de tâches de OM2 apparaissent dans le document d'accompagnement.

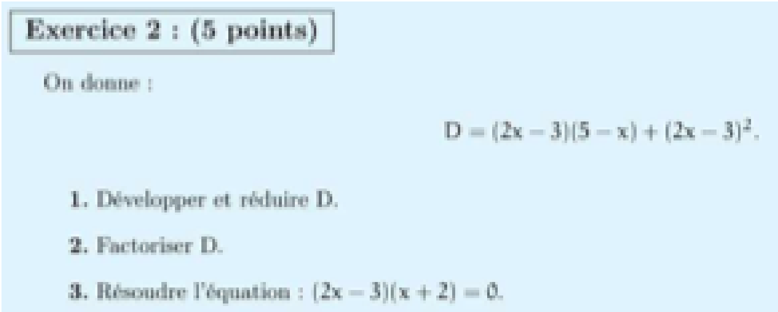
Les types de tâches *Tester* puis *Prouver que deux expressions sont / ne sont pas égales pour tout réel* apparaissent dans cet extrait du document d'accompagnement :

> *« Après qu'une transformation d'expression algébrique (factorisation, développement, réduction, ...) a été faite, un type de tâches doit faire l'objet d'une meilleure visibilité pour les élèves : comment contrôler qu'elle a été faite sans erreur ? Il est souhaitable d'aider les élèves à se doter de moyens de contrôles économiques du développement ou de la factorisation d'une expression auxquels l'expert recourt constamment, comme par exemple, la vérification du coefficient de plus haut degré ou du terme constant. Il faut aussi en montrer les limites qui justifient le recours à des tests sur un nombre restreint de valeurs bien choisies. Le recours à une calculatrice pour effectuer des tests sur des valeurs numériques en facilite la validation. En classe, le professeur peut montrer l'usage du tableur pour contrôler l'exactitude de l'égalité* $(3x-1)(2x+5) = 6x^2 + 13x - 5$ *: [...]. Si le développement est exact, en faisant varier la valeur attribuée à x [...] les valeurs numériques qui s'affichent [...] varient également, mais restent égales. Il est important que les élèves soient conscients que ce type de contrôle conduit à penser que deux expressions sont effectivement égales sans toutefois en avoir la certitude (des critères permettant de l'obtenir seront étudiés plus tard). En revanche, le fait que, pour une valeur attribuée à x, il n'y ait pas égalité des valeurs des deux expressions, suffit à prouver qu'elles ne sont pas égales. » (Document d'accompagnement, p. 6)*

Cet extrait soulève le lien avec différents aspects déjà soulignés dans nos analyses : l'importance d'un contrôle théorique pour valider les transformations algébriques effectuées et le rôle de la dialectique algébrique-numérique dans la validation des calculs. Les techniques et éléments technologiques présentés dans cet extrait coïncident avec ceux présentés dans l'OM de référence.

De même, les types de tâches du genre *Identifier la structure d'une expression*, peu soulignés dans les programmes, apparaissent dans le paragraphe du document d'accompagnement intitulé « *Les deux aspects d'une expression algébrique : « procédural » et « structural »* ». Il est souligné que :

> *La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». [...] On*



Exercice 2 : (5 points)

On donne :

$$D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2.$$

1. Développer et réduire D.

2. Factoriser D.

3. Résoudre l'équation : $(2x - 3)(x + 2) = 0$.

FIGURE 3.4 – Un exemple d'exercice classique du brevet des collèges, extrait de l'examen en Métropole de 2006

> *est alors conduit à apprendre aux élèves à déterminer la forme d'une expression, selon des catégories qui évoluent au cours de l'enseignement. Savoir si une expression est une somme ou un produit est une tâche incontournable, que l'élève doit à terme savoir faire seul, sans indication de la part du professeur ou de l'énoncé de l'exercice. » (Document d'accompagnement, p.5)*

Plusieurs techniques, correspondant à celles développées dans l'OM de référence, sont proposées pour identifier la structure d'une expression :

- *« La description en langue naturelle d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » [...]*
- *L'usage d'un arbre : la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect « procédural »), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect « structural »). » (Document d'accompagnement, p.5)*

En seconde, la présence du type de tâches « *Identifier la forme la plus adéquate d'une expression en vue de la résolution du problème donné* » sous-entend un appui sur le sens et la structure de l'expression (la forme factorisée sera plus adaptée pour résoudre une équation-produit) et le fait que plusieurs expressions puissent être équivalentes. Ce type de tâches est présent au collège et conduit à des exercices classiques du brevet des collèges (cf. figure 3.4) mais dans lesquels il n'est pas à la charge de l'élève. Il apparaît dans les introductions des programmes où le choix d'une écriture adaptée est mentionnée.

c. OM3 - Algèbre des polynômes

Au collège, les sujets d'étude du domaine *Nombres et calculs* donnent lieu à la majorité des types de tâches constitutifs de OM3. Les types de tâches des genres *Développer*, *Factoriser* apparaissent explicitement. Le commentaire « *Utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques* » (quatrième et troisième, domaine « *Nombres et calculs* » en 2008) donne lieu à des types de tâches pour effectuer des calculs numériques. Seuls les types de tâches relatifs à la réécriture des monômes et au choix de l'expression la plus adaptée ne sont pas mentionnés. Les règles de calculs liées aux propriétés convoquées évoluent au fil des classes (cf. tableau 3.10).

Propriété	Classes		
	5e	4e	3e
Distributivité simple	x		
Distributivité double		x	
Identités remarquables			x

TABLEAU 3.10 – Niveaux de classe d'introduction des propriétés du calcul algébrique

Si certains éléments technologiques, comme les règles de calculs, sont précisés, les techniques qui permettent de réaliser ces types de tâches sont absents des programmes. Par exemple, pour *Développer une expression algébrique avec la distributivité simple*, l'instanciation n'est pas explicitée mais seulement sous-entendue puisqu'il s'agit « d'*utiliser l'égalité* $k(a+b) = ka + kb$ *dans le bon sens* ». Dans les commentaires, il n'y a pas de trace de la question de la validation ou du contrôle des calculs alors que, comme nous l'avons déjà souligné, cela n'est pas le cas dans le document d'accompagnement.

Au lycée, pour la classe de seconde, les genres de tâches relatifs à la transformation d'expressions algébriques sont également présents sans que soient précisés des techniques et des éléments technologico-théoriques. Les expressions ne sont plus uniquement polynomiales mais également rationnelles ce qui en augmente la complexité par rapport au collège.

Au collège comme au lycée, OM3 est l'OM locale la plus présente. La trace de OM3 dans les programmes coïncide avec l'ensemble des types de tâches techniques. Mais il y a très peu de traces sur les liens étroits entre OM3 et OM2 et entre OM3 et OM1.

3.3.6 Synthèse sur l'OM à enseigner dans les programmes

Nous retenons plusieurs points de nos analyses.

a. Un nouvel habitat et une nouvelle niche pour l'algèbre au collège

L'analyse écologique montre que, depuis 2008, l'algèbre apparaît dans le domaine d'étude « *Organisation et gestion de données, Fonctions* » en classe de cinquième ce qui est une évolution majeure par rapport aux programmes précédents. La place de l'algèbre comme outil pour généraliser, modéliser et prouver est valorisée, ce qui encourage l'articulation entre les trois OM locales de référence pour donner une raison d'être aux expressions algébriques et mettre à disposition des élèves des moyens de calcul intelligent (choix de l'écriture la plus adaptée, contrôle des calculs). Cependant, les apports de ce changement dans l'enseignement et l'apprentissage sont mis en exergue uniquement dans le document d'accompagnement. Ce document souligne le changement de technologie mis en jeu par l'introduction des expressions algébriques et par les programmes de calcul et l'étude de leur équivalence.

b. La place laissée aux OM locales de référence

OM1 est présente, notamment en 5^{e}, avec la production d'expressions. Néanmoins, les types de tâches constitutifs de OM1 sont dispersés dans les trois habitats des programmes du collège. Ils restent souvent sous-entendus par les commentaires ou les objectifs et peu d'éléments sur leur mise en œuvre sont donnés. Il est donc nécessaire d'interpréter les programmes pour les rendre explicites. On peut s'interroger sur l'interprétation et l'exploitation des programmes par les enseignants et les concepteurs des manuels. Leur lecture les incitent-ils suffisamment à attribuer une place à l'interprétation des expressions, à la validation des calculs et à situer leur discours technologico-théorique à un niveau idoine ? Des effets différenciateurs de l'enseignement évoqués au chapitre 1 (cf. 1.1.1) ne sont-ils pas en lien avec un manque de prise en compte de ces éléments ?

L'OM locale la plus présente dans les programmes du collège et du lycée est OM3. On trouve peu de trace de OM2 dans les programmes du collège ce qui laisse supposer que les types de tâches de OM3 sont travaillés ponctuellement et que la transformation des expressions est principalement guidée par un travail syntaxique guidé par les ostensifs. Des éléments technologiques et théoriques sont pourtant apportés par le document d'accompagnement.

c. Les apports du document d'accompagnement : des éléments technologiques et des raisons d'être

Le document d'accompagnement complète les programmes officiels du collège. Il apporte des ingrédients du bloc technologico-théorique des OM ponctuelles qui sont dans les programmes comme les différents statuts des lettres et du signe d'égalité, l'introduction au calcul algébrique, les aspects procédural et structural d'une expression algébrique. Certaines ruptures entre les pratiques algébriques et numériques sont mentionnées. Des types de tâches sous-entendus ou absents des programmes apparaissent comme *Prouver que deux expressions sont égales/ ne sont pas égales pour toute valeur de la lettre*. Le contrôle des calculs, qui n'est jamais mentionné dans les programmes, fait l'objet d'un paragraphe (§5 p.6). Des tâches importantes sont abordées comme l'équivalence des programmes de calcul exprimés symboliquement. Les raisons d'être des expressions algébriques et de la distributivité simple sont mises en évidence. Cependant, on peut s'interroger sur le rôle joué par ce document chez les enseignants et les auteurs de manuels. Quelle place accordent-ils à ce document ? Est-il lu et utilisé par les enseignants ? Et si oui, comment ?

d. Une transition entre le collège et la seconde

A partir de la seconde, l'habitat et la fonction de l'algèbre évoluent. Les expressions algébriques sont travaillées au service de l'étude des fonctions ce qui implique des évolutions dans leur niveau de convocation et dans les types de problèmes et les raisons d'être qui y sont travaillées. Par exemple, le sujet d'étude *Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but* sollicite le sens des expressions, aspect qui est peu présent au collège où il est seulement suggéré par une injonction discrète dans la présentation des objectifs du domaine « *Nombres et calculs* » (cf. tableau 3.6). Des décalages entre le rapport institutionnel à l'algèbre au collège et en seconde sont ainsi mis en évidence. Le rapport institutionnel à l'algèbre en seconde met en jeu une pratique algébrique appuyée sur des éléments technologique et théorique qui sont implicites dans les programmes de collège.

Nous poursuivons notre étude avec l'analyse de manuels du collège et du lycée.

3.4 Analyse des manuels

3.4.1 Choix des manuels

Pour avoir un panorama global des caractéristiques de l'OM à enseigner qui apparaît dans les manuels, nous en avons analysé plusieurs pour chaque niveau scolaire. Comme dans l'analyse des programmes, le niveau de classe 2^{de} est parcouru pour mieux situer l'OM à enseigner au collège par rapport à celle de la classe de 2^{de}.

Au collège, les manuels retenus (tableau 3.11) pour les analyses écologiques et praxéologiques sont [7] :

7. Pour faciliter les références aux manuels dans la rédaction, nous les avons codés par un chiffre qui indique le niveau scolaire, les deux premières lettres de la collection et les deux derniers chiffres de l'année d'édition. Par exemple, le manuel de 5^{e} de la collection Phare de 2007 est codé 5PH07.

– les manuels de la collection *Phare* chez Nathan (éditions 2006 et 2010 pour la 5^e, éditions 2007 et 2011 pour la 4^e et éditions 2008 et 2012 pour la 3^e). Ces manuels, très utilisés par les enseignants, l'étaient par ceux qui ont participé aux expérimentations. Nous analysons deux éditions par niveau scolaire, parce qu'elles présentent des différences qui laissent supposer des évolutions dans l'interprétation des programmes.
– les manuels de la collection *Triangle* chez Hatier (édition 2010 pour la 5^e, édition 2011 pour la 4^e et édition 2008 pour la 3^e). Cette collection est une des premières à avoir développé la production d'expressions pour généraliser ou prouver. Avec un chapitre spécifique sur la démonstration par le calcul algébrique, les manuels *Triangle* sont représentatifs d'une volonté de mettre en avant la dimension outil de l'algèbre. Les éditions de 2006 et 2007 étant équivalentes à celles de 2010 et 2011, nous analysons uniquement les dernières versions. Pour la classe de 3^e, n'ayant pas eu accès à la version de 2012, nous analysons celle de 2008.
– les manuels de la collection *MathenPoche* chez Sésamath (édition 2010 pour la 5^e, édition 2011 pour la 4^e et édition 2008 pour la 3^e). Il s'agit de manuels libres, téléchargeables gratuitement sur Internet [8] et créés à l'initiative de l'association Sésamath, qui est impliquée dans le projet de recherche PepiMeP. Ces manuels étant en partie exploitables depuis la plateforme LaboMeP, utilisée dans PepiMeP, il nous a paru indispensable de les analyser. Les éditions de 2006, 2007 et 2008 étant équivalentes à celles de 2010, 2011 et 2012, nous analysons uniquement les dernières versions.
– le manuel de la collection *Horizon* chez Didier de 4^e (édition 2011). Ce manuel n'existe actuellement qu'en classe de 4^e. Du même éditeur et des mêmes auteurs que le manuel *Math'x* de seconde, il en est, d'une certaine façon, l'équivalent en 4^e.

En seconde, les manuels retenus pour l'analyse écologique sont (tableau 3.12) :

– le manuel de la collection *Math'x* chez Didier (édition 2010) écrit par les mêmes auteurs que le manuel *Horizon* en 4^e,
– le manuel de la collection *Hyperbole* chez Nathan (édition 2010),
– le manuel de la collection *Transmath* chez Nathan (édition 2010),
– le manuel de la collection *Math 2^de^* chez Nathan (édition 2011),

Les codages sont présentés dans les tableaux 3.11 pour les manuels du collège et 3.12 pour les manuels de seconde.

8. http ://www.sesamath.net/

Collection, Éditeur	**Manuel**	**Codage**
Phare, Nathan	5^{e} 2006	5PH06
	5^{e} 2010	5PH10
	4^{e} 2007	4PH07
	4^{e} 2011	4PH11
	3^{e} 2008	3PH08
	3^{e} 2012	3PH12
Triangle, Hatier	5^{e} 2010	5TR10
	4^{e} 2011	4TR11
	3^{e} 2008	3TR08
Horizon, Didier	4^{e} 2011	4HO11
Mathenpoche, Sésamath	5^{e} 2010	5MP10
	4^{e} 2011	4MP11
	3^{e} 2008	3MP12

TABLEAU 3.11 – Manuels de collège retenus

Collection, Éditeur	**Manuel**	**Codage**
Math'x, Didier	Math 2de 2010	2Mx10
Hyperbole, Nathan	Mathématiques 2de 2010	2HY09
Transmath, Nathan	Math 2de 2010	2TM10
Math 2de, Nathan	Math 2de 2010	2MT10
Symbole, Belin	Maths 2de 2010	2SY10
Déclic, Hachette	Mathématiques 2de 2010	2DE10
Repère, Hachette	Maths 2de 2010	2RE10
Indice, Bordas	Maths 2de 2009	2IN09
Pixel, Bordas	Maths 2de 2010	2PI10

TABLEAU 3.12 – Manuels de seconde retenus

– le manuel de la collection *Symbole* chez Belin (édition 2010),
– le manuel de la collection *Déclic* chez Hachette (édition 2010),
– le manuel de la collection *Repère* chez Hachette (édition 2010),
– le manuel de la collection *Pixel* chez Bordas (édition 2010).

Suite à l'analyse écologique, les manuels de seconde sont regroupés selon trois catégories. Seul un manuel de chaque catégorie sera analysé praxéologiquement, à savoir les manuels : 2Mx10, 2IN09 et 2HY09.

Ainsi, l'analyse écologique concerne vingt-deux manuels dont treize du collège et neuf de seconde. L'analyse praxéologique concerne seize manuels dont treize du collège et trois de seconde.

3.4.2 Analyse écologique

L'analyse écologique des manuels consiste à situer les habitats et les niches attribués à l'algèbre par rapport aux injonctions des programmes officiels. Pour cela, nous interprétons les sommaires et les structures des manuels avec les niveaux de codétermination didactique : domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude. Nous associons une partie à un domaine, un chapitre à un secteur et un sous-chapitre, s'il y en a, à un thème. Un sujet d'étude est retenu s'il figure comme titre d'un paragraphe ou d'une méthode dans les manuels. Une analyse plus fine des types de tâches présents dans les manuels fait l'objet de l'analyse praxéologique (§ 3.4.3). Ce travail est présenté dans les tableaux 3.13, 3.14, 3.15 et 3.16. Nous en tirons plusieurs conclusions présentées dans les paragraphes suivants.

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Collection Phare			
Manuel 5PH06			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Tester une égalité
Manuel 5PH10			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Produire et utiliser une expression littérale
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Tester une égalité
Manuel 4PH07			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Utiliser le calcul littéral pour résoudre un problème
			Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant des valeurs aux lettres
Manuel 4PH11			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Prouver que deux expressions sont égales pour tout x ou pas
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Utiliser le calcul littéral pour résoudre un problème
			Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant des valeurs aux lettres
Manuel 3PH08			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 3PH12			
Nombres et calculs	Calcul littéral Équation produit nul	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
	Identités remarquables et applications	Calcul littéral	Développer avec les identités remarquables
			Factoriser avec les identités remarquables

Tableau 3.13 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels Phare

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Collection Triangle			
Manuel 5TR10			
Organisation et gestion de données	Initiation au calcul littéral et aux équations	Calcul littéral	Produire et utiliser une formule
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Prouver que deux expressions sont égales pour tout x ou pas
Manuel 4TR11			
Nombres et calculs	Calcul littéral et initiation à la démonstration	Calcul littéral	Produire et utiliser une formule
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 3TR08			
–	Calcul littéral et identités remarquables	Calcul littéral	Développer
			Factoriser
Collection Horizon			
Manuel 4HO11			
–	Calcul littéral	–	Produire et utiliser une formule
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Collection Mathenpoche			
Manuel 5MP10			
Travaux numériques	Calcul littéral	Calcul littéral	Produire et utiliser une expression littérale
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Tester si une égalité ou une inégalité est vraie
Manuel 4MP11			
Travaux numériques	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant des valeurs aux lettres
Manuel 3MP12			
Travaux numériques	Calcul littéral et équations	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression

TABLEAU 3.14 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels Triangle, Horizon et MathenPoche

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Manuels catégorie 1			
Manuel 2Mx10			
Fonctions	Développer, factoriser pour résoudre	Égalité « pour tout x » et équation	Prouver que deux expressions sont égales pour tout x ou pas
		Développer, factoriser	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Reconnaître la structure
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
Manuel 2MT10			
–	Généralités sur les fonctions	–	Trouver une formule
–	Expressions algébriques. Équations	Expressions algébriques	Produire une expression algébrique pour résoudre un problème
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 2DE10			
–	Expressions algébriques et équations	Transformer une expression algébrique	Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 2IN09			
–	Expressions algébriques	Les formes d'une expression algébrique	Reconnaître la structure d'une expression
		Transformation d'une expression algébrique	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
			Produire une expression algébrique pour résoudre un problème

Tableau 3.15 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels de 2e

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Manuels catégorie 2			
Manuel 2HY10			
–	Fonctions, expressions algébriques et problèmes	Expressions algébriques	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
Manuel 2TM10			
–	Fonction carré. Problèmes du second degré	Développer, Factoriser	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
Manuel 2PI10			
–	Fonctions du second degré	Expressions algébriques	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Reconnaître la structure
Manuel 2RE10			
–	Fonctions de référence	Transformations d'écritures	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
Manuels catégorie 3			
Manuel 2SY10			
Ni secteur, ni thème relatif aux expressions algébriques			

TABLEAU 3.16 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels de 2^{e}

a. Au collège

Dans le tableau 3.17, nous présentons les domaines d'étude repérés dans les manuels scolaires des classes de 5^{e}, 4^{e} et 3^{e}. Nous indiquons en gras les domaines pour lesquels l'algèbre apparaît comme secteur d'étude.

Collection	Manuels	Domaines
Phare	5PH06, 5PH10 4PH07, 4PH11 3PH08, 3PH12	**Nombres et calculs** Organisation et gestion de données Géométrie Grandeurs et mesures
Triangle	5TR10	Nombres et calculs **Organisation et gestion de données** Travaux géométriques Grandeurs et mesures
	4TR11	**Nombres et calculs** Organisation et gestion de données Géométrie. Grandeurs et mesures
	3TR08	–
Horizon	4HO11	–
MathenPoche	5MP10	**Travaux numériques** Gestion de Données Travaux Géométriques Grandeurs et Mesures
	4MP11 5MP12	**Travaux numériques** Organisation et Gestion de Données Travaux Géométriques
Légende : Les domaines en gras signifient qu'ils incluent un secteur relatif à l'algèbre. Un – indique qu'il n'y a pas de structuration en domaines.		

TABLEAU 3.17 – Domaines d'études présents dans les manuels scolaires des classes de 5^{e}, 4^{e} et 3^{e}

La majorité des manuels du collège se structurent selon les quatre domaines des programmes : *Nombres et calculs*, *Organisation et gestion de données*, *Géométrie* et *Grandeurs et mesures*. Un habitat est donné à l'algèbre dans le domaine *Nombres et calculs*, ce qui ne correspond pas à la structuration des programmes de 2008. Le sujet d'étude *Produire une expression*, rattaché au domaine *Organisation et gestion de données* dans les programmes de 5^{e}, figure majoritairement dans les manuels dans le domaine *Nombres et calculs*. Seul le manuel Triangle 2010 de 5^{e} diffère en intégrant l'algèbre comme secteur d'étude du domaine *Organisation et gestion de données*. Les auteurs de ce manuel montrent ainsi leur volonté de suivre la nouvelle orientation de travail proposée en 2008 avec l'influence sur les raisons d'être des expressions et du calcul en lien avec l'équivalence des programmes de calcul.

Le manuel Phare 2012 de 3e présente une spécificité. Deux secteurs d'étude relatifs aux expressions algébriques du domaine *Nombres et calculs* sont distingués : le premier est *Calcul littéral et équation produit nul* et le second est *Identités remarquables et applications*. Dans les autres manuels dont l'édition précédente de Phare 3e datant de 2008, ces deux secteurs sont regroupés en un seul. Cette distinction laisse entendre une volonté de laisser une place plus grande à l'algèbre et de l'orienter davantage comme outil au service de la résolution de problèmes.

La présence de l'algèbre dans les manuels du collège ne coïncide pas totalement avec celle suggérée par les programmes. Hormis les spécificités de deux manuels, l'algèbre est concentrée en un seul habitat dans le domaine *Nombres et calculs*. Dans l'analyse praxéologique, nous porterons une attention particulière aux manuels Phare 2012 3e et Triangle 2010 5e, pour mieux déterminer en quoi leur organisation peut modifier la fonction donnée à l'algèbre et plus particulièrement aux expressions algébriques.

b. En seconde

Seuls les manuels Math'x et Repère, codés 2Mx10 et 2RE10, proposent une structuration en domaines de leurs sommaires (cf. tableau 3.18). Cette structuration correspond à celle proposée par les programmes de seconde : *Fonctions*, *Statistiques et probabilités* et *Géométrie*. Le secteur relatif à l'algèbre est rattaché au domaine des fonctions ce qui correspond à l'orientation donnée par les programmes de seconde. Pour les manuels qui ne sont pas structurés en domaines, un secteur relatif à l'algèbre, quand il est présent, est, d'après l'ordre et l'intitulé des chapitres, en rapport avec les fonctions. Lorsque l'algèbre apparaît, c'est comme un outil au service des fonctions.

Nous regroupons les manuels de seconde selon trois catégories :

1. Ceux qui incluent les expressions algébriques au niveau du secteur, c'est-à-dire qu'un chapitre a un intitulé relatif aux expressions algébriques. Quatre des neuf manuels analysés sont concernés : **2Mx10**, 2MT10, 2DE10, **2IN09**.
2. Les manuels qui incluent les expressions algébriques au niveau d'un thème d'étude rattaché au secteur *Fonctions du second degré*, c'est-à-dire que les expressions algébriques sont travaillées uniquement dans le chapitre relatif à l'étude des fonctions du second degré. Quatre manuels sont concernés : **2HY09,** 2TM10, 2RE10 et 2PI10.
3. Les manuels qui ne proposent ni secteur ni thème relatifs aux expressions algé-

Collection	Manuels	Domaines
Math'x **Repère**	2Mx10 2RE10	**1. Fonctions** 2. Statistiques et probabilités 2. Géométrie
Hyperbole, **Transmath** **Math 2$^{\text{de}}$** **Symbole** **Déclic** **Indice** **Pixel**	2HY09 2TM10 2MT10 2SY10 2DE10 2IN09 2PI10	–
Légende : Les domaines en gras signifient qu'ils incluent un secteur relatif à l'algèbre. Un – indique qu'il n'y a pas de structuration en domaines.		

TABLEAU 3.18 – Domaines d'étude présents dans les manuels scolaires de la classe de 2$^{\text{e}}$

briques même si certains types de tâches peuvent apparaître ponctuellement. Un manuel est concerné : 2SY10.

Ainsi, en seconde, l'algèbre n'a pas toujours le même statut. Elle est soit absente, soit présente au niveau du secteur ou au niveau du thème. On peut donc s'attendre à ce que l'OM à enseigner relativement aux expressions algébriques développée dans chaque catégorie de manuels ne laisse pas la même place aux OM locales de référence. Nous proposons d'analyser praxéologiquement au moins un des manuels de chaque catégorie.

3.4.3 Analyse praxéologique

a. Méthodologie

Étant donné le nombre de manuels considérés et la quantité d'exercices dans chacun d'entre eux, nous précisons la méthodologie adoptée pour leur analyse.

Les manuels s'organisent en trois parties : activités , cours et méthodes (parfois appelés savoir-faire) et exercices. Chaque partie joue un rôle différent et informe sur une partie des éléments de l'OM relative aux expressions algébriques construite dans le manuel. Nous les associons donc à différents moments de l'organisation didactique.

La partie *Activités* concerne principalement le moment de la première rencontre, même si le moment de l'exploration du type de tâches avec élaboration d'une technique ou celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique peuvent s'y trouver. C'est pourquoi nous analysons cette partie pour situer les raisons d'être de l'OM régionale relative aux expressions algébriques par rapport à celles mises en évidence dans l'OM de référence. Nous nous intéressons à deux raisons d'être, celle de la génération des expressions algébriques et celle de l'introduction des propriétés de calculs.

La partie *Cours et méthodes* concerne principalement deux moments : celui de l'exploration du type de tâches avec l'exploration de la technique et celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique. Nous les analysons pour dégager les principaux types de tâches de l'OM de référence qui interviennent ainsi que les ingrédients techniques et technologiques qui composent les praxéologies. Nous dégageons des éléments sur la place accordée aux ostensifs dans la conduite et le contrôle du calcul algébrique.

La partie *Exercices* concerne principalement le moment de travail de la technique. Nous comptabilisons le nombre d'apparitions de chaque type de tâches afin de repérer ceux qui ne sont jamais ou peu travaillés. Nous nous intéressons à la place laissée à chacune des OM locales de référence.

L'analyse praxéologique des manuels s'organise en plusieurs temps. L'étude des parties *Activités* est suivie de celles des *Cours et méthodes* puis des *Exercices*. L'étude porte sur une analyse *a priori* des types de tâches convoqués dans ces différentes parties. Nous en dégageons le poids donné à chaque OM locale de référence, les liens qui existent entre elles et le niveau d'agrégation des types de tâches ponctuels, ce qui permet de conclure sur la présence de l'OM à enseigner présente dans les manuels. Nous apportons une analyse sur les différences entre la 3e et la 2de.

b. Analyse des parties *Activités*

L'analyse praxéologique des parties *Activités* est centrée sur les raisons d'être de l'OM régionale relative aux expressions algébriques. Deux raisons d'être nous intéressent :

- Qu'est-ce qui motive la génération des expressions algébriques ? Cette motivation est-elle associée à une évolution de la considération des programmes de calcul comme résultat et non simplement comme processus, comme cela est suggéré par le document d'accompagnement et mis en évidence dans l'OM de référence ?
- Qu'est-ce qui motive l'introduction des propriétés de calcul ? La distributivité simple est introduite en classe de 5^{e}, la distributivité double en classe de 4^{e} et les identités remarquables en classe de 3^{e}. Cette motivation est-elle associée à la question de l'équivalence des programmes de calcul, comme cela est

suggéré par le document d'accompagnement et mis en évidence dans l'OM de référence ?

Motivation des expressions algébriques

D'après l'OM de référence, les expressions algébriques trouvent leur raison d'être dans OM1. Au collège, nous avons rencontré deux types de motivation.

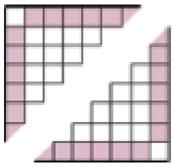
La première est la *production* d'une expression algébrique ou d'une formule dans le cadre de la résolution de problèmes de généralisation, modélisation ou de preuve. Dans ce cas, les expressions algébriques apparaissent comme une nécessité pour résoudre le problème donné. Dans l'OM de référence, nous avons mis en évidence une introduction par les programmes de calcul ce qui permet de montrer les limites des démarches numériques, par exemple, pour prouver le résultat du programme de calcul pour n'importe quelle valeur ou pour prouver que deux programmes de calcul sont équivalents. Cette motivation est suggérée par les documents d'accompagnement du collège ; elle suit l'orientation de travail suggérée par l'ajout du type de tâches *Produire une expression algébrique* dans les programmes de 2008 pour la classe de 5^{e}. Elle est illustrée dans la figure 3.5. Remarquons que les expressions algébriques ne sont pas distinguées des formules. Elles sont attachées à des formules. Il y a là une difficulté, dans l'institution, à travailler sur des expressions en dehors d'une relation qui s'accompagne d'une difficulté pour les élèves qui doivent alors considérer les expressions comme un tout. De plus, notons que dans l'exercice présenté à la figure 3.5, même si la question 3 porte sur l'équivalence des expressions, le niveau technologico-théorique convoqué dépend des techniques utilisées comme l'utilisation d'un contre-exemple et la comparaison entre les expressions proposées.

La seconde motivation est la *traduction*, non contextualisée dans la résolution d'un problème, entre un registre sémiotique en jeu dans un cadre algébrique ou fonctionnel et celui des écritures algébriques. Dans ce cas, les expressions algébriques apparaissent comme un moyen de représenter symboliquement des grandeurs ou des relations données en langage naturel. Nous illustrons ce cas dans la figure 3.6.

Enfin, nous avons rencontré des manuels qui ne motivent pas l'introduction des expressions algébriques. Dans ce cas, elles ne sont pas introduites mais étudiées directement comme un objet.

Le tableau 3.19 présente les choix de chaque manuel du collège concernant la motivation des expressions algébriques. La moitié des manuels analysés (7 sur 13) n'introduisent pas les expressions algébriques par la production d'expressions dans le contexte de la résolution de problème. Ce choix ne suit pas les suggestions du

Activité 2 : Un carré sans coins



On a représenté ci-contre deux parties d'un carré. Il est constitué de petites cases ayant pour côté un carreau. Celles qui se trouvent sur les bords sont coloriées en rose, sauf les quatre coins.

1. Réalise une figure de 3 carreaux de côté. Indique le nombre de cases roses. Recommence avec un carré de 4 carreaux de côté puis avec un carré de 5 carreaux de côté.

2. Quel est le nombre de cases roses pour un carré de 6 carreaux de côté ? Et pour 12 carreaux ? Et pour 100 ?

3. Le professeur appelle x le nombre de carreaux d'un côté du carré et G le nombre de cases roses. Des élèves ont obtenu les expressions suivantes :

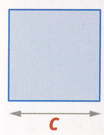
Anis : $G = x \times 4 - 2$	Chloé : $G = 4 \times (x - 2)$	Enzo : $G = 4 \times x - 8$
Basile : $G = x - 2 \times 4$	Dalila : $G = (x - 2) \times 4$	Florian : $G = 4 \times x - 4$

Parmi ces expressions, lesquelles sont fausses ? Pourquoi ? Y a-t-il plusieurs bonnes réponses ? Justifie.

4. Calcule le nombre de cases roses lorsque $x = 6$ puis $x = 24$ et enfin pour $x = 100$.

FIGURE 3.5 – Motivation des expressions algébriques par la situation du carré bordé dans le manuel 5MP10 (activité 2 p. 64)

A Expressions littérales



On étudie le carré bleu ci-contre.

1) a) Que permet de calculer le produit $4 \times c$?

b) Que représente la lettre c dans cette expression ?

On appelle expression littérale une expression qui utilise une ou plusieurs lettres.

2) a) Écrire une expression littérale qui permet de calculer l'aire de ce carré.

b) Que représente chacune des deux lettres c dans cette expression littérale ?

On dit que l'on a exprimé l'aire du carré en fonction de c.

FIGURE 3.6 – Motivation des expressions algébriques par la *traduction* dans le manuel 5PH10 (activité 1 p. 30)

Motivation	**Manuels**
Production : problèmes de généralisation, modélisation, preuve	5MP10, 4MP11, 3MP12, 4HO11, 4TR11, 3TR08
Traduction	5PH06, 5PH10, 5TR10
Non motivation	4PH07, 4PH11, 3PH08, 3PH12

TABLEAU 3.19 – Motivation des expressions algébriques dans les parties *Activités* des manuels scolaires du collège

document d'accompagnement. Certains ne les motivent pas du tout et d'autres les introduisent par le biais de la traduction. Les manuels Phare sont principalement concernés. En revanche, l'autre moitié des manuels (6 sur 13) motive les expressions algébriques par des problèmes de généralisation, de modélisation ou de preuve. Les manuels MathenPoche, Horizon et Triangle sont concernés. L'orientation de travail donnée par les manuels 5MP10, 4HO11 et 3MP12 correspond à celle du document d'accompagnement. Des problèmes de généralisation du type carré bordé ou programmes de calcul équivalents sont menés en plusieurs étapes. Après le calcul du nombre de carrés unités sur des valeurs numériques, on demande de faire le calcul de façon générale, ce qui mène à la production de formules ou d'expressions. Puis le problème amène à comparer plusieurs expressions et à s'interroger sur ce qui peut justifier leur égalité pour toutes valeurs.

En seconde, les trois manuels motivent l'utilisation et la transformation des expressions algébriques par des problèmes fonctionnels (cf. figure 3.7), ce qui correspond à l'orientation donnée par les programmes de 2009.

Motivation des propriétés du calcul algébrique

A chaque niveau de classe du collège, une nouvelle propriété du calcul algébrique (distributivité simple et double, identités remarquables) est introduite (cf. tableau 3.10). Nous nous interrogeons sur les raisons d'être proposées dans les manuels pour introduire ces propriétés. Nous avons rencontré deux types d'introduction des propriétés du calcul algébrique.

La première approche est une introduction liée à la question de *l'équivalence des programmes de calcul*. La résolution d'un problème de généralisation conduit à des expressions algébriques équivalentes dont la preuve de leur équivalence donne une raison d'être aux propriétés. Cette introduction, suggérée par le document d'accompagnement, correspond à celle mise en évidence dans l'OM de référence. Par exemple, dans le manuel 4HO11 (cf. figure 3.8), se poser la question de la preuve de l'équivalence des programmes de calcul 1 et 2 donne une raison d'être à la propriété de distributivité simple. Dans le manuel 5MP10 (cf. figure 3.5), des procédés de calculs distincts ont conduit deux élèves à des expressions différentes qui sont prouvées équivalentes par la distributivité simple. Le document d'accompagnement oriente le travail dans ce sens, ce qui permet notamment de travailler sur la dialectique algébrique-numérique.

La seconde approche s'appuie sur la *décomposition des aires*. Considérer la même aire mais découpée différemment conduit à des expressions algébriques équivalentes. Il s'agit de s'appuyer sur le changement de cadre grandeurs-algèbre pour assurer l'équivalence entre des expressions qui représentent le même résultat. Ce cas est illustré par le manuel 4PH11 (cf. figure 3.9). Dans cet exemple, qui est représentatif, la propriété du calcul algébrique mise en jeu résulte du découpage des aires, d'ailleurs guidé pas à pas, sans qu'il y ait de réelle raison d'être. Contrairement à l'approche par l'équivalence des programmes de calcul, l'appui sur le cadre des grandeurs conduit directement à considérer les expressions algébriques du point de vue structural sans dialectique avec l'aspect procédural. Cette approche conduit à un travail au niveau de la comparaison des écritures.

Enfin, certains manuels ne motivent pas les propriétés de calcul. Dans ce cas, les propriétés de distributivité et les identités remarquables répondent uniquement à la nécessité de les faire savoir aux élèves. Elles sont construites sans appui sur une modélisation ou une généralisation. Ce cas est illustré par le manuel 3PH12 (cf. figure 3.10), où les identités remarquables sont énoncées et démontrées sans aucune raison d'être. Elles sont construites à partir de la définition du carré comme produit d'un nombre par lui-même et de la double distributivité dans le cadre algébrique.

Motivation	**Manuels**
Programmes de calcul équivalents	5MP10, 3MP12, 4HO11
Décomposition des aires	5PH06, 5PH10, 4PH07, 4PH11, 3PH08, 3MP12, 4HO11, 5TR10, 4TR11
Pas de motivation	3PH12, 3TR08, 4MP11

TABLEAU 3.20 – Motivation des propriétés du calcul algébrique dans les parties *Activités* des manuels scolaires du collège

Le tableau 3.20 présente les raisons d'être de l'introduction des propriétés du calcul algébrique dans chaque manuel du collège. Les manuels de seconde n'y figurent pas car aucune propriété nouvelle n'est introduite à ce niveau scolaire. Il en ressort plusieurs points. Seuls trois des treize manuels du collège analysés donnent une raison d'être aux propriétés du calcul algébrique par la résolution de problème. Une majorité de manuels (9 sur 13) introduisent les propriétés par la décomposition des aires, sans comparaison des expressions dans le cadre algébrique et en dehors du cadre des grandeurs. Trois manuels ne donnent aucune raison d'être aux propriétés introduites. Ainsi seuls les trois manuels 5MP10, 3MP12, 4HO11 donnent une raison d'être aux propriétés du calcul algébrique en tant qu'expression symbolique de programmes de calcul équivalents.

Ainsi, dans la majorité des manuels, l'entrée dans le calcul algébrique se fait par OM1. Néanmoins, la résolution de problèmes n'est pas toujours privilégiée, notamment en classe de 5^{e} où l'introduction des expressions algébriques relève souvent de la traduction plutôt que de l'équivalence des programmes de calcul. La dénotation des expressions et la dialectique algébrique-numérique, questionnant l'équivalence des expressions, sont peu travaillés sauf dans les manuels MathenPoche et Horizon où la résolution de problèmes est un pivot pour faire les liens entre OM3, OM2 et OM1.

Nous analysons dans le paragraphe suivant les parties *Cours et méthodes*.

Le minimum d'une aire

Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqués sur le dessin :

$$AM = BN = BP = CQ = CR = DS = DT = AU = x, \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

On note $A(x)$ l'aire du domaine coloré.

1. Montrer par un raisonnement géométrique que $A(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :
$A(x) = 4x^2 + (4 - 2x)^2$ ou $A(x) = 16 - 4x\,(4 - 2x)$.

2. Montrer que l'on a aussi : $A(x) = 8x^2 - 16x + 16$.

3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $A(2)$, puis $A(\sqrt{3})$.

4.a. Montrer que : $A(x) = 8\,(x - 1)^2 + 8$.
b. En déduire que l'aire $A(x)$ est minimale pour $x = 1$.

5.a. Montrer que : $A(x) = (2x - 1)\,(4x - 6) + 10$.
b. En utilisant l'expression précédente de $A(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $A(x)$ soit égale à 10.

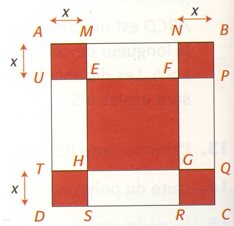


FIGURE 3.7 – Un exemple de motivation des expressions algébriques dans un problème fonctionnel, en seconde, manuels 2IN09 (activité 2, p.60)

6 Demander le programme

OBJECTIFS
Montrer l'intérêt d'utiliser une lettre pour démontrer un résultat général ; donner du sens à l'égalité de deux expressions littérales ; revoir la distributivité

1. Appliquer chacun des programmes ci-dessous aux nombres 4 et 7.
Que constate-t-on ?

Programme 1
- Choisir un nombre
- Multiplier par 6
- Soustraire 4

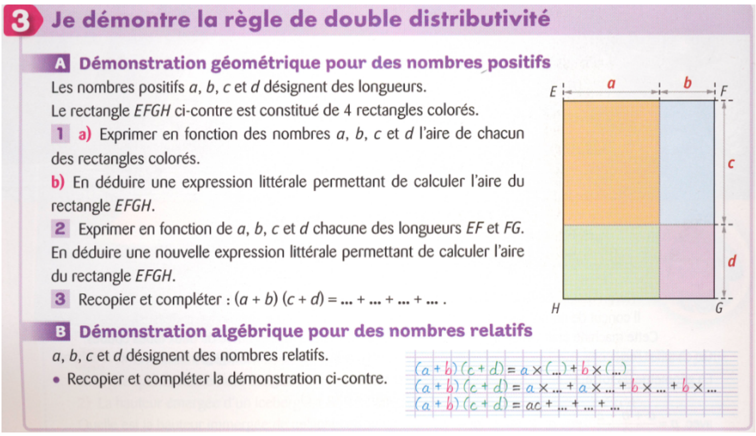
Programme 2
- Choisir un nombre
- Multiplier par 3
- Soustraire 2
- Multiplier par 2

Programme 3
- Choisir un nombre
- Soustraire 5
- Multiplier par le nombre de départ
- Additionner 24

2. Appliquer chaque programme au nombre 10.

3. Comment savoir si les programmes 1 et 2 donnent toujours le même résultat, pour n'importe quel nombre choisi au départ ?

FIGURE 3.8 – Une raison d'être de la propriété de distributivité simple dans le manuel 4HO11 (activité 6 p. 84)



3 Je démontre la règle de double distributivité

A Démonstration géométrique pour des nombres positifs

Les nombres positifs a, b, c et d désignent des longueurs.

Le rectangle $EFGH$ ci-contre est constitué de 4 rectangles colorés.

1 **a)** Exprimer en fonction des nombres a, b, c et d l'aire de chacun des rectangles colorés.

b) En déduire une expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.

2 Exprimer en fonction de a, b, c et d chacune des longueurs EF et FG. En déduire une nouvelle expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.

3 Recopier et compléter : $(a + b)(c + d) = \dots + \dots + \dots + \dots$.

B Démonstration algébrique pour des nombres relatifs

a, b, c et d désignent des nombres relatifs.

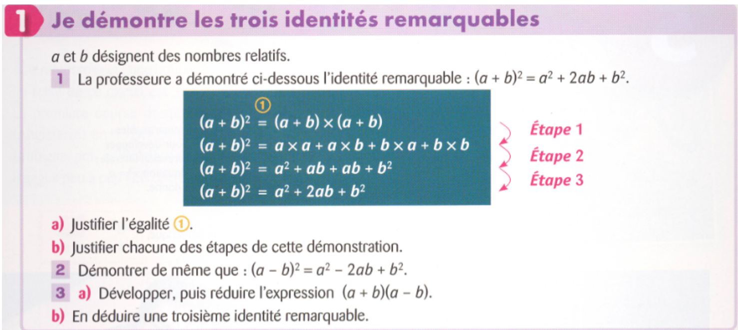
- Recopier et compléter la démonstration ci-contre.

$(a+b)(c+d) = a \times (\dots) + b \times (\dots)$

$(a+b)(c+d) = a \times \dots + a \times \dots + b \times \dots + b \times \dots$

$(a+b)(c+d) = ac + \dots + \dots + \dots$

FIGURE 3.9 – Un exemple de décomposition des aires pour introduire la distributivité double dans le manuel 4PH11 (activité 3 p. 64)



1 Je démontre les trois identités remarquables

a et b désignent des nombres relatifs.

1 La professeure a démontré ci-dessous l'identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a + b)^2 \overset{①}{=} (a + b) \times (a + b)$

$(a + b)^2 = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$ — Étape 1

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$ — Étape 2

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — Étape 3

a) Justifier l'égalité ①.

b) Justifier chacune des étapes de cette démonstration.

2 Démontrer de même que : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3 **a)** Développer, puis réduire l'expression $(a + b)(a - b)$.

b) En déduire une troisième identité remarquable.

FIGURE 3.10 – Un exemple d'introduction des identités remarquables dans le manuel 3PH12 (activité 1 p. 84)

c. Analyse des parties *Cours et méthodes*

Étant donné que les parties *Cours et méthodes* correspondent aux moments de l'exploration du type de tâches ainsi que de la technique et de la constitution de l'environnement technologico-théorique, nous analysons les types de tâches qui interviennent, leur agrégation, les techniques développées, les discours technologico-théoriques qui les accompagnent et la place des ostensifs par rapport aux non-ostensifs qui y sont mobilisés.

Les types de tâches présents

Nous avons relevé la présence des types de tâches constitutifs de chaque OM locale de référence pour chaque manuel. Nous présentons les résultats dans le tableau 3.21. Pour une description des types de tâches, nous renvoyons le lecteur aux tableaux 3.1, 3.2 et 3.3.

Ce tableau met en évidence le fort poids donné à OM3 par rapport à OM2 et OM1 dans les parties *Cours et méthodes*. Seuls sept manuels font intervenir des types de tâches de OM2, et, parmi eux, seuls trois manuels font intervenir le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions algébriques (ne) sont (pas) égales pour toute valeur de la lettre*. OM1 intervient seulement dans six manuels et uniquement deux d'entre eux évoquent la production d'expressions dans le cadre de la résolution de problèmes. Les liens entre les trois OM locales sont peu présents, ce qui donne lieu à différentes analyses que nous soulevons dans les paragraphes qui suivent.

Des OM ponctuelles peu reliées entre elles

Les types de tâches qui interviennent majoritairement sont ceux des genres *Développer* et *Factoriser*. Les propriétés du calcul algébrique sont énoncées et souvent mises en fonctionnement sur un exercice résolu ce qui offre la possibilité de décrire et interpréter une technique de développement ou de factorisation. Les types de tâches sont étudiés indépendamment les uns des autres sans être rattachés à d'éventuelles raisons d'être soulevées dans les parties *Activités*. Seuls les deux manuels 4TR11 et 4HO11 diffèrent en faisant intervenir le genre de tâches *Produire* ce qui fait le lien avec des raisons d'être dans l'introduction d'expressions algébriques. Parfois, comme dans cet extrait du manuel Triangle 5TR10, des raisons d'être sont rappelées en quelques mots au début du cours :

> *« Le calcul littéral est un calcul qui utilise des lettres. Le calcul littéral sert à :*
> *– établir une formule ;*
> *– trouver un nombre inconnu ;*
> *– prouver un résultat.*

		Phare						MathenPoche			HOriz	Triangle			HYpe	INdic	Math
Genre	Type	5e06	5e10	4e07	4e11	3e08	3e12	5e10	4e11	3e12	4e11	5e10	4e11	3e08	2HY09	2IN09	2Mx1
OM1																	
Produire	T_{Produire-exp/formule}										x		x				
Traduire	T_{Exp\to Prog}																
	T_{Prog\to Exp}	x									x	x	x				
	T_{Exp\to LgNat}																
	T_{LgNat\to Exp}																
	T_{Exp\to Longueur}																
	T_{Longueur \to Exp}											x					
	T_{Exp\to Perimetre}																
	T_{Perimetre \to Exp}		x		x												
	T_{Exp\to Aire}																
	T_{Aire\to Exp}	x	x														
	T_{Exp\to Volume}																
	T_{Volume\to Exp}																
	T_{Exp\to Angle}																
	T_{Angle\to Exp}																
	T_{Relation\to Formule}																
	T_{Formule\to Relation}																
	T_{Pteari\to Exp}																
	T_{Exp \to Pteari}																
	T_{Arbre\to Exp}																
	T_{Exp\to Arbre}																
Associer	T_{A}																
OM2																	
Tester	T_{Tester}	x	x	x	x												
Preuve	T_{Preuve-equiv}				x							x					x
Structure	T_{Structure}																
Choisir	T_{Choisir}															x	x
Associer	T_{Associer}																
OM3																	
Développer	T_{DDS-mon x som}							x	x		x		x		x	x	x
	T_{DDS-entier x som}	x	x	x	x	x		x	x		x	x	x				
	T_{DDD-som x som}			x	x	x	x		x		x		x	x			x
	T_{DIR-som x diff}					x	x			x				x	x	x	x
	T_{DIR-car}					x	x			x				x	x	x	x
Factoriser	T_{FA/mon}		x		x			x	x	x	x					x	
	T_{FA/som}					x	x			x				x	x	x	x
	T_{FA-Reduire}	x	x	x	x	x		x	x		x	x	x				
	T_{FA^{*}/mon}		x	x				x			x				x	x	x
	T_{FA^{*}/som}															x	x
	T_{FNA/mon}				x												x
	T_{FNA/som}																
	T_{FNA-IR-diff}					x	x							x	x	x	x
	T_{FNA-3t-IR}					x	x			x				x	x	x	x
Réécrire	T_{R-carre}																x
	T_{R-canonique}	x	x		x			x	x		x	x	x				
Calculer	T_{C-num}			x			x	x	x								
	T_{CDS-num}																
	T_{CIR-num}																

TABLEAU 3.21 – Présence des types de tâches des OM locales de référence dans les parties *Cours et méthodes* (pour les notations, voir les tableaux 3.1 page 85, 3.2 page 86 et 3.3 page 91)

La simplification permet de faciliter la résolution de certains problèmes :
- *calculer une égalité pour une certaine valeur de la lettre ;*
- *trouver une valeur de la lettre ;*
- *prouver une égalité. »*

Les techniques de OM3 davantage guidées par les ostensifs que les non-ostensifs

La transformation des expressions est centrale dans les parties *Cours et méthodes*. Nous cherchons ici à répondre à la question suivante : Qu'est-ce qui guide la transformation des expressions ? C'est-à-dire que nous nous intéressons aux techniques et aux discours technologico-théoriques qui sont développés et à la place occupée par les ostensifs pour organiser le calcul.

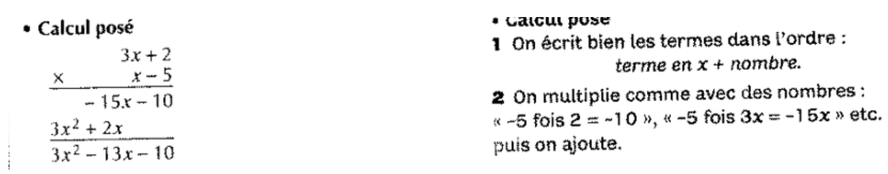
La technique mise en œuvre dans l'ensemble des manuels est celle de l'instanciation. Rappelons qu'elle consiste en plusieurs étapes :

1. Reconnaître la structure de l'expression afin de déterminer la(les) propriété(s) à utiliser,
2. Réécrire l'expression pour appliquer la(les) propriété(s) (mettre en évidence les carrés ou les facteurs communs),
3. Appliquer la(les) propriété(s) en attribuant des valeurs particulières aux variables générales de l'expression.

Toutes les étapes ne sont pas explicitées par les manuels. La reconnaissance de la structure figure uniquement dans six manuels :
- dans les manuels 4HO11, 3TR08, 2Mx10 et 2IN09,
- dans les manuels 3PH12 et 3MP12 seulement pour certaines structures, souvent en référence aux identités remarquables (par exemple, une différence de deux carrés).

Quant à la réécriture des expressions, cette étape est souvent omise alors qu'elle est indispensable dans la reconnaissance et l'application de la propriété adaptée à utiliser. D'ailleurs, le type de tâches *Réécrire un monôme sous la forme d'un carré* n'est jamais travaillé pour lui-même.

La manuel 4HO11 propose une technique alternative à l'instanciation pour le type de tâches $T_{DDD-som \times som}$ *Développer un produit de deux facteurs avec la double distributivité de la multiplication sur l'addition*. Elle consiste à poser le calcul comme une multiplication de nombres relatifs (cf. figure 3.11). Selon nous, cette technique est intéressante mais présente le risque d'être trop détachée de la propriété de distributivité qui la justifie.


• Calcul posé

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ \times \quad x-5 \\ \hline -15x-10 \\ 3x^2+2x \quad \\ \hline 3x^2-13x-10 \end{array}$$

• Calcul posé
1 On écrit bien les termes dans l'ordre :
terme en x + nombre.
2 On multiplie comme avec des nombres :
« -5 fois 2 = -10 », « -5 fois 3x = -15x » etc.
puis on ajoute.

FIGURE 3.11 – La technique de *Calcul posé* pour développer un produit dans la distributivité double dans le manuel 4HO11 (méthode 3 p. 90)

Pour chaque manuel et afin de repérer la part d'activation d'ostensifs et de non-ostensifs dans les techniques, nous avons relevé les ingrédients constitutifs du discours technologique à partir des critères suivants :

- Structure : Le manuel fait-il référence à la structure des expressions ? Discours du type « On reconnaît une différence de deux carrés ».
- Forme : Le manuel fait-il référence à la forme des expressions ? Discours du type « On reconnaît la forme $(a-b)^2$ ».
- Flèches : Des ostensifs graphiques comme des flèches, des traits soulignants, ou des encadrés sont-ils utilisés pour le développement (cf. la figure 3.12) ou la mise en évidence d'un facteur commun ?
- Couleur : Des ostensifs graphiques comme les couleurs ou la typographie grasse sont-ils utilisés pour organiser et mener à bien les calculs ?
- Discours : Un discours du type « On enlève les parenthèses » est-il utilisé ?
- Propriété : La propriété utilisée est-elle nommée ou énoncée ?
- Identification : Dans le cas où la propriété est énoncée, y a-t-il une identification entre les variables générales et les variables particulières de l'expression ? Par exemple, pour développer $x(x+3)$, on utilise la propriété $a(b+c) = ab+ac$ avec $a = x$, $b = x$ et $c = 3$.

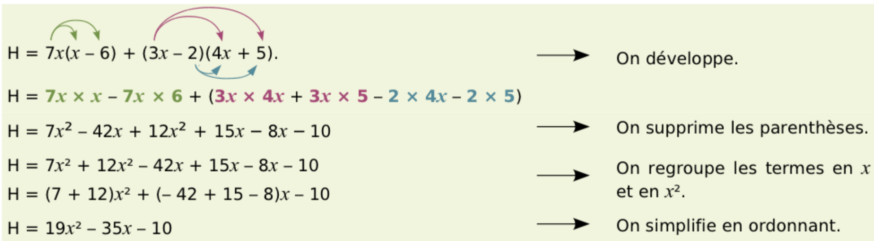
L'analyse est présentée dans le tableau 3.22. Nous mettons en évidence plusieurs types de discours technologiques :

1. Les manuels qui ne proposent pas de discours. Un manuel est concerné.
2. Les manuels qui proposent un discours soutenu par des ostensifs graphiques de type flèches pour indiquer l'utilisation de la distributivité ou de type « couleurs » pointant les opérations à effectuer et par la description des actions comme « *On supprime les parenthèses* », « *On met en facteur* » qui sont censés à eux seuls indiquer comment s'applique la propriété mise en jeu. Ces discours sont guidés par des ostensifs. Il n'y a pas de référence aux propriétés mobilisées. Nous illustrons ce discours dans la figure 3.12. Sept manuels sont concernés.

Manuel	Struc- -ture	Forme	Flèches	Couleurs	Discours	Ptés.	Identi- -fication
Type de discours 1							
5TR10	N	N	N	N	N	N	N
Type de discours 2							
2HY09	N	N	N	O	N	N	N
5PH06	N	N	O	O	O	N	N
4PH07	N	N	O	O	O	N	N
5PH10	N	N	O	O	O	N	N
4PH11	N	N	O	O	N	N	N
5MP10	N	N	O	O	O	N	N
4MP11	N	N	O	O	O	N	N
Type de discours 3							
4HO11	O	O	O	O	O	O	N
4TR11	N	N	N	N	O	O	N
3TR08	O	O	N	N	O	O	O
2Mx10	O	O	N	O	O	O/N	N
2IN09	O	O	N	N	O	N	N
Type de discours 4							
3PH12	O/N	O/N	O	O	O	O/N	O/N
3PH08	N	O	O	O	O	O/N	O/N
3MP12	O/N	N	N	O	O/N	O	O
Légende : O=Oui, N=Non, O/N= cela dépend des expressions. Dans les manuels de 3^{e} et de 2de, c'est souvent *Oui* pour les transformations qui relèvent de la distributivité et *Non* pour celles qui relèvent des identités remarquables.							

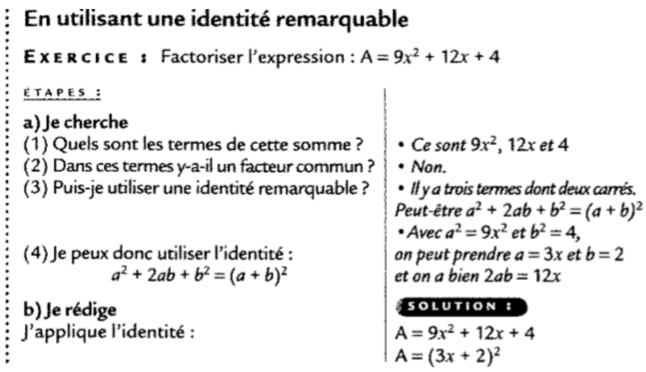
Tableau 3.22 – Les ingrédients constitutifs du discours technologique associés aux genres de tâches *Développer* et *Factoriser* dans les manuels

3. Les manuels qui appuient leur discours sur au moins un élément non-ostensif (structure ou propriété). Six manuels sont concernés et la moitié concerne des manuels de 2^{de}. Notons que les flèches et les couleurs sont très peu utilisées dans ces manuels. Ces manuels convoquent plus explicitement l'identification de la structure (type de tâches de OM2 $T_{Structure}$) des expressions pour reconnaître la propriété à utiliser, les réécritures de termes qui en découlent (type de tâches de OM3 T_{R-carr}). Nous illustrons ce discours dans la figure 3.13. Soulignons, dans cet exemple, la place des formes interrogatives et la distinction entre *Je cherche* et *Je rédige*.
4. Les manuels qui ont un discours intermédiaire entre les types 2 et 3, c'est-à-dire ceux dans lesquels des traces des structures et des propriétés apparaissent au moins une fois, souvent pour appliquer les identités remarquables. Il s'agit de trois manuels de 3^{e}. C'est donc le discours ostensif qui domine. Nous illustrons ce discours dans la figure 3.14.



$H = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5)$.	⟶ On développe.
$H = 7x \times x - 7x \times 6 + (3x \times 4x + 3x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5)$	
$H = 7x^2 - 42x + 12x^2 + 15x - 8x - 10$	⟶ On supprime les parenthèses.
$H = 7x^2 + 12x^2 - 42x + 15x - 8x - 10$ $H = (7 + 12)x^2 + (-42 + 15 - 8)x - 10$	⟶ On regroupe les termes en x et en x^2.
$H = 19x^2 - 35x - 10$	⟶ On simplifie en ordonnant.

FIGURE 3.12 – Utilisation de flèches pour outiller le développement dans le manuel 4MP11 (méthode 3 p. 81)



En utilisant une identité remarquable

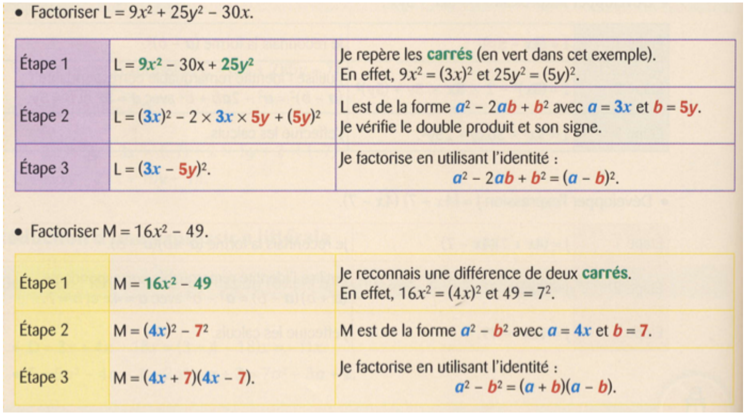
EXERCICE : Factoriser l'expression : $A = 9x^2 + 12x + 4$

ÉTAPES :

a) Je cherche	
(1) Quels sont les termes de cette somme ?	• *Ce sont* $9x^2$, $12x$ *et* 4
(2) Dans ces termes y-a-il un facteur commun ?	• *Non.*
(3) Puis-je utiliser une identité remarquable ?	• *Il y a trois termes dont deux carrés. Peut-être* $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ • *Avec* $a^2 = 9x^2$ *et* $b^2 = 4$, *on peut prendre* $a = 3x$ *et* $b = 2$ *et on a bien* $2ab = 12x$
(4) Je peux donc utiliser l'identité : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	
b) Je rédige J'applique l'identité :	**SOLUTION :** $A = 9x^2 + 12x + 4$ $A = (3x + 2)^2$

FIGURE 3.13 – Technique de factorisation par les identités remarquables dans le manuel 3TR08 (méthode 3 p. 118)

Au collège, le discours technologique qui accompagne la technique d'instanciation a davantage recours aux ostensifs (couleurs, flèches) qu'aux non-ostensifs. Dix des



• Factoriser $L = 9x^2 + 25y^2 - 30x$.

Étape 1	$L = 9x^2 - 30x + 25y^2$	Je repère les carrés (en vert dans cet exemple). En effet, $9x^2 = (3x)^2$ et $25y^2 = (5y)^2$.
Étape 2	$L = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5y + (5y)^2$	L est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5y$. Je vérifie le double produit et son signe.
Étape 3	$L = (3x - 5y)^2$.	Je factorise en utilisant l'identité : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

• Factoriser $M = 16x^2 - 49$.

Étape 1	$M = 16x^2 - 49$	Je reconnais une différence de deux carrés. En effet, $16x^2 = (4x)^2$ et $49 = 7^2$.
Étape 2	$M = (4x)^2 - 7^2$	M est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 7$.
Étape 3	$M = (4x + 7)(4x - 7)$.	Je factorise en utilisant l'identité : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

FIGURE 3.14 – Technique de factorisation par les identités remarquables dans le manuel 3PH08 (cours p. 38)

treize manuels du collège analysés sont concernés, ce qui représente une caractéristique dominante de l'OM à enseigner au collège. Ce recours aux ostensifs est marqué par un jeu de couleurs, l'apparition de flèches pour appliquer la règle de distributivité ou des verbes d'action qui conduisent à la reconnaissance de signes plutôt que de structures comme dans « *On reconnaît la forme* $(a-b)^2$ », « *On observe trois termes précédés du signe* + » ou encore « *On supprime les parenthèses* ». Il est probablement accentué en classe par des ostensifs oraux et gestuels de l'enseignant. L'aspect syntaxique des expressions est plus mis en avant que l'aspect sémantique des expressions. Ce n'est pas l'appui sur les ostensifs qui nous interpelle mais le faible lien qui est fait avec les non-ostensifs. La convocation des types de tâches impliqués dans l'instanciation comme la reconnaissance de la structure et de la propriété à appliquer est souvent laissée implicite et à la charge des élèves. Les règles de calculs utilisées sont rarement explicitées, comme si le calcul algébrique fonctionnait sans propriétés. L'activation des non-ostensifs n'est donc possible que par les seuls discours du type « *On met en facteur* », « *On distribue* », dont on peut supposer qu'il favorise la construction d'une technologie permettant un contrôle de l'action pour des expressions simples mais qu'elle peut s'avérer insuffisante, notamment au lycée, pour traiter des expressions de structure complexe. En effet, c'est une dialectique entre ostensifs et non-ostensifs qui peut encourager le développement d'une intelligence du calcul, la construction d'automatismes guidant les manipulations algébriques à effectuer en fonction du but visé.

Le lien avec les non-ostensifs reste probablement implicite pour un certain nombre d'élèves. Le recours aux ostensifs peut fonctionner au collège puisque les formes des expressions étudiées sont peu diversifiées mais il peut contribuer à l'émergence de difficultés à l'arrivée en seconde. L'algèbre n'y est plus étudiée pour elle-même mais comme un outil au service des fonctions. D'ailleurs, les manuels de seconde mettent davantage en jeu les non-ostensifs dans les parties *Cours et méthodes* puisque deux d'entre eux proposent un discours de type 3. Notons, à ce propos, que ces deux manuels (2IN09 et 2Mx10) sont de la catégorie qui inclut les expressions algébriques au niveau du secteur alors que le troisième 2HY09, qui propose un discours de type 2, les inclut seulement au niveau d'un thème. La structuration des manuels de seconde mise en évidence dans l'analyse écologique a donc une influence sur le type de discours proposé.

A propos de l'OM ponctuelle $T_{Prouver-equiv}$ **Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre**

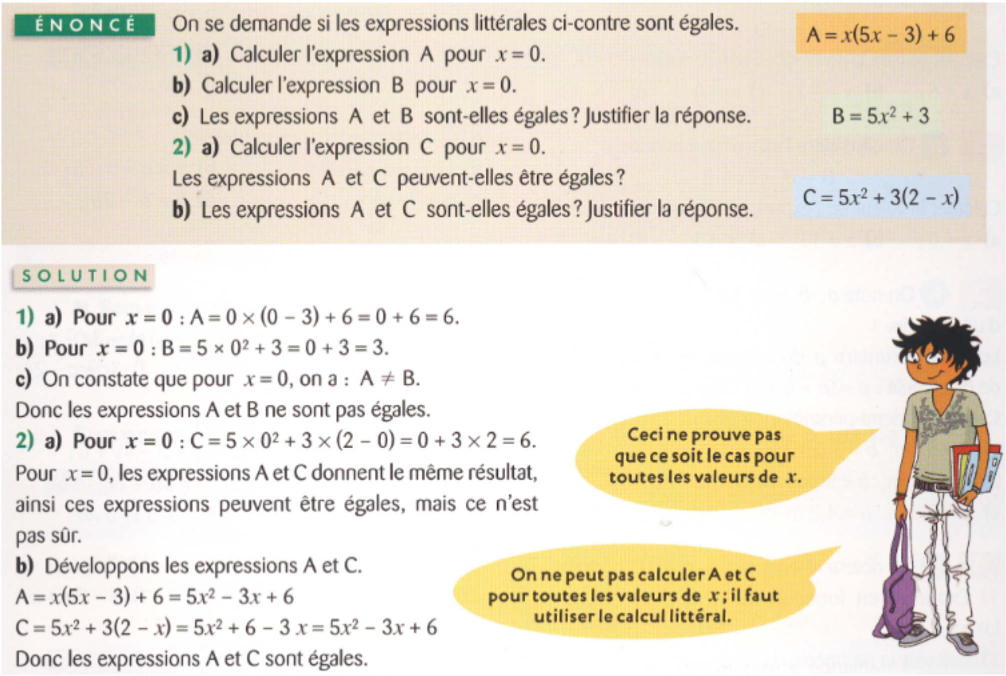
Ce type de tâches, constitutif de OM2, est présent dans trois manuels (cf. tableau 3.21). Les deux techniques annoncées dans l'OM de référence sont sollicitées. La première, adoptée par les manuels 4PH11 et 2Mx10 (cf. figure 3.15), est basée sur la conjecture et la preuve. La conjecture consiste à tester l'égalité avec des valeurs numériques. C'est donc la dialectique numérique-algébrique qui est en jeu. La preuve dépend de l'égalité ou non des expressions. Si elles ne sont pas égales, elle consiste à donner un contre-exemple numérique. Au contraire, si elles sont égales, elle consiste en une preuve algébrique basée sur la mobilisation et l'usage des règles de calcul. La seconde, adoptée par le manuel 5TR10 (cf. figure 3.16) est basée sur la comparaison des expressions trouvées après développement et réduction. Ce manuel ajoute l'étape de recherche d'un contre-exemple dans le cas d'expressions non équivalentes.

Ces techniques sont justifiées par des apports technologico-théoriques qui font appel à la quantification et à des notions de logique même en classe de 5e. Par exemple, on peut lire :

- Manuel 5TR10 page 126 : « *"Deux expressions littérales sont égale" signifie qu'elles donnent le même résultat, quelle que soit la valeur attribuée à la lettre.* »
- Manuel 4HO11 [9] page 88 : « *Écrire que $3x \times 4 = 12x$ signifie que, quand on donne une valeur à x, n'importe laquelle, et que l'on calcule les expressions $3x{\times}4$ et $12x$, elles donnent toujours le même résultat.* »
- Manuel 2Mx10 page 85 : « *Pour démontrer que deux expressions ne sont pas*

9. Le type de tâches *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* n'est pas explicitement présent dans le manuel 4HO11, néanmoins, des éléments technologico-théoriques y sont présents.

égales pour tout x, il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas égalité, c'est un contre-exemple. Pour démontrer que des expressions sont égales pour tout x, des exemples ne suffisent pas, il faut le démontrer par le calcul algébrique. »



ÉNONCÉ

On se demande si les expressions littérales ci-contre sont égales.

$A = x(5x - 3) + 6$

$B = 5x^2 + 3$

$C = 5x^2 + 3(2 - x)$

1) a) Calculer l'expression A pour $x = 0$.

b) Calculer l'expression B pour $x = 0$.

c) Les expressions A et B sont-elles égales ? Justifier la réponse.

2) a) Calculer l'expression C pour $x = 0$.

Les expressions A et C peuvent-elles être égales ?

b) Les expressions A et C sont-elles égales ? Justifier la réponse.

SOLUTION

1) a) Pour $x = 0$: $A = 0 \times (0 - 3) + 6 = 0 + 6 = 6$.

b) Pour $x = 0$: $B = 5 \times 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$.

c) On constate que pour $x = 0$, on a : $A \neq B$.

Donc les expressions A et B ne sont pas égales.

2) a) Pour $x = 0$: $C = 5 \times 0^2 + 3 \times (2 - 0) = 0 + 3 \times 2 = 6$.

Pour $x = 0$, les expressions A et C donnent le même résultat, ainsi ces expressions peuvent être égales, mais ce n'est pas sûr.

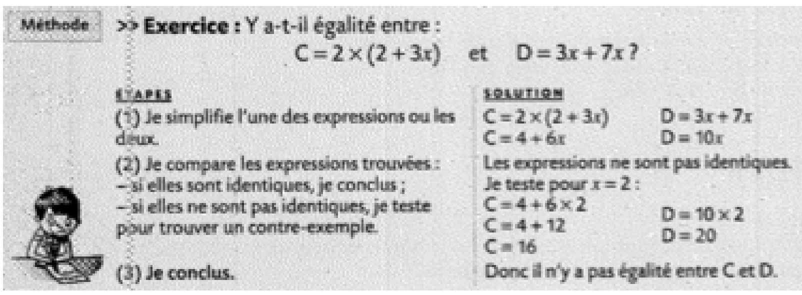
b) Développons les expressions A et C.

$A = x(5x - 3) + 6 = 5x^2 - 3x + 6$

$C = 5x^2 + 3(2 - x) = 5x^2 + 6 - 3x = 5x^2 - 3x + 6$

Donc les expressions A et C sont égales.

FIGURE 3.15 – Prouver que deux expressions sont égales dans le manuel 4PH11 (méthode 1 p. 68)



Méthode

>> **Exercice :** Y a-t-il égalité entre :

$C = 2 \times (2 + 3x)$ et $D = 3x + 7x$?

ÉTAPES

(1) Je simplifie l'une des expressions ou les deux.

(2) Je compare les expressions trouvées :
– si elles sont identiques, je conclus ;
– si elles ne sont pas identiques, je teste pour trouver un contre-exemple.

(3) Je conclus.

SOLUTION

$C = 2 \times (2 + 3x)$ $D = 3x + 7x$
$C = 4 + 6x$ $D = 10x$

Les expressions ne sont pas identiques.

Je teste pour $x = 2$:

$C = 4 + 6 \times 2$ $D = 10 \times 2$
$C = 4 + 12$ $D = 20$
$C = 16$

Donc il n'y a pas égalité entre C et D.

FIGURE 3.16 – Prouver que deux expressions sont égales dans le manuel 5TR10 (méthode 2 p. 128)

Ainsi, dans les manuels où ce type de tâches apparaît, il fait l'objet de quelques « méthodes » (souvent deux ou trois) proposées par les manuels, ce qui lui donne une importance par rapport aux autres. Les techniques et le niveau technologico-théorique développés accordent une place à la dialectique algébrique-numérique et à la preuve d'un énoncé vrai ou faux, ce qui n'est pas le cas pour les autres OM ponctuelles développées. Néanmoins, ce type de tâches, lorsqu'il apparaît, est déconnecté des autres et ne répond à aucune raison d'être. Il n'est pas mis en perspective par rapport au contrôle des calculs.

La validation des calculs, un questionnement quasiment inexistant

La transformation des expressions algébriques est centrale dans les parties *Cours et méthodes* des manuels. Des techniques sont établies mais la question de la validation et du contrôle des résultats est quasiment inexistante dans les manuels du collège et de seconde. Les genres de tâches T_{tester} *Tester l'égalité de deux expressions* et $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre*, lorsqu'ils vivent dans les manuels, sont souvent présentés isolément du contrôle des calculs alors qu'ils offrent des techniques pour l'exercer. C'est par exemple le cas des manuels Phare de 5^{e} et de 4^{e} (cf. tableaux 3.21 et 3.23) qui, en suivant les injonctions du programme [10], laissent une place importante à T_{tester} mais à travers des tâches isolées et probablement pour faire le lien avec la recherche de la solution d'une équation. Seuls trois manuels évoquent la validation des résultats :

- Les manuels 4PH07 et 4PH11 (cf. figure 3.17) proposent de contrôler les calculs. Notons que, dans le manuel 4PH07, de 2007, aucun élément technologico-théorique ne vient justifier le contrôle des calculs, ce qui n'est plus le cas dans la version de 2011.
- Le manuel 2IN09 propose deux types de contrôle (cf. figure 3.18). Le premier met en jeu le caractère réciproque du développement et de la factorisation : « *On peut toujours vérifier une factorisation en développant.* ». Le second met en jeu la dialectique algébrique-numérique ou la dialectique algébrique-graphique. Notons cependant, que le manuel ne mentionne pas le choix des valeurs numériques en lien avec l'économie des calculs.
- Ajoutons que, dans les éditions de 2007 et 2011 du manuel de la collection Transmath de 4^{e}, non analysé dans cette étude, le contrôle des calculs fait l'objet d'une méthode s'appuyant sur la dialectique algébrique-numérique (cf. figure 3.19). Le contrôle exercé met en jeu deux types de vérification : celle à partir de la comparaison des termes de plus haut degré et des termes constants et celle à partir du test d'une égalité puis la preuve à partir du type de tâches

10. Rappelons que le type de tâches *Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques* est présent dans les programmes de la classe de cinquième, voir § 3.3.5, 107.

Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre.

Énoncé : 1) Développer l'expression $E = -4(5a - 7)$.

2) a Développer puis réduire l'expression $F = (6x + 3)(x - 5)$.

b Tester le résultat pour $x = 1$.

Solution : 1) $E = -4\,(5a - 7)$

$E = -4 \times 5a + (-4) \times (-7)$

$E = -20a + 28$.

2) a $F = (6x + 3)\,(x - 5)$.

$F = 6x \times x + 6x \times (-5) + 3 \times x + 3 \times (-5)$

$F = 6x^2 - 30x + 3x - 15$

$F = 6x^2 - 27x - 15$.

b Test pour $x = 1$:

$F = (6x + 3)(x - 5) = (6 \times 1 + 3)(1 - 5) = (6 + 3)(-4) = 9 \times (-4) = -36$

$F = 6x^2 - 27x - 15 = 6 \times 1^2 - 27 \times 1 - 15 = 6 - 27 - 15 = -36$

Le résultat obtenu au a après avoir développé et réduit F semble correct.

FIGURE 3.17 – Développement associé à un contrôle des calculs dans le manuel 4PH07 (méthode 2 p. 75)

Des outils de vérification

Pour vérifier une factorisation que l'on vient d'effectuer, on dispose de deux approches.

Vérification absolue

Développer ce que l'on vient de trouver : par exemple, si l'on a trouvé la factorisation $x^2 - (2x + 1)^2 = (-x - 1)(3x + 1)$, on développe chacun des membres pour vérifier.

Vérifications pratiques, mais non absolues

Vérifier le résultat trouvé pour quelques valeurs simples de x : par exemple, on peut vérifier la factorisation

$$(x - 5)(x + 2) + (x + 2)(2x - 1) = 3(x + 2)(x - 2)$$

en calculant que les deux membres donnent bien -12 pour $x = 0$, et 0 pour $x = 2$.

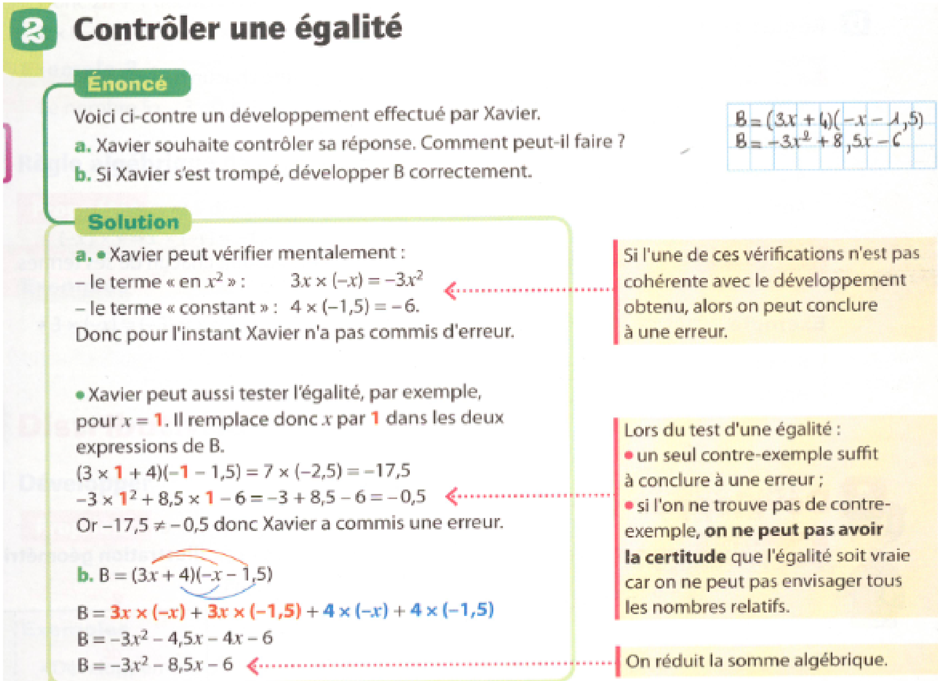
Vérifier à l'aide de la calculatrice : dans l'éditeur de fonctions, entrer l'expression donnée dans Y1, puis l'expression factorisée dans Y2. Demander alors le tracé des deux courbes représentatives ou les tableaux de valeurs et comparer.

FIGURE 3.18 – Le contrôle des calculs dans le manuel Indice 2$^{\text{de}}$ 2009 (TP 2 p. 43)

Les rôles joués par OM2 et par OM1, qui amènent à concevoir une expression comme le résultat d'un programme de calcul, vis-à-vis de OM3 pour contrôler les calculs, sont très peu présents dans les manuels. Même si des types de tâches de OM2 sont travaillés, ils ne sont pas convoqués pour contrôler les résultats. Pourtant, le contrôle est un moyen de développer, au niveau technologico-théorique, l'intelligence des calculs, il peut être l'occasion de revenir sur des erreurs fréquentes de calcul. Il permet de travailler sur la dénotation des expressions.

A propos de la reconnaissance de la structure des expressions

Le genre de tâches $T_{structure}$ *n'apparaît pas dans les parties* Cours et Méthodes. Nous complétons cette remarque par une analyse des parties *Activités*. Celles qui



2 Contrôler une égalité

Énoncé

Voici ci-contre un développement effectué par Xavier.

a. Xavier souhaite contrôler sa réponse. Comment peut-il faire ?

b. Si Xavier s'est trompé, développer B correctement.

$B = (3x + 4)(-x - 1,5)$
$B = -3x^2 + 8,5x - 6$

Solution

a. • Xavier peut vérifier mentalement :

– le terme « en x^2 » : $3x \times (-x) = -3x^2$

– le terme « constant » : $4 \times (-1,5) = -6$.

Donc pour l'instant Xavier n'a pas commis d'erreur.

Si l'une de ces vérifications n'est pas cohérente avec le développement obtenu, alors on peut conclure à une erreur.

• Xavier peut aussi tester l'égalité, par exemple, pour $x = 1$. Il remplace donc x par 1 dans les deux expressions de B.

$(3 \times 1 + 4)(-1 - 1,5) = 7 \times (-2,5) = -17,5$

$-3 \times 1^2 + 8,5 \times 1 - 6 = -3 + 8,5 - 6 = -0,5$

Or $-17,5 \neq -0,5$ donc Xavier a commis une erreur.

Lors du test d'une égalité :
• un seul contre-exemple suffit à conclure à une erreur ;
• si l'on ne trouve pas de contre-exemple, **on ne peut pas avoir la certitude** que l'égalité soit vraie car on ne peut pas envisager tous les nombres relatifs.

b. $B = (3x + 4)(-x - 1,5)$

$B = 3x \times (-x) + 3x \times (-1,5) + 4 \times (-x) + 4 \times (-1,5)$

$B = -3x^2 - 4,5x - 4x - 6$

$B = -3x^2 - 8,5x - 6$

On réduit la somme algébrique.

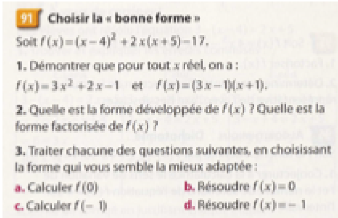
FIGURE 3.19 – Le contrôle des calculs dans le manuel Transmath 4ᵉ de 2011 (méthode 2 p. 80)

mettent en jeu la reconnaissance de la structure des expressions concernent les trois manuels 4HO11, 2Mx10 et 2IN09. Les sommes et les produits sont identifiés à partir de la représentation en arbre des expressions algébriques. Ainsi, il ressort que seuls quelques manuels rendent explicite l'aspect structural des expressions et amènent à la dialectique prodécural-structural. Dans les autres manuels, cet aspect reste implicite.

En conclusion, les types de tâches intermédiaires et les discours technologiques liés à l'interprétation de la structure des expressions, à la reconnaissance des propriétés à utiliser, à la réécriture sont peu convoqués dans les parties *Cours et méthodes* des manuels analysés. Cela donne peu de conditions pour agréger les OM ponctuelles.

A propos du choix de l'expression la plus adaptée

Le type de tâches $T_{Choisir}$ apparaît au niveau T-convoqué dans les manuels de seconde de la première catégorie, il est absent dans les manuels analysés du collège (cf. tableau 3.21 page 132). Il est convoqué dans le cadre des fonctions, ce qui correspond aux programmes (cf. figure 3.20). Il donne une raison d'être au calcul algébrique. Il permet de travailler l'intelligence des calculs en fonction du but visé. La dénotation et le sens des expressions y sont centraux.



91 Choisir la « bonne forme »

Soit $f(x) = (x-4)^2 + 2x(x+5) - 17$.

1. Démontrer que pour tout x réel, on a :
$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $f(x) = (3x-1)(x+1)$.

2. Quelle est la forme développée de $f(x)$? Quelle est la forme factorisée de $f(x)$?

3. Traiter chacune des questions suivantes, en choisissant la forme qui vous semble la mieux adaptée :

a. Calculer $f(0)$ **b.** Résoudre $f(x) = 0$
c. Calculer $f(-1)$ **d.** Résoudre $f(x) = -1$

FIGURE 3.20 – Convocation de $T_{Choisir}$ dans le manuel Math'x 2^{de} de 2010 (exercice 91 p. 97)

d. Analyse des parties *Exercices*

Pour analyser les parties *Exercices*, nous avons relevé, dans chaque manuel, le nombre d'apparition des types de tâches constitutifs de chaque OM locale de référence (cf. tableaux 3.1, 3.2 et 3.3) afin de repérer ceux qui ne sont jamais ou peu travaillés. Pour faciliter la lecture, les résultats obtenus sont répartis dans quatre tableaux : les tableaux 3.23, 3.24 et 3.26 pour le collège et le tableau 3.25 pour la seconde. Son interprétation nécessite quelques précisions sur la façon dont l'analyse a été conduite :

1. Seuls les exercices convoquant les types de tâches au niveau T-convoqué sont comptabilisés [11],
2. Un exercice peut convoquer plusieurs types de tâches au niveau T-convoqué,
3. Une cellule vide signifie que le type de tâches considéré n'est pas convoqué,
4. Les types de tâches suivants viennent compléter ceux de OM2 :
   - $T_{Produire-egale}$: Produire une expression égale à une autre (par exemple, Produire des expressions égales à $6n + 12$),
   - $T_{Completer-exp}$: Compléter des expressions pour qu'elles soient égales pour tout x, (par exemple, compléter $-4x + \cdots = 10x$ pour que l'égalité soit vérifiée pour tout x),
   - $T_{Calculer-relation}$: Calculer la valeur d'une expression algébrique connaissant une relation numérique liant les variables, (par exemple, sachant que $a+b = 15$ et $a^2 - b^2 = 45$, calculer $a - b$),

11. De ce point de vue, notre analyse présente des limites. La convocation des types de tâches de OM3 au niveau R-convoqué dans la résolution des équations-produits ou dans la résolution de problèmes mériterait d'être analysée car elle permet de motiver l'usage de la factorisation et l'introduction des identités remarquables. Nous illustrons un exemple de ce type d'analyse sur un exercice proposé au brevet des collèges en 2007 à la page 159.

5. En seconde, les problèmes fonctionnels ne sont pas analysés. Cela aurait nécessité d'élargir notre référentiel de types de tâches aux fonctions.

Enfin, nous consacrons un paragraphe entier à l'étude de la complexité des expressions mises en jeu dans les genres de tâches *Développer* et *Factoriser*.

A propos de la présence de OM1

La production d'expressions $T_{Produire-exp/formule}$ n'est pas également présente d'un manuel à l'autre. Les manuels 5PH06, 5PH10, 4PH11, 3PH08 et 4MP11 convoquent ce type de tâches dans moins de 10% des exercices. Les manuels 4PH07, 3PH12, 5MP10, 5TR10, 4TR11 et 3TR08 le convoquent dans plus de 10% et moins de 20% des exercices. Les manuels 3PH12 et 4HO11 le convoquent dans plus de 20% des types de tâches. Le manuel 3PH12 se distingue des autres manuels de cette collection, ce qui peut être mis en relation avec l'habitat qui est laissé à l'algèbre. Rappelons qu'il propose deux chapitres relatifs à l'algèbre ce qui est favorable à davantage d'exercices consacrés à la résolution de problèmes dans les chapitres relatifs à l'algèbre.

Les types de tâches du genre *Traduire* et *Associer* sont convoqués. La traduction l'est principalement dans le sens « registre de représentation sémiotique » vers celui des écritures algébriques. L'autre sens, qui met en jeu l'aspect structural des expressions, est très peu présent.

Les programmes de calcul sont présents mais nous n'avons rencontré le type de tâches *Prouver que deux programmes de calcul sont équivalents* que dans un manuel. Les programmes de calcul interviennent mais ponctuellement, sans être l'occasion de revenir sur les liens entre les trois OM locales (cf. §OM-reference) de l'OM régionale sur les expressions algébriques.

A propos de la présence de OM2

OM2 est présente mais le nombre d'exercices convoquant des types de tâches de OM2 est faible par rapport à OM3. La dénotation et le sens des expressions sont donc peu travaillés ou laissés implicites aux élèves. La quantification est souvent omise, ce qui dénature la majorité des types de tâches de OM2. Les consignes sous-entendent que les expressions sont égales *pour tout* x, qu'il est demandé de compléter les égalités pour qu'elles soient vraies *pour tout* x.

Le type de tâches T_{Tester} est très présent dans les manuels Phare. Mais il vit dans des tâches isolées avec des consignes standardisées du type « *Calculer la valeur de* $A = \ldots$ *pour* $x = \ldots$ ». Il intervient davantage, comme le préconise le programme

		Phare												Horizon	
Genre	Type de tâches	5e 06		5e 10		4e 07		4e 11		3e 08		3e 12		4e 11	
	Total exercices	94		101		120		82		109		192		168	
	OM1														
Produire	T_{Produire-exp/formule}	8	8,5%	6	5,9%	15	12,5%	6	7,3%	8	7,3%	33	17,2%	40	23,8%
Traduire	T_{Exp> Prog}			1	1,0%									3	1,8%
	T_{Prog> Exp}	3	3,2%	3	3,0%	4	3,3%	2	2,4%			11	5,7%	8	4,8%
	T_{Exp> LgNat}			1	1,0%										
	T_{LgNat> Exp}	1	1,1%	5	5,0%	1	0,8%			3	2,8%	3	1,6%	1	0,6%
	T_{Exp> Longueur}														
	T_{Longueur > Exp}					2	1,7%	1	1,2%	4	3,7%	1	0,5%	5	3,0%
	T_{Exp> Perimetre}			1	1,0%									1	0,6%
	T_{Perimetre > Exp}	10	10,6%	4	4,0%	3	2,5%	5	6,1%	1	0,9%	3	1,6%	4	2,4%
	T_{Exp> Aire}			1	1,0%	1	0,8%					1		1	0,6%
	T_{Aire> Exp}	2	2,1%	2	2,0%	4	3,3%	3	3,7%	7	6,4%	10	5,2%	7	4,2%
	T_{Exp> Volume}														
	T_{Volume> Exp}							1	1,2%					1	0,6%
	T_{Exp> Angle}														
	T_{Angle> Exp}													1	0,6%
	T_{Relation> Formule}	10	10,6%	2	2,0%	1	0,8%	3	3,7%	2	1,8%	10	5,2%	1	0,6%
	T_{Formule> Relation}														
	T_{Pteari> Exp}	1	1,1%	1	1,0%	9	7,5%	1	1,2%			2	1,0%	2	1,2%
	T_{Exp > Pteari}	1	1,1%			1	0,8%			1	0,9%			5	3,0%
	T_{Arbre> Exp}													1	0,6%
	T_{Exp> Arbre}													2	1,2%
Associer	T_{A-Exp-Aire}	1	1,1%			1	0,8%	1	1,2%			1	0,5%	1	0,6%
	T_{A-Exp-Perimetre}	2	2,1%	2	2,0%	1	0,8%							1	0,6%
	T_{A-Exp-Longueur}													1	0,6%
	T_{A-Exp-Volume}														
	T_{A-Exp-Prog}	1	1,1%	1	1,0%	1	0,8%					1	0,5%	1	0,6%
	T_{A-Exp-LgNat}	1	1,1%	1	1,0%										
	T_{A-Relation-Formule}														
	OM2														
Tester	T_{Tester}	6	6,4%	21	20,8%	16	13,3%	17	20,7%			8	4,2%	1	0,6%
Preuve	T_{Preuve-equiv}	2	2,1%	7	6,9%	1	0,8%	7	8,5%	7	6,4%	6	3,1%	4	2,4%
Structure	T_{Structure-somme}					3	2,5%							7	4,2%
	T_{Structure-produit}					3	2,5%							4	2,4%
	T_{Structure-carre}														
Choisir	T_{Choisir}											13	6,8%		
Associer	T_{Associer}	7	7,4%	7	6,9%			8	9,8%	8	7,3%	10	5,2%	7	4,2%
Produire e	T_{Produire-egale}														
Compléter	T_{Completer-exp}									3	2,8%	3	1,6%	4	2,4%
Calculer	T_{Calculer-relation}														
	OM3														
Développe	T_{DDS-mon x som}	1	1,1%	12	11,9%	6	5,0%	3	3,7%	7	6,4%	7	3,6%	14	8,3%
	T_{DDS-entier x som}	8	8,5%	9	8,9%	18	15,0%	13	15,9%	6	5,5%	12	6,3%	19	11,3%
	T_{DDD-som x som}					16	13,3%	8	9,8%	16	14,7%	18	9,4%	20	11,9%
	T_{DIR-som x diff}									7	6,4%	23	12,0%	1	0,6%
	T_{DIR-car}									19	17,4%	40	20,8%	2	1,2%
Factoriser	T_{FA/mon}	3	3,2%	6	5,9%	4	3,3%	5	6,1%	2	1,8%	2	1,0%	2	1,2%
	T_{FA/som}									13	11,9%	27	14,1%		
	T_{FA-mon + mon}			12	11,9%	19	15,8%	7	8,5%	3	2,8%	4	2,1%	10	6,0%
	T_{FA*/mon}	2	2,1%	3	3,0%	5	4,2%	2	2,4%	3	2,8%	1	0,5%	9	5,4%
	T_{FA*/som}									9	8,3%				
	T_{FNA/mon}					2	1,7%			3	2,8%	1	0,5%	5	3,0%
	T_{FNA/som}									2	1,8%				
	T_{FIR-diff}									13	11,9%	24	12,5%		
	T_{FIR-som}									13	11,9%	15	7,8%		
Réécrire	T_{R-carre}									1	0,9%				
	T_{R-canonique}	2	2,1%	6	5,9%							2	1,0%	5	3,0%

Tableau 3.23 – Nombre et pourcentage d'exercices convoquant chaque type de tâches dans les manuels des collections *Phare* et *Horizon*

		MathenPoche						Triangle					
Genre	Type de tâches	5e10		4e 11		3e 12		5e 10		4e 11		3e 08	
	Total exercices	67		59		68		112		139		134	
	OM1												
Produire	T_{Produire-exp/formule}	9	13,4%	5	8,5%	22	32,4%	14	12,5%	18	12,9%	21	15,7%
Traduire	T_{Exp> Prog}	2	3,0%	1	1,7%			1	0,9%	1	0,7%		
	T_{Prog> Exp}	2	3,0%	2	3,4%	6	8,8%	8	7,1%	7	5,0%	4	3,0%
	T_{Exp> LgNat}	1	1,5%			1	1,5%						
	T_{LgNat> Exp}	2	3,0%	1	1,7%	1	1,5%					1	0,7%
	T_{Exp> Longueur}												
	T_{Longueur > Exp}	1	1,5%			2	2,9%	5	4,5%	4	2,9%	3	2,2%
	T_{Exp> Perimetre}												
	T_{Perimetre > Exp}	4	6,0%	2	3,4%	1	1,5%	5	4,5%	4	2,9%	3	2,2%
	T_{Exp> Aire}												
	T_{Aire> Exp}	3	4,5%	4	6,8%	7	10,3%	1	0,9%	8	5,8%	10	7,5%
	T_{Exp> Volume}												
	T_{Volume> Exp}			1	1,7%					2	1,4%	3	2,2%
	T_{Exp> Angle}												
	T_{Angle> Exp}									2	1,4%		
	T_{Relation> Formule}	7	10,4%	6	10,2%	4	5,9%	15	13,4%	9	6,5%	3	2,2%
	T_{Formule> Relation}									2	1,4%		
	T_{Pteari> Exp}	3	4,5%	1	1,7%	1	1,5%			1	0,7%	1	0,7%
	T_{Exp > Pteari}											1	0,7%
	T_{Arbre> Exp}	1	1,5%										
	T_{Exp> Arbre}	1	1,5%										
Associer	T_{A-Exp-Aire}	1	1,5%	1	1,7%							1	0,7%
	T_{A-Exp-Perimetre}	1	1,5%	1	1,7%								
	T_{A-Exp-Longueur}	1	1,5%										
	T_{A-Exp-Volume}			1	1,7%								
	T_{A-Exp-Prog}			1	1,7%			2	1,8%				
	T_{A-Exp-LgNat}			1	1,7%								
	T_{A-Relation-Formule}							1	0,9%	2	1,4%		
	OM2												
Tester	T_{Tester}	8	11,9%			1	1,5%	6	5,4%				
Preuve	T_{Preuve-equiv}	4	6,0%	2	3,4%	1	1,5%	13	11,6%	7	5,0%	10	7,5%
Structure	T_{Structure-somme}					1	1,5%			1	0,7%	1	0,7%
	T_{Structure-produit}			2	3,4%					1	0,7%	1	0,7%
	T_{Structure-carre}											1	0,7%
Choisir	T_{Choisir}					1	1,5%						
Associer	T_{Associer}	3	4,5%	6	10,2%	8	11,8%	5	4,5%	15	10,8%	1	0,7%
Produire e	T_{Produire-egale}							1	0,9%				
Compléter	T_{Completer-exp}					1	1,5%			6	4,3%	2	1,5%
Calculer	T_{Calculer-relation}	1	1,5%					3	2,7%	4	2,9%	6	4,5%
	OM3												
Développe	T_{DDS-mon x som}	4	6,0%	7	11,9%	3	4,4%			15	10,8%		
	T_{DDS-entier x som}	4	6,0%	11	18,6%	4	5,9%	10	8,9%	25	18,0%	4	3,0%
	T_{DDD-som x som}			10	16,9%	9	13,2%			15	10,8%	14	10,4%
	T_{DIR-som x diff}			1	1,7%	4	5,9%					14	10,4%
	T_{DIR-car}			4	6,8%	13	19,1%					26	19,4%
Factoriser	T_{FA/mon}	2	3,0%			1	1,5%	6	5,4%			1	0,7%
	T_{FA/som}	1	1,5%	1	1,7%	7	10,3%					7	5,2%
	T_{FA-mon + mon}	3	4,5%	4	6,8%	1	1,5%	4	3,6%	18	12,9%	2	1,5%
	T_{FA*/mon}	3	4,5%	4	6,8%	1	1,5%					12	9,0%
	T_{FA*/som}					6	8,8%					9	6,7%
	T_{FNA/mon}	1	1,5%	2	3,4%								
	T_{FNA/som}					2	2,9%					1	0,7%
	T_{FIR-diff}					6	8,8%					22	16,4%
	T_{FIR-som}					5	7,4%					15	11,2%
Réécrire	T_{R-carre}												
	T_{R-canonique}	9	13,4%	1	1,7%	1	1,5%	2	1,8%	11	7,9%	10	7,5%

Tableau 3.24 – Nombre et pourcentage d'exercices convoquant chaque type de tâches dans les manuels des collections *MathenPoche* et *Triangle*

		Hyperbole		Indice		Math'x	
Genre	Type de tâches	IHY09		2IN09		2Mx10	
	Total exercices	20		81		70	
	OM1						
Produire	T_{Produire-exp/formule}	2	10,0%	17	21,0%	15	21,4%
Traduire	T_{Exp> Prog}						
	T_{Prog> Exp}	1	5,0%	2	2,5%	1	1,4%
	T_{Exp> LgNat}			3	3,7%		
	T_{LgNat> Exp}			6	7,4%	1	1,4%
	T_{Exp> Longueur}						
	T_{Longueur > Exp}			2	2,5%		
	T_{Exp> Perimetre}						
	T_{Perimetre > Exp}			3	3,7%	1	1,4%
	T_{Exp> Aire}						
	T_{Aire> Exp}			7	8,6%	1	1,4%
	T_{Exp> Volume}						
	T_{Volume> Exp}	1	5,0%	2	2,5%	1	1,4%
	T_{Exp> Angle}						
	T_{Angle> Exp}						
	T_{Relation> Formule}	2	10,0%	8	9,9%	1	1,4%
	T_{Formule> Relation}						
	T_{Pteari> Exp}			1	1,2%		
	T_{Exp > Pteari}			1	1,2%		
	T_{Arbre> Exp}						
	T_{Exp> Arbre}						
Associer	T_{A-Exp-Aire}					1	1,4%
	T_{A-Exp-Perimetre}						
	T_{A-Exp-Longueur}						
	T_{A-Exp-Volume}						
	T_{A-Exp-Prog}						
	T_{A-Exp-LgNat}						
	T_{A-Relation-Formule}						
	OM2						
Tester	T_{Tester}	1	5,0%			4	5,7%
Preuve	T_{Preuve-equiv}			2	2,5%	4	5,7%
Structure	T_{Structure-somme}			4	4,9%		
	T_{Structure-produit}	1	5,0%	3	3,7%	3	4,3%
	T_{Structure-carre}						
Choisir	T_{Choisir}	1	5,0%	7	8,6%	2	2,9%
Associer	T_{Associer}					4	5,7%
Produire e	T_{Produire-egale}						
Compléter	T_{Completer-exp}					2	2,9%
Calculer	T_{C-relation}					1	1,4%
	OM3						
Développe	T_{DDS-mon x som}			3	3,7%	3	4,3%
	T_{DDS-entier x som}	1	5,0%	1	1,2%	1	1,4%
	T_{DDD-som x som}	2	10,0%	4	4,9%	7	10,0%
	T_{DIR-som x diff}	2	10,0%			3	4,3%
	T_{DIR-car}	6	30,0%	5	6,2%	10	14,3%
Factoriser	T_{FA/mon}					11	15,7%
	T_{FA/som}	3	15,0%	5	6,2%	6	8,6%
	T_{FA-mon + mon}						
	T_{FA*/mon}					2	2,9%
	T_{FA*/som}	4	20,0%	5	6,2%	4	5,7%
	T_{FNA/mon}	2	10,0%	2	2,5%	1	1,4%
	T_{FNA/som}	0					
	T_{FIR-diff}	4	20,0%	12	14,8%	10	14,3%
	T_{FIR-som}	1	5,0%	2	2,5%	9	12,9%
Réécrire	T_{R-carre}						
	T_{R-canonique}			1	1,2%	2	2,9%
	T_{Quotient}			13	16,0%	1	1,4%
Calculer	T_{C-num}						
	T_{CDS-num}					2	2,9%

Tableau 3.25 – Nombre et pourcentage d'exercices convoquant chaque type de tâches dans les manuels de la classe de 2de

		PHare						**MathenPoche**			**HOri**	**TRiangle**		
	Total	06	10	07	11	08	12	10	11	12	11	10	11	08
OM1	28	12	14	13	9	7	11	15	14	9	20	9	12	11
OM2	10	3	3	4	3	3	5	4	3	6	6	5	6	7
OM3	19	7	8	8	7	18	15	9	12	16	13	6	7	16
Total	57	22	25	25	19	28	31	28	29	31	39	20	25	34

TABLEAU 3.26 – Nombre de types de tâches convoqués dans les manuels du collège

de collège de 5^{e}, dans la recherche d'une solution d'équation que pour tester si une identité est vraie ou fausse. Pourtant, un travail sur les identités vraies pour toute valeur présente l'intérêt d'offrir une démarche de contrôle des calculs.

Le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est présent dans tous les manuels mais dans très peu d'exercices ce qui laisse supposer qu'il est très peu travaillé. De plus, la présence du type de tâches n'informe pas sur sa mise en œuvre. On peut s'attendre à ce que leur résolution reste au niveau de la reconnaissance des signes (par exemple, il manque le double produit dans $(a+2)^2 = a^2 + 4$) sans investir la dialectique entre le numérique et l'algébrique pour prouver et aborder soit le contre-exemple (cas d'une identité fausse), soit la preuve algébrique (identité vraie pour toute valeur). Les deux manuels 4PH11 et 5TR10, qui le faisaient intervenir dans les parties *Cours et exercices*, le réinvestissent dans davantage d'exercices mais dans des tâches d'application isolées. Très peu de manuels exploitent ce type de tâches pour amener les élèves à déstabiliser des erreurs à partir de contre-exemples bien choisis.

La reconnaissance de la structure ($T_{Structure}$) est quasiment absente au niveau T-convoqué. Nous avons souligné qu'elle l'est aussi au niveau R-convoqué dans OM3. Dans OM1, les traductions faisant intervenir l'aspect structural des expressions sont également peu présentes (types de tâches $T_{Exp \to LgNat}$, $T_{LgNat \to Exp}$, $T_{Arbre \to Exp}$, $T_{Exp \to Arbre}$). Les élèves sont peu souvent amenés à solliciter explicitement l'aspect structural des expressions.

Parmi les types de tâches $T_{Choisir}$, $T_{Associer}$, $T_{Produire-egale}$ et $T_{Completer-exp}$, le dernier est le plus convoqué en raison des questions à choix multiples situées en fin de chapitre pour « *Faire le point* ». Ces types de tâches sont dans l'ensemble peu présents, alors qu'ils présentent un réel intérêt pour mettre en jeu le sens et la dénotation des expressions.

A propos de la diversité et de la complexité des expressions rencontrées dans les exercices techniques

Pour présenter la place laissée à OM3 et étudier les conditions pour faire les liens entre OM2 et OM3 dans les manuels, nous complétons nos analyses par celle de la diversité et de la complexité des expressions mises en jeu dans les exercices techniques (structure des expressions, degré, nombre de facteurs, nombre de termes, nature des coefficients, ...). L'analyse des parties *Cours et méthodes* a révélé une tendance des manuels à proposer un discours technologique qui guide le travail technique au niveau d'ostensifs, ce qui laisse une part d'implicite quant aux non-ostensifs impliqués. Dans ce paragraphe, nous souhaitons mettre en évidence que ce travail au niveau des ostensifs peut suffire au collège mais s'avérer insuffisant au lycée, étant donné le caractère standardisé des expressions rencontrées par les élèves au collège. Nous cherchons à apporter des éléments de réponse à la question suivante : quelle diversité et complexité des expressions rencontre-t-on dans les exercices techniques des manuels scolaires ?

Nous distinguons différents niveaux de description de la structure des expressions dans les genres de tâches *Développer* et *Factoriser* ce qui nous permet de définir un référentiel de types de tâches.

Nous commençons par désigner les expressions « élémentaires » constitutives de toute expression algébrique du niveau collège :

- le monôme (codé *mon*) du type aX^n avec a un réel et n un entier naturel,
- la somme (codé *som*) du type $aX^n + b$ avec a et b des réels et n un entier naturel,
- le carré (codé *car*) du type $(mon)^2$ ou $(som)^2$,
- le produit (codé *prod*) du type « *som* × *som* », « *mon* × *som* », « *mon* × *car* » ou « *som* × *car* ».

Pour le genre de tâches *Factoriser*, nous spécifions les types de tâches par les critères suivants, dans cet ordre :

- la visibilité du facteur commun,
- le nombre de termes de la somme,
- la structure de chaque terme : carré, produit, monôme, somme.

Pour le genre de tâches *Développer*, nous spécifions les types de tâches par les critères suivants, dans cet ordre :

- la structure de plus haut niveau de l'expression : produit ou somme,
- le nombre de facteurs ou de termes,
- la structure des facteurs ou des termes : carré, produit, monôme, somme.

Ces spécifications nous ont permis d'établir un référentiel de types de tâches des genres *Développer* et *Factoriser* à partir de la structure des expressions. S'il n'est pas exhaustif, ce référentiel l'est suffisamment pour rendre compte de toutes les

Développement	Exemple
Un produit	
de deux facteurs sans carré	
$T_{DDS-mon\times som}$	$2x(x+3)$
$T_{DDS-reel\times som}$	$-2(x+3)$
$T_{DDD-som\times som}$	$(x+6)(x+8)$, $(x^2+4)(2x-3)$
$T_{DIR-som\times diff}$	$(2x+5)(2x-5)$
un carré	
$T_{DIR-(som)^2}$	$(2x+3)^2$, $(2x-3)^2$
$T_{D-(mon\times som)^2}$	$(3(2t-1))^2$
de deux facteurs avec carré	
$T_{D-car\times som}$	$(2x+3)^2(x-1)$
$T_{D-car\times mon}$	$(2x+3)^2x$
de trois facteurs avec au moins une somme	
T_{D-3f}	$2(-2x+5)(x-3)$, $-(-2x+5)(x-3)$
cube	
T_{D-cube}	$(2x+3)^3$
Une somme algébrique	
de deux termes	
$T_{D-prod+mon}$	$2x-(3x+1)$, $10x^2+(4x-3)(4x+3)$
$T_{D-prod+prod}$	$3(2x+1)+2(x+4)$,$(-4x-8)+(7x+2)$
$T_{D-car+mon}$	$(2x+1)^2+9x^2$
$T_{D-car+car}$	$x^2-(3+x)^2$, $(x+2)^2+(3+x)^2$
$T_{D-car+prod}$	$(x+2)^2+(x+2)(2x+3)$
de trois termes dont au moins un produit composé	
$T_{D-3t-prod+prod+prod;mon;som}$	$x+2(x-5)+8(3-2x)$
$T_{D-3t-car+car+prod;mon;som}$	$(x+y)^2+(x-y)^2+2(x+y)(x-y)$
$T_{D-3t-som+prod}$	$3x+1-(3x+6)$
$T_{D-3t-som+car}$	$(2x+1)^2-x+3$

TABLEAU 3.27 – Types de tâches du genre *Développer*

expressions algébriques rencontrées dans les manuels. Il est présenté sur des exemples dans le tableau 3.27 pour le genre de tâches *Développer* et dans le tableau 3.28 pour le genre de tâches *Factoriser*.

Nous avons relevé, pour l'ensemble des exercices techniques de chaque manuel, quel type de tâches est en jeu pour chaque expression. Le décompte obtenu est présenté dans les tableaux 3.29 pour le genre de tâches *Développer* et 3.30 pour le genre de tâches *Factoriser*. Un exercice est dit *technique* s'il consiste en des tâches isolées relevant des genres *Développer* ou *Factoriser*. Les expressions relevant du genre *Réécrire un monôme* ne sont pas considérées puisque les tableaux 3.23 et 3.24 comptabilisent déjà le nombre d'expressions convoquant ce type de tâches au niveau T-convoqué. Pour les genres *Développer* ou *Factoriser*, ces tableaux n'apportent pas le même type d'information puisque le niveau de description est plus précis dans

Factorisation	Somme (codé /*som*)	Monôme (codé /*mon*)
T_{FA} Facteur commun apparent		
T_{FA-2t} Somme de deux termes		
$T_{FA-car+prod}$	$(2x+1)^2+(2x+1)(x+5)$ $(2x+1)^2+(2x+1)$ $2(2x+1)^2+(2x+1)$	$(2x)^2+2x$ x^2-6x $2x^2+3x$
$T_{FA-prod+prod}$	$x(2x+1)+(2x+1)(x+5)$ $(x+3)(2x+1)+(2x+1)(x+5)$	$7x+7\times 3$ $2x+2$
$T_{FA-reduire-2t}$		$7x+3x$, $7x^2+3x^2$
T_{FA-3t} Somme de trois termes et plus		
$T_{FA-3t-car}$	$(2x+1)^2+(2x+1)(x+5)+2x(2x+1)$	x^2+6x+x
$T_{FA-3t-nocar}$	$x(2x+1)+(2x+1)(x+5)+2x(2x+1)$	$7x+7\times 3+x^2\times 7$
$T_{FA-reduire-3t}$		$7x+3x+5\times x$, $7x+3x+5$
T_{FA^*} Facteur commun non apparent dans au moins un terme		
T_{FA^*-2t} Somme de deux termes		
$T_{FA^*-car+prod}$	$(2x)^2+4x(x+5)$ $(2x+1)^2+x(4x+2)$ $(2x+1)^2+x(1+2x)$ $(2x+1)^2+(x+1)(4x+2)$	
$T_{FA^*-prod+prod}$	$x(2x+1)+(x+5)(4x+2)$ $(x+3)(2x+1)+(x+5)(4x+2)$	$7x+21{,}7x^2+4x$ $8x+4$, x^7+x^5, $3x^2-15x$
$T_{FA^*-car+car}$	$(2x+1)^2+(4x+2)^2$	
T_{FA^*-3t} Somme de trois termes et plus		
$T_{FA^*-car+som}$	$(2x+1)^2+2x+1$ $(2x+1)^2+1+2x$ $x^2+3x+(x+3)^2$	
$T_{FA^*-prod+som}$	$x(2x+1)+2x+1$ $x(2x+1)-2x-1$ $(x^2+3x+(x+3)(x+1)$ $2x(x+3)+4x+12$	
$T_{FA^*-IR-dif+prod}$	$x^2-9+3(x-3)$	
$T_{FA^*-3t-IR+prod}$	$4x^2-20x+25+(2x-5)(3x+4)$ et $x^2-4x+4-z^2$	
$T_{FA^*-car+prod+prod}$	$(2x+1)^2+x(2x+1)+x^2(4x+2)$	
$T_{FA^*-prod+prod+prod}$	$(2x+1)(x+1)+x(2x+1)+x^2(4x+2)$	$x^4+4x^3+4x^2$ $3x^2+12x+12$
T_{FNA} Facteur commun non apparent dans tous les termes		
T_{FNA-2t} Somme de deux termes		
$T_{FNA-car+prod}$	$(4x)^2+6x(2x+1)$	$(4x)^2+6x$
$T_{FNA-prod+prod}$	$(6x+4)(x+1)+(9x+6)(x+2)$	$16x+12x^2$, $7x^2+14x$
$T_{FNA-IR-dif}$	$(2x)^2-(x+3)^2$, $4x^2-(x+3)^2$ $(2x+1)^2-(x+3)^2$	$81-4x^2$
T_{FNA-3t} Somme de trois termes et plus		
$T_{FNA-3t-Dis}$	$(4x)^2+6x(2x+1)+8x^2$	
$T_{FNA-3t-IR}$		$4x^2\pm 12x+9$
$T_{FNA-3t-prod+prod+prod}$		$a^3b+2a^2b^2+ab^3$

TABLEAU 3.28 – Types de tâches du genre *Factoriser*

les tableaux 3.29 et 3.30. Par exemple, le développement de l'expression $2(x+1)+2x$ relève du type de tâches $T_{DDS-reel\times som}$ dans les tableaux 3.23 et 3.24 (c'est la propriété de distributivité simple qui intervient) mais du type de tâches $T_{D-prod+mon}$ dans les tableaux 3.29 et 3.30.

Différentes **variables didactiques** entrent en jeu dans la complexité des expressions. Nous distinguons les variables suivantes, communes à tous les types de tâches :

- la nature des coefficients : entiers naturels, entiers relatifs, décimaux, fractions ou réels,
- le nombre de variables : par exemple, deux variables dans $2x+7y+3+5y$ et une variable dans $2x+7x+3+5x$
- la dénomination des variables : diversité dans le choix des lettres de l'alphabet ou uniquement des variables en x, y,
- le degré de l'expression : par exemple, $x(2x+3)$ et $x(2x^3+3)$,
- la visibilité du signe « $\times$ » : par exemple, la différence entre $x(2x+3)$ et $x\times(2x+3)$,
- le nombre de signes « $-$ » : par exemple, la différence entre $x(2x+3)$ et $-x(2x-3)$,
- le fait d'entourer ou non les facteurs ou les termes par des parenthèses : par exemple, $2x+(4x+3)2x$ et $(2x)+(4x+3)2x$,
- la présence ou non du « 1 » dans la factorisation par un facteur commun : par exemple, $(2x+1)^2+(2x+1)$ et $(2x+1)^2+1\times(2x+1)$.

Nous complétons avec une autre variable didactique, appelée « Si possible » relevant de l'énoncé : l'élève a-t-il à sa charge la reconnaissance des expressions qui peuvent être développées ou factorisées ? Par exemple, on trouve cette variable dans des énoncés du type « Développer et réduire, si possible, les expressions suivantes » (cf. figure 3.21). Enfin, pour le type de tâches impliquant la factorisation par les identités remarquables, les variables didactiques suivantes relatives au nombre de réécritures s'ajoutent :

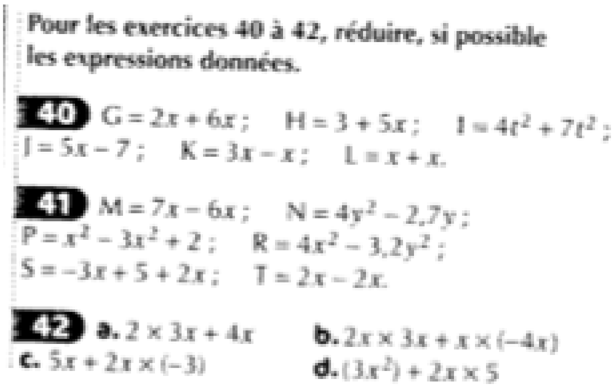
- pour $T_{FNA-3t-IR}$: factoriser une somme de trois termes du type $A\pm B+C$ avec $A=a^2$, $B=2\times a\times b$, $C=b^2$
  - sans réécriture : (a) $(2x)^2\pm 2\times 2x\times 3+3^2$,
  - avec réécriture de A : (b) $4x^2\pm 2\times 2x\times 3+3^2$,
  - avec réécriture de B : (c) $(2x)^2\pm 12x+3^2$,
  - avec réécriture de C : (d) $(2x)^2\pm 2\times 2x\times 3+9$,
  - avec réécriture de B et C : (e) $(2x)^2\pm 12x+9$,

Développement	Phare						MathenPoche			HOri	Triangle			HYp	INdi	Mat
	5e06	5e10	4e07	4e11	3e08	3e12	5e10	4e11	3e12	4e11	5e10	4e11	3e08	HY0	IN0	Mx1
Un produit																
de deux facteurs sans carré																
T_{DDS-mon x som}	4	6	8	6	12	6	6	6	3	6		15				1
T_{DDS-reel x som}	28	16	12	12	5	7	8	10		12	12	15	4			1
T_{DDD-som x som}			28	13	20	18		8	9	37		29	11	1	7	4
T_{DIR-som x diff}					17	25		1	9	1		2	22	2		3
un carré																
T_{DIR-(som)^2}					27	53		5	26			5	10	6		13
T_{D-(mon x som)^2}																1
de deux facteurs avec carré																
T_{D-car x som}																1
T_{D-car x mon}																1
de trois facteurs avec au moins une somme																
T_{D-3f}				1	3	5		9	1						2	
cube																
T_{D-cube}															4	1
Une somme algébrique																
de deux termes																
T_{D-prod+mon}	4	5	23	32	6	4	9	12	1	19	5	27	14			
T_{D-prod+prod}		1	1	1	11	4		17	7	12	4	35	4			3
T_{D-car + mon}					2	2							14	2	3	
T_{D-car + car}					5	6			2				3		5	4
T_{D-car + prod}					12	9			6				9	1	1	1
de trois termes dont au moins un produit composé																
T_{D-3t-prod+prod+prod; mon; som}			17	4	4	5	3	5	1	6					4	
T_{D-3t-car+car+prod;mon;som}					1	2			2							
T_{D-3t-som+prod}				6	7	1		8		16	1	1				
T_{D-3t-som+car}					2	1										
Total expressions	36	28	89	75	134	148	26	81	67	109	22	129	91	12	26	34
Total types de tâches convoqués	3	4	6	8	15	15	4	10	11	8	4	8	9	5	7	12

Tableau 3.29 – Nombre d'expressions convoquant les types de tâches du genre *Développer* dans les manuels scolaires

Factorisation	Phare						MathenPoche			HOri	Triangle			HYp	INdi	Matl
	5e06	5e10	4e07	4e11	3e08	3e12	5e10	4e11	3e12	4e11	5e10	4e11	3e08	HY0	IN0	Mx1
T_{FA} Facteur commun apparent																
T_{FA-2t} Somme de deux termes																
T_{FA-car+prod/som}					14				6				19	2	2	4
T_{FA-car+prod/mon}	12	3	4	6	2		1		1	17			27			8
T_{FA-prod+prod/som}					17	17			4				24	1	6	5
T_{FA-prod+prod/mon}		19	16	19	6	10	4	4		5	14					3
Cas particulier : T_{FA-reduire-2t}	12	16	25	12	5	1	8	4		39	6	53	2			
T_{FA-3t} Somme de trois termes et plus																
T_{FA-3t-car/som}																
T_{FA-3t-car/mon}																
T_{FA-3t-nocar/som}																
T_{FA-3t-nocar/mon}						2		1	1							
Cas particulier : T_{FA-reduire-3t}		13	36		7	11	10	4	1	2	11	19	1			
T_{FA^{*}} Facteur commun non apparent dans au moins un terme																
T_{FA^{*}-2t} Somme de deux termes																
T_{FA^{*}-car+prod/som}					2								1			
T_{FA^{*}-car+prod/mon}																1
T_{FA^{*}-prod+prod/som}			8						3				1	1	5	2
T_{FA^{*}-prod+prod/mon}	12	5		5	5		4	7		18				2	5	3
T_{FA^{*}-car+car/som}													1			
T_{FA^{*}-car+car/mon}																
T_{FA^{*}-3t} Somme de trois termes et plus																
T_{FA^{*}-car+som}					8								2	1	1	3
T_{FA^{*}-prod+som}					4									1		3
T_{FA^{*}-IR-dif+prod}					2	6			1				2		2	2
T_{FA^{*}-3t-IR+prod}					1	4							2			1
T_{FA^{*}-car+prod+prod}									1							
T_{FA^{*}-prod+ prod+prod/som}																
T_{FA^{*}-prod+ prod+prod/mon}					5				1						1	3
T_{FNA} Facteur commun non apparent																
T_{FNA-2t} Somme de deux termes																
T_{FNA-car+prod/som}																
T_{FNA-car+prod/mon}																
T_{FNA-prod+prod/som}					1			6					1			
T_{FNA-prod+prod/mon}					4		4			12						1
T_{FNA-IR-dif/som}					4	3			8				28	2	7	7
T_{FNA-IR-dif/mon}					14	29			6				15	2		3
T_{FNA-3t} Somme de trois termes et plus																
T_{FNA-3t-Dis}																
T_{FNA-3t-IR}					16	29			8				26	2	1	12
T_{FNA-3t-prod+prod+prod}															1	
Total expressions	36	56	89	42	117	112	31	26	41	93	31	72	152	14	31	61
Total types de tâches convoqués	3	5	5	4	18	10	6	6	12	6	3	2	15	9	10	16

TABLEAU 3.30 – Nombre d'expressions convoquant les types de tâches du genre *Factoriser* dans les manuels scolaires



Pour les exercices 40 à 42, réduire, si possible les expressions données.

40 $G = 2x + 6x$; $H = 3 + 5x$; $I = 4t^2 + 7t^2$;
$J = 5x - 7$; $K = 3x - x$; $L = x + x$.

41 $M = 7x - 6x$; $N = 4y^2 - 2{,}7y$;
$P = x^2 - 3x^2 + 2$; $R = 4x^2 - 3{,}2y^2$;
$S = -3x + 5 + 2x$; $T = 2x - 2x$.

42 **a.** $2 \times 3x + 4x$ **b.** $2x \times 3x + x \times (-4x)$
c. $5x + 2x \times (-3)$ **d.** $(3x^2) + 2x \times 5$

FIGURE 3.21 – Illustration de la variable didactique « Si possible » dans le manuel Horizon de 4e (exercice 40 page 92)

   - avec réécriture de A, B et C : (f) $4x^2 \pm 12x + 9$.
- pour $T_{FNA-IR-dif}$: factoriser une différence de deux carrés du type $A^2 - B^2$, nous relevons si A ou B demande une réécriture :
   - sans réécriture : $(2x)^2 - (x+3)^2$,
   - avec réécriture : $4x^2 - (x+3)^2$.

Nous avons relevé les variables qui interviennent sur les exercices techniques de chaque manuel. Une variable est considérée comme prise en compte si le manuel la fait intervenir dans au moins deux exercices. Nous présentons les résultats dans le tableau 3.31. Pour les variables didactiques relevant des types de tâches $T_{FNA-3t-IR}$ et $T_{FNA-IR-dif}$ (qui ne figurent pas dans le tableau 3.31), les expressions proposées demandent, dans la majorité des cas, une réécriture (par exemple, $4x^2 \pm 12x + 9$ et $4x^2 - (x+3)^2$) qui est laissée à la charge des élèves. Notons qu'à ce sujet, nous avions déjà souligné que le type de tâches T_{R-carr} *Réécrire un monôme sous la forme d'un carré* n'était quasiment jamais convoqué dans les manuels (cf. tableaux 3.23, 3.24, 3.25).

Étant donné que les analyses présentées dans les trois tableaux 3.29, 3.30, 3.31 pourraient donner lieu à de nombreux commentaires, nous recentrons nos conclusions sur notre questionnement principal : quelle diversité et complexité des expressions rencontre-t-on dans les exercices techniques des manuels scolaires du collège et de seconde ? Pour rendre compte de cette diversité et complexité, il convient de croiser le nombre d'expressions convoquant les types de tâches des genres *Développer* et *Factoriser* (cf. tableaux 3.29, 3.30) avec le jeu sur les variables didactiques associées. En effet, prenons pour exemple le manuel 5PH06, où le faible nombre de types

Variables	PHare						MathenPoche			HOriz	TRiangle			HYpe	INdic	Math
	5e06	5e10	4e07	4e11	3e08	3e12	5e10	4e11	3e12	4e11	5e10	4e11	3e08	2HY0	2IN0	2Mx1
Nature des coefficients							x			x						
Nombre de variables			x			x	x	x		x	x					
Lettres		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Degré								x		x			x		x	x
Visibilité "x"		x	x	x		x	x	x		x	x	x	x			x
Signe "-"			x		x			x		x		x				x
Parenthèse			x							x		x				x
"Si possible"								x		x	x	x	x			
"1" dans la factorisation																

TABLEAU 3.31 – Jeu sur les variables didactiques des genres de tâches *Développer* et *Factoriser*

de tâches rencontré s'accompagne d'un jeu quasiment inexistant sur les variables didactiques. Évidemment, la complexité des expressions rencontrées augmente avec les propriétés du calcul en jeu, ce qui explique que le nombre de types de tâches convoqués augmentent avec les niveaux scolaires. Après quelques commentaires sur les types de tâches rencontrés par niveaux scolaires, nous apportons des éléments de conclusion sur la diversité et la complexité des expressions de types de tâches convoqués dans les exercices techniques.

En classe de 5^e, le développement concerne majoritairement (souvent plus de 50% des expressions) des expressions du type $T_{DDS-reel\times som}$ $(-2(x+3))$ et $T_{D-prod+mon}$ $(2x-(3x+1))$. Peu d'expressions mettant en jeu le développement par un monôme ($T_{DDS-mon\times som}$) sont présentes. La factorisation concerne majoritairement des réductions de deux ou trois termes ($T_{FA-reduire-2t}$, $T_{FA-reduire-3t}$) et des factorisations par un réel ($T_{FA-car+prod/mon}$, $T_{FA-prod+prod/mon}$, $T_{FA^*-prod+prod/mon}$). Il est normal qu'à ce niveau scolaire les expressions soient assez peu diversifiées. Néanmoins, le faible jeu sur les variables didactiques montre que les expressions sont relativement standardisées.

En classe de 4^e, le développement concerne majoritairement des expressions du type $T_{DDD-som\times som}$ $((x+6)(x+8))$, $T_{DDS-reel\times som}$ $(-2(x+3))$, $T_{D-prod+mon}$ $(2x-(3x+1))$. La factorisation concerne assez peu d'expressions par rapport au nombre d'expressions à développer. Les types de tâches majoritairement convoqués sont les mêmes qu'en classe de 5^e, à savoir des réductions de deux ou trois termes ($T_{FA-reduire-2t}$, $T_{FA-reduire-3t}$) et des factorisations par un réel ($T_{FA-car+prod/mon}$, $T_{FA-prod+prod/mon}$, $T_{FA^*-prod+prod/mon}$). En fait, seul le manuel 4HO11 propose des exercices techniques dans lesquels les expressions sont diversifiées. D'une part, le nombre de types de tâches convoqués est un des plus importants pour un manuel de 4ᵉ et, d'autre part, le jeu sur les variables didactiques associées est très riche dans tous les exercices. La majorité des exercices fait intervenir la variable didactique « si possible » (cf. figure 3.21), c'est-à-dire que les élèves ont à leur charge la reconnaissance de la structure de l'expression pour développer ou factoriser.

En classe de 3ᵉ, les manuels convoquent, certes, un nombre de types de tâches élevé (33 pour 3PH08, 25 pour 3PH12, 23 pour 3MP12, 24 pour 3TR08). Mais deux faits se conjuguent : la moitié des types de tâches de factorisation concerne des applications directes des identités remarquables ($T_{FNA-IR-dif}$: $a^2 - b^2$ et $T_{FNA-3t-IR}$: $ax^2 + 2abx + b^2$) conjugué et la pauvreté du jeu sur les variables didactiques qui rend les expressions formatées. Cela peut avoir comme conséquence un rôle prépondérant attribué aux ostensifs dans la dialectique des ostensifs et des non-ostensifs. Hormis pour les identités remarquables, la factorisation concerne majoritairement des sommes de deux termes dans lesquelles le facteur commun est apparent ou des réductions. Elle concerne assez peu de factorisations où le facteur commun n'est pas apparent dans tous les termes. Cette remarque est valable pour le développement où les élèves rencontrent majoritairement les types de tâches $T_{DIR-(som)^2}$ ($(2x+3)^2$) et $T_{DIR-som\times diff}$ ($(2x+5)(2x-5)$).

En classe de 2ᵉ, les manuels se séparent selon les deux catégories de manuels retenues (cf. § 3.4.2 page 121). Le manuel 2HY09, qui inclut les expressions algébriques dans un thème du secteur sur les fonctions du second degré, propose peu d'exercices techniques sur la manipulation des expressions. Les types de tâches convoqués sont relativement diversifiés par rapport au nombre d'expressions mais le jeu sur les variables didactiques est quasiment inexistant. Les manuels 2Mx10 et 2IN09, qui incluent les expressions algébriques dans un secteur dédié à leur production et à leur transformation, proposent un nombre d'exercices techniques supérieur au manuel 2HY09. Les types de tâches sont diversifiés surtout dans le manuel 2Mx10. Ce manuel présente un jeu sur les variables didactiques.

En conclusion, nous constatons que pour chaque niveau scolaire, les types de tâches convoqués font intervenir les propriétés du calcul algébrique qui sont introduites, ce qui est normal. Même si certains manuels (par exemple 3PH08, 3PH12, 3TR08) diversifient les types de tâches, l'accent est mis sur des expressions standardisées. Cela se retrouve à travers la conjugaison de deux tendances : d'une part, les types de tâches dominants sont des applications directes des propriétés du calcul algébrique (par exemple, $-2(x+3)$ pour la distributivité simple, $(x+2)(x+3)$ pour la distributivité double et $(x+3)^2$ pour les identités remarquables), et, d'autre part, les variables didactiques interviennent assez peu. Ainsi, il est par exemple assez rare, qu'en 3e, les manuels convoquent le type de tâches $T_{FA^*-car+som}$ donnant lieu à des expressions du type $(2x+1)^2+2x+1)$ ou $T_{DDD-som\times som}$ avec un jeu sur la variable didactique « degré » donnant lieu à des expressions du type $(x^2+4)(2x-3)$ ou encore $T_{D-car+car}$ qui met en jeu des expressions du type $(3x+2)^2+(2x+3)^2$ souvent présentes en seconde. Or, il est probable que le caractère trop isolé et ponctuel de la convocation de types de tâches mettant en jeu des expressions non standardisées encourage les enseignants à mettre l'accent sur des expressions standardisées et à laisser un caractère occasionnel à des factorisations ou des développements mettant en jeu des structures plus complexes qui demanderaient pourtant davantage de reconnaissance de la structure des expressions aux élèves. Évidemment, pour instaurer des réflexes, le caractère routinier de certaines expressions est nécessaire mais si les expressions rencontrées ne sont pas suffisamment diversifiées et complexes, l'élève peut les déchiffrer en s'appuyant sur la syntaxe sans mettre en œuvre l'aspect structural. La conséquence rejoint celle de l'analyse des parties *Cours et méthodes*. Un discours technologique qui guide le travail technique au niveau d'ostensifs peut suffire pour traiter des expressions standardisées. Cela laisse implicite la nécessité de convoquer des types de tâches de OM2 pour reconnaître la structure des expressions, les propriétés à utiliser et de s'appuyer sur l'équivalence des expressions pour conduire et contrôler les calculs algébriques.

A propos de la présence de OM3

La convocation des types de tâches de OM3 au niveau T-convoqué [12] concerne un nombre d'exercices supérieur à ceux de OM2 et de OM1. Le fait que l'accent soit mis sur OM3, est normal étant donné qu'un enjeu majeur des programmes du collège est la transformation des expressions. Ce que nous souhaitons souligner, c'est la tendance des manuels à travailler OM3 à travers des exercices techniques non finalisés dans lesquels [13] :

- les types de tâches interviennent ponctuellement, désarticulés les uns des autres, ce qui est mis en valeur par le fait que, souvent, un seul type de tâches intervient par exercice,
- la reconnaissance de la structure est prise en charge implicitement par le fait

12. Rappelons que nos analyses ne prennent en compte que les types de tâches qui interviennent au niveau T-convoqué.

13. Les deux premières remarques ne sont pas quantifiées comme dans les tableaux 3.29 et 3.30 mais nous avons pu les constater lors de nos analyses.

qu'une seule structure intervienne par exercice et que la consigne, le titre de l'exercice ou la mise en page du manuel indiquent la propriété en jeu (cf. figure 3.23),
- la complexité des expressions et le jeu sur les variables didactiques associées, et donc leur structure, est formatée en fonction des niveaux scolaires.

Les exercices techniques dans lesquels OM3 intervient sont standardisés, mis en perspective avec aucun objectif, ce qui d'une part, laisse supposer que seul l'aspect syntaxique des expressions et un travail algébrique au niveau des ostensifs peut suffire pour les réaliser et, d'autre part, demande peu de convocation des types de tâches de OM2. Même si nous ne l'avons pas analysé pour des raisons déjà évoquées, les types de tâches de OM3 sont présents au niveau R-convoqué dans des tâches liées à la résolution de problèmes du domaine algébrique mais on peut supposer que les expressions rencontrées ne sont pas plus variées que celles des exercices techniques. Les élèves peuvent ainsi se retrouver démunis lorsqu'ils sont confrontés à des expressions qu'ils n'ont pas l'habitude de rencontrer, lorsque les types de tâches interviennent au niveau R-convoqué par exemple dans la résolution de problèmes du domaine de l'algèbre ou encore lorsqu'ils doivent s'appuyer sur le sens des expressions pour choisir la transformation à effectuer. Il y a là des implicites au niveau du discours technologique proposé aux élèves pour la transformation des expressions.

Nous donnons deux exemples de problèmes dont la résolution nécessite de convoqué des types de tâches au niveau R-convoqué. Le premier est un problème fonctionnel issu du manuel 2IN09 (cf. figure 3.7 page 129) dans lequel les types de tâches $T_{D-car+car}$ (question 1), $T_{D-prod+mon}$ (questions 1 et 5) et $T_{D-prod+mon}$ (questions 4) interviennent au niveau R-convoqué alors même qu'ils impliquent des expressions algébriques rarement rencontrées dans les manuels du collège (cf. tableaux 3.29 et 3.30). Le second exemple est un problème proposé au brevet des collèges de 2007 (cf. figure 3.22). La question 3 porte sur le type de tâches $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ Prouver le résultat d'un programme de calcul (OM1), qui se décompose en :

- T1 : Produire une expression à partir d'un programme de calcul (OM1)
  - T11 : Mobiliser la variable x pour produire une expression générale
  - T12 : Traduire le programme de calcul en l'expression algébrique $(x^2+4)x+4$ ($T_{T-Prog\to Exp}$ dans OM1)
- T2 : $T_{Prouver-equiv}$ Prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur de la lettre
  - T21 : Identifier la structure de l'expression et reconnaître l'application de

On donne le programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 4.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
- Ajouter 4 à ce produit.
- Ecrire le résultat.

1. Ecrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait correctement ce programme avec le nombre − 2, on obtient 0.
2. Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.
3. a. Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un nombre entier (les essais doivent figurer sur la copie).
   b. En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul ? Justifier la réponse.
4. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

FIGURE 3.22 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2007

la distributivité ($T_{Structure}$ dans OM2)

- T22 : Développer l'expression algébrique $(x^2 + 4)x + 4$ en $x^2 + 4x + 4$ ($T_{D-prod+mon}$ dans OM3)
- T23 : Identifier la structure de l'expression et reconnaître une somme de trois termes remarquables($T_{Structure}$ dans OM2)
- T24 : Factoriser l'expression algébrique x^2+4x+4 ($T_{FNA-3t-IR}$ dans OM3)
- T25 : Identifier la structure de l'expression et reconnaître le carré d'un entier ($T_{Structure}$ dans OM2)

Cette décomposition est à la charge des élèves. La reconnaissance de la structure des expressions et les types de tâches de OM3 impliqués interviennent au niveau R-convoqué. Ils ont notamment à introduire une lettre pour traduire le programme de calcul en une expression algébrique, reconnaître la structure de l'expression pour identifier les propriétés à appliquer et atteindre le but visé. De même la question 4 laisse à la charge des élèves la mise en équation qui conduit à l'équation $(x+2)^2 = 1$. La résolution de l'équation demande de se ramener à une équation-produit et donc d'anticiper la transformation à effectuer. Le type de tâches $T_{FNA-IR-dif/som}$ intervient au niveau R-convoqué.

La vérification des calculs est quasiment absente. Nous l'avons rencontrée dans quelques exercices isolés (n°79 dans 3TR08, n°55 et 10 dans 3PH12 et n°49 dans 4HO11, cf. figure 3.24) au cours desquels la notion de contre-exemple est parfois rencontrée. Même si elle est présente dans les parties *Cours et Méthodes*, elle n'est pas reprise dans les exercices dans le sens où très de peu consignes l'exigent ou même la suggèrent.

17 *Sommes ou différences ?*

Factorise ces expressions.

A = $t^2 + 81 + 18t$

B = $4x^2 - 4xy + y^2$

C = $81 + 16y^2 - 72y$

D = $x^2 + 36 - 12x$

E = $\frac{4}{9}p^2 + \frac{4}{3}pq + q^2$

F = $\pi^2 + 10\pi + 25$

18 *Différences de deux carrés*

Factorise ces expressions.

A = $x^2 - 16$

B = $1 - y^2$

C = $100x^2 - 9$

D = $36 - 81z^2$

E = $4\pi^2 - 25$

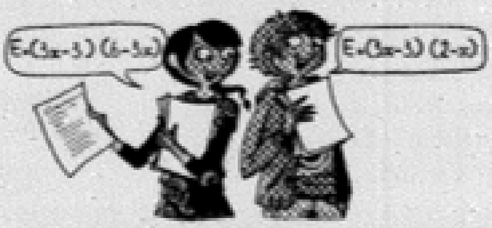
F = $(t + 3)^2 - 16$

G = $(2x + 1)^2 - 25$

H = $(3t + 7)^2 - (t + 5)^2$

FIGURE 3.23 – Extrait de 3MP12, page 43 : la structure des expressions est prise en charge par l'énoncé

55 On veut développer, puis réduire l'expression
$E = 3(x - 1)(2 - x)$.
Deux élèves commencent par distribuer le nombre 3.



1) Pour $x = 0$, calculer l'expression de l'énoncé, celle de Léa, ainsi que celle de Mathias.
2) Quel élève s'est trompé ?
Quelle erreur a-t-il commise ?
3) Développer, puis réduire l'expression E.

79 COMME AU BREVET

Pour chacune des expressions ci-dessous :
(1) développer, puis réduire.
(2) factoriser.
(3) contrôler que l'expression développée est bien égale à l'expression factorisée.

a) $A = (3x - 4)^2 + (3x - 4)(7x - 5)$
b) $B = (4x + 2)^2 - (5 - 2x)(4x + 2)$
c) $C = (5x + 1)^2 - 4$

FIGURE 3.24 – Deux exercices qui amènent à contrôler les calculs (à gauche 3PH12 page 40, à droite 3TR08 page 123)

Les types de tâches relatifs au calcul numérique sont présents. T_{C-num} apparaît dans plus de 10% des exercices de la majorité des manuels, mais comme pour les exercices techniques, ils sont travaillés isolément du reste. Quant à $T_{CDS-num}$ et $T_{CIR-num}$, leur présence est forte dans les manuels 5e de Phare où la transformation d'expressions est davantage travaillée sur des expressions numériques que sur des expressions algébriques.

Le type de tâches $T_{R-carre}$ *Réécrire un monôme sous forme d'un carré* n'est jamais travaillé au niveau T-convoqué alors qu'il intervient au niveau R-convoqué dans la plupart des exercices de factorisation par une identité remarquable et que cette réécriture est souvent source d'erreur chez les élèves.

A propos des exercices des manuels de seconde

Concernant les manuels de seconde, les catégories de manuels identifiées (cf. § 3.4.2 page 121) mettent en évidence une prise en compte différente des trois OM locales. Le manuel 2HY09, qui inclut les expressions algébriques dans un thème du secteur sur les fonctions du second degré (catégorie 2), propose peu d'exercices mettant en jeu OM1 et OM2. OM3 est davantage présente ce qui montre que les liens entre les trois OM locales ne sont pas travaillés. En revanche les manuels 2Mx10 et 2IN09, qui incluent les expressions algébriques dans un secteur dédié à leur production et à leur transformation (catégorie 1), proposent des exercices qui permettent de faire les liens entre les trois OM locales. Le manuel 2Mx10 laisse particulièrement une place à OM2. Le sens et la dénotation des expressions et leur aspect structural sont travaillés ce qui permet d'encourager une anticipation et une intelligence des calculs algébriques.

En conclusion, l'analyse des parties *Exercices* met en évidence une tendance des manuels à davantage favoriser des exercices techniques dans lesquels une conduite du calcul appuyée principalement par les ostensifs peut suffire à la réalisation des transformations algébriques. OM2 est présente mais pas suffisamment pour développer une réflexion sur l'équivalence des expressions, sa fonction dans le contrôle des calculs et contribuer à construire des raisons d'être aux OM ponctuelles de OM2. Les types de tâches de OM2 peuvent vivre à condition de mettre en place une organisation didactique permettant de faire vivre les différents moments de l'étude et d'élaborer un bloc technologico-théorique prenant en compte la référence épistémologique, en particulier dans des phases de recherche et de mise en commun. Par exemple, le manuel 4HO11, qui se distingue des autres par la diversité des types de tâches convoqués (cf. tableau 3.26), la diversité des expressions mises en jeu et la place importante laissée à la production d'expressions, donne des conditions favorables à une organisation didactique permettant de faire vivre un bloc technologico-théorique idoine. Les types de tâches n'y sont pas travaillés isolement les uns des autres. La résolution de problèmes diversifiés amène à en travailler les raisons d'être et à faire des liens entre les types de tâches.

3.4.4 Synthèse sur l'OM à enseigner dans les manuels

Nous tirons parti des analyses écologiques et praxéologiques pour faire ressortir les caractéristiques de l'OM à enseigner dans les manuels scolaires du collège et de seconde. Nous les mettons en perspective par rapport aux caractéristiques dégagées de l'analyse des programmes officiels et du document d'accompagnement (cf. §3.3.6).

Il s'agit de caractéristiques dominantes puisque certains manuels présentent des alternatives, comme nous avons tenté d'en rendre compte dans les analyses.

a. Un habitat pour les expressions algébriques au collège

La majorité des manuels offrent un habitat aux expressions algébriques dans le domaine « Nombres et calculs » ce qui diffère de l'analyse écologique des programmes officiels qui offre trois habitats aux contenus relatifs aux expressions algébriques. Seuls les deux manuels Phare 2012 3e et Triangle 2010 5e diffèrent ; mais, comme nous avons pu le souligner dans les analyses, cela n'a pas d'incidence majeure sur la fonction donnée à l'algèbre par rapport aux autres manuels. Ces deux manuels présentent les mêmes caractéristiques de l'OM à enseigner que les autres.

L'analyse écologique des programmes du collège montre une évolution majeure depuis 2008 dans l'habitat et la niche des contenus relatifs à l'algèbre. Mais, comme nous l'avons souligné, les apports sur l'introduction des expressions algébriques et de leur propriété dans l'apparition du sujet d'étude « Utiliser et produire une expression littérale » dans le domaine « Organisation et gestion de données » du programme de 5e sont principalement mis en exergue dans le document d'accompagnement. Aussi, nous nous interrogeons : qu'en est-il dans les manuels scolaires du collège ?

b. Une motivation des expressions et des propriétés du calcul algébrique peu reliée à l'étude de l'équivalence des programmes de calcul

Le document d'accompagnement encourage l'étude de l'équivalence de programmes de calcul pour introduire les expressions algébriques et les propriétés du calcul. Cette étape correspond à la première étape du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012), sur laquelle nous nous appuyons pour construire l'OM de référence relativement aux expressions algébriques. Or l'analyse des parties « Activités » montre que, certes, l'entrée dans le calcul algébrique se fait par OM1 mais que, d'une part, les activités sont relativement pauvres et découpées et que, d'autre part, peu de manuels proposent un travail sur l'équivalence des programmes de calcul. Les programmes de calcul interviennent seulement ponctuellement dans les exercices, sans offrir l'occasion de revenir sur les liens entre les trois OM locales sauf dans les manuels des collections MathenPoche et Horizon. Ainsi les expressions algébriques et les propriétés de calcul sont peu introduites en questionnant la dénotation des expressions, la dialectique algébrique-numérique et le passage du procédural au structural. Les expressions sont rarement introduites dans le but de faire émerger les conditions pour construire un bloc technologico-théorique du calcul algébrique appuyée sur la structure et l'équivalence des expressions.

Notons que l'introduction des expressions par l'équivalence des programmes de calcul entretient parfois une distinction ambiguë entre expression et formule. Par exemple, l'activité du manuel MathenPoche (cf. figure 3.5), qui fait référence au carré bordé, demande de comparer des expressions. Mais, dans l'énoncé, ce sont des formules qui sont écrites. Dans cette activité d'introduction, les expressions existent peu en-dehors des formules. Il est intéressant de noter que chez Phare (cf. 3.6), qui propose une activité à potentialité restreinte pour introduire les expressions algébriques et leur donner des raisons d'être, seules les expressions algébriques interviennent.

c. Des OM locales travaillées indépendamment les unes des autres

OM1 est présente dans l'introduction des expressions algébriques et dans des exercices de réinvestissement. Mais elle est quasiment inexistante dans les parties de cours ce qui, d'après l'OM de référence, ne met pas en avant les liens entre les trois OM locales de l'OM régionale sur les expressions algébriques. Dans les parties *Exercices*, les types de tâches du genre *Traduire* ne sont convoqués mais uniquement dans le sens d'un « registre de représentation sémiotique » vers celui des écritures algébriques. L'autre sens, qui met en jeu l'aspect structural des expressions, est très peu présent. Par ailleurs, les programmes de calcul, schéma de calcul ou arbre de calcul interviennent très peu. Pourtant, cela permettrait de travailler la dialectique entre les aspects procédural et structural des expressions algébriques.

OM2 est présente dans les parties *Cours et Méthodes* et *Exercices* à travers la convocation des types de tâches $T_{Prouver-equiv}$ et T_{Tester}. Lorsque OM2 apparaît, les techniques et le niveau technologico-théorique développés accordent une place à la dialectique de l'algébrique et du numérique ; ce n'est pas le cas pour les autres OM ponctuelles développées. Mais globalement, les types de tâches de OM2 sont peu convoqués au niveau R-convoqué. Lorsqu'il apparaît, il est déconnecté des autres et ne répond à aucune raison d'être. Il n'est pas mis en perspective par rapport au contrôle des calculs. De plus, l'absence de quantification conduit à dénaturer le travail sur l'équivalence des expressions.

OM3 est l'OM locale la plus présente dans les *Activités Cours et Méthodes* et *Exercices* dans les manuels ce qui est normal étant donné qu'un enjeu majeur des programmes du collège est la transformation des expressions. Néanmoins, nos analyses font ressortir une tendance dans les manuels du collège à accentuer l'aspect syntaxique des expressions au détriment de leur aspect sémantique, de leur aspect structural, du sens et de la dénotation trop souvent laissés implicites. OM3 est souvent travaillée en interne sans montrer la nécessité de convoquer les types de tâches de OM2. OM1 n'est pas toujours suffisamment l'occasion de faire le lien avec OM2 pour donner du sens aux types de tâches de OM3. Dans certains manuels, la succession d'exercices techniques dans lesquels les consignes et les expressions sont standardisées encourage une manipulation des expressions algébriques dans des tâches non finalisées ne conduisant à aucun but mathématique extérieur au calcul algébrique, phénomène que Tonnelle (1980) avait appelé le « le monde clos de la factorisation ». Néanmoins, nous avons pu souligner à différentes étapes de l'analyse certains manuels présentent des potentialités pour travailler les raisons d'être de l'OM régionale (manuels 5MP10, 3MP12, 4HO11), pour travailler la dénotation des expressions à partir de la dialectique numérique-algébrique (manuels 4PH11, 4HO11) ou bien pour travailler leur structure (manuels 4HO11, 3TR08). Il s'agit de potentialités dans le sens où seule la manière dont les types de tâches seront mis en œuvre peut permettre de faire émerger des techniques justifiées par un bloc technologico-théorique non uniquement appuyé sur des ostensifs.

d. Un niveau technologique qui attribue majoritairement un rôle prépondérant aux ostensifs dans la conduite et le contrôle du calcul algébrique

L'analyse de la partie « *Cours et Méthodes* » met en évidence que la conduite du calcul algébrique est réglée par un recours aux ostensifs (jeu de couleurs, flèches, verbes d'actions) qui favorisent la reconnaissance de signes laissant implicite celle des structures et de l'identification des propriétés à appliquer. L'activation des non-ostensifs est donc souvent possible par les seuls discours du type « *On met en facteur* », « *On distribue* » dont on peut supposer qu'ils permettent un certain contrôle de l'action pour des expressions simples mais qu'ils peuvent s'avérer insuffisants pour traiter des expressions de structure complexe. Mais l'analyse de la diversité et de la complexité des expressions proposées dans les exercices techniques montre que le recours aux ostensifs peut fonctionner au collège étant donné la standardisation des expressions algébriques et des énoncés proposés dans les manuels.

e. L'absence de la validation des calculs

La validation des calculs est quasiment absente. Nous l'avons rencontrée ponctuellement dans quelques « *Méthodes* » ou « *Exercices* », au cours desquels la notion de contre-exemple est parfois développée. Cependant, aucun manuel ne l'exige ou même ne la suggère systématiquement dans les exercices techniques. Pourtant, la validation des calculs peut permettre de donner du sens aux expressions et une raison d'être à la convocation de types de tâches de OM2 pour développer leur équivalence, le sens et la dénotation [14]. Or dans les manuels, seul l'appui sur des ostensifs graphiques (couleurs et flèches) sont proposés aux élèves pour contrôler leurs transformations algébriques. À ce propos, Abou Raad et Mercier (2009) écrivent :

> *« Ainsi, nous regardons le travail d'écriture : [développement accompagné de flèches] comme un travail de transformation combinatoire réglé par un système d'ostensifs. La création didactique d'ostensifs répond aux besoins de l'enseignement de toute matière mathématique [. . .] et on en trouve bien sûr dans le cas de la factorisation, où ils sont supposés aider à l'application des méthodes enseignées. Mais les ostensifs inventés à usage didactique n'auront jamais un statut mathématique. Ainsi, les deux liens tracés ci-dessus permettent-ils d'oublier l'existence d'une propriété qui fonde la pratique ainsi désignée, et cela comporte un risque : les ostensifs à usage didactique n'ont plus qu'une valeur instrumentale. Ils décrivent des règles d'action, ce qui enferme l'élève dans un monde d'interprétations personnelles de ces règles, sans contrôle mathématique. » (Abou Raad & Mercier, 2009, p. 171)*

f. Des décalages entre la troisième et la seconde

A partir de la seconde, l'algèbre est travaillée au service des fonctions ce qui nécessite un travail sur le sens des expressions et un appui sur l'intelligence du calcul et l'anticipation des transformations à effectuer. Or ces aspects sont laissés implicites au collège, ce qui génère des décalages entre la classe de troisième et la seconde.

3.5 Synthèse

L'OM de référence relative aux expressions algébriques nous a guidé dans l'analyse des programmes officiels, du document d'accompagnement et des manuels scolaires du collège et de seconde pour mettre en évidence des caractéristiques de l'OM à enseigner au collège et en seconde. Ces caractéristiques nous éclairent sur des savoirs et savoir-faire implicites laissés à la charge des élèves. Nous en résumons ici les

14. Concernant la vérification et le contrôle des calculs, nous faisons référence aux travaux de Coppé (Chalancon, Coppé, & Pascal, 2002 ; Coppé, 1993)

éléments dominants.

3.5.1 Caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner

Les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner relative aux expressions algébriques sont les suivantes. Nous les énumérons ici sans développer les points qui l'ont déjà été :

1. Des raisons d'être des expressions algébriques et des propriétés du calcul peu rattachées aux des éléments constitutifs du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012), à savoir le passage de la conception du programme de calcul comme un processus à un programme de calcul considéré du point de vue de sa structure et l'étude de programmes de calcul équivalents ;
2. Trois OM locales inégalement présentes et surtout peu reliées entre elles ;
3. Un niveau technologique qui attribue un rôle prépondérant aux ostensifs dans la conduite et le contrôle du calcul algébrique, ce qui laisse implicite la convocation d'un certain nombre des types de tâches comme l'identification de la structure ou la réécriture ;
4. L'absence de la validation des calculs.

L'OM régionale autour des expressions algébriques est incomplète à la fin du collège et au début de la seconde, dans le sens où les éléments du bloc technologico-théorique ne sont pas suffisamment portés par les éléments épistémologiques nécessaires au calcul sur et avec les expressions algébriques. Les exercices des manuels proposés peuvent favoriser le développement d'une pratique algébrique peu appuyée sur des propriétés du calcul, sur la dialectique du numérique et de l'algébrique qui permet de créer la dialectique du structural et du procédural pendant la conduite des calculs algébriques.

3.5.2 Des implicites dans l'enseignement de l'algèbre

Les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner donnent lieu des savoirs et savoir-faire implicites. Nous les rattachons à la référence épistémologique établie au chapitre 2. Selon nous, le rapport institutionnel attendu au calcul algébrique n'est pas conforme aux nécessités épistémologiques de la discipline. L'existence de savoirs et savoir-faire implicites est liée au fait que les différents éléments épistémologiques relatifs au travail sur et avec les expressions algébriques ne sont pas enseignés ou pas suffisamment impliqués dans l'activité algébrique demandée aux élèves. Certains savoirs et savoir-faire restent masqués notamment par le fait que, comme nous l'avons montré dans le paragraphe 3.1.6 sur l'OM de référence, des types de tâches intermédiaires interviennent dans la convocation d'autres, ce qui n'est pas suffisamment explicite dans l'OM à enseigner. Ces types de tâches sont en lien les différents éléments épistémologiques retenus au chapitre 2.

a. L'équivalence des expressions algébriques

Certes OM2 est présente dans l'OM à enseigner mais comme elle est n'est pas suffisamment convoquée en lien avec ceux de OM1 et de OM3, l'équivalence des expressions n'est presque jamais présentée comme un aspect central de la manipulation des expressions algébriques ni comme une aspect permettant d'organiser la vérification et le contrôle des calculs. Le fait que les propriétés du calcul algébrique permettent de transformer une expression en une autre, équivalente, et le fait qu'on puisse utiliser l'une ou l'autre en fonction du but visés sont rarement directement impliqués dans l'OM à enseigner au collège, c'est-à-dire que la dénotation et le sens des expressions sont laissés implicites. Cela s'accompagne du fait que l'algébrique et le numérique sont peu travaillés en dialectique, aspect déjà souligné par Chevallard (1985b) (cf. chapitre 2 §2.1.1).

b. La dialectique de l'algébrique et du numérique

La dialectique de l'algébrique et du numérique consiste à travailler l'algébrique comme outil d'étude du numérique et le numérique comme outil d'étude de l'algébrique. L'algébrique comme outil d'étude du numérique est relativement présent dans les manuels à travers les types de tâches de OM3 comme $T_{CDS-num}$, $T_{CIR-num}$. Mais le numérique comme outil d'étude de l'algébrique est peu présent dans les manuels notamment comme outil pour contrôler les résultats. Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, le type de tâches T_{Tester} est présent ; mais il l'est davantage dans l'objectif de déterminer si tel nombre est solution d'une équation plutôt que decontrôler que deux expressions renvoient ou non les mêmes valeurs.

c. Les aspects procédural et structural des expressions

Assez peu de tâches présentes dans les manuels font référence à l'identification du processus de calcul associé à une expression algébrique. Pourtant, cela permet de revenir sur la hiérarchie des opérateurs et sur l'usage des parenthèses et de distinguer dans quel ordre effectuer les opérations. La reconnaissance de la structure, qui fait référence au type de tâches $T_{Structure}$, est souvent masquée par des expressions standardisées et le nombre insuffisant de tâches convoquant $T_{Choisir}$ qui implique le sens des expressions.

d. Le lien avec d'autres registres de représentations

Les liens avec les registres de représentations sont présents mais nous soulignons deux points. Premièrement, la traduction entre un registre de représentation et celui des écritures algébriques concernent majoritairement celui des grandeurs. Elle fait peu intervenir les schémas de calcul, les programmes de calcul. Deuxièmement, un sens de traduction est majoritairement travaillé, celui qui part d'un registre de représentation vers le registre des écritures algébriques. Pourtant, comme le montre le travail de Bardini (2003), l'intervention des programmes et des schémas de calcul et un travail de traduction du registre des expressions algébriques vers un autre registre de représentation mobilisent une flexibilité à travailler sur les aspects procédural et structural des expressions. Or ces deux aspects semblent peu présents dans les discours technologiques proposés aux élèves.

En conclusion, nous avons mis en évidence que certaines nécessités d'apprentissage autour de la génération et de la manipulation des expressions algébriques sont laissés implicites dans l'enseignement secondaire. Ces apprentissages restent à la charge des élèves. Nous pouvons faire l'hypothèse que cela peut conduire les élèves à s'enfermer dans des règles de manipulation incorrectes et à pratiquer des contrôles inappropriés de leurs actions.

3.5.3 Deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié

La mise en évidence d'implicites dans l'OM à enseigner nous permet de faire des hypothèses sur les questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

L'analyse de l'OM à enseigner dans l'OM de référence éclaire sur des nécessités d'apprentissage souvent ignorées par l'institution qui restent à la charge des élèves. Nous avons mis en évidence celles reliées à la prise en compte de la dialectique numérique / algébrique, du double aspect procédural / structural d'un objet, de l'équivalence des expressions dans les raisons d'être données à l'algèbre et à la conduite, le contrôle et l'anticipation du calcul sur les expressions algébriques.

Nous faisons l'hypothèse que les deux questions suivantes peuvent être génératrices pour aborder ces différents aspects dans les parcours d'enseignement différencié.

1. Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

La première est fondatrice de la première étape du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón (cf. §2.1.3). Même si les élèves ont déjà rencontré l'algèbre, il nous semble indispensable de revenir sur cette question tout au long de l'avancée du temps didactique car elle est fondamentale pour donner du sens aux expressions algébriques, à leur transformation et aux propriétés du calcul. Comme nous l'avons déjà souligné, elle permet de faire le lien entre les trois OM locales de l'OM de référence relative aux expressions algébriques. La seconde est fondamentale dans la conduite des calculs. Étant implicite dans l'OM à enseigner, notamment par la faible présence de OM2, nous faisons l'hypothèse que le fait d'y revenir peut permettre aux élèves de faire évoluer leur rapport à l'algèbre vers un rapport idoine.

Ces deux questions permettent de générer des sous-questions à la base des objectifs d'apprentissage des parcours d'enseignement différencié construits.

3.5.4 A propos de la convocation de OM2 dans la résolution des problèmes du brevet des collèges, une évolution de l'OM à enseigner ?

Comme nous l'avons montré dans l'analyse des manuels, OM2 n'est pas absente et certains manuels suivent les orientations données par les documents d'accompagnement pour développer des situations visant à travailler potentiellement l'équivalence des expressions algébriques et donner des raisons d'être à leur génération et à leur transformation. Ces évolutions se retrouvent dans le brevet des collèges où apparaît la convocation de types de tâches OM2 dans la résolution des problèmes et des exercices de l'épreuve de mathématiques. Depuis 2007, le type de tâches de OM2 $T_{Prouver-equiv}$ en lien avec la dénotation des expressions (cf. analyse du brevet de 2007 figure 3.22 page 159 et les figures 3.25 à 3.27) et le type de tâches *Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul* de OM1 sont présents. Les types de tâches de OM3 apparaissent au niveau R-convoqués (cf. figure 3.26).

On donne le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre.

a) Multiplier ce nombre par 3.

b) Ajouter le carré du nombre choisi.

c) Multiplier par 2.

Ecrire le résultat.

1. Montrer que, si on choisit le nombre 10, le résultat obtenu est 260.

2. Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :
   - le nombre choisi est -5 ;
   - le nombre choisi est $\frac{2}{3}$;
   - le nombre choisi est $\sqrt{5}$.

3. Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ?

FIGURE 3.25 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2008

Si l'arrivée de ces types de tâches marque une première évolution vers l'agrégation des trois OM locales, leur mise en œuvre dans les classes n'en reste pas moins la clef pour qu'elles mettent en jeu, au niveau technologico-théorique, les différents aspects des expressions algébriques comme les dialectiques procédural-structural, numérique-algébrique et l'équivalence des expressions. Cela repose sur la mise en place d'une organisation didactique prenant en compte les différents moments de l'étude pour aborder toutes les nécessités épistémologiques du calcul sur et avec les expressions algébriques et aborder les potentialités didactiques de tâches suffisamment robustes pour les travailler.

EXERCICE 1

On considère le programme de calcul ci-dessous :

• choisir un nombre de départ • multiplier ce nombre par (-2) • ajouter 5 au produit • multiplier le résultat par 5 • écrire le résultat obtenu.

1. a. Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5.

   b. Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on ?

2. Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

3. Arthur prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x, l'expression $(x-5)^2 - x^2$ permet d'obtenir le résultat du programme de calcul.
   A-t-il raison ?

FIGURE 3.26 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2010

1. Deux affirmations sont données ci-dessous.

   Affirmation 1

   Pour tout nombre a : $(2a+3)^2 = 4a^2 + 9$.

FIGURE 3.27 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2011

Exercice 4

On cherche à résoudre l'équation $(4x-3)^2 - 9 = 0$.

1) Le nombre $\frac{3}{4}$ est-il solution de cette équation ? et le nombre 0 ?

2) Prouver que, pour tout nombre x, $(4x-3)^2 - 9 = 4x(4x-6)$.

3) Déterminer les solutions de l'équation $(4x-3)^2 - 9 = 0$.

FIGURE 3.28 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2012

3.5.5 A propos de l'OM enseignée

L'OM enseignée est uniquement évoquée dans notre étude.

L'OM enseignée suit l'OM à enseigner dans le processus de transposition didactique. Elle « *apparaît dans le travail mathématique des élèves et dans la pratique que le professeur réalise avec eux dans la classe* » (Bosch, Fonseca, & Gascón, 2004). Étant donné les caractéristiques de l'OM à enseigner qui viennent d'être mises en évidence, il semble pertinent d'interroger les conséquences de l'OM à enseigner sur l'OM enseignée, relativement aux expressions algébriques. L'accès à l'OM enseignée nécessite l'analyse des pratiques et du rapport personnel des enseignants à l'algèbre et à son enseignement. Nous y avons eu accès par l'intermédiaire des travaux menés au sein du groupe IREM sur la différenciation en algèbre. Mais l'OM enseignée n'est analysée que pour une étude de cas dans le contexte particulier de la mise en œuvre des parcours d'enseignement différenciés (cf. chapitre 5). Elle n'est donc que très partiellement analysée et cela s'explique pour plusieurs raisons. Une analyse des pratiques des enseignants aurait nécessité d'autres approches théoriques que celles que nous avons adoptées et notre étude est davantage centrée sur le rapport personnel des élèves à l'algèbre que sur celui des enseignants. L'OM enseignée n'a pour autant pas été ignorée. D'une part, son analyse fait l'objet de la thèse en cours de Soraya Bedja, thèse en didactique des mathématiques développée au sein du projet PepiMeP. D'autre part, des travaux de didactique de l'algèbre que nous avons pu rencontrer, éclairent sur certaines contraintes de l'OM à enseigner vis-à-vis de l'OM enseignée. Par exemple, nous citons les travaux d'Abou Raad et Mercier (2009) :

> *L'action de l'enseignant consiste toujours, dans les classes observées, à proposer aux élèves la manipulation des systèmes d'ostensifs relatifs aux savoirs qu'il cherche à enseigner. (Abou Raad & Mercier, 2009)*

Dans cet extrait, les auteurs mettent en évidence que les technologies sont davantage guidées par les ostensifs que les non-ostensifs, ce qui se retrouve dans les pratiques algébriques des enseignants. Ils avancent que les enseignants manquent de termes techniques pour décrire et conduire les calculs. Ils n'ont à leur disposition que le langage courant et des ostensifs graphiques ou gestuels (« supprimer les parenthèses ») pour décrire les technologies qui justifient les manipulations des expressions.

En conclusion de ce chapitre, nous avons construit une OM de référence qui est une OM régionale relativement aux expressions algébriques. Elle composée de trois OM locales : OM1 sur la génération des expressions, OM2 sur l'équivalence des expressions et OM3 sur l'algèbre des polynômes. Ces trois OM locales sont intimement reliées par le fait que la convocation d'un type de tâches de l'une d'entre elles conduit à la convocation d'autres types de tâches de cette OM locale ou des deux autres. C'est pourquoi les raisons d'être de la génération des expressions algébriques et de leur transformation à partir des propriétés du calcul algébrique se trouvent dans les trois OM locales. Nous avons ensuite opérationnalisé cette OM de référence pour analyser les programmes scolaires du collège et de seconde dans le but de caractériser l'OM à enseigner. Nous avons mis en évidence que des savoirs et savoir-faire implicites relativement aux nécessités épistémologiques dégagées dans le chapitre 2. Cela nous a permis de dégager deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié. Dans le chapitre suivant, après avoir précisé en quoi le test diagnostic Pépite permet de caractériser les OM apprises par les élèves dans l'OM de référence, nous dégageons les technologies dominantes des OM apprises en lien avec la part d'implicites de l'OM à enseigner. Puis nous développons le modèle de parcours d'enseignement différencié et l'illustrons par le biais de quelques exemples.

Chapitre 4

Modélisation de parcours d'enseignement différencié

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de parcours d'enseignement différencié (PED). Nous tirons parti des conclusions du chapitre 3 : l'analyse de l'OM à enseigner à partir de l'OM de référence y met en évidence des besoins d'apprentissage ignorés par l'institution considérée. Ainsi, nous avons dégagé deux questions génératrices à aborder dans les parcours PED, qui sont les suivantes :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

Il reste maintenant à préciser ces questions à partir de l'examen des OM apprises comme annoncé dans l'introduction (cf. chapitre 1). Dans une première partie (§4.1), nous présentons le test diagnostic Pépite et l'analyse *a priori* qui permet de coder et d'analyser les réponses des élèves. Nous le mettons en perspective par rapport à l'OM de référence relative aux expressions algébrique. Cela conduit à l'interprétation du modèle de stéréotypes visant à catégoriser ces OM apprises et à les caractériser par des technologies « dominantes ». Nous concluons sur la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises, soit par l'énoncé de sous-questions génératrices à aborder dans les PED. Dans une deuxième partie (§4.2), nous présentons le modèle de PED que nous avons conçu au cours de notre recherche, en collaboration avec l'ensemble des partenaires du projet PépiMep : les enseignants d'un groupe IREM, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath. Dans une troisième partie (§4.3), nous proposons une analyse *a priori* de trois PED différents ; il s'agit des parcours qui sont testés en classe et qui feront, dans le chapitre 5, l'objet d'analyses *a posteriori*. La quatrième partie (§4.4) est consacrée à la description du mode de collaboration avec les partenaires du projet, élément déterminant de la viabilité du modèle de PED dans l'enseignement ordinaire, de son automatisation et de sa diffusion sur LaboMep.

4.1 Interprétation des OM apprises dans l'OM de référence

Dans ce paragraphe, nous présentons le test Pépite et l'analyse *a priori* qui permet de coder et d'analyser les réponses des élèves. Pour plus de précisions sur ces analyses, nous renvoyons le lecteur au rapport intermédiaire 2010 du projet PépiMeP [1] (Grugeon, Delozanne, Pilet, & Chenevotot-Quentin, 2010).

4.1.1 Les tâches diagnostiques

a. Des tâches qui recouvrent le domaine algébrique

Le test actuel est composé de dix tâches diagnostiques, soit 27 items (Chenevotot et al., 2012), choisis en croisant à la fois les différents aspects de la compétence algébrique, pris comme référence (cf. §1.2, Grugeon, 1997), et les types de tâches développés dans les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes de mathématisation pour généraliser, modéliser, prouver ou mettre en équation, exercices techniques de calcul ou de reconnaissance. Ces dix tâches diagnostiques recouvrent les problèmes du domaine algébrique.

Ces tâches diagnostiques impliquent différents types de tâches de l'OM globale du domaine de l'algèbre (cf. §3.1.1) présents dans les programmes de collège et de seconde (cf. tableau 4.1) :

- de calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du (ou se ramenant au) premier degré,
- de production d'expression [2], de formule ou de mise en équation pour traduire

1. Ce rapport est disponible à l'adresse `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm`
2. La distinction entre production et traduction dans cette catégorisation des types de tâches n'est pas prise dans le même sens que pour l'OM de référence construite dans notre travail. En effet, dans l'OM1, la distinction entre produire et traduire relève de savoir si l'introduction d'une lettre est à la charge de l'élève ou pas, alors qu'ici la traduction porte davantage sur l'interprétation de la structure des expressions et l'association entre deux registres sémiotiques.

Types de tâches	Nombre d'items	Item du test
de calcul algébrique	8 sur 27	1.1/1.2/1.3/1.4/5.1/5.2./5.3/5.4
de production d'expression	7 sur 27	3.1/6/8.1/8.2/8.3/9/10.2
de traduction ou de reconnaissance	11 sur 27	2.1/2.2/2.3/3.2/4.1/4.2/4.3/4.4/4.5/7/10.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 27	8.3/9/10.3

TABLEAU 4.1 – Organisation praxéologique du test composé de dix tâches diagnostiques (Chenevotot et al, à paraître)

des relations entre variables selon les conditions de l'énoncé,
- de traduction ou de reconnaissance de relations mathématiques d'un registre de représentation dans un autre,
- de résolution de problèmes dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) en mobilisant l'outil algébrique pour prouver des propriétés et mettre en équation.

Les tâches diagnostiques peuvent être des questions à choix multiples (QCM) ou des exercices à énoncés plus ou moins ouverts. Nous illustrons les items de chaque catégorie par une figure : la figure 4.1 pour les types de tâches de calcul algébrique, la figure 4.2 pour les types de tâches de production d'expression, la figure 4.3 pour les types de tâches de traduction ou de reconnaissance et la figure 4.4 pour les types de tâches de résolution de problèmes dans différents cadres. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour les énoncés de chaque tâche.

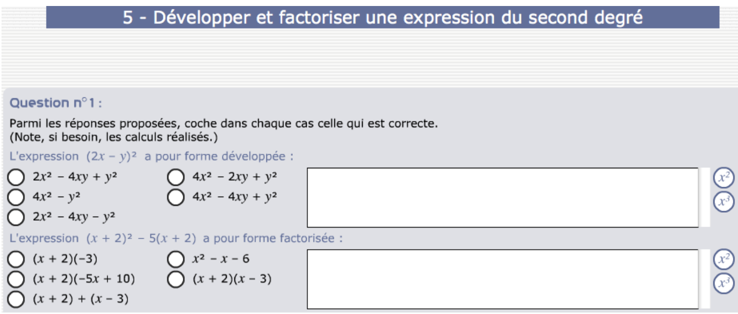


FIGURE 4.1 – Exercice 5, questions 1 et 2 - Exemple de tâche diagnostique relevant du calcul algébrique

Chaque tâche diagnostique du test peut être caractérisée par un type de tâches,

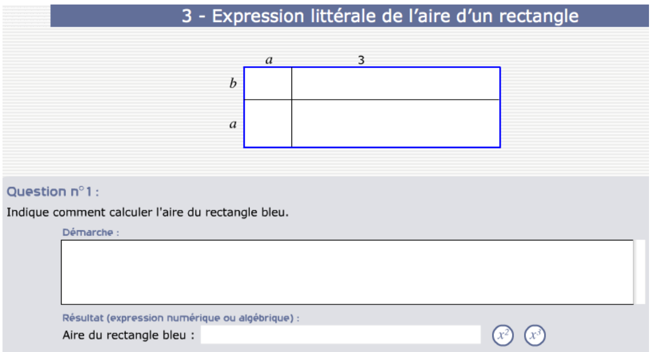


FIGURE 4.2 – Exercice 3, question 1 - Exemple de tâche diagnostique relevant de la production d'expression

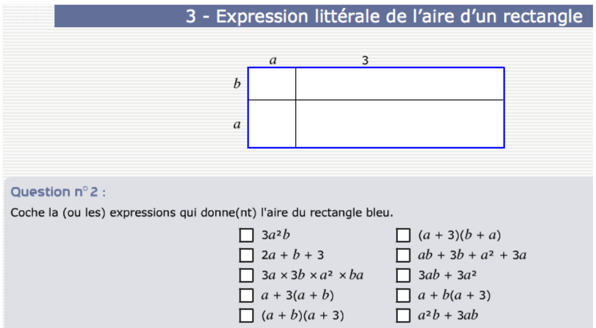


FIGURE 4.3 – Exercice 3, question 2 - Exemple de tâche diagnostique relevant de la traduction et de la reconnaissance

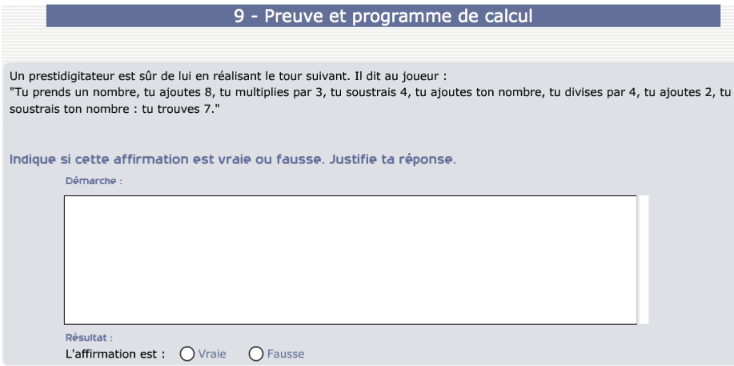
des techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés, les cadres et registres de représentation, la complexité des expressions en jeu, le niveau d'intervention des organisations mathématiques dans la tâche prescrite (Castela, 2007). Nous le montrons pour une des tâches diagnostiques la plus riche en terme d'analyse : le problème du prestidigitateur dans l'exercice 9. Nous nous appuyons sur Grugeon (2009, chapitre 2).

Le problème du prestidigitateur : l'exercice 9 de Pépite

La tâche est la suivante (cf. figure 4.4) :

> *Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit au joueur : « Tu penses à un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. » Indique si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifie ta réponse.*

Il s'agit de prouver que, pour tout nombre réel x, $P(x) = 7$, où $P(x)$ est l'expression algébrique du programme de calcul proposé. Cette tâche correspond au type de



9 - Preuve et programme de calcul

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit au joueur :
"Tu prends un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu soustrais 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu trouves 7."

Indique si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifie ta réponse.

Démarche :

Résultat :

L'affirmation est : Vraie Fausse

FIGURE 4.4 – Exercice 9 - Exemple de tâche diagnostique relevant de la résolution de problèmes dans différents cadres

tâches $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ « Prouver le résultat d'un programme de calcul » présent dans OM1. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 3 (cf. §3.1.6), ce type de tâches se décompose en plusieurs types de tâches :

- $T_{P-Exp-Resultat-PC}$: Prouver le résultat d'un programme de calcul (OM1)
  - T1 : Produire une expression à partir d'un programme de calcul (OM1)
    - T11 : Mobiliser la variable x pour produire une expression générale
    - T12 : Traduire un programme de calcul en une expression algébrique ($T_{T-Prog \to Exp}$ dans OM1)
  - T2 : Effectuer le calcul
    - T21 : Identifier la structure de l'expression pour reconnaître les propriétés à appliquer ($T_{Structure}$ dans OM2)
    - T22 : Développer une expression algébrique (T_D dans OM3)
    - T23 : Réduire une expression algébrique ($T_{FA-mon+mon}$ dans OM3)

Les trois OM locales sont impliquées dans la résolution de cette tâche. Les types de tâches qui décomposent $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ conditionnent le choix des composantes mises en jeu dans l'analyse, selon la structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique.

Les variables caractérisant cette tâche sont les suivantes :

- *Nature des types de tâches* : prouver qu'une propriété numérique est vraie ; ce type de tâche fait appel à d'autres sous-types de tâches ;
- *Nature des expressions et complexité* : expression du premier degré à une variable x, globale parenthésée $[(x + 8) \times 3 - 4 + x]/4 + 2 - x$, à six niveaux de parenthèse, et mettant en jeu trois additions, deux soustractions, une multiplication et une division ; le programme de calcul est choisi pour

que l'expression obtenue soit un nombre ou un multiple du nombre initial ; les coefficients numériques peuvent varier selon des contraintes fixées.

- *Registres de représentation en jeu* : registre des programmes de calcul, registre des écritures algébriques, du registre discursif vers le registre des écritures algébriques ;
- *Niveau d'adaptation des connaissances en jeu* : disponible, étant donnée l'ouverture de la question.

La technique attendue met en jeu les éléments technologiques et théoriques suivant : la traduction algébrique, la preuve algébrique, la lettre comme nombre généralisé, l'expression globale parenthésée ou écriture de chaque étape de calcul, l'égalité comme relation d'équivalence.

b. Des tâches représentatives des types de tâches des trois OM locales

Afin d'interpréter les tâches diagnostiques et leur analyse dans l'OM de référence sur les expressions algébriques qui guide notre travail, nous relevons quel type de tâche de l'OM de référence intervient dans chaque tâche diagnostique. Ce travail est présenté dans le tableau 4.2. Seul le type de tâches convoqué par la tâche est indiqué. Nous ne présentons pas tous les types de tâches qui les composent (cf. chapitre 3) ; nous indiquons uniquement quelles OM locales sont impliquées dans la résolution. Le tableau 4.2 met en évidence que les principaux types de tâches constitutifs de chaque OM de référence sont convoqués dans les tâches diagnostiques relatives aux expressions algébriques. Ces types de tâches mettent en jeu l'agrégation des trois OM locales.

4.1.2 L'analyse *a priori* pour coder les réponses des élèves

a. Plusieurs niveaux de diagnostic

Les réponses des élèves ne sont pas seulement analysées en termes de réussite ou d'échec. Nous allons au-delà de l'évaluation de la validité des réponse sen les codant en termes de cohérences de fonctionnement selon une analyse *a priori* fondée sur la grille d'analyse multidimentionnelle de Grugeon (1997). Plusieurs niveaux de codage des réponses des élèves sont définis dans le diagnostic pour établir le profil cognitif de l'élève et son stéréotype. Nous interprétons ces différents codages pour les assimiler soit à des technologies institutionnellement reconnues, soit à des technologies qui justifient et légitiment pour les élèves des techniques erronées récurrentes dans cette

Exercice	Item	OM1	OM2	OM3	Types de tâches
1	1.1				
	1.2				
	1.3				
	1.4				
2	2.1		x		$T_{Prouver-equiv}$
	2.2		x		$T_{Prouver-equiv}$
	2.3		x		$T_{Prouver-equiv}$
3	3.1	x			$T_{T-Aire \rightarrow Exp}$
	3.2	x	x	x	$T_{A-Aire-Exp}$
4	4.1		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.2		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.3		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.4		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.5		x		$T_{Prouver-equiv}$
5	5.1		x	x	$T_{Associer}$
	5.2		x	x	$T_{Associer}$
	5.3				
	5.4				
6	6				$T_{T-Relation \rightarrow Formule}$
7		x			$T_{T-Exp \rightarrow Aire}$
8	8.1	x			$T_{T-Aire \rightarrow Exp}$
	8.2	x			$T_{T-Aire \rightarrow Exp}$
	8.3			x	$T_{DDS-reel \times som}$
9	9	x	x	x	$T_{P-Exp-Resultat-PC}$
10	10.1				
	10.2	x			$T_{T-Relation \rightarrow Exp}$
	10.3				
Légende. Les lignes grisées correspondent aux items qui portent sur les expressions algébriques. Les lignes blanches sont celles qui ne portent pas sur des expressions algébriques mais sur des formules ou des équations.					

Tableau 4.2 – Répartition des tâches diagnostiques du logiciel Pépite suivant les trois composantes du stéréotype et les trois OM locales de référence

institution. Nous l'illustrons sur l'exemple du problème du prestidigitateur.

b. Premier niveau de diagnostic : le diagnostic local ou le codage des réponses des élèves par exercice

Le codage des réponses des élèves aux différentes questions du test diagnostique s'effectue en deux temps. D'abord, la réponse de l'élève est identifiée à un « type de réponse » qui correspond à une technique correcte, incorrecte ou inadaptée mise en œuvre par l'élève [3]. Les différentes types sont issus d'une analyse *a priori* des procédures que les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre au niveau scolaire considéré. Par exemple, pour l'exercice 9, seize types dominants sont distingués, chacun avec des variabilités (cf. (Grugeon et al., 2010, p. 55)).

Puis chaque type est codé grâce à une grille d'analyse multidimensionnelle (Grugeon, 1997), selon cinq dimensions : la validité de la réponse (V), le statut des lettres (L), le niveau technologique en jeu dans les écritures algébriques utilisées lors des transformations symboliques (EA), le niveau technologique en jeu dans les représentations utilisées lors d'une traduction (T), le niveau technologique de justification (J). Ce codage correspond au niveau technologique associé à la technique mise en œuvre l'élève. Nous renvoyons à l'annexe A pour une illustration du codage des réponses des élèves (Prévit, 2008) sur l'exercice 9 de Pépite. Nous pouvons associer les trois dimensions L, T et EA de ce codage aux technologies associées aux trois OM locales de référence : L correspond à OM1 pour la production et la mobilisation des lettres, T correspond à OM1 pour la traduction et EA correspond à OM2 et OM3 pour l'interprétation et la transformation des expressions. Remarquons qu'une dimension combine OM2 et OM3. L'interprétation de la structure des expressions pour les transformer n'est pas détachée de la transformation des expressions.

Pour donner une idée générale de la démarche et témoigner de la richesse d'analyse en vue d'une exploitation visant à en dégager des catégories d'OM apprises, nous donnons des exemples de réponses d'élèves et de codage à l'exercice 9 du test. Pour cela, nous nous appuyons sur Delozanne et al. (2010). Le lecteur peut se référer à Grugeon et al. (2010) ; Prévit (2008) ; Darwesh (2010) pour une description détaillée des différents types retenus et du codage des réponses des élèves pour chaque tâche diagnostique.

Les réponses de quatre élèves d'une classe de troisième à l'exercice 9 du test

3. Même si l'analyse n'est pas présentée en terme de technique, nous identifions les types comme des codages de techniques en lien avec le raisonnement et les propriétés utilisés par les élèves. Il serait envisageable de décrire chaque type en terme de technique correcte, incorrecte ou inadaptée.

Khemarak	Nicolas	Karine	Laurent
Soit 5 un nombre ((5+8)×3-4+5)/4+2-5=7 ? ((13)×3-4+5)/4+2-5=7 ? (39-4+5)/4+2-5=7 ? 10+2-5=7 ? 10-3=7 ? 7=7 ? Oui donc cela marche	3 + 8 = 11 11 × 3 = 33 33 - 4 = 29 29 + 3 = 32 32/4 = 8 8 + 2 = 10 10 - 3 = 7	x + 8 = 8x 8x 3 × 8x = 24+3x= 27x 27x-4 = 23x 23x+x=24x 24x/4=6x 6x+2=8x 8x-x=7	=[(x+8)×3-4+x]/4+2-x =(3x+24-4+x)/4+2-x =4x+20/4 + 2-x =x+5 +2-x =7

Figure 4.5 – Réponses de quatre élèves à l'exercice 9 du test Pépite (extrait de Delozanne et al, 2010)

Pépite sont présentées dans la figure 4.5. Ces exemples ont pour objectif de montrer la diversité des réponses des élèves, la largeur du spectre des réponses analysées automatiquement et des exemples de cohérence que le logiciel détecte dans l'activité des élèves. Remarquons que l'analyse automatique des réponses à cet exercice (Prévit, 2008) ne se prétend pas exhaustive, mais qu'elle examine toutes les réponses correspondant aux types établis par les didacticiens. Elle produit, en particulier, automatiquement les codages indiqués dans le tableau 4.3.

Khemarak n'est pas encore entré dans une démarche d'utilisation de l'algèbre pour prouver puisqu'il se limite à donner un exemple ; toutefois, sa maîtrise des calculs numériques et sa façon d'appréhender l'expression numérique de façon globale et de la transformer par équivalence, est un levier d'apprentissage qui devrait lui permettre d'entrer rapidement dans une démarche algébrique. Sa réponse est du type 12.2 : « Preuve par un exemple numérique, l'énoncé est traduit par une équation et les calculs sont corrects », codé [4] V3, L5, E1, EA1, J2, T1. Cet élève ne convoque par le type de tâches T11 qui intervient dans la résolution. Il convoque T12 dans une traduction numérique.

Nicolas utilise, lui aussi, une preuve par l'exemple et maîtrise ces calculs simples. Par contre, il utilise une démarche arithmétique en indiquant une suite de calculs où le signe égal « annonce » un résultat. Sa réponse est du type 12.3 : « Preuve par des exemples avec une traduction correcte de l'énoncé pas à pas », codé V3,

4. Le codage des réponses des élèves du type 12.2 présenté dans l'annexe A n'est pas tout à fait identique à celui-ci parce que le codage a évolué depuis le début du projet notamment pour mieux spécifier les registres sémiotiques utilisés dans les réponses des élèves.

Dimensions	Exemples de critères et leur code			
	Khemarak	Nicolas	Karine	Laurent
Justification	Par l'exemple (J2)	Par l'exemple (J2)	De type formel scolaire avec application de règles fausses (J31)	Par l'algèbre (J1)
Utilisation des lettres	Pas d'utilisation des lettres (L5)	Pas d'utilisation des lettres (L5)	Utilisation des lettres avec utilisation de règles fausses (L3)	Utilisation correcte des lettres (L1)
Traduction	Traduction par une expression globale parenthésée (T1)	Traduction par expression partielle (T2)	Traduction par expression partielle enchaînée en succession d'opérations (T4)	Traduction par expression globale parenthésée (T1)
Signe =	Relation d'équivalence (E1)	Annonce un résultat (E2)	Annonce un résultat (E2)	Relation d'équivalence (E1)
Écritures algébriques	Correctes (EA1)	Correctes (EA1)	Identification incorrecte de + et × (assemble les termes)(EA42) règles fausses : $x + a \to x\ a$ $a\ x \pm b \to (a \pm b)\ x$ $a\ x - x \to a - 1$	Erreur de parenthèse avec mémoire de l'énoncé (EA31)
Validité	Réponse invalide (V3)	Réponse invalide (V3)	Réponse invalide (V3)	Réponse invalide (V3)

TABLEAU 4.3 – Codage des réponses de quatre élèves à l'exercice 9 du test Pépite (extrait de Delozanne et al, 2010)

L5, E2, EA1, J2, T2. Cet élève ne convoque par le type de tâches T11 et T12 qui interviennent dans la résolution de la tâche, il ne mobilise pas d'écriture numérique ou algébrique globalement parenthésée.

Karine utilise la lettre x, mais sa résolution est qualifiée de justification par le « formel scolaire » car elle utilise des règles fausses bien identifiées par les enseignants et les chercheurs en didactique. Par cette expression, nous désignons les élèves pour qui, « faire des mathématiques, c'est appliquer des règles vides de sens ». Sa réponse est du type 7.3 : « Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée », codé V3, L3, E2, EA42, J31, T4. Cette élève convoque T11 mais ne convoque pas T12 pour traduire globalement l'énoncé. Elle convoque aussi T23, mais avec des règles de type $x + a \to xa$ (concaténation). Cette technique indique globablement une technologie arithmétique.

Laurent est entré dans une démarche algébrique et son raisonnement prouve qu'il sait traiter des expressions équivalentes. Il convoque T11 et T12. Comme beaucoup d'élèves à ce niveau (classe de troisième), il ne maîtrise pas encore parfaitement l'utilisation des parenthèses mais il garde le sens des opérations. Sa réponse est du type 7.3 « Preuve algébrique avec une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée », codé V3, L1, E1, EA31, J1, T1.

Ces exemples montrent que le codage des réponses des élèves s'appuie sur les techniques qu'ils mettent en œuvre et les éléments technologiques qu'ils utilisent pour résoudre une tâche diagnostique. Ces éléments technologiques font référence aux trois OM locales. Le codage des réponses des élèves est le niveau de diagnostic le plus fin mis en œuvre. Il code les réponses des élèves sur chaque tâche du test Pépite. C'est une analyse transversale du codage des réponses qui permet de rendre compte de la cohérence de fonctionnement de l'élève sur l'ensemble des tâches et d'établir son profil cognitif. Cette analyse comporte deux niveaux. Le niveau 2 du diagnostic calcule des indicateurs et des descripteurs intermédiaires qui agrègent des codes établis par le diagnostic local. Le niveau 3 du diagnostic s'appuie sur les valeurs des descripteurs et des indicateurs du niveau précédent pour attribuer un niveau sur chaque composante du stéréotype.

c. Deuxième niveau de diagnostic : le diagnostic global et les indicateurs

Le deuxième niveau de diagnostic est à la fois quantitatif et quantitatif. L'analyse quantitative est présentée par des descripteurs qui traduisent le taux de réussite selon les types de tâches diagnostiques. Ils correspondent au taux de questions réussies par rapport au nombre de questions posées et au taux de questions réussies par rapport au nombre de questions abordées. L'analyse est aussi qualitative à partir d'indicateurs que nous interprétons comme un niveau technologique dominant sur les praxéologies développées globalement par les élèves sur l'ensemble des tâches.

Plusieurs indicateurs sont calculés pour chacune des trois composantes qui caractérisent le stéréotype. Rappelons ces trois composantes :

- Calcul algébrique (CA) : le calcul algébrique (dimension objet de l'algèbre). Cette composante sert à évaluer le degré de maîtrise du calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.
- Usage de l'algèbre (UA) : l'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (dimension outil de résolution et de preuve de l'algèbre). Cette composante permet d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.
- Traduction algébrique (TA) : la traduction d'une représentation en une autre. Il s'agit ici d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).

Trois indicateurs interviennent pour la composante Calcul algébrique (cf. tableau 4.4) :

- La Maîtrise du calcul algébrique (MCA) évalue la maîtrise du calcul algébrique dans les exercices techniques.
- La Maîtrise des règles (MR) est calculée à partir du code EA, qui représente le nombre d'utilisations correctes des règles de transformation (EA1) ou de maîtrise technique fragile (EA2) ou les règles de transformation non maîtrisées, mais avec identification correcte du rôle des opérateurs $+$ et $\times$ (EA3).
- L'Interprétation des expressions (IE) correspond au taux d'exercices d'interprétation des expressions algébriques.

Trois indicateurs interviennent pour la composante Usage de l'algèbre (cf. tableau 4.5) :

- La Maîtrise de l'outil algébrique (MOA) évalue la mobilisation de l'algèbre dans les exercices de mathématisation et particulièrement ceux qui nécessitent d'utiliser l'algèbre pour prouver (code J).

- La Justification algébrique (JA) est calculée à partir du taux d'exercices de mathématisation réussis, du nombre de justifications algébriques par rapport aux justifications par l'exemple ou à des arguments de type « formel scolaire » (code J).
- Le Statut des lettres (SL) est calculé à partir des critères de la dimension usage des lettres (code Li) avec une pénalité pour l'utilisation de lettres comme abréviations (L4) ou pour calculer avec des règles fausses (L3).

Deux indicateurs interviennent pour la composante Traduction algébrique (cf. tableau 4.6) :

- La Maîtrise de la traduction algébrique (MTA) évalue la maîtrise de la traduction algébrique dans les exercices d'interprétation des expressions algébriques en articulant avec d'autres registres (SIEAAR).
- La Traduction des relations mathématiques (TRM) évalue la maîtrise de la traduction des relations mathématiques dans les exercices de traduction entre des registres et celui des écritures algébriques (SIEAAR).

Composante	Descripteurs	Nature	Indicateurs	Valeurs	
Calcul algébrique	Taux de réussite sur les exercices techniques	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Taux de réussite sur les exercices mettant en œuvre l'interprétation des expressions algébrique	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Maîtrise du calcul algébrique (MCA)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise défaillante	-0
	Maîtrise des règles (MR)	Qualitatif	Critères de la dimension : écriture algébrique (EA)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise défaillante	-0
				Rôle des opérateurs non maitrisé	-1
	Interprétation des expressions (IE)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V) et de la dimension justification	Interprétation appropriée des expressions	+2
				Interprétation des expressions moyennement appropriée	+1
				Interprétation défaillante	-1

TABLEAU 4.4 – Les différentes valeurs des indicateurs de la composante CA (Grugeon et al., 2010)

Nous pouvons associer aux différentes valeurs sur les indicateurs des éléments technologiques impliqués dans la convocation de types de tâches relevant des trois

Composante	Descripteurs	Nature	Indicateurs	Valeurs	
Usage de l'algèbre	Taux de réussite sur les exercices de mathématisation	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Maîtrise de l'outil algébrique (MOA)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise défaillante	-0
	Type de justification (JA)	Qualitatif	Critères de la dimension : type de justification(J)	Justification par l'algèbre fortement dominante	+3
				Justification par l'algèbre faiblement dominante	+2
				Justification par l'algèbre dominant dans un contexte trop faible	+1
				Justification de type scolaire dominante	-0
				Justification numérique dominante	-1
	Statut des lettres (SL)	Qualitatif	Critères de la dimension : statut des lettres (L)	Utilisation adaptée des lettres	+3
				Utilisation des lettres comme variable ou inconnue ou nombre généralisé	+2
				Utilisation de lettre évaluée	+1
				Pas d'utilisation des lettres	-0
				Utilisation des lettres comme abréviation ou en appliquant des règles de calcul fausses	-1

TABLEAU 4.5 – Les différentes valeurs des indicateurs de la composante UA (Grugeon et al., 2010)

Composante	Descripteurs	Nature	Indicateurs	Valeurs	
Traduction algébrique	Taux de réussite sur les exercices mettant en œuvre l'utilisation de l'outil algébrique pour mettre en équation	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Maîtrise de la traduction algébrique (MTA)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise insuffisante	-0
	Traduction des relations mathématiques (TRM)	Qualitatif	Critères de la dimension : traduction(T)	Traduction des relations mathématiques	+1
				Traduction abréviative	-0

TABLEAU 4.6 – Les différentes valeurs des indicateurs de la composante TA (Grugeon et al., 2010)

OM locales. Les valeurs sur les indicateurs des composantes UA et TA, à savoir MOA, JA, SL, MTA et TRM correspondent à des éléments technologiques de OM1 comme les règles de conversion entre un registre sémiotique et celui des écritures algébriques. Les valeurs sur les indicateurs MR et MCA de la composante CA correspondent à des éléments technologiques de OM3 comme les règles de calcul impliqués. Les valeurs sur les indicateurs MCA et IE de la composante CA correspondent à des éléments technologiques de OM2 comme la référence à l'équivalence des expressions, leur interprétation des expressions suivant les deux aspects procédural ou structural.

Ces descripteurs et indicateurs sont des éléments de diagnostic intermédiaires entre le codage des réponses et le profil des élèves. Ils permettent au troisième niveau du diagnostic de calculer par un algorithme le stéréotype de chaque élève.

d. Troisième niveau de diagnostic : le diagnostic global et le stéréotype

Un stéréotype se trouve ainsi caractérisé par des niveaux qui sont attribués sur les trois composantes. La détermination des niveaux s'appuie sur un algorithme défini à partir des éléments du modèle multidimensionnel et des calculs des descripteurs et des indicateurs. Une présentation détaillée de l'algorithme est présentée dans l'annexe A (voir Grugeon et al., 2010, p. 110). Ces niveaux vont de 1 à 4, suivant les composantes. Un stéréotype est de la forme : $\mathrm{CA}i\,\mathrm{UA}j\,\mathrm{TA}k$ $(1 < i, k < 3$ et $1 < j < 4)$.

Nous reprenons la présentation synthétique de chaque composante présentée dans Delozanne et al. (2005) ; Grugeon (2009) pour rappeler la signification des niveaux attribués à chacune d'elles et faire le lien avec l'OM de référence dans le paragraphe 4.1.4. Cette présentation nous sert ensuite d'appui pour dégager les éléments technologiques dominants mobilisés par les élèves, en référence aux technologies présentées dans le chapitre 3 relativement aux trois OM locales de référence. D'après le paragraphe précédent (§ c.), les niveaux sur la composante Calcul algébrique (CA) peuvent s'interpréter pour faire des hypothèses sur les éléments technologiques mis en jeu par les élèves dans la résolution de tâches convoquant des types de tâches de OM2 et OM3. Les niveaux sur les composantes Usage de l'algèbre (UA) et Traduction algébrique (TA) peuvent s'interpréter pour faire des hypothèses sur les éléments technologiques mis en jeu par les élèves dans la résolution de tâches convoquant des types de tâches de OM1. Les formulations retenues s'adressent aux enseignants et ne sont pas des formulations didactiques. Elles résultent d'un travail de conception participative avec les enseignants.

La première composante du stéréotype est le Calcul algébrique, notée CA, porte sur la dimension *objet* de l'algèbre.

> *« CA a pour but d'évaluer le degré de maîtrise et la nature des techniques de calcul mis en jeu par l'élève. Les traitements mis en jeu sont relatifs à la conduite et au contrôle des calculs numériques, du calcul algébrique, à l'interprétation des expressions numériques et algébrique. » (Grugeon, 2009, p. 58)*

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Usage de l'algèbre	UA	Étudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve	*Niveau 1* : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique non adaptée.
			Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	TA	Étudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction pas toujours adaptée.
			Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Étudier la capacité à calculer algébriquement	*Niveau 1* : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

Tableau 4.7 – Les niveaux sur les composantes UA, TA et CA (Chenevotot et al., 2009)

La description des trois niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

La deuxième composante du stéréotype est l'Usage de l'algèbre, notée UA. La description des quatre niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

> *« Il s'agit de déterminer le mode selon lequel l'élève mobilise la démarche algébrique dans les tâches diagnostiques selon les différents emplois de l'algèbre mis en jeu. Il s'agit aussi d'analyser les types de justification et le statut de l'égalité mis en jeu dans la résolution. Cette composante permet d'évaluer l'entrée de l'élève dans la pensée algébrique, son éventuelle compréhension du rôle de l'algèbre comme outil de résolution et de preuve en rupture avec les démarches arithmétiques. » (Grugeon, 2009, p. 57)*

La description des quatre niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

La troisième composante du stéréotype, notée TA.

> *« Elle permet d'étudier la mise en relation entre les registres de représentation du domaine algébrique. En d'autres termes, il s'agit de déterminer si l'élève parvient où non à articuler le registre des écritures algébriques et les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique) et le mode de mise en relation des registres utilisé. Il s'agit d'analyser comment les*

élèves interprètent des expressions algébriques en articulation avec les autres registres. L'évaluation de cette composante est essentielle pour déterminer l'efficacité avec laquelle l'élève va utiliser l'outil algébrique, efficacité fortement corrélée à sa flexibilité dans la traduction ou l'interprétation des représentations d'un registre dans un autre. » (Grugeon, 2009, p. 58)

La description des trois niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

Le nombre de stéréotypes possibles s'élève à trente-six, ce qui est encore trop élevé, tant pour permettre de prendre des décisions sur les OM ponctuelles à proposer aux élèves que pour organiser un enseignement différencié viable dans les classes. Nous nous interrogeons : Comment regrouper les stéréotypes pour catégoriser les OM apprises ?

4.1.3 Le regroupement des stéréotypes pour catégoriser les OM apprises

Dans la définition du stéréotype, plusieurs niveaux sur chaque composante ont été définis. Ils correspondent à un stade de développement dans l'activité algébrique des élèves. Du point de vue anthropologique, ces différents niveaux correspondent au fait que, pour résoudre les tâches mettant en jeu des types de tâches de l'OM régional sur les expressions algébriques, les élèves utilisent des techniques qui ne mobilisent pas, au niveau technologique, les mêmes connaissances (propriétés numériques, propriétés algébriques) ni les mêmes modes de justification (Grugeon et al., 2012).

Un stéréotype est de la forme : CAi UAj TAk ($1 < i, k < 3$ et $1 < j < 4$), ce qui élève le nombre de stéréotypes possibles à trente-six. Ce modèle donne une vision globale des connaissances et des modes de raisonnement convoqués dans la résolution des tâches relevant du calcul sur et avec les expressions algébriques. Mais il est composé d'un nombre de stéréotypes trop élevé pour proposer des PED à chacun. Nous avons été conduit à regrouper les stéréotypes (Grugeon et al., 2012).

Nous regroupons les stéréotypes selon les composantes CA puis UA. Ce choix se justifie du fait, d'une part, que nous avons centré notre travail sur les expressions algébriques et le calcul sur ces expressions et, que, d'autre part, l'analyse de l'OM à enseigner a révélé une priorité pour les enseignants d'avoir à disposition de nouvelles propositions pour travailler le calcul sur les expressions algébriques. En effet, bien souvent, les enseignants proposent de refaire des tâches de calcul algébrique de même nature. De plus, nous avons montré dans le paragraphe 4.1.1 que les composantes CA et UA recouvrent les trois OM locales.

D'abord, nous regroupons les stéréotypes selon leur niveau sur la composante

CA, ce qui donne trois groupes : le groupe A pour le niveau 1 sur CA, le groupe B pour le niveau 2 sur CA et le groupe C pour le niveau 3 sur CA. Dans certains parcours d'enseignement différencié, notamment ceux qui visent à reconstruire des raisons d'être aux objets de l'algèbre, la dimension outil intervient. Cela nous amène à décomposer chaque groupe en deux sous-groupes. Un premier, le sous-groupe « + », pour les niveaux 1 et 2 sur UA et un second, le sous-groupe « − » pour les niveaux 3 et 4 sur UA. Le sous-groupe « + » correspond aux élèves qui ont un usage adapté de l'algèbre, dans au moins un type de problèmes alors que ceux du sous-groupes « − » sont majoritairement dans des démarches arithmétiques générant un usage immotivé et inadapté de l'algèbre. La composante TA est corrélée avec l'usage de l'outil algébrique qui intervient donc indirectement dans les regroupements. La répartition des groupes ainsi effectuée est présentée dans le tableau 4.8. Ce regroupement semble le plus pertinent pour travailler sur les expressions et le calcul algébrique. D'autres choix sont envisageables. Il est par exemple possible de reproduire une stratégie analogue à partir de l'entrée privilégiant la composante UA pour travailler la résolution de problèmes.

Gr C						Gr B						Gr A					
C-			C+			B-			B+			A-			A+		
CA	UA	TA	CA	UA	TA	CA	UA	TA	CA	UA	TA	CA	UA	TA	CA	UA	TA
3	3	1	3	1	1	2	3	1	2	1	1	1	3	1	1	1	1
3	3	2	3	1	2	2	3	2	2	1	2	1	3	2	1	1	2
3	3	3	3	1	3	2	3	3	2	1	3	1	3	3	1	1	3
3	4	1	3	2	1	2	4	1	2	2	1	1	4	1	1	2	1
3	4	2	3	2	2	2	4	2	2	2	2	1	4	2	1	2	2
3	4	3	3	2	3	2	4	3	2	2	3	1	4	3	1	2	3

Tableau 4.8 – La répartition des stéréotypes en trois groupes et six sous-groupes

Ce regroupement permet de répartir équitablement les trente-six stéréotypes. Le nombre restreint de groupes peut faciliter l'organisation de la différenciation au sein de la classe tout en se rapprochant des pratiques habituelles des enseignants. Il regroupe les « bons » en calcul algébrique (groupe A), les « moyens bons » en calcul algébrique (groupe B) et les « fragiles » en calcul algébrique (groupe C) en distinguant, à l'intérieur de chaque groupe, les « bons à moyens bons » (sous-groupes « + ») et les « fragiles à très fragiles » (sous-groupes « - ») dans la résolution des différents types de problèmes du domaine algébrique.

Les groupes C+ et A- sont composés de stéréotypes peu probables ou dont nous faisons l'hypothèse qu'ils seront rencontrés rarement. Ce point est déjà évoqué dans les travaux de Grugeon (2009) et de (Vincent et al., 2005).

> *« Si en théorie on dispose de trente-six stéréotypes, certains sont improbables. Dans le corpus de trois cent quarante élèves de troisième et de seconde dont nous disposons à l'heure actuelle, treize stéréotypes ont été relevés et souvent moins de six stéréotypes différents dans une classe ce qui nous rapproche du nombre de catégories spontanément identifiées par les enseignants. » (Grugeon, 2009, p. 63)*

Ainsi, parmi les trente-six stéréotypes, certaines combinaisons semblent improbables notamment celles des groupes C+ et A-. C'est le cas du stéréotype (CA1, UA3/4 TA3) du groupe A-. Nous faisons l'hypothèse qu'un élève qui maîtrise le calcul algébrique l'utilise vraisemblablement de manière adaptée dans la résolution de problèmes. Inversement le stéréotype (CA3, UA1/2, TA1) du groupe C+ semble improbable. Nous faisons l'hypothèse qu'un élève qui ne maîtrise pas le rôle des opérateurs et des délimitants dans les calculs algébriques a une maîtrise probablement inadaptée de l'algèbre dans la résolution de problèmes et favorise des démarches arithmétiques. Nous faisons donc l'hypothèse que les groupes C+ et A- relèvent de stéréotypes improbables et que peu d'élèves se verront affectés aux groupes C+ et A-. Une analyse des stéréotypes rencontrés sur l'ensemble des expérimentations menées dans le cadre de la thèse permettra de revenir sur cette hypothèse dans la chapitre 5.

Ce regroupement catégorise tous les stéréotypes possibles, ce qui répond à une contrainte du projet PepiMeP. En effet, bien que certains stéréotypes apparaissent rarement, la contrainte informatique liée à l'implémentation du modèle de PED dans LaboMeP nécessite d'envisager tous les cas possibles.

Ce regroupement des stéréotypes nous permet de dégager une catégorisation d'OM apprises et de les caractériser par des technologies dites « dominantes ».

4.1.4 Une catégorisation des OM apprises

Nous interprétons chaque groupe de stéréotypes en terme de catégories d'OM apprises autour du calcul sur les expressions algébriques. Nous présentons ces OM apprises comme mobilisant des technologies de façon dominante, c'est-à-dire des éléments technologiques et théoriques utilisés majoritairement et relevant de la mobilisation d'objets mathématiques et de propriétés associées, des modes de discours, d'utilisation des ostensifs et de validation des calculs. Selon nous, seule une description des OM apprises au niveau des technologies donne accès à une vue d'ensemble de la cohérence des modes de fonctionnement et de raisonnement des élèves [5]. Les

5. Ce point de vue est proche de celui introduit par (Croset, 2009, p. 264) : « *Ces comportements stables dans l'erreur doivent, selon nous, pouvoir s'expliquer, se justifier par la présence*

technologies « dominantes » permettent de faire des hypothèses sur les techniques utilisées (attendues, erronées ou inadaptées) par les élèves et le fait que certaines classes d'erreurs puissent vivre dans les pratiques algébriques des élèves. Nous les présentons par groupe de stéréotypes dans le tableau 4.9 pour le groupe C, le tableau 4.10 pour le groupe B, le tableau 4.11 pour le groupe A. Notons que, dans ces tableaux, les technologies dominantes des groupes C+ et A- sont peu développées. Elles ne sont pas pertinentes, puisque, comme nous l'avons déjà souligné (cf. §4.1.3), les stéréotypes de ces groupes sont improbables et nous nous attendons à les rencontrer rarement dans les expérimentations.

<table>
<tr><th colspan="2">Groupe C</th></tr>
<tr><td colspan="2">Θ_C Les élèves articulent insuffisamment les OM ponctuelles de OM2 et OM3. La transformation des expressions dans OM3 ne donne pas de raisons d'être à la reconnaissance de la structure ($T_{structure}$ dans OM2). La conduite des calculs s'appuie davantage sur la reconnaissance d'ostensifs (signes $+$, $-$, $=$, etc.) et rarement, au niveau technologico-théorique, sur la hiérarchie des opérateurs, les propriétés du calcul algébrique et le rôle des parenthèses. Les écritures algébriques ou numériques en ligne sont rarement interprétées selon leurs aspects procédural et structural ce qui se traduit par un calcul non contrôlé et un appui sur des démarches arithmétiques. Cela conduit à un manque d'acceptation d'un résultat contenant un signe opératoire et donc à des règles de transformation et de formation incorrectes du type concaténation ($3+2a=5a$) ou linéarisation ($a^2=2a$). Les modes de raisonnements s'appuient rarement sur l'équivalence des expressions (OM2) et la dialectique entre l'algébrique et le numérique et privilégient des formulations d'ordre légal. On peut faire l'hypothèse que les élèves n'ont pas franchi la première étape du processus d'algébrisation.</td></tr>
<tr><th>Groupe C-</th><th>Groupe C+</th></tr>
<tr><td>Θ_{C-} Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et donnent peu de raisons d'être à l'algèbre. L'algèbre comme outil de résolution de problèmes est immotivée et peu adaptée. Les élèves ont majoritairement recours à des démarches arithmétiques et mobilisent rarement les lettres. Ils ont des difficultés à mobiliser la hiérarchie des opérateurs dans la production d'expressions.</td><td>Θ_{C+} Les élèves articulent OM1 avec OM2 et OM3 et commencent à donner des raisons d'être à l'algèbre comme outil de résolution de problèmes.</td></tr>
</table>

Tableau 4.9 – Technologie « dominante » du groupe C

d'une technologie-en-acte chez ces élèves. C'est parce qu'ils ont en tête des éléments technologiques (erronés) qu'ils sont capables d'avoir un comportement stable (dans l'erreur) ».

<table>
<tr><th colspan="2">Groupe B</th></tr>
<tr><td colspan="2">Θ_B Les élèves articulent partiellement les OM ponctuelles de OM2 et OM3 pour conduire, anticiper et contrôler les transformations algébriques. Pour transformer des expressions simples sans parenthèse, ils s'appuient sur la structure des expressions et leur équivalence (OM2). Pour des expressions plus complexes avec parenthésage, ils s'appuient majoritairement sur l'aspect syntaxique des expressions et privilégient leur aspect procédural ce qui conduit souvent à des calculs « à l'aveugle » et non contrôlés ne préservant pas l'équivalence des expressions ainsi qu'à des règles de transformation erronées en lien avec le parenthésage du type $(a+2)^2 = a^2+4$. La conduite et le contrôle des calculs est davantage guidée par les ostensifs graphiques (flèches, surlignants) et des justifications d'ordre légal du type « il faut » que par les non-ostensifs et notamment les propriétés algébriques et le rôle des parenthèses. La dialectique de l'algébrique et du numérique est rarement utilisée pour conduire les calculs.</td></tr>
<tr><th>Groupe B-</th><th>Groupe B+</th></tr>
<tr><td>Θ_{B-} Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et encore donnent peu de raisons d'être à l'algèbre comme outil de modélisation. L'outil algébrique pour résoudre les problèmes du domaine algébrique peut être disponible dans le cas de relations mathématiques simples. Par exemple, ils mobilisent peu $T_{T-Prog \to Exp}$ et T_D dans $T_{P-Exp-Resultat-PC}$.</td><td>Θ_{B+} Les élèves peuvent articuler OM1 avec OM2 et OM3 et commencent à donner des raisons d'être à l'algèbre. L'outil algébrique pour résoudre les problèmes de modélisation ou de preuve est adaptée pour des expressions peu complexes. Par exemple, les élèves mobilisent de manière adaptée $T_{T-Prog \to Exp}$ et T_D dans $T_{P-Exp-Resultat-PC}$.</td></tr>
</table>

Tableau 4.10 – Technologie « dominante » du groupe B

<table>
<tr><th colspan="2">Groupe A</th></tr>
<tr><td colspan="2">Θ_A Les élèves articulent les OM ponctuelles de OM2 et OM3 pour conduire, anticiper et contrôler les transformations algébriques. Le calcul s'appuie sur les règles d'écriture et de transformation des expressions algébriques prenant en compte la structure des expressions et leur équivalence. La transformation d'une expression (type de tâches de OM1) s'appuie majoritairement sur la reconnaissance de la structure ($T_{structure}$ dans OM2) pour interpréter l'expression et appliquer la règle de calcul adaptée (l'équivalence des expressions). La conduite et le contrôle des transformations algébriques sont guidées par l'utilisation des ostensifs en lien avec les non-ostensifs associés (propriétés du calcul, etc.), ce qui permet de d'anticiper et d'orienter les calculs en fonction du but visé (intelligence du calcul).</td></tr>
<tr><th>Groupe A-</th><th>Groupe A+</th></tr>
<tr><td>Θ_{A-} Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et donnent encore peu de raisons d'être à l'algèbre comme outil de modélisation contrairement au calcul algébrique. Les élèves peuvent encore avoir recours à des démarches arithmétiques.</td><td>Θ_{A+} Les élèves articulent OM1 avec OM2 et OM3 et donnent des raisons d'être à l'algèbre comme outil de modélisation. L'outil algébrique pour résoudre des problèmes de modélisation ou de preuve est majoritairement disponible et adapté. Par exemple, les élèves mobilisent de manière adaptée $T_{T-Prog \to Exp}$ et T_D dans $T_{P-Exp-Resultat-PC}$.</td></tr>
</table>

Tableau 4.11 – Technologie « dominante » du groupe A

Le travail dans le cadre du projet PepiMep nous a permis de dresser une base de « solutions-élèves » relevant de chaque niveau technologique, qui est réactualisée au cours des nouvelles expérimentations. Nous donnons des exemples de réponses d'élèves des groupes C-, B-, B+ et A+ dans les tableaux suivants 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15.

Item	Énoncé	Réponses de Laure
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$(-3)^2 = 9 - -3^2 = 9$
1.3	QCM	$\sqrt{(-3)^2} = -3$
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (2/5)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^{(m)} \times a^{(n)} = a^{(m+n)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - $a^(n) = a \times n$
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	vrai - Car si $a = 5$ alors $2 \times 5^2 = 100$ et $(2 \times 5)^2 = 100$
3.1	Aire du rectangle	$6 \times a^3 \times b$
3.2	QCM	$3a \times 3b \times a^2 \times ba - 2a + b + 3$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $a \times a \times a \times a \times a = a^5$ et non a^6
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	faux - $4a^3 + 3a^2 = 7a^6$
4.3	$a^2 = a + a$	faux -$a^2 = a \times a$ et non $a + a$
4.4	$(a+2)^2 = a^2 + 4$	faux - Pour $a = 1$, $3^2 = 9$ et $1^2 + 4 = 5$ et pas 9
4.5	$3 + 5a = 8a$	vrai - Il faut faire la somme des coefficients
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - 2xy + y^2$
5.2	Factoriser $(x+2)^2 - 5(x+2)$	$(x + 2) + (x - 3)$
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	$-5/3$
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	$-1/2$
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$6e - p = p$
7	Correspondance expression aire	000001000
8.1	Aire du triangle	
8.2	Aire du rectangle	
8.3	Égalité d'aires	
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai - $6 + 5 = 11$ $11 \times 3 = 33$ $33 + 12 = 45$ $45/5 = 9$ $9 - 6 = 3$
10.1	Correspondance graphique	
10.2	Tarifs en fonction de n	
10.3	Tarif le plus avantageux	

TABLEAU 4.12 – Réponses de Laure au test Pépite (CA3 UA3 TA3) du groupe C- en début de troisième

Item	Énoncé	Réponses de Valérie
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$-3^2 = -9$
1.3	QCM	
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (5/6)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^3 \times a^2 = a^{(3+2)} = a^{(5)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - Aucune justification ne me convient.
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	vrai - Car $2a^2 = 2a \times 2a = (2a)^2$
3.1	Aire du rectangle	$a + 3 \times b + a$
3.2	QCM	$a + b(a+3)$ - $(a+3)(b+a)$ -$(a+b)(a+3)$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $3 + 2 = 5$ pour les exposants
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	vrai - $4a^3 + 3a^2 = (4+3)a^{(3+2)}$
4.3	$a^2 = a + a$	faux - $a^2 = a \times a$ et non $a + a$
4.4	$(a+2)^2 = a^2 + 4$	faux - Aucune justification ne me convient.
4.5	$3 + 5a = 8a$	vrai - Il faut faire la somme des coefficients
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - y^2$
5.2	Factoriser $(x+2)^2 - 5(x+2)$	
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	5/3
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	0
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$e \times p$
7	Correspondance expression aire	000110110 (incorrect)
8.1	Aire du triangle	$10\times$
8.2	Aire du rectangle	
8.3	Égalité d'aires	
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai - $10+5 = 15 \times 3 = 45+20 = 65 : 5 = 13 - 10 = 3$
10.1	Correspondance graphique	T2=bleu T1=rouge
10.2	Tarifs en fonction de n	110 et 160
10.3	Tarif le plus avantageux	7

Tableau 4.13 – Réponses de Valérie au test Pépite (CA2 UA3 TA3) du groupe B- en début de troisième

Item	Énoncé	Réponses de Mélusine
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$(-3)^2 = 9$
1.3	QCM	$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2}$
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (5/6)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^{(m)} \times a^{(n)} = a^{(m+n)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - $a^2 = a \times a$
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	faux - Avec des parenthèses, le carré agit sur l'intérieur de la parenthèse, sans parenthèse le carré n'agit que sur le a
3.1	Aire du rectangle	$(3 + a) \times (a + b)$
3.2	QCM	$(a + 3)(b + a)$ - $(a + b)(a + 3)$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $a^n \times a^p = a^{(n+p)}$
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	faux - On n'additionne pas des puissances qui n'ont pas le même exposant
4.3	$a^2 = a + a$	faux - Pour $a = 1$, $1^2 = 1$ et pas $1 + 1 = 2$
4.4	$(a + 2)^2 = a^2 + 4$	vrai - $(a + 2)^2 = a^2 + 2^2$
4.5	$3 + 5a = 8a$	faux - On ne peut pas additionner des nombres et des lettres
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - 2xy + y^2$
5.2	Factoriser $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$	$(x + 2)(-5x + 10)$
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	$5/3$
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	$-1/2$
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$6 \times p = e$
7	Correspondance expression aire	10010010 (incorrect)
8.1	Aire du triangle	$BA \times x/2$
8.2	Aire du rectangle	$FB \times (x + CD)$
8.3	Égalité d'aires	2 Démarche $10 \times 2/2 = 20/2 = 10$ et $2(2 + 3) = 2 \times 5 = 10$
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai - $((x + 8) \times 3 - 4 + x)/4 + 2 - x = 7$ $((2 + 8) \times 3 - 4 + 2)/4 + 2 - 2 = 7$
10.1	Correspondance graphique	T2=bleu T1=rouge
10.2	Tarifs en fonction de n	$n \times 4 + 30$ et $8 \times n$
10.3	Tarif le plus avantageux	8 Démarche : $4n + 30$ $8n$ $4n - 4n + 30$ $8n - 4n$ 30 $4n$ $30/4 = 7,5$

Tableau 4.14 – Réponses de Mélusine au test Pépite (CA2 UA2 TA1) du groupe B+ en fin de troisième

Item	Énoncé	Réponses de Joëlle
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$(-3)^2 = 9$ - $-3^2 = -9$
1.3	QCM	$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2}$ - $\sqrt{(-3)^2} = 3$
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (5/6)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^3 \times a^2 = a^{(3+2)} = a^{(5)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - $a \times a = a^2$ est différent de $a + a = 2a$
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	faux - $2a^2 = 2 \times a^2$ différent de $(2a)^2 = 4a^2$
3.1	Aire du rectangle	$ab + a^2 + 3b + 3a$
3.2	QCM	$(a+3)(b+a)$ - $(a+b)(a+3)$ - $ab+3b+a^2+3a$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $a^n \times a^p = a^{(n+p)}$
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	faux - On n'additionne pas des puissances qui n'ont pas le même exposant
4.3	$a^2 = a + a$	faux - $a^2 = a \times a$ et non $a + a$
4.4	$(a+2)^2 = a^2 + 4$	faux - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4.5	$3 + 5a = 8a$	faux - On ne peut pas additionner des nombres et des lettres
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - 4xy + y^2$
5.2	Factoriser $(x+2)^2 - 5(x+2)$	$(x+2)(x-3)$
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	$5/3$
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	0 et 1
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$6p = e$
7	Correspondance expression aire	010011010
8.1	Aire du triangle	$5x$
8.2	Aire du rectangle	$2x + 6$
8.3	Égalité d'aires	2
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai $[(x+8) \times 3 - 4 + x]/4 + 2 - x$, $= (3x + 24 - 4 + x)/4 + 2 - x$, $= (4x + 20)/4 + 2 - x$, $= x + 5 + 2 - x$, $= 7$
10.1	Correspondance graphique	T2=bleu T1=rouge
10.2	Tarifs en fonction de n	110 et 160
10.3	Tarif le plus avantageux	8

TABLEAU 4.15 – Réponses de Joëlle au test Pépite (CA1 UA1 TA1) du groupe A+ en début de seconde

4.1.5 La part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises : des sous-questions génératrices

Dans le paragraphe précédent, nous montrons que nos choix de regroupement nous permettent, premièrement, d'interpréter les niveaux sur les composantes des stéréotypes en technologies dominantes utilisées par les élèves et, deuxièmement, de faire des hypothèses sur le type d'articulation des trois OM locales pour chaque groupe. Nous mettons maintenant en évidence la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises afin de dégager les questions à aborder dans les parcours. Notre réflexion est orientée sur les groupes B et C parce qu'ils présentent davantage de nécessités d'apprentissage.

L'analyse de l'OM à enseigner relativement à l'OM de référence donne un éclairage sur des nécessités d'apprentissage souvent ignorées par l'institution qui restent à la charge des élèves. Nous avons mis en évidence que les raisons d'être données à l'algèbre et la conduite, le contrôle et l'anticipation du calculs sur les expressions algébriques sont peu reliés, au niveau technologico-théorique, à la prise en compte de l'équivalence des programmes de calcul et des expressions algébriques, de la dialectique du numérique et de l'algébrique et des aspects procédural et structural. Or les technologies dominantes dans les groupes B et C révèlent que ce sont précisément ces différentes nécessités d'apprentissage que les élèves n'ont pas construites ou pas suffisamment reliées à la nécessité de les convoquer dans la pratique du calcul algébrique. En effet, les éléments technologiques dominants du groupe C montrent que les élèves ont davantage recours à des démarches arithmétiques et n'ont pas encore donné de raison d'être aux objets de l'algèbre. Il semble pertinent, pour ces élèves, de revenir sur le premier processus d'algébrisation à partir de l'équivalence des programmes de calculs. Les technologies dominantes des groupes B et C laissent vivre des erreurs dans la formation et la transformation des expressions, certes de nature différentes entre le groupe C et le groupe B mais, selon nous, en lien avec le fait que le contrôle des calculs est peu guidé par l'équivalence des expressions et la dialectique du numérique et de l'algébrique. La place attribuée aux ostensifs n'est pas suffisamment reliée aux non-ostensifs associés ce qui ne permet pas la co-activation des notions et propriétés du calcul intervenant dans la transformation des expressions. Les élèves interprètent peu les expressions par leur structure, c'est-à-dire qu'ils travaillent peu avec une flexibilité entre le procédural et le structural. Cela nous conduit à préciser les questions à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

Dans le chapitre 3, nous avons dégagé deux questions génératrices à travailler dans les parcours :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

Ces questions sont encore larges et la part des implicites de l'OM à enseigner dans les technologies dominantes des groupes nous conduisent à dégager des sous-questions génératrices, plus précises, à aborder dans les parcours d'enseignement différencié. Nous retenons les sept questions suivantes :

1. Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?
2. Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?
3. Les expressions sont-elles équivalentes ?
4. Comment interpréter des expressions dans différents registres sémiotiques pour appréhender la structure des expressions en lien avec le rôle des opérateurs et des délimitants ?
5. Comment interpréter des expressions pour appréhender leur structure et leur équivalence et anticiper les calculs algébriques ?
6. Comment contrôler et conduire un calcul algébrique ?
7. Comment mobiliser et conduire un calcul algébrique dans la résolution de problèmes du domaine algébrique ?

Il reste à définir les OM ponctuelles à convoquer et les conditions à mettre en place qui amèneront les élèves à faire évoluer le niveau technologique sur lesquels ils s'appuient pour travailler avec et sur les expressions algébriques. Cela fait l'objet du paragraphe suivant, dans lequel nous présentons le modèle de parcours d'enseignement différencié.

4.2 Le modèle de PED

Nous présentons le modèle de parcours d'enseignement différencié (PED) que nous avons conçu au cours de notre recherche, en collaboration avec l'ensemble des partenaires du projet PépiMep : les enseignants d'un groupe IREM, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath.

4.2.1 Une démarche itérative et collaborative avec les enseignants et les chercheurs en informatique

Notre thèse étant rattachée au projet de recherche PepiMeP, nous avons adopté une démarche de recherche itérative et collaborative pour concevoir le modèle de PED. Rappelons que ce projet vise à transférer des résultats de recherche dans une communauté d'enseignants et à accompagner l'évolution des rapports entre conception, développement et usage des ressources en ligne, pour favoriser des apprentissages en mathématique. L'objectif est de formaliser et de diffuser l'outil de diagnostic Pépite issu de la recherche dans le cadre du projet Lingot (Delozanne et al., 2005) et le modèle de PED pour les rendre accessibles à un large public d'enseignants et d'élèves du collège et du lycée depuis la plateforme en ligne LaboMeP développée par l'association Sésamath. Sont intervenues, dans la conception du modèle, non seulement les spécificités de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre en France mais aussi les contraintes des enseignants et celles de l'implémentation informatique. C'est pourquoi, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, la collaboration avec les différents partenaires du projet joue un rôle important dans les différentes itérations du modèle de PED.

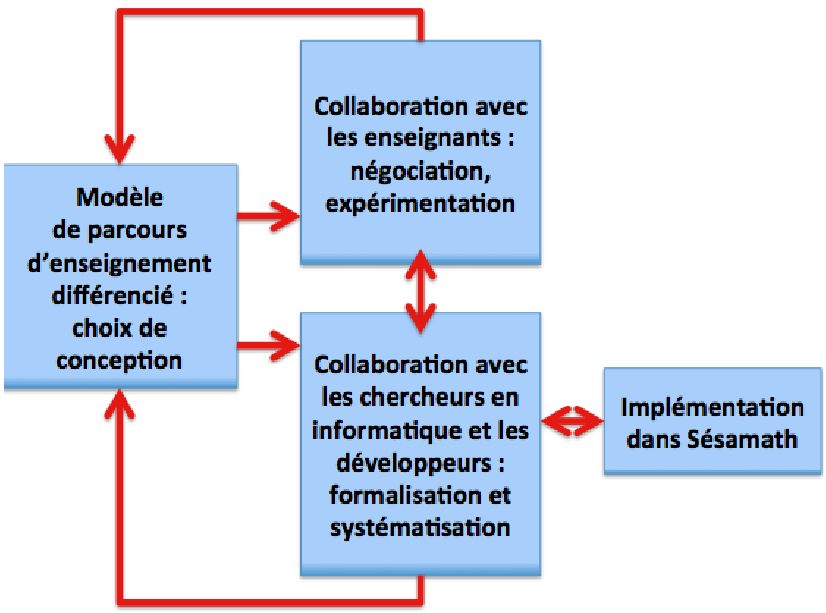


FIGURE 4.6 – Schéma général de la démarche itérative et collaborative avec les enseignants, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de PED stabilisé à l'issue de nombreux cycles de travail avec les partenaires du projet. La collaboration associe des chercheurs en didactique des mathématiques, des chercheurs en informatique, des membres de l'association Sésamath, des développeurs et des enseignants. La démarche itérative (cf. figure 4.6) consiste à affiner un modèle didactique au départ issu de la recherche en didactique des mathématiques par des itérations successives suite à la collaboration avec les différents partenaires du projet. L'objectif est, du côté informatique, de le systématiser, de dégager un prototype d'indexation des exercices pour automatiser la proposition des PED et le peupler d'exercices et, du côté des élèves et des enseignants, de questionner l'efficacité et la viabilité des PED avec les pratiques d'enseignement de l'algèbre et de différenciation de l'enseignement. Une description détaillée de cette méthodologie fait l'objet du paragraphe 1.4.5 du chapitre 1. Après avoir présenté le modèle de PED, nous abordons les modes de collaboration avec les chercheurs en informatique, les membres de Sésamath et les enseignants dans les paragraphes 4.4.1 et 4.4.2.

4.2.2 Questions centrales dans la modélisation

La conception du modèle de parcours d'enseignement différencié pose différentes questions liées à deux aspects interdépendants : l'évolution des apprentissages des élèves en algèbre et la régulation par l'enseignant du dispositif de différenciation en lien avec l'organisation didactique de l'enseignement en algèbre. L'une des contraintes importantes de l'enseignement que nous souhaitons prendre en compte dans le modèle est d'assurer l'avancée du temps didactique tout en nous adaptant à l'hétérogénéité des élèves relativement aux éléments technologico-théoriques qu'ils mobilisent dans la résolution des tâches.

De l'étude de l'OM à enseigner relativement à l'OM de référence, émergent deux questions génératrices à aborder dans les parcours (cf. §3.5.3). Nous les rappelons :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

L'étude de ces deux questions et la caractérisation des technologies dominantes de chaque groupe nous a permis de générer sept sous-questions génératrices (cf. §4.1.5). Elles sont à la base des objectifs d'apprentissage des parcours d'enseignement différencié que nous avons construits. Il reste à les définir en lien avec les objectifs d'apprentissage visés et le moment de l'étude. Pour cela, nous définissons les types de tâches à convoquer et les milieux auxquels confronter les élèves pour aborder ces questions et leur permettre de valider les réponses attendues. Ces différents éléments permettent d'induire des exercices. Nous complétons notre questionnement par la gestion et le contrat didactiques à mettre en place. Quels déroulements [6] pour les accompagner (temps de recherche, mise en commun, institutionnalisation) ? Quelle place donner au collectif ? Comment gérer les différentes phases de validation, formulation, institutionnalisation ? Quels contrat et milieu établir, notamment concernant la validation et le contrôle des résultats ? Quel rôle de l'enseignant déterminer pour anticiper les techniques des élèves ? Quelles aides apporter pour remettre en cause les erreurs de calcul et les conceptions erronées ?

4.2.3 Description du modèle de PED

Pour décrire le modèle de parcours d'enseignement différencié, nous avons effectué différents choix, présentés dans les paragraphes suivants. Nous nous référons au schéma 4.7.

a. Trois entrées

Le modèle prend trois éléments en entrée, liés à la classe :

1. le niveau scolaire,
2. le secteur d'étude,
3. l'étape du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant.

Nous décrivons chaque entrée dans les paragraphes ci-dessous.

Le niveau scolaire

Dans notre cas, les niveaux scolaires concernés sont les classes de troisième et de seconde. Le niveau scolaire intervient sur le choix des types de tâches et sur les variables didactiques associées. Par exemple, à l'entrée en seconde, les élèves disposent des identités remarquables et le calcul algébrique est davantage orienté vers les fonctions. Cela participe aux choix des registres sémiotiques mis en jeu dans les milieux retenus et des expressions algébriques proposées.

Le secteur d'étude

Par secteur d'étude, nous faisons référence aux niveaux de codétermination didactique de Chevallard. Dans cette échelle, le secteur est relié à une OM régionale. Dans notre travail, le secteur étudié est relatif au domaine algébrique. Il s'agit du

6. Nous utilisons le terme de « déroulement » dans un sens général.

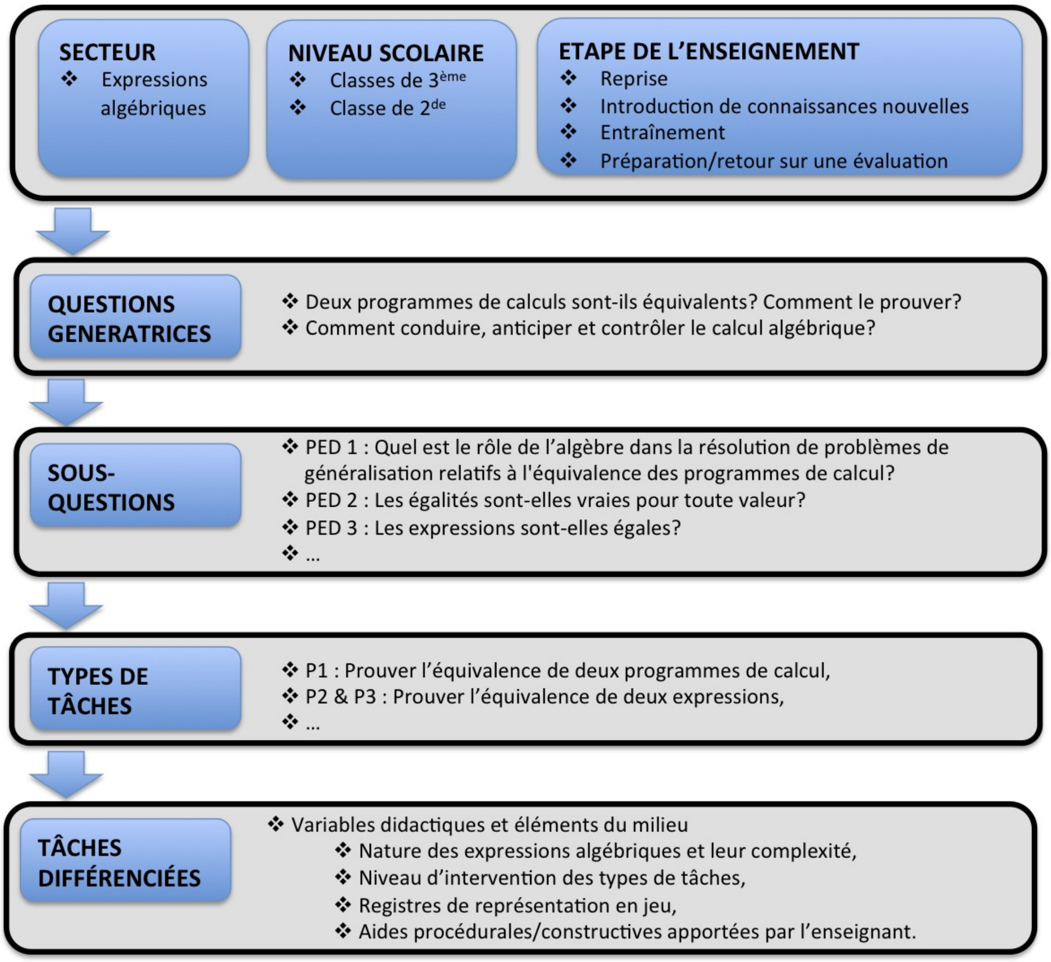


FIGURE 4.7 – Représentation schématique du modèle de PED

secteur sur les expressions algébriques, puisque nous avons centré notre étude sur l'OM régionale relative aux expressions algébriques.

Les étapes du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant

Nous distinguons plusieurs étapes du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant :

- l'étape de reprise pour revenir sur des connaissances anciennes et poursuivre l'étude,
- l'étape d'introduction de connaissances nouvelles,
- l'étape d'entraînement des connaissances en cours d'acquisition,
- l'étape de préparation ou de retour sur une évaluation.

Ces étapes correspondent soit aux moments de l'étude de Chevallard, soit au moment de reprise défini par Larguier (2009, 2012). Il s'agit de repérer l'étape à laquelle le parcours d'enseignement différencié est mis en place relativement au déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. Nous pouvons associer l'étape d'introduction de nouvelles connaissances aux moments de la première rencontre ainsi que de construction du bloc technologico-théorique. Nous pouvons associer l'étape d'entraînement des connaissances en cours d'acquisition au moment du travail de la technique. Nous proposons des parcours pour les étapes de reprise et d'entraînement des connaissances en cours d'acquisition.

Nous avons particulièrement travaillé avec les enseignants du groupe IREM à l'étape de la reprise, qu'il convient de définir davantage. Larguier (2009, 2012) souligne que la notion de *reprise d'étude* apparaît dans les textes de Chevallard :

> *« Dans un texte écrit dans le cadre de la formation initiale des professeurs de collège et de lycée, Chevallard (2002) parle également de la notion de la* reprise d'étude *: "Lorsque les élèves arrivent dans la classe, le thème θ ne leur est pas inconnu : le problème didactique posé au professeur est alors celui, non du recommencement, mais de la reprise et de la poursuite de l'étude du thème." » (Larguier, 2009, p. 28)*

Larguier définit la notion de reprise du numérique comme suit :

> *« Lorsqu'un thème du numérique a déjà été en partie enseigné, soit au collège soit lors d'une rencontre précédente en seconde, j'appelle reprise du numérique le moment de l'enseignement où ce thème, ou bien des sujets liés à ce thème, interviennent de nouveau et sont actualisés dans des thèmes de l'enseignement de cette classe. La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés auparavant. » (Larguier, 2009, p. 31)*

Cette définition peut s'adapter à l'enseignement de l'algèbre et aux expressions algébriques. L'étape de reprise a un rôle majeur dans la poursuite du travail sur les expressions algébriques pour l'année scolaire. En effet, à l'entrée en troisième ou en seconde, l'enseignant reprend l'étude des expressions algébriques, qui a déjà été étudiée dans les classes antérieures. Ce contexte de reprise est propice à la remise en question des technologies dominantes développées par les élèves.

b. Caractérisation des PED à partir des trois entrées

Ces trois entrées étant fixées, les parcours d'enseignement différencié se caractérisent par :

1. Des questions génératrices qui déterminent des sous-questions génératrices,
2. Des types de tâches pour aborder ces sous-questions génératrices,
3. Des tâches différenciées issues d'un jeu sur des variables didactiques et des éléments du milieu en fonction des groupes.

Nous présentons chacune de ces caractéristiques.

Les questions et les sous-questions génératrices

Les questions génératrices sont issues de l'étude de l'OM à enseigner relativement à l'OM de référence dans le chapitre 3. Nous en avons dégagé deux :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

Dans le paragraphe 4.1.5 de ce chapitre, nous avons dégagé sept sous-questions génératrices à partir de la mise en évidence de la part d'apprentissages implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises de chaque groupe. Ils concernent la faible prise en compte de l'équivalence des programmes de calcul et des expressions algébriques, de la dialectique de l'algébrique et du numérique et des aspects procédural et structural. Nous rappelons les sept questions :

1. Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?
2. Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?
3. Les expressions sont-elles équivalentes ?
4. Comment interpréter des expressions dans différents registres sémiotiques pour appréhender la structure des expressions en lien avec le rôle des opérateurs et des délimitants ?
5. Comment interpréter des expressions pour appréhender leur structure et leur équivalence et anticiper les calculs algébriques ?

6. Comment contrôler et conduire un calcul algébrique ?
7. Comment mobiliser et conduire un calcul algébrique dans la résolution de problèmes du domaine algébrique ?

Chaque sous-question correspond à ce que nous appelons un parcours d'enseignement différencié.

Les types de tâches

Nous associons aux sous-questions génératrices un ou plusieurs types de tâches. Les sept sous-questions et les OM ponctuelles qu'elles convoquent sont présentées dans le tableau 4.16.

N°	Intitulé du parcours Sous-questions génératrices	Types de tâches
1	Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?	$T_{P-Exp-Equivalence-PC}$
2	Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?	$T_{Prouver-equiv}$
3	Les expressions sont-elles équivalentes ?	$T_{Prouver-equiv}$ $T_{Choisir}$
4	Comment interpréter des expressions dans différents registres sémiotiques pour appréhender la structure des expressions en lien avec le rôle des opérateurs et des délimitants ?	$T_{T-Exp\leftrightarrow Longueur}$, $T_{Exp\leftrightarrow Perimetre}$, $T_{Exp\leftrightarrow Aire}$, $T_{T-Arbre\leftrightarrow Exp}$, $T_{T-LgNat\leftrightarrow Exp}$, $T_{T-Prog\leftrightarrow Exp}$
5	Comment interpréter des expressions pour appréhender leur structure et leur équivalence et anticiper les calculs algébriques ?	$T_{Associer}$, $T_{T-Arbre\leftrightarrow Exp}$, $T_{T-LgNat\leftrightarrow Exp}$, $T_{T-Prog\leftrightarrow Exp}$
6	Comment contrôler et conduire un calcul algébrique ?	T_D, T_F
7	Comment mobiliser et conduire un calcul algébrique dans la résolution de problèmes du domaine algébrique ?	T_D, T_F

TABLEAU 4.16 – Intitulé des parcours d'enseignement différencié et types de tâches convoqués

Pour faciliter la lecture de ce tableau, nous rappelons ici les intitulés des types de tâches définis au chapitre 3 :

- Pour OM1 :
  - $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul
  - $T_{T-Exp\leftrightarrow Longueur}$, $T_{Exp\leftrightarrow Perimetre}$, $T_{Exp\leftrightarrow Aire}$, $T_{Exp\leftrightarrow Volume}$, $T_{Exp\rightarrow Angle}$ Traduire une expression algébrique comme, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle et vice-versa

- $T_{T-Arbre\leftrightarrow Exp}$, $T_{T-LgNat\leftrightarrow Exp}$, $T_{T-Prog\leftrightarrow Exp}$ et Traduire, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle par une expression algébrique

- Pour OM2 :
  - $T_{Prouver-equiv}$ Prouver l'équivalence de deux expressions algébriques
  - $T_{Choisir}$ Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé
  - $T_{Associer}$ Associer deux expressions égales pour tout x
- Pour OM3 :
  - T_D Développer une expression algébrique de type donné,
  - T_F Factoriser une expression algébrique de type donné,

Les sous-questions génératrices et les types de tâches qui leur sont associés permettent de définir des enjeux d'apprentissage communs à la classe. Une organisation didactique commune guide, à un niveau plus fin, l'organisation des phases individuelles (temps de recherche, apport d'aides) et collectives (processus de dévolution, phases de débat, institutionnalisation) dans la mise en œuvre du parcours en classe. Pour chaque sous-question, nous définissons des tâches et des stratégies différenciées, adaptées aux besoins d'apprentissage de chaque groupe.

Par exemple, pour les trois premiers parcours, les enjeux d'apprentissage et les stratégies différenciées sont [7] :

- ***Parcours 1 -****Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?* Les stratégies différenciées sont :
  - Groupes A et B+ : Mobiliser l'outil algébrique pour généraliser et prouver des propriétés.
  - Groupes B- et C : Montrer les limites du numérique et motiver l'outil algébrique pour généraliser et prouver l'équivalence de programmes de calcul. Les situations proposées ne se situent pas dans le cadre d'une introduction aux lettres mais visent à permettre aux élèves de redonner du sens aux expressions en faisant le lien entre lettre et nombre. Il s'agit d'amener les élèves à percevoir les limites et le coût d'une démarche numérique pour résoudre un problème. La production d'une expression algébrique comme le résultat d'un programme de calcul permet de revenir sur la première étape du processus de généralisation et sur la hiérarchie des opérations.
- ***Parcours 2 -*** *Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?* Les stratégies

7. Nous renvoyons à l'annexe B pour les enjeux d'apprentissage et les stratégies différenciées des autres parcours.

différenciées sont :
  - Groupe A : Prouver ou invalider des propriétés du cadre algébrique.
  - Groupe B : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation des expressions (utilisation des parenthèses, distributivité, carré, puissance) à partir des notions de preuve algébrique et de contre-exemple numérique.
  - Groupe C : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation des expressions (concaténation, linéarisation, rôle des parenthèses) à partir des notions de preuve algébrique et de contre-exemple numérique.
- ***Parcours 3 -****Les expressions sont-elles équivalentes ?* Les stratégies différenciées sont :
  - Groupe A : Prouver l'équivalence des expressions par le calcul algébrique et mobiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème, calculer astucieusement.
  - Groupes B et C : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre. L'équivalence entre plusieurs expressions est conjecturée à partir de tests numériques (tests avec différentes valeurs numériques) ou de tests graphiques (comparaison des courbes représentatives des fonctions définies par les expressions). L'équivalence des expressions est utilisée dans le but de calculer astucieusement une expression numérique et choisir la forme la plus appropriée au calcul de la valeur de l'expression pour une valeur numérique donnée.

Des tâches différenciées en fonction des groupes

Un jeu sur les variables didactiques et les éléments du milieu à faire intervenir permet de définir les stratégies différenciées et comment le ou les types de tâches visés sont convoqués en fonction des groupes. Ces choix reposent, d'une part, sur les technologies dominantes de chaque groupe et, d'autre part, sur les éléments technologiques que l'on souhaite faire mobiliser par les élèves.

Les variables didactiques concernent la nature et la complexité des expressions, le registre sémiotique utilisé, le niveau d'intervention des types de tâches impliqués dans les tâches à résoudre (cf. chapitre 1, Castela, 2008) ainsi que les éléments intervenant dans le milieu. Il s'agit des aides apportées par l'enseignant et des registres de représentation mis en jeu, par exemple l'intervention du registre des schémas de calcul peut aider à identifier un processus de calcul et à le traduire par une expression algébrique. Concernant les aides apportées par l'enseignant, nous faisons ici référence au cadre théorique de la double approche. Nous reprenons la distinction entre aide procédurale et aide constructive développée par Robert (2008b) :

> *« Nous précisons ensuite les aides de l'enseignant en distinguant le moment où l'aide est donnée, la nature, et plusieurs formes de ces aides. En particulier, nous avons ainsi repéré deux types d'aides, selon qu'elles modifient les activités prévues* a priori *ou qu'elles ajoutent quelque chose à l'action des élèves.*
>
> *Les unes, qu'on appellera « procédurales », jouent sur les tâches prescrites elles-mêmes, en modifiant strictement les activités par rapport à celles prévues à partir de l'énoncé. Elles correspondent aux indications que donne l'enseignant avant ou pendant le travail des élèves. Elles peuvent conduire à découper la tâche en introduisant des sous-tâches explicites, ou à choisir une méthode très contextualisée : cela change alors les adaptations attendues et peut orienter l'activité vers des résultats plus immédiats.*
>
> *Les autres, aides dites « constructives », ajoutent quelque chose entre l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée), dans sa tête, de la connaissance qui pourrait en résulter; que ce soit par une simple reprise de ce qui a été fait, même dans une application immédiate (tâche simple et isolée), ou par des rappels, des bilans, des interventions amenant les élèves à prendre une petite distance par rapport à ce qu'ils viennent de faire, à dégager une méthode un peu plus générale, à discuter des résultats. Ces aides peuvent présenter une petite décontextualisation de ce que les élèves ont mis en œuvre, par exemple le cas générique correspondant, ou indiquer comment faire le type de tâches concerné, ou expliquer pourquoi on a fait ces choix. » (Robert, 2008b, p. 51)*

Ainsi, les tâches différenciées sont déterminées par un jeu sur les variables didactiques et les éléments du milieu à faire intervenir. Elles visent à faire évoluer les technologies mobilisées de façon dominante par les élèves d'un groupe pour réduire l'écart avec celles attendues. La connaissance des technologies dominantes pour chaque groupe, est un appui essentiel, d'une part, pour caractériser les milieux d'apprentissage dans les environnements papier-crayon ou informatique, les ressources à mettre à disposition, afin de favoriser des rétroactions adaptées aux réponses des élèves et, d'autre part, pour organiser la gestion des déroulements et des aides en fonction des groupes en classe. L'enjeu est, à partir d'une ou plusieurs OM et par l'élargissement et le complément progressif des questions intermédiaires qui s'y posent, d'engendrer une série d'OM intermédiaires qui finissent par s'intégrer en une nouvelle OM dont elles constituent les raisons d'être.

c. Définition d'un parcours d'enseignement différencié

Nous définissons un parcours d'enseignement différencié de la façon suivante. Un PED est défini par rapport à un secteur d'enseignement, un niveau scolaire et une étape du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. Il porte sur une sous-question génératrice, qui est le fil directeur des éléments à institutionnaliser et de la gestion didactique des différentes phases individuelles et collectives dans la mise en œuvre du parcours en classe. Il s'agit de redonner des raisons d'être aux éléments à travailler et de les institutionnaliser. La sous-question est associée à un ou des types de tâches. Les tâches dans lesquelles il(s) est(sont) convoqué(s), sont différenciées en fonction des groupes : les technologies dominantes doivent être adaptées à chacun. La différenciation des tâches porte sur un jeu sur les variables didactiques, les éléments du milieu utilisés et les aides apportées. La combinaison du choix du type de tâches du jeu sur les variables didactiques, des milieux choisis, des aides apportées par l'enseignant et des déroulements retenus ont pour objectif de travailler les différents savoirs et savoir-faire implicites de l'OM à enseigner, liés à une faible prise en compte de l'équivalence des programmes de calcul, l'équivalence des expressions, de la dialectique de l'algébrique et du numérique et des aspects procédural et structural.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, la notion de parcours d'enseignement différencié se rapproche de celles de PER et AER définies par Chevallard (2011, 2005), dans le sens où nous définissons des questions génératrices pour travailler des raisons d'être des expressions algébriques et du calcul sur et avec les expressions. Mais elle s'en éloigne : premièrement, il s'agit d'une reprise de notions à enseigner, travaillées depuis plusieurs années ; deuxièmement, nous prenons en compte des besoins d'apprentissage des élèves dans les tâches proposées et dans leur organisation didactique à partir du logiciel de diagnostic Pépite. C'est pourquoi, pour nous démarquer des PER et des AER, nous choisissons la désignation de « parcours d'enseignement différencié ».

Nous définissons ainsi sept parcours d'enseignement différencié. Comme seuls trois d'entre-eux ont été travaillés avec les enseignants, nous les avons retenus pour présenter les analyses *a priori* des potentialités des tâches retenues, des aides et des déroulements prévus. Il s'agit des parcours 1, 2 et 3.

4.3 Analyse *a priori* de trois PED

Comme nous avons principalement travaillé sur les trois premiers parcours avec les enseignants du groupe IREM, nous les avons retenus pour présenter les analyses *a priori* des potentialités des tâches retenues, des aides et des déroulements prévus. Nous présentons dans le chapitre 5 les choix d'une enseignante sur ces parcours. Les intitulés et les sous-questions génératrices de ces trois parcours sont :

- Parcours 1 : Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ? Il s'intitule : Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'étude de l'équivalence des programmes de calculs dans un problème de généralisation,

– Parcours 2 : Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ? Il s'intitule : Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'équivalence des expressions,
– Parcours 3 : Les expressions sont-elles équivalentes ? Il s'intitule : Étudier des expressions équivalentes.

4.3.1 Méthodologie

Pour chaque parcours, nous présentons des énoncés possibles et les éléments de gestion didactique qui les accompagnent. Les tâches et la gestion didactique prévues pour chaque parcours font l'objet d'une analyse *a priori*. Nous étiquetons les techniques envisageables et les technologies associées.

De plus, nous utilisons des éléments de la théorie des situations didactiques (TSD). Pour analyser *a priori* les tâches conçues pour les élèves, nous nous appuyons sur les notions de milieu, de variable et de contrat didactique. Nous analysons les variables didactiques et les milieux proposés : nature et complexité des expressions, formes d'énoncés, aides à apporter aux élèves.

Les observations recueillies *a priori* donnent des critères pour analyser *a posteriori* les enregistrements vidéo, audio et les productions des élèves (chapitre 5).

4.3.2 Analyse *a priori* du parcours 1

Le parcours concerné s'intitule « Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'étude de l'équivalence des programmes de calculs dans un problème de généralisation ».

a. Type de tâches et sous-questions génératrices

Les technologies dominantes mobilisées par les élèves des groupes C et B- dans la résolution de problèmes du domaine algébrique montrent qu'ils donnent peu de raisons d'être aux objets de l'algèbre et qu'ils restent encore majoritairement dans des démarches arithmétiques. Ce parcours vise à revenir sur la première étape du processus d'algébrisation à partir d'un problème de généralisation et d'équivalence des programmes de calcul. Pour les groupes B- et C, il s'agit de montrer les limites du numérique et de motiver l'outil algébrique pour généraliser et prouver l'équivalence de programmes de calcul. Pour les groupes B+ et A, ce parcours est l'occasion de revenir sur la mobilisation de l'algèbre pour généraliser et prouver des propriétés. Le type de tâches convoqué est $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$: Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ? Les trois OM locales de référence sont convoquées. La sous-question génératrice en jeu est : Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?

Nous envisageons ce parcours à l'étape de reprise pour revenir sur des connaissances anciennes et en poursuivre l'étude.

Pour proposer un problème qui permette d'étudier la généralisation et les programmes de calculs équivalents, nous nous sommes inspirés du problème dit du « carré bordé ». Nous en avons déjà présenté des caractéristiques dans le chapitre 3 (cf. §3.3). D'autres problèmes sont proposés (cf. annexe B), par exemple, l'étude de l'équivalence des programmes de calculs conduisant aux expressions $3a + 4a$, $7a$ et $3 + 4a$.

b. Le problème du carré bordé dans le document d'accompagnement

Le problème du carré bordé, travaillé à plusieurs reprises par différentes équipes [8], figure dans les documents d'accompagnements [9] pour initier les élèves à « *l'utilisation des lettres dans des situations où leur utilité peut être facilement reconnue par les élèves.* »

Dans notre cas, les élèves ont déjà rencontré le calcul algébrique depuis au moins deux ans, l'enjeu n'est pas d'introduire le calcul algébrique mais de lui redonner du sens. L'intérêt du problème du carré bordé est de conduire à la création d'un milieu qui permette de travailler les raisons d'être de l'algèbre. La question est : deux programmes de calculs étant donnés, renvoient-ils toujours la même valeur ? La technologie dominante du groupe C montre que les expressions algébriques sont rarement interprétées selon leur aspect procédural. Les élèves font peu de lien entre le registre des écritures algébriques et celui des programmes de calculs. L'enjeu est de faire comprendre aux élèves les raisons pour lesquelles ils ont été amenés à utiliser des expressions algébriques et à les transformer.

Ce problème consiste à établir une formule [10] qui permette de calculer le nombre

8. Par exemple, (Combier, Guillaume, & Pressiat, 1995 ; Coulange & Grugeon, 2008) ou « Les débuts de l'Algèbre au collège ou introduction au calcul littéral » rédigé par Geneviève Lé-Quang et Robert Noirfalise, disponible sur le site de l'IREM de Clermont-Ferrand à l'adresse `http://www.irem.univ-bpclermont.fr/`.

9. Ce document est téléchargeable à l'adresse : `http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf`

10. S'il est demandé aux élèves d'exprimer la relation entre le nombre de carrés gris et le nombre

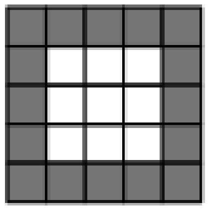


FIGURE 4.8 – Le carré bordé dans le document d'accompagnement

de carreaux unités grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre (cf. figure 4.8), quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré blanc. L'établissement de la formule a lieu en plusieurs phases :

- Phase 1 : déterminer le nombre de carreaux grisés pour des valeurs déterminées du nombre de carreaux sur le côté du carré,
- Phase 2 : formuler en langage naturel une méthode de calcul utilisée, l'aspect procédural des expressions est en jeu,
- Phase 3 : produire une formule mathématique.

A l'issue de la phase 3, la lettre a le statut de nombre généralisé. Le document d'accompagnement propose deux prolongements possibles mettant en jeu d'autres statuts de la lettre :

- Prolongement 1 : s'interroger sur la diversité et la validité des méthodes de calculs et des formules produites. C'est l'équivalence des expressions (statut d'indéterminée) qui est abordée,
- Prolongement 2 : déterminer le nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal à un nombre donné (statut d'inconnue). L'existence de solutions peut être l'occasion de travailler sur la notion de paramètre (statut de paramètre).

Le milieu ainsi créé a de fortes potentialités pour à la fois introduire les expressions algébriques comme un moyen de représenter les programmes de calcul et, étudier leur équivalence. En effet, les carrés unités gris peuvent être dénombrés suivant diverses stratégies qui conduisent à autant de programmes de calculs et de expressions équivalentes. La schématisation dans le registre des dessins constitue un milieu pour appuyer les stratégies de calcul. Si n désigne le nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc et N le nombre de carrés unités gris, différentes stratégies

de carrés blancs, c'est une formule qui est attendue. Il peut aussi être demandé d'exprimer le nombre de carrés gris en fonction du nombre de carrés blancs, auquel cas c'est une expression algébrique qui est demandée.

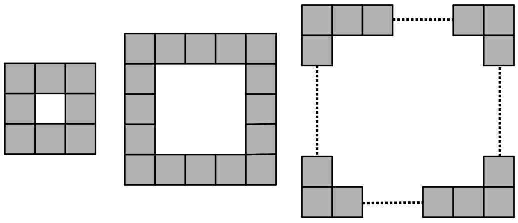
de calcul peuvent conduire aux formules suivantes : $N = 4n + 4$, $N = 4(n + 1)$, $N = 2(n + 2) + 2n$, $N = 4(n + 2) - 4$ mais aussi, $N = (n + 2)^2 - n^2$. Si, à la question « Des programmes de calcul donnent-ils toujours le même résultat ? » les élèves font référence à la situation et répondent « Parce qu'ils comptent le même nombre de carreaux », il est important de bien leur faire comprendre que ce sont les programmes de calcul qui sont objet d'étude et non ce qu'ils représentent.

c. Énoncés

Nous présentons les énoncés ainsi que les aides pour le groupe C, le groupe B- et les groupes B+ et A. Pour l'énoncé du groupe C, nous avons fait le choix de garder un énoncé proche de celui du document d'accompagnement.

- ***Énoncé pour le groupe C***

  On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. *Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.*
2. *Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.*
3. *Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.*
4. *Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider, indique d'abord le procédé de calcul utilisé.*
5. *Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.*

Partie B

1. *Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?*

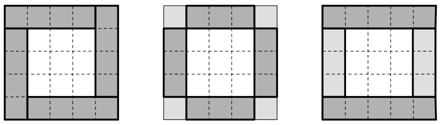
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé. *Suite de l'énoncé :*

2. *On cherche d'autres expressions qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les expressions qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.*
   - $4 \times a + 4$
   - $(a + 2) \times 4$
   - $(a + 2) \times 4 - 4$
   - $(a + 1) \times 4$
   - $(a + 2) \times 2 + a \times 2$
   - $(a \times 4) - 4$
3. *Le carré blanc a un côté de* $a = 149$ *unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis l'expression la plus adaptée pour ce calcul.*

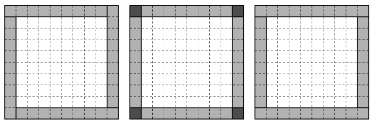
- ***Aides pour le groupe C***

PREMIERE AIDE PARTIE A

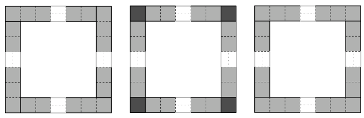
Aide pour la question 1 *Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



Aide pour la question 2 *Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



Aide pour les questions 3 et 4 *Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*
- $4 \times (3+1)$
- $4 \times 3 + 4$
- $2 \times (3+1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 3 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*
- $4 \times (8+1)$
- $4 \times 8 + 4$
- $2 \times (8+1) + 2 \times 8$

Aide pour la question 4 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*
- $4 \times (100+1)$
- $4 \times 100 + 4$
- $2 \times (100+1) + 2 \times 100$

TROISIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 5 *Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur un des schémas de la première aide.*

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 *Tu peux associer une expression à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les expressions qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.*

- ***Énoncé pour le groupe B-***

  On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quelle taille.

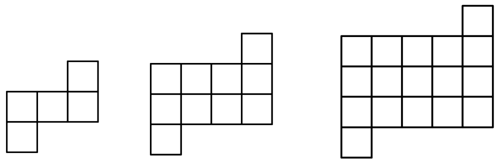


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. *Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?*
2. *Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?*
3. *Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.*

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

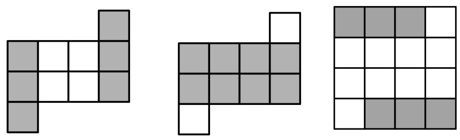
Suite de l'énoncé :

2. *On cherche d'autres expressions qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les expressions qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.*
   - $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - $a(a+2)+2$
   - a^2+2a+2
   - $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - $a^2+2(a+1)$
3. *Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille* 1000 *? Choisis l'expression qui demande le moins de calculs.*

- ***Aides pour le groupe B-***

  PREMIERE AIDE PARTIE A

  Aide pour les questions 1 et 2 *Voici la figure de taille 2. Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*
- $4^2 + 2 \times (4+1)$
- $4 \times (4+2) + 2$
- $(4+2)^2 - 2 \times (4+1)$

Aide pour la question 2 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*

- $30^2 + 2 \times (30+1)$
- $30 \times (30+2) + 2$
- $(30+2)^2 - 2 \times (30+1)$

TROISIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 3 *Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur l'un des schémas de la première aide.*

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 *Tu peux associer une expression à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les expressions qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.*

- ***Énoncé pour les groupes B+ et A***

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous :

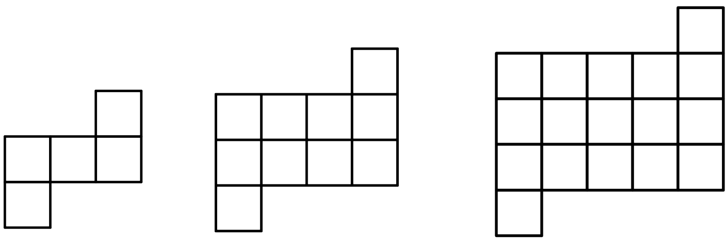


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. *Écris une formule qui détermine le nombre de carrés unités pour une figure de taille quelconque.*

Partie B

1. *Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ? Question enseignant : comment expliques-tu que plusieurs formules répondent à la question 3 ?*

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. *On cherche d'autres expressions qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les expressions qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.*
   - $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - $a(a+2) + 2$
   - $a^2 + 2a + 2$
   - $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - $a^2 + 2(a+1)$
3. *Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille* 1000 *? Choisis l'expression la plus adaptée pour ce calcul. Choisis l'expression qui demande le moins de calculs.*

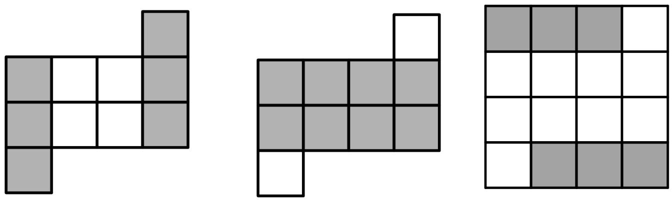
- ***Aides pour les groupes B+ et A***

  PREMIERE AIDE PARTIE A

  Aide pour la question 1 *As-tu pensé à calculer le nombre de carrés unités pour une figure de petite taille ?*

  DEUXIEME AIDE PARTIE A

  Aide pour la question 1 *Voici la figure de taille 2. Pour t'aider à trouver la formule, schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



  AIDE PARTIE B

  Aide pour la question 2 *Tu peux associer une expression à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les expressions qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.*

d. Trame commune des énoncés

Les énoncés s'organisent en deux parties. La première partie (partie A) consiste à utiliser le milieu du problème. D'abord, il s'agit d'identifier plusieurs programmes de calcul dénombrant le nombre de carreaux unités grisés. Ensuite, il s'agit de montrer les limites des techniques de comptage pour amener les élèves à exprimer les programmes de calcul par des expressions algébriques : plus la taille de la figure augmente, plus il devient nécessaire d'utiliser le langage algébrique. La deuxième partie (partie B) consiste à étudier l'équivalence des programmes de calcul à partir des expressions algébriques les traduisant dans le registre des écritures algébriques.

Le type de tâches $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ est convoqué. Il se décompose en plusieurs types de tâches, ce qui permet de mieux situer les enjeux de chaque partie :

- $T_{P-Exp-Resultat-PC}$: Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul (OM1)
  - T1 : Produire une expression traduisant chaque programme de calcul (OM1)
    - T11 : Mobiliser la variable x pour produire une expression générale
    - T12 : Traduire un programme de calcul en une expression algébrique ($T_{T-Prog \to Exp}$ dans OM1)
  - T2 : Prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur ($T_{Prouver-equiv}$ dans OM2)
    - T21 : Tester les expressions en leur substituant des valeurs numériques (T_{Tester} dans OM2)

- T22 : Identifier la structure de l'expression pour reconnaître les propriétés à appliquer ($T_{Structure}$ dans OM2)
- T23 : Développer une expression algébrique (T_D dans OM3)
- T24 : Réduire une expression algébrique ($T_{FA-mon+mon}$ dans OM3)

La partie A est identifiée à T1 et la partie B est identifiée à T2. De plus, dans la partie A, s'ajoute au départ, le type de tâches T0 « Exprimer un programme de calcul » puisque, dans le problème de carré bordé, aucun programme de calcul n'est donné. Nous présentons l'analyse *a priori* de chaque partie dans les paragraphes ci-dessous. Pour faciliter la lecture, nous faisons souvent référence à l'énoncé du carré bordé proposé au groupe C.

e. Analyse *a priori* de la partie A

Dans la partie A, les types de tâches suivants sont convoqués :

- T0 Exprimer un programme de calcul
- T1 Produire une expression traduisant chaque programme de calcul

Ces types de tâches interviennent au niveau T-convoqué pour les groupes B- et C. Pour les autres groupes, T0 intervient au niveau R-convoqué. Il y a donc un jeu sur la variable didactique « découpage des énoncés » entre les groupes. Nous y revenons dans le paragraphe sur les variables didactiques. À la fin de la partie A, le professeur doit amener les élèves à travailler le type de tâche « Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul » étant donnés les différents programmes de calcul exprimés par les élèves.

Dans la partie A des groupes B- et C, il est d'abord demandé aux élèves de déterminer le nombre carrés unités grisés pour des valeurs numériques déterminées du nombre de carrés unités blancs (questions 1 à 4 du groupe C, question 1 du groupe B-). Ces valeurs numériques sont choisies de sorte à faire émerger l'identification d'un programme de calcul (T0, question 4 du groupe C, question 1 du groupe B-). Il est ensuite demandé aux élèves d'écrire une formule exprimant le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités blancs (T1, question 5 du groupe C, question 2 du groupe B-). Le recours au symbolisme algébrique est justifié par la nécessité d'exprimer de façon générale le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités blancs.

Pour les groupes B+ et A, il est directement demandé d'exprimer une formule exprimant le nombre de carrés unités pour une taille quelconque (T1). Les élèves ont à leur charge l'identification d'un programme de calcul. Cela se justifie par le fait qu'ils ont davantage recours à l'algèbre pour résoudre des problèmes de généralisation. Cependant, s'ils ont des difficultés à identifier un programme de calcul, la première partie de l'aide suggère le recours au numérique.

Plusieurs **techniques** appuyées sur des technologies différentes sont envisageables **pour obtenir le nombre de carrés grisés en fonction d'un nombre de carrés blancs fixés** (questions 1 à 4 du groupe C, question 1 du groupe B-) :

- τ_1 Une technique de comptage appuyée par la schématisation. Cette technique fonctionne lorsque le nombre de carrés blancs est petit (globalement inférieur à 10) mais elle présente des limites car elle est trop coûteuse en temps dès lors qu'on s'intéresse un nombre de carrés blancs supérieur à 10 ;
- τ_2 Une technique de dénombrement appuyée par une stratégie de calcul avec formulation ou non du programme de calcul ou avec production d'une écriture numérique pas à pas. C'est l'aspect procédural des expressions qui est en jeu ;
- τ_3 Une technique de dénombrement appuyée par une stratégie de calcul avec écriture numérique en ligne. C'est le résultat du programme du calcul qui est formulé. Les deux aspects procédural et structural des expressions sont en jeu. L'écriture numérique peut être correcte ou non en fonction de la prise en compte ou non par l'élève de la hiérarchie des opérations.

Le type de tâches T0 est convoqué lorsque l'élève met en jeu les techniques τ_2 et τ_3.

Pour produire une expression algébrique traduisant le résultat du programme de calcul (T1) et donc **obtenir le nombre de carrés grisés dans le cas général** (question 5 du groupe C, question 2 du groupe B-, question 1 pour les groupes B+ et A), nous distinguons une technique attendue, d'une technique incorrecte :

- Une technique attendue est de mobiliser une lettre (T11) puis d'exprimer dans le cas général, le nombre de carrés grisés comme le résultat du programme de calcul dans le registre des écritures algébriques (T12 $T_{T-Prog \to Exp}$) avec respect de la hiérarchie des opérations (utilisation de délimitants, rôle correct des opérateurs utilisés). Par exemple, $N = 4(n+1)$. Cette technique nécessite l'introduction d'une lettre, d'un symbole ou d'un mot pour désigner le nombre de carrés blancs sur la bordure. Elle sollicite le passage du procédural au structural.
- Une technique incorrecte envisageable (groupe C) consiste à mobiliser une lettre (T11) puis à exprimer le nombre de carrés gris comme le résultat du programme de calcul dans le registre des écritures algébriques (T12 $T_{T-Prog \to Exp}$) *sans* respect de la hiérarchie des opérations (utilisation de délimitants, rôle correct des opérateurs utilisés). Par exemple, $N = n + 1 \times 4$. Cette technique

nécessite l'introduction d'une lettre, d'un symbole ou d'un mot pour désigner le nombre de carrés blancs sur la bordure. Elle conduit à des écritures incorrectes non parenthésées ou concaténées.

Le nombre de carrés grisés peut être exprimé par une expression « générale », par exemple $4(n+1)$ ou par une formule $N = 4(n+1)$, où n désigne le nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc et N le nombre de carrés unités gris.

Il est envisageable que certains élèves, notamment ceux des groupes C et B-, ne mobilisent pas de lettres (T11) pour généraliser et ne convoquent pas la traduction du registre des programmes de calcul à celui des écritures algébriques (T12). Nous envisageons deux techniques qui peuvent les conduire à obtenir le nombre de carrés grisés dans le cas général mais pas à produire une expression algébrique :

- Une technique qui conduit à exprimer un programme de calcul, c'est-à-dire comme une succession d'opérations à effectuer. Par exemple, « on ajoute 1 au nombre de carré blanc et on multiplie par 4 ». L'aspect procédural des expressions est sollicité mais la lettre n'est pas mobilisée ;
- Une technique qui conduit à exprimer le résultat d'un programme de calcul dans le langage naturel. Par exemple, le produit de 4 par la somme du nombre de carrés blancs et de 1. C'est l'aspect structural des expressions qui est sollicité.

Nous abordons dans le paragraphe i. les conditions à mettre en place pour pointer aux élèves le besoin de nouvelles techniques pour créer et simplifier des expressions algébriques correspondant à des programmes de calcul équivalents.

f. Analyse *a priori* de la partie B

Dans la partie B, pour tous les groupes, il est d'abord demandé aux élèves de comparer les différentes expressions trouvées dans la classe (question 1). Dans le cas où une seule expression apparaît, le déroulement prévoit que l'enseignant encourage l'apparition d'une autre expression par la mise en évidence d'un programme de calcul. Les élèves sont ensuite amenés à étudier l'équivalence des expressions (question 2). Le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ intervient au niveau T-convoqué dans tous les groupes. Différentes expressions algébriques sont proposées et l'élève doit déterminer celles qui donnent le nombre de carrés grisés. Plusieurs **techniques** appuyées par des technologies privilégiant certains aspects des expressions sont possibles. Nous les avons présentées dans le chapitre 3 (cf. § 3.1.4) :

- $\tau_{Prouver-equiv-2}$ Une technique appuyée sur la propriétés d'égalité des polynômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux ». Elle consiste à transformer les expressions pour comparer les formes développées réduites. Il y a un appui sur l'identification de la structure des expressions. La dialectique de l'algébrique et du numérique n'est pas utilisée pour appréhender l'équivalence des expressions.

- $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Une technique de conjecture puis de preuve appuyée par la dialectique de l'algébrique et du numérique puis par les propriétés du calcul algébrique. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ (test numérique) ou $\tau_{Tester-2}$ (test graphique) pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence des expressions. En cas de non-équivalence, elle consiste à donner un contre-exemple. En cas d'équivalence, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre. Le test peut se faire « à la main » mais le recours au tableur offre un milieu plus riche pour appréhender l'équivalence. La possibilité de faire varier la variable sur un grand nombre de valeurs met davantage en évidence que l'égalité des valeurs pour les mêmes valeurs numériques de la variable (donc la dénotation) dans le cas où il y a équivalence. Dans l'autre cas, les résultats affichés diffèrent et une seule valeur pour laquelle ils diffèrent suffit pour justifier la non-équivalence des expressions (contre-exemple).
- Une technique appuyée par un changement de cadre. Le retour à la schématisation permet d'associer chaque expression à une stratégie de calcul du nombre de carrés unités blancs. Cette technique ne met pas en jeu l'équivalence des programmes de calcul mais ce qu'ils représentent.

La technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ est à privilégier pour les élèves des groupes C et B-. En effet, au niveau technologique, elle met l'accent sur le fait que les expressions représentent des programmes de calcul. Les dialectiques entre l'algébrique et du numérique et celles entre les aspects procédural et structural sont sollicitées. Nous renvoyons le lecteur à l'analyse *a priori* du parcours 2 (cf. §4.3.3) pour davantage de détails sur les types de tâches mis en jeu dans ces techniques.

Dans la dernière question (question 3), il est demandé à l'élève de calculer le nombre de carrés grisés pour un nombre de carrés blancs « grands ». Le type de tâches convoqué est T_{Tester}. Le calcul est facilité par le choix de l'expression la plus adaptée parmi celles proposées dans la question précédente. Il s'agit donc ici de travailler sur le sens des expressions et l'anticipation des calculs numériques.

g. Variables didactiques

Nous présentons le choix des différentes variables didactiques en jeu même si certains ont déjà été évoqués dans les analyses des parties A et B.

Le choix du « pattern » , c'est-à-dire de la forme à généraliser. Cette variable joue sur la complexité des programmes de calcul et des expressions produites. Elle fait le lien avec les erreurs à travailler selon les groupes. Deux patterns différents ont été retenus : le carré bordé pour le groupe C et une figure rectangulaire auxquelles sont ajoutées deux carrés unités pour les groupes A et B. Le pattern du groupe C permet de travailler la distributivité simple. Le pattern des groupes A et B [11] conduit à une expression de degré 2 et la majorité des programmes de calcul nécessitent l'utilisation de délimitants. La hiérarchie des opérations est plus complexe que dans celle du carré bordé. D'autre choix auraient pu être possibles. Par exemple, nous aurions pu retenir un seul pattern pour les trois groupes et proposer des découpages pour des énoncés différents. Mais, nous avons préféré laisser la possibilité au groupe C de travailler sur des expressions « simples » et de revenir sur les priorités opératoires et la distributivité simple.

Le découpage de l'énoncé et le niveau d'intervention des types de tâches. Comme nous l'avons souligné dans l'analyse *a priori* de la partie A, le découpage de l'énoncé et le niveau d'intervention des types de tâches qui décomposent $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ ne sont pas les mêmes d'un groupe à l'autre. Le type de tâches T0 « Identifier un programme de calcul » intervient au niveau T-convoqué pour les groupes C et B- alors qu'il intervient au niveau R-convoqué pour les groupes B+ et A. Les types de tâches T1 et T2 interviennent au niveau T-convoqué dans tous les groupes. Ce choix résulte de la caractérisation des technologies dominantes des groupes. Les élèves des groupes C et B- donnant encore majoritairement peu de raisons d'être aux expressions algébriques, nous avons souhaité découper l'énoncé pour les amener à percevoir les limites des démarches numériques. De plus, la référence au programme de calcul peut être un appui pour contrôler l'expression algébrique produite le traduisant par l'identification de l'ordre des opérations à effectuer.

Le choix du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc. Cette variable intervient dans les questions où il est demandé de calculer le nombre de carrés

11. Comme le carré bordé, ce pattern a déjà été exploité dans des recherches en didactique des mathématiques. Nous l'avons rencontré dans (Chua & Hoyles, 2011)

grisés pour un nombre fixé de carrés blancs afin de faire émerger les programmes de calculs (T0) pour les groupes C et B-. Un nombre de carrés blancs inférieur à dix favorise une technique de comptage mais fournit un milieu riche pour l'émergence des différentes stratégies de dénombrement. Un nombre de carrés blancs supérieur à 10 met en évidence les limites de la technique de comptage et la nécessité de verbaliser un programme de calcul puis une écriture numérique qui traduit le résultat du programme de calcul. Dans les groupes B- et C, au moins une question de chaque cas est proposée. Nous avons fait le choix de proposer davantage de questions avec un nombre de carrés blancs « petits » au groupe C afin de renforcer les limites de la technique de comptage et d'encourager l'émergence d'un programme de calcul. Ce choix est en lien avec les technologies dominantes mobilisées par les élèves de chaque groupe. Par ailleurs, cette variable didactique intervient dans la question 3 de la partie B. Le nombre choisi de carrés blancs est suffisamment grand pour donner des calculs complexes sauf pour une des expressions qui est la plus appropriée.

h. Les éléments du milieu

Plusieurs éléments peuvent composer le milieu. Les aides constructives à la disposition des élèves jouent un rôle important dans la construction du milieu.

Le tableur. L'utilisation du tableur est encouragée à plusieurs reprises dans le document d'accompagnement (pages 1 et 5 de ce document). Il fournit un milieu riche pour travailler la notion de variable, faciliter l'émergence d'une expression générale à partir d'un programme de calcul et appréhender l'équivalence des expressions. Son usage n'a cependant pas été retenu par les enseignants. Les outils informatiques, souvent difficiles d'accès dans les établissements, sont éloignés de leurs pratiques.

Les schémas permettent d'illustrer les différents stratégies de calcul des carreaux grisés. Ils sont utilisés comme moyen d'aide (par exemple, aide 1 du groupe C) pour faire émerger différents programmes de calcul. Dans chaque groupe, trois programmes de calcul sont mis en évidence.

Les écritures numériques du résultat du programme de calcul sont retenues comme moyen d'aide (par exemple, aide 2 du groupe C) pour faire émerger une expression algébrique à partir des programmes de calcul. Elles peuvent être utilisées pour mettre en évidence les priorités opératoires et la hiérarchie des opérations qui restent implicites dans la formulation des programmes de calcul.

Les schémas de calcul peuvent intervenir dans le milieu pour aider à identifier l'ordre des opérations à effectuer et passer du procédural au structural. Prenons, par exemple, le schéma de calcul suivant :

$$n \xrightarrow{+1} n+1 \xrightarrow{\times 4} 4(n+1)$$

Il est associé à l'expression $4(n+1)$. Dans le sens de lecture gauche-droite, il indique les étapes du programme de calcul associé et donc quelles opérations effectuer et dans quel ordre. Mais, contrairement au programme de calcul, le schéma fait explicitement apparaître l'utilisation de parenthèses pour respecter la hiérarchie des opérations. Dans l'autre sens de lecture, il indique la structure de l'expression. $4(n+1)$ est un produit.

Nous abordons maintenant les conditions (contrat et gestion didactique) à mettre en place par l'enseignant pour construire le bloc technologico-théorique attendu.

i. Des conditions pour aborder le moment de construction du bloc technologique et théorique pendant le déroulement

Le déroulement prévoit une alternance entre des temps de recherche en binôme, des mises en commun, dépendantes des groupes, suivies de synthèses pour la classe entière. Étant donné que les élèves ont déjà rencontré l'algèbre, l'enseignante estime qu'une séance de cinquante minutes environ et éventuellement le début de la séance suivante suffisent pour traiter le problème. L'effectif du groupe B étant réduit, elle prévoit de laisser ce groupe davantage en autonomie et de garder davantage de temps pour les mises en commun du groupe C. Le déroulement suit les deux parties qui organisent les énoncés :

- Partie A : émergence des programmes de calcul et production d'expressions algébriques,
- Partie B : étude de l'équivalence des programmes de calcul .

La durée de la partie A est de trente à quarante minutes ; celle de la partie B est de vingt minutes. Il s'agit de durées approximatives. Une mise en commun et une synthèse sont prévues à l'issue de chaque partie. Des mises en commun peuvent être ajoutées en fonction du travail des élèves et des difficultés rencontrées. Voici une description plus précise du déroulement prévu et du rôle de l'enseignant en fonction des difficultés rencontrées par les élèves.

Lancement du problème

L'enseignant peut commencer la séance de travail en annonçant qu'il s'agit de revenir sur l'utilisation de l'algèbre dans la résolution de problème. Il peut préciser aux élèves que cet enjeu est le même pour tous, même si tous n'ont pas le même problème. Il peut préciser que l'objectif est, dans un premier temps, de déterminer le nombre de carrés pour une schéma de taille quelconque.

Temps de recherche sur la partie A

La durée de cette étape est estimée à une vingtaine de minutes. Durant le temps de recherche, l'enseignant distribue les aides en fonction de l'avancement du travail des élèves et éventuellement interrompt le travail par des bilans. La plupart des élèves commencent par mettre en œuvre une technique de comptage des carreaux grisés. Il est possible de faire un premier bilan pour s'assurer que la formulation du problème est bien comprise par tous. Puis, le choix du nombre de carrés blancs rend la technique de comptage trop coûteuse en temps. À ce stade, la considération des questions précédentes peut permettre une généralisation et l'identification d'un programme de calcul. Certains élèves, notamment ceux du groupe C, auront des difficultés à l'établir. L'enseignant pourra introduire l'aide 1 et s'appuyer sur un milieu composé des différents schémas du problème. Il est possible d'établir un bilan intermédiaire pour faire ressortir et comparer les techniques utilisées par les élèves et les amener à formuler les programmes de calculs. Le milieu proposé dans l'aide est un appui pour l'identification et la validation des programmes de calcul. Il est ensuite demandé aux élèves de produire une expression générale. Si cette étape est difficile, l'enseignant apporte l'aide 2 puis l'aide 3 pour inciter les élèves à produire une écriture numérique correspondant au résultat du programme de calcul dans les questions précédentes. Certains élèves utilisent des lettres, d'autres des mots, la mise en commun sera l'occasion d'institutionnaliser l'utilisation des lettres.

Mise en commun sur la partie A

La durée est estimée à une dizaine de minutes. L'enseignant invite les élèves à présenter les expressions trouvées à partir des programmes de calculs utilisés. Si des lettres sont introduites, des précisions sont apportées sur ce qu'elles désignent. Le numérique a un rôle central dans le contrat didactique pour invalider les expressions erronées et mettre en évidence la nécessité du respect des priorités opératoires et des délimitants dans la hiérarchie des expressions. A l'issue de cette mise en commun, des interrogations sur l'équivalence des expressions en lien avec celle des programmes de calcul peut commencer à émerger.

Synthèse

La durée est estimée à cinq minutes. Cette partie concerne tous les groupes. La présence de deux patterns différents offre l'occasion de décontextualiser les éléments de synthèse du problème. L'enseignant met en évidence le coût du calcul numérique face à l'efficacité d'une expression générale ou d'une formule pour calculer le nombre de carreaux pour n'importe quel nombre. Si plusieurs lettres sont apparues, il peut revenir sur l'indifférence du choix du nom des lettres en contrôlant que le nom de la lettre n'a pas d'importance. Il peut revenir sur l'utilisation des lettres en précisant que toutes les lettres peuvent être utilisées en mathématiques mais que les lettres n, a, x sont majoritairement utilisées ; il peut aussi revenir sur les conventions d'écritures. Si une seule stratégie de calcul est apparue, l'enseignant peut en faire émerger d'autres à partir des schémas. L'enseignant peut amener les élèves à mettre ensuite en évidence que plusieurs expressions ont émergé pour désigner le même nombre, c'est-à-dire qu'il conduit les élèves à construire la dénotation des expressions au niveau technologico-théorique. Les programmes de calculs conduisent à des expressions différentes mais ayant la même valeur, pour toute valeur de la lettre. La partie B est engagée : D'autres expressions conviennent-elles ? Comment déterminer celles qui donnent le nombre de carrés grisés ?

Temps de recherche sur la partie B

La durée est estimée à cinq minutes. Après un temps de recherche, l'enseignant invite les élèves à tester les expressions pour les valeurs numériques du début du problème. Si certains élèves éprouvent des difficultés, l'enseignant peut distribuer l'aide de la partie B et refaire le lien avec les différentes stratégies de dénombrement. Pour justifier les expressions correctes, les élèves sont amenés à transformer les expressions, ce qui est l'occasion de reprendre les règles de distributivité simple et double et les conventions d'écriture.

Mise en commun et synthèse sur la partie B

Les élèves sont amenés à débattre et comparer leurs justifications du fait que les expressions sont correctes ou non. La durée est estimée à une quinzaine de minutes. Les trois techniques prévues dans l'analyse *a priori* peuvent apparaître dans le débat. Mais l'objectif de l'enseignant est d'amener les élèves à la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ de conjecture puis de preuve pour favoriser la réflexion au niveau technologico-théorique sur le fait que des expressions équivalentes dénotent le même nombre pour la même valeur de la variable. Certains élèves commencent par proposer de faire le lien avec les stratégies de dénombrement des carrés ; mais le contrat didactique établi les amène à travailler sur les expressions générales et non sur ce qu'elles représentent. L'enseignant propose alors de tester les expressions avec les valeurs numériques de la première partie, pour constater que certaines renvoient le même nombre, correspondant au nombre de carrés grisés, et d'autres non. L'équivalence des expressions est appréhendée par le numérique. L'utilisation d'un tableur peut venir ici enrichir le milieu. L'enseignant demande ensuite si cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre, ce qui conduit à instaurer le contre-exemple et la preuve par le calcul algébrique. Pour justifier les expressions correctes, les élèves sont amenés à transformer les expressions, ce qui est l'occasion de reprendre les règles de distributivité simple et double et les conventions d'écriture. Il est possible que certains élèves utilisent directement la preuve algébrique ; l'enseignant peut mettre en avant l'intérêt du test numérique pour conjecturer et éliminer les expressions pour lesquelles la valeur attendue n'est pas obtenue. À ce stade, les deux problèmes sont l'occasion de décontextualiser les résultats obtenus ; cela conduit à une synthèse. Des expressions différentes peuvent renvoyer le même nombre pour n'importe quelle valeur de la lettre. Pour savoir si deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre, on teste pour des valeurs numériques. Si les valeurs obtenues sont différentes, alors elles ne sont pas égales et on a un contre-exemple. Sinon, on peut seulement conjecturer l'égalité des expressions pour toute valeur de la lettre. Dans ce cas, la conjecture est prouvée en utilisant les propriétés du calcul (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, identités remarquables, etc). L'enseignant peut alors mettre en avant, dans la synthèse, que cette méthode est un moyen pour contrôler les transformations. La question B-3 montre l'intérêt d'avoir plusieurs expressions pour désigner le même nombre. C'est le sens des expressions qui est en jeu. Le choix de l'expression la plus appropriée, $(a + 1) \times 4$ pour le groupe C et l'expression $a^2 + 2a/2$ pour le groupe B, permet de réaliser les calculs numériques facilement.

j. Conclusion sur l'analyse *a priori* du parcours 1

Ce parcours est très riche parce qu'il convoque les trois OM locales de référence. Il permet de revenir sur les raisons d'être de l'introduction des expressions algébriques et des propriétés de calcul permettant de transformer une expression en une autre, équivalente.

Dans les énoncés proposés, nous choisissons de proposer le même type de tâches à tous les groupes : deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Ce choix résulte de la collaboration avec les enseignants et de la volonté de faciliter la gestion didactique du problème et l'institutionnalisation. Mais d'autres choix sont possibles. Il serait envisageable de proposer, pour les groupes B+ et A qui ont déjà donné des raisons d'être à l'algèbre, un énoncé où T1 et T2 interviennent au niveau R-convoqué. Par exemple, le problème pourrait consister à déterminer le taille de la figure pour un nombre de carrés unités donnés. Dans ce cas, ce n'est plus l'équivalence des programmes de calculs qui est en jeu, mais le recours à l'algèbre pour mettre en équation le problème.

4.3.3 Analyse *a priori* du parcours 2

Ce parcours est intitulé « Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'équivalence des expressions ».

a. Type de tâches et sous-question génératrice

Comme les technologies dominantes mobilisées dans les démarches des élèves des groupes B et C, laissent vivre des erreurs récurrentes dans la formation et la transformation des expressions, ce parcours vise à les déstabiliser en étudiant l'équivalence des expressions et en favorisant l'articulation entre le numérique et l'algébrique. Il s'agit de développer d'une part, la dialectique de l'algébrique et du numérique à travers la conjecture de l'équivalence d'expressions et, d'autre part, des raisonnements de type preuve algébrique et contre-exemple numérique. Ce parcours convoque le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre.* Il porte sur la question suivante : les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?

Ce parcours est possible à plusieurs étapes du déroulement comme celles de reprise, d'entraînement ou de préparation à un contrôle.

b. Énoncés

L'énoncé a la forme suivante pour tous les groupes :

Les égalités suivantes sont-elles ***vraies pour toute valeur de*** *a ? Justifie ta réponse.*

Egalité	*Vraie/Fausse*	*Justification*

L'énoncé est accompagné d'une aide constructive, à la disposition des élèves.

– *Tu peux* ***tester l'égalité*** *en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.*
– *Tu montres qu'une* ***égalité est fausse*** *à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.*
– *Tu prouves qu'****une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre*** *à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.*

Les égalités sont choisies parmi celle proposées dans le tableau 4.17 et suivant des caractéristiques que nous présentons dans les paragraphes suivants.

Egalité	**V/F**	**Type**	**A**	**B**	**C**
$3p = 3 + p$	F	1			x
$p^2 = 2p$	F	1			x
$7p - p = 7$	F	1			x
$6 + 5p = 11p$	F	1			x
$5p - 3p = 2p$	V	1			x
$3(p + 2) = 3p + 2$	F	2			x
$5(2 + p) = 10 + 5p$	V	2			x
$3 \times (2 \times p) = 6 \times 3p$	F	2		x	x
$3 \times (2 \times p) = 6p$	V	2		x	x
$p(p + 2) = p^2 + 2$	F	2		x	x
$p(p + 2) = 2p + 2$	F	2		x	x
$p(p + 2) = p^2 + 2p$	V	2		x	x
$2p^2 = (2p)2$	F	1		x	x
$4p^2 = (2p)2$	V	1		x	x
$p + 3(p + 2) = 4p + 6$	V	2		x	
$p + 3(p + 2) = (p + 3)(p + 2)$	F	2		x	
$(p + 3)(p + 2) = p^2 + 5p + 6$	V	2		x	
$(p + 2)^2 = p^2 + 4$	F	1		x	
$(p + 2)^2 = p^2 + 4p + 4$	V	1		x	
$x(x + 1) + 1 = 2x + 1$	F	2	x	x	
$(x - y)^2 = (y - x)^2$	V	2	x		
$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$	V	2	x		
Légende. Le type 1 correspond aux égalités qui permettent de revenir sur le rôle des opérateurs ou sur une propriété erronée. Le type 2 correspond aux égalités qui permettent de revenir sur le contrôle des calculs.					

TABLEAU 4.17 – Variété des égalités pour le parcours 2

c. Analyse *a priori*

L'objectif de ce parcours est d'amener les élèves à revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'étude de l'équivalence des expressions. Comme présenté dans le chapitre 3 (cf. § 3.1.4), plusieurs techniques sont possibles mais seules deux d'entre-elles peuvent être envisagées au niveau scolaire considéré :

- $\tau_{Prouver-equiv-2}$ Celle basée sur la propriété d'égalité des polynômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux ». Cette technique qui consiste, soit à s'appuyer sur la structure des expressions et à comparer les coefficients des monômes de même degré des écritures développées réduites après transformation, soit à calculer la différence des deux expressions et à montrer qu'elle est nulle.
- $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Celle basée sur la conjecture puis la preuve de l'équivalence des expressions. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ (test numérique) ou $\tau_{Tester-2}$ (test graphique), pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence des expressions. En cas d'équivalence, elle consiste à donner un contre-exemple. En cas de non-équivalence, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre.

Ces techniques convoquent plusieurs types de tâches :

- $\tau_{Prouver-equiv-2}$
  1. Identifier la structure des expressions $T_{Structure}$ (OM2)
  2. Prouver :
     - Si l'égalité est vraie pour toute valeur : identifier la structure des expressions $T_{Structure}$ (OM2) et les développer si nécessaire T_D(OM3),
     - Si l'égalité est fausse : donner un contre-exemple ou justifier par la structure ($T_{Structure}$) des expressions la non-équivalence des expressions.
- $\tau_{Prouver-equiv-3}$
  1. Conjecturer : tester l'égalité en convoquant T_{Tester} (OM2) et, dans le cas d'une substitution par une valeur numérique, calculer la valeur des expressions pour la valeur numérique testée T_{C-num}(OM3),
  2. Prouver :
     - Si l'égalité est vraie pour toute valeur : identifier la structure des expressions $T_{Structure}$ (OM2) et les développer si nécessaire T_D(OM3),
     - Si l'égalité est fausse : donner un contre-exemple ou justifier par la structure ($T_{Structure}$) des expressions la non-équivalence des expressions.

Dans ce parcours, la technique attendue est $\tau_{Prouver-equiv-3}$, parce qu'elle permet de mettre en évidence que les expressions dénotent le même objet. Le test numérique est privilégié pour amener les élèves à conjecturer l'équivalence des expressions.

Nous envisageons différentes stratégies possibles que les élèves peuvent mettre en œuvre. Nous les étiquetons comme des techniques non attendues (notées τ_{NA}) ou erronées (notées τ_E).

Voici deux techniques non attendues que les élèves peuvent mettre en œuvre :

- τ_{NA-1} Celle appuyée par des formulations d'ordre légal du type « il faut » ou « on doit »,
- τ_{NA-2} Celle qui consiste à comparer les écritures développées et réduites dans le cas de deux expressions non égales. Il s'agit en fait de $\tau_{Prouver-equiv-2}$ dans l'OM de référence. Cette technique n'est pas attendue car c'est le contre-exemple qui l'est. Des arguments en français sont souvent ajoutés aux écritures symboliques.

Voici deux techniques erronées que les élèves peuvent mettre en œuvre :

- τ_{E-1} Celle appuyée par une preuve par l'exemple qui consiste à affirmer que deux expressions sont égales à partir d'un cas particulier. Pour ces élèves, si les expressions sont égales pour une ou deux valeurs, alors elles le sont pour toutes,
- τ_{E-2} Celle appuyée par une démarche dans le registre des écritures algébriques avec utilisation de règles de calculs incorrectes.

Ces techniques sont en lien avec des niveaux de justification. On peut faire l'hypothèse que de la non-convocation des types de tâches intermédiaires ne permet pas de donner des raisons d'être au niveau technologique et théorique attendu selon le cas (contre-exemple ou preuve algébrique). Nous proposons, dans le paragraphe, une analyse *a priori*, effectuée finement, des différentes techniques envisageables pour quelques égalités.

L'énoncé est accompagné d'une aide constructive qui suggère le recours au numérique et apporte une méthode pour prouver qu'une égalité est vraie pour toute valeur ou fausse. Cette méthode fait référence à $\tau_{Prouver-equiv-3}$.

d. Les variables didactiques et milieu

Les variables didactiques suivantes interviennent.

Le *choix des expressions composant les égalités*. Ce choix dépend des groupes. Les expressions sont choisies pour travailler sur des erreurs de calcul caractéristiques de chaque groupe. Nous distinguons deux grands types d'égalités :

1. Celles qui permettent de revenir sur le rôle des opérateurs (par exemple $3p = 3 + p$) ou celle liée à la connaissance d'une propriété erronée (par exemple

$(p+2)^2 = p^2 + 4$). La complexité des expressions est simple.

2. Celles qui permettent de revenir sur le contrôle des calculs. Il s'agit d'égalité plus complexe liée à un développement erroné.

Dans le tableau 4.17, nous indiquons des égalités à proposer à chaque groupe. Dans la mise en œuvre du parcours, l'enseignant peut choisir les égalités à travailler tout en veillant à retenir au moins une égalité vraie et au moins une égalité fausse. Dans l'annexe B, nous avons proposé différents choix possibles ce qui se rapproche des assortiments définis par Esmenjaud-Genestoux (2000). Pour le groupe C, les expressions retenues font intervenir des erreurs de concaténation, de fausse linéarité ou de mauvaise utilisation des parenthèses tandis que pour le groupe B, il s'agit d'erreurs relatives à la distributivité ou l'utilisation incorrecte de règles sur les puissances. Pour les élèves du groupe A, il s'agit davantage de prouver des identités du calcul algébrique.

Le *changement de registres de représentation* intervient comme un élément du milieu visant à favoriser l'émergence d'une conjecture. Le passage au registre des écritures numériques permet de revenir au procédural. Le registre graphique n'est ici pas retenu parce qu'il ne permet pas, contrairement à celui des écritures numériques, de revenir à l'aspect procédural des expressions. Pour cela, des tests numériques sont menés « à la main » mais cela n'exclut pas, bien au contraire, l'utilisation d'un tableur ou d'un tableau de valeurs par l'enseignant pour renforcer le fait que les expressions renvoient ou non les mêmes valeurs. Le recours au numérique amène les élèves à évaluer les expressions pour des valeurs numériques, à identifier les processus de calcul et donc à déterminer quelles opérations effectuer dans quel ordre. Le registre des schémas de calculs peut être introduit pour amener les élèves à travailler l'articulation entre le procédural et le structural. Par exemple, le schéma de calcul de l'expression $4 + 3a$ est :

$$a \xrightarrow{\times 3} 3a \xrightarrow{+4} 3a + 4$$

Ce schéma indique dans quel ordre effectuer l'opération, ce qui est l'occasion de mettre en évidence que la multiplication est prioritaire sur l'addition. Sa lecture en sens inverse permet de dégager la structure de l'expression.

Le *découpage de l'énoncé* et le *niveau de convocation du type de tâches* sont les mêmes pour tous les groupes. Le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est T-convoqué par la tâche dans les trois groupes mais les élèves ont à leur charge la convocation des types de tâches intermédiaires indiqués plus haut. L'énoncé ne demande pas de conjecture et ne précise pas pour quelles valeurs numériques tester. Ce choix permet de laisser émerger les techniques non attendues et erronées des élèves. C'est à l'enseignant d'amener ses élèves à une conjecture numérique.

Nous proposons maintenant une analyse *a priori* de chaque égalité.

e. Analyse fine des techniques et éléments technologiques et théoriques en jeu sur quelques égalités

Nous proposons une analyse *a priori* des différentes techniques envisageables pour quelques égalités. Elles mettent en évidence les différentes niveaux technologiques en jeu. Nous avons choisi de présenter l'analyse pour les égalités retenues dans les expérimentations traitées dans le chapitre 5 (cf. §5.2.6). Ces analyses sont utilisées pour apprécier les productions des élèves. Pour faciliter la lecture des tableaux, nous notons τ_A pour la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ pour technique attendue.

• **$4 + 3a = 7a$.** Cette égalité permet de travailler sur l*a priori*té de la multiplication par rapport à l'addition. Elle est proposée au groupe C qui a une tendance à concaténer les expressions ($a + b \to ab$) pour donner un résultat sans opérateur. Dans la mise en commun, l'enseignant revient sur la priorité de la multiplication sur l'addition. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Vrai	Faux
Justification	Contre-exemple	Règle incorrecte $n + mx \to (n+m)x$	Ordre légal : « on ne peut pas additionner les nombres et les lettres »
Techniques	τ_A	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

• **$a^2 = 2a$.** Cette égalité est liée à une erreur de linéarisation due à une conception erronée de la notion de puissance. Dans la mise en commun, l'enseignant revient sur le définition des opérateurs : a^2 signifie $a \times a$ alors que $2a$ signifie $2 \times a$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Vrai	Vrai
Justification	Contre-exemple	Règle incorrecte $(nx)^2 \to nx^2$	Ordre légal : « a^2 signifie 2 fois a »
Techniques	τ_A	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

• **$(2a)^2 = 4a^2$.** Cette égalité met en jeu le rôle des parenthèses en lien avec la notion de puissance. Elle est liée à l'erreur de calcul $(2a)^2 = 2a^2$ souvent responsable de transformations incorrectes dans l'application des identités remarquables. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite le rôle des parenthèses : $(2a)^2$ signifie $2a \times 2a$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Vrai/Faux
Justification	Test numérique et preuve	Preuve sans test numérique	Preuve numérique	Règle incorrecte $(nx)^2 \to nx^2$	Ordre légal : « Il suffit d'enlever les parenthèses »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-1}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

• $(2a)^2 = 2a^2$**.** Comme la précédente, cette égalité revient sur le rôle des parenthèses en lien avec la notion de puissance. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite ce rôle : $(2a)^2$ signifie $2a \times 2a$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Vrai	Vrai	Vrai/Faux
Justification	Contre-exemple	Preuve algébrique	Règle incorrecte $(nx)^2 \to nx^2$	Ordre légal : « Il suffit d'enlever les parenthèses »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

• $a(a+2) = a^2+2$**.** Cette égalité revient sur l'application de la propriété de distributivité et le rôle des parenthèses. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite la propriété utilisée : $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ avec $x = a$, $y = a$ et $z = 2$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Faux	Vrai	Vrai/Faux
Justification	Contre-exemple	Preuve algébrique	Règle incorrecte $x(y+z) \to x \times y + z$	Ordre légal : « Il suffit d'enlever les parenthèses »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

• $a+3(a+2) = 4a+6$**.** Cette égalité revient sur l*a priorit*é de la multiplication et le rôle des parenthèses. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite la propriété utilisée : $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ avec $x = 3$, $y = a$ et $z = 2$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Justification	Test numérique et preuve	Preuve algébrique sans conjecture	Preuve numérique	Règle incorrecte $x(y+z) \to x \times y + z$ ou non respect de l*a priorit*é opératoire	Ordre légal : « $a+3$ est différent de $4a$ »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-1}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

f. Des conditions pour aborder le moment de construction du bloc technologique et théorique pendant le déroulement

Nous présentons ici des conditions que le professeur peut mettre en place pour aborder le moment de construction du bloc technologico-théorique pendant le déroulement.

Le déroulement prévoit une alternance entre des temps de recherche relativement court, des mises en commun pour les différentes égalités retenues (cinq à dix minutes). Il se termine par une phase d'institutionnalisation. Il s'agit de créer une situation de formulation/validation reposant sur la validation d'une conjecture et la distinction entre conjecture et preuve. Les modalités de travail sont à déterminer par l'enseignant.

Pour lancer la séance et engendrer le processus de dévolution, l'enseignant précise les enjeux du parcours : revenir sur les erreurs de calcul à partir d'une nouvelle méthode de contrôle.

Pendant le temps de recherche, l'enseignant laisse émerger les justifications des élèves en lien avec les différentes techniques étiquetées dans l'analyse a priori. Il peut encourager les élèves à utiliser l'aide constructive qui suggère le recours au test numérique.

Pendant les phases de mise en commun, l'enseignant met en place différents éléments du contrat didactique pour faire évoluer les techniques erronées ou non attendues utilisées par les élèves. Il amène les élèves à comparer les techniques qu'ils proposent pour en montrer les limites :

- *remettre en question les formulations d'ordre légal* (τ_{NA-1}), par exemple, en mettant en évidence leurs limites (manque de précision, ...), en revenant au fait que les lettres représentent des nombres ou en explicitant clairement les propriétés du calcul algébrique auxquelles elles font référence ;
- *remettre en question la preuve par l'exemple numérique* (τ_{E-1}) en insistant que la quantification (les égalités sont vraies pour toutes les valeurs de la lettre) ;
- *remettre en question des règles erronées* en les déstabilisant avec un tableau de valeurs (par exemple à partir d'un tableur) ou un schéma de calcul. En effet, il est possible que certains élèves ne déstabilisent pas l'erreur visée, même après un ou deux tests numériques. Le recours au tableau de valeurs permet de faire intervenir un grand nombre de valeurs mettant clairement en évidence que les expressions ne renvoient pas le même nombre. L'intervention de

schéma de calculs pour représenter les expressions algébriques peut amener à identifier les programmes de calcul ayant pour résultat l'expression algébrique en jeu et donc à déterminer quelles opérations effectuer et dans quel ordre (Bardini, 2003). Enfin, l'enseignant explicite clairement les propriétés du calcul algébrique en jeu.

Dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant instaure $\tau_{Prouver-equiv-3}$ comme méthode de contrôle des calculs algébriques. Il explicite clairement les propriétés du calcul algébrique et revient sur le rôle des opérateurs et des délimitants à partir d'une ou deux égalités. Pour cela, il peut s'appuyer sur les schémas de calcul pour montrer le lien entre l'aspect procédural (quelles opérations effectuer et dans quel ordre ?) et l'aspect structural (quelle est la dernière opération à effectuer ?).

g. Conclusion sur *a priori* du parcours 2

L'énoncé de cet exercice est proche des tâches diagnostiques 2 et 4 du test Pépite (cf. annexe A) mais il est proposé dans un objectif différent du diagnostic. Dans le test, l'énoncé propose des justifications (question à choix multiples) alors que dans le parcours, la question est ouverte. C'est la mise en place du moment de la construction du bloc technologio-théorique pour répondre à la question : « l'égalité est-elle toujours vraie ? » qui permet de revenir sur les erreurs de calcul des élèves et de construire des OM intermédiaires implicites à agréger (correspondant aux sous-types de tâches à convoquer) pour donner des raisons d'être aux règles de formation et de transformation des expressions algébriques.

4.3.4 Analyse *a priori* du parcours 3

Le parcours 3 s'intitule « Étudier des expressions équivalentes ».

a. Types de tâches en jeu et sous-question génératrice

Comme les technologies dominantes mobilisées par les élèves des groupes B et C prennent peu en compte l'équivalence des expressions pour guider et contrôler les transformations algébriques, ce parcours vise à donner des raisons d'être à la transformation des expressions et au fait qu'on puisse choisir la plus adaptée au but visé. Il s'agit de construire la dénotation des expressions comme un élément du bloc technologico-théorique pour guider la conduite du calcul algébrique.

Ce parcours a pour premier objectif d'amener les élèves à étudier des expressions équivalentes (deux expressions peuvent avoir la même dénotation) en favorisant, en fonction des niveaux scolaires, les articulations entre l'algébrique et le numérique et l'algébrique et le graphique. Le parcours a pour deuxième objectif d'amener les élèves à choisir l'expression équivalente la plus appropriée (qui demande le moins de calculs) pour réaliser une tâche comme, dans la cadre numérique, un calcul numérique astucieux ou, dans le cadre fonctionnel, la détermination d'antécédent ou d'image. Ce parcours convoque les deux types de tâches de OM2 $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* et $T_{Choisir}$ *Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé*. Comme dans le parcours 2, le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est central mais il convoqué dans un objectif didactique différent de celui du parcours 2 puisqu'il ne s'agit pas de déstabiliser des erreurs de calcul. La formulation de la tâche est donc différente et le jeu sur les variables didactiques est distinct. La question est la suivante : les expressions sont-elles égales pour tout x ?

Ce parcours est possible à plusieurs étapes du déroulement comme l'étape de reprise, l'étape d'entraînement ou l'étape de préparation à un contrôle.

Nous présentons les tâches possibles à proposer à chaque groupe en fonction des niveaux scolaires de troisième et de seconde. Nous proposons ensuite une analyse *a priori* des tâches pour expliciter la structure générale des énoncés et les choix de variation réalisés en fonction des groupes.

b. Énoncés

Énoncé pour le groupe C (respectivement B) en classe de troisième

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x+2)^2 - 4$ *(respectivement $A(x) = (x-1)^2 - 4$)*
- $B(x) = x(x+4)$ *(respectivement $B(x) = (x+1)(x-3)$)*
- $C(x) = 9x - 6$ *(respectivement $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$)*

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2 (respectivement 1)			
3 (respectivement -1)			
0 (respectivement 0)			

1. *Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$ (respectivement $x = 1$), $x = 3$ (respectivement $x = -1$). Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?*
2. *Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.*
3. *Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?*
4. *Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 98×102.*

Énoncé pour le groupe A en classe de troisième

Voici trois expressions :
- $A(x) = (x-2)(x+2)$
- $B(x) = x^2 - 4$
- $C(x) = x^2 - 2x - 4$

1. *Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie.*
2. *Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement* 98×102.

Aide constructive à la disposition des élèves de troisième

- *Pour démontrer que* ***deux expressions « ne sont pas égales »*** *, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.*
- *Pour démontrer que* ***deux expressions « sont égales pour tout*** x ***»*** *, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, pense à* ***utiliser les propriétés*** *suivantes. Pour tout a, b, c et d :*
  - · *la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition :* $a(b+c) = ab + ac$
  - · *la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition :* $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
  - · *l'identité remarquable :* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - · *l'identité remarquable :* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - · *l'identité remarquable :* $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Énoncé pour le groupe C en classe de seconde

On se demande si les trois fonctions f, g et h sont égales pour tout réel x :
- $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- $g(x) = (x+1)(x-3)$
- $h(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

1. ***Conjecture numérique : tu peux utiliser la fonction « tableau de valeurs » de ta calculatrice graphique***
   (a) *Calcule la valeur des trois fonctions pour $x = 1$ et $x = -1$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?*
   (b) *Calcule la valeur des trois fonctions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.*
2. ***Conjecture graphique :*** *Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f, g et h. Qu'observes-tu ? Quel lien peux-tu faire avec ta dernière conjecture ?*
3. ***Preuve :*** *Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?*
4. *Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :*
   - *a. Calculer $f(3)$.*
   - *b. Déterminer le(s) antécédent(s) de* 0 *par f.*

Énoncé pour le groupe B en classe de seconde

On se demande si les trois fonctions f, g et h sont égales pour tout réel x :
– $f(x) = x^2 - 2x - 3$
– $g(x) = (x + 1)(x - 3)$
– $h(x) = x(x - 2) - x^2 - 2$

1. ***Conjecture graphique :*** *Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f, g et h. Qu'observes-tu ? Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des trois fonctions ? Tu peux t'aider de la fonction « tableau de valeurs » de ta calculatrice.*
2. ***Preuve :*** *Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie algébriquement. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?*
3. *Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :*
   – *a. Calculer $f(3)$.*
   – *b. Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par f.*

Aide pour les groupes C et B en classe de seconde

Question 1 :
– *Pour démontrer que* ***deux fonctions « ne sont pas égales »*** *, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.*
– *Pour démontrer que* ***deux fonctions « sont égales pour tout** x **»*** *, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions des fonctions sous une même forme pour les comparer.*

Question 4.b. (respectivement Question 3.b. pour le groupe B) : *Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.*

Énoncé pour le groupe A en classe de seconde

Voici plusieurs expressions d'une même fonction f définie pour tout réel x par :
– *Expression 1 :* $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$
– *Expression 2 :* $f(x) = x^3 - 7x + 6$
– *Expression 3 :* $f(x) = x(x^2 - 7) + 6$

1. *Prouve algébriquement que les trois expressions sont égales pour tout réel x. Tu peux vérifier à l'aide ta calculatrice graphique.*
2. *Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :*
   – *a. Calculer $f(0)$.*
   – *b. Calculer $f(-3)$.*
   – *c. Déterminer le(s) antécédent(s) de 6 par f.*

Aide pour le groupe A en classe de seconde

Question 1 :
– *Pour conjecturer si des expressions sont égales, tu peux :*
   – *les tester avec une ou plusieurs valeurs numériques,*
   – *les représenter sur le même écran d'une calculatrice graphique.*

– *Pour démontrer que* ***deux expressions « ne sont pas égales »*** *, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.*
– *Pour démontrer que* ***deux expressions « sont égales pour tout*** *x » , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.*

Question 2. c : *Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.*

c. Trame commune des énoncés

L'objectif de ce parcours est, d'une part, d'amener les élèves à appréhender le fait que deux expressions peuvent dénoter le même objet et, d'autre part, qu'on peut utiliser l'une ou l'autre en fonction du but visé. La trame commune des énoncés de chaque groupe est la suivante :

– Phase 1 : étudier des expressions équivalentes en convoquant le type de tâches est $T_{Prouver-equiv}$,
– Phase 2 : travailler avec des expressions équivalentes en convoquant le type de tâches est $T_{Choisir}$.

Le découpage de chaque énoncé en phases est présenté dans le tableau 4.18. Chaque phase fait l'objet d'une analyse *a priori* et d'un choix des variables didactiques spécifiques.

Niveau scolaire	3^{e}			2de		
Groupes	A	B	C	A	B	C
Phase 1	Q1	Q1/Q2/Q3		Q1	Q1/Q2	Q1/Q2/Q3
Phase 2	Q2	Q4		Q2	Q3	Q4

TABLEAU 4.18 – Répartition des questions dans les phases 1 et 2 en fonction du niveau scolaire et du groupe

d. Analyse *a priori* de la phase 1

Techniques

Le type de tâches central dans la phase 1 est $T_{Prouver-equiv}$, prouver l'équivalence de deux expressions algébriques. Comme présenté dans le chapitre 3 (cf. § 3.1.4) et rappelé dans l'analyse *a priori* du parcours 2 (cf. §4.3.3), plusieurs techniques sont possibles mais seules deux d'entre-elles peuvent être envisagées au niveau scolaire considéré :

- $\tau_{Prouver-equiv-2}$ Celle basée sur la propriété d'égalité des polynômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux. Cette technique qui consiste soit s'appuyer sur la structure des expressions et à comparer les coefficients des monômes de même degré des écritures développées réduites après transformation, soit à calculer la différence des deux expressions et à montrer qu'elle est nulle.
- $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Celle basée sur la conjecture puis la preuve de l'équivalence des expressions. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ (test numérique) ou $\tau_{Tester-2}$ (test graphique) pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence des expressions. En cas d'équivalence, elle consiste à donner un contre-exemple. En cas de non-équivalence, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre.

Comme le niveau technologique dominant des élèves du groupe A s'appuie sur l'équivalence des expressions et sur le fait que deux expressions équivalentes dénotent le même objet, la technique attendue pour ce groupe est $\tau_{Prouver-equiv-2}$. En revanche, les groupes B et C n'ayant pas encore construit de bloc technologico-théorique s'appuyant sur l'équivalence des expressions, l'objet du parcours est de les amener à appréhender le fait que deux expressions équivalentes dénotent le même objet. C'est pourquoi la technique attendue est $\tau_{Prouver-equiv-3}$. Rappelons (cf. § 3.1.4 ou §4.3.3) que cette technique convoque le type de tâches T_{Tester} pour conjecturer l'équivalence ou non des expressions à partir d'un test numérique ou d'un test graphique. Pour la preuve, si les expressions ne sont pas équivalentes, un contre-exemple numérique est attendu ; sinon, c'est une preuve algébrique qui est attendue. Un développement ou une factorisation sont envisageables pour prouver l'équivalence mais la majorité des élèves choisira probablement le développement. Les genres de tâches *Développer* et *Factoriser* interviennent au niveau R-convoqué. Cette question développe l'intelligence du calcul. Le reconnaissance de la propriété et de la transformation effectuée sont à la charge de l'élève. La preuve algébrique met en évidence que, si deux expressions sont équivalentes, il existe une suite de transformations algébriques justifiées par les propriétés du calcul transformant l'une en l'autre.

Les techniques non attendues ou erronées que les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre sont celles présentées dans l'analyse *a priori* du parcours 2 (cf. §4.3.3)

Variables didactiques et milieu

Les variables didactiques suivantes interviennent.

Le *nombre d'expressions équivalentes*. Pour tous les énoncés, trois expressions algébriques sont proposées. Pour les groupes B et C, deux expressions sont équivalentes alors que la troisième ne l'est pas. Pour le groupe A, deux choix sont possibles. Soit seules deux expressions sont équivalentes, soit les trois expressions sont équivalentes. Le choix de cette variable didactique est lié à l'objectif du parcours et au niveau technologique dominant de chaque groupe.

Le *choix des expressions*. Les trois expressions algébriques sont choisies parmi : des formes factorisées, des formes développées-réduites, des formes canoniques (par exemple $(x-2)^2-4)$) et des formes intermédiaires ni complètement développées, ni complètement factorisées (par exemple, $x(x^2-7)+6$). Les expressions sont majoritairement de degré deux sauf pour le groupe A de seconde où les expressions sont du troisième degré. La principale variation se situe entre les groupes B et C. Nous avons fait le choix de proposer des structures plus simples pour le groupe C que pour le groupe B. Le niveau technologique du groupe C laissant vivre des erreurs sur le rôle des opérateurs, des expressions où la hiérarchie des opérations est plus simple sont retenues. Comme il ne s'agit pas ici de travailler les techniques de développement et de factorisation, ce choix ne défavorise pas le groupe C.

Le *découpage de l'énoncé et le niveau d'intervention des types de tâches*. Dans les trois groupes, le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ intervient au niveau T-convoqué. La variation porte sur le découpage de l'énoncé en lien avec la conjecture. Pour les groupes B et C, l'énoncé est découpé de sorte que le type de tâches T_{tester} soit T-convoqué alors que celui du groupe A n'est pas découpé. En fonction du niveau scolaire, le test n'a pas lieu dans le même cadre. Le tableau 4.19 présente ces choix pour chaque groupe en fonction des niveaux scolaires. Le test graphique est plus pertinent en seconde qu'en troisième car le registre des représentations graphiques y a une place importante dans l'étude des fonctions.

Groupe	A	B	C
3$^{\text{e}}$	Pas de test	Test numérique ($\tau_{Tester-1}$)	Test numérique ($\tau_{Tester-1}$)
2$^{\text{de}}$	Pas de test	Test graphique ($\tau_{Tester-2}$)	Tests numérique ($\tau_{Tester-1}$) et graphique ($\tau_{Tester-2}$)

TABLEAU 4.19 – Découpage de l'énoncé en lien avec la conjecture dans la phase 1

En référence aux deux techniques $\tau_{Tester-1}$ et $\tau_{Tester-2}$ présentées dans le chapitre 3, nous distinguons deux types de tests pour conjecturer l'équivalence des expressions :

- Le test numérique renvoie à la technique $\tau_{Tester-1}$. Il est demandé de tester les expressions pour deux valeurs numériques choisies de sorte qu'elles renvoient le même nombre (voir par exemple la question 1 des groupes C et B de troisième). Les élèves sont ainsi amenés à conjecturer l'égalité des expressions pour tout x. Puis un troisième test numérique permet d'éliminer une des expressions et de formuler une nouvelle conjecture. Ce troisième test fournit un contre-exemple pour prouver, à la question suivante, que l'une des expressions n'est pas équivalente aux autres.
- Le test graphique renvoie à la techniques $\tau_{Tester-1}$. Il est demandé aux élèves de tracer les représentations graphiques des fonctions définies par les trois expressions algébriques. Le fait que deux courbes apparaissent alors que trois fonctions sont définies, amène à conjecturer que deux des trois expressions sont équivalentes.

Le découpage de l'énoncé est en lien avec les changements de cadre.

Le *changement de cadre et les registres convoqués*. Suite aux changements de cadre mis en jeu, les registres de représentation convoqués interviennent comme des éléments du milieu. Ils visent à favoriser l'émergence d'une conjecture. Dans le cas du test numérique, c'est le passage du registre des écritures algébriques à celui des écritures numériques qui est en jeu. L'aspect procédural des expressions est sollicité. D'autres registres de représentation peuvent intervenir. Les schémas de calcul peuvent être sollicités pour les calculs numériques, notamment pour le groupe C, afin de revenir sur l'ordre des opérations à effectuer. Si les calculs numériques prennent trop de temps ou s'avèrent trop fastidieux pour les élèves, l'utilisation de la calculatrice est autorisée. Un tableau de valeurs est à remplir au fur et à mesure des questions par les élèves. Il joue un rôle important dans le milieu pour l'évolution de la conjecture. Il est prévu l'intervention d'un tableur, à l'issue de la question 2, pour renforcer le fait que deux des trois expressions dénotent le même nombre quelle que soit la valeur de la lettre. Dans le cas du test graphique, c'est le passage du registre des écritures algébriques à celui des représentations graphiques qui est sollicité.

Une *aide constructive* est disponible. Elle apporte une démarche pour prouver qu'une égalité est vraie pour toute valeur ou fausse. Cette démarche fait référence à $\tau_{Prouver-equiv-3}$.

e. Analyse *a priori* de la phase 2

Le type de tâches central dans la phase 2 est $T_{Choisir}$ Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé. C'est le sens des expressions qui est en jeu. $T_{Choisir}$ est convoqué par la tâche (T-convoqué) et intervient pour résoudre des types de tâches du :

- Cadre numérique en troisième :
  - Calculer astucieusement une expression numérique,
- Cadre fonctionnel en seconde :
  - Calculer l'image d'un nombre par une fonction,
  - Déterminer le(s) antécédent(s) d'un nombre par une fonction.

Le choix des valeurs numériques est important. Elles sont déterminées pour que le choix d'une des expressions équivalentes soit plus approprié parce qu'il demande peu de calculs. Par exemple, pour le parcours du groupe A en seconde, le choix de l'expression $x^3 - 7x + 6$ facilite le calcul de $f(0)$ alors que le calcul de $f(-3)$ est facilité par le choix de l'expression $(x-1)(x-2)(x+3)$.

Seul le nombre de questions posées varie d'un groupe à l'autre afin d'équilibrer le travail demandé entre les phases 1 et 2 pour chaque groupe. Le découpage de l'énoncé est le même pour les trois groupes.

Le milieu peut faire intervenir la calculatrice pour que les élèves puissent contrôler leur résultat. Une aide constructive est disponible pour les élèves de seconde. Les définitions d'image et d'antécédent y sont données.

f. Des conditions pour aborder le moment de construction du bloc technologique et théorique pendant le déroulement

Nous proposons des conditions pour aborder la construction du bloc technologico-théorique pendant le déroulement. Il s'agit de propositions sur les démarches et les raisonnements à introduire aux élèves en fonction du but visé par la tâche.

L'enjeu est d'abord de guider le processus de dévolution de la tâche. L'enseignant commence par expliciter que l'enjeu de la séance est le même pour toute la classe mais avec des expressions différentes pour chaque groupe. Il précise que l'objectif est de travailler sur l'égalité d'expressions pour n'importe quelle valeur de la lettre. Le déroulement prévoit une alternance entre phase de travail individuel et phase de mise en commun de cinq à dix minutes chacun.

Un temps de recherche individuel sur la phase 1 permet de faire émerger les premières conjectures. L'enseignant s'assure que les élèves ont bien compris que l'enjeu des tests numériques ou graphiques est de conjecturer l'égalité ou non des expressions. Si les calculs s'avèrent fastidieux pour les élèves, l'utilisation de la calculatrice est autorisée. C'est l'occasion pour l'enseignant de revenir sur les priorités opératoires et l'usage des parenthèses.

L'enseignant propose ensuite une mise en commun au cours de laquelle les tests numériques et graphiques sont commentés, à partir de la confrontation des solutions des élèves, pour formuler une conjecture. Le travail individuel s'enchaîne de la même façon avec la deuxième question. Dans le cas des tests numériques, la conjecture évolue. Pour la renforcer et la visualiser, l'enseignant peut utiliser un tableau de valeurs ou un tableur. Il s'agit maintenant de la prouver. Pour l'expression qui n'est pas égale aux autres, un contre-exemple est mis en évidence. L'enseignant pointe que la valeur pour laquelle les expressions ne sont pas égales joue le rôle de contre-exemple et qu'un contre-exemple suffit pour prouver que deux expressions ne sont pas égales. Pour les expressions égales, l'enseignant amène les élèves à la preuve algébrique : « Est-que vous êtes sûrs que c'est toujours vrai ? Pourquoi ? » Il insiste sur la quantification : « Nous, nous souhaitons donner une preuve de l'équivalence des expressions pour n'importe quelle valeur ». À ce stade l'enseignant peut mettre en évidence que les trois groupes travaillent sur le même objectif. Après un temps de recherche où l'aide méthodologique est sollicitée, la preuve algébrique est débattue. Les propriétés du calcul algébrique utilisées, qui sont rappelées dans l'aide, sont clairement identifiées.

La phase 2 est ensuite engagée. Elle motive le choix d'une des expressions équivalentes. L'enseignant amène les élèves à anticiper sur les calculs et à reconnaître l'expression qui demande le moins de calculs. Il s'en suit une institutionnalisation sur les points suivants :

- Des expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre même si elles sont des écritures différentes. La différence est liée à la structure sous-jacente des expressions. On peut remarquer que, de la même façon, un nombre possède plusieurs écritures comme 0,5 et $\frac{1}{2}$. Quelle que soit la valeur de x dans des expressions égales pour toute valeur de la lettre, on obtient le même résultat.
- On peut utiliser l'une ou l'autre des écritures équivalentes d'une expression pour calculer astucieusement une expression numérique, calculer la valeur d'une expression algébrique pour une valeur numérique donnée ou pour résoudre une équation.
- Pour vérifier que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre, on commence par conjecturer avec un tableau de valeurs, une représentation

graphique ou des tests numériques : si, en remplaçant la lettre par un nombre, les valeurs des expressions sont différentes, alors elles ne sont pas égales, sinon on peut seulement conjecturer que les deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre. Un, deux ou trois exemples numériques ne suffisent pas pour conclure que l'égalité est toujours vraie. L'enseignant peut s'appuyer sur l'évolution de la conjecture dans les tests numériques proposés. Dans ce cas, seule une preuve algébrique utilisant les propriétés du calcul permet de prouver l'égalité pour n'importe quelle valeur.

– L'enseignant encourage ses élèves à utiliser cette méthode comme moyen de contrôle des calculs.

g. Conclusion du l'analyse *a priori* du parcours 3

Ce parcours intitulé « Étudier des expressions équivalentes » vise à développer, au niveau technologico-théorique, la dénotation et le sens des expressions. Nous avons montré que ces deux aspects sont peu développés dans les programmes et les manuels scolaires. Il peut être proposé à toutes les étapes du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. Un jeu sur les variables didactiques et les éléments du milieu permet d'adapter l'énoncé proposé. Des exemples d'énoncés sont proposés dans l'annexe B.

En guise de conclusion sur les analyses *a priori* qui viennent d'être présentées, nous voudrions souligner deux points importants. Premièrement, nous nous sommes centrés sur les parcours 1, 2 et 3 mais rappelons que nous avons conçu en tout sept parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire. Ces trois parcours ont été particulièrement travaillés avec les enseignants parce qu'ils s'appuient sur des types de tâches qu'ils ont peu l'habitude de proposer à leurs élèves. Deuxièmement, les énoncés que nous avons proposés sont des propositions, d'autres sont possibles. C'est pourquoi, dans l'annexe B, sont associés plusieurs exercices à chaque parcours. Toutefois, certaines propositions pourraient être améliorées. En effet, les contraintes du projet PépiMeP et la nécessité de peupler les parcours nous a parfois conduit à proposer des exercices qui n'ont probablement pas fait l'objet d'analyses *a priori* suffisamment approfondies. Cette dernière remarque nous conduit à la présentation des modes de collaboration avec les différents partenaires du projet PépiMeP.

4.4 Collaboration avec les différents partenaires du projet PépiMeP

Dans cette partie, nous décrivons le mode de collaboration avec les partenaires du projet, élément déterminant de la viabilité du modèle de PED dans l'enseignement ordinaire et de son automatisation dans LaboMep.

4.4.1 Collaboration avec les enseignants du groupe IREM

Un groupe IREM autour de la différenciation en algèbre

Le mode de collaboration avec les enseignants a été déterminé par le besoin de concevoir un modèle de PED compatible avec l'enseignement ordinaire. Ce mode de collaboration devait permettre des échanges entre chercheurs et enseignants pour tester, affiner et peupler le modèle de PED, tout en laissant aux enseignants des marges de manœuvre pour se l'approprier et faire de nouvelles propositions à partir de leurs expériences et de leurs pratiques. De plus, le besoin de créer une communauté d'enseignants pour une autre recherche en cours sur les pratiques de différenciation des enseignants [12] nous a conduit à la création d'un groupe IREM sur l'enseignement et la différenciation en algèbre. Des pré-expérimentations, qui ne sont pas analysées dans l'étude présentée, ont eu lieu avant la création de ce groupe avec un enseignant de collège et un enseignant de seconde sur l'année scolaire 2010-2011. Elles sont présentées dans l'annexe C.

L'objectif du groupe est d'amener les enseignants à exploiter, en se les appropriant, les PED pour réguler l'enseignement de l'algèbre dans leurs classes et à prévoir avec eux des déroulements pour accompagner les PED. La passation et l'interprétation des résultats des élèves au test Pépite, l'intégration des PED dans l'organisation des progressions des enseignants, la place laissée aux différentes phases de formulation, validation et institutionnalisation dans les déroulements des PED, la mise en place d'un contrat par rapport au contrôle des calculs mais aussi une réflexion sur les difficultés des élèves en algèbre liées à des implicites de l'OM à enseigner ont fait l'objet de huit réunions réparties sur l'année scolaire. Les objectifs de la recherche et des observations en classe ont été clairement dévoilés aux enseignants. Toutefois, l'enseignant garde sa liberté quant à sa progression en algèbre et à l'intégration des PED dans cette progression.

12. Cette recherche fait l'objet de la thèse déjà citée de S. Bedja au LDAR de l'Université Paris 7 encadrée par B. Grugeon et C. Cazes.

Des enseignants de troisième et de seconde

Des enseignants volontaires de troisième et de seconde ont été réunis. Trois professeurs de troisième et un de seconde ont participé au groupe sur l'année scolaire 2011-2012. Tous enseignent dans des établissements de la région parisienne et ont une expérience du métier depuis plusieurs années.

Des autorisations multiples de la part des enseignants

Pour participer au groupe, les enseignants ont accepté :

- d'être filmés pendant les réunions du groupe IREM,
- de faire passer le test Pépite disponible sur LaboMeP en début et fin d'année et de mettre en place au moins un PED,
- l'observation et le recueil de video et d'enregistrement audio sur des séances relatives à l'algèbre,
- l'accès à tous les documents écrits de la classe sur les contenus (cours, devoirs, cahiers de quelques élèves, écrits des élèves).

Les données recueillies sont utilisées de façon anonyme et seulement dans le cadre de la recherche. Nous avons prévu des autorisations écrites dans lesquelles les parents des élèves filmés ont accepté les enregistrements sonores et visuels. Au-delà du recueil des données, dès le premier contact, les échanges au sein du groupe ont été situés par rapport à un contrat de collaboration.

Un contrat de collaboration « donnant-donnant »

Le contrat de collaboration a été explicité. Les échanges au sein du groupe devaient permettre aux chercheurs comme aux enseignants de tirer parti du travail réalisé. Du point de vue des chercheurs, ce groupe a permis de tester le modèle, pour revenir sur nos choix et le préciser pour assurer son écologie et le rendre accessible à la culture actuelle des professeurs et donc de produire une ressource pour l'enseignement ordinaire. Du point de vue des enseignants, ce groupe a été l'occasion, pour eux, d'une part, d'être impliqués dans une recherche et de participer à la création d'une nouvelle ressource et, d'autre part, d'interroger et éventuellement de faire évoluer leurs rapports personnels à l'algèbre et à son enseignement. Pour cela, des réunions du groupe ont été consacrées à des analyses de vidéo prises pendant les séances observées.

Négociation des PED avec les enseignants

Au départ, nous avons présenté les sept PED aux enseignants sous la forme d'exercices en précisant leurs enjeux didactiques. Le document qui a initié les discussions est présenté dans l'annexe B. Chaque enseignant a choisi, en fonction de son projet d'enseignement, le ou les parcours qu'il souhaitait travailler dans sa classe. Nous leur avons proposé de suggérer leur propres exercices mais ils ont préféré s'appuyer sur nos propositions. C'est en fin d'année qu'ils ont apporté des propositions de parcours d'enseignement différencié. Les parcours retenus et expérimentés dans les classes sont présentés dans l'annexe B. Nous avons négocié le choix des expressions, les formulations des énoncés et des aides. Nous avons déterminé ensemble les modalités de travail, la trame générale des déroulements et les apprentissages à institutionnaliser. Les difficultés probablement rencontrées par les élèves et les réponses possibles que l'enseignant pouvait apporter ont été anticipées. Ce mode de collaboration avec les enseignants nous a permis d'affiner les enjeux des parcours et de faire évoluer les énoncés et les déroulements pour mieux prendre en compte les contraintes des enseignants. Nous analysons les parcours retenus et les expérimentations en classe pour une enseignante de troisième, appelée Garance, dans le chapitre 5.

Présence du chercheur pendant les observations

Pendant les observations en classe, nous avons évité autant que possible toute intervention ou influence sur l'enseignement. Cependant, il est vrai que notre présence même dans la classe est un facteur de stress qui peut avoir des influences sur les observables. Nous y faisons référence dans l'analyse *a posteriori* du premier parcours passé dans la classe de Garance présentée dans le paragraphe 5.2.3 du chapitre 5.

La deuxième collaboration en lien avec le projet de recherche PepiMeP est la collaboration avec les chercheurs en informatique, les développeurs et l'association Sésamath.

4.4.2 Collaboration avec les chercheurs en informatique, les développeurs et l'association Sésamath

a. Mode de collaboration

La collaboration avec les chercheurs en informatique et les membres de Sésamath a consisté à formaliser et systématiser le modèle de PED pour permettre la génération automatique des PED dans LaboMeP et son adaptation à la culture de Sésamath. L'une des difficultés, tant informatique que didactique, a été de faire coïncider le modèle théorique à caractère didactique avec deux logiques : celle de développement d'un prototype de recherche en informatique et celle, pragmatique, de développement de la plateforme Sésamath. La démarche de modélisation des PED a été guidée à la fois par les analyses didactiques et une démarche itérative dans le cadre du travail informatique. L'équipe s'est appuyée sur les documents produits suite aux analyses didactiques. Ces derniers ont été progressivement affinés, structurés et systématisés à la fois par la réflexion didactique et la nécessité de le formaliser pour l'implémentation des parcours d'enseignement différencié et l'indexation des exercices des PED. Le travail avec les informaticiens a eu pour objectif de faire évoluer un modèle didactique déclaratif en un modèle formel informatique. Le travail a porté sur les questions suivantes : comment caractériser les exercices et le choix des variables didactiques pour peupler les parcours ? Comment automatiser la proposition d'exercices des parcours en fonction des entrées ? Dans l'annexe B, nous associons selon les trois entrées du modèle de PED, des exercices papier-crayon et interactifs pour chaque parcours. L'indexation des exercices vise à rendre possible l'automatisation des parcours et leur évolution dynamique en fonction des ajouts ou des retraits d'exercices dans LaboMeP.

Du côté didactique, cette démarche a fait l'objet de la conception du modèle didactique de PED présenté ci-dessus. Du côté informatique, elle a fait l'objet d'un travail de conception, de modélisation et d'implémentation. Le modèle a été réalisé par N. EL-Kechaï, dans le cadre d'un contrat post-doctoral mené au Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (L.I.P.6) financé par projet PepiMeP. Ce travail a permis la réalisation de deux logiciels qui sont des premières versions de prototype pour implémenter le modèle de PED. Le logiciel PepiIndexation permet d'indexer la centaine d'exercices qui intervient dans les parcours. Le logiciel PépiPad automatise la génération des parcours et créer des séances différenciées sur LaboMeP en fonction des groupes à partir des résultats du test diagnostic Pépite et des choix de l'enseignant. Ces logiciels sont en cours d'intégration dans LaboMeP. Enfin, nous avons travaillé sur l'interface de présentation des résultats du test et des PED à destination des enseignants. Les enseignants du groupe IREM ont participé au travail d'élaboration des interfaces pour passer d'un langage théorique à un langage utilisé habituellement dans les classes.

b. PepiIndexation : indexation des exercices

Quels critères didactiques permettent d'attribuer un exercice à un groupe d'élèves pour un objectif d'enseignement donné ? Voilà le type de questionnement qui a permis de systématiser et d'opérationnaliser le modèle des parcours. Le travail avec l'équipe de chercheurs en informatique nous a amené à spécifier et systématiser les choix des types de tâches et les variations sur un même type de tâches en fonction des groupes (variables didactiques, registres sémiotiques, niveaux de convocation des types de tâches, milieu). Ce travail a permis d'indexer les exercices intervenants dans les parcours, dans le but d'automatiser la proposition de parcours sur LaboMeP suite au passage du test Pépite et de la rendre évolutive suite aux ajouts de parcours ou d'exercices. Les exercices papier-crayon conçus dans le cadre de cette thèse comme les exercices interactifs présents sur LaboMeP ont pu être indexés. Un travail important d'opérationnalisation (vocabulaire utilisé par les enseignants notamment) a été mené pour permettre à des non-didacticiens d'indexer les exercices.

Une application Java [13] a été réalisée pour permettre de renseigner les métadonnées des exercices mis en jeu dans les PED, s'appuyant sur une liste de « capacités » établie par l'équipe de chercheurs. La liste des capacités, présentée dans l'annexe G, a été établie à partir des analyses didactiques et des capacités présentées dans les programmes officiels du collège et de la classe de seconde. L'interface de saisie des métadonnées de PépiIndexation est illustrée dans la figure 4.9. La saisie, ainsi facilitée, peut être effectuée par les différents membres de l'équipe. En sortie, l'éditeur génère automatiquement le fichier xml des métadonnées de la banque d'exercices, qui est utilisée par le logiciel PépiPad pour construire les parcours d'enseignement différencié.

Pour plus d'information sur les aspects techniques, nous renvoyons le lecteur au « Rapport technique » rédigé par N. El-Kechaï et au rapport intermédiaire de 2011 du projet PepiMeP disponibles à l'adresse `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm`.

L'indexation repose sur une catégorisation des « capacités » (correspondant globalement aux types de tâches) intervenant dans les programmes scolaires à la fin de la scolarité obligatoire (Chevallard, 2004). Notons que le vocabulaire utilisé n'est pas toujours celui de la recherche en didactique des mathématiques. Il s'est avéré nécessaire de s'appuyer sur les programmes scolaires, référence pour les enseignants

13. Cette application a été développée par Odette Auzende de l'équipe MOCAH du laboratoire L.I.P.6.

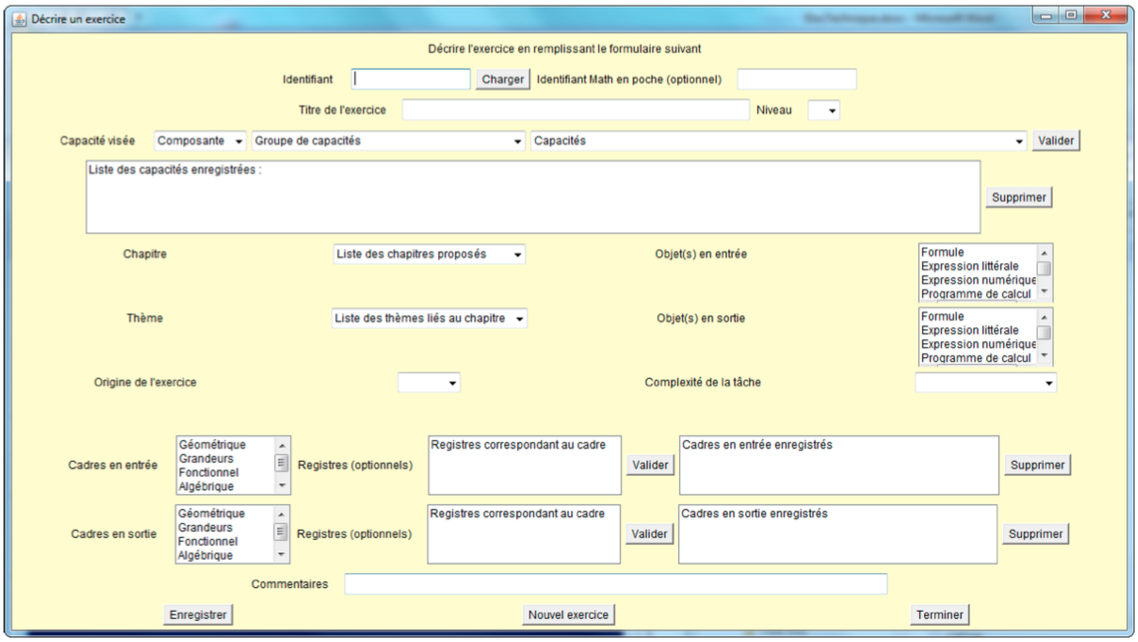


FIGURE 4.9 – L'interface de saisie des métadonnées de PepiIndexation.

et pour Sésamath, et donc d'utiliser la terminologie commune de « capacités ». C'est pourquoi les « types de tâches » sont exprimés en « capacités ». Les capacités sont classées selon les trois composantes du modèle du stéréotype : Usage de l'algèbre, Calcul algébrique et Traduction algébrique. Comme nous l'avons déjà souligné dans le paragraphe 4.1, ce classement a des correspondances avec l'OM de référence établie au chapitre 3.

Nous présentons les différents critères d'indexation retenus et leur correspondance avec le modèle de parcours différencié précédemment présenté. Ils ont été retenus suite à de nombreux allers et retours entre l'équipe de chercheurs en informatique et l'équipe de chercheurs en didactique des mathématiques, à partir des exercices retenus.

Les critères d'indexation sont les suivants (cf. figure 4.9) :

- *Identifiant de l'exercice* : identifiant de la base de données de Sésamath,
- *Titre de l'exercice*,
- *Niveau scolaire* pour lequel l'exercice a été conçu,
- *Capacité visée* : union des capacités visées dans l'exercice, c'est-à-dire des types de tâches « principaux ». Trois éléments sont spécifiés :
  - Composante du modèle de stéréotype dans lequel il intervient (UA, TA ou CA),
  - Groupe de capacités (correspondant à des genres de tâches),

- ◦ Capacités (correspondant à des types de tâches, cf. annexe G),

- *Chapitre* : c'est le chapitre dans lequel l'exercice est rattaché. À ce jour, la valeur « Calcul littéral » est disponible,
- *Thème* : c'est le thème auquel l'exercice est rattaché. Ce critère dépend du chapitre sélectionné. À ce jour, deux valeurs sont possibles pour le chapitre « Calcul littéral » : « Expressions algébriques » et « Equations ».
- *Objets mathématiques en entrée et en sortie* de l'exercice : expression littérale, expression numérique, programme de calcul, arbre, figure simple, figure complexe, fonction, formule, nombre, équation, identité, phrase, schéma géométrique, schéma de calcul,
- *Origine* : provenance de l'exercice. Trois valeurs sont possibles : LaboMeP, liste d'exercices conçus dans le cadre de cette thèse, manuels de Sésamath,
- *Complexité de la tâche* : complexité de la mise en fonctionnement des connaissances. Quatre valeurs sont possibles ; elles sont inspirées du programme de l'OCDE PISA : élémentaire, conceptuel simple, multi-pas et complexe,
- *Cadre(s) en entrée et en sortie* : géométrique, grandeurs, fonctionnel, algébrique, numérique. Pour chaque cadre, plusieurs registres sont associés. Par exemple, les registres associés au cadre algébrique sont : écriture algébrique, écriture numérique, figure géométrique, représentation graphique, LN processus (Pgme de calcul), LN structure, représentation en arbre, représentation en schéma de calcul.

Par exemple, l'exercice du groupe C du parcours 2 présenté à la page 232 est indexé comme présenté dans la figure 4.10. Une fois les exercices indexés, le logiciel PépiPad peut générer les PED.

Cette indexation pourrait être affinée. Elle a été élaborée pendant que notre travail de thèse était en cours si bien qu'aujourd'hui, nos analyses ont évolué et il semble que certains critères pourraient évoluer. Le choix d'indexer les exercices par des capacités plutôt que des types de tâches et, par des niveaux de complexité de la tâche plutôt que des niveaux de convocation des types de tâches nécessiterait d'être remis en question. Cela ne permet pas de décrire à un niveau fin les types de tâches qui composent celui en jeu globalement sur une question de l'exercice et leur niveau de convocation en lien avec le découpage de l'énoncé. Or, ce sont ces éléments qui forment la complexité de la tâche.

```xml
<exercice xmlns="modeleExo.xsd" identifiant="9" idMep="">
<titreExercice>Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?</titreExercice>
<niveauExercice>3</niveauExercice>
<origineExercice>Lingot</origineExercice>
<chapitre>Calcul littéral</chapitre>
<theme>Expressions littérales</theme>
<complexiteTache>EL=élémentaire</complexiteTache>
<capacitesVisees>
<capacite>
<composante>UA</composante>
<groupeCapacites>3. Démontrer ou prouver            </groupeCapacites>
<capaciteName>3.5. Prouver que 2 expressions littérales ne sont pas égales</capaciteName>
</capacite>
<capacite>
<composante>UA</composante>
<groupeCapacites>3. Démontrer ou prouver            </groupeCapacites>
<capaciteName>3.7. Prouver que 2 expressions littérales sont égales</capaciteName>
</capacite>
</capacitesVisees>
<objetsExo>
<objetsEntree>
<objet>Expression littérale</objet>
<objet>Identité</objet>
</objetsEntree>
<objetsSortie>
<objet>Expression littérale</objet>
<objet>Identité</objet>
</objetsSortie>
</objetsExo>
<cadres-RegExo>
<cadres-RegEntree>
<cadre-RegAssocies>
<cadre>Algébrique</cadre>
<registresAssocies>
<registre>écriture algébrique</registre>
</registresAssocies>
</cadre-RegAssocies>
</cadres-RegEntree>
```


FIGURE 4.10 – Indexation de l'exercice du groupe C présenté pour illustrer le parcours 2 (extrait du fichier xml)

c. PepiPad : générateur de parcours d'enseignement différencié

Le logiciel PépiPad intègre quatre types d'informations pour déterminer des exercices, à proposer à chaque groupe d'élèves, en fonction des objectifs choisis par l'enseignant. Premièrement, il prend en entrée le diagnostic cognitif établi par Pépite pour chaque élève. Deuxièmement, il prend en entrée le fichier de métadonnées qui décrit la banque d'exercices intervenant dans les parcours. Ce fichier a été généré par l'éditeur cité dans le paragraphe précédent. Troisièmement, il considère les trois entrées du modèle de PED : le niveau scolaire des élèves, le secteur d'étude et l'étape du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. À ce jour, seul le secteur « Expressions algébriques » et les étapes de reprise et d'entraînement sont disponibles. Quatrièmement, il prend en entrée les types de tâches convoqués et le jeu sur les variables didactiques caractérisant chaque parcours.

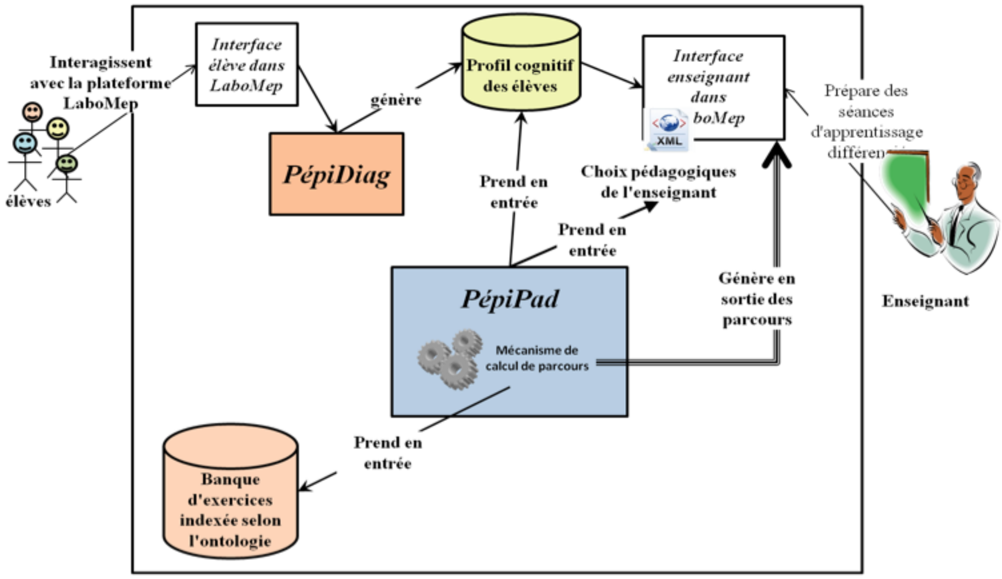


FIGURE 4.11 – Architecture générale de PepiPad.

Une vision synthétique de l'architecture fonctionnelle de PépiPad est illustrée par la figure 4.11. Pour plus d'information sur les aspects techniques, nous renvoyons le lecteur au « Rapport technique » rédigé par N. El-Kechaï et Dominique Prévit et au rapport de 2012 du projet PepiMeP disponibles à l'adresse `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm`. Actuellement, le logiciel PépiPad est en cours de finalisation. Une proposition de parcours est pourtant disponible sur LaboMeP. Elle est déterminée à partir des tableaux de l'annexe B. Mais cette proposition est statique et l'intérêt de PépiPad est de la rendre dynamique en prenant en compte les nouveaux exercices ajoutés. Pour faire coïncider la logique du modèle de parcours d'enseignement différencié avec la logique pragmatique du développement de la plateforme Sésamath, les parcours d'enseignement différencié et les étapes du déroulement de l'enseignement ont été renommés de manière à mieux correspondre aux pratiques habituelles sur Sésamath (cf. figure 4.12).

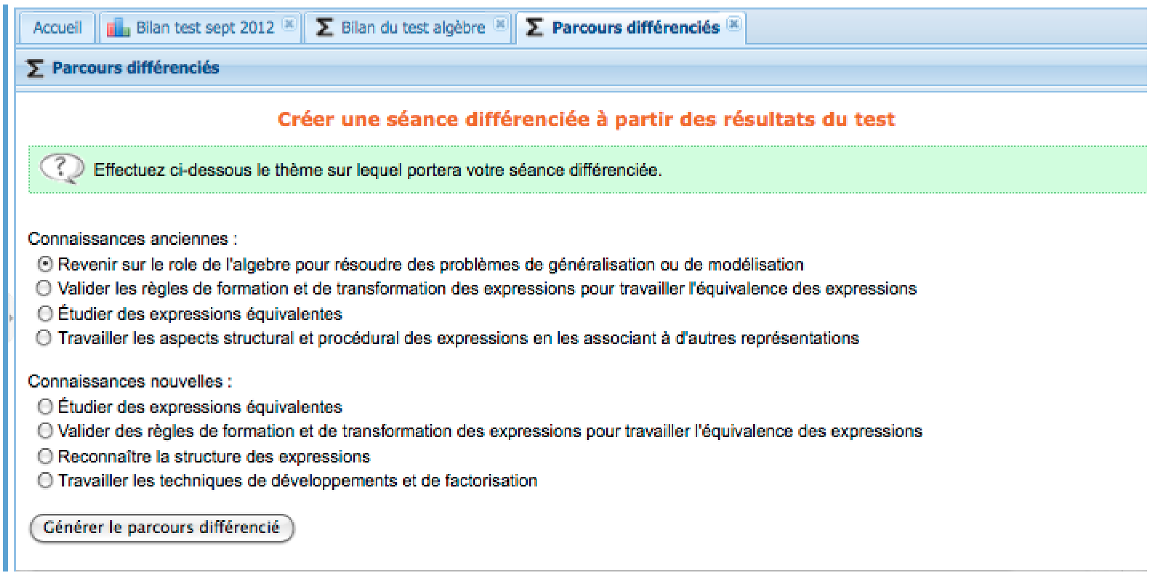


FIGURE 4.12 – La génération des PED actuellement sur LaboMeP

d. Une interface dans LaboMeP pour présenter les résultats du test Pépite aux enseignants

Une attention toute particulière a été portée par l'équipe pour présenter les groupes d'élèves aux professeurs dans LaboMeP et le bilan de chaque élève. Les enseignants du groupe IREM ont été sollicités pour proposer une interface qui soit adaptée aux pratiques d'évaluation et de différenciation des enseignants.

Une fois le test passé, l'enseignant accède au bilan de la classe (cf. §4.13). Il accède à un bilan pour la classe dans laquelle les élèves sont répartis en différents groupes. Chaque groupe est décrit par une ou deux phrases. Ces phrases sont formulées pour traduire les niveaux technologiques dominants de chaque groupe. La description de chaque groupe est la suivante :

- ***Groupe A :*** Les élèves donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée.
  - *Sous-groupe A+ :* Les élèves donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée. Ils traduisent des relations entre des variables et utilisent l'algèbre pour résoudre avec succès plusieurs types de problèmes.
  - *Sous-groupe A− :* Les élèves donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée. Ils utilisent peu l'algèbre pour résoudre des problèmes.

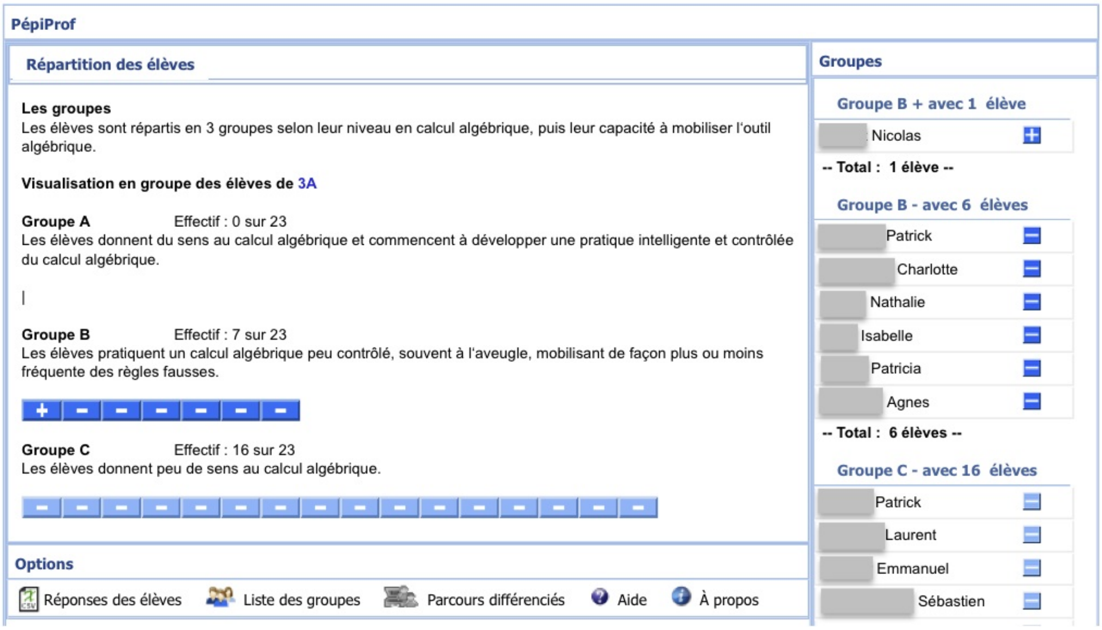
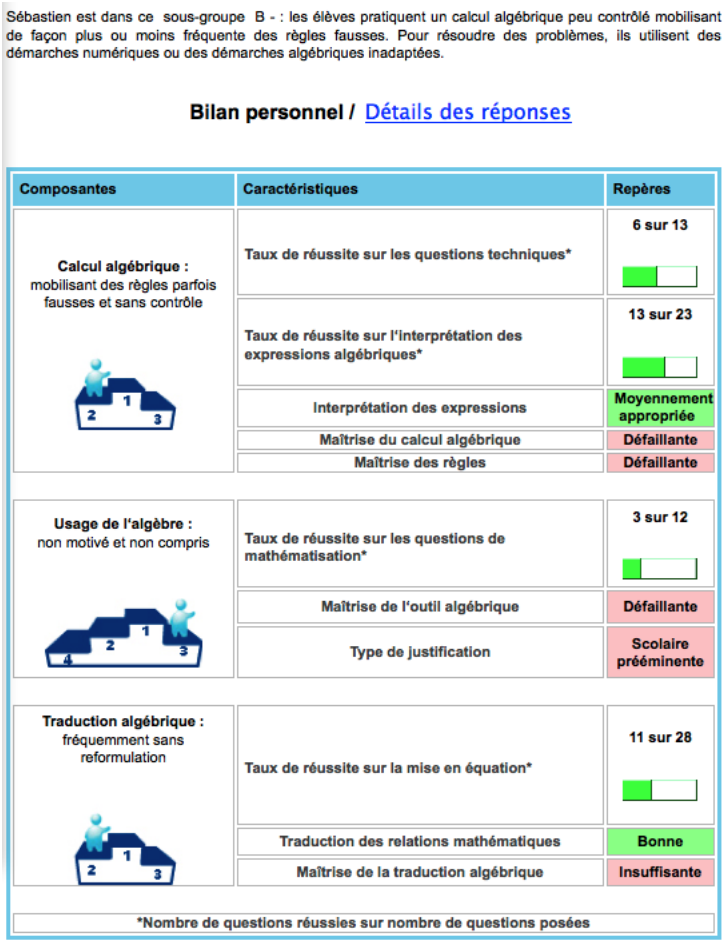


FIGURE 4.13 – Le bilan de la classe sur LaboMeP

- ***Groupe B :*** Les élèves pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses.
  - *Sous-groupe B+ :* Les élèves pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses. Pour résoudre au moins un type de problème, ils utilisent une démarche algébrique adaptée.
  - *Sous-groupe B– :* Les élèves pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses. Pour résoudre des problèmes, ils utilisent des démarches numériques ou des démarches algébriques inadaptées.
- ***Groupe C :*** Les élèves donnent peu de sens au calcul algébrique.
  - *Sous-groupe C+ :* Les élèves donnent peu de sens au calcul algébrique et commencent à l'utiliser pour résoudre des problèmes avec plus ou moins de succès.
  - *Sous-groupe C– :* Les élèves donnent peu de sens au calcul algébrique et l'utilisent peu ou pas comme outil pour résoudre des problèmes.

L'enseignant utilisateur peut accéder à la description de chaque groupe et sous-groupe en cliquant sur « Liste des groupes » et aux réponses des élèves au test en cliquant sur « Réponses des élèves ».

Le bilan de chaque élève est disponible. Il est illustré dans la figure 4.14 ; le stéréotype est présenté et, pour chaque composante, les taux de réussite aux exercices et les niveaux des différents indicateurs sont précisés (cf. §4.1.2). L'enseignant peut accéder au détail des réponses de l'élève pour chaque tâche relativement à chaque composante comme le montre la figure (cf. §4.15). Des éléments de l'analyse des réponses en lien avec les types et les codages de l'analyse *a priori* de Pépite sont présentés.



Sébastien est dans ce sous-groupe B - : les élèves pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses. Pour résoudre des problèmes, ils utilisent des démarches numériques ou des démarches algébriques inadaptées.

Bilan personnel / Détails des réponses

Composantes	Caractéristiques	Repères
Calcul algébrique : mobilisant des règles parfois fausses et sans contrôle	Taux de réussite sur les questions techniques*	6 sur 13
	Taux de réussite sur l'interprétation des expressions algébriques*	13 sur 23
	Interprétation des expressions	Moyennement appropriée
	Maîtrise du calcul algébrique	Défaillante
	Maîtrise des règles	Défaillante
Usage de l'algèbre : non motivé et non compris	Taux de réussite sur les questions de mathématisation*	3 sur 12
	Maîtrise de l'outil algébrique	Défaillante
	Type de justification	Scolaire prééminente
Traduction algébrique : fréquemment sans reformulation	Taux de réussite sur la mise en équation*	11 sur 28
	Traduction des relations mathématiques	Bonne
	Maîtrise de la traduction algébrique	Insuffisante

*Nombre de questions réussies sur nombre de questions posées

FIGURE 4.14 – Le bilan d'un élève du groupe B- sur LaboMeP

Les niveaux sur chaque composante du stéréotype ont été reformulés pour les enseignants comme suit :

- **CA :** trois niveaux relatifs à l'usage des règles de calcul algébrique :
  - CA1 : Calcul intelligent et contrôlé préservant l'équivalence des expressions,
  - CA2 : Calcul basé sur des règles syntaxiques souvent à l'aveugle ne préservant pas l'équivalence des expressions, règles de transformation erronées du type $(a+2)^2 = a^2 + 4$

Détails des réponses de l'élève [redacted] Sébastien (2G7)

Usage de l'Algèbre

Réponse	Question	Réponse	Démarche	Analyse de la réponse
Nombre de réponse(s) corecte(s) (ou partiellement)6	2 - 1	vrai	a^(m) * a^(n) = a^(m+n)	Règle correcte algébrique (contre exemple attendu)
	2 - 2	faux	a * a = a^2 est différent de a + a = 2a	Règle correcte instanciée
	2 - 3	faux	Avec des parenthèses, le carré agit sur l'intérieur de la parenthèse, sans parenthèse le carré n'agit que sur le a	Règle correcte énoncée en français
	4 - 1	faux	a^n * a^p = a^(n + p)	Règle correcte algébrique
	4 - 3	faux	Le carré de a est égal au produit de a par lui-même	Argument faible énoncé en français
	4 - 5	faux	On ne peut pas additionner des nombres et des lettres	argument faux ou impertinent d'ordre légal énoncé en français
Nombre de réponse(s) incorrecte(s)2	4 - 2	vrai	Pour faire la somme, on additionne les coefficients puis les exposants	Règle incorrecte énoncée en français qui assemble
	4 - 4	vrai	(a + 2)(a + 2) = a * a + 2 * 2	Règle incorrecte exprimée sympboliquement : erreur de parenthèse

FIGURE 4.15 – Le détail des réponses d'un élève du groupe B- pour la composante usage de l'algèbre (UA)

  - CA3 : Calcul sans signification et non opératoire, rôle des opérateurs non maîtrisé visible par des erreurs du type concaténation ($3 + 2a \to 5a$) ou linéarisation ($a^2 = 2a$) ;
- **UA :** quatre niveaux relatifs à l'usage de l'outil algébrique :
  - UA1 : Disponibilité de l'outil algébrique et usage adapté aux types de problèmes du domaine,
  - UA2 : Usage de l'outil algébrique adapté dans certains types de problèmes,
  - UA3 : Usage de l'outil algébrique non motivé et non adapté,
  - UA4 : Non disponibilité de l'outil algébrique et usage persistant de démarches arithmétiques ;
- **TA :** trois niveaux relatifs à la traduction entre différents registres sémiotiques :
  - TA1 : Traduction adaptée et contrôlée,
  - TA2 : Traduction fréquemment sans reformulation,
  - TA3 : Traduction pour schématiser.

En conclusion, nous avons développé les modes de collaboration avec les partenaires du projet : les enseignants d'un groupe IREM, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath. Ces collaborations ont été déterminantes pour envisager la viabilité du modèle de PED dans l'enseignement ordinaire et l'automatisation de la proposition de parcours dans LaboMep.

4.5 Bilan

À titre de bilan, nous retenons deux résultats principaux de ce chapitre.

Le premier résultat porte sur la caractérisation des OM apprises par des technologies « dominantes ». L'analyse des réponses du test Pépite et le modèle de stéréotype, l'un et l'autre développés depuis plusieurs années dans les projets de recherche Pépite et Lingot (cf. chapitre 1), ont joué un rôle essentiel dans cette caractérisation. Leur interprétation dans l'OM de référence éclaire sur la part des savoirs et savoir-faire ignorés de l'institution considérée (OM à enseigner) dans les OM apprises. Cela nous a permis de dégager sept sous-questions génératrices à aborder dans les parcours.

Le second résultat porte sur la modélisation des parcours d'enseignement différencié. Le modèle qui vient d'être présenté est un résultat central de notre étude. Il est conçu dans le cadre du projet pluridisciplinaire PépiMeP, ce qui a joué un rôle déterminant dans notre travail. Les premières versions des PED fondées sur les analyses didactiques sont progressivement affinées, structurées et systématisées à la fois par la réflexion didactique et la formalisation nécessaire pour permettre l'implémentation des parcours d'enseignement différencié et l'indexation des exercices des PED. Certes, le modèle de PED présente des limites. Nous avons conscience qu'il peut être davantage formalisé : c'est l'une des perspectives de la recherche. En outre, du fait des impératifs informatiques, les analyses *a priori* de tous les exercices intervenant dans chacun des parcours (annexe B) ne sont pas envisagées aussi finement que celles présentées dans le chapitre 4. La collaboration avec l'association Sésamath nous a conduit, cependant, à proposer une ressource évolutive avec des possibilités de modifications, d'ajouts et de retraits de parcours et d'exercices les composant.

Chapitre 5

Analyses des expérimentations

Afin de tester nos choix de conception des parcours d'enseignement différencié sur l'évolution des praxéologies apprises des élèves et leur compatibilité avec les choix d'enseignement des enseignants, nous avons travaillé en collaboration avec des enseignants volontaires de 3e et de 2de dans le cadre du groupe IREM de Paris-Diderot « Enseignement différencié en algèbre ». Les modes de collaboration ayant été présentés dans le chapitre 4 (cf. §4.4.1), il s'agit dans ce chapitre d'analyser une partie des expérimentations réalisées au sein du groupe. Au cours de l'année scolaire 2011-2012, nous avons proposé aux enseignants de ce groupe d'expérimenter dans leur classe le test Pépite et les parcours d'enseignement différencié de leur choix. Notre analyse est centrée sur les pratiques algébriques et les techniques mises en œuvre par les élèves relativement aux conditions d'enseignement mises en place par les enseignants. Elle s'appuie sur les analyses *a priori* des parcours présentées dans le chapitre 4 (cf. §4.3). L'analyse de l'usage des parcours par les enseignants ne fait pas l'objet de cette thèse mais relève d'autres travaux en cours en didactique des mathématiques dans le cadre du projet PépiMeP.

Après avoir précisé nos questions de recherche et nos choix méthodologiques pour l'analyse des expérimentations (cf. §5.1), nous analysons les évolutions des techniques et des technologies utilisées par les élèves suite à l'expérimentation des parcours 1, 2 et 3, présentés dans le chapitre 4, dans une classe de troisième et relativement aux conditions et contraintes de l'enseignante compte-tenu de son rapport à l'algèbre et à l'enseignement et des marges de manoeuvre possibles dans son établissement (cf. § 5.2). Nous terminons ces analyses par une conclusion qui fait le lien avec les expérimentations menées avec les autres enseignants du groupe IREM. Ensuite, nous analysons la répartition des stéréotypes présents sur l'ensemble des élèves ayant passés le test. Nous en tirons quelques conclusions concernant la répartition des élèves en groupe et l'évolution des niveaux technologiques dominants des élèves entre le début de la classe de troisième et la fin de la classe de seconde (cf. §5.3).

5.1 Questions et méthodologie

5.1.1 Questions et cadres théoriques

La question centrale de ce chapitre est la suivante : les parcours d'enseignement différencié ont-ils permis, d'une part, de revenir sur les raisons d'être des expressions algébriques et des propriétés du calcul algébrique et, d'autre part, de travailler sur les enjeux didactiques prévus ? Nous nous intéressons à l'évolution des praxéologies des expressions algébriques construites par les élèves compte-tenu de l'organisation didactique mise en place par les enseignants. Cette évolution est questionnée à deux niveaux : localement, le temps de la mise en œuvre du parcours, et, globalement, sur les organisations didactiques et les mathématiques construites relativement à l'algèbre.

Selon nous, pour avoir un effet à court voire à moyen-terme sur les techniques et le niveau technologico-théorique utilisés par les élèves pour résoudre les tâches proposées, les parcours d'enseignement différencié doivent être en cohérence avec le projet global de l'enseignant. C'est pourquoi, nous sommes situons l'activité [1] des élèves par rapport à celle de l'enseignant.

Nous utilisons la complémentarité des cadres théoriques de la théorie anthropologique du didactique, de la théorie des situations didactiques et de la double approche pour les analyses *a priori* et *a posteriori* (concernant la complémentarité des cadres théoriques, nous citons, Artigue, Lenfant, & Roditi, 2003 ; Artigue, 2009 ; Artigue & Winslow, 2010). Notre questionnement est d'abord en lien avec la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) :

- Les OM convoquées dans les parcours et les OD mises en place par l'enseignant favorisent-elles une évolution OM apprises des élèves en algèbre ?
- Les raisons d'être des OM convoquées dans les parcours et les enjeux didactiques sont-ils explicités ?
- Les techniques envisagées (envisageables, non attendues et erronées) *a priori* sont-elles apparues ? Le parcours a-t-il permis de les faire évoluer ?

1. Étant donné que nous faisons référence à plusieurs cadres théoriques, nous utilisons le terme « activité des élèves » dans le sens général.

- Les types de tâches intermédiaires ou implicites convoqués sont-ils pointés par l'enseignant ?
- Quelles technologies ont été travaillées ? À quel niveau de justification se situent les pratiques algébriques des élèves et de l'enseignant ?
- Quelle est la place donnée à la dialectique des ostensifs et des non-ostensifs dans le discours des élèves et des enseignants ?

Mais la TAD ne nous permet pas d'interroger sous quelles conditions les raisons d'être et les enjeux didactiques des parcours ont été présentés aux élèves. C'est pourquoi nous utilisons les outils de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988) :

- La présentation des parcours a-t-elle favorisé le processus de dévolution de la tâche visée dans les parcours et de ses enjeux ?
- Les milieux créés étaient-ils adaptés aux objectifs des parcours et aux élèves de chaque groupe pour permettre une évolution des techniques et des technologies pour les OM convoquées ?
- Le contrat didactique a-t-il permis de valider les techniques et l'équivalence de programmes de calcul à partir de leurs résultats ?

Nous aurons parfois recours à la double approche (Robert, 2008a, 2008b) pour mettre en perspective l'activité de l'enseignant avec celles des élèves. Nous cherchons à analyser l'influence des interventions de l'enseignant, en particulier les aides qu'il apporte, sur l'activité des élèves parce qu'elles peuvent modifier la tâche prescrite et le contrat didactique initialement prévus par des valeurs ajoutées ou des dénaturations.

Avant d'aborder notre méthodologie d'analyse des données en lien avec les cadres théoriques retenus, nous présentons le déroulement des expérimentations et les données recueillies.

5.1.2 Déroulement des expérimentations et données recueillies

Les quatre enseignants du groupe IREM ont expérimenté des PED. La passation du test Pépite, l'interprétation de l'évaluation diagnostique, le choix des parcours en fonction des projets des enseignants et des profils des élèves construits par Pépite ainsi que la préparation de la mise en œuvre des parcours dans les classes ont été discutés dans le cadre du groupe IREM.

Le protocole d'expérimentation est le suivant :

1. Passage du test Pépite (test début troisième ou fin troisième-début seconde) avant de commencer le chapitre relatif à l'algèbre,

2. Séance(s) différenciée(s) pour revenir sur les connaissances anciennes,
3. Déroulement du (ou des) chapitre(s) d'algèbre,
4. Séance(s) différenciée(s) en cours de chapitre pour travailler les connaissances nouvelles, organiser le travail de la technique et préparer aux évaluations,
5. Pour les classes de troisième, passage du test Pépite (test fin troisième-début seconde) dans le courant du mois de mai pour préparer le Brevet.

Nous appelons « séance différenciée » une séance de classe qui porte sur un ou plusieurs des parcours d'enseignement différencié définis dans le chapitre 4. Différents parcours ont été proposés aux enseignants à partir du document présenté dans l'annexe B. Ils en ont choisis un ou plusieurs en fonction de leurs projets. L'ensemble des parcours expérimentés est présenté dans l'annexe C. Le jeu sur des variables didactiques comme le choix des expressions, le découpage des tâches, les milieux ainsi que le déroulement ont ensuite été discutés avec les enseignants. Ces choix sont présentés avec les analyses *a priori* des parcours. Les progressions en calcul algébrique ainsi que le choix de situations d'introduction aux identités remarquables, d'exercices d'entraînement ou des énoncés des évaluations sont restés à la charge des enseignants. Ils ont parfois été discutés dans les réunions IREM si les enseignants le souhaitaient.

Pour chaque classe, nous avons recueilli les données suivantes :

- les réponses des élèves aux tests,
- les productions des élèves sur les parcours et les évaluations en algèbre,
- les progressions du (des) chapitre(s) d'algèbre et les cahiers de quelques élèves,
- les enregistrements audio des interactions privées et publiques entre les enseignants et les élèves et au sein de certains binômes durant le déroulement en classe des parcours d'enseignement différencié,
- l'enregistrement vidéo orienté vers le tableau et l'enseignant en classe lors des séances intégrant des parcours d'enseignement différencié,
- l'enregistrement vidéo d'une séance de classe habituelle portant sur l'algèbre,
- les enregistrements audio des quelques réunions privées avec les enseignants pour définir les énoncés et les déroulements des parcours en fonction de leurs choix ou pour échanger sur les résultats des élèves au test par rapport à leur connaissance des élèves.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C pour une présentation plus détaillée de l'ensemble des données recueillies dans chaque classe. Un chercheur participant au groupe IREM était présent à chaque séance différenciée. Nous étions observateurs chez deux des quatre enseignants : une enseignante de 3^{e} et une enseignante de 2de.

Les enregistrements audio des séances différenciées permettent de transcrire les échanges entre l'enseignant et les élèves. Ils donnent accès aux interactions privées entre l'enseignant et ses élèves ainsi qu'aux interactions entre élèves puisque les déroulements prévoient un travail en binôme ou en groupe. Les interactions publiques sont accessibles par les enregistrements audio et video.

Les enregistrements vidéo ont un double objectif. D'une part, ils permettent de filmer les gestes de l'enseignant ou des élèves et les écrits recueillis au tableau pendant les mises en commun. D'autre part, ils permettent de compléter l'enregistrement audio puisque, grâce au film, nous pouvons déterminer à quels élèves l'enseignant parle pendant les recherches individuelles.

Nous présentons maintenant notre méthodologie pour analyser les données recueillies.

5.1.3 Méthodologie d'analyse des données

a. Le choix d'analyser les données de la classe de 3^{e} de *Garance*

L'analyse de l'activité des élèves nécessitant une analyse fine de leurs productions et de leurs échanges en classe et les données recueillies étant nombreuses, il nous a fallu en sélectionner. Seules les données d'une classe de 3^{e} sont analysées. Pour faciliter la lecture, nous appelons l'enseignante de cette classe Garance. Ce choix s'explique pour deux raisons principales. D'une part, nous étions présents dans la classe pendant le déroulement des séances différenciées ce qui donne plus facilement une vision d'ensemble du travail réalisé. D'autre part, cette enseignante ayant réalisé trois séances différenciées, les données recueillies sont relativement nombreuses. Cela n'a pas été le cas dans l'autre classe où nous étions observateur. De plus, les enregistrements audio des échanges privés entre les élèves d'un même binôme n'ont pas été analysés car l'analyse des autres données s'est avérée ne pas être suffisamment riche pour tirer parti des expérimentations.

b. Des données analysées en plusieurs étapes

L'analyse des données recueillies dans la classe de Garance s'organise en plusieurs étapes.

Premièrement, nous analysons la progression en algèbre proposée par l'enseignante sur l'année scolaire et les cahiers des élèves à partir de l'OM de référence définie au chapitre 3. Nous relevons les types de tâches travaillés et leur niveau d'agrégation en OM locales. Nous en dégageons l'OM à enseigner définie par Garance relative aux expressions algébriques dans cette classe. Cette analyse nous permet de situer les enjeux des parcours d'enseignement différencié choisis par l'enseignante par rapport à son projet global sur l'année. Selon nous, les parcours d'enseignement différencié ne peuvent avoir un effet à moyen voire à long terme sur les techniques et les technologies par les élèves que s'ils sont en cohérence avec les OM à enseigner et enseignée et l'OM didactique proposée par l'enseignante. Pour compléter, et avoir accès à l'OM effectivement enseignée, nous analysons une séance de classe habituelle portant sur le calcul algébrique. Cette séance est « habituelle » dans le sens où nous ne sommes pas intervenus sur le choix des tâches, de l'OM et de l'OD. Comme seule une séance est analysée, les éléments de l'OM effectivement enseignée ne sont que partiels mais supposés suffisants pour notre objectif et donner un échantillon pertinent des pratiques algébriques de Garance. Nous relevons les types de tâches, les techniques, le niveau technologico-théorique et les modes de justification en jeu pendant la séance. Cette séance habituelle ayant eu lieu après les séances différenciées, nous situons le niveau technologico-théorique et les modes de justification en jeu par rapport à ceux développés dans les parcours.

Deuxièmement, nous présentons les répartitions des élèves en groupe proposées par le logiciel de test Pépite au début de l'année scolaire (octobre 2011) et en fin d'année scolaire (mai 2012). Nous nous appuyons sur ces informations pour estimer « la géographie de la classe » en algèbre et son évolution au cours de l'année scolaire. Nous identifions quelques élèves pour lesquels le stéréotype a évolué. Nous analysons plus attentivement l'évolution de leurs réponses au test Pépite entre le premier et le second passage du test (cf. § 5.2.9).

Troisièmement, les données relatives au déroulement de chaque parcours sont analysées à partir des analyses *a priori* présentées dans le chapitre 4. Garance a retenu les parcours d'enseignement différencié 1, 2 et 3. Ils se sont déroulés sur trois séances différenciées. La première porte sur le parcours 1, la seconde sur les parcours 1 et 2 et la troisième sur le parcours 3. Les enregistrements video et audio sont transcrits et présentés dans l'annexe E. Pour chaque parcours, les énoncés et les éléments du milieu à faire intervenir choisis par Garance sont présentés et interrogés par rapport aux modifications qu'ils impliquent dans les analyses *a priori*. Ensuite, nous décrivons la trame des séances en déterminant la durée des différentes étapes du déroulement prévu *a priori*. Les productions des élèves sont analysées à partir des critères issus de l'analyse *a priori*. Cette vision d'ensemble des techniques utilisées par les élèves nous guide pour analyser leur activité en classe. Nous mettons en perspective les productions des élèves relativement aux conditions mises en place par Garance : le processus de dévolution de la tâche, le contrat didactique mis en place, les adaptations du déroulement prévu en fonction de la réaction des élèves ou des incidents, la nature de ses interventions auprès des élèves (alliée ou antagoniste). L'activité des élèves est analysée relativement aux interventions de Garance et relativement au rôle joué par le milieu dans l'évolution des techniques et des niveaux technologiques prévue dans l'analyse *a priori*.

c. Une analyse quantitative des stéréotypes présents et des évolutions au cours d'une année scolaire

La dernière analyse concerne celle des stéréotypes rencontrés sur l'ensemble des élèves ayant passé le test. Il s'agit d'interroger :

1. nos choix de regroupement des stéréotypes,
2. l'évolution de la répartition en groupe des élèves en fonction du niveau scolaire et de la période l'année scolaire,
3. l'évolution de la répartition en groupe des élèves ayant passé deux fois le test diagnostique en cours d'année et ayant expérimenté les parcours d'enseignement différencié.

L'étude quantitative porte sur un échantillon d'élèves encore petit pour tirer des conclusions définitives. Néanmoins, cette étude donne une image locale des catégories de praxéologies apprises en algèbre avant le test et suite à l'expérimentation.

Comme annoncé, nous commençons par une analyse qualitative du passage des parcours d'enseignement différencié dans la classe de 3^{e} de l'enseignante Garance.

5.2 Analyse des expérimentations dans la classe de 3^{e} de Garance

5.2.1 Un portrait de Garance et de ses élèves

a. Contexte général

L'enseignante de la classe retenue exerce depuis plusieurs années dans un collège de la région parisienne. Nous la qualifions d'enseignante expérimentée. Selon elle, même si le collège n'est pas classé en Zone d'Éducation Prioritaire, des problèmes de discipline et des difficultés sociales et scolaires des élèves rendent certaines classes difficiles.

N'ayant pas été convaincue par les dispositifs d'enseignement différencié rencontrés durant sa formation IUFM, elle a souhaité participer au groupe IREM pour faire évoluer ses pratiques à la fois sur la différenciation de l'enseignement et sur l'enseignement de l'algèbre. Elle constate une « *certaine réticence des élèves* » face à l'algèbre et qualifie de « *catastrophique* » l'apprentissage des élèves dans ce domaine. Elle attend du groupe IREM des échanges avec des collègues et des chercheurs pour tenter d'y remédier.

Son utilisation des T.I.C.E., qui nous concerne puisque le passage du test Pépite nécessite l'utilisation de LaboMeP, est limitée en raison d'une salle informatique faiblement équipée. Seuls onze postes sont disponibles et certains sont souvent inutilisables. Néanmoins, elle utilise assez fréquemment des logiciels de géométrie dynamique et parfois un tableur ou des exercices interactifs de MathenPoche pour le travail en demi-groupe ou en aide.

Durant l'année scolaire 2011-2012, elle a fait participer ses deux classes de troisième aux expérimentations. Nous analysons les séances avec la classe qu'elle trouve la plus dynamique. Cette classe, composée de vingt-et-un élèves, est d'un niveau faible mais, selon elle, équivalent des autres classes de troisième de ce collège. Garance apprécie cette classe pour la réactivité des élèves. En fin d'année, elle nous a communiqué l'orientation de dix-neuf élèves. Onze élèves ont été orientés en seconde générale, six en seconde professionnelle, un élève en Certificat d'Aptitude professionnelle et un élève en Centre de Formation des Apprentis.

b. Progression sur les contenus algébriques proposée par Garance

Nous commençons par décrire la progression réalisée par Garance relativement aux contenus algébriques dans sa classe de troisième au cours de l'année scolaire 2011-2012. Elle est issue des énoncés des exercices, des feuilles de cours distribuées et des évaluations proposées aux élèves. Ces documents sont présentés dans l'annexe D.

La progression globale sur l'année est la suivante :

1. de fin septembre à mi-octobre : organisation de moments de rappel au début de plusieurs séances sur les propriétés du calcul algébrique (genres de tâches Développer et Factoriser),
2. fin octobre : moment d'évaluation formative avec le passage du test Pépite,

3. de fin octobre à fin novembre : **Chapitre « Identités remarquables et développement »** ,
4. de décembre à janvier : organisation de moment de rappel au début de plusieurs séances sur les propriétés du calcul algébrique et les identités remarquables (genres de tâches Développer et Factoriser),
5. de janvier à début février : chapitre « Factorisation et équation »,
6. de début février à début mars : organisation de moments de rappel au début de plusieurs séances sur les propriétés du calcul algébrique et la résolution des équations (genres de tâches Développer, Factoriser, Résoudre une équation),
7. fin avril : moment d'évaluation formative avec le passage du test Pépite fin avril.

Le contenu relatif à l'algèbre s'organise en deux chapitres. L'algèbre trouve deux habitats. D'abord, les identités remarquables sont introduites ce qui permet d'enrichir la structure des expressions rencontrées dans les genres de tâches de développement. Ensuite, la factorisation est travaillée pour motiver la résolution d'équations se ramenant au second-degré (équation-produit). Garance a l'habitude de débuter ses séances par des « calculs » numériques ou algébriques, qu'elle qualifie de « *moment de gymnastique* ». Elle propose des tâches de développement, de factorisation et de résolution d'équations (par exemple, *Développer* $(2x+3)^2$, $(x+7)(x-7)$, etc.) et, depuis son intégration au groupe IREM, des tâches nouvelles de preuve (par exemple, *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur* ou *Le carré de n'importe quel nombre pair est-il toujours un nombre pair ?*). Ces moments de rappel offrent la possibilité aux élèves de rencontrer des OM relatives aux expressions sur toute l'année scolaire.

Les expérimentations organisées pour tester les parcours ont eu lieu pendant le déroulement du chapitre « Identités remarquables et développement ». Ce chapitre suit une progression présentée dans la figure 5.1.

Ce chapitre commence par un moment d'évaluation avec le passage du test Pépite. Il a duré une séance (environ cinquante minutes) ; l'enseignante n'a pas souhaité revenir sur les réponses au test avec ses élèves. Ce moment d'évaluation est suivi d'un moment de reprise de l'étude avec les parcours d'enseignement différencié 1 et 2 intitulés *Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'étude de l'équivalence des programmes de calcul dans un problème de généralisation* (parcours 1) et *Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'équivalence des expressions* (parcours 2). L'enseignante les a choisis parce qu'elle

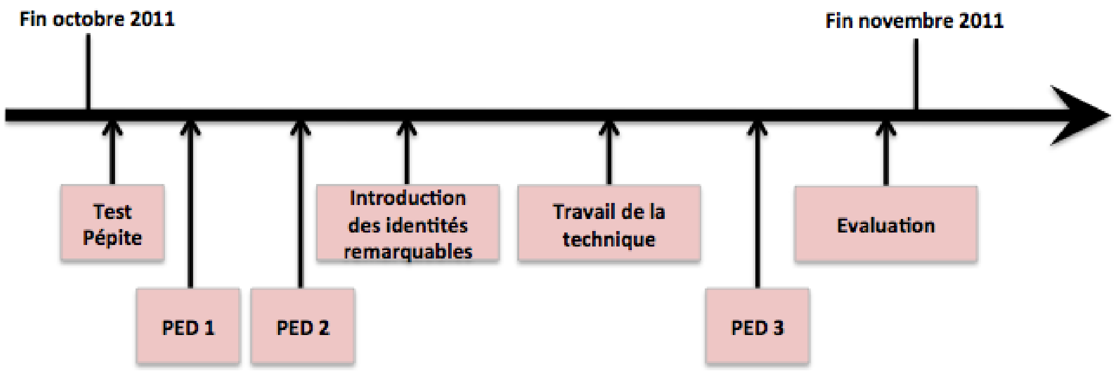


FIGURE 5.1 – Progression sur le chapitre « Identités remarquables et développement »

souhaitait revenir sur les raisons d'être de l'algèbre (sens donné aux lettres et aux transformations des expressions), sur les propriétés du calcul algébrique (distributivité simple et double) et sur le rôle des opérateurs et des délimitants. Ensuite, suit l'introduction des identités remarquables avec les moments de la première rencontre, de l'exploration des types de tâches $T_{DIR-car}$ *Développer un carré* et $T_{DIR-som\times diff}$ *Développer un produit de deux facteurs du type* $(a+b)(a-b)$, de l'émergence de la technique, de la construction du bloc technologico-théorique et de l'institutionnalisation. Les identités remarquables sont introduites par la décomposition des aires et la dialectique de changement de cadre algébrique et géométrique (cf. chapitre 3). Puis, arrive le moment du travail de la technique. Des types de tâches de OM2 et OM3 (prouver l'équivalence de deux expressions algébriques, développer des carrés de sommes ou des produits remarquables) sont d'abord convoqués, puis des types de tâches OM1 sont convoqués dans la résolution de problèmes (cf. figure 5.2). Le parcours 3, intitulé *Étudier des expressions équivalentes*, s'insère dans ce moment. Le chapitre est clos par un moment d'évaluation. Les élèves ont été évalués deux fois sur ce chapitre. La première évaluation, qui a eu lieu à la fin du chapitre, porte sur des genres de tâches de OM2 et OM3 : Développer, Prouver l'équivalence de deux expressions. La deuxième évaluation, qui a eu lieu un mois après le chapitre, porte sur des tâches techniques du genre *Développer* et sur la résolution d'un problème de preuve d'équivalence de programmes de calcul ($T_{P-Exp-Equivalence-PC}$). Les types de tâches décomposant $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ sont à la charge de l'élève comme la mobilisation des lettres et la traduction d'un programme de calcul par une expression algébrique.

Les dimensions *outil* et *objet* de l'algèbre sont travaillées. La dimension *outil* apparaît principalement en début et fin de chapitre dans des problèmes de généralisation et de preuve. La dimension *objet* est présente tout au long du chapitre à travers des tâches techniques. Nous spécifions plus précisément les types de tâches rencontrés par rapport aux trois OM locales de l'OM de référence relative aux expressions algébriques.

c. OM à enseigner relative aux expressions algébriques

Nous avons relevé les types de tâches rencontrés dans les tâches et les deux sujets d'évaluation donnés aux élèves. Les tâches données aux élèves sont déterminées à partir des documents composant la progression de Garance en algèbre et les cahiers des élèves (cours et exercices). Rappelons qu'ils sont présentés dans l'annexe D. Cette analyse s'appuie sur l'OM de référence présentée dans le chapitre 3.

OM1 - Génération des expressions algébriques

Exercice 1 :

Programme2	Programme 1
Choisir un nombre. Ajouter 5 à ce nombre. Élever au carré le résultat obtenu	Choisir un nombre. Multiplier ce nombre par 10. Ajouter 25 et le carré de ce nombre au résultat précédent.

1) Tester ces deux programmes avec les nombres 0, 2, -3, $\frac{2}{3}$
2) Quelle conjecture peut-on faire?
3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 : x est un nombre positif.
Quelle est la nature de ce triangle ?

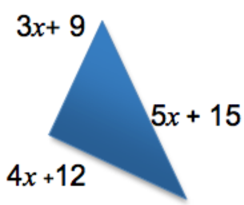


FIGURE 5.2 – Résolution de problèmes, extrait de la « fiche 2 » présentée dans l'annexe D

Les types de tâches de OM1 rencontrés sont :

- $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul,
- $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ Prouver le résultat d'un programme de calcul,

- $T_{T-Prog \to Exp}$ Traduire un programme de calcul par une expression algébrique
- $T_{T-Pteari \to Exp}$ Traduire une propriété d'un nombre par une expression algébrique et vice-versa,
- $T_{Aire \to Exp}$ Traduire l'aire d'un rectangle ou d'un carré par une expression algébrique,
- $T_{Perimetre \to Exp}$ Traduire le périmètre d'un rectangle, d'un carré par une expression algébrique.

La production d'expressions algébriques pour prouver des résultats généraux occupe une place importante au début de chapitre, pour donner des raisons d'être à l'algèbre, et, en fin de chapitre et dans les évaluations, pour réinvestir les nouvelles techniques rencontrées dans la résolution de problèmes. Les types de tâches de OM2 et OM3 y sont alors convoqués au niveau R-convoqué (cf. figure 5.2). Le changement de registre est présent à travers des traductions du registre des grandeurs et du registre des programmes de calcul vers celui des écritures algébriques. L'autre sens de traduction, qui permet de travailler l'aspect structural des expressions, n'est pas présent. Le changement de cadre est présent dans uniquement deux problèmes.

OM2 - Équivalence des expressions algébriques

L'enseignante donne un rôle important au type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* à travers la tâche « Les égalités sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur ». Il est rencontré pour la première fois dès le début du chapitre dans le premier parcours d'enseignement différencié. La technique de conjecture puis de preuve, notée $\tau_{Prouver-equiv-3}$ dans le chapitre 3, appuyée par la dialectique algébrique-numérique émerge ce qui favorise la construction d'un bloc technologico-théorique dans lequel la dénotation et le sens des expressions sont présents. Elle est ensuite institutionnalisée dans le cours mais, comme le montre l'analyse qui suit d'une séance habituelle (cf. §5.2.1.d.), Garance a des difficultés à l'instaurer comme moyen de contrôle du calcul algébrique. Ce type de tâches est à nouveau rencontré dans les moments de rappel (appelés « calculs de début de séance » par l'enseignante), dans l'évaluation de fin de chapitre et dans des problèmes où il apparaît au niveau R-convoqué tels que la preuve de l'équivalence de programmes de calcul ou la preuve qu'un triangle est rectangle. La présence quasiment constante de ce type de tâches montre une volonté de solliciter la dialectique du numérique et de l'algébrique. Néanmoins, si le recours au test numérique commence à être instauré comme moyen de contrôle, il y a peu de travail sur la dialectique entre les aspects procédural et structural des expressions.

Le choix de l'expression la plus adaptée au but visé (type de tâches $T_{Choisir}$) n'apparaît pas. Le sens des expressions est donc peu travaillé à travers ce type de tâches.

OM3 - Algèbre des polynômes

Les types de tâches $T_{R-canonique}$ *Réécrire un monôme sous la forme canonique* aX^n et ceux du genre T_D *Développer* sont présents à travers des tâches très standardisées. Les développements portent uniquement sur des expressions du type $(a \pm b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $a(b+c)$ et $a(b-c)$, notamment dans des exercices techniques. La diversité des expressions est pauvre par rapport à celle qu'il est possible de rencontrer en classe de troisième (cf. chapitre 3, page 148 sur la complexité des expressions). Or, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 3, le fait de travailler sur des expressions standardisées peut encourager un travail uniquement au niveau des ostensifs et de la reconnaissance de signes plutôt qu'un travail sur le sens et la structure des expressions.

Ils sont sollicités au niveau T-convoqué dans des exercices techniques et au niveau R-convoqué dans la résolution de problèmes de preuve. Mais nous pouvons faire l'hypothèse que les types de tâches intermédiaires à convoquer dans les OM relatives à l'interprétation des expressions, au contrôle des transformation reste absents ou implicites.

En conclusion, l'OM à enseigner convoque des types de tâches de trois OM locales de référence à différents moments de l'étude : moment de reprise, moment de travail de la technique, moment d'évaluation. Des articulations entre le numérique, l'algébrique et le géométrique, dans des problèmes sollicitant des changements de cadre et de registres de représentation, y sont nombreuses ce qui favorise des liens entre les trois OM locales et un travail au niveau de l'OM régionale relativement aux expressions algébriques. Il est important de préciser, pour la suite des analyses, que cette OM à enseigner est nouvelle pour Garance. Sa participation au groupe I.R.E.M. l'a amenée à faire évoluer les types de tâches et les modes de contrôle qu'elle propose. Dans son bilan de fin d'année (cf. annexe D), elle précise que les types de tâches *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre*, *Prouver le résultat d'un programme de calcul* ou *Prouver des propriétés numériques* sont nouveaux pour elle. De plus, elle dit avoir réalisé en cours d'année l'importance d'institutionnaliser des techniques de vérification des calculs. En revanche, les analyses montrent qu'il y a eu peu d'évolution de la prise en compte de la flexibilité entre les aspects procédural et structural des expressions, le contrôle et l'intelligence du calcul.

d. Une technologie habituelle appuyée par des ostensifs et le recours aux formulations d'ordre légal

Nous analysons les cahiers des élèves (cours, corrections des exercices) et une séance habituelle sur l'algèbre afin de relever, dans le discours de l'enseignante, des éléments technologiques et théoriques auxquels se situent les pratiques algébriques de la classe. Nous nous intéressons au milieu et au contrat didactique mis en place pour valider les techniques utilisées.

Les cahiers des élèves

Dans les cahiers des élèves, nous nous sommes intéressés à la manière dont sont conduites les transformations algébriques. Pour cela, nous avons étudié les parties de cours comme les corrections d'exercices. Nous notons :

- peu de traces d'une explicitation de la propriété du calcul algébrique utilisée et d'identification entre la propriété et les valeurs de l'expression,
- des ostensifs graphiques comme les flèches pour accompagner la conduite du développement ou des traits pour faire ressortir l'indéterminée,
- peu de trace du contrôle des transformations par exemple par des tests numériques.

La technologie justifiant les techniques algébriques se situe au niveau des écritures algébriques et des ostensifs avec peu de référence aux non-ostensifs. Nous précisons cette remarque par l'analyse d'une séance habituelle.

Observation d'une séance « habituelle »

Nous sommes allés observer une séance portant sur l'algèbre dans laquelle nous ne sommes intervenus ni sur le choix des tâches données aux élèves ni sur le déroulement. Cette séance clôt le chapitre « Identités remarquables et développement ».

La séance a porté sur deux exercices. Le premier correspond à un moment de rappel qui débute traditionnellement toutes les séances de l'enseignante. Ce jour-là, il portait sur le genre de tâches *Développer* sur les expressions : $(4x+7)^2$, $(x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17})$, $(a-5)^2$, $5x(x-8)$, $(1+\sqrt{3})^2$. Le second exercice met en jeu le type de tâches *Prouver le résultat général d'un programme de calcul.* Il s'agit de l'exercice du prestidigitateur présent dans l'exercice 9 du test Pépite et déjà analysé *a priori* (cf. chapitre 4) : « Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu penses à un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. » L'affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse. »

Nous découpons la séance en étapes pour avoir une vision globale du déroulement :

1. Lancement de l'exercice 1 (1 minute 30 secondes)
2. Temps de recherche (12 minutes 30 secondes)
3. Proposition de réponses par des élèves au tableau (3 minutes)
4. Correction avec débat entre les élèves (17 minutes)
5. Lancement de l'exercice 2 (2 minutes)
6. Temps de recherche (4minutes 30 secondes)
7. Mise en commun (12 minutes 30 secondes)

Deux épisodes sont révélateurs des éléments technologiques justifiant les techniques de développement utilisées. Il s'agit de la correction du développement de $(4x + 7)^2$ proposé par Mohammed et du développement de $5x(x - 8)$ proposé par Ina. Ces deux élèves sont dans le groupe C. Les deux élèves ont écrit au tableau :

- Mohammed : $(4x + 7)^2 = (4x)^2 + 2 \times 4x + 7 + 7^2 = 16^2 + 15^2 + 7$ [car $2 \times 4 + 7 = 15$].
- Ina : $5x(x - 8) = 5x \times x + 5x - 8 = 5x^2 + -3x$

Ces productions sont caractéristiques des élèves du groupe C. Elle présente des erreurs de concaténation ($ax + b \to (a + b)x$), une disparition de l'indéterminée ou une hiérarchie de opérations non respectée qui sont révélatrices d'un niveau technologique dominant guidé par des pratiques arithmétiques et l'utilisation d'ostensifs non guidée par les non-ostensifs.

Notre analyse renvoie aux échanges de la transcription de la séance habituelle intitulée « Transcription partielle d'une séance habituelle » présentée dans l'annexe D.

Dans les deux cas, l'enseignante laisse entendre que la transformation proposée par les élèves est erronée :

- *1. Enseignant : Tout le monde est d'accord avec ça ?*
- *2. Elève : Non.*
- *3. Enseignant : En plus, c'est pas ça que tu as fait Mohamed, donc qu'est-ce qui ne va pas ? Ok, donc là, c'est quoi notre identité remarquable ?* [...] *a plus b au carré, ça donne quoi ? [Silence] Ok, il y a quoi entre le 2 et le a et le a et le b ?*

...

- *44. Enseignant : Alors, qu'est-ce qu'il y a Ina [qui dit ne pas avoir réussi], vas-y ?*

Elle revient sur chaque étape du développement en espérant que les élèves puissent reconnaître « *ce qui ne va pas* ». Le contrat didactique mis en place pour valider les calculs est porté par la parole de l'enseignante « *ça, ça marche* », « *c'est bon* ». Pour Mohamed, l'identité remarquable $(a+b)^2$ est rappelée. Le « a » et le « b » sont identifiés dans l'expression ce qui permet de clarifier l'instanciation de la propriété mais cela n'est pas le cas pour Ina. La propriété de distributivité est évoquée uniquement par le terme « *on développe* » et l'ostensif graphique « flèche » (cf. figure 5.3). Ils servent de technologie pour justifier le développement. Lorsqu'une étape du développement est incorrecte, l'enseignant sollicite souvent l'aspect structural des expressions sans revenir à l'aspect procédural. Or, ce type de discours présente des limites pour des élèves qui ont construit des connaissances erronées sur le rôle des opérateurs et les priorités opératoires. En voici un exemple. Dans les échanges n°48 à n°62, Garance revient sur le « $5x - 8$ » écrit par Ina :

- *48. Enseignant : voilà, il est là [elle ajoute un* $\times$ *entre* $5x$ *et (x-8)]. On développe le* $5x$ *fois x [flèche, cf. figure 5.3]. Ça je suis d'accord. Et ensuite, qu'est-ce qu'on fait ?*
- *49. Ina : Plus* $5x$ *moins 8.*
- *50. Elèves : Non.*
- *51. Enseignant : Ah bah, non. Qu'est-ce qu'on développe ? On développe quoi ?*
- *52. Ina : Bah le* $5x$
- *53. Enseignant : Oui, mais on développe, c'est la multiplication que tu distribues par rapport à la soustraction, là. Tu fais* $5x$ *et ensuite.*
- *54. Ina : Fois 8.*
- *55. Enseignant : C'est pas 8, c'est ? Moins 8. D'accord,* ***soit tu mets ton moins là, ça fait** -$5x$ **fois 8, soit tu fais plus** $5x$ **fois moins 8*** *[tableau]*
- *56. Ina : Bah, c'est* $5x$ *moins 8, bah voilà, j'ai bien fais* $5x$ *moins le 8.*
- *57. Enseignant : Ok, sauf que ce que tu distribues c'est le. Là, tu n'as pas fait* $5x$ *plus x.*
- *58. Ina : Non, j'ai pas mis fois, j'ai mis plus.*
- *59. Enseignant : Là, tu as bien fait* $5x$ *fois x.*
- *60. Ina : Non, c'est...*
- *61. Elève : Si tu as bien fait* $5x$ *fois x.*
- *62. Ina : Ah oui, euh au début.*

FIGURE 5.3 – Recours à l'ostensif graphique « flèches » par Garance

Elle tente en revenant à la structure des expressions de déstabiliser l'erreur d'Ina. Il n'y a pas de référence à la définition des expressions ou à un contre-exemple pour mettre en évidence la non-égalité des expressions et les programmes de calcul en jeu. Les échanges n°56 et n°58 montrent les limites de ce discours. Le niveau de justification auquel a recours Ina se situe principalement au niveau des signes. D'ailleurs, un peu plus tard, dans les échanges n°105 à n°123, l'erreur est toujours présente :

- *105. Enseignant : $5x$ fois x, ça, ça marche mais c'est après, $5x$ moins 8, c'est ça qui ne va pas.*
- *106. Ina : Parce que il y a un fois.*
- *107. Enseignant : Il faut que tu fasses. C'est $5x$...*
- *108. Ina : Fois*
- *109. Enseignant : Fois moins 8.*
- *110. Elèves : Ah*
- *111. Enseignant : D'accord. [Elle efface $5x - 8$ et écrit $5x \times (-8)$-Zoom tableau 3]. Et ensuite, pour calculer. $5x$ fois x ça fait combien ?*
- *112. Ina : $5x$ au carré.*
- *113. Enseignant : Oui.*
- *114. Ina : Plus $5x$ fois...*
- *115. Enseignant : Qu'est-ce tu peux faire ?*
- *116. Ina : On fait, euh, $5x$ moins 8, euh*
- *117. Enseignant : **Voilà, c'est ça que tu n'as pas compris Ina.** $5x$ **moins 8, est-ce que c'est la même chose que** $5x$ **fois moins 8 ?** [Elle écrit au tableau $5x - 8$ et dessous $5x \times (-8)$]*
- *118. Elèves : [inaudible]*
- *119. Enseignant : Baptiste, est-ce que c'est la même chose ça $5x$ moins 8 et $5x$ fois moins 8 ?*
- *120. Elève : Bah, non il y a des parenthèses.*
- *121. Enseignant : C'est pas parce que il y a des parenthèses, c'est parce que quoi ?*
- *122. Elèves : C'est pas parce que là...*
- *123. Enseignant : C'est que là, c'est un produit, c'est une multiplication et là c'est une...*

Dans les échanges n°111 et n°117, pour remettre en question l'erreur d'Ina, Garance fait le lien avec la structure des expressions mais pas avec l'aspect procédural. Pourtant, la substitution par une valeur numérique dans les expressions $5x - 8$ et $5x \times (-8)$ aurait pu permettre de les distinguer.

C'est seulement dans les échanges suivants, qu'elle utilise très ponctuellement le recours à un test numérique afin d'invalider la réponse d'Ina :

- *56. Ina : Bah, c'est $5x$ moins 8, bah voilà, j'ai bien fais $5x$ moins le 8.*
- *57. Enseignant : Ok, sauf que ce que tu distribues c'est le. Là, tu n'as pas fait $5x$ plus x.*
- *58. Ina : Non, j'ai pas mis fois, j'ai mis plus.*
- *59. Enseignant : Là, tu as bien fait $5x$ fois x.*
- *60. Ina : Non, c'est...*
- *61. Elève : Si tu as bien fait $5x$ fois x.*
- *62. Ina : Ah oui, euh au début.*

- *63. Enseignant : Bah, oui et pourquoi tu ne refais pas la même chose. Regarde. [31"52] Si, si on prend un exemple. D'accord, un exemple numérique. C'est ça qu'on a vu. On a vu que si c'était vrai pour n'importe quelle valeur, c'est vrai euh, on peut prendre n'importe quelle valeur numérique. Tu es d'accord ou pas ?*
- *64. Ina : [Oui de la tête]*
- *65. Enseignant : Donc, si on vérifie avec euh, x égal 0 par exemple, D'accord. Si on prend ça, ça fait 5. Vas-y remplace par 0.*
- *66. Ina : 5 fois 0.*
- *67. Enseignant : Fois ?*
- *68. Ina : Fois x moins 8.*
- *69. Enseignant : Alors ton x il fait combien ?*
- *70. Ina : 0.*
- *71. Enseignant : 0 moins 8. Alors, ça, ça fait combien ? **5 fois 0 fois 0 moins 8** ?*
- *72. Ina : Ca fait euh, 5 fois [Silence].*
- *73. Enseignant : Ca fait 5 fois 0 fois moins 8, hein Ina. 5 fois 0, ça fait combien*
- *74. Ina et élèves : 0.*

Ce mode de justification a été développé dans les séances différenciées. L'échange n°71 montre que Garance s'appuie sur la structure de l'expression numérique. L'ordre dans lequel effectuer les calculs, qui est en lien avec l'aspect procédural de l'expression, reste implicite. Les calculs deviennent assez fastidieux mais permettent finalement à Ina d'accepter que sa réponse soit incorrecte et à Garance de revenir sur un moyen de contrôle des calculs déjà évoqué dans le chapitre.

- *92. Ina : Ca fait 0, euh 8.*
- *93. Enseignant : Ca fait moins 8. Bon, alors est-ce que ça fait la même chose là ?*
- *94. Ina : Bah euh, non.*
- *95. Enseignant : Non, donc tu peux aussi de temps en temps dans ta tête quand tu n'es pas sûre de ce que tu fais, refaire ça avec euh des valeurs hein. Si c'est pas vrai pour 0, est-ce que ça veut dire que c'est vrai ce que tu as fait ?*
- *96. Ina : Bah non.*
- *97. Enseignant : Est-ce que ça veut dire que vrai ça Ina ? Si c'est pas vrai pour 0.*
- *98. Ina : Ca peut être vrai.*
- *99. Enseignant : Ca peut pas être vrai pour n'importe quel x puisque c'est déjà pas vrai pour 0. Tu es d'accord Ina.*
- *100. Ina : Hum...*
- *101. Enseignant : Donc tu peux pas faire un cas général, en disant c'est pour n'importe quel x. Pour 0, c'est pas vrai. D'accord.*
- *102. Ina : Ah, c'est pas bon !*
- *103. Enseignant : Alors qu'est-ce qui n'est pas bon ?*

Le contre-exemple numérique permet à Ina de revenir sur sa réponse. Mais, il reste maintenant à développer correctement l'expression et l'enseignante a recours à des règles d'ordre légal. Elle explicite ce qu'on a « *le droit de faire* » sans faire référence à l'associativité et à la commutativité de la multiplication :

- *133. Enseignant : Et ça fait combien,* $5x$ *fois moins 8 ? [Silence] Ok,* ***qu'est-ce qu'on a le droit de faire avec les multiplications*** *? Vas-y Baptiste ?*
- *134. Baptiste : Bah euh de les multiplier !*
- *135. Enseignant : Oui ! Et ça fait combien.*
- *136. Baptiste : Moins* $40x$.
- *137. Enseignant : Oui,* ***tu as le droit de faire*** *5 fois moins 8 fois* x. *Ina.*
- *138. Ina : Ah, on a le droit ?*
- *139. Enseignant : Oui, la multiplication, regarde dans ta tête Ina. 2 fois 3, ça te donne bien le même résultat que 3 fois 2.*
- *140. Ina : Ouais. Mais euh, on fait pas euh, 5 fois x fois moins 8.*
- *141. Enseignant : Mais justement, là, les multiplications, on a le droit de...*
- *142. Ina : D'enlever le moins.*
- *143. Enseignant : Pas d'enlever le moins, il a dit que ça faisait combien Ina, Baptiste ? Que ça faisait ?*
- *144. Ina : Il a dit 5 fois x fois moins 8.*
- *145. Enseignant : Oui et il a dit que ça faisait moins 40, 5 fois moins 8, ça fait moins 40. On n'oublie pas le moins hein.*
- *146. Ina : Ah.*

Finalement, l'étude de la non-équivalence de $5x-8$ est de $5x(-8)$ n'a pas abouti. Les formulations d'ordre légal conduisent à justifier les transformations effectuées par un recours aux ostensifs dont on peut supposer qu'il ne permet pas pour la majorité des élèves de faire référence aux propriétés du calcul et aux rôles des opérateurs et des délimitants. Pour les mêmes raisons, dans la correction de la production de Mohamed, les élèves se réfèrent à une justification d'ordre légal pour justifier le rôle des parenthèses dans $(4x)^2$:

- *9. Enseignant : Alors là tu m'as mis a au carré [en pointant l'identité remarquable],* $4x$ *au carré, très bien, euh ce serait bien que tout le monde mette les parenthèses, d'accord ? Si on ne met pas les parenthèses, qu'est-ce que ça veut dire ? Pourquoi, c'est pas la même chose si on ne met pas les parenthèses ? [...]*
- *10. Mélusine : Si on ne met pas les parenthèses, c'est seulement le x qui est au carré.*
- *11. Enseignant : C'est seulement le x qui est au carré. D'accord, donc c'est pas le* $4x$ *qui est au carré.*

Dans cet extrait, il n'y a de recours ni à la structure des expressions, ni aux propriétés en jeu, ni à la définition du carré d'une expression et à son calcul, ni encore à la proposition de contre-exemple numérique permettant de revenir sur l'ordre dans lequel effectuer les opérations (aspect procédural). Seuls les ostensifs jouent un rôle pour justifier les transformations effectuées.

En conclusion, le discours de Garance présente les caractéristiques dominantes suivantes :

- un contrat didactique qui laisse peu de place au contrôle des calculs par des moyens de contrôles numériques,
- un recours quasiment systématique à une technologie fortement guidée par

les ostensifs et par le recours à des règles d'ordre légal pour justifier les transformations algébriques,

– un faible travail sur les aspects structural et procédural des expressions.

Il s'agit de caractéristiques « dominantes » dans le sens où les pratiques de l'enseignante sont en cours d'évolution. Comme nous l'avons montré, Garance a ponctuellement recours au test numérique, développé dans les séances différenciées.

5.2.2 La répartition des élèves en groupe

Nous présentons et comparons la répartition en groupe de la classe et les niveaux sur chaque composante du stéréotype obtenus par les élèves aux deux passages du test Pépite. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.1.

	Test début 3e				Test fin 3e			
	Stéréotype			GP	Stéréotype			GP
Prénom	**CA**	**UA**	**TA**		**CA**	**UA**	**TA**	
Michel	3	3	3	C-	**2**	3	3	**B-**
Ouliane	2	3	3	B-	2	3	3	B-
Divonne	3	3	3	C-	3	3	**2**	C-
Mohamed	3	3	3	C-	3	3	3	C-
Jean	3	3	3	C-				
Laure	3	3	3	C-	**2**	**4**	**2**	**B-**
Jocelin	2	3	2	B-	**3**	3	3	**C-**
Baptiste	3	3	3	C-	**2**	3	3	**B-**
Gabrielle	3	3	3	C-	3	3	3	C-
Marc	3	3	3	C-	3	3	3	C-
Chloé	3	3	3	C-	3	3	3	C-
Florianne	3	4	3	C-	**2**	4	3	**B-**
Samuel	3	3	3	C-	3	3	3	C-
Ina	3	4	3	C-	**2**	**3**	3	**B-**
Valérie	2	3	3	B-	2	3	3	B-
Philinte	2	3	3	B-	2	4	3	B-
Ignace	2	3	3	B-	2	3	**1**	B-
Tamara	3	3	3	C-	3	3	3	C-
Anne	3	3	3	C-	3	3	3	C-
Mélusine	2	3	2	B-	2	**2**	**1**	**B+**
Yann	3	3	3	C-				
Légende. Les prénoms en **gras** indiquent les élèves dont nous analysons plus en détail les évolutions. En **bleu**, les niveaux sur les composantes qui évoluent positivement et **rouge** ceux qui évoluent négativement entre le test de début et de fin de troisième.								

TABLEAU 5.1 – Répartition des élèves en groupe et stéréotypes aux tests de début et de fin de troisième

Le test Pépite a été passé pour la première fois avant la reprise des contenus relatifs à l'algèbre. La classe est répartie en deux groupes : six élèves sont dans le groupe B- et quinze sont dans le groupe C-. Cette répartition est caractéristique d'une classe de début de troisième. Le test [2] a été passé une seconde fois dans le courant du mois d'avril. Les contenus relatifs à l'algèbre n'avaient pas été récemment travaillés. La classe est répartie en trois groupes : un élève est dans le groupe B+, neuf élèves sont dans le groupe B- et neuf élèves sont dans le groupe C-. Deux élèves n'ont pas repassé le test. Nous observons donc une évolution positive sur la composante CA (passage du niveau 3 au niveau 2) de cinq élèves ce qui se traduit par une évolution du niveau technologique dominant. Un élève a une évolution positive sur la composante UA (passage du niveau 3 au niveau 2) et passe du groupe B- au groupe B+. Globalement, nous observons une évolution positive, même si les praxéologies apprises de certains élèves n'évoluent pas. Il semblerait qu'une partie de ces élèves soient des élèves « décrocheurs ».

Ainsi, au début de la troisième, un tiers des élèves sont dans le groupe C-. Rappelons que les élèves du groupe C articulent insuffisamment les OM ponctuelles de OM2 et OM3. La transformation des expressions dans OM3 ne donne pas de raisons d'être à la reconnaissance de la structure ($T_{structure}$ dans OM2). La conduite des calculs s'appuie davantage sur la reconnaissance d'ostensifs (signes $+$, $-$, $=$, etc.) et rarement, au niveau technologico-théorique, sur la hiérarchie des opérateurs, les propriétés du calcul algébrique et le rôle des parenthèses. Les écritures algébriques ou numériques en ligne sont rarement interprétées selon leurs aspects procédural et structural ce qui se traduit par un calcul non contrôlé et un appui sur des démarches arithmétiques. Cela conduit à un manque d'acceptation d'un résultat contenant un signe opératoire et donc à des règles de transformation et de formation incorrectes du type concaténation ($3 + 2a = 5a$) ou linéarisation ($a^2 = 2a$). Les modes de raisonnements s'appuient rarement sur l'équivalence des expressions (OM2) et la dialectique entre l'algébrique et le numérique et privilégient des formulations d'ordre légal. On peut faire l'hypothèse que les élèves n'ont pas franchi la première étape du processus d'algébrisation. Les élèves du groupe B articulent partiellement les OM ponctuelles de OM2 et OM3 pour conduire, anticiper et contrôler les transformations algébriques. Pour transformer des expressions simples sans parenthèse, ils s'appuient sur la structure des expressions et leur équivalence (OM2). Pour des expressions plus complexes avec parenthésage, ils s'appuient majoritairement sur l'aspect syntaxique des expressions et privilégient leur aspect procédural ce qui conduit souvent à des calculs à l'aveugle et non contrôlés ne préservant pas l'équivalence des expressions

2. Nous disposons de plusieurs clones du test Pépite où un certain nombre de paramètres varient.

ainsi qu'à des règles de transformation erronées en lien avec le parenthésage du type $(a+2)^2 = a^2+4$. La conduite et le contrôle des calculs est davantage guidée par les ostensifs graphiques (flèches, surlignants) et des justifications d'ordre légal du type « il faut » que par les non-ostensifs et notamment les propriétés algébriques et le rôle des parenthèses. La dialectique de l'algébrique et du numérique est rarement utilisée pour conduire les calculs.

De plus, les élèves des groupes C- et B- articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et donnent peu de raisons d'être à l'algèbre. L'algèbre comme outil de résolution de problèmes est immotivée et peu adaptée. Les élèves ont majoritairement recours à des démarches arithmétiques et mobilisent rarement les lettres. Ils ont des difficultés à mobiliser la hiérarchie des opérateurs dans la production d'expressions.

C'est pourquoi, l'enseignante a choisi de revenir sur le rôle de l'algèbre (Parcours 1) et de travailler sur l'équivalence des expressions (Parcours 2) pour reprendre l'étude de l'OM régionale sur les expressions algébriques.

5.2.3 Parcours 1 : les choix de Garance

Le parcours concerné s'intitule *Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'étude de l'équivalence de programmes de calcul dans un problème de généralisation*. L'analyse *a priori* de ce parcours est présentée dans le chapitre 4 au paragraphe 4.3.2. Il s'agit ici de présenter les choix de Garance sur les différentes variables didactiques et les différents éléments du milieu qu'elle souhaite faire intervenir relativement aux enjeux du parcours. Ces choix ont été discutés dans les réunions du groupe IREM et lors d'un entretien individuel.

Rappelons les enjeux de ce parcours. Les élèves ont déjà rencontré le calcul algébrique depuis au moins deux ans. Mais, l'interprétation du diagnostic montre que, pour un certain nombre d'entre-eux (groupe C et B), les expressions algébriques ont peu de raisons d'être et sont déconnectées des programmes de calcul. L'enjeu est de faire comprendre aux élèves les raisons pour lesquelles ils ont été amenés à utiliser des expressions algébriques et à les transformer en prenant en compte des nécessités sur la hiérarchie des opérations. L'enjeu n'est pas d'introduire le calcul algébrique mais de lui redonner du sens. Nous avons repris le problème du carré bordé qui présente l'intérêt de conduire à la création d'un milieu qui permette de travailler les raisons d'être de l'algèbre : deux programmes de calcul étant donnés, renvoient-ils toujours la même valeur ?

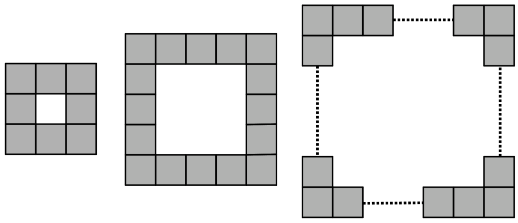
Après avoir présenté les énoncés retenus par Garance, nous présentons ses choix concernant les variables didactiques, les éléments du milieu et le déroulement.

a. Énoncés retenus

Les énoncés sont accompagnés d'aide qui ne figurent pas dans le texte ci-dessous. Nous renvoyons le lecteur à l'analyse *a priori* ou à l'annexe B.

- ***Énoncé pour le groupe C***

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. *Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.*
2. *Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.*
3. *Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.*
4. *Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.*
5. *Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.*

Partie B

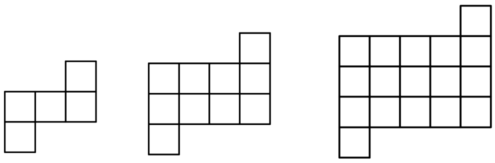
1. *Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?*

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé. *Suite de l'énoncé :*

2. *On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.*
   - $4 \times a + 4$
   - $(a + 2) \times 4$
   - $(a + 2) \times 4 - 4$
   - $(a + 1) \times 4$
   - $(a + 2) \times 2 + a \times 2$
   - $(a \times 4) - 4$
3. *Le carré blanc a un côté de* $a = 149$ *unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.*

Énoncé pour le groupe B-

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.



Partie A

1. *Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?*
2. *Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?*
3. *Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.*

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé. *Suite de l'énoncé :*

2. *On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.*
   - $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - $a(a+2)+2$
   - a^2+2a+2
   - $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - $a^2+2(a+1)$
3. *Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille* 1000 *? Choisis la formule qui demande le moins de calculs.*

b. Choix sur les variables didactiques et les éléments du milieu

Garance a fait les choix suivants à partir de l'énoncé présenté dans l'analyse *a priori*.

Le *choix du « pattern »*. Garance a retenu notre proposition de deux patterns différents : le carré bordé pour le groupe C et une figure rectangulaire à laquelle est ajoutée deux carrés unités pour le groupe B.

Le *découpage de l'énoncé et le niveau d'intervention des types de tâches*. Garance a retenu le découpage de l'énoncé que nous avons proposé. C'est elle qui a suggéré de proposer davantage de questions avec un nombre de carrés blancs « petits ». Selon elle, cela peut favoriser l'appropriation du problème par les élèves du groupe C.

Les *aides*. Nous avons longuement échangé avec Garance sur le rôle du schéma dans l'émergence d'un programme de calcul. Les schémas et les écritures numériques qui apparaissent dans les aides ont été convenus ensemble. Nous lui avons suggéré l'utilisation de schémas de calcul dans les aides pour faire le lien entre les schémas (patterns) et les écritures numériques. Elle ne les a pas retenus. Selon elle, ils sont trop éloignés des habitudes des élèves et l'introduction d'une nouvelle représentation pourrait complexifier davantage l'énoncé.

Le *tableur*. Comme souligné dans l'analyse *a priori*, l'utilisation du tableur fournit un milieu riche pour travailler la notion de variable, faciliter l'émergence d'une expression générale et appréhender l'équivalence des expressions. Cependant, les outils informatiques étant trop difficiles d'accès, son usage n'a pas été retenu par Garance.

c. Modalités de travail

Les modalités de travail ont été fixées. Les élèves du même groupe travaillent en binôme, les binômes étant déterminés par l'enseignante. Les élèves du groupe C seront répartis sur deux rangées et ceux du groupe B sur une rangée. Au début de la séance, ils n'ont que la partie A et la première question de la partie B. La partie B est distribuée après la synthèse de la phase 2. Ce choix est celui de l'enseignante. Elle souhaite que, durant la partie A, les élèves ne soient pas influencés par les expressions algébriques présentes dans la partie B. Les aides sont distribuées au fur et à mesure à la demande des élèves ou par l'enseignant en fonction des difficultés qu'ils rencontrent.

d. Éléments du déroulement prévu

Nous présentons ici le déroulement discuté avec Garance. Les différents points présentés dans l'analyse *a priori* ont été évoqués.

Étant donné que les élèves ont déjà rencontré l'algèbre, l'enseignante estime qu'une séance de cinquante minutes environ et éventuellement le début de la séance suivante suffisent pour traiter le parcours. L'effectif du groupe B étant réduit, elle prévoit de laisser ce groupe davantage en autonomie et de garder davantage de temps pour les mises en commun du groupe C.

L'identification des deux parties ont été clairement identifiées et Garance prévoit de faire une mise en commun à la fin de chacune. Elle prévoit de laisser les élèves proposer des techniques de comptage sur les premières questions puis de les accompagner vers des démarches numériques puis algébriques. Le rôle des aides pour accompagner les élèves dans l'émergence d'un programme de calcul a été discuté.

Nous avons présenté l'analyse *a priori* de ce parcours et les choix de Garance. Nous présentons maintenant son analyse *a posteriori*.

5.2.4 Analyse *a posteriori* sur le parcours 1

Le parcours 1 s'intitule *Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'équivalence des programmes de calcul dans un problème de généralisation.*

a. Un déroulement avec des temps de recherche longs et des mises en commun courtes

La parcours s'est déroulé sur deux séances pour une durée totale d'une heure et trente minutes, suivant les étapes prévues *a priori* (cf. tableau 5.2).

Étape	**Groupe**	**Durée**	**N° des échanges**
Séance différenciée 1			
Lancement	B et C	2min	1 → 5
Temps de recherche partie A	B et C	37min	6 → 536
Mise en commun	C	3min20	537 → 577
Temps de recherche partie B	B	16min15	515 → 648
Temps de recherche partie B	C	11min15	578 → 648
Séance différenciée 2			
Mise en commun	C (et B)	19min30	1 → 343
Synthèse	B et C	1min50	344 → 366
Total		1h31min30s	

TABLEAU 5.2 – Trame simplifiée du déroulement du parcours 1

Nous analysons chaque étape du point de vue des techniques et technologies mises en œuvre.

b. Une évolution des techniques dans les productions des élèves

Les productions des élèves sont analysées à partir des critères retenus dans l'analyse *a priori*. Les copies de la deuxième séance n'ayant pas été modifiées par les élèves, seules les copies issues de la première séance sont analysées. Pour chaque question, nous relevons si la réponse est correcte (C), incorrecte (I), correcte incomplète (CI), partiellement correcte (CP, une partie de la réponse est incorrecte) ou si l'élève n'a pas répondu (NR). Nous repérons ensuite les techniques utilisées dans les copies. Pour cela, nous avons parfois été amenés à compléter les productions des élèves avec les informations fournies par la transcription de la séance. Par exemple, si un élève répond 16 à la question A-1 du groupe C, seule l'analyse de la transcription permet de dire s'il a mis en œuvre une technique de comptage ou une technique de dénombrement.

Production des élèves dans le groupe C

Douze copies ont été analysées suite à la première séance. Un élève du groupe C était absent ce jour-là et un autre n'a pas rendu sa copie.

Deux stratégies de dénombrement sont apparues. Celle qui donne l'expression $n \times 4 + 4$, où n désigne le nombre de carrés blancs unités, est présente dans six copies. Celle qui donne l'expression $n + n + (n + 2) + (n + 2)$ est présente dans deux copies. Quatre élèves n'ont pas produit de programme de calcul ni en français, ni symboliquement.

Réponse	**A-1**	**A-2**	**A-3**	**A-4**
Correcte	12	9	7	8
Incorrecte	0	2	3	0
Non répondu	0	1	2	4
Technique				
τ_1	8	8	4	x
τ_2	0	0	0	0
τ_3	1	2	3	8
τ_4	0	3	2	0
Pas d'information	3	1	4	4

TABLEAU 5.3 – Analyse des productions des élèves du groupe C aux questions A-1 à A-4

Les productions des élèves aux questions **A-1 à A-4** sont analysées de la manière suivante et présentées dans le tableau 5.3. Si la réponse indique le nombre de carrés gris attendu, la réponse est considérée correcte. Sinon, soit le nombre de carrés gris n'est pas celui attendu et la réponse est considérée incorrecte, soit l'élève ne donne pas réponse. Les critères suivants nous indiquent quelle technique a été mise en œuvre :

- τ_1 Une technique de comptage est utilisée si la réponse est sous la forme d'un nombre et si sa mise en œuvre est présente dans la transcription,
- τ_2 Une technique de dénombrement est utilisée si un schéma explicite la stratégie de dénombrement ou si une phrase ou une écriture numérique pas à pas indique les opérations à effectuer,
- τ_3 Une technique de dénombrement avec écriture numérique en ligne est utilisée si une écriture numérique est présente.

Une quatrième technique non attendue τ_4, dite « de récurrence », est apparue chez plusieurs élèves souvent dans les questions A-2 ou A-3. L'apparition de cette technique est dûe au choix dans l'énoncé des questions A-1 et A-2 de deux nombres de carrés blancs qui se suivent. Plusieurs élèves remarquent que le nombre de carrés gris pour quatre carrés blancs est égal au nombre de carrés gris pour trois carrés blancs ajouté de quatre. En effet, N_n désigne le nombre de carré gris pour n carrés blancs, on a $N_{n+1} = N_n + 4$. Ils tentent d'appliquer cette règle pour la question A-4 mais échouent puisque le nombre de carrés blancs n'est pas 5 mais 8. Cette technique est visible dans la transcription uniquement lorsque les élèves tentent de formuler « on ajoute 4 ». Parfois, le croisement entre la transcription et les productions laisse à voir la mise en œuvre de plusieurs techniques, c'est pourquoi le total des techniques repérées est parfois supérieur à 12. Lorsque les productions et la transcription ne donnent pas d'information sur la technique utilisée, nous l'indiquons dans « Pas d'information ».

A la question **A-5**, huit élèves donnent une réponse correcte. Les quatre élèves qui ne répondent pas n'avaient pas répondu à la question A-4. Parmi les huit qui donnent une réponse, six introduisent une lettre et deux donnent les opérations à effectuer par une phrase (« *On prend l'unité blanche, on la multiplie par 4, puis on ajoute 4.* ») et produisent une expression générale sans introduire de lettres « unités blancs $\times 4 + 4$ »). Nous illustrons ce dernier cas par la copie de Divonne dans la figure 5.4.

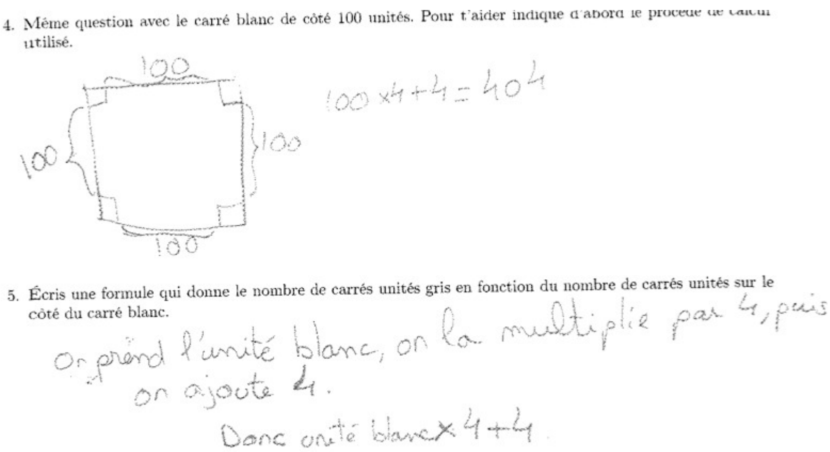


FIGURE 5.4 – Réponse de Divonne à la question A-5

La question **B-1** ne reçoit aucune réponse.

La question **B-2** reçoit dix réponses : deux réponses correctes, cinq réponses correctes incomplètes (expressions cochées : (1) 4 fois et (1,3,5) une fois) et deux réponses incorrectes (expressions cochées : (1,2)). Deux élèves ne répondent pas. Seul un élève justifie sa réponse par une argumentation du type « On développe le calcul », le test numérique n'est pas présent.

La question **B-3** reçoit deux réponses correctes dans le sens où les calculs numériques aboutissent au bon résultat mais aucun l'élève ne choisit l'expression attendue $(a+1)\times 4$ qui demande le moins de calcul. Les expressions $4\times a+4$ et $(a+2)\times 2+a\times 2$ sont choisies. Dix élèves ne répondent pas.

Productions des élèves du groupe B

L'analyse est menée selon les mêmes critères que celle du groupe B. Cinq copies ont été analysées, deux élèves étant absents le jour de la séance 1.

Une stratégie de dénombrement est apparue. Il s'agit de celle qui aboutit à l'expression $n \times (n+2)+2$ où n désigne le numéro de la figure.

La question **A-1** reçoit cinq réponses correctes. N'ayant pas d'éléments, ni dans les copies, ni par la transcription, sur la technique mise en œuvre par les élèves, nous ne pouvons pas en dire davantage. Ils répondent par une phrase « Le nombre de carrés unités est 26 ». Aucun schéma n'a été réalisé.

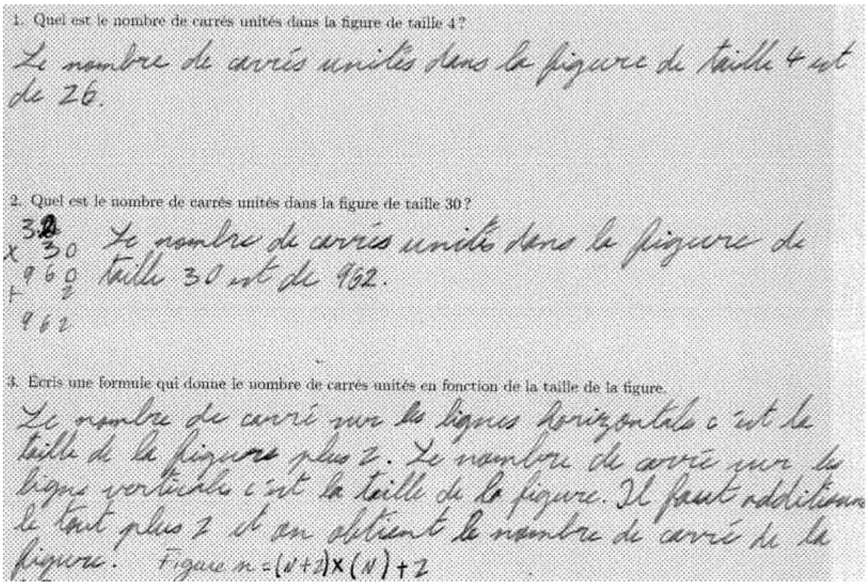
La question **A-2** reçoit cinq réponses correctes. Trois élèves mettent en œuvre la technique de dénombrement τ_2 à travers une écriture numérique qui indique les opérations effectuées pas à pas. Par exemple, une élève écrit $30+2=32\times 30=960+2=962$. Deux élèves répondent par une phrase, comme à la question A-1 ce qui ne nous donne pas accès à la technique mise en œuvre. Néanmoins, la constitution des binômes laisse supposer qu'ils ont mis en œuvre la technique τ_2 qui est celle utilisée par leurs voisins.

À la question **A-3**, tous les élèves mettent en œuvre une technique qui conduit à exprimer leur stratégie de calcul par une expression générale. Les élèves introduisent une lettre. Quatre d'entre-eux respectent la hiérarchie des opérations par l'utilisation de parenthèses. Un élève produit une expression générale incorrecte $(n \times n+2)+2$. La hiérarchie des opérations à effectuer n'est pas respectée. Cette erreur dans l'utilisation des parenthèses est caractéristique des élèves du groupe B. Une élève, Mélusine (cf. figure 5.5), décrit par une phrase le programme de calcul en indiquant les opérations à effectuer.

La question **B-1** ne reçoit aucune réponse.

Seuls trois élèves rendent une copie à la question **B-2**. Les élèves appliquent un test numérique ce qui montre que la dialectique algébrique-numérique fonctionne. Cependant, la place du numérique pour conjecturer ou pour prouver n'est pas encore établie. Deux élèves cochent des expressions (3 et 5 et 1, 3 et 5) mais il s'agit de réponses correctes incomplètes.

La question **B-3** reçoit une réponse correcte. L'expression a^2+2a+2, demandant



1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

Le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 est de 26.

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

32
x 30
960
+ 2
962

Le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 est de 962.

3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

Le nombre de carré sur les lignes horizontales c'est la taille de la figure plus 2. Le nombre de carré sur les lignes verticales c'est la taille de la figure. Il faut additionner le tout plus 2 et on obtient le nombre de carré de la figure. Figure n = (N+2)x(N)+2

FIGURE 5.5 – Réponse de Mélusine à la question A-5

le moins de calculs, est choisie ce qui laisse supposer que le sens des expressions a été sollicité par l'élève.

Dans les paragraphes suivants, nous analysons le déroulement en classe du parcours. L'analyse des productions des élèves est croisée avec celle de la transcription afin de déterminer dans quelle mesure le milieu prévu et le contrat mis en place a permis aux élèves de faire évoluer ou pas leurs techniques.

c. Un processus de dévolution qui n'a pas eu lieu ce qui conduit à un temps de recherche long

Le lancement de la séance s'est avéré délicat pour Garance pour plusieurs raisons. D'une part, notre présence dans la classe a perturbé les élèves et l'enseignante, qui s'est dit avoir été très stressée et mal à l'aise. Cela n'a pas été le cas dans les séances suivantes. D'autre part, les modalités de travail retenues (binôme de deux élèves du même groupe) a entraîné une modification du plan de classe et donc un déplacement des élèves ce qui a rendu la classe relativement agitée.

C'est dans ce contexte que l'enseignante lance le problème. Les modalités de travail sont précisées. Deux problèmes différents sont proposés mais ont une finalité commune. La présence d'une aide est rapidement évoquée. L'enseignante commence la séance sans en avoir précisé les enjeux. À la question « *Madame, c'est sur quoi ?* », elle donne une réponse vague « *C'est sur ce qu'on a commencé à faire* ». Elle fait probablement référence aux transformations algébriques qui occupent le début des dernières séances mais le terme « calcul algébrique » n'est jamais prononcé. Il n'y a donc pas de dévolution du problème aux élèves. D'ailleurs, les premières dix minutes du temps de recherche montre que les élèves ne sont pas entrés dans le problème. L'enseignante est dans une situation délicate. Elle est amenée à dévoluer le problème en reformulant la consigne binôme par binôme.

d. Un premier temps de recherche long mais riche en techniques

Le temps de recherche sur la partie A a duré trente-sept minutes sans mise en commun. L'enseignante a donc fait le choix de modifier le déroulement prévu. Nous l'expliquons de la manière suivante. Comme prévu dans l'analyse *a priori*, la formulation complexe du problème a nécessité de nombreuses reformulations de la consigne par l'enseignante. Cela a été accentué par le fait que le processus de dévolution n'a pas été engagé. Plutôt que de faire un bilan, l'enseignante a fait le choix de prolonger le temps de recherche pour laisser le temps aux élèves de comprendre la consigne, de passer d'une technique de comptage à une stratégie de dénombrement, puis à la production d'une expression. Ce temps long de recherche a donné lieu, d'une part, à une mise en commun tardive et écourtée par rapport au déroulement prévu et, d'autre part, à un débordement important en temps sur la séance suivante. On peut se demander si ce choix est compatible avec la chronogenèse et le fait que les élèves ont déjà rencontré l'algèbre. D'ailleurs les élèves sollicitent l'enseignante à de nombreuses reprises pour avoir un retour sur leurs propositions : « *Est-ce que c'est bon ?* » (échange n°383), « *Mais est-ce que c'est bon ?* » (échange n°250). Néanmoins, les interactions avec l'enseignant sont très riches et montrent que les techniques des élèves évoluent petit à petit. L'analyse des interactions est complexe.

Dans le tableau 5.4, nous proposons un découpage de l'activité globale des élèves selon différentes phases prévues *a priori*. Étant donné que nous y avons accès par les micros et la caméra qui suivent l'enseignante, les temps indiqués correspondent au moment où l'enseignante a un échange avec les élèves. Ainsi, la recherche d'un programme de calcul pour le groupe B a probablement débuté avant les treize minutes indiquées.

Concernant le groupe B, ce groupe a travaillé toute la séance sans mise en commun « officielle ». En effet, l'effectif faible du groupe (5 élèves) conduit à une diffusion rapide des résultats entre les élèves. Les discussions sur le problème sont allées au-

Temps (vidéo)	Groupe B	Groupe C
3min36		A-1, phase 1. Reformulation de la consigne. Technique de comptage
13min20	A-2 et A-3, phase 1. Recherche d'un programme de calcul. Influence de Mélina	
20min20		A-1 et A-2, phase 1. Émergence des premières stratégies de calcul dont celle inattendue de récurrence. Reformulation de consigne pour certains élèves.
21min46	A-3 avec appui sur A-2, phase 2. Recherche d'une formule. Introduction d'une lettre par l'enseignante.	
26min06		Distribution de l'aide
32min20		A-3, A-4, phase 1. Émergence de stratégies de dénombrement. Le programme de calcul reste implicite
34min50		A-4, A-5, phase 2. Première formulation du programme de calcul et émergence d'expressions générales
38min24	Partie B, phase 3	
40min30		Mise en commun

TABLEAU 5.4 – Evolution globale de l'activité des élèves sur le temps de recherche de la partie A

delà des binômes et les élèves travaillent à plusieurs. Dès que l'enseignante s'adresse à un binôme c'est en fait au groupe B qu'elle s'adresse. De plus, Mélusine, qui réputée bonne élève, oriente le travail de ses camarades ce qui donne une certaine autonomie au groupe. Les interactions avec l'enseignante s'adressent souvent à tout le groupe mais sans réellement jouer le rôle de mise en commun. Ainsi deux expressions générales apparaissent mais la question de leur équivalence n'est pas introduite ce qui peut conduire les élèves à ne pas comprendre les enjeux de la partie B.

Concernant le groupe C, l'apparition d'une technique de récurrence, non prévue dans l'analyse *a priori*, est due au choix de deux nombres de carrés blancs sur la bordure qui se suivent aux questions A-1 et A-3. Beaucoup d'élèves remarquent que le nombre de carrés gris pour 4 carrés blancs était le nombre de carrés gris pour 3 carrés blancs ajouté de 4 et tentent d'appliquer cette règle pour la question A-4 mais échouent puisque le nombre de carrés blancs n'est pas 5 mais 8. L'enseignante, qui n'avait pas prévu cette procédure, reste perplexe face aux tentatives des élèves.

– *255. Enseignant : Ok, est-ce que vous avez trouvé pour 4, alors ?*

- *256 . Yann : Non, mais j'ai pas compris, parce que il n'y a pas de carré de 4 côtés.*
- *257. Enseignant : Si il n'y a pas 4 côtés, qu'est-ce que tu vas faire ?*
- *258 . Yann : Le créer.*
- *259 . Enseignant : Bah tu peux le faire, oui.*
- *260. Michel : Regardez !*
- *261. Enseignant : Ok, donc tu as trouvé combien de carreaux gris ? [Silence].*
- *262. Yann : Il y en a 4 de plus, il y en a 20. Euh...ouais.*
- *263 . Enseignant : Alors, il y en 4 de plus ou il y en a 22 ?*
- *264. Yann : Il y en a 22 ! Attends...*
- *265 . Michel : Attendez ! 2, 3, 4, 5, . . . , 19, 20. Il y en a 20.*
- *266 . Yann : Ouais, je savais bien, il y a en 4 de plus !*
- *267 . Enseignant : Alors maintenant, vous faites avec le 8.*

Garance décourage la technique notamment en faisant intervenir l'aide 1.

Pour certains élèves, comme Baptiste, ce temps de recherche long est profitable et lui permet de faire évoluer les techniques utilisées. Par exemple, Baptiste répond aux questions A-1 et A-2 par la technique de comptage (échanges n°111 à n°150).

- *111 . Enseignant : Ok. Alors qu'est-ce qu'il fallait calculer ? Si un carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris. Alors ton premier exemple, ton carré blanc, il a combien de unités ?*
- *112 . Baptiste : Bah, euh . . . 2 !*
- *113 . Enseignant : 1.*
- *114 . Baptiste : Ah ! ?*
- *115 . Enseignant : D'accord ? . Ensuite ton deuxième carré.*
- *116 . Baptiste : 3.*
- *117 . Enseignant : Voilà. Alors comment tu... ?*
- *118 . Baptiste : 1. Bah non, il y a en 4.*
- *119 . Enseignant : Bah, qu'est-ce que tu pourrais faire sur ton dessin pour pouvoir mieux voir ?*
- *120 . Baptiste : 1, 2, 3, 4.*
- *121 . Enseignant : Alors, là tu me montres, euh . . . les côtés du carré...*
- *122 . Baptiste : Ah ! ?*
- *123 . Enseignant : Mais tu montres pas combien il y a de petits carrés unités dans chaque euh... Tu comprends ce que je veux dire ou pas ?*
- *124 . Baptiste : Non.*
- *125 . Enseignant : Dans chaque carré. Donc qu'est-ce que tu pourrais faire pour voir combien il y a de carrés unités ? [Silence].*
- *126 Jean Compter.*
- *127 . Enseignant : Oui, c'est ça, tu comptes !*
- *128 . Baptiste : Ah, ça veut dire 1, 2, 3. . .*
- *129 . Enseignant : Si tu traces comme ça, là. Tu vois combien il y a de carrés. Anne, allez hop travaille, il faut que tu fasses pour le 4. Tu peux construire le 4. Si tu traces.Tiens , vas-y !*
- *130 . Baptiste : Ici ?*
- *131 . Enseignant : Tu peux tracer, oui, les autres traits.*
- *132 . Baptiste : Ah, bah, parce que il y en a 4. Ah ! ! !*
- *133 . Enseignant : Donc il y a combien de petits carrés ? A l'intérieur du carré blanc ?*
- *134 . Baptiste : Bah, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.*
- *135 . Enseignant : Le côté du carré blanc, il a combien de carrés ?*
- *136 . Baptiste : 4.*
- *137 . Enseignant : Le carré blanc, il est où ?*

- *138 . Baptiste : Là !*
- *139 . Enseignant : Voilà.*
- *140 . Enseignant : Montre-moi un côté du carré blanc.*
- *141 . Baptiste : Ici !*
- *142 . Enseignant : Non. Ça, c'est pas un côté.*
- *143 . Baptiste : Ah, bah...*
- *144 . Enseignant : Non, c'est pas un côté. Non plus ça. Un côté du carré blanc. Ton carré, il est là. Montre-moi un côté du carré blanc !*
- *145 . Baptiste : Ici ?*
- *146 . Enseignant : Ça, c'est pas un côté. C'est quoi un côté ? C'est ça ! Ça, c'est un côté !*
- *147 . Baptiste : Je vous ai dit celui-là.*
- *148 . Enseignant : Non. Toi, tu m'as montré ça. Ça, c'est un côté du carré blanc. Donc ton côté du carré blanc, il a combien de carrés ?*
- *149 . Baptiste : Bah, il en a 3.*
- *150 . Enseignant : Voilà. Alors maintenant, il faut que tu comptes le nombre de carrés gris quand ton petit carré, il a 3 côtés. Et après tu fais la même chose avec le 4.*

Il tente une technique de récurrence dans les questions A-2 et A-3 qu'il abandonne au profit d'une stratégie de dénombrement :

- *363 . Enseignant : C'est bon ou pas ?*
- *364 . Baptiste : Madame ! ? Ici, ça fait 36 ?*
- *365 . Enseignant : Ok.*
- *366 . Baptiste : Parce que ici il y avait 8, 8, 8, 8 et tout ça...*
- *367 . Enseignant : Redis-moi !*
- *368 . Baptiste : A la place de 3, il y a 8, 8, 8, 8 et puis ça, ça fait 36. Parce que 8 fois 4, 32.*
- *369 . Enseignant : Ok, bah c'est ça qu'il faut que tu écrives.*
- *370 . Baptiste : Bah c'est bon, c'est ce que j'ai écrit !*
- *371 . Enseignant : Bah là, tu n'as rien écrit. Là, tu m'as dit ! C'est exactement ce que tu viens de dire, c'est 8 fois 4, plus 4 !*
- *372 . Baptiste : Ah, mais faut écrire les calculs ? !*

Mais, comme ce temps de recherche est trop long, certains élèves restent cantonnés à la technique de comptage sans saisir l'objectif du parcours. L'extrait suivant le met en évidence. Trente minutes se sont écoulées et Mohammed, qui traite la question A-2, est encore dans une technique de comptage, d'ailleurs encouragée par Garance :

- *377 . Enseignant : C'est pas la troisième figure, ça, Mohamed. Ça, c'est pas la figure 4 qui nous intéresse ! La figure 4, c'est pas celle-là.[...] Ça, c'est la figure 3, je suis d'accord. Mais après, c'est à toi de la construire, la figure 4. Tiens, je tu peux utiliser ça [l'aide].*

e. Rôle de l'aide

L'aide est introduite très tardivement, entre les échanges n°342 et n°394, soit environ vingt-cinq minutes après le début du temps de recherche. L'enseignante a dit l'avoir oubliée. Les échanges n°339 et n°441 montrent que la présence d'une aide est inhabituelle pour l'enseignante comme pour les élèves :

- *339 Enseignant : Non, c'est pas les réponses, alors je vais vous donner l'aide*
- *Elève : La quoi ?*
- *Enseignant : L'aide.*

L'utilisation d'une aide est éloignée de sa pratique habituelle.

Seule la première aide a été distribuée, c'est-à-dire celle où trois découpages du pattern correspondant à trois programmes de calcul sont proposés. La deuxième aide sur les écritures numériques n'a pas été distribuée. Neuf des douze élèves du groupe C et quatre des cinq élèves du groupe B ont reçu l'aide. Les autres élèves ne l'ont pas reçue parce qu'ils avaient déjà produit une stratégie de dénombrement voire une expression générale.

Il est difficile de savoir comment les élèves ont utilisé l'aide surtout que sa présence est inhabituelle. Quel enrichissement du milieu grâce à l'aide ? Nous avons relevé des informations en croisant les productions des élèves et les interactions qu'ils ont avec l'enseignante.

Dans le groupe C, l'aide est introduite globalement à la question A-3, pour écarter les techniques erronées ou non attendues (récurrence, expression générale sans lien avec une stratégie de calcul) ou la technique de comptage. Son introduction correspond à ce qui est prévu *a priori*. L'enseignante l'introduit en posant la question « *Comment vous voyez le carré ?* ». Pour des élèves comme Laure, le milieu enrichi d'un appui sur les représentations, a accompagné le passage de la technique de comptage à une technique de dénombrement appuyée par une stratégie de calcul. En effet, peu de temps après son introduction (échanges n°361 puis n°459), à la question « *Comment tu vois le carré ?* », elle répond « *Comme ça* » :

- *456. Laure : Faut finir un calcul ?*
- *457. Enseignant : Bah oui, vaut mieux. Alors est-ce que vous avez regardé l'aide que je vous ai donnée ?*
- *458. Laure : Mais l'aide, euh ... elle a encore, euh ...*
- *459. Enseignant : Ok. Vous, vous regardez comment ? Vous faites comment, pour calculer ? Est-ce que tu vois, tu fais comme ça, ou alors est-ce que tu comptes comme ça ?*
- *460. Laure : Comme ça !*

Néanmoins, le programme de calcul sous-jacent, reste implicite et ne sera pas formulé. En revanche, pour d'autres élèves, l'apport de l'aide n'a pas créé un milieu suffisant pour décourager une technique de comptage. Par exemple, lorsque l'enseignante distribue l'aide à Tamara, elle lui demande « *Comment tu as fait pour compter les carrés ?* » (échanges n°399 à n°407). Cette question n'est pas suffisante pour amener l'élève à une stratégie de dénombrement puisqu'elle a compté (1, 2, 3, ...) les carrés gris.

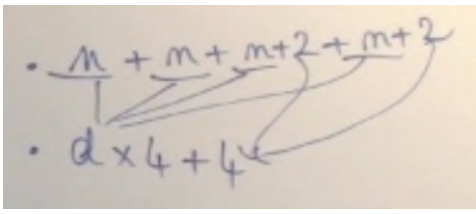


FIGURE 5.6 – Copie du tableau à l'issue de la mise en commun de la partie A

Dans le groupe B, l'aide est introduite pour aider l'émergence d'un programme de calcul à la question A-2. Mais elle aussi utilisée à la question B-2. Comme le groupe B n'a pas eu de mise en commun, la question de l'équivalence des programmes de calcul n'a pas été introduite. L'enseignante utilise l'aide pour aider la dévolution de la partie B à un binôme qui « *n'a pas compris* » ce qu'il fallait faire. Elle tente de revenir sur les découpages de la figure pour mettre en évidence l'existence de plusieurs expressions générales pour représenter le nombre de carrés. On voit là les limites d'une gestion du temps de recherche sans mise en commun.

f. Mise en commun sur la partie A

La première mise en commun concerne le groupe C. Elle est tardive et relativement écourtée par rapport au déroulement prévu (trois minutes au lieu des dix minutes prévues) ce qui peut s'expliquer par le fait que l'enseignante a laissé beaucoup de temps pour le travail individuel.

Nous dégageons deux étapes dans la mise en commun. La première (échanges n°538 à n°555) porte sur la question A-5 et la seconde (échanges n°556 à n°576) porte sur la question B-1 et concerne l'équivalence des expressions générales trouvées.

Première étape :

- *538. Enseignant : Juste vous, on va faire un bilan. Hop ! Et le carré bordé ?*
- *539. Yann : Le carré bordé ?*
- *540. Enseignant : Le carré, là, il y a des bords, tout autour. Alors combien vous avez trouvé pour euh ... Comment vous avez fait, pour trouver la formule ?*
- *541. Enseignant : Vous [Yann et Michel], vous avez trouvé quoi, comme formule ?*
- *542. Yann ou Michel : Euh, n plus n plus $n + 2$ plus $n + 2$ [tableau].*
- *543. Elève 1 : Trop long !*
- *544. Elèves : Non ! Moi non ! J'ai ...*
- *545. Enseignant : Ok. Qu'est-ce que vous avez trouvé d'autre, comme formule ? Vas-y, Divonne !*
- *546. Divonne : Euh, c'est quoi les n ?*
- *547. Enseignant : Bah, c'est pas grave. Mets ce que tu as mis !*
- *548. Divonne : Je mets une lettre ? D. d fois 4 plus 4 [tableau 1 (cf. figure 5.6)].*

- *549. Enseignant : Ok. Vous en avez trouvé d'autres ? Laure ?*
- *550. Laure : Non, j'ai trouvé la même chose.*
- *551. Enseignant : La même chose que qui ?*
- *552. Laure :Bah que Divonne.*
- *553. Enseignant : Ok. Et Mohamed et Samuel, vous avez trouvé une formule ou pas ?*
- *554. Mohamed ou Samuel : Ouais, c'est un raccourci.*
- *555. Enseignant : Marc et Tamara ?*

Seconde étape :

- *556. Enseignant : Ok. Alors est-ce que, à votre avis [. . .] A votre avis, là, est-ce que ça donne la même chose, est-ce que tout le monde a juste ou est-ce que c'est y en a un qui a pas bon ?*
- *557. Elève : On a bon, nous, Madame. Regardez !*
- *558. Enseignant : Ok. Et alors, pourquoi ça marche, pourquoi ça revient au même ?*
- *559. Samuel : Parce que 4n ça fait d fois 4 et 2 plus 2 ça fait 4 et..*
- *560. Yann : Parce que c'est la. . .*
- *561. Enseignant : Parce que c'est la. . . ?*
- *562. Yann : La contraction.*
- *563. Enseignant : La contraction ? Ça veut dire quoi, en fait, la contraction ?*
- *564. Elève : C'est décomposé.*
- *565. Yann : Qu'il a été euh . . . raccourci !*
- *566. Michel : Contracté !*
- *567. Enseignant : Qu'est qu'on a euh. . . mis Enseignant : emble, qu'est-ce que tu viens de dire Samuel ?*
- *568. Yann : Euh, tous les n et tous les. . .*
- *569. Elève : Simplifié.*
- *570. Elève : Parce qu'on a factorisé.*
- *571. Enseignant : Donc ça, on les a mis là et euh 2 plus 2 [tableau 1], donc ce que tu as dit Samuel ? ?*
- *572. Elève : Non justement, on a développé, ni factorisé.*
- *573. Enseignant : D'accord. Euh, ça ne vous dérange pas que ça ne soit pas le même lettre ?*
- *574. Elèves : Non.*
- *575. Enseignant : D'accord. Ça veut dire la même chose, hein.*
- *576. Elève : Oui.*
- *577. Enseignant : D'accord pour tout le monde. Alors je vous distribue, du coup, la deuxième partie. [. . . distribution de la partie B].*

Le première étape est amorcée par l'enseignante qui demande comment les élèves ont fait pour trouver une formule. La « formule » renvoie à la question A-5 mais la question du « comment » renvoie aux stratégies de dénombrement et aux programmes de calcul attendus à la question A-4. Les deux expressions générales $n + n + 2 + n + 2$ et $4 \times d + 4$ apparaissent sans qu'elles soient validées par une stratégie de dénombrement. La formulation des programmes de calcul restent implicite et la mise en commun porte uniquement sur la question A-5 et non sur la question A-4. Les questions A-1, A-2 et A-3 ne sont pas traitées. Le milieu prévu *a priori* comme le lien avec le numérique et les registres de représentation, n'est donc pas exploité. Il est réduit au cadre algébrique. La mise en place du bloc technologico-théorique sur l'équivalence des programmes de calcul proposés n'est pas abordée. Pourtant, cette étape est essentielle pour revenir sur des raisons d'être de l'introduction des expressions. La lettre n est introduite sans précision sur ce qu'elle désigne ce qui donne lieu à un incident. Divonne, qui a écrit sur sa feuille « unités blancs $\times 4+4$ », souhaite proposer sa réponse à la classe mais, surprise par la lettre, elle demande « *C'est quoi les "n" ?* ». L'enseignante, qui n'avait anticipé la difficulté, décide de ne pas traiter l'incident. Divonne introduit tout de même la lettre d et répond $4\times d+4$.

À partir de ces deux expressions générales, l'enseignante passe à la deuxième étape. Son amorce est formulée dans des termes (« *Pourquoi ça marche ?* », « *Est-ce que ça donne la même chose ?* ») qui laissent implicite l'objet réel de la discussion, à savoir, comment justifier le fait que deux expressions différentes puissent représenter le nombre de carrés gris. Les élèves proposent immédiatement une technique appuyée par les propriétés algébriques en essayant de mettre des mots sur la transformation à effectuer « *contracter* », « *simplifier* ». Les deux autres techniques prévues *a priori* n'apparaissent pas. Celle appuyée par le changement de cadre est hors-propos puisque le lien avec les représentations a été évacué dès le début de la mise en commun. Celle appuyée par la dialectique du numérique et de l'algébrique n'apparaîtra que lors de la mise en commun suivante. Le fait de ne pas se référer aux programmes de calcul, ayant comme résultats ces deux expressions, minore la possibilité de mobiliser cette dialectique. Finalement, un élève mentionne le développement et la factorisation, l'enseignante répond « D'accord ». L'égalité des deux expressions reste floue, la propriété de distributivité n'est pas nommée. Seuls des ostensifs graphiques (des traits et des flèches) permettant de relier les indéterminées et les constantes sont sollicités pour expliciter la technique.

Enfin, les éléments de synthèse comme l'utilisation de lettres différentes ou l'existence de plusieurs programmes de calcul équivalents sont rapidement traités. Le milieu prévu *a priori* est très peu utilisé. Ainsi la partie B est distribuée et le deuxième temps de recherche est engagé sans qu'il y ait eu de processus de dévolution des enjeux de cette partie.

La mise en commun ne donne pas lieu à la synthèse prévue *a priori*. Le groupe, qui a déjà commencé la partie B (début à l'échange n°515), n'en est pas au même avancement du problème que le groupe C. On voit là une difficulté de la gestion de deux problèmes différents dans une même classe avec un groupe qui est plus autonome que l'autre.

g. Temps de recherche sur la partie B

Comme nous l'avons déjà souligné, la mise en commun du groupe C n'a pas permis de dévoluer la question de l'équivalence d'expressions dénotant le nombre de carrés gris aux élèves. La transition entre les parties A et B est rapide et les enjeux de la partie B n'ont pas été explicités. Cela conduit l'enseignante à reformuler la consigne auprès de chaque binôme : « *On cherche les bonnes formules* » (échange n°614), « *Les formules pour lesquelles ça marche* » (échange n°593). Dans le binôme de Michel et Yann, l'enjeu est finalement réduit à « *cocher la bonne réponse* » ce qui étonne Yann « *C'est du hasard* ». Le manque de dévolution se traduit ici par un problème de contrat didactique. La question de la justification du fait que des expressions donnent le même nombre de carrés gris n'est pas posée explicitement. À ce stade, il reste trois minutes avant la sonnerie et la réaction de l'enseignante peut s'expliquer par le fait que la contrainte de gestion de temps devient tellement forte qu'elle préfère revoir à la baisse ses attentes et revenir sur cette partie lors de la séance suivante. De son côté, Baptiste n'a pas non plus compris les enjeux de la question B. Il donne une réponse rapide à la question 2 dès l'échange n°432. Nous disposons de trop peu d'élément pour savoir à quel niveau technologique il s'est situé pour décider quelles expressions cocher.

Dans le groupe B, le problème de dévolution est similaire puisque la question de l'équivalence des programmes de calcul n'a pas été soulevée en raison de l'absence de mise en commun. N'ayant pas encore eu l'occasion de constater que plusieurs expressions donnaient le même nombre de carrés, les élèves n'ont pas compris les enjeux de la question. L'enseignante utilise l'aide 1 pour permettre aux élèves de s'approprier les enjeux, en particulier, à Florianne et Valérie qui « *n'ont pas compris* » ce qu'il fallait faire. Elle tente de revenir sur les découpages de la figure pour mettre en évidence l'existence de plusieurs expressions générales pour représenter le nombre de carrés. Mais cet aspect est survolé. On voit là les limites d'une gestion du temps de recherche sans mise en commun. Néanmoins, Mélusine suggère le passage au numérique : « *Il faut que ça donne le même résultat.* » « *Moi, j'ai pris le chiffre 2* » ou encore « *On peut prendre un nombre quelconque.* ». La technique de conjecture et de preuve est amorcée même si la place du numérique pour conjecturer ou pour prouver n'est pas encore très claire. L'enseignante laisse probablement volontairement cet aspect de côté pour y revenir dans la mise en commun. Ces échanges montrent que les élèves du groupe B ne se situent pas au même niveau technologique que ceux du groupe C. Les élèves du groupe B- réalisent le lien avec les programmes de calcul proposés pour calculer le nombre de carrés. Même si c'est une élève qui influence le recours au numérique, il est accepté par tous. Le lien entre OM1 et OM2 est présent.

Le temps de recherche sur la partie B s'arrête rapidement. La sonnerie annonce la fin de la séance. La mise en commun aura lieu la séance suivante.

h. Mise en commun sur la partie B

La mise en commun a fait l'objet de la première moitié de la séance suivante. Elle a duré quasiment vingt minutes ce qui correspond à la durée prévue.

Le lancement de la séance est difficile. Il dure quatre minutes et vingt secondes (échanges n°9 à n°25). L'enseignante choisit de traiter en premier le problème du groupe C. Pour des raisons de temps, le problème de groupe B ne sera pas traité mais les élèves de ce groupe se mêlent rapidement à la mise en commun.

Pour remettre les élèves dans le milieu du problème du carré bordé, Garance s'appuie sur la représentation pour schématiser les programmes de calcul proposés par les élèves à la séance précédente (cf. figure 5.7). Mais les programmes de calcul ne sont pas formulés.

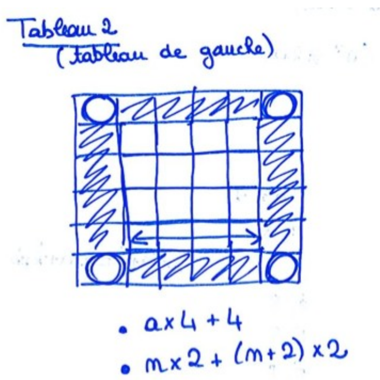


FIGURE 5.7 – Trace écrit au tableau de Garance dans l'échange 24

- *24. Enseignant : Alors on faisait comment ? Vous vous souvenez ou pas du tout ? Ok donc il y avait plusieurs méthodes. Alors toi par exemple Divonne et Ina, vous faisiez le côté fois le nombre de côté du carré blanc [tableau 2 (cf. figure 5.7)]. D'accord fois 4. [tableau] Et après vous rajoutiez les 4 aux extrémités. Donc nous on avait 4 fois a plus 4. D'accord ça c'était votre première formule. Ensuite, votre formule à vous c'était quoi ? Vous vous en souvenez ou pas. C'était quoi ? [vers Yann, Michel, Chloé, Baptiste et Jean]*
- *25. Enseignant : [murmures élèves] Comment vous faisiez ? Alors ouais, du coup, vous calculiez n, donc on avait n plus n et ensuite les deux côtés. En les côtés des... les côtés extérieurs c'était n plus 2 et n plus 2. Donc vous aviez n fois 2 plus 2 fois 2. [tableau 2] Alors maintenant, dans toutes les formules que je vous propose là. Qu'est-ce qu'on peut nous pour savoir*

quelles sont les formules qui correspondent à notre situation ? Alors déjà notre première. Chloé, est-ce qu'elle correspond à notre situation ou pas ?

Le milieu n'ayant pas été exploité dans la dernière mise en commun, cela peut expliquer le manque de réactivité des élèves. Or, la contrainte de temps est forte puisqu'elle souhaite traiter le parcours 2 dans le temps restant.

À partir de l'échange n°26, il s'agit de déterminer si les expressions algébriques proposées correspondent à la situation du carré bordé. Dès les premières interactions, la référence au carré bordé disparaît. Les élèves et l'enseignante s'appuient sur le registre des écritures algébriques. À partir de l'échange n°75, le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est convoqué. La tâche est : quelles sont les expressions égales[3] pour toute valeur aux expressions $n \times 4 + 4$ et $n + n + (n + 2) + (n + 2)$ (expressions proposées par les élèves) ? On assiste à l'émergence de la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ et la construction du bloc technologico-théorique associé :

- *76. Enseignant : Comment on peut faire pour montrer si deux formules elles sont égales ou pas ? Laure ?*
- *77. Laure : On remplace par un nombre.*
- *78. Enseignant : Alors, on peut le remplacer par un nombre. Qu'est-ce qu'on va remplacer par un nombre ?*
- *79. Elève : Le a, le a [plusieurs élèves]*
- *80. Enseignant : Le a. Alors si par exemple je le remplace par un nombre. Par exemple, quel nombre ?*
- *81. Elève : 2, 4, 3 [plusieurs élèves].*

Après un échange rapide sur le choix de la valeur à substituer, toutes les expressions sont calculées pour $a = 0$. Nous illustrons les écrits de Garance au tableau dans la figure 5.8. Cela fournit un contre-exemple pour justifier que les expressions numé-

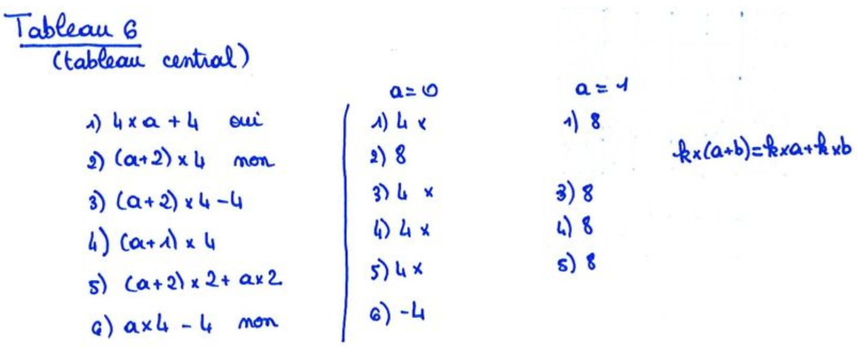


FIGURE 5.8 – Une partie de la trace écrite au tableau des mises en commun proposée par Garance

3. Notons que, dans les échanges, la distinction entre « formule » et « expression » et entre « chiffre » et « nombre » est parfois confuse.

rotées 2 et 6 ne sont pas équivalentes (échange n°150). Il s'agit de prouver que deux expressions sont égales pour toutes valeurs :

- *150. Enseignant : Alors, ça, ça nous permet de faire quoi ? Une fois qu'on a ça là ?*
- *151. Philinte : A calculer des [inaudible]*
- *152. Enseignant : Une fois qu'on a ça qu'est-ce qu'on peut dire ?*
- *153. Yann : On repère ceux qui sont pas ? ?*
- *154. Enseignant : Alors on a calculer pour a égal 0. Alors à priori ? Maintenant, qu'on a ça, qu'est-ce qu'on peut dire ? Qu'elles sont les formules qui correspondent aux, à notre situation ?*
- *155. Philinte : Bah, tous sauf le 2 et le 6.*
- *156. Enseignant : Alors le 1, 3, 4, 5.*
- *157. Enseignant : Qu'elles sont celles pour qui ça ne marche pas ?*
- *158. Elève : Le 2 et 6 [à plusieurs]*
- *159. Enseignant : Le 2 et 6. Donc celui-là [le 2)], on peut être sûr de mettre non [tableau : 2) non 6) non].*
- *160. Enseignant : Est-ce que les autres on est sûrs que c'est vrai ?*
- *161. Elève : Non.*
- *162. Divonne : Si.*
- *163. Enseignant : Pourquoi.*
- *164. Divonne : Parce que.*
- *165. Enseignant : Est-ce que les autres on est sûr que c'est oui ?*
- *166. Divonne : Oui.*
- *167. Enseignant : Pour toi Divonne, ça veut dire que j'ai regardé pour une valeur, si c'est vrai pour une valeur, ça veut dire que c'est vrai pour n'importe quelle valeur.*
- *168. Divonne Non, Si [rires]*

La quantification est introduite à partir de l'échange n°167 pour, comme prévu *a priori*, déstabiliser la technique erronée de preuve par le test numérique. Garance fait ensuite un écart par rapport à ce qui était prévu. Elle illustre le fait qu'un exemple n'est pas suffisant pour prouver que deux expressions sont équivalentes (échanges n°169 à n°199). Le test de l'égalité « $a^2 = 2a$ » avec $a = 2$ laisse supposer que a^2 et $2a$ sont égales et pourtant, pour $a = 3$, l'égalité n'est pas vérifiée. Elle revient ensuite à la conjecture de l'équivalence des expressions 1, 3, 4 et 5 et à la nécessité de la preuve algébrique. Des élèves proposent un nouveau test numérique. Les expressions sont testées pour $a = 1$ (cf. figure 5.8). On voit là les limites et le coût en temps des tests numériques. Un tableau de valeurs ou un tableur auraient pu permettre de renforcer le fait que les expressions renvoient le même nombre. Elle déstabilise la preuve par l'exemple avec la quantification, comme prévu *a priori*, jusqu'à ce qu'un élève suggère la preuve par l'algèbre (échanges n°199 à n°249).

- *199. Enseignant : D'accord, donc c'est bien ce que j'ai expliqué précédemment, c'est que là ce que vous trouvez avec a égal 0,qu'est-ce que ça nous permet de trouver avec a égal 0 ? Ca nous permet de trouver celles qui ne sont pas les formules. D'accord. Mais par contre pour trouver celles qui sont les formules. Qu'est-ce qu'on va pouvoir faire ? Là on conjecture que c'est la 1, la 3, la 4, la 5. Et nous qu'est-ce qu'on va faire ? Comment on va faire pour montrer ça ?*

- *200. Elève : On doit revérifier*
- *201. Enseignant : On doit revérifier pour quoi ?*
- *202 . Elève : Pour d'autres valeurs*
- *203 . Enseignant : Pour d'autres valeurs. Alors si par exemple je revérifie pour 1, pour 2, pour 3*
- *204 . Elève : Pour d'autres valeurs que...*
- *205 . Enseignant : Si par exemple, alors on va vérifier pour a égal 1[tableau : résultats en colonne]. Alors a égal, ça marche, ça fait combien le premier. 4 fois 1 plus 4 [$4 \times 1 + 4$]*
- *206 . Elève : 3 [un autre élève] 8*
- *207. Enseignant : 4 fois un, ça fait 4 plus 4 ?*
- *208 . Elève : Ca fait 8*
- *209 . Enseignant : Ca fait 8. Donc le deuxième on vérifie pas. Le troisième ?*
- *210. Elève : 3 fois 2...*
- *211 . Philinte : 12*
- *212 . Enseignant : Ca fait 8 aussi. Le quatre ?*
- *213. Elève : 8*
- *214 . Enseignant : 8. Pour le cinq ?*
- *215 . Elève : Ca fait 8.[tout de suite]*
- *216 . Enseignant : Ca fait 8 aussi.* ***Là, on a montré pour deux valeurs. Est-ce que si c'est vrai pour deux valeurs, ça veut forcément dire que c'est vrai pour toutes la valeurs ?***
- *217 . Elève : Non*
- *218. Eleve2 : Non, Non [plusieurs élèves]*
- *219 . Enseignant : Donc, qu'est-ce qu'on va faire ?*
- *220. Eleve : On recommence*
- *221. Enseignant : On recommence, encore ?*
- *222. Elève : Non ?*
- *223 . Enseignant :* ***Alors, tu vas recommencer pour combien de valeurs pour pouvoir montrer que c'est vrai pour toutes les valeurs ?***
- *224 . Elève : Ouais, ouais, c'est vrai pour toutes les valeurs*
- *225 . Philinte : 10*
- *226. Divonne : Jusqu'à ce qu'il y ait une fausse*
- *227. Enseignant : Jusqu'à ce qu'il y ait une fausse.*
- *228. Divonne : Oui*
- *229 . Enseignant : Si tu trouves une fausse, ça vouloir dire quoi ?*
- *230. Divonne : Que c'est pas bon pour toutes les valeurs*
- *231. Enseignant : Du coup là, ça veut dire que tu montres que c'est pas bon pour toutes les valeurs. [...] Mais c'est pas ça que je te demande moi, c'est pour montrer que c'est égal.*
- *232 . Divonne : Bah, c'est [inaudible]*
- *233. Enseignant : Oui mais si tu me le montres pour une valeur, pour deux valeurs, est-ce que tu vas pouvoir le montrer* ***pour toutes les valeurs*** *?*
- *234. Divonne : Non*
- *235. Elève : Non*
- *236 . Enseignant : Alors comment on va faire, pour pouvoir avec toutes les valeurs ?*
- *237 . Enseignant : On va utiliser quoi à votre avis ?*
- *238 . Philinte : On va utiliser 10.*
- *239 . Elève : [inaudible]*
- *240. Enseignant : Comment ?*
- *241. Enseignant : Dix valeurs, c'est ça ?*
- *242. Elève : Ouais*
- *243 . Philinte : On va utiliser le 10.*
- *244. Enseignant : Le 10 quoi ? Pour a égal 10, c'est ça ?*

- *247. Enseignant : Si tu fais ça pour a égal 10, tu vas encore utiliser une autre valeur. Nous, on va avoir besoin de quoi ?*
- *248. Elève :* ***De lettres.***
- *249 . Enseignant :* ***Oui, d'accord on va avoir besoin des lettres. Donc si vous voulez montrer que c'est vrai pour n'importe quel nombre. D'accord. Il va falloir utiliser les lettres. Vous vous connaissez quoi comme euh... calculs sur les lettres ?***

Commence alors l'étape de la preuve algébrique. La référence à la propriété de la distributivité est donnée dans l'échange n°262 mais c'est surtout un discours d'ordre légal qui permet de justifier et de contrôler les transformations effectuées. En voici deux exemples :

- *291. Enseignant : 4a moins 4. Et là, qu'est-ce qu'on a le droit de calculer ensemble ?*
- *321. Enseignant : 2 fois a. D'accord, donc le a plus 2, tu ne peux pas l'écrire 2a. Par contre qu'est-ce que tu peux faire ?*

Ces transformations conduisent à conclure que les expressions numérotées 3, 4 et 5 « *sont égales entre elles* » (échange n°340). Notons que la quantification a disparu. Garance ne revient pas sur le fait que les expressions équivalentes dénotent le même nombre et, dans le cas du carré bordé, elles représentent le nombre de carrés grisés. La dénotation des expressions n'est pas présentée. La dernière question sur le choix de l'expression la plus appropriée n'a pas été traitée.

Le parcours se termine par une synthèse qui porte sur une partie de la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$. Seule la preuve du fait que deux expressions sont égales ou non pour n'importe quelle valeur est présentée. L'étape de conjecture a disparu. De plus, notons que cette synthèse est orale. Elle est institutionnalisée officiellement dans les cahiers, cinq séances après (cf. annexe D).

L'enseignante poursuit avec le parcours 2.

i. Conclusion de l'analyse *a posteriori* du parcours 1

En conclusion, nous revenons sur l'enjeu didactique du parcours. A-t-il permis de revenir sur le rôle de l'algèbre en lien avec l'équivalence des programmes de calcul ?

L'enseignante a été en difficulté dans la gestion didactique de la partie A. Rappelons que cette séance a été la première expérimentation. Notre présence dans la classe a perturbé non seulement Garance, qui s'est dit avoir été très stressée et mal à l'aise, mais aussi ses élèves. Cela n'a pas été le cas dans les séances suivantes. Le premier temps de recherche individuel a été long. La mise en commun ainsi écourtée n'a pas permis de rendre explicite la formulation des programmes de calcul. Nous n'avons probablement pas suffisamment insisté sur l'importance de cette étape avec

Garance. La question de l'équivalence des programmes de calcul n'a pas été abordée. Cependant, la richesse des productions des élèves et des interactions privées avec l'enseignante montrent que ces aspects ont localement été évoqués. Mais nous faisons l'hypothèse que cela n'a pas été suffisant pour travailler les enjeux didactiques du parcours. Des mises en commun dans lesquelles les élèves confrontent leurs réponses et les valident auraient pu permettre de les travailler davantage.

Concernant la partie B du problème, la mise en commun a permis de faire émerger la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ et de s'approcher du niveau technologique attendu. Le test numérique et la nécessité d'une preuve algébrique ont été travaillés. La conjecture et la question de la validité de cette conjecture ont été abordées. Cependant, la synthèse finale n'a pas repris tous ces aspects. Nous y revenons dans les paragraphes suivants parce qu'ils sont à nouveau travaillés dans les parcours 2 et 3.

Concernant la gestion de la différenciation, Garance a semblé être en difficulté pour gérer le fait que les élèves avaient des problèmes différents mais sur le même objectif. Garance a choisi de gérer les deux groupes séparément et n'est pas parvenue à proposer des synthèses collectives décontextualisées.

5.2.5 Parcours 2 : les choix de Garance

Ce parcours, intitulé *Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'équivalence des expressions*, convoque le type de tâches *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* dans l'objectif didactique de déstabiliser des erreurs de calcul caractéristiques de chaque groupe à partir des notions de conjecture numérique, de preuve et de contre-exemple. Il porte que la question suivante : Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur de la lettre ? L'analyse *a priori* est présentée dans le chapitre 4 au paragraphe 4.3.3.

Après avoir présenté les énoncés retenus par Garance, nous présentons ses choix concernant les variables didactiques, les éléments du milieu et le déroulement.

a. Énoncés retenus par Garance

Énoncé du groupe C

Les égalités suivantes sont-elles ***vraies pour toute valeur de*** *a ? Justifie ta réponse.*

Egalité	*Vraie/Fausse*	*Justification*
$4+3a=7a$		
$a^2=2a$		
$(2a)^2=4a^2$		

Une aide constructive est disponible en fin de document :

- *Tu peux* ***tester l'égalité*** *en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.*
- *Tu montres qu'une* ***égalité est fausse*** *à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.*
- *Tu prouves qu'****une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre*** *à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.*

Énoncé du groupe B

Les égalités suivantes sont-elles ***vraies pour toute valeur de*** a *? Justifie ta réponse.*

Egalité	*Vraie/Fausse*	*Justification*
$(2a)^2 = 2a^2$		
$a(a+2) = a^2+2$		
$a+3(a+2) = 4a+6$		

L'aide est identique à celle du groupe C.

b. Choix sur les variables didactiques et les éléments du milieu

Garance a fait les choix suivants à partir de l'énoncé présenté dans l'analyse *a priori*.

Le *nombre d'expressions*. Garance a préféré limiter chaque énoncé à trois égalités pour chaque groupe avec deux égalités fausses et une vraie pour toute valeur. L'objectif de Garance, n'est pas de traiter toutes les erreurs mais une partie d'entre-elles. Elle reviendra par la suite sans notre intervention sur ce parcours dans les phases de rappel qui débutent habituellement ses séances. Nous lui avons proposé les égalités présentées dans l'analyse *a priori*.

Le *choix des expressions composant les égalités*. Les expressions composant les égalités ont été choisies pour travailler sur des erreurs de calcul caractéristiques de chaque groupe. La limitation à trois égalités pour chaque groupe a conduit à faire des choix. Elle a retenu les égalités faisant intervenir les erreurs les plus récurrentes chez les élèves de troisième [4] selon elle. Les égalités retenues pour le groupe C sont : $4+3a = 7a$, $a^2 = 2a$ et $(2a)^2 = 4a^2$. Elles mettent en jeu le rôle des opérateurs et leur hiérarchie. Les égalités retenues pour le groupe B sont : $(2a)^2 = 2a^2$, $a(a+2) =$

4. Notons que Garance ne connaît pas encore ses élèves de troisième en algèbre puisqu'elle n'a pas commencé les chapitres relatifs à l'algèbre. Au moment où elle a choisi les expressions, sa classe n'a pas passé le test Pépite.

$a^2 + 2$, $a + 3(a + 2) = 4a + 6$. Elles mettent en jeu le rôle des parenthèses dans le développement et le rôle de la puissance carrée.

Le *changement de registre de représentation.* Garance a prévu de travailler dans le registre des écritures numériques pour amener les élèves à travailler sur la dénotation des expressions. En revanche, elle n'a pas prévu d'utiliser le tableur pour renforcer le fait que deux expressions composant les égalités renvoient ou pas le même nombre. D'une part, l'utilisation du tableur semble éloignée de ses pratiques et, d'autre part, le matériel informatique n'est pas facile d'accès dans son établissement. L'utilisation d'un tableur a donc été abandonnée parce qu'elle représentait trop de contraintes. Pour le remplacer, nous lui avons suggéré l'introduction d'un tableau de valeurs fait « à la main » mais celui-ci n'apparaîtra pas dans la mise en œuvre effective du déroulement. De même, elle n'a pas prévu d'avoir recours au schéma de calcul car, selon elle, il est trop éloigné des pratiques des élèves de troisième. Elle n'a pas l'habitude de l'utiliser. Elle prévoit de revenir sur le rôle des opérateurs et la hiérarchie des opérations à partir des tests numériques. Les calculs numériques sont menés à la main.

Ainsi le milieu retenu par Garance fait intervenir le test numérique sans tableur et sans schéma de calcul. Nous nous interrogeons, le recours au test numérique sans l'utilisation d'autres supports sera-t-il suffisant pour amener les élèves à déstabiliser les erreurs de calcul et à revenir sur le rôle des opérateurs et la hiérarchie des opérations ?

c. Éléments du déroulement prévu

Garance a prévu de passer une quarantaine de minutes sur ce parcours. Il est passé à la suite du parcours 1 ce qui signifie que les élèves aurons déjà rencontré l'OM ponctuelle relative au type de tâches $T_{Prouver-equiv}$.

Nous n'avons probablement pas suffisamment envisagé le déroulement dans ses détails avec Garance. Les points suivants ont été discutés :

- le recours au test numérique pour, premièrement, revenir sur l'aspect procédural des expressions et le rôle des opérateurs, deuxièmement, décourager les élèves d'avoir recours à des formulations d'ordre légal, et, troisièmement, conjecturer l'équivalence des expressions et fournir des contre-exemples,
- le fait d'insister sur la quantification pour mettre en avant qu'un exemple ne suffit pas pour remettre en question la preuve par l'exemple et conduire à la nécessité d'une preuve algébrique faisant référence aux propriétés du calcul.

Garance a prévu des temps de recherche en binôme au cours desquels elle circule dans les rangs pour amener les élèves à tester les égalités avec des valeurs numériques. Des mises en commun pour chaque groupe sont prévues pour confronter les solutions des élèves. Il est prévu que seul le moment d'institutionnalisation s'adresse à la classe entière. Son contenu a été discuté à partir de ce qui est écrit dans l'analyse *a priori* ($\tau_{Prouver-equiv-3}$).

Nous avons présenté l'analyse *a priori* de ce parcours et les choix de Garance. Nous présentons maintenant son analyse *a posteriori*.

5.2.6 Analyse *a posteriori* du parcours 2

Le parcours 2 s'est déroulé sur la séance différenciée numéro 2. Sa transcription et des copies d'écran du tableau sont dans l'annexe E. Des copies d'élèves sont présentées dans l'annexe D. Rappelons que la première moitié de cette séance est consacrée à la mise en commun et l'institutionnalisation du parcours 1 qui concerne les moments de l'émergence de la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ et la construction du bloc technologico-théorique relativement au type de tâches $T_{Prouver-equiv}$. Le parcours 2 porte aussi sur ce type de tâches à partir de la tâche suivante : Les égalités sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur ?

D'abord, nous présentons la trame simplifiée de la séance concernant le parcours 2. Ensuite, nous présentons l'analyse des productions des élèves en lien avec les mises en commun. Puis, nous analysons les échanges entre Garance et ses élèves.

a. Trame simplifiée

Le parcours s'est déroulé sur vingt-huit minutes. La trame simplifiée du déroulement est présentée dans le tableau 5.5.

Cette trame donne des éléments sur l'organisation de la différenciation par Garance. Le lancement et la synthèse de la séance s'adressent à la classe, puis après un temps de recherche individuelle, elle a choisi les égalités une à une en alternant des mises en commun pour chaque groupe. Cette organisation présente des avantages. Pendant qu'un groupe est en recherche individuelle, l'autre est en mise en commun. Il présente aussi des désavantages. La circulation de l'enseignante dans la classe pendant la recherche individuelle en est limitée ce qui ne lui permet pas d'avoir un aperçu des productions des élèves et donc d'anticiper la mise en commun.

Toutes les égalités ont été traitées dans le temps imparti puisque Garance avait prévu de consacrer deux séances pour les parcours 1 et 2. Mais les mises en commun

Étape	Échanges	Groupe	Durée
Lancement	368 à 383	B et C	45”
Recherche individuelle	384 à 407	B et C	5’30”
Mise en commun $4 + 3a = 7a$	409 à 479	C	4’
Recherche individuelle	480 à 498	B et C	6’
Mise en commun $(2a)^2 = 2a^2$	499 à 555	B	2’45”
Mise en commun $a^2 = 2a$	556 à 589	C	1’30”
Mise en commun $a(a + 2) = a^2 + 2$	590 à 608	B	1’15”
Mise en commun $(2a)^2 = 4a^2$	609 à 649	C	1’40”
Mise en commun $a + 3(a + 2) = 4a + 6$	650 à 719	B	3’30”
Synthèse	720 à 741	B et C	1’20”
Durée totale			28’15”

TABLEAU 5.5 – Trame simplifiée du déroulement du parcours 2

(entre une minute et quinze secondes et quatre minutes quarante-cinq) sont courtes par rapport à celles prévues dans l’analyse *a priori*. Nous nous interrogeons, certes, l’enseignante a terminé l’exercice dans le temps imparti mais au détriment de quels enjeux ? Nous commençons par une analyse des productions des élèves et des niveaux de justification.

b. Production des élèves et niveau de justification dans les mises en commun : un recours au numérique présent mais avec quel statut ?

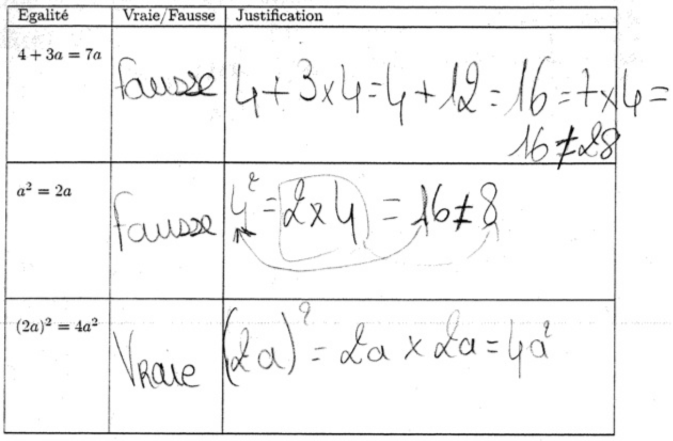
Nous analysons les productions des élèves selon les critères retenus *a priori*. Nous indiquons la technique utilisée dans la mise en commun. Treize élèves ont rendu une copie dans le groupe C et six ont rendu une copie dans le groupe B.

Rappelons que, pour faciliter la lecture des différents tableaux ci-dessous, nous avons introduit la notation τ_A (technique attendue) pour désigner la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ de conjecture numérique puis de preuve.

Égalité $4 + 3a = 7a$.

Réponse	Faux	Vrai	Faux	Vrai/Faux	Absence de réponse
Justification	Test numérique	Règle incorrecte	Ordre légal	Non justifié	
Techniques	τ_A	τ_{E-2}	τ_{NA-1}	-	
Copies	9	0	5	1	1

Trois élèves donnent une double justification : une de type d’ordre légal ; et une avec un test numérique ce qui laisse supposer que le contre-exemple n’a pas encore le statut de preuve pour ces élèves. Parmi les neuf tests numériques, huit élèves testent avec la valeur 0 comme dans la mise en commun et une élève, Laure, teste avec la valeur 4. Sa copie (cf. figure 5.9) laisse supposer que le test numérique a le statut de contre-exemple.



Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$	fausse	$4+3\times4=4+12=16=7\times4=$ $16\neq28$
$a^2 = 2a$	fausse	$4^2=2\times4=16\neq8$
$(2a)^2 = 4a^2$	Vraie	$(2a)^2=2a\times2a=4a^2$

FIGURE 5.9 – Extrait de la copie de Laure (groupe C)

Dans la mise en commun (échanges n°409 à n°479), c'est d'abord une justification du type de d'ordre légal « *On ne peut pas additionner les chiffres avec les lettres* » (échanges n°425 à n°426) qui apparaît et qui est validée comme justification.

- *426 . Enseignant : Qu'est-ce qu'on peut pas additionner ?*
- *427. Yann : Les, euh, les chiffres avec les lettres.*
- *428. Enseignant : D'accord, donc là tu me donnes une justification. On n'a pas le droit d'additionner les lettres avec les chiffres, c'est $3a$. Chut Anne. Donc on n'a pas le droit d'additionner le nombre avec la lettre.*
- *429. Enseignant : Chut. Chloé. On a dit qu'une justification c'était quoi aussi. Ah euh Ina.*
- *430. Ina : [inaudible]*
- *431. Enseignant : Qu'est-ce que tu as mis, toi ? Tu as mis que c'était vrai ou faux ?*
- *432. Ina : J'ai mis faux.*
- *433. Enseignant : Très bien, pourquoi est-ce que c'est faux ?*
- *434. Ina : Parce que les lettres, on peut pas les additionner avec les chiffres.*
- *435. Enseignant : Ok, donc ça c'est une première justification. Mais, là, par rapport à ce qu'on a fait juste avant. Comment on va faire pour justifier ça, là ?*

Mais Garance amène ses élèves à une deuxième justification. Elle fait référence à la technique de conjecture numérique puis de preuve (notée τ_A) qui a émergé dans le parcours 1. Chaque expression composant l'égalité est testée pour la valeur 0. Les calculs numériques ne sont pas l'occasion de revenir sur la priorité de la multiplication sur l'addition ce qui était pourtant au cœur du choix de cette égalité.

- *444. Divonne : 3 fois 0.*
- *445. Enseignant : Alors ça, ça fait combien ?*

- *446. Divonne : Ça fait 4.*
- *447. Enseignant : Ca fait 4. Ecoute Yann. Et l'autre partie, c'est quoi ?*

Le terme « contre-exemple » n'apparaît pas et le statut de contre-exemple numérique comme preuve suffisante que l'égalité est fausse est rapidement évoqué dans l'échange n°472 qui suit les calculs numériques.

- *472. Enseignant : Du coup, ça, ça marche. D'accord, ça c'est une justification. L'autre c'est aussi une justification mais c'est pas exactement une justification mathématique. D'accord, c'est que toi t'as, dans ta tête, t'as des règles, tu sais que euh, on n'a pas le droit de faire ça parce que on t'a dit de pas faire ça. On est d'accord Ina. Alors que si jamais tu prends un exemple et que tu montres que, avec cet exemple, avec ce nombre-là, ça ne donne pas le même résultat. D'accord. Ça veut bien dire que ton égalité est fausse.*

Le test numérique n'a donc pas été introduit pour tester l'égalité mais directement pour prouver qu'elle est fausse. L'étape de conjecture n'a donc pas été sollicitée. La distinction entre tester une égalité et le fait qu'un contre-exemple est suffisant pour prouver qu'une égalité est fausse reste implicite dans les échanges.

Égalité $a^2 = 2a$**.**

Réponse	Faux	Vrai	Vrai	Vrai/faux	Absence de réponse
Justification	Test numérique	Règle incorrecte	Ordre légal	Non justifié	
Techniques	τ_A	τ_{E-2}	τ_{NA-1}	-	
Copies	10	0	0	2	1

Dix élèves testent l'égalité pour une valeur numérique. Dans la mise en commun (échanges n°556 à n°589), les élèves proposent de tester l'égalité pour la valeur 1.

- *557. Elève : Madame, vous avez pas fait a au carré égal* 2*a.*
- *558. Enseignant : Oui, alors on va faire celui-là. Chut.*
- *559. Enseignant : Ok, alors pour celui-là. Baptiste, qu'est-ce que tu as mis toi ?*
- *560. Baptiste : C'est faux.*
- *561. Enseignant : C'est faux pourquoi ? [Elle écrit « faux », tableau 10]*
- *562. Enseignant : Comment on fait pour justifier ? Chut*
- *564. Baptiste : 3 au carré.*
- *565. Enseignant : Chut, non, c'est juste que je dis ton prénom parce que j'aimerais bien que tu te taises. Baptiste.*
- *566. Baptiste : Parce que, euh, a au carré ça fait a [inaudible]*
- *567. Enseignant : Oui, alors pourquoi. Comment tu vas faire pour me montrer que cette égalité est fausse ?*
- *568. Baptiste : Bah c'est faux.*
- *569. Enseignant : Bah oui c'est faux. Alors pourquoi c'est faux. Tu peux essayer avec quoi, Baptiste ? Qu'est-ce qu'on a dis juste avant ?*
- *570. Mohamed : L'exemple du 2.*
- *571. Enseignant : Là, comment on a fait ?*
- *572. Baptiste : Bah...*

- *573. Enseignant : On a utilisé quoi, là ? Notre a, on l'a remplacé par ?*
- *574. Baptiste : Par un nombre.*
- *575. Enseignant : Par un nombre. Alors là qu'est-ce que tu peux faire pour montrer que c'est faux ?*
- *576. Elève : On met un 1.*
- *577. Baptiste On met un 1, ça va, ça...*
- *578. Elève : Ça fait 2. [Yann]*
- *579. Enseignant : Par exemple, pour a égal 1.*
- *580. Enseignant : Chut.*
- *581. Elève : a fois 2 égal 1.*
- *582. Enseignant : Alors 1 au carré ça fait combien ? Chut !*
- *583. Elève : Ça fait 1.*
- *584. Enseignant : Ça fait 1. Et 2 fois 1.*
- *585. Elève : Ça fait zéro.*
- *586. Eleve2 : 2.*
- *587. Enseignant : Ça fait 2. Alors est-ce que c'est égal ?*
- *588. Eleve2 : Non.*
- *589. Enseignant : Non, d'accord. Du coup, ça, ça justifie le fait que ça n'est pas égal. Si vous trouvez une valeur pour laquelle ça n'est pas vrai, votre égalité est fausse.*

Les calculs numériques ne sont pas l'occasion de revenir sur le fait que a^2 signifie $a \times a$. Pour les mêmes raisons que dans l'égalité précédente, la distinction entre tester numériquement pour conjecturer et utiliser un test numérique comme contre-exemple pour prouver qu'une égalité est fausse reste implicite.

Égalité $(2a)^2 = 4a^2$**.**

Réponse	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Vrai/ Faux	Vrai/ Faux	Absence réponse
Justification	Test numérique et preuve	Preuve sans test numérique	Preuve par l'exemple	Règle incorrecte	Ordre légal	Non justifié	
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-1}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}	-	
Copies	0	7	1	0	0	2	1

La majorité des élèves qui justifient proposent une preuve par une démarche algébrique sans test numérique préalable. Le seul élève qui utilise un test numérique propose une justification incorrecte de preuve par l'exemple. Les productions des élèves correspondent aux techniques et niveau technologique impliqués dans la mise en commun (échanges n°609 à n°649). L'égalité est prouvée par une preuve algébrique sans conjecture numérique (τ_{NA-2}). Pourtant les élèves débattent de la véracité de l'égalité et semblent en désaccord (échanges n°626 à n°628). Mais Garance rebondit sur la formulation d'ordre légal proposée par Divonne plutôt que d'introduire un test numérique.

– *629. Enseignant : Pourquoi c'est faux.*
– *630. Elève : C'est vrai.*
– *631. Divonne : Parce que quand on met au carré, on fait le chiffre fois le chiffre.*
– *632. Enseignant : Si on fait le chiffre fois le chiffre, ça va donner quoi ?*

La propriété de la puissance carrée et le rôle des parenthèses ne sont pas rappelés. Seules des justifications du type « ce qu'on a le droit de faire » sont utilisées. Cette mise en commun n'a pas été l'occasion de revenir sur l'aspect procédural des expressions $(2a)^2$ et $4a^2$. Le test numérique n'intervient pas dans le milieu.

Égalité $(2a)^2 = 2a^2$**.**

Réponse	Faux	Vrai	Vrai	Vrai/Faux	Vrai/faux	Absence réponse
Justification	Test numérique	Preuve algébrique	Règle incorrecte	Ordre légal	Non justifié	
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}	-	
Copies	0	4	0	1	1	0

La majorité des élèves donnent une réponse incorrecte. L'erreur visée n'a donc pas été remise en question et on peut même faire l'hypothèse qu'elle a été renforcée. Nous faisons le lien avec le fait que la mise en commun (échanges n°499 à n°555) porte sur des formulations d'ordre légal et place le discours technologique au niveau d'une reconnaissance et d'une validation par les ostensifs :

– *510. Enseignant : Alors comment vous avez fait pour montrer ?*
– *511. Philinte : Bah euh. . . , on enlève les parenthèses.*
– *512. Enseignant : Alors t'enlèves les parenthèses donc pour toi les parenthèses ça change rien, qu'on les mette ou qu'on les mette pas.*

. . .

– *521. Oulianne : Non, pour les priorités.*
– *522. Enseignant : Oui, pour les priorités de calcul. Là, ça veut dire quoi en fait. Qui est-ce qui est au carré ?*
– *523. Melina : C'est bah, c'est le a.*
– *524. Enseignant : C'est que le a.*
– *525. Jocelin : Non le 2.*
– *526. Philinte : Bah oui c'est le a.*
– *527. Enseignant : Bah justement, pourquoi on a mis des parenthèses ?*
– *528. Enseignant : Pourquoi on a mis des parenthèses, justement ?*

Égalité $a(a + 2) = a^2 + 2$**.**

Réponse	Faux	Faux	Vrai	Vrai/Faux
Justification	Test numérique	Preuve algébrique	Règle incorrecte	Ordre légal
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}
Copies	3	2	0	1

Pour la majorité des élèves cette égalité est fausse. Certains donnent un test numérique comme justification. Pourtant, dans la mise en commun (échanges n°590 à n°608), c'est la technique non-attendue de comparaison d'écritures algébriques qui permet de montrer que l'égalité est fausse (τ_{NA-2}). Le développement est évoqué mais aucune propriété algébrique n'est explicitée. L'enseignante évoque la possibilité d'une autre justification en « *remplaçant par un nombre* » mais aucun test numérique n'est effectué.

- *599. Enseignant : T'as développé oui. Donc ça fait a fois ?*
- *600. Florianne : a plus euh a fois 2*
- *601. Enseignant : Oui, et donc ça fait ? Chut !*
- *602. Florianne : a au carré plus euh* $2a$.
- *603. Enseignant : Voilà. Est-ce qu'on était obligé d'utiliser ça pour montrer que c'était faux ?*
- *604. Florianne : Moi j'ai fait comme ça.*
- *605. Enseignant : Oui tu as fait comme ça, je suis d'accord. Marine, retourne toi ! Est-ce qu'on était obligé de faire comme ça pour montrer que c'était faux ? On pouvait utiliser quoi ?*
- *606. Elève : Un nombre.*
- *607. Elève : On remplace par un nombre.*
- *608. Enseignant : Un chiffre, hein, d'accord. A partir du moment où vous trouvez que pour un des chiffres c'est faux, c'est, c'est bon ça fonctionne.*

On peut supposer que la contrainte du temps (huit minutes avant la sonnerie) devient importante et qu'elle écourte les mises en commun. Elle est davantage dans la correction que dans le travail de la technique et du bloc technologico-théorique.

Égalité $a + 3(a + 2) = 4a + 6$.

Réponse	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Vrai/Faux
Justification	Test numérique et preuve	Preuve alg. sans test	Preuve par l'exemple	Règle incorrecte numérique	Ordre légal	Non justifié
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-1}	τ^*_{E-2}	τ_{NA-1}	
Copies	0	0	1	2	0	3

Les productions des élèves montrent que cette égalité a suscité des questionnements mais que la mise en commun n'a pas permis de valider le fait qu'elle est vraie pour toute valeur. Nous donnons un exemple de réponse du type τ^*_{E-2} dans la figure 5.10. La mise en commun (échanges n°650 à n°719) est la seule à faire intervenir le test numérique comme technique pour conjecturer l'équivalence des expressions composant l'égalité. La sonnerie de fin d'heure a retenti avant que la preuve algébrique n'ait pu aboutir. Nous revenons sur cette mise en commun dans les analyses qui suivent.

En conclusion, les élèves convoquent le type de tâches T_{Tester} *Tester si une égalité est vraie* ce qui est une étape est importante vers la construction, au niveau

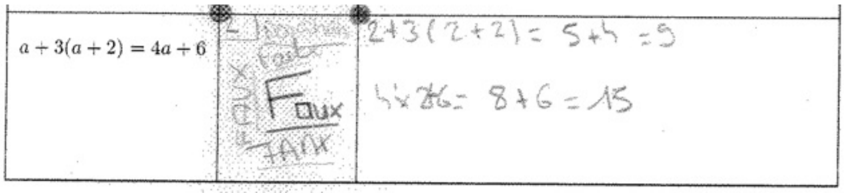


FIGURE 5.10 – Extrait de la copie de Valérie (groupe B)

technologique, de la dialectique entre l'algébrique et le numérique et du statut de la lettre comme variable. Mais, les productions des élèves montrent que la distinction entre test numérique pour conjecturer et contre-exemple numérique pour prouver qu'une égalité est fausse n'est pas encore disponible. Elle est restée implicite dans les mises en commun où la conjecture n'a pas véritablement pu exister. Nous y revenons dans les analyses suivantes. Les échanges avec l'enseignante dans les mises en commun n'ont pas permis de créer une situation de validation et de preuve (au sens de Brousseau). De plus, nous soulignons qu'il n'y a pas eu de retour sur le statut du signe d'égalité. Pourtant, certains élèves (cf. copie de Laure 5.9) écrivent leur calcul en ligne où le signe d'égalité n'est lu que dans le sens gauche-droite. On peut faire l'hypothèse qu'il n'a pas le statut de symbole d'équivalence.

c. Un lancement qui annonce un décalage avec les enjeux didactiques du parcours

Ce parcours s'est déroulé à la suite de la mise en commun du parcours 1. Rappelons qu'il s'est terminé par une synthèse collective dans laquelle une technique de preuve de l'égalité de deux expressions algébriques pour n'importe quelle valeur est institutionnalisée à l'oral mais d'une part sans lien avec la dénotation d'une expression, et, d'autre part, sans lien avec la conjecture numérique. Ce contexte donne des éléments qui expliquent comment l'enjeu du parcours s'est transformé en un réinvestissement de cette nouvelle technique. Garance laisse entendre que l'exercice suivant, qui correspond au parcours 2, porte sur cette nouvelle technique (échanges n°359, n°361et n°369). L'enjeu de l'exercice se retrouve limité à sa consigne « *il faut dire si c'est vrai, c'est faux et expliquer pourquoi* » (échange n°369). Le lien avec les erreurs de calcul n'est pas mentionné. Ce processus de dévolution présente des limites. La consigne donnée restreint l'activité envisagée du côté des élèves et l'étude de raisons d'être à l'équivalence d'expressions.

d. Une conjecture absente dans les mises en commun mais présente dans la synthèse

La majorité des mises en commun ne laisse pas de place au test numérique pour conjecturer, c'est-à-dire que le test numérique est rarement motivé pour conjecturer la vérité de l'égalité (convocation du type de tâches T_{Tester}. La question de la validité de la conjecture et de la recherche d'une preuve algébrique (si c'est vrai pour toute valeur) ou d'un contre-exemple numérique (si c'est faux) n'est donc jamais posée. Garance demande aux élèves si les égalités sont vraies ou fausses, valide puis demande une justification. Souvent, elle valide la bonne réponse si elle est correcte (par exemple extraits ci-dessous) avant de laisser les élèves confronter leurs justifications. Or, les productions des élèves (voir par exemple la copie de Divonne pour l'égalité $(2a)^2 = 4a^2$) et les échanges avec l'enseignante (voir par exemple l'échange n°389) montrent que certains se retrouvent face à leurs erreurs et que l'étape de conjecture est pourtant nécessaire. C'était d'ailleurs l'enjeu du retour au numérique. Ainsi, le test numérique est introduit, lorsqu'il l'est, non pas pour conjecturer mais pour trouver un contre-exemple. En voici deux exemples :

Exemple 1 :
- *431. Enseignant : Qu'est-ce que tu as mis, toi ? Tu as mis que c'était vrai ou faux ?*
- *432. Ina : J'ai mis faux*
- *433. Enseignant :* ***Très bien, pourquoi est-ce que c'est faux ?***
- *434. Ina : Parce que les lettres, on peut pas les additionner avec les chiffres.*

Exemple 2 :
- *559. Enseignant : Ok, alors pour celui-là. Baptiste, qu'est-ce que tu as mis toi ?*
- *560. Baptiste : C'est faux.*
- *561-563. Enseignant :* ***C'est faux pourquoi ?*** *Comment on fait pour justifier ? Chut. Divonne !*
- *564. Baptiste : 3 au carré.*
- *565. Enseignant : Chut, non, c'est juste que je dis ton prénom parce que j'aimerais bien que tu te taises. Baptiste.*
- *566. Baptiste : Parce que, euh, a au carré ça fait a [inaudible]*
- *567. Enseignant : Oui, alors pourquoi. Comment tu vas faire pour me montrer que cette égalité est fausse ?*
- *568. Baptiste : Bah c'est faux.*
- *569. Enseignant :* ***Bah oui c'est faux. Alors pourquoi c'est faux****. Tu peux essayer avec quoi, Baptiste ? Qu'est-ce qu'on a dis juste avant ?*

La formulation et la validation d'une conjecture n'ont donc pas de place dans les échanges ce qui a des conséquences importantes sur le niveau technologique auquel se situe le travail. En effet, comme les mises en commun portent uniquement sur la preuve, cela ouvre la possibilité de rester au niveau des écritures algébriques et d'avoir recours à des justifications d'ordre légal. Or, comme nous l'avons montré dans le paragraphe 5.2.1, Garance a souvent recours à ces justifications, ce que nous n'avions pas anticipé dans l'entretien préalable pour préparer les parcours. Dans l'extrait suivant, une justification d'ordre légal est acceptée même si Garance tente d'en montrer des limites :

- *428. Enseignant : D'accord, donc là tu me donnes une justification. On n'a pas le droit d'additionner les lettres avec les chiffres, c'est* $3a$*. Chut Anne. Donc on n'a pas le droit d'additionner le nombre avec la lettre.*
- *429. Enseignant : Chut. Chloé. On a dit qu'une justification c'était quoi aussi. Ah euh Ina.*
- *430. Ina : [inaudible]*
- *431. Enseignant : Qu'est-ce que tu as mis, toi ? Tu as mis que c'était vrai ou faux ?*
- *432. Ina : J'ai mis faux*
- *433. Enseignant : Très bien, pourquoi est-ce que c'est faux ?*
- *434. Ina : Parce que les lettres, on peut pas les additionner avec les chiffres.*
- *435. Enseignant : Ok, donc ça c'est une première justification. Mais, là, par rapport à ce qu'on a fait juste avant. Comment on va faire pour justifier ça, là ?*

Les conditions mises en place par l'enseignante ne permettent pas au milieu prévu *a priori* de fonctionner. Les objectifs du parcours s'en retrouvent dénaturés et l'explicitation des erreurs de calcul oubliées. Pourtant, l'analyse des productions des élèves et les interactions avec l'enseignante (échanges n°487) montrent que les élèves ont recours à des tests numériques mais l'organisation des mises en commun ne les conduit pas à la validité d'une conjecture. Ces tests ont offert des occasions de décourager la technique de preuve par l'exemple que Garance n'a pas utiliées (échanges n°487, n°498 et n°552 à n°555).

Dans la synthèse, l'idée d'un test numérique pour conjecturer apparaît :

- *721. Enseignant : Baptiste, qui est-ce qui peut me réexpliquer ce qu'on doit faire pour m'expliquer qu'une égalité est vraie ou fausse.*
- *722. Divonne : On remplace par un chiffre.*
- *723. Enseignant : Alors, Divonne ?*
- *724. Enseignant : On remplace par un chiffre. Ça nous donne quoi ?*
- *725. Enseignant : Si tes deux valeurs elles sont égales, qu'est-ce que ça veut dire ?*
- *726. Divonne : C'est vrai.*
- *727. Enseignant : Ça veut forcément dire que ton égalité est toujours vraie pour n'importe quelle valeur ?*

Mais la conjecture arrive trop tardivement, le statut du test numérique pour conjecturer reste implicite. La remarque de Divonne (échange n°726) laisse supposer que, pour certains élèves, c'est la technique de preuve par le numérique qui domine.

e. Un travail sur les erreurs de calcul oublié

L'absence de conjecture ne permet pas un travail sur les erreurs de calcul. Il n'est quasiment jamais présent dans les mises en commun notamment parce que l'enseignante a recours à des formulations d'ordre légal qui masquent les propriétés du calcul algébrique et les priorités opératoires. En voici un exemple :

- *518. Enseignant : Donc les parenthèses, ça sert que quand les chiffres sont négatifs.*
- *519. Elève : Non*
- *520. Philinte : Non*
- *521. Oulianne : Non, pour les priorités.*
- *522. Enseignant : Oui, pour les priorités de calcul. Là, ça veut dire quoi en fait. Qui est-ce qui est au carré ?*
- *523. Melina : C'est bah, c'est le a.*
- *524. Enseignant : C'est que le a.*
- *525. Jocelin : Non le 2.*
- *526. Philinte : Bah oui c'est le a.*
- *527-529. Enseignant : Bah justement, pourquoi on a mis des parenthèses ? Pourquoi on a mis des parenthèses, justement ? Pourquoi on a mis des parenthèses, est-ce que c'est que le a qui est entre parenthèses ? Ça veut dire que c'est le deux hein.*

Pourtant, d'après les interactions entre Garance et ses élèves pendant la recherche individuelle, les expressions choisies permettent bien aux erreurs d'exister (voir aussi échange n°487).

- *400.Enseignant : Vas-y Anne. Est-ce que c'est ou faux ça, pour toi ?*
- *Anne : Euh, c'est faux.*
- *Enseignant : Pourquoi ?*
- *Anne : Parce que 7a c'est a7.*
- *Enseignant : Et c'est quoi a7 ?*
- *Anne : [inaudible]*
- *Enseignant : Alors vas-y mets et puis explique ça.*
- *Anne : C'est ça ?*
- *Enseignant : Non. a7 ou 7a. 7a, Ça veut dire quoi comme opération ? [...]*
- *Anne : 4 plus 3, 4 plus 3 c'est 7*
- *Enseignant : hum*
- *Anne : Il faut enlever le a*
- *Enseignant : Où ça ?*
- *Anne : Là, là.*
- *Enseignant : Donc en fait pour toi ça ferait 4 plus 3 égal 7 ? Il y a un a en fait, hein donc c'est plus exactement les mêmes euh...*
- *Anne : Bah, c'est vrai alors.*
- *Enseignant : Bah mets vrai alors et essaye d'expliquer pourquoi.*

Mais les difficultés rencontrées individuellement par les élèves ne sont pas traitées publiquement. L'enjeu de la séance est modifié. Il s'agit d'appliquer la technique de preuve institutionnalisée quelques minutes auparavant (échanges n°387, n°388, n°398 et n°406).

f. Pourquoi la conjecture a-t-elle pu exister dans la mise en commun de l'égalité $a + 3(a + 2) = 4a + 6$?

En fait, le recours au numérique pour conjecturer existe, une fois, dans la mise en commun de l'égalité $a+3(a+2) = 4a+6$. Qu'est-ce qui a permis à la conjecture d'exister dans cette mise en commun ?

Commençons par donner quelques éléments sur le contexte. $a+3(a+2) = 4a+6$ est la dernière égalité. La fin de l'heure est proche. La contrainte de temps est forte pour l'enseignante. Il reste moins de trois minutes et trente secondes pour traiter la dernière égalité et la synthèse. Comme cette égalité est vraie pour toute valeur de la lettre, nous ne nous attendons pas à un recours au numérique mais plutôt à un développement. D'ailleurs, jusqu'à présent, bien que les égalités soient fausses et que le test numérique apparaisse dans les copies, les mises en commun du groupe B n'y ont pas eu recours. Garance a validé les égalités fausses par des justifications d'ordre légal et des comparaisons d'écritures algébriques.

Il se trouve que c'est la première égalité pour laquelle les élèves donnent une réponse incorrecte. L'égalité est vraie mais les élèves la pensent fausse. Philinte propose une justification par une règle d'ordre légal :

- *659. Enseignant : Alors, vous avez mis quoi, vous ?*
- *660. Philinte : Faux. Parce que $a + 3$ ça fait pas $4a$.*

La justification donnée par Philinte laisse supposer qu'il ne prend pas en compte la hiérarchie des opérations dans sa lecture de l'expression et qu'il effectue les calculs de gauche à droite. L'enseignant laisse de côté la proposition de Philinte et propose de tester pour $a = 2$ sans motivation. Malgré un incident dans le calcul numérique (cf. échange 674), une conjecture peut alors exister quelques instants :

- *689. Enseignant : Alors est-ce que ça veut dire que c'est vrai ?*
- *691. Élèves : Non*
- *692. Enseignant : Non hein. Ça veut pas forcément dire que c'est vrai mais en tout cas pour cet... euh, pour cette valeur-là, c'est vrai. Du coup, qu'est-ce que ? Tout le monde a mis que c'était faux là ?*
- *693. Élèves : Oui.*

Mais ce test n'a pas permis à Philinte de comprendre les limites de sa justification, ce qui oblige Garance, pour la première fois, à rappeler les priorités opératoires :

- *700. Enseignant : Pourquoi c'est faux ?*
- *701. Philinte : Parce que si on fait 1+3 ça fait 4 mais on peut pas faire euh... 4a.*
- *702. Enseignant : Très bien, ok, alors 1+3 ça fait 4 mais qu'est-ce qu'il y a comme opération, entre le 3 et la parenthèse ?*
- *703. Elève : Un fois.*
- *704. Enseignant : Et c'est quoi, la priorité opératoire ?*
- *705. Elève : La multiplication.*
- *706. Philinte : [inaudible]*
- *707. Enseignant : C'est quoi, tu fais d'abord l'addition ou d'abord la multiplication ?*
- *708. Elève : La multiplication.*
- *709. Philinte : La multiplication.*
- *710. Enseignant : D'accord. Donc c'est pour cela que tu n'as pas le droit de faire 1 plus 3, hein.*

– *711. Enseignant : D'accord ou pas ? Cette égalité, elle est vraie, alors pourquoi elle est vraie ?*

Mais le caractère trop occasionnel du travail à ce niveau technologique ne lui donne pas un statut valide au regard des élèves ce qui amène à nouveau Garance à valider la réponse alors que les élèves restent persuadés du contraire. La conjecture a déjà disparu.

– *711. Enseignant : D'accord ou pas ? Cette égalité, elle est vraie, alors pourquoi elle est vraie ?*
– *712. Philinte : Elle est vraie ?*
– *713. Enseignant : Oui, elle est vraie. On se sert de quoi ?*
– *714. Philinte : Alors là je sais pas du tout.*

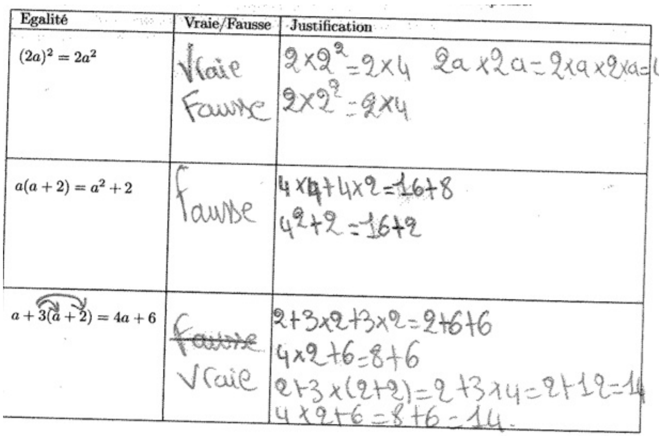
La sonnerie retentit ce qui ne permet pas d'aller au bout de la justification.

Nous mettons en perspective cette analyse avec les productions des élèves sur cette question. Le nombre de réponses incorrectes y est important (les élèves répondent faux) ce que le parcours et les conditions mises en place par l'enseignant n'ont pas permis de travailler au niveau technologique attendu. De plus, notons que les élèves ont rarement rencontré des expressions de structure autre que $k(a + b)$ pour appliquer la distributivité.

g. Conclusion de l'analyse *a posteriori* du parcours 2

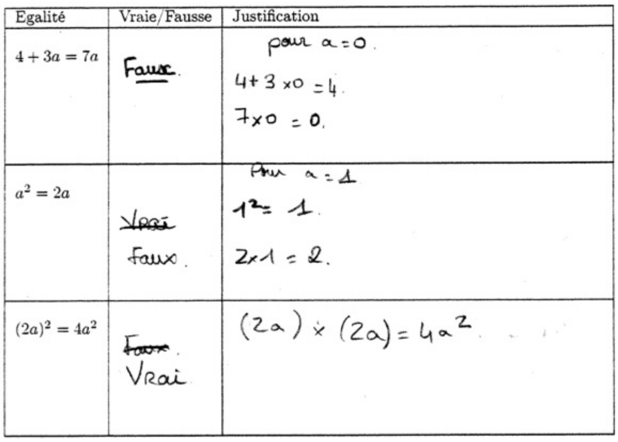
En conclusion, nous revenons sur l'objectif du parcours. A-t-il permis de revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions à partir de leur équivalence ? Oui et non, la réponse est nuancée. Certes, notre analyse met en évidence que le parcours n'a permis de revenir sur les erreurs de calcul des élèves lors des mises en commun collectives notamment en raison des conditions mises en place par l'enseignante. Néanmoins, des ratures sur Vrai ou Faux dans les productions des élèves (voir les copies d'Oulianne, figure 5.11 et de Chloé, figure 5.12) et les quelques interactions entre Garance et ses élèves pendant la recherche individuelle montrent que le parcours a soulevé des questionnements et des hésitations chez les élèves. Partir de la question de l'équivalence des expressions présente donc de réelles potentialités pour travailler sur les erreurs de calcul. D'où notre questionnement, quelles modifications apporter dans les choix d'organisation de la situations ? L'usage d'un tableau pourrait-il favoriser la construction du bloc technologico-théorique visé ?

Premièrement, il nous semble intéressant de revenir sur les choix de Garance concernant les éléments du milieu. Seuls le registre des écritures numériques a été utilisé puisqu'elle n'a pas retenu l'utilisation de schéma de calcul et du tableur. Cela n'a permis de revenir sur les erreurs de calcul, le rôle des opérateurs et leur



Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$	Vraie Fausse	$2\times2^2=2\times4$ $2a\times2a=2\times a\times2\times a=($ $2\times2^2=2\times4$
$a(a+2) = a^2+2$	Fausse	$4\times4+4\times2=16+8$ $4^2+2=16+2$
$a+3(a+2) = 4a+6$	~~Fausse~~ Vraie	$2+3\times2+3\times2=2+6+6$ $4\times2+6=8+6$ $2+3\times(2+2)=2+3\times4=2+12=14$ $4\times2+6=8+6=14.$

Figure 5.11 – Extrait de la copie d'Oulianne (groupe B)



Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4+3a=7a$	Fausse.	pour $a=0$. $4+3\times0=4$. $7\times0=0$.
$a^2=2a$	~~Vrai~~ Faux.	Pour $a=1$ $1^2=1$. $2\times1=2$.
$(2a)^2=4a^2$	~~Faux~~. Vrai	$(2a)\times(2a)=4a^2$.

Figure 5.12 – Extraits de la copie de Chloé (groupe C)

hiérarchie. Dans quelle mesure le recours aux schémas de calcul et au tableur aurait-il pu davantage orienter le travail vers le niveau technologique visé ? Il semblerait pertinent de tester à nouveau ce parcours avec un milieu plus riche.

Deuxièmement, nous proposons plusieurs pistes relevant du choix de l'énoncé et des précisions à apporter dans le déroulement.

- préciser davantage les enjeux de la conjecture numérique aux enseignants et les limites des formulations d'ordre légal. Cela n'a probablement pas suffisamment été la cas lors de la réunion préparatoire avec l'enseignante. Le déroulement a été évoqué à l'oral avec l'enseignant ce qui représente certainement une faiblesse méthodologique de notre travail ;
- partir de production des élèves pour recentrer le travail sur les erreurs de calcul ;

- concevoir une version informatique de l'exercice afin d'utiliser les outils de représentation graphique et de tableur pour enrichir le milieu. Nous y revenons dans la conclusion des expérimentations.

Troisièmement, nous insistons sur le fait que c'est sur le caractère répétitif d'un travail sur les égalités vraies ou fausses qui peut permettre, sur le long-terme, de déstabiliser les erreurs de calcul et d'amener les élèves à travailler la flexibilité sous-jacente à travailler sur les aspects procédural et structural des expressions et sur la dialectique entre l'algébrique et le numérique. Garance a réinvesti l'énoncé de ce parcours dans plusieurs moments de rappel mais nous faisons l'hypothèse que le discours technologique davantage porté sur les écritures algébriques et les formulations d'ordre légal que sur le recours au test numérique et la validation du test par une démarche de preuve.

Nous présentons maintenant les choix de Garance sur le parcours 3 et l'analyse *a posteriori*.

5.2.7 Parcours 3 : les choix de Garance

Le parcours 3 s'intitule « Étudier des expressions équivalentes ». Ce parcours convoque le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* mais dans un objectif didactique différent du parcours 2. La tâche est la suivante : trois expressions sont données, lesquelles sont égales pour n'importe quelle valeur ? Il vise à donner des raisons d'être à la transformation des expressions et au fait qu'on puisse choisir la plus adaptée au but visé. Il s'agit de construire la dénotation des expressions comme un élément du bloc technologico-théorique pour guider la conduite du calcul algébrique. L'analyse *a priori* est présentée dans le chapitre 4 au paragraphe 4.3.4.

Ce parcours est proposé à l'étape d'entraînement des connaissances en cours d'acquisition. Après avoir présenté les énoncés retenus par Garance, nous présentons ses choix concernant les variables didactiques, les éléments du milieu et le déroulement.

a. Énoncés

Énoncé du groupe C

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2			
3			
0			

1. *Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?*

2. *Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.*

3. *Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?*

Une aide méthodologique est disponible :

– *Pour démontrer que* ***deux expressions « ne sont pas égales »*** *, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.*
– *Pour démontrer que* ***deux expressions « sont égales pour tout** x **»*** *, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, pense à* ***utiliser les propriétés*** *suivantes. Pour tout a, b, c et d :*
· *la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$*
· *la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$*
· *l'identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$*
· *l'identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$*
· *l'identité remarquable : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$*

Énoncé du groupe B

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
– $A(x) = (x - 1)^2 - 4$
– $B(x) = (x + 1)(x - 3)$
– $C(x) = x(x - 2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1			
-1			
0			

1. *Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?*

2. *Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.*

3. *Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?*

L'aide est identique à celle du groupe C.

b. Le choix de limiter les enjeux didactiques à la première phase du parcours

Initialement, l'objectif de ce parcours est double. Il s'agit d'une part d'amener les élèves à appréhender le fait que deux expressions peuvent dénoter le même objet et, d'autre part, qu'on peut utiliser l'une ou l'autre en fonction du but visé. La trame commune des énoncés de chaque groupe que nous lui avons proposé est la suivante :

- Phase 1 : étudier des expressions équivalentes en convoquant le type de tâches est $T_{Prouver-equiv}$,
- Phase 2 : travailler avec des expressions équivalentes en convoquant le type de tâches est $T_{Choisir}$.

Pour des questions de gestion de temps, Garance a choisi de centrer le parcours sur la phase 1. Seul le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est convoqué. Comme prévu *a priori*, c'est la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ de conjecture puis de preuve qui est retenue.

Pour chaque groupe, deux expressions parmi les trois proposées sont équivalentes. L'énoncé est découpé en trois questions. Les deux premières questions portent sur la conjecture de l'équivalence des expressions. Il est demandé de tester les expressions pour deux valeurs numériques choisies (question 1) de telle sorte qu'elles renvoient le même nombre. Les élèves sont amenés à conjecturer l'égalité des expressions pour tout x. Puis, un troisième test numérique (question 2) permet d'éliminer une des expressions et de formuler une nouvelle conjecture. La troisième porte sur la validation de cette conjecture par une preuve algébrique pour les expressions équivalentes et par une preuve par le contre-exemple mis en évidence à la question 2 pour l'expression non équivalente. Un développement comme une factorisation sont envisageables pour montrer l'équivalence des deux expressions (question 3) mais la majorité des élèves choisira probablement le développement. Les genres de tâches *Développer* et *Factoriser* interviennent au niveau r-convoqué. Cette question développe l'intelligence du calcul. Le reconnaissance de la propriété et de la transformation à effectuer sont à la charge de l'élève.

c. Choix sur les variables didactiques et les éléments du milieu

Garance est intervenue sur le choix des expressions. Elle a souhaité que, dans chaque groupe, au moins une l'expression qui fasse intervenir une identité remarquable, propriété qui vient d'être rencontrée. C'est pourquoi, la première expression de l'énoncé est de même structure dans les deux groupes. Notons que les expressions sollicitant des identités remarquables rencontrées jusqu'à présent sont du type

$(a + b)^2$. Les élèves auront donc à reconnaître la structure d'une expression non standard par rapport à ce qui leur est habituellement demandé ce qui représente une difficulté non négligeable.

Elle est aussi intervenue sur les changements de cadre et les registres convoqués. La notion de fonction étant trop éloignée pour le moment, elle n'a pas retenu le passage au cadre fonctionnel. En revanche, elle a retenu le passage au registre des écritures numériques. Mais, pour les raisons identiques à celles du parcours 2, elle n'a pas retenu le passage au schéma de calcul et l'utilisation d'un tableur. Seul un tableau de valeurs à remplir par les élèves dans l'énoncé sera proposé pour amener les élèves à travailler sur la dénotation des expressions.

L'aide constructive est située au verso de l'énoncé. Elle a prévu de solliciter son utilisation aux élèves principalement pour la question 3.

d. Modalités de travail

Comme pour les parcours 1 et 2, les élèves du groupe C sont répartis sur deux rangées et ceux du groupe B sur une rangée. Les élèves du même groupe travaillent en binôme mais chacun propose sa propre production.

e. Éléments de déroulement

Garance a prévu de passer une séance entière sur ce parcours. Notons, que les élèves ont rencontré à plusieurs reprises l'OM ponctuelle relative au type de tâches $T_{Prouver-equiv}$.

Comme pour les parcours précédents, nous n'avons probablement pas suffisamment envisagé le déroulement dans ses détails avec Garance. Les points suivants ont été discutés :

- le recours au test numérique pour revenir sur l'aspect procédural des expressions et le rôle des opérateurs et pour conjecturer l'équivalence des expressions et fournir des contre-exemples,
- le fait d'insister sur la quantification pour mettre en avant qu'un exemple ne suffit pas pour remettre en question la preuve par l'exemple et conduire à la nécessité d'une preuve algébrique faisant référence aux propriétés du calcul.

Garance a prévu des temps de recherche en binôme au cours desquels elle circule dans les rangs pour s'assurer que les élèves ont bien saisi l'enjeu du problème. Des mises en commun pour chaque groupe sont prévues pour confronter les solutions des élèves. Il est prévu que seul le moment d'institutionnalisation s'adresse à la classe. Son contenu a été discuté à partir de ce qui est écrit dans l'analyse *a priori* ($\tau_{Prouver-equiv-3}$).

Nous avons présenté l'analyse *a priori* de ce parcours et les choix de Garance. Nous présentons maintenant son analyse *a posteriori*.

5.2.8 Analyse *a posteriori* du parcours 3

Le parcours 3 s'est déroulé sur la séance différenciée numéro 3. Sa transcription et des copies d'écran du tableau sont dans l'annexe E. Des copies d'élèves sont présentées dans l'annexe D.

D'abord, nous présentons la trame simplifiée de la séance concernant le parcours 2. Ensuite, nous présentons l'analyse des productions des élèves. Puis, nous analysons les échanges entre Garance et ses élèves pour faire le lien avec les productions des élèves.

a. Trame simplifiée

Le parcours s'est déroulé sur une séance de quanrante-deux minutes. La trame simplifiée du déroulement est présentée dans le tableau 5.6.

Étape	Échanges	Groupe	Durée
Lancement	1 à 35	B et C	3'15"
Recherche individuelle Q1	36 à 195	B et C	13'15"
Mise en commun Q1	195 à 232	B	3'
Mise en commun Q1	233 à 246	C	1'30"
Recherche individuelle Q2	247 à 344	B et C	6'30"
Mise en commun Q2	344 à 384	B	3'30"
Mise en commun Q2	385 à 460	C	5'30"
Recherche individuelle Q3	460 à 589	B et C	10'
Mise en commun Q3	590 à 644	C	2'30"
Mise en commun Q2	645 à 660	C	1'30"
Synthèse	661 à 672	B et C	1'
Durée totale			41'40

TABLEAU 5.6 – Trame simplifiée du déroulement du parcours 3

Le déroulement en classe correspond à celui prévu. La durée des phases de recherches individuelles et de mises en commun semble équilibrée. Comme dans les autres parcours, l'enseignante distingue les mises en commun des deux groupes, seuls le lancement et la synthèse s'adressent à la classe. Cette gestion de classe a-t-elle permis de travailler les objectifs prévus ? Nous commençons par analyser les productions des élèves.

b. Analyse des productions des élèves

Nous disposons de onze copies du groupe C et de sept copies du groupe B, soit un total de dix-huit copies.

Pour les calculs numériques (questions 1 et 2), nous indiquons si la réponse est correcte (C), incorrecte (I), correcte incomplète (CI), partiellement correcte (CP, une partie de la réponse est incorrecte) ou si l'élève n'a pas répondu (NR).

Pour analyser des conjectures (questions 1 et 2) proposées, nous relevons si la conjecture porte sur l'équivalence des expressions ou non. Pour la question 2, nous indiquons la précision de la conjecture relativement à l'équivalence des trois expressions : l'élève précise-t-il si $A = B$, si $C \neq A, C \neq B$, si la première conjecture est fausse ou si les expressions ne sont pas égales ?

Pour l'analyse de la question 3, trois critères sont analysés en lien avec les techniques attendues, non attendues ou erronées prévues dans l'analyse *a priori* :

1. la preuve de $C \neq A$ et de $C \neq B$. Nous distinguons si l'élève donne une justification avec un contre-exemple (τ_A), avec une comparaison d'expression (τ_{NA-2}), s'il ne justifie pas sa réponse ou s'il ne répond pas (NR) ;
2. la preuve de $A = B$. Nous distinguons si l'élève propose une preuve algébrique (τ_A) ou s'il propose une preuve par l'exemple (τ_{E-1}) ou s'il ne justifie pas sa réponse ou s'il ne répond pas (NR) ;
3. la phrase de conclusion. Nous distinguons si elle est quantifiée, si elle ne l'est ou si l'élève ne répond pas (NR).

Nous présentons les résultats obtenus et les commentons.

Question 1

Q1	Groupe C	Groupe B	Total
Calculs numériques			
C	10	5	15
CP	1	2	3
Conjecture			
$A = B = C$	6	6	12
NR	5	1	6

Question 2

Q2	Groupe C	Groupe B	Total
Calculs numériques			
C	10	5	15
CP	1	2	3
Conjecture			
$A = B, C \neq A, C \neq B$	5	4	9
$1^{\text{ère}}$ conjecture fausse	1	2	3
Expressions non égales	1	0	1
NR	4	1	5

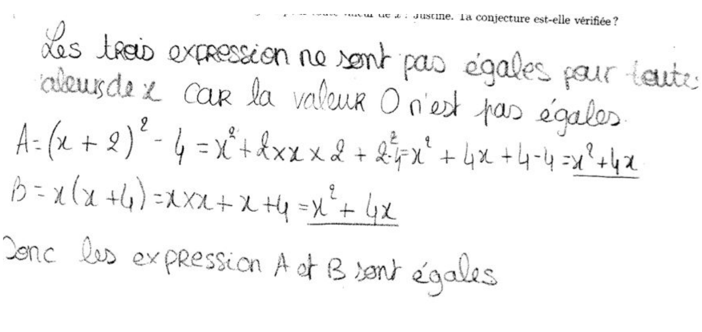
Dans les questions 1 et 2, les calculs numériques reçoivent un taux de réussite fort qui peut s'expliquer par l'utilisation de la calculatrice. Deux tiers des élèves proposent des conjectures correctes, plus ou moins précises mais en lien avec l'équivalence des expressions. Pour le tiers des élèves qui n'écrit pas de conjecture, nous pouvons faire deux hypothèses pour l'expliquer. Soit ces élèves n'ont pas compris l'enjeu des calculs numériques, soit cette absence de réponse relève d'une analyse en terme de contrat didactique. En effet, Garance laisse peu de place à l'écrit dans ses mises en commun. Elle interroge plusieurs élèves qui confrontent leurs solutions à l'oral et le plus souvent sans traces écrites. À l'issue des mises en commun, les conjectures sont formulées à l'oral sans toujours être écrites.

Question 3

Q3	Groupe C	Groupe B	Total
$C \neq A$ et $C \neq B$			
Contre-exemple	5	1	6
Preuve algébrique	0	0	0
Non justifié	1	2	3
NR	5	4	9
$A = B$			
Preuve algébrique	8	6	14
Preuve numérique	0	0	0
Sans preuve	0	0	0
NR	3	1	4
Phrase de conclusion et quantification			
Quantifiée	5	1	6
Non quantifiée	1	2	3
Pas de conclusion	5	4	9

Nous illustrons les productions des élèves sur la question 3 par les trois extraits suivants :

- la copie de Laure du groupe C (cf. figure 5.13) qui propose un contre-exemple pour $C \neq A$ et $C \neq B$, une preuve algébrique pour $A = B$ et une phrase de conclusion quantifiée incorrectement,
- la copie de Mélina du groupe B (cf. figure 5.14) qui mentionne $C \neq A$ et $C \neq B$ sans le justifier et qui propose une preuve algébrique pour $A = B$ et une phrase de conclusion quantifiée incorrectement,
- la copie de Philinte du groupe C (cf. figure 5.15) qui propose un contre-exemple pour $C \neq A$ et $C \neq B$, une preuve algébrique incorrecte pour $A = B$ et une phrase de conclusion non quantifiée.


justifie. La conjecture est-elle vérifiée ?

Les trois expression ne sont pas égales pour toutes valeurs de x car la valeur 0 n'est pas égales.

$A = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = \underline{x^2+4x}$

$B = x(x+4) = x \times x + x + 4 = \underline{x^2 + 4x}$

Donc les expression A et B sont égales

FIGURE 5.13 – Extrait de la copie de Laure

Dans un tiers des copies, les élèves justifient le fait que l'expression C n'est égale ni à A et ni à B par l'utilisation d'un contre-exemple numérique (cf. figures 5.13 et 5.15). La majorité des élèves donnent une preuve algébrique même si elle n'aboutit

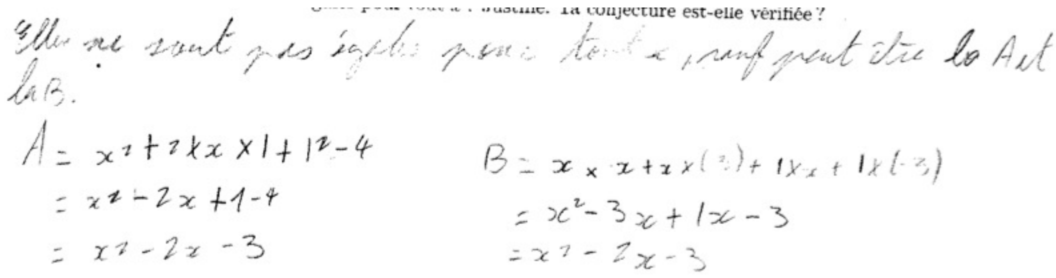


FIGURE 5.14 – Extrait de la copie de Mélusine

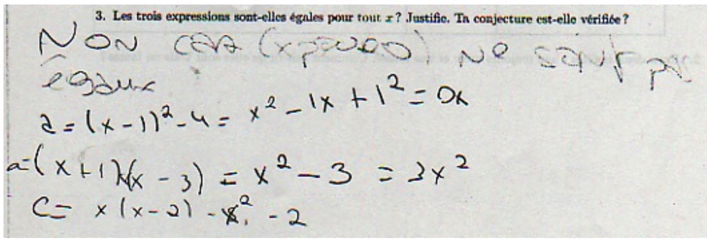


FIGURE 5.15 – Extrait de la copie de Philinte

pas toujours. La moitié des élèves ne concluent pas l'exercice ce qui peut être mis en relation avec la place de l'écrit dans le contrat didactique instauré par l'enseignante. La moitié des élèves qui concluent quantifient leur réponse (souvent de manière incorrecte « elles ne sont pas égales pour tout x »).

c. Lancement de séance

L'objectif de la séance est rapidement évoqué « *On va travailler encore sur les expressions égales* » (échange n°2) et Garance fait un rappel de la technique τ_A, même si les mots « conjecture » et « contre-exemple » n'apparaissent pas, toutes les étapes de la techniques (conjecture numérique puis preuve) sont présentes.

Pour démarrer l'exercice, la consigne est reformulée. L'accent est mis sur la substitution par des valeurs numériques mais l'enjeu de cette substitution est absent dans les interactions. La question centrale de l'exercice, « les expressions sont-elles égales pour tout x ? », n'est pas dévoluée aux élèves. Le milieu sera-t-il suffisamment riche pour les y amener ?

d. Un milieu qui permet à la conjecture d'exister

Dans un premier temps, les calculs sont menés « à la main » et s'avèrent rapidement fastidieux. Les erreurs caractéristiques du groupe C apparaissent. L'erreur de concaténation (échange n°57), le non respect du rôle des parenthèses (échanges n°41 et n°146) et le non respect de la hiérarchie des expressions (échange n°108) sont visibles dans les interactions. Comme à son habitude, Garance les contourne avec des justifications d'ordre légal.

– *41. Enseignant : Par 2. Alors vas-y, montre-moi ! C'est parfait. Donc 2 plus 2, vas-y, écris-le. Voilà ! [...] 2 plus 2, tu mets des parenthèses, sinon ça veut pas dire la même chose, s'il y a pas des parenthèses. Alors maintenant, tu calcules. 2 plus 2 dans les parenthèses, ça fait quoi ?*

[...]
– *106. Enseignant : Pourquoi ça fait 0 ?*
– *107. Baptiste :Bah on fait 2 plus 2, ça fait 4. Puis 4 moins 4.*
– *108. Enseignant : Bah non, puisque il y a le carré d'abord. Donc le carré, ça veut dire quoi, comme opération ?*

[...]
– *141 Enseignant : D'accord, donc alors, ça fait 3 facteur de 3 plus 4. Vas-y. Alors, ça fait quoi ?*
– *142 Mohamed : 3 fois 3.*
– *143 Enseignant : Alors, tu peux d'abord calculer ce qu'il y a dans la parenthèse, hein. [...] Ouais. Donc ça fait 3 fois 7. Ouais, c'est ça, 21. Donc ton 21, il est où ?*
– *144 Mohamed : Là.*
– *145 Enseignant : Non, ça c'est $B(x)$ que tu as calculé là, donc $B(x)$ pour 3... donc il y est là !*
– *146 Gabrielle : On est obligé de calculer d'abord la parenthèse ?*
– *147 Enseignant : Ouais, toujours. C'est d'abord les parenthèses. Après, il faut que tu calcules $A(x)$ pour x égal 3. Et $B(x)$ pour x égal 2. Tu vois, il faut que tu complètes ça et ça. Et ça aussi et $C(x)$.*
– *148 Enseignant : Vous avez le droit d'utiliser votre calculatrice, hein !*

Mais la chronogenèse ne lui permet pas de revenir sur l'ensemble des calculs numériques (dix-huit en tout). Elle enrichit le milieu de la calculatrice (échange n°148) pour décharger les élèves d'une partie des calculs numériques ce qui favorise un recentrage de leur activité vers les objectifs du parcours. Ainsi, le choix de valeurs numériques appropriées, le tableau de valeurs et la calculatrice favorisent une évolution de l'activité des élèves. Jusqu'alors centrés sur la tâche simple et isolée de substitution, ils sont étonnés du fait que des expressions « différentes » renvoient ou pas le même nombre pour la même valeur substituée. En voici deux exemples :

– *150. Chloé ou Anne : **Mais Madame, en fait, ça doit donner le même résultat partout ?***
– *151. Enseignant : Ah bah. Il y a des fois où ça [...]*
– *152. Enseignant : [À Yann] Ok. Alors, tu as trouvé combien, là ? 12, 12, 12. Et là, 21, 21, 21. Donc a priori, qu'est-ce qu'on pourrait dire, alors ?*
– *153 . Yann : Que les ? elles... , ils sont tous égaux.*
– *154 .Enseignant : Ouais, que les expressions, elles sont égales.*
– *155 . Yann : Mais je sais pas.*
– *156 . Enseignant : Mais a priori tu peux dire... Comment tu pourrais dire que les expressions, elles sont égales ?*

[...]
– *255. Enseignant : Oui, Mélusine !*

- *256. Philinte : On a trouvé* -2.
- *257. Mélusine :* ***Personne a trouvé*** -2 ***au troisième. Personne a trouvé pareil.***

La conjecture peut exister et évoluer parce le milieu a permis un travail sur la dénotation. Néanmoins, le terme de « conjecture » est quasiment absent des mises en commun. Il apparaît dans quelques échanges privés avec Garance où ses élèves lui demande une définition (échanges n°271 et n°307). Elle a recours à formulation du type « *a priori, qu'est-ce que vous pouvez en penser ?* » qui montre une certaine réticence à utiliser le terme de « conjecture ».

- *271. Enseignant : 3,* -1*, ça fait 2 et 2 moins 2, ça fait 0. Donc du coup, là on peut euh... conjecturer que les égalités, elles sont égales.*
- *272. Mélusine : Madame ! Conjecturer, ça veut dire supposer ?*
- *273. Enseignant : Ouais, c'est exactement ça . On peut supposer.*

[...]

- *305. Enseignant : Vous avez calculé pour x égal 0, là ? [...] Hop ! Vous en êtes où ? Vous avez droit à la calculatrice. Hop ! C'est quand même pas difficile8*
- *306. Marc : Bah... on a calculé.*
- *307. Enseignant : Du coup, est-ce que votre conjecture qu'on a faite tout à l'heure, là... Est-ce que les égalités, elles sont égales ou pas ? Est-ce que les expressions, elles sont égales ?*
- *308. Marc : Non.*
- *309. Enseignant : Non. Ça a l'air d'être lesquelles qui sont égales ?*
- *310. Gabrielle et Marc : Les deux premières.*
- *311. Enseignant : Les deux premières. Alors allez-y, expliquez ça !*

De plus, les productions des élèves montrent que près d'un tiers des élèves n'écrivent pas de conjecture. Nous mettons cette remarque en lien avec le contrat didactique. Garance laisse très peu de trace écrite au tableau des conclusions issues des mises en commun.

Si la conjecture a pu exister, il reste à amener les élèves à la nécessité de la preuve. La quantification y joue un rôle important.

e. De la conjecture à la preuve : le rôle important de la quantification

La quantification joue un rôle primordial pour rendre nécessaire une preuve algébrique ou un contre-exemple numérique suite à la conjecture. Le recours à la quantification permet de travailler au niveau technologique attendu.

Garance y a fréquemment recours, comme le montrent les extraits suivants :

- *242 . Enseignant : Voilà ! A priori, on peut dire que les expressions sont égales. D'accord [...]. Est-ce que c'est forcément vrai ou pas ?*
- *243. Élève : Non.*
- *244. Enseignant : Non, on ne sait pas, hein ! On a juste montré que c'était vrai pour deux valeurs, ça veut pas forcément dire que c'était vrai pour toutes les valeurs. Alors, maintenant, vous calculez pour x égal 0.*

[...]

- *380. Enseignant : Voilà. Donc allez-y, expliquez ça ! Et du coup, votre troisième, c'est quoi ? Il va falloir que vous montriez que ces expressions, elles sont égales pour n'importe quelle valeur. Alors qu'est-ce que vous allez utiliser pour pouvoir montrer que ces expressions, elles sont... ?*

[...]

- *401. Enseignant : Le A et le B. Alors. Comment on va faire pour montrer que c'est vrai pour n'importe quelle valeur ?*

La quantification est aussi un appui pour mettre en évidence les limites du test numérique et de la preuve par l'exemple (limite de τ_{E-1}) :

- *418. Enseignant : Comment tu as fait, Ina, pour montrer... ? Est-ce que le tableau, ça nous permet de dire que les expressions, elles sont égales ?*
- *419. Élève : Non.*
- *420. Ina : Bah oui, parce que [inaudible].*
- *421. Élève : Non. Parce qu'on a pas utilisé la distributivité.*
- *422. Enseignant : Je suis d'accord avec toi. Là on trouve que c'est les trois mêmes valeurs, là on trouve que c'est les trois mêmes valeurs. Mais est-ce que, parce que tu trouves que tes deux expressions, elles sont égales pour trois valeurs, ça veut dire que les expressions, elles sont égales pour toutes les valeurs ?*
- *423. Elèves : Non.*
- *424. Enseignant : Non. Donc comment tu vas faire pour montrer que tes expressions, elles sont égales pour toutes tes valeurs ?*
- *425. Ina : Bah... on les recalcule.*
- *426. Enseignant : On les recalcule encore pour une autre valeur.*
- *427. Ina : Bah oui... bah...*
- *428. Enseignant : Si tu les recalcules encore pour une autre valeur, ça veut dire qu'elles vont être égales pour 4 valeurs. Toi, tu veux montrer qu'elles sont égales pour toutes les valeurs.*

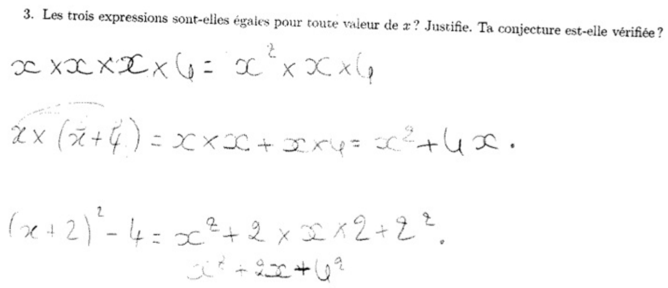
f. Une preuve algébrique difficile à mener

Les élèves ont rencontré de nombreuses difficultés à reconnaître les propriétés à utiliser. Si les élèves ont convoqué le genre de tâches *Développer*, la structure des expressions n'est toujours pas reconnue. Comme nous l'avions souligné dans l'analyse *a priori*, l'expression A est relativement complexe pour des élèves qui n'ont rencontré les identités remarquables que sur des expressions du type $(a+b)^2$. Alors que des élèves du groupe C tentent de « distribuer le 4 » dans $(x+2)^2-4$ (échanges n°533 à n°539 cf. copie d'Ina, figure 5.16), d'autres s'étonnent de la présence de ce -4 :

- *467 . Enseignant : L'identité remarquable, c'est quoi ? C'est a plus b au carré.*
- *468. Yann : Ça fait euh...*
- *469. Chloé : Le -4, on s'en fout ?*

Même l'application de la distributivité simple (échanges n°491 à n°495) et double (échange n°518, cf. copie de Valérie figure 5.17) n'est pas reconnue.

- *491. Enseignant : Ok. Tu as vu ce qu'il y a marqué au tableau ? Tu as vu ce qu'il y a marqué ou pas ? C'est x fois. Toi, ce que tu as marqué, c'est*


3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

$x \times x \times x \times 4 = x^2 \times x \times 4$

$x \times (x+4) = x \times x + x \times 4 = x^2 + 4x.$

$(x+2)^2 - 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2.$

$x^2 + 2x + 4^2$

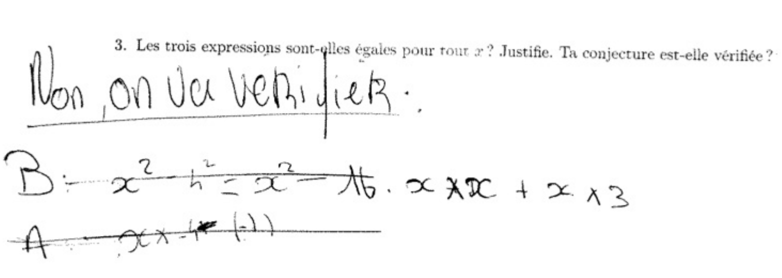
FIGURE 5.16 – Extrait de la copie d'Ina (groupe C)

pas exactement la même chose, hein ! Alors réfléchis. [. . .] x fois x plus 4. C'est ça ton expression, hein ! L'expression, c'est x fois x plus 4.

- *492. Ina : Hum.*
- *493. Enseignant : Ton autre partie, c'est x plus deux au carré moins 4. D'accord ? C'est ça qu'il faut que tu développes. Ça vient d'où, ça ?*
- *494. Ina : Bah. . . c'est ce que j'ai fait. J'ai fait x fois x fois.*
- *495. Enseignant : Ah bah. . . non, il n'y a pas de « fois », là. C'est un plus. Tu vois, ton « fois », tu le distribues quand tu distribues le x. Mais entre les deux, il y a un fois, hein. Alors vas-y ! Refais-le-moi, là.*

[. . . (cf. copie de Valérie)]

- *514. Enseignant : Fais-moi voir ce que tu as fait.*
- *515. Valérie : En fait, j'ai fait euh ? les identités remarquables.*
- *516. Enseignant : Ok. Alors, ça vient d'où, ça ? Le B ?*
- *517. Euh. . . La [inaudible], là.*
- *518. Enseignant : Ah ok ! J'avais pas vu. Bah pour que ce soit. . . Tu vois, l'identité remarquable, il aurait fallu que ce soit le même nombre. Il aurait fallu que ce soit x plus 3. De x moins 3. Là, ce que tu peux utiliser, c'est la double distributivité. C'est pour ça que je vous ai mis l'aide, là.*
- *519. Florianne : Moins fois moins, ça fait plus, Madame ?*
- *520. Enseignant : Moins fois moins ça fait plus, oui !*
- *521. Enseignant : D'accord ou pas ?*
- *522. Valérie : D'accord.*


3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Non, on va vérifier.

B : $\cancel{x^2 \; 4^2 = x^2 \; 16}$. $x \times x + x \times 3$

~~A : x × 4 (-1)~~

FIGURE 5.17 – Extrait de la copie de Valérie (groupe B)

Garance incite les élèves à utiliser l'aide mais qui n'est pas suffisante pour aider à la reconnaissance de la structure et faire le lien avec l'aspect procédural des expressions.

Garance a recours aux formulations d'ordre légal et à la mise en évidence d'ostensifs « *2 plus x c'est pas la même chose que* $2x$. $2x$*, c'est* 2 *fois* x. » (échange n°583).

g. Une synthèse qui oublie la dénotation des expressions

La synthèse est écourtée parce qu'elle a lieu après la sonnerie de fin de séance. Elle n'a lieu qu'à l'oral ; aucune trace écrite n'est produite. Son contenu s'en trouve réduit à une institutionnalisation de la technique de conjecture numérique et de preuve algébrique visant à prouver que deux expressions algébriques (ne) sont (pas) égales pour toute valeur de la lettre. Le contre-exemple et le rôle de la conjecture n'y apparaissent pas ; ainsi, seule une partie de la technique est rappelée. Cette synthèse fait certes écho au lancement de la séance mais elle ne mentionne pas un objectif du parcours.

En effet, il n'y a pas d'élément de synthèse sur la dénotation des expressions. Garance ne fait jamais explicitement le lien entre le fait que des expressions algébriques d'écritures différentes sont égales pour n'importe quelle valeur et que, dans ce cas, elles renvoient au même nombre. Il est possible que l'utilisation du tableur puisse donner davantage de place à la dénotation des expressions.

h. Conclusion sur l'analyse *a posteriori* du parcours 3

Pour conclure, nous revenons sur l'objectif du parcours. A-t-il permis de travailler sur l'équivalence et la dénotation des expressions ? A-t-il permis de mettre en place des raisons d'être sur le rôle de l'équivalence de deux expressions et son rôle dans le calcul algébrique ? Le rôle du milieu et notamment du tableau de valeurs a pu permettre à la conjecture d'exister ; il a pu amener les élèves à la valider par une preuve algébrique pour les expressions équivalentes A et B. De plus, les productions des élèves montrent que, pour un tiers d'entre-eux, le contre-exemple a le statut de preuve pour justifier que deux expressions ne sont pas équivalentes. De ce point de vue, le parcours a permis de travailler au niveau technologique attendu. Cependant, comme nous l'avons souligné, la dénotation des expressions n'a pas été abordée dans la synthèse commune. Le contrat didactique instauré par Garance, favorisant un recours tant aux ostensifs pour conduire les transformations algébriques qu'aux formulations d'ordre légal pour les justifier, n'a pas évolué vers un contrat impliquant les aspects structural et procédural et des références aux propriétés du calcul utilisées. Cela peut justifier les difficultés des élèves à conduire et contrôler leurs transformations algébriques.

Néanmoins, nous avons repéré des évolutions relatives aux technologies « dominantes » utilisées par les élèves entre le premier et le second test.

5.2.9 L'évolutions des technologies « dominantes » utilisées par les élèves sur le moyen terme

Suite au second passage du test Pépite, nous pouvons comparer les évolutions par élève des technologies dominantes utilisées. Pour cela, nous appuyons la comparaison des stéréotypes entre le premier et le second passage du test présentée dans le tableau 5.1. Plusieurs élèves évoluent ; nous en retenons trois : Ina, Michel et Baptiste. Ces trois élèves évoluent du groupe C au groupe B, c'est-à-dire que leur niveau sur la composante CA du stéréotype passe de 3 à 2.

	Michel		**Baptiste**		**Ina**	
Indicateur	**T1**	**T2**	**T1**	**T2**	**T1**	**T2**
MCA	0	0	0	0	0	0
MR	-1	**0**	-1	**0**	0	**1**
IE	0	**1**	0	**1**	0	**1**
JA	-1	-1	-1	-1	-2	**-1**

TABLEAU 5.7 – Évolution des indicateurs entre le premier (T1) et le second (T2) passage du test pour quatre élèves

Nous cherchons à analyser l'évolution des niveaux technologiques utilisés par les élèves pour faire le lien avec les différents aspects travaillés dans les parcours. Pour cela, nous proposons de redescendre au deuxième niveau d'analyse des réponses des élèves dans Pépite. Ce niveau est caractérisé par des indicateurs (cf. §4.1.2 et annexe A). Nous nous intéressons plus précisément à ceux intervenant dans l'algorithme de calcul de la composante CA parce qu'ils informent sur les différents éléments travaillés dans les parcours : équivalence des expressions, aspects procédural et structural, dialectique de l'algébrique et du numérique. Ces indicateurs sont :

- MCA : maîtrise du calcul algébrique,
- MR : maîtrise des règles,
- IE : interprétation des expressions,
- JA : justification algébrique.

Le tableau 5.7 présente les évolutions sur ces indicateurs pour Ina, Michel et Baptiste. Par ailleurs, nous indiquons les réponses au test les plus représentatives de ces évolutions : tableaux 5.8 pour Ina, 5.9 pour Michel, 5.10 pour Baptiste.

Nous commentons les évolutions notables pour chaque élève.

Exercices	Réponse test 1	Réponse test 2
Ex2		
$5^2 \times 5^3 = 5^5$	faux	Vrai car $a^3 \times a^2 = a^{(2+3)} = a^{(5)}$
$a^2 = 2a$	vrai - La puissance de 2 multiplie a par 2. De même pour $2a$.	Faux - $a^2 = a \times a$ et non $a + a$
$a^2 = (2a)^2$	faux - $(2a)^2 = 2^2a^2$	Faux - $(2a)^2 = 2^2a^2$
Ex4		
$a^2a^3 = a^6$	Faux - $3 + 2 = 5$ pour les exposants	Faux - Idem
$a^2 + 4a^3 = 7a^5$	Vrai-Pour $a = 1$, $4 + 3 = 7$	Idem
$a^2 = 2a$	Faux-$a^2 = a \times a$ et non $a + a$	Faux $a^2 = a \times a$ et non $a + a$
$(a + b)^2 = a^2 + b^2$	Faux - $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	Idem
$3a + 5 = 8a$	Vrai Pour $a = 1$	Idem
Ex5 (équation item 2)	$-1/2$	Correct 0 et 1
Ex6	Pas de solution	Correct avec reformulation : $e = 6p$
Ex8	$10x$	Aire premier triangle : $x\times10/2$ avec formule

TABLEAU 5.8 – Comparaison des réponses d'Ina sur quelques exercices

Exercices	Réponse test 1	Réponse test 2
Ex2	3 items corrects	Idem
Ex4		
$a^2a^3 = a^6$	Vrai sans justification	$a^2a^3 = a^6$ faux avec $a^na^m = a^{n+m}$ (cohérence avec ex2)
$a^2 = 2a$	Faux car $a + a$ cést $2a$ et $a^2 = a \times a$	Idem et même justification
$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ car $(a+2)(a+2) = a^2 + 4a + 4$	faux	Idem et même justification
$3a + 5 = 8a$	Vrai Pour a=1, $3 + 5 = 8$	Faux $n + ma \neq (n + m)a$
Ex5 (équation item 2)	Faux -1 et 2	Correct 0 et 1 par substitution
Ex6	Pas de réponse	Correct : e = 6p

TABLEAU 5.9 – Comparaison des réponses de Michel sur quelques exercices

Pour Ina, qui passe du stéréotype CA3 UA3 TA3 au stéréotype CA2 UA3 TA3, les indicateurs IE et MR évoluent. Cela signifie qu'elle interprète davantage les expressions algébriques suivant les aspects procédural et structural et qu'elle adopte davantage de raisonnement par l'algèbre. De plus, ses réponses aux exercices 6 et 8 montrent des évolutions quant à la modélisation et la reformulation de relations

Exercices	Réponse test 1	Réponse test 2
Ex2		
$5^n \times 5^m = 5^{n+m}$	vrai -C'est vrai car : $5^3 \times 5^2 = 5^{(2+3)} = 5^{(5)}$	Vrai car a$^3 \times a^2 = a^{(2+3)} = a^{(5)}$
$a^2 = 2a$	vrai - Le a au carre vaut bien 2 fois a	Faux car $a^2 = a \times a$
$a^2 = (2a)^2$	faux sans justification	faux car $(2a)^2 = 2^2 a^2$
Ex4		
$a^2 a^3 = a^6$	Vrai - Sans justification	Vrai $a^n \times a^p = a^{(n \times p)}$
$a2 + 4a3 = 7a5$	Faux- Pour $a = 2{,}4 \times 8 + 3 \times 4 = 44$ et $7 \times 32 = 224$	Faux
$a^2 = 2a$	vrai car $a^2 = a + a$	Faux car le carré de a différent du double de a
$(a + b)^2 = a^2 + b^2$	Faux pour $a = 1$	Faux car $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$3a + 5 = 8a$	Faux - distributivité	Faux- Contre-exemple
Ex5 (équation item 2)	Non résolu	Correct 0 et 1 par substitution $(0+1)(0-2) = -2$; $(1+1)(1-2) = -2$
Ex6	Pas de solution	incorrect sans reformulation : $p = 6e$

Tableau 5.10 – Comparaison des réponses de Baptiste sur quelques exercices

dans le registre des écritures algébriques.

Pour Michel et Baptiste, qui passent du stéréotype CA3 UA4 TA3 au stéréotype CA2 UA3 TA3, les indicateurs IE et MR évoluent. Cela signifie qu'ils interprètent davantage les expressions algébriques suivant les aspects procédural et structural et qu'ils adoptent davantage de raisonnement par l'algèbre. La réponse de Michel à l'exercice 6 montre qu'il reformule correctement la relation : « il y a six fois plus d'élèves que de professeurs ». Mais les autres exercices de traduction montrent qu'il se situe encore majoritairement dans une traduction abréviative.

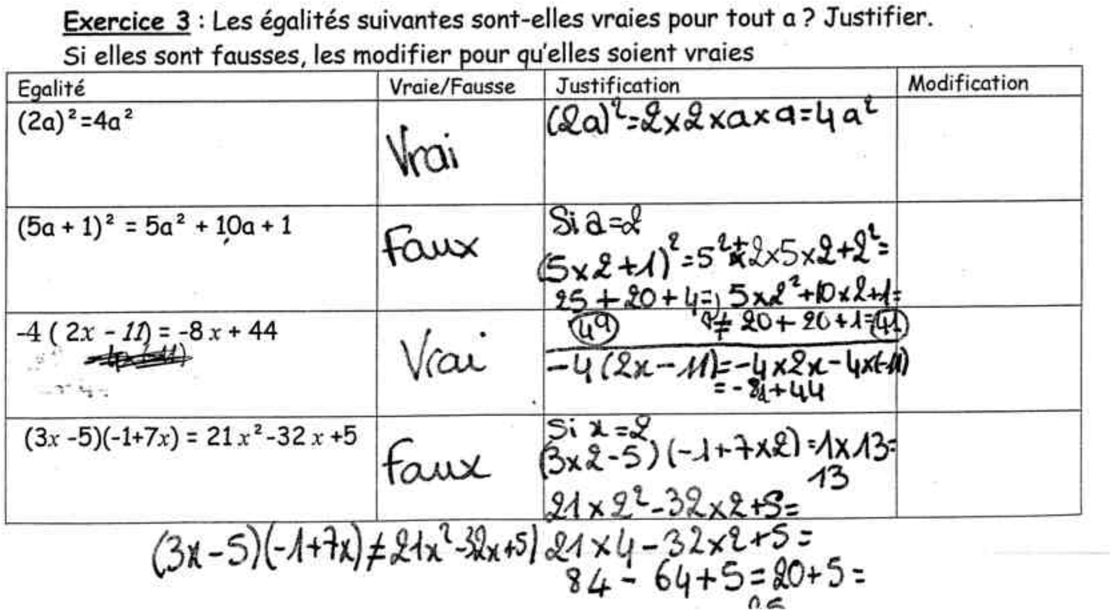
Nous ne pouvons conclure, avec ces quelques éléments, concernant les effets des parcours d'enseignement différencié sur les apprentissages des élèves, d'autant plus que plusieurs mois se sont écoulés entre les expérimentations des parcours (en décembre) et la passation du second test (en mai). Néanmoins, il apparaît que les évolutions des trois élèves cités correspondent à des aspects travaillés dans les parcours. En effet, tous les trois présentent une évolution de l'indicateur IE, au regard de l'interprétation des expressions, qui est en lien avec la dialectique entre les aspects procédural et structural des expressions. Tous les trois commencent à utiliser la dialectique du numérique et de l'algébrique pour justifier la fausseté d'une égalité par un contre-exemple (exercices 2 et 4) ou pour tester la solution d'une équation par substitution (exercice 5). Toutefois, il y a peu d'évolution sur l'exercice du prestidigitateur (exercice 9, preuve du résultat d'un programme de calcul) : les élèves restent majoritairement dans des démarches de preuves arithmétiques. Une analyse sur un échantillon plus large d'élèves pourrait permettre de tirer davantage de conclusions. Cela constitue une limite pour l'étude présentée dans cette thèse. Nous y revenons dans la conclusion générale.

5.2.10 Conclusion sur les expérimentations

En conclusion, nous nous efforçons de répondre aux questions posées en début de chapitre. Si nous avons effectué, dans son intégralité, une étude de cas dans la classe de Garance, nous avons aussi mené d'autres expérimentations, qui ne font pas l'objet d'analyses mais qui sont intégrées à la réflexion.

Quant à l'expérimentation menée en liaison avec Garance, les analyses *a posteriori* montrent que les techniques et certains éléments du bloc technologique utilisés par les élèves commencent à évoluer vers ce qui était visé dans les objectifs de parcours. Par exemple, les réponses des élèves au test, ainsi que leurs productions lors des évaluations proposées par Garance (cf. copie de Laure figure 5.18) font apparaître un résultat prometteur : ils mobilisent la substitution par une valeur numérique et font référence à la dialectique de l'algébrique et du numérique. Toutefois les élèves continuent à utiliser majoritairement des démarches arithmétiques dans des problèmes de preuve et de généralisation. Ce constat nous amène à souligner que, nécessairement, il faut du temps pour que les technologies utilisées par les élèves puissent évoluer vers celles attendues. Il convient de mettre en relation l'évolution des organisations mathématiques apprises avec les conditions mises en place par l'enseignante.

Dans la classe, l'évolution des OM des élèves en algèbre n'a probablement pas été favorisée par deux éléments prioritaires. Premièrement, les conditions mises en place par Garance ont suscité quelques limites : le manque de processus de dévolution de la tâche visée et de ses enjeux didactiques, le manque d'explicitation des raisons d'être des OM convoquées, le caractère encore trop implicite des types de tâches intermédiaires, l'utilisation trop prononcée d'un discours technologique porté par des formulations d'ordre légal. En effet, il est difficile de faire évoluer le niveau de justification des pratiques algébriques des élèves si le discours de l'enseignant n'est pas adapté. Deuxièmement, force est de constater que Garance n'a probablement pas reçu ou perçu l'importance de certains éléments indispensables à la mise en



Exercice 3 : Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout a ? Justifier.
Si elles sont fausses, les modifier pour qu'elles soient vraies

Egalité	Vraie/Fausse	Justification	Modification
$(2a)^2=4a^2$	Vrai	$(2a)^2=2\times 2\times a\times a=4a^2$	
$(5a+1)^2=5a^2+10a+1$	Faux	Si $a=2$ $(5\times 2+1)^2=5^2+2\times 5\times 2+2^2=$ $25+20+4=$ $5\times 2^2+10\times 2+1=$ $49 \neq 20+20+1=41$	
$-4(2x-11)=-8x+44$	Vrai	$-4(2x-11)=-4\times 2x-4\times(-11)$ $=-8x+44$	
$(3x-5)(-1+7x)=21x^2-32x+5$	faux	Si $x=2$ $(3\times 2-5)(-1+7\times 2)=1\times 13=13$ $21\times 2^2-32\times 2+5=$	

$(3x-5)(-1+7x)\neq 21x^2-32x+5$ $21\times 4-32\times 2+5=$ $84-64+5=20+5=25$

FIGURE 5.18 – Extrait de la copie de Laure à l'évaluation de novembre 2011

place des parcours. Du fait de notre manque d'expérience dans l'enseignement et dans la collaboration avec d'autres enseignants, nous n'avons pas assez clairement énoncé les enjeux didactiques des parcours, ni les aspects épistémologiques liés aux expressions algébriques. En effet, nous pensions qu'ils faisaient partie des pratiques habituelles des enseignants et nous n'avions pas conscience qu'ils étaient contraires à ces mêmes pratiques ou en décalage avec elles. Nous établissons le même constat sur les expérimentations menées avec Caroline, l'enseignante de seconde : mêmes difficultés à laisser vivre la conjecture et la nécessité de la valider et à solliciter les aspects procédural et structural des expressions dans la mise en œuvre des parcours.

Ainsi, nous réalisons à quel point il est important de tenir compte du rapport personnel des enseignants à l'algèbre et à son enseignement. Nous en concluons qu'il est nécessaire d'organiser la mise en place de conditions de diffusion permettant la robustesse des parcours dans l'enseignement ordinaire. A l'avenir, il serait opportun de s'interroger sur le niveau de description des parcours et le rôle de l'enseignant, tout en cherchant impérativement à concilier les objectifs didactiques des parcours et le fait de laisser une marge de manoeuvre de l'enseignant. Toutefois, certains résultats sont très encourageants. A travers l'expérimentation montée en liaison avec l'enseignante Garance, nous mettons en évidence l'impact du travail de collaboration dans le cadre du groupe IREM sur l'évolution du rapport personnel qu'elle entretient tant avec l'algèbre qu'avec l'enseignement de l'algèbre. Ces évolutions sont visibles dans la mise en place du parcours 3. Elles le sont dans le déroulement de la séance habituelle que nous avons observée. D'abord Garance a ponctuellement recours aux tests numériques pour déstabiliser une erreur de calcul d'un élève ; ensuite, dans l'exercice du prestidigitateur, elle met en oeuvre une situation de formulation puis de validation, en laissant exister la conjecture et en amenant les élèves à la preuve algébrique (cf. annexe E). Les évolutions sont également visibles dans le bilan de fin d'année rédigé par Garance :

> *« Dans un premier temps, ce travail m'a permis de proposer des types d'exercices que je n'avais pas l'habitude de proposer [...]. Dans un deuxième temps, ce travail m'a également fait réfléchir sur les méthodes de contrôle que je transmettais à mes élèves et comment je les transmettais. J'ai réalisé à quel point c'était implicite et que je n'explicitais les vérifications que lorsque c'était faux. »*

Concernant les milieux prévus dans les analyses *a priori*, nous soulignons, à plusieurs reprises, que le choix de Garance de n'utiliser ni de tableur ni de schéma de calcul comme élément du milieu limite parfois l'évolution des techniques et des technologies pour les OM apprises. Il nous semble judicieux d'envisager les potentialités des environnements technologiques pour proposer des milieux adaptés aux objectifs des parcours. Nous proposons l'implémentation d'un exercice interactif intervenant dans le parcours 2 (Tâche « Les égalités sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur ? ») ; il est présenté dans l'annexe F. L'intérêt de l'implémentation est de concevoir un milieu dans lequel l'élève est amené à conjecturer si l'égalité est vraie ou fausse, à partir de tests numériques et de la représentation graphique des expressions constituant les deux membres de l'égalité (cf. figure 5.19).

Concernant la gestion de la différenciation, Garance fait le choix de proposer des mises en commun pour chaque groupe. Seuls le lancement des séances et l'institutionnalisation finale s'adressent à l'intégralité de la classe. Cette expérience ne s'est pas soldée par les résultats escomptés. Nous constatons que Garance éprouve des difficultés à revenir sur l'enjeu didactique commun au groupe et surtout à décontextualiser des exercices pour en faire une synthèse commune. Ce choix de gestion de la différenciation reste différent d'un enseignant à l'autre. Par exemple, les enseignants Benoît et Caroline choisissent d'organiser des mises en commun pour la classe entière. Néanmoins les bilans de fin d'année des enseignants montrent que le moment de l'institutionnalisation est délicat à gérer. Benoît écrit :

> *« L'institutionnalisation en fin de séance reste pour moi délicate à gérer. Car il s'agit de faire un bilan sans corriger précisément, sinon je m'adresse aux élèves alternativement, ce qui en fin d'heure n'est pas tout à fait bien venu. »*

Garance, quant à elle, prend conscience de l'importance de l'institutionnalisation.

> *« Mon deuxième questionnement concernait l'institutionnalisation. Comment faire la synthèse dans chaque groupe puis avec la classe entière ? J'ai constaté*

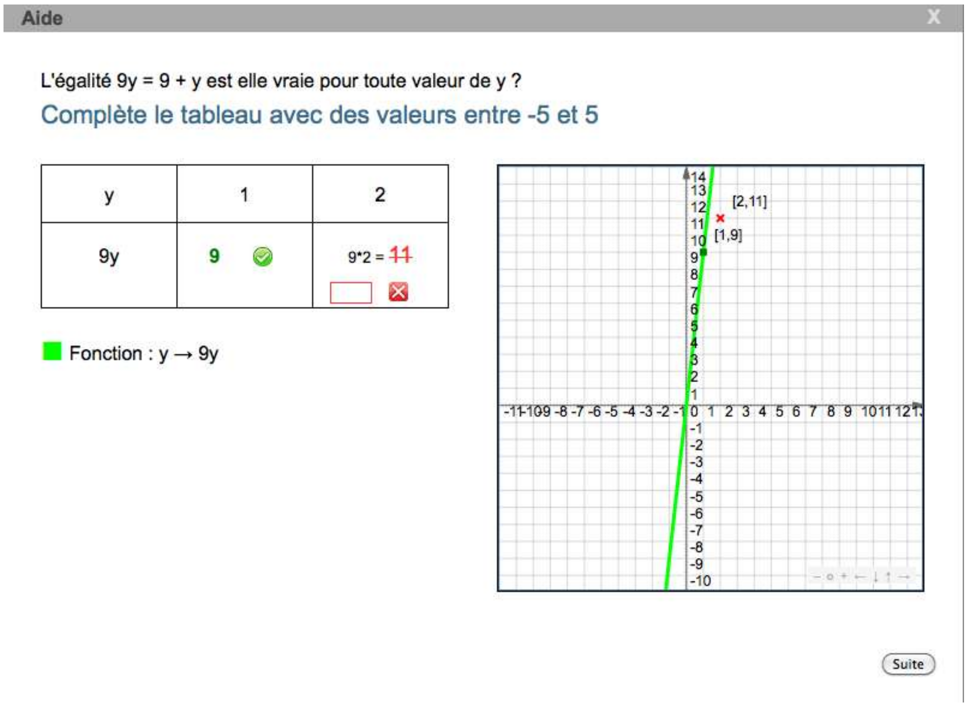


FIGURE 5.19 – Une première implémentation d'un exercice interactif sur la tâche « Les égalités sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur ? »

> *l'importance de définir clairement l'objectif de la séance pour être efficace dans l'institutionnalisation (peut-être est-ce une piste pour un mode d'emploi destiné aux enseignants). »*

Ainsi, nous en concluons qu'il revient au didacticien d'approfondir les conditions de ce moment.

Quant aux questions génératrices à aborder dans les parcours, il est essentiel de développer le travail sur le numérique. En effet, les expérimentations montrent bien à quel point l'articulation entre le numérique et l'algébrique et la pratique du calcul réfléchi jouent un rôle important lors de l'entrée des élèves dans l'algèbre et dans l'évolution des technologies dominantes. Il semblerait pertinent d'envisager un parcours dans le cadre du numérique.

Pour conclure, si certains enseignants ont souligné leurs difficultés à s'approprier les parcours, le bilan de l'expérimentation que nous établissons est particulièrement positif. Certains points prometteurs sont à retenir. Premièrement les enseignants reconnaissent l'intérêt de différencier l'enseignement tout en gardant un objectif commun pour la classe. Benoît écrit :

> *« Il s'agissait donc, ici, d'appréhender l'apprentissage de l'algèbre par un travail de différenciation, chose jusqu'alors un peu flou pour moi. Je « gérais l'hétérogénéité » pendant des séances où je retrouvais mes élèves en demi-*

classe ou en très petits groupes (5-7 élèves), mais rarement en classe entière et surtout l'objectif de la séance n'était pas le même pour tout le monde. C'est ce qui a été nouveau pour moi cette fois-ci : l'idée d'enseigner la même chose aux élèves en adaptant l'apprentissage me paraît maintenant une évidence qui répond précisément aux impératifs d'apprentissage dont tout élève doit pouvoir bénéficier. »

Fabien remarque :

> *« Le fait de retravailler la différenciation maintenant avec mon expérience et dans ce groupe m'a sans aucun doute permis de donner plus facilement une place et des utilisations possibles à ce dispositif de différenciation par rapport aux autres modalités de travail que je me suis déjà appropriées. La différenciation a ainsi gagné un espace de faisabilité dans ma pratique.*

Garance écrit :

> *Le plus efficace était pour moi de donner le même exercice (l'objectif est clairement le même) mais avec des variables didactiques différentes. J'ai compris l'utilité de l'aide, qui jusqu'à présent ne m'était pas apparue. Je n'ai pas encore conçu d'exercices se rapportant à l'algèbre en troisième mais cette idée a conduit à la mise en place d'exercices différenciés en sixième. »*

Deuxièmement, les bilans des enseignants soulignent qu'ils sont enclins à questionner leurs pratiques d'enseignement de l'algèbre, concernant l'équivalence des expressions et la validation des calculs. Ils font la preuve de l'ouverture aux réflexions visant à faire évoluer leur rapport personnel à l'algèbre et à l'enseignement. Fabien écrit :

> *« Certaine discussions en réunion sur les programmes, ce que l'on choisit de dire ou de ne pas dire aux élèves, le choix des exercices et leur formulation, le fait que ce groupe fasse la jonction entre le collège et le lycée, m'a incité à renouveler mon discours, mon vocabulaire devant les élèves, à oser expliciter davantage des notions utilisées en permanence mais « taboues » parce que je figurant pas au programme : l'équivalence, par exemple. Nous avons beaucoup échangé sur le contrôle (la vérification), et cela m'a permis de clarifier un pan entier de mon activité avec les élèves plein de non-dits, en tout cas passez construit. Je retiens qu'il est nécessaire de donner un espace de clarté pour les élèves à la vérification, de lui attribuer une place institutionnelle dans le travail en classe et une visibilité dans le cours. »*

Benoît écrit :

> *« Ce travail m'a fait totalement redéfinir les objectifs de ma séquence dédiée au développement des expressions littérales en algèbre en classe de troisième (et en quatrième par ricochet). De « savoir développer, savoir calculer une expression pour une valeur donnée »- je fais court- ils ont évolué en « comprendre l'utilité du passage à l'algèbre et l'utilité de savoir transformer les expressions » et un travail sur l'identification de la lettre comme variable. Autrement plus ambitieux, plus intéressants et surtout plus efficace, car à l'arrivée les élèves ont bien mieux négocié ce chapitre que ceux des années précédentes, me semble-t-il. »*

Ainsi, il apparaît clairement que le didacticien a toute sa place à jouer auprès des enseignants.

Troisièmement, Caroline envisage de poursuivre l'expérience avec l'utilisation des exercices interactifs présents sur Sésamath. Elle écrit :

> *« Cela permettrait de construire plus de séances différenciées avec, par exemple, l'utilisation des exercices interactifs présents sur Sésamath (cela permettrait d'utiliser la motivation des élèves face à l'outil informatique) je vais d'ailleurs tester dès cette année une séance de ce type avec mes élèves et même si je ne peux pas bien en mesurer l'impact, elle me permettra d'avoir une base pour l'année prochaine. »*

En fin de compte, si ces expérimentations prouvent leur intérêt et nous encouragent à en entreprendre d'autres, nous soulignons qu'il est indispensable de rester prudent quant à l'évolution des praxéologies apprises des élèves, en lien avec les parcours d'enseignement différencié.

5.3 Evolution de la répartition des élèves en groupe sur l'ensemble des classes

Nous avons recueilli l'ensemble des stéréotypes établis par Pépite pour les 191 élèves ayant passé le test diagnostique au moins une fois au cours des expérimentations de janvier 2011 à mai 2012. Nous regroupons ces données dans les graphiques 5.20 à 5.24. Après avoir présenté les graphiques, nous en tirons quelques éléments d'analyse concernant la répartition des élèves en groupe et l'évolution des niveaux technologiques dominants des élèves entre le début de la classe de troisième et la fin de la classe de seconde.

5.3.1 Présentation des graphiques et premières analyses

Le graphique 5.20 présente les stéréotypes rencontrés et le pourcentage d'élèves par stéréotype en fonction du niveau scolaire et de la période de l'année sur l'ensemble des classes expérimentatrices. Le graphique 5.21 présente la répartition des élèves en groupe en cours d'année et par niveaux scolaires sur l'ensemble des classes. On y trouve les mêmes résultats que dans le graphique précédent mais présentés relativement aux groupes. En troisième, la majorité des élèves sont dans le groupe C- avec une légère évolution de la répartition en cours d'année. Au début de la seconde, les élèves sont majoritairement dans le groupe B avec une évolution en cours d'année vers le groupe A.

Les graphiques suivants 5.22 à 5.24 concernent les élèves de troisième ayant passé le test deux fois en cours d'année : au début puis en fin d'année scolaire.

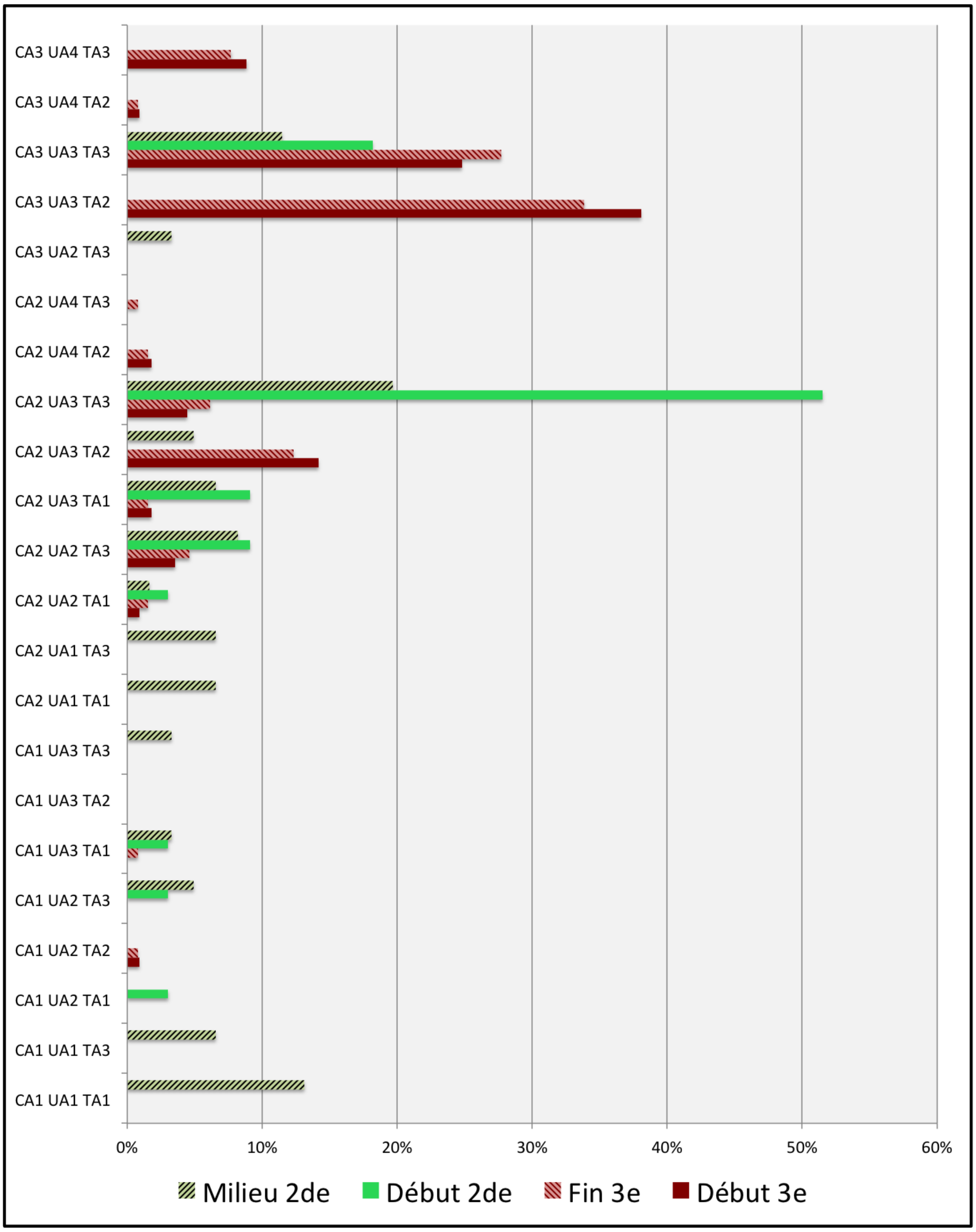


FIGURE 5.20 – Total des stéréotypes rencontrés (191 élèves pour 337 passages du test)

Il s'agit des élèves à qui des parcours d'enseignement différencié ont été proposés. Nous présentons d'abord la répartition en groupe puis les différents niveaux sur chaque composante du stéréotype. Nous précisons ce que nous appelons « flux de la répartition en groupe » à partir du graphique 5.22 (graphique en bas). Prenons le groupe B-. En début de troisième, vingt-cinq élèves sont dans ce groupe. En fin

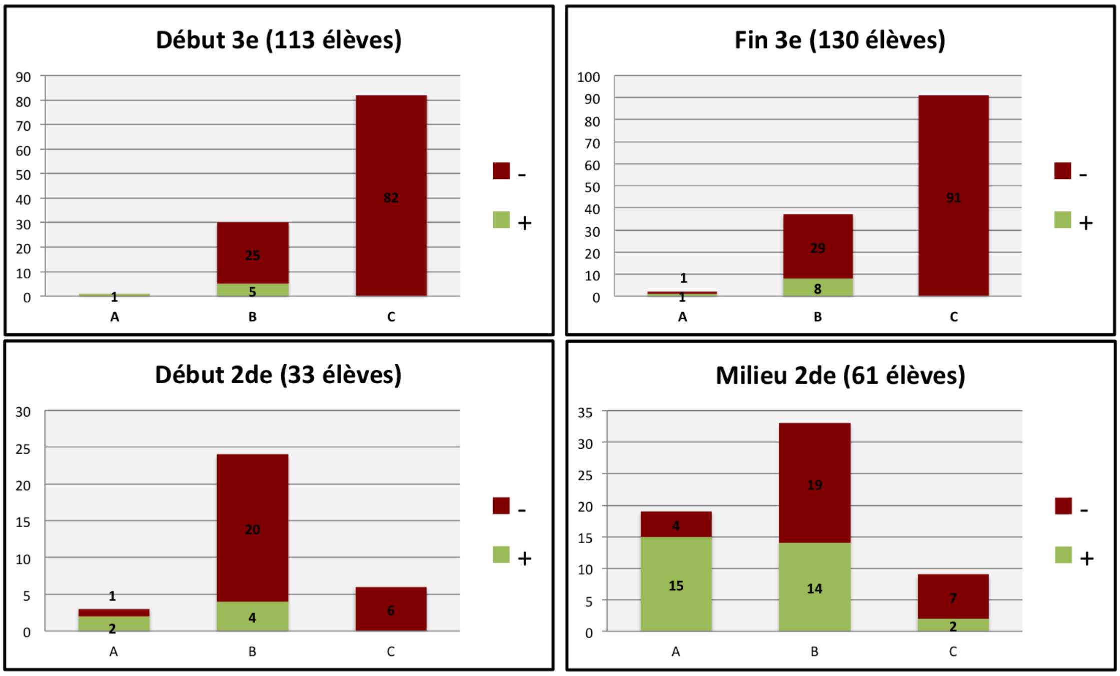


FIGURE 5.21 – Répartition des élèves en groupe en cours d'année et par niveaux scolaires sur l'ensemble des classes

d'année, ces élèves se répartissent de la manière suivante : un élève est en A-, un élève est en B+, douze restent en B- et 7 sont en C-.

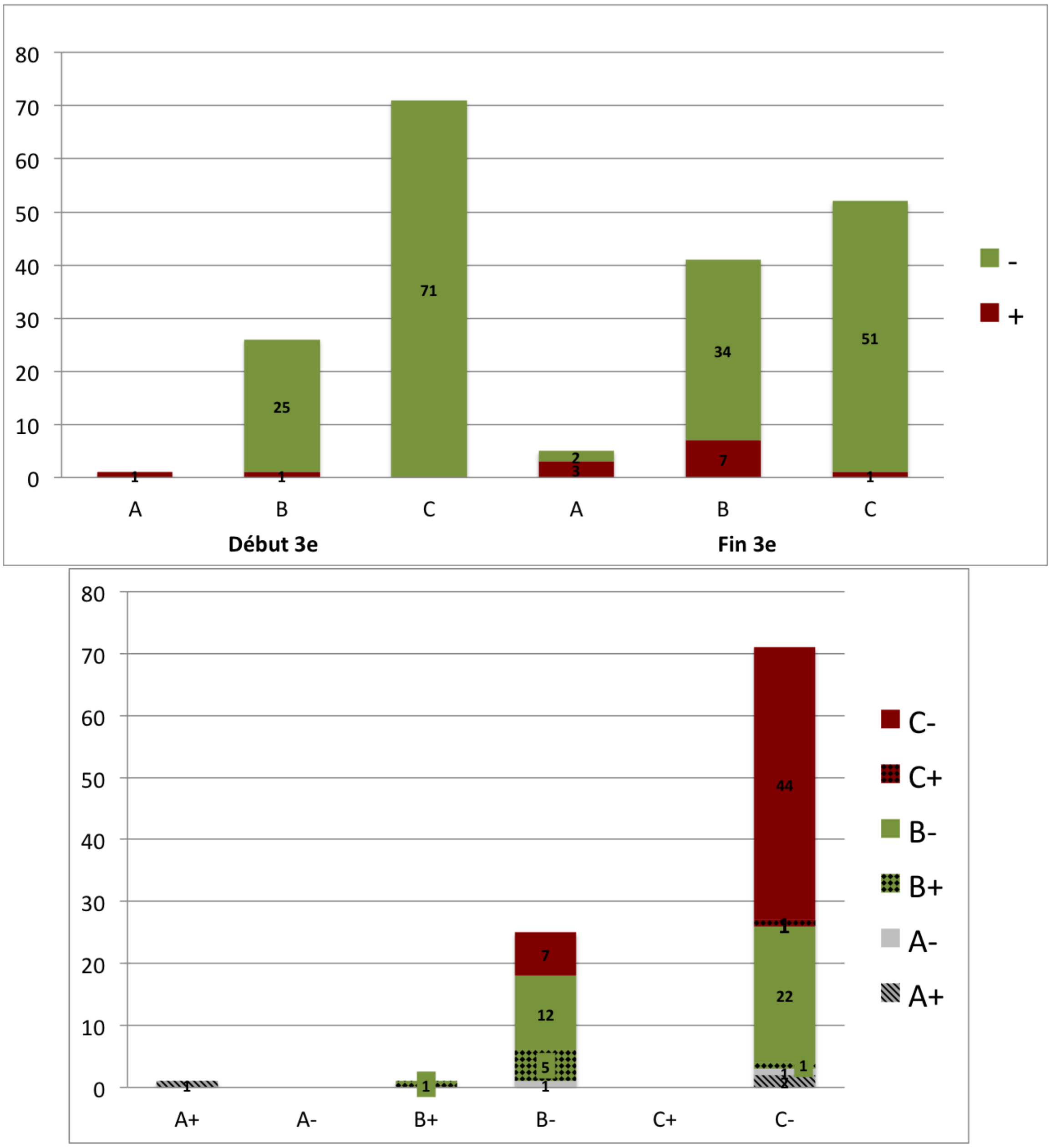


FIGURE 5.22 – Répartition (en haut) et flux (en bas) de la répartition en groupe des élèves de 3^{e} entre le premier et le second passage du test

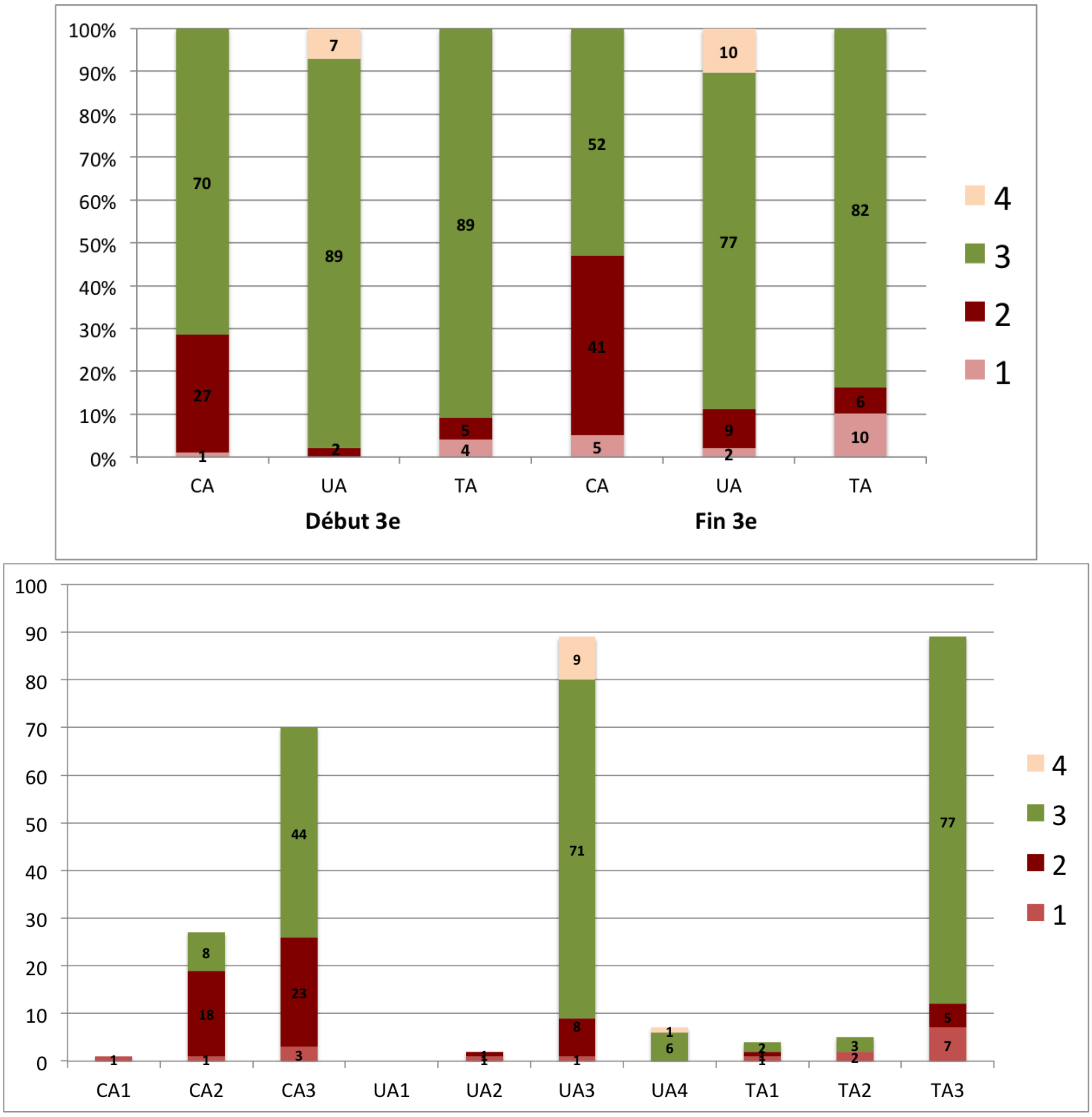


FIGURE 5.23 – Comparaison (en haut) des niveaux sur chaque composante des élèves de 3^{e} ayant passé deux fois le test en cours d'année et flux (en bas) entre le premier et le second test

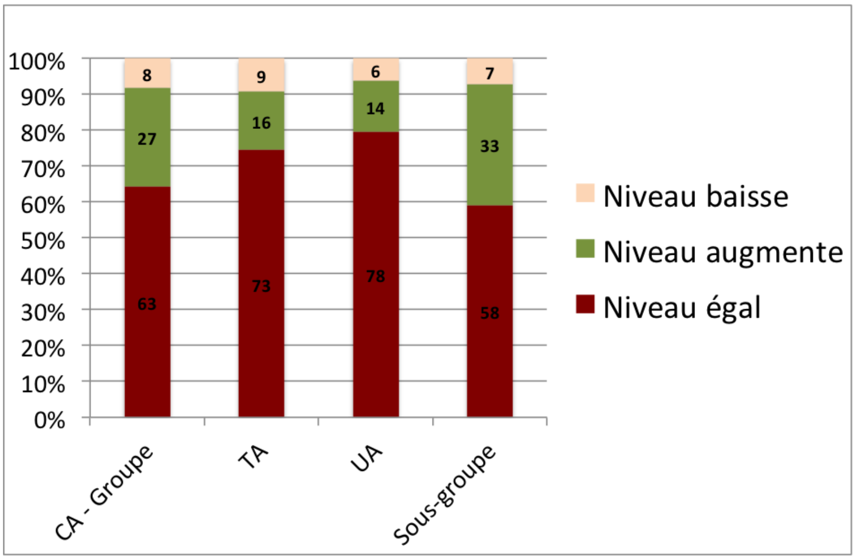


FIGURE 5.24 – Flux global du niveau de chaque composante du stéréotype des élèves de 3e entre le premier et le second passage du test

5.3.2 Quelques analyses sur l'évolution de la répartition des élèves en groupe

a. Une corrélation entre la répartition des élèves en groupe, le niveau scolaire et la période de l'année

Tous niveaux scolaires et périodes de l'année confondus, les élèves se répartissent sur les trois groupes A, B et C. Une analyse de cette répartition en fonction du niveau scolaire (troisième, seconde) et de la période de l'année scolaire (début, milieu, fin) à laquelle le test a été passé permet d'affiner les remarques.

En classe de troisième, les stéréotypes se répartissent entre les groupes B et C et l'effectif du groupe A est quasiment nul (graphique 5.21). Cette répartition semble évoluer en cours d'année (graphique 5.22) : en début de troisième, seuls les groupes B- et C- sont remplis alors qu'en fin de troisième les effectifs des groupes B+ et A commencent à augmenter. Cette remarque est à confirmer sur un échantillon plus large. Certes, une augmentation des effectifs du groupe B est visible sur le graphique 5.22, qui concerne les élèves de 3^{e} ayant passé deux fois le test et ayant passé les parcours, mais cela est plus nuancé sur le graphique 5.21.

En classe de seconde, les stéréotypes se répartissent entre les groupes A et B et l'effectif du groupe C est relativement faible (tableau 5.21). Comme en troisième, cette répartition semble évoluer au cours de l'année : le groupe A voit son effectif augmenter en milieu de seconde par rapport au début de l'année scolaire.

La répartition des stéréotypes, tirée vers le groupe A en seconde et tirée vers le groupe C en troisième, est en cohérence avec les choix faits dans la modélisation des stéréotypes. Ils sont établis à partir d'une référence absolue : la compétence algébrique attendue en fin de scolarité obligatoire (Grugeon, 1997) et non à partir d'une référence relative à chaque niveau scolaire. La répartition des stéréotypes éclaire donc sur l'évolution du niveau technologique dominant des élèves entre la classe de troisième et celle de seconde.

b. Une corrélation entre la composante Calcul algébrique (CA) et Usage de l'outil algébrique (UA)

Vingt-six stéréotypes sur les trente-six possibles (graphique 5.20) sont présents dans les classes expérimentatrices. Nous proposons d'analyser plus particulièrement trois éléments qui montrent une corrélation entre le niveau sur la composante CA (en lien avec les OM de référence OM2 et OM3) et la composante (UA en lien avec l'OM de référence OM1). Cette corrélation est en cohérence avec notre interprétation des groupes de stéréotypes en technologies dominantes présentées dans le chapitre 4.

Premièrement, les trois stéréotypes (CA3 UA3 TA3), (CA3 UA3 TA2) et (CA2 UA3 TA3) ont des effectifs importants par rapport aux autres. En effet, plus de la moitié des élèves de début de seconde ont le stéréotype (CA2 UA3 TA3) et la majorité des élèves de 3ᵉ se trouvent en (CA3 UA3 TA3) et (CA3 UA3 TA2). Un calcul algébrique non contrôlé, basé sur des règles syntaxiques majoritairement erronées, semble lié à un usage non adapté de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes et à un faible sens donné au symbolisme algébrique. Cette corrélation est cohérente avec notre interprétation des groupes en technologie dominante.

Deuxièmement, les stéréotypes (CA3, UA1, TA1 ou 2 ou 3), (CA2, UA4, TA1 ou 2 ou3) et (CA1, UA4, TA1, ou 2 ou 3), qui traduisent une incohérence, du point de vue des éléments technologiques dominants (groupes C- et A-), ou une instabilité des apprentissages, n'apparaissent quasiment pas dans l'échantillon que nous analysons. Il semble difficile d'avoir un niveau fort (1 ou 2) en calcul algébrique et un niveau faible (4) en usage de l'algèbre et vice-versa.

c. Une évolution de la répartition en groupe des élèves ayant passé deux fois le test en cours d'année

98 élèves de troisième ont suivi les parcours d'enseignent différencié et ont passé le test diagnostique deux fois en cours d'année. Concernant ces élèves, nous repérons une évolution non négligeable de la répartition entre les groupes. L'interprétation des graphiques 5.22 à 5.24 montre que vingt-sept pour-cent des élèves ont une évolution positive sur la composante CA et donc changent de groupe. Un tiers des élèves du groupe C- de début de troisième évolue positivement la majorité passe dans le groupe B- et une minorité (4 élèves) passe dans le groupe A.

Nous retenons trois aspects principaux des analyses qui viennent d'être présentées. Premièrement, indépendamment des parcours d'enseignement différencié, nous observons une évolution de la répartition des stéréotypes et donc des niveaux technologiques dominants utilisés par les élèves en cours d'année scolaire et en fonction des niveaux scolaires. Deuxièmement, cette évolution semble marquée pour les élèves ayant suivi les parcours d'enseignement différencié, notamment en ce qui concerne le niveau sur la composante CA. Nous restons cependant très prudents sur cette conclusion. D'une part, elle est à confirmer sur un échantillon plus large et, d'autre part, il est difficile de faire le lien entre l'évolution des stéréotypes et le passage des parcours car d'autres facteurs externes ou internes aux apprentissages en mathématiques et auxquels nous ne pouvons avoir accès sont peut-être en jeu. Troisièmement, nos choix de regroupement des stéréotypes semblent pertinents : tous les groupes sont présents avec, comme nous l'avions prévu, des effectifs très faibles pour les groupes A- et C+. Ces conclusions restent toutefois à confirmer sur un échantillon d'élèves plus large et avec une analyse quantitative.

En conclusion, l'analyse des expérimentations a été réalisée sur le plan quantitatif sur un échantillon d'une centaine d'élèves participants et, sur le plan qualitatif, dans la classe de l'enseignante Garance. En fin de compte, pour des raisons évidentes de temps, nous n'avons pu aboutir qu'à une seule étude de cas relative à la mise en oeuvre des parcours dans l'enseignement ordinaire. Si les résultats sont encourageants et montrent la pertinence des questionnements et de la démarche, le périmètre de l'expérimentation reste volontairement limité. A l'avenir, il pourra être intéressant de confirmer ces analyses quantitatives et qualitatives sur un échantillon plus large d'enseignants, de classes et d'élèves.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Notre recherche, qui porte sur la modélisation didactique de parcours d'enseignement différencié, en algèbre élémentaire, vise à répondre aux questionnements des enseignants relatifs à la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et la différenciation de l'enseignement, en fin de scolarité obligatoire en France (15-16 ans).

Ce projet s'inscrit dans notre volonté de modéliser des parcours d'enseignements différenciés à partir d'un logiciel de diagnostic et de prévoir leur implémentation informatique dans des systèmes de ressources en ligne. Nous menons une démarche complète de recherche, de la conception du modèle à son évaluation, du point de vue à la fois de sa pertinence cognitive et épistémologique et de la faisabilité de son écologie dans l'enseignement secondaire actuel.

Le travail de thèse s'inscrit dans le projet PépiMeP au sein d'une équipe regroupant des informaticiens de l'équipe MOCAH du LIP6 de l'UMPC-Paris-Sorbonne et des didacticiens de l'équipe LDAR du l'Université Paris Diderot - Paris 7. Il reprend les modélisations développées dans les projets précédents et plus particulièrement le logiciel de diagnostic Pépite.

Dans une approche nouvelle, nous examinons les difficultés que rencontrent les enseignants à gérer cette hétérogénéité des apprentissages des élèves, en algèbre élémentaire, en fin de scolarité obligatoire en France. Il importe de savoir si ces difficultés sont potentiellement renforcées par :

- la méconnaissance des enseignants concernant les processus différenciateurs et en particulier ceux liés à des besoins d'apprentissage ignorés par le système d'enseignement ainsi qu'à des savoirs implicites laissés à la charge des élèves,
- le peu d'évaluations diagnostiques disponibles visant à identifier les connaissances des élèves.

Nous formulons l'hypothèse qu'il est possible d'éclairer certains dysfonctionnements du système didactique, par les démarches suivantes :

- chercher à identifier ces besoins d'apprentissage ignorés et la manière dont leur absence participe aux difficultés des élèves, voire accentue les processus de différenciation,
- mettre à la disposition des enseignants et des élèves des ressources permettant d'organiser ces apprentissages implicites,
- exploiter le diagnostic Pépite pour modéliser des parcours d'enseignement différencié adaptés aux besoins repérés chez les élèves et automatiser les parcours d'enseignement différencié sur la plateforme en ligne LaboMeP.

Nous nous situons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999, 1998) pour prendre en compte le fait que l'élève apprend dans une institution donnée où le savoir est transmis selon certaines conditions.

Dans cette conclusion, nous rappelons d'abord les choix réalisés pour construire l'OM de référence qui, d'un point de vue méthodologique, constitue l'outil central de la recherche. Nous présentons ensuite, de manière synthétique, les principaux résultats obtenus au cours de la recherche avant de proposer, pour terminer, des perspectives et de nouvelles pistes de recherche.

6.1 Une OM épistémologique de référence

6.1.1 Référence épistémologique

Pour établir l'OM épistémologique de référence, nous proposons une synthèse des travaux de didactique de l'algèbre (chapitre 2). Deux types de travaux sont visités. Premièrement, ceux qui relèvent d'une approche anthropologique proposent des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre. Deuxièmement, ceux qui relèvent d'une approche cognitive proposent des analyses portant sur l'activité de l'élève et des processus de conceptualisation de l'algèbre. Nous nous intéressons aux éléments épistémologiques au cœur de la génération des expressions algébriques, de la capacité d'adaptabilité dans leur interprétation pour en faire des usages variés, de l'organisation d'un calcul contrôlé et intelligent sur ces expressions et de la disponibilité du calcul algébrique pour son usage dans la résolution de problèmes dans des contextes intra- ou extra-mathématiques. Il s'agit des éléments suivants :

- l'équivalence des programmes de calcul et des expressions algébriques,
- la dialectique entre le numérique et l'algébrique,
- les aspects structural et procédural des expressions,
- l'interprétation des expressions algébriques dans d'autres registres de représentation.

6.1.2 OM épistémologique de référence

Ces éléments servent de fondement pour définir une OM épistémologique de référence (chapitre 3). Nous utilisons le modèle épistémologique de référence développé par Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012) présenté dans le chapitre 2 au paragraphe b.. Dans ce modèle, l'algèbre élémentaire est conçue comme un processus d'algébrisation de programmes de calcul. La première étape de ce modèle, qui s'attache à l'une des difficultés majeures de l'apprentissage de l'algèbre est l'objet central de notre étude. Nous construisons une OM de référence qui est une OM régionale relativement aux expressions algébriques. Elle composée de trois OM locales :

- OM1 est une organisation mathématique autour de la génération des expressions algébriques dans la résolution de problèmes de généralisation et de preuve. Elle donne des raisons d'être à l'OM régionale en abordant la notion d'expression algébrique comme modèle symbolique pour représenter des programmes de calcul et étudier leur équivalence,
- OM2 est une organisation mathématique locale autour du concept d'expres-

sion algébrique. Elle aborde la question de l'équivalence des expressions. Plusieurs caractéristiques des expressions sont concernées : leur dénotation, c'est-à-dire le fait que plusieurs expressions représentant le même objet peuvent avoir la même valeur pour toute valeur de la variable, leur sens et leur interprétation (au sens de Drouhard (1992)), correspondant à l'aspect sémantique des expressions ainsi que les aspects structural et procédural dans l'interprétation des expressions,

– OM3 est une organisation mathématique locale autour de l'algèbre des polynômes. Elle concerne la transformation d'une expression en une autre, équivalente.

Nous présentons maintenant les résultats obtenus par chapitre et montrons la force de l'OM épistémologique de référence pour analyser l'OM à enseigner, les OM apprises et concevoir le modèle de PED.

6.2 Une opérationnalisation de l'OM de référence

Nous définissons une OM épistémologique de référence relative aux expressions algébriques. Cette praxéologie de référence sert de fondement pour formuler des hypothèses sur les apprentissages ignorés par l'institution qui peuvent renforcer les difficultés conceptuelles des élèves dans le calcul sur les expressions algébriques. Pour cela, nous mettons en relation l'OM à enseigner et les OM apprises en caractérisant les écarts, d'une part entre OM à enseigner et l'OM épistémologique de référence et, d'autre part, entre les OM apprises et l'OM épistémologique de référence.

6.2.1 Du côté de l'institution : OM à enseigner

Nous organisons l'analyse des OM à enseigner à travers l'étude des programmes et des manuels du collège et de la classe de seconde (chapitre 3). Nous déterminons relativement à l'OM épistémologique de référence :

– les OM ponctuelles principalement convoquées dans la résolution des tâches, celles absentes,
– des éléments technologiques et théoriques mobilisés à travers les discours technologiques utilisés,
– le rôle attribué aux ostensifs dans la conduite des calculs.

Cette analyse met en évidence qu'il existe des besoins d'apprentissage ignorés ou institutionnellement invisibles. Pourtant, ces besoins sont épistémologiquement nécessaires pour construire un rapport personnel à l'algèbre conforme aux tâches auxquelles le calcul algébrique est employé (Hypothèse 2). En premier lieu, l'OM régionale autour des expressions algébriques est incomplète à la fin du collège et au début de la seconde dans le sens où les éléments du bloc technologico-théorique ne sont pas suffisamment portés par les éléments épistémologiques nécessaires au calcul sur et avec les expressions algébriques. En particulier, les raisons d'être du calcul algébrique sont peu travaillées, le contrôle et la validation des calculs sont quasiment absents. Pourtant, le contrôle des calculs peut être un moyen de développer, tant l'esprit critique des élèves que la structure et le sens des expressions. Cela amène les élèves à convoquer des OM intermédiaires implicites (identifier la structure des expressions, tester l'égalité, substituer une lettre par un nombre). En second lieu, les OM ponctuelles sont peu intégrées entre elles. Les technologies sont davantage guidées par les ostensifs ; elles ne le sont pas par la dialectique des ostensifs et des non-ostensifs.

Emergent de cette réflexion deux questions génératrices à traiter dans les parcours d'enseignement différencié :

- Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
- Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

6.2.2 Du côté des élèves : OM apprises et technologies dominantes

Dans l'OM épistémologique de référence, nous analysons, dans une logique transversale, les niveaux sur chaque composante du stéréotype. Les niveaux sur la composante Calcul algébrique (CA) peuvent s'interpréter pour faire des hypothèses sur les éléments technologiques mis en jeu par les élèves dans la résolution de tâches convoquant des types de tâches de OM2 et OM3. Les niveaux sur les composantes Usage de l'algèbre (UA) et Traduction algébrique (TA) peuvent s'interpréter pour faire des hypothèses sur les éléments technologiques mis en jeu par les élèves dans la résolution de tâches convoquant des types de tâches de OM1. Avec cette étude, nous nous interrogeons sur le choix dissymétrique entre la composante CA d'une part et les composantes UA et TA. A l'avenir, il pourrait être pertinent d'unifier la structure du modèle de stéréotype ; des études pourront être faites dans ce sens.

Les résultats des travaux réalisés dans le cadre des projets Pépite et Lingot, en particulier le modèle des stéréotypes s'est avéré être effectivement un outil pertinent pour organiser un enseignement différencié appuyé sur le diagnostic des rapports personnels des élèves à l'algèbre (Hypothèses 1 et 3). C'est un moyen d'avoir accès aux technologies dominantes développées par les élèves, paramètre indispensable pour proposer des PED adaptés.

Nous interprétons les groupes de stéréotypes en catégories d'OM apprises. Dans une même catégorie d'OM apprises, les élèves mobilisent de façon dominante le même niveau technologique ; ce niveau est lié aux objets mathématiques mobilisés et aux propriétés associées, aux modes de discours et de justification, d'utilisation des ostensifs et de validation des calculs privilégiés. La connaissance des technologies « dominantes » permet de faire des hypothèses sur les techniques utilisées (attendues, erronées ou inadaptées) par les élèves et le fait que certaines classes d'erreurs puissent vivre dans les pratiques algébriques des élèves.

L'étude des OM apprises et des OM à enseigner, à partir d'une référence commune, est une avancée importante et constitue un axe fort de la thèse. Ce choix nous a permis de caractériser et de mieux prendre en compte la part des besoins d'apprentissage ignorés par l'institution dans le développement des OM apprises relatives aux expressions algébriques.

6.3 Le modèle de parcours d'enseignement différencié

6.3.1 La modélisation

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, la notion de parcours d'enseignement différencié se rapproche de celles de PER et AER définis par Chevallard (2011, 2005), dans le sens où nous définissons des questions génératrices pour travailler sur les raisons d'être des expressions algébriques et du calcul sur et avec les expressions. Mais elle s'en éloigne, pour deux raisons. Tout d'abord, il s'agit d'une reprise de notions à enseigner, travaillées depuis plusieurs années ; ensuite, nous prenons en compte des besoins d'apprentissage des élèves dans les tâches proposées et dans leur organisation didactique à partir du logiciel de diagnostic Pépite. C'est pourquoi, pour nous démarquer des PER et des AER, nous choisissons la désignation de « parcours d'enseignement différencié ».

Nous définissons un parcours d'enseignement différencié dans le chapitre 4. Un PED est défini par rapport à un secteur d'enseignement, un niveau scolaire et une étape du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. Il porte sur une sous-question génératrice, qui est le fil directeur des éléments à institutionnaliser et de la gestion didactique des différentes phases individuelles et collectives dans la mise en œuvre du parcours en classe. Il s'agit de redonner des raisons d'être aux éléments à travailler et de les institutionnaliser. La sous-question est associée à un ou des types de tâches. Les tâches dans lesquelles il(s) est(sont) convoqué(s), sont différenciées en fonction des groupes, adaptées aux technologies dominantes de chaque groupe. La différenciation des tâches porte sur un jeu sur les variables didactiques, les éléments du milieu utilisés et les aides apportées. La combinaison du choix du type de tâches du jeu sur les variables didactiques, des milieux choisis, des aides apportées par l'enseignant et des déroulements retenus, ont pour objectif de travailler les différents savoirs et savoir-faire implicites de l'OM à enseigner liés à une faible prise en compte de l'équivalence des programmes de calcul, l'équivalence des expressions, de la dialectique de l'algébrique et du numérique et des aspects procédural et structural. Nous avons ainsi défini sept parcours d'enseignement différencié portant sur les sous-questions génératrices suivantes :

1. Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?
2. Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?
3. Les expressions sont-elles équivalentes ?
4. Comment interpréter les expressions dans différents registres sémiotiques pour appréhender la structure des expressions en lien avec le rôle des opérateurs et des délimitants ?
5. Comment interpréter les expressions pour appréhender leur structure et leur équivalence et anticiper les calculs algébriques ?
6. Comment contrôler et conduire un calcul algébrique ?
7. Comment mobiliser et conduire un calcul algébrique dans la résolution de problèmes du domaine algébrique ?

Seuls les trois premiers PED ont fait l'objet d'une analyse *a priori* fine. Nous les avons choisis parce qu'ils ont été les plus travaillés avec les enseignants. Ils ont permis d'envisager des tâches, des aides et des gestions didactiques pour travailler les éléments épistémologiques ignorés par les institutions considérées.

Ce modèle a été développé au sein du projet PepiMeP. Il est issu d'une collaboration étroite entre différents partenaires : les enseignants d'un groupe IREM, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath. Cette réflexion collective a été déterminante pour envisager la viabilité du modèle de PED dans l'enseignement ordinaire et l'automatisation de la proposition de parcours dans LaboMep.

a. Les travaux au sein du projet PepiMeP

La conception des PED est guidée à la fois par les analyses didactiques et une démarche itérative dans le cadre du projet PepiMeP. Le travail collaboratif a un rôle déterminant dans la conception du modèle de PED. Cette démarche itérative démontre sa pertinence pour faire évoluer un modèle didactique vers un modèle formel et permettre son implémentation.

Les premières versions des PED fondées sur les analyses didactiques sont progressivement affinées, structurées et systématisées à la fois par la réflexion didactique et la formalisation nécessaire pour permettre l'implémentation des parcours d'enseignement différencié et l'indexation des exercices des PED (Hypothèse 4). L'indexation des exercices a été conçue en vue d'automatiser la proposition de PED sur la plateforme en ligne LaboMeP. Sa capacité d'évolution dynamique permet de continuer à associer aux parcours de nouveaux exercices.

Certes, le modèle de PED présente des limites. Nous avons conscience qu'il peut être davantage formalisé : c'est l'une des perspectives de la recherche. En outre, du fait des impératifs informatiques, les analyses *a priori* de tous les exercices intervenant dans tous les parcours (annexe B) ne sont pas envisagées aussi finement que celles présentées dans le chapitre 4. Le parti pris de travailler en équipe pluridisciplinaire enrichit efficacement les analyses. Certes, il s'avère difficile de concilier la recherche universitaire en didactique des mathématiques avec les impératifs des informaticiens et des développeurs bénévoles. Mais à l'évidence, l'engagement de l'équipe, dans toute sa diversité, se solde par une réussite, fruit d'une véritable prouesse collective.

b. Expérimentation et collaboration avec des enseignants de collège et de lycée

Si nous avons effectué, dans son intégralité, une étude de cas dans la classe de Garance, nous avons aussi mené d'autres expérimentations, qui ne font pas l'objet d'analyses mais qui sont intégrées à la réflexion.

Quant à l'expérimentation menée en liaison avec Garance, les analyses *a posteriori* montrent que les techniques et certains éléments du bloc technologique utilisés par les élèves commencent à évoluer vers ce qui était visé dans les objectifs de parcours. Par exemple, les réponses des élèves au test, ainsi que leurs productions lors des évaluations proposées par Garance font apparaître un résultat prometteur : ils mobilisent la substitution par une valeur numérique et font référence à la dialectique de l'algébrique et du numérique. Toutefois les élèves continuent à utiliser majoritairement des démarches arithmétiques dans des problèmes de preuve et de généralisation. Ce constat nous amène à souligner que, nécessairement, il faut du temps pour que les technologies utilisées par les élèves puissent évoluer vers celles attendues. Il convient de mettre en relation l'évolution des organisations mathématiques apprises avec les conditions mises en place par l'enseignante.

Dans la classe, l'évolution des OM des élèves en algèbre n'a probablement pas été favorisée par deux éléments prioritaires. Premièrement, les conditions mises en place par Garance ont suscité quelques limites : le manque de processus de la tâche visée et de ses enjeux didactiques, le manque d'explicitation des raisons d'être des OM convoquées, le caractère encore trop implicite des types de tâches intermédiaires, l'utilisation trop prononcée d'un discours technologique porté par des formulations d'ordre légal. En effet, il est difficile de faire évoluer le niveau de justification des pratiques algébriques des élèves si le discours de l'enseignant n'est pas adapté. Deuxièmement, force est de constater que Garance n'a probablement pas reçu ou perçu l'importance de certains éléments indispensables à la mise en place des parcours. Du fait de notre manque d'expérience dans l'enseignement et dans la collaboration avec d'autres enseignants, nous n'avons pas assez clairement énoncé les enjeux didactiques des parcours, ni les aspects épistémologiques liés aux expressions algébriques. En effet, nous pensions qu'ils faisaient partie des pratiques habituelles des enseignants et nous n'avions pas conscience qu'ils étaient contraires à ces mêmes pratiques ou en décalage avec elles. Nous établissons le même constat sur les expérimentations menées avec Caroline, l'enseignante de seconde : mêmes difficultés à laisser vivre la conjecture et la nécessité de la valider et à solliciter les aspects procédural et structural des expressions dans la mise en œuvre des parcours.

Nous réalisons à quel point il est important de tenir compte du rapport personnel des enseignants à l'algèbre et à son enseignement. Nous en concluons qu'il est nécessaire d'organiser la mise en place de conditions de diffusion permettant la robustesse des parcours dans l'enseignement ordinaire (Hypothèse 5). A l'avenir, il serait opportun de s'interroger sur le niveau de description des parcours et le rôle de l'enseignant, tout en cherchant impérativement à concilier les objectifs didactiques des parcours et le fait de laisser une marge de manoeuvre de l'enseignant. Toutefois, certains résultats sont très positifs. A travers l'expérimentation montée en liaison avec l'enseignante Garance, nous mettons en évidence l'impact du travail de collaboration dans le cadre du groupe IREM sur l'évolution du rapport personnel qu'elle entretient tant avec l'algèbre qu'avec l'enseignement de l'algèbre. Cela constitue un élément très encourageant de l'expérimentation et du travail collaboratif au sein du groupe IREM. Il va continuer à être étudié dans le cadre de la thèse de Soraya Bedja. Les questions suivantes pourront être envisagées : Quelles conditions mettre en place pour poursuivre le travail collaboratif et favoriser une telle évolution ? Quelles actions de formation proposer, dès la formation initiale des professeurs ? Ce sont des questions importantes, actuellement travaillées dans le cadre de l'ingénierie de développement (Perrin-Glorian, 2011).

6.4 Perspectives

Le constat de la richesse des résultats obtenus par nos travaux et la prise de conscience des limites qu'ils comportent nous conduisent à ouvrir la réflexion sur d'autres perspectives.

Rendre opérationnelle l'automatisation des parcours sur LaboMeP

Le logiciel PépiPad, qui a pour vocation d'automatiser la proposition de parcours sur LaboMeP, est actuellement en cours de finalisation. L'échéance envisagée est fin décembre 2012.

Élargir la réflexion au-delà des expressions algébriques

Nous avons fait le choix de donner à notre étude un périmètre précis : celui des expressions algébriques. Cela nous a parfois freiné dans l'approfondissement de l'écologie de l'algèbre au collège et en seconde. L'une des perspectives à envisager peut être d'étendre le travail engagé aux équations et aux formules et d'élargir la réflexion à d'autres domaines mathématiques et d'autres niveaux scolaires.

Passer du qualitatif au quantitatif pour l'évaluation du modèle à plus grande échelle

Prévue de manière complète et précise à l'origine des travaux, l'évaluation n'a pu être réalisée dans sa globalité, du fait de l'ampleur des analyses didactiques qu'il fallait mener à bien. Elle a seulement fait l'objet d'une analyse d'une étude de cas qualitative de la viabilité du modèle dans l'enseignement ordinaire et d'une analyse quantitative sur un échantillon d'une centaine d'élèves. Il serait donc judicieux d'étudier les évolution des OM apprises des élèves et l'usage des enseignants sur une échelle plus vaste. Cette démarche est envisageable puisque la collaboration avec Sésamath est engagée et qu'une large communauté d'enseignants utilise la plateforme en ligne LaboMep.

Développer les parcours dans des environnements informatiques

Au début du projet, il était prévu que tous les PED soient constitués d'exercices interactifs proposés par Sésamath. Mais l'analyse didactique a révélé la nécessité de convoquer les types de tâches peu présents dans les manuels et dans le vivier d'exercices interactifs. C'est pourquoi les PED sont peuplés majoritairement, sur LaboMeP, d'exercices papier-crayon, mis en ligne parmi les exercices non-interactifs et de quelques exercices interactifs (cf. annexe B). Les outils informatiques ont des potentialités certaines pour proposer des milieux favorisant un travail des élèves au niveau technologique qui soit conforme aux tâches pour lesquelles le calcul algébrique est employé. Par ailleurs, leur utilisation permettrait d'orienter les PED vers l'aide individuelle et le travail personnel de l'élève. Du fait de ces potentialités, deux axes peuvent être envisagés en vue de la perspective de développer les parcours dans des environnements informatiques :

– L'implémentation informatique des exercices composant les parcours. Nous avons commencé à l'envisager pour les exercices. Une première ébauche exploratoire de l'implémentation d'exercices papier-crayon du parcours 2 est présentée à la fin du chapitre 5. Il reste à l'approfondir et la tester auprès des élèves.
– L'utilisation d'environnements informatiques déjà existants. Dans le contexte de Sésamath, il n'est pas été possible, pendant la période de recherche, de travailler sur des logiciels existants. Seuls les outils de l'environnement LaboMep étaient disponibles. Il serait envisageable d'accompagner les PED par l'utilisation d'environnements informatiques , tels que *Aplusix*[1] (cf. §2.2.3) pour travailler le contrôle des calculs et l'équivalence des expressions ou encore Wis-Web[2] pour travailler la flexibilité entre le procédural et le structural.

Donner au diagnostic Pépite des propriétés dynamiques pour faire évoluer l'appartenance d'un élève à un groupe en cours d'année

Dans la configuration actuelle, le diagnostic Pépite affecte un élève à un groupe,

1. `http://www.aplusix.com/`
2. `http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/`

définitivement avant un nouveau passage du test. Il serait pertinent de disposer d'un diagnostic évolutif qui prendrait en compte les évolutions des connaissances des élèves en cours d'année sans la contrainte du passage du test dans son intégralité. Parmi les pistes possibles, deux peuvent être d'ores et déjà évoquées : faire passer aux élèves une seule partie du test ou encore prendre en compte, au fur et à mesure, l'évolution des connaissances de chaque élève individuellement, à partir des résultats qu'il a obtenus dans les exercices interactifs. Bien entendu, il s'agit d'une perspective à long terme, qui nécessite la mise en œuvre de moyens ambitieux.

A l'évidence, cette thèse porte sur un sujet vaste. Nous avons été contraints, à différentes étapes, d'en limiter l'ampleur, afin d'être en mesure de traiter les questionnements de manière précise, complète, cohérente et efficiente. Comme le montrent l'intérêt des analyses réalisées et la mobilisation des équipes suscitée par la pluridisciplinarité du projet, cette étude, menée sur trois années, a été riche en rencontres et en découvertes. Elle l'est aussi en perspectives. Il reste désormais à explorer de nouvelles pistes de réflexion, avec toujours la même ambition : contribuer au développement de l'enseignement des mathématiques.

Références

Abou Raad, N., & Mercier, A. (2009). Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en didactique de mathématiques*, *29*(2), 155-188.

Allal, L., Cardinet, J., & Perrenoud, P. (1979). *L'évaluation formative dans un enseignement différencié.* Peter Lang.

Artigue, M. (2009). Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, *29*(3), 305-334.

Artigue, M., & Gueudet, G. (2008). Ressources en ligne et enseignement des mathématiques. In *Conférence à l'Université d'été de mathématiques, Saint-Flour.* Disponible sur `http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/prog\_UE\_2008.htm`

Artigue, M., Lenfant, A., & Roditi, E. (2003). La confrontation de cadres théoriques dans l'analyse didactique de vidéos réalisées dans des classes. In J. Colomb, J. Douaire, & R. Noirfalise (Eds.), *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes* (p. 103-137). Paris : I.N.R.P.

Artigue, M., & Winslow, C. (2010). International Comparative Studies on Mathematics Education : a Viewpoint From the Anthropological Theory of Didactics. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*(1), 47-82.

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J., & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 179-188.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*.

Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x*, *80*, 55-76.

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique.* Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Bautier, E. (2005). Mobilisation de soi, exigences langagières scolaires et processus de différenciation. *Langage et Société*, *111*, 51-72.

Bautier, E. (2007). Pratiques scolaires et inégalités sociales. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : cours de la 13e École d'Été de didactique des mathématiques, Sainte-Livrade, Lot-et-Garonne, du 18 au 16 août 2005* (p. 135-152). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2010a). Digital Tools for Algebra Education : Criteria and Evaluation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*, 45-62.

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2010b). Symbol sense behavior in digital activities. *For the Learning of Mathematics*, *30*(3), 43-49.

Bolon, J. (2002). Pédagogie différenciée en mathématiques : mission impossible ou défi ? *Grand N*, *69*, 63-82.

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, *5*, 5-17.

Bosch, M. (2012). Doing research within the anthropological theory of the didactic : the case of school algebra. In *Proceedings du 12èmeInternational Congress on Mathematical Education, du 8 au 15 juillet 2012, COEX, Séoul, Korea.*

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio : Analisis de organizaciones didacticas espontaneas. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(1), 79-136.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique de mathématiques*, *24.2*(3), 205-250.

Bosch, M., & Gascón, J. (2003). Les praxéologies didactiques. Cours 2 - Théories & Empiries. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 21 au 30 août 2001* (p. 23-40). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère) . Du 20 au 29 août 2003* (p. 107-122). Grenoble : La

Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique de mathématiques*, *19*(3), 303-336.

Butlen, D., & Pezard, M. (1991). Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée. *Grand N*, *50*, 29-58.

Butlen, P., D. & Masselot. (1998). Une approche didactique de la question de la « pédagogie différenciée » en formation continue des professeurs d'école : un scénario de stage. In R. Douady & C. permanante des IREM sur l'enseignement élémentaire (Eds.), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques : issu du stage de Besançon, 24-28 mars 1997.* (Vol. VI). Paris : IREM Université de Paris 7.

Castela, C. (2007). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : cours de la 13e École d'été de didactique des mathématiques, Sainte-Livrade, Lot-et-Garonne, du 18 au 16 août 2005* (p. 89-114). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *28*(2), 135-182.

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., & Vandebrouck, F. (2006). Using e-exercices bases in mathematics : case studies at university. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 327-350.

Cerulli, M., & Mariotti, M. A. (2009). L'Algebrista : un micromode pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. *Sciences et techniques educatives*, *9*, 149-170. (Traduction par Élisabeth Delozanne et Caroline Bardini)

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas : la modélisation des connaissances des élèves.* Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Joseph-Fourier Grenoble I, Grenoble.

Chalancon, F., Coppé, S., & Pascal, N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x*, *58*, 23-41.

Charnay, R. (1995). De la diversité. In R. Charnay et al. (Eds.), *Chacun, tous... Différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages* (p. 9-29). Lyon : I.N.R.P.

Charnay, R., & Mante, M. (1992). De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de re-médiation. Quelques pistes... *Repères - IREM*, *7*, 5-32.

Chenevotot, F., & Grugeon, B. (2009). Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité. In C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes du colloque DIDIREM. Approches plurielles en didactique des mathématiques - Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : Quoi de neuf ?* (p. 141-149). Paris : Université Paris Diderot - Paris 7 - L.D.A.R.

Chenevotot, F., Grugeon, B., & Delozanne, E. (2009). Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In A. Kuzniak & M. Sokhna (Eds.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : Enjeux de société et de formation* (p. 837-842). Dakar. Disponible sur `http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/Groupe%20N%2006.html`

Chenevotot, F., Grugeon, B., Pilet, J., & Delozanne, E. (2012). De la conception à l'usage d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne. In J.-L. Dorier (Ed.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, Enseignement et contrat social : Enjeux et défis pour le 21ème siècle, EMF 2012, Genève, février 2012* (p. 808-823). Disponible sur `http://www.emf2012.unige.ch/index.php?option=com_content&view=article&id=57`

Chevallard, Y. (1985a). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-72.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, *23*, 1990.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-111.

Chevallard, Y. (1993). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. In C. Margolinas (Ed.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques.* (p. 190-200). Paris : IREM Université de Paris 7.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'École d'été de la Rochelle, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle* (p. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2003). Les praxéologies didactiques. Cours 3 - Ecologie & Régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques, Corps (Isère), du 21 au 30 août 2001* (p. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2004, mars). *Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions : déplacements, ruptures, refondation.* Disponible sur `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=44`

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Publication de l'APMEP*, *168*, 239-263.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnements et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Recherches en didactique de mathématiques. Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, *hors-série*, 19-40.

Chopin, M.-P. (2011). *Le temps de l'enseignement. L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe.* Rennes : P.U.R.

Chua, B.-L., & Hoyles, C. (2011). Secondary school students' perception of best help generalising stratégies. In M. Pytlak & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszow, Pologne, du 9 au 13 février 2011.* Rzeszow, Poland : University of Rzeszow.

Combier, G., Guillaume, J.-C., & Pressiat, A. (1995). *Calcul littéral : Savoirs des élèves de collège* (J. Colomb, Ed.). France : INRP.

Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I.

Coulange, L., & Grugeon, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmission de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, *78*, 5-23.

Coulange, L., & Margolinas, C. (2007). Différenciations et hétérogénéités, étude d'une question vive. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : cours de la 13e École d'été de didactique des mathématiques, Sainte-Livrade, Lot-et-Garonne, du 18 au 16 août 2005* (p. 85-87). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Croset, M.-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Éude des erreurs stables inter-élèves et intra-élèves en termes de praxis-en-acte.* Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier Grenoble I, Grenoble.

Darwesh, A. (2010). *Diagnostic cognitif en E.I.A.H. : le système PépiMeP.* Thèse de doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris.

Delozanne, E. (2006). Interfaces en EIAH. In M. Grandbastien & J.-M. Labat (Eds.), *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain* (p. 233-244). Hermes-Lavoisier.

Delozanne, E., Grugeon, B., Artigue, M., Rogalski, J., & Chenevotot, F. (2005, mars). *Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT, Projet Cognitique, École et sciences cognitives : Les apprentissages et leurs dysfonctionnements* (Rapport de fin de projet). Disponible sur `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Publi2000-.htm.`

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2008). Automatic Multi-Criteria Assessment of Open-Ended Questions : a Case Study in School Algebra. In I. C. on Intellingent Tutoring Systems (Ed.), *Intelligent Tutoring Systems : 9th International Conference, ITS 2008, Montreal, Canada, June 23-27, 2008 : proceedings* (Vol. 101-110). New York : Springer.

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétences. *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, *29*(8-9), 899-938.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique de mathématiques*, *7*(2), 5-32.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Bern : Perter Lang.

El-Kechai, N., Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2011). Evaluating the performance of a Diagnosis System in School Algebra. In H. Leung & al. (Eds.), *ICWL 2011, LNCS 7048* (p. 263-272).

El-Mouhayar, R. (2007). *Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15) dans le cas de l'algèbre en France et au Liban.* Thèse de doctorat, Université Lumière Lyon 2 et Université Libanaise.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2000). *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques.* Thèse de doctorat non publiée, Université Bordeaux I.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra.* A *theoretical and Empirical Approach* (Vol. 43). New York : Springer.

Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques.* Paris : Éditions du Seuil. (Traduction de Claude Imbert)

Frère, D. (1997). *Différencier la pédagogie en mathématiques. Classe de 4e.* Créteil : CRDP Académie de Créteil.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, *37*, 43-63.

Grugeon, B. (1995). *Etudes des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire à la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(2), 167-210.

Grugeon, B. (2009). *Quelques apports de l'analyse multidimensionnelle : activités des élèves et pratiques des professeurs de mathématiques ; vers une modélisation.* Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Diderot, Paris 7, Paris.

Grugeon, B., Chenevotot, F., Pilet, J., & Delozanne, E. (à paraître en 2013). Development and use of a diagnostic tool in elementary algebra using an online item bank. In B. Barton & S. Je Cho (Eds.), *Proceedings of International Congress on Mathematical Education, ICME 2012, Séoul, Corée, du 8 au 15 juillet 2012* (p. 10).

Grugeon, B., Coulange, L., & Larue, V. (2003, juin). Famille de situations d'interactions en algèbre élémentaire : deux exemples. In *Actes du colloque Intégration des Technologies dans l'Enseignement à Reims.* IUFM de Reims. Disponible sur `http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom`

Grugeon, B., Delozanne, E., Pilet, J., & Chenevotot-Quentin, F. (2010, décembre). *Projet de recherche « Conception et diffusion de ressources en ligne pour gérer la diversité cognitive des élèves et favoriser leur réussite dans l'apprentissage de l'algèbre », Rapport de recherche, Projet PICRI 2009, Programme « Partenariats Institutions - Citoyens pour la Recherche et l'Innovation » du Conseil Régional d'Ile-de-France* (Rapport intermédiaire). LDAR, LIP6, Sésamath. Disponible sur `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm`

Grugeon, B., Delozanne, E., Pilet, J., & Chenevotot-Quentin, F. (2011, décembre). *Projet de recherche « Conception et diffusion de ressources en ligne pour gérer la diversité cognitive des élèves et favoriser leur réussite dans l'apprentissage de l'algèbre », Rapport de recherche, Projet PICRI 2009, Programme « Partenariats Institutions - Citoyens pour la Recherche et l'Innovation » du Conseil Régional d'Ile-de-France* (Rapport intermédiaire). LDAR, LIP6, Sésamath. Disponible sur `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm`

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique de mathématiques*, *Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, hors série*, 137-162.

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Delozanne, E., Chenevotot-Quentin, F., Vincent, C., Prévit, D., et al. (2011). PepiMeP : différencier l'enseignement du calcul algébrique en s'appuyant sur des outils de diagnotic. *MathémaTICE*, *24*. Disponible sur `http://revue.sesamath.net/spip.php?article338`

Hyperpro, G. (2009, avril). Travailler avec Mathenpoche autrement ? *Repères - IREM*, *75*, 69-83.

Jean, S. (2000). *PEPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétence.* Thèse de doctorat, Université du Maine.

Jean-Daubias, S. (2002). Un système d'assistance au diagnotic de coméptences en algèbre élémentaire. *Sciences et techniques éducatives*, *9*(2), 171-200.

Kahn, S. (2012). *Pédagogie différenciée.* Bruxelles : De Boeck.

Ketterlin-Geller, L. R., & Yovanoff, P. (2009, October). Diagnostic Assessments in Mathematics to Support Instructional Decision Making. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, *14*(16), 1-11.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws

(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 390-415). New York, NY, England : Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, L. C., & A. Pérez (Eds.), *Eighth International Congress on Mathematical Education : Selected lectures* (p. 271-290). Seville, Spain : S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-years-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 187-228.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 707-762). Charlotte, NC : I.A.P.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (p. 102-119). London : John.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seonde : un problème de la profession.* Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, Montpellier.

Larguier, M. (2012). La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession en seconde. *Recherches en didactique de mathématiques*, *32*(1), 101-144.

Lemoyne, G., Conne, F., & Brun, J. (1993). Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique de mathématiques*, *13*(3), 333-384.

Mackay, W. E., & Fayard, A.-L. (1997). HCI, Natural Science and Design : A Framework for Triangulation Across Disciplines. In *Designing Interactive Systems, ACM, Amsterdam, 18-20 August 1997* (p. 223-234).

Maurice, J.-J., & Murillo, A. (2008, janvier-février-mars). La Distance à la performance attendue : un indicateur des choix de l'enseignant en fonction du potentiel de chaque élève. *Revue Française de Pédagogie*, *162*, 67-79.

Meirieu, P. (2005). *Le choix d'éduquer. Éthique et pédagogies.* ESF.

Mercier, A. (1995). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. *Recherches en didactique de* *mathématiques*, *15*(1), 97-142.

Nicaud, J.-F. (1994). Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX. *Recherches en didactique de mathématiques*, *14*(1.2), 67-112.

Nicaud, J.-F. (2005, Mai). Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique. Rapport de fin de projet de l'ACI. Ecole et sciences cognitives. *Les cahiers Leibniz*, *123*, 1-140. Disponible sur `http://www-leibniz.imag.fr`

Perrenoud, P. (1998). Où vont les pédagogies différencié ? Vers l'individualisation du curriculum et des parcours de formation. *Educar (Universitat Autonoma de Barcelona)*, *22-23*, 11-34. Disponible sur `http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php\_main/php\_1996/1996\_32.html`

Perrenoud, P. (2012). *L'organisation du travail, clé de toute pédagogie différenciée.* Issy-les-Moulineaux, Paris : ESF.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas (Ed.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (Vol. 1, p. 57-78). Grenoble : La pensée sauvage.

Pilet, J. (2009). *Le rapport de la base d'exercices en ligne Mathenpoche au calcul algébrique : vers une évolution de Mathenpoche.* Mémoire de master, Université Paris-Diderot Paris 7, Paris.

Pilet, J. (2010). Differentiated Learning Routes for School Algebra Using Online Database Systems. In *Proceedings of the Fifth YERME Summer School, Poggio San Francesco, Italie, du 19 au 24 août 2010.* (p. 10).

Pilet, J. (2011). Differentiated Learning Routes for School Algebra using Online Database Systems. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszow, Pologne, du 9 au 13 février 2011* (p. 2918-2919). Rzeszow, Poland : University of Rzeszow.

Pilet, J. (à paraître en 2013). Vers la conception d'un modèle de parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In A. Bronner (Ed.), *Actes de la 16ème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Carcassonne, France, du 21 au 28 août 2011* (p. 5).

Pilet, J., Grugeon, B., Delozanne, E., & Chenevotot-Quentin, F. (2010, mars). *Projet de recherche « Conception et diffusion de ressources en ligne pour gérer la diversité cognitive des élèves et favoriser leur réussite dans l'apprentissage de l'algèbre », Rapport de recherche, Projet PICRI 2009, Programme « Partena-*

riats Institutions - Citoyens pour la Recherche et l'Innovation » du Conseil Régional d'Ile-de-France. Livrable 1 « Etat des ressources existantes de la plateforme de Sésamath et de leurs usages » (Rapport intermédiaire). LDAR, LIP6, Sésamath. Disponible sur `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm`

Przesmycki, H. (2008). *La pédagogie différenciée.* Hachette.

Prévit, D. (2008). *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes : PépiGen, un système auteur en algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans.

Radford, L. (2004). Syntax and Meaning. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (PME28)* (Vol. 1). Bergen University College.

Radford, L., & Grenier, M. (1996). « Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre ». *Revue des Sciences de l'Éducation*, *22*(2), 253-256.

Robert, A. (2008a). Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse : Octares.

Robert, A. (2008b). Une méthologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 46-57). Toulouse : Octares.

Rochex, J.-Y., & Crinon, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement.* Rennes : P.U.R.

Rogalski, J. (2005). *Rapport d'activité sur l'axe instrumentation de l'activité des enseignants. Chapitre 4 de Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT, Projet Cognitique, École et sciences cognitives : Les apprentissages et leurs dysfonctionnements* (Rapport de fin de projet). Disponible sur `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Publi2000-.htm`.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarollo hacia la modelización funcional.* Thèse de doctorat, Univesité Autonome de Barcelone.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches* *en didactique de mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, *Hors-série*, 87-106.

Sabra, H. (2009). Entre le monde du professeur et le monde du collectif : réflexions sur la dynamique de l'association Sésamath. *Petit x*, *81*, 55-78.

Sabra, H. (2011). *Contribution à l'étude du travail documentaire des enseignants de mathématiques : les incidents comme révélateurs des rapports entre documentations individuelle et communautaire.* Thèse de doctorat non publiée, Université Claude Berndard Lyon 1.

Sarrazy, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 89-117.

Sarrazy, B. (2007). Différencier les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. Tenants idéologiques et enjeux didactiques. In A. Rouchier & al. (Eds.), *Actes de la 13e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 115-134). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Sensevy, G., Maurice, C. J., J-J, & Murillo, A. (2008). La différenciation didactique passive : un essai de définition et d'illustration. *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, *20*, 105-122.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique* (1ère éd.). Paris : Pétra.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra : Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 15-39.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification - The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Squalli, H. (2003). *Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre.* Editions Bande Didactique.

Tonnelle, J. (1980). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle.* Aix-Marseille : IREM Aix-Marseille.

Vandebrouck, F. (2008). *La classe de mathématique : activités des élèves et pratiques des enseignants* (1ère éd.). Toulouse : Octares.

Vergnaud, G. (1989a). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs : Obstacles et conflits. Colloque international, obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif* (p. 33-40). Ottawa : CIRADE, Agence d'Arc.

Vergnaud, G. (1989b). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs : Obstacles et conflits. Colloque international, obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif* (p. 76-83). Ottawa : CIRADE, Agence d'Arc.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique de mathématiques*, *10.2*(3), 133-170.

Vergnaud, G., Cortes, A., & Favre-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 259-288). La Pensée Sauvage.

Vincent, C., Delozanne, E., Grugeon, B., Gélis, J., Rogalski, J., Coulange, L., et al. (2005, mai). Des erreurs aux stéréotypes : des modèles cognitifs de différents niveaux dans le projet Pépite. In *Actes du colloque Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain, Montpellier, France* (p. 297-308). I.N.R.P.

Annexes

Annexe A

Le test diagnostic Pépite

Dans cette annexe, nous commençons par illustrer les tâches diagnostiques Pépite présentées dans le chapitre 4, §4.1 (§A.1). Puis, nous donnons un exemple de codage de réponses des élèves sur l'exercice 9 du prestidigitateur (§A.2). Ce codage ainsi que l'automatisation de l'analyse des réponses résultent des travaux de Prévit (2008). Enfin, nous donnons l'algorithme du calcul du stéréotype (§A.3). Les documents présentés sont extraits du rapport intermédiaire de 2010 du projet PépiMeP (Grugeon et al., 2010). Il est disponible à l'adresse `http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm`.

A.1 Les tâches diagnostiques

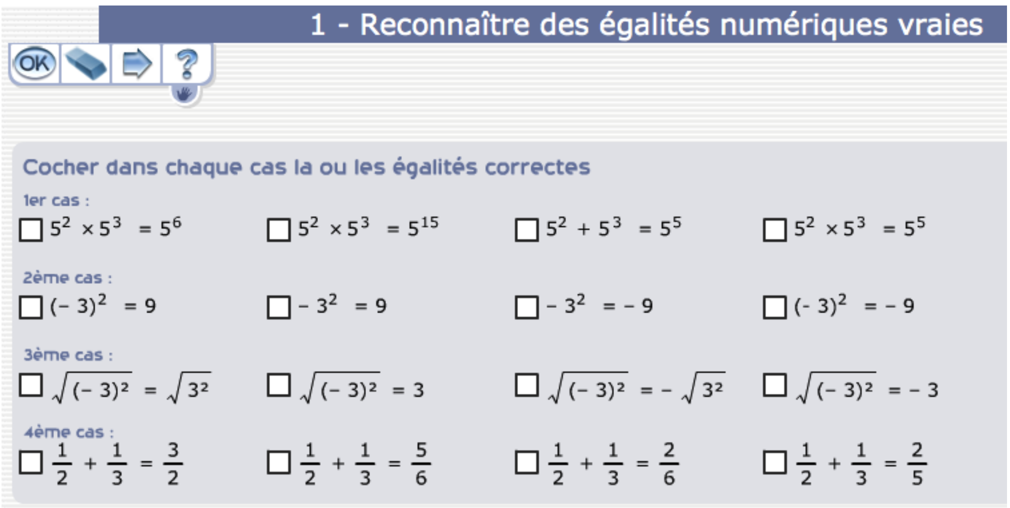


FIGURE A.1 – Exercice 1

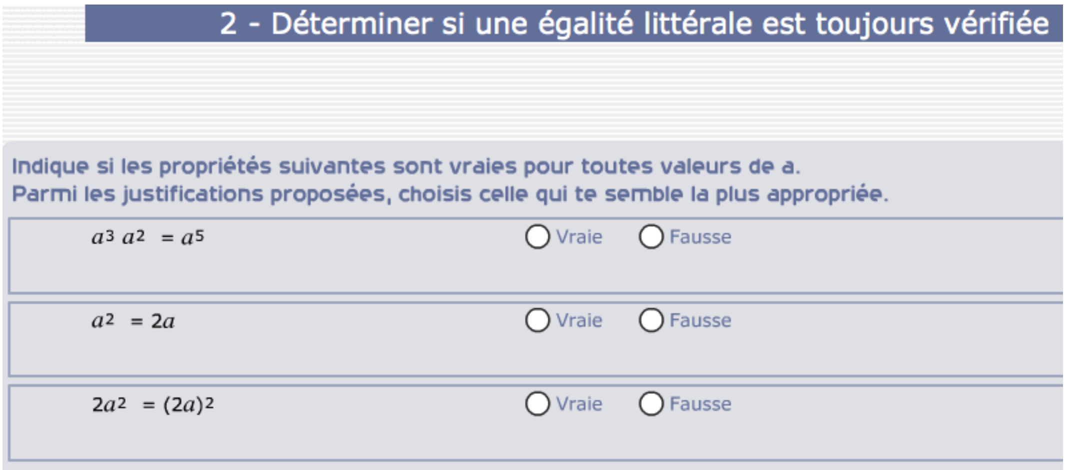


Figure A.2 – Exercice 2

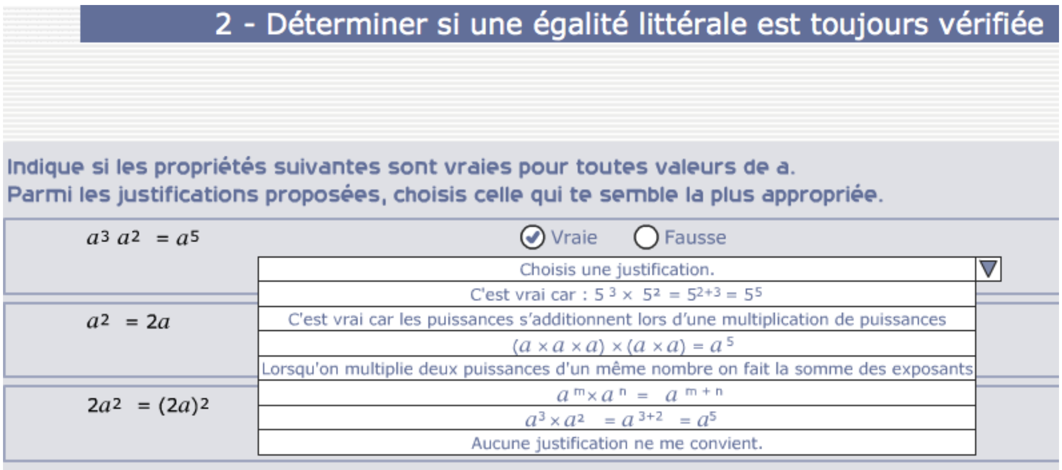


Figure A.3 – Exercice 2 - Choix d'une justification

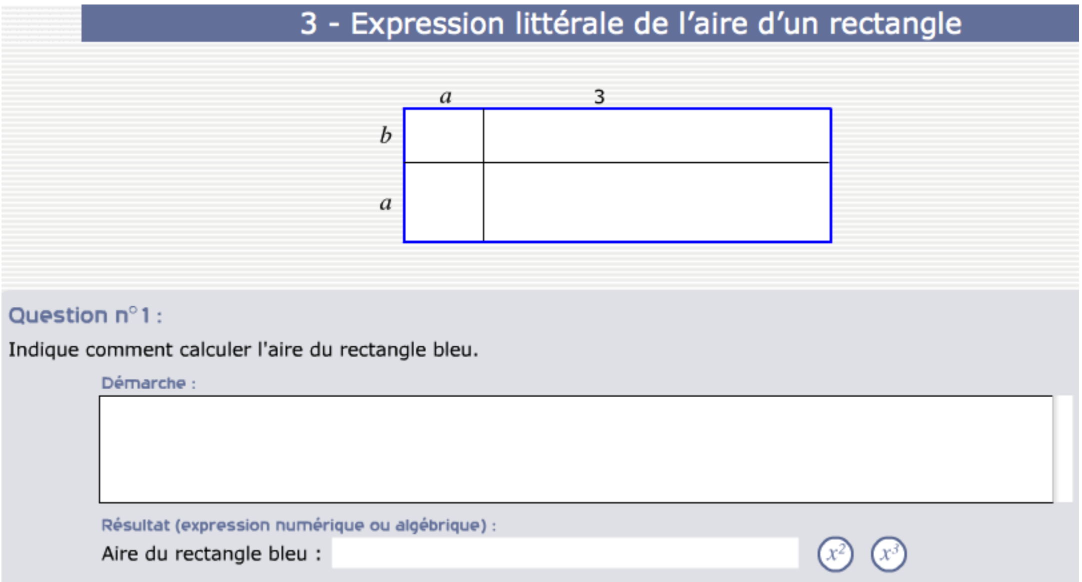


FIGURE A.4 – Exercice 3 - Question 1

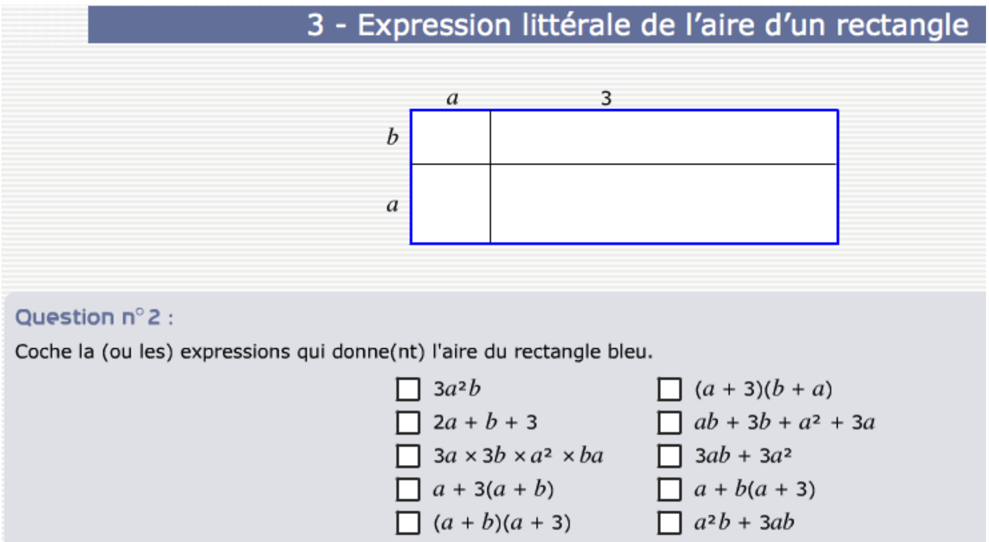


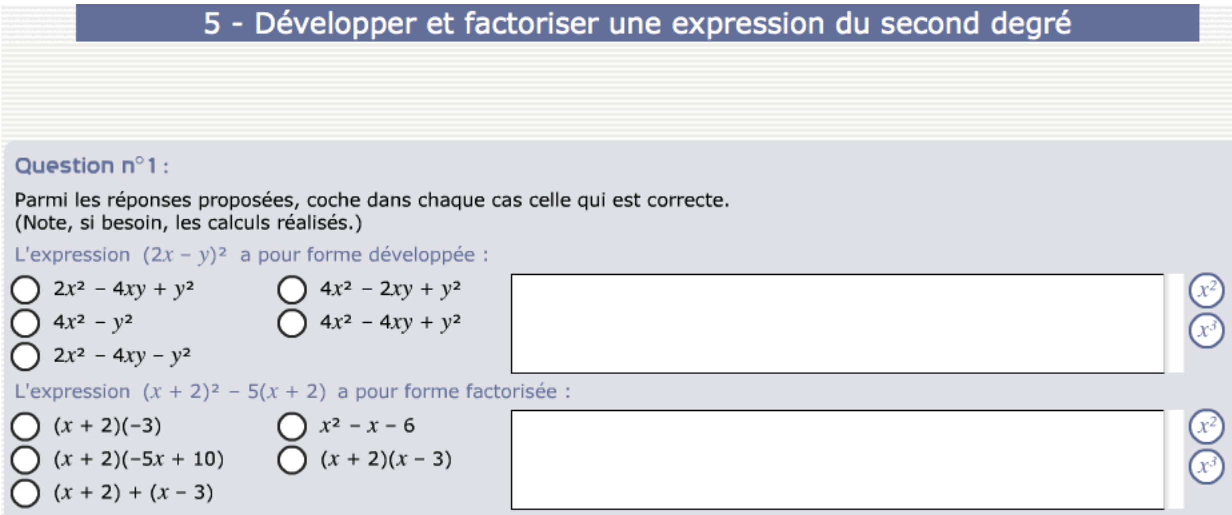
FIGURE A.5 – Exercice 3 - Question 2

4 - Déterminer si une égalité littérale est toujours vérifiée (bis)

Indique si les propriétés suivantes sont vraies pour toutes valeurs de a. Justifie.

$a^3 a^2 = a^6$	Vraie	Fausse
$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	Vraie	Fausse
$a^2 = a + a$	Vraie	Fausse
$(a + 2)^2 = a^2 + 4$	Vraie	Fausse
$3 + 5a = 8a$	Vraie	Fausse

FIGURE A.6 – Exercice 4



5 - Développer et factoriser une expression du second degré

Question n°1 :

Parmi les réponses proposées, coche dans chaque cas celle qui est correcte.
(Note, si besoin, les calculs réalisés.)

L'expression $(2x - y)^2$ a pour forme développée :

- $2x^2 - 4xy + y^2$
- $4x^2 - 2xy + y^2$
- $4x^2 - y^2$
- $4x^2 - 4xy + y^2$
- $2x^2 - 4xy - y^2$

L'expression $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$ a pour forme factorisée :

- $(x + 2)(-3)$
- $x^2 - x - 6$
- $(x + 2)(-5x + 10)$
- $(x + 2)(x - 3)$
- $(x + 2) + (x - 3)$

FIGURE A.7 – Exercice 5 - Question 1

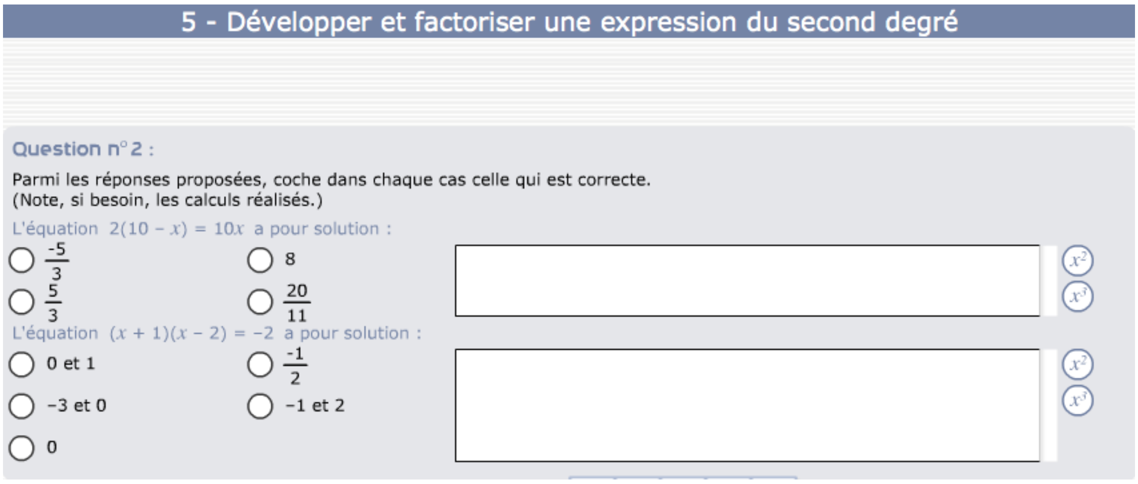


Figure A.8 – Exercice 5 - Question 2

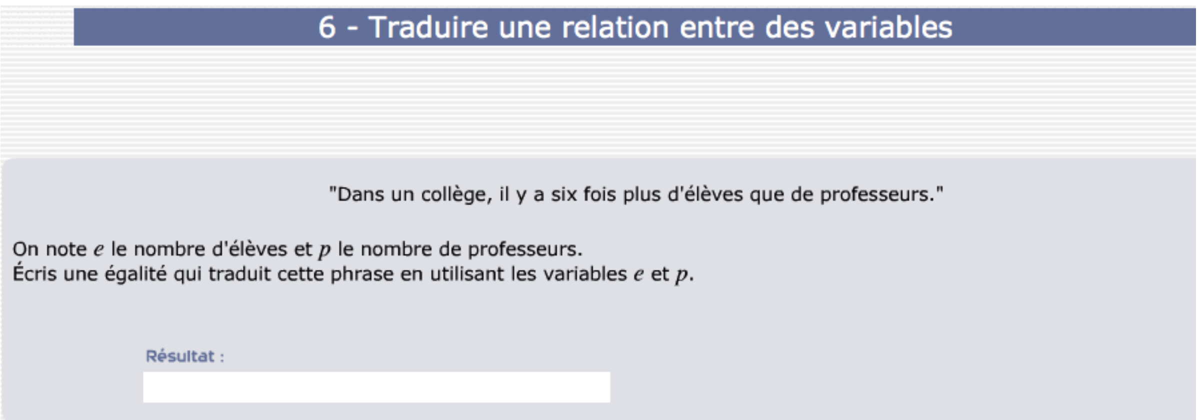


Figure A.9 – Exercice 6

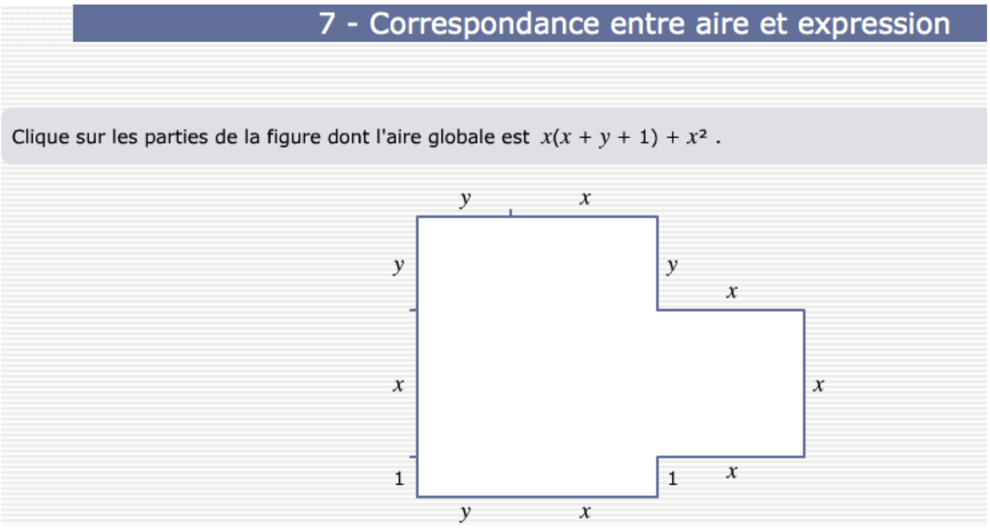


FIGURE A.10 – Exercice 7

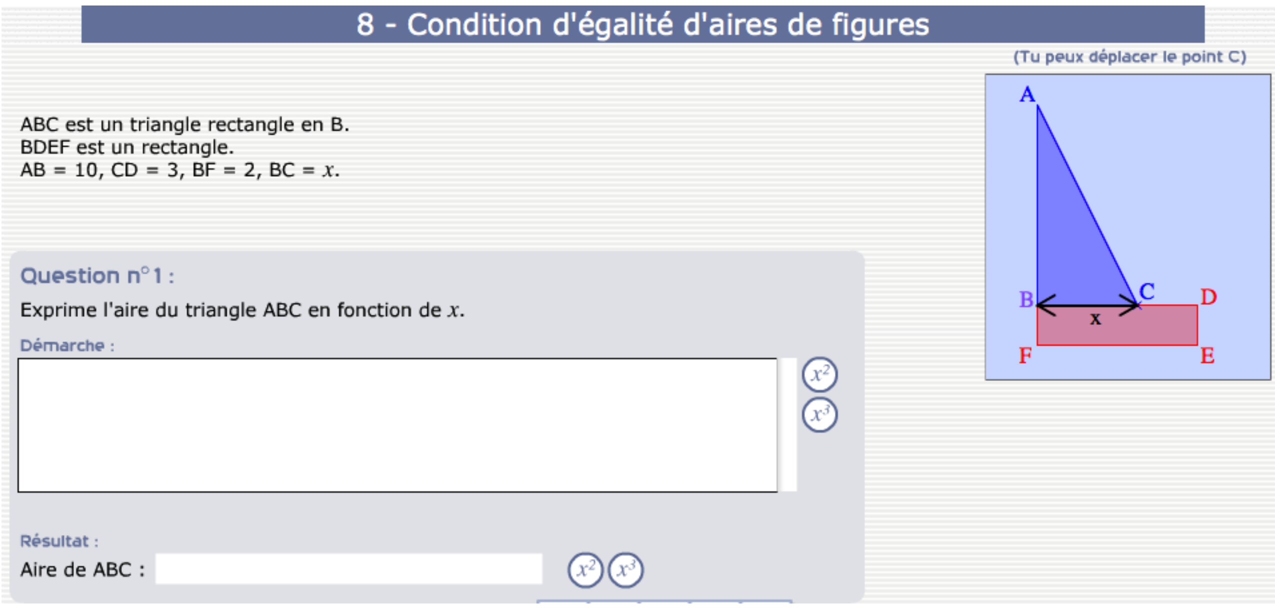


FIGURE A.11 – Exercice 8 - Question 1

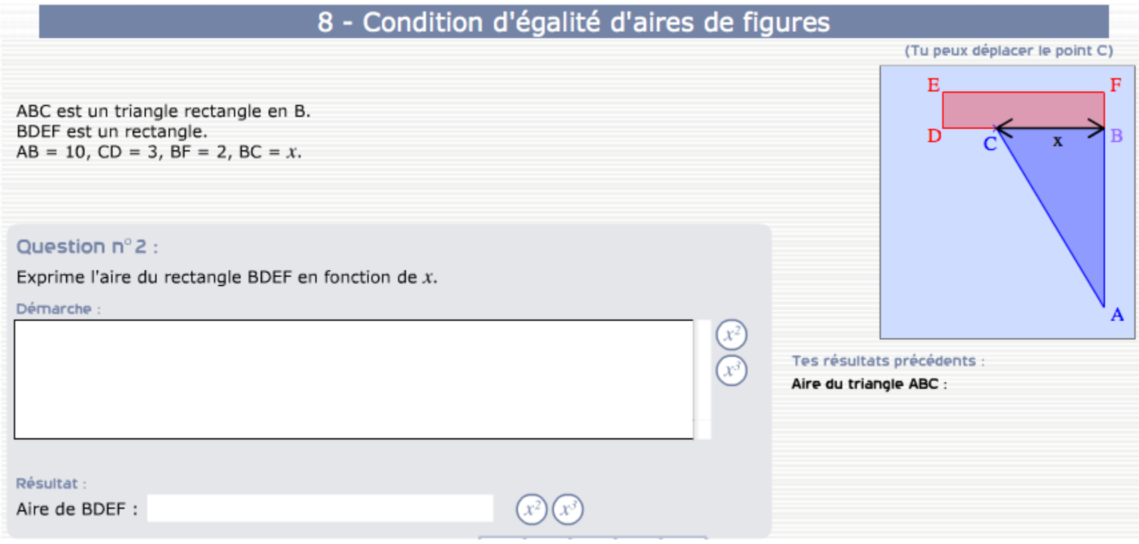


FIGURE A.12 – Exercice 8 - Question 2

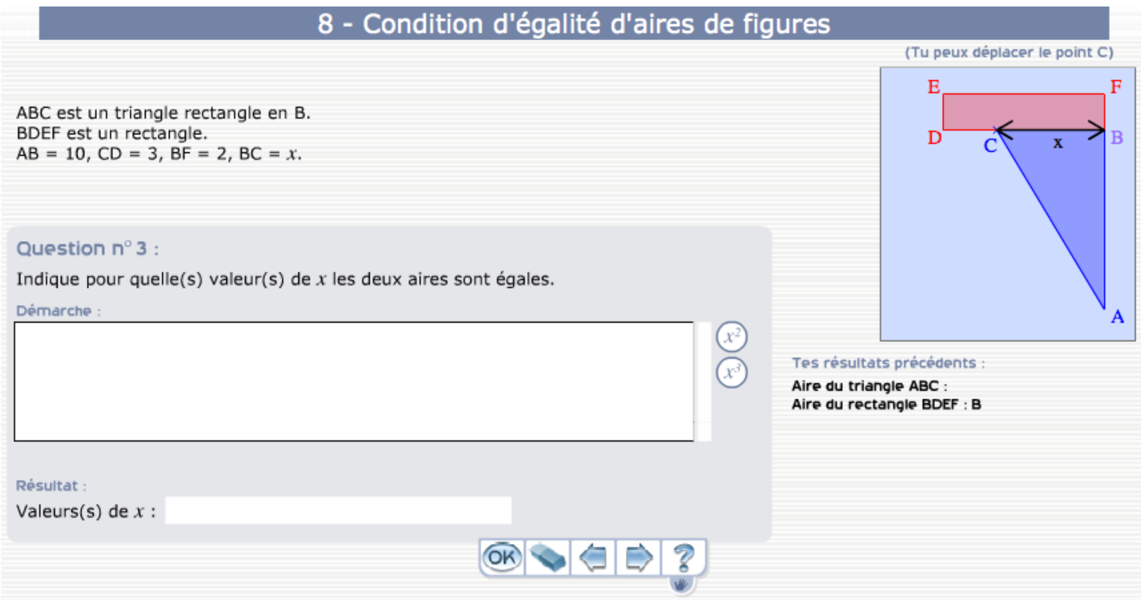


FIGURE A.13 – Exercice 8 - Question 3

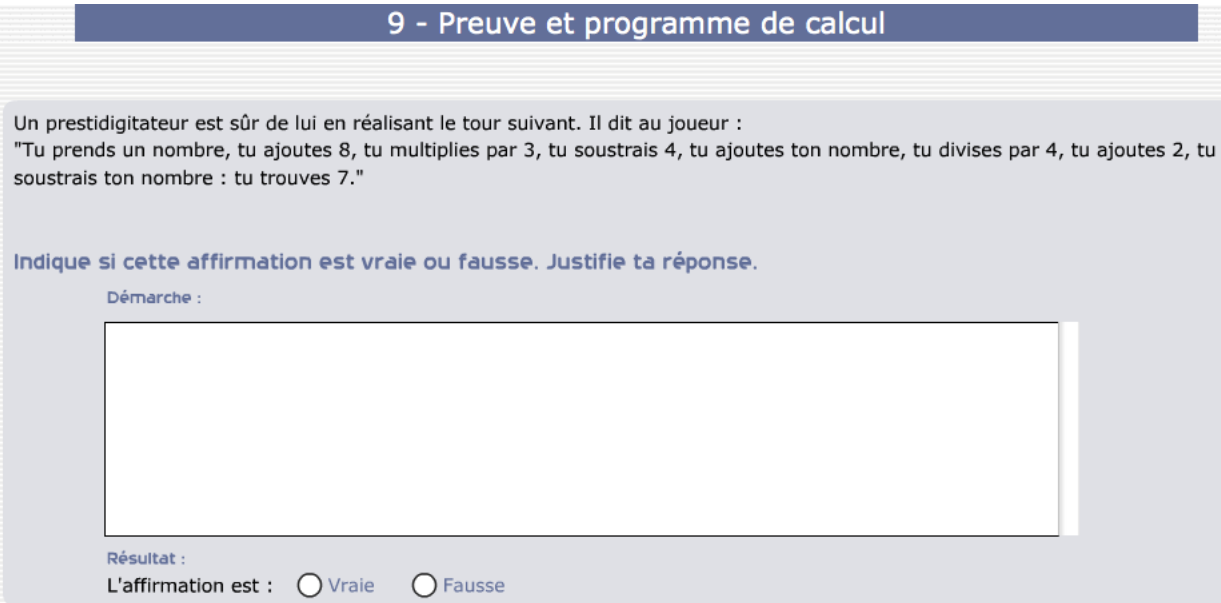


FIGURE A.14 – Exercice 9

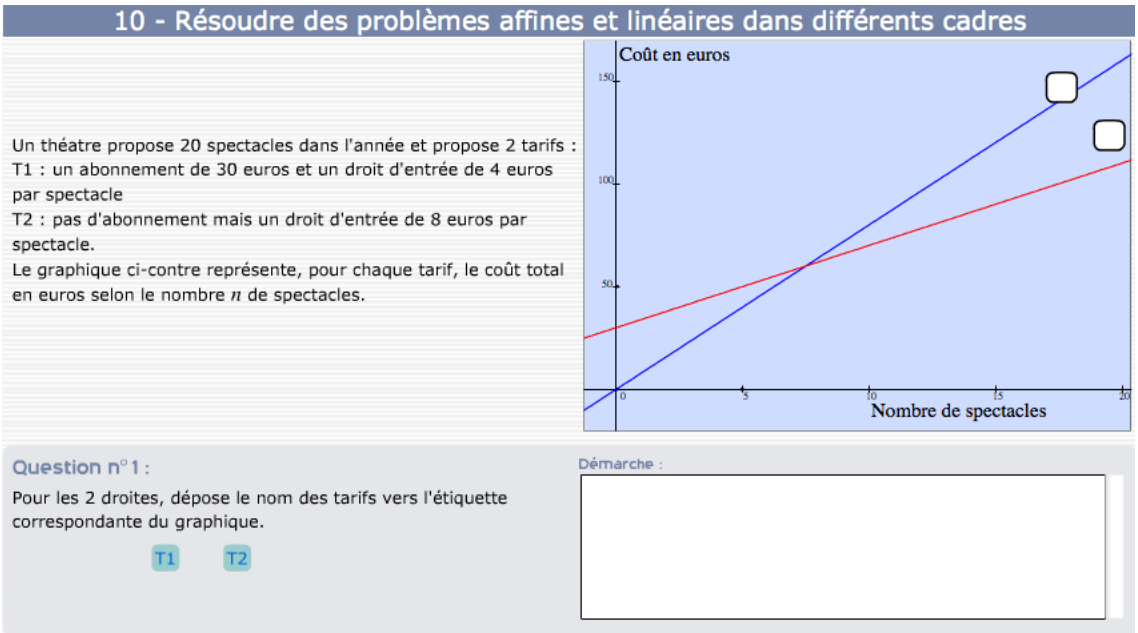


FIGURE A.15 – Exercice 10 - Question 1

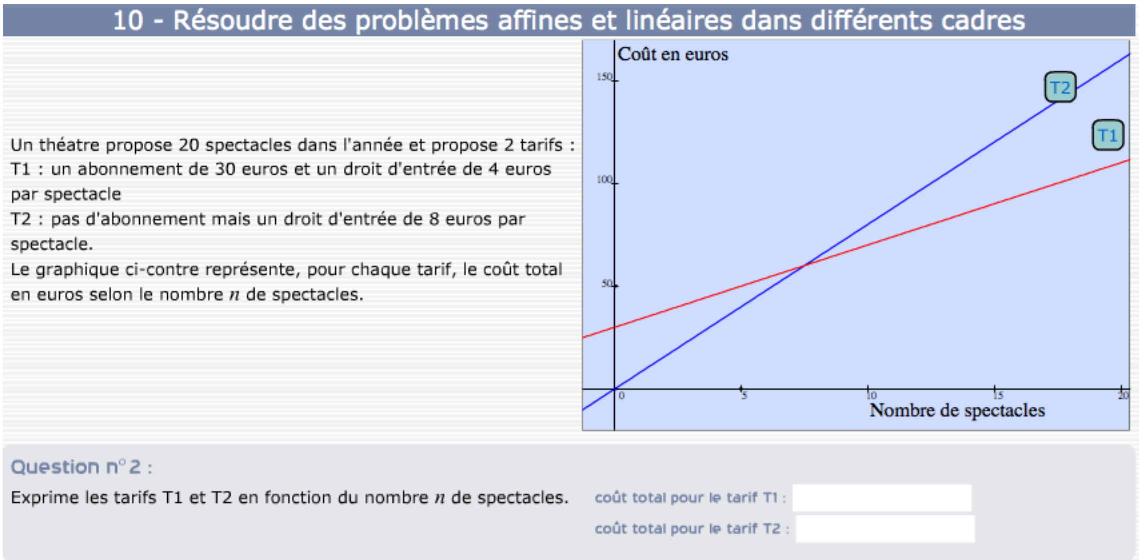


FIGURE A.16 – Exercice 10 - Question 2

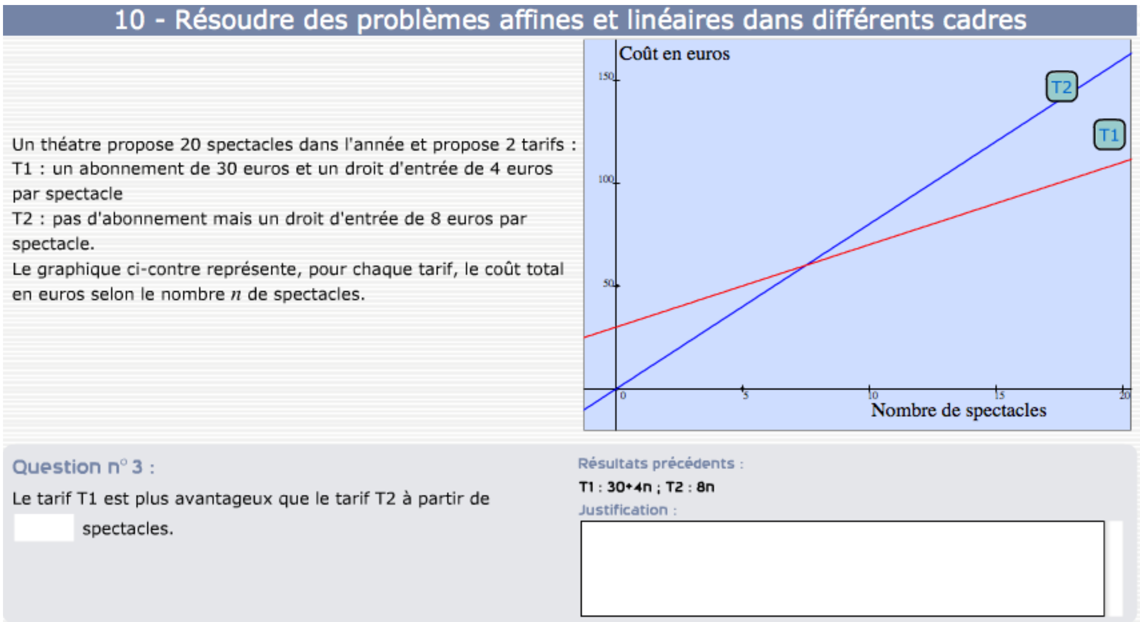


FIGURE A.17 – Exercice 10 - Question 3

A.2 Le codage des réponses des élèves sur l'exercice 9 du test Pépite

Le codage des réponses des élèves sur l'exercice 9 du test Pépite est extrait du rapport intermédiaire de 2010 du projet PépiMeP (Grugeon et al., 2010, p. 52).

	Résolution correcte de l'équation obtenue à partir d'une mise en équation incorrecte Résolution correcte à partir d'une écriture fausse non parenthésée	EA31 L1
Solutions incorrectes	Réponses incorrectes : Erreurs dans la résolution d'équation d'un des types suivant : développement incorrect : par ex, l'équation devient $5x = 2x+1$ $ax = b$ soit $x = -\frac{b}{a}$ (division des deux membres par $-b$) $ax = b$ soit $x = b - a$ $ax = b$ soit $x = \frac{a}{b}$ Essais successifs sans mise en équation Résolution de l'équation par essais successifs	V3 L1 EA32 L1 EA33 L3 EA41 EA3 EA42 L5 L2
Absence de solution		V0

Tableau 50 : Caractérisation du diagnostic local dans la thèse de Grugeon de la question 3 de la classe d'exercices « Aires de figure composées et équations » (d'après Grugeon 95)

Algorithme de diagnostic

Cf. question 1 de la classe d'exercice « Expression littérale de l'aire d'un rectangle ».

9- Exercice 16 : Preuve et programme du calcul (travail de D. Prévit)

Interface dans PépiMeP

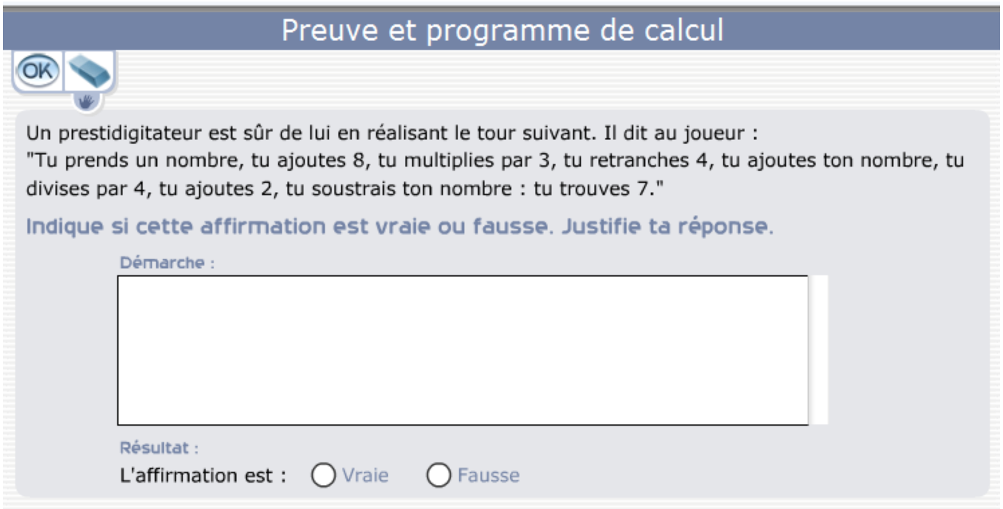


Figure 14 : PépiMeP : interface du clone originel de la classe d'exercices « preuve et programme du calcul »

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Étudier - le type de preuve utilisée (preuve par l'exemple ou preuve algébrique) pour prouver qu'un énoncé est vrai - le type de traitement algébrique mobilisé (utilisation d'une expression globale parenthésée ou calculs pas à pas faisant apparaître les résultats intermédiaires) - la gestion de l'articulation entre différentes représentations (algébrique,

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">arithmétique et langage naturel)
- la signification accordée au signe d'égalité</td></tr>
<tr><td>Composantes</td><td colspan="6">1 - Effectuer du calcul algébrique
2 - Utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes
3 - Traduire algébriquement dans différents cadres (géométrique, graphique, langage naturel)</td></tr>
<tr><td>Capacités</td><td colspan="6">- Composante 1 : Réduire une expression littérale
- Composante 2 : Produire une expression littérale, démontrer des règles de calcul, des propriétés, des identités
- Composante 3 : Traduire un programme de calcul en langage naturel en une expression algébrique » pour la troisième</td></tr>
<tr><td>Type de tâche</td><td colspan="6">- Produire une expression littérale à partir d'un programme de calcul
- Prouver qu'une affirmation est vraie</td></tr>
<tr><td rowspan="11">Critères d'évaluation</td><td colspan="6">V1, V2, V3 : critères d'évaluation de la dimension « Validité »</td></tr>
<tr><td colspan="2">V1 : correct</td><td colspan="2">V2 : correct partiel ou non attendu</td><td colspan="2">V3 : incorrect</td></tr>
<tr><td colspan="6">L1, L2,L3, L5 : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des lettres »</td></tr>
<tr><td colspan="6">L1 : Utilisation correcte des lettres
L2 : Utilisation des lettres pour leur substituer des valeurs numériques
L3 : Utilisation des lettres pour faire du calcul algébrique avec des règles fausses
L5 : Aucune utilisation des lettres</td></tr>
<tr><td colspan="6">EA1, EA2, EA31, EA32, EA33, EA41, EA42 : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Écriture et de réécriture Algébrique »</td></tr>
<tr><td colspan="6">EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation
EA2 : Maîtrise technique fragile
EA31 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat correct
EA32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect
EA33 : Utilisation de règles de transformation fausses identifiées
EA41 : Les règles de transformation utilisées linéarisent les expressions :
EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes</td></tr>
<tr><td colspan="6">T122, T222, T322, T422 : critères d'évaluation de la dimension « Traduction »</td></tr>
<tr><td colspan="3">T122 : Traduction correcte de langue naturelle vers l'algèbre</td><td colspan="3">T322 : Traduction incorrecte de langue naturelle vers l'algèbre</td></tr>
<tr><td colspan="3">T222 : Traduction correcte non attendue de langue naturelle vers l'algèbre</td><td colspan="3">T422 : Traduction abréviative de langue naturelle vers l'algèbre</td></tr>
<tr><td colspan="6">J1, J2, J3 : critères d'évaluation de la dimension « Type de justification »</td></tr>
<tr><td colspan="3">J1 : Justification par l'algèbre
J2 : Justification par l'exemple numérique</td><td colspan="3">J3 : Justification de type scolaire</td></tr>
</table>

Tableau 51 : Caractérisation didactique de la classe d'exercice « preuve et programme de calcul »

Caractérisation de l'interface et de l'énoncé

Interface	
- Une énoncé composé d'un programme de calcul exprimé en langage naturel, variable, d'une question fermée et d'une question ouverte dont les énoncés sont invariants. - Pour la question ouverte : une zone de saisie pour les justifications - Pour la question fermée : deux choix exclusifs « Vrai » -« Faux »	
Génération des questions	
Invariants	- L'ensemble des termes de la palette - Le texte « Indique si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifie ta réponse » - Les deux choix de la question fermée
Paramètres	- Un programme de calcul exprimé dans deux registres : - langage naturel : texte - algèbre : expression algébrique
Contraintes	- Le degré de complexité de l'expression algébrique - nombres de parenthèses - nombre et type des opérations (addition, soustraction, multiplication, division) - L'expression réduite du programme de calcul est une constante ou une expression affine
Type de génération	Génération assistée : - L'auteur choisit les termes de la palette pour écrire le programme de calcul - PépiGen construit l'expression algébrique traduisant le programme de calcul et calcule la forme réduite de cette expression

Tableau 52 : Caractérisation de l'interface de la classe « preuve et programme de calcul »

Paramètres des clones

Clone origine 1	Programme de calcul	Langage naturel	Tu prends un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu trouves 7. Prouve-le
		Expression	$((x+8)3-4+x)/4+2 - x$
	Expression réduite	7	
Clone 1	Programme de calcul	Langage naturel	Tu prends un nombre, tu ajoutes 6 à ce nombre, tu multiples le résultat par 3, tu soustrais 3 fois le nombre de départ : tu trouves 18. Prouve-le
		Expression	(x+6)3-3x
	Expression réduite	18	

Tableau 53 : Valeurs des paramètres pour le clone originel et clone 1 de la classe « Preuve et programme de calcul »

Caractérisation du diagnostic local et grille d'analyse des réponses

Caractérisation du diagnostic local [d'après Grugeon 95]		
	Réponses et commentaires	Code
Solution correcte	Preuve algébrique avec expression globale (parenthésée) Pour les expressions comportant des fractions, deux tactiques de calcul sont envisageables :	
	(1) on réduit les deux expressions au même dénominateur	V1, L1, EA1, T122, J1
	(2) la première expression est simplifiée	V1, L1, EA2, T122, J1
Solution correcte non attendue	Preuve algébrique avec des calculs pas à pas	V2, L1, EA1 T222, J1
	Preuve algébrique avec l'interprétation de l'énoncé comme une équation admettant une infinité de solutions	V2, L1, T122, J1 EA1 : tactique (1)

		EA2 : tactique (2)
Solution partielle	Une preuve algébrique est engagée avec l'une des trois interprétations précédentes. Mais une erreur de calcul conduit à un résultat faux ou a un abandon ou à une égalité non justifiée	
	- Cas d'une expression globale	V2, L1, EA33 T122, J1
	- Cas d'expressions partielles	V2, L1, EA33 T222, J1
Solution incorrecte	Démarche algébrique	
	Écriture globale non parenthésée	V3, L3, T322, J
	Calculs pas à pas	V3, L3, T422, J3
	On affine le codage de la dimension Calcul Algébrique (EA) pour les 3 cas avec deux possibilités : Possibilité 1 : il y a manipulation formelle	
	- avec mémoire de l'énoncé (par ex, $4x + 20 \div 5 = x + 5$)	EA31
	- sans mémoire de l'énoncé (par ex, $4x + 20 \div 5 = 4x + 5$)	EA32
	- avec erreurs d'application d'une règle de calcul	EA33
	- pseudo-opératoire en assemblage par exemple : $23\,x + x = 23\,x^2$ ou $3x+24 = 27x$ ou $8x\text{-}x=7$	EA42
	Possibilité 2 : il y n'a pas manipulation formelle mais substitution à x de valeurs numériques (preuve par l'exemple) :	V3, L2, T322, J2
	- avec mémoire de l'énoncé	EA31
	- sans mémoire de l'énoncé	EA32
	- avec erreurs d'application d'une règle de calcul	EA33
	Démarche non algébrique (preuve par l'exemple)	
	1) Les solutions mettent en jeu des écritures correctes	
	- expression globale parenthésée	V3, L5, EA1, T122, J2
	- expressions partielles	V3, L5, EA1, T222, J2
	2) les solutions mettent en jeu des écritures incorrectes.	
	- écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations	V3, L5, T422, J2
	- écriture linéaire globale non parenthésée	V3, L5, T322, J2
	- avec mémoire	EA31
	- sans mémoire	EA32
Type de génération	Génération automatique du diagnostic -PépiGen génère l'ensemble des réponses anticipées, c'est-à-dire l'ensemble des solutions correctes, correctes mais non attendues, incorrectes présentées dans la grille de codage - La grille de codage dépend de l'expression algébrique correspondant au programme de calcul	

Tableau 54 : Caractérisation du diagnostic local [d'après Grugeon 95] de la classe d'exercices « Preuve et programme de calcul »

Type	Commentaire	Code	Forme (à une Pépinière-équivalence près)
1	*Preuve algébrique avec une expression globale (parenthésée) traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire*		
1.1	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule	V1, L1, EA1, T122, J1, E1	((x+8)*3-4+x)/4+2-x = (x*3+24-4+x)/4+2-x

	expression parenthésée. L'expression comporte des fractions qui sont simplifiées		= (4*x+20)/4+2-x = 4*x/4+5+2-x = x+5+2-x = 7
1.2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée .L'expression comporte des fractions qui sont réduites au même dénominateur	V1, L1, EA2, T122, J1, E1	((x+8)*3-4+x)/4+2-x = (x*3+24-4+x)/4+2-x = (4*x+20)/4+2-x = (4*x+20+8)/4-x = (4*x+28)/4-x = (4*x+28+4*(-x))/4 = 7
1.3	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée L'expression ne comporte pas de fractions.	V1, L1, EA1, T122, J1, E1	Exemple : (x+8)*2-9-2x = 2x+16-9-2x =7
	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas séparé		
2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas séparé	V2, L1, EA1, T222, J1,E2	(x+8)*3 = x*3+24 3*x+24-4 = 3*x+20 3*x+20+x = 4*x+20 (4*x+20)/4 = x+5 x+5+2 = x+7 x+7-x = 7
3	*Preuve algébrique correct et l'énoncé est traduit comme une équation admettant une infinité de solutions*		
3.1	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions. L'expression comporte des fractions qui sont simplifiées	V2, L1, EA1, T222, J1, E1	((x+8)*3-4+x)/4+2-x = 7 (x*3+24-4+x)/4+2-x = 7 (4*x+20)/4+2-x= 7 4*x/4+5+2-x = 7 x+5+2-x = 7
3.2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions L'expression comporte des fractions qui sont réduites au même dénominateur	V2, L1, EA2, T222, J1,E1	((x+8)*3-4+x)/4+2-x = 7 (x*3+24-4+x)/4+2-x = 7 (4*x+20)/4+2-x= 7 (4*x+20+8)/4-x = 7 (4*x+28)/4-x = 7 (4*x+28+4*(-x))/4 = 7 28/4=7
3.3	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions. L'expression ne comporte pas de fractions.	V2, L1, EA1, T222, J1, E1	Exemple : (x+8)*2-9-2x = 7 2x+16-9-2x = 7 7 = 7
4	*Preuve algébrique avec une traduction algébrique correcte de l'énoncé (une seule expression parenthésée) mais la justification est incomplète ou une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée*		
4.1	L'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais la justification est incomplète.	V2, L1, EAx, T222, J1, E1	Forme du type 1 sans justification Exemple ((x+8)*3-4+x)/4+2-x
4.2	l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul final conduit à un	V2, L1, EA33, J1, T222, E1	Forme du type 1 avec une erreur dans les dernières étapes des calculs

	résultat faux ou une égalité non justifiée		
4.3	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais la justification est incomplète.	V2, L1, EAx, J1, T222, E1	Forme du type 3 avec un nombre réduit d'étapes Soit x le nombre choisi ((x+8)*3-4+x)/4+2-x = 7
4.4	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions et une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V2, L1, EA33, J1, T222, E1	Forme du type 3 avec une erreur dans les dernières étapes des calculs Exemple ((x+8)3-4+x)/4+2-x=7 (3x+24-4+x)/4+2=7 (4x+20)/4+2=7 x+5+2=7 x+7=7 x=7/7=1
5	*Preuve algébrique avec une traduction algébrique correcte de l'énoncé (une seule expression parenthésée) et manipulation formelle incorrecte*		
5.1	l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA31, J3, T122, E1	Forme du type 1 Repérage des expressions suivantes (x+8)*3 x+8*3 3x+24 Exemple (x+8*3-4+x)/4+2-x = (3x+24-4+x)/4+2-x = (4x+20)/4+2-x = x+5+2-x = 7 Forme du type 1 Repérage des expressions suivantes (4x+20)/4 4x+20/4 x +5 Exemple ((x+8)*3-4+x)/4+2-x = (3x+24-4+x)/4+2-x = (4x+20)/4+2-x = 4x+20/4+2-x = x+5+2-x = 7
5.2	L'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA32, J3, T122, E1	Forme du type 1 Repérage des expressions suivantes (x+8)*3 x+8*3 x+24 Exemple (x+8*3-4+x)/4+2-x = (x+24-4+x)/4+2-x = (2x+20)/4+2-x = x/2+5+2-x

			= 7-x/2 Repérage des expressions suivantes (4x+20)/4 4x+20/4 4x +5 Exemple ((x+8)*3-4+x)/4+2-x = (3x+24-4+x)/4+2-x = 4x+20/4+2-x = 4x+5+2-x = 3x + 7
5.3	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA42, J3, T122, E1	Forme du type 1 Repérage des expressions suivantes 3x+24 puis 27x Exemple ((x+8)*3-4+x)/4+2-x = (3x+24-4+x)/4+2-x = (27x-4+x)/4+2-x = (28x-4)/4+2-x = 7x-1+2-x = 6x+1
5.4	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA33, J3, T122, E1	Forme du type 1 avec des erreurs de calcul autres que celles repérées pour les types 5.1 à 5.3
5.5	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA31, J3, T222, E1	Mêmes formes que pour le type 5.1 avec une équation dont la partie droite est le nombre 7
5.6	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais une erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA32, J3, T222, E1	Mêmes formes que pour le type 5.2 avec une équation dont la partie droite est le nombre 7
5.7	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais une erreur de calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA42, J3, T222, E1	Mêmes formes que pour le type 5.3 avec une équation dont la partie droite est le nombre 7
5.8	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, EA33, J3, T222, E1	Forme du type 3 avec des erreurs de calcul autres que celles repérées pour les types 5.5 à 5.7
6	*Preuve algébrique correct et*		

	l'énoncé est traduit par des calcul pas à pas séparés mais la justification est incomplète ou une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée		
6.1	Démarche algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés mais la justification est incomplète.	V2, L1, EAx, J1, T222, E2	Forme du type 2 avec un nombre réduit d'étapes
6.2	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V2, L1, EA33, J1,T222, E2	Forme du type 2 avec une erreur dans les dernières étapes des calculs
7	*Démarche algébrique en pas-à-pas séparé et manipulation formelle incorrecte*		
7.1	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, J3, T322, EA31, E2	Forme du type 2 Repérage des expressions suivantes (x+8)*3 x+8*3 3x+24 Ou (4x+20)/4 4*x+20/4 x +5 Exemple (x+8)*3 = x + 8*3 3x+24-4=3x+20 3x+20+x= 4x+20 4x+20/4 = x+5 x+5+2 = x+7 x+7-x = 7
7.2	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, J3, T322, EA32, E2	Forme du type 2 Repérage des expressions suivantes (x+8)*3 = x+8*3 = x+24 ou (4x+20)/4 = 4*x+20/4 = 4*x +5 Exemple (x+8)*3=x+24 x+24-4=x+20 x+20+x=2x+20 2x+20/4=0.5x+5 0.5x+5+2=0.5x+7 0.5x+7-x = 7-0.5x
7.3	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de	V3, L3, J3, T322, EA42, E2	Forme du type 2 Repérage des expressions suivantes 3x+24 puis 27x

	calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée		Exemple (x+8)*3 = 3x + 24 27x-4+x =28x-4 (28x-4)/4 = 7x-1 etc.
7.4	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés mais des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3, L3, J3, T322, EA33, E2	Forme du type 2 avec des erreurs de calcul autres que celles repérées pour les types 7.1 à 7.3 avec des erreurs de calcul Exemple
8	*Démarche de preuve algébrique correcte où une opération est oubliée*		Exemple
8.1	Démarche de preuve algébrique avec une expression globale (parenthésée) où une opération est oubliée	V2, L1, EAx, J1, T122, E1	Exemple ((x+8)*3-4+x)/4+2 au lieu de ((x+8)*3-4+x)/4+2-x
8.2	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions où une opération est oubliée	V2, L1, EAx, J1, T222, E1	Exemple ((x+8)*3-4+x)/4+2 = 7 au lieu de ((x+8)*3-4+x)/4+2-x = 7
9	*Démarche de preuve algébrique avec retour au numérique*		
9.1	Début de démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée puis retour au numérique	V3, L1, EAx, J2, T122, E1	Forme du type 1 avec passage au numérique Exemple Si x = 2 P=((((((x + 8) * 3) - 4)+ x) /4) + 2) - x) P=((((((2 + 8) * 3) - 4) + 2) /4) + 2) - 2) P=7
9.2	Début de démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions puis retour au numérique	V3, L1, EAx, J2, T222, E1	Forme du type 3 avec passage au numérique
10	*Tentative de démarche algébrique mais avec des erreurs dans l'interprétation de l'énoncé et des calculs corrects ou incomplets*		
10.1	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une expression non parenthésée qui n'est pas transformée	V3, L3, J3, T322, EAx, Ex	x+8*3-4+x/4+2-x
10.2	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une expression non parenthésée avec des calculs avec mémoire de l'énoncé	V3, L3, J3, T322, EA31	Exemple x+8*3-4+x/4+2-x = 3x+24-4+x/4+2-x = 3x+20+x/4+2-x
10.3	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une expression non parenthésée avec des calculs sans mémoire de l'énoncé	V3, L3, J3, T322, EA32	Exemple x+8*3-4+x/4+2-x = x+24-4+x/4+2-x = x+20+x/4+2-x
10.4	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une équation qui n'est pas transformée	V3, L3, J3, T322, EAx	x+8*3-4+x/4+2-x = 7
10.5	Tentative de démarche algébrique :	V3, L3, J3, T322,	Mêmes formes que pour le type

	l'énoncé est traduit par une équation avec des calculs avec mémoire de l'énoncé	EA31	10.2 avec une équation dont la partie droite est le nombre 7
10.6	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une équation avec des calculs sans mémoire de l'énoncé	V3, L3, J3, T322, EA32	Mêmes formes que pour le type 10.3 avec une équation dont la partie droite est le nombre 7…
10.7	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés corrects	V3, L4, EA1, J3, T422, E3	(x+8)*3 = x*3+24 = 3*x+24-4 = 3*x+20 = 3*x+20+x = 4*x+20 = (4*x+20)/4 = x+5 = x+5+2 = x+7 = x+7-x = 7
11	*Tentative de démarche algébrique mais avec des erreurs dans l'interprétation de l'énoncé et des calculs incorrects*		
11.1	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calculs avec mémoire de l'énoncé	V3, L4, EA31, J3, T422, E3	Forme du type 10.7 Repérage des expressions suivantes (x+8) *3 x+8*3 3x+24 Exemple x+8 = (x+8)*3 = = x+8*3=3x+24-4 etc. Repérage des expressions suivantes (4x+20)/4 4x+20/4 x +5 Exemple (4x+20)/4 = 4x+20/4 = x+5+2=x+7-x=7
11.2	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calculs sans mémoire de l'énoncé	V3, L4, EA32, J3, T422, E3	Forme du type 10.7 Repérage des expressions suivantes (x+8)*3 x+8*3 x+24 Exemple x+8 = (x+8)*3 = = x+8*3=x+24-4 etc Repérage des expressions suivantes (4x+20)/4 = 4*x+20/4 = 4*x +5 Exemple (4x+20)/4 = 4x+20/4 = 4x +5+2 = 4x+7-x = 3x+7
11.3	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calculs avec assemblage	V3, L4, EA42, J3, T422, E3	Forme du type 10.7 Repérage des expressions suivantes 3x+24 puis 27x Exemple x+8 = (x+8)*3 = =3x+8*3=x+24-4 = 27x-4 ect.

11.4	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non justifiée.	V3, L4, EA33, J3, T422, E3	Forme du type 10.7 avec des erreurs de calcul autres que celles repérées pour les types 11.1 à 11.3
12	*Preuve par des exemples avec une traduction correcte de l'énoncé et des calculs corrects*		
12.1	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée correcte et les calculs sont corrects	V3, L5, EN1, J2, T151, E1	Forme du type 1 avec x remplacé par une valeur numérique
12.2	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une équation et les calculs sont corrects	V3, L5, EN1, J2, T251, E1	Forme du type 3 avec x remplacé par une valeur numérique
12.3	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas corrects	V3, L5, EN1, J2, T251, E2	Forme du type 2 avec x remplacé par une valeur numérique
13	*Preuve par des exemples avec une traduction correcte de l'énoncé mais : la justification est incomplète ou une erreur de calcul conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée*		
13.1	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée correcte mais la justification est incomplète	V3, L5, ENx, J2, T151, E1	Forme du type 1 avec x remplacé par une valeur numérique et une justification inachevée
13.2	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée correcte mais une erreur de calcul conduit à un résultat faux	V3, L5, EN33, J2, T151, E1	Forme du type 1 avec x remplacé par une valeur numérique : erreur de calcul
13.3	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas corrects mais la justification est incomplète	V3, L5, ENx, J2, T251, E2	Forme du type 2 avec x remplacé par une valeur numérique et justification inachevée
13.4	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas corrects mais une erreur de calcul conduit à un résultat faux	V3, L5, EN33, J2, T251, E2	Forme du type 2 avec x remplacé par une valeur numérique et des erreurs de calcul
14	*Preuve par des exemples avec une traduction incorrecte de l'énoncé et des calculs corrects*		
14.1	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit de façon incorrecte par des calculs pas à pas enchaînés	V3, L5, J2, T451, E3	Forme du type 10.7 avec x remplacé par une valeur numérique
14.2	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression non parenthésée	V3, L5, J2, T351, E1	Forme du type 10.1 avec x remplacé par une valeur numérique
15	*Preuve par des exemples avec une traduction incorrecte de l'énoncé et des calculs incorrects*		
16.1	Ecriture incorrecte et erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé	V3, L5, J2, T351, EN31	Forme du type 10.1 ou 11.1 avec x remplacé par une valeur

			numérique
15.2	Ecriture incorrecte et erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé	V3, L5, J2, T351, EN32	Forme du type 10.2 ou 11.2 avec x remplacé par une valeur numérique
15.3	Ecriture incorrecte et des erreurs de calcul	V3, L5, J2, T351, EN33	Forme du type 11.4 avec x remplacé par une valeur numérique
15.4	Ecriture incorrecte et erreur de calcul avec assemblage	V3, L5, J2, T351, EN42	Forme du type 11.3 avec x remplacé par une valeur numérique
15.5	Ecriture incorrecte : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas enchainés avec des erreurs de calcul	V3, L5, J2, T451, EN33	Forme du type 10.7 avec x remplacé par une valeur numérique
16	*Preuve exprimée par argumentation en langage naturel*	CODAGE HUMAIN POUR L'INSTANT	
16.1	Preuve par l'exemple exprimée en langage naturel	V3, L5, J2	« j'ai choisi un nombre pour les calculs et ça marche »
16.2	Écriture du programme de calcul	V3, L5, J2	Exemple le nombre que j'ai choisi est 2: je lui ajoute 8:10 je multiplie par 3:30 je retranche 4:26 j'ajoute mon nombre 2:28 je divise par 4:7 j'ajoute 2:9 je soustrais mon nombre:7
16.3	Argument extra-mathématiques	V3, L5, J33	« On ne peut pas savoir si le résultat est 9 car on ne connaît pas le nombre » C'est normal c'est un prestidigitateur

Tableau 55 : Grille d'analyse de la classe d'exercices « preuve et programme de calcul »

Algorithme de diagnostic

(Cf. Prévit 2008).

A.3 L'algorithme du calcul du stéréotype

L'algorithme du calcul du stéréotype est extrait du rapport intermédiaire de 2010 du projet PépiMeP (Grugeon et al., 2010, p. 106).

3.2.2 Pondération des questions

Lors de la phase d'exploration des données, il nous est apparu utile d'introduire, dans le calcul des valeurs des descripteurs, des pondérations entre les questions pour tenir compte de leur degré de difficulté et du degré d'importance de la tâche demandée à l'élève dans la compétence considéré. Là encore, des itérations ont été nécessaires entre les résultats produits par notre système et l'analyse didactique pour calibrer ces pondérations. Le Tableau 9 spécifie les pondérations des questions pour chaque composante.

Questions	UA	TA	CA
1.1			1
1.2			1
1.3			1
1.4			1
2.1	1	1	1
2.2	1	1	1
2.3	1	1	1
3.1	1	2	1
3.2		2	2
4.1	1	1	1
4.2	2	1	2
4.3	1	1	1
4.4	1	1	1
4.5	2	1	2
9.1			2
9.2			2
9.3			2
9.4			3
10	1	2	
13		3	
15.1	1	1	
15.2	1	2	
15.3	2	1	1
16	3	3	3
20.1		1	
20.2	1	1	
20.3	2	1	2
TOTAL	22	27	32

Tableau 9 : Tableau de pondération par composante et par sous ensemble pour le calcul des stéréotypes

4. Algorithmes de diagnostic global

L'élaboration du bilan cognitif comporte deux niveaux. Le niveau 2 du diagnostic calcule les valeurs des descripteurs en se fondant sur des indicateurs qui agrègent des codes établis par le diagnostic local. Nous détaillons l'algorithme de calcul dans la section 4.1. Le niveau 3 du diagnostic s'appuie sur les valeurs des descripteurs du niveau précédent pour situer l'élève sur l'échelle de compétence. Nous décrivons l'algorithme de classement dans la section 4.2.

4.1. Algorithme de détermination des caractéristiques personnelles

Le calcul des caractéristiques personnelles se fait en deux étapes : PépiDiagGlobal calcule tout d'abord les valeurs des descripteurs quantitatifs, puis celles des descripteurs qualitatifs.

4.1.1. Descripteurs quantitatifs

Dans un premier temps, l'algorithme s'intéresse **aux taux de réussite** sur des sous-ensembles de questions du même type (Cf. section 3.3.1). Pour chaque type de questions, le diagnostic considère deux indicateurs : le taux de questions réussies par rapport au nombre de questions posées et le taux de questions réussies par rapport au nombre de questions abordées. Ces taux sont notés respectivement TRQP (type) et TRQAB (type) où type est un des types définis dans le Tableau 8.

Pour chaque composante et pour chaque sous ensemble, les trois calculs suivant sont effectués.

Soit NP la somme pondérée du nombre de questions posées du sous ensemble considéré et soit NVi la somme pondérée du nombre de questions codées Vi sur le sous-ensemble[12].

1. Calcul du **taux de questions abordées** pour le sous-ensemble (TQAB) : $\frac{(NV1 + NV2 + NV3)}{NP}$
2. Calcul du **taux de réussite** par rapport aux questions **abordées** (TRQAB) : $\frac{(NV1 + NV2)}{(NV1 + NV2 + NV3)}$
3. Calcul du **taux de réussite** par rapport aux questions **posées** (TRQP) : $\frac{(NV1 + NV2)}{NP}$

Pour éviter certains résultats non significatifs, nous avons introduit des conditions de validité pour ces calculs : il faut (i) que le sous-ensemble des questions posées soit non vide (NP $\neq$ 0), (ii) que le nombre de réponses interprétables, i.e. correctes, partielles ou incorrectes, soit non nul (NV1+NV2 +NV3 $\neq$0), (iii) que le taux de questions abordées soit supérieur à 60%. Lorsque l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, le système produit un message d'avertissement : « Trop peu de réponses, le calcul du stéréotype n'est pas fiable ».

4.1.2. Description qualitative par composante

Dans un deuxième temps, l'algorithme détermine les valeurs d'une série de descripteurs pour évaluer sur chaque composante le degré de maîtrise de certaines capacités ou pour mettre en évidence des conceptions (correctes ou non). Ces descripteurs sont repérés par des variables ordinales qui mettent en évidence des **leviers** (bonne maîtrise ou début de maîtrise, conception correcte pour les valeurs strictement positives) ou des **fragilités** (faible maîtrise ou erreurs récurrentes pour les valeurs négatives ou nulles). Ces valeurs sont calculées à partir des codes obtenus au diagnostic de niveau 1 (diagnostic local) et des taux de description quantitative.

4.1.2.1. Composante UA

Sur cette composante, interviennent trois descripteurs : la maîtrise de l'outil algébrique, le type de justification et le statut des lettres.

La **Maîtrise de l'outil algébrique,** noté MOA, est un booléen : quand sa valeur est vrai (valeur 1), c'est un levier et quand elle est fausse (valeur 0) c'est une fragilité. L'outil algébrique est maîtrisé quand l'élève a bien réussi les exercices de mathématisation (SM) et particulièrement ceux qui nécessitent d'utiliser l'algèbre pour prouver (code J1).

[12] Rappel : V0 question non traitée, V1 réponse correcte, V2 réponse partielle, V3 réponse incorrecte, Vx non interprétée

Condition de validité : toujours
i- Levier : Bonne maîtrise de l'outil algébrique (MOA = 1)
TRQP(SM) > 0,5 OU (TRQP(SM) > 0,4 ET TRQP(SUOAP) > 0,6)
ii- Fragilités : Maîtrise défaillante de l'outil algébrique : MOA ≠ 1

Tableau 10 : Détermination du descripteur Maîtrise de l'Outil Algébrique (MOA)

Le descripteur **Justification Algébrique (JA)** prend 5 valeurs 2, 1, 0, -1, -2. Les indicateurs sont le taux d'exercices de mathématisation réussis (TRQAB(SM) >0.5), un nombre suffisant de justifications algébriques (NJ1 > NJ0) et plus de justification algébriques (J1) que de justifications par l'exemple (J2) ou par des arguments de type « formel scolaire[13] » (J3).

Notation : soit NJi la somme pondérée de réponses codées Ji dans l'ensemble du test
Conditions de validité : au moins un codage sur la dimension type de justification : NJ1 +NJ2+ NJ3 ≠ 0
i- Deux valeurs positives (leviers)
1- Justification par l'algèbre fortement dominante (JAFOD, JA = 2))
TRQAB(SM) >0.5 ET (NJ1> NJ2 + NJ3) ET (NJ1 > NJ0)
2- Justification par l'algèbre faiblement dominante (JAFAD, JA =1)
TRQAB(SM) >0.5 ET (NJ1> NJ2 + NJ3) ET (NJ1<= NJ0)
ii- Trois valeurs négatives (fragilités)
1- Justification par l'algèbre dominante dans un contexte trop faible (JADCF, JA = 0)
TRQAB(SM) ≤ 50% ET (NJ1> NJ2 + NJ3)
2- Justification de type scolaire prééminente (JTSP, JA = -1)
(NJ1≤NJ2 + NJ3) ET (NJ2 < NJ3)
3- Justification par le numérique prééminente (JNP, JA= -2)
(NJ1≤NJ2 + NJ3) ET (NJ2 ≥ NJ3)

Tableau 11 : Détermination du descripteur Justification Algébrique (JA)

Le descripteur **Statut des lettres** (SL) : prend 5 valeurs 3,2, 1, 0, -1. Les indicateurs sont les critères de la dimension usage des lettres (code Li) avec une pénalité pour l'utilisation de lettre comme des abréviations (L4) ou pour calculer avec des règles fausses (L3).

Notation : soit NLi la somme pondérée de réponses codées Li dans l'ensemble du test
Condition de validité : au moins un codage sur la dimension usage des lettres (L) :
NL1 +NL2+ NL3 + NL4+ NL5 ≠ 0
i- Trois valeurs positives (leviers)
1- Utilisation adaptée des lettres (SL = 3)
NL2+ NL3 + NL4+ NL5 = 0 (i.e. NL1 > 0 et NLi=0 pour les autres i)
2- Utilisation des lettres comme variable ou inconnue ou nombre généralisé (SL = 2)
NL1 ≠ 0 ET NL2+NL4 = 0 ET NL3 ≠ 0
3- Utilisation de lettre évaluée (SL = 1)
NL2 ≠ 0 ET NL4 = 0 ET NL3 = 0
ii- Deux valeurs négatives ou nulles (fragilités)
1- Pas d'utilisation des lettres (SL = 0)
NL1 +NL2+ NL3 + NL4 = 0 (i.e. NL5 ≠ 0 et les autres nuls)
2- Utilisation des lettres comme abréviation ou en appliquant des règles de calcul fausses (SL= -1)
NL4 ≠ 0 OU (NL3 ≠0 ET NL1=0)

Tableau 12 : Détermination du descripteur Statut des Lettres (SL)

4.1.2.2. Composante CA

Dans le calcul de cette composante, trois descripteurs interviennent : la maîtrise du calcul algébrique, la maîtrise des règles et l'interprétation des expressions.

[13] Une justification « formel scolaire » est une règle qui ne s'appuie pas sur des propriétés mathématiques ; par exemple « il ne faut pas multiplier les puissants »

La **Maîtrise du calcul algébrique** est un booléen, quand sa valeur est vraie (valeur 1), c'est un levier et quand elle est fausse (valeur 0) c'est une fragilité. Le calcul algébrique est maîtrisé lorsque l'élève a bien réussi les exercices techniques (ST).

Condition de validité : toujours i- Levier : Bonne maîtrise du calcul algébrique (MCA = 1) TRQP (ST) $\geq$ 50 % ii- Fragilités : Maîtrise défaillante du Calcul Algébrique : MCA= 0 TRQP (ST) < 50 %

Tableau 13 : Détermination du descripteur Statut des Lettres (SL)

Le descripteur **Maîtrise des règles (MR)** prend 3 valeurs 1, 0, -1. L'indicateur représente le nombre suffisant d'utilisation correcte des règles de transformation (EA1) ou de maîtrise technique fragile (EA2) ou les règles de transformation non maîtrisées, mais avec identification correcte du rôle des opérateurs + et × (EA3).

Notation : soit NEAi le nombre de réponses codées EAi dans l'ensemble du test Conditions de validité : au moins un codage sur la dimension type d'écritures algébriques : NEA1 +NEA2+ NEA3 + NEA4 + NEA5$\neq$ 0 1- Une valeur positive (levier) a- Bonne maîtrise des règles (BMR, MR = 1)) (NEA2 + NEA3 < NEA1) ET (NEA4 + NEA5 <=1) 2- Deux valeurs négatives (fragilités) a- Maîtrise défaillante des règles (MDR, MR =0)) ((NEA1 <= NEA2 + NEA3) ET (NEA4 + NEA5 < NEA2 + NEA3)ET (NEA1 $\neq$0)) OU ((NEA2 + NEA3 < NEA1) ET (NEA4 + NEA5>1)) b- Rôle des opérateurs non maîtrisé (RONM, MR = -1) sinon

Tableau 14 : Détermination du descripteur Statut des Lettres (SL)

Le descripteur **Interprétation des Expressions (IE)** prend 3 valeurs 2, 1, 0 aussi. L'indicateur est le taux d'exercices d'Interprétation des expressions algébriques (TRQP(SIEA)).

Notation : soit NEAi le nombre de réponses codées EAi dans l'ensemble du test Conditions de validité : au moins un codage sur la dimension type d'écritures algébriques : NEA1 +NEA2+ NEA3 + NEA4 + NEA5$\neq$ 0 1- Deux valeurs positives (leviers) Interprétation appropriée des expressions (IE = 2) TRQP (SIEA) $\geq$ 0.6 Interprétation des expressions moyennement appropriée (IE = 1) TRQP (SIEA) >0.4 2- Une valeur négative (fragilité) Interprétation défaillante des expressions (IE = 0) TRQP (SIEA) $\leq$ 0.4

Tableau 15 : Détermination du descripteur Statut des Lettres (SL)

4.1.2.3. Composante TA

Notation : soit NTi_i (resp. NLi) le nombre de réponses codées Ti (resp. codées Li) dans l'ensemble du test

Condition de validité : NT1 + NT2 + NT3 +NT4$\neq$ 0

Le descripteur : **Maîtrise de la traduction algébrique (MTA)** est un booléen, quand sa valeur est vraie (valeur 1), c'est un levier et quand elle est fausse (valeur 0) c'est une fragilité. La traduction algébrique est maîtrisée quand l'élève a bien réussi les exercices d'Interprétation des Expressions Algébriques en Articulant avec d'autres Registres (SIEAAR).

1- Levier : Bonne maîtrise de la traduction algébrique (MTA = 1)
    (TRQP(SIEAAR) > 0.5) ET (NT1 + NT2 >= NL5) ET (NT1 + NT2 >=NT3 +NT4)
2- Fragilité : Maîtrise insuffisante de la traduction algébrique (MTA = 0)
    (TRQP(SIEAAR) <= 0.5) OU (NT1 + NT2 < NL5) OU (NT1 + NT2 <NT3 +NT4)

Tableau 16 : Détermination du descripteur Statut des Lettres (SL)

- Un descripteur **Traduction des relations mathématiques** (TRM) est un booléen : quand sa valeur est vraie (valeur 1), c'est un levier et quand elle est fausse (valeur 0) c'est une fragilité.

Condition de validité : NT1 + NT2+ NT3 + NT4 ≠ 0
1- Levier : Traduction des relations mathématiques (TRM = 1)
    NT4 = 0 ET TRQAB(SIEAAR) > 0.5
2- Fragilités : Traduction abréviative (TRM = 0)
    Sinon

Tableau 17 : Détermination du descripteur Statut des Lettres (SL)

4.2. Algorithme de classement en stéréotype (diagnostic niveau 3)

Dans un troisième temps, on combine sur chaque composante les descripteurs précédents pour situer l'élève sur l'échelle de compétence.

Composante UA :

1. UA1 = (MOA = 1) ET (JA = 2)

   Bonne maîtrise de l'outil algébrique et Justification par l'algèbre fortement dominante.

2. UA2 = ((MOA= 0 ET (JA = 2 OU JA = 1)) OU ((MOA= 1 ET (JA !=2))

   Maîtrise défaillante de l'outil algébrique et Justification par l'algèbre fortement ou faiblement dominante, ou Bonne maîtrise de l'outil algébrique et non Justification par l'algèbre fortement dominante.

3. UA3 = ((MOA= 0 ET (JA = 0 OU JA = -1)) OU ((MOA= 1 ET JA = -2))

   Maîtrise défaillante de l'outil algébrique et Justification par l'algèbre dominante dans un contexte trop faible ou Justification de type scolaire prééminente, ou Bonne maîtrise de l'outil algébrique et Justification par le numérique prééminente.

4. UA4 = (MOA = 0 ET JA = -2)

   Maîtrise défaillante de l'outil algébrique et Justification par le numérique prééminente.

Composante CA :

1. CA1 = (MCA = 1) ET (MR = 1) ET (IE = 2)

   Bonne maîtrise du calcul algébrique et bonne maîtrise des règles et interprétation des expressions appropriées

2. CA2 = ((MCA= 1) ET (MR = 1) ET (IE ≠ 2)) OU ((MCA = 1) ET (MR = 0)) OU ((MCA = 0) ET ((MR = 1) OU ((MR = 0) ET (IE = 1)))

3. CA3 = (MR = -1) OU ((MCA = 0) ET (MR = 0) ET (IE≠1)

   Rôle des opérateurs non maîtrisé OU (Maîtrise défaillante du calcul algébrique et Maîtrise défaillante des règles et interprétation défaillante des expressions)

Composante TA :

1. TA1 = (TRM ≠ 0) ET (MTA = 1)

   Traduction des relations mathématiques et Bonne maîtrise de la traduction algébrique.

2. TA2 = (TRM ≠ 0) ET (MTA = 0)

   Traduction des relations mathématiques et Maîtrise insuffisante de la traduction algébrique.

3. TA3 = TRM = 0

   Traduction abréviative.

5. Évaluation des résultats

Nous avons utilisé la même méthode d'évaluation de nos résultats que celle présentée au chapitre 3 pour évaluer le diagnostic local. Cette évaluation s'est fait en plusieurs étapes.

La première étape a consisté à déboguer le programme en comparant automatiquement les stéréotypes calculés par les deux programmes PepiDiag2.0 et PepiDiag2.1 à partir des 361 fichiers de réponses d'élèves, et ce jusqu'à obtenir une concordance. Le Tableau 18 résume le résultat de la comparaison des résultats des deux programmes après déverminage.

Corpus	Diagnostic local	Diagnostic global
28 élèves	726/728	80/84

Tableau 18 : Nombre de codes (Diagnostic local) et stéréotype (Diagnostic global) identiques entre les deux versions de PépiDiagLocal2.0 et PépiDiagLocal2.1

Comme nous le voyons dans ce tableau, le taux de concordance n'est pas de 100%, pour les raisons expliquées dans le chapitre 3. Par conséquent, nous n'avons pas exactement le même stéréotype pour chaque élève et nous avons donc une légère différence dans l'élaboration des bilans.

En ce qui concerne la deuxième étape, les experts humains ont déclaré forfait, refusant de faire les calculs à la main. Par contre, un des experts a vérifié le calcul des stéréotypes sur les 28 élèves et s'est montré en accord avec les résultats.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le système que nous avons mis en œuvre pour établir un bilan cognitif d'un élève en algèbre.

Nous avons présenté une étude exploratoire menée sur un corpus de réponses. La première étape de cette étude a consisté à spécifier le format de la base de données. La deuxième étape a conduit à éclairer l'analyse didactique en l'appuyant sur des données statistiques pour diminuer le nombre d'exercices et ainsi répondre à une demande expresse des utilisateurs enseignants. Un des objectifs de cette recherche est de minimiser le nombre d'exercices posés à l'élève lors d'un test diagnostique avec Pépite, dans ce chapitre nous avons montré que cela est possible. Nous avons présenté le processus pour choisir 10 exercices parmi les 22 exercices du test original.

Ensuite, nous avons modifié le modèle conceptuel du bilan d'un élève en spécifiant les descripteurs, leurs valeurs et les indicateurs permettant de calculer ces valeurs. Ce chapitre décrit précisément la méthode pour obtenir ces descripteurs.

Un autre point que nous avons évoqué dans ce chapitre est la fiabilité de l'algorithme de diagnostic global. Nous avons proposé des conditions de validité et des modifications pour l'améliorer et le stabiliser. Nous avons expliqué comment nous avons travaillé avec les didacticiens en nous appuyant sur notre étude du corpus.

Enfin nous avons présenté les tests que nous avons mis en place pour valider notre système.

Annexe B

Les parcours d'enseignement différencié

Notes pour accompagner la lecture de l'annexe :

1. Les élèves sont répartis en trois groupes nommés A, B et C. Chaque groupe est composé de deux sous-groupes, par exemple, le groupe A est composé des sous-groupes A$-$ et A$+$.

2. Des tableaux recensent les exercices possibles pour chaque groupe et chaque parcours différencié d'enseignement, c'est-à-dire que l'enseignant a le choix de(s) l'exercice(s) qu'il propose à ses élèves.

3. Voici des éléments pour faciliter la lecture des tableaux :

   - Un numéro, par exemple 32, correspond à l'exercice portant ce numéro dans la liste d'exercices du paragraphe 7.
   - Une référence du type M5 29p.64 correspond à l'exercice 29 de la page 64 du manuel *Sésamath* de 5$^{\text{ème}}$. Il s'agit de la version 2010 du manuel de 5$^{\text{ème}}$, de la version 2007 du manuel de 4$^{\text{ème}}$ et de la version 2008 du manuel de 3$^{\text{ème}}$.
   - Une référence du type 4N4s2ex6 correspond à un exercice de la base d'exercices *LaboMeP* de *Sésamath*. Le chemin d'accès de ces exercices est précisé dans les tableaux.

B.1 Présentation des groupes

B.1.1 Présentation du groupe A

a. Caractéristiques

- Du groupe
  - Les élèves réussissent majoritairement à contrôler leurs calculs et à choisir les transformations algébriques adaptées au but visé.
- Des sous-groupes
  - A− : Les élèves utilisent encore peu l'algèbre pour résoudre des problèmes.
  - A+ : Les élèves traduisent des relations entre des variables et utilisent l'algèbre pour résoudre avec succès plusieurs types de problèmes.

b. Leviers

- Du groupe
  - Transformations des expressions adaptées au but visé.
  - Contrôle de l'équivalence des expressions.
- Du sous-groupe A+
  - Expressions algébriques associées à d'autres représentations (graphique, programme de calcul, figure géométrique ou langage naturel).

c. Fragilités

- Du sous-groupe A−
  - Faible utilisation de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes et des erreurs de traduction des relations entre variables.

B.1.2 Présentation du groupe B

a. Caractéristiques

- Du groupe
  - Les élèves réussissent des exercices de calcul littéral usuel et utilisent parfois des règles fausses.
- Des sous-groupes
  - B− : Les élèvent utilisent des démarches numériques ou des démarches algébriques inadaptées pour résoudre des problèmes.

- B+ : Les élèves utilisent une démarche algébrique adaptée pour résoudre au moins un type de problème.

b. Leviers

- Du groupe
  - Lettres considérées comme des nombres généralisés.
  - Prise en compte de la structure d'expressions peu complexes.
- Du sous-groupe B+
  - Expressions algébriques associées à d'autres représentations (graphique, programme de calcul, figure géométrique ou langage naturel).
  - Utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes.

c. Fragilités

- Du groupe
  - Peu de contrôle du calcul algébrique.
  - Faible reconnaissance de la structure et de l'équivalence des expressions.
  - Utilisation de règles fausses dans le calcul algébrique, par exemple du type $(ab)^2 = ab^2$ ou $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
- Du sous-groupe B−
  - Faible utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes.
  - Expressions algébriques peu associées à d'autres représentations (graphique, programme de calcul, figure géométrique ou langage naturel).

B.1.3 Présentation du groupe C

a. Caractéristiques

- Du groupe
  - Les élèves donnent peu de sens au calcul algébrique.
- Des sous-groupes
  - C− : Les élèves utilisent peu ou pas le calcul algébrique comme outil pour résoudre des problèmes.
  - C+ : Les élèves commencent à utiliser le calcul algébrique pour résoudre des problèmes avec plus ou moins de succès.

b. Leviers

- Du groupe
  - Capacité à donner du sens au calcul numérique.
- Du sous-groupe C+
  - Expressions algébriques associées à d'autres représentations (graphique, programme de calcul, figure géométrique ou langage naturel).

c. Fragilités

- Du groupe
  - Faible reconnaissance de la structure des expressions algébriques.
  - Faible contrôle de l'équivalence des expressions (deux écritures d'une même expression correspondent le plus souvent à deux expressions différentes, le signe « = » n'est pas toujours considéré comme symbole d'équivalence).
  - Faible signification donnée aux lettres en lien avec le numérique.
  - Utilisation de règles fausses dans le calcul algébrique par exemple du type linéarisation ($a^2 = 2a$) ou concaténation ($2a + 3 = 5a$).
- Du sous-groupe C−
  - Utilisation de démarches arithmétiques ou très faible utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes.

B.2 Parcours à l'étape « Retour sur des connaissances anciennes »

B.2.1 Revenir sur le rôle de l'algèbre pour résoudre des problèmes de généralisation ou de modélisation

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes
Revenir sur le rôle de l'algèbre pour résoudre des problèmes de généralisation ou de modélisation. Les exercices différenciés sont l'occasion de décontextualiser les expressions produites.
Que doivent retenir les élèves ?

- Insuffisance du numérique pour généraliser ou prouver.
- Coût du calcul numérique et intérêt d'une expression générale ou d'une formule pour calculer pour n'importe quel nombre.
- L'indifférence du choix du nom des lettres. On peut contrôler que le nom de la lettre n'a pas d'importance.
- Existence de plusieurs écritures équivalentes d'une expression, qui ont la même valeur quel que soit le nombre. Dans le cas du carré bordé, différentes procédures conduisent à des expressions différentes mais ayant la même valeur pour toute valeur de la lettre. Dans le cas des programmes de calcul, ils conduisent à des expressions différentes mais ayant la même valeur, pour toute valeur de la lettre.
- Contrôle que différentes expressions utilisées par les élèves sont équivalentes (ou égales pour toute valeur de la lettre) : d'abord en lien avec le contexte ou des essais numériques et différentes représentations, puis en justifiant par le calcul algébrique. Si, en remplaçant la lettre par un nombre, les valeurs des expressions sont différentes, alors elles ne sont pas égales et on a un contre-exemple, sinon, on peut seulement conjecturer l'égalité des expressions pour toute valeur de la lettre. Dans ce cas, la conjecture est prouvrée en utilisant les règles de calcul (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, identités remarquables, etc)

Stratégie différenciée par groupe

- A et B+ : Mobiliser l'outil algébrique pour généraliser et prouver des propriétés

– B- et C : Montrer les limites du numérique et motiver la nécessité de mobiliser l'outil algébrique pour généraliser et prouver (donner du sens aux lettres). Les situations proposées ne se situent pas dans le cadre d'une introduction aux lettres mais visent à permettre aux élèves redonner du sens aux expressions en faisant le lien entre lettre et nombre. Il s'agit d'amener les élèves à percevoir les limites et le coût d'une démarche numérique pour résoudre un problème. En généralisant une démarche et en produisant une expression (résultat d'un programme de calcul, généralisation), on obtient une formule générale à utiliser pour tous les calculs en remplaçant une lettre par un nombre, ce qui évite de refaire la démarche numérique, liée au contexte, pour chaque calcul.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A et B+	1	Programmes de calcul et expressions littérales.
	20	Suite de figures géométriques et généralisation
B-	3	Suite de figures géométriques et généralisation
	5	Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ?
	M4 A1 p.62 1519	Ecrire une expression littérale. Carré bordé
C	4	Carré bordé et généralisation
	2	Suite de figures géométriques et généralisation
	6	Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ?

c. En seconde

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A et B+	21	Programmes de calcul
B-	22	Programmes de calcul
C	22	Programmes de calcul

d. Déroulement pour les exercices 2, 3, 4, 20

Consigne et enjeux

L'enseignant peut expliciter à l'oral les enjeux du travail : « Je vous propose de faire des exercices différents car ils sont adaptés aux besoins d'apprentissage que le test a repérés pour chacun de vous. L'objectif du travail est de comprendre pourquoi on utilise des lettres en mathématique, de vous donner des moyens pour résoudre plus rapidement des problèmes et de donner du sens aux lettres. »

Aides

L'enseignant distribue les aides, au fur et à mesure, à la demande des élèves ou en fonction de leurs difficultés dans l'exercice.

Déroulement
L'énoncé est en deux parties : 1/ Production d'une expression, 2/ Plusieurs expressions pour la même situation.

Première partie : production d'expressions

1. Temps de recherche avec distribution des aides (5-10min).
   - Groupe A et B+ : Si les élèves n'avancent pas dans la recherche, l'aide 1 suggère de raisonner sur des figures « petites ». Les aides suivantes sont à distribuer si les élèves ont des difficultés à faire émerger une expression. L'aide utilise le domaine numérique.
   - Groupe B- et C :
     - Compter sur la figure. Laisser dans un premier temps les élèves dans des procédures de comptage des carreaux. Possibilité de faire un premier bilan pour s'assurer que la classe a bien compris le travail demandé.
     - Figure trop coûteuse à faire, quelle stratégie ? A partir de la $3^{\text{ème}}$ question (groupe B) et 2^{nde} (groupe C) la procédure de comptage devient trop coûteuse en temps. Si les élèves ont des difficultés à établir une stratégie, introduire l'aide 1 pour essayer de faire évoluer leur point de vue sur la figure et de faire émerger une stratégie.
     - Production d'une expression. Si l'utilisation de la lettre n'émerge pas, introduire l'aide 2 puis l'aide 3 pour inciter les élèves à produire une écriture numérique dans les questions précédentes. Si cette étape est difficile, l'enseignant peut faire un (ou plusieurs) bilan intermédiaire pour faire ressortir les stratégies des élèves à partir des figures (cf. aide 1).
2. Mise en commun (10min) : Appui sur le lien numérique-algébrique pour donner du sens aux lettres.
   - Débat entre élèves : faire émerger différentes procédures liées à différentes expressions.
   - Des lettres différentes peuvent être utilisées
   - Invalider les procédures et expressions erronées en les appliquant aux questions 1 et 2 : appui sur le numérique pour contrôler les productions algébriques.

3. Synthèse (5min) pour tous les groupes :
   - Limite des procédures numériques : les expressions sont un bon moyen de déterminer rapidement le nombre de carreaux pour n'importe quelle figure.
   - Si plusieurs expressions correctes apparaissent, l'enseignant peut faire le lien entre procédure et expression pour appuyer le fait que plusieurs expressions sont possibles. Le travail de la seconde partie est engagé : d'autres expressions conviennent-elles ?
   - Toutes les lettres peuvent être utilisées mais en mathématique, il y a des codes d'usage. Les lettres n, a, x sont majoritairement utilisées.
   - Si une seule expression apparaît, donner la seconde partie.
   - Décontextualiser les expressions de la situation.

Seconde partie : plusieurs expressions pour le même problème

1. Temps de recherche avec distribution des aides (10min). Après un temps de recherche, l'enseignant invite les élèves à tester les expressions pour les valeurs numériques du début du problème. Un tableau de valeurs peut être introduit (cf. exercice 2). Pour justifier les expressions correctes, les élèves sont amenés à transformer les expressions, ce qui est l'occasion de reprendre les règles de distributivité simple et double et les conventions d'écriture.
2. Mise en commun (10min)
   - Débat sur les expressions correctes et incorrectes. Instaurer le contre-exemple et la preuve par le calcul littéral.
   - Décontextualiser les expressions de la situation : plusieurs expressions pour désigner le même nombre.
3. Synthèse (10min) : cf « Que doivent retenir les élèves » au début du document

e. Déroulement pour les exercices 5 et 6

Consigne et enjeux

Travailler le rôle de l'algèbre dans la généralisation et revenir sur les règles de formation et de transformation erronées. L'enseignant peut expliciter à l'oral les enjeux du travail : « Je vous propose de faire des exercices différents car ils sont adaptés aux besoins d'apprentissage que le test a repérés pour chacun de vous. L'objectif est de travailler sur l'utilisation de l'algèbre dans la résolution de problème et de vous donner les moyens de contrôler vos calculs à l'aide du domaine numérique. »

Aides

Une aide méthodologique est disponible en fin de parcours. L'élève peut la consulter dès qu'il le souhaite. Il peut utiliser une calculatrice numérique et un tableau de valeurs.

Déroulement

1. Premier temps de recherche sur la conjecture (5-10min). Les élèves testent chaque programme avec des valeurs numériques qu'ils choisissent. Ils peuvent utiliser la calculatrice pour contrôler leurs résultats ou pour effectuer des calculs un peu pénibles (certains élèves choisissent des valeurs numériques grandes pour tester). Si certains élèves ont des difficultés à appliquer le programme de calcul, l'enseignant peut faire une mise en commun et introduire un schéma de calcul sur des valeurs numériques.
2. Mise en commun sur la conjecture (10min). L'enseignant peut utiliser les valeurs numériques choisies par les élèves pour remplir un tableau de valeurs. Il peut contrôler certains résultats en appliquant le schéma de calcul associé au programme de calcul pour les valeurs numériques choisies. Les élèves remarquent facilement que deux programmes de calculs donnent les mêmes valeurs. Une conjecture commune à chaque groupe peut émerger. L'enseignant enchaîne : « Il ne s'agit que d'une conjecture. On se demande si c'est toujours vraie mais on ne peut pas tester pour toutes les valeurs. Comment peut-on être sûrs que les deux programmes de calcul donnent toujours la même valeur ? »
3. Deuxième temps de recherche production d'une expression et égalité toujours vraie (5-10min). Pour faire émerger une expression, l'enseignant peut s'appuyer sur le schéma de calcul et les résultats des programmes de calcul pour des valeurs numériques (double du nombre, carré du nombre)
4. Mise en commun (10min)
   - Débat sur les différentes expressions. Le retour au numérique permet d'invalider les expressions incorrectes.
   - Montrer l'égalité des deux programmes par l'équivalence des expressions (calcul algébrique) et la non-équivalence du troisième avec un contre-exemple. C'est l'occasion de revenir sur la règle erronée travaillée avec les programmes : faire le lien entre l'égalité et l'équivalence des programmes et la règle fausse et la non-équivalence.
5. Institutionnalisation (10min)
   - Groupes B- et C, décontextualiser des programmes de calculs : les expres-

sions littérales sont un moyen efficace pour calculer rapidement la valeur du programme de calcul et pour montrer que plusieurs programmes donnent le même résultat : des expressions littérales peuvent être égales pour toute valeur de la lettre.

- Pour démontrer que deux programmes sont égaux, on utilise le calcul algébrique. Pour démontrer que deux programmes de calculs ne sont pas toujours égaux, on utilise un contre-exemple.
- cf. « Que doivent retenir les élèves ? »

B.2.2 Valider des règles de formation et transformation des expressions pour travailler l'équivalence des expressions

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes
Valider des règles de formation et transformation des expressions pour travailler l'équivalence des expressions
Que doivent retenir les élèves ?

- Pour vérifier que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre, on peut utiliser :
  - Les identités et les règles de transformation
  - Un tableau de valeurs ou des calculs numériques : si, en remplaçant la lettre par un nombre, les valeurs des expressions sont différentes, alors elles ne sont pas égales, sinon on peut seulement conjecturer que les deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre.
- Montrer qu'une égalité est toujours toujours vraie par le calcul algébrique et montrer qu'une égalité est fausse par un contre-exemple.
- Statut du signe d'égalité comme traducteur d'une identité : les deux expressions figurant de part et d'autre de l'égalité sont égales pour toute valeur de la lettre. Ce statut est à distingué du signe d'égalité comme annonce de résultat ou d'écriture d'une équation (cf. « Projet de document d'accompagnement. Du numérique au littéral. » de 2006 disponible sur eduscol.education.fr)

Stratégie différenciée par groupe

- A : Résoudre des problèmes, prouver ou invalider des propriétés du cadre algébrique.
- B : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation

des expressions (utilisation des parenthèses, distributivité, carré, puissance) à partir des notions de preuve et de contre-exemple numérique.

– C : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation des expressions (concaténation, linéarisation, rôle des parenthèses) à partir des notions de preuve et de contre-exemple numérique.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	7	Prouver ou invalider des propriétés.
	M5 21 p.63 432	Pas d'impair !
	M4 p77 1684	Récréation mathématique, Petite démonstration.
	M3 A1.3 p.32 3615	Arithmétique.
	M5 29p.64 440	Invalider une propriété.
	4N4s2(1 ?)ex6 1102	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Test d'égalités
B	8	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	5	Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ?
	M3 1p. 40 3628	Vrai ou faux ?
	4N4s2(1 ?)ex6 1102	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Test d'égalités
C	9	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	6	Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ?
	M5 1-4 p.62 412-415	Réécritures avec ou sans le signe $\times$.
	M4 9 p.70 1710	Réduction (réécriture sans le signe $\times$ ou $+$ si possible.)
	M3 1p. 40 3628	Vrai ou faux ?
	4N4s2(1 ?)ex6 1102	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Test d'égalités

c. En seconde

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	23	Prouver ou invalider des propriétés.
	24	Utiliser les identités remarquables.
	M4 p77 1684	Récréation mathématique, Petite démonstration.
	M3 p48 4131	Récréation mathématique, Calcul impossible ?
	M3 A1.3 p.32 3615	Arithmétique.
	M3 24 p.42 3651	Carré.
B	25	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	48	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	M3 11p.41 3638	Egalité à trous
C	26	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	49	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	M3 1p. 40 3628	Vrai ou faux ?
	M3 11p.41 3638	Egalité à trous
	4N4s2(1 ?)ex6 1102	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Test d'égalités

d. Déroulement pour les exercices 5, 6, 8, 9, 25, 26, 48 et 49 et proche de celui des exercices 7 et 23

Consigne et enjeux

L'enseignant peut expliciter à l'oral les enjeux du travail : « Je vous propose de faire des exercices différents car ils sont adaptés aux besoins d'apprentissage que le test a repérés pour chacun de vous. L'objectif est de travailler sur des erreurs de calcul et de vous donner un moyen de contrôler vos calculs. »

Aides

Une aide méthodologique est disponible en fin de parcours. L'élève peut la consulter dès qu'il le souhaite. Il peut utiliser une calculatrice numérique et un tableau de valeurs.

Déroulement

1. Question 1. Premier temps de recherche sur les premières égalités (5min). L'enseignant circule dans les rangs et invite les élèves à utiliser l'aide, à remplacer l'indéterminée par une valeur numérique ou à utiliser le tableau de valeurs pour contrôler leurs réponses.

2. Mise en commun (10min)
   - Les élèves du groupe A sont mêlés à la mise en commun. Ils ont eux aussi à déterminer si des égalités sont vraies ou fausses (premières questions) sur des expressions plus complexes.
   - Débat entre élèves : laisser émerger des justifications. L'enseignant peut s'attendre à des justifications par l'exemple numérique, par l'algèbre, par l'application de règles incorrectes, en langage naturel, avec des formulations d'ordre « légal ». Il peut faire intervenir un tableau de valeurs pour invalider les justifications incorrectes. : « et si on vérifiait avec des nombres ? » Le professeur affiche un tableau de valeurs d'une calculatrice ou du type :

a	a^2	$2a$
1	1	2
2	4	4
3	9	6

     - Dans le cas d'une égalité fausse, les colonnes correspondant à chaque membre seront différentes. Si des élèves le demandent, l'enseignant peut introduire l'idée que l'égalité est fausse en général et peut être vraie pour certaines valeurs numériques.
     - Dans le cas d'une égalité toujours vraie, les deux colonnes sont égales, ce qui permet d'établir la conjecture : l'égalité est toujours vraie. Si certains élèves utilisent des justifications numériques (du type c'est vrai pour 2 et 3 donc c'est tout le temps vrai), l'enseignant peut rebondir en insistant sur le fait que ce n'est qu'une conjecture et sur les quantificateurs : « on veut démontrer que c'est vrai pour TOUTES les valeurs. Comment peut-on être sûr pour toutes les valeurs ? On ne peut pas toutes les essayer. » L'enseignant donne ainsi la possibilité de justification par l'algèbre.

3. Deuxième temps de recherche sur les égalités non encre traitées (5min). L'enseignant circule dans les rangs et invite les élèves à remplacer l'indéterminée par une valeur numérique ou à utiliser le tableau de valeurs pour contrôler leurs réponses.

4. Mise en commun (5min) idem à la précédente, davantage orientée vers le bilan.

5. Institutionnalisation (10min)
   - Pour démontrer qu'une égalité est fausse, un contre-exemple suffit. En fonction des égalités, institutionnaliser les règles d'écritures, les propriétés de distributivité, les identités remarquables
   - Pour démontrer qu'une égalité est toujours vraie (on dit vraie pour tout a), on utilise le calcul littéral, un exemple ne suffit pas. En fonction des égalités, institutionnaliser les règles d'écritures, les identités de distributivité.
   - Méthode : Comment vérifier ses calculs ? Vérifier ses calculs (transformation d'une expression en une autre) c'est vérifier que l'égalité entre la première expression et la dernière expression est toujours vraie (vraie pour toute valeur de la lettre). On peut utiliser un tableau de valeurs ou donner une ou plusieurs valeurs numériques à la lettre et comparer les résultats :
     - S'ils sont différents, les expressions ne sont pas toujours égales et les calculs sont à recommencer.
     - S'ils sont égaux, on peut conjecturer que les expressions sont égales.
6. Question 2. Troisième temps de recherche (10min), réinvestissement du bilan. Cette partie peut être traitée en exercice de réinvestissement à la maison. Les élèves ont la consigne de produire des égalités toujours vraies ou fausses. Chaque binôme propose deux égalités avec une justification. Le tableau de valeur ou les tests numériques ont été institutionnalisés comme un moyen de contrôler les réponses. L'enseignant circule dans la classe pour assurer le bon déroulement de l'activité. Si le temps le permet, une mise en commun est possible, chaque binôme propose aux autres ses égalités. L'enseignant peut revenir sur l'institutionnalisation.

B.2.3 Etudier des expressions équivalentes

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes
Etudier des expressions équivalentes, c'est-à-dire des expressions égales pour toute valeur de la lettre.
Que doivent retenir les élèves ?
- Des expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre et correspondre à la même fonction. On peut remarquer que, de la même façon, un nombre possède plusieurs écritures comme 0,5 et $\frac{1}{2}$. Quelle que soit la valeur par laquelle on remplace x dans des expressions égales pour toute valeur de

la lettre, on obtient le même résultat.

- On peut utiliser l'une ou l'autre des écritures équivalentes d'une expression pour calculer astucieusement, calculer des images, des antécédents ou pour étudier des propriétés de la fonction caractérisée par cette expression.
- Pour vérifier que deux expressions sont égales pour tout valeur de la lettre, on peut utiliser :
  - les identités et les règles de transformation
  - un tableau de valeurs, une représentation graphique ou des calculs numériques : si, en remplaçant la lettre par un nombre, les valeurs des expressions sont différentes, alors elles ne sont pas égales, sinon on peut seulement conjecturer que les deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre car un exemple ne suffit pas pour conclure que l'égalité est toujours vraie.
- Statut du signe d'égalité comme traducteur d'une identité : les deux expressions figurant de part et d'autre de l'égalité sont égales pour toute valeur de la lettre. Ce statut est à distingué du signe d'égalité comme annonce de résultat ou d'écriture d'une équation (cf. « Projet de document d'accompagnement. Du numérique au littéral. » de 2006 disponible sur eduscol.education.fr)

Stratégie différenciée par groupe

- A : Prouver l'équivalence des expressions par le calcul algébrique et mobiliser la forme la plus adpatée pour résoudre un problème, calculer astucieusement.
- B et C : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre. L'équivalence entre plusieurs expressions est conjecturée à partir du cadre numérique (tests avec différentes valeurs numériques) ou du cadre graphique (comparaison des courbes représentatives des fonctions définies par les expressions). L'équivalence des expressions est utilisée pour calculer astucieusement une expression numérique et choisir la forme la plus appropriée pour calculer la valeur de l'expression pour une valeur numérique donnée.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	10	Des expressions égales pour tout x ?
B	11	Des expressions égales pour tout x ?
	4N4s1ex6 1102	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Test d'égalités
C	12	Des expressions égales pour tout x ?
	4N4s1ex6 1102	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Test d'égalités

c. En seconde

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	27	Travailler avec plusieurs expressions d'une même fonction.
B	28	Des fonctions égales ?
C	31	Des fonctions égales ?
	4N4s1ex6 1102	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Test d'égalités

d. Déroulement pour les exercices 10, 11 et 12

Consigne et enjeux

L'enseignant peut expliciter à l'oral les enjeux du travail : « Je vous propose de faire des exercices différents car ils sont adaptés aux besoins d'apprentissage que le test a repérés pour chacun de vous. L'objectif est de travailler sur plusieurs expressions égales pour toute valeur de la lettre et de vous donner des moyens de contrôler vos calculs. »

Aides

Une aide méthodologique est disponible en fin de parcours. L'élève peut la consulter dès qu'il le souhaite. Il peut utiliser une calculatrice numérique et un tableau de valeurs.

Déroulement

1. Temps de recherche sur la (les) conjecture(s) (5min)
2. Mise en commun sur la (les) conjecture(s) (10min). Débat des élèves. L'enseignant fait évoluer le débat en intégrant un tableau de valeurs : « Que remarquez-vous sur ce tableau de valeurs ? Quelle conjecture peut-on faire ? »

L'enseignant s'assure que tous les élèves ont la même conjecture et les amène vers la preuve algébrique : « Comment peut-on vérifier la conjecture ? Comment peut-on prouver que les expressions sont égales pour tout x ? »

3. Temps de recherche (5min) sur la preuve algébrique, les calculs astucieux et les calculs d'images
4. Mise en commun (5min) : débat des élèves.
5. Institutionnalisation (10min) à partir de « Que doivent retenir les élèves ? »

e. Déroulement pour les exercices 27, 28 et 31

Consigne et enjeux

L'enseignant peut expliciter à l'oral les enjeux du travail : « Je vous propose de faire des exercices différents car ils sont adaptés aux besoins d'apprentissage que le test a repérés pour chacun de vous. L'objectif est de travailler sur plusieurs expressions égales pour toute valeur de la lettre et de vous donner des moyens de contrôler vos calculs. »

Aides

Une aide méthodologique est disponible en fin de parcours. L'élève peut la consulter dès qu'il le souhaite. Il peut utiliser une calculatrice graphique et un tableau de valeurs.

Déroulement

1. Temps de recherche sur la conjecture (5min)
2. Mise en commun sur la conjecture (10min). Débat des élèves. L'enseignant amène le lien entre le tableau de valeurs (groupe C) et la représentation graphique (groupes B et C). L'enseignant s'assure que tous les élèves ont la même conjecture (f et g sont égales, mais différentes h) et amène les élèves vers la preuve : « Comment peut-on vérifier la conjecture ? Comment prouver que les expressions sont égales pour tout x ? » L'enseignant peut faire le lien avec les expressions du groupe A.
3. Temps de recherche (5min) sur la preuve algébrique et sur les calculs d'images et d'antécédents.
4. Mise en commun (5min) : débat des élèves.
5. Institutionnalisation (10min) à partir de « Que doivent retenir les élèves ? »

B.2.4 Travailler l'aspect structural des expressions en les associant à d'autres représentations et vice-versa

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes
Il s'agit d'amener les élèves à reconnaître la structure des expressions algébriques (une somme de termes, un produit de facteurs) sur des expressions de plus en plus complexes. L'aspect structural des expressions est travaillé, au début du chapitre, à partir du lien entre les écritures algébriques et d'autres représentations comme le langage naturel, les schémas de calcul, les programmes de calcul, les grandeurs ou les représentations en arbre, tandis qu'en milieu de chapitre, il l'est davantage dans les écritures algébriques. Ce travail sur la structure des expressions peut être mené préalablement puis en accompagnement à l'entraînement aux techniques de factorisation et de développement. En effet, déterminer si une expression peut être développée ou factorisée et déterminer quelle règle de calcul ou identité remarquable appliquer pour transformer une expression en une équivalente passent par la reconnaissance de sa structure, étape qui est souvent laissée à la charge des élèves.
Que doivent retenir les élèves ?

- Pour associer une expression (et vice-versa) à une aire, un programme de calcul, un schéma de calcul, une phrase, on s'interroge sur la structure de l'expression : est-ce une somme de termes (somme et différence) ? Est-ce un produit de facteurs (produit et puissance) ?
- La structure de l'expression (aspect structural des expressions) correspond à la dernière opération à effectuer lorsqu'on évalue l'expression pour une valeur numérique de la lettre (aspect procédural des expressions).

Stratégie différenciée par groupe

- A et B : Travailler l'aspect structural des expressions en lien avec leurs représentations dans le langage naturel, les grandeurs, les arbres ou les programmes de calcul, et sur des expressions de plus en plus complexes.
- C : Construire une conception structurale des expressions à partir de leur aspect procédural, privilégié par les élèves du groupe C, et de leurs représentations en programmes de calcul, schémas de calcul, langage naturel ou grandeurs. Mettre en évidence le lien entre la structure et la dernière opération à effectuer lorsqu'on évalue l'expression pour une valeur de la lettre.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	14 & 15	Correspondance entre aire et expression
	4N4s5ex5 1127	4e/Calcul littéral/Problèmes/Géométrie plane
	33	Associer une expression algébrique à une phrase.
	19	Arbre de calcul et expression algébrique
	M3 14p.41 3641	Traduire une phrase par une expression
	4N4s5ex2 1124	4e/Calcul littéral/Problèmes/Programmes de calcul (associer un programme à une expression)
	4N4s5ex1 1123	4e/Calcul littéral/Problèmes/Exprimer en fonction d'un nombre
	4N4s5ex5 1127	4e/Calcul littéral/Problèmes/Géométrie plane
	4N4s5ex6 1128	4e/Calcul littéral/Problèmes/Volumes
	4N4s5ex9 1131	4e/Calcul littéral/Problèmes/Divers
B	32 & 14	Correspondance entre aire et expression
	17	Associer une expression algébrique à une phrase et à un programme de calcul.
	4N4s5ex2 1124	4e/Calcul littéral/Problèmes/Programmes de calcul (associer un programme à une expression)
	4N4s5ex7 1129	4e/Calcul littéral/Problèmes/Traduire une phrase par une équation
	4N4s1ex1 1097	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Produit ou somme ?
C	16 & 13	Correspondance entre aire et expression
	18	Associer une expression algébrique à une phrase et à un programme de calcul.
	53	Somme ou produit ? (programmes de calcul et arbre)
	M5 5p.62 416	Traduire des phrases par une expressions littérales.
	5N10(4)s3ex8 689	3e/Calcul littéral/Calcul littéral/Programmes de calcul (associer un programme à une expression)
	4N4s5ex3 1125	4e/Calcul littéral/Problèmes/Longueurs
	4N4s5ex7 1129	4e/Calcul littéral/Problèmes/Traduire une phrase par une équation
	4N4s1ex1 1097	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Produit ou somme ?

c. En seconde

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	M3 61p.46 3688	Calcul littéral en toutes lettres
	29	Traduire une expression par un programme de calcul
	30	Traduire une expression par un schéma de calcul
	4N4s5ex8 1130	4e/Calcul littéral/Problèmes/Ages
	3N2s3ex9 1380	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/En géométrie
B	M3 61p.46 3688	Calcul littéral en toutes lettres
	29	Traduire une expression par un programme de calcul
	30	Traduire une expression par un schéma de calcul
	4N4s5ex2 1124	4e/Calcul littéral/Problèmes/Programmes de calcul (associer un programme à une expression)
	4N4s5ex9 1131	4e/Calcul littéral/Problèmes/Divers
	3N2s3ex9 1380	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/En géométrie
C	53	Somme ou produit ? (programmes de calcul et arbre)
	M3 14p.41 3641	Traduire une phrase par une expression
	4N4s5ex2 1124	4e/Calcul littéral/Problèmes/Programmes de calcul (associer un programme à une expression)
	4N4s5ex7 1129	4e/Calcul littéral/Problèmes/Traduire une phrase par une équation
	4N4s1ex1 1097	4e/Calcul littéral/Prendre un bon départ/Produit ou somme ?

B.3 Parcours à l'étape « Travail sur des connaissances nouvelles »

B.3.1 Etudier des expressions équivalentes

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes
Etudier des expressions équivalentes, c'est-à-dire des expressions égales pour toute valeur de la lettre.
Que doivent retenir les élèves ?

- Des expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre et correspondre à la même fonction. On peut remarquer que, de la même façon, un nombre possède plusieurs écritures comme 0,5 et $\frac{1}{2}$. Quelle que soit la valeur par laquelle on remplace x dans des expressions égales pour toute valeur de la lettre, on obtient le même résultat.
- On peut utiliser l'une ou l'autre des écritures équivalentes d'une expression pour calculer astucieusement, calculer des images, des antécédents ou pour étudier des propriétés de la fonction caractérisée par cette expression.
- Pour vérifier que deux expressions sont égales pour tout valeur de la lettre, on peut utiliser :
  - les identités et les règles de transformation
  - un tableau de valeurs, une représentation graphique ou des calculs numériques : si, en remplaçant la lettre par un nombre, les valeurs des expressions sont différentes, alors elles ne sont pas égales, sinon on peut seulement conjecturer que les deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre car un exemple ne suffit pas pour conclure que l'égalité est toujours vraie.
- Statut du signe d'égalité comme traducteur d'une identité : les deux expressions figurant de part et d'autre de l'égalité sont égales pour toute valeur de la lettre. Ce statut est à distingué du signe d'égalité comme annonce de résultat ou d'écriture d'une équation (cf. « Projet de document d'accompagnement. Du numérique au littéral. » de 2006 disponible sur eduscol.education.fr)

Stratégie différenciée par groupe

- A : Prouver l'équivalence des expressions par le calcul algébrique et mobiliser la forme la plus adpatée pour résoudre un problème, calculer astucieusement.

- B et C : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre. L'équivalence entre plusieurs expressions est conjecturée à partir du cadre numérique (tests avec différentes valeurs numériques) ou du cadre graphique (comparaison des courbes représentatives des fonctions définies par les expressions). L'équivalence des expressions est utilisée pour calculer astucieusement une expression numérique et choisir la forme la plus appropriée pour calculer la valeur de l'expression pour une valeur numérique donnée.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	34	Choisir la bonne écriture d'une expression.
B	35	Des expressions égales pour tout x ?
C	36	Des expressions égales pour tout x ?

c. En seconde

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	51	Plusieurs expressions d'une même fonction.
B	52	Plusieurs expressions d'une même fonction.
C	52	Plusieurs expressions d'une même fonction.

d. Déroulement pour les exercices 34, 35, 36, 51 et 52

Le déroulement est similaire à celui proposé au paragraphe B.2.3.e..

B.3.2 Valider des règles de formation et transformation des expressions pour travailler l'équivalence des expressions

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes
Valider des règles de formation et transformation des expressions pour travailler l'équivalence des expressions
Que doivent retenir les élèves ?

- Pour vérifier que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre, on peut utiliser :
  - Les identités et les règles de transformation
  - Un tableau de valeurs ou des calculs numériques : si, en remplaçant la lettre par un nombre, les valeurs des expressions sont différentes, alors elles ne sont

pas égales, sinon on peut seulement conjecturer que les deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre.

- Montrer qu'une égalité est toujours toujours vraie par le calcul algébrique et montrer qu'une égalité est fausse par un contre-exemple.
- Statut du signe d'égalité comme traducteur d'une identité : les deux expressions figurant de part et d'autre de l'égalité sont égales pour toute valeur de la lettre. Ce statut est à distingué du signe d'égalité comme annonce de résultat ou d'écriture d'une équation (cf. « Projet de document d'accompagnement. Du numérique au littéral. » de 2006 disponible sur eduscol.education.fr)

Stratégie différenciée par groupe

- A : Résoudre des problèmes, prouver ou invalider des propriétés du cadre algébrique.
- B : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation des expressions (utilisation des parenthèses, distributivité, carré, puissance) à partir des notions de preuve et de contre-exemple numérique.
- C : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation des expressions (concaténation, linéarisation, rôle des parenthèses) à partir des notions de preuve et de contre-exemple numérique.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	50	Des égalités toujours vraies ?
B	48	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	M3 11p.41 3638	Egalité à trous
C	49	Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
	M3 11p.41 3638	Egalité à trous

c. En seconde

Les exercices proposés sont ceux présentés au paragraphe B.2.2.c..

d. Déroulement pour les exercices 48, 49 et 50

Ce déroulement est identique à celui présenté au paragraphe B.2.2.d..

B.3.3 Reconnaître la structure des expressions

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes

Il s'agit d'amener les élèves à reconnaître la structure des expressions algébriques (une somme de termes, un produit de facteurs) sur des expressions de plus en plus complexes. L'aspect structural des expressions est travaillé, au début du chapitre, à partir du lien entre les écritures algébriques et d'autres représentations comme le langage naturel, les schémas de calcul, les programmes de calcul, les grandeurs ou les représentations en arbre, tandis qu'en milieu de chapitre, il l'est davantage dans les écritures algébriques. Ce travail sur la structure des expressions peut être mené préalablement puis en accompagnement à l'entraînement aux techniques de factorisation et de développement. En effet, déterminer si une expression peut être développée ou factorisée et déterminer quelle règle de calcul ou identité remarquable appliquer pour transformer une expression en une équivalente passent par la reconnaissance de sa structure, étape qui est souvent laissée à la charge des élèves.

Que doivent retenir les élèves ?

- Une expression algébrique est soit une somme algébrique de termes (somme et différence) soit un produit de facteurs (produit et puissance).
- La structure de l'expression (aspect structural des expressions) correspond à la dernière opération à effectuer lorsqu'on évalue l'expression pour une valeur numérique de la lettre (aspect procédural des expressions).
- Des expressions avec des structures différentes peuvent être égales pour toute valeur de la lettre.

Stratégie différenciée par groupe

- A et B : Reconnaître des sommes de termes ou des produits de facteurs sur des expressions de plus en plus complexes. Lien entre les écritures algébriques et le langage naturel.
- C : Reconnaître des sommes de termes ou des produits de facteurs sur des expressions de structure simple en travaillant sur les réécritures (faire apparaître les signes $\times$), leur aspect procédural (lien structure et dernière opération à effectuer lorsqu'on évalue l'expression pour une valeur de la lettre) et leurs représentations en langage naturel.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	M3 61p.46 3688	Traduire une phrase par une expression
	37	Associer forme développée et forme factorisée
	3N2s3ex10 1381	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Associer un développement à une expression factorisée
B	37	Associer forme développée et forme factorisée
	M3 14p.41 3641	Traduire par une phrase les expressions
	55	Traduire une phrase des expressions
	3N2s3ex10 1381	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Associer un développement à une expression factorisée
C	53	Somme ou produit ? (programmes de calcul et arbre)
	54	Associer forme développée et forme factorisée

c. En seconde

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	M3 61p.46 3688	Traduire une phrase par une expression
	37	Associer forme développée et forme factorisée
	3N2s3ex10 1381	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Associer un développement à une expression factorisée
B	37	Associer forme développée et forme factorisée
	M3 14p.41 3641	Traduire par une phrase les expressions
	55	Traduire une phrase des expressions
	3N2s3ex10 1381	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Associer un développement à une expression factorisée
C	53	Somme ou produit ? (programmes de calcul et arbre)
	54	Associer forme développée et forme factorisée

B.3.4 Travailler les techniques de développement et de factorisation

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes

Entraîner aux techniques de développement et de factorisation et développer un contrôle des calculs.

Que doivent retenir les élèves ?

- Pour transformer une expression en une équivalente, on utilise les règles du calcul littéral, instanciées avec les valeurs de l'expression :
  Pour tout a, b, c et d :
  1. la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
  2. la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
  3. l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  4. l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  5. l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- Des méthodes pour contrôler ses calculs, c'est-à-dire pour contrôler que l'expression de départ et celle transformée sont égales pour toute valeur de la lettre :
  - Évaluer les deux expressions en attribuant une valeur numérique aux lettres puis vérifier si les résultats sont égaux ou non.
  - Tracer les représentations graphiques des fonctions définies par les expressions.
- On développe des produits et on factorise des sommes. Voici une méthode de factorisation :

Si A est un produit de facteurs

  alors l'expression est déjà factorisée.

  Sinon A est une somme de termes

    Si le facteur commun est apparent
      alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

      Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
        transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.

    Fin si

  Fin si

Fin

Stratégie différenciée par groupe

- A : Développer l'intelligence du calcul : choix de la transformation à opérer en fonction du but visé laisser à la charge des élèves.
- B et C : Travailler les techniques de développement et de factorisation en introduisant un contrôle des étapes de calcul et de l'équivalence des expressions à chaque étape.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	38	Développer des produits, factoriser des sommes
	3N2s3ex5 1376	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Identités en vrac
	3N2s3ex6 1377	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Avec des fractions
	3N2s3ex7 1378	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (sans changement de signe)
	3N2s3ex8 1379	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (avec changement de signe)
	3N2s4ex6 1387	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Différence de deux carrés (niveau 2)
	3N2s6ex1 1396	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser
	3N2s6ex2 1397	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, calculer
	3N2s6ex3 1398	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, calculer
	3N2s6ex4 1399	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, résoudre
	3N2s4ex9 1390	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factoriser en deux temps
	3N2s4ex10 1391	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factorisations (niveau 3)
	4N4s6ex3 1136	4e/Calcul littéral/Pour aller plus loin/Développements complexes

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
B	39	Développer des produits, factoriser des sommes
	4N4s4ex6 1121	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Synthèse (niveau 1)
	3N2s3ex5 1376	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Identités en vrac
	3N2s3ex7 1378	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (sans changement de signe)
	3N2s3ex8 1379	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (avec changement de signe)
	3N2s6ex1 1396	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser
	3N2s4ex6 1387	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Différence de deux carrés (niveau 2)
	3N2s4ex9 1390	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factoriser en deux temps
	3N2s4ex10 1391	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factorisations (niveau 3)
	4N4s6ex2 1135	4e/Calcul littéral/Pour aller plus loin/Calcul littéral et fractions
	4N4s6ex3 1136	4e/Calcul littéral/Pour aller plus loin/Développements complexes

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
C	40	Développer des produits, factoriser des sommes
	4N4s4ex4 1119	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Distributivité double
	4N4s4ex6 1121	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Synthèse (niveau 1)
	3N2s3ex2 1373	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Carré d'une somme
	3N2s3ex3 1374	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Carré d'une différence
	3N2s3ex4 1375	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Produit de la somme par la différence
	3N2s3ex7 1378	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (sans changement de signe)
	3N2s3ex8 1379	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (avec changement de signe)
	3N2s6ex1 1396	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser
	3N2s4ex4 1385	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Obtention du carré d'une différence
	3N2s4ex5 1386	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Différence de deux carrés (niveau 1)
	3N2s4ex7 1388	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Facteur commun (niveau 1)
	3N2s4ex8 1389	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Facteur commun (niveau 2)
	4N4s4ex2 1117	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Effectuer le produit puis réduire

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
C	4N4s4ex3 1118	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Distributivité simple
	4N4s4ex4 1119	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Distributivité double
	4N4s6ex1 1134	4e/Calcul littéral/Pour aller plus loin/Développer puis substituer
	4N4s6ex4 1137	4e/Calcul littéral/Pour aller plus loin/Factorisations

c. En seconde

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	3N2s3ex6 1377	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Avec des fractions
	3N2s6ex1 1396	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser
	3N2s6ex2 1397	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, calculer
	3N2s6ex3 1398	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, calculer
	3N2s6ex4 1399	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, résoudre
	3N2s4ex9 1390	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factoriser en deux temps
	3N2s4ex10 1391	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factorisations (niveau 3)

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
B	3N2s3ex6 1377	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Avec des fractions
	3N2s3ex7 1378	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (sans changement de signe)
	3N2s3ex8 1379	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (avec changement de signe)
	3N2s6ex1 1396	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser
	3N2s4ex6 1387	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Différence de deux carrés (niveau 2)
	3N2s6ex1 1396	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser
	3N2s6ex2 1397	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, calculer
	3N2s6ex3 1398	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, calculer
	3N2s6ex4 1399	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser, résoudre
	3N2s4ex9 1390	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factoriser en deux temps
	3N2s4ex10 1391	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Factorisations (niveau 3)
	4N4s6ex3 1136	4e/Calcul littéral/Pour aller plus loin/Développements complexes

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
C	4N4s4ex4 1119	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Distributivité double
	4N4s4ex6 1121	4e/Calcul littéral/Développer, réduire/Synthèse (niveau 1)
	3N2s3ex2 1373	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Carré d'une somme
	3N2s3ex3 1374	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Carré d'une différence
	3N2s3ex4 1375	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Produit de la somme par la différence
	3N2s3ex5 1376	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Identités en vrac
	3N2s3ex7 1378	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (sans changement de signe)
	3N2s3ex8 1379	3e/Calcul littéral, Equations/Développer/Développements (avec changement de signe)
	3N2s6ex1 1396	3e/Calcul littéral, Equations/Synthèse/Développer, factoriser
	3N2s4ex4 1385	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Obtention du carré d'une différence
	3N2s4ex5 1386	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Différence de deux carrés (niveau 1)
	3N2s4ex7 1388	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Facteur commun (niveau 1)
	3N2s4ex8 1389	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Facteur commun (niveau 2)
	3N2s4ex6 1387	3e/Calcul littéral, Equations/Factoriser/Différence de deux carrés (niveau 2)
	4N4s6ex3 1136	4e/Calcul littéral/Pour aller plus loin/Développements complexes

B.3.5 Réinvestir les techniques de calcul algébrique pour résoudre des problèmes (modélisation, généralisation, preuve, calculs astucieux)

a. Présentation des objectifs

Objectif d'apprentissage commun aux groupes

Réinvestir les techniques de calcul algébrique pour résoudre des problèmes (modélisation, généralisation, preuve, calculs astucieux, résolution d'équation)

Que doivent retenir les élèves ?

–

Stratégie différenciée par groupe

- A et B+ : Mobiliser des techniques adaptées à la résolution d'équations se ramenant au premier degré et aux problèmes de preuve (par exemple , montre que le carré d'un nombre impair est impair...)
- B- et C : Motiver le choix de techniques adaptées pour résoudre des problèmes et travailler les techniques de calcul algébrique.

b. En troisième

Groupe	N° exo	Titre ou chemin
A	47	Aires égales ?
41	Utiliser les identités remarquables	
	M3 24p.42	Carré
B	42	Calculs astucieux en utilisant les identités remarquables
	44	Utiliser les identités remarquables
	45	Des aires et des périmètres égaux ?
41	Utiliser les identités remarquables	
C	43	Calculs astucieux en utilisant les identités remarquables
	46	Périmètres égaux
41	Utiliser les identités remarquables	

B.4 Liste d'exercices

Exercice 1

Titre

Programme de calcul et expression littérale.

Énoncé

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre de départ
- Multiplier ce nombre par (-2)
- Ajouter 5 au produit
- Multiplier le résultat par 5
- Ecrire le résultat obtenu.

1. Quel est le résultat du programme de calcul lorsqu'on prend 2 et 5 comme nombre de départ ?
2. Denis prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x, l'expression $(x-5)^2 - x^2$ permet d'obtenir le résultat du programme de calcul. A-t-il raison ?

Aide

1. Ecris une expression traduisant le programme de calcul.
2. Développe ou factorise l'expression de Denis et celle qui traduit le programme de calcul.

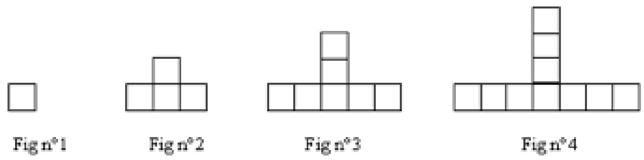
Exercice 2

Titre

Suite de figures géométriques et généralisation.

Énoncé

Voici une suite de figures géométriques.



1. Quel sera le nombre de carrés pour la figure numéro 5 et la figure numéro 11 ?
2. Quel sera le nombre de carrés la figure numéro 101 ?
3. Et dans le cas d'une figure de numéro quelconque ?

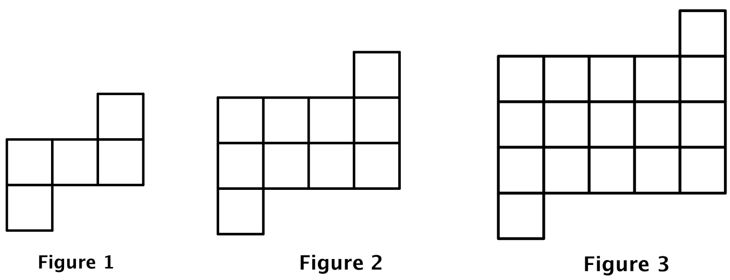
Exercice 3

Titre

Suite de figures géométriques et généralisation.

Énoncé

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.



Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?
3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ? Question enseignant : comment expliques-tu que plusieurs formules répondent à la question 3 ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

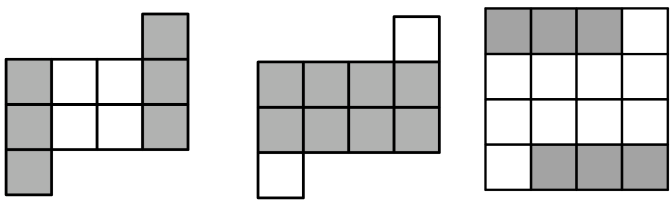
Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - ○ $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - ○ $a(a+2)+2$
   - ○ a^2+2a+2
   - ○ $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - ○ $a^2+2(a+1)$
3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis la formule qui demande le moins de calculs.

Aide

PREMIERE AIDE PARTIE A

Aide pour les questions 1 et 2 Voici la figure de taille 2. Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :

- ◦ $4^2 + 2 \times (4 + 1)$
- ◦ $4 \times (4 + 2) + 2$
- ◦ $(4 + 2)^2 - 2 \times (4 + 1)$

Aide pour la question 2 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :

- ◦ $30^2 + 2 \times (30 + 1)$
- ◦ $30 \times (30 + 2) + 2$
- ◦ $(30 + 2)^2 - 2 \times (30 + 1)$

TROISIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 3 Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur un des schémas de la première aide.

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 Tu peux associer une formule à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les formules qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.

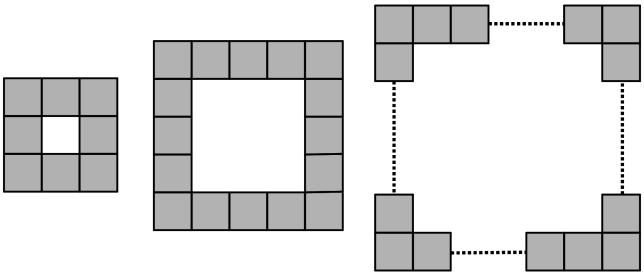
Exercice 4

Titre

Carré bordé et généralisation.

Énoncé

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.
2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.
3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.
4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.
5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - $4 \times a + 4$

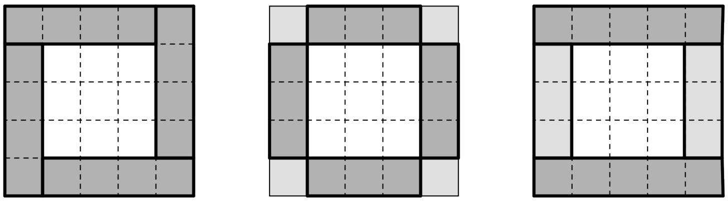
- $(a+2) \times 4$
- $(a+2) \times 4 - 4$
- $(a+1) \times 4$
- $(a+2) \times 2 + a \times 2$
- $(a \times 4) - 4$

3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.

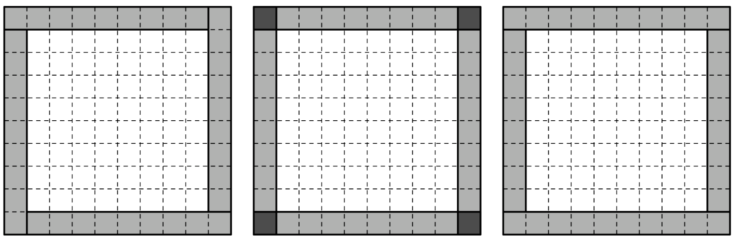
Aide

PREMIERE AIDE PARTIE A

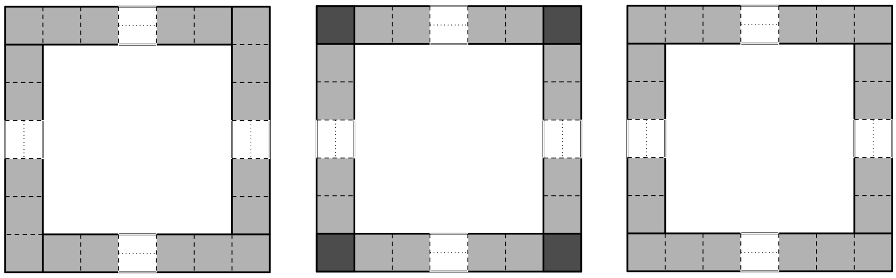
Aide pour la question 1 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



Aide pour la question 2 Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.



Aide pour les questions 3 et 4 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :

- $4 \times (3 + 1)$
- $4 \times 3 + 4$
- $2 \times (3 + 1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 2 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :

- $4 \times (8 + 1)$
- $4 \times 8 + 4$
- $2 \times (8 + 1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 3 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :

- $4 \times (100 + 1)$
- $4 \times 100 + 4$
- $2 \times (100 + 1) + 2 \times 3$

TROISIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 5 Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur un des schémas de la première aide.

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 Tu peux associer une formule à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les formules qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.

Exercice 5

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ? »

Énoncé

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 2. - Elever le résultat au carré.	- Choisir un nombre. - Elever ce nombre au carré. - Multiplier par 2.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ.

1. Recopie le tableau ci-dessous. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres et note le résultat dans le tableau. Tu peux utiliser une calculatrice.

Nombre	Résultat programme1	Résultat programme2	Résultat programme3

2. Quels programmes semblent être égaux ?
3. Ecris une expression littérale pour chaque programme.
4. Avec ces trois expressions, écris une égalité. Justifie.
5. Utilise cette égalité pour vérifier ta réponse à la question 2. et démontrer quels sont les programmes égaux.

Aide

Question 1. Utilise un schéma de calcul. Par exemple, si on choisit le nombre 5 dans le programme1 :

$$5 \xrightarrow{\times 2} 10 \xrightarrow{\uparrow^2} 10^2 = 100$$

$\uparrow^2$ signifie élever au carré.

Question 3. Pour chaque programme, écris un schéma de calcul valable pour un nombre quelconque. Teste l'expression obtenue avec les nombres utilisés dans la question 1. pour contrôler ton résultat.

Question 4. Tu peux t'aider de ta remarque à la question 1.

Exercice 6

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ?

Énoncé

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter 3 au produit.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 7.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter au produit le triple du nombre de départ.

1. Recopie le tableau ci-dessous. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres et note le résultat dans le tableau. Tu peux utiliser une calculatrice.

Nombre	Résultat programme1	Résultat programme2	Résultat programme3

2. Quels programmes semblent être égaux ?
3. Ecris une expression littérale pour chaque programme.
4. Avec ces trois expressions, écris une égalité toujours vraie. Justifie.
5. Utilise cette égalité pour vérifier ta réponse à la question 2. et démontrer quels sont les programmes égaux ?

Aide

Question 1. Tu peux utiliser un schéma de calcul. Par exemple, si on choisit le nombre 5 dans le programme1 :

$$5 \xrightarrow{\times 4} 20 \xrightarrow{+3} 23$$

Question 3. Pour chaque programme, écris un schéma de calcul valable pour un nombre quelconque. Teste l'expression obtenue avec les nombres utilisés dans la question 1 pour contrôler ton résultat.

Question 4. Tu peux t'aider de ta remarque à la question 2.

Exercice 7

Titre

Prouver ou invalider des propriétés.

Énoncé

1. L'égalité $x(x+1)+1 = 2x+1$ est-elle vraie pour tout réel x ?
2. On sait que $10x = 99,75$. En déduire la valeur de $10(x+10)$.
3. On sait que $2x+5 = 4985$. En déduire la valeur de $2(x+10)+5$.
4. On sait que $2x+5 = 485$. On augmente x de 10. Combien vaut alors $2x+5$?
5. Montre que pour tout entier n, $n^3 - n$ s'écrit $n(n-1)(n+1)$. On dit que $n^3 - n$ est le produit de trois entiers consécutifs.

Aide

Question 1
- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Question 2 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $10(x+10)$ pour faire apparaître $10x$ et utiliser le fait que $10x = 99,75$.

Question 3 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $2(x+10)+5$ pour faire apparaître $2x+5$ et utiliser le fait que $2x+5 = 4985$.

Question 4 Traduis algébriquement « On augmente x de 10 » et remplace dans l'égalité $2x+5 = 485$.

Exercice 8

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?

Énoncé

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse. Tu peux recopier le tableau ci-dessous sur ta feuille.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$		
$a(a+2) = a^2 + 2$		
$a + 3(a+2) = 4a + 6$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Aide

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Exercice 9

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?

Énoncé

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse. Tu peux recopier le tableau ci-dessous sur ta feuille.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$		
$a^2 = 2a$		
$(2a)^2 = 4a^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Aide

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Exercice 10

Titre

Des expressions égales pour tout x ?

ÉnoncéVoici trois expressions :

- $A(x) = (x - 2)(x + 2)$
- $B(x) = x^2 - 4$
- $C(x) = x^2 - 2x - 4$

1. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie.
2. Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 98×102

Aide

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.

– Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.

EXERCICE 11

Titre

Des expressions égales pour tout x ?

Énoncé

On se demande si les expressions suivantes sont égales pour toute valeur de x :

- $A(x) = (x-2)(x+2)$
- $B(x) = x^2 - 4$
- $C(x) = x^2 - 2x - 4$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$ et $x = 1$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?
4. Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 98×102

Aide

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.

EXERCICE 12

Titre

Des expressions égales pour tout x ?

Énoncé

On se demande si les expressions suivantes sont égales pour toute valeur de x :

- $A(x) = x(x+2)$
- $B(x) = x^2 + 2$
- $C(x) = x^2 + 2x$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et $x = 2$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?
4. Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 11×13

Aide

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout** x **»** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.

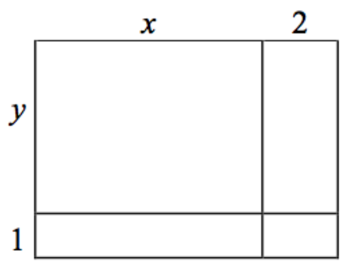
Exercice 13

Titre

Correspondance entre aire et expression.

Énoncé

Recopie le schéma ci-dessous sur ta feuille. Hachure la partie de la figure ayant pour aire l'expression $E = x(y+1) + 2y$.



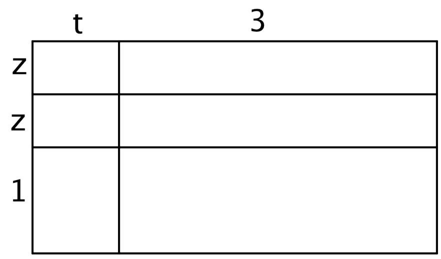
Exercice 14

Titre

Correspondance entre aire et expression.

Énoncé

Recopie le schéma ci-dessous sur ta feuille. Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression $H = t(2z + 1) + 3z$



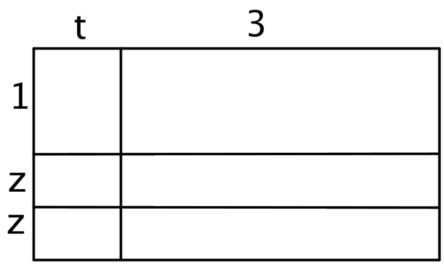
Exercice 15

Titre

Correspondance entre aire et expression.

Énoncé

Recopie le schéma ci-dessous sur ta feuille. Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression $G = z(t + 3) + t$



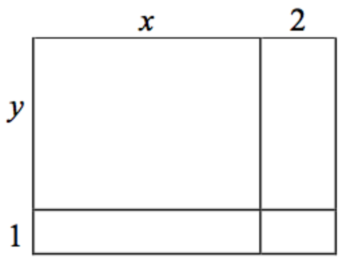
Exercice 16

Titre

Correspondance entre aire et expression.

Énoncé

Recopie le schéma ci-dessous sur ta feuille. Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression $E = x(y+1)$.



Exercice 17

Titre

Associer une expression algébrique à une phrase ou un programme de calcul.

ÉnoncéAssocie chaque expression à la phrase qui la décrit.

$(2ab)^2$ •	• Le double du carré du produit de a par b
$2(ab)^2$ •	• Le double du carré de a et de b
$2a^2b$ •	• Le carré du double de a et de b

Exercice 18

Titre

Associer une expression algébrique à une phrase et à un programme de calcul.

Énoncé

Voici trois programmes de calcul.

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Lui ajouter 2.	- Choisir un nombre. - Le multiplier par lui-même.	- Choisir un nombre. - Le multiplier par 2.

1. Recopie le tableau ci-dessous. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres et note le résultat dans le tableau. Tu peux utiliser une calculatrice.

Nombre	Résultat programme1	Résultat programme2	Résultat programme3

2. Que peux-tu dire sur les résultats des programmes ? Formule une conjecture.
3. Ecris une expression littérale pour chaque programme.
4. Associe chaque expression à son programme de calcul et à la phrase qui la décrit.

Phrase	Expression	Programme
La double de a •	• a^2 •	• P1 : Prendre un nombre, lui ajouter 2.
La somme de 2 et de a •	• $a+2$ •	• P2 : Prendre un nombre, le multiplier par lui-même
Le carré de a •	• $2a$ •	• P3 : Prendre un nombre, le multiplier par 2

Exercice 19

Titre

Arbre de calcul et expression algébrique.

Énoncé

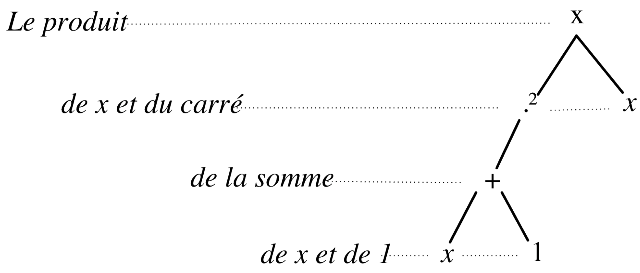
On donne les expressions suivantes :
$A(x) = (x+3)x$, $B(x) = x^2 + x + 1$, $C(x) = \dfrac{2x-5}{3}$ et $D(x) = (3x-9)^2$.

Pour chacune d'elles, construis un arbre de calcul et utilise-le pour obtenir un programme dont elle est le résultat.

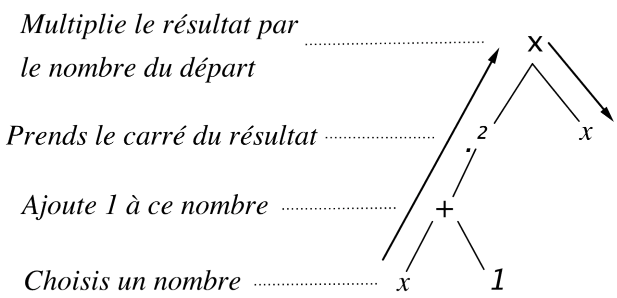
Aide

Voici une démarche possible pour l'expression $H(x) = (x + 1)^2 x$.

Etape 1 Traduis en français l'expression et représente-la sous forme d'arbre.



Etape 2 Pour visualiser le programme à partir de l'arbre, tu remontes l'arbre du bas vers le haut à partir d'une des branches.



Etape 3 Tu peux maintenant écrire le programme de calcul :

- Choisis un nombre,
- Ajoute 1 à ce nombre,
- Prends le carré du résultat,
- Multiplie le résultat par le nombre du départ.

Tu peux remarquer que arbre de calcul et programme de calcul sont deux moyens pour interpréter une expression algébrique :

- l'arbre de calcul donne accès à la structure de l'expression (produit ou somme),
- le programme de calcul simule la lecture de gauche à droite de l'expression.

Exercice 20

Titre

Suite de figures géométriques et généralisation.

Énoncé

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous :

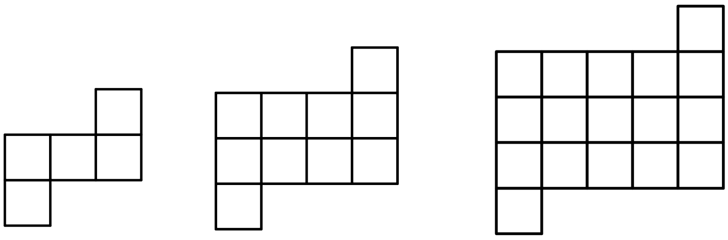


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. Écris une formule qui détermine le nombre de carrés unités pour une figure de taille quelconque.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ? Question enseignant : comment expliques-tu que plusieurs formules répondent à la question 3 ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - $a(a+2)+2$
   - a^2+2a+2
   - $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - $a^2+2(a+1)$
3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul. Choisis la formule qui demande le moins de calculs.

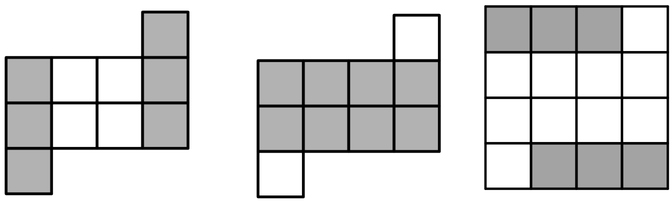
Aide

PREMIERE AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 As-tu pensé à calculer le nombre de carrés unités pour une figure de petite taille ?

DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 Voici la figure de taille 2. Pour t'aider à trouver la formule, schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 Tu peux associer une formule à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les formules qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.

Exercice 21

Titre

Programme de calcul et expression littérale.

Énoncé

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre de départ
- Prendre le double de ce nombre
- Retrancher 5
- Elever au carré
- Retrancher le carré du nombre de départ
- Ecrire le résultat obtenu.

Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

Aide

1. Ecris l'expression littérale qui traduit le programme de calcul.
2. Ecris une équation qui traduit le fait que le résultat du programme de calcul soit 0 et résous-là.

Exercice 22

Titre

Programme de calcul et expression littérale.

Énoncé

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre de départ
- Prendre le double de ce nombre
- Retrancher 5
- Elever au carré
- Retrancher le carré du nombre de départ
- Ecrire le résultat obtenu.

1. Quel est le résultat du programme de calcul si on choisit 6 comme nombre de départ ?
2. Ecris une expression littérale qui traduise le programme de calcul.
3. Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

Aide

1. Ecris une équation qui traduit le fait que le résultat du programme de calcul soit 0 et résous-là.

Exercice 23

Titre

Des égalités toujours vraies ?

Énoncé

Partie A

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout réel x et tout réel y ? Justifie tes réponses. Donne une justification la plus convaincante possible. Tu peux recopier le tableau ci-dessous sur ta feuille.

Egalité	Vrai/Faux	Justification la plus convaincante
$x(x+1)+1=2x+1$		
$(x-y)^2=(y-x)^2$		
$(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2$		

Partie B

1. Sachant que $ab=10$, calculer $(a+b)^2-(a-b)^2$.
2. Sachant que $a+b=15$ et $a^2-b^2=45$, calculer $a-b$.

Aide

Partie A

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableau de valeurs ou en représentant graphiquement les deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Partie B

Question 1 Développe ou factorise l'expression $(a+b)^2-(a-b)^2$ pour faire apparaître ab.

Question 2 Factorise l'expression a^2-b^2.

Exercice 24

Titre

Utiliser les identités remarquables

Énoncé

1. Sachant que $ab=10$, calculer $(a+b)^2-(a-b)^2$.
2. Sachant que $a+b=15$ et $a^2-b^2=45$, calculer $a-b$.

Aide

Question 1 Développe ou factorise l'expression $(a+b)^2 - (a-b)^2$ pour faire apparaître ab.

Question 2 Factorise l'expression $a^2 - b^2$.

Exercice 25

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour toute valeur de a ?

Énoncé

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible. Tu peux recopier le tableau ci-dessous sur ta feuille.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$(2a)^2 = 4a^2$		
$(a+3)^2 = a^2 + 9$		
$a(a+2) = a^2 + 2$		
$a + 1(a+2) = (a+1)(a+2)$		
$(a+3)(a+1) = a^2 + 4a + 3$		
$-4^2 = 16$		
$2a^2 + 3a = 5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :

- la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres,
- tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Aide

- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.

- Tu prouves qu'une **égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Exercice 26

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour toute valeur de a ?

Énoncé

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible. Tu peux recopier le tableau ci-dessous sur ta feuille.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$3 + 7a = 10a$		
$a^3 = 3a$		
$a^2 + a^2 = 4a$		
$3(2 \times a) = 6 \times a$		
$a(a + 2) = a^2 + 2$		
$(2a)^2 = 4a^2$		
$-4^2 = 16$		
$2a^2 + 3a = 5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :

- la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres (tu peux utiliser une calculatrice),
- tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Aide

- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'une **égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

EXERCICE 27

Titre

Travailler avec plusieurs expressions d'une même fonction.

Énoncé

Voici plusieurs expressions d'une même fonction f définie pour tout réel x par :
- Expression 1 : $f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$
- Expression 2 : $f(x) = x^3 - 7x + 6$
- Expression 3 : $f(x) = x(x^2-7)+6$

1. Prouve algébriquement que les trois expressions sont égales pour tout réel x. Tu peux vérifier à l'aide ta calculatrice graphique.
2. Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :
   - a. Calculer $f(0)$.
   - b. Calculer $f(-3)$.
   - c. Déterminer le(s) antécédents de 6 par f.

Aide

Question 1 :
- Pour conjecturer si des expressions sont égales, tu peux :
  - les tester avec une ou plusieurs valeurs numériques,
  - les représenter sur le même écran d'une calculatrice graphique.
- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.

Question 2. c : Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$

Exercice 28

Titre

Des fonctions égales ?

Énoncé

On se demande si les trois fonctions f, g et h sont égales pour tout réel x :

- $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- $g(x) = (x + 1)(x - 3)$
- $h(x) = x(x - 2) - x^2 - 2$

1. **Conjecture graphique :** Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f, g et h. Qu'observes-tu ? Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des trois fonctions ? Tu peux t'aider de la fonction « tableau de valeurs » de ta calculatrice.
2. **Preuve :** Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie algébriquement. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?
3. Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :
   - a.Calculer $f(3)$.
   - b. Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par f.

Aide

Question 1 :

- Pour démontrer que **deux fonctions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux fonctions « sont égales pour tout x »** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions des fonctions sous une même forme pour les comparer.

Question 3.b. : Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$

Exercice 29

Titre

Traduire une expression par un programme de calcul (extrait de la thèse de Bardini (2003)).

Énoncé

Exemple :
La suite des instructions

- prendre un nombre x
- le multiplier par 2
- soustraire 5 au résultat
- prendre la racine carrée du résultat
- ajouter 3 au résultat

constitue un algorithme de calcul qui permet d'obtenir au final : $\sqrt{2x-5}+3$.

Écrire un algorithme permettant d'obtenir chacune des expressions suivantes :

a) $[5(2+x)]^2$

b) $\sqrt{3+\frac{1}{x}}+2$

c) $[2(-x+3)]^2$

Exercice 30

Titre

Traduire une expression par un schéma de calcul (extrait de la thèse de Bardini (2003)).

Énoncé

Inspire-toi de l'exemple fourni pour répondre aux questions suivantes.

> ***Exemple*** :
> L'expression $[2(-x+3)]^2$ peut être décrite par le schéma :
>
> $x \xrightarrow{\text{opp}} \qquad \xrightarrow{+3} \qquad \xrightarrow{\text{x2}} \qquad \xrightarrow{(\ )^2} \quad \mathrm{f}(x)=[2(-x+3)]^2$
>
> *Légende : « $\longrightarrow$ » : faire l'opération qui est indiquée au-dessus, « $(\ )^2$ » : élever au carré, « opp » : prendre l'opposé,« $\sqrt{}$ » : prendre la racine carrée « 1/ » : prendre l'inverse, etc.*

Faire un schéma qui décrit les expressions a), b) et c).

a) $[5(2+x)]^2$

b) $\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}+2$

c) $\sqrt{2x-5}+3$

Exercice 31

Titre

Des fonctions égales ?

Énoncé

On se demande si les trois fonctions f, g et h sont égales pour tout réel x :

- $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- $g(x) = (x+1)(x-3)$
- $h(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

1. **Conjecture numérique : tu peux utiliser la fonction « tableau de valeurs » de ta calculatrice graphique**
   (a) Calcule la valeur des trois fonctions pour $x = 1$ et $x = -1$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
   (b) Calcule la valeur des trois fonctions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
2. **Conjecture graphique :** Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f, g et h. Qu'observes-tu ? Quel lien peux-tu faire avec ta dernière conjecture ?
3. **Preuve :** Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?

Aide
- Pour démontrer que **deux fonctions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux fonctions « sont égales pour tout x »** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions des fonctions sous une même forme pour les comparer.

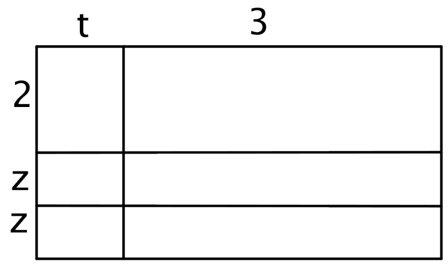
EXERCICE 32

Titre

Correspondance entre aire et expression.

Énoncé

Recopie le schéma ci-dessous sur ta feuille. Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression $G = z(t + 3) + 2t$



Exercice 33

Titre

Associer une expression algébrique à la phrase qui la décrit.

Énoncé

Associe à chaque expression la phrase qui la décrit.

$2(a+b)$ •	• Le double de a et de b
$a+2b$ •	• La somme de a et du double de b
$2ab$ •	• Le carré de la somme de a et de b
$(a+b)^2$ •	• La somme du carré de a et du double de b
a^2+2b •	• Le double de la somme de a et de b

Exercice 34

Titre

Des expressions égales pour tout x ?

Énoncé

On donne plusieurs expressions et on se demande si elles sont égales pour toute valeur de x :

- **Expression 1 :** $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- **Expression 2 :** $A(x) = (x+1)(x-3)$
- **Expression 3 :** $A(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie.
2. Choisis l'expression qui demande le moins de calculs pour déterminer la valeur de A pour $x = 1$, $x = 3$, $x = 0$ et $x = 11$.

Aide

Question 1 :

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, pense à **utiliser les propriétés** suivantes. Pour tout a, b, c et d :

- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exercice 35

Titre

Des expressions égales pour tout x ?

Énoncé

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Aide

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, pense à **utiliser les propriétés** suivantes. Pour tout a, b, c et d :
  - la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
  - la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

- · l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- · l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- · l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

EXERCICE 36

Titre

Des expressions égales pour tout x ?

Énoncé

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Aide
- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »** , il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout** x **»** , des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, ense à **utiliser les propriétés** suivantes. Pour tout a, b, c et d :
  - · la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
  - · la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
  - · l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - · l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - · l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exercice 37

Titre

Reconnaître et associer les formes développée et factorisée d'une expression

Énoncé

Voici des expressions.

1. Recopie le tableau ci-dessous.
2. Place les expressions dans la colonne qui convient puis relie chaque expression factorisée à l'expression développée correspondante.

$(4x+1)(4x-1)$	$1-16x^2$	x^2-16
$(x-8)^2$	$(1-4x)^2$	$16x^2-1$
$x^2+16x+64$	$x^2-16x+64$	$(1-4x)(1+4x)$
$(x-4)(x+4)$	$1-8x+16x^2$	$(x+8)^2$

Expressions développées		Expressions factorisées

Aide

Aide pour placer les expressions dans les colonnes.

1. Les **expressions développées** sont des sommes de termes alors que les **expressions factorisées** sont des produits de facteurs.

Aide pour relier une expression factorisée à l'expression développée correspondante.

1. Tu peux déterminer la règle de calcul qui permet de transformer une expression factorisée en une expression développée égale pour tout x. Pour tous les nombres a, b, c et d, on a :
   - (1) la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c)=ab+ac$

- (2) la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- (3) l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- (4) l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (5) l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. Tu peux vérifier tes associations en attribuant une ou plusieurs valeurs numériques à x.

Exercice 38

Titre

Développer des produits et factoriser des sommes

Énoncé

Développe et factorise chaque expression lorsque cela est possible.

1. $(8x+5)(8x-5)$
2. $(2t+1)^2 - (t+4)(2t+1)$
3. $9u^2 - (7u-2)^2$
4. $(4r+5)^2 + 4r + 5$
5. $16g^2 - 24g + 9$

Aide

1. Pense à **utiliser les propriétés** suivantes.
   Pour tout a, b, c et d :
   (a) la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
   (b) la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
   (c) l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   (d) l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   (e) l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
2. Tu peux **contrôler tes résultats** en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.

3. Tu peux **développer des produits**.
4. Tu peux **factoriser des sommes**. Voici une **méthode de factorisation** :

Si A est un produit de facteurs

alors l'expression est déjà factorisée.

Sinon A est une somme de termes

Si le facteur commun est apparent

alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)

transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.

Fin si

Fin si

Fin

Par exemple. $K(x) = x(x+1) + 2(x+1)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $2(x+1)$. Le facteur commun $(x+1)$ est pas apparent. Pour factoriser, on utilise la propriété de distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition (propriété 1) : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est écrite sous la forme d'un produit, l'expression est factorisée.

Exercice 39

Titre

Développer des produits et factoriser des sommes

Énoncé

Expression	L'expression est-elle un produit (P) ou une somme (S) ?
$h(2h+3)$	
$81 - 9a^2$	
$(3p+2)^2$	
$(4t+7)(4t-7)$	
$(3f+2)^2 + (5f+3)(3f+2)$	
$25 - (2x+1)^2$	

1. Recopie puis remplis le tableau ci-dessus.
2. Développe les expressions qui sont des produits.
3. Factorise les expressions qui sont des sommes.

Aide

Question 1 Pour déterminer si une expression est une somme ou un produit, réécris certaines expressions en faisant apparaître les opérations. Par exemple, $x(x+2)$ peut se réécrire sous la forme : $x \times (x+2)$

Questions 2 et 3

1. Pense à **utiliser les propriétés** suivantes.
   Pour tout a, b, c et d :
   - la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
   - la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
   - l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   - l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   - l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
2. Tu peux **contrôler tes résultats** en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.

Question 3 Voici une **méthode de factorisation** :

Si A est un produit de facteurs

 alors l'expression est déjà factorisée.

 Sinon A est une somme de termes

  Si le facteur commun est apparent

   alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

   Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)

    transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.

  Fin si

 Fin si

Fin

Par exemple. $K(x) = x(x+1) + 2(x+1)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $2(x+1)$. Le facteur commun $(x+1)$ est pas apparent. Pour factoriser, on utilise la propriété de distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition (propriété 1) : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est écrite sous la forme d'un produit, l'expression est factorisée.

Exercice 40

Titre

Développer des produits et factoriser des sommes

Énoncé

Expression	L'expression est-elle un produit (P) ou une somme (S) ?
$h(2h+7)$	
$16x - 4x^2$	
$16 - 4x^2$	
$(t-8)(t+8)$	
$f(f+2) + (5f+3)(f+2)$	
$(2e+3)^2 + e(2e+3)$	

1. Recopie puis remplis le tableau ci-dessus.
2. Développe les expressions qui sont des produits.
3. Factorise les expressions qui sont des sommes.

Aide

Question 1 Pour déterminer si une expression est une somme ou un produit, réécris certaines expressions en faisant apparaître les opérations. Par exemple, $x(x+2)$ peut se réécrire sous la forme : $x \times (x+2)$

Questions 2 et 3 1. Pense à **utiliser les propriétés** suivantes.

Pour tout a, b, c et d :

- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. Tu peux **contrôler tes résultats** en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.

Question 3 Voici une **méthode de factorisation** :

Si A est un produit de facteurs

alors l'expression est déjà factorisée.

Sinon A est une somme de termes

Si le facteur commun est apparent

alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)

transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.

Fin si

Fin si

Fin

Par exemple. $K(x) = x(x+1) + 2(x+1)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $2(x+1)$. Le facteur commun $(x+1)$ est pas apparent. Pour factoriser, on utilise la propriété de distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition (propriété 1) : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est écrite sous la forme d'un produit, l'expression est factorisée.

Exercice 41

Titre

Utiliser les identités remarquables

Énoncé 1. Sachant que $ab = 10$, calculer $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

2. Sachant que $a + b = 15$ et $a^2 - b^2 = 45$, calculer $a - b$.

Aide

Question 1 Développe ou factorise l'expression $(a+b)^2 - (a-b)^2$ pour faire apparaître ab.

Question 2 Factorise l'expression $a^2 - b^2$.

Exercice 42

Titre

Des calculs astucieux

Énoncé

Calcule 98^2 et $85^2 - 15^2$.

Aide

Réécris les nombres comme une somme ou une différence de nombres pour utiliser une des propriétés suivantes. Pour tout a, b, c et d :

1. la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
2. la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
3. l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
5. l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exercice 43

Titre

Des calculs astucieux

Énoncé

Calcule 105^2 et 105×95.

Aide

Réécris les nombres comme une somme ou une différence de nombres pour utiliser une des propriétés suivantes. Pour tout a, b, c et d :

1. la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

2. la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$
3. l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
4. l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
5. l'identité remarquable : $(a-b) \times (a+b) = a^2 - b^2$

Exercice 44

Titre

Utiliser les identités remarquables

Énoncé

Répondre aux questions suivantes.

1. Sachant que $a^2 + 2ab + b^2 = 144$, $a^2 - 2ab + b^2 = 16$ et $a^2 - b^2 = -48$, calculer (1) $(a+b)(a-b)$, (2) $(a+b)^2$, (3) $(a-b)^2$
2. Sachant que $a+b = 10$ et $a-b = 3$, calculer (1) $a^2 + 2ab + b^2$, (2) $a^2 - 2ab + b^2$ et (3) $a^2 - b^2$

Exercice 45

Titre

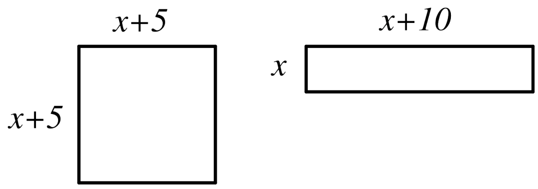
Des périmètres égaux ?

Énoncé

Soit x un nombre. *Les mesures sont exprimées en cm.*
Un carré a un côté qui mesure $x+5$ et un rectangle a pour dimensions x et $x+10$.
Le carré et le rectangle ont-ils le même périmètre ?

Aide

- Voici une figure



- Le périmètre d'un carré de côté c est $4 \times c$.
- Le périmètre d'un rectangle de largeur l et de longueur L est $2 \times (l + L)$.
- Traduis chaque périmètre par une expression, puis transforme les expressions pour les comparer.

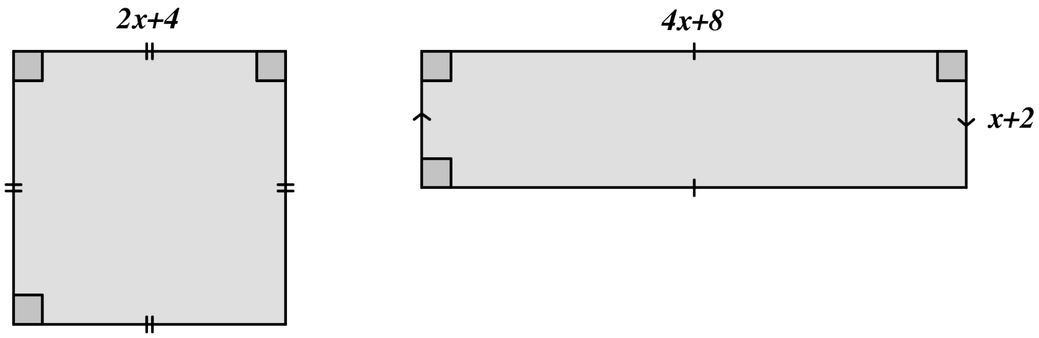
Exercice 46

Titre

Des aires et des périmètres égaux ?

Énoncé

1. Démontrer que les deux figures suivantes ont la même aire quelle que soit la valeur de x. Les mesures sont toutes exprimées dans le même unité.
2. Les deux figures ci-dessus ont-elles le même périmètre ?



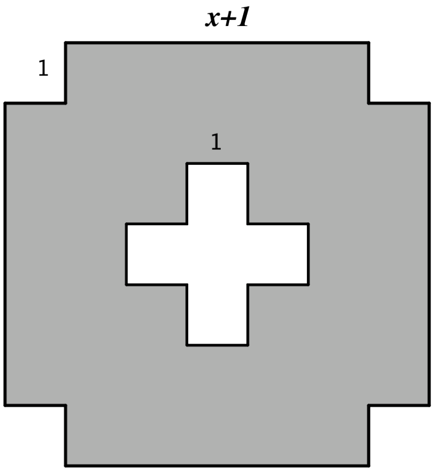
Exercice 47

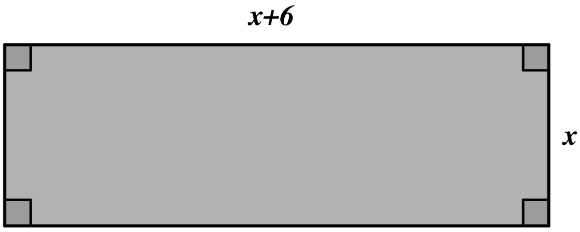
Titre

Des aires égales ?

Énoncé

Démontrer que les aires colorées des deux figures sont égales pour toute valeur de x. Les mesures sont toutes exprimées dans le même unité.





Exercice 48

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?

Énoncé

1. Les égalités suivantes sont-elles <u>**vraies pour toute valeur de** a</u> ? Justifie ta réponse. Tu peux recopier le tableau ci-dessous sur ta feuille.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$3a^2 = (3a)^2$		
$(3a+2)^2 = 9a^2 + 4$		
$(3a+2)(3a-2) = 3a^2 - 4$		
$(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Aide
- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Exercice 49

Titre

Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?

Énoncé

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse. Tu peux recopier le tableau ci-dessous sur ta feuille.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$3a^2 = (3a)^2$		
$(3+a)^2 = 3^2 + a^2$		
$(3a+2)(3a-2) = 3a^2 - 2^2$		
$(a-2)^2 = a^2 - 2 \times 2 \times a + 2^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Aide
- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.

- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Exercice 50

Titre

Des égalités toujours vraies ?

Énoncé

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout réel x et tout réel y ? Justifie tes réponses. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vrai/Faux	Justification la plus convaincante
$x(x+1)+1 = 2x+1$		
$(x-y)^2 = (y-x)^2$		
$(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$		

Aide
- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableau de valeurs ou en représentant graphiquement les deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Exercice 51

Titre

Plusieurs expressions d'une même fonction.

Énoncé

Dans cet exercice, tu peux utiliser une calculatrice graphique.

On donne plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

Expression 1 : $f(x) = 4(x-5)^2 - 9$

Expression 2 : $f(x) = (2x-13)(2x-7)$

Expression 3 : $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$

1. Les expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie.
2. Réponds à chaque question posée.
   (a) Résous l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Calcule $f(0)$.
   (c) Détermine le(s) antécédent(s) de -9 par f.
   (d) Calcule l'image de 5 par f.
   (e) Résous l'équation $f(x) = 91$.

Aide

Question 1. Pense à développer les expressions $4(x-5)^2 - 9$ et $(2x-13)(2x-7)$.

Question 2. Pour chaque question :

a) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation-produit.

b) Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

c) Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.

d) Le réel $f(x)$ est l'image de x par f. Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

e) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.

Exercice 52

Titre

Plusieurs expressions d'une même fonction.

Énoncé 1. Représente graphiquement, sur le même écran d'une calculatrice, les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = (x-1)^2 - 4$
- $g(x) = (x-3)(x+1)$
- $h(x) = x^2 - 2x - 3$

Qu'observes-tu ? Explique et démontre.

2. On a donc plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

Expression 1 : $f(x) = (x-1)^2 - 4$

Expression 2 : $f(x) = (x-3)(x+1)$

Expression 3 : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Réponds à chaque question en choisissant l'expression la plus adaptée, c'est-à-dire celle qui demande le moins de calculs.

(a) Résous l'équation $f(x) = 0$

(b) Calcule $f(0)$.

(c) Détermine le(s) antécédent(s) de -4 par f.

(d) Calcule l'image de 1 par f.

(e) Résous l'équation $f(x) = -3$.

Aide

Question 1. Pense à développer les expressions $(x-1)^2 - 4$ et $(x-3)(x+1)$.

Question 2. Pour chaque question :

a) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation-produit.

b) Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

c) Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.

d) Le réel $f(x)$ est l'image de x par f. Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

e) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.

EXERCICE 53

Titre

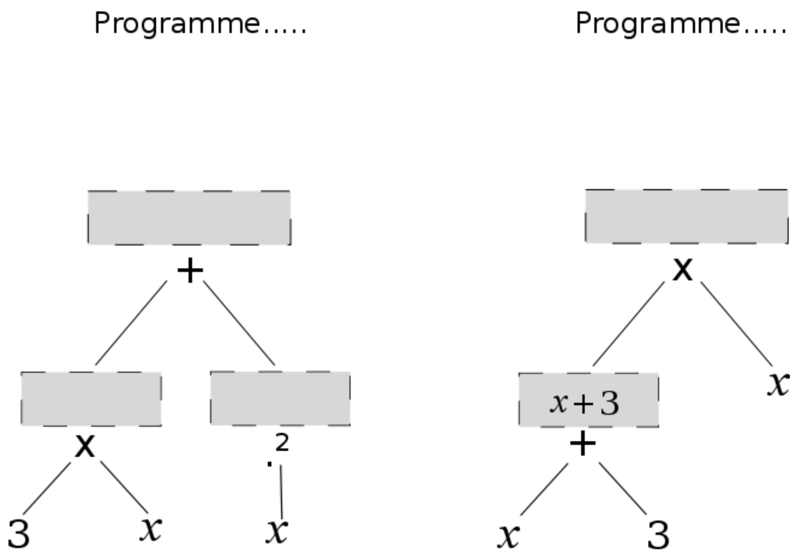
Somme ou produit ?

Énoncé

1. Zoé prétend que, pour n'importe quel nombre de départ, on obtient le même résultat pour les programmes de calcul 1 et 2. A-t-elle raison ? Montre-le..

Programme 1	**Programme 2**
· Choisir un entier,	· Choisir un entier,
· Le multiplier par 3,	· Lui ajouter 3,
· Ajouter le carré de l'entier choisi.	· Multiplier le résultat par l'entier choisi.

2. **a.** Dans les arbres de calcul ci-contre, complète chaque rectangle par le résultat de l'opération située en-dessous. Un rectangle est rempli en exemple. A quel programme de calcul correspond chaque arbre ?



   b. Dans chaque arbre, entoure la dernière opération effectuée. Les expressions obtenues sont-elles des sommes ou des produits ?

3. Complète un des deux arbres en rouge pour amener à $1 + (x + 3)x$. Quelle est la dernière opération effectuée ? Cette expression est-elle une somme ou un produit ?

4. Pour chaque expression, indique s'il s'agit d'une somme ou d'un produit.

   $x(4 + x) + 5$ $\quad$ $(x + 1)(x - 2)$

   $x^2 + 3x$ $\quad$ $(2x + 1)^2$ $\quad$ $\dfrac{x}{2} + 3$

Aide

Aide question 1. Teste le programme pour différentes valeurs puis écris une expression traduisant chaque programme. Tu peux utiliser un schéma de calcul.

Aide question 2. L'arbre se complète du bas vers le haut.

Aide question 4. Détermine la dernière opération effectuée pour chaque expression.

EXERCICE 54

Titre

Reconnaître et associer les formes développée et factorisée d'une expression

Énoncé

Voici des expressions.

1. Recopie le tableau ci-dessous.
2. Place les expressions dans la colonne qui convient puis relie chaque expression factorisée à l'expression développée correspondante.

$(4x+1)(4x-1)$	$1-16x^2$	x^2-16
$(x-8)^2$	$(1-4x)^2$	$16x^2-1$
$x^2+16x+64$	$x^2-16x+64$	$(1-4x)(1+4x)$
$(x-4)(x+4)$	$1-8x+16x^2$	$(x+8)^2$

Expressions développées		Expressions factorisées

Aide

Aide pour placer les expressions dans les colonnes.

1. Tu peux réécrire les expressions pour faire apparaître les signes $\times$. Par exemple, $(4x+1)(4x-1)$ est une expression factorisée, elle se réécrit $(4x+1)\times(4x-1)$.
2. Les **expressions développées** sont des sommes de termes alors que les **expressions factorisées** sont des produits de facteurs.

Aide pour relier une expression factorisée à l'expression développée correspondante.

1. Tu peux réécrire les expressions pour déterminer la règle de calcul qui permet de transformer une expression factorisée en une expression développée égale pour tout x. Pour tous les nombres a, b, c et d, on a :
   - (1) la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
   - (2) la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
   - (3) l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   - (4) l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   - (5) l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

   Par exemple, on peut transformer l'expression $(4x+1)(4x-1)$ en l'expression $(4x)^2 - 1^2$ en utilisant l'identité remarquable (5) avec $a = 4x$ et $b = 1$.
2. Tu peux vérifier tes associations en attribuant une ou plusieurs valeurs numériques à x.

Exercice 55

Titre

Traduire une phrase par une expression

Énoncé

u et v désignent des nombres.

A. Traduis chaque phrase par une expression littérale :

1. la somme de u et de v
2. le carré de la somme de u et de v
3. la somme du carré de u et du carré de v
4. le produit de la somme de u et de v par la différence de u et de v
5. la différence du carré de u et du carré de v
6. le carré de la différence de u et de v
7. le carré du produit de u par v
8. le double du produit de u par v

B. Y-a-t-il des expressions égales pour toutes les valeurs de u et de v ?

Aide

Pour contrôler tes traductions, tu peux donner des valeurs numériques à u et à v et comparer les résultats obtenus avec la phrase et avec l'expression.

Annexe C

Liste des expérimentations et des PED expérimentés

Dans cette annexe, nous présentons :

1. La liste des expérimentations menées depuis janvier 2011 ainsi que les données recueillies dans chaque classe,
2. Les parcours d'enseignement différencié expérimentés,
3. Les bilans de fin d'année des quatre enseignants ayant participé au groupe IREM sur l'enseignement et la différenciation en algèbre.

C.1 Liste des expérimentations et des données recueillies

C.1.1 Pré-expérimentations entre janvier et juin 2011

Entre janvier et juin 2011 nous avons mené deux pré-expérimentations une avec une classe de seconde et l'autre avec une classe de troisième. Elles ont servi, à la fois, à tester, dans des conditions réelles, l'intégration du logiciel Pépite à la plateforme LaboMeP de Sésamath, et à ajuster le modèle de parcours d'enseignement différencié pour mener des expérimentations plus approfondies.

a. Pré-expérimentation en seconde dans la classe de Pauline

- Nombre d'élèves : 35

- Entretien préalable avec l'enseignante pour expliquer les enjeux du test et déterminer des parcours d'enseignement différencié en fonction des choix de l'enseignant
- Passage du test Pépite : janvier 2011
- Parcours d'enseignement différencié : les parcours ont été passés en devoir à la maison puis corrigés en demi-groupe pendant des séances d'une heure. Les élèves étaient disposés en binômes composés d'élèves de groupes différents
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test
  - Copies des élèves sur les parcours d'enseignement différencié et sur l'évaluation finale du chapitre de calcul algébrique
  - Progression sur les chapitres concernant le calcul algébrique, les fonctions et la résolution d'équations
  - Enregistrement audio des échanges d'un binôme en train de corriger les parcours différenciés
  - Enregistrement audio de l'entretien préalable avec l'enseignante

b. Pré-expérimentation en troisième dans la classe de Fabien

- Nombre d'élèves : 22
- Entretien préalable avec l'enseignant pour le questionner sur ses pratiques habituelles de différenciation et d'enseignement en algèbre, expliquer les enjeux du test et déterminer des parcours d'enseignement différencié en fonction des choix de l'enseignant
- Passage du test Pépite : mai 2011
- Parcours différenciés : les parcours ont été passés en classe entière. Les binômes d'élèves étaient formés d'élèves du même groupe
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test
  - Copies des élèves sur les parcours d'enseignement différencié et sur l'évaluation finale du chapitre algébrique
  - Progression sur les chapitres de calcul algébrique et de résolution d'équations
  - Enregistrement audio : échanges de trois binômes et échanges entre l'enseignant et les élèves pendant la séance différenciée
  - Enregistrement audio de l'entretien préalable

C.1.2 Expérimentations menées entre octobre et juin 2012

L'activité menée au sein du groupe I.R.E.M. « Différenciation des apprentissages en algèbre élémentaire » a donné lieu à plusieurs expérimentations dont le protocole était le suivant :

1. Passage du test Pépite avant le début du chapitre sur le calcul algébrique
2. Séance(s) différenciée(s) pour revenir sur les connaissances anciennes
3. Déroulement du chapitre de calcul littéral
4. Séance(s) différenciée(s) en cours de chapitre pour travailler les connaissances nouvelles et préparer aux évaluations
5. Passage du test Pépite avant les révisions du Brevet (courant du mois de mai)

La présentation des enjeux du test, le choix des parcours d'enseignement différencié et la préparation de leur mise en œuvre ont été discutés au cours des réunions du groupe I.R.E.M..

Les numéros de parcours et d'exercices font référence à l'annexe B.

a. Expérimentation menée en seconde dans la classe de Caroline

- Nombre d'élèves : 33
- Passage du test Pépite : octobre 2011 et avril 2012
- Parcours différenciés à l'étape de retour sur des connaissances anciennes :
  - Parcours 4.2 : exercices 23, 25, 26
  - Parcours 4.3 : exercices 27, 26, 31
- Nombre de séances différenciées : 1
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test en début et milieu de seconde
  - Progression sur le chapitre de calcul algébrique
  - Copies des élèves sur les parcours différenciés et sur l'évaluation finale
  - Enregistrements audio sur la séance différenciée de quatre binômes d'élèves et des échanges entre l'enseignante et les élèves
  - Enregistrements vidéo de la salle de classe sur la séance différenciée

b. Expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3A)

Les analyses des expérimentations (cf. chapitre 5) portent sur cette classe.

- Nombre d'élèves : 21
- Passage du test Pépite : octobre 2011et mai 2012

- Parcours différenciés à l'étape de retour sur des connaissances anciennes :
  - Parcours 4.1 : exercices 20, 3, 4
  - Parcours 4.2 : exercices 7, 8, 9
- Parcours différenciés à l'étape de travail sur des connaissances nouvelles :
  - Parcours 5.1 : exercices 34, 35, 36
  - Parcours 5.2 : exercices 50, 48 et 49
- Nombre total de séances différenciées : 3
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test en début et fin de troisième
  - Progression sur le chapitre de calcul algébrique
  - Copies des élèves sur les parcours différenciés et sur l'évaluation finale
  - Enregistrements audio sur les trois séances différenciées de quatre binômes d'élèves et des échanges entre l'enseignant et les élèves
  - Enregistrement audio des échanges entre l'enseignante et les élèves au cours d'une séance habituelle
  - Enregistrements vidéo de la salle de classe sur les quatre séances différenciées et une séance habituelle

c. Expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3B)

- Nombre d'élèves : 20
- Passage du test Pépite : novembre 2011 et mai 2012
- Progression sur le chapitre de calcul algébrique
- Parcours différenciés à l'étape de retour sur des connaissances anciennes :
  - Parcours 4.1 : exercices 1, 5, 6
  - Parcours 4.2 : exercices 7, 8, 9
- Parcours différenciés à l'étape de travail sur des connaissances nouvelles :
  - Parcours 5.1 : exercices 34, 35, 36
  - Parcours 5.2 : exercices 50, 48 et 49
- Nombre de séances différenciées réalisées : 3
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test en début et fin de troisième
  - Progression sur le chapitre de calcul algébrique
  - Copies des élèves sur les parcours différenciés
  - Enregistrements audio sur les trois séances différenciées de quatre binômes d'élèves et des échanges entre l'enseignante et les élèves

- Enregistrements vidéo de la salle de classe sur les trois séances différenciées

d. Expérimentation menée en troisième dans la classe de Benoît

- Nombre d'élèves : 22
- Passage du test Pépite : novembre 2011 et mai 2012
- Parcours différenciés à l'étape de retour sur des connaissances anciennes :
  - Parcours 4.1 : exercices 20, 3, 4
  - Nombre de séances différenciées réalisées : 1
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test en début et fin de troisième
  - Copies des élèves sur les parcours différenciés
  - Progression sur le chapitre de calcul algébrique
  - Enregistrements audio des échanges entre l'enseignant et les élèves
  - Enregistrements vidéo de la séance différenciée

e. Expérimentation menée en troisième dans la classe de Benoît

- Nombre d'élèves : 23
- Passage du test Pépite : décembre 2011 et mai 2012
- Parcours différenciés à l'étape de retour sur des connaissances anciennes :
  - Parcours 4.4 : exercices 14, 17 et 14, 18
- Nombre de séances différenciées réalisées : 1
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test en début et fin de troisième
  - Progression sur le chapitre de calcul algébrique
  - Copies des élèves sur les parcours différenciés
  - Enregistrements audio des échanges entre l'enseignant et les élèves
  - Enregistrements vidéo de la salle de classe durant la séance différenciée

f. Expérimentation menée en troisième dans la classe de Fabien

Le protocole d'expérimentation est différent. Les réunions de groupe IREM ont débuté alors que la classe terminait le chapitre de calcul algébrique. Nous avons proposé à l'enseignant d'organiser une séance d'enseignement différencié avant de commencer le chapitre de résolution d'équations.

- Nombre d'élèves : 26
- Passage du test Pépite : décembre 2011 et mai 2012

- Parcours différenciés pour faire le lien entre le chapitre de calcul algébrique et celui de résolution d'équations :
  - Groupe A : exercices 10, 23, 7
  - Groupe B+ : exercices 10, 49, 7
  - Groupe B - : exercices 36, 49, 7
  - Groupe C : exercices 4, 9
- Nombre de séances différenciées réalisées : 1
- Données recueillies :
  - Réponses des élèves au test en début et fin de troisième
  - Progression sur le chapitre de calcul algébrique
  - Copies des élèves sur les parcours différenciés
  - Enregistrements audio des échanges entre l'enseignant et les élèves
  - Enregistrements vidéo de la salle de classe durant la séance différenciée

C.2 Les parcours d'enseignement différencié expérimentés

Nous présentons ici les parcours d'enseignement différencié expérimentés dans chaque classe.

C.2.1 Les PED pour la pré-expérimentation en seconde dans la classe de Pauline

Exercices à faire en devoir maison

Pour chaque exercice, une aide est disponible à la page 3.

Exercice 1.
Dans cet exercice, tu peux utiliser une calculatrice graphique.
On donne plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$:
Expression 1 : $f(x) = 4(x-5)^2 - 9$
Expression 2 : $f(x) = (2x-13)(2x-7)$
Expression 3 : $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$

1. Les expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie.
2. Réponds à chaque question posée.

a) Résous l'équation $f(x) = 0$.	b) Calcule $f(0)$.
c) Détermine le(s) antécédent(s) de -9 par f.	d) Calcule l'image de 5 par f.
e) Résous l'équation $f(x) = 91$.	

Exercice 2.
Résous les équations suivantes :

$5(x-4) - 3(2+x) = 6x + 1$	$2x^2 + 3x - 20 = (x-3)(2x+7)$
$x(2x+10) = -(x+5)(x+3)$	$(x+3)(x+1) + x + 3 = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 2(x-3)$	

Exercice 3.
On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre de départ
- Prendre le double de ce nombre
- Retrancher 5
- Elever au carré
- Retrancher le carré du nombre de départ
- Ecrire le résultat obtenu.

Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

Aides

⇒**Aide pour l'exercice 1** *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide question 1. Pense à développer les expressions $(x-1)^2-4$ et $(x-3)(x+1)$.

Aide question 2. Pour chaque question :

a) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation-produit.

b) Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

c) Si $f(x)=y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

d) Le réel $f(x)$ est l'image de x par f. Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

e) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

⇒**Aide pour l'exercice 2** *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Pour résoudre une équation, tu peux :

- Ecrire tous les termes dans le même membre de l'équation.
- Factoriser (facteur commun ou une identité remarquable) pour transformer l'équation en une équation-produit. Tu peux utiliser l'algorithme de factorisation.
- Développer en espérant pouvoir éliminer certains termes.

ALGORITHME DE FACTORISATION D'UNE EXPRESSION A

Si A est un produit de facteurs
  alors l'expression est déjà factorisée.
  Sinon A est une somme de termes
    Si le facteur commun est apparent
      alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
      Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
        transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
    Fin si
Fin si

Fin algorithme

⇒**Aide pour l'exercice 3** *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

1. Ecris l'expression littérale qui traduit le programme de calcul.
2. Ecris une équation qui traduit le fait que le résultat du programme de calcul soit 0 et résous-là.

Exercices à faire en devoir maison

Pour chaque exercice, une aide est disponible à la page 4.

Exercice 1.
Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a et de b ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 4a^2$		
$2(a+b) = 2a+b$		
$(3ab)^2 = 3ab^2$		
$-4^2 = 16$		
$2a^2 + 3a = 5a^3$		
$(a+3)(a+1) = a^2+4a+3$		

Exercice 2.
Dans cet exercice, tu peux utiliser une calculatrice graphique.
On donne plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$:
Expression 1 : $f(x) = 4(x-5)^2 - 9$
Expression 2 : $f(x) = (2x-13)(2x-7)$
Expression 3 : $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$

1. Les expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie.

2. Réponds à chaque question posée.
   a) Résous l'équation $f(x) = 0$.
   b) Calcule $f(0)$.

   c) Détermine le(s) antécédent(s) de -9 par f.
   d) Calcule l'image de 5 par f.
   e) Résous l'équation $f(x) = 91$.

Exercice 3.

1. Complète le tableau suivant en indiquant, pour chaque expression, s'il s'agit d'un produit ou d'une somme.

Expression	**Produit**	**Somme**
$A(x) = (x-1)(2x+3) - (x-1)(x-3)$		
$B(x) = x(2x+10) + (x+5)(x+3)$		
$C(x) = 5x(2x-5)^2$		
$D(x) = x^2 - 6x + 9$		
$E(x) = (x+3)(x+1) + x + 3$		

2. Factorise les expressions pour lesquelles tu as coché « somme » dans le tableau.

3. Résous les équations suivantes. Pour certaines équations, tu peux t'aider des questions 1) et 2).

$5(x-4)-3(2+x)=6x+1$	$2x^2+3x-20=(x-3)(2x+7)$
$x(2x+10)=-(x+5)(x+3)$	$(x+3)(x+1)+x+3=0$

Exercice 4.
On considère le programme de calcul ci-dessous :
- Choisir un nombre de départ
- Prendre le double de ce nombre
- Retrancher 5
- Elever au carré
- Retrancher le carré du nombre de départ
- Ecrire le résultat obtenu.

Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

Aides

Aide pour l'exercice 1 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*
- Pour conjecturer qu'une égalité est vraie ou fausse, tu peux la tester en donnant des valeurs aux lettres. Si tu possèdes une calculatrice graphique, tu peux tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité.
- Tu montres qu'une égalité est vraie avec une propriété. Tu montres qu'une égalité est fausse à partir d'un contre-exemple.

Aide pour l'exercice 2 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Question 1. Pense à développer les expressions $(x-1)^2-4$ et $(x-3)(x+1)$.

Question 2. Pour chaque question :

a) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation-produit.

b) Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

c) Si $f(x)=y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

d) Le réel $f(x)$ est l'image de x par f. Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

e) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

Aide pour l'exercice 3 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Question 1. Algorithme de factorisation d'une expression A

Si A est un produit de facteurs
  alors l'expression est déjà factorisée.
  Sinon A est une somme de termes
    Si le facteur commun est apparent
      alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
      Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
        transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
    Fin si
Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x)=x(x+1)+(2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x)=x(x+1)+2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x)=(x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

Question 2. Pour résoudre une équation, tu peux :
- Ecrire tous les termes dans le même membre de l'équation.
- Factoriser (facteur commun ou une identité remarquable) pour transformer l'équation en une équation-produit. Tu peux utiliser l'algorithme de factorisation.
- Développer en espérant pouvoir éliminer certains termes.

Aide pour l'exercice 4 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*
1. Ecris l'expression littérale qui traduit le programme de calcul.
2. Ecris une équation qui traduit le fait que le résultat du programme de calcul soit 0 et résous-là.

Exercices à faire en devoir maison

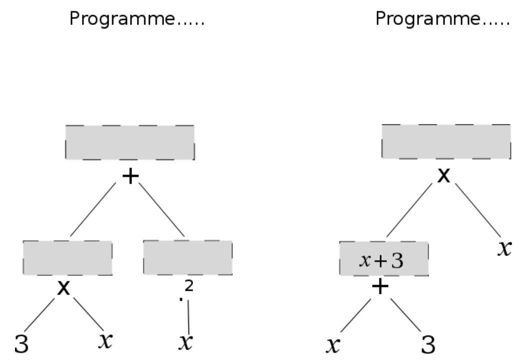
Pour chaque exercice, une aide est disponible à la page 5.

Exercice 1.

1. Zoé prétend que, pour n'importe quel nombre de départ, on obtient le même résultat pour les programmes de calcul 1 et 2. A-t-elle raison ? Montre-le..

Programme 1	**Programme 2**
· Choisir un entier,	· Choisir un entier,
· Le multiplier par 3,	· Lui ajouter 3,
· Ajouter le carré de cet entier.	· Multiplier le résultat par l'entier choisi.

2. **a.** Dans les arbres de calcul ci-contre, complète chaque rectangle par le résultat de l'opération située en-dessous. Un rectangle est rempli en exemple. A quel programme de calcul correspond chaque arbre ?



b. Dans chaque arbre, entoure la dernière opération effectuée. Les expressions obtenues sont-elles des sommes ou des produits ?

3. Complète un des deux arbres en rouge pour amener à $1+(x+3)x$. Quelle est la dernière opération effectuée ? Cette expression est-elle une somme ou un produit ?

4. Pour chaque expression, indique s'il s'agit d'une somme ou d'un produit.

$x(4+x)+5$ $\quad (x+1)(x-2)$

x^2+3x $\quad (2x+1)^2$ $\quad \dfrac{x}{2}+3$

Exercice 2.

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a et de b ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 4a^2$		
$2(a+b) = 2a+b$		
$(3ab)^2 = 3ab^2$		
$-4^2 = 16$		
$2a^2+3a = 5a^3$		
$(a+3)(a+1) = a^2+4a+3$		

Exercice 3.

1. Représente graphiquement, sur le même écran d'une calculatrice, les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :
   - $f(x) = (x-1)^2-4$
   - $g(x) = (x-3)(x+1)$
   - $h(x) = x^2-2x-3$

   Qu'observes-tu ? Explique et démontre.

2. On a donc plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

   Expression 1 : $f(x) = (x-1)^2-4$

   Expression 2 : $f(x) = (x-3)(x+1)$

   Expression 3 : $f(x) = x^2-2x-3$

   Réponds à chaque question en choisissant l'expression la plus adaptée, c'est-à-dire celle qui demande le moins de calculs.

   a) Résous l'équation $f(x) = 0$.

   b) Calcule $f(0)$.

c) Détermine le(s) antécédent(s) de -4 par f.

d) Calcule l'image de 1 par f.

e) Résous l'équation $f(x) = -3$.

Exercice 4.

1. Complète le tableau suivant en indiquant, pour chaque expression, s'il s'agit d'un produit ou d'une somme.

Expression	**Produit**	**Somme**
$A(x) = (x-1)(2x+3) - (x-1)(x-3)$		
$B(x) = x(2x+10) + (x+5)(x+3)$		
$C(x) = 5x(2x-5)^2$		
$D(x) = x^2 - 6x + 9$		
$E(x) = (x+3)(x+1) + x + 3$		

2. Factorise les expressions pour lesquelles tu as coché « somme » dans le tableau.

3. Résous les équations suivantes. Pour certaines équations, tu peux t'aider des questions 1) et 2).

$5(x-4) - 3(2+x) = 6x + 1$

$2x^2 + 3x - 20 = (x-3)(2x+7)$

$x(2x+10) = -(x+5)(x+3)$

$(x+3)(x+1) + x + 3 = 0$

Exercice 5.

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre de départ
- Prendre le double de ce nombre
- Retrancher 5
- Elever au carré
- Retrancher le carré du nombre de départ
- Ecrire le résultat obtenu.

Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

Aides

Aide pour l'exercice 1 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Question 1. Teste le programme pour différentes valeurs puis écris une expression traduisant chaque programme.

Question 2. L'arbre se complète du bas vers le haut.

Question 4. Détermine la dernière opération effectuée pour chaque expression.

Aide pour l'exercice 2 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

- Pour conjecturer qu'une égalité est vraie ou fausse, tu peux la tester en donnant des valeurs aux lettres. Si tu possèdes une calculatrice graphique, tu peux tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité.
- Tu montres qu'une égalité est vraie avec une propriété. Tu montres qu'une égalité est fausse à partir d'un contre-exemple.

Aide pour l'exercice 3 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Question 1. Pense à développer les expressions $(x-1)^2-4$ et $(x-3)(x+1)$.

Question 2. Pour chaque question :

a) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation-produit.

b) Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

c) Si $f(x)=y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

d) Le réel $f(x)$ est l'image de x par f. Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

e) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

Aide pour l'exercice 4 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Question 1. Algorithme de factorisation d'une expression A

Si A est un produit de facteurs
  alors l'expression est déjà factorisée.
  Sinon A est une somme de termes
    Si le facteur commun est apparent
      alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
      Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
        transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
    Fin si
Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x)=x(x+1)+(2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x)=x(x+1)+2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x)=(x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

Question 2. Pour résoudre une équation, tu peux :

- Ecrire tous les termes dans le même membre de l'équation.
- Factoriser (facteur commun ou une identité remarquable) pour transformer l'équation en une équation-produit. Tu peux utiliser l'algorithme de factorisation.
- Développer en espérant pouvoir éliminer certains termes.

Aide pour l'exercice 5 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

1. Ecris l'expression littérale qui traduit le programme de calcul.
2. Ecris une équation qui traduit le fait que le résultat du programme de calcul soit 0 et résous-là.

Exercices à faire en devoir maison

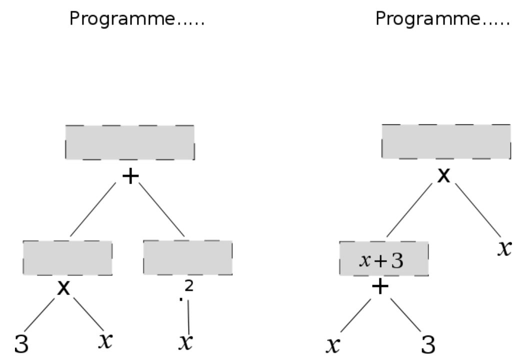
Pour chaque exercice, une aide est disponible à la page 5.

Exercice 1.

1. Zoé prétend que, pour n'importe quel nombre de départ, on obtient le même résultat pour les programmes de calcul 1 et 2. A-t-elle raison ? Montre-le..

Programme 1	**Programme 2**
· Choisir un entier,	· Choisir un entier,
· Le multiplier par 3,	· Lui ajouter 3,
· Ajouter le carré de cet entier.	· Multiplier le résultat par l'entier choisi.

2. **a.** Dans les arbres de calcul ci-contre, complète chaque rectangle par le résultat de l'opération située en-dessous. Un rectangle est rempli en exemple. A quel programme de calcul correspond chaque arbre ?



b. Dans chaque arbre, entoure la dernière opération effectuée. Les expressions obtenues sont-elles des sommes ou des produits ?

3. Complète un des deux arbres en rouge pour amener à $1+(x+3)x$. Quelle est la dernière opération effectuée ? Cette expression est-elle une somme ou un produit ?

4. Pour chaque expression, indique s'il s'agit d'une somme ou d'un produit.

$x(4+x)+5$ $\quad (x+1)(x-2)$

x^2+3x $\quad (2x+1)^2$ $\quad \dfrac{x}{2}+3$

Exercice 2.

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$a^3 = 3a$		
$2a^2+3a = 5a^3$		
$3(2\times a) = 6\times 3a$		
$a+1(a+2) = (a+1)(a+2)$		
$a+3(a+1) = 4a+3$		
$-4^2 = 16$		

Exercice 3.

1. Représente graphiquement, sur le même écran d'une calculatrice, les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :
   - $f(x) = (x-1)^2-4$
   - $g(x) = (x-3)(x+1)$
   - $h(x) = x^2-2x-3$

   Qu'observes-tu ? Explique et démontre.

2. On a donc plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

   Expression 1 : $f(x) = (x-1)^2-4$

   Expression 2 : $f(x) = (x-3)(x+1)$

   Expression 3 : $f(x) = x^2-2x-3$

   Réponds à chaque question en choisissant l'expression la plus adaptée, c'est-à-dire celle qui demande le moins de calculs.

   a) Résous l'équation $f(x)=0$.

   b) Calcule $f(0)$.

c) Détermine le(s) antécédent(s) de -4 par f.

d) Calcule l'image de 1 par f.

e) Résous l'équation $f(x) = -3$.

Exercice 4.

1. Complète le tableau de la façon suivante :
   - dans le première colonne, mets un « P » si l'expression est un produit et un « S » si c'est une somme.
   - dans la deuxième colonne, pour les expressions qui sont des sommes, détermine un facteur commun ou reconnais une identité remarquable.

Expression	**Produit(P) ou Somme(S) ?**	**Cas d'une somme (S), facteur commun ou identité remarquable ?**
$A(x) = 5x(2x-5)^2$	P	/
$B(x) = (x-1)(2x+3)+(x-1)(x-3)$		
$C(x) = x(2x+10)+(x+5)(x+3)$		
$D(x) = (3x+7)(3x-7)$		
$E(x) = (x-3)^2 - 2(x-3)$		

2. Factorise les expressions pour lesquelles tu as mis « somme » dans la première colonne du tableau.

3. Résous les équations suivantes. Pour certaines équations, pense à utiliser le travail que tu as fait dans les questions 1) et 2) !

$5(x-4) - 3(2+x) = 6x+1$

$(x-1)(2x+3) = -(x-1)(x-3)$

$x(2x+10) + (x+5)(x+3) = 0$

$2x^2 + 3x - 20 = (x-3)(2x+7)$

Exercice 5.

On considère le programme de calcul ci-dessous :
- Choisir un nombre de départ
- Prendre le double de ce nombre
- Retrancher 5
- Elever au carré
- Retrancher le carré du nombre de départ
- Ecrire le résultat obtenu.

Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

Aides

Aide pour l'exercice 1 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide question 1. Teste le programme pour différentes valeurs puis écris une expression traduisant chaque programme.

Aide question 2. L'arbre se complète du bas vers le haut.

Aide question 4. Détermine la dernière opération effectuée pour chaque expression.

Aide pour l'exercice 2 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

- Pour conjecturer qu'une égalité est vraie ou fausse, tu peux la tester en donnant des valeurs aux lettres. Si tu possèdes une calculatrice graphique, tu peux tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité.
- Tu montres qu'une égalité est vraie avec une propriété. Tu montres qu'une égalité est fausse à partir d'un contre-exemple.

Aide pour l'exercice 3 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide question 1. Pense à développer les expressions $(x-1)^2-4$ et $(x-3)(x+1)$.

Aide question 2. Pour chaque question :

a) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation-produit.

b) Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

c) Si $f(x)=y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

d) Le réel $f(x)$ est l'image de x par f. Choisis l'expression qui permet de faire le moins de calculs.

e) Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$.

Aide pour l'exercices 4 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

Question 1. Algorithme de factorisation d'une expression A

Si A est un produit de facteurs
 alors l'expression est déjà factorisée.
 Sinon A est une somme de termes
  Si le facteur commun est apparent
  alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
  Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
  transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
  Fin si
Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x)=x(x+1)+(2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x)=x(x+1)+2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x)=(x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

Question 2. Pour résoudre une équation, tu peux :

- Ecrire tous les termes dans le même membre de l'équation.
- Factoriser (facteur commun ou une identité remarquable) pour transformer l'équation en une équation-produit. Tu peux utiliser l'algorithme de factorisation.
- Développer en espérant pouvoir éliminer certains termes.

Aide pour l'exercice 5 *J'ai utilisé cette aide :* ☐ *Oui* ☐ *Non*

1. Ecris l'expression littérale qui traduit le programme de calcul.
2. Ecris une équation qui traduit le fait que le résultat du programme de calcul soit 0 et résous-là.

C.2.2 Les PED pour la pré-expérimentation en troisième dans la classe de Fabien

Exercices

Pour chaque exercice, une aide est disponible page 4.

Exercice 1. Utiliser les identités remarquables

1. Sachant que $ab = 10$, calculer $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

2. Sachant que $a + b = 15$ et $a^2 - b^2 = 45$, calculer $a - b$.

Exercice 2. Choisir la bonne écriture d'une même expression

Voici trois expressions :

- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x-3)(x+1)$
- $C(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie.

2. Calcule $A(x)$ pour $x = 1$, $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 3. Développer des produits et factoriser des sommes

Développe et factorise si possible chaque expression.

1. $(8x+5)(8x-5)$
2. $(2t+1)^2 - (t+4)(2t+1)$
3. $9u^2 - (7u-2)^2$
4. $(4r+5)^2 + 4r + 5$
5. $16g^2 - 24g + 9$

Exercice 4. Des aires égales ?
Soit x un nombre.
Un carré a un côté qui mesure $x-2$ et un rectangle a pour dimension $x-2$ et $x+4$.
Les mesures sont exprimées en cm.

1. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de x.

2. Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit trois fois plus grande que celle du carré.

Aides

Aide exercice 1

Question 1 Développe ou factorise l'expression $(a+b)^2-(a-b)^2$ pour faire apparaître ab.

Question 2 Factorise l'expression a^2-b^2.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 2

Question 1 Pour conjecturer si les expressions sont égales pour tout x, tu peux tracer la représentation graphique des fonctions A, B et C avec une calculatrice graphique ou tester les expressions avec des valeurs de x.

Question 2 Utilise l'expression la plus adaptée, c'est-à-dire celle qui demande le moins de calculs.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 3

1. Pense à utiliser les propriétés suivantes, pour tout a, b, c et d :
   - la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c)=ab+ac$
   - la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
   - l'identité remarquable : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
   - l'identité remarquable : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
   - l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
2. Tu peux contrôler tes résultats en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.
3. Tu peux développer des produits.
4. Tu peux factoriser des sommes. Voici une méthode de factorisation :

   Si A est un produit de facteurs
     alors l'expression est déjà factorisée.
     Sinon A est une somme de termes
       Si le facteur commun est apparent
         alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
         Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
           transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
       Fin si
     Fin si
   Fin algorithme

   Par exemple. $K(x)=x(x+1)+(2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x)=x(x+1)+2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x)=(x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 4

Question 1 Une mesure est toujours positive.

Question 2 Traduis chaque aire par une expression, puis écris une équation pour traduire le problème.
Pour résoudre l'équation, essaie de te ramener à une équation-produit en factorisant, c'est-à-dire une équation du type $A(x) \times B(x) = 0$.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Exercices

Pour chaque exercice, une aide est disponible page 4.

Exercice 1. Programmes de calcul et expressions
On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre de départ
- multiplier ce nombre par (-2)
- ajouter 5 au produit
- multiplier le résultat par 5
- écrire le résultat obtenu.

1. Que est le résultat du programme de calcul lorsqu'on prend 2 et 5 comme nombre de départ ?

2. Denis prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x, l'expression $(x-5)^2 - x^2$ permet d'obtenir le résultat du programme de calcul. A-t-il raison ?

Exercice 2. Choisir la bonne écriture d'une même expression
Voici trois expressions :

- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x-3)(x+1)$
- $C(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie.

2. Calcule $A(x)$ pour $x = 1$, $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 3. Développer des produits et factoriser des sommes
Développe et factorise si possible chaque expression.

1. $(8x+5)(8x-5)$
2. $(2t+1)^2 - (t+4)(2t+1)$
3. $9u^2 - (7u-2)^2$
4. $(4r+5)^2 + 4r + 5$
5. $16g^2 - 24g + 9$

EXERCICE 4. Des aires égales ?
Soit x un nombre.
Un carré a un côté qui mesure $x-2$ et un rectangle a pour dimension $x-2$ et $x+4$.
Les mesures sont exprimées en cm.

1. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de x.

2. Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit trois fois plus grande que celle du carré.

Aides

Aide exercice 1

1. Ecris une expression traduisant le programme de calcul.
2. Développe ou factorise l'expression de Denis et celle qui traduit le programme de calcul.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 2

Question 1 Pour conjecturer si les expressions sont égales pour tout x, tu peux tracer la représentation graphique des fonctions A, B et C avec une calculatrice graphique ou tester les expressions avec des valeurs de x.

Question 2 Utilise l'expression la plus adaptée, c'est-à-dire celle qui demande le moins de calculs.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 3

1. Pense à utiliser les propriétés suivantes, pour tout a, b, c et d :
   - la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
   - la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
   - l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   - l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   - l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
2. Tu peux contrôler tes résultats en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.
3. Tu peux développer des produits.
4. Tu peux factoriser des sommes. Voici une méthode de factorisation :

Si A est un produit de facteurs
 alors l'expression est déjà factorisée.
 Sinon A est une somme de termes
  Si le facteur commun est apparent
   alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
   Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
    transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
  Fin si
 Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x) = x(x+1) + (2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x) = x(x+1) + 2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 4

Question 1 Une mesure est toujours positive.

Question 2 Traduis chaque aire par une expression, puis écris une équation pour traduire le problème.
Pour résoudre l'équation, essaie de te ramener à une équation-produit en factorisant, c'est-à-dire une équation du type $A(x) \times B(x) = 0$.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Exercices

Pour chaque exercice, une aide est disponible page 4.

Exercice 1. Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$		
$(a+2)^2 = a^2 + 4$		

Exercice 2. Des calculs astucieux
Calcule 98^2 et $85^2 - 15^2$.

Exercice 3. Des expressions égales pour tout x ?
Voici trois expressions :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$. Que remarques-tu ? Formule une conjecture.
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Exercice 4. Développer des produits et factoriser des sommes

Expression	Produit (P) ou Somme (S) ?
$h(2h+3)$	
$81 - 9a^2$	
$(3p+2)^2$	
$(4t+7)(4t-7)$	
$(3f+2)^2 + (5f+3)(3f+2)$	
$25 - (2x+1)^2$	

1. Remplis le tableau ci-dessus.
2. Développe les expressions qui sont des produits.
3. Factorise les expressions qui sont des sommes.

EXERCICE 5. Des aires égales ?
Soit x un nombre supérieur à 2.5 et différent de 2.5.
Un carré a un côté qui mesure $x-2$ et un rectangle a pour dimension $x-2$ et $2x-5$.
Les mesures sont exprimées en cm.
Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit égale à celle du carré.

Aides

Aide exercice 1

- Tu peux tester l'égalité en donnant des valeurs numériques aux lettres.
- Tu montres qu'une égalité est fausse pour toute valeur de la lettre à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle il n'y a pas d'égalité.
- Tu montres qu'une égalité est vraie à partir du calcul algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 2

Réécris les nombres pour utiliser les propriétés pour tout a, b, c et d :
- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c)=ab+ac$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 3

- Pour démontrer que deux expressions « ne sont pas égales pour tout x », il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas d'égalité, c'est un contre-exemple.
- Pour démontrer que deux expressions « sont égales pour tout x », des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par le calcul algébrique (« avec x »).

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 4

- Pense à utiliser les propriétés connues, elles sont rappelées dans l'aide de l'exercice 2.
- Tu peux contrôler tes résultats en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.
- Voici une méthode de factorisation :

Si A est un produit de facteurs
    alors l'expression est déjà factorisée.
    Sinon A est une somme de termes
        Si le facteur commun est apparent
            alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
            Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
                transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
        Fin si
    Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x)=x(x+1)+(2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x)=x(x+1)+2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x)=(x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 5

Traduis chaque aire par une expression, puis écris une équation pour traduire le problème. Pour résoudre l'équation, essaie de te ramener à une équation-produit en factorisant, c'est-à-dire une équation du type $A(x) \times B(x) = 0$.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Exercices

Pour chaque exercice, une aide est disponible page 4.

Exercice 1. Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ?
On donne les trois programmes de calcul suivants et on se demande lesquels sont équivalents.

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 2. - Elever le résultat au carré.	- Choisir un nombre. - Elever ce nombre au carré. - Multiplier par 2.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ.

1. Teste ces trois programmes de calcul avec trois nombres. Que remarques-tu ?
2. Ecris l'expression littérale qui traduit chaque programme de calcul.
3. Avec ces trois expressions, on peut écrire une égalité toujours vraie. Laquelle ? Justifie.

Exercice 2. Des calculs astucieux
Calcule 98^2 et $85^2 - 15^2$.

Exercice 3. Des expressions égales pour tout x ?
Voici trois expressions :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$. Que remarques-tu ? Formule une conjecture.
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Exercice 4. Développer des produits et factoriser des sommes

Expression	Produit (P) ou Somme (S) ?
$h(2h+3)$	
$81 - 9a^2$	
$(3p+2)^2$	
$(4t+7)(4t-7)$	
$(3f+2)^2 + (5f+3)(3f+2)$	
$25 - (2x+1)^2$	

1. Remplis le tableau ci-dessus.
2. Développe les expressions qui sont des produits.

3. Factorise les expressions qui sont des sommes.

Exercice 5. Des aires égales ?
Soit x un nombre supérieur à 2.5 et différent de 2.5.
Un carré a un côté qui mesure $x-2$ et un rectangle a pour dimension $x-2$ et $2x-5$.
Les mesures sont exprimées en cm.
Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit égale à celle du carré.

Aides

Aide exercice 1

Question 1. Utilise un schéma de calcul. Par exemple, si on choisit le nombre 5 dans le programme1 :

$$5 \xrightarrow{\times 2} 10 \xrightarrow{\,^2} 100$$

Question 2. Pour chaque programme, écris un schéma de calcul valable pour un nombre quelconque. Teste l'expression obtenue avec les nombres utilisés dans la question 1. pour contrôler ton résultat.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 2

Réécris les nombres pour utiliser les propriétés connues, pour tout a, b, c et d : :
- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 3

- Pour démontrer que deux expressions « ne sont pas égales pour tout x », il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas d'égalité, c'est un contre-exemple.
- Pour démontrer que deux expressions « sont égales pour tout x », des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par le calcul algébrique (« avec x »).

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 4

- Pense à utiliser les propriétés connues, elles sont rappelées dans l'aide de l'exercice 2.
- Tu peux contrôler tes résultats en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.
- Voici une méthode de factorisation :

Si A est un produit de facteurs
  alors l'expression est déjà factorisée.
  Sinon A est une somme de termes
    Si le facteur commun est apparent
      alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
      Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
        transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
    Fin si
  Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x) = x(x+1) + (2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le 2ème terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x) = x(x+1) + 2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 5

Traduis chaque aire par une expression, puis écris une équation pour traduire le problème. Pour résoudre l'équation, essaie de te ramener à une équation-produit en factorisant, c'est-à-dire une équation du type $A(x) \times B(x) = 0$.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Exercices

Pour chaque exercice, une aide est disponible page 4.

Exercice 1. Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?
Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$		
$a^2 = 2a$		
$(2a)^2 = 2a^2$		

Exercice 2. Des calculs astucieux
Calcule 105^2 et 105×95.

Exercice 3. Des expressions égales pour tout x ?
Voici trois expressions :
- $A(x) = (x + 2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x + 4)$
- $C(x) = 9x - 6$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$. Que remarques-tu ? Formule une conjecture.
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

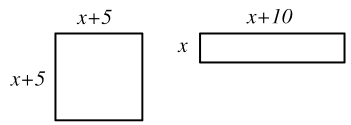
3. Les expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Exercice 4. Développer des produits et factoriser des sommes

Expression	Produit (P) ou Somme (S) ?
$h(2h + 7)$	
$16x - 4x^2$	
$16 - 4x^2$	
$(t - 8)(t + 8)$	
$f(f + 2) + (5f + 3)(f + 2)$	
$(2e + 3)^2 + e(2e + 3)$	

1. Remplis le tableau ci-dessus.
2. Développe les expressions qui sont des produits.
3. Factorise les expressions qui sont des sommes.

EXERCICE 5. Des périmètres égaux ?
Les figures ci-dessous ont-elles le même périmètre ?



Aides

Aide exercice 1

- Tu peux tester l'égalité en donnant des valeurs numériques aux lettres.
- Tu montres qu'une égalité est fausse pour toute valeur de la lettre à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle il n'y a pas d'égalité.
- Tu montres qu'une égalité est vraie à partir du calcul algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 2

Réécris les nombres pour utiliser les propriétés pour tout a, b, c et d :
- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b) \times (a+b) = a^2 - b^2$

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 3

- Pour démontrer que deux expressions « ne sont pas égales pour tout x », il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas d'égalité, c'est un contre-exemple.
- Pour démontrer que deux expressions « sont égales pour tout x », des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par le calcul algébrique (« avec x »).

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 4

- Pense à utiliser les propriétés connues, elles sont rappelées dans l'aide de l'exercice **??**.
- Tu peux contrôler tes résultats en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.
- Voici une méthode de factorisation :

Si A est un produit de facteurs
  alors l'expression est déjà factorisée.
  Sinon A est une somme de termes
    Si le facteur commun est apparent
      alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
      Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
        transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
    Fin si
  Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x) = x(x+1) + (2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x) = x(x+1) + 2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 5

Traduis chaque périmètre par une expression, puis transforme les expressions pour les comparer.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Exercices

Pour chaque exercice, une aide est disponible page 4.

Exercice 1. Remettre en question des erreurs de calcul : des programmes de calcul égaux ?
On donne les trois programmes de calcul suivants

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter 3 au produit obtenu.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 7.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter au produit obtenu le triple du nombre choisi.

On se demande si les programmes sont équivalents.

1. Teste ces trois programmes de calcul avec plusieurs nombres. Que remarques-tu ?
2. Ecris l'expression littérale qui traduit chaque programme de calcul.
3. Avec ces trois expressions, on peut écrire une égalité toujours vraie. Laquelle ? Justifie.

Exercice 2. Des calculs astucieux
Calcule 105^2 et 105×95.

Exercice 3. Des expressions égales pour tout x ?
Voici trois expressions :

- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$. Que remarques-tu ? Formule une conjecture.
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

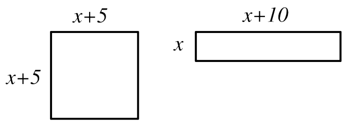
Exercice 4. Développer des produits et factoriser des sommes

Expression	Produit (P) ou Somme (S) ?
$h(2h+7)$	
$16x - 4x^2$	
$16 - 4x^2$	
$(t-8)(t+8)$	
$f(f+2) + (5f+3)(f+2)$	
$(2e+3)^2 + e(2e+3)$	

1. Remplis le tableau ci-dessus.
2. Développe les expressions qui sont des produits.

3. Factorise les expressions qui sont des sommes.

Exercice 5. Des périmètres égaux ?
Les figures ci-dessous ont-elles le même périmètre ?



Aides

Aide exercice 1

Question 1. Utilise un schéma de calcul. Par exemple, si on choisit le nombre 5 dans le programme1 :

$$5 \xrightarrow{\times 4} 20 \xrightarrow{+3} 23$$

Question 2. Pour chaque programme, écris un schéma de calcul valable pour un nombre quelconque.
Teste l'expression obtenue avec les nombres utilisés dans la question 1 pour contrôler ton résultat.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 2

Réécris les nombres pour utiliser les propriétés pour tout a, b, c et d :

- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b) \times (a+b) = a^2 - b^2$

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 3

- Pour démontrer que deux expressions « ne sont pas égales pour tout x », il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas d'égalité, c'est un contre-exemple.
- Pour démontrer que deux expressions « sont égales pour tout x », des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par le calcul algébrique (« avec x »).

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 4

- Pense à utiliser les propriétés connues, elles sont rappelées dans l'aide de l'exercice **??**.
- Tu peux contrôler tes résultats en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.
- Voici une méthode de factorisation :

Si A est un produit de facteurs
  alors l'expression est déjà factorisée.
  Sinon A est une somme de termes
    Si le facteur commun est apparent
      alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
      Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)
        transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.
    Fin si
  Fin si
Fin algorithme

Par exemple. $K(x) = x(x+1) + (2x+2)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $(2x+2)$. Le facteur commun n'est pas apparent. On transforme le $2^{\text{ème}}$ terme de K pour faire apparaître $x+1$ en facteur commun : $K(x) = x(x+1) + 2(x+1)$. On utilise la propriété de distributivité pour factoriser : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est un produit, l'expression est factorisée.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

Aide exercice 5

Traduis chaque périmètre par une expression, puis transforme les expressions pour les comparer.

J'ai utilisé cette aide : ☐ *Oui* ☐ *Non*

C.2.3 Les PED pour l'expérimentation menée en seconde dans la classe de Caroline

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

Partie A - Des égalités toujours vraies ?

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout réel x et tout réel y ? Justifie tes réponses. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vrai/Faux	Justification la plus convaincante
$x(x+1)+1 = 2x+1$		
$(x-y)^2 = (y-x)^2$		
$(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$		

Partie B

1. Sachant que $ab = 10$, calculer $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

2. Sachant que $a+b = 15$ et $a^2 - b^2 = 45$, calculer $a - b$.

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 3.

Des expressions égales pour tout x ?

Voici plusieurs expressions d'une même fonction f définie pour tout réel x par :

- Expression 1 : $f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$
- Expression 2 : $f(x) = x^3 - 7x + 6$
- Expression 3 : $f(x) = x(x^2 - 7) + 6$

1. Prouve algébriquement que les trois expressions sont égales pour tout réel x. Tu peux vérifier à l'aide ta calculatrice graphique.

2. Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :
   - a. Calculer $f(0)$.
   - b. Calculer $f(-3)$.
   - c. Déterminer le(s) antécédents de 6 par f.

AIDES

Aide exercice 1

Partie A

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableau de valeurs ou en représentant graphiquement les deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Partie B

Question 1 Développe ou factorise l'expression $(a+b)^2-(a-b)^2$ pour faire apparaître ab.

Question 2 Factorise l'expression a^2-b^2.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Aide exercice 2

Question 1 :

- Pour conjecturer si des expressions sont égales, tu peux :
  - les tester avec une ou plusieurs valeurs numériques,
  - les représenter sur le même écran d'une calculatrice graphique.
- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.

Question 2. c : Si $f(x)=y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x)=0$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

POUR LA MISE EN COMMUN

Ces exercices ne sont pas à traiter dans la séance.

Exercice Groupe B

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$(2a)^2=4a^2$		
$(a+3)^2=a^2+9$		
$a(a+2)=a^2+2$		
$a+1(a+2)=(a+1)(a+2)$		
$(a+3)(a+1)=a^2+4a+3$		
$-4^2=16$		
$2a^2+3a=5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :
- la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres,
- tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Exercice Groupe C

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$3+7a=10a$		
$a^3=3a$		
$a^2+a^2=4a$		
$3(2\times a)=6\times a$		
$a(a+2)=a^2+2$		
$(2a)^2=4a^2$		
$-4^2=16$		
$2a^2+3a=5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :
- la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres (tu peux utiliser une calculatrice),
- tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$(2a)^2 = 4a^2$		
$(a+3)^2 = a^2 + 9$		
$a(a+2) = a^2 + 2$		
$a + 1(a+2) = (a+1)(a+2)$		
$(a+3)(a+1) = a^2 + 4a + 3$		
$-4^2 = 16$		
$2a^2 + 3a = 5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :
- la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres (tu peux utiliser une calculatrice),
- tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois fonctions f, g et h sont égales pour tout réel x :
- $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- $g(x) = (x+1)(x-3)$
- $h(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

1. **Conjecture graphique :** Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f, g et h. Qu'observes-tu ? Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des trois fonctions ? Tu peux t'aider de la fonction « tableau de valeurs »de ta calculatrice.

2. **Preuve :** Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie algébriquement. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?

3. Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :
   - a.Calculer $f(3)$.

   - b. Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par f.

AIDES

Aide exercice 1

- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'une **égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Aide exercice 2

Question 1 :

- Pour démontrer que **deux fonctions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux fonctions « sont égales pour tout** x **»**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions des fonctions sous une même forme pour les comparer.

Question 3.b. : Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

POUR LA MISE EN COMMUN
Ces exercices ne sont pas à traiter dans la séance.

Exercice Groupe A

Partie A

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout réel x et tout réel y ? Justifie tes réponses. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vrai/Faux	Justification la plus convaincante
$x(x+1)+1 = 2x+1$		
$(x-y)^2 = (y-x)^2$		
$(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$		

Partie B

1. Sachant que $ab = 10$, calculer $(a+b)^2 - (a-b)^2$.
2. Sachant que $a+b = 15$ et $a^2 - b^2 = 45$, calculer $a - b$.

Exercice Groupe C

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$3+7a = 10a$		
$a^3 = 3a$		
$a^2 + a^2 = 4a$		
$3(2 \times a) = 6 \times a$		
$a(a+2) = a^2 + 2$		
$(2a)^2 = 4a^2$		
$-4^2 = 16$		
$2a^2 + 3a = 5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :
- la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres (tu peux utiliser une calculatrice),
- tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$3+7a=10a$		
$a^3=3a$		
$a^2+a^2=4a$		
$3(2\times a)=6\times a$		
$a(a+2)=a^2+2$		
$(2a)^2=4a^2$		
$-4^2=16$		
$2a^2+3a=5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :
- la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres (tu peux utiliser une calculatrice),
- tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois fonctions f, g et h sont égales pour tout réel x :
- $f(x)=x^2-2x-3$
- $g(x)=(x+1)(x-3)$
- $h(x)=x(x-2)-x^2-2$

1. **Conjecture numérique : tu peux utiliser la fonction « tableau de valeurs »de ta calculatrice graphique**
   (a) Calcule la valeur des trois fonctions pour $x=1$ et $x=-1$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1			
-1			
0			

Conjecture 1 :

   (b) Calcule la valeur des trois fonctions pour $x=0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture. Conjecture 2 :

2. **Conjecture graphique :** Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f, g et h. Qu'observes-tu ? Quel lien peux-tu faire avec ta dernière conjecture ?

3. **Preuve :** Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?

AIDES

Aide exercice 1

– Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
– Tu prouves qu'une **égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Aide exercice 2

Question 1 :
– Pour démontrer que **deux fonctions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
– Pour démontrer que **deux fonctions « sont égales pour tout x »**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions des fonctions sous une même forme pour les comparer.

Question 3.b. : Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f. Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

POUR LA MISE EN COMMUN

Ces exercices ne sont pas à traiter dans la séance.

Exercice Groupe A

Partie A

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout réel x et tout réel y ? Justifie tes réponses. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vrai/Faux	Justification la plus convaincante
$x(x+1)+1 = 2x+1$		
$(x-y)^2 = (y-x)^2$		
$(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$		

Partie B

1. Sachant que $ab = 10$, calculer $(a+b)^2 - (a-b)^2$.
2. Sachant que $a+b = 15$ et $a^2 - b^2 = 45$, calculer $a-b$.

Exercice Groupe B

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification la plus convaincante
$(2a)^2 = 4a^2$		
$(a+3)^2 = a^2+9$		
$a(a+2) = a^2+2$		
$a+1(a+2) = (a+1)(a+2)$		
$(a+3)(a+1) = a^2+4a+3$		
$-4^2 = 16$		
$2a^2+3a = 5a^3$		

Indication : Pour conjecturer si une égalité est vraie ou fausse, tu peux :
– la tester en donnant des valeurs numériques aux lettres,
– tracer la représentation graphique de chaque membre de l'égalité sur une calculatrice graphique.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

C.2.4 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3A)

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.

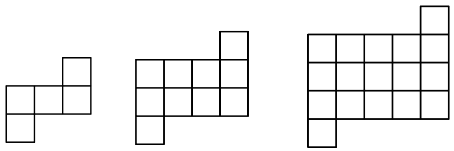


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - $a(a+2)+2$
   - a^2+2a+2
   - $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - $a^2+2(a+1)$

3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis la formule qui demande le moins de calculs.

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$		
$a(a+2) = a^2 + 2$		
$a + 3(a+2) = 4a + 6$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

AIDE EXERCICE 2

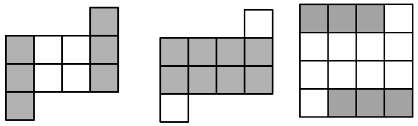
– Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
– Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
– Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Cette aide m'a été utile ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

AIDE EXERCICE 1 A DISTRIBUER

PREMIERE AIDE PARTIE A

Aide pour les questions 1 et 2 Voici la figure de taille 2. Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Cette aide m'a été utile ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $4^2 + 2 \times (4 + 1)$
- $4 \times (4 + 2) + 2$
- $(4 + 2)^2 - 2 \times (4 + 1)$

Aide pour la question 2 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $30^2 + 2 \times (30 + 1)$
- $30 \times (30 + 2) + 2$
- $(30 + 2)^2 - 2 \times (30 + 1)$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Cette aide m'a été utile ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

TROISIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 3 Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur un des schémas de la première aide.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Cette aide m'a été utile ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

AIDE PARTIE B

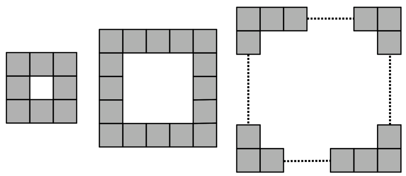
Aide pour la question 2 Tu peux associer une formule à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les formules qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Cette aide m'a été utile ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - $4 \times a + 4$
   - $(a + 2) \times 4$
   - $(a + 2) \times 4 - 4$
   - $(a + 1) \times 4$
   - $(a + 2) \times 2 + a \times 2$
   - $(a \times 4) - 4$

3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$		
$a^2 = 2a$		
$(2a)^2 = 4a^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

AIDE EXERCICE 2

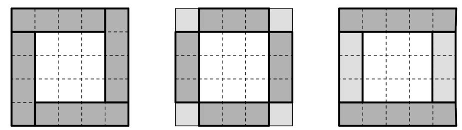
- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Cette aide m'a été utile ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

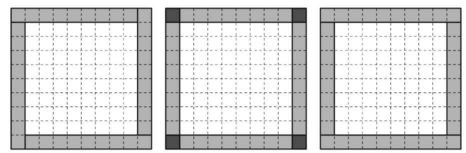
AIDE EXERCICE 1 A DISTRIBUER

PREMIERE AIDE PARTIE A

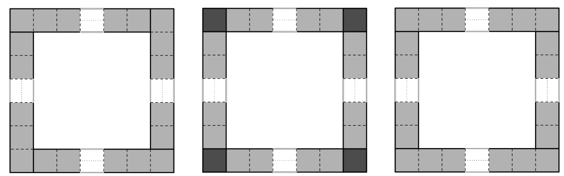
Aide pour la question 1 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



Aide pour la question 2 Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.



Aide pour les questions 3 et 4 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $4 \times (3 + 1)$
- $4 \times 3 + 4$
- $2 \times (3 + 1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 2 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $4 \times (8 + 1)$
- $4 \times 8 + 4$
- $2 \times (8 + 1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 3 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $4 \times (100 + 1)$
- $4 \times 100 + 4$
- $2 \times (100 + 1) + 2 \times 3$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

TROISIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 5 Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur un des schémas de la première aide.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 7 Tu peux associer une formule à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les formules qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1			
-1			
0			

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 3.

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de a** ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$3a^2 = (3a)^2$		
$(3a+2)^2 = 9a^2 + 4$		
$(3a+2)(3a-2) = 3a^2 - 4$		
$(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

AIDES

Exercice 1

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout** x **»**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, pense à **utiliser les propriétés** suivantes.
  Pour tout a, b, c et d :
  · la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
  · la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition :
  $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
  · l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  · l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  · l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Exercice 2

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2			
3			
0			

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 3.

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$3a^2 = (3a)^2$		
$(3+a)^2 = 3^2 + a^2$		
$(3a+2)(3a-2) = 3a^2 - 2^2$		
$(a-2)^2 = a^2 - 2 \times 2 \times a + 2^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

AIDES

EXERCICE 1

– Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
– Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout** x **»**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, ense à **utiliser les propriétés** suivantes. Pour tout a, b, c et d :
· la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
· la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition :
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
· l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
· l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
· l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 2

– Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
– Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
– Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

C.2.5 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3B)

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 4.

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 2. - Elever le résultat au carré.	- Choisir un nombre. - Elever ce nombre au carré. - Multiplier par 2.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ.

1. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.

Nombre	Résultat programme 1	Résultat programme 2	Résultat programme 3

2. Quels programmes semblent être égaux ?

3. Ecris une expression littérale pour chaque programme.

4. Avec ces trois expressions, écris une égalité. Justifie.

5. Utilise cette égalité pour vérifier ta réponse à la question 2. et démontrer quels sont les programmes égaux.

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$a(a+2) = a^2 + 2$		
$a + 3(a+2) = (a+3)(a+2)$		
$a + 3(a+2) = 4a + 6$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

AIDES

Exercice 1

Question 1. Utilise un schéma de calcul. Par exemple, si on choisit le nombre 5 dans le programme1 :

$$5 \xrightarrow{\times 2} 10 \xrightarrow{\uparrow^2} 10^2 = 100$$

$\uparrow^2$ signifie élever au carré.

Question 2. Pour chaque programme, écris un schéma de calcul valable pour un nombre quelconque. Teste l'expression obtenue avec les nombres utilisés dans la question 1. pour contrôler ton résultat.

Question 3. Tu peux t'aider de ta remarque à la question 1.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Exercice 2

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 4.

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter 3 au produit.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 7.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter au produit le triple du nombre de départ.

1. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.

Nombre	Résultat programme 1	Résultat programme 2	Résultat programme 3

2. Quels programmes semblent être égaux ?

3. Ecris une expression littérale pour chaque programme.

4. Avec ces trois expressions, écris une égalité toujours vraie. Justifie.

5. Utilise cette égalité pour vérifier ta réponse à la question 2. et démontrer quels sont les programmes égaux ?

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$5a - 3a = 2a$		
$a^2 = 2a$		
$(2a)^2 = 2a^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

AIDES

Exercice 1

Question 1. Tu peux utiliser un schéma de calcul. Par exemple, si on choisit le nombre 5 dans le programme1 :

$$5 \xrightarrow{\times 4} 20 \xrightarrow{+3} 23$$

Question 3. Pour chaque programme, écris un schéma de calcul valable pour un nombre quelconque. Teste l'expression obtenue avec les nombres utilisés dans la question 1 pour contrôler ton résultat.

Question 4. Tu peux t'aider de ta remarque à la question 2.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Exercice 2

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

C.2.6 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Benoît

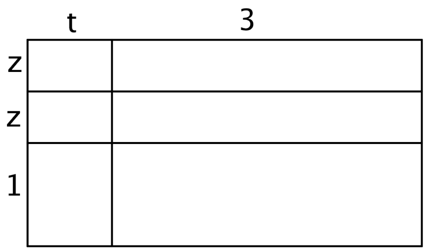
EXERCICE 1

Associe chaque expression à la phrase qui la décrit.

$(2ab)^2$ •	• Le double du carré du produit de a par b
$2(ab)^2$ •	• Le double du carré de a et de b
$2a^2b$ •	• Le carré du double de a et de b

EXERCICE 2

Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression $H = t(2z + 1) + 3z$



EXERCICE

Voici trois programmes de calcul.

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Lui ajouter 2.	- Choisir un nombre. - Le multiplier par lui-même.	- Choisir un nombre. - Le multiplier par 2.

1. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.

Nombre	Résultat programme 1	Résultat programme 2	Résultat programme 3

2. Que peux-tu dire sur les résultats des programmes ? Formule une conjecture.

3. Ecris une expression littérale pour chaque programme.

4. Associe chaque expression à son programme de calcul et à la phrase qui la décrit.

Phrase	Expression	Programme
La double de a •	• a^2 •	• P1 : Prendre un nombre, lui ajouter 2.
La somme de 2 et de a •	• $a+2$ •	• P2 : Prendre un nombre, le multiplier par lui-même
Le carré de a •	• $2a$ •	• P3 : Prendre un nombre, le multiplier par 2

C.2.7 Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Fabien

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 4.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x-3)(x+1)$
- $C(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie.

2. Calcule $A(x)$ pour $x = 1$, $x = 0$ et $x = 3$.

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout réel x et tout réel y ? Justifie tes réponses. Donne une justification la plus convaincante possible.

Egalité	Vrai/Faux	Justification la plus convaincante
$x(x+1)+1 = 2x+1$		
$(x-y)^2 = (y-x)^2$		
$(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$		

EXERCICE 3

Une aide est disponible page 4.

1. L'égalité $x(x+1)+1=2x+1$ est-elle vraie pour tout réel x ?

2. On sait que $10x = 99,75$. En déduire la valeur de $10(x+10)$.

3. On sait que $2x+5=4985$. En déduire la valeur de $2(x+10)+5$.

4. On sait que $2x+5=485$. On augmente x de 10. Combien vaut alors $2x+5$?

AIDES

EXERCICE 1

Question 1 – Pour conjecturer si les expressions sont égales pour tout x, tu peux calculer les expressions avec des valeurs de x.
- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout** x **»**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.

Question 2 Utilise l'expression la plus adaptée, c'est-à-dire celle qui demande le moins de calculs.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 2

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableau de valeurs ou en représentant graphiquement les deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 3

Question 1 – Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Question 2 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $10(x+10)$ pour faire apparaître $10x$ et utiliser le fait que $10x = 99,75$.

Question 3 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $2(x+10)+5$ pour faire apparaître $2x+5$ et utiliser le fait que $2x+5=4985$.

Question 4 Traduis algébriquement « On augmente x de 10 » et remplace dans l'égalité $2x+5=485$.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 4..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2			
3			
0			

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$3a^2 = (3a)^2$		
$(3+a)^2 = 3^2 + a^2$		
$(3a+2)(3a-2) = 3a^2 - 2^2$		
$(a-2)^2 = a^2 - 2 \times 2 \times a + 2^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

EXERCICE 3

Une aide est disponible page 4.

1. L'égalité $x(x+1)+1 = 2x+1$ est-elle vraie pour tout réel x ?

2. On sait que $10x = 99,75$. En déduire la valeur de $10(x+10)$.

3. On sait que $2x+5 = 4985$. En déduire la valeur de $2(x+10)+5$.

4. On sait que $2x+5 = 485$. On augmente x de 10. Combien vaut alors $2x+5$?

AIDES

Exercice 1

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, ense à **utiliser les propriétés** suivantes. Pour tout a, b, c et d :
  · la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab+ac$
  · la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition :
  $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
  · l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
  · l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
  · l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Exercice 2

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Exercice 3

Question 1 – Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Question 2 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $10(x+10)$ pour faire apparaître $10x$ et utiliser le fait que $10x = 99,75$.

Question 3 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $2(x+10)+5$ pour faire apparaître $2x+5$ et utiliser le fait que $2x+5 = 4985$.

Question 4 Traduis algébriquement « On augmente x de 10 » et remplace dans l'égalité $2x+5 = 485$.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 4.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1			
-1			
0			

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$3a^2 = (3a)^2$		
$(3a+2)^2 = 9a^2 + 4$		
$(3a+2)(3a-2) = 3a^2 - 4$		
$(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

EXERCICE 3

Une aide est disponible page 4.

1. L'égalité $x(x+1)+1=2x+1$ est-elle vraie pour tout réel x ?

2. On sait que $10x = 99,75$. En déduire la valeur de $10(x+10)$.

3. On sait que $2x+5=4985$. En déduire la valeur de $2(x+10)+5$.

4. On sait que $2x+5=485$. On augmente x de 10. Combien vaut alors $2x+5$?

AIDES

EXERCICE 1

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, pense à **utiliser les propriétés** suivantes.
  Pour tout a, b, c et d :
  · la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c)=ab+ac$
  · la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition :
  $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
  · l'identité remarquable : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
  · l'identité remarquable : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
  · l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 2

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 3

Question 1
- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Question 2 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $10(x+10)$ pour faire apparaître $10x$ et utiliser le fait que $10x=99,75$.

Question 3 Transforme (développe, factorise,...) l'expression $2(x+10)+5$ pour faire apparaître $2x+5$ et utiliser le fait que $2x+5=4985$.

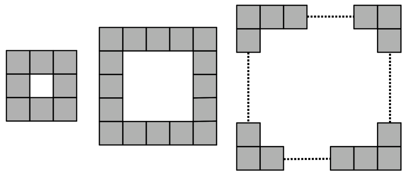
Question 4 Traduis algébriquement « On augmente x de 10 » et remplace dans l'égalité $2x+5=485$.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 5.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - $4 \times a + 4$
   - $(a + 2) \times 4$
   - $(a + 2) \times 4 - 4$
   - $(a + 1) \times 4$
   - $(a + 2) \times 2 + a \times 2$
   - $(a \times 4) - 4$

3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles **vraies pour toute valeur de** a ? Justifie ta réponse.

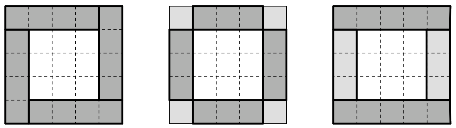
Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$		
$a^2 = 2a$		
$(2a)^2 = 4a^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

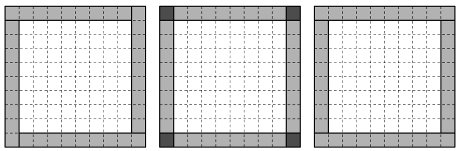
AIDE EXERCICE 1

PREMIERE AIDE PARTIE A

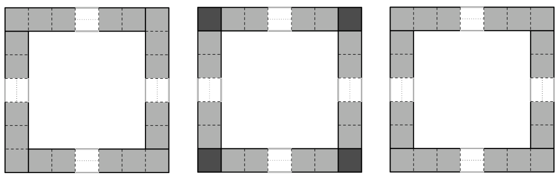
Aide pour la question 1 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



Aide pour la question 2 Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.



Aide pour les questions 3 et 4 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $4 \times (3+1)$
- $4 \times 3 + 4$
- $2 \times (3+1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 2 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $4 \times (8+1)$
- $4 \times 8 + 4$
- $2 \times (8+1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 3 Sélectionne parmi ces trois écritures celle que tu utilises :
- $4 \times (100+1)$
- $4 \times 100 + 4$
- $2 \times (100+1) + 2 \times 3$

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

TROISIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 5 Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur un des schémas de la première aide.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 Tu peux associer une formule à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les formules qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

AIDE EXERCICE 2

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableur ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'une **égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

C.3 Les bilans des enseignants sur le groupe IREM

Nous présentons ici les bilans de fin d'année des enseignants ayant participé au groupe IREM sur l'enseignement et la différenciation en algèbre. La consigne était la suivante : « Rédiger un texte (1-2 pages) expliquant ce que le groupe IREM vous a apporté ? Quel impact a eu votre implication dans le groupe sur votre pratique concernant l'enseignement et la différenciation en calcul littéral ? »

BILAN GARANCE

Enseignante de $3^{ème}$

1) Ce que le groupe IREM m'a apporté

La participation à ce groupe IREM m'a apporté un regard extérieur sur ma pratique et m'a permis d'échanger avec des collègues et des chercheurs. Nous n'avons en effet que peu de moments de rencontres et d'échange nous permet tant de prendre du recul sur nos pratiques pour les faire évoluer. Ce travail m'a amenée à me poser des questions et à tenter des expériences.

J'ai également constaté une certaine réticence des élèves face à l'algèbre. Dès qu'une lettre apparaît, ils semblent oublier les règles de calculs de base. Le constat étant plutôt catastrophique sur l'apprentissage de cette notion, il m'a paru d'autant plus intéressant de réfléchir à des moyens d'y remédier.

2) Impact sur la pratique

Dans un premier temps, ce travail m'a permis de proposer des types d'exercices que je n'avais pas l'habitude de proposer :

- Le travail sur les égalités.
  Il permet de faire émerger des erreurs , de les analyser et ainsi de les proscrire mais aussi de travailler sur le statut de la lettre, qui peut être remplacée par n'importe quel nombre et insister sur le fait que les règles de calculs restent les mêmes (3x n'est pas égal à 3 +x). Il amène à introduire la notion de contre exemple et de vérification.
  Ce type d'exercice est très complet, facile à mettre en œuvre et rentre tout à fait dans mes exercices de début d'heure. C'est un moyen efficace de travailler l'algèbre sous toutes ses formes et toute l'année.

- Les énoncés à démontrer du type : le carré d'un nombre pair est-il toujours un nombre pair ?
  Ils ont permis d'accentuer le statut de la lettre comme un outil de preuve et d'utiliser les règles de calculs algébriques. Ces exercices justifient l'utilisation de l'algèbre. De la même manière que les égalités, ce sont des exercices de début d'heure complets et pratiques.

Les exercices concernant les aspects structural et procédural des expressions en les associant à d'autres représentations et les changements de cadres (numériques et géométriques) n'appartiennent pas du tout à ma pratique. Il me semble intéressant de les intégrer. Une idée pour l'année prochaine…

Dans un deuxième temps ce travail m'a également fait réfléchir sur les méthodes de contrôle que je transmettais à mes élèves et comment je les transmettais. J'ai réalisé à quel point c'était implicite et que je n'explicitais les vérifications que lorsque c'était faux. J'ai institutionnalisé dans le cours différentes techniques de vérification mais finalement la véritable institutionnalisation s'effectue dans la répétition. « Comment je fais pour vérifier que mon calcul est vrai » « Pourquoi je suis sûre que ce qu'il a fait est faux ? ». Les calculs de début d'heure se prêtent particulièrement à ce genre de travail. Cette prise de conscience m'a permis d'expliciter les moyens de vérifications avec d'autres classes notamment en $6^{ème}$ avec la notion d'ordre de grandeur pour les opérations, de cohérence pour les grandeurs (conversions, utilisations du rapporteur.. .) ou encore vérifier que l'hypoténuse est le plus grand côté lorsqu'ils utilisent Pythagore ou la trigonométrie. La vérification ne prend sens que lorsqu'elle est intégrée au travail mathématique et pas seulement en algèbre et en 3ème .

L'impact essentiel sur ma pratique a été de confirmer l'utilité de la pratique des calculs de début d'heure et d'en faire évoluer leur contenu (égalités vraies pour toutes les valeurs, propositions à démontrer, vérification).

Dans un troisième temps, ce travail m'a aidé à penser des moyens de différencier les exercices. Le fait d'être accompagnée était très confortable et je ne sais pas comment je me serais appropriée ces parcours sans les échanges avec Julia et ses retours. Le premier parcours a été brouillon et les objectifs n'étaient pas clairs pour moi puis progressivement j'ai défini l' objectif' de la séance ce qui facilitait l'institutionnalisation.

Mon premier questionnement portait sur la mise en œuvre. En effet j'ai séparé la classe en deux : le groupe B d'un côté et le groupe C de l'autre. Le groupe B était autonome mais le groupe C était lent, bavard et parfois difficile à gérer. A réfléchir sur la mise en place de petits groupes de 3 élèves à l'intérieur du groupe C.

Mon deuxième questionnement concernait l'institutionnalisation. Comment faire la synthèse dans chaque groupe puis avec la classe entière. J'ai constaté l'importance de définir clairement l'objectif de la séance pour être efficace dans l'institutionnalisation. (Peut être est-ce une piste pour le « mode d'emploi » pour les enseignants ?).

Mon troisième questionnement se rapportait à la mise en place dans ma pratique de la différenciation en algèbre. Comment j'allais faire lorsque Julia et Sorraya ne seraient plus là ? J'ai réfléchi à comment je pouvais concevoir une séance de différenciation sans que cela me prenne 3 heures de préparation et en me facilitant l'institutionnalisation. Le plus efficace était pour moi de donner le même exercice (l'objectif est clairement le même) mais avec des variables didactiques différentes. J'ai compris l'utilité de l'aide, qui jusqu'à présent ne m'était pas apparu. Je n'ai pas encore conçu d'exercices se rapportant à l'algèbre en 3ème mais cette idée a conduit à la mise en place d'exercices différenciés en 6ème.

Mon quatrième questionnement portait sur les critères de choix des élèves pour les différents exercices donc l'évaluation diagnostique. Même si le test est très intéressant, le fonctionnement de la salle informatique du collège ne favorise pas la passation de ce test. Il n'y a que 10 ordinateurs avec des tables au centre. Même s'ils sont censés être autonomes les élèves m'ont souvent sollicitée lorsqu'ils étaient sur les ordinateurs et j'ai eu des difficultés à gérer les deux activités. Il faut deux heures de cours sur 4 heures hebdomadaires uniquement pour le test diagnostique. Pour les autres notions ou les autres classes, il n'y a pas de tests diagnostiques. J'ai donc demandé aux élèves l'exercice qu'ils souhaitaient étudier en incitant ceux qui sont en situation de réussite à chercher l'exercice le plus difficile. Je me pose la question de la pertinence de cette répartition.

Une réflexion sur la mise en place de séances différenciées s'est amorcée. Je souhaite reconduire des séances différenciées en algèbre l'année prochaine et trouver une méthode de travail pour concevoir des séances différenciées pour d'autres notions et d'autres niveaux.

Bilan de fin d’année de Fabien

Pourquoi j'ai souhaité participer au travail proposé par le groupe IREM

J'ai reçu sur mon mail l'annonce diffusée par l'équipe via *sésamath*. J'ai été intéressé par la proposition de travailler autour de l'utilisation des TICE, que je pratique depuis des années dans mes classes.

Mais c'est la perspective de mettre en oeuvre un vrai travail de différenciation qui a piqué ma curiosité. Dans ce domaine j'ai très peu d'expérience. J'ai beaucoup entendu parler de pédagogie différenciée, tant dans ma formation IUFM, que dans mon expérience professionnelle de terrain (dans les disucussion de couloir ou de salle de prof) ; mais jamais je n'ai vu une expérience se dérouler devant moi, et jamais je n'avais pu échanger sur ce thème de façon concrète et précise avec d'autres collègues.

Je n'avais jamais vraiment tenté par moi-même une expérience construite, sauf une fois l'année qui avait suivi mon stage, mais l'expérience m'avait semblée peu concluante par rapport à l'investissement demandé. La mise en oeuvre et la gestion en classe m'avaient semblé à l'époque couteuses en temps et en énergie. J'avais l'impression de moins tenir ma classe, une impression de confusion pour moi. Au quotidien, cela m'arrive bien sûr souvent de m'adapter à la rapidité et à la lenteurs d'élèves particuliers, mais cette différenciation "sauvage" n'est pas pour moi une modalité construite de travail en classe. Ce ne sont que des adaptations aux situations. La différenciation est devenue pour moi avec le temps un truc pour pouvoir faire travailler de front des élèves de niveau très différents sur des supports ou même des sujets complètement différents. La différenciation étant une modalité "transversale", je ne voyais pas très bien comment je pouvais mener tout ça au quotidien de façon construite, et tout le temps.

Enfin, la différenciation m'a semblé être un sujet à tiroirs multiples, à entrées et sorties multiples, je ne savais pas par quel bout prendre le problème. J'ai donc préféré m'investir sur la mise en oeuvre d'autres modalités de travail en classe pour lesquelles je me sentais capable de tenter des choses suffisamment construites, avec des intentions suffisamment claires.

Ayant une longue expérience de collectif de travail enseignant dans le cadre du CNAM, je savais à quel point le fait de travailler à plusieurs est enrichissant et dynamisant. Je me suis dit que c'était l'occasion d'essayer enfin la pédagogie différenciée.

Les difficultés à entrer dans le dispositif proposé

Comme pour tout dispositif, la difficulté a été pour moi de m'approprier des objectifs et modalités qui n'avaient pas été pensés par moi même, d'arriver à insérer ce travail dans mon travail avec les classes concernées, et enfin de créer (au moins dans ma tête) les articulations entre le travail différencié, et l'avant et l'après.

Ce que le groupe IREM m'a apporté

D'abord, le fait d'avoir travaillé dans ce groupe m'a permis de tenter véritablement l'expérience une nouvelle fois. C'était subjectivement moins risqué pour plusieurs raisons. D'abord parce que je me disais que la séance ayant été conçue, le volet intentions pédagogiques était clarifié. Il ne me restait plus qu'à trouver des modalités de mise en oeuvre. Ensuite, le fait de ne pas travailler seul a permis de mettre en débat de façon constructive ces modalités.

Certains thèmes mis en avant dans les réunions m'ont aussi permis de focaliser mon attention sur certaines modalités et de les approfondir : la mise en activité des élèves, et la gestion de la sortie de l'activité (la synthèse). Le fait de découvrir les façons de faire des autres collègues est enrichissant parce qu'il montre la diversité des modalités possibles en dehors de celles que l'on a imaginées. Intérieurement, cela ouvre des possibles, et en même temps, met en débat les modalités que l'on avait choisies. Cela incite à penser encore davantage, et à commencer à voir comment le travail différencié peut être possible au quotidien.

Certaines discusssions en réunion sur les programmes, ce que l'on choisit de dire ou de ne pas dire aux élèves, le choix des exercices et leur formulation, le fait que ce groupe fasse la jonction entre le collège et le lycée, m'a incité à renouveler mon discours, mon vocabulaire devant les élèves, à oser expliciter davantage des notions utilisées en permanence mais "taboues" parce que ne figurant pas au programme : l'équivalence par exemple.

Nous avons beaucoup échangé sur le contrôle (la vérification), et cela m'a permis de clarifier un pan entier de mon activité avec les élèves plein de non dits, en tous cas pas assez construit. Je retiens qu'il est nécessaire de donner un espace de clarté pour les élèves à la vérification, de lui attribuer une place institutionnelle dans le travail en classe et une visibilté dans lecours. Je retiens aussi que dans la mise en oeuvre au quotidien il faut faire attention à ne pas se laisser piéger par l'instinct qu'on a développé et qui induit des façons de chercher l'erreur ou de la faire remarquer aux élèves qui ne sont pas transférables au cas par cas et de façon ponctuelle. Il reste à concilier tout ça avec les autres impératifs de temps.

Le fait de retravailler la différenciation maintenant avec mon expérience et dans ce groupe m'a sans aucun doute permis de donner plus facilement une place et des utilisations possibles à ce dispositif de différenciation par rapport aux autres modalités de travail que je me suis déjà appropriées. La différenciation a ainsi gagné un espace de faisabilité dans ma pratique.

Impact sur votre pratique concernant l'enseignement et la différenciation en calcul littéral

Cette deuxième année, ce travail s'est assez bien intégré dans mon travail avec la classe. C'était un (ou plusieurs) maillon à part entière de ma séquence.

J'ai ainsi vu qu'il était possible de faire travailler les élèves sur des supports différents, avec néanmoins le même objectif de notion ou de méthode à acquérir. Cela m'a incité à oser tenter seul l'expérience avec la même classe un peu plus tard, avec un sujet pas très réfléchi fait par moi-même.

Je suis persuadé que quelque chose s'est passé qui a permis une meilleur digestion par la suite du cours sur les systèmes d'équations par la classe. Mais je ne saurais pas dire si c'est le travail différencié lui-même, ou plutôt le choix des supports de travail pour les séances différenciées, ou ce que j'ai pu dire ou faire par la suite pour articuler ce travail au reste du travail avec les élèves, ou tout ça réuni qui a apporté le plus.

Nouveaux exercices avec des aides différentes.

Voir autre pièce jointe pour les énoncés (faits un peu vite....). Je n'ai pas eu le temps de travailler les aides.

Bilan de fin d'année de Caroline (2^{de})

Suite à mon master 2 professionnel de didactique des mathématiques pour la formation des enseignants, j'ai été contactée pour faire partie d'une expérience sur la différenciation en calcul littéral s'adressant à des professeurs de collège et de lycée. Etant intéressée par ces questions et cherchant à réfléchir et à faire évoluer mes pratiques notamment en seconde, j'ai donné suite à ce projet.

Je n'ai jamais vraiment pratiqué la différenciation dans mes classes et ce pour de multiples raisons :

- Tout d'abord, j'ai toujours travaillé en lycée et dans des classes de seconde à effectif lourd (plus de 32 élèves) ; il me semblait difficile dans ces conditions de construire des séances différenciées d'autant plus à un niveau où l'orientation a une grande importance.
- D'autre part, je ne me suis jamais senti à l'aise lors des séances que j'ai pu organiser : quel temps accorder à chaque élève, à chaque groupe ; quand parler à toute la classe (problème de la place, du rôle, de l'intérêt et de la nature des mini-bilans) ; comment construire une évaluation commune à tous les élèves après des séances différenciées et comment mesurer le travail différencié et relativement autonome des élèves ; enfin n'est-il pas plus profitable de s'en tenir à des séances de soutien , de remèdiation ou d'approfondissement plus classiques ? Tel était mon état d'esprit au début de cette expérience et c'est avec ces réflexions que j'ai intégré le groupe.

J'étais la seule « représentante active » des professeurs de lycée et cela m'a parfois gêné : j'aurai aimé confronter mon expérience et mes interrogations avec des enseignants exerçant dans les mêmes niveaux de classe. De plus, une des difficultés que j'ai éprouvée cette année pour mener à bien cette expérience est l'emploi du temps de ma classe de seconde : enseignement concentré sur deux jours consécutifs : 2 heures le mercredi, 1 heure en classe entière et 1 heure en demi-groupe le jeudi ainsi que l'heure d'accompagnement personnalisé. Cela fut très préjudiciable à la souplesse nécessaire pour organiser cette expérience.

Par contre, j'ai beaucoup appris sur le collège (n'y ayant en fait jamais enseigné) et notamment sur les questionnements, les pratiques et les difficultés concernant l'introduction et la pratique du calcul littéral en quatrième et troisième évoqués par les professeurs de collège du groupe.

Le test de début d'année (sur Labomep) m'a paru très intéressant notamment par les exercices posés et par l'implication des élèves au cours de ce test. Cette année, ce test a été plaqué sur ma progression : je pense qu'il faudrait faire ce test vraiment en tout début d'année (avant tout travail en calcul littéral) , se servir de la correction pour retravailler certaines notions et bâtir la progression de l'année en calcul littéral ou au moins les premières séances de liaison entre le collège et le lycée ; cela permettrait de construire plus de séances différenciées avec, par exemple, l'utilisation des exercices interactifs présents sur Sésamath (cela permettrait d'utiliser la motivation des élèves face à l'outil informatique - je vais d'ailleurs tester dès cette année une séance de ce type avec mes élèves et même si je ne pourrais pas bien en mesurer l'impact, elle me permettra d'avoir une base pour l'année prochaine). D'autre part, je n'ai pu vraiment utiliser les résultats obtenus à cause des difficultés pour avoir les bilans des résultats de mes élèves.

Les parcours différenciés proposés par Julia Petit m'ont permis de construire une séance de différenciation. Cela dit, je pense que celle-ci ne s'est pas très bien passée :

- difficulté de mon positionnement par rapport à ce que Julia attendait de moi.
- manque d'appropriation de la séance que je n'avais pas réellement construite et où j'avais le souci de mettre en évidence certains aspects que m'avait soulignés Julia.
- Cette séance était trop longue et je l'organiserais autrement : en répartissant les groupes dans la salle de façon plus homogène pouvoir mieux les aider (même si cela peut entrainer des « fuites » ce que j'ai voulu éviter cette année en plaçant les groupes de manière aléatoire) ; d'autre part, la première partie (expressions vraies ou fausses) serait plus courte (15 min de travail de groupe et 5 min de « mini bilan méthode » sur la notion de contre-exemple ou d'égalité toujours vraie). Je pense que la deuxième partie (trois expressions d'une même fonction ou pas) est plus dans « l'esprit » de ce que l'on demande au lycée même si la notion de fonction est abordée au collège. Le temps gagné pourrait permettre d'utiliser davantage la calculatrice (à condition que son fonctionnement ait été travaillé avant) et de demander aux élèves de faire des « contrôles » de leurs résultats.

Le deuxième test (de fin d'année) m'a laissé plus perplexe : peu d'élèves ont reconnu le test de début d'année. Il me semble qu'ils ont bien travaillé au cours de la passation ; par contre, je n'ai pas pu récupérer leurs résultats…

Mon dernier devoir maison sera différencié : trois groupes en fonction des vœux provisoires d'orientation des élèves (1S-ES/1ES- 1 Technologique /Autres - il s'agit des mêmes groupes que les séances différenciées organisées à partir des exercices interactifs de Sésamath C'est d'ailleurs une recommandation de l'inspection (lors de la présentation des nouveaux programmes de lycée)

Les réunions du mercredi où l'on a eu le temps de parler de nos pratiques et de mettre à plat certaines de nos méthodes m'ont permis de mieux comprendre ce qui se passe au collège, de remettre en cause ce que je pensais être le bagage avec lequel arrivent les élèves au lycée et ainsi devrait améliorer ma compréhension de la nécessaire liaison troisième/seconde. Je suis toujours ressortie de ces réunions en ayant fait bougé ma réflexion et mes « certitudes » : cela s'est ressenti dans mon travail avec ma classe cette année (discours de transmission des connaissances un peu différent) mais devrait surtout modifier mon travail l'année prochaine : je pense intégrer le test et les différentes séances différenciées de manière plus précise dans ma progression. Enfin, lors du contrôle commun de seconde, le professeur qui a corrigé les copies de mes élèves a remarqué leur volonté de traiter les questions de calcul littéral (« ils calculent davantage que les autres » m'a – t - elle dit, ce qui n'a pas été le cas des autres classes) et avec une certaine réussite dans ce traitement.

Il s'agit donc pour moi d'une expérience intéressante que je souhaite poursuivre et améliorer l'année prochaine avec la classe de seconde qui me sera confiée. J'ai convaincu une de mes collègues de nous rejoindre et comme je l'ai indiqué précédemment, je pense pouvoir utiliser davantage et de façon plus efficace cette différenciation ainsi que toutes les réflexions que nous avons pu avoir sur le calcul littéral, les différences et la liaison collège /lycée et en particulier les modes de vérifications des résultats que nous pouvons proposer aux élèves.

BILAN DE FIN D'ANNEE DE BENOIT

Je cherche depuis quelques années à sortir des « clichés » de l'enseignement des mathématiques. Pour résumer j'avais auparavant la pesante impression de tourner en rond et de fabriquer des automates prêts à appliquer la méthode parfaite dans des exercices formatés qui ne devaient pas trop les surprendre. Avec plus ou moins de succès, il faut bien le dire… Et pour cause : les maths, c'est moi qui les faisait, c'est eux qui les appliquaient… ou pas. Bon, je me caricature un peu quand même mais avec le recul l'image des mathématiques que je renvoyais ne devait pas être très passionnante et ma pédagogie hélas assez vaine, surtout pour les élèves en grande difficulté. La formation continue dans l'académie d'Amiens allant s'appauvrissant et en l'absence d'IREM en Picardie, cette expérience étant donc la bienvenue.

La différenciation

Il s'agissait donc ici d'appréhender l'apprentissage de l'algèbre par un travail de différenciation, chose jusqu'alors un peu floue pour moi. Je « gérais l'hétérogénéité » pendant des séances où je retrouvais mes élèves en demi-classe ou en très petits groupes (5-7 élèves), mais rarement en classe entière et surtout l'objectif de la séance n'était pas le même pour tout le monde. C'est ce qui a été nouveau pour moi cette fois-ci : l'idée d'enseigner la même chose aux élèves en adaptant l'apprentissage me paraît maintenant une évidence qui répond précisément aux impératifs d'apprentissage dont tout élève doit pouvoir bénéficier. Ceci étant, l'institutionnalisation en fin de séance reste pour moi délicate à gérer. Car il s'agit de faire un bilan sans corriger précisément, sinon je m'adresse à eux alternativement, ce qui en fin d'heure n'est pas tout à fait bienvenu.

Dans une logique de cohérence, j'ai ensuite proposé aux élèves deux évaluations distinctes (voir pièces jointes). Chacune des questions testait la même capacité, mais de manière plus ou mois ardue. L'évaluation la plus simple était en revanche bridée à 15/20. Le but étant d'éviter un blocage des élèves faibles devant des expressions trop complexes alors qu'ils avaient peut-être la capacité de valider les compétences testées. N'ayant pas eu des résultats exceptionnels, il me faudra les prochaines fois mieux doser l'équilibre entre les deux. Un bridage à 15/20 semble assez pénalisant pour les uns, et j'ai eu tendance à poser des questions systématiquement plus difficiles aux autres, ce qui a rendu leur tâche un peu trop complexe.

Des objectifs modifiés

Ce travail m'a fait totalement redéfinir les objectifs de ma séquence dédiée au développement des expressions littérales en algèbre en classe de 3^{e} (et en 4^{e} par ricochet). De « savoir développer, savoir calculer une expression pour une valeur donnée » – je fais court – ils ont évolué en « comprendre l'utilité du passage à l'algèbre et l'utilité de savoir transformer les expressions » et un travail sur l'identification de la lettre comme variable. Autrement plus ambitieux, plus intéressant, et surtout plus efficace car à l'arrivée les élèves ont bien mieux négocié ce chapitre que ceux des années précédentes me semble-t-il.

La dynamique des expressions littérales

J'ai beaucoup plus travaillé sur le sens de la lettre dans une formule et sur la perception d'une expression littérale comme un objet mathématique dynamique, c'est-à-dire d'une part pouvant « changer d'apparence » sans changer son résultat, et d'autre part pouvant aboutir à des résultats différents pour un choix différent de la valeur donnée à la variable. Les élèves ont donc été amenés à manipuler, voire à torturer les expressions afin d'en tirer le meilleur, à savoir : les comparer, permettre la résolution de problèmes ou d'équations, … Présentant alors un intérêt manifeste, les élèves leur ont donné plus de sens. En guise d'outils, les programmes de calcul ont pris beaucoup plus de place dans mon enseignement cette fois ci.

La comparaison d'expressions

J'ai dû insister plusieurs fois sur la méthode de comparaison d'expressions (je ne le faisais pas jusqu'à lors, prenant déjà pas mal de temps pour apprendre à bien transformer les expressions correctement). Chez les plus faibles, l'idée qu'elles pouvaient égales pour le choix de 15 valeurs mais différentes pour la 16^{e} avait dû mal à passer. L'un d'eux m'a d'ailleurs donné une très bonne image (à mon avis) pour le faire comprendre : ça n'est pas parce qu'en lançant 5 fois une pièce de monnaie on a obtenu 5 fois pile, que cela sera vrai la 6^{e} fois aussi ! Quand aux meilleurs, certains d'entre eux, dans un souci de rapidité, ne testaient pas les expressions en choisissant des valeurs mais passaient tout de suite à la transformation. Ils n'allaient d'ailleurs en général pas jusqu'au bout lorsqu'ils « voyaient » qu'elles étaient différentes ($2x + 3$ et $2x - 5$ par exemple) et n'effectuaient donc pas un calcul qui permettrait de les distinguer rigoureusement. Difficile de les en blâmer lorsque cette pratique ressemble d'assez près à la mienne…

La vérification

J'ai par ailleurs beaucoup plus insisté sur la vérification des résultats cette fois-ci, sans pour autant l'institutionnaliser formellement. Mais il s'est avéré qu'à chaque fois celle-ci permettait de redonner du sens à la lettre ou à l'expression en tant que telle. Je compte lui donner une place plus grande dans les limites du temps supplémentaire qu'elle nécessite. A l'instar de quelques bons élèves qui m'ont dit : « je n'ai pas besoin de vérifier, je sais que je ne me suis pas trompé ». Et en effet, ils ne s'étaient pas trompés…
Mes dernières évaluations comportaient par ailleurs une question du genre : « explique comment tu as fait pour vérifier ta réponse ». Cette question s'est avérée très pertinente : elle demande à l'élève la mise en œuvre d'une nouvelle connaissance et l'oblige à vérifier. Faut-il y voir un lien ? Pour la première fois de ma longue et riche carrière, et cela concernait une autre question, une élève a fait apparaître sur sa copie un « ? » après avoir mis en évidence deux résultats distincts pour une même question. L'un avait été obtenu par l'application d'une formule à une valeur, l'autre par l'application à cette même valeur du programme de calcul correspondant.

Au final, cette expérience fut très enrichissante. D'abord, parler de l'enseignement des maths dans un cadre de travail en commun, de collaboration, cela ne m'était tout simplement jamais arrivé. Le travail d'équipe est fantomatique dans mon établissement, et on n'était pas ici dans le simple rapport stagiaire-formateur. Et puis j'ai aimé enseigner ce chapitre, contrairement aux années précédentes où je m'y ennuyais terriblement. J'ai découvert une façon pertinente de pratiquer la différenciation, que j'ai appliquée par la suite à ma classe de 4^{e}. Un pan qu'il me reste à développer un peu plus les fois prochaines : les aides, qui permettent aux élèves d'avancer sans attendre la réponse et qui favorisent l'autonomie dans le travail.

Annexe D

Données analysées de la classe de Garance

Cette annexe est un recueil des données analysés de la classe de 3^{e} dont nous avons analysé les expérimentations (cf. chapitre 5). Nous présentons :

1. les feuilles de cours et textes qui constituent la progression en algèbre proposée par Garance,
2. les cahiers de quelques élèves,
3. les productions des élèves sur les parcours d'enseignement différencié.

D.1 Les documents constitutifs de la progression en algèbre

Les textes sont les suivants :

1. Progression en algèbre sur l'année scolaire,
2. Calculs de début de séance relatifs à l'algèbre entre fin septembre et mi-octobre,
3. Objectifs du chapitre « Identités remarquables et développement »,
4. Parcours d'enseignement différencié 1 et 2 (voir annexe 3),
5. Fiche de découverte des identités remarquables,
6. Fiche 1,
7. Fiche 2,
8. Evaluation du 28 novembre,
9. Parcours d'enseignement différencié 3 (voir annexe 3),

10. Evaluation du 6 janvier,
11. Parcours d'enseignement différencié sur le chapitre « Factorisation et équation ».

Progression en algèbre

Note à l'intention du lecteur : Les textes ci-dessous sont ceux fournis par l'enseignante.

A. Calculs de début de séance

B. Calcul littéral – Identités remarquables et développement

Séance 0 : 4/11 ***séance différenciée 1***

- Parcours « Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'équivalence des programmes de calcul dans un problème de généralisation », ex1 partie A et début partie B

Séance 1 : Lundi 14/11 ***séance différenciée 2***

1. Parcours « Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'équivalence des programmes de calcul dans un problème de généralisation »
   a. Mise en commun « comment retrouver les formules » (en utilisant des exemples numériques, en utilisant la distributivité et la réduction, en utilisant les procédures de calculs mises en évidence dans l'aide)
   b. Bilan :
      - Pour montrer que deux expressions sont égales, il faut utiliser les règles de l'algèbre
      - Pour montrer que deux expressions ne sont pas égales, il suffit de le montrer pour un exemple numérique (contre exemple)
   c. Quelles sont les règles de calculs que vous connaissez en algèbre ? (Distributivité simple et double + réduction).
2. Parcours « Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de leur équivalence »
   Objectif : Réinvestir comment démontrer qu'une égalité est vraie + retour sur des erreurs de formation ou transformation d'expressions

Séance 2 : Mardi 15/11

1. Les égalités $3(x+2) = 3x+2$; $(x+1)(2x+5) = 2x^2+5$; $(5a)^2 = 5a^2$ sont-elles vraies ?
   Objectif : Démontrer qu'une égalité est vraie ou fausse + retour sur simple et double distributivité
2. Cours 1. Expression numérique et littérale 2. Distributivité

Séance 3 : Jeudi 16/ 11

1. Calcul début séance : Développer $5(-x+7)$; $(x-1)(-2x+5)$; $(5a)^2$; $3 \times 5x \times 2x$; $2 \times 7x \times 3$
2. Découverte géométrique de l'identité remarquable $(a + b)^2$
   Objectif : A partir d'un cadre géométrique, faire émerger l'identité remarquable $(a+b)^2$
3. Développement des identités remarquables $(a – b)^2$ et $(a+b)(a-b)$
   Objectif : A partir d'un cadre numérique, faire émerger les identités remarquables $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$
4. Cours 3. Identités remarquables

Séance 4: Vendredi 17/11

1. Calcul de début de séance $(x + 7)^2$; $(x-7)^2$; $(x-7)(x+7)$
2. Fiche 1 : Application des identités remarquables

Séance 5 : Vendredi 17/11 ***séance différenciée 3***

1. Parcours « Étudier des expressions équivalentes » et « Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de leur équivalence » (en lien avec les identités remarquables)

Séance 6 : Mardi 22/11

1. Correction fiche 1
2. Développer $(x+7)^2$; $(2x-5)^2$;$(3x+1)(3x-1)$; $(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})$

Séance 7 : Lundi 28/11

1. Evaluation (Distributivité + IR + montrer qu'une égalité est vraie)
2. Cours : 4. Montrer qu'une égalité est vraie pour tout x
3. Fiche 2 ex 1

Séance 8 : Mardi 29/11 ***séance normale filmée***

4. Développer $(4x+7)^2$; $(x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17})$; $(a-5)^2$; $5x(x-8)$; $(1+\sqrt{3})^2$ + correction
5. Fiche 2 ex 3

C. Calculs de début de séance

1. **8/12** : ***Calcul*** Le carré de n'importe que l nombre pair est-il toujours un nombre pair ?
2. **3/01** : ***Calcul*** : Développer $(2x+3)^2$; $(x+7)(x-7)$; $(2\sqrt{3}-5)^2$
3. **5/01 :** ***Calcul*** : Développer $(3\sqrt{5}+1)(3\sqrt{5}-1)$; $(5y-11)^2$; Le carré d'un nombre impair est-il toujours un nombre impair ?
4. **6/01** : ***Calcul*** Un carré de côté (x+5) et un rectangle de longueur (x+10) et de largeur x ont-ils la même aire ? le même périmètre ? + Evaluation
5. **20/01** : ***Calcul :*** Factoriser $3\times x+3\times 5$; $25 + 10x$; $(x+1)(x+2) + (x+1)(3x+1)$; $x + x(x+3)$
6. **21/01** : ***Calcul:*** Factoriser $(2x+1)(5x+3) +(2x+1)(3x-7)$; $5x + 5x(x-7)$; $a^2+2ab+b^2$; a^2-b^2; $(x+5)(3x+7)-(x+5)(9x-1)$

D. Calcul littéral – Factorisation et équation

1. **23/01** : Cours : 1. Factorisation 1) Définition 2) Avec la distributivité 3) Avec les IR
2. **27/01** : ***Calcul*** : Résoudre $3x=15$; $x+5=3$; $\frac{x}{5}=4$; $2x+1=5$: $3x=7$

   Fiche 1 : Factoriser à l'aide des identités remarquables

   Cours : 3) Vérification 2. Equations 1) Définition 2) Technique de résolution
3. **31/01** : Parcours différencié IREM : Développer ou factoriser ?

- **2/02** : ***Calcul :*** Factoriser ou développer $9x^2 +24x+16$; $(2\sqrt{3}+1)^2$; $25x^2-16$; x^2-7 ; $(x-\sqrt{8})^2$

  Résoudre les équations $5x=15$; $5x=3$; $3x+7=11$

Activité : Résoudre les équations $x \times y=0$ et $x \times (x+5)=0$

- **3/02 : *Calcul :*** Résoudre $3x = 7$; $5 + x = -11$; $(x+11)(x+2)=0$; $x^2=25$; $x^2=3$
  Cours : 3) Vérification 4) Equations produit 5) Equations du type $x^2=a$
- **14/02** : ***Calcul*** : Factoriser $16x^2-25$; $(x+1)^2-64$; $(x+1)(2x+3)+(x+1)$; Résoudre $x^2=4$; $(x-1)(x+3)=0$
- **17/02** : 10h ***Calcul*** : Résoudre $x^2=21$; $3x+5=10$; $(x+2)(x-8)=0$;
  13h30 ***Calcul*** : Factoriser ou développer : $(3x-5)^2-49$; $(2x-7)^2-(x+1)^2$; $(2x+5)^2$; $(x+1)(3x-5)$; $(3x+1)(2x-7)-(3x+1)(5x+6)$
- **5/03** : ***Calcul*** : factoriser $(x+7)^2-81$; $(x+3)^2-(2x+1)^2$; $(3x+1)(2x+3)+ (2x+3)$; Résoudre les équations $3x+1=5$; $x^2=15$; $(x+5)(x-7)=0$
- **6/03** : ***Calcul*** : Factoriser $25x^2+20x+4$; $(x+7)^2-64$; $(5x+1)^2-(3x+7)^2$; Résoudre $(x+5)(2x+1)=0$; $5x+7=3$

A. Calculs de début de séance

Calcul mental

Date					
30/09	Réduire $8x \times 3\,x$	Développer $5(x+4)$	Réduire $3\,x + 12$	Réduire $3\,x + 2\,x + 5$	Développer $3(x-1)$
4/10	Développer $5\,(2\,x + 8)$	Réduire $3\,x \times 7\,x^2$	Réduire $3\,x + 1 + 5\,x + 7 + 2\,x^2$	Développer $3x(x+5)$	Développer $(x+1)(x+3)$
6/10	Périmètre d'un rectangle en fonction de x	Réduire $5\,x \times 6y \times 2\,x$	Réduire $1 - 3\,x - 8$	Développer $(3x+1)(x+2)$	Calculer $a^3 \times a^2$
10/10	Développer $5x(x-3)$	Développer $(x+7)(2x-3)$	Réduire $3x+1-7x-6+5x^2$	Réduire $9x \times 5x \times y$	Factoriser $3x+3 \times 2$
13/10	Développer $3x(x-8)$	Développer $(x-3)(2x+1)$	Réduire $7x+1-10x+5-2x^2$	Aire d'un rectangle en fonction de x	Factoriser $20 + 5x$

Chapitre 5 : Calcul Littéral-Développement et identités remarquables Feuille "Objectifs"

Je sais…	*Bilan 1*	*Bilan 2*	*Bilan 3*
SF 1. Calculer une expression littérale pour une valeur numérique donnée			
SF 2. Développer une expression simple du type k(a +b)			
SF 3. Développer une expression du type (a +b)(c+d)			
SF 4. Connaître les trois identités remarquables			
SF 5. Développer les trois identités remarquables			
SF 6. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général			
SF 7. Démontrer qu'une égalité est vraie ou fausse			

O : oui - **M** : moyen - **N** : non

Chapitre 5 : Calcul littéral (1)- Développement et identités remarquables

1. Expression numérique et littérale

1) Expression numérique

$2\times(-5) + 7$ est une **expression numérique**. On peut la calculer : ………………………………………

2) Expression littérale

$5x^2 + 3x + (4x - 2) - (x^2 + 1)$ » est une **expression littérale**.

x est un nombre quelconque. On dit que c'est une **variable**.

3) Calculer la valeur d'une expression littérale

Il faut remplacer la lettre par sa valeur numérique puis effectuer les calculs

Exemple : Calculer l'expression $4x + 5$ pour $x = 3$

………

2. Distributivité

Définition 1: Développer une expression signifie transformer un produit en somme

Définition 2 : Réduire une expression signifie l'écrire avec le moins de terme possible

1) Distributivité simple

Pour tous les nombres a, b, et k : $k\ (a + b) = ka + kb$ et $k\ (a - b) = ka - kb$

Exemple : Développer les expressions suivantes

$3\ (x + 5) =$ ………………………………………………………………

$2x\ (3 + 4x) =$ ………………………………………………………………

$-4\ (-2 + 5x) =$ ………………………………………………………………

$-7x\ (3x - 4) =$ ………………………………………………………………

2) Distributivité double

Pour tous les nombres a, b, c et d , on a : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple : Développer les expressions suivantes

$(5+x)(3+x) =$ ………………………………………………………………

$(3-x)(-2+2x) =$ ………………………………………………………………

$(-5x-7)(-3x+5) =$ ………………………………………………………………

3. Identités remarquables

1) Carré d'une somme

Pour tous nombres a et b : $(a + b)^2 =$ ………………………………………

Exemple: $(x + 3)^2 =$ ………………………………………………………………

$(3x + 4)^2 =$ ………………………………………………………………

2) Carré d'une différence

Pour tous nombres a et b : $(a - b)^2 =$ ………………………………………

Exemple: $(2x - 3)^2 =$ ………………………………………………………………

$99^2 =$ ………………………………………………………………

3) Différence de deux carrés

Pour tous nombres a et b : $(a + b)(a - b) =$ ………………………………………

Exemple: $(2x - 3)(2x + 3) =$ ………………………………………………………………

$101 \times 99 = (100 + 1) \times (100 - 1) =$ ………………………………………

4. Montrer qu'une égalité est vraie ou fausse

Pour montrer qu'une **égalité est fausse** il suffit de le montrer pour une valeur numérique. On dit que c'est un contre exemple

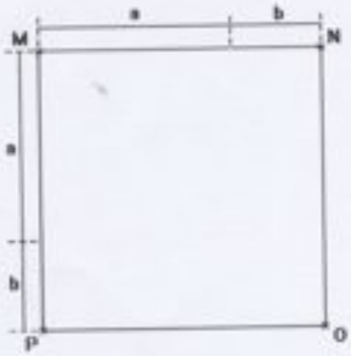
Pour montrer qu'une **égalité est vraie**, il faut utiliser les règles du calcul algébrique comme la distributivité ou les identités remarquables

Exemple : Les égalités $3(x+5) = 3x + 5$ et $(3x)^2 = 9x^2$ sont-elles vraies pour tout x ?

………
………
………
………
………
………

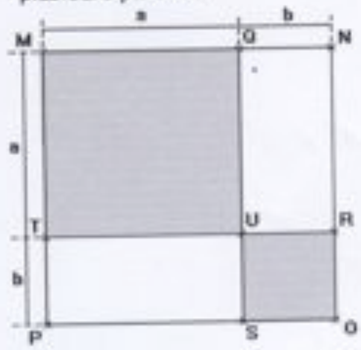
DECOUVERTE IDENTITÉS REMARQUABLES

1) Observer le carré suivant. Quelle est son aire ?



L'aire du carré MNOP est ....

2) On décide maintenant de couper ce carré en plusieurs parties.



L'aire du carré MQUT est : ....

L'aire du carré UROS est : ....

L'aire du rectangle QNUR est : ....

L'aire du rectangle TUSP est : ....

Grâce à ces deux figures, quelle relation algébrique peut-on écrire ? Justifier la formule donnée.

FICHE 1

1) Développer les identités remarquables dans le tableau ci-dessous.

2) Ecrire chaque expression dans la ligne de l'identité remarquable correspondante puis la développer :
$(x+3)^2$; $(y-8)^2$; $(2a+3)^2$; $(x+7)(x-7)$; $(5-3x)^2$; 101×99 ; 101×101 ; 99×99

$(a+b)^2 =$
$(a-b)^2 =$
$(a+b)(a-b) =$

FICHE 2

Exercice 1 :

Programme2

Choisir un nombre.
Ajouter 5 à ce nombre.
Élever au carré le résultat obtenu

Programme 1

Choisir un nombre.
Multiplier ce nombre par 10.
Ajouter 25 et le carré de ce nombre au résultat précédent.

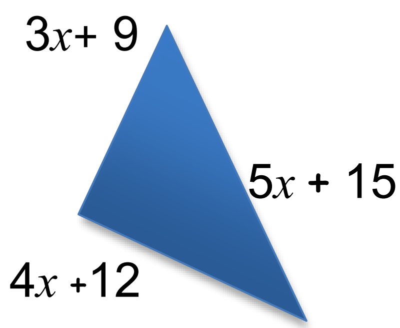
1) Tester ces deux programmes avec les nombres 0, 2, -3, $\frac{2}{3}$

2) Quelle conjecture peut-on faire?

3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 : x est un nombre positif.

Quelle est la nature de ce triangle ?



Exercice 3 : Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. »
L'affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Nom : Prénom :	Note : **Sujet A**

EVALUATION – 28 novembre

Exercice 1 : Développer les expressions suivantes puis réduire

SF 1 : Développer une expression simple du type k(a +b) **O M N**

$A = 3(x + 4) =$……………………………………………………………………………..

$B = 2x\ (5 + 3x) =$…………………………………………………………………..

SF2 : Développer une expression du type (a +b)(c+d) **O M N**

$C = (x + 7)\ (x + 2) =$………………………………………………………………………

$D = (2x + 3)\ (5x + 7) =$……………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

Exercice 2 : Développer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables

SF3 : Connaître les trois identités remarquables **O M N**

$(a+b)^2 =$ ……………………………………………………………………

$(a-b)^2 =$ …………………………………………………………………….

$(a+b)(a-b) =$ ……………………………………………………………......

SF4 : Développer en utilisant les trois identités remarquables **O M N**

$(x + 8)^2 =$ ………………………………………………………………

$(5 – 3x)^2 =$……………………………………………………………......................

$(2 – 4x)\ (2 + 4x) =$…………………………………………………………………..

SF 7. Démontrer qu'une égalité est vraie ou fausse **O M N**

Exercice 3 : Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout a ? Justifier.
Si elles sont fausses, les modifier pour qu'elles soient vraies

Egalité	Vraie/Fausse	Justification	Modification
$a^2 = 2a$			
$(3a + 2)^2 = 9a^2 + 12a + 4$			
$-4(-7+ x) = 28 – 4x$			
$(-x +3)(11 x -5) = 11 x^2 +38 x -2$			

Nom : Prénom :	Note : **Sujet B**

Exercice 1 : Développer les expressions suivantes puis réduire

SF 1 : Développer une expression simple du type k(a +b) O M N

$A = 5(7 + y) =$

……………………………………………………………………………………..

$B = 3x\ (1 + 5x) =$ ……………………………………………………………………..

SF2 : Développer une expression du type (a +b)(c+d) O M N

$C = (x + 5)\ (3 + x)=$……………………………………………………………………

$D = (2x + 7)\ (4 +5x) =$…………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

Exercice 2 : Développer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables

SF3 : Connaître les trois identités remarquables O M N

$(a+b)^2=$ ……………………………………………………………………

$(a-b)^2=$ ……………………………………………………………………..

$(a+b)(a-b) =$ …………………………………………………………......

SF4 : Développer en utilisant les trois identités remarquables O M N

$(a + 6)^2 =$ ………………………………………………………………

$(7 – 2x)^2 =$……………………………………………………….....................

$(1 – 3x)\ (1 + 3x)=$…………………………………………………………………..

SF 7.Démontrer qu'une égalité est vraie ou fausse O M N

Exercice 3 : Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout a ? Justifier.
Si elles sont fausses, les modifier pour qu'elles soient vraies

Egalité	Vraie/Fausse	Justification	Modification
$(2a)^2=4a^2$			
$(5a + 1)^2 = 5a^2 + 10a + 1$			
$-4\ (2x - 11) = -8x + 44$			
$(3x -5)(-1+7x) = 21x^2-32x +5$			

Nom :
Prénom : **Devoir surveillé n°3 - EVALUATION 6 janvier**

Exercice 1 :

PROGRAMME 1	**PROGRAMME 2**
• Choisir un nombre • Ajouter 3 à ce nombre • Elever au carré le résultat obtenu	• Choisir un nombre. • Multiplier ce nombre par 6. • Ajouter 9 et le carré du nombre choisi au départ au résultat précédent.

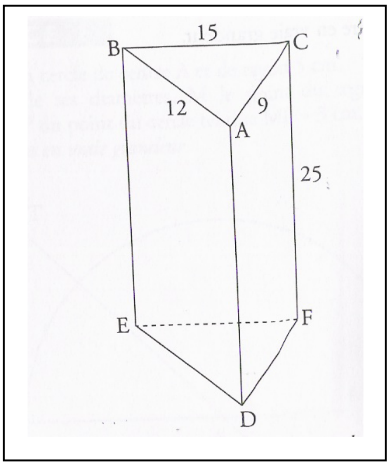
1) Tester les programmes de calcul avec 0 ; 2 ; (-2) et $\sqrt{5}$.
2) Que remarquez-vous ?
3) Est ce vrai lorsqu'on choisit n'importe quel nombre au départ ? Justifier.

Exercice 2 : Développer puis réduire les expressions suivantes

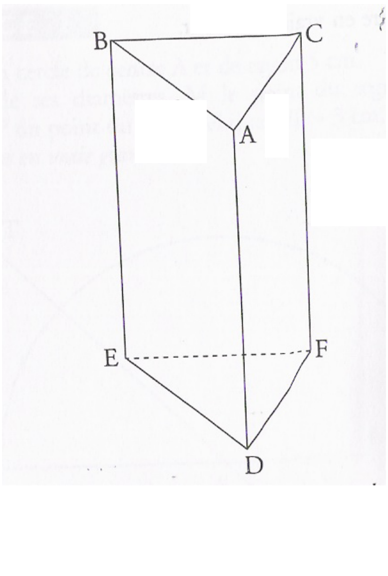
A = $(x+5)^2$ B = $(2y-7)^2$ C = $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$

Exercice 3 :

Un menuisier a fabriqué un objet en bois ayant la forme d'un prisme droit à base triangulaire. Cet objet est représenté par le solide ABCDEF ci-contre tel que AB = 12cm ; AC = 9cm ; BC = 15 cm et CF = 25 cm.



1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A
2) Construire le patron du prisme précédent à l'échelle $\frac{1}{2}$.
3) Montrer que l'aire du triangle ABC est égal à 54 cm².
4) En déduire le volume du prisme droit.
5) Le menuisier souhaite tailler cet objet en le sectionnant par un plan parallèle à la face BCFE et qui passe par le point N.
   a) Représenter la section précédente sur le prisme ci-dessous



   b) Pour faciliter la découpe du bois, le menuisier veut connaître la longueur AN.

PARCOURS Développer ou factoriser ?

Chapitre Factorisation et équation

Exercice 1 :

Expression	L'expression est-elle un produit(P) ou une somme (S) ?
$h(2h+3)$	
$81 - 9a^2$	
$(3p+2)^2$	
$(4t+7)(4t-7)$	
$(3x+2)^2 + (5x+3)(3x+2)$	
$25 - (2y+1)^2$	

1) Remplis le tableau ci-dessus
2) Développe les expressions qui sont des produits
3) Factorise les expressions qui sont des sommes

Aide

Question 1 Pour déterminer si une expression est une somme ou un produit, réécris certaines expressions en faisant apparaître les opérations. Par exemple, $x(x+2)$ peut se réécrire sous la forme : $x \times (x+2)$

Questions 2 et 3 1. Pense à **utiliser les propriétés** suivantes.
Pour tout a, b, c et d :
- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. Tu peux **contrôler tes résultats** en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.

Question 3 Voici une **méthode de factorisation** :

Si A est un produit de facteurs

alors l'expression est déjà factorisée.

Sinon A est une somme de termes

Si le facteur commun est apparent

alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)

transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.

Fin si

Fin si

Fin

Par exemple. $K(x) = x(x+1)+2(x+1)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $2(x+1)$. Le facteur commun $(x+1)$ est pas apparent. Pour factoriser, on utilise la propriété de distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition (propriété 1) : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est écrite sous la forme d'un produit, l'expression est factorisée.

Objectif : Développer ou factoriser ?

Exercice 1 :

Expression	L'expression est-elle un produit(P) ou une somme (S) ?
$h(2h+7)$	
$16x - 4x^2$	
$16- 4x^2$	
$(t+8)(t-8)$	
$f(f+2) + (5f+3)(f+2)$	
$(2e+3)^2 + e(2e+3)$	

1) Remplis le tableau ci-dessus
2) Développe les expressions sui sont des produits
3) Factorise les expressions qui sont des sommes

Aide

Question 1 Pour déterminer si une expression est une somme ou un produit, réécris certaines expressions en faisant apparaître les opérations. Par exemple, $x(x+2)$ peut se réécrire sous la forme : $x \times (x+2)$

Questions 2 et 3 1. Pense à **utiliser les propriétés** suivantes.

Pour tout a, b, c et d :

- la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$
- la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. Tu peux **contrôler tes résultats** en donnant des valeurs aux lettres ou en utilisant une calculatrice graphique.

Question 3 Voici une **méthode de factorisation** :

Si A est un produit de facteurs

alors l'expression est déjà factorisée.

Sinon A est une somme de termes

Si le facteur commun est apparent

alors le mettre en facteur en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Sinon (le facteur commun n'est pas apparent)

transformer un ou plusieurs termes pour faire apparaître un facteur commun ou reconnaître une identité remarquable et factoriser.

Fin si

Fin si

Fin

Par exemple. $K(x) = x(x+1)+2(x+1)$. K est la somme des deux termes $x(x+1)$ et $2(x+1)$. Le facteur commun $(x+1)$ est pas apparent. Pour factoriser, on utilise la propriété de distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition (propriété 1) : $K(x) = (x+1)(x+2)$. K est écrite sous la forme d'un produit, l'expression est factorisée.

D.2 Cahier de quelques élèves

Nous présentons ici les photocopies des cahiers de Valérie et Mélusine pour la partie « Cours » et de Florianne et Divonne pour la partie « Exercices ».

DM n°4

TE | OBSERVATION | SIGNATURE

6,5/10

cice 1

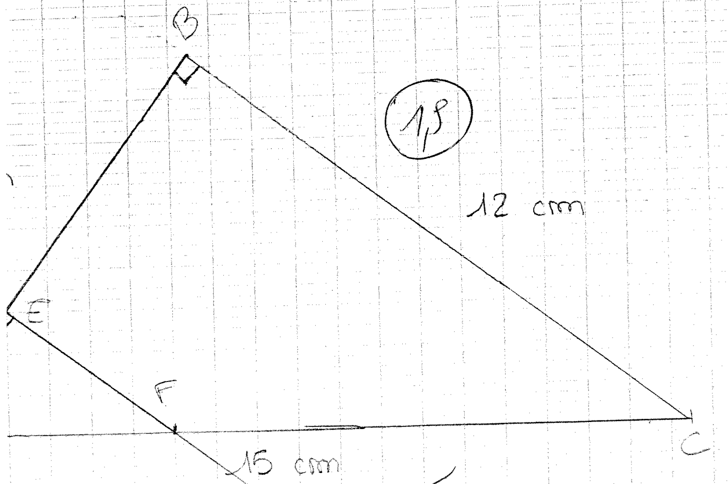
1) • $15^2 = 225$

• $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ 0,5

le triangle est bien rectangle en B.

il faut rédiger

quelle propriété ?



Chapitre 5 : Calcule litéral.

Chapitre 3 : Calcul Littéral-Développement et identités remarquables

Je sais…	*Bilan 1*	*Bilan 2*	*Bilan 3*
SF 1. Calculer une expression littérale pour une valeur numérique donnée	O		
SF 2. Développer une expression simple du type k(a +b)	O		
SF 3. Développer une expression du type (a +b)(c+d)	O		
SF 4. Connaître les trois identités remarquables			
SF 5. Développer les trois identités remarquables			
SF 6. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général			
SF 7. Démontrer qu'une égalité est vraie ou fausse	n		

O : oui - **M** : moyen - **N** : non

Chapitre 5 : Calcul littéral (1)- Développement et identités remarquables

1. Expression numérique et littérale

1) Expression numérique

$2x(-5) + 7$ est une **expression numérique.** On peut la calculer : $-10 + 7 = -3$

2) Expression littérale

$5x^2 + 3x + (4x - 2) - (x^2 + 1)$ » est une **expression littérale.**

x est un nombre quelconque. On dit que x est une indéterminée

3) Calculer la valeur d'une expression littérale

Il faut remplacer la lettre par sa valeur numérique puis effectuer les calculs

Exemple : Calculer l'expression $4x + 5$ pour $x = 3$

$4 \times 3 + 5 = 12 + 5 = 17$

2. Distributivité

Définition 1: Développer une expression signifie transformer un produit en somme

Définition 2 : Réduire une expression signifie l'écrire avec le moins de terme possible

1) Distributivité simple

Pour tous les nombres a, b, et k : k (a + b) = ka + kb et k (a - b) = k a - k b

Exemple : Développer les expressions suivantes

$3(x + 5) = 3 \times x + 3 \times 5 = 3x + 15$

$2x(3 + 4x) = 2x \times 3 + 2x \times 4x = 6x + 8x^2$

$-4(-2 + 5x) = -4 \times (-2) + (-4) \times 5x = 8 - 20x$

$-7x(3x - 4) = -7x \times 3x - (-7) \times 4 = -21x^2 + 28x$

2) Distributivité double

Pour tous les nombres a, b, c et d , on a : (a + b) (c + d) = ac + ad + bc + bd

Exemple : Développer les expressions suivantes

$(5+x)(3+x) = 5\times3 + 5\times x + x\times3 + x\times x = 15 + 5x + 3x + x^2 = 15 + 8x + x^2$

$(3-x)(-2+2x) = (3-x)\times(2+2x) = 3\times(-2) + 3\times2x - x\times(-2)\ x\times2x = 6 + 6x + 2x^2 = 6 + 8x + 2x^2$

$(-5x-7)(-3x+5) =$ ....

3. Identités remarquables

1) Carré d'une somme

Pour tous nombres a et b : $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = \boxed{a^2 + 2\,a\times b + b^2}$

Exemple: $(x+3)^2 = x^2 + 2\times x\times3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2\times3x\times4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$

2) Carré d'une différence

Pour tous nombres a et b : $(a-b)^2 = \boxed{a^2 - 2ab + b^2}$ $(-\times- = +)$

Exemple: $(2x-3)^2 = (2x^2) - 2\times2x\times3 = 4x^2 - 12x + 9$

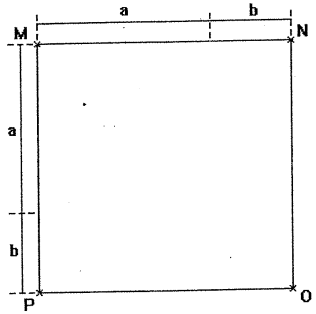
$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 \times 100 + 1^2 + 1^2 = 10000 - 200 + 1$, 9801

3) Différence de deux carrés

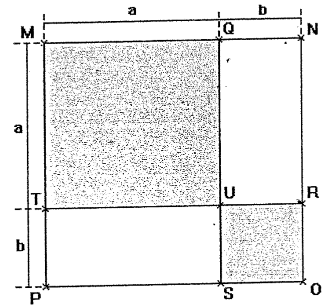
Pour tous nombres a et b : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemple: $(2x-3)(2x+3) = (2x^2) - 3^2 = 4x^2 - 9$

$101\times 99 = (100+1)\times(100-1) = (100+1)\times(100-1) = 100^2 - 1^2 = 9999$



L'aire du carré MNOP est $(a+b)\times(a+b)$.



L'aire du carré MQUT est : $a\times a$

L'aire du carré UROS est : $b\times b$

L'aire du rectangle QNUR est : $b\times a$

L'aire du rectangle TUSP est : $a\times b$

Grâce à ces deux figures, quelle relation algébrique peut-on écrire ? Justifier la formule donnée.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ba + ab = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = (a-b)\times(a-b) = a\times a + a\times(-b) - b\times a - b\times -(b) =$

$a^2 - ab - ab + b^2 =$

$a^2 - 2ab + b^2$.

$(a+b)(a-b) = a\times a + a\times(-b) + b\times a + b\times(-b)$

$a^2 - ab + ba - b^2 =$

$a^2 - b^2$

…velopper les identités remarquables dans le tableau ci-dessous.
…rire chaque expression dans la ligne de l'identité remarquable correspondante puis la développer :
…)² ; $(y-8)^2$; ~~$(2a+3)^2$~~ ; ~~$(x+7)$~~$(x-7)$; $(5-3x)^2$; ~~101×99~~ ; ~~101×101~~ ; 99×99

…b)² = $=(a+b)(a+b)$
$x^2+2\times x\times 3+3^2=x^2+6x+9$ $2a^2+2\times 2\times 3\times a+3^2=4a^2+12a+9$
…² = =
$y^2-2\times y\times 8+8^2=y^2-16y+64$ $5^2-2\times 5\times 3\times x+3x^2=25-30x+9x^2$
(a-b) = =

Doris & Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan
Rayan

Mardi 22 Nove

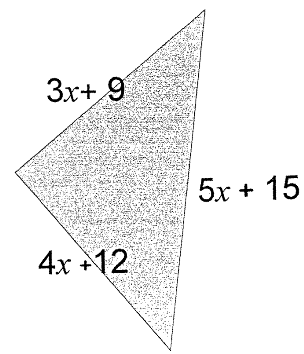
$(x+7)^2=x^2+2\times x\times 7+7^2=x^2+14x+49$
$(2x-5)^2=2x^2-2\times 2x5+5^2=4x^2-10x+25$
$(3x+1)(3x-1)=3x^2-1^2$
$(y+\sqrt{8})(y-\sqrt{8})=y^2-\sqrt{8}^2=y^2-8$

Exercice 1 :

Programme2	Programme 1
Choisir un nombre. Ajouter 5 à ce nombre. Élever au carré le résultat obtenu	Choisir un nombre. Multiplier ce nombre par 10. Ajouter 25 et le carré de ce nombre résultat précédent.

1) Tester ces deux programmes avec les nombres 0, 2, -3, $\frac{2}{3}$
2) Quelle conjecture peut-on faire?
3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 : x est un nombre positif.
Quelle est la nature de ce triangle ?



Exercice 3 : Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. »
L'affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Prénom...

$15+5=20 \qquad 20^2 = \ldots$

Programme 1

$10 \times 10 = 100 + 25 = 125 + 400\ (20^2) = 525.$

9.11.11.

$10 \rightarrow 18 \times 3 \rightarrow 54 \rightarrow 50 \rightarrow 60 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 7$

$60 \rightarrow 68 \times 3 \rightarrow 204 \rightarrow 200 \rightarrow 260 \div 4 \rightarrow 65 \rightarrow 67 \rightarrow 7.$

$$\begin{aligned}[(x+8)\times 3 - 4 + x] \div 4 + 2 - x &= [3x + 8\times 3 - 4 + x] \div 4 + 2 - x \\ &= [3x + 24 - 4 + x] \div 4 + 2 - x \\ &= [4x+20] \div 4 + 2 - 2 \\ &= \cancel{x} + 5 + 2 - \cancel{x} \\ &= 7\end{aligned}$$

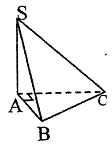
Donc pour tout x on obtient 7

Chapitre 6 : Espace

Fiche 1 : Patrons de solides

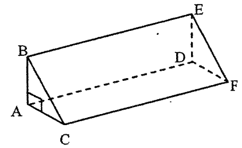
Exercice 1

Construire un patron de la pyramide SABC, en grandeur réelle. Sa base est le triangle ABC rectangle en A. Sa hauteur est SA. AB = 5 cm ; AC = 3 cm ; SA = 4 cm.



Exercice 2

Construire un patron de ABCDEF à l'échelle 1. ABC est un triangle rectangle en A : AC = 2 cm ; BC = 3 cm ; La hauteur DA = 4 cm. Quelle est la nature de ce solide ? Calculer son volume.



Exercice 3

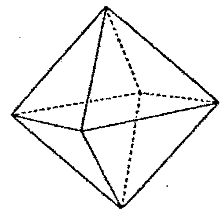
Construire un patron à l'échelle ½ d'un cylindre de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 15 cm. Calculer son aire latérale à 1 cm^2 prés.

Exercice 4

Construire un patron d'un cône de révolution de rayon à la base 2 cm et de hauteur 5 cm.

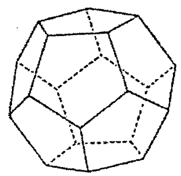
Exercice 5 : Faire un patron des polyèdres suivants

1) Octaèdre :



Chaque face est un triangle équilatéral de côté 4 cm

2) Dodécaèdre :



Vrai ?

$3(x+2) = 3x+2$: Faux

$(x+1)(2x+5) = 2x^2+5$: Faux

$(5x)^2 = 25x^2$: Vrai

$3(1+2) = 3\times3 = 9$

$3\times1+2 = 5$ Faux

$(1+1)(2\times1+5) = 14$

$2\times1^2+5 = 9$ Faux

$5\times1^2 = 25$

$25\times1^2 = 25$

Explication.

Distributivité.

$3(1+2) = 3\times1+3\times2 = 9$

11.11

Développer : $3(x+2) = 3\times x+3\times2$ ✓

// : $(x+1)(2x-5) = x\times2x+x\times$

$5\times1\times2x-1x$

$5.$ ✓

Réduire : $3x\times5x = 15x$ ✓

$(6x)^2 = 36x^2$ ✓

11.11

~~$(4x+7)(\sqrt{2}x+4x\times7+(7))$~~

~~$(\sqrt{17})\times(x-\sqrt{17}) = x^2-\sqrt{17}^2$~~

~~$(a+5)^2 = a^2+8a\times5+5^2$~~

~~$(1+\sqrt{5})^2 = 1^2+\sqrt{5}^2+\sqrt{5}$~~

Calcul	Résultat		Explication.
$(-9)^2$	81	✓	$(-9)\times(-9) = +81$
$\sqrt{121}$	11	✓	$11\times11 = 121$
$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$	5	✓	
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	✓	$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
$7^5\times7^3$	7^8	✓	
$\sqrt{(-7)^2}$	7	✓	$-\times-=+$ Racine jamais -
$\sqrt{0{,}64}$	0,8	✓	✓
$\sqrt{3600}$	600	✗	60
$\sqrt{72}\times\sqrt{2}$	14	✗	$12 = 12\times12 = 144 =$
$2\sqrt{5}\times3\sqrt{5}$	/	✗	$2\times3=6$; $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$;
volume (2cm)	36	✗	$3\times3\times3 = 27\ cm^3$
Aire (2cm)			$\pi\,2^2 = 4\pi$ (valeur exacte) 4×3 Aire disque $\pi\times R^2$ / Périmè
$\sqrt{14}\times\sqrt{14}$	14		✓
$\sqrt{169}$	13		✓
$\sqrt{10^{12}}$	10^6		✓ Il fo diviz par 2.

+1) $(3\sqrt{3}-1)^2 - 1^2$

$3\times3\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 9\times\sqrt{5} = 9\times5 = 45$

$5y^2 - 2\times5y - 11 + 11^2$

$\times3\times3 = 27$ cm

$\times2\times1 = 10$ cm

~~3×5~~

$\times R \times \pi \div 3$

$4\times\cancel{3}\times3\times5 = 47{,}1$ cm³

1) $(x+5)\times4$

+10)

2m = nombre paire

2m+1 = nombre impaire

$(x+5) =$

$(2m+1)^2 = (2m)^2 + 2\times2m\times1+1^2$

$= 4m^2+4m+1$

$= 2\times2m^2+2\times2m$

$= 2\times(2n^2+2n)+1$

$5^2 =$

$\times x$

$x\times10 = x^2+10x$

Calcule	Resultat	Explication
$(4x+7)^2$	$(4x)^2+2\times4x\times7+7^2$	✓
$(x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17})$	$x^2-\sqrt{17}^2$	✓
$(a-5)^2$	$a^2+2\times a\times5-5^2$	✓
$(1+\sqrt{3})^2$	$1^2+2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2$	✓
$5x(8x)$	$5x\times x - 5x\times8$	✓

$2^2 = 4$, $8^2 = 64$

. $(2x)^2 = 4x^2 = 2\times2\times x^2$

$\neq$

. $2x+1$ = impaire

develloppe $(2x+3)^2$

[redacted]

$2^2x\ 2\times2x\times3\times3^2$

$(x-7)(x+7)$

x^2-7^2

$(2\sqrt{3}-5)^2$

$2\sqrt{3}^2 - 2\times2\sqrt{3}\times5+5^2$

$4\times4\times\pi(3,14)\times5$

1) $4\times4\times5 = 40$

π

2) Air de base × h

$\frac{1}{3}\times2\times2\times\pi\times3$

4. Montrer qu'une égalité est vraie ou

- Pour montrer qu'une égalité est fausse de le montrer pour une valeur num dit que c'est un contre-exemple.
- Pour montrer qu'une égalité est v les valeurs, il faut utiliser les règles algébriques (distributivité et identités Exemple : $3(x+5) = 3x+3\times5$ est-elle valeur de x ?

Pour $x=1$: • $3x(1+5) = 3\times6 = 18$
• $3\times1+5 = 3+5 = 8$

$(3x)^2 = 9x^2$ est-elle vraie pour tout x.
$(3x)^2 = 3x\times3x = 3\times3\times x\times x = 9x^2$
L'égalité est vraie pour tout x.

Chapitre 5 : Calcul littéral (1)- Développement et identités remarquables

1. Expression numérique et littérale

1) Expression numérique

$2x(-5) + 7$ est une **expression numérique**. On peut la calculer : $-10+7 = -3$

2) Expression littérale

$5x^2 + 3x + (4x - 2) - (x^2 + 1)$ » est une **expression littérale**.
x est un nombre quelconque. On dit que x est une indéterminée.

3) Calculer la valeur d'une expression littérale

Il faut remplacer la lettre par sa valeur numérique puis effectuer les calculs

Exemple : Calculer l'expression $4x + 5$ pour $x = 3$

$4\times3+5 = 12+5 = 17$

2. Distributivité

Définition 1: Développer une expression signifie transformer un produit en somme

Définition 2 : Réduire une expression signifie l'écrire avec le moins de terme possible

1) Distributivité simple

Pour tous les nombres a, b, et k : $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$

Exemple : Développer les expressions suivantes

$3(x+5) = 3\times x + 3\times5 = 3x+15$

$2x(3+4x) = 2x\times3 + 2x\times4x = 6x + 8x^2$

$-4(-2+5x) = -4\times(-2) + (-4)\times5x = 8 \quad 20x$

$-7x(3x-4) = -7x\times3x - (-7x)\times(-4) = -21x^2 - 28x$

2) Distributivité double

Pour tous les nombres a, b, c et d, on a : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple : Développer les expressions suivantes

$(5+x)(3+x) = 5\times3 + 5\times x + x\times3 + x\times x = 15+5x+3x+x^2 = x^2+9x+$

$(3-x)(-2+2x) = 3\times(-2) + 3\times2x - x\times(-2) + x\times2x = -6+6x+2x-2x^2 = -2x^2+$

$(-5x-7)(-3x+5) = -5x(-3) + (-5)\times5 + 7\times(-3x) - 7\times5 = 15x^2 - 25x + 21x - 35 = 15x^2 -$

3. Identités remarquables

1) Carré d'une somme

Pour tous nombres a et b : $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = a^2+2ab+b^2$

Exemple: $(x+3)^2 = x^2 + 2x\times3 + 3^2 = x^2+6x+9$

$(3x+4)^2 = 3x^2 + 2\times3x\times4 + 4^2 = 9x^2+24x+16$

2) Carré d'une différence

Pour tous nombres a et b : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemple: $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\times2x\times3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\times100\times1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

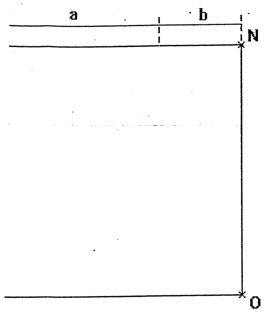
3) Différence de deux carrés

Pour tous nombres a et b : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemple: $(2x-3)(2x+3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

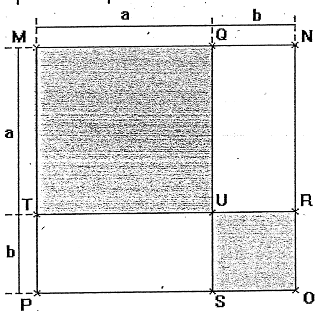
$101\times99 = (100+1)\times(100-1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

e carré suivant. Quelle est son aire ?



arré MNOP est ...$(a+b)^2$.....

2) On décide maintenant de couper ce carré en plusieurs parties.



L'aire du carré MQUT est : ....a^2....................

L'aire du carré UROS est : ...b^2....................

L'aire du rectangle QNUR est : ..ab..........

L'aire du rectangle TUSP est : ..ab..........

eux figures, quelle relation algébrique peut-on écrire ? Justifier la formule donnée.

$a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$.

$^2 = (a-b) \times (a-b) = a \times a + a \times (-b) - b \times a - b \times (-b)$
$= a^2 - ab - ab + b^2$
$= a^2 - 2ab + b^2$

$a-b) = a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b)$
$= a^2 - ab + ab + \cancel{ab}^2$
$= a^2 - b^2$

$(x+3)^2$; $(y-8)^2$; $(2a+3)^2$; $(x+7)(x-7)$; $(5-3x)^2$; 101×99 ; 101×101 ; 99×99

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
• $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ $= x^2 + 6x + 9$ • $(2a+3)^2 = (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3 + 3^2$ $= (2a)^2 + 12a + 9$ • $(100+1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$ $= 10000 + 200 + 1$ $= 10201$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
• $(y-8)^2 = y^2 - 2 \times y \times 8 + 8^2$ $= y^2 - 16y + 64$ • $(5-3x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3x + (3x)^2$ $= 25 - 30x + 9x^2$ • $(100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$ $= 10000 - 200 + 1$ $= 9801$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
• $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2$ $= x^2 - 49$ • $(100+1)(100-1) = 100^2 - 1^2$ $= 10000 - 1$ $= 9999$

Exercice n°35 page 42 :

a) $(x-2)^2 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2$
$= x^2 - 4x + 4$

b) $(a+5)^2 = a^2 + 2 \times a \times 5 + 5^2$
$= a^2 + 10a + 25$

c) $(7+a)^2 = 7^2 + 2 \times a \times 7 + a^2$
$= 49 + 14a + a^2$

d) $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5$
$= (3x)^2 + 30x + 25$

e) $(6+5a)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times (5a) + (5a)^2$
$= 36 + 60a + 25a^2$

f) $(\frac{1}{2}x + 3)^2 = 0{,}5x^2$

NOM : XiA PRENOM : Milina 04/11/2011 Groupe B- Page : 1/4

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.

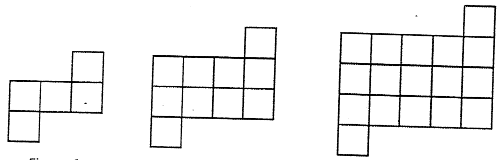


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

Le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 est de 26.

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

$32 \times 30 = 960$, $960 + 2 = 962$

Le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 est de 962.

3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

Le nombre de carré sur les lignes horizontales c'est le taille de la figure plus 2. Le nombre de carré sur les ligne verticales c'est la taille de la figure. Il faut additionner le tout plus 2 et on obtient le nombre de carré de la figure. Figure $n = (N+2) \times (N) + 2$

artie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

mande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

$(x+7)^2 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2$
$= x^2 + 14x + 49$

$(2x-5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x$
$= 4x^2 + 20x + 2$

$(3x+1)(3x-1) = (3x)^2 - 1^2$
$= 9x^2 - 1$

$(y+\sqrt{8})(y-\sqrt{8}) = y^2 - \sqrt{8}$
$= y^2 - 8$

Exercice 1.

1) $0+5 = 5^2$ $2+5 = 7^2$ $-3+5 = 2^2$ $\frac{2}{3} + 5 =$

$0 \times 10 + 25 = 25$ $2 \times 10 + 25 = 45$ $-3 \times 10 + 25 = -5$
$= 250$
$= 30$

$(x+10)^2 = x^2 + 2 \times x \times 10 + 10^2$
$= x^2 + 20x + 100$

$(3x-7)^2 = (3x)^2 - 2 \times 2x$
$= 9x^2 - 28x +$

$(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2$
$= 4x^2 - 9$

$(x+\sqrt{11})(x-\sqrt{11}) = x^2 -$
$= x^2 -$

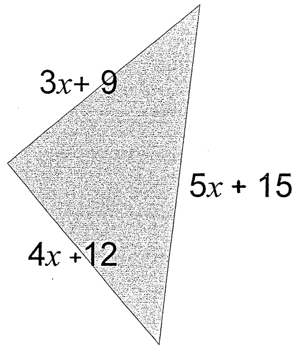
Exercice 1 :

Programme2	Programme 1
Choisir un nombre. Ajouter 5 à ce nombre. Élever au carré le résultat obtenu	Choisir un nombre. Multiplier ce nombre par 10. Ajouter 25 et le carré de ce nombre au résultat précédent.

1) Tester ces deux programmes avec les nombres 0, 2, -3, $\frac{2}{3}$
2) Quelle conjecture peut-on faire?
3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 : x est un nombre positif.

Quelle est la nature de ce triangle ?



Exercice 3 : Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. »
L'affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

$8+8=16\times3=48-4=44+8=52:4=13+2=15-8=7$

$((x+8)\times3-4+x):4+2-x=(3x+8\times3-4+x):4+2-x$
$=(3x+24-4+x):4+2-x$
$=(4x+20):4+2-x$
$=x+5+2-x$
$=7$

Prénom : Milina (10/10) Su

Exercice 1 : Développer les expressions suivantes puis réduire

SF 1 : Développer une expression simple du type k(a +b) O M N

$A = 3(x+4) = 3\times x+3\times4 = 3x+12$ (1)

$B = 2x(5+3x) = 2x\times5+2x\times3x = 10x+6x^2$

SF2 : Développer une expression du type (a +b)(c+d) O M N

$C = (x+7)(x+2) = x\times x+x\times2+7\times x+7\times2 = x^2+2x+7$

$D = (2x+3)(5x+7) = 2x\times5x+2x\times7+3\times5x+3\times7 = 10x^2\ldots$
$21 = 10x^2+29x+21$ (2)

Exercice 2 : Développer les expressions suivantes en utilisant les identités r

SF3 : Connaître les trois identités remarquables O M

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ (3)

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

SF4 : Développer en utilisant les trois identités remarquables O M

$(x+8)^2 = x^2+2\times x\times8+8^2 = x^2+16x+64$ (1)

$(5-3x)^2 = 5^2-2\times5\times3x+(3x)^2 = 25-30x+9x^2$ (1,5)

$(2-4x)(2+4x) = 2^2-(4x)^2 = 4-16x^2$ (1,5)

SF 7. Démontrer qu'une égalité est vraie ou fausse O M N

Exercice 3 : Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout a ? Justifier.
Si elles sont fausses, les modifier pour qu'elles soient vraies

Egalité	Vraie/Fausse	Justification	Mod
$a^2 = 2a$	F	$a=3$ $3^2=9$ $2\times3=6$	a^2
$(3a+2)^2 = 9a^2+12a+4$	V	$(3a+2)^2=(3a)^2+2\times3a\times2+2^2$ $=9a^2+12a+4$	
$-4(-7+x) = 28-4x$	V	$-4(-7+x)=-4\times(-7)+(-4)\times x$ $=28-4x$	
$(-x+3)(11x-5) = 11x^2+38x-2$	F	$a=3$ $(-3+3)(11\times3-5)=-3\times11+15+3\times11+3\times(-5)=-33+15+33+(-15)$ $=0$ $11\times3^2+38\times3-2=99+114-2$ $=211$	$(-x+3$

1

Flore 3TC

$\pi = 3,14$.

Calcul	Résultat	Explication
Developper $3(x+2)$	$3\times x+3\times 2 = 3x+6$	
Developper $(x+1)(2x-5)$	$x\times 2x + x\times(-5) + 1\times 2x + 1\times(-5) = 2x^2 + (-5x) + 2x + (-5)$	
Reduire $5x \times 3x$	$15x^2$	
Calculer $(6x)^2$	$36x^2$	$6x\times 6x = 6\times 6\times x\times x = 36x^2$
$(4x+7)^2$	$(4x)^2 + 2\times 4x\times 7 + 7^2 = 16x^2 + 56x + 49$	
$(x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17})$	$x^2 - \sqrt{17}^2 = x^2 - 17$	
$(a-5)^2$	$a^2 - 2\times a\times 5 - 5^2 = a^2 - 10a + 25$	
$5x(x-8)$	$5x\times x - 5x\times 8 = 5x^2 - 40x$	
$(1+\sqrt{3})^2$	$1^2 + \sqrt{3}^2 + 2\times 1\times\sqrt{3} = 1+3+2\times\sqrt{3} = 4+2\times\sqrt{3}$	
Volume de 4 5	$4\times 4\times 3,14\times 5$	
volume de 3 2		
$(2x+3)^2$	$(2x)^2 + 2\times 2x\times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$	
$(x-7)(x+7)$	$x^2 - 7^2$	
$(2\sqrt{3} - 5)^2$ a b	$(2\sqrt{3})^2 - 2\times(2\sqrt{3})\times 5 + 5^2 =$ $(2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3} = 2\times 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 4\times 3 = 12$ $12 - 120\times 25$. $12 - 20\times\sqrt{3} + 25 = 37 - 20\times\sqrt{3}$	

Calcul	Résultat	Explication
$(-9)^2$	$+81$	$(-9)\times(-9) = +81$
$\sqrt{121}$	11	$11\times 11 = 121$
$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$	5	
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{1\times 3}{2\times 3} + \frac{1\times 2}{3\times 2} = \frac{3}{6}+\frac{2}{6} = \frac{5}{6}$	$\frac{3}{6}+\frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$7^3\times 7^5$	$7^5\times 7^3 = 7^8$	$7^{3+5} = 7^8$
$\sqrt{(-7)^2}$		une racine est toujours positif
$\sqrt{0,64}$	$0,8$	Car $8\times 8 = 64$
$\sqrt{36x^2}$		
$\sqrt{72}\times\sqrt{2}$	12	
$2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}$		
Volume cube 3 cm		
Aire 2cm		
$\sqrt{14}\times\sqrt{14}$	14	
$\sqrt{169}$	13	
$\sqrt{10^{12}}$	10^6	
$3(x+2) = 3x+2$	Faux $3\times x+3\times 2 = 3x+6$	
$(x+1)(2x+5) = 2x^2+5$	Faux	
$(5x)^2 = 25x^2$	Vrai	

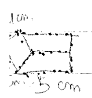
<3...

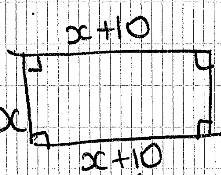
Flore 3TC

2

Calcul	Résultat	Explication
Le carré d'un nombre impaire est-il toujours un nombre impair?	$7^2=49$; $3^2=9$; $11^2=121$; $9^2=361$; oui $(2n+1)^2=(2n)^2+2\times 2n\times 1+1^2=4n^2+4n+1$ $2\times 2n^2+2\times 2n+1$ $2\times(2n^2+2n)+1$.	2n = nombre pair 2n+1 = nombre impaire.
Factoriser $3\times x+3\times 5$ $25+10x$ $(x+1)\times(x+2)+(x+1)(2x+1)$ $x(x+3)+x$ Simplifier $\sqrt{72}$ puis $\sqrt{128}$	$3(x+5)$ $5\times 5+5\times 2x=5(5+2x)$ $(x+1)(x+2+2x+1)=(x+1)(x+3+3x)$ $x(x+3+1)=x(x+4)$ $\sqrt{8\times 9}=\sqrt{8}\times\sqrt{9}=3\sqrt{8}$ $\sqrt{64\times 2}=\sqrt{64}\times\sqrt{2}$ $8\sqrt{2}$	

Le carré d'un nombre pair est-il toujours un nombre pair?
Oui $2^2=4$; $8^2=64$; $12^2=144$.
$(2\times x)^2=4x^2=2\times 2x^2$
$2x+1$ = nombre impair.



Calcul	Résultat	Explication
$(3\sqrt{5}-1)(3\sqrt{5}+1)$	$(3\sqrt{5})^2-1^2=45-1=44$.	
$(5y-11)^2$	$(5y)^2-2\times 5y\times 11+11^2=25y^2-110y+121$.	
Volume du cube 3cm	$3cm\times 3cm\times 3cm=27\ cm^3$	
Volume du rectangle	$10cm^3=1cm\times 2cm\times 5cm$.	
Volume 5 cm 3 cm	$\frac{1}{3}\times 3\times 3\times 3{,}14\times 5\div 3$	
1) Un carré de côté (x+5) a-t-il le même périmètre qu'un rectangle de longueur (x+10) et de largeur x?	x+5 x+5 x+5 x+5 $(x+5)\times 4$.	$4\times 5+x\times 4=20+4x$ $2x+20+2x=4x+20$
Un carré de côté (x+5) a-t-il le même aire qu'un Rectangle de longueur (x+10) et de largeur x?	 x+10 x x x+10 $x\times 2+(x+10)\times 2$	Aire: $(x+5)(x+5)=(x+5)^2$ $(x+10)\times x$ pour 1 : $(1+5)^2=6^2=36$ $(1+10)\times 1=11\times 1=11$ Il n'ont pas le même aire.

Flore
3TC (3)

Calcul	Résultat	Explication
Factoriser $(2x+1)\times(3x+2)+(2x+1)\times 1$	$(2x+1)\times(3x+2+1)$	$=(2x+1)\times(3x+3)$
$(x-2)^2+(x-2)\times(5x+7)$	$(x-2)\times(x-2)+(x-2)\times(5x-7)$	$=(x-2)\times(x-2+5x-7)=(x-2)\times(6x-9)$
$49x^2-64$	$(7x)^2-8^2=(7x+8)(7x-8)$	
$16x^2-40x+25$	$(4x)^2-2\times4x\times5+5^2=(4x-5)^2$	
$81x^2+18x+1$	$(9x)^2+2\times9x\times1+1^2=(9x+1)^2$	
Resoudre les equation.		
$3x=13$	$3x-3=13-3=x=10$	
$x\times(x+1)=0$	$x=0$ ou $x=-1$	
$3x+5=11x-7$	$3x+5-5=11x-7-5$ / $3x$	$=11x-12$ / $3x-11x=11x-2-11x$; $-8x=-12/1=1,5$
$(x+2)\times(x-3)=0$		
Factoriser $16x^2-25$	$(4x)^2-5^2=(4x-5)(4x+5$ [redacted]	[redacted]
$(x-1)^2-81$	$(x-1)^2-9^2=(x-1-9)(x-1+9)$	$=(x-10)(x+10)$
$16x^2+8x+1$	$(4x)^2+2\times4x\times1+1^2=(4x+1)^2$	
Resoudre		
$3x+1=5x-7$	$3x+1-1=5x-7-1$ / $3x=5x-6$	/ $3x-5x=5x-6-5x=-2x=-6$
$(x-1)\times(x+3)=0$	$x=1$ ou $x=-3$.	
$x^2=25$	$x=5^2$	
	$3x+1-3x=5x+7-3x$ / $1=2x-7$	/ $1+7=2x+7-7$ / $8=2x$ / $x=4$

Calcul	Résultat	Explication
Factoriser $(2x+1)(x+5)+(x-7)(2x+1)$	$(2x+1)\times(x+5+x-7)=$ $(2x+1)\times(2x+(-2)+-7)$	
$a^2+2\times a\times b+b^2=$	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$	
a^2-b^2	$(a-b)(a+b)$	
$5x+5x(x-7)$	$5x(5x+x-7)=$	
$(5x+1)\times(3x-7)+(5x+1)(4x+1)$	$(5x+1)(3x-7+4x+1)$ $=(5x+1)((-6)+7x)$	
Factoriser $9x^2+24x+16$	$(3x)^2+2\times3x\times4+4^2=(3x+4)^2$	
$25x^2-16$	$(5x)^2-4^2=(5x+4)(5x-4)$	
Resoudre les equations suivants		
$5x=3$	$0,6$	
$3x+7=11$	$3x+7-7=11-7=3x=4:3$ / $3x:3=4:3$	$x=4$
$5x+1=8x+3$	$5x+1-1=8x+3-1=5x$	$=8x+2=5x-8x=8x+2-8x=-3x=2$; $x=\frac{2}{3}$
$x\times y=0$	$x=0\times2=0$	
$\frac{x}{8}=6$	$x\ 6\times8=48$	

Flore
3TC (4)

Flore
Mankanda
3TC

Interro de maths.

09/03/12

4/6

Factoriser:

$49x^2+42x+9=(7x)^2+2\times 7x\times 3+\cancel{3^2}\ 3^2$
$=(7x+3)^2$ (1)

$(2x+1)^2-36=(2x+1)^2-6^2$
$=(2x+1+6)\times(2x+1-6)$
$=(2x+7)(2x\cancel{+}-5)$ (1)

$(5x-7)^2-(3x-1)^2=(5x+7+3x+1)$
$-(5x-7+3x-1)$ (0,5)

Résoudre:

$(2x+7)\times(x+5)=0=$
$(x+5)=x=-5$ / $(2x+7)=0$ (0,5)

$\cancel{2}\,x^2=7=\quad x=\sqrt{7}$ ou $-\sqrt{7}$

$3x+8=2$ | $3x+8-8=2-8$
$3x=-6$
$3x\div 3=-6\div 3$
$x=-2$ (1)

Calcul	Resultat	Explication
Factoriser		
$(x+1)^2-81$	$(x+1)^2-9^2=(x+1-9)(x+1+9)=(x-8)(x+10)$	
$(x+3)^2-(2x+1)^2$	$\cancel{3(x+3-2x+1)}$ $(x+3+2x+1)\times(x+3-2x-1)=(3x+4)(-1x+2)$	
$(x+1)\times(x+3)+(x+1)$	$(x+1)\times(x+3+1)=(x+1)\times(x+4)$	
Resoudre		
$3x+1=5$	$3x+1-1=5-1$ / $3x=4$ / $3x\div 3=4\div 3$ / $x\approx 1{,}33$ $\frac{4}{3}$	
$(x+1)\times(x+7)=0$	$x=-1$ ou $x=-7$	
Factoriser		
$25x^2+40x+4$	$(5x)^2+2\times 5x\times 2+2^2=(5x+2)^2$	
$(x+7)^2-64$	$(x+7)^2-8=(x+7+8)(x+7-8)=(x+15)(x-1)$	
$(5x+1)^2-(3x+7)^2$	$(5x+1+3x+7)\times(5x+1-3x+7)$	
Resoudre		
$5x+7=3$	$5x+7-7=3-7$ / $5x=-4$ / $5x\div 5=-4\div 5$ / $-\frac{4}{5}$	
$(x+4)\times(2x+1)=0$	$x=-4$ ou $x=-0{,}5$	

Flore
3TC 5

Calcul	Resultat	Explication :
Le carré d'1 nombre est-il toujours supérieur à ce nombre ?	Faux car $(0,5)^2 = 0,25$. Ceci est un contre exemple.	

Diana
3TC
1

Les égalités sont-elles vraies ?

$3(x+2) = 3x+2$ Faux ex : $3\times 0 + 3\times 2 = 0+6=6$

$(x+1)(2x+5) = 2x^2+5$ Faux ex : $0\times 2x + 0\times 5 + 1\times 2x + 1\times 5 =$

$(5x)^2 = 25x^2$ Vrai ~~ex~~ car $5\times 5 = 25$

$(4x+7)^2 = (4x)^2 + 2\times 4x\times 7 + 7^2 = 16x^2 + 15^2 + \cancel{49}$ 49

$(x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17}) = x^2 - (\sqrt{17})^2 = x^2 - 17$

$(a-5)^2 = a^2 - 2\times a\times 5 + 5^2$

$= a^2 + 10a + 25$

$5x(x-8) = 5x\times x + 5x - 8$

$= 5x^2 + -3x$

$(1+\sqrt{3})^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 + 2\times 1\times \sqrt{3}$

$= 1+3+2\times\sqrt{3}$

$= 4+2\times\sqrt{3}$

	Calcul	Résultat	Explication
	$(-9)^2$	81	$(-9)\times(-9) = +81$
	$\sqrt{121}$	11	$11\times 11 = 121$
	$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$	5	
	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
	$7^3\times 7^5$	7^8	$7^{3+5}=7^8$
	$\sqrt{(-7)^2}$	7	une racine est tjrs p
	$\sqrt{0,64}$	0,08	car $8\times 8 = 64$
	$\sqrt{3600}$	60	
	$\sqrt{72}\times\sqrt{2}$	12	$\sqrt{2\times 72} = \sqrt{144} = 12$
	$2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}$	$6\times 5 = 30$	$3\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 3\times 2\times$
	volume 3cm	$3\times 3\times 3 = 27\,cm^3$	
	aire	~~4~~ 4π $4\times 3,14 = 12,56\,cm^2$	formule : Aire d
	$\sqrt{14}\times\sqrt{14}$	14	
	$\sqrt{169}$	13	$13\times 13 = 169$
	$\sqrt{10^{12}}$	10^6	Il faut diviser l'ex
Dev :	$3(x+2)$	$3\times x + 3\times 2 = 3x+$	
Dev :	$(x+1)(2x-5)$	$x\times 2x - x\times 5 + 1\times 2x + 1\times 5$	
Réduire :	$5x\times 3x$	$15x$	
	$(6x)^2$	36	
Développer	$(4x+7)^2 =$	$4x^2 + 7^2 + 4x\cdot b$	
	$(x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17})$	$x^2 - \sqrt{17}^2$	
	$(a-5)^2 =$	$a^2 - 2a5 + 5^2$	
	$5x(x-8) =$		
	$(1+\sqrt{3})^2 =$	$1^2 + \sqrt{3}^2 + 2\times 1\times\sqrt{3}$	

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Diana 3C (2)

2) Le carré d'1 nombre impair est-il toujours un nombre impair ?

$7^2 = 49$ $\quad 9^2 = 81$ $\quad 2m$ = nombre pair

$3^2 = 9$ $\quad 2m+1$ = nombre impair

$11^2 = 121$

$19^2 = 361$

$57^2 = 3249$

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$

$(\underbrace{2m}_{a} + \underbrace{1}_{b})^2 = (2m)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2$

$= 4m^2 + 4m + 1$

$= 2 \times 2m^2 + 2 \times 2n + 1$

$= 2 \times (2m^2 + 2m) + 1$

Aire :

$(x+5) \times (x+5) = (x+5)^2$ $\quad$ Pour $x = 1$

$(x+10) \times x$ $\quad (1+5)^2 = 6^2 = 36$

$(1+10) \times 1 = 11 \times 1 = 11$

Ils n'ont pas la même aire.

$3 \times x + 3 \times 5$ $\quad 25 + 10x$ $\quad (x+1)(x+2) + (x+1) \times (2x+1)$

$3(x+5)$ $\quad 5 \times 5 + 5 \times 2x$

$5 \times (5 + 2x)$ $\quad (x+2+2x+1) \times (x+1)$

$(x+1) \times (3x+3)$

$\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{9} \times \sqrt{8} = 3\sqrt{8}$ $\quad x \times (x+3) + x$

$\sqrt{128} = \sqrt{8 \times 16} = \sqrt{8} \times \sqrt{16} = 4\sqrt{8}$ $\quad x^2(x+3$

$(2x+1) \times (x+5) + (x-7) \times (2x+1)$

$(2x+1) \times (x+5+x-7) = (2x+1) \times (-2+2x)$

$a^2 + 2 \times a \times b + b^2$ $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(a+b)^2$

$\cancel{10x}(x-7)$

Le carré d'un nombre pair est-t-il toujours un nombre pair ?

Oui

$2^2 = 4$, $8^2 = 64$, $12^2 = 144$

$(2 \times x)^2 = 4x^2 = 2 \times 2x^2$

$2x+1$ = nombre impair

Volume de [cylindre] 5, 4

$R \times R \times \pi \times h$

$= 4 \times 4 \times 3{,}14 \times 5$

Dev $(2x+3)^2$

$= 4 + 2 \times 2x \, 3 + 3^2$

$=$

$(x-7)(x+7)$

$= x^2 - 7^2$

$= x^2 - 49$

$(2\sqrt{3}$

$= (2\sqrt{3})^2$

$= 12^2 - 2 \times$

$= 124 - 2$

$= 122$

$(2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4 \times 3 = 12$

$\sqrt{9} = 3 \times 3 = 9$ donc 3

$3 \; R \times R \times \pi \times H \times \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 3$

$1 \times 2 \times 5 = 10 \text{ cm}^3$

$(3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1)$

$= (3\sqrt{5})^2 - 1^2$

[redacted]

$3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 3 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$

$= 9 \times 5 = 45$

$(5y - 11)^2$

$= 5y^2 - 2 \times 5y \times 11 + 11^2$

$= 25y^2 - 110y + 121$

$c \times c \times c$

$3 \times 3 \times 3$

$= 27 \text{ cm}^3$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \times A \times h \times \pi \times R \times$

$\frac{1}{3} \times 47{,}1 \times h \times \pi \times R \times R$

un carré de côté $(x+5)$

$\frac{1}{3} \times 47{,}1 \times 5 \times 3{,}14 \times$

$\pi \times R \times R$

$= 47{,}1$

$2) + (2x+1)$ | $(2x+1) \times (3x+2+1)$ ✓

$x(5x-7)$ | $(x-2) \times (5x-7+1)$ | $(x-2)\times(x-2) + (x-2)\times(5x-7)$

$(7x)^2 - 8^2 = (7x-8)\times(7x+8)$ ✓

$(4x)^2 - 2\times 4x \times 5 + 5^2 = (4x-5)^2$ ✓

$+1$ | $9^2 + 2 \times 9 \times 1 + 1^2 = (9+1)^2$ ✓

$(4x)^2 - 5^2 \quad (4x-5)\times(4x+5)$

$\cancel{(x-1)^2 - 9^2 \quad (x-1-9)\times(x-1+9)}$

$\cancel{(4x)^2 + 2\times 4x \times 1 + 1^2}$ | $(4x+1)^2$

$1 = 2x - 7 \quad +7$

$1 + 7 = 2x - 7 + 7$

$\div 2 \quad 8 = 2x$

$4 = x \quad \div 2$

$(x-1)\times(x+3) = 0$

$(1-1)\times(1+3)$

$0 \times 4 = 0$

$(-3-1)\times(-3+3)$

$= -4 \times 0 = 0$

$x^2 = 25$

$x^2 = 5^2$

$x = 5$ ou $x = -5$

Diana

3TC

3

$4x = 32 \qquad x+7 = 2 \qquad \frac{x}{3} = 4 \qquad 3x+1 = 7 \qquad 2x + 5 = 8x + 1$

$4 \times 8 = 32 \qquad -5 + 7 = 2 \qquad 3 \times 2 + 1 = 7 \qquad 2 \times 10 + 5 = 8 \times 3 + 1$

$\frac{12}{3} = 4$

$\cancel{2 \times 1 + 5 = 8}$

$11x = 3$

$\cancel{11 \times 0{,}273} = 3 \qquad x = \frac{3}{11}$

$-8 \quad 2x + 5 = 8x + 1 \quad -8x$

$2x + 5 - 8x = 8x - 8x + 1$

$-5 \quad -6x + 5 = 1 \quad -5$

$-6x + 5 - 5 = 1 - 5$

$\div(-6) \quad -6x = -4 \quad \div(-6)$

$-6x \div (-6) = \frac{-4}{-6}$

$x = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

$9x^2 + 24x + 16$

$(3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = (3x+4)^2$

$5x = 3$

$5 \times 0{,}6 = 3$

$25x^2 - 16$

$\cancel{(5x)^2 - 2 \times \quad \times \quad + \quad ^2}$

$(5x)^2 - 4^2 = (5x-4)(5x+4)$

$x \times y = 0$

$x = 0$

$-7 \quad 3x + 7 = 11$

$3x + 7 - 7 = 11 - 7$

$\div 3 \quad 3x = 4 \quad \div 3$

$3x \div 3 = 4 \div 3$

$x = \frac{4}{3}$

$-1 \quad 5x + 1 = 8x + 3 \quad -1$

$5x + 1 - 1 = 8x + 3 - 1$

$-8x \quad 5x = 8x + 2 \quad -8x$

$5x - 8x = 8x + 2 - 8x$

$\div(-3) \quad -3x = 2 \quad \div(-3)$

$x = \frac{2}{-3}$

Diana 3TC 4

$(x+1)^2 - 81 \quad (x+1)^2 - 9^2 \quad (x+1+9) \times (x+1-9)$

$(x+3)^2 - (2x+1)^2 \quad (x+3-2x-1) \times (x+3-2x-1 \quad (a+b) \times (a-b)$

$(x+1) \times (x+3) + (x+1) \quad (x+1) \times (x+3+1) = (x+1) \times (x+4)$

$3x+1 = 5 \quad 3x+1-1 = 5-1 \quad 3x = 4 \quad x = \frac{4}{3}$

$(x+1) \times (x+7) = 0 \quad (-1+1) \times (-1+7)$

$6 \times 6 = 0$

$25x^2 + 40x + 4 \quad (5x+2)^2$

$(x+7)^2 - 64 \quad (x+7)^2 - 8^2$

$(5x+1)^2 - (3x+7)^2 \quad \cancel{(25x+1)(9x+49)} \quad (5x+1)+(3x+7)(5x+1)(3x+7)$

$5x+7 = 3 \quad 5x+7-7 = 3-7 \quad 5x = -4 \quad -4 \div 5 = -0{,}8$

$(x+11) \times (2x+1) = 0 \quad x+11 = 0 \quad | \quad 2x+1 = 0$

$x = -11 \quad | \quad 2x\,11 - 1 = 0 - 1$

$2x = -1$

$x = \frac{-1}{2}$

Le carré d'1 nombre est-il toujours supérieur ou égale à ce nombre ?

Faux car $(0{,}5^2) = 0{,}25$

Ceci est un contre exemple.

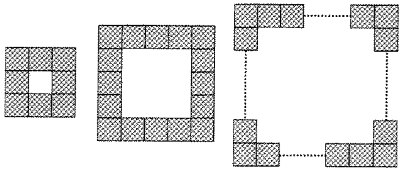
D.3 Productions des élèves sur le parcours 1

Michel

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.

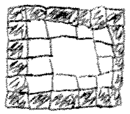


Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

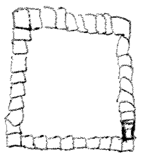
Il y a 16 carrés d'unités gris

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.



Il y a 20 carrés d'unité gris

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.



Il y a 36

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

Dl ? = 404 unité

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

~~coté + coté + 1 + 1~~ $n + n + n+2 + n+2$

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

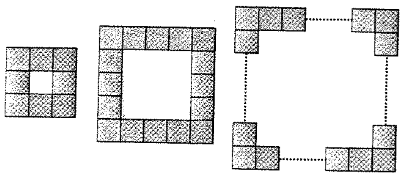
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Divonne

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

16 carreaux
car on fait 3 x4 +4

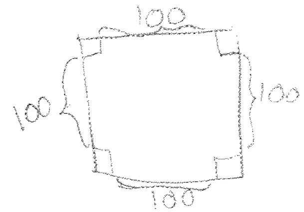
2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

20 carreaux
car 4 x4 +4

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

36 carreaux
car 8x4+4

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.



100 x4+4 = 404

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

On prend l'unité blanc, on la multiplie par 4, puis on ajoute 4.
Donc unité blanc x 4+4

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
- $4 \times a + 4$
- $(a+2) \times 4$
- $(a+2) \times 4 - 4$
- $(a+1) \times 4$
- $(a+2) \times 2 + a \times 2$
- $(a \times 4) - 4$

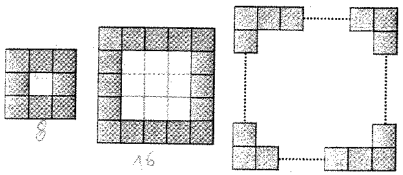
3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.

Mohammed

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

16 carrés gris.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

20 carrés blanc

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

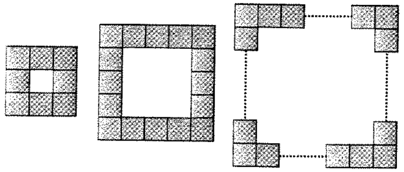
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Jean

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

le Nombre de carrés unités gris est de 16.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

le Nombre de carré blanc est de 20

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

le carré blanc et de 36

4×8=36.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

Le Nombre de carrés blanc est de 404

100×4+4=404.

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

N×4+4.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

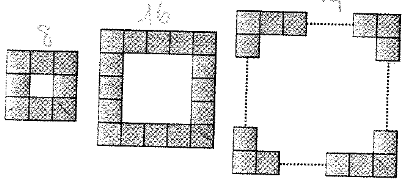
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Laure

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.

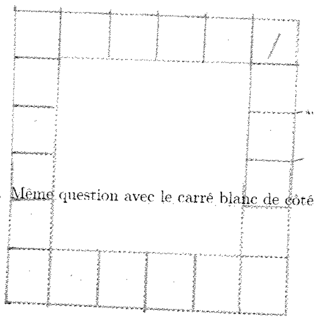


Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

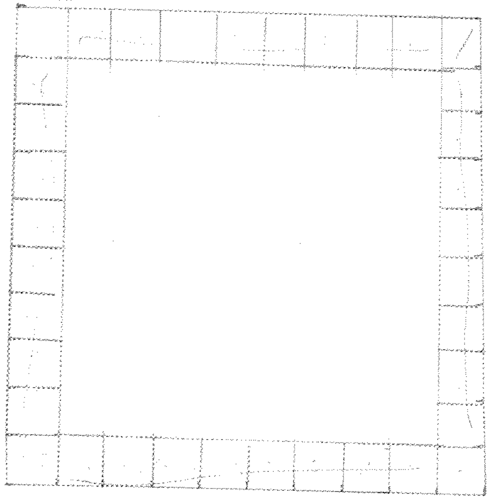
16 carrés d'unités gris

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.



20 carrés d'unités gris

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.



36 carrés d'unités

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

$10 \times 4 + 4 = 40 + 4 = 44$

Donc 44 carrés d'unité gris

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

$A \times 4 + 4 = N$

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.

- ☒ $4 \times a + 4$ → Car c'est la même formules que A×4+4 sauf que la multiplication est inversé
- ○ $(a+2) \times 4$
- ☒ $(a+2) \times 4 - 4$
- ○ $(a+1) \times 4$
- ☒ $(a+2) \times 2 + a \times 2$ → On a juste developper le calcule
- ○ $(a \times 4) - 4$

3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.

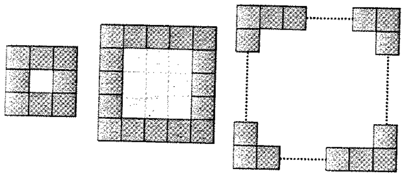
$(149+2) \times 2 + 149 \times 2 = 151 \times 2 + 149 \times 2 =$
$302 + 298 = 600$

Baptiste

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

Le nombre de carrés unités gris est de 16.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

Le nombre de carrés ~~unités~~ Blanc ~~gris~~ est de 20

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

Le nombre de carrés Blanc ~~unités gris~~ est de 36.

$8 \times 4 + 2 = 36$

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

Le nombre de carré Blanc est de 404.

$100 \times 4 + 4 = 404.$

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

$N \times 4 + 4 =$

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - $4 \times a + 4$
   - $(a + 2) \times 4$
   - $(a + 2) \times 4 - 4$
   - $(a + 1) \times 4$
   - $(a + 2) \times 2 + a \times 2$
   - $(a \times 4) - 4$

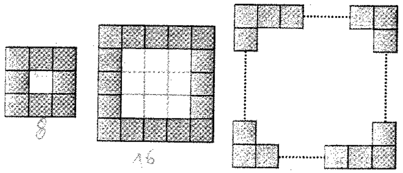
3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.

$149 \times 4 + 4 = 600$

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

16 carrés gris.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

20 carrés blanc

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

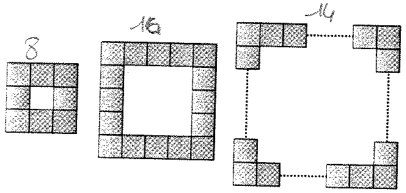
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Chloé

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.

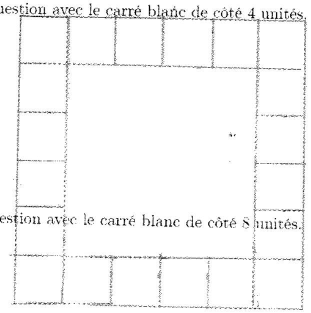


Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

16 carrés d'unités gris.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.



20 carrés d'unités gris.

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

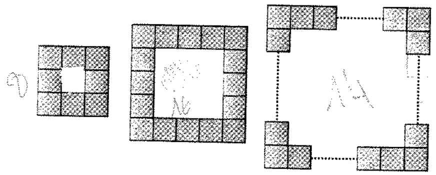
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Ina

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

16 carreaux

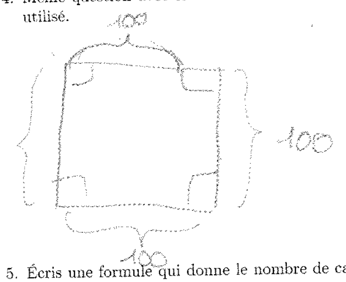
2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

24 carreaux

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

40 carreaux.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.



$100 \times 4 + 4 = 104$

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

On prent l'unité blanche, on la multiplie par 4, puis on ajoute 4.

Donc unité blanche × 4 + 4.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

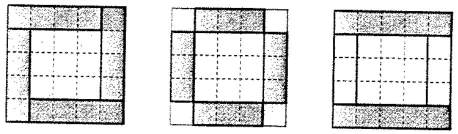
04/11/2011 Groupe C

AIDE EXERCICE 1 A DISTRIBUER

PREMIERE AIDE PARTIE A

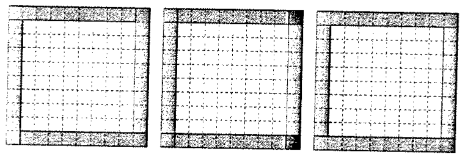
Aide pour la question 1 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.

4x4

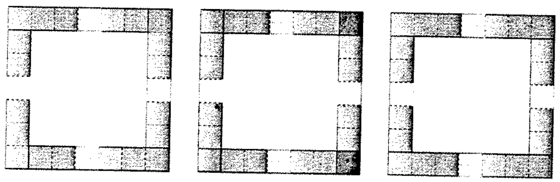


5x2+3x2

Aide pour la question 2 Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.



Aide pour les questions 3 et 4 Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☐

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - $4 \times a + 4$
   - $(a + 2) \times 4$
   - $(a + 2) \times 4 - 4$
   - $(a + 1) \times 4$
   - $(a + 2) \times 2 + a \times 2$
   - $(a \times 4) - 4$

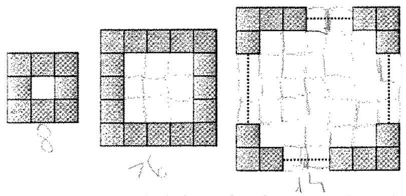
3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis la formule la plus adaptée pour ce calcul.

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 1/5

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

9 carré blanc et 16 carré gris.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

Il y a 20 carré blanc
[illegible] carré gris.

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

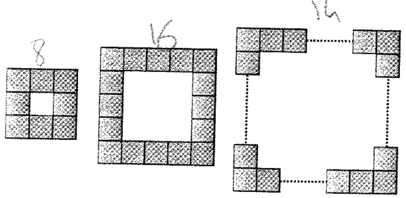
32 carré gris 64 carré blanc

Anne

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

Il y a 16 carrés unités.

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.

20 carrés d'unités gris

3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.

36 carrés d'unités gris.

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

10 x 4 + 4 = 40 + 4 = 44

Donc 44 carrés d'unités gris.

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

B x 4 + 4 = A

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

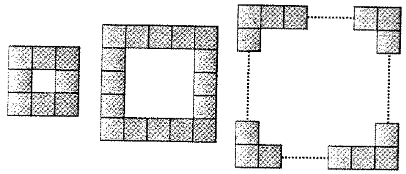
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Yann

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.

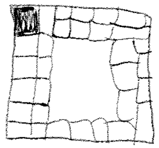


Partie A

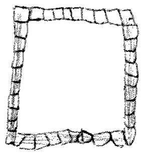
1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

Il y a 16 carré d'unités gris

2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.



3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.



Il y a 36 carré gris

4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider indique d'abord le procédé de calcul utilisé.

Il y a 404 unités gris

5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

La formule est :

$m+m+m+2+m+2$

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

NOM PRENOM 04/11/2011 Groupe B- Page : 1/4

Oulianne

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.

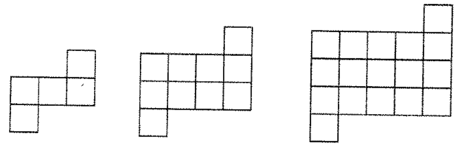


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

Le nombre de carrés unités est 26

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

962 30+2=32x30=960+2=962.

3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

a+2 x(a)+2. a+2=C et Cx(a)+2.

a+2=Cx(a)+2.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

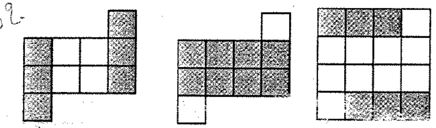
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

AIDE EXERCICE 1 A DISTRIBUER

PREMIERE AIDE PARTIE A

Aide pour les questions 1 et 2 Voici la figure de taille 2. Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.

30+2=32x30=960+2=962.



J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☒
Cette aide m'a été utile ☐
Je n'ai pas lu cette aide ☐
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☒

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe B- Page : 1/4

Jocelin

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.

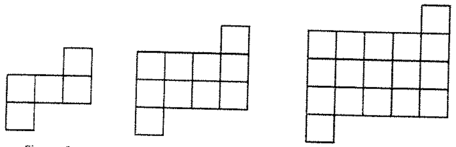


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

Il a 26 carrés unités

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

Il a 96~~0~~2 carrés unités

3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

~~X×X +2~~ ~~(N+2)~~ (N × N+2) +2

Partie B

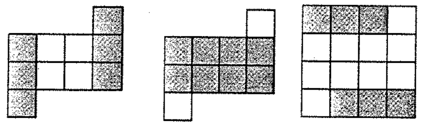
1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

AIDE EXERCICE 1 A DISTRIBUER

PREMIERE AIDE PARTIE A

Aide pour les questions 1 et 2 Voici la figure de taille 2. Schématise ta procédure de calcul sur un des trois schémas.



J'ai lu l'aide tout de suite après avoir lu l'énoncé ☐
J'ai lu cette aide après avoir cherché ☐
Cette aide m'a été utile ☒
Je n'ai pas lu cette aide ☒
Cette aide m'a été utile : Oui ☐ Non ☒

Florianne

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.

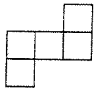


Figure 1

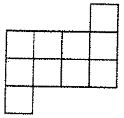


Figure 2

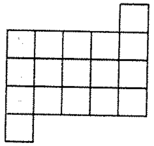


Figure 3

Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

Le nombre de carres dans la figure de taille 4 est 26

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

Taille 30 : 962.

3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

Figure $n = (n+2) \times (n) + 2$

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent (*a* est un nombre entier quelconque). Indique ta réponse.
   - ○ $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - ○ $a(a+2)+2$
   - X $a^2 + 2a + 2$
   - ○ $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - X $a^2 + 2(a+1)$

~~Ademettons à.~~

$4 + 2\times2 + 2\times1$
$= 4+4+2$
$= 8+2$
$= 10.$

Admettons $a = 4$ a^2+2a+2
$= 16 + 2\times4+2$
$= 16 + 8 + 2$
$= 26$

3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis la formule qui demande le moins de calculs.

Valérie

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.

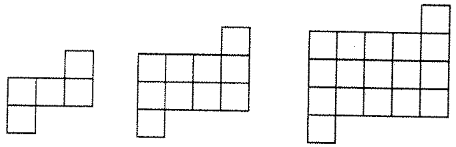


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Figure n

Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

F4 = 26

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

$30 \times 32 = 960 + 2 = 962$.

3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

$\begin{pmatrix} a \times b + 2 = 2 \\ b = a + 2. \end{pmatrix}$ $n = (n+2) \times (n) + 2$

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.

$a = 3$

- $(a+2)^2 - 2(a+1)$ $5^2 - 2 \times 4 = 25 - 8 = 17$
- $a(a+2) + 2$ $= 3 \times 5 = 15 + 2 = 17$
- $a^2 + 2a + 2$ $= 3^2 + 2 \times 3 + 2 = 9 + 6 + 2 = 17$
- $(a+1)^2 - 2(a+2)$ $4^2 - 2 \times 5 = 16 - 10 = 6$
- $a^2 + 2(a+1)$

3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis la formule qui demande le moins de calculs.

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe B- Page : 1/4

Mélusine

EXERCICE 1

Tu peux demander de l'aide à ton enseignant.

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quel taille.

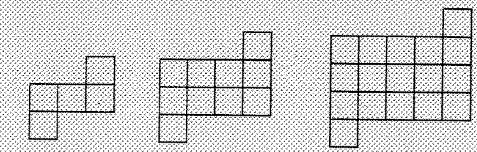


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?

Le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 est de 26.

2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?

32
× 30
960
+ 2
962

Le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 est de 962.

3. Ecris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

Le nombre de carré sur les lignes horizontales c'est le taille de la figure plus 2. Le nombre de carré sur les lignes verticales c'est la taille de la figure. Il faut additionner le tout plus 2 et on obtient le nombre de carré de la figure. Figure $n = (n+2) \times (n) + 2$

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres formules qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les formules qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
   - [x] $(a+2)^2 - 2(a+1)$
   - [ ] $a(a+2)+2$
   - [x] a^2+2a+2
   - [ ] $(a+1)^2 - 2(a+2)$
   - [x] $a^2+2(a+1)$

Admettons que $a = 4$

- $a^2 + 2a + 2 = 4^2 + 2 \times 4 + 2$
  $= 16 + 8 + 2$
  $= 26$
- $a^2 + 2(a+1) = 4^2 + 2(4+1)$
  $= 16 + 2 \times 5$
  $= 26$

3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis la formule qui demande le moins de calculs.

$1000^2 + 2 \times 1000 + 2 = 1000\,000 + 2000 + 2$
$= 1002\,002$

D.4 Productions des élèves sur le parcours 2

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 4

Michel

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4+3a=7a$	FAUX	
$a^2=2a$	FAUX	
$(2a)^2=4a^2$	FAAI	

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 4/5

aide → rien.

Divonne

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4+3a=7a$	Faux	Parceque on ne peut pas additionné les "a" et les chiffres. $4+3\times 0=4$; $7\times 0=0$
$a^2=\boxed{2a}$	Faux	car $\boxed{3^2=9}$ → $2\times 3=6$
$(2a)^2=4a^2$	VRai	$(2\times 2)^2=4\times 2^2$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Mohammed

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$	Faux	Nous ne pouvions pas additionnée les lettres et les chiffres. . $4+3\times0=$. $7\times0=0$ $4a+3a=7a$
$a^2 = 2a$	Faux	car $3\times3=9$ donc $2\times3=6$
$(2a)^2 = 4a^2$	Faux	$2a\times2a=2\times a\times2\times a=4a^2$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

$a(a+2)=a^2+2$	Faux	$a(a+2)=a\times a+a\times2$ $=a^2+2a$
$(2a)^2=4a^2$	Vraie	$(2a)\times(2a)=4a^2$
$a+3(a+2)=4a+6$	~~Faux~~ Vraie	$a=2$ $2+3\times(2+2)=2+3\times4=2+1$ $4\times2+6=8+6=14$

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 4/5

Laure

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$	fausse	$4+3\times4=4+12=16=7\times4=$ $16\neq28$
$a^2 = 2a$	fausse	$4^2=2\times4=16\neq8$
$(2a)^2 = 4a^2$	Vraie	$(2a)^2=2a\times2a=4a^2$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

$(2a)^2=4a^2$ = elle est vrai pour n'importe quel valeur de a

$a^2=2a$ = elle est fausse pour une valeur de a donc elle est fausse pour toutes les autres valeur.

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 4/

Baptiste

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$	Faux	parce que on peut pas calculer $4 + 3a = 7a$
$a^2 = 2a$	Faux	Pour 1 : $1^2 = 1$ $2 \times 1 = 2$
$(2a)^2 = 4a^2$	Vrai	

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 4/7

Gabrielle

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$	Faux	• $a = 0$ • $4 + 3 \times 0 = 4$ • $7 \times 0 = 0$
$a^2 = 2a$	Faux	$1^2 = 1$ $2 \times 1 = 2$
$(2a)^2 = 4a^2$	Vraie	$(2a) \times (2a)$ $4a^2$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

(1) $(2a)^2 = 2a^2$ faux $2a \times 2a = 2 \times a \times 2 \times a = 4a^2$

(2) $a(a+2) = a^2+2$ faux $a(a+2) = a \times a + a \times 2 = a^2 + 2a$

(3) $a + 3(a+2)$ $4a+6$ Faux $a = 2$ $2 + 3 \times (2 \times 2) = 2 + 3 \times 4 = 2 + 12$ • $4 \times 2 + 6 = 3 + 6 = 14$

Marc

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4+3a=7a$	faux	$4+3\times0=4$ $7\times0=0$
$a^2=2a$	faux	$2^2=4$ $2\times2=4$ ⇒ $2^2=2\times2$ ($a^2=2a$) $3^2=6$ $3\times3=9$ ⇒ $3^2=3\times3$ ($a^2=$
$(2a)^2=4a^2$		

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Chloé

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4+3a=7a$	Faux.	pour $a=0$. $4+3\times0=4$. $7\times0=0$.
$a^2=2a$	~~Vrai~~ Faux.	Pour $a=1$ $1^2=1$. $2\times1=2$.
$(2a)^2=4a^2$	~~Faux~~. Vrai	$(2a)\times(2a)=4a^2$.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 4/5

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4+3a=7a$	faux	Parce que on me peut pas additioner des lettes et les chiffres.
$a^2=2a$	Faux	CAR $3^2=9$ $2\times3=6$.
$(2a)^2=4a^2$	VRAI !	$(2a)\times(2a)=4a^2$. • $2+3\times(2+2)=2+3\times4=2+12=14$ • $4\times2+6=8+6=14$.

pour $a=0$
. $4+3\times0=4$
$7\times0=0$
$4a+3a=7a$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

(*) au fluo jaune

NOM PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 4/5

Tamara

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4+3a=7a$	Fausse	Pour $a=0$. $4+3\times0=4$. $7\times0=7$ • $4a+3a=7a$.
$a^2=2a$	Faux	Pour $a=1$ $1^2=1$ $2\times1=2$.
$(2a)^2=4a^2$	Faux	$2a\times2a=2\times a\times2\times a=4a$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

NOM PRENOM 04/11/2011 Groupe C Page : 4

Anne

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 5.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$4 + 3a = 7a$	faux	a=0 4+3×0=4 4×0=0
$a^2 = 2a$	faux	a=1 1^2=1 2×1=2
$(2a)^2 = 4a^2$	Vrai	(2a)×(2a)=4a^2

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe B- Page : 3/4

Oulianne

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$	Vraie Fausse	2×2^2=2×4 2a×2a=2×a×2×a=4a^2. 2×2^2=2×4
$a(a+2) = a^2 + 2$	Fausse	4×4+4×2=16+8 4^2+2=16+2
$a + 3(a+2) = 4a + 6$	~~fausse~~ Vraie	2+3×2+3×2=2+6+6 4×2+6=8+6 2+3×(2+2)=2+3×4=2+12=14 4×2+6=8+6=14.

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe B- Page : 3/4

Jocelin

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$	faux	$= \cancel{2}^{4} a^2$
$a(a+2) = a^2 + 2$	~~vrai~~ faux	$= a \times a + a \times 2$
$a + 3(a+2) = 4a + 6$	faux	=

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe B- Page : 3/4

Florianne

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$	faux	$2a \times 2a = 2 \times a \times 2 \times a = 4a^2$
$a(a+2) = a^2 + 2$	Faux	$a \times a + a \times 2 = a^2 + 2a$
$a + 3(a+2) = 4a + 6$	FAUX	

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Valérie

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$	Faux	
$a(a+2) = a^2 + 2$	a=2 Faux	$2(2+2) = 2\times4 = 8$ $2^2 + 2 = 4+2 = 6$
$a + 3(a+2) = 4a + 6$	Faux	$2+3(2+2) = 5+4 = 9$ $4\times2+6 = 8+6 = 15$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

Philinte

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$	vraie	car $(2a)^2$ est la même chose que $2a^2$
$a(a+2) = a^2 + 2$	fausse	car il manque un a après le 2 $= a^2 + 2a$
$a + 3(a+2) = 4a + 6$	fausse	

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

$(3)^3 = 3^3$

$J(J+7) = J^2 + 7$ = je c'est car

c'est la même chose que dans le tableau

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe B- Page : 3

Mélusine

EXERCICE 2

Une aide est disponible page 4.

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

Egalité	Vraie/Fausse	Justification
$(2a)^2 = 2a^2$	Faux	$a=0$: $(2\times0)^2 = 2\times0^2$, $0 = 0$; $a=1$: $(2\times1)^2 = 2\times1^2$, $4 = 4$; $2a^2 = 2a\times2a$
$a(a+2) = a^2+2$	Fausse	$a=0$: $0(0+2) = 0^2+2$, $0 = 2$
$a+3(a+2) = 4a+6$	Fausse	$a=0$: $0+3(0+2) = 4\times0+6$, $6 = 6$; $a=1$: $1+3(1\times2) = 4\times1+6$, $6 = 10$

2. Ecris deux égalités : une toujours vraie et une fausse. Comment sais-tu qu'elles sont vraie ou fausse ?

$(2a)^2 = 2a^2$

D.5 Productions des élèves sur le parcours 3

Michel

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	12	[illegible]	12
3	[illegible]	[illegible]	21
0	0	0	0

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

$(2+2)^2 - 4 = 4^2 - 4$ [illegible] $= 12$

$(3+2)^2 - 4 = 25 - 4$ [illegible]

$(0+2)^2$ [illegible] $-4 = 0$

$32 - 6$ 86

[illegible] $-6 = 3$ [illegible]

$90 - 6 = 3$ [illegible]

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Oulianne

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1	$(1-1)^2-4=0-4=-4$	$(1+1)(1-3)=2\times(-2)=-4$	$1(1-2)-1^2-2=-1-1-2=-4$
-1	$(-1-1)^2-4=-4-4=0$	$(-1+1)(-1-3)=0\times(-4)=0$	$-1(-1-2)-(-1)^2-2=0$
0	$(0-1)^2-4=1-4=-3$	$(0+1)(0-3)=1\times(-3)=-3$	$0(0-2)-0^2-2=0\times(-2)-0-2=-2$; -4

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

Ils sont tous égaux.

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Non la conjecture est fausse.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

$(x-1)^2-4 = x^2 - 2\times x\times 1 + 1^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$

$(x+1)(x-3) = x\times x + x\times(-3) + 1\times x + 1\times(-3) = x^2 - 3x + 1x - 3$

$= x^2 - 2x - 3$

NOM : [redacted] PRENOM [redacted] 04/11/2011 Groupe C Page : 1/3

Divonn

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	$(2+2)^2-4=12$	$2(2+4)=12$	$4\times2-6=12$
3	$(3+2)^2-4=21$	$3(3+4)=21$	$9\times3-6=21$
0	$(0+2)^2-4=0$	$0(0+4)=0$	$9\times0-6=-6$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

Oui, pour la valeur $x=2$ et $x=3$ c'est toujours égale.

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Non.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

$x\times(x+4) = x\times x + x\times 4 = x^2+4x$

$(x+2)^2-4 = x^2+2\times x\times 2+2^2 = x^2+4x+4-4 = x^2+4x$

NOM : [redacted] PRENOM : [redacted] 04/11/2011 Groupe C Page : 1/3

Mohammed

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	12	12	12
3	21	21	21
0	0	0	-6

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

• $(2+2)^2 = 16 - 4 = 12$ | $3\times2-6 = 18-6 = 12$ | $(3+2)^2 = 25-4 = 21$ | $0(0+4) = 0\times4 = 0$

• $3(3+4) = 3\times7 = 21$ | $2(2+4) = 2\times6 = 12$ | $(0+2)^2 = 4-4 = 0$ | $9\times0-6 = -6$

Les expressions sont égal.

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Les expressions ne sont pas égal.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Non, elle ne sont pas égales pour toutes valeur de x. Sauf les 2 premières. A et B.

$(x+2)^2-4=$

B = $x\times(x+4) = x\times x + x\times4 = x^2+4x$

A = $(x+2)^2-4 = x^2+2\times x\times2+2^2-4 = x^2+4x+4-4 = x^2+4x$

NOM : [redacted] PRENOM : [redacted] 04/11/2011 Groupe C Page : 1/3

Laur

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	$(2+2)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$	$2(2+4) = 2 \times 6 = 12$	$9 \times 2 - 6 = 18 - 6 = 12$
3	$(3+2)^2 - 4 = 5^2 - 4 = 25 - 4 = 21$	$3(3+4) = 3 \times 7 = 21$	$9 \times 3 - 6 = 27 - 6 = 21$
0	$(0+2)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	$0(0+4) = 0 \times 4 = 0$	$9 \times 0 - 6 = 0 - 6 = -6$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

Pour $x = 2$
$(x+2)^2 - 4 = x(x+4) = 9x - 6$

Pour $x = 3$
$(x+2)^2 - 4 = x(x+4) = 9x - 6$

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Pour $x = 0$
$(x+2^2) - 4 = x(x+4) \neq 9x - 6$

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Les trois expression ne sont pas égales pour toute valeurs de x car la valeur 0 n'est pas égales.

$A = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = \underline{x^2 + 4x}$

$B = x(x+4) = x \times x + x + 4 = \underline{x^2 + 4x}$

Donc les expression A et B sont égales

NOM : [redacted] PRENOM : [redacted] 04/11/2011 Groupe B Page : 1/3

Joceli

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1	$(1-1)^2 - 4 = -4$	-4	-4
-1	$((-1)-1)^2 - 4 = -\cancel{16}\ 4 - 4 = \cancel{12}\ 0$	$(-1+1)(-1-3) = 0 \times (-4) = 0$	$-1(-1-2) - (-1)^2 - 2 = -1(-3) + 1 - 2 = -4 + -1 = -5$
0	$(0-1)^2 - 4 = -1 - 4 = \cancel{-5}\ -3$	$(0+1)(0-3) = 1 \times (-3) = -3$	-4

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

Ils sont tous égaux.

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Non, la conjecture est fausse.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

NOM : [redacted] PRENOM : [redacted] 04/11/2011 Groupe C Page : 1/3

Baptiste

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	12	12	12
3	21	21	21
0	0	0	−6

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

$(2+2)^2 - 4 = \cancel{12}$

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

NOM : [redacted] PRENOM : [redacted] 04/11/2011 Groupe C Page : 1/3

Gabrielle

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	12	12	12
3	21	21	21
0	0	0	−6

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

$(2+2)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ | $2(2+4) = 6 \times 2 = 12$

$3(3+4) = 7 \times 3 = 21$ | $(3+2)^2 - 4 = 5^2 - 4 = 21$

$9 \times 2 - 6 = 18 - 6 = 12$ | $9 \times 3 - 6 = 21$

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

$(0+2)^2 - 4 = 0$

$0(0+4) = 0$

$9 \times 0 - 6 = -6$

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

- Les deux premières expressions sont égales, mais la troisième [illegible] pas les mêmes valeurs de x.

A/ Ex : $(A+b) = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$

$(\underset{x}{x} + \underset{b}{2})^2 - 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x$

B/ $x(x+4) = x \times x + x \times 4$

Marc

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	12	12	12
3	21	21	11
0	0	0	-6

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

$(2+2)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 12$

$2^2 - 4 = 0$ 0-6

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

les expressions qui sont égales sont les deux premières, 12 et 21 sont multiples de 3

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

$(x+2)^2 - 4 = 2 \times x \times 2 + 2^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x$

$x \times (x-4) = x \times x + 2 \times 7 = x^2 + 4x$

Chloé

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	$(2+2)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$	$2(2+4) = 2 \times 6 = 12$	$9 \times 2 - 6 = 18 - 6 = 12$
3	$(3+2)^2 - 4 = 5^2 - 4 = 25 - 4 = 21$	$3(3+4) = 3 \times 7 = 21$	$9 \times 3 - 6 = 27 - 6 = 21$
0	$(0+2)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	$0(0+4) = 0 \times 4 = 0$	$9 \times 0 - 6 = 0 - 6 = -6$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

Pour $x = 2$

$(x+2)^2 - 4 = x(x+4) = 9x - 6$

Pour $x = 3$.

$(x+2)^2 - 4 = x(x+4) = 9x - 6$

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Pour $x = 0$.

$(x + 2^2) - 4 = x(x+4) \neq 9x - 6.$

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Les trois expressions ne sont pas égales pour toutes les valeur de x. Car la valeur 0 n'est pas égale.

$(x+2)^2 - 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = \underline{x^2 + 4x + 0}$

$x \times (x+4) = x \times x + x \times 4 = \underline{x^2 + 4x}$

Donc les expressions A et B sont égales.

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe B Page : 1/3

Florianne

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1	$(1-1)^2$ -4	-4	-4
-1	0	0	0
0	-3	-3	-4.

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

les expressions sont égales.

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

A part C, les expression A et B sont égales.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

$B = (x+1)(x-3) = x \times x + x \times (-3) + 1 \times x + 1 \times (-3)$.
$= x^2 + (-3x) + 1x + (-3)$.
$x^2 + (-2x) + 3$.

$A = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 + 4$
$x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$

NOM : PRENOM : 04/11/2011 Groupe C Page : 1/3

Ina

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	12	12	12
3	21	21	21
0	0	0	-6

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

$(2+2)^2 - 4 = 4^2 - 4$
$= 12$

$(0+2)^2 - 4 = 2^2 - 4$
$4 - 4 = 0$

$(3+2)^2 - 4 =$

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

$x \times x \times x \times 4 = x^2 \times x \times 4$

$x \times (x+4) = x \times x + x \times 4 = x^2 + 4x$.

$(x+2)^2 - 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2$.
$x^2 + 2x + 4^2$

Valérie

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1	-4	-4	-4
−1	0	0	0
0	-3	-3	-4

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

~~les valeurs indiqué~~ les expression sont égal

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Apart la C n'est pas égale à la A et la B.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Non, on va vérifier :

B : $\cancel{x^2 \; 4^2 = x^2 - 16}\,.\; x \times x + x \times 3$

$\cancel{A = x \times x - 1\,(-1)}$

Philinte

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1	-4	-4	-4
−1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	-3	[illegible]	-4

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

j'ai conclue que avec 1 et -1 sont égal

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

S'ai conclue que il ne sont pas [illegible] C est à -4

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Non ces expression ne sont pas égaux

$a = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 1x + 1^2 = 0x$

$a = (x+1)(x-3) = x^2 - 3 = 3x^2$

$C = x(x-2) - \cancel{x}^2 - 2$

Ignace

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

$(1-1^2)-4=4$

$(-1-1)^2-4=$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1	~~4(+)~~ $(1-1)^2$	~~B(-1)~~ 1+1	1(1-2)
−1	−4	1−3	1^2-2
0	−2	−6	

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

$(x+2)^2-4 = x+4-4 = x$

$x \times (x+4) = 4x^2$

$x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 - 4$

x^2

Mélusine

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x-1)^2 - 4$
- $B(x) = (x+1)(x-3)$
- $C(x) = x(x-2) - x^2 - 2$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
1	$(1-1)^2-4=-4$	$(1+1)(1-3)=-4$	$1(1-2)-1^2-2=-4$
−1	$(-1-1)^2-4=0$	$(-1+1)(-1-3)=0$	$-1(-1-2)-(-1)^2-2= 2-1(-3)-1-2$ $=3-1-2=0$
0	−3	−3	−4

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 1$ et $x = -1$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

Je peux conjecturer que les expressions sont exacte pour toute autres expressions.

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Je ne confirmes pas la conjecture. Les expressions A et B sont peut être juste.

3. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Elles ne sont pas égales pour tout x, sauf peut être la A et la B.

$A = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 - 4$
$= x^2 - 2x + 1 - 4$
$= x^2 - 2x - 3$

$B = x \times x + x \times (-3) + 1 \times x + 1 \times (-3)$
$= x^2 - 3x + 1x - 3$
$= x^2 - 2x - 3$

NOM : [redacted] PRENOM : [redacted] 04/11/2011 Groupe C Page : 1/3

Yann

EXERCICE 1

Une aide est disponible page 3..

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :
- $A(x) = (x+2)^2 - 4$
- $B(x) = x(x+4)$
- $C(x) = 9x - 6$

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2	$(2+2)^2-4=4^2-4=16-4=12$	$2(2+4)=2\times6=12$	$9\times2-6=18-6=12$
3	$(3+2)^2-4=5^2-4=\cancel{25}-4=21$	$3(3+4)=3\times7=21$	$9\times3-6=27-6=21$
0	$(0+2)^2-4=2^2-4=4-4=0$	$0(0+4)=0\times4=0$	$9\times0-6=0-6=-6$

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$, $x = 3$ et remplis le tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?

Pour $x=2$ $(x+2)^2-4 = x(x+4) = 9x-6$

Pour $x=3$ $(x+2)^2-4 = x(x+4) = 9x-6$

2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$ et remplis le tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.

Pour $x=0$

$\boxed{(x+2^2)-4 = x(x+4)} \neq 9x-6$

3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?

Les trois expressions ne sont pas égales pour toute les valeurs de x car la valeur 0 n'est pas égales

$(x+2)^2-4 = x^2+2\times x\times2+2^2-4 = x^2+4x+4-4 = x^2+4x$

$x(x+4) = x\times x + x\times4 = x^2+4x$

Annexe E

Transcriptions des séances observées chez Garance

Dans cette annexe, nous présentons les transcriptions complètes des séances observées dans la classe de 3^{e} de Garance. Ces séances sont analysées dans le chapitre 5. Rappelons que :

- la séance 1 porte sur le parcours 1,
- la séance 2 porte sur les parcours 1 et 2,
- la séance 3 porte sur le parcours 3,
- la séance « habituelle » est présentée dans le chapitre 5.

Les parcours 1, 2 et 3 sont analysés *a priori* dans le chapitre 4.

Certains échanges ne sont pas retenus dans le corpus en particulier ceux relatifs à des problèmes de discipline ou ceux extérieurs au déroulement des parcours (personne frappant à la porte, élèves retardataires, etc.). Ils sont indiqués par le symbole « [. . .] ». Nous complétons parfois les échanges par des commentaires sur les gestes de l'enseignant ou des élèves, des réactions ou des actions qui se déroulent au tableau. Pour les distinguer du corpus, les commentaires sont indiqués par des crochets : [. . .]. De plus, nous utilisons les abréviations suivantes :

- ENS pour « enseignant »,
- E, E1, E2., etc pour « élève ».

Transcription séance différenciée 1 – Parcours 1
Version du 22/08/2012
Time vidéo : (00:00)
Time audio : 00:00

Blanc	A la classe
Gris clair	En privé, à un ou plusieurs élèves
Gris foncé	Commentaires

N°	Time	Qui parle	Interactions
	Lancement (1:40)		
1	09 :26	Ens	Alors, euh, ce qu'on va faire aujourd'hui. Donc euh... Je vais vous distribuer un travail. Euh, un travail qui a été différent, d'accord, mais a exactement la même finalité. Euh, le travail, il y a une première partie, d'accord, vous avez le droit de travailler à deux. Donc Chloé, tu peux choisir de travailler avec euh … Anne et euh … Laure. Euh. Donc je vous distribue le travail d'accord, vous avez le, vous commencez à réfléchir tout seuls ; après, vous avez le droit de discuter avec votre voisin. Et après, vous avez le droit de
2		E	Madame, c'est sur quoi ?
3		Ens	Bah c'est euh, c'est sur ce qu'on a commencé à faire. Vous allez voir, vous allez découvrir. Depuis le début de l'année, on a commencé pas mal de choses, quand même !
4		E	C'est un nouveau chapitre.
5		Ens	[… sur coller la feuille, mettre le nom]. Allez, allez-y ! [Distribution des copies]
	Temps de recherche - Partie A (3:36)		
6	**Avec Mélusine Groupe B, A-1**		
7	12:05	Mélusine	Là, il faut compter combien il y a de carrés dans la figure?
8		Ens	Quel est le nombre de carrés unités dans le figure de taille 4?
9		Mélusine	De taille 4 ?
10		Ens	Alors, à ton avis, ça, la figure 1, c'est de quelle taille?
11		Mélusine	Bah... 3 ?
12		Ens	??? Quel le nombre de carrés unités dans la figure 4? Chut !
13	**Avec Ouliane Groupe B, A-1**		
14	13:10	Ouliane	J'ai pas compris.
15		Ens	Ouais. Bah... il faut que tu comptes le nombre de carrés dans la figure 4. Il ne faut pas que tu comptes, il faut que tu détermines le nombre de carrés dans la figure 4.
16	**Avec Florianne et Valérie [inaudible], Groupe B, A-1**		
17	13:28	Ens	Ouais, par exemple... Ça veut dire qu'il y a le 4 et le 6. Ouais, par exemple.
18	**Avec Michel et Yann=E2 groupe C, A-1**		
19	13:45	Ens	Bon, vas-y. Alors, qu'est-ce qu'il faut faire?
20		E1	C'est facile !
21		Ens	Oui.
22		E1	Il faut considérer un carré blanc entouré de carrés unités gris pour montrer... ?
23		E2	Il est en train de lire la consigne!
24		Ens	Oui. Et donc? Ça ne me fait pas du tout rire. Et alors?
25		E1	Il faut montrer que, bah … c'est un petit peu dur !
26		Ens	Qu'est-ce qu'il faut calculer?
27		E1	Bah, le gris. Ah non ! Combien, combien il y a de carrés blancs ?
28		Ens	Non.
29		E2	Combien il y a de carrés gris ?
30	14:09	Ens	Voilà, combien il y a de carrés gris.
31		E2	Mais sur lequel? Sur tous, là ?
32		Ens	Bah justement, c'est ça qu'il faut regarder.
33		E2	Bah là, il y en a 8. [Silence]. Là, il y en a 7, là ...16.

34		Ens	Ok, mais c'est pas ça qu'on te demande. Est-ce que tu as lu la première question? Si le carré blanc a un côté de 3 unités... ? Là, ton carré blanc, il a combien d'unités?
35		E1 et E2	Une.
36		E2	Bah là, celui-là, il en a 3, ça c'est sûr.
37		Ens	Celui-là, il en a 3. Après, il faut que tu comptes. [Silence]. Et après, qu'est-ce qu'il faut faire dans la deuxième question. Votre carré blanc, il a combien de carrés blancs unités?
38	14:55	E1	4.
39		E2	4.
40		Ens	Non, tu peux le faire, par exemple.
41	15:04	Yann	Mais il n'y en a pas qui sont 3? Là, il y en a plus que, par exemple.
42		E1	Là, il y en 3. Mais le 4, c'est nous qu'on doit le faire?
43		Ens	Par exemple, oui.
44		E1	Ici?
45		Ens	Bah, où tu veux.
46		E1	Ah, oui, ok, d'accord.
47		E2	1, 2, 3, 4.
48	**Avec Marc, Samuel, Tamara, Ina et Divonne Groupe C, A-1**		
49		Ens	Chut ! Est-ce que tout le monde a bien compris la consigne ou pas ?
50		E	Il a compris ???
51		Ens	Oui, c'est tout? Les carrés de quoi?
52		E	Les gris !
53	15:29	Ens	Oui. Alors la première question.
54		E	C'est facile?
55		Ens	J'ai pas dit que c'était dur.
56		E	Oui, mais c'est lui qui a dit que...
57		Ens	Alors le premier, si le carré blanc a…
58		E	Bah il y en a un, déjà !
59		E	8.
60		Ens	D'accord, parce que vous avez pas bien lu la consigne. La première question, c'est quoi?
61		E	Si le carré blanc a un côté de...
62		Ens	Si le carré blanc a un côté de ?
63		E	3 unités ! [plusieurs élèves ensemble]
64		Ens	Alors, où est-ce que votre carré blanc, il a un côté de 3 unités?
65		E	Il y en a pas.
66		Ens	Si il a 3 carrés, il y a 3 unités.
67		E	Là, ici.
68		Ens	Dans le 4.
69		E	Y en a trois, là.
70		Ens	D'accord bah, peut-être, est-ce qu'il faudrait que vous essayiez de… Comment on fait pour voir si le carré il a 3 unités, 4 unités ou 5 unités ?
71	16:12	G	On mesure les petits carrés.
72		F	Bah, euh... on vient mesurer !
73		Ens	Oui, et comment on fait pour voir sur les carrés ?
74		F	Bah, on compte.
75		Ens	Comment tu fais pour savoir?Là, ton premier carré, ton petit carré blanc, il a combien de carrés blancs unités?
76			Bah oui, il y en a 1.
77		Ens	Voilà, il a une unité, dans ta deuxième figure, il a combien d'unités, le carré blanc?
78		Ina	3.

79		Ens	Voilà, comment tu fais pour le voir?
80	16:42	Ina	Bah je compte ces carrés là. 1, 2, 3 parce qu'ils sont de la même taille que là. C'est ça?
81		Ens	Oui, par exemple. Alors maintenant, comment tu peux faire? Bah, maintenant, tu vois ce qu'on te demande pour répondre à la première question. Il faut que tu comptes le nombre de carrés gris unités, quand ton carré blanc, il a 3 unités. D'accord? Et ensuite, la deuxième question, ça va être quoi?
82		F	Même question avec les carrés gris de 4 unités.
83		F	Avec 4.
84		Ens	Ton carré blanc, il va avoir combien de carrés unités?
85		F	4.
86		Ens	4. Et la troisième question ? Ton carré blanc, il va avoir 8 unités?
87		Marc ou Samuel	8.
88		Ens	8. Alors, allez-y !
89	17:12	Tamara	Mais c'est quoi des unités?
90	17:14	Ens	Les unités, c'est les petits carreaux.
91	**Avec Anne et Laure Groupe C, A-1 (9:44)**		
92		Anne	Madame !?
93		Ens	Oui !?
94	17:26	Anne	Moi, je les ai mis comme ça.
95		Ens	Oui, mais alors du coup, est-ce que tu as répondu aux questions ?
96		Anne	Ils veulent les unités de ça, là?
97		Ens	Non, c'est pas ça qu'ils demandent. Il y a marqué, si le carré blanc a un côté de trois
98		Laure	Trois unités, c'est ça. 1, 2, 3.
99		Ens	Il est où ton carré blanc là?
100		Anne	Celui-là?
101		Ens	Là, ton carré blanc, il a combien d'unités? [Chut !...]
102		Anne	1.
103	17:54	Ens	1. Celui-là.
104		Anne	3.
105		Ens	3. Alors toi, si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés gris !
106		Laure	Bah, il y en aura 16.
107	18:08	Ens	Voilà. Alors après, il faut faire la même chose avec un carré blanc … qui a combien de côtés unités?
108		Anne	4.
109		Ens	4. Alors allez-y !
110	**Avec Baptiste et Jean groupe C, A-1 (10:32)**		
111	18:20	Ens	Ok. Alors qu'est-ce qu'il fallait calculer? Si un carré blanc a un côté de 3 unités, calcule
112		Baptiste	Bah, euh … 2 !
113		Ens	1.
114		Baptiste	Ah!?
115		Ens	D'accord? Ensuite ton deuxième carré.
116		Baptiste	3.
117		Ens	Voilà. Alors comment tu...?
118		Baptiste	1. Bah non, il y a en 4.
119		Ens	Bah, qu'est-ce que tu pourrais faire sur ton dessin pour pouvoir mieux voir ?
120		Baptiste	1, 2, 3, 4.
121		Ens	Alors, là tu me montres, euh … les côtés du carré...
122		Baptiste	Ah !?
123		Ens	Mais tu montres pas combien il y a de petits carrés unités dans chaque euh... Tu comprends ce que je veux dire ou pas?

124		Baptiste	Non.
125		Ens	Dans chaque carré. Donc qu'est-ce que tu pourrais faire pour voir combien il y a de carrés unités? [Silence].
126		Jean	Compter.
127		Ens	Oui, c'est ça, tu comptes !
128	19:23	Baptiste	Ah, ça veut dire 1, 2, 3…
129	19:32	Ens	Si tu traces comme ça, là. Tu vois combien il y a de carrés. Anne, allez hop travaille, il faut que tu fasses pour le 4. Tu peux construire le 4. Si tu traces.Tiens, vas-y !
130		Baptiste	Ici?
131		Ens	Tu peux tracer, oui, les autres traits.
132		Baptiste	Ah, bah, parce que il y en a 4. Ah!!!
133		Ens	Donc il y a combien de petits carrés? A l'intérieur du carré blanc?
134		Baptiste	Bah, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
135		Ens	Le côté du carré blanc, il a combien de carrés ?
136		Baptiste	4.
137		Ens	Le carré blanc, il est où?
138		Baptiste	Là !
139		Ens	Voilà.
140		Ens	Montre-moi un côté du carré blanc.
141		Baptiste	Ici !
142		Ens	Non. Ça, c'est pas un côté.
143		Baptiste	Ah, bah...
144		Ens	Non, c'est pas un côté. Non plus ça. Un côté du carré blanc. Ton carré, il est là. Montre-moi un côté du carré blanc !
145		Baptiste	Ici ?
146		Ens	Ça, c'est pas un côté. C'est quoi un côté? C'est ça ! Ça, c'est un côté !
147		Baptiste	Je vous ai dit celui-là.
148		Ens	Non. Toi, tu m'as montré ça. Ça, c'est un côté du carré blanc. Donc ton côté du carré blanc, il a combien de carrés?
149		Baptiste	Bah, il en a 3.
150		Ens	Voilà. Alors maintenant, il faut que tu comptes le nombre de carrés gris quand ton petit carré, il a 3 côtés. Et après tu fais la même chose avec le 4.
151	**Avec Ines, groupe C, A-2 et A-3**		
152	20:50	Ina	Madame, c'est ça?
153	20:54	Ens	Bah, il faut que tu me fasses euh... D'où ça vient, le 24, d'où ça vient, le 40 ? Et sinon, après tu tournes la feuille, il y a derrière aussi.
154		Ina	Ah.
155	**Avec Florianne et Valérie (13:20) puis Mélusine et Elina Groupe B, A-2 et A-3**		
156	21:00	Valérie	Madame, comment on fait, euh.. pour taille 30?
157		Ens	Eh bien, comment vous avez fait pour la taille 4?
158		Florianne	Bah, là, on fait ça ! On fait un, on a rajouté euh... en fait on a rajouté 2, quoi. [Silence]. Je sais pas comment exprimer.
159		Ens	Vas-y. […] Alors explique-moi comment tu as fait pour la figure 1, par exemple ! Tu
160		Florianne	Ouais. Je sais pas comment expliquer.
161		Ens	Comment vous avez fait pour la figure 4?
162		Valérie	3, là y en a 4 [inaudible] !
163		Ens	3.
164		Valérie	Pour moi la suite, c'était 4 et 6.
165		Ens	Bah oui, bah c'est ça.
166		Valérie	Plus 2.
167		Ens	Plus 2, ok. Du coup, tu as fait, 4 fois 6 plus 2, ok. Eh bien, comment tu ferais pour 30, cette fois?

168		Valérie	Mais pour 30, euh … [inaudible]
169		Ens	Bah ça, c'est la figure pour 3. Ça, c'est la figure 4. Donc la figure 4, tu m'as fait euh …
170		Florianne	4 fois 6.
171		Ens	4 fois 6. Donc la figure 30, tu ferais quoi ?
172	22:23	Florianne	5 fois 7.
173		Florianne	Non, 5 fois 7 ça fait 30 !
174		Ens	C'est là-dessus qu'il faut réfléchir ! Non mais tu as raison, 5 fois 7, ça marche ! 5 fois 7, ça marche, ça serait la figure 5. La figure 6, ça serait quoi?
175		Florianne	6 euh, 6 fois 8.
176		Valérie	C'est une suite logique.
177		Ens	Ouais, c'est une suite logique ! Du coup, nous, ce qu'on te demande, c'est : la figure 30, combien ça fait.
178		Valérie	Mais avec les plus 2 ou sans les plus 2?
179		Ens	A ton avis, est-ce qu'il faut que tu comptes les plus 2 ?
180		Valérie	Ouais, mais…
181		Florianne	Ouais.
182		Ens	Tu les comptes !
183		Florianne	On fait. Il faut aller jusqu'à la figure 30.
184		Ens	C'est ça.
185		Mélusine	Mais là, après [inaudible].
186		Ens	Comment?
187		Mélusine	Là, j'ai fini. Mais là, après, ils disent de comparer les formules avec ça.
188		Ens	Ok. Tu as trouvé ou pas, Elian?
189		Ens	Est-ce que tu as trouvé une formule ? C'est quoi, ta formule, toi ? Ça, c'est une formule !
190	23:15	Mélusine	Non, je sais que c'est pas une formule.
191		Ens	Bah, c'est-à-dire pour euh... Tu as expliqué.
192		Mélusine	Non, là j'ai pas expliqué.
193		Ens	Il faut que tu m'écrives une formule. C'est quoi, une formule, pour toi?
194		Mélusine	Bah, c'est quand il y a des chiffres avec des plus, des moins.
195	23:25	Ens	Quand est-ce qu'on utilise des formules? […]
196	**Mohamed et Marc (16:30) Groupe C, A-1**		
197		Ens	Vous, vous en êtes où, du carré 3, là?
198		Ens	Mohamed, t'en est où? Comment on fait pour le carré 3? Vous avez trouvé combien pour le carré 3 ? […] Tu as trouvé 14 pour les carrés 3. Non alors, ça veut dire que vous avez pas bien compris. Euh... Marc, tu as trouvé ou pas ?
199		Marc	Non.
200		Ens	Est-ce que tu as trouvé pour le carré 3 ou pas du tout? [Silence]. Alors si on regarde là, comment on fait pour savoir sur ce carré combien le carré blanc il a de carrés unités?
201		Marc	Les carrés gris.
202		Ens	Oui. Et si, nous, qu'est-ce qu'on peut dessiner sur notre figure pour que ce soit plus simple?
203		Marc	Les petits carrés.
204		Ens	Ouais, comment on fait pour dessiner les petits carrés ?
205		Mohamed	Bah, on utilise...
206		Ens	Ouais bah, vas-y, fais les tous ! Comme ça, on peut compter.
207		Samuel	Pas besoin de les compter, Madame. Ça se voit à l'œil nu. Combien il y en a ?
208		Ens	Oui, je suis d'accord, mais on peut aussi euh. Et du coup, comment tu fais pour que ce soit plus simple? Voilà, voilà. Tu peux aller jusqu'au bout aussi.

209		Ens	Alors maintenant, le carré blanc, je suis d'accord, ça c'est notre carré blanc et son unité. Son côté il a 3 carrés unités. D'accord nous ce qu'on veut c'est le nombre de carrés gris autour. [silence] Donc c'est quoi ça?
210		Mohamed	Il y en 16.
211		Ens	Il y en a 16, je suis d'accord. Donc quand le carré blanc a un côté de 3 unités, comme ça, là, il y en a 16 autour. D'accord? Alors maintenant, quand ton carré blanc il a 4 côtés, il a son côté, il a un côté de 4 unités. Il faut que tu fasses comment? Eh bien, vas-y !
212	**Avec Marc et Tamara (18:40) Groupe C, A-1**		
213		Ina	Vous pouvez voir si c'est bon? Là, j'ai dessiné plein de petits carrés.
214		Ens	Ok, là ton carré blanc, son côté, il a combien de carrés unités?
215		Marc	Celui-là.
216		Ens	Ouais.
217		Marc	9.
218		Ens	Non. Son côté, il est où le côté du carré blanc?
219		Marc	Là, il en a 4.
220		Ens	Le côté du carré blanc.
221		Marc	Celui-là.
222		Ens	Le carré banc, c'est ça. Donc son côté... il y a combien de carrés ?
223		Marc	[inaudible] 4 euh 5. 3.
224		Tamara	3.
225		Ens	3. Donc. Donc celui-là, c'est le carré blanc dont le côté fait 3. D'accord? Donc il y a combien de carrés gris autour?
226		Tamara	6 aussi.
227		Ens	Bah oui, c'est normal, c'est un carré. Donc il y a combien de carrés gris autour?
228		Tamara	Bah il y en a 3.
229		Ens	Tout autour du carré blanc, là, il y a que 3 carrés gris.
230		Tamara	Ah non, il y en a…
231		Marc	16.
232		Ens	Il y en a 16. Tu as fait comment pour compter?
233		Tamara	Bah j'ai compté comme ça.
234		Ens	Donc tu as compté, 1, 2, 3, 4, .., 7, 8…, jusqu'à 16, c'est ça?
235		Tamara	Oui.
236		Ens	D'accord. Donc, là, tu peux répondre à la première question.
237		Tamara	Bah je dis comment?
238		Ens	Bah, tu dis quoi ? Il y a combien de carrés gris?
239		Tamara	Il y a 16 carrés gris.
240		Ens	Voilà. Alors ensuite, dans ton deuxième ?
241		Tamara	Ah, il faut répondre [inaudible] ?
242		Ens	Non, c'est pas ça qu'il faut faire. Cette fois, il faut faire la même chose avec un carré blanc de 4 unités.
243		Tamara	Donc il y a 4 euh...
244		Ens	A l'intérieur, le petit carré blanc, le carré blanc à l'intérieur, il faut que son côté il fasse
245		Tamara	Ah ?!
246		Ens	Allez, vas-y !
247	**Avec Ina et Divonne (20:20) Groupe C, A-4**		
248		Ina	Nous, on a trouvé ! C'est comme ça. Plus les 4 coins. C'est ça la formule !
249		Ens	Ok.Aalors maintenant, tu m'écris la formule.
250		Ina	Mais est-ce que c'est bon? J'ai fait pas pareil.
251		Ens	Bah, comment tu peux faire pour vérifier que c'est bon ?
252		Ina	Mais je sais que c'est bon.
253		Ens	Bon bah, alors maintenant, tu m'écris la formule.

254	**Avec Yann et Michel (20:46) Groupe C, A-2**		
255		Ens	Ok, est-ce que vous avez trouvé pour 4, alors?
256		Yann	Non, mais j'ai pas compris, parce que il n'y a pas de carré de 4 côtés.
257		Ens	Si il n'y a pas 4 côtés, qu'est-ce que tu vas faire?
258		Yann	Le créer.
259		Ens	Bah tu peux le faire, oui.
260		Michel	Regardez !
261		Ens	Ok, donc tu as trouvé combien de carreaux gris? [Silence].
262		Yann	Il y en a 4 de plus, il y en a 20. Euh...ouais.
263		Ens	Alors, il y en 4 de plus ou il y en a 22?
264		Yann	Il y en a 22 ! Attends...
265		Michel	Attendez ! 2, 3, 4, 5, …, 19, 20. Il y en a 20.
266		Yann	Ouais, je savais bien, il y a en 4 de plus!
267		Ens	Alors maintenant, vous faites avec le 8.
268	**Avec Baptiste (21:30), A-2**		
269		Baptiste	Madame, dans le 2, c'est plus facile parce que euh... on rajoute ici, ici, ici et ça fait le
270		Ens	C'est ça!
271	**Avec Melina, Ignace, Florianne et Valérie (21:46) Groupe B, A-3 avec retour sur A-2**		
272		Ens	Bon. Alors est-ce que vous avez trouvé?
273		Mélusine	Non.
274		Ens	Est-ce que vous avez trouvé la même chose déjà pour 30?
275			Non, Madame. 30, c'est pas ça.
276		Valérie	Nous, on a trouvé une suite logique et eux, ils ont trouvé 900 et quelque.
277		Mélusine	Mais non 30, ça fait 900, 902.
278		Ens	Alors comment vous avez fait?
279		Mélusine	Moi, je …
280		Ignace	[inaudible]
281		Mélusine	Non, en fait moi j'ai dit … enfin, en fait j'ai expliqué.
282		Ens	Eh bien, ré-explique moi!
283		Mélusine	Vu le nombre de carrés sur les lignes horizontales, c'est la taille de la figure plus 2,
284		Ens	D'accord, donc là il y en a 2 plus 2. Ok.
285		Mélusine	Voilà, ça fait 4. Donc après le nombre euh … sur les lignes verticales, c'est la taille de la figure. Là, il y en a un donc, bah non, c'est euh [inaudible]...
286		Ens	Oui, c'est ça !
287		Mélusine	Donc après euh … Faut additionner le tout. On additionne les... plus 2.
288		Ens	Et après plus 2, ok. Et vous, vous avez fait comment ?
289		Florianne	Bah euh, là on est en train de chercher mais j'ai pas encore trouvé.
290		Ens	C'est, c'est un peu la même technique.
291		Valérie	Ouais. Mais en fait elle essaie de chercher une suite logique.
292		Ens	Une suite logique ?! Mais tu as raison, dans ce que tu fais ! C'est très bien, ce que tu as fait, Mélusine.
293		Florianne	Moi, alors j'ai trouvé comme ça. Voilà.
294		Ens	C'est bon, mais par contre, tu as oublié quoi, après?
295		Florianne	Madame, moi j'ai trouvé, j'ai fait comme ça, Madame.
296		Ens	[A Mélusine] Ouais, ça fait 32, tu m'as dit c'est le, ce que tu as fait, c'était très bien ; tu m'as dit « c'est ça et il faut en rajouter 2 ». Mais si c'est la figure 30?
297		Ens	Donc ça fait bien 32. Après, il y a combien de lignes, tu as dit?
298		Mélusine	Il y en a 30.
299		Ens	Donc tu as bien fait 30 fois 32. Et après, il faut rajouter combien?
300		Mélusine	2.
301		Ens	2. Voilà.
302		Valérie	Mais Madame, moi j'ai trouvé 32 !

303		Valérie	Mais attends, pourquoi 32, qu'est-ce qu'on a... ?
304		Ens	Qu'est-ce que tu m'as dit, toi ? La figure 3, c'est 3 fois quoi?
305		Florianne	C'est 3 fois 5.
306		Ens	Toi, tu m'as bien dit que la figure 3, c'était 3 fois 5. La figure 4, tu m'as dit que c'était 4 fois 6.
307		Florianne	4 fois 6.
308		Ens	Donc la figure 30 ? La figure 30, ça va faire combien?
309		Valérie	30 euh...
310		Ens	Non!
311		E	Ah, mais si !
312		Ens	Ok, maintenant la formule, ça veut dire que si euh … je te donne n'importe quelle figure. On va prendre, par exemple...
313		Mélusine	Faut écrire avec l'algèbre.
314		Ens	C'est ça, ça veut dire quoi, « écrire avec l'algèbre » ? Avec les […]Ça veut dire quoi, une formule ? Quand est-ce qu'on utilise une formule?
315		Florianne	Comment ça, des formules? Des formules de quoi?
316		Mélusine	On l'a fait dans le... dans le devoir. [Silence].
317		Ens	Quand est-ce qu'on utilise des formules?
318		Mélusine	En maths.
319		Ens	Oui, mais quoi en maths?
320		Mélusine	Bah euh, quand… Quand on fait de l'algèbre.
321		Ens	Quand on fait de l'algèbre. Donne-moi un exemple de formule que tu connais, par
322		Mélusine	Euh... pour calculer l'aire.
323		Ens	Voilà ! Par exemple, pour calculer l'aire !
324		Ens	Alors donne-moi euh … l'aire du carré par exemple, tu fais quoi?
325		Mélusine	Bah, le côté fois le côté.
326		Ens	Ok. Alors moi, maintenant, ce que je veux, c'est une formule pour calculer n'importe
327		Mélusine	Bah euh … la … la longueur fois euh...
328		Ens	Bah tu réfléchis !
329		Valérie	Madame, est-ce que ça a un rapport avec le dessin?
330		Ens	Bah, c'est, bah euh ... moi je te demande : « la figure n, comment tu fais pour la calculer? » C'est ça une formule, hein !
331	**Avec Ina et Divonne, puis Tamara et Marc (26:06) Groupe C, A-2 et A-3**		
332		Ens	Bon. C'est bon ou pas?
333		Ina	Bah non, moi j'ai trouvé la formule. C'est ça.
334		Divonne	On a trouvé la formule ! Pourquoi tu dis Je?
335		Ina	Ok, est-ce que vous avez trouvé? Vous avez fait comment?
336		Tamara	Mais est-ce que c'est la bonne réponse, Madame?
337		Marc	C'est 35.
338		Ina	Y a 35 carrés blancs et 14 carrés gris.
339		Ens	Non, c'est pas les réponses. Alors je vais vous donner l'aide.
340		Ina	La quoi?
341		Ens	L'aide.
342		Ens	Je donne pas du tout les réponses. C'est l'aide.
343	**Avec Michel et Yann (26:30) Groupe C, A-3**		
344		Ens	C'est bon ? Vous en êtes où, là?
345		Michel	Au 8, il est en train de faire.
346		Yann	Hé ! Mais ça tu fais 4 ! Hé ! Mais j'ai déjà fait le 4 !
347		Ens	Alors, le 8 … Comment vous faites ? Allez, allez-y ! Comment vous faites ? Non, mais c'est bon là !
348		Michel	On va colorier, après.

349		Mi ou Yo	Bah, on fait 8 carreaux.
350		Yann	7, 8…
351	**Avec Laure, Anne et Chloé (27:09) Groupe C, A-3**		
352		Laure	Mais, là pourquoi je trouve 36 ? C'est bizarre !?
353		Laure	[…] Parce que là, comme on a rajouté 4, ça m'a fait 20, donc ici, ça fait comme si je rajoutais 4. Mais ici, j'ai trouvé 36.
354		Ens	Bah, pourquoi tu as rajouté 4, là?
355		Laure	Parce que il y avait 4 unités.
356		Ens	Ok, alors ré-explique-moi. Pourquoi tu as ajouté 4 ?
357		Laure	Euh … Parce que ils ont dit de rajouter 4.
358		Ens	Qui t'a dit de rajouter 4?
359		Chrisitine ou Anne	Dans la consigne.
360		Laure	Ah bah … non, ça rajoute pas 4 !
361		Ens	Alors, du coup, je vous distribue une petite aide [à Laure, Anne et Chloé] pour voir comment vous pouvez faire pour euh.
362	**Avec Baptiste et Jean (28:17) Groupe C, A-3**		
363		Ens	C'est bon ou pas?
364		Baptiste	Madame !? Ici, ça fait 36?
365		Ens	Ok.
366		Baptiste	Parce que ici il y avait 8, 8, 8, 8 et tout ça...
367		Ens	Redis-moi !
368		Baptiste	A la place de 3, il y a 8, 8, 8, 8 et puis ça, ça fait 36. Parce que 8 fois 4, 32.
369		Ens	Ok, bah c'est ça qu'il faut que tu écrives.
370		Baptiste	Bah c'est bon, c'est ce que j'ai écrit !
371		Ens	Bah là, tu n'as rien écrit. Là, tu m'as dit ! C'est exactement ce que tu viens de dire, c'est 8 fois 4, plus 4 !
372		Baptiste	Ah, mais faut écrire les calculs ?!
373		Ens	Bah oui, par exemple, c'est quand même mieux pour t'aider pour la suite !
374		Baptiste	Ok.
375		Ens	Ok. Donc après, tu me fais la suite !
376	**Avec Mohamed (29:10) Groupe C, A-2**		
377		Ens	C'est pas la troisième figure, ça, Mohamed. Ça, c'est pas la figure 4 qui nous intéresse !
378		Ens	Tiens, je tu peux utiliser ça [l'aide].
379	**Avec Ouliane et Jocelin (29:40) Groupe B, A-3**		
380		Ens	Alors, vous, vous en êtes où?
381		Ouliane	Bah j'arrive pas à trouver la technique.
382	**Avec Valérie (29:56) Groupe B, A-3**		
383		Valérie	Est-ce que c'est bon?
384		Ens	Là, si je te dis pour la figure n...
385		Valérie	Le n. Ouais mais euh après le a, je peux le remplacer par n.
386		Ens	Ouais, si tu veux. Mais euh ... Toi, si je te dis pour la figure n... Toi, tu me remplaces le … si je te demande pour la figure n. Qu'est-ce que tu veux avoir?
387		Valérie	[inaudible]
388		Ens	C'est ça qu'il faut que tu réfléchisses ! C'est pas a et b qu'il faut que tu mettes !
389	**Avec Tamara puis Ina et Divonne (30:50) Groupe C, A-5**		
390		Ens	Bon, ça y est ? Vous avez trouvé, là, les différentes formules?
391		Tamara	Moi j'ai trouvé euh …
392		Ina	Mais moi j'ai 20 !
393		Divonne	Bah voilà, c'est la bonne formule.
394		Ens	Alors maintenant, hop ! Ce que je vais vous donner, c'est pour essayer de voir euh ...

395		Ina	Comme ça.
396		Ens	Ok, bah maintenant, essaye de faire la formule !
397		Ina	C'est bon?
398		Ens	Bah oui c'est bon, essaye de faire la formule qui correspond aux données !
399	**Avec Tamara et Marc (31:05) Groupe C, A-2 et A-3**		
400		Ens	Alors, ensuite qu'est-ce que vous avez fait?
401		Ens	Vous, vous voyez ça comment, là, c'est quel type de euh … de carré ?
402		Marc	C'est un carré…
403		Ens	Vous, comment vous le voyez votre carré?
404		Tamara	Bah, c'est un carré normal.
405		Ens	Comment tu fais pour compter le nombre de carrés gris? Comment tu as fait ? Tu as compté, comme ça et après tu as rajouté 4, ou tu as compté comme ça… ?
406		Tamara	Bah j'ai [inaudible] …
407		Ens	Bah donc maintenant, essaie de réfléchir ! Bah donc ça, c'est la figure 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 4 fois. Donc à ton avis pour la figure 8, tu vas faire comment?
408	**Avec Yann=E2 et Michel=E1 (32:20) Groupe C, A-4**		
409		Ens	Bon, vous en êtes où?
410	16:02	E1	A 32.
411		E2	Celui-là, c'est le …
412		E1	Euh à 36, plutôt !
413		Ens	Euh, vous ... vous, vous comptez comment, vos carrés?
414		E2	Bah je calcule euh, je fais les deux côtés. Là, j'ai dit qu'il y en avait 10 et 8 et 8… Bah euh, 20 plus 16, ça fait 36.
415		Ens	Ok, bah tu as fait comme ça, toi ?
416		E2	Bah ouais !
417		Ens	Très bien ! Ça fait 36. Allez, vas-y !
418		Ens	Et après, comment vous faites pour faire la suite ?
419		E2	Pour faire quelle suite?
420			Hein ? Quelle suite ?
421		Ens	Bah derrière, hop !
422		E2	Même question avec le carré blanc de côté 100 unités.
423		Ens	Alors, 100 unités, vous faites comment? Ce que tu viens de dire Yann, c'était très bien.
424		E1	Ah oui, je sais ! 100 unités, ça va faire 102, 102, 100, 100
425		Ens	Ouais, très bien. Donc ça fait combien?
426		E1 et E2	400...
427		E2	504.
428		E1	Non 404...
429		Ens	404. Alors, vas-y. Allez-y !
430	**Avec Baptiste (33:30) Groupe C, A-5 avec appuis sur A-4**		
431		Baptiste	Madame ! Ici, j'ai trouvé, ça fait 404.
432		Ens	Ouais ! Très bien !
433		Ens	Vous avez fait comment? Bah maintenant, une formule? Comment tu peux faire pour faire la formule ?
434		Baptiste	Bah euh … 100 fois 4 plus 4. 404.
435		Ens	Une formule, ça veut dire que … Comment tu vas faire pour expliquer en donc, enfin, comment tu vas faire pour m'expliquer pour n'importe quel côté, pour n'importe quel carré blanc ?
436		Baptiste	Bah … mais je peux calculer.
437		Ens	Oui et tu fais quoi comme calcul?
438		Baptiste	De … bah … des additions ; en fait, des multiplications et des additions

439		Ens	Oui. Et tu fais quoi ? En fait, tu prends le nombre de carrés blancs, tu lui fais faire quoi?
440		Baptiste	Bah je le multiplie.
441		Ens	Par combien ?
442		Baptiste	Par euh 4...
443		Ens	Ouais et après?
444		Baptiste	Je ... bah … plus 4.
445		Ens	Voilà. Donc c'est ça qu'il faut que tu mettes... ?
446		Baptiste	Ah ouais ! Je dois marquer que ça, un exemple !
447		Ens	Non pas un exemple, à la place de mettre. Par exemple, si ... si je te dis n'importe quel
448		Baptiste	Ok j'ai compris !
449		Baptiste	Côté fois largeur, côté fois côté.
450		Ens	C'est moi qui t'embrouille, là !
451		Ens	Ton carré. Son côté, je sais pas moi, par exemple, c'est n.
452		Baptiste	Ça fait n fois 4.
453		Ens	Ouais, voilà. Et après ?
454		Baptiste	Plus 4.
455	**Avec Laure (34:50) Groupe C, A-3**		
456		Laure	Faut finir un calcul ?
457		Ens	Bah oui, vaut mieux. Alors est-ce que vous avez regardé l'aide que je vous ai donnée ?
458		Laure	Mais l'aide, euh ... elle a encore, euh …
459		Ens	Ok. Vous, vous regardez comment ? Vous faites comment, pour calculer? Est-ce que tu vois, tu fais comme ça, ou alors est-ce que tu comptes comme ça?
460		Laure	Comme ça !
461		Ens	Ok. Bah donc, comment tu vas faire pour calculer pour 100 ?
462		Laure	100 ? Parce que il y a 100 ?
463		Ens	Ah non ! Euh … pour 8 !
464		Laure	Bah euh … ici on a 8. 8, 8, 8, 8.
465		Ens	Donc 8 fois combien?
466		Laure	4.
467		Ens	Plus?
468		Laure	2.
469		Ens	Là, tu me fais 8, hop, voilà, comme ça. Et après, il t'en reste combien?
470		Laure	4.
471		Ens	Ouais.
472		Laure	Plus 4.
473		Ens	Donc 8 fois 4 plus 4.
474		Laure	Ah!
475	**Avec Yann et Michel (35:53) Groupe C, A-5**		
476		Ens	Bon. Et hop, vous en êtes où là !
477		E1	Bah euh … On n'a pas compris !
478		Ens	Ok. Cette fois, c'est une formule, ça veut dire pour n'importe quel euh …
479		E2	Nous, c'est le côté plus le côté plus le grand plus le grand.
480		Ens	Ok. Si ton côté, il fait n, par exemple, si ton côté il fait n. […]
481		E2	Il est négatif.
482		Ens	Si ton côté, il fait 400, tu fais quoi?
483		E1	n euh … 400 plus 400
484		E2	400 plus 400 plus 402 plus 402.
485		E1	Non, bah et ça c'est n.
486		Ens	[…]
487		E2	Regarde, là, 400 plus 400 plus 402 plus 402.
488		E1	n euh … plus euh ..., je sais pas, euh... n.
489		E2	n plus n plus n plus n.

490		Ens	Si donc toi tu m'as dit … si ça c'est 100, c'est 102, plus 102, plus 100 plus 100. Si ton côté, c'est n?
491		E1	Bah n, plus euh … l'autre côté.
492		Ens	Donc n plus euh …
493		E2	n.
494		Ens	Et après ?
495		E1 et E2	n… n… n…
496		E2	n plus euh … n plus n plus 2.
497		Ens	Alors, ok. Si je vous dis pour euh … 300. Comment vous allez faire?
498		E1 et E2	Pour euh …
499		E1	Ça va faire 300.
500		E2	300 sur un, 302, 302, 300, 300.
501		Ens	Ok. Donc maintenant, si je te dis n, qu'est-ce que tu fais?
502		E1	Bah euh … n.
503		Ens	Ok.
504		E2	n2, n2.
505		Ens	n, n2, n2.
506		E2	Ici euh … n.
507		E1	On rajoute 2 à chaque fois.
508		Ens	Yann, qu'est-ce qu'il vient de dire? C'est pas la même chose, hein, n2 et n plus 2.
509		E2	C'est la même chose !
510		Ens	Non, c'est pas la même chose !
511		E1	Ah!! Ok, n plus …
512	**Avec Florianne, Valérie, Mélusine et Ignace Groupe B, A-3**		
513		Ens	Ok. Alors, est-ce que … vous avez trouvé la même formule, vous ?
514		Florianne	Ouais, c'est facile, en fait.
515		Ens	Vous avez trouvé ou pas euh … Jocelin et Ouliane?
516	**Avec Ouliane et Jocelin (38:35) Groupe B, A-3**		
517		Ens	Hop ! Vous avez trouvé ou pas?
518		Ouliane	Euh … on a dit que n était égal à 2. Et si on applique la formule, ça fait n plus 2.
519		Ens	Alors, vous avez fait comment, vous ?
520		Ouliane	Bah en fait, on a expliqué.
521		Ens	Ok. Donc ta largeur et ta longueur, il faut que tu dises si … par exemple, pour la figure 50, comment tu fais pour calculer ton n euh ton petit n?
522		Jocelin	On multiplie.
523		Ens	On multiplie quoi par quoi?
524		Jocelin	Bah par euh…
525		Ouliane	Madame ! Et ça, on peut faire?
526		Jocelin	Comme ça, on peut faire. Bah c'est le nombre de euh … le nombre de la figure.
527		Ens	Voilà ! Voilà ! C'est ça qu'il faut faire !
528		Jocelin	Et alors, là, il y a pas de 2 là.
529		Ens	Voilà ! C'est ça qu'il faut que tu mettes ! Si par exemple, ta figure c'est n...
530		Jocelin	n?
531		Ens	Ouais et l'autre, ça va être?
532		Jocelin	n.
533		Ens	C'est pas ça que tu viens de me dire. Réfléchis à ce que tu viens de dire. Tu m'as dit, « là, c'est le nombre de la figure ». Et après ?
534		Jocelin	Plus 2.
535		Ens	C'est le nombre de la figure plus 2. Donc tu peux m'écrire ça, hein ?
536		Ens	Nombre de la figure, alors essaye de me réécrire ça même si c'est euh ... Une phrase, même si c'est pas forcément avec des lettres.

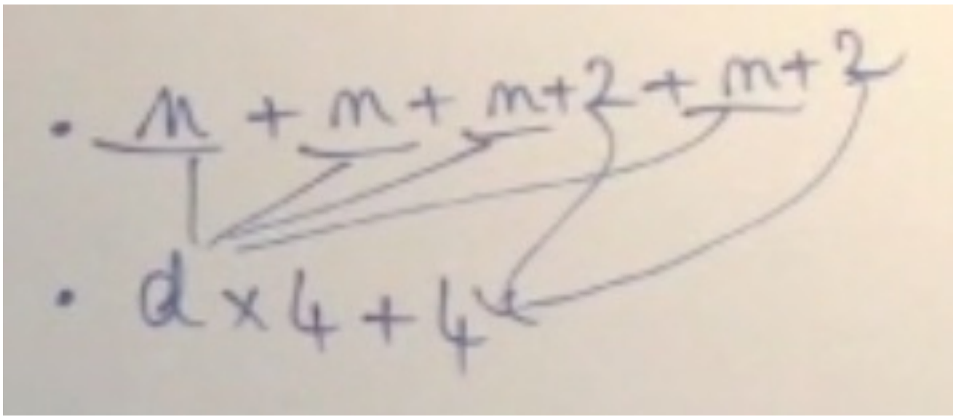
537	**Mise en commun A-5 groupe C (40:30) [tableau 1]**		
538		Ens	Juste vous, on va faire un petit bilan. Hop ! Et le carré bordé ?
539		Yann	Le carré bordé?
540		Ens	Le carré, là, il y a des bords, tout autour. Alors combien vous avez trouvé pour euh … Comment vous avez fait, pour trouver la formule?
541		Ens	Vous [Yann et Michel], vous avez trouvé quoi, comme formule?
542		Yann ou	Euh, n plus n plus n+2 plus n+2 [tableau].
543		E1	Trop long!
544		Elèves	Non ! Moi non ! J'ai ...
545		Ens	Ok. Qu'est-ce que vous avez trouvé d'autre, comme formule? Vas-y, Divonne !
546		Divonne	Euh, c'est quoi les n?
547		Ens	Bah, c'est pas grave. Mets ce que tu as mis !
548		Divonne	Je mets une lettre? D. d fois 4 plus 4 [tableau 1].
549		Ens	Ok. Vous en avez trouvé d'autres? Laure?
550		Laure	Non, j'ai trouvé la même chose.
551		Ens	La même chose que qui?
552		Laure	Bah que Divonne.
553		Ens	Ok. Et Mohamed et Samuel, vous avez trouvé une formule ou pas?
554		Mohamed	Ouais, c'est un raccourci.
555		Ens	Marc et Tamara ?
556		Ens	Ok. Alors est-ce que, à votre avis […] A votre avis, là, est-ce que ça donne la même
557		E	On a bon, nous, Madame. Regardez!
558		Ens	Ok. Et alors, pourquoi ça marche, pourquoi ça revient au même?
559		Samuel	Parce que 4n ça fait d fois 4 et 2 plus 2 ça fait 4 et..
560		Yann	Parce que c'est la...
561		Ens	Parce que c'est la... ?
562		Yann	La contraction.
563		Ens	La contraction? Ça veut dire quoi, en fait, la contraction?
564		E	C'est décomposé.
565		Yann	Qu'il a été euh … raccourci !
566		Michel	Contracté !
567		Ens	Qu'est qu'on a euh … mis ensemble, qu'est-ce que tu viens de dire Samuel?
568		Yann	Euh, tous les n et tous les...
569		E	Simplifié.
570		E	Parce qu'on a factorisé.
571		Ens	Donc ça, on les a mis là et euh 2 plus 2 [tableau 1], donc ce que tu as dit Samuel … ?
572		E	Non justement, on a développé, ni factorisé.
573		Ens	D'accord. Euh, ça ne vous dérange pas que ça ne soit pas le même lettre ?
574		Elèves	Non.
575		Ens	D'accord. Ça veut dire la même chose, hein.
576		E	Oui.
577		Ens	D'accord pour tout le monde. Alors je vous distribue, du coup, la deuxième partie. […distribution de la partie B].
	Temps de recherche partie B pour le groupe C (42:48)		
578	**Avec Florianne, Valérie et Mélusine (44:00), groupe B, B-2**		
579		Florianne	Madame ! J'ai pas compris en fait euh ça !
580		Ens	Ok. Alors du coup, en fait... Vous, votre formule, elle est là ?
581		Florianne	Ouais.
582		Ens	Là, il y a d'autres types de formules. C'est-à-dire que vous, vous avez vu une manière
583		Florianne	Ça.
584		Ens	Oui. Après, il y a d'autres manières de calculer, là. D'accord ? Qui vont correspondre,

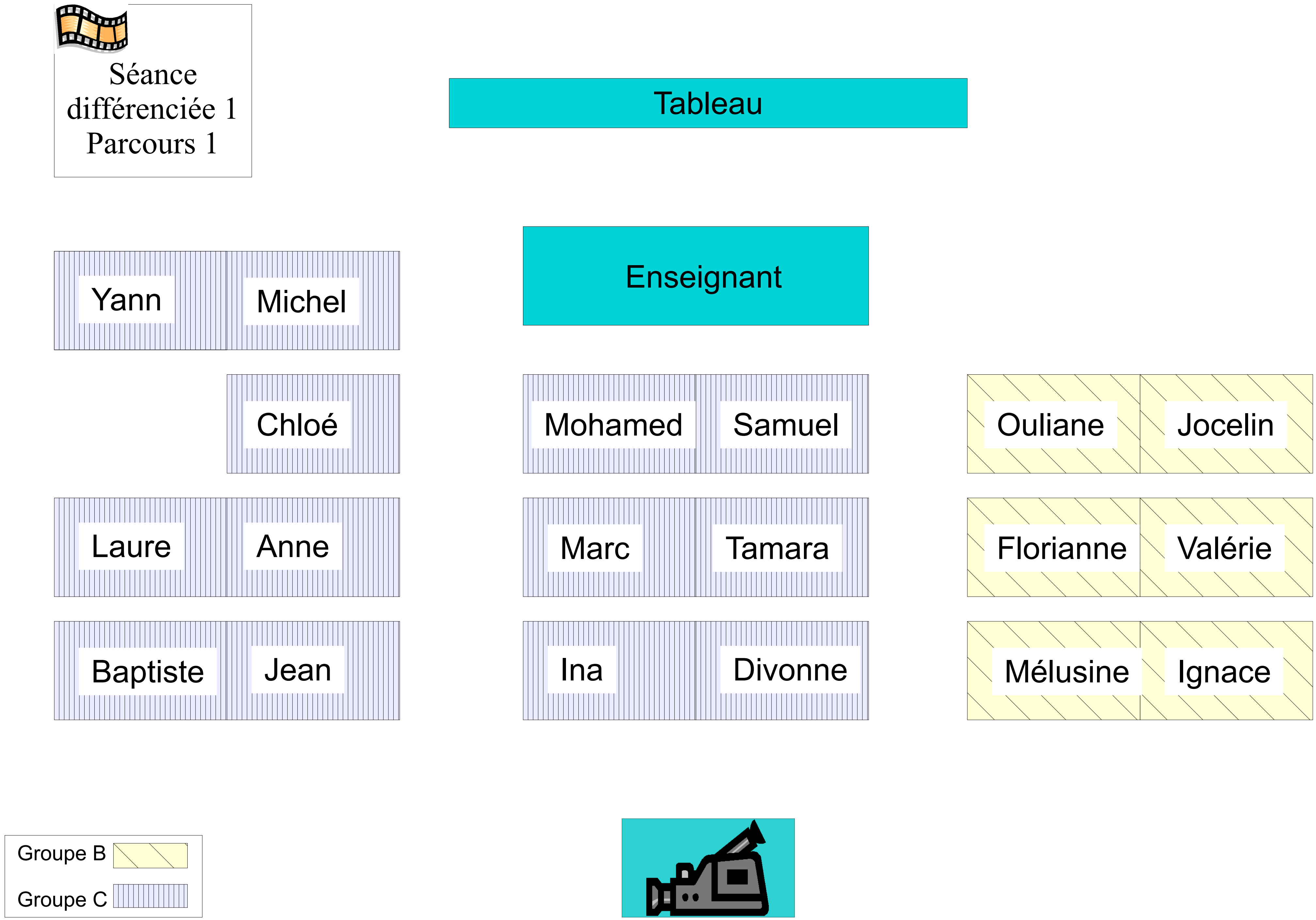
585		Valérie	Bah, il faut que ça donne le même résultat.
586		Ens	Voilà, D'accord ? Est-ce que c'est vrai pour toutes les formules, est-ce que il y en a pour quoi c'est pas vrai et vous essayez de voir comment on fait pour montrer euh...
587		Ens	Alors, c'est laquelle qui marche, pour toi?
588		Mélusine	Pour moi, c'est la dernière et euh […] J'ai pris la troisième et la dernière.
589		Ens	Ok. Pourquoi?
590		Mélusine	Parce que euh … j'ai pris le chiffre 2 et j'ai essayé avec [inaudible].
591		Ens	Ok, donc toi, tu as regardé pour la figure 2 si ça marche ou pas.
592		Mélusine	Oui.
593		Ens	Et du coup, quelles sont celles pour lesquelles ça marche?
594		Mélusine	La troisième et la cinquième.
595		Ens	Donc la troisième et la cinquième. Et vous, du coup, vous comptez faire comment?
596		Valérie	Mais on peut prendre un nombre quelconque ?
597		Ens	Ça, c'est la méthode de Mélusine. Mais il y a peut-être d'autres méthodes.
598		Valérie	Oui.
599		Mélusine	Mais Madame, vous avez dit comment justifier.
600		Ens	Ouais, bah ouais, c'est ça ! C'est exactement ce que tu viens de faire !
601	**Pour le groupe C, B-5, rangée centrale (47:01)**		
602		Ens	Ok. Alors maintenant, si on regarde pour le premier là. […] Alors. Est-ce que vous avez
603		Michel	Oui.
604		E	Faut cocher les bonnes réponses.
605		Ens	Faut cocher.
606		E	Et justifier.

607		Ens	Faut cocher les bonnes réponses, d'accord ? Il n'y en a pas forcément qu'une, c'est ce qu'on vient de voir, Divonne. […] Donc après, il y en a peut-être d'autres et c'est à vous de voir quelles sont celles qui sont bonnes et quelles sont celles qui sont fausses. Samuel.
608	**Avec Laure, Anne, Baptiste et Jean (48:01) Groupe C, B-5**		
609		Anne	Madame, faut faire quoi?
610		Ens	Ok. Alors, c'est quoi l'énoncé ? Qu'est-ce qu'il y a marqué ? Vas-y, Baptiste !
611		Baptiste	Madame ! [Inaudible].
612		Ens	Bah qu'est-ce qu'il y a marqué ? L'énoncé, vous l'avez lu ou pas?
613		Baptiste	Bah chercher d'autres formules.
614		Ens	Voilà, d'autres formules ! On cherche d'autres formules. Oui, c'est ça, tu dois cocher dans le rond celles qui donnent les bonnes formules.
615		Baptiste	Ah !
616		Laure	Eh, Madame, c'est bon?
617		Ens	C'est lequelles, qui donnent les bonnes formules?
618		Anne	Euh ...eElle !
619		Ens	Ouais, par exemple. Ensuite, bah vas-y ! Coche, il y en a plusieurs et c'est à toi de dire pourquoi c'est les bonnes formules.
620	**Avec Yann et Michel (48:47) Groupe C, B-5**		
621		Ens	Yann et Michel ! Alors, comment vous faites ?[…]
622		Yann	Le premier, il est bon.
623		Ens	Ok. Bah tu coches le premier, ensuite [...]
624		Ens	Alors ensuite, qu'est-ce qu'il y a d'autre?
625		Yann	Je sais pas. L'avant-dernière. Mais je sais pas.
626		Ens	Bah vas-y ! Coche l'avant-dernière !
627		Yann	C'est du hasard !?
628		Ens	Bah et ce que je te demande, c'est pas du hasard, Yann ! C'est que tu réfléchisses pas, que tu me coches les bonnes réponses.
629		Yann	Non mais le premier, je sais qu'il est bon.
630		Ens	Bah les autres ? Essaye de voir si il y en a d'autres qui sont bonnes ou pas.
631	**Avec Baptiste (49:46) Groupe C, B-6**		
632		Baptiste	Madame, on est obligé de faire le carré là ?
633		Ens	A ton avis, est-ce que tu es obligé de faire le carré? Non, non tu n'en a pas besoin. Alors qu'est-ce que tu pourrais faire?
634		Baptiste	Je fais juste 149 fois 4 plus 4.
635		Ens	Très bien. Est-ce que tu en as trouvé d'autres, des formules ou pas ?
636		Baptiste	Oui, celle-là. Bah on peut faire euh … Ah, je peux faire ça. Madame ! Je peux faire ça? 49 plus 4 fois 4 ?
637		Ens	Ok, c'est lesquelles, les formules, les bonnes, pour toi?
638		Baptiste	Celle-là et celle-là !
639		Ens	Ok.
640		Baptiste	C'est bon?
641		Ens	Et du coup, comment tu vas faire pour calculer, là?
642		Baptiste	Ici, je fais ça 149 plus 4 fois 4.
643		Ens	149 plus 4 fois 4.
644		Baptiste	Oui, mais ça revient au même, c'est plus la même chose qu'ici, mais c'est l'inverse.
645		Ens	Ok, pourquoi tu vas faire 149 plus 4 fois 4 ?
646		Baptiste	Parce que je fais cet exemple. Parce que en plus, a c'est 149 plus 4 fois 4.
647		Ens	Ok, donc cet exemple c'est 149 plus 4 fois 4. C'est ça qu'il y a marqué, là? Il y a marqué quoi, là, c'est quoi la formule? [Sonnerie de fin d'heure].
648		Baptiste	Ah bah non c'est « fois », mais c'est pas possible, il y a 4 côtés. Enfin, il y a 4 euh…

Copie d'écran

Tableau 1




Séance différenciée 1
Parcours 1
Tableau
Enseignant
Yann
Michel
Chloé
Mohamed
Samuel
Ouliane
Jocelin
Laure
Anne
Marc
Tamara
Florianne
Valérie
Baptiste
Jean
Ina
Divonne
Mélusine
Ignace
Groupe B
Groupe C

Transcription séance différenciée 2 - Parcours 1 et 2
Version du 20/08/2012
00:00:00 = 00:01:00.046 Time vidéo
00:00:00 = 00:06:23.070 Time audio

Blanc	A la classe
Gris clair	En privé, à un ou plusieurs élèves
Gris foncé	Commentaire

N°	Time	Qui parle?	Interactions
1	00:00:00.024 -	Enseignant	Bon alors vous sortez vous affaires rapidement, dans le calme. On ne met pas trois heures à s'installer.
2	00:00:52.720 - 00:00:57.241	Enseignant	Les absents c'est bien Jean, Samuel et Yann?
3	00:01:45.460 - 00:01:51.880	Enseignant	Euh, on va continuer.. ce qu'on avait fait la dernière fois
4	00:01:53.245 - 00:01:54.090	Elève	Et les devoirs maison?
5	00:01:54.790 - 00:01:56.916	Enseignant	Ah non euh les devoirs maison euh je vais pas vous les rendre aujourd'hui.
6	00:02:00.195 - 00:02:04.645	Enseignant	Je les ai corrigés mais on prendra le temps de d'en parler demain.
7	00:02:05.705 - 00:02:10.805	Enseignant	Alors, je vais d'abord vous distribuer ce que vous avez fait la dernière fois.
8	**00:02:11.143 - 00:03:27.513**		**Distribution des copies**
9	00:04:02.955 - 00:04:10.621	Enseignant	Alors, on va faire un petit bilan de la première activité. Alors, Michel, je...
10	00:04:10.621 - 00:05:08.191	Enseignant	[...] Donc. Euh tout le monde se souvient, donc vous aviez deux situations différentes. D'accord. Et qui finalement donc euh permettaient d'aboutir à la même chose. Valérie t'es en train de faire autre chose non? Euh Donc le le premier. Donc chacun avait trouvé euh Tamara aussi t'es en train de faire autre chose. Chacun avait trouvé une formule. D'accord. Donc les groupes vous avez trouvé des formules. Et donc tout le monde en était arrivé. Hop. Donc à la page 3 ou la page 2 où on avait plusieurs types de formule et fallait dire lesquelles correspondaient à la situation précédente. Donc si on regarde pour euh la situation avec les carrés bordés. Euh celle-là.
11	**00:05:56.839 - 00:05:57.739**		**Mise en commun et synthèse du premier exercice sur le carré bordé pour le groupe C.**
12	00:05:10.575 - 00:05:34.488	Enseignant	Cette partie-là de la classe, celle que vous avez travaillée. Donc on avait comme formule.[tableau 1 : elle écrit les formules] 4a plus 4, a plus 2 fois 4, a plus 2 fois 4 moins 4, a plus 1 fois 4, a plus 2 fois 2 plus a fois 2, a fois 4 moins 4.
13	00:05:34.715 - 00:05:39.216	Enseignant	Qui peut me rappeler le la situation, en fait, avec les carrés bordés. C'était quoi exactement?
14	00:05:39.216 - 00:05:40.291	Enseignant	Ce qu'on nous demandait?
15	00:05:40.386 - 00:05:45.011	Enseignant	Pour expliquer à l'autre groupe, là, c'était quoi qu'on vous demandait avec les carrés bordés?
16	00:05:47.013 - 00:05:51.485	Enseignant	Ouh ouh, qu'est-ce qu'on vous demandait avec les carrés bordés, fallait calculer quoi?
17	00:05:51.490 - 00:05:52.691	Enseignant	Vas-y Laure.
18	00:05:52.710 - 00:05:54.090	Laure	Les carrés gris.
19	00:05:54.090 - 00:05:56.811	Enseignant	Les carrés gris, alors les carrés gris c'était quoi exactement?
20	00:05:58.745 - 00:06:00.145	Michel	C'était pas les carrés blancs.
21	00:06:00.750 - 00:06:07.750	Enseignant	C'était pas les carrés blancs, ça c'est vrai. Mais que dire si par exemple t'avais un carré [tableau : dessin]
22	00:06:12.889 - 00:06:53.784	Enseignant	Donc un carré de 4 carrés de côtés. D'accord et ensuite les carrés gris c'était ceux qui faisaient le contour. [zoom tableau]. C'était ça. D'accord pour tout le monde? Donc du coup là pour 4 côtés. Quand note carré, il a 4 carrés de côtés. Le contour, il faisait combien de carrés? Comment on faisait pour calculer?
23	00:06:54.714 - 00:06:57.235	Elève	[inaudible]

24	00:06:57.570 - 00:08:19.960	Enseignant	Alors on faisait comment? Vous vous souvenez ou pas du tout? Ok donc il y avait plusieurs méthodes. ALors toi par exemple Divonne et Ina, vous faisiez le côté fois le nombre de côté du carré blanc [tableau 2]. D'accord fois 4.[tableau] Et après vous rajoutiez les 4 aux extrémités. Donc nous on avait 4 fois a plus 4. D'accord ça c'était votre première formule. Ensuite, votre formule à vous c'était quoi? Vous vous en souvenez ou pas. C'était quoi? [vers Yann, Michel, Chloé, Baptiste et Jean]
25		Enseignant	[murmures élèves] Comment vous faisiez? Alors ouais, du coup, vous calculiez n, donc on avait n plus n et ensuite les deux côtés. En les côtés des… les côtés extérieurs c'était n plus 2 et n plus 2. Donc vous aviez n fois 2 plus 2 fois 2. [tableau 2]Alors maintenant, dans toutes les formules que je vous propose là. Qu'est-ce qu'on peut nous pour savoir quelles sont les formules qui correspondent à notre situation? Alors déjà notre première. Chloé, est-ce qu'elle correspond à notre situation ou pas?
26	00:08:20.000 - 00:08:20.790	Chloé	Oui
27	00:08:20.789 - 00:08:21.829	Enseignant	Oui Pourquoi
28	00:08:21.850 - 00:08:25.915	Chloé	Parce que [inaudible]
29	00:08:25.474 - 00:08:34.635	Enseignant	Oui, qu'est-ce qu'il y a comme opération entre le 4 et le a? Un fois[tableau 3 : 4*a+4 oui]. Ca, ça marche. Ensuite est-ce que notre deuxième elle marche?
30	00:08:34.670 - 00:08:35.475	Chloé	Non
31	00:08:35.490 - 00:08:38.075	Enseignant	Alors pourquoi?
32	00:08:38.114 - 00:08:40.112	Philinte	Ca ne marche pas.
33	00:08:40.165 - 00:08:41.409	Enseignant	Pourquoi ça ne marche pas?
34	00:08:41.434 - 00:08:45.370	Philinte	Parce que ça va faire euh, ça va faire 8
35	00:08:45.369 - 00:08:46.515	Enseignant	Alors j'ai pas entendu Philinte.
36	00:08:46.534 - 00:08:48.195	Philinte	Ca fait a8 [inaudible]
37	00:08:48.214 - 00:09:10.995	Enseignant	Ca va faire a8. C'est ça? Ca, ça va faire 8a ou a8. C'est ça? Toute le monde est d'accord avec ça? [SIlence] Ca, ça ne marche pas parce que ça va faire a8. Tout le monde d'accord avec le fait a+2 fois 4 ça fait a8?
38	00:09:13.600 - 00:09:14.595	Enseignant	Oui
39	00:09:18.165 - 00:09:20.472	Enseignant	Ok alors explique-moi d'où il vient ton a8
40	00:09:20.489 - 00:09:21.655	Philinte	Du aplus 2
41	00:09:21.715 - 00:09:22.965	Enseignant	aplus 2 ça fait combien?
42	00:09:22.975 - 00:09:24.484	Philinte	Ah non, non [inaudible]
43	00:09:24.504 - 00:09:28.380	Enseignant	Ok aplus 2 ça fait combien? aplus 2 comment tu l'écris en fait?
44	00:09:28.120 - 00:09:33.040	Philinte	Ca fait 12. Parce que a plus 2, ça fait 3.
45	00:09:33.080 - 00:09:35.515	Elève	Quoi? Hein?
46	00:09:35.540 - 00:09:40.515	Enseignant	aplus 2 ça fait 3. C'est ça que tu m'as dit? Ok ça veut dire que tu considère que ton a il est égal à combien là?
47	00:09:40.535 - 00:09:41.324	Philinte	1
48	00:09:41.264 - 00:09:42.110	Enseignant	A combien?
49	00:09:42.169 - 00:09:42.789	Philinte	[inaudible]
50	00:09:42.819 - 00:09:46.275	Enseignant	À 1. D'accord, est-ce notre a il est forcément égal à 1 ou pas?

51	00:09:46.299 - 00:09:47.114	Elève	Non [à plusieurs]
52	00:09:47.144 - 00:09:49.675	Enseignant	Notre a il peut être égal à quoi? C'est quoi notre a exactement?
53	00:09:49.699 - 00:09:51.624	Elève	[inaudible]
54	00:09:51.524 - 00:09:53.995	Enseignant	Ca peut être à quoi Marc?
55	00:09:53.990 - 00:09:54.320	Marc	Tout.
56	00:09:54.330 - 00:09:56.280	Enseignant	A tout. Ca veut dire quoi tout?
57	00:09:56.290 - 00:09:57.144	Marc	Heu. A tous les chiffres
58	00:09:57.139 - 00:09:58.835	Elève	A n'importe quel nombre.
59	00:09:58.969 - 00:10:05.875	Enseignant	A n'importe quel nombre. D'accord. Donc toi, notre a il ne peut pas être égal à 1. Mais toi d'où il vient ton 8a. aplus 2 fois 4, ça fait 8a.
60	00:10:05.885 - 00:10:08.310	Philinte	Ouai [inaudible]
61	00:10:08.220 - 00:10:08.835	Enseignant	Oui
62	00:10:09.184 - 00:10:18.475	Enseignant	D'accord t'as fait a fois 2 et t'as pas fait a plus 2. D'accord donc 2a, c'est exactement ce qu'on a rappelé tout à l'heure, 2a ça veut dire quoi?
63	00:10:18.514 - 00:10:19.555	Elève	a fois a [discrètement]
64	00:10:20.034 - 00:10:21.155	Elève2	[inaudible]
65	00:10:21.584 - 00:10:26.675	Enseignant	En fait, là, il n'y a pas marqué d'opération là. Dans 2a il y a pas marqué d'opération. Pourtant il y a une opération là.
66	00:10:26.689 - 00:10:27.589	Elève	2 fois a
67	00:10:27.160 - 00:10:46.800	Enseignant	C'est 2 fois a. […] D'accord. Donc a plus 2 , tu peux pas euh, le réduire en 2a. D'accord?
68	00:10:36.604 - 00:10:38.635	Enseignant	Alors pourquoi il y a fois 4. Bah du coup, ça c'est notre formule. Est-ce que a plus 2 fois 4 c'est notre formule?
69	00:10:46.819 - 00:10:47.835	Elève	Non
70	00:10:48.454 - 00:10:50.400	Enseignant	Est-ce qu'on peut faire a plus 2 fois 4?
71	00:10:50.405 - 00:10:50.490	Elève	Non
72	00:10:50.499 - 00:10:53.475	Enseignant	Alors pourquoi non? Comment on fait pour montrer non?
73	00:10:55.809 - 00:11:00.159	Enseignant	C'est quoi notre technique pour voir si euh c'est bon ou pas? […] Laure?
74	00:11:00.149 - 00:11:05.515	Laure	On fait euh 2a fois 4 [inaudible]
75	00:11:05.685 - 00:11:19.515	Enseignant	2a fois 4 on peut pas le calculer. Alors déjà c'est pas 2a fois 4 hein, c'est a plus 2 fois 4. D'accord parce que justement Philinte, il s'est
76	00:11:22.950 - 00:11:26.675	Enseignant	Comment on peut faire pour montrer si deux formules elles sont égales ou pas? Laure?
77	00:11:26.689 - 00:11:29.315	Laure	On remplace par un nombre.
78	00:11:29.169 - 00:11:32.549	Enseignant	Alors, on peut le remplacer par un nombre. Qu'est-ce qu'on va remplacer par un nombre?
79	00:11:32.589 - 00:11:34.104	Elève	Le a, le a [plusieurs élèves]
80	00:11:34.110 - 00:11:40.475	Enseignant	Le a. Alors si par exemple je le remplace par un nombre. Par exemple, quel nombre?
81	00:11:40.455 - 00:11:42.555	Elève	2, 4, 3 [plusieurs élèves]

82	00:11:42.534 - 00:11:44.955	Enseignant	Ok, 3 ou 4.
83	00:11:44.979 - 00:11:46.484	Elève	[rires]
84	00:11:46.504 - 00:11:49.634	Enseignant	Personellement, j'en choisirais un encore plus simple. Qu'est-ce qu'on peut choisir comme nombre?
85	00:11:49.604 - 00:11:50.819	Elève	1
86	00:11:50.409 - 00:11:50.819	Philinte	1
87	00:11:50.690 - 00:11:50.840	Eleve2	0
88	00:11:51.019 - 00:11:54.035	Enseignant	0 ou 1. D'accord, pourquoi est-ce que c'est plus simple?
89	00:11:54.019 - 00:11:55.835	Elève	Parce que la calculatrice??
90	00:11:55.980 - 00:11:56.995	Enseignant	Parce que?
91	00:11:57.004 - 00:11:58.320	Philinte	Parce que c'est un des plus petits
92	00:11:58.305 - 00:12:04.275	Enseignant	Voilà, c'est facile à calculer. D'accord. Alors si je remplace par 0 [tableau 3 : résultats en colonne], le premier, ça nous donne quoi?
93	00:12:04.309 - 00:12:05.035	Elève	2
94	00:12:05.480 - 00:12:07.035	Eleve2	0. [un autre] 1
95	00:12:07.009 - 00:12:07.635	Enseignant	Non
96	00:12:07.649 - 00:12:08.915	Elève	1
97	00:12:09.589 - 00:12:10.835	Elève	Ca fait 8
98	00:12:10.119 - 00:12:10.835	Philinte	Ca fait 8
99	00:12:10.829 - 00:12:12.510	Enseignant	Alors 4 fois 0, ça fait combien?
100	00:12:12.524 - 00:12:13.235	Elève	0
101	00:12:13.234 - 00:12:15.515	Enseignant	0 plus 4, ça fait? 4
102	00:12:13.414 - 00:12:14.404	Eleve2	[inaudible]
103	00:12:16.369 - 00:12:18.470	Enseignant	Notre deuxième
104	00:12:18.780 - 00:12:20.820	Elève	8
105	00:12:18.790 - 00:12:20.155	Philinte	Ca fait euh 8
106	00:12:20.835 - 00:12:22.395	Enseignant	0 plus 2, ça fait.
107	00:12:22.390 - 00:12:23.060	Elève	2 [à plusieurs]
108	00:12:23.050 - 00:12:24.355	Enseignant	2, fois 4
109	00:12:24.334 - 00:12:25.035	Elève	8
110	00:12:24.854 - 00:12:27.275	Enseignant	8. Notre troisième
111	00:12:28.819 - 00:12:32.454	Elève	4 fois 2 ???
112	00:12:28.849 - 00:12:30.515	Philinte	Ca fait eux 4, 15?

113	00:12:32.364 - 00:12:34.795	Enseignant	0 plus 2, ça fait 4
114	00:12:35.540 - 00:12:38.675	Enseignant	euh, 0 plus 2, ça fait 2
115	00:12:37.815 - 00:12:38.670	Elève	2[à plusieurs]
116	00:12:38.860 - 00:12:39.875	Enseignant	2 fois 4 ça fait,
117	00:12:39.905 - 00:12:40.715	Elève	8 [à plusieurs]
118	00:12:40.625 - 00:12:41.614	Enseignant	moins 4, ça fait
119	00:12:41.674 - 00:12:42.675	Elève	4[à plusieurs]
120	00:12:43.784 - 00:12:45.715	Enseignant	4. Ensuite, notre quatre?
121	00:12:45.729 - 00:12:48.195	Elève	Ca fait 4. 4 [à plusieurs]
122	00:12:48.204 - 00:12:51.275	Enseignant	4 plus 0, 4. Notre cinq?
123	00:12:51.394 - 00:12:54.365	Elève	0 ??
124	00:12:54.205 - 00:12:55.755	Philinte	Ca fait -4
125	00:12:56.189 - 00:12:57.759	Enseignant	Ca fait -4 notre cinq?
126	00:12:57.789 - 00:12:58.555	Divonne	euh 8
127	00:12:58.799 - 00:13:00.275	Enseignant	Alors 0 plus 2, ça fait?
128	00:13:00.285 - 00:13:01.475	Elève	2. [un autre] 6
129	00:13:01.245 - 00:13:02.300	Enseignant	2, fois 2?
130	00:13:02.320 - 00:13:03.035	Elève	4 [à plusieurs]
131	00:13:03.040 - 00:13:03.790	Enseignant	4
132	00:13:03.664 - 00:13:04.734	Elève	Ca fait 4
133	00:13:04.334 - 00:13:04.835	Enseignant	Plus
134	00:13:04.934 - 00:13:05.995	Elève	0
135	00:13:05.124 - 00:13:06.755	Enseignant	Plus 0 fois 2, ça fait?
136	00:13:06.454 - 00:13:08.070	Elève	8, 0 [à plusieurs]
137	00:13:08.094 - 00:13:09.265	Enseignant	0 fois 2 ça fait combien?
138	00:13:09.215 - 00:13:09.915	Elève	0[à plusieurs]
139	00:13:09.925 - 00:13:11.204	Enseignant	0 donc 4 plus 0, ça fait?
140	00:13:11.224 - 00:13:11.915	Elève	4[à plusieurs]
141	00:13:11.675 - 00:13:11.904	Enseignant	4
142	00:13:13.964 - 00:13:15.300	Enseignant	Notre sixième.
143	00:13:15.315 - 00:13:15.985	Philinte	0

144	00:13:15.994 - 00:13:16.955	Elève	0
145	00:13:16.960 - 00:13:20.275	Enseignant	Alors 0 fois 4, ça fait 0 et 0 moins 4, ça fait?
146	00:13:20.764 - 00:13:23.755	Elève	[murmures] 4. [Philinte] Bah euh, ça fait 4.
147	00:13:23.369 - 00:13:24.259	Enseignant	0 moins 4, ça fait?
148	00:13:24.279 - 00:13:24.729	Elève	-4
149	00:13:24.699 - 00:13:25.755	Enseignant	-4
150	00:13:28.595 - 00:13:32.315	Enseignant	Alors, ça, ça nous permet de faire quoi? Une fois qu'on a ça là?
151	00:13:32.349 - 00:13:34.035	Philinte	A calculer des [inaudible]
152	00:13:34.054 - 00:13:36.915	Enseignant	Une fois qu'on a ça qu'est-ce qu'on peut dire?
153	00:13:36.949 - 00:13:38.439	Yann	On repère ceux qui sont pas ??
154	00:13:38.449 - 00:13:49.265	Enseignant	Alors on a calculer pour a égal 0. Alors à priori? Maintenant, qu'on a ça, qu'est-ce qu'on peut dire? Qu'elles sont les formules qui correspondent aux, à notre situation?
155	00:13:49.534 - 00:13:51.555	Philinte	[zoom tableau] Bah, tous sauf le 2 et le 6
156	00:13:51.370 - 00:13:53.675	Enseignant	Alors le 1, 3, 4, 5
157	00:13:58.704 - 00:14:00.755	Enseignant	Qu'elles sont celles pour qui ça ne marche pas?
158	00:14:00.884 - 00:14:02.024	Elève	Le 2 et 6 [à plusieurs]
159	00:14:01.940 - 00:14:06.200	Enseignant	Le 2 et 6. Donc celui-là [le 2)], on peut être sûr de mettre non [tableau : 2) non 6) non].
160	00:14:12.109 - 00:14:14.035	Enseignant	Est-ce que les autres on est sûrs que c'est vrai?
161	00:14:14.050 - 00:14:14.675	Elève	Non
162	00:14:14.679 - 00:14:15.435	Divonne	Si
163	00:14:15.430 - 00:14:16.235	Enseignant	Pourquoi
164	00:14:16.649 - 00:14:17.395	Divonne	Parce que
165	00:14:17.299 - 00:14:19.220	Enseignant	Est-ce que les autres on est sûr que c'est oui?
166	00:14:19.199 - 00:14:19.955	Divonne	Oui
167	00:14:20.509 - 00:14:26.749	Enseignant	Pour toi Divonne, ça veut dire que j'ai regardé pour une valeur, si c'est vrai pour une valeur, ça veut dire que c'est vrai pour n'importe quelle valeur.
168	00:14:26.630 - 00:14:35.955	Divonne	Non, Si [rire des autres]
169	00:14:35.964 - 00:15:41.515	Enseignant	D'accord, si par exemple, j'avais trouvé euh. Si là par exemple j'avais trouvé 4 [en montrant le 2) 8 au tableau]. Si ça avait été bon. Ca peut être bon juste pour une valeur. T'es d'accord avec moi ou pas? Si par exemple, on regarde. Le carré là. Ca c'est quelque chose que vous faites souvent. Souvent vous confondez [tableau 4] 2 au carré, a au carré. Alors par exemple, 3^2 ça fait combien?
170	00:15:41.525 - 00:15:43.235	Elève	9 [à plusieurs]
171		Enseignant	Et 3 plus 3 ça fait combien?
172		Elève	6 [à plusieurs]
173		Enseignant	Par contre notre 2 au carré, ça fait combien?
174		Elève	4 [à plusieurs]

175		Enseignant	Et 2 plus 2, ça fait combien?
176		Elève	4 [à plusieurs]
177		Enseignant	D'accord, là, on a bien a au carré qui est pas égal à 2a, a plus a si tu veux. Et là, pour cet exemple là, on a bien a au carré qui est égal à 2a. T'es d'accord avec moi ou pas? Donc, ça, ça marche pour cet exemple là mais ça marche pas pour tous mes autres exemples. C'est parce que c'est vrai pour une seule valeur que c'est vrai pour toutes les valeurs. Or nous, notre a là, c'est censé être vrai pour une seule valeur ou pour toutes les valeurs?
178		Divonne et ?	Une seule
179	00:15:43.695 - 00:15:49.475	Enseignant	Nos formules, là, elles sont vraies que pour une seule valeur? Si je mets une formule c'est pour dire que je mets une seule valeur
180	00:15:44.810 - 00:15:46.395	Divonne	Non, qu'une seule valeur
181	00:15:46.870 - 00:15:48.315	Elève	Une formule c'est dire que c'est pour
182	00:15:49.494 - 00:15:51.475	Elève	Bah non justement
183	00:15:50.674 - 00:15:55.155	Enseignant	Bah non justement, si c'est une formule, ça veut dire que c'est pour toutes les valeurs.
184	00:15:54.284 - 00:15:56.174	Michel	Vous m'avez embrouillé
185	00:15:56.124 - 00:15:57.099	Enseignant	Avec ça là?
186	00:15:56.969 - 00:15:57.635	Michel	Oui
187	00:16:04.305 - 00:16:06.160	Enseignant	Pourquoi je t'embrouille?
188	00:16:06.179 - 00:16:08.395	Michel	Vous avez vous avez dit trop d'erreurs
189	00:16:09.019 - 00:16:26.355	Enseignant	Alors je reéxplique. [Elle efface la tableau de droite, tableau 5]. Alors, si on a 2 au carré, ça fait combien? 4. Et 2 plus 2? 2 fois 2
190	00:16:27.395 - 00:16:28.395	Michel	6
191	00:16:28.405 - 00:16:29.675	Enseignant	Deux fois deux ça fait 6?
192	00:16:29.494 - 00:16:31.360	Elève	[Rires de la classe]
193	00:16:31.380 - 00:16:52.274	Enseignant	Alors, vas-y Michel. T"écoute parce que sinon [...]. Alors, si on mets 3 au carré, là qu'est-ce qu'on remarque? Qu'est-ce que tu remarques que 2 au carré? C'est égal à 2 fois 2. D'accord ou pas? Concentres-toi parce que sinon, je te réexplique pas Michel. 3 au carré ça fait combien.
194	00:16:52.244 - 00:16:52.814	Michel	9 [certains élèves : 9, 6]
195	00:16:52.814 - 00:16:55.675	Enseignant	9 et par contre 3 fois 2 ça fait?
196	00:16:55.284 - 00:16:57.035	Elève	6
197	00:16:56.974 - 00:17:01.635	Enseignant	6. Alors là est-ce que notre 3 au carré et notre 3 fois 2. Ils sont égaux ou pas.
198	00:17:01.515 - 00:17:02.235	Elève	Non
199	00:17:03.894 - 00:17:47.255	Enseignant	D'accord. Donc si on utilisait que cette exemple-là [en montrant 2^2 et 2*2], on aurait pu dire que a au carré, c'est égal à 2a. Par contre, si on ragarde avec cet exemple-là, a au carré, c'est pas égal à 2a. [zoom tableau]. D'accord, donc c'est bien ce que j'ai expliqué précédemment, c'est que là ce que vous trouvez avec a égla 0,qu'est-ce que ça nous permet de trouver avec a égal 0? Ca nous permet de trouver celles qui ne sont pas les formules. D'accord. Mais par contre pour trouver celles qui sont les formules. Qu'est-ce qu'on va pouvoir faire? Là on conjecture que c'est la 1, la 3, la 4, la 5. Et nous qu'est-ce qu'on va faire? Comment on va faire pour montrer ça?
200	00:17:47.265 - 00:17:48.555	Elève	On doit revérifier
201	00:17:48.585 - 00:17:50.835	Enseignant	On doit revérifier pour quoi?

202	00:17:50.869 - 00:17:52.075	Elève	Pour d'autres valeurs
203	00:17:52.009 - 00:17:56.349	Enseignant	Pour valeurs valeurs. Alors si par exemple je revérifie pour 1, pour 2, pour 3
204	00:17:56.369 - 00:17:57.915	Elève	Pour d'autres valeurs que…
205	00:17:57.239 - 00:18:06.395	Enseignant	Si par exemple, alors on va vérifier pour a égal 1[tableau : résultats en colonne]. Alors a égal, ça marche, ça fait combien le premier. 4 fois 1 plus 4 [4*1+4]
206	00:18:06.544 - 00:18:07.555	Elève	3 [unautre élève] 8
207	00:18:07.569 - 00:18:10.675	Enseignant	4 fois un, ça fait 4 plus 4?
208	00:18:10.794 - 00:18:12.315	Elève	Ca fait 8
209	00:18:12.314 - 00:18:21.390	Enseignant	Ca fait 8. Donc le deuxième on vérifie pas. Le troisième?
210	00:18:19.359 - 00:18:20.189	Elève	3 fois 2..
211	00:18:20.409 - 00:18:21.155	Philinte	12
212	00:18:22.024 - 00:18:22.595	Enseignant	Ca fait 8 aussi. Le quatre?
213	00:18:22.604 - 00:18:25.115	Elève	8
214	00:18:25.120 - 00:18:27.170	Enseignant	8. Pour le cinq?
215	00:18:27.175 - 00:18:28.275	Elève	Ca fait 8.[tout de suite]
216	00:18:28.240 - 00:18:35.400	Enseignant	Ca fait 8 aussi. Là, on a montré pour deux valeurs. Est-ce que si c'est vrai pour deux valeurs, ça veut forcément dire que c'est vrai pour toutes la valeurs?
217	00:18:34.164 - 00:18:34.875	Elève	Non
218	00:18:35.424 - 00:18:36.755	Eleve2	Non, Non [plusieurs élèves]
219	00:18:37.450 - 00:18:38.635	Enseignant	Donc, qu'est-ce qu'on va faire?
220	00:18:38.324 - 00:18:38.624	Eleve	On recommence
221	00:18:39.404 - 00:18:41.155	Enseignant	On recommence, encore?
222	00:18:41.180 - 00:18:42.875	Elève	Non?
223	00:18:42.870 - 00:18:46.319	Enseignant	Alors, tu vas recommencer pour combien de valeurs pour pouvoir montrer que c'est vrai pour toutes les valeurs?
224	00:18:46.219 - 00:18:47.714	Elève	Ouais, ouais, c'est vrai pour toutes les valeurs
225	00:18:47.005 - 00:18:47.515	Philinte	10
226	00:18:47.720 - 00:18:49.310	Divonne	Jusqu'à ce qu'il y ait une fausse
227	00:18:49.635 - 00:18:50.914	Enseignant	Jusqu'à ce qu'il y ait une fausse.
228	00:18:50.914 - 00:18:51.344	Divonne	Oui
229	00:18:51.249 - 00:18:53.249	Enseignant	Si tu trouves une fausse, ça vouloir dire quoi?
230	00:18:53.234 - 00:18:54.914	Divonne	Que c'est pas bon pour toutes les valeurs
231	00:18:54.714 - 00:19:08.715	Enseignant	Du coup là, ça veut dire que tu montres que c'est pas bon pour toutes les valeurs. [...Changement de place de Michael] Mais c'est pas ça que je te demande moi, c'est pour montrer que c'est égal.
232	00:19:09.420 - 00:19:11.795	Divonne	Bah, c'est [inaudible]

233	00:19:11.719 - 00:19:16.564	Enseignant	Oui mais si tu me le montres pour une valeur, pour deux valeurs, est-ce que tu vas pouvoir le montrer pour toutes les valeurs?
234	00:19:16.584 - 00:19:16.805	Divonne	Non
235	00:19:16.814 - 00:19:17.395	Elève	Non
236	00:19:17.384 - 00:19:21.090	Enseignant	Alors comment on va faire, pour pouvoir avec toutes les valeurs?
237	00:19:22.124 - 00:19:24.155	Enseignant	On va utiliser quoi à votre avis?
238	00:19:24.415 - 00:19:25.355	Philinte	On va utiliser 10.
239	00:19:25.145 - 00:19:25.795	Elève	[inaudible]
240	00:19:25.845 - 00:19:26.835	Enseignant	Comment?
241	00:19:28.634 - 00:19:30.115	Enseignant	Dix valeurs, c'est ça?
242	00:19:30.145 - 00:19:31.125	Elève	Ouais
243	00:19:31.185 - 00:19:32.285	Philinte	On va utiliser le 10.
244	00:19:32.309 - 00:19:33.875	Enseignant	Le 10 quoi?
245	00:19:33.894 - 00:19:35.355	Elève	??
246	00:19:35.434 - 00:19:37.395	Enseignant	Pour a égal 10, c'est ça?
247	00:19:37.630 - 00:19:43.195	Enseignant	Si tu fais ça pour a égal 10, tu vas encore utiliser une autre valeur. Nous, on va avoir besoin de quoi?
248	00:19:43.194 - 00:19:44.235	Elève	De lettres
249	00:19:44.250 - 00:19:58.479	Enseignant	Oui, d'accord on va avoir besoin des lettres. Donc si vous voulez montrer que c'est vrai pour n'importe quel nombre. D'accord. Il va falloir utiliser les lettres. Vous vous connaissez quoi comme euh calculs sur les lettres?
250	00:19:58.489 - 00:19:58.955	Philinte	1 [ou a?]
251	00:19:58.970 - 00:19:59.915	Elève	[inaudible]
252	00:19:59.909 - 00:20:01.895	Enseignant	On calcule quoi?
253	00:20:01.905 - 00:20:02.584	Elève	Euh
254	00:20:02.624 - 00:20:03.915	Eleve2	L'aire du carré et..
255	00:20:04.170 - 00:20:06.275	Elève2	Non, non, c'est pas ça
256	00:20:06.364 - 00:20:09.115	Eleve2	a au carré plus b au carré égal c au carré [a^2+b^2=c^2]
257	00:20:09.164 - 00:20:20.955	Enseignant	Alors, c'est avec Pythagore, c'était l'année dernière, mais qu'est-ce qu'on a vu au fur et à mesure du calcul mental? C'était? Qu'est-ce que vous avez fait comme calcul avec les...
258	00:20:21.814 - 00:20:22.755	Philinte	Factorisation
259	00:20:22.774 - 00:20:26.475	Enseignant	Voilà, la factorisation, a factorisation, ça fait partie de quoi?
260	00:20:26.494 - 00:20:29.275	Elève	[inaudible]
261	00:20:27.394 - 00:20:28.314	Eleve	Développement
262	00:20:29.724 - 00:20:41.355	Enseignant	Développement. C'est la distributivité. D'accord, vous ce que vous connaissez c'est [tableau] la distributivité. C'est k fois a plus b. Et k fois a plus b, ça donne quoi?

263	00:20:41.384 - 00:20:43.435	Philinte	ka plus kb
264	00:20:42.964 - 00:20:44.195	Elève	ka plus kb
265	00:20:43.430 - 00:20:48.595	Enseignant	Voilà. k fois a plus k fois b [en coeur avec les élèves].
266	00:20:49.719 - 00:20:54.770	Enseignant	D'accord. Alors, par exemple, pour notre deuxième là, comment on va faire. Yann.
267	00:20:54.945 - 00:20:56.235	Elève	[inaudible]
268	00:20:56.239 - 00:20:59.875	Eleve2	On fait 4 fois 2 plus 4 fois a
269	00:20:59.854 - 00:21:21.275	Enseignant	Alors, si on regarde celui-là, notre deuxième il faudrait qu'on arrive à montrer [tableau gauche avec carré bordé effacé, tableau 7]. Là j'aimerai bien que tout le monde écoute. [..]
270	00:21:25.584 - 00:21:33.875	Enseignant	Donc le troisième [tableau], a plus 2 fois 4 moins 4, comment je vais faire pour savoir si c'est la même chose que la première formule?
271	00:21:33.914 - 00:21:35.954	Elève	Bah, c'est le 4 qui euh…
272	00:21:35.910 - 00:21:41.190	Enseignant	Qu'est-ce qu'on va faire? [...] Qu'est-ce qu'on va faire pour savoir si c'est égal à la première formule?
273	00:21:41.214 - 00:21:42.315	Elève	On distribue.
274	00:21:42.304 - 00:21:43.555	Enseignant	Oui, on distribue quoi?
275	00:21:43.554 - 00:21:44.064	Ina	Le 4
276	00:21:43.914 - 00:21:44.214	Tamara	Non euh
277	00:21:44.524 - 00:21:46.519	Enseignant	4. Alors, ça va nous donner quoi?
278	00:21:46.514 - 00:21:47.234	Philinte	2 [inaudible]
279	00:21:47.199 - 00:21:49.715	Ina	4 fois 2 plus 4 fois a [4*2+4*a, tableau 7]
280	00:21:49.750 - 00:21:51.275	Enseignant	4 fois 2 plus 4 fois a
281	00:21:51.299 - 00:21:53.155	Elève	Et le moins 4 aussi on fait pareil.
282	00:21:53.179 - 00:21:55.574	Enseignant	Et le moins 4. Est-ce que le moins 4 on le distribue?
283	00:21:55.484 - 00:21:55.594	Philinte	Non
284	00:21:55.604 - 00:21:56.214	Elève	Non
285	00:21:56.200 - 00:21:59.995	Enseignant	Non, d'accord. Alors après on calcule. Ca, ça nous fait quoi?Chut
286	00:22:00.504 - 00:22:00.804	Elève	8
287	00:22:00.814 - 00:22:01.995	Enseignant	4 fois 2, 8.
288	00:22:01.634 - 00:22:02.664	Elève	plus
289	00:22:02.314 - 00:22:02.914	Enseignant	plus 4
290	00:22:02.740 - 00:22:03.715	Eleve2	4a
291	00:22:03.464 - 00:22:07.649	Enseignant	4a moins 4. Et là, qu'est-ce qu'on a le droit de calculer ensemble?
292	00:22:07.654 - 00:22:08.214	Elève	8 euh.
293	00:22:08.234 - 00:22:09.224	Eleve2	8 plus moins 4

294	00:22:09.234 - 00:22:11.155	Enseignant	Oui, et 8 plus moins 4, ça fait?
295	00:22:11.174 - 00:22:11.915	Elève	4
296	00:22:11.774 - 00:22:12.355	Eleve2	4
297	00:22:12.309 - 00:22:17.225	Enseignant	4. Donc ça, ça nous donne 4a plus 4 [tableau 7 : 4a+4]. Est-ce ça nous donne notre première formule?
298	00:22:17.240 - 00:22:17.795	Divonne	Ouais
299	00:22:17.945 - 00:22:23.195	Enseignant	Oui, hein. Donc ça marche. Tamara[..]
300	00:22:25.154 - 00:22:33.875	Enseignant	Donc, c'est la deuxième, non la troisième plutôt, ensuite la quatrième. Commen on va faire a plus 1 fois 4 [(a+1)4]
301	00:22:33.895 - 00:22:36.155	Elève	4 fois a plus 4 fois 1
302	00:22:36.150 - 00:22:41.435	Enseignant	4 fois a plus 4 fois 1 [tableau 7 : (a+1)4=4*a+4*1]. Donc ça c'est égal à quoi?
303	00:22:41.429 - 00:22:43.475	Elève	4a plus 4 [4a+4]
304	00:22:43.474 - 00:22:45.115	Eleve2	4a plus 4
305	00:22:57.675 - 00:22:59.635	Enseignant	Donc, ça donne quoi ça? [en montrant le tableau].
306	00:22:59.645 - 00:23:00.925	Elève	4a plus 4
307	00:23:00.945 - 00:23:03.309	Enseignant	4a plus 4. Est-ce que c'est égal ou pas au 1)?
308	00:23:03.305 - 00:23:03.597	Elève	Oui
309	00:23:03.593 - 00:23:09.929	Enseignant	Oui, donc le 3) ça marche aussi […]. Ensuite, le 5) comment on va faire?
310	00:23:14.477 - 00:23:15.973	Ina	On fait 2a
311	00:23:16.019 - 00:23:19.336	Enseignant	Alors 2a oui, pourquoi 2a d'ailleurs?
312	00:23:19.770 - 00:23:21.515	Ina	Ils vont ensemble.
313	00:23:21.609 - 00:23:22.595	Enseignant	Qui va ensemble?
314	00:23:22.644 - 00:23:24.725	Ina	Le 2 plus a
315	00:23:24.722 - 00:23:26.371	Enseignant	2 plus a, tu l'écris 2a c'est ça?
316	00:23:26.370 - 00:23:26.839	Ina	Non [inaudible]
317	00:23:27.365 - 00:23:30.708	Enseignant	Est-ce que 2 plus a ça fait 2a? 2a c'est quoi
318	00:23:27.802 - 00:23:28.187	Elève	Non
319	00:23:28.679 - 00:23:29.587	Elève	Non, non, non
320	00:23:30.301 - 00:23:31.531	Elève	2 fois a [à plusieurs]
321	00:23:31.535 - 00:23:37.557	Enseignant	2 fois a. D'accord, donc le a plus 2, tu ne peux pas l'écrire 2a. Par contre qu'est-ce que tu peux faire?
322	00:23:37.564 - 00:23:41.747	Ina	Bah le a, 2 fois 2 plus 2 fois a [tableau 7]
323	00:23:40.164 - 00:23:40.995	Enseignant	Voilà
324	00:23:41.720 - 00:23:50.199	Enseignant	2 fois 2 plus 2 fois a [tableau 7 : (a+2)*2+a*2=2*2+2*a+a*2] Alors ça comment je fais pour l'écrire différemment?

325	00:23:50.227 - 00:23:52.169	Elève	On peut réduire
326	00:23:52.325 - 00:23:54.755	Eleve2	4 plus 2a. [un autre] 4 fois plus 2 fois
327	00:23:53.814 - 00:23:57.050	Enseignant	Le premier ça fait combien?
328	00:23:55.831 - 00:23:58.327	Eleve2	fois 2 au carré
329	00:23:58.334 - 00:23:59.000	Enseignant	4, ensuite
330	00:23:58.729 - 00:24:01.593	Eleve2	plus 2a [à plusieurs]
331	00:24:01.604 - 00:24:02.475	Enseignant	plus 2a [tableau]
332	00:24:02.469 - 00:24:04.355	Eleve2	plus 2a
333	00:24:04.364 - 00:24:06.911	Enseignant	[tableau 7: (a+2)*2+a*2=2*2+2*a+a*2=4+2a+2a] Et ça, ça s'écrit comment?
334	00:24:06.920 - 00:24:11.628	Eleve2	Après on met les a les 2 avec les 2, ça fait 4 plus 4a [4+4a]
335	00:24:11.634 - 00:24:12.395	Enseignant	Très bien.
336	00:24:14.682 - 00:24:17.044	Enseignant	Alors est-ce que c'est égal?
337	00:24:17.070 - 00:24:17.575	Eleve2	Non
338	00:24:18.382 - 00:24:20.017	Enseignant	C'est égal 4 plus 4a ou pas?
339	00:24:20.000 - 00:24:20.594	Elève	Oui
340	00:24:20.594 - 00:24:24.635	Enseignant	Très bien, donc c'est quoi nos formules qui sont égales entre-elles?
341	00:24:24.634 - 00:24:26.475	Elève	3, 4, 5
342	00:24:26.500 - 00:24:29.424	Enseignant	Voilà, 3, 4, 5 avec la?
343	00:24:29.424 - 00:24:30.215	Elève	la 1
344	00:24:37.675 - 00:24:50.497	Enseignant	La 1. Très bien, juste pour faire le bilan là. Comment on fait pour montrer? On se sert de quoi. Ok. On se sert de quoi pour euh montrer que deux formules ne sont pas égales?
345	00:24:50.625 - 00:24:52.334	Philinte	Pythagore
346	00:24:53.880 - 00:24:55.755	Eleve2	Non, de la réciproque
347	00:24:55.124 - 00:24:55.910	Philinte	J'ai rien dit.
348	00:24:55.922 - 00:25:02.035	Enseignant	Ok, comment on a fait pour montrer que la formule 2 elle n'était pas égal aux autres là? Chut.
349	00:25:02.062 - 00:25:03.672	Ina	On a calculé.
350	00:25:03.725 - 00:25:05.235	Enseignant	On a calculé pour quoi?
351	00:25:05.370 - 00:25:08.620	Ina	Bah, si c'est le... c'est que
352	00:25:08.805 - 00:25:09.555	Enseignant	Pour?
353	00:25:09.810 - 00:25:10.555	Elève	Un nombre
354	00:25:10.934 - 00:25:24.274	Enseignant	Pour un nombre. D'accord. Donc pour montrer qu'une formule, que euh, deux formules, deux ingale.., deux expressions ne sont pas égales, il suffit de le montrer pour un nombre. Par contre, comment on fait pour montrer que deux égalités sont égales?

355	00:25:24.274 - 00:25:26.026	Elève	C'est la distributivité
356	00:25:25.190 - 00:25:25.589	Philinte	Hein?
357	00:25:26.029 - 00:25:31.235	Enseignant	On se sert de quoi? Voilà, des règles du calcul algébrique. Et vous vous connaissez quoi comme règles?
358	00:25:32.294 - 00:25:33.072	Philinte	Rien
359	00:25:33.080 - 00:25:35.475	Enseignant	La distributivité. Est-ce que c'est clair pour tout le monde ça?
360	00:25:35.537 - 00:25:37.835	Divonne	On va l'écrire dans le cahier?
361	00:25:37.912 - 00:25:41.635	Enseignant	Oui, après on va l'écrire dans le cahier. Mais là déjà j'aimerais bien que vous sachiez faire ça là.
362	00:25:41.745 - 00:25:42.755	Philinte	Mais en fait j'ai rien compris
363	00:25:42.764 - 00:26:06.117	Enseignant	C'est bon. T'as pas compris Philinte. Ok. Quand tu as deux égalités d'accord. Quand tu as deux expressions, pour voir si elles sont égales. D'accord ou pas. Pour montrer qu'elles sont égales, si tu as des lettres, tu es obligé d'utiliser le calcul algébrique. Pour pouvoir utiliser le calcul algébrique, c'est le calcul avec les lettres. D'accord, pour pouvoir utiliser le calcul algébrique, ça veut dire que tu te sers de la distributivité
364	00:26:06.144 - 00:26:07.825	Philinte	Ouais, ok
365	00:26:07.844 - 00:26:24.580	Enseignant	D'accord, k fois a plus k fois b égal k facteur de a plus b. D'accord mais par contre pour montrer que deux expressions ne sont pas égales, il suffit de montrer pour un seul exemple.
366	00:26:24.600 - 00:26:30.771	Enseignant	Alors ce qu'on va faire, c'est que, du coup, vous allez faire la partie d'après. Alors allez-y.
367			**Début exercice 2**
368	00:26:33.573 - 00:26:35.971	Enseignant	Hop, vous regardez l'exercice 2
369	00:26:36.045 - 00:26:42.630	Enseignant	Je vous laisse chercher 5 minutes et j'aimerais bien que tout le monde cherche, il faut dire vrai / faux et expliquer pourquoi.
370	00:26:42.693 - 00:26:44.091	Laure	Ca peut être les deux?
371	00:26:44.090 - 00:26:47.451	Enseignant	Alors allez-y. A ton avis est-ce qu'une égalité, ça peut être vrai et faux?
372	00:26:47.525 - 00:26:53.630	Laure	Non, [inaudible]
373		Elève	Bah, non, c'est…
374		Enseignant	Bah euh, peut-être réfléchis
375		Laure	bah oui parce que là-bas on a [montre le tableau de droite]
376	00:26:53.860 - 00:26:56.371	Enseignant	Est-ce que l'égalité [montre tableau droite] avec les lettres, elle était vraie?
377	00:26:58.605 - 00:26:59.371	Laure	Ouais
378	00:26:59.705 - 00:27:01.091	Enseignant	La dernière égalité
379	00:27:01.085 - 00:27:02.131	Laure	Non
380	00:27:02.290 - 00:27:05.611	Enseignant	Elle était vraie que pour une valeur.
381		Laure	Donc elle est fausse
382	00:27:08.340 - 00:27:14.420	Enseignant	D'accord, donc elle est fausse. Si elle vraie que pour une valeur mais pas pour deux valeurs, ça veut dire qu'elle est fausse hein. Nous ce qui est important c'est que ce soit vrai pour toutes les valeurs.
383	00:27:14.446 - 00:27:15.771	Enseignant	Alors allez-y.
384	**00:27:16.286 - 00:27:27.691**		**Temps de recherche**
385	00:27:28.470 - 00:27:30.498	Mohamed	Là, vous pouvez me dire si c'est vrai ou faux.

386	00:27:30.175 - 00:27:33.556	Enseignant	Tu dois dire si c'est vrai ou faux et tu dois justifier. Allez je vous laisse 5 minutes.
			Avec Mohamed
387			ENS : Alors ça, est-ce que c'est vrai ou pas ? C'est ça qu'il faut que tu dises Faut que tu essaies d'expliquer pourquoi ?
388	34 :30		ENS : Alors par exemple, là, si c'est vrai, tu peux essayer de mettre une valeur. Par exemple, essaye de vérifier pour a égal 0. Tu regardes si c'est vrai ou pas. D'accord ? Et ça tu me dis si c'est faux, ça veut dire qu'il faut que tu me montres aussi pour une valeur, pour voir si c'est vrai ou pas. D'accord.
			Avec Yann et Baptiste
389			Elève 1 : Madame, le premier il est faux ? ENS : Alors, le premier ? Elèves : Il faut, ENS : Pourquoi il est faux ? Elèves : parce que… Elève 2 : Y a, y a pas de a Elèce 1 : parce qu'on peut pas euh additionner les termes, a euh, un chiffre avec a et euh quand il y a l'adition ENS : Et ben alors-y, hop, vous mettez que c'est faux et vous mettez pourquoi. On a dit que pour montrer que c'était faux, qu'est-ce qu'on pouvait avoir comme justification aussi Elève 1 : Je sais plus. Ce que je me souviens, c'est qu'on peut pas additionner les chiffres avec les lettres. Enseignant : Je suis d'accord mais là, qu'est-ce qu'on vient de dire pour montrer que c'est faux, il suffit de faire quoi ? De montrer que c'est faux pour quoi ? Pour une valeur. Donc si par exemple, votre a, vous prenez n'importe quoi par exemple, 0, 2, 6, essaye pour 4 par exemple. A égal 4. Elève 2 : Bah c'est pas possible Ens : 4 plus. Bah, il faut que tu calcules Elève 1 : Comment ça ? Ens : Si ton a par exemple, il est égal à 4. De, ta première partie de l'égalité, elle est égale à combien ? Elève 2 : à 8.
390			Ens : 4 plus ? Elève 2 : 14 Elève 1 : 34 Ens : Non Elève 1: Bah si parce que … Ens : 3a, c'est pas 34 hein. C'est quoi entre 3 et 4 ? Y a quoi comme opération entre 3 et 4 Elève 1 : fois Elève 2 : fois Ens : 3 fois 4, c'est 4 plus 3 fois 4 [4+3*4] Elève 1: Ca fait plus fois 4, ça fait Ens : Ca fait 12 plus 4. 12 plus 4 ça fait ? Elève 2 : Ca fait 16 Elève 1: Mais non, euh 12 plus 4, ça fait.. Ah ouais Ens : Ca fait 16. Et là de l'autre côté ? 7 fois ? Elève 2: 7 fois a Ens : notre a on a dit qu'il était égal à combien ? Elève 2 : À 4. Elève 1 : 12 fois 4 Ens : Donc 7 fois 4, ça fait combien ? Elève 1 : Ca fait euh, Elève 2 : 27

391			Elève 1 : non euh, trente euh, 32 Ens : Non plus Elève 1 : 36 Ens : Un peu en-dessous Elève 2 : 32 Chloé ou Jean : 23 Elève ?: 28 Ens : Alors 7 fois 4 28. Donc est-ce que 28 c'est égal à .. Est-ce que 28 c'est égal à, on avait dit combien ? 16 Elèves : Non Ens : Non. Bah du coup, c'est aussi comme ça que vous pouvez le… Elève ? : Ah Enseignant : alors, allez-y. Elèves : [inaudible] Ens : Hop et vous essayez de justifier le reste
392	**00:27:35.190 - 00:27:45.571**		**Groupe Mohamed-Gabrielle**
393	**00:27:48.575 - 00:28:02.350**		**Groupe Mohamed Gabrielle**
394	**00:28:02.836 - 00:28:16.343**		**Mohamed**
395	**00:28:24.282 - 00:30:16.075**		**Yann**
396	00:30:17.080 - 00:30:21.190	Enseignant	Hop on se met au travail. Allez, Gabrielle, dépêche-toi. Tamara c'est pareil.
397	**00:30:23.049 - 00:30:44.249**		**Groupe Divonne-Ines**
398	1,534722222	Avec Divonne et Ines	Divonne : Mais j'arrive pas à… Ens : Ok pourquoi c'est faux. On a dit qu'on pouvait justifier comment ? Divonne : Euh, avec ça Ens : Avec ça quoi ? Divonne : Que euh les lettres, non euh comme si on remplace les lettres par un chiffre Ens : Voilà. Si on remplace les lettres par un chiffre. Alors essaye. Prends n'importe quel chiffre et tu regards si c'est vrai ou faux.
399	**00:30:44.329 - 00:31:32.969**		**Avec Anne**
400	1,541666667		Enseignant : Vas-y Anne. Est-ce que c'est ou faux ça, pour toi ? Anne : Euh, c'est faux Ens : Pourquoi ? Anne : Parce que 7a c'est a7 Ens : Et c'est quoi a7 ? Anne : [inaudible] Ens : Alors vas-y mets et puis explique ça. Anne : C'est ça ? Ens : Non. a7 ou 7a, 7a, Ça veut dire quoi comme opération ? […] Anne : 4 plus 3, 4 plus 3 c'est 7 Ens : hum Anne : Il faut enlever le a Ens : Où ça ? Anne : Là, là. Ens : Donc en fait pour toi ça ferait 4 plus 3 égal 7 ? Il y a un a en fait, hein donc c'est plus exactement les mêmes euh Anne : Bah, c'est vrai alors. Ens : Bah mets vrai alors et essaye d'expliquer pourquoi.
401	**00:31:33.917 - 00:32:07.449**		**Avec Laure**

402	1,586805556		Laure : Madame, c'est bon ? Madame j'ai rien compris Ens : Alors 4 au carré ça fait combien. Ah oui, alors d'accord, du coup ta justification, il faut que tu la mettes […] 4 au carré, ça fait 16, ça je suis d'accord. Du coup, celui-là, ça fait ça donc c'est différent hein. Laure : Ah oui Ens : Tu comprends ce que je veux dire, parce que là tu m'écris que des égalités donc du coup euh, et ça c'est vrai. Ouais. Et ça c'est vrai aussi ? Laure : Non, ça c'est faux, mais j'ai mis euh Ens : Bah du coup, réécris-moi l'égalité, après tu fais le 2).
403	00:32:08.099 - 00:32:11.435	Enseignant	On va corriger la première égalité déjà. C'est bon tout le monde, tout à fait?
404	00:32:15.549 - 00:32:21.795	Enseignant	Michel [inaudible]
405	**00:32:15.552 - 00:32:31.875**		**Groupe Michel**
406	**00:32:22.830 - 00:32:26.435**	**Avec Michel**	**Ens : Alors du coup ça c'est vrai ou pas ? […] C'est vrai ou c'est faux ?** **Michel : C'est faux Cest faux, ça c'est faux** **Ens : Alors, explique pourquoi maintenant.**
407	**00:32:33.699 - 00:32:43.035**		**Groupe B, aperçu rapide**
408	**00:32:43.049 - 00:32:44.249**		**Correction première égalité groupe C : 4+3a=7a**
409	00:32:43.347 - 00:32:45.220	Enseignant	Alors si on essaie de corriger le premier.
410	00:32:47.452 - 00:32:49.955	Enseignant	Chut, Alors Yann, finis la suite là.
411	00:33:00.605 - 00:33:02.595	Enseignant	Alors, notre première égalité.
412	00:33:05.260 - 00:33:13.075	Enseignant	Alors, pour le premier, 4 plus 3a égal 7 a. J'aimerais bien le silence, là.
413	00:33:13.114 - 00:33:15.835	Enseignant	4 plus 3 a égale 7 a
414	00:33:15.874 - 00:33:17.560	Enseignant	Bon alors qu'est-ce que t'as mis Marc
415	00:33:17.584 - 00:33:19.374	Divonne	Là, Madame, c'est plus ou moins.
416	00:33:19.394 - 00:33:23.835	Enseignant	Oui, 4 plus 3 a égal 7a. Bah si on le fait ensemble maintenant, qu'est-ce que tu as envie de dire?
417	00:33:23.942 - 00:33:24.690	Enseignant	Chut, Gabrielle
418	00:33:26.059 - 00:33:26.500	Gabrielle	Rien
419	00:33:26.529 - 00:33:27.340	Enseignant	Vrai ou faux?
420	00:33:27.369 - 00:33:28.039	Elève	[Mohamed ou Yann] Faux
421	00:33:28.084 - 00:33:29.220	Enseignant	Pourquoi faux?
422		Yann	Onpeut pas les additionner.
423	00:33:29.250 - 00:33:31.050	Elève	Je peux le dire, j'sais qu'elle est fausse.
424	00:33:31.020 - 00:33:34.315	Enseignant	Alors déjà on lève la main. Chut. Yann.
425	00:33:34.232 - 00:33:35.659	Yann	Parce qu'on peut pas les additionner.
426	00:33:35.709 - 00:33:37.239	Enseignant	Qu'est-ce qu'on peut pas additionner?
427	00:33:37.249 - 00:33:40.160	Yann	Les, euh, les chiffres avec les lettres.
428	00:33:40.180 - 00:33:53.740	Enseignant	D'accord, donc là tu me donnes une justification. On n'a pas le droit d'additionner les lettres avec les chiffres, c'est 3a. Chut Anne. Donc on n'a pas le droit d'additionner le nombre avec la lettre.

429	00:33:54.892 - 00:34:00.640	Enseignant	Chut. Chloé. On a dit qu'une justification c'était quoi aussi. Ah euh Ina.
430	00:34:00.639 - 00:34:01.915	Ina	[inaudible]
431	00:34:01.789 - 00:34:03.860	Enseignant	Qu'est-ce que tu as mis, toi? Tu as mis que c'était vrai ou faux?
432	00:34:03.874 - 00:34:04.699	Ina	J'ai mis faux
433	00:34:04.732 - 00:34:06.210	Enseignant	Très bien, pourquoi est-ce que c'est faux?
434	00:34:06.174 - 00:34:09.919	Ina	Parce que les lettres, on peut pas les additionner avec les chiffres.
435	00:34:09.870 - 00:34:17.830	Enseignant	Ok, donc ça c'est une première justification. Mais, là, par rapport à ce qu'on a fait juste avant. Comment on va faire pour justifier ça, là?
436	00:34:17.900 - 00:34:21.389	Elève	Bah le truc avec les lettres
437	00:34:21.375 - 00:34:24.595	Enseignant	Ca je suis d'accord mais par rapport à ce qu'on a vu juste, avant Divonne?
438	00:34:24.590 - 00:34:26.540	Divonne	On remplace la lettre par un chiffre.
439	00:34:26.630 - 00:34:28.514	Enseignant	Très bien. Par quel chiffre par exemple?
440	00:34:28.530 - 00:34:28.610	Divonne	Zéro
441	00:34:28.624 - 00:34:29.330	Enseignant	Chut
442	00:34:29.269 - 00:34:32.670	Divonne	Ca, ça fait 4 plus
443	00:34:32.649 - 00:34:35.960	Enseignant	Alors pour a égal 0, alors 4 plus
444	00:34:35.969 - 00:34:38.050	Divonne	3 fois 0
445	00:34:38.064 - 00:34:39.254	Enseignant	Alors ça, ça fait combien?
446	00:34:39.260 - 00:34:39.980	Divonne	ça fait 4
447	00:34:40.090 - 00:34:43.820	Enseignant	Ca fait 4. Ecoute Yann. Et l'autre partie, c'est quoi?
448	00:34:44.009 - 00:34:45.380	Divonne	7 fois 0
449	00:34:45.369 - 00:34:46.555	Enseignant	Et normalement ça devrait faire combien?
450	00:34:46.780 - 00:34:47.595	Divonne	4
451	00:34:47.622 - 00:34:51.220	Enseignant	Oui, ça fait 4, je suis d'accord. C'est moi qui m'exprime pas bien.
452	00:34:52.170 - 00:34:53.779	Enseignant	Ensuite, qu'est-ce que tu as fait?
453	00:34:53.787 - 00:34:54.795	Divonne	Euh rien
454	00:34:54.744 - 00:34:57.640	Enseignant	C'est tout. Donc là, ça te permet de dire que c'est pas égal?
455	00:34:57.640 - 00:34:58.130	Divonne	Oui
456	00:34:59.474 - 00:35:01.580	Enseignant	Parce que normalement c'est censé être égal à combien?
457	00:35:01.590 - 00:35:02.370	Divonne	A 7
458	00:35:02.404 - 00:35:04.275	Enseignant	Alors pourquoi 7?
459	00:35:04.269 - 00:35:05.395	Divonne	Parce que c'est 7.

460	00:35:05.389 - 00:35:07.394	Enseignant	Y a pas marqué 7 hein, y'a marqué 7 quoi?
461	00:35:07.384 - 00:35:08.195	Divonne et autre	7a
462	00:35:08.115 - 00:35:08.514	Enseignant	7a
463	00:35:08.859 - 00:35:11.355	Elève	Bé, il manquera toujours le... le a
464	00:35:09.987 - 00:35:11.355	Enseignant	Donc 7 a ça va faire combien?
465	00:35:11.389 - 00:35:12.519	Eleve2	7 fois 0
466	00:35:13.180 - 00:35:14.795	Divonne	Euh
467	00:35:16.155 - 00:35:16.859	Divonne	7 fois 0
468	00:35:17.604 - 00:35:19.195	Enseignant	7 fois 0. Hein.
469	00:35:19.795 - 00:35:21.395	Enseignant	Et 7 fois 0 ça fait combien?
470	00:35:21.424 - 00:35:22.555	Elève	0.
471	00:35:22.805 - 00:35:58.955	Enseignant	Très bien, Mikaël […]
472	00:35:59.354 - 00:36:29.915	Enseignant	Du coup, ça, ça marche. D'accord, ça c'est une justification. L'autre c'est aussi une justification mais c'est pas exactement une justification mathématique. D'accord, c'est que toi t'as, dans ta tête, t'as des règles, tu sais que euh, on n'a pas le droit de faire ça parce que on t'a dit de pas faire ça. On est d'accord Ines. Alors que si jamais tu prends un exemple et que tu montres que, avec cet exemple, avec ce nombre-là, ça ne donne pas le même résultat. D'accord. Ça veut bien dire que ton égalité est fausse.
473	00:36:16.950 - 00:36:17.835	Ina	Hum
474	00:36:30.639 - 00:36:34.635	Enseignant	Est-ce qu'il y en a quI ont essayé, est-ce qu'il y en a qui ont mis une autre justification ou pas?
475		Elève	Oui [discret]
476	00:36:35.895 - 00:36:40.355	Enseignant	Qu'est-ce qui faudrait changer dans notre égalité pour que ça marche?
477	00:36:42.094 - 00:36:43.060	Enseignant	Vas-y
478	00:36:43.012 - 00:36:44.030	Baptiste	On mets 4a.
479	00:36:44.150 - 00:36:47.555	Enseignant	Voilà, c'est ça l'égalité qui marchera.
480	**00:36:47.862 - 00:36:57.184**		**[tableau, 4a+3a=7a] Deuxième temps de recherche groupe C.**
481	00:36:57.799 - 00:37:06.315	Enseignant	C'est bon. Alors ensuite vous faites les deux autres. Allez-y. Et si elle est vraie, votre égalité, il faut trouver une justification...
482	00:37:07.409 - 00:37:10.195	Elève	[inaudible]
483	00:37:11.967 - 00:37:12.675	Enseignant	Non, c'est pas donné la justification
484	00:37:19.939 - 00:37:21.289	Gabrielle	Madame, j'fais la suite?
485	00:37:21.417 - 00:37:23.595	Enseignant	Oui, faites la deuxième la question après.
486	**00:37:26.244 - 00:38:26.329**		**Groupe B Oulianne**

487	0,030578704	Avec Oulianne	Ens : Donc toi tu as mis que c'était vrai Oulianne : ouais Ens : OK, bah essaye avec a euh. Pourquoi c'est vrai alors. Oulianne : c'est quoi ta justification Elève : Bah euh, c'est je remplace le a par 2. Ens : Ouais Oulianne : C'est 2 fois 2 euh, ça fait 4 au carré et là euh 2 fois 2 au carré, ça fait 4 Ens : sauf que ton carré, il est juste sur ton a et c'est parce que c'est vrai que pour une valeur que c'est vrai pour toutes les valeurs. D'accord ? Oulianne : hum Ens : Donc c'est ça qu'il faut que tu essayes de voir. Faux que tu me donnes une justification avec les lettres. Donc t'essaye de développer là, 2a au carré, à combien c'est égal ? C'est quoi fois quoi 2a au carré ? Oulianne : Bah je dois développer Ens : Ouai, bah essaie de développer. Si c'est vrai, ça veut dire qu'il faut que tu essaies de développer. D'accord.
488			**Groupe Marc et Gabrielle**
489	0,03119213	Gabrielle (ou Tamara) et Marc	Ens : Gabrielle et Marc. Hop. Vous en êtes où ? La deuxième, vous avez mis que c'était vrai ou que c'était faux ? Marc : C'est vrai Gabrielle : J'ai mis faux Marc ; C'est vrai Ens : C'est vrai la deuxième Gabrielle : Je sais pas Marc : C'est vrai Ens : Bah, justement, tu viens de me dire que c'était ce qu'il y avait de marquer au tableau. Essaye avec 3. Marc : Bah ouais, c'est faux avec 3. Ens : Bon bah laors si c'est faux avec trois ça veut dire quoi? Marc : Ca dépend des chiffres aussi. Ens : Oui je suis d'accord ça dépend des chiffres mais nous ce qu'on veut c'est que ce soit vrai pour n'importe quelle valeur de a. C'est ça dans l'énoncé. Marc : Bah c'est faux alors Gabrielle : Ah Ens : Alors est-ce que c'est vrai pour n'importe quelle valeur de a? Marc : Non Ens : Non, pourquoi ? Est-ce qu'il y en a une pour laquel c'est pas vrai? Marc : le 3 Enseignant : le 3. Pourquoi pour le 3 c'est pas vrai ? Marc : Parce que ça fait euh 2, euh 3 fois 3 ça fait 9 Ens : Ouais Marc : Et euh Enseignant : Et 2 fois 3 ? […] Marc, 2 fois 3, ça fait 6 Ens : Ouais, alors vas-y, c'est ça, qu'il faut que tu m'expliques. Et le troisième, après c'est la même chose.
490	**00:39:23.214 - 00:40:53.355**		**Groupe Ines Divonne**

491	0,031875	Avec Ina et Divonne	Ina : C'est faux Ens : Pourquoi c'est faux ? Ina : Non mais ça, on doit pas justifier. on a dit tout à l'heure que si elle est fausse…. Divonne : moi j'ai justifié Ens : Ah bon, j'ai dit ça moi, que si celle-là elle est fausse alors les autres elles sont fausses Ina : Si euh une égalité elle est fausse Divonne : Non mais euh Ina Ens : Non, c'est pas ça que j'ai dit. J'ai dit si ton égalité elle est fausse pour un nombre, c'est pas ça que j'ai dit hein. Si ton égalité, si celle-là elle est fausse pour un nombre, ça veut dire qu'elle est forcément fausse. D'accord, parce qu'elle doit être vrai pour tous les nombres mais il faut que tu fasses le même travail avec les autres égalités hein, d'accord. Les égalités elles ne sont liées l'une à l'autre. Ina : Moi, j'ai compris comment on fait. 2 fois un chiffre… Divonne : regarde, on fait comme çà là. Ina : …est égal à ?? au carré Divonne : On fait quelque chose au carré, égal quelque chose, euh Ens : 3 au carré ça fait 9, oui je suis d'accord. Et du coup, l'autre c'est quoi, l'autre partie de l'égalité ? L'autre partie de l'égalité c'est quoi ? Divonne : 2 fois, 3 fois… 9 fois a
492			Ens : Alors ça, regarde. Là, c'est ta première partie de l'égalité, ça je suis d'accord. Ok, c'est ça. Maintenant, c'est ta deuxième partie de l'égalité, faux que tu la mettes là Divonne : Mais 2a Ina : 2, 2, 2 fois Ens : 2 fois combien Toi tu as pris combien ? Ina : 2 fois 3 Ens : Ton a il fait combien ? 2 fois 3 Ina : Ah, ça fait 6. Ens : Ca fait 6 Divonne : Ouais Ens : Donc est-ce que c'est égal ? Elève : Non, bah non Ens : Non Ina : Donc c'est faux. Divonne : Donc c'est pour ça que j'ai mis bon Ens : Ouais, alors maintenant tu me fais ceux-là
493	00:40:54.071 - 00:41:44.437		Groupe Melina Philinte
494	00:41:50.753 - 00:41:53.098	Enseignant	Yann, t'en es où?
495	00:41:53.369 - 00:41:55.355	Yann	Au deuxième.
496	00:41:55.452 - 00:41:56.555	Enseignant	Dépêche-toi.
497	**00:42:21.690 -**		**Avec Mélusine Philinte (2a)^2=2a^2, groupe B**

498			Philinte : Oui Madame, j'ai fini Ens : Vous avez fini ou pas ? Ok, donc on va essayé de corriger après Philinte : Madame, j'ai fini. J'ai fini mais bon Ens : Et pourquoi le premier, c'est vrai ? Mélusine : Celui-là ? Ens : Ouais Mélusine : Parce que euh, ça marche Philinte : Bah oui parce que… Ens : Et toi, c'est quoi ta justification. Alors toi tu m'as donné quoi comme justification ? Philinte : Parce que moi j'enlève la parenthèse et j'ai fini Mélusine : J'enlève les parenthèses et… Ens : Oui mais toi tu m'as mis quoi dans ta justification ? Mélusine : Bah, j'ai… Ens : est-ce que c'est, est-ce que du coup ça justifie le fait que ça soit vrai pour deux exemples, est-ce que ça veut dire que c'est vrai pour tout Philinte : Non Ens : Donc comment tu fais pour justifier? Mélusine : On développe Ens : Par exemple, ouais, comment vous faites pour développer ? Mélusine et Philinte : On développe. Ens : Bah, 2a au carré, ça veut dire quoi ? Philinte : 2a fois 2a [rires] Ens : Allez-y écrivez.
			Mise en commun égalité groupe B : (2a)^2=2a^2 [tableau 9]
499	00:42:07.874 - 00:42:09.795	Enseignant	Alors si on prend le deuxième.
500	00:42:28.629 - 00:42:34.913	Enseignant	Alors vous c'est quoi, vos trois égalités là? Philinte, puisque t'es en train de parler, tu me donnes tes égalités? La première?
501	00:42:34.989 - 00:42:41.019	Philinte	Ah la première, 3 euh 3 au carré.
502	00:42:41.247 - 00:42:43.654	Enseignant	C'est ça ton égalité, la première? Non, c'est pas ça l'égalité.
503	00:42:43.654 - 00:42:49.755	Philinte	Ah l'égalité, c'est 2a entre parenthèses au carré est égal à 2 a au carré.
504	00:42:50.454 - 00:42:57.315	Enseignant	Ok, vous avez mis quoi à ça? Euh je vous laisse 5 min pour finir les deux autres égalités. Je veux pas vous entendre alors hop on se met au travail.
505	00:42:57.835 - 00:42:59.352	Enseignant	Alors vous avez mis quoi, vous?
506	00:42:59.375 - 00:43:00.475	Philinte	Parce que c'est la même.
507	00:43:01.670 - 00:43:02.641	Enseignant	C'est, c'est vrai?
508	00:43:02.555 - 00:43:02.864	Philinte	Oui.
509	00:43:02.689 - 00:43:03.155	Elève	Hum hum.
510	00:43:05.290 - 00:43:07.445	Enseignant	Alors comment vous avez fait pour montrer?
511	00:43:07.482 - 00:43:09.395	Philinte	Bah euh, on enlève les parenthèses.
512	00:43:09.765 - 00:43:12.875	Enseignant	Alors t'enlèves les parenthèses donc pour toi les parenthèses ça change rien, qu'on les mette ou qu'on les mette pas.
513	00:43:12.970 - 00:43:14.995	Melina	Sauf si le chiffre est [inaudible].
514	00:43:15.095 - 00:43:15.849	Enseignant	Sauf si quoi?
515	00:43:15.830 - 00:43:16.995	Philinte	Le chiffre est négatif.
516	00:43:17.197 - 00:43:23.604	Enseignant	Si le chiffre est négatif. Donc en fait, il y a que quand le chiffre est négatif. Tamara, tu travailles.

517	00:43:25.875 - 00:43:28.395	Enseignant	Yann, tu te retournes.
518	00:43:30.795 - 00:43:33.579	Enseignant	Donc les parenthèses, ça sert que quand les chiffres sont négatifs.
519	00:43:33.592 - 00:43:33.864	Elève	Non
520	00:43:33.635 - 00:43:33.840	Philinte	Non
521	00:43:33.894 - 00:43:35.635	Elève	[Oulianne] Non, pour les priorités.
522	00:43:35.812 - 00:43:41.515	Enseignant	Oui, pour les priorités de calcul. Là, ça veut dire quoi en fait. Qui est-ce qui est au carré?
523	00:43:41.555 - 00:43:43.195	Melina	C'est bah, c'est le a.
524	00:43:43.204 - 00:43:44.075	Enseignant	C'est que le a.
525	00:43:44.104 - 00:43:45.222	Jocelin	Non le 2.
526	00:43:45.117 - 00:43:46.355	Philinte	Bah oui c'est le a.
527	00:43:47.195 - 00:43:49.515	Enseignant	Bah justement, pouquoi on a mis des parenthèses?
528	00:43:52.259 - 00:43:54.195	Enseignant	Pourquoi on a mis des parenthèses, justement?
529	00:43:57.257 - 00:44:04.197	Enseignant	Pourquoi on a mis des parenthèses, est-ce que c'est que le a qui est entre parenthèses? Ça veut dire que c'est le deux hein.
530	00:44:01.271 - 00:44:01.779	Philinte	Oui
531	00:44:05.355 - 00:44:07.115	Enseignant	Donc 2a au carré, ça veut dire quoi?
532	00:44:08.029 - 00:44:09.235	Enseignant	2a?
533	00:44:09.244 - 00:44:10.355	Elève	Fois 2a.
534	00:44:10.169 - 00:44:14.024	Enseignant	Fois 2a. Et ça, comment on l'écrit?
535	00:44:14.024 - 00:44:14.995	Elève	2a au carré. [Enseignante écrit "faux", tableau 9]
536	00:44:14.024 - 00:44:14.995	Philinte	2a au carré.
537	00:44:15.005 - 00:44:18.716	Elève	Ça peut pas faire a au carré.
538	00:44:18.424 - 00:44:19.195	Philinte	Mais c'est 2a.
539	00:44:19.086 - 00:44:24.115	Enseignant	Ah, bah, non, regarde, alors là, si on écrit tous les signes "multiplié", ça donne quoi?
540	00:44:24.130 - 00:44:25.435	Elève	2 fois a fois 2 fois a.
541	00:44:25.329 - 00:44:27.765	Eleve2	Ah ça fait 4a au carré.
542	00:44:28.032 - 00:44:29.715	Enseignant	Donc, ça fait?
543	00:44:29.717 - 00:44:31.435	Elève	4a au carré.
544	00:44:31.440 - 00:44:33.432	Enseignant	Donc elle est vraie, celle-là.
545	00:44:33.442 - 00:44:33.654	Philinte	Ouais
546	00:44:34.086 - 00:44:34.678	Elève	Non elle est fausse.
547	00:44:34.730 - 00:44:36.545	Eleve2	C'est vrai.

548	00:44:37.090 - 00:44:38.635	Philinte	Ça ne peut pas ne pas être vrai.
549	00:44:45.984 - 00:44:50.024	Enseignant	Et du coup comment vous pouvez faire pour le montrer? Parce que toi tu as utilisé avec quoi, euh Mélusine?
550	00:44:49.494 - 00:44:50.315	Philinte	Ça fait 3.
551	00:44:50.320 - 00:44:54.115	Valérie	Donc moi, j'ai fait [inaudible] avec euh avec des chiffres au lieu des lettres.
552	00:44:54.120 - 00:44:56.835	Enseignant	Oui et du coup pour les deux exemples, tu as trouvé les mêmes nombres.
553	00:44:56.830 - 00:45:01.419	Valérie	[inaudible]
554	00:45:01.157 - 00:45:11.515	Enseignant	Donc tu as mis avec a égal 0 et a égal 1. Eh bah justement, parce que tu vois, ça c'est un très bon exemple. C'est parce que toi tu as pris deux exemples. Tu t'es dit : ah tiens pour les deux "c'est bon", ça veut dire "c'est bon" c'est vrai pour n'importe lesquels.
555	00:45:11.082 - 00:45:12.075	Elève	Hé bah non.
556	**00:45:12.089 - 00:45:12.769**		**Correction égalité 2 groupe C : a^2=2a, tableau 10**
557	00:45:12.752 - 00:45:15.459	Elève	Madame, vous avez pas fait a au carré égal 2a
558	00:45:15.564 - 00:45:18.214	Enseignant	Oui, alors on va faire celui-là. Chut.
559	00:45:25.099 - 00:45:29.475	Enseignant	Ok, alors pour celui-là. Baptiste, qu'est-ce que tu as mis toi?
560	00:45:29.744 - 00:45:31.641	Baptiste	C'est faux.
561	00:45:31.594 - 00:45:32.875	Enseignant	C'est faux pourquoi? [Elle écrit "faux", tableau 10]
562	00:45:34.247 - 00:45:36.275	Enseignant	Comment on fait pour justifier? Chut
563	00:45:37.725 - 00:45:38.595	Enseignant	Divonne!
564	00:45:39.130 - 00:45:40.075	Baptiste	3 au carré.
565	00:45:39.142 - 00:45:43.518	Enseignant	Chut, non, c'est juste que je dis ton prénom parce que j'aimerais bien que tu te taises. Baptiste.
566	00:45:43.509 - 00:45:49.252	Baptiste	Parce que, euh, a au carré ça fait a [inaudible]
567	00:45:49.269 - 00:45:52.995	Enseignant	Oui, alors pourquoi. Comment tu vas faire pour me montrer que cette égalité est fausse?
568	00:45:52.994 - 00:45:54.555	Baptiste	Bah c'est faux.
569	00:45:54.680 - 00:46:00.590	Enseignant	Bah oui c'est faux. Alors pourquoi c'est faux. Tu peux essayer avec quoi, Baptiste? Qu'est-ce qu'on a dis juste avant?
570	00:46:00.604 - 00:46:01.629	Elève	[Mohamed] l'exemple du 2.
571	00:46:01.629 - 00:46:03.395	Enseignant	Là, comment on a fait?
572	00:46:03.410 - 00:46:04.195	Baptiste	Bah
573	00:46:04.189 - 00:46:06.835	Enseignant	On a utilisé quoi, là? Notre a, on l'a remplacé par?
574	00:46:06.832 - 00:46:07.869	Baptiste	Par un nombre
575	00:46:07.879 - 00:46:11.200	Enseignant	Par un nombre. Alors là qu'est-ce que tu peux faire pour montrer que c'est faux?
576	00:46:11.210 - 00:46:12.235	Elève	On met un 1
577	00:46:12.230 - 00:46:14.315	Baptiste	On met un 1 ça va ça ça

578	00:46:14.319 - 00:46:14.819	Elève	Ça fait 2 [Yann]
579	00:46:14.814 - 00:46:16.715	Enseignant	Par exemple, pour a égal 1.
580	00:46:17.579 - 00:46:18.555	Enseignant	Chut
581	00:46:18.369 - 00:46:19.365	Elève	a fois 2 égal 1
582	00:46:19.364 - 00:46:22.305	Enseignant	Alors 1 au carré ça fait combien? Chut!
583	00:46:22.314 - 00:46:23.355	Elève	Ça fait 1.
584	00:46:23.845 - 00:46:26.484	Enseignant	Ça fait 1. Et 2 fois 1.
585	00:46:26.495 - 00:46:27.435	Elève	Ça fait zéro
586	00:46:27.439 - 00:46:28.235	Eleve2	2
587	00:46:28.064 - 00:46:29.980	Enseignant	Ça fait 2. Alors est-ce que c'est égal?
588	00:46:29.979 - 00:46:30.159	Eleve2	Non
589	00:46:30.224 - 00:46:40.810	Enseignant	Non, d'accord. Du coup, ça, ça justifie le fait que ça n'est pas égal. Si vous trouvez une valeur pour lequelle ça n'est pas vrai, votre égalité est fausse.
590	**00:46:42.315 - 00:46:44.035**		**Correction deuxième égalité groupe B : a(a+2)=a^2+2, tableau 11**
591	00:46:44.029 - 00:46:47.275	Enseignant	Hop. Alors, vous votre deuxième égalité, c'est quoi Florianne?
592	00:46:47.289 - 00:47:01.260	Florianne	a entre parenthèseS a plus 2 égal 2 a au carré. Non c'est, euh, a au carré plus deux. C'est faux.
593	00:47:01.247 - 00:47:03.555	Enseignant	Alors pourquoi c'est faux? Chut! [Enseignante écrit "faux", tableau 11]
594	00:47:03.580 - 00:47:12.075	Florianne	Moi j'ai fait euh a fois a plus a fois 2 égal 2. A au carré plus 2
595	00:47:10.661 - 00:47:15.338	Enseignant	Ok, qu'est-ce que tu as fait, comment ça s'appelle? Yann, j'aimerais bien que tu retournes et que tu te taises.
596	00:47:15.349 - 00:47:16.794	Yann	[...]
597	00:47:16.809 - 00:47:21.344	Enseignant	T'es bien retourné en tout cas. Alors là qu'est-ce que t'as fait?
598	00:47:21.329 - 00:47:21.529	Florianne	J'ai développé
599	00:47:21.544 - 00:47:24.155	Enseignant	T'as développé oui. Donc ça fait a fois?
600	00:47:24.180 - 00:47:27.284	Florianne	a plus euh a fois 2
601	00:47:27.299 - 00:47:29.750	Enseignant	Oui, et donc ça fait? Chut!
602	00:47:29.764 - 00:47:33.764	Florianne	a au carré plus euh 2a.
603	00:47:33.765 - 00:47:40.889	Enseignant	Voilà. Est-ce qu'on était obligé d'utiliser ça pour montrer que c'était faux?
604	00:47:40.889 - 00:47:41.795	Florianne	Moi j'ai fait comme ça.
605	00:47:41.827 - 00:47:48.754	Enseignant	Oui tu as fait comme ça, je suis d'accord. Marine, retourne toi! Est-ce qu'on était obligé de faire comme ça pour montrer que c'était faux? On pouvait utiliser quoi?
606	00:47:46.384 - 00:47:46.915	Elève	Un nombre.
607	00:47:48.755 - 00:47:49.694	Elève	On remplace par un nombre.
608	00:47:49.909 - 00:47:56.969	Enseignant	Un chiffre, hein, d'accord. A partir du moment où vous trouvez que pour un des chiffres c'est faux, c'est, c'est bon ça fonctionne.

609	**00:47:57.005 - 00:47:58.355**		**Correction troisième égalité groupe C : (2a)^2=4a^2, tableau 12**
610	00:47:58.415 - 00:48:05.355	Enseignant	Alors ensuite votre troisième égalité. Allez, Gabrielle, c'est quoi ta troisième égalité?
611	00:48:05.424 - 00:48:09.595	Gabrielle	[inaudible]
612	00:48:09.379 - 00:48:16.555	Enseignant	Alors montre, bah vas-y essaie, montre-moi! Qu'est-ce que c'est ta troisième égalité. Essaie de faire. Yann, tu te retournes!
613	00:48:18.459 - 00:48:19.274	Enseignant	Allez, vas-y Gabrielle!
614	00:48:19.277 - 00:48:20.430	Gabrielle	Non, mais j'ai rien fait.
615	00:48:20.444 - 00:48:23.675	Enseignant	Bah montres-moi au moins l'égalité, essaye de dire si c'est vrai ou faux.
616	00:48:24.319 - 00:48:27.155	Enseignant	Alors c'est 2 a au carré égal.
617	00:48:27.979 - 00:48:29.225	Enseignant	Chut, Marc!
618	00:48:29.225 - 00:48:30.395	Gabrielle	Euh
619	00:48:31.822 - 00:48:37.635	Enseignant	Alors j'aimerais bien que tout le monde écoute, là. Est-ce que 2 a au carré, c'est égal à 4 a au carré?
620	00:48:39.260 - 00:48:41.155	Enseignant	Qu'est-ce que vous avez mis?
621	00:48:41.655 - 00:48:44.475	Elève	[plusieurs élèves en même temps] Oui, c'est ça. Mais bien sûr que c'est ça. C'est Vrai.
622	00:48:42.885 - 00:48:43.915	Philinte	Mais bien sûr que c'est ça.
623	00:48:45.345 - 00:48:46.275	Philinte	[rires]
624	00:48:48.054 - 00:48:49.675	Enseignant	Est-ce que c'est vrai ou pas, ça?
625	00:48:51.155 - 00:48:52.355	Enseignant	Ouh, ouh, Anne!
626	00:48:51.485 - 00:48:52.235	Philinte	Bah non c'est faux.
627	00:48:52.379 - 00:48:53.115	Elève	C'est vrai/ C'est faux.
628	00:48:53.265 - 00:48:54.389	Divonne	Non c'est faux.
629	00:48:54.400 - 00:48:55.235	Enseignant	Pourquoi c'est faux.
630	00:48:55.405 - 00:48:56.515	Elève	C'est vrai.
631	00:48:55.574 - 00:48:59.200	Divonne	Parce que quand on met au carré, on fait le chiffre fois le chiffre.
632	00:48:59.417 - 00:49:01.264	Enseignant	Si on fait le chiffre fois le chiffre, ça va donner quoi?
633	00:49:01.262 - 00:49:02.477	Elève	[inaudible]
634	00:49:02.420 - 00:49:04.344	Divonne	2 fois 2 et après 4 c'est bon.
635	00:49:04.445 - 00:49:05.677	Enseignant	Donc, c'est bon ou pas?
636	00:49:05.690 - 00:49:07.475	Baptiste	Bah non Madame sinon, ça aurait fait 4.
637	00:49:07.477 - 00:49:10.917	Elève	C'est vrai. / C'est vrai
638	00:49:09.455 - 00:49:10.635	Baptiste	[inaudible] au carré
639	00:49:10.925 - 00:49:18.155	Enseignant	Alors ce qu'on a expliqué tout à l'heure euh, Baptiste, on a 2 a fois 2 a.

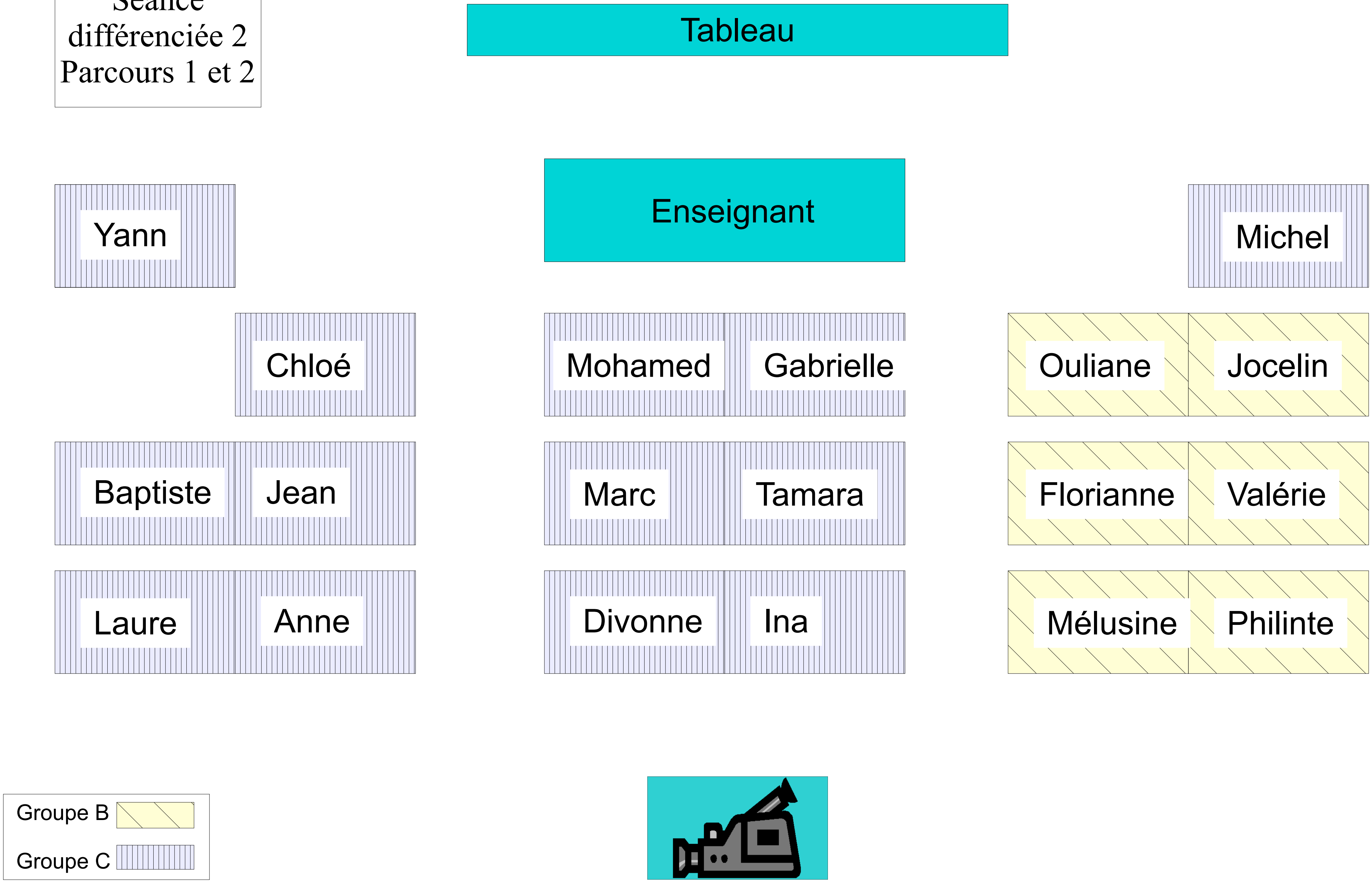
640	00:49:15.829 - 00:49:18.995	Baptiste	Il y a la réponse dans la question.
641	00:49:18.999 - 00:49:21.035	Enseignant	Par contre, j'aimerais bien le silence.
642	00:49:21.059 - 00:49:23.235	Baptiste	Oui, mais euh il y a marqué encore au carré.
643	00:49:22.690 - 00:49:23.459	Marc	Mais M'dame!
644	00:49:23.629 - 00:49:26.115	Enseignant	Alors on trouve 2a au carré. Chut!
645	00:49:26.152 - 00:49:27.184	Marc	Il y a la dernière question, là.
646	00:49:27.199 - 00:49:27.995	Enseignant	Je sais.
647	00:49:28.009 - 00:49:29.035	Elève	[rires]
648	00:49:29.055 - 00:49:33.035	Enseignant	2a au carré, ça veut bien dire 2a fois 2.
649	00:49:34.115 - 00:49:37.246	Enseignant	Du coup si on ré-explique, ça fait 4 a au carré.
650	**00:49:37.254 - 00:49:38.954**		**Correction troisième égalité groupe B : a+3(a+2)=4a+6, tableau 13**
651	00:49:38.969 - 00:49:41.235	Enseignant	Et alors vous, votre dernière égalité, ça donne quoi?
652	00:49:41.254 - 00:49:43.145	Elève	a plus 3 [Jocelin ou fille].
653	00:49:41.754 - 00:49:43.515	Enseignant	C'est quoi votre dernière égalité Jocelin, c'est quoi?
654	00:49:43.185 - 00:49:44.555	Elève	[inaudible]
655	00:49:47.785 - 00:49:49.875	Enseignant	a plus 3.
656	00:49:49.860 - 00:49:55.357	Elève	Non, non, faut enlever les parenthèses entre euh. Voilà [Florianne].
657	00:49:58.200 - 00:50:00.435	Enseignant	Et alors ça c'est quoi? Chut.
658	00:50:01.061 - 00:50:03.195	Philinte	Egal à 4a plus 6.
659	00:50:05.105 - 00:50:06.315	Enseignant	Alors ça, vous avez mis quoi, vous?
660	00:50:09.395 - 00:50:13.169	Philinte	Faux. Bah parce que a+3 ça fait pas 4a. [Enseignante écrit "faux", tableau 13]
661	00:50:14.449 - 00:50:17.200	Enseignant	Alors a plus 3 c'est pas égal à 4a.
662	00:50:17.217 - 00:50:17.755	Philinte	Oui.
663	00:50:19.820 - 00:50:22.555	Philinte	Non [inaudible] à 4a.
664	00:50:30.800 - 00:50:33.755	Enseignant	[voix diverses] Alors si on remplace a par 2.
665	00:50:35.014 - 00:50:36.835	Enseignant	Ça fait 2 plus 3.
666	00:50:36.852 - 00:50:37.875	Elève	[inaudible fois 4 2]
667	00:50:37.860 - 00:50:38.625	Enseignant	Chut!
668	00:50:39.744 - 00:50:41.995	Philinte	Si on fait 4 fois 2, ça fait pas 6 ça fait 8
669	00:50:42.007 - 00:50:44.275	Enseignant	Alors ça fait 2, 3 fois combien?
670	00:50:44.275 - 00:50:44.995	Philinte	1.

671	00:50:46.594 - 00:50:51.738	Enseignant	2 plus 2 ça fait [tableau 13], donc ça, ça fait? Chut!
672	00:50:52.659 - 00:50:54.195	Oulianne	[inaudible]
673	00:50:54.277 - 00:50:55.435	Enseignant	Ah, t'as fait comment?
674	00:50:55.459 - 00:50:59.539	Oulianne	Bah moi j'ai fait 2 plus 1 facteur de 3 fois 2.
675	00:50:59.554 - 00:51:00.595	Enseignant	Ok.
676	00:51:01.030 - 00:51:04.955	Enseignant	D'accord tu t'es compliqué la vie. Hein, comment on pouvait faire pour faire ça plus simplement?
677	00:51:05.044 - 00:51:06.584	Philinte	[inaudible]
678	00:51:06.557 - 00:51:11.564	Enseignant	Yann, ton pied et tu te retournes. Ça fait combien de fois que je te demande de te taire également?
679	00:51:11.565 - 00:51:13.435	Philinte	Madame, 3 fois a ça fait pas 4a?
680	00:51:15.509 - 00:51:17.595	Enseignant	Donc là, qu'est-ce que tu vas calculer?
681	00:51:17.605 - 00:51:19.795	Oulianne	[inaudible fois 2]
682	00:51:19.790 - 00:51:20.715	Enseignant	Ouais.
683	00:51:21.659 - 00:51:23.435	Enseignant	2 plus 3 fois 4. [tableau 13]
684	00:51:25.675 - 00:51:27.635	Oulianne	2 plus 2...
685	00:51:27.645 - 00:51:29.315	Enseignant	2 plus 12 ça fait?
686	00:51:30.330 - 00:51:31.555	Enseignant	14.
687	00:51:33.254 - 00:51:37.955	Enseignant	Alors ensuite qu'est-ce qu'on va faire? Chut! Yann.
688	00:51:37.967 - 00:51:40.435	Oulianne	Euh bah comme euh.
689	00:51:52.434 - 00:51:56.675	Enseignant	Alors est-ce que ça veut dire que c'est vrai?
690	00:51:56.579 - 00:51:57.155	Philinte	Non
691	00:51:56.855 - 00:51:57.275	Elève	Non
692	00:51:57.210 - 00:52:07.107	Enseignant	Non hein. Ça veut pas forcément dire que c'est vrai mais en tout cas pour cet... euh, pour cette valeur-là, c'est vrai. Du coup, qu'est-ce que… Tout le monde a mis que c'était faux là?
693	00:52:06.657 - 00:52:07.235	Philinte	Oui.
694	00:52:07.119 - 00:52:07.795	Elève	OuaiS.
695	00:52:07.785 - 00:52:09.539	Divonne	Non, moi j'ai mis que c'était vrai.
696	00:52:09.529 - 00:52:11.195	Enseignant	Non, mais c'est pas la même, euh, Divonne.
697	00:52:10.915 - 00:52:11.475	Divonne	Ah!
698	00:52:16.214 - 00:52:19.640	Enseignant	Qu'est-ce qu'on peut faire là? Et bien essaye de la faire là Divonne. À votre avis?
699	00:52:18.987 - 00:52:20.835	Philinte	Mais Madame, d'façon c'est faux!
700	00:52:20.854 - 00:52:22.035	Enseignant	Pourquoi c'est faux?
701	00:52:21.885 - 00:52:26.235	Philinte	Parce que si on fait 1+3 ça fait 4 mais on peut pas faire euh 4a

702	00:52:25.610 - 00:52:32.395	Enseignant	Très bien, ok, alors 1+3 ça fait 4 mais qu'est-ce qu'il y a comme opération, entre le 3 et la parenthèse?
703	00:52:31.907 - 00:52:33.035	Elève	Un fois [Enseignante ajoute un "*" entre 3 et la parenthèse, tableau 13]
704	00:52:32.907 - 00:52:36.075	Enseignant	Et c'est quoi, la priorité opératoire?
705	00:52:36.054 - 00:52:36.915	Elève	La multiplication.
706	00:52:36.982 - 00:52:39.915	Philinte	[inaudible]
707	00:52:40.530 - 00:52:43.235	Enseignant	C'est quoi, tu fais d'abord l'addition ou d'abord la multiplication?
708	00:52:42.695 - 00:52:44.835	Elève	La multiplication.
709	00:52:42.757 - 00:52:43.835	Philinte	La multiplication.
710	00:52:44.307 - 00:52:46.661	Enseignant	D'accord. Donc c'est pour cela que tu n'as pas le droit de faire 1 plus 3, hein.
711	00:52:48.562 - 00:52:52.435	Enseignant	D'accord ou pas? Cette égalité, elle est vraie, alors pourquoi elle est vraie?
712	00:52:53.339 - 00:52:54.031	Philinte	Elle est vraie?
713	00:52:53.819 - 00:52:56.155	Enseignant	Oui, elle est vraie. On se sert de quoi?
714	00:52:56.740 - 00:52:57.955	Philinte	Alors là je sais pas du tout.
715	**00:52:57.715 - 00:52:59.675**		**Sonnerie**
716	00:53:00.085 - 00:53:04.415	Enseignant	On se sert de quoi? Chut! Deux secondes. Le développement. [Flèches sur le tableau 13]
717	00:53:09.555 - 00:53:14.707	Enseignant	Une dernière chose. Chut! Avant de ranger ses affaires. J'ai pas dit de ranger ses affaires, tu t'assoies rapidement.
718	00:53:14.740 - 00:53:16.715	Elève	Les feuilles on en fait quoi Madame?
719	00:53:16.740 - 00:53:19.232	Enseignant	Deux secondes, je vais expliquer, faudrait lever la main.
720		**Commentaire**	**Synthèse**
721	00:53:21.899 - 00:53:29.235	Enseignant	Baptiste, qui est-ce qui peut me réexpliquer ce qu'on doit faire pour m'expliquer qu'une égalité est vraie ou fausse.
722	00:53:28.915 - 00:53:29.875	Divonne	On remplace par un chiffre.
723	00:53:29.532 - 00:53:30.347	Enseignant	Alors, Divonne?
724	00:53:31.520 - 00:53:36.107	Enseignant	On remplace par un chiffre. Ça nous donne quoi?
725	00:53:40.330 - 00:53:43.315	Enseignant	Si tes deux valeurs elles sont égales, qu'est-ce que ça veut dire?
726	00:53:43.312 - 00:53:44.275	Divonne	C'est vrai.
727	00:53:44.280 - 00:53:48.475	Enseignant	Ça veut forcément dire que ton égalité est toujours vraie pour n'importe quelle valeur?
728	00:53:48.479 - 00:53:50.035	Divonne	Non.
729	00:53:50.655 - 00:53:52.275	Laure	Faut faire un développement.
730	00:53:52.457 - 00:53:55.925	Enseignant	Alors pour montrer qu'une égalité est fausse, qu'est-ce qu'on peut faire?
731	00:53:55.960 - 00:53:58.235	Divonne	On fait la distributivité.
732	00:53:57.992 - 00:53:59.160	Elève	Bah distributivité.

733	00:53:59.179 - 00:54:03.190	Enseignant	Alors la distributitivité, ça permet de montrer quoi?
734	00:54:03.199 - 00:54:05.275	Divonne	Que la, elle est vraie.
735	00:54:05.272 - 00:54:19.955	Enseignant	La distributivité, en fait, pour montrer qu'une égalité est vraie. D'accord, on va utiliser les... la distributivité, ce que vous connaissez, les... les règles de calculs avec l'algèbre. Et pour montrer qu'une égalité est fausse, qu'est-ce qu'on va faire?
736	00:54:21.765 - 00:54:23.115	Enseignant	Est-ce qu'on va faire la même chose?
737	00:54:22.999 - 00:54:25.155	Elève	Non, on va vérifier avec une valeur [fille à droite Melina?].
738	00:54:25.184 - 00:54:29.875	Enseignant	Oui on va vérifier avec une valeur et si jamais on trouve que des deux côtés de l'égalité c'est pas égal, qu'est-ce que ça veut dire?
739	00:54:29.885 - 00:54:30.631	Elève	C'est faux [fille à droite, Melina].
740	00:54:30.624 - 00:54:36.990	Enseignant	Que notre égalité est fausse. D'accord. Demain on va recommencer avec trois petites égalités, ça va être ça, notre calcul de début de séance, je pense.
741	00:54:37.034 - 00:54:38.149	Elève	[A plusieurs] Oh non!! Non...

Séance différenciée 2
Parcours 1 et 2

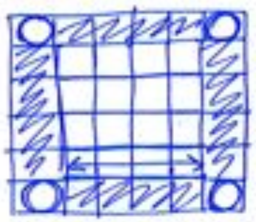


PARCOURS 1

Tableau 1

	1) $4a+4$ 2) $(a+2)\times4$ 3) $(a+2)\times4-4$ 4) $(a+1)\times4$ 5) $(a+2)\times2+a\times2$ 6) $a\times4-4$	

Tableau 2
(tableau de gauche)



- $a\times4+4$
- $m\times2+(m+2)\times2$

Tableau 3
(tableau central)

	$a=0$	$a=1$
1) $4\times a+4$ oui	1) 4 ×	
2) $(a+2)\times4$ non	2) 8	
3) $(a+2)\times4-4$	3) 4 ×	
4) $(a+1)\times4$	4) 4 ×	
5) $(a+2)\times2+a\times2$	5) 4 ×	
6) $a\times4-4$ non	6) -4	

Tableau 4
(tableau de droite)

$a^2 \neq a+a$

$3^2=9$ $\quad 3+3=6$

$2^2=4$ $\quad 2+2=4$

$a^2=2a$

Tableau 5
(tableau de droite)

$2^2=4$ $\quad 2\times2=4$ $\Rightarrow 2^2=2\times2$ $\quad (a^2=2a)$

$3^2=9$ $\quad 3\times2=6$ $\Rightarrow 3^2\neq3\times2$ $\quad (a^2\neq2a)$

Tableau 6
(tableau central)

	$a=0$	$a=1$
1) $4\times a+4$ oui	1) 4 ×	1) 8
2) $(a+2)\times4$ non	2) 8	
3) $(a+2)\times4-4$	3) 4 ×	3) 8
4) $(a+1)\times4$	4) 4 ×	4) 8
5) $(a+2)\times2+a\times2$	5) 4 ×	5) 8
6) $a\times4-4$ non	6) -4	

$k\times(a+b)=k\times a+k\times b$

Tableau 7

tableau de gauche

3) $(a+2)\times 4 - 4 = 4\times 2 + 4\times a - 4 = 8 + 4a - 4 = 4a + 4$

4) $(a+1)\times 4 = 4\times a + 4\times 1 = 4a + 4$

5) $(a+2)\times 2 + 2\times a = 2\times 2 + 2\times a + a\times 2 = 4 + 2a + 2a = 4 + 4a$

PARCOUS 2

Tableau 8

$4 + 3a = 7a$ Faux pour $a = 0$

- $4 + 3\times 0 = 4$
- $7\times 0 = 0$

$4a + 3a = 7a$

Tableau 9

$(2a)^2 = 2a^2$	~~Vrai~~ FAUX	$(2a)^2 = 2a\times 2a = 2\times a\times 2\times a = 4a^2$

Tableau 10

$a^2 = 2a$	Faux	Pour $a = 1$ $1^2 = 1$ $2\times 1 = 2$

Tableau 11

$a(a+2) = a^2 + 2$	Faux	$a(a+2) = a\times a + a\times 2$ $= a^2 + 2a$

Tableau 12

$(2a)^2 = 4a^2$	VRAI	$(2a)\times(2a) = 4a^2$

Tableau 13

$a + 3\times(a+2) = 4a + 6$	Faux	$a = 2$ $2 + 3\times(2+2) = 2 + 3\times 4 = 2 + 12 = 14$ $4\times 2 + 6 = 8 + 6 = 14$

Transcription séance différenciée 3 - Parcours 3

Version du 22/08/2012

Time vidéo : (00:00)

Time audio : 00m00

Blanc	A la classe
Gris	En privé, à un ou plusieurs élèves
Gris	Commentaires

N°	Qui parle	Interaction
1		**Enjeu de la séance (3:00)**
2	Ens	Bon du coup, on va euh… continuer […]. Là, on va continuer le travail. Donc on refait un travail différencié, le groupe A, le groupe B. [...] Donc on va retravailler encore sur les expressions égales. Alors qui est-ce qui peut me rappeler comment on fait pour montrer qu'une expression, enfin que deux expressions sont égales? Vas-y, Ina !
3	Ina	Faut remplacer x par un chiffre.
4	Ens	Alors, remplacer x par un chiffre. Et qu'est-ce que ça va nous donner si on remplace le x par un chiffre?
5	E	Euh... le même résultat.
6	Ens	Alors, si ça donne le même résultat... ?
7	E	Alors, bah c'est…
8	Ens	Si ça donne pas le même résultat, qu'est-ce que ça veut dire?
9	Elèves	Que c'est pas égal.
10	Ens	Ça veut dire que c'est pas égal. Et si ça donne le même résultat, qu'est-ce que ça veut dire ?
11	Baptiste	C'est égal mais on sait pas.
12	Ens	Est-ce que ça veut dire que c'est égal pour toutes les valeurs?
13	Elèves	Non !
14	Ens	Non. Alors ça veut dire que c'est pour certaines valeurs. Alors comment on va faire pour dire que c'est vrai pour toutes les valeurs ? Mélusine !
15	Mélusine	On va utiliser les règles.
16	Ens	On va utiliser les règles de calcul algébrique. Donc nous, ce qu'on connaît, c'est la distributivité. Et qu'est-ce qu'on a vu, là, depuis deux jours?
17	E	Les... Remarquables !
18	E	Les identités remarquables.
19	Ens	Les quoi?
20	Ens	Les identités remarquables. D'accord. Il y a en a combien des identités remarquables?
21	Elèves	3.
22	Ens	3, c'est quoi? [Plusieurs voix dans la salle].
23	Philinte	Le a plus b au carré.
24	Ens	Au carré.
25	Elèves	a moins b au carré !
26	Elèves	a plus b fois…
27	Ens	Facteur de a plus b !

28	Ens	Donc euh... je vous laisse d'abord 5 min pour faire la première question. Et puis après, on va faire un premier bilan. Donc euh… vous oubliez pas, il y a l'aide, a priori là, pour la première la question. Vous n'avez pas l'aide mais vous utilisez l'aide qui est à la fin. [... distribution des copies].
29		**Reformuation consigne exercice 1 Groupe B et Groupe C (5:30)**
30	Ens	Alors, même si vous avez des valeurs différentes, d'accord, le premier exercice. Euh... il faut calculer la valeur des 3 expressions pour euh... alors, il y a un groupe c'est x=2, x=3 et pour l'autre groupe, c'est x=1 et x=-1. Donc ça veut dire qu'il faut faire quoi, exactement? Qui est-ce qui peut me reformuler la consigne?
31	E	Le x, on doit le remplacer par 2. Et après ?
32	Ens	Voilà, exactement, le x on doit le remplacer par 2 par 3. La première question c'est par 2 par 3. D'accord, ça c'est votre groupe. Et l'autre groupe, le x il faut le remplacer par quoi?
33	E	Par 1 et -1 et 0.
34	Ens	Alors, allez-y !
35	Ens	0, euh... c'est la deuxième question. Il faut d'abord commencer par 1 et -1 et seulement la deuxième partie, ça sera 0.
36		**Temps de recherche (6:15), Q1**
37		**Avec Michael (7m15) Groupe C**
38	Ens	Bon, le premier, comment on fait? Il faut calculer quoi ? La valeur des trois expressions pour x égal 2 et x égal 3. Alors, pour A(x) qu'est-ce que tu vas faire? Ton x, tu vas le remplacer par quoi?
39	Michael	2.
40	Ens	Par 2. Alors vas-y, montre-moi ! C'est parfait. Donc 2 plus 2, vas-y, écris-le. Voilà !
41	Ens	[…] 2 plus 2, tu mets des parenthèses, sinon ça veut pas dire la même chose, s'il y a pas des parenthèses. Alors maintenant, tu calcules. 2 plus 2 dans les parenthèses, ça fait quoi?
42	Michael	4.
43	Ens	4, 4 au carré, ça fait?
44	Michael	Ça fait 16.
45	Ens	Hum, vas-y ! Donc 16 moins 4, ça fait?
46	Michael	12.
47	Ens	Ouais. Alors, maintenant, il faut que tu calcules, bah... ton B pour x égal 2 et ton C pour x égal 2 ou alors ton A pour x égal 3, ton B pour x égal 3. D'accord ? Allez, vas-y !
48	Michael	Ici aussi.
49	Ens	Ouais, tu peux le marquer là, hein, si tu veux. Et après, il faut remplir le tableau ci-dessus. Donc après, il faut…et ton 12 tu vas le mettre où ? […]
50	Michael	Euh... là.
51	Ens	Ouais, alors vas-y !
52		**Avec Marc (8:57) Groupe C**
53	Ens	Voilà, ton A(x), c'est ça. Tu le calcules pour x égal 2. C'est-à-dire que ton x, tu le remplaces par combien?
54	Marc	Par 2.
55	Ens	Ouais. Ça, ça va te donner quoi?
56	Marc	Plus 2.

57	Ens	Ah non, ça donne pas 2 x, hein ! Il y a plus de x puisque ton x tu le remplaces par... ?
58	Marc	2. 2 plus 2... au carré.
59	Ens	Ouais.
60	**Avec Florianne, Valérie, Philinte, Mélusine et Ignace (9:25) Groupe B**	
61	Ens	C'est bon ou pas? Faut d'abord faire 1 et -1.
62	Florianne	Ah!
63	Valérie	Madame ! C'est bon.
64	Ens	Oui, c'est ça.
65	Valérie	Mais j'ai pas mis les résultats, j'ai juste mis les...
66	Ens	Ah, bah... il faut que tu calcules.
67	Philinte	Madame ! Je mets directement les calculs, hein ?
68	Ens	Oui, tu peux mettre directement le résultat.
69	Philinte	Est-ce que c'est bon?
70	Mélusine	On n'est pas obligé d'écrire le calcul.
71	Ens	Si, si ! Vaut mieux écrire la calcul, mais tu n'es pas obligée de l'écrire, là, tu peux faire un tableau.
72	Ens	Ok, bah tu mets quand même ton calcul dans le 1/. Ignace, tu as compris ou pas?
73		**Avec Ines et Divonne (10:00) Groupe C**
74	Ens	Allez les filles, qu'est-ce qu'il faut faire? Qu'est-ce qu'il faut faire? Qu'est-qu'il faut faire sur la feuille?
75	Gabrielle	Dans le tableau, eh bien[…]
76	Ens	[à Gabrielle et Marc] Tu peux compléter le tableau si tu veux. Tes calculs, tu peux les faire là, et après une fois que tu as complété ton calcul, tu peux compléter ton tableau. [A Divonne et Ina]. Alors, qu'est-ce qu'il faut faire?
77	Divonne	Faut changer les x.
78	Ens	Alors, vas-y ! Pour 2, ça fait quoi?
79	Divonne	2 plus 2.
80	Ens	Vas-y, écris-le ! Donc 2 plus 2 au carré. Vas-y, ensuite ! Vas-y, écris-le ! Alors ça fait quoi, ça?
81	Divonne	4 au carré moins 4.
82	Ens	Non.
83	Ina	Il faut faire un tableau.
84	Ens	[A Ina] Si, tu peux aussi faire le tableau. [A Divonne] 4 au carré, ça fait combien? […]
85	Ens	16.
86	Ens	Et 16 moins 4, ça fait?
87	Divonne	Ça fait 12.
88	Ens	Et ton 12, tu vas le mettre où?
89	Divonne	Là.
90	Ens	Hum... Vas-y ! Alors maintenant, tu me fais ton 3.
91	**Avec Baptiste (11:18) Groupe C**	
92	Ens	Ok, il faut que tu remplaces. Ton A(x), il faut que tu calcules pour x égal 2. Donc qu'est-ce que tu vas faire?
93	Baptiste	Je sais pas.
94	Ens	Il faut que tu calcules A(x) pour x égal 2.
95	Baptiste	Hum...

96	Ens	Donc tu vas faire quoi?
97	Baptiste	x, bah... 2.
98	Ens	J'ai pas compris. Donc tu vas faire quoi, montre-moi ce que tu vas faire pour le premier !?
99	Baptiste	Si, mais on fait 2 moins 4, 2. Ça fait 2.
100	Ens	Ok. Donc toi, il faut que tu remplaces x par 2. Donc à la place de mettre x, tu vas mettre quoi, là?
101	Baptiste	2.
102	Ens	Ça va être quoi, ton calcul?
103	Baptiste	Bah.. 2 plus 2 au carré.
104	Ens	Moins 4. D'accord. [Silence de 30-40s]
105	Baptiste	4x, ça fait 0. 0 au carré.
106	Ens	Pourquoi ça fait 0?
107	Baptiste	Bah on fait 2 plus 2, ça fait 4. Puis 4 moins 4.
108	Ens	Bah non, puisque il y a le carré d'abord. Donc le carré, ça veut dire quoi, comme opération ?
109	Baptiste	Bah... multiplication.
110	Ens	Ouais.
111	Baptiste	4 fois 4 donc faut d'abord la multiplication.[…]
112	**Avec Laure (12:56) Groupe C**	
113	Laure	Madame ! C'est quoi le [inaudible]... ?
114	Ens	[…] Pour x égal 2. Oui, mais sauf que là, ton x, tu ne l'as pas remplacé par 2.
115	Laudy	Bah oui... bah non...
116	Ens	Ah, si si ! Ok, d'accord ! Attends... 12, 21. Attends. Ok, 12, 21, 12, 12 et 12. Ok. 21, 21, 21. Donc a priori, qu'est-ce que tu peux dire? Ouais. Très bien. Alors maintenant, tu complètes par 0. Anne, j'aimerais bien que tu comprennes ce que tu es en train de faire, que tu ne copies pas tout sur Laure ! Tu me demandes !
117	**Avec Chloé (13:30) Groupe C**	
118	Ens	En fait, là, il faut que tu remplaces ton a par 2. C'est tout, hein, ce qu'on te demande ! 2 plus 2 moins 4. Là, il n'y a pas de carré par contre. Dons 2 plus 2 ça fait 4 donc ça fait 4 au carré moins 4. D'accord, 4 au carré ça fait 16, donc 16 moins 4, ça fait 12. Alors maintenant, essaie de faire le deuxième toute seule !
119	**Avec Yann (13:54) Groupe C**	
120	Ens	Yann, c'est bon ou pas?
121		C'est quoi le...? Carré.
122	Ens	[…] Ok et celui-là ?
123	**Avec Mohamed et Gabrielle (14:23) Groupe C**	
124	Ens	Ok, 2 plus 2, ça fait combien?
125	Mohame	4.
126	Ens	Et 4 au carré, ça fait combien?
127	Mohame	18.
128	Ens	Non !
129	Gabrielle	16.
130	Ens	4 au carré... c'est? 4 fois 4.
131	Mohame	Ça fait 16.
132	Gabrielle	Ça fait 16.

133	Gabrielle	Donc j'avais raison !
134	Ens	16 moins 4, ça fait?[…]
135	Mohamed	Ça fait, ça fait…
136	Ens	Donc 16 moins 4, ça fait 12. D'accord, ton… Là, tu peux mettre combien?
137	Gabrielle	Ça fait 12, tu vois!
138	Mohamed	12.
139	Ens	D'accord. Alors ensuite, pour celui-là ? Alors, donc c'est pareil : tu fais 3 ! C'est lequel, celui-là? C'est pour celui-là ?
140	Mohamed	Oui.
141	Ens	D'accord, donc alors, ça fait 3 facteur de 3 plus 4. Vas-y. Alors, ça fait quoi?
142	Mohamed	3 fois 3.
143	Ens	Alors, tu peux d'abord calculer ce qu'il y a dans la parenthèse, hein. […] Ouais. Donc ça fait 3 fois 7. Ouais, c'est ça, 21. Donc ton 21, il est où?
144	Mohamed	Là.
145	Ens	Non, ça c'est B(x) que tu as calculé là, donc B(x) pour 3... donc il y est là !
146	Gabrielle	On est obligé de calculer d'abord la parenthèse?
147	Ens	Ouais, toujours. C'est d'abord les parenthèses. Après, il faut que tu calcules A(x) pour x égal 3. Et B(x) pur x égal 2. Tu vois, il faut que tu complètes ça et ça. Et ça aussi et C(x).
148	Ens	Vous avez le droit d'utiliser votre calculatrice, hein !
149	**Avec Yann (16:20) Groupe C**	
150	Chloé ou	Mais Madame, en fait, ça doit donner le même résultat partout?
151	Ens	Ah bah. Il y a des fois où ça […]
152	Ens	[A Yann] Ok. Alors, tu as trouvé combien, là? 12, 12, 12. Et là, 21, 21, 21. Donc a priori, qu'est-ce qu'on pourrait dire, alors ?
153	Yann	Que les… elles... , ils sont tous égaux.
154	Ens	Ouais, que les expressions, elles sont égales.
155	Yann	Mais je sais pas.
156	Ens	Mais a priori tu peux dire... Comment tu pourrais dire que les expressions, elles sont égales?
157	Yann	Que les expressions...
158	Ens	Ton expression, c'est quoi, la première?
159	Yann	Bah euh, x égal 2.
160	Ens	x égal 2 ? C'est ça ta première expression?
161	Yann	Ah, je dois marquer l'expression ?
162	Ens	Bah, oui ! C'est ça que tu viens de me dire ! Tu viens de me dire que les deux expressions elles sont égales. Ta première expression c'est ça. Egal à ta deuxième expression, égal à ta troisième expression.
163	Yann	Et j'en... je marque les trois.
164	Ens	A priori, c'est ça que ça veut dire. Après, maintenant, tu calcules pour x égal 0.
165	**Avec Mohamed (17:26) Groupe C**	
166	Mohamed	Hé Madame ! Ils sont vraiment forts, les calculs !
167	Ens	Alors, sinon, pour ton B(x)...
168	Mohamed	Madame, j'ai écrit [inaudible]...
169	Ens	Alors tu as calculé ça.
170	Mohamed	En fait, c'est [inaudible]...

171	Ens	Ok. Alors pour le C. Pour le C, là, tu es en train de faire quoi, en fait?
172	Mohamed	Mais j'ai calculé.
173	Ens	Donc Ok. Donc ça, c'est pour x égal 2 et pour x égal... Donc le C, tu le calcules pour quelles valeurs?
174	Mohamed	Pour euh...
175	Ens	Comme tu veux, hein, pour 2 ou pour 3. Pour 2 ou pour 3, comme tu veux.
176	Mohamed	Bah pour euh... 2. Pour 2 !
177	Ens	Pour 2. Alors ça te fait... 9 fois...
178	Mohamed	Fois x.
179	Ens	Non, ton x, il faut que ce soit combien ?
180	Mohamed	Fois x.
181	Ens	Non, ton x, il faut que tu le mettes égal à combien?
182	Mohamed	Ah, bah... 2.
183	Ens	Donc 9 fois 2 moins 6. Donc, ça, ça fait combien? [...] 9 fois 2, ça fait combien?
184	Mohamed	18.
185	Ens	18 moins 6?
186	Mohamed	4.
187	Ens	Non. Tu as fini Michel, tu peux utiliser la calculatrice, hein ! Donc 18 moins 6.
188	Mohamed	Euh... 12.
189	Ens	Ton 12, tu peux le mettre là. Alors maintenant, tu me fais la même chose avec B(x). Alors, ton B(x), là c'est pareil avec... ? Avec 2, ton x, là, il faut que tu le remplaces par 2. D'accord ?
190	**Avec Marc (18:58) Groupe C**	
191	Marc	C'est 4 au carré ou 2 au carré?
192	Ens	C'est 4 au carré. Elle est, où ta calculatrice? C'est -4, hein ! Donc ça, ça te fait 2 plus 2. Ça fait?
193	Marc	4.
194	Ens	Vas-y ! Ecris 4 ! 4 au carré moins 4.
195	**Mise en commun(19:30) Groupe B, Q1 [tableau 1]**	
196	Ens	Juste, on fait la mise en commun, là ! Tout le monde a fait la première question?
197	Elèves	Oui.
198	Ens	Donc vous avez trouvé quoi? Pour votre euh [tableau 1]...
199	Philinte	-4.
200	Elève gro	12, 21, 0.
201	Ens	Ok, donc qu'est-ce que vous avez trouvé? [tableau 1]
202	Elèves	-4.
203	Ens	Là ?
204	Elèves	4. / -4.
205	Ens	-4. Aussi? [Pour colonne B(x) sur tableau 1]
206	Elève	Non, là c'est 4 !
207	Elèves	4, celui-là c'est 4 ! C'est 4, le deuxième. Moi, j'ai trouvé -4...
208	Ens	Alors, vous avez trouvé quoi ? Bon. Déjà, il faudra se mettre d'accord.
209	E1	Le premier, c'est -4 et le deuxième c'est 4.
210	Philinte	C'est 4, le deuxième.
211	E2	Ouais, le deuxième, c'est 4.

212	Ens	Ok, donc. Alors, si on fait... Donc déjà, vous êtes d'accord là-dessus, hein ? Alors on remplace, donc 1 c'est 1 moins 1 au carré moins 4. Ça, ça fait 0 moins 4, ça fait bien -4 ; le premier, ça marche [A(1)]. Ensuite, pour le B, c'est 1 plus 1 et 1 moins 3. Donc 1 plus 1, ça fait combien? [tableau 1]
213	Elève	Ça fait 2.
214	Ens	2. Et 2 fois et là, dans la deuxième parenthèse, ça fait quoi?
215	Philinte	Ça fait -4, Madame !
216	Ens	Dans la deuxième parenthèse, ça fait -2. Et 2 fois -2, ça fait combien, Philinte?
217	Philinte	-4.
218	Ens	-4. Donc là c'est -4. Ensuite, le C(x). Chut.
219	Elèves	-4.
220	Ens	Donc encore -4. Ensuite pour C, quand x égal -1...
221	Elèves.	0, 0, moi j'ai trouvé 0.
222	Ens	Ok. Alors, pour… -1 ?
223	Philinte	C'est 0.
224	Philinte	Madame, il n'y a pas besoin de calculer [calculette?], c'est 0 !
225	Ens	Ok, donc c'est -1, -1, ça fait 4 [tableau]. Et 4. -1, -1, ça fait -2, -2 au carré. Ça fait 4, en fait. Ça fait moins -4. -2 au carré ça fait 4, Oulian. Donc 4 moins 4, ça fait bien 0. Donc 0, 0, 0 [tableau]. Donc du coup, qu'est-ce que vous avez, qu'est-ce que vous pouvez en déduire?
226	Elèves	Eh ben... euh... qu'elles sont égales !
227	Ens	Voilà ! Donc a priori, elles sont égales. D'accord. On peut penser qu'elles sont égales, parce qu'elles sont égales pour toutes les valeurs. Est-ce que c'est forcément vrai ?
228	Elèves	Non ! [en chœur]
229	Ens	Non. On a juste montré que c'était pour 2 valeurs, donc ça ne veut pas dire que c'est vrai pour toutes les valeurs. Donc maintenant, vous essayez de calculer pour x égal 0. C'est ça. [tableau 1 : ligne x=0].
230	E	On l'a déjà fait !
231	E	Ah non, moi personnellement, je l'ai pas fait, hein !
232	Ens	Alors allez-y !.
233	**Mise en commun(22:27) Groupe C, Q1 [tableau 2]**	
234	Ens	Hop ! Pour les autres, là, pour l'exercice 1.[…] Alors pour l'exercice 1. [tableau 2] Donc pour x égal 2 et x égal 3. Hop ! Yann, qu'est-ce que tu as trouvé pour la première ligne?
235	Yann	12, 12 et 36.
236	Ens	12, 12, 12. [tableau 2]
237	Yann	En fait, j'allais dire 36 encore.
238	Ens	Et ensuite pour la deuxième ligne, vous avez trouvé quoi? Baptiste?
239	Elèves	21, 21, 21.
240	Ens	21, 21, 21. [tableau]. Alors a priori qu'est-ce que vous pouvez penser?
241	Elèves	Qu'elles sont égales.
242	Ens	Voilà ! A priori, on peut dire que les expressions sont égales. D'accord […]. Est-ce que c'est forcément vrai ou pas?
243	E	Non.
244	Ens	Non, on ne sais pas, hein ! On a juste montré que c'était vrai pour deux valeurs, ça veut pas forcément dire que c'était vrai pour toutes les valeurs. Alors, maintenant, vous calculez pour x égal 0.

245	E2	J'ai déjà calculé, ça fait 0, 0.
246	Elèves	Non 6./ 0, 0, 6/. Non, ça fait 0, 0, 0./. Si, /0. Moins 6.
247	**Temps de recherche (23:55), groupes B et C, Q2**	
248	Ens	Allez, allez-y, on se met au travail.[…] [Discussion des élèves entre eux pour savoir si on trouve 6 ou 0 ou -6].
249	Yann	0 moins 6, ça fait 6?
250	Ens	Euh... 0 moins 6, ça fait combien?
251	Elèves	-6/ 6 /12.
252	Ens	Ça fait -6, hein !
253	**Mélusine, Philinte, Florianne et Valérie (24:19) Groupe B**	
254	Mélusine	Madame ?!
255	Ens	Oui, Mélusine !
256	Philinte	On a trouvé -2.
257	Mélusine	Personne a trouvé -2 au troisième. Personne a trouvé pareil.
258	Florianne	Si. Moi, j'ai trouvé -2.
259	Mélusine	Même... et même avec la calculatrice !
260	Ens	Alors. -1, -1, donc ça, ça fait -3, -3, -1, ça fait 3. -1. Bah non, mais parce que tu as oublié des parenthèses, là.
261	Mélusine	Où ça?
262	Ens	Là, c'est -1 qui est au carré, c'est pas que ton 1 !
263	Mélusine	Lui, il a mis que 1 au carré.
264	Ens	Bah oui, c'est -1 qui est au carré, là ça fait 0, hein.
265	Ens	Vas-y. Donc ça fait -1.
266	Ens	Hop, on se dépêche ! Tout le monde calcule pour x=0. Baptiste, tu as le droit à la calculatrice, donc tu la sors.
267	Elèves	C'est fait, ça fait 0, 0, 0.
268	Elèves	0, 0, -6.
269	Ens	[A Mélusine] Ça fait 0, hein, c'est parce que tu n'avais pas mis de -3, si on détaille les calculs. Ça, ça fait -1,-3, -1, -2. -1 fois -3. Ça fait 3. Et 3, -1, -2, ça fait 0, hein.
270		2 euh...
271	Ens	3, -1, ça fait 2 et 2-2, ça fait 0. Donc du coup, là on peut euh... conjecturer que les égalités, elles sont égales.
272	Mélusine	Madame ! Conjecturer, ça veut dire supposer ?
273	Ens	Ouais, c'est exactement ça . On peut supposer.
274	Philinte	[En montrant la calculatrice] Madame ! [inaudible].
275	Ens	Non, tu n'as pas mis tes parenthèses autour du -1.
276	Philinte	Ah, parce qu'il y a des parenthèses !?
277	Florianne	Moi, je pensais qu'il fallait mettre…
278	Ens	Ah oui ! Sinon, au carré ça veut dire justement... Ah bah... non, justement. En plus on a fait plusieurs fois l'exercice.
279	Mélusine	Non, mais on a vu avec la calculatrice.
280	Ens	Bah... non, justement, la calculatrice...
281	Mélusine	La calculatrice, elle est automatique !
282	Ens	La caculatrice, il faut que tu lui dises sur quoi porte le carré. Si tu ne mets de parenthèses, ça veut dire que ça porte que sur le 1.

283	Mélusine	Mais Madame ! [inaudible].
284	Ens	Bah non, si tu mets pas les parenthèses, non. C'est bon?
285	**Avec Florianne et Valérie (26:20) Groupe B**	
286	Ens	Ok, alors du coup c'est quoi votre euh... conjecture, a priori ?
287	Florianne	C'est quoi ça, la conjecture?
288	Ens	La conjecture, c'est qu'est-ce qu'on peut dire sur les égalités. Voilà. Donc a priori, sur les égalités, on peut dire que pour 1 et -1, elles sont égales. Est-ce que c'est vrai si on regarde avec x égal 0 ? […] Bah non. Ta calculette pour x égal 0, est-ce que c'est vrai ou pas?
289	Florianne	Non.
290	Valérie	Non.
291	Ens	Alors, il y en a qui... Est-ce qu'elles sont toutes les trois égales ou pas?
292	Valérie	Non.
293	Ens	Est-ce qu'il y en a qui ont l'air d'être égales ?
294	Florianne	Le A et C.
295	Ens	Le A et le C. Alors c'est ça qu'il faut essayer de mettre. Et après ? Qu'elles sont les expressions qui ont l'air égales ou pas l'air égales là, dans la deuxième ?
296	Florianne	Dans ça, là, égal 0?
297	Ens	Ouais.
298	Florianne	Celles qui sont égales, c'est A et C.
299	Ens	Ouais. Et par contre?
300	Florianne	La B elle est... elle est pas égale.
301	Ens	Voilà.
302	Valérie	On écrit ça?
303	Ens	Bah... c'est ce que tu m'as dit. Oui !
304	**Avec Marc et Mohamed et Gabrielle (27:34) Groupe C**	
305	Ens	Vous avez calculé pour x égal 0, là ? [...] Hop ! Vous en êtes où ? Vous avez droit à la calculatrice. Hop ! C'est quand même pas difficile8
306	Marc	Bah... on a calculé.
307	Ens	Du coup, est-ce que votre conjecture qu'on a faite tout à l'heure, là... Est-ce que les égalités, elles sont égales ou pas? Est-ce que les expressions, elles sont égales?
308	Marc	Non.
309	Ens	Non. Ça a l'air d'être lesquelles qui sont égales ?
310	Gabrielle	Les deux premières.
311	Ens	Les deux premières. Alors allez-y, expliquez ça !
312	Gabrielle	Bah... on écrit quoi?
313	Ens	Bah ce que tu viens de me dire, est-ce que les expressions, elles sont égales? […]
314	Marc	C'est quoi, les expressions qui sont égales ?
315	Ens	Alors quelles sont les expressions qui sont égales ? Bon vous avez fini, les filles, là?
316	**Avec Divonne et Ina (28:20) Groupe C**	
317	Divonne	Mais on a fini depuis longtemps !
318	Ens	La deuxième et la troisième? Vous avez pas du tout fini, là ! […] Tu as trois questions et tu m'as juste rempli le tableau. […]
319	Divonne	Mais c'est la même chose que là, avec 0.
320	Ens	Là, là... Quelles sont les expressions qui sont égales? Là, tu n'as pas fini !

321	Ina	Oui, bah... je suis en train de chercher, là.
322	Ens	Alors Divonne, tu n'as pas fini là ! [...] Tu n'as même pas lu les questions !!!
323	Divonne	Mais c'est la même chose que là, euh... le 0, là !
324	Ens	Oui, mais après, tu n'as pas fini ! Alors quelles sont les expressions qui sont égales?
325	Divonne	Celle-là et celle-là. Ces trois-là et ces trois-là.
326	Ens	[A Marc] Faut que tu euh... fasses une remarque sur les expressions qui sont égales. [A Divonne et Ina]. Très bien. Alors est-ce que c'est toujours vrai pour celui-là, là ? Si tu avais que pour les deux premières expressions, on pouvait dire quoi ? Que les trois expressions, elles étaient égales ? C'est ça, qu'il faut que tu exprimes ! Ce que tu m'as dit à l'oral. Mais il faut que tu l'écrives là. Que les 3 expressions, elles sont égales.
327	Divonne	Et dans le 2 ?
328	Ens	Dans le... 2... Est-ce que les trois expressions, elles sont toujours égales ?
329	Divonne	Non.
330	Ens	Non, bah... c'est ça qu'il faut que tu mettes.
331	Divonne	Je mets non et oui?
332	Ens	Bah... et t'expliques pourquoi. Oui. Et « pourquoi » : ça veut rien dire, « oui ». Et après il faut que tu essaies de prouver pourquoi les expressions, elles sont égales ou pas.
333	**Avec Oulian (30:00) Groupe B**	
334	Oulian	Madame ! Euh... là, j'ai pas compris la formule. Euh... Une nouvelle conjecture.
335	Ens	Alors du coup est-ce qu'il y a des expressions qui sont égales ou pas quand même ? Quelles expressions ?
336	Oulian	Bah... oui.
337	Ens	Oui. Ça a l'air d'être lesquelles?
338	Oulian	C'est vrai là. Où ? Et vous parlez du 0.
339	Ens	De toutes.
340	Oulian	Hum.
341	Ens	Maintenant que tu as calculé avec 0, là, a priori, c'est lesquelles, les expressions qui sont égales?
342	Oulian	A et B.
343	Ens	A et B. D'accord, et a priori le C, ils sont pas [...] ?
344	**Mise en commun (30:33), groupe B Q2 [tableau 3]**	
345	Ens	Alors a priori, maintenant que vous avez fait les trois questions, là, vos expressions, elles sont égales ou pas?
346	Elèves	Non [en cœur].
347	Ens	Alors, c'est lesquelles qui semblent être égales?
348	Elèves	La A et la B/la C.
349	Ens	La A et... ?
350	E	La B.
351	Florianne	La C.
352	Ens	La A et la C. Alors, vous ne trouvez pas la même chose, déjà !
353	Florianne	Le A.
354	Philinte	Moi, je trouve la A et la B.
355	Ens	La A et la B.
356	Oulian	Parce que ça fait -2.
357	Ens	Florianne et Valérie, vous ne trouvez pas la même chose, toutes les deux?

358	Philinte	C'est la A et la B. Parce que la A, c'est [inaudible], la B aussi et pas la C.
359	Ens	Alors elles, elles ne trouvent pas ça !
360	Philinte	Qui? Moi je te dis que c'est la A et la B. […] Parce que la C, la dernière, elle […]
361	Ens	[A Florianne et Valérie]. En fait, euh... ils ont trouvé le même résultat, là. -3 et -3. Et par contre, ils ont trouvé -4, là. Donc du coup, ce qu'ils disent, c'est que le B , le A et le B […]. Donc a priori, c'est le A et le B. D'accord ?
362		
363	Ens	Bon. On va faire un petit bilan. Hop ! Pour vous, là, Philinte, pour x égal 0. Hop ! Vous avez trouvé quoi, du coup ?.
364	Philinte	Oui. Euh... -3, -3, -4.
365	Ens	-3, -3 et -4 [tableau 3]. Alors, du coup, est-ce que les trois expressions, elles sont égales, A, B et C?
366	Elèves	Non.
367	Ens	Non. Alors euh... pourquoi ?
368	Philinte (c	Bah... parce que la C, elle est mauvaise
369	Ens	Pourquoi la C, elle est mauvaise?
370	Philinte (c	Parce que il y -4.
371	Ens	Oui. Parce que du coup, pour la valeur x égal 0, on trouve pas la même que les autres.
372	Philinte	Oui, voilà.
373	Ens	D'accord ou pas? Alors du coup, c'est quoi votre nouvelle conjecture ?
374	Philinte	Bah... c'est euh...que il y a…
375	Oulian ou	Toutes ces expressions ne sont pas euh... égales.
376	Ens	Alors toutes les expressions ne sont pas égales mais est-ce qu'il y a quand même des expressions qui sont égales?
377	E	Oui.
378	Ens	Lesquelles?
379	Oulian ou	La A et la B.
380	Ens	Voilà. Donc allez-y, expliquez ça ! Et du coup, votre troisième, c'est quoi? Il va falloir que vous montriez que ces expressions, elles sont égales pour n'importe quelle valeur. Alors qu'est-ce que vous allez utiliser pour pouvoir montrer que ces expressions, elles sont...?
381	Philinte	La distributivité !
382	Ens	Ou ?
383	Elèves	Les identités remarquables !
384	Ens	Voilà. Les identités remarquables ! Là [en montrant le tableau], vous avez une identité remarquable, hein. Donc allez-y pour montrer que [tableau : 3) A(x)=B(x)] A(x), c'est égal à B(x).
385	**Mise en commun (33:00) Groupe C, Q2 [tableau 4 et 5]**	
386	Ens	Et pour vous, alors, là ?
387	E	0, 0, -6.
388	Ens	Hop ! Pour les troisièmes valeurs, là, qu'est-ce que vous avez trouvé?
389	E	0, 0, -6.
390	Ens	0, 0 et -6 [tableau 4]. Alors du coup, est-ce que nos deux expressions, elles sont égales ou pas?
391	Elèves	Non, bah non...
392	Elèves	Oui, les deux premières !
393	Ens	Alors voilà. […] Donc est-ce que les trois expressions, elles sont égales ?

394	Elèves	Non !!! [en chœur]
395	Ens	Et par contre, est-ce qu'il y en a qui ont l'air d'être égales quand même?
396	E	Ouais.
397	Ens	Lesquelles?
398	E	Le A et le B.
399	Ens	Le A et le B. Alors ensuite […] Donc du coup, quelles sont les expressions qui sont égales, là?
400	Elèves	Le A et le B.
401	Ens	Le A et le B. Alors. Comment on va faire pour montrer que c'est vrai pour n'importe quelle valeur?
402	E	Distributivité.
403	Ens	Oui. Faut utiliser quoi?
404	E	La distributivité.
405	Ens	Oui. La distributivité ou...?
406	E	Remplacer par une valeur.
407	Ens	Alors. Est-ce que, si tu remplaces par une valeur […] Non, ce n'est pas parce qu'on remplace par une valeur, qu'on va montrer que c'est vrai pour n'importe quelle valeur. Qu'est-ce qu'il va falloir utliser pour montrer que c'est vrai pour n'importe quelle valeur?
408	E	La distributivité.
409	Ens	Voilà. La distributivité ! Vous pouvez utiliser l'aide, aussi. La distributivité ou les identités remarquables. Alors allez-y ! Il faut faire la troisième question, là. Il faut montrer que... il faut montrer quoi pour la troisième question?
410	E	Non, il nous demande si les trois…expressions...
411	Ens	Voilà, ils nous demandent si les trois expressions sont égales. Est-ce que les trois expressions sont égales?
412	Elèves	Non.
413	Ens	Non. Ce sont lesquelles qui ont égales ?
414	E	Le A et le B.
415	Ens	Le A et le B. Est-ce que vous avez montré que le A et B sont égaux, là ?
416	E	Non.
417	Ina	Bah oui !
418	Ens	Comment tu as fait, Ina, pour montrer...? Est-ce que le tableau, ça nous permet de dire que les expressions, elles sont égales?
419	E	Non.
420	Ina	Bah oui, parce que [inaudible].
421	E	Non. Parce qu'on a pas utilisé la distributivité.
422	Ens	Je suis d'accord avec toi. Là on trouve que c'est les trois mêmes valeurs, là on trouve que c'est les trois mêmes valeurs. Mais est-ce que, parce que tu trouves que tes deux expressions, elles sont égales pour 3 valeurs, ça veut dire que les expressions, elles sont égales pour toutes les valeurs?
423	Elèves	Non.
424	Ens	Non. Donc comment tu vas faire pour montrer que tes expressions, elles sont égales pour toutes tes valeurs?
425	Ina	Bah...on les recalcule.

426	Ens	On les recalcule encore pour une autre valeur.
427	Ina	Bah oui... bah...
428	Ens	Si tu les recalcules encore pour une autre valeur, ça veut dire qu'elles vont être égales pour 4 valeurs. Toi, tu veux montrer qu'elles sont égales pour toutes les valeurs.
429	E	On calcule...
430	E	Bah... on enlève le -6.
431	Ens	Ah bah non... euh... tu as calculé. Ça fait -6, ça fait -6. On a vu justement que celle-là, elle était pas égale aux autres, puisque pour x égal 0, ça donne par le même nombre. D'accord. Mais est-ce que toi, Ina, ça te dérange ?
432	Ina	On utilise la distributivité.
433	Ens	Oui, c'est ça, D'accord. Il faut montrer que c'est vrai pour... C'est-à-dire que pour montrer que c'est vrai pour n'importe quel nombre, il faut faire les calculs […] avec les lettres. D'accord. Donc utiliser la distributivité. Alors c'est quoi, vos deux valeurs? Vos deux expressions ? [tableau] Donc c'est x plus 2 au carré, -4 [(x+2)^2-4=] et l'autre c'est x facteur de x plus 4 [x(x+4)=]. Alors allez-y ! Est-ce qu'on va montrer avec la troisième, Ina ? Est-ce que la troisième, elle est égale aux autres?
434	Ina	Non.
435	Ens	Non. Pourquoi? Elle est pas égale aux autres?
436	Ina	Parce qu'il y a -6.
437	Ens	Oui. Parce que pour x égal 0, c'est pas égal. Donc ça suffit, c'est bon, ça veut dire que c'est pas égal.
438	Ina	Mais là, on peut pas mettre...
439	Ens	Oui, par exemple, pour celui-là [x(x+4)] qu'est-ce que tu vas faire?
440	Ina	Pour euh... x fois x plus euh... x fois 4.
441	Ens	[tableau 5 flèche] Ouais. Très bien et pour celui-là, tu vas faire quoi?
442	Ina	x fois -4.
443	Ens	Attention ! Ça c'est quoi, là?
444	Ina	Au carré.
445	Ens	Là, notre 4, il est pas mis en facteur, hein ! C'est -4. Là, on peut distribuer parce que c'est un facteur, c'est une multiplication.
446	Mohamed	x fois x fois x.
447	Ens	Là, c'est quoi? x plus 2 au carré, qu'est-ce qu'on a vu, ce matin?
448	Mohamed	x plus 2 au carré.
449	Ens	C'est quelle identité remarquable?
450	Gabrielle	Ah ouais ! C'est la première !
451	Ens	Oui, donc c'est a plus b au carré, hein [tableau 5]. Vous regardez dans l'aide, hein. C'est marqué dans l'aide, là, derrière. […] C'est bon? Donc a plus b au carré, ça donne quoi? […]
452	Elèves	Ça fait a2 au carré.
453	Ens	Non. a au carré plus... ?
454	Elèves	b au carré.
455	Ens	Plus b au carré. Plus...?
456	Elèves	2ab.
457	Ens	2 fois a fois b. Alors allez-y ! Hop !
	Temps de recherche, groupes B et C, Q3	
458	Mohamed	Mais Madame ! Là, c'est x fois x?

459	Ens	Ouais. Alors vas-y ! Hop ! Vous faites les calculs pour le 3. C'est bon. […]
460	**Avec Yann (38:24) Groupe C**	
461	Ens	Ok. Mais par contre il y en a deux qui sont égales. Tu vois, c'est ça qu'on vient de voir, là. Ces deux-là, elles sont égales à chaque fois pour toutes les valeurs. Donc faut montrer qu'elles sont égales.. C'est pour ça qu'il faut se servir de ça, là. Vas-y !
462	Ens	[A la classe]. Pour la troisième, il faut utiliser la distributivité, les identités remarquables. C'est-à-dire que... on va utiliser le calcul algébrique, donc on va développer, donc là, Divonne tu as des choses à faire, parce que tu ne l'as pas fait. Ina, c'est pareil...
463	Ens	[A Yann] Et faut voir si c'est égal ou pas. Alors vas-y !
464	Yann	x c'est… fois x.
465	Ens	Voilà. Comme ce matin. Donc tu distribues pour celui-là et là, tu te sers d'une identité remarquable.
466	Yann	Pour celui-là, j'ai...
467	Ens	L'identité remarquable, c'est quoi ? C'est a plus b au carré.
468	Yann	Ça fait euh..
469	Chloé	Le -4, on s'en fout?
470	Ens	Bah non, on s'en fout pas. D'abord, on développe l'identité remarquable et ensuite il y aura moins 4.
471	Ens	[…]
472	Yann	x plus 2 ça fait au carré. Bah si, là, parce que le 2 il est au carré !?
473	Ens	Ouais. Donc, ça fait quoi?
474	Yann	Bah euh [inaudible]...
475	Ens	Non, elle a raison. C'est toi qui as raison Chloé, il n'y a pas de x au carré. Ton identité remarquable, c'est a au carré plus 2 fois a fois b plus b au carré. Tu n'as pas de petit 2 au carré. Elle est marquée au tableau, là. A plus b au carré, a au carré, plus 2 fois a fois b plus b au carré.
476	Chloé	J'ai appliqué ça mais euh... je….
477	Ens	Moins 4. Ouais.
478	Yann	Et c'est tout.
479	Ens	Ouais. Celle-là bah... puisque tu as dit que celle-là c'était pas vrai... Donc celle-là. Par contre, celle-là. Essaie de voir si...
480	**Avec Laure (40:35) Groupe C**	
481	Laure	Madame?
482	Ens	Ouais. [inaudible]
483	Ens	[A la classe] Le groupe, là-bas, vous avez fini ou pas, vous avez montré que les expressions, elles étaient égales pour tout x ou pas?
484	Philinte	Non, j'ai pas compris.
485	Ens	Qu'est-ce que tu n'as pas compris, Philinte? Toi, tu ne comprends jamais rien mais finalement tu arrives toujours à faire ce qu'il faut !
486	**Avec Mohamed et Gabrielle (40:58) Groupe C**	
487	Ens	Ouais. C'est ça. Et après, il faut que tu calcules. Là, il faut que tu... Ouais... x au carré, x fois x. Mais là, il y a un plus donc... Ça, ça fait x au carré plus...?
488	Mamdou	{inaudible]
489	Ens	Ouais. Et là, il faut que tu utilises une identité remarquable.
490	**Avec Divonne et Ina (41:16) Groupe C**	

491	Ens	Ok. Tu as vu ce qu'il y a marqué au tableau? Tu as vu ce qu'il y a marqué ou pas ? C'est x fois. Toi, ce que tu as marqué, c'est pas exactement la même chose, hein ! Alors réfléchis. […] x fois x plus 4. C'est ça ton expression, hein ! L'expression, c'est x fois x plus 4.
492	Ina	Hum.
493	Ens	Ton autre partie, c'est x plus deux au carré moins 4. D'accord ? C'est ça qu'il faut que tu développes. Ça vient d'où, ça?
494	Ina	Bah... c'est ce que j'ai fait. J'ai fait x fois x fois.
495	Ens	Ah bah... non, il n'y a pas de « fois », là. C'est un plus. Tu vois, ton « fois », tu le distribues quand tu distribues le x. Mais entre les deux, il y a un fois, hein. Alors vas-y ! Refais-le-moi, là.
496	Divonne	Et on fait, le C, aussi?
497	Ens	Est-ce que le C, c'est nécessaire de le faire?
498	Divonne	Non.
499	Ens	Pourquoi c'est pas nécessaire, Divonne?
500	Ina	Parce qu'ils sont pas égaux ?
501	Divonne	Parce qu'ils sont pas euh...
502	Ens	Parce qu'ils sont pas égaux. D'accord.
503	**Avec Florianne (42:15) Groupe B**	
504	Ens	Ok. Donc nous, ce qu'on a conjecturé, c'était que « qui était égal à quoi » ?
505	Florianne	Que A et B ils étaient… pas…
506	Ens	Que A et B ils étaient égaux, d'accord. Donc ce qu'il faut faire, c'est utiliser A et B. Donc ton A, ce qui serait bien, c'est que tu développes tout. Et puis comme ça, tu, t'as un résultat et tu vois si, quand tu développes la deuxième expression, ça donne bien le même résultat ou pas.
507	Florianne	Ah ! On doit faire les… les… développements ?
508	Ens	Et les identités remarquables.
509	Florianne	Mais là euh...
510	Ens	Là, tu utilises les identités remarquables et là, tu utilises la distributivité. D'accord ? Parce que comme, du coup, tu auras fait les calculs avec les lettres, du coup, ça va forcément le montrer pour n'importe quel nombre.
511	Florianne	Hum..
512	Ens	Alors vas-y !
513	**Avec Valérie (43:00) Groupe B**	
514	Ens	Fais-moi voir ce que tu as fait.
515	???	En fait, j'ai fait euh… les identités remarquables.
516	Ens	Ok. Alors, ça vient d'où, ça? Le B?
517		Euh... La [inaudible], là.
518	Ens	Ah ok ! J'avais pas vu. Bah pour que ce soit... Tu vois, l'identité remarquable, il aurait fallu que ce soit le même nombre. Il aurait fallu que ce soit x plus 3. De x moins 3. Là, ce que tu peux utiliser, c'est la double distributivité. C'est pour ça que je vous ai mis l'aide, là.
519	Florianne	Moins fois moins, ça fait plus, Madame?
520	Ens	Moins fois moins ça fait plus, oui !
521	Ens	D'accord ou pas?
522	Valérie	D'accord.

523	**Avec Ignace (43:39). Groupe B**	
524	Ens	Ignace, c'est bon ou non ? Pas du tout? Ok. Là tu... tu n'as pas distribué comme il faut. Et du coup, là, ça donne la même chose ? C'est égal, les deux ?
525	Ignace	Non.
526	Ens	Du coup, ta conjecture, elle est pas bonne, hein. On a bien montré que euh...
527	Ignace	Non [inaudible].
528	Ens	Tout à l'heure, on a bien montré que le A et le B ils devaient êtres égaux. Donc si jamais, euh... Tu vois, a priori, quand tu vois ça, t'essaies de vérifier puisque toi tu as vérifié pour euh... vous avez calculer pour euh... x égal 0. On avait trouvé -3 et -3. Donc du coup, là, tu vois, tu n'as pas démontré grand chose. On pourrait aussi vérifier que pour x égal 0, ça donne bien la même chose, là et là, hein... Parce que là, tu t'es trompé, ton x tu l'as développé qu'une seule fois.
529	Ilina	[inaudible].
530	Ens	D'accord. [inaudible]. Tu distribues. Tu as juste mis x fois x et là x plus 2 au carré. Il faut que tu utilises l'identité remarquable qui est là. D'accord ? Allez, vas-y !
531	**Avec Ina et Divonne (45:00) Groupe C**	
532	Ina	Euh... là, c'est impossible.
533	Ens	Alors attends. Là, je suis d'accord. C'est ça, x au carré, c'est ça et ça tu le mets où ?
534	Ina	Bah on fait 4x.
535	Ens	Ouais. Donc plus 4x. Vas-y. Alors celui-là, comment on fait?
536	Ina	Bah on voit où est-ce qu'il est le... le chiffre. Il est là, il est pas devant.
537	Ens	Oui, alors je suis d'accord. C'est très bien, donc du coup, tu ne distribues pas le 4. Par contre, qu'est-ce que tu peux utiliser?
538	Ina	2x.
539	Ens	Une identité remarquable, c'est pour ça que je vous l'ai dit, là.
540	Ina	2, non 2 fois 2.
541	Divonne	Et pourquoi on fait pas passer ça là. Ca fait x au carré moins 4.
542	Ens	Est-ce que x plus 2, ça fait 2x, Divonne?
543	Ina	Non.
544	Ens	Pourquoi?
545	Ina	C'est 2 fois x qui fait 2x.
546	Ens	Oui.
547	Divonne	Il y a un « plus », là.
548	Ens	Est-ce que « fois », c'est la même chose que « plus » ?
549	Ina	Non.
550	Divonne	[Rires] Pourquoi il y a un « plus », alors?
551	Ina	[Rires] Parce que c'est pas 2x !
552	Ens	Parce que il y a un « plus », justement, Divonne. C'est pas parce que, ton expression, c'est x plus 2. Et toi, tu as raison, tu me dis, x plus 2, c'est 2x donc x plus 2 au carré, c'est facile. Mais non ! Parce que c'est la même chose. 2x et x plus 2 c'est pas la même chose.
553	Divonne	Ok. Alors on fait comment, alors?
554	Ens	Ok. Donc là, on se sert de quoi, x plus 2 au carré, ça vous fait penser à quoi?
555	Ina et Div	Hum...
556	Ens	A ce qu'on a fait ce matin ! A plus b au carré.
557	Ina	D'accord.
558	Ens	Ouais. A plus b au carré et puis je l'ai marqué au tableau.

559	Ina	Ça fait 2, 2 fois x fois.
560	Ens	Alors déjà, il y a … a au carré. a au carré, ça fait quoi?
561	Ina	Ça fait x.
562	Ens	x au carré. Plus... ?
563	Ina	x au carré plus 2.
564	Ens	Fois... ?
565	Ina	2 fois .. 2 au carré.
566	Ens	Regarde.
567	Ina	Tu dis n'importe quoi !
568	Ens	« Tu dis n'importe quoi », merci Ina !
569	Divonne	Ça fait 2 fois x fois 2 plus...
570	Ens	Plus...?
571	Divonne	Plus...
572	Ina	Plus 4.
573	Divonne	Plus 2 au carré.
574	Ens	Plus 2 au carré. Alors allez-y et après on met le moins 4. […]
575	**Avec Gabrielle et Mohamed (46:38) Groupe C**	
576	Gabrielle	Madame, est-ce que c'est ça?
577	Ens	Sauf que là, il y a un plus, là ! Ton plus, il vient où?
578	Gabrielle	C'est euh...
579	Ens	Là, tu fais comme si c'était que des multiplications. C'est pas que des multiplications, hein !
580	Gabrielle	Là, je euh...
581	Ens	Là, tu as x fois x plus x fois 4. Et alors, il faut utiliser une identité remarquable. Donc ça, c'est quoi, comme identité remarquable?
582	Gabrielle	On va le remplacer par euh...
583	Ens	Non. Pareil, il faut que tu développes. Pour montrer que c'est vrai pour tout x, il faut forcément que tu utilises l'algèbre. Donc là, tu utilises l'identité remarquable qui est là. Ça fait pas 2x au carré. Parce que 2 plus x, c'est pas la même chose que 2x. 2x, c'est 2 fois x. Tu comprends ce que je dis ou pas, Mohamed ? Montre-moi. C'est pas grave.
584	Mohamed	C'est euh... 2 fois 2x moins 4?
585	Ens	Ouais. Toi, ce que tu as mis, ça ne marche pas. D'accord ? Donc toi, tu as mis x plus 2 égal 2x et ça, c'est pas bon, hein. D'accord, 2x c'est 2 fois x. Or là, ce que tu as, toi, c'est x plus 2. D'accord ? […]
586	Ens	Alors, c'est ton a plus b au carré. Ton a c'est x. Donc d'accord. Donc du coup, ça te fait? Ça c'est a, ça c'est b. Donc a plus b au carré, c'est a au carré, plus 2 ab, plus b au carré. Donc ton a carré, ça fait quoi?
587	Gabrielle	Ça fait x2.
588	Ens	Vas-y...Donc x quoi?
589	Gabrielle	x plus 2.
590	**Mise en commun(48:29) Groupe C, Q3 [tableau 6]**	
591	Ens	Ok. Juste euh... Vous avez fini, là, le premier? Vous avez montré que c'était égal ?
592	Elèves	Oui, oui !
593	Ens	Ok. Alors, juste. Du coup, on va faire la correction pour ça. Alors, Gabrielle, tu vas essayer de la faire. Notre a plus b au carré. Notre a c'est qui, là?
594	Elèves	a.

595	Ens	Ça représente la a [tableau 6] et celui-là, ça représente?
596	Elèves	b.
597	Ens	Le b [tableau 6]. J'aimerais bien que tout le monde écoute, là !
598	Mohamed	Ah ! Mais c'est ce qu'on a fait ce matin ?
599	Ens	Oui. A plus b au carré, donc c'est a au carré. Donc là, qu'est-ce que je vais mettre, Gabrielle?
600	Marc	x au carré.
601	Ens	Non. Notre a, il fait combien? C'est Gabrielle, que j'interroge Marc ! Donc x au carré [tableau 6]. Plus... ?
602	Gabrielle	Plus 2.
603	Ens	2 fois. Notre a, c'est combien ?
604	Gabrielle	x.
605	Ens	Voilà, fois... ?
606	Gabrielle	2.
607	Ens	2. Plus...?
608	Gabrielle	2 au carré.
609	Ens	2 au carré. Moins 4. D'accord. On réécrit. Ensuite on calcule. D'accord, donc x au carré. Ensuite la deuxième partie, là, comment on fait pour calculer?
610	Gabrielle	2x.
611	Ens	Non, c'est 2 fois x fois 2 encore.
612	Gabrielle	Donc ça fait x.
613	Ens	Donc oui, je suis d'accord. Donc ça fait 2x fois 2 encore. Donc ça fait combien, Gabrielle?
614	Gabrielle	4x.
615	Ens	4x. Plus, 2 au carré?
616	Gabrielle	4.
617	Ens	Ça fait 4.
618	Gabrielle	Moins 4.
619	Ens	Moins 4. Là, il y a encore des choses qu'on peut calculer...
620	Gabrielle	Euh... le 4 avec le 4.
621	Ens	Le 4 avec le 4. Donc ça fait combien?
622	Gabrielle	Ça fait 0.
623	Ens	Donc il reste combien?
624	Gabrielle	Euh...
625	Ens	Il reste combien, là? x au carré plus... ?
626	Gabrielle	Plus 4x.
627	Ens	Ouais. D'accord. Alors ensuite, celui-là, comment on fait pour faire ça, là ? Baptiste?
628	Baptiste	Bah... x fois x, ça fait x au carré.
629	Ens	Ouais, alors...
630	Baptiste	Plus x euh... fois 4. [tableau 6]
631	Ens	Voilà. Alors ça, comment on l'écrit, si on réduit?
632	Baptiste	x au carré.
633	Ens	Oui.
634	Baptiste	Plus x euh plus 4x.
635	Ens	Plus quoi? Plus 4x. Est-ce que ça donne bien la même chose que l'autre?
636	Baptiste	Ouais.
637	Ens	Oui. Est-ce que là, on a montré que c'était vrai pour n'importe quelle valeur?

638	E	Oui.
639	Ens	En fait, pour montrer que c'est vrai avec n'importe quelle valeur, il faut faire quoi ? Divonne !?
640	Mohamed	Avec des x.
641	Divonne	Faut développer.
642	Ens	Il faut faire des calculs avec les x. D'accord ? Il faut garder les lettres.
643	Divonne	La distributitité.
644	Ens	D'accord ou pas ? Exactement ! Alors allez-y, maintenant, vous passez à l'exercice 2 ! Vous !
645	**Mise en commun (50m55) Groupe B, Q3 [tableau 7]**	
646	Ens	Euh... donc pour le B. Alors du coup, c'était quoi, vous, votre euh... vos deux expressions égales ? A priori, c'était quoi ?
647	Elèves	A et B.
648	Ens	A et B. Donc on avait x-1 au carré moins 4 [(x-1) 2-4] et l'autre c'était x plus 1 facteur de x moins 3 [(x+1)(x-3)] [tableau 7]. Alors, comment on fait pour la première, là, x moins 1 au carré ? Ça donne quoi? [Sonnerie] Vas-y, Valérie ! […]
649	Valérie	
650	Ens	Donc ça fait. x au carré moins 2 fois x fois 1 plus 1 au carré [tableau 7]. […] Donc ça, ça fait x au carré, moins 2x, plus 1 moins 4. Donc ça, ça fait x au carré moins 2x moins 3 [Zoom tableau]. D'accord pour tout le monde ? […] Alors ensuite, celui-là [(x+1)(x-3)], comment on fait pour faire ça, là ? C'est la double distributivité [Tableau 7 flèches]. Donc x fois x plus... ?
651	E	x fois 3.
652	Ens	x fois moins 3.
653	E	Plus...
654	Ens	[…]
655	E	Plus 1 fois x, ça fait x.
656	Ens	Plus 1 fois x.
657	E	1 fois -3.
658	Ens	Donc ça, ça fait x au carré [tableau 7] moins 3x plus x moins 3. Donc ça fait x au carré moins 2x moins 3. D'accord ? Est-ce que ça donne bien la même chose ? [Tableau, souligne expressions].
659	Elèves	Oui.
660	E	C'est bon c'est égaux.
661	**Synthèse (53:35), groupes B et C**	
662	Ens	Alors juste une dernière chose? […] Comment on fait pour montrer que deux expressions ne sont pas égales?
663	Elèves	La distributivité.
664	Ens	Alors on lève la main, déjà... Oui, vas-y !
665	E.	On met une valeur à une lettre.
666	Ens	Voilà. Et du coup, qu'est-ce qu'il faut qu'on obtienne, normalement, pour que ce soit pas égal ?
667	Elèves	On n'obtient pas le même résultat.
668	Ens	On n'obtient pas le même résultat. Est-ce que cette technique, elle marche pour montrer que deux expressions sont égales?
669	Elèves	Non (un oui).

670	Ens	Non, pourquoi? Parce que c'est pas parce que c'est égal pour une ou deux ou trois valeurs ou cinq valeurs, que c'est égal pour toutes les valeurs. Pour montrer que c'est égal...
671	Divonne	Toutes [inaudible] … ?
672	Ens	Bah il y en a combien des valeurs, Divonne ? Une infinité. Donc c'est pour cela qu'on va pas faire les calculs à chaque fois. […] Et par contre euh... pour montrer que c'est vrai pour n'importe quelle valeur, il faut utiliser le calcul algébrique. Vous pouvez me rendre vos... vos feuilles.
	Fin (54:30)	

Copies d'écran

Tabelau 1

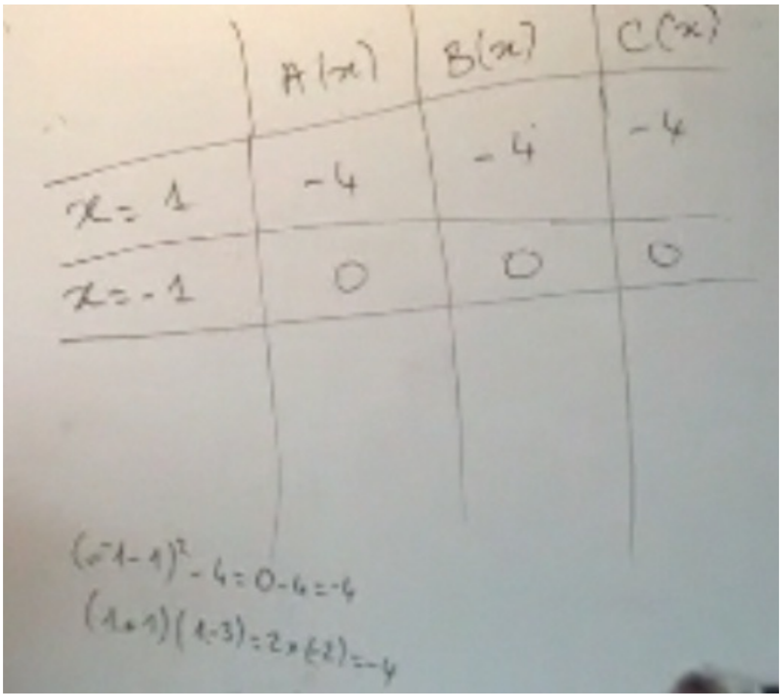


Tableau 2

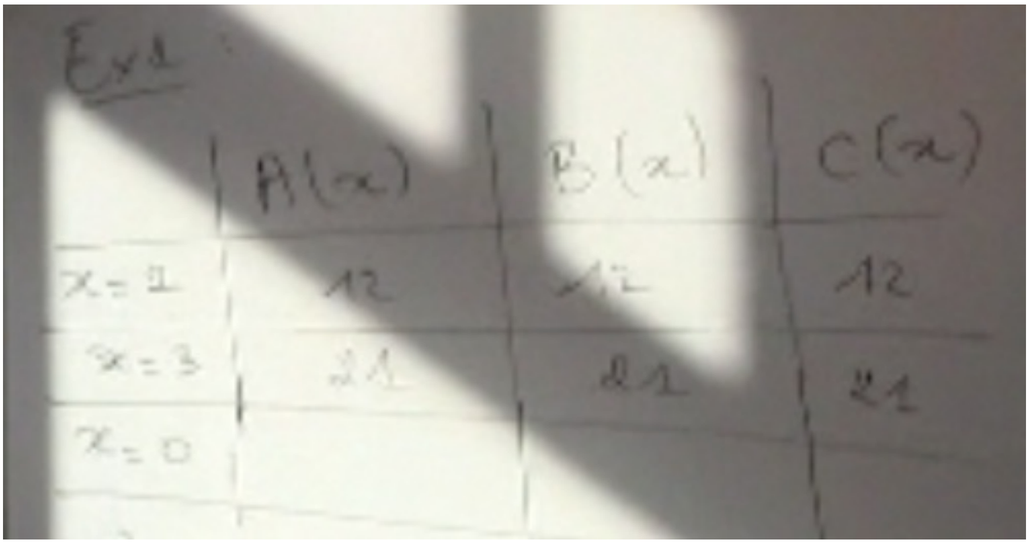
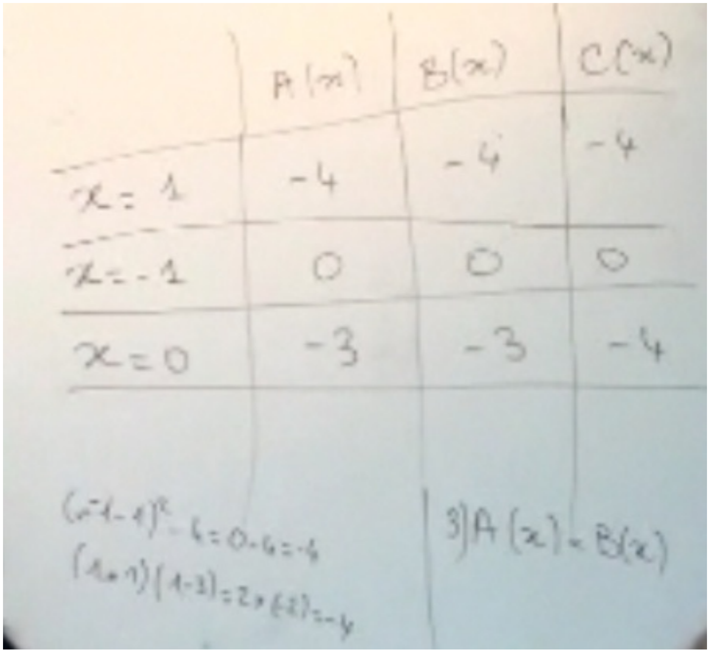


Tableau 3



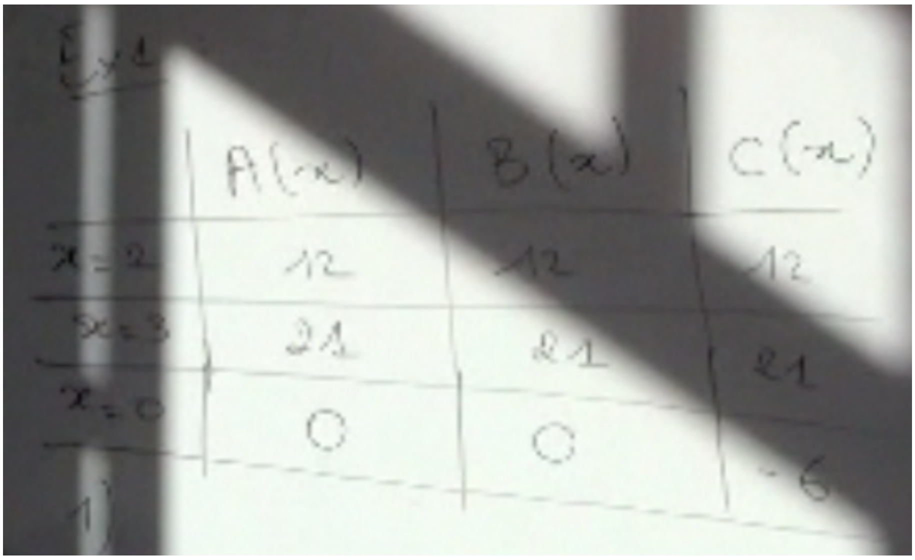
	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
$x=1$	-4	-4	-4
$x=-1$	0	0	0
$x=0$	-3	-3	-4

$(1-1)^2-4=0-4=-4$

$(1+1)(1-3)=2\times(-2)=-4$

3) $A(x)=B(x)$

Tableau 4



Ex 1

	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
$x=2$	12	12	12
$x=3$	21	21	21
$x=0$	0	0	-6

1)

Tableau 5

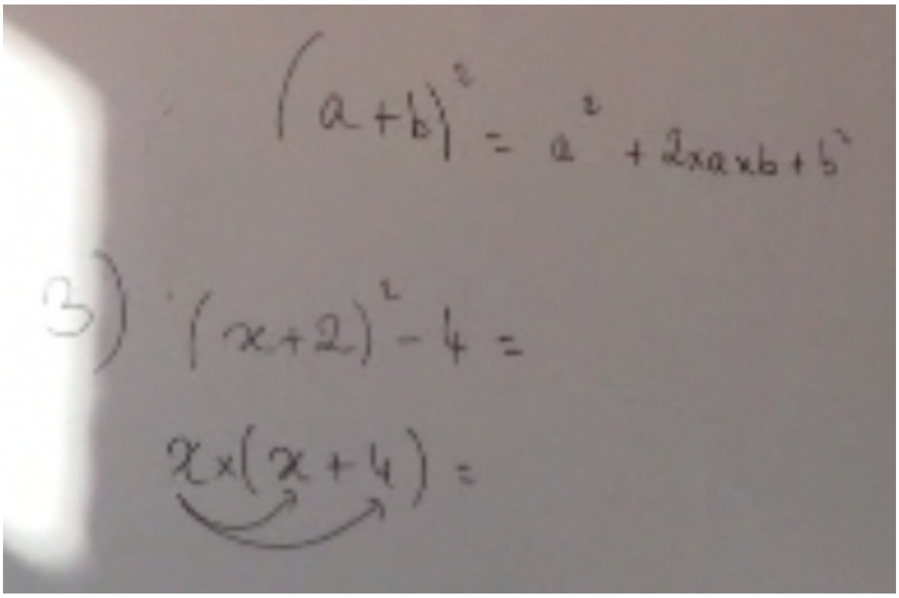


Tableau 6

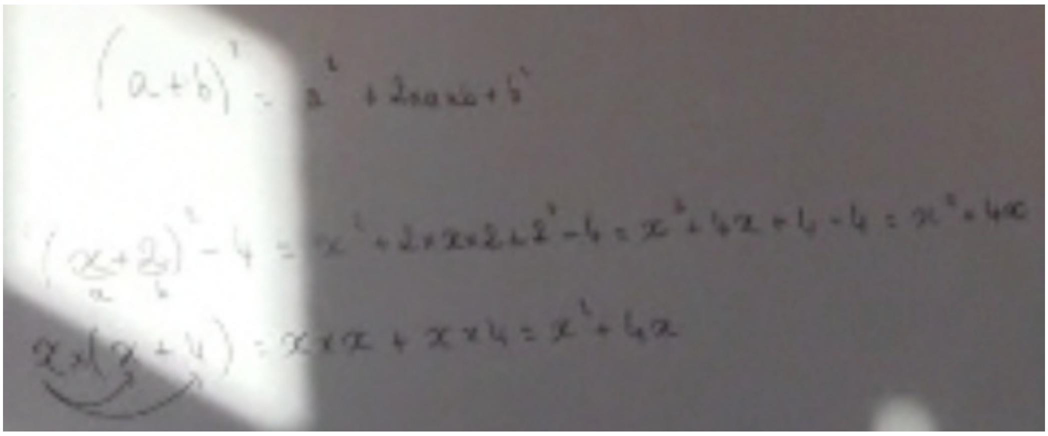
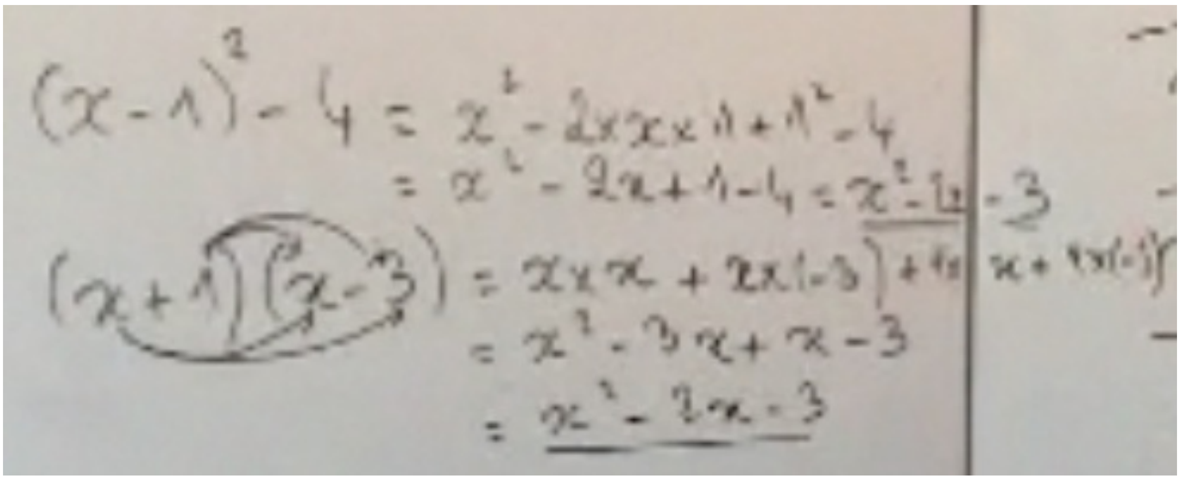


Tableau 7



Séance différenciée 3
Parcours 3

Tableau

Enseignant

Michel

Yann | Chloé

Mohamed | Gabrielle

Ouliane | Jocelin

Laure | Anne

Marc

Florianne | Valérie

Baptiste

Divonne | Ina

Mélusine | Philinte

Ignace

Groupe B

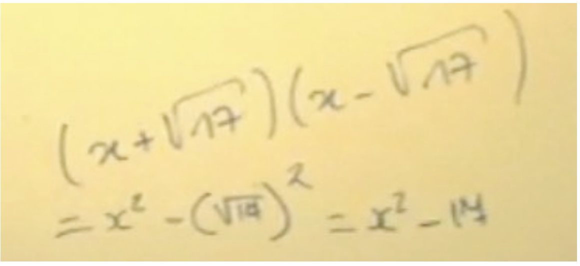
Groupe C

Transcription partielle d'une séance « habituelle »
28 novembre 2012

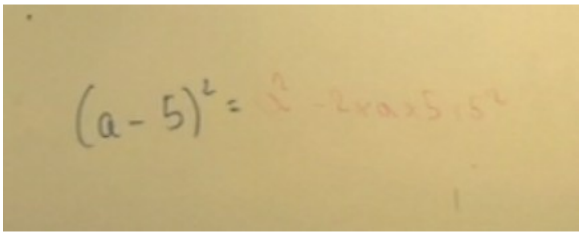
Lancement de la séance (5min à 6min30)
Enoncé : Développer les expressions
(4x+7)^2=
(x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17}) =
(a-5)^2=
5x(x-8)=
(1+\sqrt{3})^2=

Temps de recherche (6min30 à 19min)
14min50 : Mini-bilan avec rappel des identités remarquables

Proposition de réponses par des élèves au tableau (19min à 22min)
Anne pour (x+\sqrt{17})(x-\sqrt{17})
Réponse :
= x^2-(\sqrt(17))^2=x^2-17



Marc pour (a-5)^2
Réponse :
= a^2-2*a*5+5^2



Mohamed pour (4x+7)^2
Réponse :
=(4x)^2+2*4x+7+7^2
=16^2+15^2+7 [car 2*4+7=15]

Divonne pour (1+\sqrt{3})^2
Réponse :
=1^2+\srrt(3)^2+2*1*\sqrt(3)
1+3+2\sqrt(3)

Ina pour 5x(x-8)
Réponse :

=5x*x+5x-8
=5x^2+-3x

Mise en commun et correction (22min à 39min)
21min43 : « On va corriger, voir si tout le monde est d'accord »
22min54 « Pourquoi on peut réduire 2*a*5 ? … Parce que la multiplication c'est commutatif » (geste de la main avec deux doigts qui tournent)

Correction des productions de Divonne et d'Ana

Correction de la production de Mohamed (environ 26min à 29min50)

1. Enseignant : Tout le monde est d'accord avec ça ?
2. Elève : Non.
3. Enseignant : En plus, c'est pas ça que tu as fait Mohamed, donc qu'est-ce qu'il ne va pas ? Ok, donc là, c'est quoi notre identité remarquable ? […] a plus b au carré, ça donne quoi ? [Silence] Ok, il y a quoi entre le 2 et le a et le a et le b ?
4. Elève : Fois.
5. Enseignant : Ok, 2 fois a fois b [Zoom tableau 1]. Toi dans ton identité remarquable qui est le a et qui est le b ?
6. Elèves : Le a c'est 4x.
7. Enseignant : 4x, a.
8. Elèves : Le b, c'est le 7.
9. Enseignant : Le b c'est le 7 [elle écrit a sous le 4x et b sous le 7]. Alors là tu m'as mis a au carré [en pointant l'identité remarquable], 4x au carré, très bien, euh ce serait bien que tout le monde mette les parenthèses, d'accord ? Si on ne met pas les parenthèses, qu'est-ce que ça veut dire ? Pourquoi, c'est pas la même chose si on ne met pas les parenthèses ? […]
10. Mélusine : Si on ne met pas les parenthèses, c'est seulement le x qui est au carré.
11. Enseignant : C'est seulement le x qui est au carré. D'accord, donc c'est pas le 4x qui est au carré. Ensuite, pour celui d'après. Donc on a 2 fois a, ça, ça marche et après ?
12. Elève : Fois b […]
13. Enseignant : Donc il faut mettre quoi ? Fois [elle efface + et remplace par un *]. Ensuite plus…
14. Elève : 7 au carré.
15. Enseignant : 7 au carré, ça, ça marche. Ensuite, du coup, 4x au carré, ça, ça donne quoi ?
16. Elèves : Ca fait euh 16.
17. Enseignant : Chut, vas-y Mohamed.
18. Mohamed : 16 x.
19. Enseignant : 16x ? Au carré, mais toi tu as oublié le x là. Ensuite qu'est-ce que tu as mis ? Au carré. Alors explique-moi comment tu as fait ?
20. Mohamed : [inaudible] Plus 7.
21. Enseignant : Plus 7, donc du coup là qu'est-ce ça va donner ? 2 fois 4x fois 7.
22. Elèves : 56.
23. Enseignant : 2 fois 4, ça fait combien ?

24. Elève : 8.
25. Enseignant : 8 et fois 7 ? [Silence] 56. Ca nous donne quoi le deuxième ?
26. Elèves : 56x.
27. Enseignant : 56x, très bien. Et le dernier tu as mis quoi ?
28. Mohamed : 49 au carré.
29. Enseignant : 49 quoi ?
30. Mohamed : 49 au carré.
31. Enseignant : 49 au carré, est-ce que tout le monde est d'accord avec ça ?
32. Elèves : Non.
33. Enseignant : Et pourquoi ?
34. Elève : On a déjà calculé le 7 au carré.
35. Enseignant : Qu'est-ce qu'il faut que tu enlèves Mohamed ?
36. Mohamed : Le carré.
37. Enseignant : Voilà, parce que sinon, si tu le remets au carré, tu peux encore calculer, il faut que tu calcules 49 fois 49. Là, ça y est le carré tu l'as calculé, le carré ça fait 49, donc là, c'est bon.
38. Mohamed : Mais c'est ce que j'avais mis.
39. Enseignant : C'est ce qu'il avait mis.
40. Elèves : Non, il avait mis 49 au carré.
41. Enseignant : Non il avait mis 49 au carré. Alors Tamara, est-ce qu'est 49x ?
42. Tamara : Non.
43. Enseignant : Pourquoi ? […] Il n'y a pas de x.

Correction de la production d'Ina (30min22 à 39min 02)

44. Enseignant : Alors, qu'est-ce qu'il y a Ina [qui dit ne pas avoir réussi], vas-y ?
45. Ina : J'ai fait 5x fois x.
46. Enseignant : Ca je suis d'accord. Pourquoi est-ce qu'on fait 5x fois x, il est où notre fois en fait ?
47. Elèves : [inaudible]
48. Enseignant : Voilà, il est là [elle ajoute un * entre 5x et (x-8)]. On développe le 5x fois x [flèche]. Ca je suis d'accord. Et ensuite, qu'est-ce qu'on fait ?
49. Ina : Plus 5x moins 8.
50. Elèves : Non.
51. Enseignant : Ah bah, non. Qu'est-ce qu'on développe ? On développe quoi ?
52. Ina : Bah le 5x
53. Enseignant : Oui, mais on développe, c'est la multiplication que tu distribues par rapport à la soustraction, là. Tu fais 5x et ensuite.
54. Ina : Fois 8.
55. Enseignant : C'est pas 8, c'est ? Moins 8. D'accord, soit tu mets ton moins là, ça fait -5x fois 8, soit tu fais plus 5x fois moins 8 [tableau]
56. Ina : Bah, c'est 5x moins 8, bah voilà, j'ai bien fais 5x moins le 8.
57. Enseignant : Ok, sauf que ce que tu distribues c'est le. Là, tu n'as pas fait 5x plus x.
58. Ina : Non, j'ai pas mis fois, j'ai mis plus.
59. Enseignant : Là, tu as bien fait 5x fois x.
60. Ina : Non, c'est…

61. Elève : Si tu as bien fait 5x fois x.
62. Ina : Ah oui, euh au début.
63. Enseignant : Bah, oui et pourquoi tu ne refais pas la même chose. Regarde. [31min52] Si, si on prend un exemple. D'accord, un exemple numérique. C'est ça qu'on a vu. On a vu que si c'était vrai pour n'importe quelle valeur, c'est vrai euh, on peut prendre n'importe quelle valeur numérique. Tu es d'accord ou pas ?
64. Ina : [Oui de la tête]
65. Enseignant : Donc, si on vérifie avec euh, x égal 0 par exemple, D'accord. Si on prend ça, ça fait 5. Vas-y remplace par 0. [calculs, zoom tableau 2]
66. Ina : 5 fois 0.
67. Enseignant : Fois ?
68. Ina : Fois x moins 8.
69. Enseignant : Alors ton x il fait combien ?
70. Ina : 0.
71. Enseignant : 0 moins 8. Alors, ça, ça fait combien ? 5 fois 0 fois 0 moins 8 ?
72. Ina : Ca fait euh, 5 fois [Silence].
73. Enseignant : Ca fait 5 fois 0 fois moins 8, hein Ina. 5 fois 0, ça fait combien
74. Ina et élèves : 0.
75. Enseignant : Ca, ça fait 0, hein, d'accord. Ensuite si on remplace toi ce que tu as fait, là-dedans là.
76. Ina : 5 fois 0…[…, Entrée en classe de Yann]
77. Enseignant : Donc là, ça fait 5 fois ?
78. Elève : 5 fois 0.
79. Enseignant : […] 5 fois 0 au carré. Chut.
80. Elève : Plus 5 fois 0 moins 8
81. Enseignant : Ah tu fais pour le premier là [première ligne d'Ina]. D'accord. Et ça, est-ce que ça donne la même chose ? 5 fois 0 au carré, ça fait combien ?
82. Ina : Ca fait euh, 25.
83. Enseignant : 5 fois 0.
84. Ina : Bah, 0 fois 0, ça fait 0. Ah ça fait 5 fois 0.
85. Enseignant : oui, ça fait ?
86. Ina : Ca fait 0.
87. Enseignant : Oui. Plus, le deuxième ?
88. Ina : Plus moins 3x.
89. Enseignant : 0 plus 0 moins 8. Donc ça, ça fait ?
90. Ina : 0.
91. Enseignant : Et 0 moins 8.
92. Ina : Ca fait 0, euh 8.
93. Enseignant : Ca fait moins 8. Bon, alors est-ce que ça fait la même chose là ?
94. Ina : Bah euh, non.
95. Enseignant : Non, donc tu peux aussi de temps en temps dans ta tête quand tu n'es pas sûre de ce que tu fais, refaire ça avec euh des valeurs hein. Si c'est pas vrai pour 0, est-ce que ça veut dire que c'est vrai ce que tu as fait ?
96. Ina : Bah non.

97. Enseignant : Est-ce que ça veut dire que vrai ça Ina ? Si c'est pas vrai pour 0.
98. Ina : Ca peut être vrai.
99. Enseignant : Ca peut pas être vrai pour n'importe quel x puisque c'est déjà pas vrai pour 0. Tu es d'accord Ina.
100. Ina : Hum
101. Enseignant : Donc tu peux pas faire un cas général, en disant c'est pour n'importe quel x. Pour 0, c'est pas vrai. D'accord.
102. Ina : Ah, c'est pas bon !
103. Enseignant : Alors qu'est-ce qui n'est pas bon ?
104. Ina : C'est le 5x moins 8.
105. Enseignant : 5x fois x, ça, ça marche mais c'est après, 5x moins 8, c'est ça qui ne va pas.
106. Ina : Parce que il y a un fois.
107. Enseignant : Il faut que tu fasses. C'est 5x…
108. Ina : Fois
109. Enseignant : Fois moins 8.
110. Elèves : Ah
111. Enseignant : D'accord. [Elle efface 5x-8 et écrit 5x* (-8)-Zoom tableau 3]. Et ensuite, pour calculer. 5x fois x ça fait combien ?
112. Ina : 5x au carré.
113. Enseignant : Oui.
114. Ina : Plus 5x fois…
115. Enseignant : Qu'est-ce tu peux faire ?
116. Ina : On fait, euh, 5x moins 8, euh
117. Enseignant : Voilà, c'est ça que tu n'as pas compris Ina. 5x moins 8, est-ce que c'est la même chose que 5x fois moins 8 ? [Elle écrit au tableau 5x-8 et dessous 5x*(-8)]
118. Elèves : [inaudible]
119. Enseignant : Baptiste, est-ce que c'est la même chose ça 5x moins 8 et 5x fois moins 8 ?
120. Elève : Bah, non il y a des parenthèses
121. Enseignant : C'est pas parce que il y a des parenthèses, c'est parce que quoi ?
122. Elèves : C'est pas parce que là…
123. Enseignant : C'est que là, c'est un produit, c'est une multiplication et là c'est une…
124. Ina : [inaudible]
125. Enseignant : C'est pas un produit là Ina. Tu comprends ou pas ? Le fois il n'apparaît comme ça hein. [Silence] Le fois il apparaît quand euh… c'est 2ab, c'est 2 fois a fois b, parce qu'en fait, c'est une écriture simplifiée et on n'écrit pas le signe fois entre les lettres. Mais là euh il y a bien une opération [elle pointe 5x-8].
126. Ina : Bah oui mais vous avez dit, si on met pas le fois, c'est comme si il y était.
127. Enseignant : Oui mais
128. Ina : C'est quoi la règle alors ?
129. Enseignant : Alors on refait ce qu'on a dit, avec les multiplications, qu'est-ce qu'on a le droit de faire, Ina ? On vient de le dire juste avant.

130. Ina : Le produit.
131. Enseignant : Oui et donc qu'est-ce qu'on fait comme produit ?
132. Ina : On fait euh 5x fois moins 8.
133. Enseignant : Et ça fait combien, 5x fois moins 8 ? [Silence] Ok, qu'est-ce qu'on a le droit de faire avec les multiplications ? Vas-y Baptiste ?
134. Baptiste : Bah euh de les multiplier !
135. Enseignant : Oui ! Et ça fait combien.
136. Baptiste : Moins 40x.
137. Enseignant : Oui, tu as le droit de faire 5 fois moins 8 fois x. Ina
138. Ina : Ah, on a le droit ?
139. Enseignant : Oui, la multiplication, regarde dans ta tête Ina. 2 fois 3, ça te donne bien le même résultat que 3 fois 2.
140. Ina : Ouais. Mais euh, on fait pas euh, 5 fois x fois moins 8.
141. Enseignant : Mais justement, là, les multiplications, on a le droit de…
142. Ina : D'enlever le moins.
143. Enseignant : Pas d'enlever le moins, il a dit que ça faisait combien Ina, Baptiste ? Que ça faisait ?
144. Ina : Il a dit 5 fois x fois moins 8.
145. Enseignant : Oui et il a dit que ça faisait moins 40, 5 fois moins 8, ça fait moins 40. On n'oublie pas le moins hein.
146. Ina : Ah.
147. Enseignant : [Elle écrit 5x^2+(-40x), zoom tableau 4]

L'enseignant dit qu' « elle ne pensait y passer autant de temps !».

Lancement de l'exercice suivant et reformulation de la consigne (39min à 41min)

Exercice 3 : Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. »
L'affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Temps de recherche (41min à 45min30)

148. Valérie : Oh Madame ça marche !
149. Enseignant : Tu as fait avec quoi Valérie.
150. Valérie : Avec 10.
151. Enseignant : Du coup, est-ce que tu as montré que l'affirmation elle était vraie ?
152. Valérie : Ouais.
153. Elève : Non parce qu'il faut faire avec un truc algébrique.
154. Enseignant : Pourquoi est-ce qu'il faut faire avec un truc algébrique ? Est-ce que ça veut forcément dire que c'est toujours vrai ?
155. Elève : Non.
156. Enseignant : Si c'est vrai pour 10, est-ce que ça veut dire que si tu choisis n'importe quel nombre, ça va forcément te donner 7 ?

157. Valérie : Non bah parce que, ça peut être vrai pour un chiffre et sans être vrai.
158. Enseignant : Ca peut être vrai pour un chiffre mais pas forcément pour les autres.
159. Valérie : Je peux essayer avec un autre.
160. Enseignant : Bah essaie avec un autre.

Effervescence dans la classe : « Madame, j'ai trouvé 7 », « Avec 0 ça marche », « C'est faux », « Avec le 1 ça ne marche pas », « Madame, j'ai pas trouvé 7 », « Hé fais voir ta calculatrice ! », « Madame, ça fait 7 ».

Mise en commun (45min30 à 57min)

161. Enseignant : Ok, on va faire un petit bilan. Qui me donne un exemple ?
162. Elèves [ensemble] : « 4 » « Le 1 il est bon », « Le 4 il est faux ». « Pourquoi tu mens ? le 1 il est bon ». « Le 1 il est faux. »
163. Enseignant : Ok, on essaie. Alors si je fais un petit bilan. Toi tu as essayé pour quoi Valérie ?
164. Valérie : 10.
165. Enseignant : Et tu as trouvé combien ?
166. Valérie : 7. […]

Plusieurs élèves donnent leurs résultat : Pour 60 , 7. Pour 5, 7.65[Ina]. Moi j'ai trouvé 7 avec 5. Pour 1, 5 [Divonne]. Pour 8, 7 [Ina]. Pour 13 Anaïs, 7. Pour 0, Baptiste, 7. Pour 12, 7.

167. Enseignant : Alors Ina, si tu as trouvé ça pour 5, est-ce que, pour toi l'affirmation elle est vraie ou pas ?
168. Ina : Non.
169. Enseignant : Non, et toi Divonne, pour toi ?
170. Divonne : C'est faux.
171. Enseignant : Alors, on va essayer peut-être de refaire les calculs. D'accord. [48min] Alors pour le 5 ça donne quoi ? [Tableau, écriture pas à pas, Zoom tableau 5] Puis pour 1. […]

Incident survient de la part d'Ina, qui a trouvé 7.65 grâce à la calculatrice. L'enseignant le clôt en répondant que « Ce n'est pas l'objet de la séance, tu as dû te tromper dans les parenthèses. »
[51min59] Toutes les erreurs de calculs corrigées. Les calculs numériques ont été menés pas à pas. Aucune écriture numérique globale n'a été proposée. L'enseignante poursuit.

172. Enseignant : On a donc 7 partout. Nous, notre affirmation, c'est de dire pour n'importe quel nombre, est-ce que cette affirmation elle vraie ?
173. Elèves : Oui.
174. Enseignant : Comment on va faire pour le montrer ? Baptiste.
175. Baptiste : Bah on calcule pour tous les nombres qui existent.
176. Enseignant : Ok. Euh… il y a combien de nombres qui existent. Philinte.
177. Elèves : Il y en a plein.
178. Enseignant : Il y en a combien exactement ?
179. Elèves : Bah euh… une infinité.

180. Enseignant : Alors comment tu vas faire exactement le calcul pour une infinité de valeurs ? […] Donc comment on va faire pour montrer que c'est vrai pour toutes les valeurs ?
181. Valérie : On met x.
182. Enseignant : On met x, pour quoi ?
183. Valérie : Euh…
184. Enseignant : Alors, montre-moi, ça veut dire quoi mettre x ?
185. Valérie : Euh…
186. Philinte : A la place d'un nombre.
187. Enseignant : Alors exactement, comment je vais faire pour exprimer ça ?
188. Laure : Faut faire un truc algébrique. [53min23]
189. Enseignant : Oui exactement, il faut faire un truc algébrique. À partir du moment où on veut montrer quelque chose pour n'importe quel nombre, il faut faire du calcul algébrique et du calcul algébrique, ça veut dire que c'est ?
190. Elève : Des lettres.
191. Enseignant : Des lettres, qu'est-ce que je vais faire comme lettre, là ?
192. Elève : y.
193. Enseignant : y, très bien, qu'est-ce que je vais faire avec mon y là ?
194. Elève : x.
195. Elève : Distribuer.
196. Elève : Bah, on remplace !
197. Enseignant : Voilà, je remplace.
198. Elève : Mais ça marche Madame !
199. Enseignant : Bah oui ça marche. Voilà, la conjecture, c'est […] Qu'est-ce qu'on va faire avec le x Ina ?
200. Elève : On met x plus 8.
201. Enseignant : Très bien, x plus 8. [elle écrit au tableau au fur et à mesure]. Alors après qu'est-ce qu'on va faire ?
202. Ina : Après on prend des parenthèses.
203. Enseignant : Oui, et qu'est-ce qu'on va faire avec les parenthèses […]
204. Marc : Au carré.
205. Enseignant : Alors pourquoi on mettrait au carré après, qu'est-ce qu'on fait après ?
206. Elève : On multiplie […]
207. Enseignant : Alors, x plus 8. Pourquoi tu dis au carré Marc ?
208. Marc : 13 fois 3. [Il a probablement choisi 8 comme nombre de départ]
209. Enseignant : Alors 13 fois 3 ça te donne envie de mettre au carré
210. Marc : Non
211. Enseignant : Ok, on multiplie par quoi ?
212. Elève : Par 3
213. Enseignant : Par 3 [Elle écrit au tableau (x+8)*3] Ensuite, qu'est-ce que je vais faire ?
214. Ina : Bah après on va calculer.
215. Elève : On continue euh…, après euh…, on enlève 4.

216. Enseignant : On enlève les parenthèses ?
217. Elève : On distribue.
218. Elève : Non, on met moins 4.
219. Ina : Après, on remet des parenthèses, on met euh…
220. Enseignant : Alors là, il y a deux possibilités. Donc il y a x plus 8 fois on remet des parenthèses et ensuite on fait quoi ? [La sonnerie retentit ce qui précipite les interactions. Il est écrit au tableau (x+8)*3]-4]
221. Ina : Moins 4.
222. Elève : Mais pourquoi on met des parenthèses ?
223. Elève : Plus x.
224. Elève : 35…
225. Enseignant : Plus x. On remet encore des parenthèses ?
226. Elève : Oui.
227. Elève : Mais ça fait trop de parenthèses !
228. Enseignant : Ok et après qu'est-ce que je fait ?
229. Elève : Diviser par 4.
230. Elève : Après on met plus 2.
231. Elève : Moins x.
232. Elève : Il y a trop de parenthèses là, j'avais jamais vu ça de ma vie !
233. Enseignant : On va noter ça et puis on verra la prochaine fois si euh... Vous notez sur le cahier. [56min50, Zoom tableau 6]

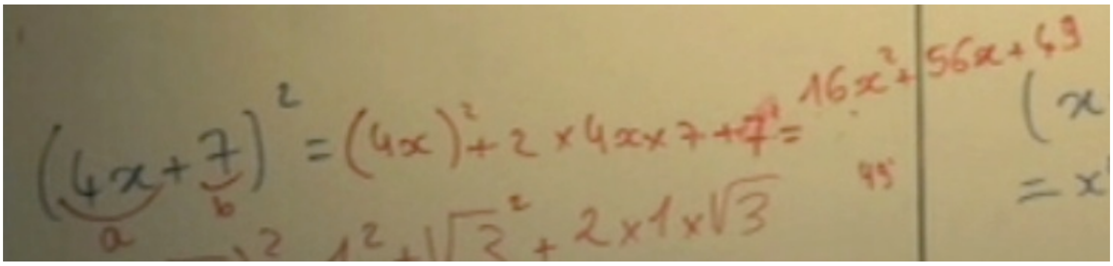
La mise en commun sera poursuivie la séance suivante. Nous n'avons malheureusement pas pu y participer. La correction est visible dans les cahiers des élèves :

$$8+8 = 16 \times 3 = 48 - 4 = 44 + 8 = 52 : 4 = 13 + 2 = 15 - 8 = 7$$

$$\begin{aligned} ((x+8)\times 3 - 4 + x) : 4 + 2 - x &= (3x + 8\times 3 - 4 + x) : 4 + 2 - x \\ &= (3x + 24 - 4 + x) : 4 + 2 - x \\ &= (4x + 20) : 4 + 2 - x \\ &= x + 5 + 2 - x \\ &= 7 \end{aligned}$$

------------------------------------Quelques copies d'écran------------------------------------

Zoom tableau 1

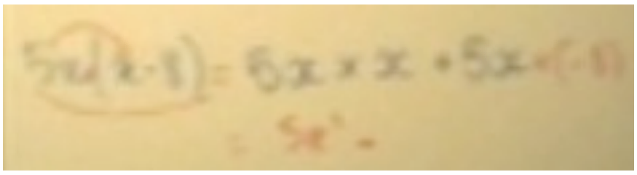


Zoom tableau 2

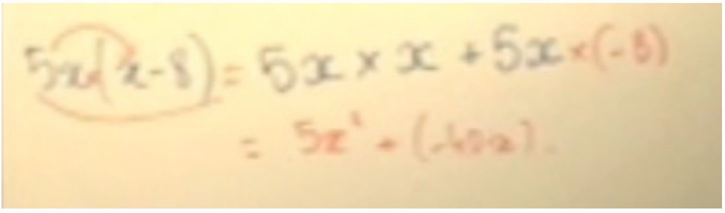
5*0*(0-8)=5*0*(-8)=0

5*0^2+5*0-8=-8

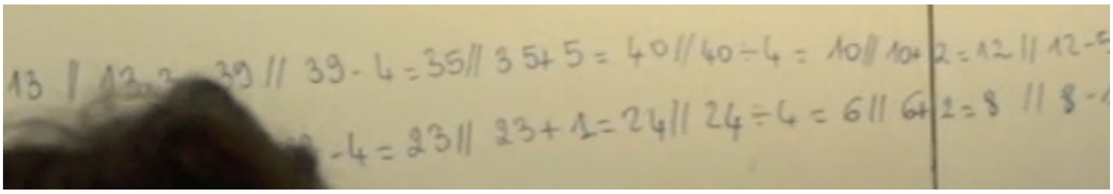
Zoom tableau 3



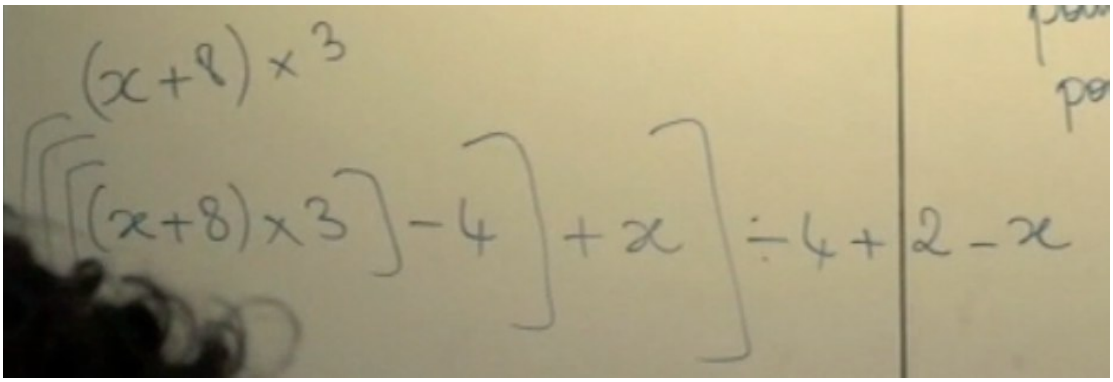
Zoom tableau 4

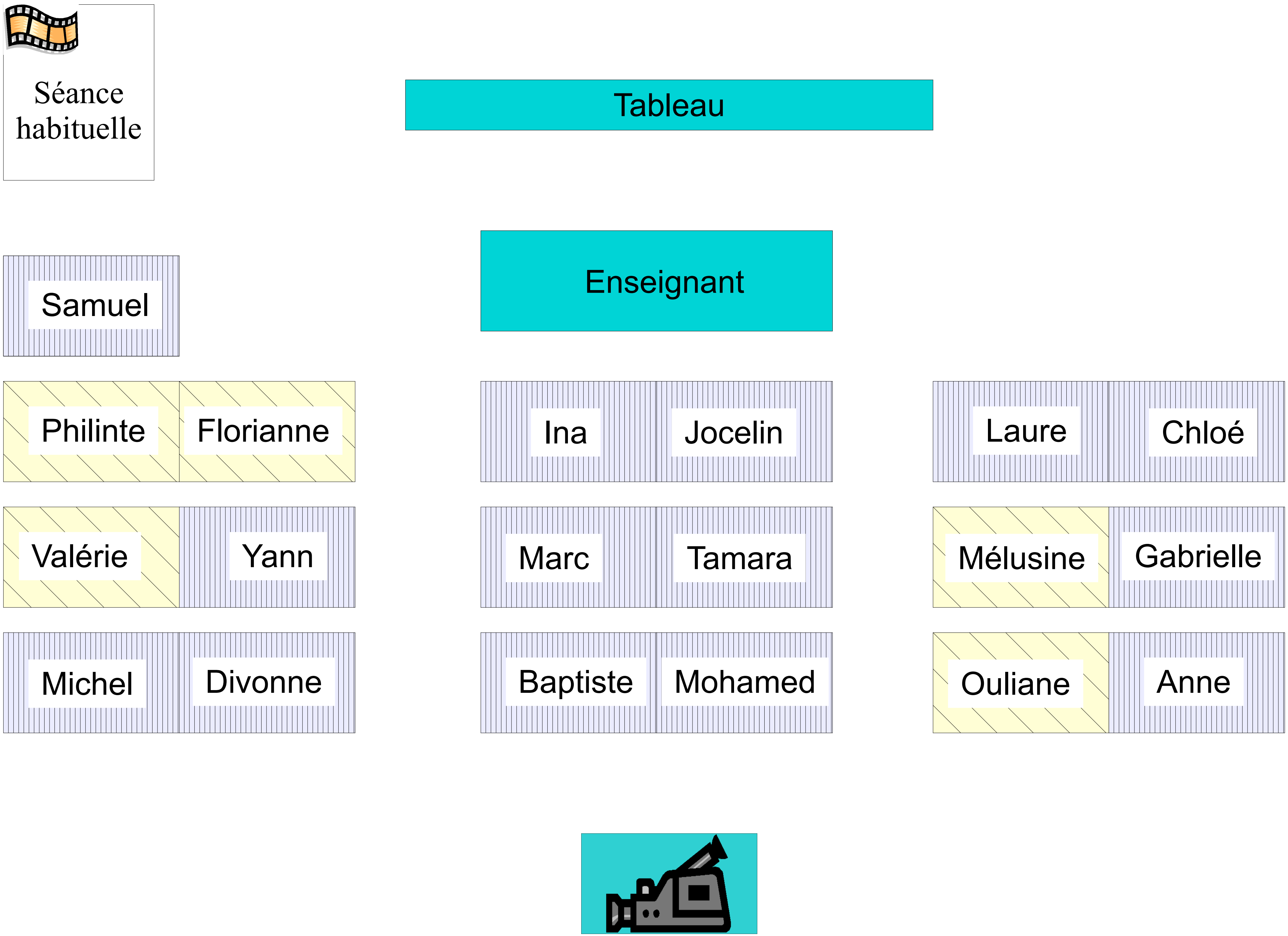


Zoom tableau 5



Zoom tableau 6




Séance habituelle
Tableau
Enseignant
Samuel
Philinte
Florianne
Ina
Jocelin
Laure
Chloé
Valérie
Yann
Marc
Tamara
Mélusine
Gabrielle
Michel
Divonne
Baptiste
Mohamed
Ouliane
Anne

Annexe F

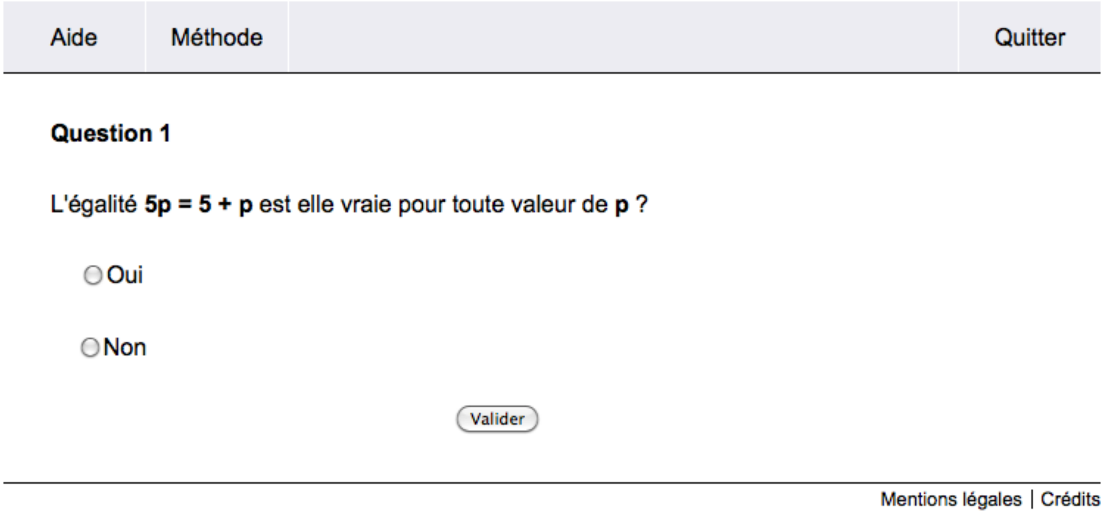
Perspectives pour un exercice interactif

Dans cette annexe nous présentons une première implémentation informatique de l'exercice « L'égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur ? » évoquée à la fin du chapitre 5. La version papier-crayon de cet exercice est présentée dans l'analyse *a priori* du parcours 2 (chapitre 4). Il s'agit d'une première ébauche qui n'a encore jamais été testée auprès d'élèves. Nous remercions Yvonnick Labed (stagiaire dans le cadre du projet PepiMeP) et Elisabeth Delozanne pour le développement informatique de cet exercice.

1. Environnement de l'exercice

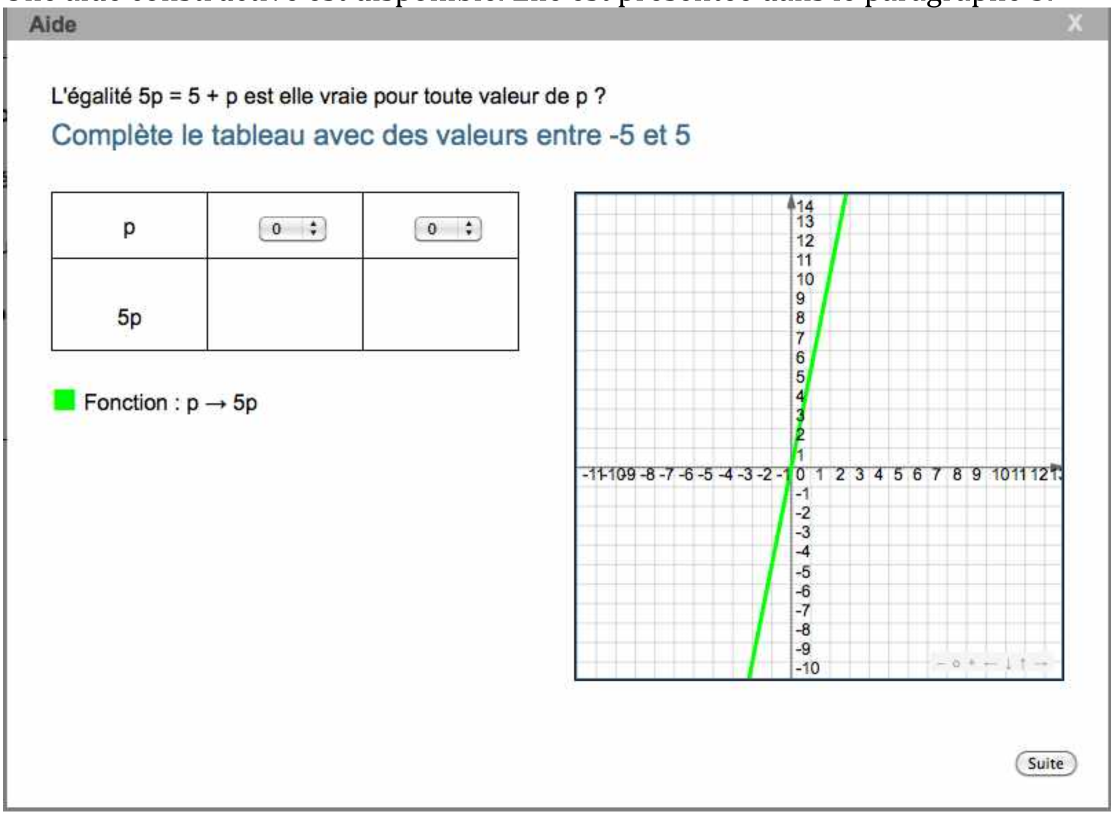
Énoncé

L'énoncé convoque le type de tâches *Prouver que deux expressions sont (ne sont pas) égales pour n'importe quelle valeur* dans la consigne : l'égalité … est-elle vraie pour toute valeur ?



Aide

Une aide constructive est disponible. Elle est présentée dans le paragraphe 3.



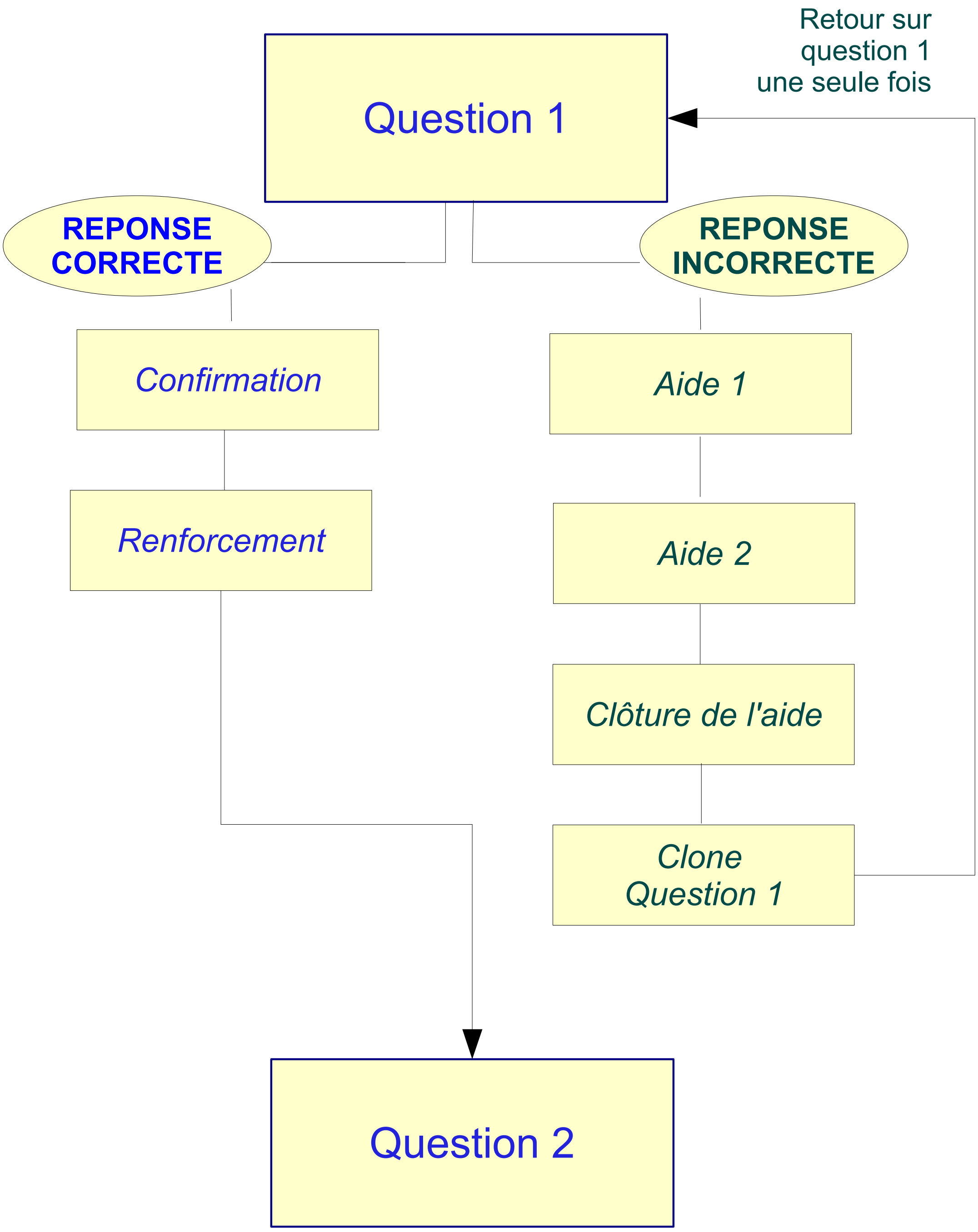
Méthode

La méthode consiste en un rappel d'une technique pour prouver qu'une égalité est vraie pour toute valeur ou fausse.

Pour démonter qu'une égalité est

Vraie pour toutes les valeurs de x :	**Fausse**
on applique les propriétés du calcul algébrique. Des exemples ne suffisent pas.	on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle l'égalité est fausse.

2. Structure de l'exercice et des interactions

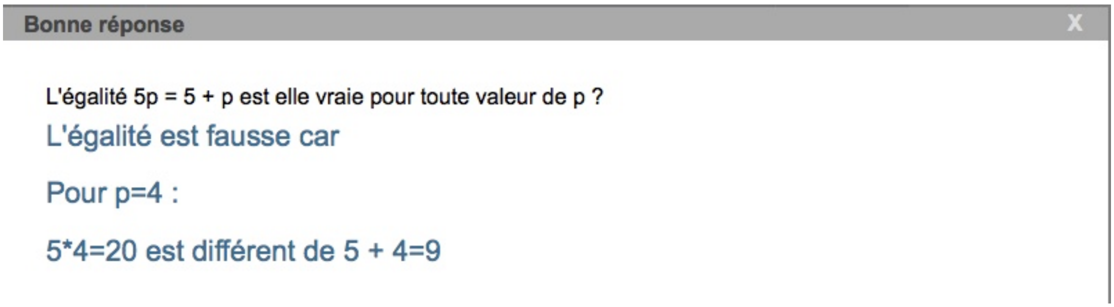


3. Exemple de rétroaction : le cas d'une égalité fausse

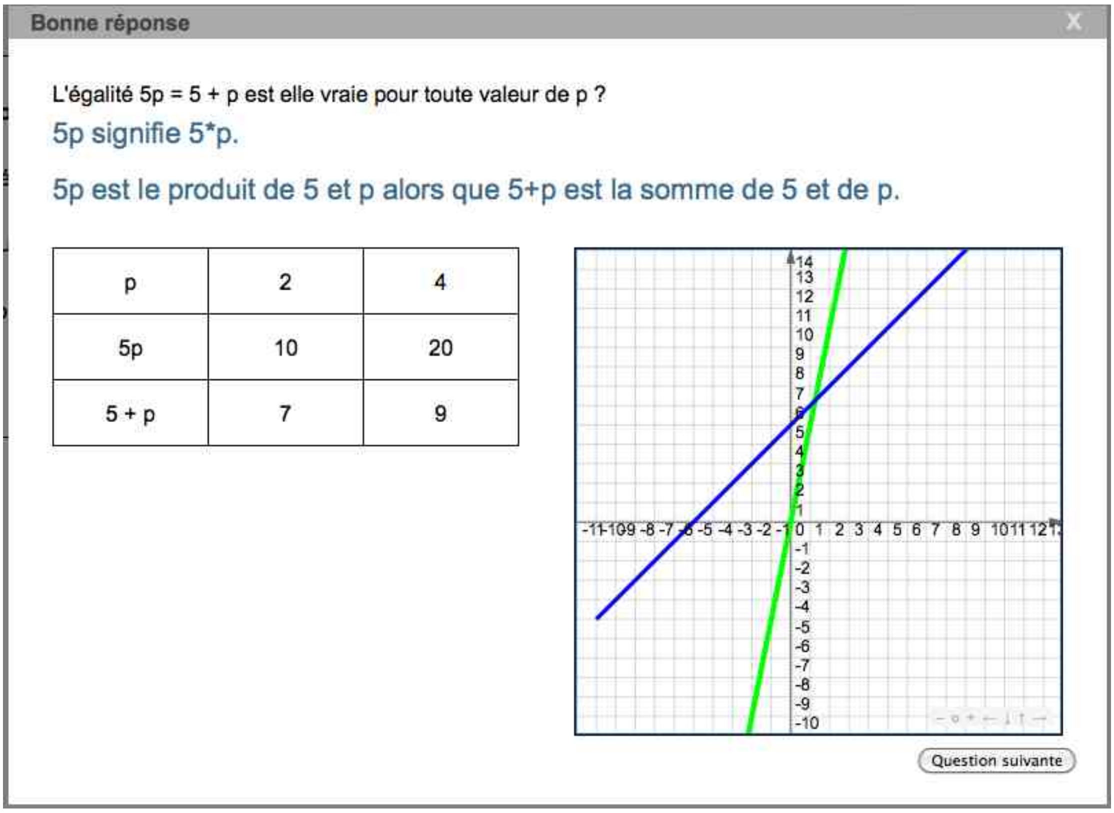
Nous détaillons les rétroactions proposées dans le cas d'une égalité fausse. Prenons comme exemple l'énoncé « L'égalité 5p=5+p est-elle vraie pour toute valeur de p ? »

a) Cas d'une réponse correcte : l'élève coche « Non »

Le logiciel commence par un message de confirmation. Un contre-exemple numérique vient justifier l'assertion.



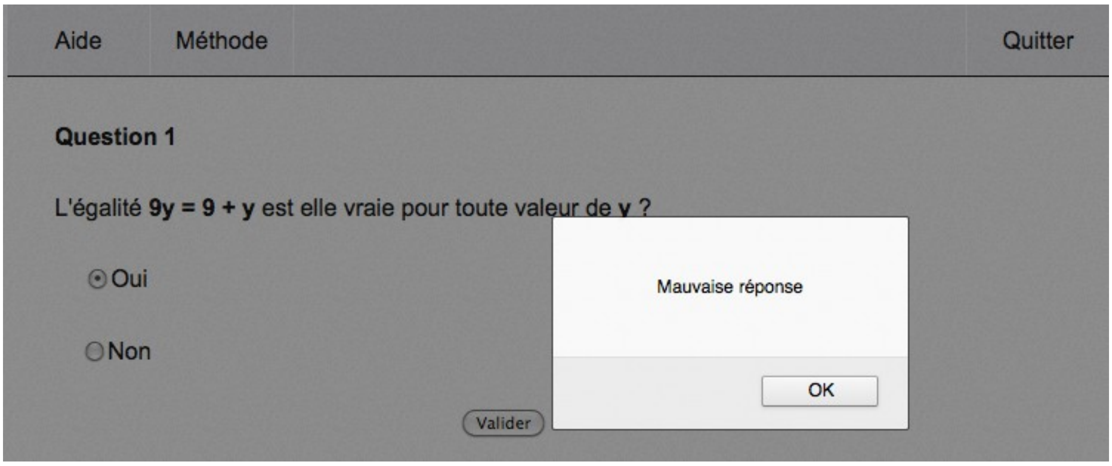
Le logiciel propose ensuite un renforcement avec appui sur un tableau de valeurs et sur une représentation graphique. Les valeurs du tableau défilent automatiquement.



L'énoncé propose ensuite l'égalité suivante.

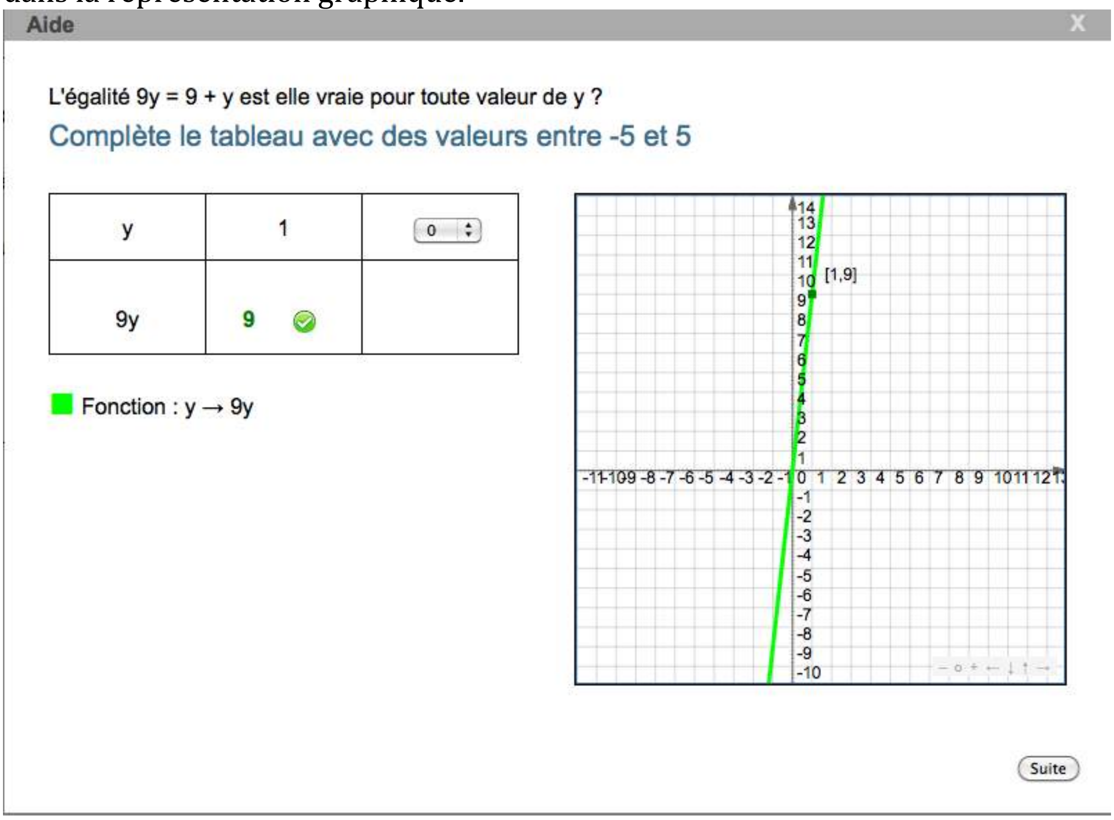
b) Cas d'une réponse incorrecte : l'élève coche « Oui »

La première rétroaction consiste à indiquer que la réponse est incorrecte.

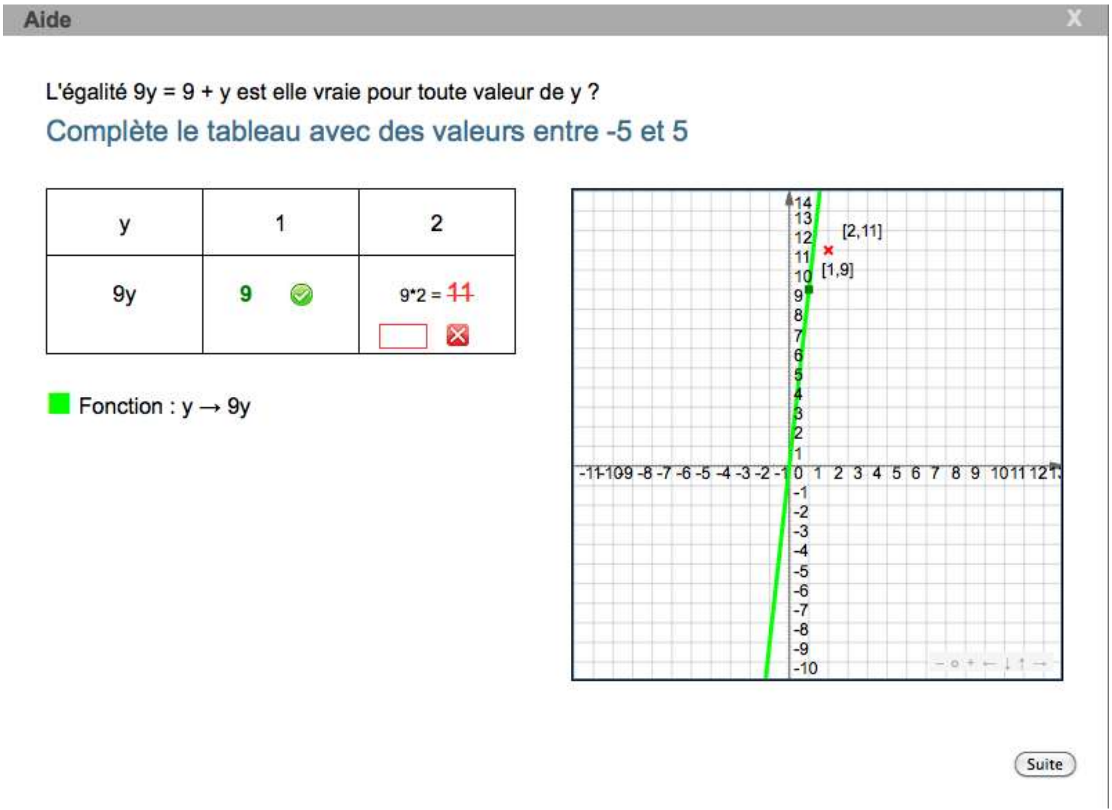


Le logiciel dirige ensuite l'élève vers une aide constructive. Il s'agit de proposer un milieu suffisamment riche pour amener l'élève à reconnaître que les deux expressions composant l'égalité n'ont pas la même dénotation. Pour cela, l'élève est amené à tester numériquement l'égalité pour deux valeurs de son choix. Ce test numérique est accompagné d'une représentation graphique de deux fonctions définies par les expressions composant l'égalité. Les expressions sont étudiées l'une après l'autre : aide 1 pour la première expression et aide 2 pour la seconde.

Dans la copie d'écran ci-dessous, l'élève a choisi la valeur 1 et à effectuer correctement le calcul. Le point de coordonnées (1,9) apparaît simultanément dans la représentation graphique.



Lorsque l'élève propose un calcul faux, la rétroaction décompose l'expression en ajoutant les symboles inapparents par convention d'écriture comme le signe ×. De plus, le point de coordonnées correspondant, ici (2,11), apparaît dans la représentation graphique pour renforcer le fait qu'il est en-dehors de la représentation graphique de l'expression.



L’expression suivante est travaillée selon le même principe (aide 2).

Aide

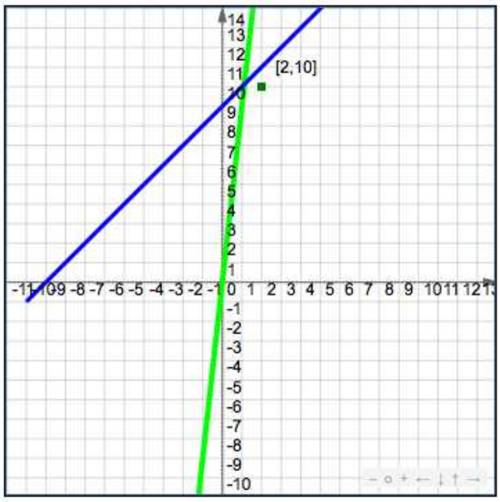
L'égalité 9y = 9 + y est elle vraie pour toute valeur de y ?

Complète le tableau avec des valeurs entre -5 et 5

y	1	2
9y	9	18
9 + y	10	

Fonction : y → 9y

Fonction : y → 9 + y



Suite

L’aide se clôt par une référence à la règle de calcul en jeu, un rappel des conventions d’écriture ou un rappel du rôle des opérateurs.

Aide

L'égalité 9y = 9 + y est elle vraie pour toute valeur de y ?

9y signifie 9*y.

9y est le produit de 9 et y alors que 9+y est la somme de 9 et de y.

Il est ensuite proposé un clone de la même égalité, c’est-à-dire une égalité du type « an=a+n » avec a un entier compris entre 2 et n une lettre de l’alphabet.

Dans le cas d’une égalité vraie, les rétroactions suivent le même schéma. Les contenus des messages de rétroactions sont spécifiés par égalité dans le paragraphe 5 de cette annexe.

ÉGALITE

Type	Règle en jeu	Égalité
1	Priorité de la multiplication sur l'addition, erreur de concaténation	$3p = 3 + p$ (F)
2	Priorité de la multiplication sur l'addition	$7p - p = 7$ (F) $6+5p = 11p$ (F) $5p - 3p = 2p$ (V)
3	Distributivité simple sur des expressions de degré 1	$3(p + 2) = 3p + 2$ (F) $5(2+p) = 10+5p$ (V)
4	Associativité de la multiplication	$3\times(2\times p)=6\times 3p$ (F) $3\times(2\times p)=6p$ (V)
5	Distributivité simple sur des expressions de degré 2	$p(p+2) = p^2+2$ (F) $p(p+2)=2p+2$ (F) $p(p+2) =p^2+ 2p$ (V)
6	Puissance, erreur de linérisation	$p^2 = 2p$ (F) $p^3=3p$ (F)
7	Puissance et rôle des parenthèses	$2p^2=(2p)^2$ (F) $4p^2=(2p)^2$(V)
8	Distributivité simple sur des expressions de degré 1	$p+3(p+2)=4p+6$ (V)
9	Distributivité double, role des parenthèses	$(p+3)(p+2) =2p+5$ (F) $p+3(p+2)=(p+3)(p+2)$ (F) $(p+3)(p+2) =p^2+5p+6$ (V)
10	Identité remarquable	$(p+2)^2 = p^2 +4$ (F) $(p+2)^2= p^2+4p+4$ (V)

PROPOSITION D'ASSORTIMENTS POUR LES EXERCICES

Groupe C :
Assortiment 1
- $3p = 3 + p$ (F)
- $6+5p = 11p$ (F)
- $3\times(2\times p)=6p$ (V)

Assortiment 2
- $p^2 = 2p$ (F)
- $3(p + 2) = 3p + 2$ (F)
- $p(p+2) =p^2+ 2p$ (V)

Groupe B :
Assortiment 1
- $2p^2=(2p)^2$ (F)
- $p+3(p+2)=4p+6$ (V)
- $(p+2)^2 = p^2 +4$ (F)

Assortiment 2
- $3\times(2\times p)=6\times 3p$ (F)
- $4p^2=(2p)^2$(V)
- $(p+3)(p+2) =2p+5$ (F)

EGALITES FAUSSES

Expression	3p = 3 + p	7p - p = 7	6+5p = 11p
Clones	an=a+n a Є {2,3,4,5, 6,7,8,9} n Є{a,b,n, p, x, y}	an-n=a a Є {2,3,4,5, 6,7,8,9} n Є{a,b,n, p, x, y}	a+bn=eval(a+b)n a Є {2,3,4,5, 6,7,8,9} b Є {2,3,4,5,6} n Є{a,b,n, p, x, y} a ≠ b
Valeurs de p à exclure pour le contre-exemple	p Є {a/(a-1)}	p Є {a/(a-1)}	p Є {1}
Contre exemple	Pour p=2, 2×3= 6 est différent de 3+2 =5.	Pour p=2, 7×2-2 = 14-2=12 est différent de 7.	Pour p=2, 6+5×2 = 6+10=16 est différent de 11×2 =22.
Confirmation	L'égalité est fausse car <contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>
Renforcement	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>
Clôture Aide	L'égalité est fausse car <contre-exemple>. <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>. <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>. <règle instanciée>
Règle générale	Le produit de deux nombres a et b s'écrit ab, ce qui signifie a×b. Ici, 3p signifie 3×p.	Priorité de la multiplication sur la soustraction : Pour n'importe quels nombres a et b, ab-b= (a×b)-b Ici, la règle s'applique avec a=7 et b=p.	La multiplication est prioritaire sur l'addition : Pour n'importe quels nombres a, b et c, a+bc= a+(b×c) Ici, la règle s'applique avec a=6, b=5 et c=p.
Règle instanciée	3p signifie 3×p. 3p est le produit de 3 et de p alors que 3+p est la somme de 3 et de p.	La multiplication est prioritaire sur la soustraction : 7p-p =(7×p)-p	La multiplication est prioritaire sur l'addition : 6+5p=6+(5×p)

Expression	**$3(2\times p)=6\times 3p$**	**$3(p + 2) = 3p + 2$**
Clones	$a(b\times n)=$ eval$(a\times b)\times an$ $a \in \{2,3,4,5\}$ $b \in \{2,3,4,5\}$ $a \neq b$ $n \in \{a,b,n, p, x, y\}$	$a(p+b) = ap+b$ $a \in \{2,3,4,5, 6,\}$ $b \in \{2,3,4,5, 6\}$ $n \in \{a,b,n, p, x, y\}$ $a \neq b$
Valeur de p à exclure pour le contre-exemple	$p \in \{a,b\}$	$p \in \{a,b\}$
Contre exemple	Pour $p=1$, $3(2\times 1)= 3\times(2\times 1)= 3\times 2=6$ est différent de $6\times 3\times 1 = 18$	Pour $p=1$, $3(2+1)=3\times 3=9$ est différent de $3\times 1+2=3+2= 5$
Confirmation	L'égalité est fausse car <contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>
Renforcement	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>
Clôture Aide	L'égalité est fausse car <contre-exemple>. <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>. <règle instanciée>
Règle générale	Associativité de la multiplication Pour n'importe quels nombres a, b et c, on a : $(a\times b)\times c= a\times(b\times c)=a\times b\times c$ Ici, la règle s'applique avec $a= 3$, $b =2$ et $c=p$.	Distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b et c, on a : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ Ici, la règle s'applique avec $a= 3$, $b =p$ et $c=2$.
Règle instanciée	On transforme l'expression en utilisant l'associativité de la multiplication. Pour n'importe quel nombre p, on obtient : $3(2\times p)=3\times(2\times p)$ $=(3\times 2)\times p$ $=6\times p$ $=6p$ et $6\times 3p=(6\times 3)\times p$ $=18\times p$ $=18p$	En développant, on obtient, pour n'importe quel nombre p : $3(p+2) =3\times(p+2)$ $=3\times p+3\times 2$ (d'après la distributivité de la multiplication sur l'addition) $=3p+6$

Expression	**$2p^2=(2p)^2$**	**$p(p+2) = p^2+2$**	**$p(p+2)=2p+2$**	**$(p+3)^2 = p^2 +3$**
Clones	$an^2=(an)^2$ n Є{a,b,n, p, x, y} a Є {2,3,4,5}	$n(n+a)=n^2+a$ a Є {2,3,5, 4,6,7,8} n Є{a,b,n, p, x, y}	$n(n+a)=2n+a$ a Є {2,3,4,5} n Є{a,b,n, p, x, y}	$(n+a)^2= n^2+a^2$ a Є {3,4,5} n Є{a,b,n, p, x, y}
Valeurs de p pour le contre-exemple à exclure	p=0 (p=1, p=a)	p=1	Cas a=2, p Є {-\sqrt{2}, \sqrt{2}}	p=0
Contre exemple	Pour p=3, $2\times3^2=2\times9=18$ alors que $(2\times3)^2=6^2=36$.	Pour p = 3, $3(3+2)=3\times(3+2)=3\times5$ 15 est différent de $3^2+2 =9+2= 11$	Pour p = 3, $3(3+2)= 3\times(3+2)=3\times5 =15$ est différent de $2\times3 +2 = 8$	Pour p = 2, $(2+3)^2= 5^2= 25$ est différent de $2^2 +3 =4+3=7$
Confirmation	L'égalité est fausse car <contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>
Renforcement	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>
Clôture de l'aide	L'égalité est fausse car <contre-exemple> <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <contre-exemple> <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <contre-exemple> <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <contre-exemple> <règle instanciée>
Règle générale	Propriété sur les puissances Pour n'importe quels nombres a et b, on a $(a\times b)^2=(a\times b)\times(a\times b) =a\times a\times b\times b =a^2\times b^2$. Ici, la règle s'applique avec avec a =2, b=p.	Distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b et c, on a : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ La règle s'applique ici avec a= p, b =p et c=2.	Distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b et c, on a : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ La règle s'applique ici avec a= p, b =p et c=2.	Identité remarquable Pour n'importe quels nombres a et b, on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ L'identité s'applique ici avec a=p et b=2.
Règle instanciée	On a, pour n'importe quel p $2p^2=2\times p\times p$ et $(2p)^2=(2\times p)^2=2\times p\times 2 \times p$ (d'après la propriété des puissances) $=2\times 2\times p\times p$ $=4\times p^2$ $=4p^2$	En développant, on obtient, pour n'importe quel p : $p(p+2)=p\times(p+2)$ $=p\times p+2\times p$ (d'après la distributivité de la multiplication sur l'addition) $=p^2+2p$	En développant, on obtient, pour n'importe quel p : $p(p+2)=p\times(p+2)$ $=p\times p+2\times p$ (d'après la distributivité de la multiplication sur l'addition) $=p^2+2p$	En développant, on obtient, pour n'importe quel p : $(p+3)^2=p^2+2\times p\times 3+ 3^2$(d'après l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$) $=p^2+6p+9$

Expression	**(p+3)(p+2) =2p+5**	**p+3(p+2)=(p+3)(p+2)**
Clones	(n+a)(n+b)= 2n+ eval(a+b) a Є {2,3,4,5} b Є {2,3,4,5} n Є{a,b,n, p, x, y} a ≠ b	n+a(n+b) =(n+a)(n+b) a Є {2,3,4,5} b Є {2,3,4,5} n Є{a,b,n, p, x, y} a ≠ b
Valeurs de p pour le contre-exemple à exclure	Aucune	p Є {0, 1-b}
Contre exemple	Pour p= 1, (1+3)×(1+2)=4×3=12 est différent de 2×1+5=2+5=7	Pour p= 1, 1+3(1+2) =1+(3×(1+2)) =1+3×3 =1+9 =10 est différent de (1+3)×(1+2) =4×3 =12
Confirmation	L'égalité est fausse car <Contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>
Renforcement	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>
Clôture de l'aide	L'égalité est fausse car <contre-exemple> <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <contre-exemple> <règle instanciée>
Règle générale	Double distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b, c et d, on a : (a+b)×(c+d)=a×c+a×d+b×c+b×d Ici, la règle s'applique ici avec a=p, b=3, c=p et d=2	Priorité de la multiplication sur l'addition : Pour n'importe quel nombres a, b, c et d, on a : a+b(c+d) = a+(b×(c+d)) Distributivité de la multiplication sur l'addition : Pour n'importe quel nombres a, b et c, on a : b×(c+d)= b×c+b×d Ici, les règles s'appliquent avec a=p, b=3, c=p et d=2. Double distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b, c et d, on a : (a+b)×(c+d)=a×c+a×d+b×c+b×d Ici, la règle s'applique ici avec a=p, b=3, c=p et d=2
Règle instanciée	En développant, on obtient, pour n'importe quel p : (p+3)(p+2)=(p+3)×(p+2) =p×p+p×2+3×p+3×2 (d'après la double distributivité de la multiplication sur l'addition) $=p^2+(2+3)\times p+6$ $= p^2+5\times p+6$ $=p^2+5p+6$	En développant, on obtient, pour n'importe quel nombre p : p+3(p+2) =p+3×(p+2) =p+3×p+3×2 (d'après la priorité et la distributivité de la multiplication sur l'addition) =p+3p+6 =4p+6 et (p+3)(p+2)=(p+3)×(p+2) =p×p+p×2+3×p+3×2 (d'après la double distributivité de la multiplication sur l'addition) $=p^2+(2+3)\times p+6$ $= p^2+5\times p+6$

Expression	**$p^2 = 2p$**	**$p^3=3p$**
Clones	$n^2=2n$ n Є{a,b,n, p, x, y}	$n^3=3n$ n Є{a,b,n, p, x, y}
Valeurs de p à exclure pour le contre-exemple	p Є {0,2}	p Є {-\sqrt{3},0, \sqrt{3}}
Contre exemple	Pour p=3, $3^2= 3\times3=9$ est différent de $2\times3 = 6$	Pour p = 2, $2^3=2\times2\times2= 8$ est différent de $3\times2 = 6$
Confirmation	L'égalité est fausse car <contre-exemple>	L'égalité est fausse car <contre-exemple>
Renforcement	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>
Clôture de l'aide	L'égalité est fausse car <Contre-exemple> <règle instanciée>	L'égalité est fausse car <Contre-exemple> <règle instanciée>
Règle générale	Notation puissance Pour un n'importe quel nombre a, on note $a^2=a\times a$	Notation puissance Pour un n'importe quel nombre a, on note, $a^3=a\times a\times a$
Règle instanciée	p^2 signifie $p\times p$. 2p signifie $2\times p$. p^2 est le carré de p alors que 2p est le produit de 2 et de p.	p^3 signifie $p\times p\times p$. 3p signifie $3\times p$. p^3 est le cube de p alors que 3p est le produit de 3 et de p.

ÉGALITES VRAIES

Expressions justifications	5p - 3p = 2p	5(2+p) = 10+5p	3(2×p)=6p	p+3(p+2)=4p+6
Clones	an+ bn =eval(a+b)n a Є {2,3,4,5, 6} b Є {-5, -4, -3, -3, -1,1,2,3,4,5} a ≠ b, a>b n Є{a,b,n, p, x, y}	a(b+n) =eval(ab)+ an a Є {2,3,4,5 } b Є {1,2,3,4,5 } a ≠ b n Є{a,b,n, p, x, y}	a(b×n)= eval(a×b)×n a Є {2,3,4,5} b Є {2,3,4,5} n Є{a,b,n, p, x, y}	n+a(n+b) =eval(1+a)+eval(a×b) a Є {2,3,4,5} b Є {2,3,4,5} n Є{a,b,n, p, x, y}
Confirmation	L'égalité est vraie car <règle instanciée>	L'égalité est vraie car <règle instanciée>	L'égalité est vraie car <règle instanciée>	L'égalité est vraie car <règle instanciée>
Renforcement	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent • sur demande : <règle générale>
Clôture Aide	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.
Règle générale	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition Pour n'importe quels nombres a, b et c, b×a+c×a =(b+c) ×a Ici, la règle s'applique avec a= p, b= 5 et c=-3.	Distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b et c, on a : a×(b+c)=a×b+a×c Ici, la règle s'applique avec a= 5, b =2 et c=p.	Associativité de la multiplication Pour n'importe quel nombres a, b et c, on a : (a×b)×c= a×(b×c)=a×b×c Ici, la règle s'applique avec a= 3, b =2 et c=p	Priorité de la multiplication sur l'addition : Pour n'importe quel nombres a, b, c et d, on a : a+b(c+d) = a+(b×(c+d)) Distributivité de la multiplication sur l'addition : Pour n'importe quel nombres a, b et c, on a : b×(c+d)= b×c+b×d Les règles s'appliquent ici avec a= p, b =3 et c=p et d=2.
Règle instanciée	En factorisant par p, on obtient, pour n'importe quel nombre p : 5p-3p = 5×p-3×p =(5-3)×p (d'après la distributivité de la multiplication sur l'addition) =2×p =2p	En développant, on obtient, pour n'importe quel nombre p : 5(2+p) = 5×(2+p) =5×2+5×p (d'après la distributivité de la multiplication sur l'addition) =10+5p	On transforme l'expression en utilisant l'associativité de la multiplication. Pour n'importe quel nombre p, on obtient : 3(2×p)=3×(2×p) =(3×2)×p =6×p =6p	En développant, on obtient, pour n'importe quel nombre p : p+3(p+2) =p+3×(p+2) =p+3×p+3×2 (d'après la priorité et la distributivité de la multiplication sur l'addition) =p+3p+6 =4p+6

Expression	**$4p^2=(2p)^2$**	**$p(p+2) =p^2+ 2p$**	**$(p+3)(p+2) =p^2+5p+6$**	**$(p+3)^2= p^2+6p+9$**
Clones	$a^2n^2=(an)^2$ $n \in \{a,b,n,p,x,y\}$ $a \in \{2,3, 4,5\}$	$n(n+a) = n^2+an$ $a \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$ $n \in \{a,b,n, p, x, y\}$	$(n+a)(n+b)=$ p^2+eval(a+b)p+ eval(a×b) $a \in \{2,3,4,5\}$ $b \in \{2,3,4,5\}$ $n \in \{a,b,n, p, x, y\}$ $a \neq b$	$(n+a)^2= n^2+2an+a^2$ $a \in \{3,4,5\}$ $n \in \{a,b,n, p, x, y\}$
Confirmation	L'égalité est vraie car <règle instanciée>	L'égalité est vraie car <règle instanciée>	L'égalité est vraie car <règle instanciée>	L'égalité est vraie car <règle instanciée>
Renforcement	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent sur demande : <règle générale>	• <règle instanciée> • valeurs qui défilent sur demande : <règle générale>
Clôture de l'aide	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.	Cette égalité semble vraie, elle peut être démontrée avec les règles du calcul algébrique. <Règle instanciée>. Donc l'égalité est vraie pour n'importe quel nombre p.
Règle générale	Propriété sur les puissances Pour n'importe quels nombres a et b, on a $(a\times b)^2=(a\times b)\times(a\times b)$ $=a\times a\times b\times b =a^2\times b^2$. Ici, la règle s'applique avec avec a =2, b=p.	Distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b et c, on a : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ Ici, la règle s'applique ici avec a= p, b =p et c=2.	Double distributivité de la multiplication sur l'addition Pour n'importe quels nombres a, b, c et d, on a : $(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$ Ici, la règle s'applique ici avec a=p, b=3, c=p et d=2	Identité remarquable Pour n'importe quels nombres a et b, on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ L'identité s'applique ici avec a=p et b=2.
Règle instanciée	On a, pour n'importe quel p : $(2p)^2=(2\times p)^2=2\times p\times 2\times p$ (d'après la propriété des puissances) $=2\times 2\times p\times p$ (d'après l'associativité de la multiplication) $=4\times p^2$ $=4p^2$	En développant, on obtient, pour n'importe quel p : $p(p+2)=p\times(p+2)$ $=p\times p+2\times p$ (d'après la distributivité de la multiplication sur l'addition) $=p^2+2p$	En développant, on obtient, pour n'importe quel p : $(p+3)(p+2)=(p+3)\times(p+2)$ $=p\times p+p\times 2+3\times p+3\times 2$ (d'après la double distributivité de la multiplication sur l'addition) $=p^2+(2+3)\times p+6$ (d'après la distributivité simple de la multiplication sur l'addition) $= p^2+5\times p+6$	En développant, on obtient, pour n'importe quel p : $(p+3)^2=p^2+2\times p\times 3+3^2$(d'après l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$) $=p^2+6p+9$

Annexe G

Indexation des exercices

Dans cette annexe, nous présentons deux documents de référence pour l'automatisation de la génération des parcours :

- la liste des capacités retenues pour l'indexation des exercices. Cette liste permet d'indexer les exercices à partir du logiciel PepiIndexation présenté dans le chapitre 4 ;
- les spécifications des parcours, c'est-à-dire les différents critères qui permettent à PepiPad de filtrer les exercices dans chaque parcours.

Liste des capacités

COMPOSANTE UA

Groupe de capacités	Capacités
0. Conjecturer	0.1. Conjecturer que 2 programmes de calcul ne sont pas égaux
	0.2. Conjecturer que 2 expressions littérales ne sont pas égales
	0.3. Conjecturer que 2 programmes de calcul sont égaux
	0.4. Conjecturer que 2 expressions littérales sont égales
1. Produire	1.1. Produire une expression littérale pour résoudre un problème Exemple : le résultat du programme de calcul est une expression littérale permettant de résoudre un problème de preuve : ((x+8)3 +x -4)/5 l'aire d'un rectangle (cf. ex3 : (a+b)(3+b) un nombre impair : 2n avec n entier
	1.2. Produire une formule pour résoudre un problème Exemple : formule de l'aire d'un rectangle : A = L×l ; (toute relation entre plusieurs variables non dissymétrisée)
2. Mettre en équation et résoudre un problème	2.1. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à un système de deux équations linéaires à 2 inconnues
	2.2. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une inéquation du 1er degré à 1 inconnue
	2.3. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du 1er degré à 1 inconnue
	2.4. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du 1er degré à 1 inconnue de la forme A*B=0
3. Démontrer ou prouver	3.1. Démontrer des règles de calcul Exemple : somme de deux fractions ayant des dénominateurs différents ; Identités remarquables, ….
	3.2. Démontrer des propriétés Exemple : le carré d'un nombre impair est un nombre impair ; Pour tout n entier, $(2n+1)^2 = 2\ (2n^2 + 2n) +1$
	3.3. Démontrer des identités (ou des formules) Exemple d'identité : Pour tous nombres a, b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Exemple de formule : formule de l'aire d'un rectangle : une unité de longueur étant donnée, l et L étant des mesures de longueur, A = L×l
	3.4. Prouver que 2 programmes de calcul ne sont pas égaux
	3.5. Prouver que 2 expressions littérales ne sont pas égales
	3.6. Prouver que 2 programmes de calcul sont égaux
	3.7. Prouver que 2 expressions littérales sont égales
4. Exprimer	4.1. Exprimer une variable en fonction d'une autre dans une formule Exemple : Si A = L×l et L≠0 alors l = A/ L

COMPOSANTE TA

Groupe de capacités	Capacités
5. Traduire	5.1. Traduire une expression algébrique par un programme de calcul Exemple de formes d'un programme de calcul : (3+x)2 – 3x Choisir un nombre, ajouter 3 ; multiplier le résultat par 2 (ou prendre le double du résultat) ; ajouter le triple du nombre initial.
	5.2. Traduire un programme de calcul par une expression algébrique
	5.3. Traduire une expression algébrique comme longueur d'un segment
	5.4. Traduire la longueur d'un segment (ou d'un arc) par une expression algébrique
	5.5. Traduire une expression algébrique comme périmètre d'une figure
	5.6. Traduire le périmètre d'une figure par une expression algébrique
	5.7. Traduire une expression algébrique comme aire d'une figure
	5.8. Traduire l'aire d'une figure par une expression algébrique
	5.9. Traduire une expression algébrique comme volume d'un solide
	5.10. Traduire le volume d'un solide par une expression algébrique
	5.11. Traduire une relation entre deux grandeurs Exemple : E=6P

	5.12 Traduire une relation entre deux quantités par une formule Exemple : c'est une capacité très proche de la précédente qui dépend de la formulation du contexte du problème ; on parle de aire de deux grandeurs et j'ai une relation entre 3 grandeurs ; quand on parle de prix, on parle souvent de quantités.
	5.13. Traduire une expression algébrique en langage naturel Exemple : La différence entre le double de la somme d'un nombre x et de 3 et le triple du nombre x
6. Représenter graphiquement	6.1. Représenter graphiquement une fonction linéaire
	6.2. Représenter graphiquement une fonction affine
	6.3. Représenter graphiquement les solutions d'une inéquation du 1er degré à 1 inconnue à coefficients numériques
	6.4. Représenter graphiquement la solution unique d'un système de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues
7. Reconnaître	7.1. Reconnaître la fonction linéaire dont la représentation graphique est une droite
	7.2. Reconnaître la fonction affine dont la représentation graphique est une droite
	7.3. Reconnaître la droite représentant une fonction linéaire donnée
	7.4. Reconnaître la droite représentant une fonction affine donnée
	7.5. Reconnaître une expression algébrique traduisant un problème
8. Lire	8.1. Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné
	8.2. Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'antécédent d'un nombre donné
	8.3. Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné
	8.4. Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'antécédent d'un nombre donné
	8.5. Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite
	8.6. Lire une figure codée

COMPOSANTE CA

Groupe de capacités	Capacités
9. Calculer	9.1. Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques
	9.2. Calculer une expression numérique en utilisant des identités remarquables Exemple : 102^2 , 99×101 ; cela fait référence au calcul réfléchi
	9.3. Calculer le résultat d'un programme de calcul pour un nombre
	9.4. Calculer la valeur d'une expression littérale connaissant une relation numérique liant les variables Exemple : 2x+3 avec x = 2 pour certains élèves, c'est le même calcul que 2(x+3)
	9.5. Calculer l'image d'un nombre par une fonction
	9.6. Effectuer du calcul réfléchi
	9.7. Calculer avec des fractions Par exemple : ½ + 1/3 ; etc.…
10. Tester	10.1. Tester si une égalité est vraie en donnant des valeurs numériques à 1 ou 2 nombres indéterminés Exemple : 2x+ 3y = 7 ; vrai pour x = 2 et y = 1 (programme de 5^e pour donner du sens à l'égalité comme relation d'équivalence)
	10.2. Tester si une égalité est vraie en faisant tracer à la calculatrice la représentation graphique de chaque membre
	10.3. Tester l'égalité de 2 programmes de calcul Exemple : soit c'est vrai ; une preuve algébrique est nécessaire en généralisant Programme 1 : Choisir un nombre le multiplier par 3 ; Choisir un nombre le multiplier par 4 ; ajouter les deux résultats Programme 2 : Choisir un nombre le multiplier par 7 Pour tout nombre x, 3x + 4x Via la simple distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, 3x+4x = (3+4)x = 7x
11. Réduire (expression polynomiale simple)	11.1. Réduire une expression littérale à une variable
12. Développer	12.1. Développer une expression en utilisant la distributivité (simple) de la multiplication

(expression polynomiale simple)	sur l'addition
	12.2 Développer une expression en utilisant la double distributivité de la multiplication sur l'addition
	12.3 Développer une expression en utilisant une identité remarquable
13. Factoriser (expression polynomiale simple)	13.1. Factoriser une expression dans laquelle le facteur est apparent
	13.2. Factoriser une expression dans laquelle le facteur n'est pas apparent
	13.3. Factoriser une expression en utilisant des identités remarquables
14. Connaître	14.1. Connaître les identités remarquables
15. Transformer	15.1. Transformer une égalité en une égalité équivalente Exemple : 3x = 5 On obtient une égalité équivalent en ajoutant aux deux membres de l'égalité un même nombre d'où 3x+4 = 9
	15.2. Transformer des expressions rationnelles simples Exemple : (1/x)+ (1/ (x+1))=((x+1)/x (x+1)) + (x/ x (x+1)) = (2x+1) / x (x+1))
16. Reconnaître	16.1. Reconnaître la structure d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés)
	16.2. Reconnaître-différentes écritures d'une expression algébrique
	16.3. Reconnaître une identité remarquable
17. Choisir	17.1. Choisir la forme d'une expression (factorisée, développée, réduite) la plus adaptée pour résoudre un problème donné
18. Résoudre	18.1. Résoudre une équation du 1er degré à 1 inconnue
	18.2 Résoudre une équation du 2ème degré à 1 inconnue de la forme A*B=0
	18.3. Résoudre une inéquation du 1er degré à 1 inconnue
	18.4. Résoudre algébriquement un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues admettant 1 solution
	18.5. Résoudre un problème conduisant à un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues
	18.6. Rechercher les antécédents d'un nombre par une fonction
	18.7. Résoudre une équation se ramenant au premier degré.
	18.8. Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$
19. Déterminer	19.1. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir d'1 nombre non nul et de son image
	19.2. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine à partir de 2 nombres et de leurs images
20 Repérer	20.1. Repérer une erreur de calcul et la corriger (application de règle, réduction)

Spécifications des Parcours

Étape : Prendre un bon départ (revenir sur des connaissances anciennes)

Choix	Objectif (commentaire)	gr.	capacité	objet entrée	cadre	Complex.
1&2 Revenir sur le rôle de l'algèbre pour résoudre des problèmes de généralisation ou de modélisation	A et B+: mobiliser l'outil algébrique pour généraliser et prouver des propriétés	A B+	1.1 1.2 3.2 3.4 3.6 2.3 (2nde) 2.4(2nde)	prg de cal ou schéma géométrique		MP, CX
	B - et C : montrer les limites du numérique et motiver la nécessité de mobiliser l'outil algébrique pour généraliser et prouver (donner du sens aux lettres et aux expressions)	B-	1.1 0.1 3.4 0.3 3.6 10.3	prg de cal ou schéma géométrique		CS
		C	1.1 0.1 3.4 0.3 3.6 10.3	prg de cal ou schéma géométrique		EL (3°) CS(2°)
3&4 Revenir sur des règles de formation et de transformation des expressions	A : Résoudre des problèmes, prouver ou invalider des propriétés dans le cadre algébrique	A	3.5 OU 3.7 OU 3.1 OU 3.2 OU 3.3 OU 9.4 OU **Exclure** 12.3 (3°) ET 1.1	prg de calc. OU identité **Exclure** : schéma géométrique ET figure simple ET figure Complexe		MP, CX
	B Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation et de transformation des expressions : Groupe B : utilisation des parenthèses, distributivité, carré, puissance	B	3.5 OU 3.7 **Exclure** 12.3 (3°) ET 1.1	prg de calc. OU identité **Exclure** schéma géométrique ET figure simple ET figure Complexe		CS
	C Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation et de transformation des expressions concaténation, linéarisation, parenthésage)	C	3.5 OU 3.7 **Exclure** 12.3 (3°) 1.1	prg de calc. OU identité **Exclure** schéma géométrique ET figure		EL

				simple ET figure Complexe		
5&6 étudier des expressions équivalentes	A : Prouver l'équivalence des expressions par le calcul algébrique puis mobiliser la forme la plus adaptée d'une expression pour résoudre un problème, calculer astucieusement	A	3.5 3.7 17.1 **Exclure** 12.3 (3°)	(fonction OU expression littérale) et rien d'autres	algé (3°) fonc.(2°)	MP, CX
	B : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre	B	3.5 3.7 17.1 **Exclure** 12.3 (3°)	(fonction OU expression littérale) et rien d'autres	algé (3°) fonc.(2°)	CS
	C : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre	C	3.5 3.7 17.1 **Exclure** 12.3 (3°)	(fonction OU expression littérale) et rien d'autres	algé (3°) fonc.(2°)	EL
7&8 Associer des expressions littérales à d'autres représentations	Travailler l'aspect structural des expressions en lien avec leurs représentations dans le langage naturel, les grandeurs, les arbres ou les programmes de calcul, et sur des expressions de plus en plus complexes	A	5.1 5.3 à 5.10 5.13 à 5.18 **Exclure** 1.1 3.5 3.7 12.3 (3°)			CX (3°) MP(2°)
	Travailler l'aspect structural des expressions en lien avec leurs représentations dans le langage naturel, les grandeurs, les arbres ou les programmes de calcul, et sur des expressions de plus en plus complexes	B	5.1 5.3 à 5.10 5.13 à 5.18 **Exclure** 1.1 3.5 3.7 12.3 (3°)			CS(3°) MP,CX (2°)
	Construire une conception structurale des expressions en s'appuyant sur la conception procédurale, privilégiée souvent par les élèves, et différentes représentations	C	5.1à 5.10 5.13 à 5.18 **Exclure** 1.1 3.5 3.7 12.3 (3°)			EL

Spécifications des Parcours

Étape : S'entraîner (travailler des connaissances nouvelles)

Choix	objectif (commentaire	gr.	capacité	objet entrée	cadre	Complex.
9&10 étudier des expressions équivalentes	A : Prouver l'équivalence des expressions par le calcul algébrique puis mobiliser la forme la plus adaptée d'une expression pour résoudre un problème, calculer astucieusement	A	3.5 3.7 17.1 **Obligatoire** 12.3	fonction OU expressions Ou fonction et expression et rien d'autres	algé (3°) fonc.(2°)	MP, CX
	B : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre	B	3.5 3.7 17.1 **Obligatoire** 12.3	fonction OU expressions Ou fonction et expression et rien d'autres	algé (3°) fonc.(2°)	CS
	C : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre	C	3.5 3.7 17.1 **Obligatoire** 12.3	fonction OU expressions Ou fonction et expression et rien d'autres	algé (3°) fonc.(2°)	EL
11&12 Travailler les identités remarquables	A : Résoudre des problèmes, prouver ou invalider des propriétés dans le cadre algébrique	A	3.5 OU 3.7 OU 3.1 OU 3.2 OU 3.3 OU 9.4 OU **Obligatoire** 12.3 **Exclure** ET 1.1	prg de calc. OU identité **Exclure** schéma géométrique ET figure		MP, CX
	B Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation et de transformation des expressions : Groupe B : utilisation des parenthèses, distributivité, carré, puissance	B	3.5 OU 3.7 Obligatoire 12.3 **Exclure** 1.1	prg de calc. OU identité **Exclure** schéma géométrique ET figure		CS
	C Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation et de transformation des expressions concaténation, linéarisation, parenthésage)	C	3.5 OU 3.7 Obligatoire 12.3 **Exclure** 1.1	prg de calc. OU identité Absents : schéma géométrique ET figure		EL
13&14	A:	A	Obligatoire			CX(3°)

Reconnaître la structure des expressions	Reconnaître des sommes de termes et des produits de facteurs sur des expressions de plus en plus complexes et leurs représentations en langage naturel.		OU 16.1 16.2 5.1 5.13 5.15 5.17			MP/CX (2°)
	B Reconnaître des sommes de termes et des produits de facteurs sur des expressions de plus en plus complexes et leurs représentations en langage naturel	B	16.1 16.2 5.1 5.13 5.15 5.17			CS
	CReconnaître des sommes de termes et des produits de facteurs en travaillant sur la réécriture des expressions, leur aspect procédural et leurs représentations en langage naturel.	C	16.1 16.2 5.1 5.13 5.15 5.17			EL
15 inconnu	Développer l'intelligence du calcul	A	12.1 12.2 12.3 13.1 13.2 13.3 11.1 Obligatoire 17.1 **Exclure** 3.5 3.7	Alg (seul)	Expr alg. (seules)	MP, CX
	Contrôler les étapes de calcul et l'équivalence des expressions à chaque étape	B	12.1 12.2 12.3 13.1 13.2 13.3 11.1 **Exclure** 3.5 3.7	Alg (seul)	Expr alg. (seules)	CS
	Contrôler les étapes de calcul et l'équivalence des expressions à chaque étape	C	12.1 12.2 12.3 13.1 13.2 13.3 11.1 **Exclure** 3.5 3.7	Alg (seul)	Expr alg. (seules)	EL