



# Une fonction zêta motivique pour l'étude des singularités réelles

Jean-Baptiste Campesato

## ► To cite this version:

Jean-Baptiste Campesato. Une fonction zêta motivique pour l'étude des singularités réelles. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2015. Français. <NNT : 2015NICE4104>. <tel-01288215>

**HAL Id: tel-01288215**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01288215>**

Submitted on 14 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS — UFR SCIENCES  
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

# THÈSE

pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**  
de l'Université Nice Sophia Antipolis

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue par  
**Jean-Baptiste Campesato**

---

## UNE FONCTION ZÊTA MOTIVIQUE POUR L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS RÉELLES

---

Thèse dirigée par Adam Parusiński  
soutenue le 11 décembre 2015

devant le jury composé de

---

Georges Comte	PR	Université Savoie Mont Blanc
Goulwen Fichou	MCF HDR	Université de Rennes 1
Krzysztof Kurdyka	PR	Université Savoie Mont Blanc
François Loeser	PR	Université Pierre et Marie Curie
Michel Merle	PR émérite	Université Nice Sophia Antipolis
Adam Parusiński	PR	Université Nice Sophia Antipolis

---

Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné  
UMR n°7351 CNRS UNS  
Université Nice Sophia Antipolis  
Parc Valrose  
06108 Nice Cedex 02  
France

## Une fonction zêta motivique pour l'étude des singularités réelles

**Résumé.** Nous nous intéressons à l'étude des singularités réelles à l'aide d'arguments provenant de l'intégration motivique. Une telle démarche a été initiée par S. Koike et A. Parusiński puis poursuivie par G. Fichou.

Afin de donner une classification des singularités réelles, T.-C. Kuo a défini la notion d'équivalence blow-analytique. Il s'agit d'une relation d'équivalence pour les germes analytiques réels n'admettant pas de module continu pour les singularités isolées. Cette notion est étroitement liée à la notion d'applications analytiques par arcs définie par K. Kurdyka. Il est donc naturel d'adapter des arguments provenant de l'intégration motivique pour l'étude de l'équivalence blow-analytique. La difficulté réside désormais dans le fait de trouver des méthodes permettant de montrer que deux germes sont équivalents et de construire des invariants permettant de distinguer deux germes qui ne sont pas dans la même classe.

Nous travaillons avec une variante plus algébrique de cette notion, l'équivalence blow-Nash introduite par G. Fichou.

La première partie de la thèse consiste en un théorème d'inversion donnant des conditions pour que l'inverse d'un homéomorphisme blow-Nash soit encore blow-Nash. L'intérêt d'un tel énoncé est que de telles applications apparaissent dans la définition de l'équivalence blow-Nash.

La seconde partie est consacrée à l'étude d'une nouvelle fonction zêta motivique. Il s'agit d'associer à un germe analytique une série formelle. Cette fonction zêta motivique généralise les fonctions zêta de Koike–Parusiński et de Fichou et admet une formule de convolution. Il s'agit d'un invariant pour l'équivalence blow-Nash.

**Mots-clés.** équivalence blow-Nash, applications analytiques par arcs, ensembles symétriques par arcs, singularités réelles, intégration motivique, fonctions Nash, fonctions zêta.

---

## A motivic zeta function to study real singularities

**Abstract.** The main purpose of this thesis is to study real singularities using arguments from motivic integration as initiated by S. Koike and A. Parusiński and then continued by G. Fichou.

In order to classify real singularities, T.-C. Kuo introduced the blow-analytic equivalence which is an equivalence relation on real analytic germs without moduli for isolated singularities. This notion is closely related to the notion of arc-analytic maps introduced by K. Kurdyka, thus it is natural to adapt arguments from motivic integration to the study of the relation. The difficulty lies in finding efficient ways to prove that two germs are equivalent and in constructing invariants that distinguish germs which are not in the same class.

We focus on the blow-Nash equivalence, a more algebraic notion which was introduced by G. Fichou.

The first part of this thesis consists in an inverse theorem for blow-Nash maps. Under certain assumptions, this ensures that the inverse of a homeomorphism which is blow-Nash is also blow-Nash. Such maps are involved in the definition of the blow-Nash equivalence.

In the second part, we associate a power series to an analytic germ, called the zeta function of the germ. This construction generalizes the zeta functions of Koike–Parusiński and Fichou. Furthermore, it admits a convolution formula while being an invariant for the blow-Nash equivalence.

**Keywords.** blow-Nash equivalence, arc-analytic maps, arc-symmetric sets, real singularities, motivic integration, Nash functions, zeta functions.



# *Remerciements*

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse, Adam Parusiński, qui dans un premier temps m'a encadré durant mon mémoire de M2. J'ai découvert grâce à lui de très belles mathématiques dont je ne soupçonnais pas l'existence avant de commencer ce travail. Je lui suis profondément reconnaissant pour sa grande disponibilité, son soutien et pour toutes les discussions intéressantes, mathématiques ou non, que nous avons pu avoir ensemble. Sa passion pour les mathématiques et sa grande intuition continuent de me surprendre. Pour toutes ces raisons, je suis très heureux d'avoir été initié à la recherche à son contact.

Je remercie Georges Comte, Goulwen Fichou, Krzysztof Kurdyka, François Loeser et Michel Merle pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je suis aussi très reconnaissant envers Satoshi Koike, qui, avec Georges Comte et Goulwen Fichou, a accepté de rapporter ce manuscrit. Leurs travaux ont bordé cette thèse et leurs articles ont longtemps séjourné sur mon bureau. C'est donc un grand honneur pour moi de les avoir comme rapporteurs et examinateurs.

Durant ces trois années, j'ai eu la chance de rencontrer des mathématiciens avec qui j'ai eu des discussions très fructueuses. Je tiens en particulier à remercier Alexandru Dimca, Nicolas Dutertre, Goulwen Fichou, Krzysztof Kurdyka, Michel Merle, Fabien Priziac et Michel Raibaut pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour tous ces échanges qui m'ont été très bénéfiques.

Mon premier travail non scolaire en mathématiques a été mon mémoire de M1. Je suis très reconnaissant envers Ingo Waschkes qui nous a encadrés avec Agnès durant un semestre. Je garde un très bon souvenir de nos rendez-vous hebdomadaires qui ont permis de mener à bien ce projet. Ce fut une expérience très riche et très intéressante. Je suis aussi très touché qu'Ingo garde un oeil vigilant sur ma progression.

Enfin, il a été très agréable de travailler au sein du laboratoire J. A. Dieudonné de l'Université Nice Sophia Antipolis.

Je tiens à remercier Angélique, Christine, Delphine, Francine, Jean-Louis, Jean-Marc, Jean-Paul, Julia, Laetitia, Manuelle, Marc, Roland, Rosalba et Victoria pour leur sympathie et leur bonne humeur. Sans eux le laboratoire et le département ne fonctionneraient pas aussi bien.

J'ai eu des discussions passionnantes avec les chercheurs et enseignants-chercheurs du laboratoire. Ils m'ont aussi donné des conseils qui me furent très utiles. Je pense en particulier à André, Ann, Bernard, Bruno, Christophe, Claire, Cédric, David, Didier, Erwann, Fabrice, Francesca, François, François-Xavier, Frédéric, Gilles, Hélène, Joachim,

Laurent, Magali, Marc, Marco, Roland, Sorin, Stéphane, Stéphanie et Thierry.

La très bonne ambiance qui règne entre les doctorants du laboratoire a contribué au bon déroulement de ces trois années de recherche.

Alain, Camilo et Damien m'ont très chaleureusement accueilli dans le bureau 801. Leur bienveillance m'a aidé à surmonter les incertitudes de la première année de thèse.

Les conseils de Camille ont été très importants lors de ma première expérience d'enseignement.

Merci à tous les doctorants avec qui j'ai passé de très bons moments lors de soirées chez les uns et les autres, de goûters au laboratoire et de randonnées : Amine, Anthony, Audric, Bastien, Bienvenu, Björn, Brice, Carole, David, David, Eduard, Fernanda, Guillaume, Julien, Kateryna, Luis, Lynda, Marcella, Marie, Mathieu, Mélisande, Nancy, Nathalie, Nicolas, Olivier, Pauline, Rinel, Simon et Vincent.

Arthur, Charles, Julie, Liana et Simon m'ont supporté et soutenu (souvent autour d'une bière) dans les moments de doute que j'ai pu traverser durant ma thèse. Je leur en suis infiniment reconnaissant.

Je tiens aussi à remercier mes amis de Nice avec qui j'ai passé de très bons moments même si j'ai été un peu moins présent ces derniers temps. Je pense en particulier à Charlotte, Olivier, Olivier, Rémy et Thomas.

Mes parents et ma soeur m'ont toujours fait confiance. Ils m'ont soutenu dans tous mes projets. C'est grâce à eux que j'ai pu entreprendre et mener à bien ce travail.

*Last but not least*, un immense merci à Agnès qui a été à mes côtés durant toute cette aventure. Elle m'a accompagné avec beaucoup de compréhension et de patience. Sans sa présence ces trois années auraient été beaucoup plus compliquées.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Équivalence blow-analytique . . . . .	1
1.2	Applications analytiques par arcs . . . . .	5
1.3	Intégration motivique classique . . . . .	8
1.3.1	Un bref aperçu de la théorie . . . . .	8
1.3.2	Fonctions zêta motiviques de Denef–Loeser . . . . .	13
1.4	Fonctions zêta de Koike–Parusiński . . . . .	16
1.5	Ensembles symétriques par arcs . . . . .	18
1.5.1	Définition et premières propriétés . . . . .	18
1.5.2	Un retour sur l’analyticité par arcs . . . . .	19
1.5.3	Catégories constructibles . . . . .	20
1.5.4	La collection $\mathcal{AS}$ . . . . .	21
1.6	Polynôme de Poincaré virtuel . . . . .	22
1.7	Applications Nash . . . . .	23
1.8	Équivalence blow-Nash et fonctions zêta de Fichou . . . . .	24
1.9	Présentation des résultats . . . . .	27
1.9.1	Un théorème d’inversion pour les applications blow-Nash . . . . .	27
1.9.2	Une fonction zêta motivique pour l’équivalence blow-Nash . . . . .	28
1.10	Perspectives . . . . .	32
1.10.1	Une réalisation de l’anneau $\mathcal{M}$ . . . . .	32
1.10.2	Classification des polynômes de Brieskorn . . . . .	32
1.10.3	Polynômes homogènes par poids commodes non-dégénérés par rapport à leurs polyèdres de Newton . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Un théorème d’inversion pour les applications blow-Nash</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Preliminaries . . . . .	36
2.2.1	Constructible sets and maps . . . . .	36
2.2.2	The virtual Poincaré polynomial . . . . .	38
2.2.3	Geometric settings . . . . .	38
2.2.4	Arcs & jets . . . . .	42
2.3	The main theorem . . . . .	46
2.4	Proof of the main theorem . . . . .	47
2.4.1	Change of variables . . . . .	47
2.4.2	Essence of the proof . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Une fonction zêta motivique pour l’équivalence blow-Nash</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57



3.2	Geometric framework . . . . .	58
3.3	A Grothendieck ring . . . . .	60
3.4	The motivic local zeta function . . . . .	62
3.4.1	Definition . . . . .	62
3.4.2	Link with previously defined motivic real zeta functions . . . . .	63
3.4.3	Rationality of the motivic local zeta function . . . . .	66
3.5	Example: non-degenerate polynomials . . . . .	70
3.5.1	The Newton polyhedron of a polynomial . . . . .	70
3.5.2	The motivic zeta function and Milnor fiber of a non-degenerate polynomial . . . . .	71
3.6	A convolution formula for the motivic local zeta function . . . . .	74
3.7	Blow-Nash equivalence . . . . .	82
3.8	Classification of Brieskorn polynomials . . . . .	86
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

# 1 Introduction

Les premières sections de ce chapitre introduisent les notions autour desquelles s'articulent les travaux de cette thèse. Afin de rendre la lecture de ce manuscrit autonome, nous en profitons pour introduire les concepts auxquels nous ferons appel.

Une fois ce cadre précisé, nous pourrions présenter les principaux résultats de ce travail et les situer dans leurs contextes. C'est le but de l'avant-dernière section de cette introduction.

Les résultats sont ensuite laissés sous leurs formes d'articles aux Chapitres 2 et 3.

## 1.1 Équivalence blow-analytique

La notion d'équivalence blow-analytique a été introduite par T.-C. Kuo [63] [66] [64] [65] dans le but d'obtenir une classification des singularités analytiques réelles.

Cette approche s'est avérée nécessaire du fait que la notion d'équivalence  $C^0$  est trop grossière alors que celle d'équivalence  $C^1$  est trop fine pour obtenir une classification n'admettant pas de module continu pour une famille analytique de singularités isolées. Ces points sont mis en exergue dans les exemples suivants.

En plus des articles cités tout au long de la section, nous renvoyons le lecteur vers les synthèses [39] et [43] pour plus de détails concernant l'équivalence blow-analytique.

**Définition 1.1.1.** Soient  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  deux germes de fonctions analytiques. On dit que  $f$  et  $g$  sont  $C^k$ -équivalents s'il existe  $h : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  un  $C^k$ -difféomorphisme local tel que  $f = g \circ h$ .

**Exemple 1.1.2** ([101, Exemple 13.1]). Considérons la famille de Whitney

$$f_t : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), t \in (0, 1)$$

définie par

$$f_t(x, y) = xy(y - x)(y - tx)$$

Alors  $f_t$  est  $C^1$ -équivalent à  $f_{t'}$  si et seulement si  $t = t'$ .

La  $C^1$ -équivalence n'est donc pas satisfaisante puisqu'il s'agit à chaque fois de quatre droites distinctes concourantes en l'origine.

**Exemple 1.1.3.** Le germe  $f(x, y) = x^3 - y^2$ , définissant un point de rebroussement, est  $C^0$ -équivalent au germe non-singulier  $g(x, y) = x$ .

Soit  $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x, y, t) = xy(y - x)(y - tx)$  où  $I = (0, 1)$ .

On note  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'éclatement de  $\mathbb{R}^2$  en l'origine. Soit  $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$  un isomorphisme analytique réel entre deux voisinages ouverts de  $\pi^{-1}(0) \times I$  dans  $M \times I$  qui laisse

$\pi^{-1}(0) \times I$  invariant et tel que pour tout  $(x, t) \in U_1$ ,  $\text{pr}_I \Phi(x, t) = t$ . Alors  $\Phi$  induit un homéomorphisme  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  entre deux ouverts de  $\{0\} \times I$  dans  $\mathbb{R}^2 \times I$  tel que pour tout  $(x, t) \in V_1$ ,  $\text{pr}_I \varphi(x, t) = t$  et tel que pour tout  $t \in I$ ,  $\varphi(0, t) = (0, t)$ .

T.-C. Kuo [64] remarque qu'il existe un tel  $\Phi$  de sorte que  $F \circ \varphi$  ne dépende pas de  $t$ .

La notion d'équivalence blow-analytique qu'il développe ensuite généralise cette observation. Mais avant de l'introduire, nous allons avoir besoin des notions suivantes.

**Définition 1.1.4** ([102]). Une complexification d'une variété analytique réelle non-singulière  $M$  (au sens de [real analytic manifold]) de dimension  $n$  est la donnée d'une variété analytique complexe non-singulière  $M^{\mathbb{C}}$  de dimension  $n$  et d'un isomorphisme analytique réel  $\varphi$  de  $M$  sur une sous-variété analytique réelle de  $M^{\mathbb{C}}$  tels que pour tout point  $x$  de  $M^{\mathbb{C}}$ , il existe un voisinage ouvert  $U^{\mathbb{C}}$  de  $x$ , un ouvert  $U'$  de  $\mathbb{C}^n$  et un isomorphisme  $\psi : U^{\mathbb{C}} \rightarrow U'$  envoyant  $\varphi(M) \cap U^{\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{R}^n \cap U'$ .

**Proposition 1.1.5** ([102, Proposition 1]). Une variété analytique réelle non-singulière  $M$  admet une complexification. De plus, si  $(M_1^{\mathbb{C}}, \varphi_1)$  et  $(M_2^{\mathbb{C}}, \varphi_2)$  sont deux complexifications, il existe un voisinage ouvert  $U_1$  de  $\varphi_1(M)$ , un voisinage ouvert  $U_2$  de  $\varphi_2(M)$  ainsi qu'un isomorphisme analytique complexe  $\psi : U_1 \rightarrow U_2$  tels que  $\psi(x) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x)$  pour  $x \in \varphi_1(M)$ .

Soit  $\mu : M \rightarrow N$  une application analytique réelle propre et surjective entre deux variétés analytiques réelles non-singulières. Alors  $\mu$  s'étend en une application analytique complexe  $\mu^{\mathbb{C}} : U(M) \rightarrow U(N)$  où  $U(M)$  et  $U(N)$  sont des voisinages ouverts respectivement de  $M$  et de  $N$  dans une complexification. On déduit de la proposition précédente que la complexification  $\mu^{\mathbb{C}}$  de  $\mu$  est unique à isomorphisme analytique complexe près.

**Définition 1.1.6** ([65]). Soit  $\mu : M \rightarrow N$  une application analytique réelle propre et surjective entre deux variétés analytiques réelles non-singulières. On dit que  $\mu$  est une *modification réelle* si  $\mu^{\mathbb{C}} : U(M) \rightarrow U(N)$  est propre et s'il s'agit d'un isomorphisme en dehors d'un sous-ensemble mince<sup>\*</sup> de  $U(M)$ .

**Remarque 1.1.7.** Certains auteurs (voir par exemple [43]) ne font pas d'hypothèse de propriété sur  $\mu^{\mathbb{C}}$  dans la définition de modification réelle. Nous avons fait le choix de suivre la définition de [65] afin d'obtenir des éclatements globaux (et non locaux) dans l'énoncé du Lemme 1.1.11.

**Exemple 1.1.8.** On remarque que  $\mu(x) = x^3$  n'est pas une modification réelle.

**Définition 1.1.9** ([65]).<sup>†</sup> Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés analytiques réelles non-singulières est dite *blow-analytique* s'il existe une modification réelle  $\mu : \tilde{M} \rightarrow M$  telle que  $f \circ \mu : \tilde{M} \rightarrow N$  soit analytique.

On peut définir l'éclatement d'une variété analytique réelle non-singulière le long d'une sous-variété fermée non-singulière simplement en travaillant localement. Il s'agit alors de redresser localement la sous-variété en question pour utiliser la définition classique de l'éclatement d'un espace euclidien en l'origine.

<sup>\*</sup>i.e. au sens de [thin set], c'est-à-dire un ensemble  $C$  dont chaque point admet un voisinage  $U$  et une fonction analytique complexe non-nulle sur  $U$  qui s'annule identiquement sur  $U \cap C$ . Par l'unicité du théorème de prolongement analytique, un tel ensemble est nul part dense.

<sup>†</sup>L'utilisation du terme *blow-analytique* semble provenir du fait que dans les premiers exemples [64], la modification réelle était donnée par un éclatement [blowing-up] en l'origine.

Soient  $M$  une variété analytique réelle non-singulière et  $C$  une sous-variété fermée de  $M$ . À isomorphisme près au-dessus de  $M$ , il existe une unique application propre  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  avec  $\tilde{M}$  une variété analytique réelle non-singulière telle que :

1. La restriction  $\pi|_{M \setminus C} : \tilde{M} \setminus \pi^{-1}(C) \rightarrow M \setminus C$  est un isomorphisme.
2. Soit  $U$  un système de coordonnées locales donné par  $\varphi : U \rightarrow V \times W$ , où  $V \subset \mathbb{R}^m$  et  $W \subset \mathbb{R}^{d-m}$  sont des voisinages ouverts des origines respectives, tel que  $\varphi(C \cap U) = \{0\} \times W$ . Soit  $\pi_0 : \tilde{V} \rightarrow V$  l'éclatement de  $V$  en l'origine. Alors il existe un isomorphisme  $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \tilde{V} \times W$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{V} \times W \\ \pi \downarrow & & \downarrow (\pi_0, \text{id}_W) \\ U & \xrightarrow{\varphi} & V \times W \end{array}$$

**Définition 1.1.10.** On dit que  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  est l'éclatement de  $M$  le long de  $C$ .

**Lemme 1.1.11** (Une version réelle du lemme de Chow-Hironaka [57, Corollary 2]). Soit  $\mu : M \rightarrow N$  une modification réelle. Alors il existe une variété analytique réelle non-singulière  $\tilde{M}$  et une application analytique réelle  $\Psi : \tilde{M} \rightarrow M$  telle que  $\psi = \mu \circ \Psi : \tilde{M} \rightarrow N$  soit une suite localement finie d'éclatements à centres non-singuliers.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du lemme précédent.

**Proposition 1.1.12** ([65]). Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés analytiques réelles non-singulières est blow-analytique si et seulement s'il existe une suite localement finie d'éclatements à centres non-singuliers  $\sigma : \tilde{M} \rightarrow M$  telle que  $f \circ \sigma : \tilde{M} \rightarrow N$  soit analytique.

**Exemple 1.1.13** ([65]). La fonction définie par  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  et  $f(0, 0) = 0$  est continue mais pas  $C^1$ . Elle est blow-analytique via l'éclatement de  $\mathbb{R}^2$  en l'origine.

**Exemple 1.1.14.** La fonction définie par  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ne se prolonge pas par continuité à l'origine. Cependant elle est analytique après l'éclatement de  $\mathbb{R}^2$  en l'origine.

Nous pouvons maintenant définir la notion d'équivalence blow-analytique.

**Définition 1.1.15** ([65]). Deux germes de fonctions analytiques réelles  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  sont blow-analytiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme local  $h : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  tel que  $h$  et  $h^{-1}$  sont blow-analytiques et satisfaisant  $f = g \circ h$ .

Afin de montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, T.-C. Kuo donne la caractérisation suivante.

**Proposition 1.1.16** ([65, Proposition 2]). Soit  $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  un homéomorphisme local. Alors  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont blow-analytiques si et seulement s'il existe deux modifications  $\mu_1, \mu_2$  et un isomorphisme analytique réel  $\Phi$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (M_1, \mu_1^{-1}(0)) & \xrightarrow{\Phi} & (M_2, \mu_2^{-1}(0)) \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^d, 0) \end{array}$$

**Corollaire 1.1.17.** *La relation d'équivalence blow-analytique sur les germes analytiques  $(\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  est bien une relation d'équivalence.*

La difficulté réside maintenant en la construction d'homéomorphismes satisfaisant les conditions de la Définition 1.1.15 afin de montrer que deux germes sont équivalents ainsi qu'en la construction d'invariants blow-analytiques afin de distinguer les différentes classes.

La principale façon d'obtenir de tels homéomorphismes est d'intégrer des champs de vecteurs bien choisis.

Les invariants blow-analytiques actuellement connus sont les invariants de T. Fukui [38] et les fonctions zêta de S. Koike et A. Parusiński [59] que nous verrons à la Section 1.4.

Nous pouvons désormais citer les théorèmes suivants qui expliquent en quoi l'équivalence blow-analytique généralise les résultats de [64] rappelés au début de la section et ainsi pourquoi les éléments de la famille de Whitney sont deux à deux blow-analytiquement équivalents.

**Définition 1.1.18** (Trivialité blow-analytique en famille). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $F : \mathbb{R}^d \times I \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f_t(0) = F(0, t) = 0$  pour tout  $t \in I$ .

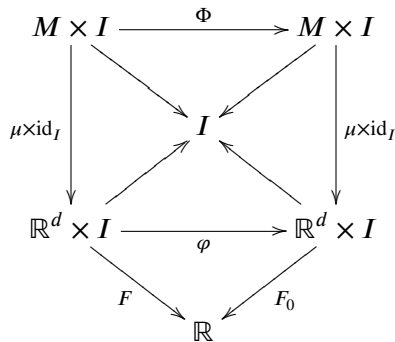
Soit  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^d$  une modification réelle. On dit que la famille  $(f_t)_{t \in I}$  est blow-analytiquement triviale via  $\mu$  s'il existe un isomorphisme analytique réel

$$\Phi : (M \times I, \mu^{-1}(0) \times I) \rightarrow (M \times I, \mu^{-1}(0) \times I)$$

et un homéomorphisme

$$\varphi : (\mathbb{R}^d \times I, \{0\} \times I) \rightarrow (\mathbb{R}^d \times I, \{0\} \times I)$$

tels que le diagramme suivant commute



où il existe un certain  $t_0 \in I$  tel que pour tout  $t \in I$ ,  $F_0(x, t) = F(x, t_0)$ .

En particulier  $F \circ \varphi$  ne dépend pas de  $t$  et les applications  $\Phi$  et  $\varphi$  préservent les fibres à  $t$  fixé.

On dit qu'une famille est blow-analytiquement triviale si elle est blow-analytiquement triviale via une modification  $\mu$ .

**Remarque 1.1.19.** Si une famille est blow-analytiquement triviale alors ses membres sont deux à deux blow-analytiquement équivalents.

Les théorèmes suivants se démontrent en intégrant des champs de vecteurs convenablement choisis afin de construire l'isomorphisme de la Définition 1.1.18.

**Théorème 1.1.20** ([64]). Soit  $f_t : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), t \in I$ , une famille de germes analytiques. Si pour tout  $t \in I$ , le terme initial de  $f_t$  est non-dégénéré (i.e. définit une singularité isolée) et ne change pas de degré alors la famille  $f_t$  est blow-analytiquement triviale via l'éclatement de  $\mathbb{R}^d$  en l'origine.

**Exemple 1.1.21.** La famille de Whitney est blow-analytiquement triviale.

**Théorème 1.1.22** ([44, Theorem B]). Soit  $f_t : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), t \in I$ , une famille de germes analytiques non-dégénérés par rapport à leurs polyèdres de Newton<sup>\*</sup>. Supposons de plus que le polyèdre de Newton de  $f_t$  ne dépend pas de  $t$ . Si pour chaque face compacte  $\gamma$  du polyèdre de Newton qui n'est pas une face de coordonnées, le polynôme  $f_{t_\gamma}$  composé des monômes présents sur la face  $\gamma$  ne dépend pas de  $t$ , alors la famille  $f_t$  est blow-analytiquement triviale via la modification torique associée au polyèdre de Newton<sup>†</sup> de  $f_t$ .

**Remarque 1.1.23** ([44, Corollary 6.1]). Si  $d = 2$  alors l'hypothèse "pour toute face compacte  $\gamma$ ,  $f_{t_\gamma}$  est indépendant de  $t$ " n'est pas nécessaire.

**Remarque 1.1.24** ([44, Corollary 6.2]). On peut remplacer l'hypothèse "pour toute face compacte  $\gamma$ ,  $f_{t_\gamma}$  est indépendant de  $t$ " par " $f_t$  est commode<sup>‡</sup>".

**Exemple 1.1.25** ([44, Example 7.1]). Si  $1 \notin I$  alors la famille  $f_t(x, y) = y^2 + 2x^2y + tx^4$  est blow-analytiquement triviale.

En effet, si l'intervalle  $I$  est situé après 1, on peut directement appliquer le Théorème 1.1.22. Sinon, si  $I$  est situé avant 1, on peut réaliser le changement de variables  $x = x_1$  et  $y = y_1 + cx_1^2$  avant d'appliquer le Théorème 1.1.22.

**Théorème 1.1.26** ([42]). Soit  $f_t : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), t \in I$ , une famille de germes analytiques. Notons  $F(x, t) = f_t(x) = \sum_v c_v(t)x^v$ . Fixons une pondération  $w = (w_1, \dots, w_d) \in (\mathbb{N}_{>0})^d$ . Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $H_k(x, t) = \sum_{v, v \cdot w = k} c_v(t)x^v$  soit non identiquement nul. Si pour tout  $t \in I$ ,  $H_k(\cdot, t)$  est non-dégénéré (i.e. définit une singularité isolée) alors la famille  $f_t$  est blow-analytiquement triviale via une modification torique.

**Exemple 1.1.27** ([37, Example 1]). La famille de Briançon–Speder  $f_t(x, y, z) = z^5 + ty^6z + xy^7 + x^{15}$  est blow-analytiquement triviale dès lors que  $I$  ne contient pas  $t_0 = -\frac{15^{\frac{1}{7}}(\frac{7}{2})^{\frac{4}{5}}}{3}$ . En effet,  $f_t$  est homogène par poids pour la pondération  $(1, 2, 3)$  et définit une singularité isolée dès lors que  $t \neq t_0$ .

Remarquons que O. M. Abderrahmane [1] généralise ces deux derniers théorèmes.

## 1.2 Applications analytiques par arcs

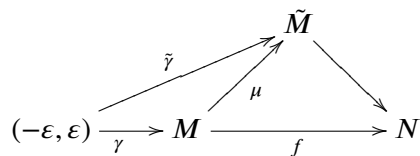
Il est bien connu que l'on peut relever un arc analytique par une modification réelle [39]. Autrement dit, si  $\mu : M \rightarrow N$  est une modification réelle et si  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  est un arc analytique réel, alors il existe un arc analytique réel  $\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tel que  $\gamma = \mu\tilde{\gamma}$ . En effet, de par la définition d'une modification réelle, il existe un sous-ensemble  $S$  de  $N$  dense nulle part tel que tout arc analytique de  $N$  non entièrement inclus dans  $S$  se relève par  $\mu$ . On peut conclure grâce à un argument similaire à 2.2.23 ou à [68, (2.8)–(2.9)].

<sup>\*</sup>Voir [4, §8].

<sup>†</sup>Voir [4, §8].

<sup>‡</sup>i.e. pour tout  $i$ , une puissance de  $x_i$  apparaît dans le développement de  $f_t$ .

Ainsi une application blow-analytique  $f : M \rightarrow N$  envoie par composition les arcs analytiques sur des arcs analytiques :



De telles applications ont d'abord été étudiées par K. Kurdyka [67].

**Définition 1.2.1** ([67, Définition 4.1]). Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés analytiques réelles est dite *analytique par arcs* si pour tout arc analytique réel  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  la composée  $f\gamma$  est analytique.

**Exemple 1.2.2** ([67, Exemple 6.1]). La fonction définie par  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$  et  $f(0, 0) = 0$  est analytique par arcs bien qu'elle ne soit pas  $C^1$ .

Notons que l'adhérence de Zariski du graphe de  $f$  est le parapluie de Cartan défini par  $x^3 = z(x^2 + y^2)$  [67, Exemples 1.2].

**Exemple 1.2.3.** Une application blow-analytique est analytique par arcs.

Il est donc naturel de se demander si la réciproque est vraie. E. Bierstone, P. D. Milman et A. Parusiński [14] ont donné un contre-exemple sans hypothèse supplémentaire.

K. Kurdyka a conjecturé qu'une application est blow-analytique si et seulement si elle est analytique par arcs et sous-analytique. Cette question est toujours ouverte. Nous avons cependant les théorèmes suivants de E. Bierstone et P. D. Milman qui s'approchent du résultat attendu.

**Théorème 1.2.4** ([12, Theorem 1.4]). Une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur une variété analytique réelle non-singulière est analytique par arcs et sous-analytique si et seulement s'il existe une suite finie  $\sigma : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  d'éclatements locaux le long de centres non-singuliers telle que  $f\sigma$  est analytique.

**Théorème 1.2.5** ([12, Theorem 1.1] Version analytique). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction analytique par arcs définie sur une variété analytique réelle non-singulière. Supposons qu'il existe

$$G(x, y) = \sum_{i=0}^p G_i(x)y^i$$

un polynôme non-nul dont les coefficients sont des fonctions analytiques sur  $M$  tel que

$$G(x, f(x)) = 0, x \in M$$

Alors  $f$  est blow-analytique.

**Théorème 1.2.6** ([12, Theorem 1.1] Version algébrique). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction analytique par arcs définie sur une variété algébrique réelle non-singulière. Supposons qu'il existe

$$G(x, y) = \sum_{i=0}^p G_i(x)y^i$$

un polynôme non-nul dont les coefficients sont des fonctions régulières sur  $M$  tel que

$$G(x, f(x)) = 0, x \in M$$

Alors  $f$  est blow-analytique via une modification réelle donnée par une suite finie d'éclatements algébriques à centres non-singuliers.

Ces deux derniers énoncés permettent d'obtenir des exemples de fonctions blow-analytiques.

**Exemple 1.2.7** ([67, Exemple 6.1],[12, Exemples 1.2]). La fonction définie par  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$  et  $f(0, 0) = 0$  est analytique par arcs et vérifie  $G(x, y, f(x, y)) = 0$  où

$$G(x, y, z) = x^3 - z(x^2 + y^2)$$

Donc  $f$  est blow-analytique.

**Exemple 1.2.8** ([12, Exemples 1.2]). La fonction définie par  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$  est analytique par arcs et vérifie  $G(x, y, f(x, y)) = 0$  où

$$G(x, y, z) = x^4 + y^4 - z^2$$

Donc  $f$  est blow-analytique.

On sait qu'une fonction semialgébrique définie sur un ensemble semialgébrique vérifie une équation polynomiale non triviale [17, Lemma 2.5.2]. Suivant l'énoncé du Théorème 1.2.6, il est donc naturel d'introduire la notion suivante.

**Définition 1.2.9.** Une fonction semialgébrique définie sur un ensemble algébrique est dite *blow-Nash* s'il existe une suite finie d'éclatements algébriques le long de centres non-singuliers telle que la composée soit Nash<sup>\*</sup>.

L'énoncé suivant se déduit alors immédiatement du Théorème 1.2.6.

**Théorème 1.2.10.** Une application semialgébrique définie sur un ensemble algébrique non-singulier est blow-Nash si et seulement si elle est analytique par arcs.

Nous verrons dans la suite une version de l'énoncé précédent sur un ensemble algébrique singulier (sous réserve d'une hypothèse de continuité supplémentaire). Il s'agit de la Proposition 2.2.27 ([19, Proposition 2.27]) : une application semialgébrique définie sur un ensemble algébrique et continue sur l'adhérence du lieu non-singulier<sup>†</sup> est blow-Nash si et seulement s'il existe une partie nulle part dense telle que tout arc analytique réel non entièrement inclus dans cette partie est envoyé sur un arc analytique réel par composition.

Comme nous venons de l'observer, la notion de blow-analyticité est proche de la notion d'arc-analyticité. Ce lien a permis la construction des invariants sus-cités, à savoir les invariants de Fukui et les fonctions zêta de S. Koike et A. Parusiński. Le résultat suivant présente l'invariant de Fukui naïf, les fonctions zêta seront discutées à la Section 1.4.

**Théorème 1.2.11** ([38, Theorem 3.1]). À  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction analytique réelle on associe l'ensemble des ordres de contact des compositions de  $f$  avec des arcs analytiques réels ayant pour origine l'origine de  $\mathbb{R}^d$ . On parle alors de l'invariant de Fukui

$$\mathcal{A}(f) = \{\text{ord}_t f\gamma, \gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)\}$$

Si  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  sont blow-analytiquement équivalents alors  $\mathcal{A}(f) = \mathcal{A}(g)$ .

<sup>\*</sup>i.e. semialgébrique et analytique, voir la Définition 1.7.1.

<sup>†</sup>i.e. non-singulier en dimension maximale.



### 1.3 Intégration motivique classique

Pour des synthèses plus exhaustives concernant l'intégration motivique classique, nous renvoyons le lecteur vers [28], [74] et [73]. Les synthèses [21], [100] et [16] permettent de comprendre les rouages de la théorie en commençant par le cas non-singulier (ou "très peu singulier" pour le premier).

Dans cette section, afin de faire un historique de la théorie, une variété algébrique désigne un schéma réduit, séparé et de type fini sur un corps de caractéristique nulle. C'est la seule section de cette thèse qui utilisera le langage des schémas.

#### 1.3.1 Un bref aperçu de la théorie

À l'aide d'outils provenant de l'intégration  $p$ -adique, V. V. Batyrev [9] démontre que deux variétés de Calabi-Yau birationnelles ont les mêmes nombres de Betti. Lors d'un exposé à Orsay en 1995, M. Kontsevich introduit un analogue "motivique" à l'intégration  $p$ -adique lui permettant de démontrer sans intégration  $p$ -adique que deux variétés de Calabi-Yau birationnelles ont les mêmes nombres de Hodge, c'est la naissance de l'intégration motivique.

L'intégration motivique a ensuite été approfondie, en particulier élargie au cas singulier, par J. Denef et F. Loeser [26] [30], V. V. Batyrev [8] [10] et E. Looijenga [74].

**Définition 1.3.1.** On dénote par  $K_0(\text{Var}_k)$  le groupe de Grothendieck des variétés algébriques sur  $k$ , il s'agit du groupe libre abélien engendré par les classes  $[X]$  d'isomorphismes des variétés algébriques sur  $k$  modulo la relation d'additivité suivante :

- (i) Si  $Y$  est une sous-variété fermée de  $X$  alors  $[X] = [X \setminus Y] + [Y]$ .

De plus, le produit fibré au-dessus de  $\text{Spec } k$  induit une structure d'anneau :

- (ii)  $[X \times_k Y] = [X][Y]$ .

**Notations 1.3.2.** Fixons quelques notations :

- On note  $0 = [\emptyset]$  la classe du vide, il s'agit du neutre de l'addition.
- On note  $1 = [\text{pt}] = [\text{Spec } k]$  la classe du point, il s'agit du neutre du produit.
- On note  $\mathbb{L} = [\mathbb{A}_k^1] = [\text{Spec } k[x]]$  la classe de la droite affine.
- On note  $\mathcal{M}_k = K_0(\text{Var}_k)[\mathbb{L}^{-1}]$  la localisation de  $K_0(\text{Var}_k)$  en  $\{1, \mathbb{L}, \mathbb{L}^2, \dots\}$  de sorte à rendre la classe de la droite affine inversible.

**Remarque 1.3.3.** On sait que les anneaux  $K_0(\text{Var}_k)$  ne sont pas intègres pour  $k$  de caractéristique nulle [86]. Pour  $k = \mathbb{C}$ , L. A. Borisov [18] a récemment démontré que la classe  $\mathbb{L}$  de la droite affine était un diviseur de zéro, en particulier le morphisme  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$  n'est pas injectif.

**Remarque 1.3.4.** La classe d'un ensemble Zariski-constructible est bien définie dans  $K_0(\text{Var}_k)$ .

**Remarque 1.3.5.** Si  $E \rightarrow B$  est une fibration triviale par morceaux de fibre  $F$ , alors on a naturellement la relation  $[E] = [B][F]$  dans  $K_0(\text{Var}_k)$ .

On renvoie le lecteur à [46] et [47] pour les propriétés de base des espaces de jets et d'arcs.

**Définition 1.3.6.** Pour  $X$  une variété algébrique et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{L}_n(X)$  l'ensemble des  $n$ -jets sur  $X$ , il s'agit des points de  $X$  à coordonnées dans  $k[t]/t^{n+1}$ , i.e.

$$\mathcal{L}_n(X) = X(k[t]/t^{n+1}) = \text{Hom}_{k\text{-sch}}(\text{Spec } k[t]/t^{n+1}, X)$$

On peut les munir d'une structure de schéma naturellement de la façon suivante. Quitte à travailler localement, on peut supposer que  $X = \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_d]/I)$  où  $I = (f_1, \dots, f_m)$ . Alors un  $n$ -jet n'est rien d'autre qu'un morphisme  $\gamma : k[x_1, \dots, x_d]/I \rightarrow k[t]/t^{n+1}$ . En posant  $u_i = \gamma(x_i)$  et en le voyant comme un vecteur de  $k^{n+1}$ , on remarque que  $\mathcal{L}_n(X)$  est la sous-variété de  $k^{d(n+1)}$  donnée par les équations  $f_i(u_1, \dots, u_d) = 0 \in k[t]/t^{n+1}$  modulo l'identification réalisée. On vérifie aisément que cette construction ne dépend pas du choix des générateurs de  $I$ .<sup>\*</sup>

L'exemple suivant met en avant l'aspect naturel de la structure de schéma sur les ensembles de jets.

**Exemple 1.3.7.** Considérons le point de rebroussement

$$X = \text{Spec}(k[x, y]/y^2 - x^3)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(X)(k) &= \left\{ (a_0 + a_1t, b_0 + b_1t) \in (k[t]/t^2)^2, (b_0 + b_1t)^2 - (a_0 + a_1t)^3 \equiv 0 \pmod{t^2} \right\} \\ &= \left\{ (a_0 + a_1t, b_0 + b_1t) \in (k[t]/t^2)^2, a_0^3 = b_0^2, 3a_1a_0^2 = 2b_0b_1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(X)(k) &= \left\{ \begin{array}{l} (a_0 + a_1t + a_2t^2, b_0 + b_1t + b_2t^2) \in (k[t]/t^3)^2, \\ (b_0 + b_1t + b_2t^2)^2 - (a_0 + a_1t + a_2t^2)^3 \equiv 0 \pmod{t^3} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (a_0 + a_1t + a_2t^2, b_0 + b_1t + b_2t^2) \in (k[t]/t^3)^2, \\ a_0^3 = b_0^2, \\ 3a_1a_0^2 = 2b_0b_1, \\ 3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2 = 2b_0b_2 + b_1^2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

**Définition 1.3.8.** Soit  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m \geq n$ , alors le morphisme

$$k[t]/t^{m+1} \rightarrow k[t]/t^{n+1}$$

induit un morphisme de troncation

$$\pi_n^m : \mathcal{L}_m(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$$

**Définition 1.3.9.** On peut maintenant définir le schéma des arcs (formels) sur  $X$  comme la limite projective

$$\mathcal{L}(X) = \varprojlim \mathcal{L}_n(X)$$

On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  un morphisme

$$\pi_n : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$$

**Remarque 1.3.10.** La construction fonctorielle permet de voir que l'ensemble des points de  $\mathcal{L}(X)$  à coordonnées dans  $k$  est l'ensemble des points de  $X$  à coordonnées dans  $k[[t]]$ .

<sup>\*</sup>Il existe une construction plus fonctorielle décrite au début de [26].

**Remarque 1.3.11.** Les espaces de jets sont des variétés algébriques. En revanche, les espaces d'arcs sont des schémas réduits et séparés qui ne sont généralement pas de type fini, on peut les voir comme des variétés de dimension infinie.

**Remarque 1.3.12.** Étant donnée une variété  $X$ , un théorème de Greenberg [48] assure l'existence d'un entier  $c > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $\pi_n(\mathcal{L}(X)) = \pi_n^{cn}(\mathcal{L}_{cn}(X))$ .

Il résulte alors du théorème de Chevalley pour les schémas [49, Chapitre IV, Théorème 1.8.4] que  $\pi_n(\mathcal{L}(X))$  est Zariski-constructible comme image d'une variété par un morphisme.

L'idée générale de l'intégration motivique va être de définir une mesure sur l'espace des arcs  $\mathcal{L}(X)$  qui à un ensemble "mesurable" va associer un élément dans  $K_0(\text{Var}_k)$ . La difficulté réside désormais dans la construction d'objets "mesurables" dans  $\mathcal{L}(X)$ . Pour cela, on va utiliser les morphismes de troncation pour se ramener à des parties des espaces de jets qui sont plus faciles à appréhender que  $\mathcal{L}(X)$ .

**Définition 1.3.13.** Soit  $X$  une variété algébrique de dimension  $d$ . On dit qu'une partie  $A$  de  $\mathcal{L}(X)$  est *stable* à partir de  $k \in \mathbb{N}$  si elle vérifie les conditions suivantes pour  $n \geq k$  :

1.  $\pi_n(A)$  est Zariski-constructible.
2.  $A = \pi_n^{-1}\pi_n(A)$ .
3.  $\pi_n^{n+1} : \pi_{n+1}(A) \rightarrow \pi_n(A)$  est une fibration triviale par morceaux de fibre  $\mathbb{A}_k^d$ .

On dit qu'une partie est stable si elle l'est à partir d'un certain rang.

On obtient alors une première famille d'ensembles mesurables :

**Définition-Proposition 1.3.14.** Si une partie  $A$  de  $\mathcal{L}(X)$  est stable alors on définit sa mesure par l'égalité

$$\tilde{\mu}(A) = [\pi_n(A)] \mathbb{L}^{-(n+1)d} \in \mathcal{M}_k$$

qui ne dépend pas de  $n$  pour  $n$  suffisamment grand.

La première partie du lemme suivant découle du lemme d'Hensel.

**Lemme 1.3.15.** Lorsque  $X$  est non-singulière alors les morphismes  $\pi_n^m$  et  $\pi_n$  sont surjectifs. De plus

$$\pi_n^m : \mathcal{L}_m(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$$

est une fibration triviale par morceaux de fibre  $\mathbb{A}_k^{(m-n)d}$ .

**Remarque 1.3.16.** Le résultat précédent est faux dans le cas singulier. On peut s'en persuader en considérant l'Exemple 1.3.7. Le jet  $(0, t) \in \mathcal{L}_1(X)$  n'a pas d'antécédent par  $\pi_1^2 : \mathcal{L}_2(X) \rightarrow \mathcal{L}_1(X)$ .

**Définition 1.3.17.** Une partie  $A$  de  $\mathcal{L}(X)$  est un cylindre si  $A = \pi_k^{-1}(C)$  pour un certain  $k$  et  $C$  un Zariski-constructible.

**Corollaire 1.3.18.** Si  $X$  est une variété algébrique non-singulière de dimension  $d$  alors un cylindre est stable. Mieux, si  $A = \pi_k^{-1}(C)$ , avec  $C$  un Zariski-constructible, alors

$$\tilde{\mu}(A) = [C] \mathbb{L}^{-(k+1)d}$$

**Exemple 1.3.19.** Si  $X$  est une variété algébrique non-singulière de dimension  $d$  alors  $\mathcal{L}(X)$  est stable et

$$\tilde{\mu}(\mathcal{L}(X)) = [X] \mathbb{L}^{-d}$$

Afin de définir une intégrale, nous allons avoir besoin d'une notion de convergence et donc de compléter l'anneau  $\mathcal{M}_k$ .

**Définition 1.3.20.** On définit pour  $m \in \mathbb{Z}$  le sous-groupe  $\mathcal{F}^m \mathcal{M}_k$  de  $\mathcal{M}_k$  engendré par les éléments de la forme  $[S] \mathbb{L}^{-i}$  avec  $i - \dim S \geq m$ . On obtient ainsi une filtration<sup>\*</sup> et on note  $\hat{\mathcal{M}}_k$  la complétion de  $\mathcal{M}_k$  par rapport à cette filtration<sup>†</sup>, i.e.

$$\hat{\mathcal{M}}_k = \varprojlim \mathcal{M}_k / \mathcal{F}^m \mathcal{M}_k$$

**Remarque 1.3.21.** On ne sait pas si le morphisme  $\mathcal{M}_k \rightarrow \hat{\mathcal{M}}_k$  est injectif, cependant la caractéristique d'Euler et le polynôme de Hodge se factorisent à travers l'image de  $\mathcal{M}_k$  dans  $\hat{\mathcal{M}}_k$ , ce qui suffit pour démontrer le théorème de Kontsevich.

**Exemple 1.3.22.** Une suite d'éléments de  $\mathcal{M}_k$  tend vers 0 dans  $\hat{\mathcal{M}}_k$  si et seulement si la dimension virtuelle des éléments de la suite tend vers  $-\infty$ .

**Exemple 1.3.23.** Une série converge dans  $\hat{\mathcal{M}}_k$  si et seulement si son terme général tend vers 0 dans  $\hat{\mathcal{M}}_k$ .

**Exemple 1.3.24.** Dans  $\hat{\mathcal{M}}_k$ ,  $\sum_{i \geq 0} \mathbb{L}^{-ki}$  converge et est l'inverse de  $1 - \mathbb{L}^{-k}$ .

**Définition 1.3.25.** Soit  $A \subset \mathcal{L}(X)$  une partie stable et  $\alpha : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  une fonction dont toutes les fibres sont stables et telle que  $\tilde{\mu}(\alpha^{-1}(\infty)) = 0$ . On dit que  $\mathbb{L}^{-\alpha}$  est intégrable si la série suivante converge :

$$\int_A \mathbb{L}^{-\alpha} d\tilde{\mu} = \sum_n \tilde{\mu}(\alpha^{-1}(n)) \mathbb{L}^{-n}$$

**Exemple 1.3.26.** Soit  $\mathcal{I}$  un faisceau d'idéaux alors  $\mathbb{L}^{-\text{ord}_{\mathcal{I}}}$  est intégrable<sup>‡</sup>.

**Théorème 1.3.27** (Kontsevich transformation rule). *Si  $A \subset \mathcal{L}(X)$  est une partie stable, si  $h : Y \rightarrow X$  est une application birationnelle propre entre deux variétés algébriques non-singulières et si  $\alpha : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est intégrable alors*

$$\int_A \mathbb{L}^{-\alpha} d\tilde{\mu} = \int_{h_*^{-1}(A)} \mathbb{L}^{-(\alpha \circ h_* + \text{ord}_{\text{Jac}_h})} d\tilde{\mu}$$

où  $h_* : \mathcal{L}(Y) \rightarrow \mathcal{L}(X)$  est induite par  $h$  et  $\text{Jac}_f$  est le faisceau d'idéaux localement engendré par le déterminant jacobien.

Avec tous ces outils, le théorème de Kontsevich devient facile.

**Corollaire 1.3.28** (Kontsevich). *Deux variétés de Calabi-Yau  $X$  et  $Y$  birationnelles ont les mêmes nombres de Hodge.*

*Démonstration.* Puisque  $X$  et  $Y$  sont birationnelles, on peut trouver  $Z$  une variété lisse et deux applications birationnelles propres telles que

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array}$$

<sup>\*</sup>i.e.  $\mathcal{F}^{m+1} \mathcal{M}_k \subset \mathcal{F}^m \mathcal{M}_k$  et  $\mathcal{F}^m \mathcal{M}_k \mathcal{F}^n \mathcal{M}_k \subset \mathcal{F}^{m+n} \mathcal{M}_k$ .

<sup>†</sup>Selon le vocabulaire introduit par E. Looijenga [74], il s'agit de la complétion par rapport à la dimension virtuelle. V. V. Batyrev [8] [10] en propose une description en terme de "norme non-archimédienne".

<sup>‡</sup> $\text{ord}_{\mathcal{I}}$  est l'ordre de contact le long de  $\mathcal{I}$ , il est défini de la façon suivante : un arc induit un morphisme  $\gamma : \mathcal{O}_X \rightarrow k[[t]]$  on note alors  $\text{ord}_{\mathcal{I}}(\gamma) = \sup\{e, \gamma(\mathcal{I}) \subset (t^e)\}$

Puis  $[X] = \int_{\mathcal{L}(X)} \mathbb{L}^{-0} d\tilde{\mu} = \int_{\mathcal{L}(Z)} \mathbb{L}^{-\text{ord}_{\text{Jac}_{\pi_X}}} d\tilde{\mu} = \int_{\mathcal{L}(Z)} \mathbb{L}^{-\text{ord}_{\text{Jac}_{\pi_Y}}} d\tilde{\mu} = \int_{\mathcal{L}(Y)} \mathbb{L}^{-0} d\tilde{\mu} = [Y]$ .

En effet,  $\text{div}(\text{Jac}_{\pi_X}) = K_Z/X = K_Z - \pi_X^* K_X = K_Z$  puisque  $X$  est de Calabi-Yau. De même pour  $Y$ . ■

Nous terminons cette section avec quelques remarques sur le cas singulier.

Se restreindre à mesurer seulement les ensembles stables n'est pas satisfaisant puisque, par exemple, cela ne permet pas de mesurer  $\mathcal{L}(X)$  lorsque  $X$  est singulière. Il est possible de définir une notion d'ensemble mesurable plus générale. Une première version apparaît dans [26, Definition-Proposition 3.2]. Une seconde notion un peu plus large voit le jour dans [8, Definition 2.16], [10], [74, Proposition 2.2] et [29, Appendix]. Nous présentons directement cette dernière.

**Définition 1.3.29.** Soit  $X$  une variété algébrique. On dit qu'une partie  $A \subset \mathcal{L}(X)$  est mesurable si pour tout entier  $m \in \mathbb{Z}_{<0}$  il existe une partie stable  $A_m \subset \mathcal{L}(X)$  et une suite  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de parties stables ayant une dimension virtuelle strictement inférieure à  $m$  avec  $\lim \dim C_i = -\infty$  telle que la différence symétrique  $A \Delta A_m = (A \cup A_m) \setminus (A \cap A_m)$  soit incluse dans la réunion  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ .

Alors  $\mu(A) = \lim \tilde{\mu}(A_m)$  est bien définie et ne dépend pas des choix effectués.

On obtient ainsi une algèbre booléenne d'ensembles mesurables et la définition de l'intégrale motivique se généralise naturellement à ce cadre.

**Définition 1.3.30.** On dit qu'une partie est fortement mesurable si de plus on peut choisir  $A_m \subset A$ .

**Remarque 1.3.31.** Si  $A$  est stable alors  $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ .

**Définition 1.3.32** ([26, (2.6)]). Pour  $e \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{L}^{(e)}(X) = \mathcal{L}(X) \setminus \pi_e^{-1}(X_{\text{sing}})$  que l'on peut voir comme l'espace des arcs à une distance  $e$  du lieu singulier.

**Remarque 1.3.33.**  $\mathcal{L}(X) \setminus \mathcal{L}(X_{\text{sing}}) = \bigsqcup_{e \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{(e)}(X)$

Le résultat suivant découle de [26, Lemma 4.1 & Lemma 4.4]. Avec cette nouvelle définition d'ensemble mesurable, tous les cylindres sont fortement mesurables.

**Proposition 1.3.34.** Si  $A$  est un cylindre alors  $A_m = A \cap \mathcal{L}^{(m)}(X)$  est stable,  $A \setminus A_m \subset \bigsqcup_{e \geq m+1} \mathcal{L}^{(e)}(X)$  avec  $\lim \dim \mathcal{L}^{(e)}(X) = -\infty$ .

Donc  $A$  est fortement mesurable et on a  $\mu(A) = \lim \tilde{\mu}(A \cap \mathcal{L}^{(m)}(X))$ .

**Théorème 1.3.35** (Formule de changement de variables). Soit  $h : Y \rightarrow X$  une application birationnelle propre avec  $Y$  non-singulière. Soit  $A \subset \mathcal{L}(X)$  tel que  $A$  et  $h^{-1}(A)$  soient fortement mesurables. Si  $\alpha : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est intégrable alors

$$\int_A \mathbb{L}^{-\alpha} d\mu = \int_{h_*^{-1}(A)} \mathbb{L}^{-(\alpha \circ h_* + \text{ord}_{h_* \Omega_X^d})} d\mu$$

La formule de changement de variables repose sur le lemme clé suivant dont plusieurs adaptations nous seront utiles tout au long de cette thèse.

**Lemme 1.3.36** ([26, Lemma 3.4]). Soit  $h : Y \rightarrow X$  une application birationnelle propre avec  $Y$  non-singulière. Pour  $e, e' \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\Delta_{e,e'} = \left\{ \gamma \in \mathcal{L}(Y), \text{ord}_{h^*\Omega_X^d}(\gamma) = e, h_*\gamma \in \mathcal{L}^{(e')}(X) \right\}$$

Alors il existe un entier  $c > 0$  tel que pour  $n \geq \sup(2e, e + ce')$

- (i)  $h_{*n}\pi_n\Delta_{e,e'}$  s'écrit comme la réunion de fibres de  $h_{*n}$ .
- (ii)  $h_{*n} : \pi_n\Delta_{e,e'} \rightarrow h_{*n}\pi_n\Delta_{e,e'}$  est une fibration triviale par morceaux de fibre  $\mathbb{A}_k^e$ .

La proposition suivante découle immédiatement de la formule de changement de variables. Le calcul est similaire à ceux des formules de rationalité des fonctions zêta que nous verrons tout au long de cette thèse.

**Proposition 1.3.37.** Soit  $X$  une variété algébrique et  $h : Y \rightarrow X$  une résolution<sup>\*</sup> de  $X$ . Notons  $(E_i)_{i \in J}$  les composantes irréductibles du lieu exceptionnel. On considère la stratification usuelle de  $Y$  donnée par  $E_I^\bullet = \cap_{i \in I} E_i \setminus \cup_{j \notin I} E_j$  pour  $I \subset J$ . Notons  $v_i - 1 = \text{ord}_{h^*\Omega_X^d} E_i$ . Alors

$$\mu(\mathcal{L}(X)) = \mathbb{L}^{-d} \sum_{I \subset J} [E_I^\bullet] \prod_{i \in I} \frac{1}{(1 + \mathbb{L})^{v_i - 1}}$$

### 1.3.2 Fonctions zêta motiviques de Denef–Loeser

J. Denef et F. Loeser [25] [29] ont associé à une fonction régulière une série formelle nommée fonction zêta motivique “naïve” et une autre nommée fonction zêta motivique “équivariante”. À l’aide du lemme clé pour la formule de changement de variables, ils ont montré que ces fonctions zêta admettent une expression rationnelle permettant de définir une notion de limite. Les réalisations connues des opposés de ces limites coïncident avec les réalisations de la fibre de Milnor classique. On parle donc de la fibre de Milnor motivique.

J. Denef et F. Loeser [27] ont aussi démontré que si l’on modifiait un peu la définition de la fonction zêta motivique équivariante, il existait un produit défini sur le groupe de Grothendieck équivariant de sorte que la fonction zêta équivariante modifiée de  $f \oplus g$  en somme directe s’exprimait en appliquant terme à terme ce produit sur les coefficients des fonctions zêta équivariantes modifiées de  $f$  et de  $g$ . Ce produit de convolution induit une formule de type Thom–Sebastiani<sup>†</sup> pour la fibre de Milnor motivique.

La fonction zêta équivariante de Denef–Loeser est à coefficients dans un groupe de Grothendieck équivariant par rapport à des actions des racines de l’unité. Une telle construction n’admet pas d’analogie simple en géométrie réelle. Cependant G. Guibert, F. Loeser et M. Merle [51] ont ensuite développé un formalisme qui utilise des actions du groupe multiplicatif. C’est ce dernier que nous adapterons à la géométrie réelle et c’est donc cette déclinaison de la fonction zêta motivique équivariante que nous présentons dans cette section.

<sup>\*</sup>En particulier, on suppose que le lieu exceptionnel est à croisements normaux

<sup>†</sup>Une version d’un théorème de R. Thom et de Sebastiani [94], voir [4, Theorem 2.9], stipule que la fibre de Milnor de  $f \oplus g$  en l’origine est homotope au joint topologique des fibres de Milnor de  $f$  et de  $g$  en l’origine.

### 1.3.2.1 Fonction zêta motivique naïve

**Définition 1.3.38.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  un morphisme non-constant avec  $X$  une variété non-singulière. Pour  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , on pose

$$\mathfrak{X}_n(f) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(X), \text{ord}_t f_n \gamma = n\}$$

où  $f_n : \mathcal{L}_n(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{A}_k^1)$  est le morphisme induit par  $f$  et où

$$\text{ord}_t : \mathcal{L}_n(\mathbb{A}_k^1) \rightarrow \{0, \dots, n, \infty\}$$

est défini comme suit. À un arc  $\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{A}_k^1)$  correspond un morphisme  $\tilde{\gamma} : k[x] \rightarrow k[t]/t^{n+1}$ , on note alors  $\text{ord}_t \gamma = \sup\{e, t^e | \tilde{\gamma}(x)\}$ .

La fonction zêta motivique naïve de  $f$  est alors définie par

$$Z_f^{\text{naive}}(T) = \sum_{n \geq 1} [\mathfrak{X}_n(f)] \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}_k[[T]]$$

Le théorème de rationalité suivant est une conséquence immédiate du lemme clé pour la formule de changement de variables [26, Lemma 3.4] rappelé au Lemme 1.3.36.

**Théorème 1.3.39** ([25, Theorem 2.2.1]). Soit  $f$  un morphisme défini comme dans la définition précédente. Soit  $h : Y \rightarrow X$  une résolution de  $(X, X_0(f) = f^{-1}(0))$ . On note  $(E_i)_{i \in J}$  les composantes irréductibles de  $h^{-1}(X_0(f))$ . Pour  $i \in J$ , on note  $N_i$  la multiplicité de  $E_i$  dans le diviseur de  $f \circ h$  et  $v_i - 1$  la multiplicité de  $E_i$  le long du diviseur de  $\text{Jac}_h$ . Pour  $I \subset J$ , on pose  $E_I^\bullet = \cap_{i \in I} E_i \setminus \cup_{j \notin I} E_j$ . Alors

$$Z_f^{\text{naive}}(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} [E_I^\bullet] (\mathbb{L} - 1)^{|I|} \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}$$

### 1.3.2.2 Fonction zêta motivique équivariante suivant Guibert-Loeser-Merle

On note  $\mathbf{G}_m = \text{Spec}(k[x, y]/xy - 1)$  le groupe algébrique commutatif sur un corps  $k$ . Il s'identifie à la droite affine privée de l'origine.

**Définition 1.3.40.** Soit  $S$  une variété algébrique sur un corps  $k$ . Soit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . On définit  $K_0(\text{Var}_{S \times \mathbf{G}_m}^n)$  comme le groupe libre abélien engendré par les classes d'isomorphismes équivariants des variétés  $Y \rightarrow S \times \mathbf{G}_m$  au-dessus de  $S \times \mathbf{G}_m$  où  $Y$  est muni d'une bonne action<sup>\*</sup> de  $\mathbf{G}_m$  telles que chaque fibre de  $\pi_1 : Y \rightarrow S$  est invariante par l'action et telles que  $\pi_2 : Y \rightarrow \mathbf{G}_m$  vérifie  $\pi_2(\lambda \cdot x) = \lambda^n \pi_2(x)$  modulo les relations suivantes :

- (i) Si  $Z$  est une sous-variété fermée de  $Y$  invariante par l'action de  $\mathbf{G}_m$  alors  $[Y \setminus Z] + [Z] = [Y]$ .
- (ii) <sup>†</sup> Soit  $f : Y \times \mathbb{A}_k^m \rightarrow Y \rightarrow S \times \mathbf{G}_m$  muni de deux actions  $\sigma$  et  $\sigma'$  qui relèvent<sup>‡</sup> la même action  $\tau$  sur  $Y$  alors

$$[f : Y \times \mathbb{A}_k^m \rightarrow S \times \mathbf{G}_m, \sigma] = [f : Y \times \mathbb{A}_k^m \rightarrow S \times \mathbf{G}_m, \sigma']$$

On a une structure d'anneau donnée par le produit fibré au-dessus de  $S \times \mathbf{G}_m$  et l'action diagonale.

<sup>\*</sup>i.e. les orbites sont incluses dans des ouverts affines, ce qui permet de pouvoir travailler localement.

<sup>†</sup>Cet axiome est purement technique, il nous permettra de mettre en facteur certains termes de la fonction zêta n'ayant pas exactement la même action.

<sup>‡</sup>i.e. telles que  $\text{pr}_1(\lambda \cdot_\sigma(y, x)) = \text{pr}_1(\lambda \cdot_{\sigma'}(y, x)) = \lambda \cdot_\tau y$ .

(iii)  $[X \times_{S \times \mathbf{G}_m} Y] = [X][Y]$  et le neutre est donné par  $1 = [S \times \mathbb{R}^* \rightarrow S \times \mathbb{R}^*]$  où  $\mathbf{G}_m$  agit trivialement sur  $S$  et par  $\lambda \cdot x = \lambda^n x$  sur  $\mathbf{G}_m$ .

Enfin, le produit cartésien induit une structure de  $K_0(\text{Var}_k)$ -module.

(iv) Si  $[X] \in K_0(\text{Var}_k)$  et  $[Y \rightarrow S \times \mathbf{G}_m] \in K_0(\text{Var}_{S \times \mathbf{G}_m}^n)$  alors

$$[X][Y] = [X \times Y \rightarrow Y \rightarrow S \times \mathbf{G}_m]$$

où  $\mathbf{G}_m$  agit trivialement sur  $X$ .

**Notation 1.3.41.** La classe  $\mathbb{L} \in K_0(\text{Var}_k)$  induit, par le produit extérieur, une classe

$$\mathbb{L} = \mathbb{L} \cdot 1 = [\mathbb{A}_k^1 \times S \times \mathbf{G}_m \rightarrow S \times \mathbf{G}_m]$$

où  $\lambda \cdot (x, s, r) = (x, s, \lambda^n r)$ .

On note alors

$$\mathcal{M}_{S \times \mathbf{G}_m}^n = K_0(\text{Var}_{S \times \mathbf{G}_m}^n)[\mathbb{L}^{-1}]$$

**Notation 1.3.42.** Si  $n = km$  pour  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  on pose  $\theta_{mn} : \text{Var}_{S \times \mathbf{G}_m}^m \rightarrow \text{Var}_{S \times \mathbf{G}_m}^n$  qui change seulement l'action en  $\lambda \cdot x = \lambda^k \cdot x$ . Ce morphisme passe au groupe de Grothendieck et au localisé par  $\mathbb{L}$ . On construit alors  $K_0(\text{Var}_{S \times \mathbf{G}_m})$  et  $\mathcal{M}_{S \times \mathbf{G}_m}$  en passant aux limites inductives.

**Définition 1.3.43.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  un morphisme non-constant avec  $X$  une variété non-singulière. Pour  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , on pose

$$\mathfrak{X}_n(f) = \{ \gamma \in \mathcal{L}_n(X), \text{ord}_t f_n \gamma = n \}$$

On définit une action de  $\mathbf{G}_m$  sur  $\mathfrak{X}_n(f)$  par  $\lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$ .

On a un morphisme *composante angulaire*  $ac_{f,n} : \mathfrak{X}_n(f) \rightarrow \mathbf{G}_m$  donné par  $ac_{f,n}(\gamma) = ac(f\gamma)$  où  $ac : \mathcal{L}_n(\mathbb{A}_k^1) \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  associe à  $\gamma$  le premier coefficient non nul de  $\tilde{\gamma}(x)(t)$  (ou 0 si  $\tilde{\gamma}(x) = 0$ ).

On définit enfin un morphisme  $\tilde{f}_n : \mathfrak{X}_n(f) \rightarrow X_0(f)$  qui à  $\gamma$  associe son origine.

Ainsi la classe

$$[(\tilde{f}_n, ac_{f,n}) : \mathfrak{X}_n(f) \rightarrow X_0(f) \times \mathbf{G}_m] \in K_0(\text{Var}_{X_0(f) \times \mathbf{G}_m}^n)$$

est bien définie.

La fonction zêta motivique équivariante de  $f$  est alors définie par

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} [\mathfrak{X}_n(f)] \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}_{X_0(f) \times \mathbf{G}_m}[[T]]$$

De façon similaire au cas naïf, nous obtenons une formule de rationalité en terme de résolution. Nous renvoyons le lecteur à [51, §3.6] pour différentes constructions de la classe  $[U_I]$ . Nous expliciterons une construction similaire dans le cadre qui nous intéresse à la Section 3.4.3.2.

**Théorème 1.3.44** ([29, §3.3][51, §3.6]).

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} [U_I] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}$$



**Définition 1.3.45** (Fibre de Milnor motivique). On note

$$\mathcal{S}_f = -\lim_{T \rightarrow \infty} Z_f(T)$$

la fibre de Milnor motivique de  $f$ .

**Théorème 1.3.46** ([51, Theorem 5.18]). *Nous avons la relation*

$$\mathcal{S}_{f_1 \oplus f_2} = -\mathcal{S}_{f_1} * \mathcal{S}_{f_2} + \mathcal{S}_{f_1} + \mathcal{S}_{f_2}$$

pour un certain produit<sup>\*</sup>

$$* : \mathcal{M}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m} \times \mathcal{M}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m} \rightarrow \mathcal{M}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m}$$

De façon similaire à [27], il est possible de modifier légèrement la définition de la fonction zêta motivique équivariante de sorte à obtenir une fonction zêta motivique  $\tilde{Z}_f(T)$  qui vérifie

$$\tilde{Z}_{f_1 \oplus f_2}(T) = \tilde{Z}_{f_1} \otimes \tilde{Z}_{f_2}$$

où le produit  $\otimes$  consiste à appliquer terme à terme le produit  $*$ . On retrouve alors le théorème précédent en remarquant que le produit  $\otimes$  est compatible avec le passage à la limite. C'est la stratégie que nous utiliserons dans le Chapitre 3.

## 1.4 Fonctions zêta de Koike–Parusiński

Comme nous l'avons vu, la blow-analyticité est étroitement liée à l'arc-analyticité. Il est donc naturel d'essayer d'utiliser des arguments provenant de l'intégration motivique pour l'étudier. C'est ce qui a été initié par S. Koike et A. Parusiński [59].

Ils définissent une fonction zêta naïve et deux fonctions zêta équivariantes, de façon similaire aux fonctions zêta de Denef–Loeser, à l'aide de la caractéristique d'Euler à support compact.

Commençons par fixer le cadre : nous travaillons désormais avec des arcs analytiques (et non pas formels).

**Définition 1.4.1.** On définit l'espace des arcs analytiques ayant l'origine pour origine

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0) = \{ \gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0), \gamma \text{ analytique} \}$$

ainsi que les espaces de jets<sup>†</sup>

$$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0) = \{ \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_n t^n, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d \}$$

**Définition 1.4.2.** Soit  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction analytique. Pour  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , on pose

$$\mathfrak{X}_n(f) = \{ \gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = ct^n + \dots, c \neq 0 \}$$

$$\mathfrak{X}_n^>(f) = \{ \gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = ct^n + \dots, c > 0 \}$$

<sup>\*</sup>Nous expliciterons la construction d'un produit similaire dans le cadre qui nous intéresse à la Section 3.6.

<sup>†</sup>Comme  $\mathbb{R}^d$  est non-singulier, on peut supposer qu'il s'agit simplement d'arcs tronqués. En effet, on peut compléter l'utilisation du lemme d'Hensel dans le cadre motivique (algébrique) par l'utilisation du théorème d'approximation d'Artin [6] pour montrer que tout  $n$ -jet sur  $\mathbb{R}^d$  est la troncation à l'ordre  $n$  d'un arc analytique réel.

$$\mathfrak{X}_n^<(f) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = ct^n + \dots, c < 0\}$$

et on définit la fonction zêta naïve par

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} \chi_c(\mathfrak{X}_n(f)) (-1)^{nd} T^n \in \mathbb{Z}[[T]]$$

ainsi que les fonctions zêta équivariantes par

$$Z_f^>(T) = \sum_{n \geq 1} \chi_c(\mathfrak{X}_n^>(f)) (-1)^{nd} T^n \in \mathbb{Z}[[T]]$$

$$Z_f^<(T) = \sum_{n \geq 1} \chi_c(\mathfrak{X}_n^<(f)) (-1)^{nd} T^n \in \mathbb{Z}[[T]]$$

**Remarque 1.4.3.**  $Z_f(T) = Z_f^>(T) + Z_f^<(T)$

**Remarque 1.4.4.** Contrairement aux fonctions zêta motiviques de Denef–Loeser définies ci-dessus, les fonctions zêta de Koike–Parusiński sont locales au sens où l'on ne considère que des arcs ayant l'origine pour origine.

On obtient une formule de rationalité pour ces fonctions zêta, grâce à une première adaptation du Lemme clé 1.3.36 ([26, Lemma 3.4]) pour la formule de changement de variables au cadre analytique [59, Lemma 4.2].

**Théorème 1.4.5** ([59, §1.2]). *Soit  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction analytique. Il existe  $\sigma : (M, \sigma^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  une suite localement finie d'éclatements à centres non-singuliers telle que  $f \circ \sigma$  et le déterminant jacobien  $\text{Jac } \sigma$  soient simultanément à croisements normaux et telle que  $\sigma$  soit un isomorphisme en dehors du lieu d'annulation de  $f$ . On note  $(E_i)_{i \in J}$  les composantes irréductibles de  $(f\sigma)^{-1}(0)$  et, pour  $i \in J$ ,*

$$N_i = \text{mult}_{E_i} f\sigma \quad \text{et} \quad \nu - 1 = \text{mult}_{E_i} \text{Jac } \sigma$$

On considère la stratification usuelle de  $M$  donnée,  $I \subset J$ , par

$$E_I^\bullet = \bigcap_{i \in I} E_i \setminus \bigcup_{j \notin I} E_j$$

Alors

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} (-2)^{|I|} \chi_c(E_I^\bullet \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}{1 - (-1)^{\nu_i} T^{N_i}}$$

et, pour  $\varepsilon \in \{<, >\}$ ,

$$Z_f^\varepsilon(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} (-1)^{|I|} K_I^\varepsilon \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}{1 - (-1)^{\nu_i} T^{N_i}}$$

Nous renvoyons à [59, §1.2] pour la définition de  $K_I^\varepsilon$ .

Les formules de rationalité précédentes permettent de démontrer que les fonctions zêta de Koike–Parusiński sont des invariants blow-analytique.

**Théorème 1.4.6** ([59, Theorem 4.5]). *Si  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  sont deux germes blow-analytiquement équivalents, alors*

$$Z_f = Z_g \quad Z_f^> = Z_g^> \quad Z_f^< = Z_g^<$$

Comme pour la fonction zêta motivique équivariante de Denef–Loeser, il est possible de modifier les définitions des fonctions zêta équivariantes de Koike–Parusiński de sorte à obtenir une nouvelle fonction ayant une formule de convolution simple.

**Définition 1.4.7.** Pour  $\varepsilon \in \{<, >\}$ , on pose

$$\tilde{Z}_f^\varepsilon(T) = \frac{1 - Z_f(T)}{1 - T} - 1 + Z_f^\varepsilon(T)$$

**Théorème 1.4.8** ([59, Theorem 2.3]). Pour  $\varepsilon \in \{<, >\}$ , on a la relation

$$\tilde{Z}_{f_1 \oplus f_2}^\varepsilon(T) = \tilde{Z}_{f_1}^\varepsilon(T) \odot \tilde{Z}_{f_2}^\varepsilon(T)$$

où le produit  $\odot$  est défini en appliquant terme à terme le produit de  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque 1.4.9.** Pour  $\varepsilon \in \{<, >\}$ , les données de  $Z_f^\varepsilon(T)$  et de  $\tilde{Z}_f^\varepsilon(T)$  sont équivalentes. On a en effet la formule suivante [59, (2.5)] :

$$Z_f^\varepsilon(T) = \frac{1 + \tilde{Z}_f^\varepsilon(T)}{1 + T} + 1 + \tilde{Z}_f^\varepsilon(T)$$

Pour clore cette section, remarquons que S. Koike et A. Parusiński [59, Theorem 6.1] ont réussi, grâce à leurs fonctions zêta et aux invariants de Fukui, à classier les polynômes de Brieskorn de deux variables à équivalence blow-analytique près.

Cependant, on peut montrer [59, Remark 6.3] que les fonctions zêta de Koike–Parusiński ne classifient pas à elles seules les polynômes de Brieskorn de deux variables.

## 1.5 Ensembles symétriques par arcs

Pour un aperçu plus exhaustif des notions évoquées dans cette section, nous renvoyons le lecteur vers la synthèse [69].

### 1.5.1 Définition et premières propriétés

Dans le même article où il introduit les applications analytiques par arcs, K. Kurdyka définit les ensembles symétriques par arcs [67]. Un ensemble symétrique par arcs est une partie semialgébrique de  $\mathbb{R}^d$  vérifiant la propriété suivante : étant donné un arc analytique réel dans  $\mathbb{R}^d$ , soit cet arc est entièrement inclus dans la partie, soit il la rencontre seulement en des points isolés.

**Définition 1.5.1** ([67, Définition 1.1]). Une partie semialgébrique  $S$  de  $\mathbb{R}^d$  est symétrique par arcs si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- (i) Soit  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d$  un arc analytique réel, si  $\text{Int}(\gamma^{-1}(S)) \neq \emptyset$  alors  $\gamma^{-1}(S) = (-1, 1)$ .
- (ii) Soit  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d$  un arc analytique réel, si  $\gamma((-1, 0)) \subset S$  alors  $\gamma((-1, 1)) \subset S$ .
- (iii) Soit  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d$  un arc analytique réel injectif, si  $\gamma((-1, 0)) \subset S$  alors  $\gamma((-1, 1)) \subset S$ .
- (iv) Soit  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d$  un arc analytique Nash<sup>\*</sup>, si  $\gamma((-1, 0)) \subset S$  alors  $\gamma((-1, 1)) \subset S$ .

**Exemple 1.5.2.** Par l'unicité du théorème de prolongement analytique, les ensembles algébriques (resp. semialgébriques et analytiques) sont symétriques par arcs.

\*i.e. analytique et semialgébrique, voir la Définition 1.7.1.

L'exemple suivant justifie la notion d'ensemble symétrique par arcs.

**Exemple 1.5.3** ([67, Exemple 1.2]). On considère  $V = \{z(x^2 + y^2) = x^3\}$  le parapluie de Cartan. Sa toile  $V \setminus \{(0, 0, z), z \neq 0\}$  est symétrique par arcs mais pas analytique en l'origine.

Pour se convaincre que la toile du parapluie de Cartan est symétrique par arcs, il suffit de remarquer que si un arc analytique réel rencontre le manche  $\{(0, 0, z)\}$  sur un petit voisinage de ce dernier alors il est entièrement inclus dedans puisque le manche est algébrique (et donc symétrique par arcs).

La notion d'ensemble symétrique par arcs est donc plus fine que la notion de composante analytique d'un ensemble algébrique.

La remarque suivante est une conséquence du lemme des petits chemins [17, Proposition 8.1.13].

**Remarque 1.5.4** ([67, Remarque 1.3]). Un ensemble symétrique par arcs est fermé pour la topologie euclidienne.

**Théorème 1.5.5** ([67, Théorème 1.4]). Les ensembles symétriques par arcs de  $\mathbb{R}^d$  sont exactement les fermés d'une topologie noethérienne sur  $\mathbb{R}^d$ , que l'on notera  $\mathcal{AR}$ .

**Définition 1.5.6** ([67, Définition 2.10]). La topologie  $\mathcal{AR}$  étant noethérienne, on peut associer à un ensemble symétrique par arcs  $X$  sa dimension de Krull  $\dim_{\mathcal{AR}} X$  comme étant la plus grande longueur que l'on peut obtenir en considérant des suites strictement croissantes d'irréductibles aboutissant en  $X$ .

**Proposition 1.5.7** ([67, Proposition 2.11]). Soit  $S$  un ensemble semialgébrique, alors les dimensions suivantes coïncident :

- La dimension  $\mathcal{AR}$ ,  $\dim_{\mathcal{AR}} \overline{S}^{\mathcal{AR}}$ .
- La dimension de Zariski,  $\dim_{\text{Zar}} \overline{S}^{\text{Zar}}$ .
- La dimension géométrique classique,  $\dim S$ , étant la plus grande dimension que l'on peut obtenir en considérant les dimensions des sous-variétés analytiques réelles non-singulières contenues dans  $S$ .

### 1.5.2 Un retour sur l'analyticité par arcs

Il est ainsi naturel de considérer les applications analytiques par arcs entre deux ensembles symétriques par arcs. C'est la définition générale qui a été donnée par K. Kurdyka.

**Définition 1.5.8** ([67, Définition 4.1]). Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux ensembles symétriques par arcs est analytique par arcs si elle envoie par composition les arcs analytiques réels de  $X$  sur des arcs analytiques réels de  $Y$ .

**Proposition 1.5.9** ([67, Théorème 4.2, Proposition 5.1]). Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application analytique par arcs et semialgébrique définie sur un ensemble symétrique par arcs  $X$  de  $\mathbb{R}^d$ , alors

- Le graphe de  $f$  est un ensemble symétrique par arcs de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ .
- L'application  $f$  est continue pour la topologie euclidienne.
- L'application  $f$  est continue pour la topologie  $\mathcal{AR}$ , i.e. l'image inverse par  $f$  d'un ensemble symétrique par arcs est un ensemble symétrique par arcs.

• Si  $f$  est semialgébrique, injective et propre (en plus d'être analytique par arcs) son image est symétrique par arcs.

Le théorème suivant montre qu'une application analytique par arcs est analytique en dehors d'un ensemble dense nulle part (il est même plus précis que cela).

**Théorème 1.5.10** ([67, Théorème 5.2]). Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application analytique par arcs et semialgébrique définie sur un ensemble symétrique par arcs, alors

$$\dim \text{Sing } f \leq \dim X - 2$$

où  $\text{Sing } f$  est l'ensemble des points de  $X$  où  $f$  n'est pas analytique.

Nous disposons d'un théorème "d'identité" qui stipule que si deux applications analytiques par arcs définies sur le même ensemble symétrique par arcs irréductible coïncident sur un ouvert semialgébrique de dimension maximale, alors elles sont égales. Il s'agit d'un corollaire immédiat de 1.5.7.

**Théorème 1.5.11** ([67, Proposition 5.3]). Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux applications analytiques par arcs et semialgébriques définies sur un ensemble  $X$  symétrique par arcs irréductible. Si  $f = g$  sur un ouvert semialgébrique  $U$  vérifiant  $\dim U = \dim X$  alors  $f = g$  sur  $X$ .

Enfin, il existe un théorème du type Nullstellensatz pour les fonctions semialgébriques analytiques par arcs.

**Théorème 1.5.12** ([67, Proposition 6.5]). Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions semialgébriques analytiques par arcs définies sur un ensemble symétrique par arcs. Si  $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$ , alors il existe une fonction semialgébrique analytique par arc  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  et un entier  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $g^k = f \cdot h$ .

### 1.5.3 Catégories constructibles

**Définition 1.5.13** ([84, Definition 2.4]). Soit  $C$  une collection d'ensembles semialgébriques. On dit que  $C$  est une catégorie constructible si elle vérifie les axiomes suivants :

- A1.  $C$  contient les ensembles algébriques.
- A2.  $C$  est stable par intersection, réunion et passage au complémentaire.
- A3.
  - a. L'image inverse d'un ensemble de  $C$  par une application entre deux ensembles de  $C$  dont le graphe est dans  $C$  est un ensemble de  $C$ .
  - b. L'image d'un ensemble de  $C$  par une application injective entre deux ensembles de  $C$  dont le graphe est dans  $C$  est un ensemble de  $C$ .
- A4. Tout ensemble  $X$  localement compact de  $C$  est Euler en codimension 1, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble semialgébrique  $Y$  de  $X$  vérifiant  $\dim Y \leq \dim X - 2$  tel que  $X \setminus Y$  est Euler<sup>\*</sup>.

**Exemple 1.5.14** ([84, Theorem 2.8]). Les ensembles Zariski-constructibles (i.e. l'algèbre booléenne engendrée par les ensembles algébriques) forment une catégorie constructible notée  $\mathcal{AC}$ .

<sup>\*</sup>i.e. pour tout  $x \in X \setminus Y$  la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $X \setminus Y$  en  $x$ ,  $\chi(X, X \setminus x) = \sum (-1)^i \dim H_i(X, X \setminus x; \mathbb{Z}_2)$ , est impaire. On peut montrer ([84, Corollary 4.7]) que tout ensemble localement compact d'une catégorie constructible est Euler. L'intérêt de cet axiome est qu'un ensemble semialgébrique localement compact est Euler en codimension 1 si et seulement s'il admet une classe fondamentale pour l'homologie de Borel-Moore à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  ([84, Remark 1.5]).

Les catégories constructibles admettent une notion d'adhérence qui se comporte bien avec la dimension.

**Théorème 1.5.15** ([84, Theorem 2.5]). *Soient  $C$  une catégorie constructible et  $X$  un ensemble localement fermé de  $C$ . Alors toute partie  $A$  de  $X$  admet un plus petit sous-ensemble de  $X$  contenant  $A$  et appartenant à  $C$ . On le note  $\overline{A}^C$ . Tout autre sous-ensemble de  $X$  appartenant à  $C$  et contenant  $A$  contient forcément  $\overline{A}^C$ .*

**Remarque 1.5.16** ([84, Remark 2.7]). Si  $A$  est semialgébrique alors  $\dim A = \dim \overline{A}^C$ . De plus, si  $A$  appartient à  $C$  alors  $\overline{A}^C = A \cup \overline{(A \setminus A)}^C$ , en particulier  $\dim(\overline{A}^C \setminus A) < \dim A$ .

**Remarque 1.5.17** ([84, p361]). L'adhérence de la catégorie constructible  $\mathcal{AC}$  ne coïncide pas avec l'adhérence de Zariski. Plus précisément, si  $A$  est un sous-ensemble semialgébrique d'un ensemble algébrique réel, on a forcément  $\overline{A} \subset \overline{A}^{\mathcal{AC}} \subset \overline{A}^{\text{Zar}}$  mais ces inclusions peuvent être strictes.

Par exemple si  $A$  est la partie non-singulière en dimension maximale du parapluie de Whitney  $\{zx^2 = y^2\} \subset \mathbb{R}^3$  alors  $\overline{A} \subsetneq \overline{A}^{\mathcal{AC}} = \overline{A}^{\text{Zar}}$ .

Par exemple si  $A$  est la partie non-singulière en dimension maximale du parapluie de Cartan  $\{z(x^2 + y^2) = x^3\} \subset \mathbb{R}^3$  alors  $\overline{A} = \overline{A}^{\mathcal{AC}} \subsetneq \overline{A}^{\text{Zar}}$ .

#### 1.5.4 La collection $\mathcal{AS}$

Nous allons principalement travailler avec une notion légèrement différente de celle d'ensemble symétrique par arcs. Il s'agit de la notion d'ensemble  $\mathcal{AS}$  définie par A. Parusiński [84].

**Définition 1.5.18.** La collection  $\mathcal{AS}$  est l'algèbre booléenne engendrée par les ensembles symétriques par arcs d'un espace projectif\*  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .

On obtient la définition équivalente suivante.

**Proposition 1.5.19** ([84, §4.2]). *Une partie  $S$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  est un ensemble  $\mathcal{AS}$  si et seulement si elle est semialgébrique et vérifie la propriété suivante : pour tout arc analytique réel  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  tel que  $\gamma((-1, 0)) \subset S$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\gamma((0, \varepsilon)) \subset S$ .*

**Remarque 1.5.20.** Les ensembles  $\mathcal{AS}$  fermés pour la topologie ambiante sont les ensembles symétriques par arcs de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .

L'exemple suivant montre que les ensembles  $\mathcal{AS}$  ont un meilleur comportement à l'infini que les ensembles symétriques par arcs.

**Exemple 1.5.21** ([84, §4.2]). La branche d'hyperbole  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1, x > 0\}$  est symétrique par arcs cependant il ne s'agit pas d'un ensemble  $\mathcal{AS}$  puisque si l'on voit cette branche dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , il existe un arc analytique réel qui se prolonge sur l'autre branche.

Le théorème suivant est un analogue  $\mathcal{AS}$  du théorème 1.5.5. Il se démontre de façon similaire, comme on le voit dans la démonstration de [84, Theorem 2.5].

\*Par [17, Theorem 3.4.4],  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  est birégulièrement isomorphe à un ensemble algébrique d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ .

**Théorème 1.5.22.** *Les ensembles  $\mathcal{AS}$  fermés pour la topologie ambiante sont exactement les fermés d'une topologie noethérienne sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .*

Un autre avantage de la collection  $\mathcal{AS}$  est qu'il s'agit d'une catégorie constructible.

**Théorème 1.5.23** ([84, Theorem 4.5 & Proposition 4.6]).

*La collection  $\mathcal{AS}$  est une catégorie constructible. C'est d'ailleurs la plus grande au sens où toute catégorie constructible est contenue dans  $\mathcal{AS}$ . C'est aussi la seule catégorie constructible à contenir les composantes connexes des ensembles algébriques réels compacts.*

En particulier, l'image injective d'un ensemble  $\mathcal{AS}$  par une application (dont le graphe est)  $\mathcal{AS}$  est un ensemble  $\mathcal{AS}$ . Contrairement au cas  $\mathcal{AR}$  (voir la proposition 1.5.9), il n'y a pas besoin d'hypothèse de propreté. L'exemple suivant montre que cette hypothèse n'est pas superflue lorsque l'on travaille avec les ensembles symétriques par arcs.

**Exemple 1.5.24** ([69, Remark 3.6]). L'image de la branche d'hyperbole  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1, x > 0\}$  par la projection sur la première coordonnée n'est clairement pas symétrique par arcs.

Enfin, l'énoncé suivant, qui nous sera utile dans la suite, se déduit facilement de [84, Theorem 4.3]. On peut le voir comme un analogue du théorème de Chevalley qui stipule que, sur un corps algébriquement clos, l'image d'un ensemble Zariski-constructible par une application régulière est un ensemble Zariski-constructible.

**Théorème 1.5.25.** *L'image d'un ensemble  $\mathcal{AS}$  par une application régulière dont chaque fibre a une caractéristique d'Euler à support compact impaire est un ensemble  $\mathcal{AS}$ .*

## 1.6 Polynôme de Poincaré virtuel

C. McCrory et A. Parusiński [76] ont démontré qu'il existe un unique invariant additif des variétés algébriques réelles qui coïncide avec le polynôme de Poincaré pour l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  pour les variétés compactes et non-singulières.

Ce polynôme de Poincaré virtuel a été étendu aux ensembles  $\mathcal{AS}$  à isomorphisme Nash près par G. Fichou [32].

Ces constructions reposent sur le théorème de factorisation faible [103, 3] de façon à décrire le groupe de Grothendieck des variétés algébriques réelles grâce aux éclatements comme le fait F. Bittner [15]\*.

À l'aide d'une nouvelle construction, C. McCrory et A. Parusiński [78] ont démontré que le polynôme de Poincaré virtuel des ensembles  $\mathcal{AS}$  est en fait un invariant des ensembles  $\mathcal{AS}$  à bijection  $\mathcal{AS}$  près.

**Théorème 1.6.1** ([76],[32],[78]). *Il existe une unique application  $\beta : \mathcal{AS} \rightarrow \mathbb{Z}[u]$ , nommée le polynôme de Poincaré virtuel, telle que*

$$\bullet \beta \left( \bigsqcup_{i=1}^k X_i \right) = \sum_{i=1}^k \beta(X_i)$$

\*Elle a démontré que  $K_0(\text{Var}_k)$  était le groupe libre abélien engendré par les symboles  $[X]$  où  $X$  est une variété projective non-singulière avec les relations  $0 = [\emptyset]$  et  $[\text{Bl}_Y X] - [E] = [X] - [Y]$  où  $\text{Bl}_Y X$  est l'éclatement d'une variété projective non-singulière le long d'une sous-variété fermée non-singulière  $Y$  avec  $E$  le diviseur exceptionnel de cet éclatement.

- $\beta(X \times Y) = \beta(X)\beta(Y)$
- Si  $X \neq \emptyset$  alors  $\deg \beta(X) = \dim X$  et le coefficient dominant de  $\beta(X)$  est strictement positif<sup>\*</sup>.
- Si  $X$  est non-singulier et compact alors  $\beta(X)$  est le polynôme de Poincaré à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  de  $X$  donné par  $\sum_i \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2)u^i$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont AS-isomorphes<sup>†</sup> alors  $\beta(X) = \beta(Y)$ .

**Remarque 1.6.2.** Remarquons que si l'on oublie l'hypothèse de symétrie par arcs pour travailler avec tous les ensembles semialgébriques à homéomorphismes semialgébriques près, tout invariant additif se factorise par la caractéristique d'Euler à support compact<sup>‡</sup> [89]. Or cette dernière est un invariant qui perd beaucoup d'information.

Le polynôme de Poincaré virtuel, qui encode la dimension, est donc un invariant très perfectionné. Ces bonnes propriétés nous permettent de l'utiliser pour adapter à la géométrie réelle des arguments provenant de l'intégration motivique.

**Exemple 1.6.3.** Par l'avant dernier point nous avons  $\beta(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) = u + 1$  et  $\beta(\text{pt}) = 1$  donc  $\beta(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) - \beta(\text{pt}) = u$ .

L'exemple suivant montre que le polynôme de Poincaré virtuel n'est pas un invariant topologique.

**Exemple 1.6.4** ([76]). Si on éclate la courbe "en huit"  $H = \{y^2 = x^2 - x^4\}$  en l'origine, la transformée stricte est un cercle et l'image inverse de l'origine est constituée de deux points. Ainsi  $\beta(\mathbb{S}^1) - 2\beta(\text{pt}) = \beta(H) - \beta(\text{pt})$  donc  $\beta(H) = u$ .

Si on éclate les deux cercles tangents en l'origine  $T = \{((x+1)^2 + y^2 - 1)((x-1)^2 + y^2 - 1) = 0\}$ , la transformée stricte est constituée de deux cercles et l'image inverse de l'origine est constituée de deux points. Ainsi  $2\beta(\mathbb{S}^1) - 2\beta(\text{pt}) = \beta(T) - \beta(\text{pt})$  donc  $\beta(T) = 2u + 1$ .

## 1.7 Applications Nash

Les applications Nash et les variétés Nash ont d'abord été étudiées par J. Nash [79] où il considérait des fonctions analytiques réelles vérifiant des équations polynomiales non-triviales. Cette notion lui permet de démontrer, dans ce même article, qu'une sous-variété  $C^\infty$  compacte connexe est difféomorphe à une composante connexe non-singulière d'un ensemble algébrique réel. Ce théorème a ensuite été amélioré par A. Tognoli [98] : une sous-variété  $C^\infty$  compacte est difféomorphe à un ensemble algébrique réel non-singulier.

M. Artin et B. Mazur [7] ont donné une nouvelle description des fonctions Nash afin de définir une notion abstraite de variété Nash. Cette description nous sera utile dans la suite.

L'utilisation de la géométrie Nash est justifiée par le fait qu'elle partage de bonnes propriétés algébriques avec les fonctions polynomiales et de bonnes propriétés géométriques

<sup>\*</sup>  $\beta(\emptyset) = 0$

<sup>†</sup> i.e. s'il existe une bijection entre  $X$  et  $Y$  dont le graphe est AS.

<sup>‡</sup> Plus précisément, le groupe de Grothendieck des ensembles semialgébriques à homéomorphismes semialgébriques près est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  via la caractéristique d'Euler à support compact. Ce phénomène est dû au fait qu'un ensemble semialgébrique admet une décomposition cellulaire. Plus formellement, tout ensemble semialgébrique s'écrit comme une union finie disjointe de semialgébriques, chacun étant semialgébriquement homéomorphe à une cellule de la forme  $(0, 1)^d$ . On conclut en remarquant que l'on peut recouvrir  $(0, 1)^d$  par deux ensembles semialgébriques semialgébriquement homéomorphes à  $(0, 1)^d$  et dont l'intersection est semialgébriquement homéomorphe à  $(0, 1)^{d-1}$ .



avec la géométrie analytique réelle. En particulier, il existe un théorème des fonctions implicites et un théorème d'inversion locale pour les fonctions Nash [17, Proposition 2.9.7 & Corollary 2.9.8]. Nous renvoyons le lecteur à [17, §8] et [95] pour de plus amples détails.

**Définition 1.7.1** ([79]). Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert semialgébrique. Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *Nash* si elle vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes :

1.  $f$  est semialgébrique et  $C^\infty$ .
2.  $f$  est analytique et vérifie une équation polynomiale non-triviale.

**Définition 1.7.2.** Une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur un ouvert semialgébrique est Nash si ses fonctions coordonnées le sont.

**Définition 1.7.3.** Une *sous-variété Nash de dimension  $d$*  est un ensemble semialgébrique  $M$  de  $\mathbb{R}^p$  tel que tout  $x \in M$  admet un voisinage ouvert semialgébrique qui redresse  $M$  i.e. il existe  $U$  un voisinage ouvert semialgébrique de l'origine dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $V$  un voisinage ouvert semialgébrique de  $x$  dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\varphi : V \rightarrow U$  un difféomorphisme Nash qui vérifie  $\varphi(x) = 0$  et  $\varphi(M \cap V) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ .

**Exemple 1.7.4.** Par le critère Jacobien et la version Nash du théorème des fonctions implicites, un ensemble algébrique réel non-singulier a une structure naturelle de sous-variété Nash.

**Théorème 1.7.5** (Description de Artin-Mazur [7] [17, Theorem 8.4.4]). Soit  $M \subset \mathbb{R}^p$  une sous-variété Nash semialgébriquement connexe de dimension  $n$ . Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application Nash. Alors il existe un ensemble algébrique irréductible non-singulier  $V \subset \mathbb{R}^{p+q}$  de dimension  $n$ , un ouvert semialgébrique  $M'$  de  $V$ , un difféomorphisme Nash  $\sigma : M \rightarrow M'$  et une application polynomiale  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{p+q} & \longleftarrow & V \\
 \downarrow \Pi & & \downarrow \sigma \\
 \mathbb{R}^p & \longleftarrow & M \\
 & & \uparrow \sigma \\
 & & M' \\
 & & \downarrow g \\
 & & \mathbb{R}^k
 \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The original diagram shows a square with  $\mathbb{R}^{p+q}$  at the top-left,  $V$  at the top-right,  $\mathbb{R}^p$  at the bottom-left, and  $M$  at the bottom-right. Arrows:  $\mathbb{R}^{p+q} \leftarrow V$ ,  $\mathbb{R}^p \leftarrow M$ ,  $\mathbb{R}^{p+q} \rightarrow V$  (downward),  $\mathbb{R}^p \rightarrow M$  (downward),  $V \rightarrow \mathbb{R}^k$  (diagonal down-right),  $M \rightarrow \mathbb{R}^k$  (diagonal down-right),  $V \rightarrow M'$  (upward),  $M' \rightarrow M$  (downward),  $M' \rightarrow \mathbb{R}^k$  (diagonal down-right). Labels:  $\Pi$  on the left vertical arrow,  $\sigma$  on the middle vertical arrow,  $g$  on the top-right diagonal arrow,  $f$  on the bottom-right diagonal arrow.)

où  $\Pi$  est la projection sur les  $p$  premières coordonnées.

De plus  $M'$  est une composante semialgébriquement connexe de  $\Pi^{-1}(M) \cap V$ .

## 1.8 Équivalence blow-Nash et fonctions zêta de Fichou

G. Fichou [32] introduit des fonctions zêta similaires à celles de Koike–Parusiński en utilisant le polynôme de Poincaré virtuel pour les ensembles  $\mathcal{AS}$ . L'intérêt évident est que cet invariant encode plus d'information que la caractéristique d'Euler à support compact, mais, il faut cependant se restreindre aux ensembles  $\mathcal{AS}$  (et non plus aux ensembles simplement semialgébriques). Cet inconvénient est difficilement surmontable puisque l'on sait que le seul invariant additif des ensembles semialgébriques est la caractéristique d'Euler à support compact.

Il faut donc prendre certaines précautions pour s'assurer que tous les objets sont  $\mathcal{AS}$ . En particulier, dans les définitions des fonctions zêta, il faut demander à ce que la composante angulaire vaille 1 ou  $-1$  et non plus seulement fixer son signe. Aussi, pour que les

composantes irréductibles provenant d'une résolution soient  $\mathcal{AS}$ , il faudra se restreindre à des fonctions Nash afin d'obtenir une formule de rationalité.

Enfin, il introduit dans ce même article [32] une notion légèrement plus algébrique de l'équivalence blow-analytique, il s'agit de l'équivalence blow-Nash dont les fonctions zêta de G. Fichou sont des invariants. Le problème étant qu'on ne sait pas s'il s'agit d'une relation d'équivalence. C'est pourquoi il donne une définition plus générale de la notion d'équivalence blow-Nash dans l'article [33]. Avec cette nouvelle définition, on obtient facilement une relation d'équivalence mais dont les fonctions zêta de G. Fichou ne sont pas des invariants en toute généralité mais dont on peut déduire quelques invariants [33, Proposition 2.6, Proposition 3.2 & Theorem 3.4]. Dans les articles suivants [34, 35, 36], il utilise une définition à mi-distance entre les deux dernières notions dont ses fonctions zêta sont bien des invariants, mais dont on ne sait pas s'il s'agit d'une relation d'équivalence. C'est cette notion que nous étudierons à la section 3.7.

Pour des raisons de simplicité, nous avons fait le choix de seulement présenter dans cette section la première définition de l'équivalence blow-Nash ([32]).

**Définition 1.8.1.** Soit  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction analytique. Pour  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , on pose

$$\mathfrak{X}_n(f) = \{ \gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = ct^n + \dots, c \neq 0 \}$$

$$\mathfrak{X}_n^+(f) = \{ \gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = t^n + \dots \}$$

$$\mathfrak{X}_n^-(f) = \{ \gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = -t^n + \dots \}$$

et on définit la fonction zêta naïve par

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\mathfrak{X}_n(f)) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$$

ainsi que les fonctions zêta équivariantes par

$$Z_f^+(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\mathfrak{X}_n^+(f)) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$$

$$Z_f^-(T) = \sum_{n \geq 1} \beta(\mathfrak{X}_n^-(f)) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$$

**Remarque 1.8.2.** Comme les fonctions zêta de Koike–Parusiński, les fonctions zêta de Fichou sont locales.

**Théorème 1.8.3** ([32, Proposition 3.2 & Proposition 3.5]). Soit  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction Nash. Il existe\*  $\sigma : (M, \sigma^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  une suite finie d'éclatements algébriques à centres non-singuliers telle que  $f \circ \sigma$  et le déterminant jacobien  $\text{Jac } \sigma$  soient simultanément à croisements normaux et telle que  $\sigma$  soit un isomorphisme en dehors du lieu d'annulation de  $f$ . On note  $(E_i)_{i \in J}$  les composantes irréductibles de  $(f\sigma)^{-1}(0)$  et, pour  $i \in J$ ,

$$N_i = \text{mult}_{E_i} f\sigma \quad \text{et} \quad v - 1 = \text{mult}_{E_i} \text{Jac } \sigma$$

Alors

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} (u-1)^{|I|} \beta(E_I^\bullet \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-v_i} T^{N_i}}{1 - u^{-v_i} T^{N_i}}$$

\*Proposition 3.2.12.

et, pour  $\varepsilon \in \{-, +\}$ ,

$$Z_f^\varepsilon(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} (u-1)^{|I|-1} \beta\left(\widetilde{E}_I^\bullet \cap \sigma^{-1}(0)\right) \prod_{i \in I} \frac{u^{-v_i} T^{N_i}}{1 - u^{-v_i} T^{N_i}}$$

Nous renvoyons à [32, Lemma 3.12] pour la définition de  $\widetilde{E}_I^\bullet$ .

**Remarque 1.8.4** ([32, Remark 3.3]). Dans le Théorème 1.8.3, il est nécessaire de supposer que  $f$  est Nash de sorte que les  $E_I^\bullet$  soient AS afin de pouvoir calculer  $\beta(E_I^\bullet)$ .

La définition suivante de l'équivalence blow-Nash est une version algébrique de la caractérisation donnée à la Proposition 1.1.16 de l'équivalence blow-analytique.

**Définition 1.8.5** ([32, Definition 4.1]). Deux germes Nash  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  sont *blow-Nash équivalents* s'il existe deux morphismes algébriques propres et birationnels

$$\sigma_f : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \quad \text{et} \quad \sigma_g : (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$$

tels que  $f \circ \sigma_f, g \circ \sigma_g$  et  $\text{Jac}_{\sigma_f}, \text{Jac}_{\sigma_g}$  soient à croisements normaux, un isomorphisme Nash

$$\Phi : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (M_g, \sigma_g^{-1}(0))$$

qui préserve les multiplicités de  $\text{Jac}_{\sigma_f}$  et  $\text{Jac}_{\sigma_g}$  le long des composantes irréductibles des lieux exceptionnels et qui induit un homéomorphisme  $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{\Phi} & (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \\ \sigma_f \downarrow & & \downarrow \sigma_g \\ (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^d, 0) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & (\mathbb{R}, 0) & \end{array}$$

**Remarque 1.8.6.** On ne sait pas si la relation d'équivalence blow-Nash est une relation d'équivalence.

Les formules de rationalité des fonctions zêta de Fichou permettent de démontrer qu'il s'agit d'invariants pour la relation d'équivalence blow-Nash.

**Théorème 1.8.7** ([32, Theorem 4.8]). Si  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  sont *blow-Nash équivalents* alors

$$Z_f = Z_g \quad Z_f^+ = Z_g^+ \quad Z_f^- = Z_g^-$$

Pour clore cette section, remarquons que l'on ne connaît pas de formule de convolution pour les fonctions zêta de Fichou. En effet, la formule de convolution pour la fonction zêta équivariante de Denef–Loeser à coefficients dans le groupe de Grothendieck équivariant pour les racines de l'unité utilise un produit défini via un quotient, la formule de convolution pour la fonction zêta équivariante à coefficients dans le groupe de Grothendieck de Guibert–Loeser–Merle utilise le fait que ce groupe de Grothendieck "encode" les morphismes "composantes angulaires" et enfin la formule de convolution pour les fonctions

zêta équivariantes de Koike–Parusiński repose sur le fait que les caractéristiques d’Euler à support compact des termes qui posent problème s’annulent.

Nous proposerons dans le Chapitre 3 une adaptation du groupe de Grothendieck de Guibert–Loeser–Merle aux ensembles  $\mathcal{AS}$  à  $\mathcal{AS}$ -isomorphisme près de façon à obtenir une formule de convolution pour une version plus abstraite des fonctions zêta de Fichou.

## 1.9 Présentation des résultats

### 1.9.1 Un théorème d’inversion pour les applications blow-Nash

Nous commençons le Chapitre 2 en introduisant la notion de fonction génériquement analytique par arcs. Il s’agit d’une généralisation naturelle des fonctions analytiques par arcs permettant d’élargir le Théorème 1.2.6 de Bierstone–Milman ([12, Theorem 1.1]) aux ensembles algébriques singuliers.

**Définition 1.9.1.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux ensembles algébriques est génériquement analytique par arcs s’il existe un sous-ensemble algébrique  $S$  de  $X$  nulle part dense tel que pour tout arc analytique réel  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$  non entièrement inclus dans  $S$ , la composition  $f\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Y$  est analytique.

Si  $X$  est non-singulier alors toute application  $f : X \rightarrow Y$  semialgébrique, continue et génériquement analytique par arcs est analytique par arcs (Lemme 2.2.23). L’idée de la démonstration repose sur le fait que seuls deux phénomènes peuvent empêcher  $f\gamma$  d’être analytique : soit un de ses deux développements de Puiseux (à droite ou à gauche de l’origine) admet une puissance rationnelle non-entière, soit ils ne se recollent pas en l’origine. On conclut alors en montrant que si un arc analytique entièrement inclus dans l’ensemble  $S$  de la définition ne s’envoie pas sur un arc analytique par composition, on peut le perturber afin de lui faire quitter  $S$  de sorte qu’un des deux phénomènes précédents persiste.

Cette observation permet alors d’étendre facilement le Théorème 1.2.6 de Bierstone–Milman ([12, Theorem 1.1]) aux ensembles algébriques singuliers. C’est la proposition 2.2.27.

**Proposition 1.9.2.** Une application  $f$  semialgébrique continue est génériquement analytique par arcs si et seulement si elle est blow-Nash, c’est-à-dire s’il existe  $h$  une suite finie d’éclatements algébriques à centres non-singuliers telle que  $f \circ h$  soit Nash.

Ensuite, dans la Section 2.2.4, nous donnons quelques propriétés des espaces de jets et d’arcs analytiques sur un ensemble algébrique réel. Ces notions seront utiles à la démonstration du Théorème Principal 2.3.5 du Chapitre 2. Ce théorème stipule que sous des hypothèses analogues à celles du théorème d’inversion locale classique, l’inverse d’un homéomorphisme semialgébrique blow-Nash est encore blow-Nash.

Plus précisément, si  $f : X \rightarrow X$  est une application blow-Nash où  $X$  est un ensemble algébrique, il existe une suite finie  $\sigma : M \rightarrow X$  d’éclatements algébriques à centres non-singuliers telle que  $\tilde{\sigma} = f\sigma$  soit Nash. On dit que  $f$  vérifie l’hypothèse jacobienne si l’idéal jacobien de  $\sigma$  est inclus dans l’idéal jacobien de  $\tilde{\sigma}$ . Lorsque  $X$  est non-singulier, cette hypothèse signifie simplement qu’il existe  $c > 0$  tel que  $|\det df| > c$  où  $df$  est bien définie\*.

\*Une application analytique par arcs est non-singulière en dehors d’un ensemble de codimension 2 [67, Théorème 5.2].

**Théorème 1.9.3.** *Soit  $X$  un ensemble algébrique et  $f : X \rightarrow X$  un homéomorphisme semialgébrique. Si  $f$  est blow-Nash et vérifie l'hypothèse jacobienne alors  $f^{-1}$  est blow-Nash et vérifie l'hypothèse jacobienne.*

Une des difficultés de l'équivalence blow-analytique est de construire un homéomorphisme étant blow-analytique et dont la réciproque est blow-analytique. Actuellement, on construit principalement de telles applications en intégrant des champs de vecteurs convenablement choisis. Le théorème précédent permet, avec une hypothèse de semialgèbricité supplémentaire, de donner un critère pour que la réciproque d'un homéomorphisme blow-Nash soit blow-Nash. En particulier, nous utiliserons ce théorème au Chapitre 3 pour montrer que la notion d'équivalence blow-Nash que nous introduirons alors est bien une relation d'équivalence.

La démonstration de ce théorème utilise des arguments provenant de l'intégration motivique. En particulier, nous partitionnons l'espace des jets de façon similaire à [40]. Pour cela, nous avons besoin d'une nouvelle adaptation du lemme clé 1.3.36 ([26, Lemma 3.4]) à la géométrie réelle, dans le cas singulier cette fois. Remarquons que cette adaptation s'étend aux applications Nash génériquement injectives et non pas seulement aux applications birationnelles.

### 1.9.2 Une fonction zêta motivique pour l'équivalence blow-Nash

Les fonctions zêta à signe de Koike–Parusiński admettent une formule de convolution permettant de classifier les polynômes de Brieskorn à deux variables. Cependant leurs coefficients sont définis à l'aide de la caractéristique d'Euler à support compact qui s'avère être un invariant assez naïf. Les coefficients des fonctions zêta de Fichou proviennent du polynôme de Poincaré virtuel qui est un invariant plus riche (il encode en particulier la dimension) mais nous ne connaissons pas de formule de convolution pour ces dernières fonctions zêta.

Dans le Chapitre 3, nous introduisons une nouvelle fonction zêta. Cette dernière admet une formule de convolution permettant de calculer la fonction zêta de  $f \oplus g$  à partir des fonctions zêta de  $f$  et de  $g$ . D'autre part ses coefficients ne perdent pas trop d'information : ils peuvent en particulier être réalisés via le polynôme de Poincaré virtuel de sorte à récupérer le degré.

Pour cela, nous adaptons la définition du groupe de Grothendieck de Guibert–Loeser–Merle de sorte à obtenir un groupe de Grothendieck équivariant pour les ensembles  $\mathcal{AS}$  à bijection  $\mathcal{AS}$  près qui encode les morphismes “composantes angulaires”.

**Définition 1.9.4.** On note  $K_0^n$  le groupe libre abélien engendré par les symboles

$$[\varphi : \mathbb{R}^* \circlearrowleft X \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

où  $X$  est un ensemble  $\mathcal{AS}$ , où le graphe de l'action de  $\mathbb{R}^*$  sur  $X$  est  $\mathcal{AS}$  et où  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  est une application dont le graphe est  $\mathcal{AS}$  et vérifiant  $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda^n \varphi(x)$  modulo les relations suivantes :

- (i) S'il existe une bijection équivariante  $h : X \rightarrow Y$  dont le graphe est  $\mathcal{AS}$  telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \varphi_X \searrow & & \swarrow \varphi_Y \\ & \mathbb{R}^* & \end{array}$$

alors

$$[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circ X \rightarrow \mathbb{R}^*] = [\varphi_Y : \mathbb{R}^* \circ Y \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

(ii) Si  $Y \subset X$  est un sous-ensemble  $\mathcal{AS}$ -fermé de  $X$  invariant pour l'action de  $\mathbb{R}^*$  alors

$$[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circ X \rightarrow \mathbb{R}^*] = [\varphi_{X|X \setminus Y} : \mathbb{R}^* \circ X \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}^*] + [\varphi_{X|Y} : \mathbb{R}^* \circ Y \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

(iii) Si les actions  $\sigma, \sigma'$  relèvent une même action sur  $Y$  alors

$$[\varphi : \mathbb{R}^* \circ_{\sigma} Y \times \mathbb{R}^m \rightarrow Y \rightarrow \mathbb{R}^*] = [\varphi : \mathbb{R}^* \circ_{\sigma'} Y \times \mathbb{R}^m \rightarrow Y \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

Le produit fibré induit une structure d'anneau et le produit cartésien une structure de  $K_0(\mathcal{AS})$ -algèbre :

$$(iv) [\varphi_X \times_{\mathbb{R}^*} \varphi_Y] = [\varphi_X][\varphi_Y]$$

$$(v) [A][\varphi : \mathbb{R}^* \circ X \rightarrow \mathbb{R}^*] = [\varphi : \mathbb{R}^* \circ A \times X \rightarrow X \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

On note  $\mathbb{1}_n = [\text{id} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*]$  l'unité du produit,  $0 = [\emptyset]$  l'unité de l'addition et  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{K_0(\mathcal{AS})} \mathbb{1} = [\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*]$  la classe de la droite affine.

On note  $K_0 = \varinjlim K_0^n$  et  $\mathcal{M} = K_0[\mathbb{L}^{-1}]$ .

Soit  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction analytique réelle. Pour  $n \geq 1$ , on note

$$\mathfrak{X}_n(f) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = ct^n + \dots, c \neq 0\}$$

avec le morphisme "composante angulaire"  $\text{ac}_f^n : \mathfrak{X}_n(f) \rightarrow \mathbb{R}^*$  donné par  $\gamma \mapsto \text{ac}(f\gamma)$  et l'action de  $\mathbb{R}^*$  définie par  $\lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$ .

La fonction zêta de  $f$  est alors définie par l'égalité suivante

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} [\text{ac}_f^n : \mathbb{R}^* \circ \mathfrak{X}_n(f) \rightarrow \mathbb{R}^*] \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}[[T]]$$

Les morphismes  $\text{ac}_f^n$  permettent de retrouver les fonctions zêta de Koike–Parusiński et de Fichou. En particulier, nous retrouverons certains de leurs résultats.

Lorsque  $f$  est Nash, la fonction zêta admet une expression rationnelle en terme de résolution.

**Théorème 1.9.5.** *Soit  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction Nash. Il existe  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}^d$  une suite finie d'éclatements algébriques à centres non-singuliers telle que  $f \circ \sigma$  et le déterminant jacobien  $\text{Jac}_{\sigma}$  soient simultanément à croisements normaux et telle que  $\sigma$  soit un isomorphisme en dehors du lieu d'annulation de  $f$ . On note  $(E_i)_{i \in A}$  les composantes irréductibles de  $(f\sigma)^{-1}(0)$  et, pour  $i \in A$ ,*

$$N_i = \text{mult}_{E_i} f\sigma \quad \text{et} \quad \nu - 1 = \text{mult}_{E_i} \text{Jac } \sigma$$

Pour  $I \subset A$  non vide, il existe  $p_I : U_I \rightarrow E_I^{\bullet} = \bigcap_{i \in I} E_i \setminus \bigcup_{j \notin I} E_j$  un fibré localement trivial de fibre  $(\mathbb{R}^*)^{|I|}$  de sorte que  $f$  induise un morphisme  $f_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^*$  définissant un motif dans  $K_0$ . Alors

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}$$

Nous introduisons ensuite la fonction zêta modifiée

$$\tilde{Z}_f(T) = Z_f(T) - \frac{Z_f^{\text{naive}}(T) - 1}{T - 1} + 1$$

où  $Z_f^{\text{naive}}(T)$  est une version de la fonction zêta qui n'encode que l'ensemble  $\mathfrak{X}_n(f)$  sans action et sans morphisme composante angulaire. On peut aussi exprimer la fonction zêta en terme de la fonction zêta modifiée

$$Z_f(T) = \tilde{Z}_f(T) + \frac{\tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T) - \mathbb{1}}{T - \mathbb{1}} - \mathbb{1}$$

Le Théorème Principal 3.6.13 de ce chapitre permet alors de calculer la fonction zêta modifiée de  $f \oplus g$  à partir des fonctions zêta modifiées de  $f$  et de  $g$  à l'aide d'un certain produit de convolution  $* : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ayant de bonnes propriétés : il est associatif, commutatif,  $K_0(\mathcal{AS})[[\mathbb{L}_{\mathcal{AS}}^{-1}]]$ -bilinéaire et admet  $\mathbb{1}$  comme unité.

**Théorème 1.9.6.** Soient  $f_1 : (\mathbb{R}^{d_1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  et  $f_2 : (\mathbb{R}^{d_2}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  deux fonctions Nash. On note  $f_1 \oplus f_2 : (\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  la fonction définie par  $f_1 \oplus f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ . Alors

$$\tilde{Z}_{f_1 \oplus f_2}(T) = -\tilde{Z}_{f_1}(T) \otimes \tilde{Z}_{f_2}(T)$$

où le produit  $\otimes$  consiste à appliquer le produit  $*$  coefficient par coefficient.

La démonstration utilise des résolutions pour nous ramener à des fonctions à croisements normaux. On distingue alors plusieurs cas selon que les composantes angulaires s'annulent ou ne s'annulent pas.

Nous ne savons pas si l'équivalence blow-Nash au sens de [32] donnée à la Définition 1.8.5 est une relation d'équivalence. L'argument utilisé pour démontrer la transitivité de l'équivalence blow-analytique n'est plus valide puisque le produit fibré d'une application Nash et d'une application régulière peut ne pas être algébrique.

Ainsi, pour pallier ce problème, G. Fichou [33] propose ensuite la définition suivante faisant intervenir exclusivement des applications Nash.

**Définition 1.9.7** ([33, Definition 1.1]). Deux germes Nash  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  sont *blow-Nash équivalents* au sens de [33] s'il existe deux modifications Nash

$$\sigma_f : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0) \quad \text{et} \quad \sigma_g : (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$$

et un isomorphisme Nash

$$\Phi : (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) \rightarrow (M_g, \sigma_g^{-1}(0))$$

qui induit un homéomorphisme  $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (M_f, \sigma_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{\Phi} & (M_g, \sigma_g^{-1}(0)) \\ \sigma_f \downarrow & & \downarrow \sigma_g \\ (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^d, 0) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & (\mathbb{R}, 0) & \end{array}$$

Cette nouvelle relation est bien une relation d'équivalence mais les fonctions zêta de Fichou ne sont pas des invariants de cette relation puisque l'on n'impose pas que  $\Phi$  préserve les multiplicités des déterminants jacobiens de  $\sigma_f$  et  $\sigma_g$  le long des diviseurs exceptionnels de  $\sigma_f$  et  $\sigma_g$ . Lorsque l'on impose cette condition, on dit que  $f$  et  $g$  sont blow-Nash

équivalents via un blow-Nash isomorphisme au sens de [33]. C'est cette notion d'équivalence blow-Nash que l'on utilise désormais [34, 35, 36] afin de pouvoir utiliser les fonctions zêta de Fichou comme invariants. Cependant, nous ne savons pas si l'équivalence blow-Nash via un blow-Nash isomorphisme au sens de [33] est une relation d'équivalence.

Nous proposons une nouvelle définition de l'équivalence blow-Nash, qui est équivalente à cette dernière notion, mais dont on sait démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Cette nouvelle définition a aussi l'avantage de ne pas faire intervenir de modification Nash ou d'éclatement algébrique.

**Définition 1.9.8.** On dit que deux germes Nash  $f_i : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ,  $i = 1, 2$ , sont blow-Nash équivalents s'il existe  $h : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  un homéomorphisme semialgébrique et arc-analytique tel qu'il existe  $c > 0$  vérifiant  $|\det dh| > c$  où  $dh$  est définie et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{h} & (\mathbb{R}^d, 0) \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & (\mathbb{R}, 0) & \end{array}$$

**Remarque 1.9.9.** D'après le Théorème 1.2.6,  $h$  est blow-Nash si et seulement si  $h$  est arc-analytique et semialgébrique.

**Remarque 1.9.10.** Le théorème principal du Chapitre 2 permet de vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Cette définition est équivalente à la notion actuelle d'équivalence blow-Nash. Plus précisément :

**Proposition 1.9.11.** Deux germes Nash sont blow-Nash équivalents si et seulement s'ils sont blow-Nash équivalents via un isomorphisme blow-Nash au sens de [33].

**Corollaire 1.9.12.** L'équivalence blow-Nash via un isomorphisme blow-Nash au sens de [33] est une relation d'équivalence.

La formule de rationalité de la fonction zêta permet alors de montrer qu'il s'agit d'un invariant pour l'équivalence blow-Nash.

**Théorème 1.9.13.** Si deux germes Nash  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  sont blow-Nash équivalents alors

$$Z_f(T) = Z_g(T)$$

À l'aide des invariants de Fukui et de leurs fonctions zêta, S. Koike et A. Parusiński ont donné une classification blow-analytique des polynômes de Brieskorn à deux variables. En utilisant ses fonctions zêta, G. Fichou a donné une classification blow-Nash des polynômes de Brieskorn à trois variables. La formule de convolution de ce chapitre permet de démontrer que l'ensemble des degrés des monômes purs d'un polynôme de Brieskorn est un invariant de l'équivalence blow-Nash.

**Proposition 1.9.14.** Soient

$$f(x) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i x_i^{k_i} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^d \eta_i x_i^{l_i}$$

deux polynômes de Brieskorn avec  $\varepsilon_i, \eta_i \in \{\pm 1\}$ . On peut supposer que  $k_1 \leq \dots \leq k_d$  (resp.  $l_1 \leq \dots \leq l_d$ ). Si  $f$  et  $g$  sont blow-Nash équivalents alors pour tout  $i = 1, \dots, d$  on a  $k_i = l_i$ .



## 1.10 Perspectives

### 1.10.1 Une réalisation de l'anneau $\mathcal{M}$

Les anneaux  $K_0^n$ ,  $K_0$  et  $\mathcal{M}$ , bien qu'utiles à la théorie, sont compliqués et nous ne connaissons que très peu de leurs propriétés. Nous cherchons donc des réalisations, c'est-à-dire des morphismes d'anneaux  $A \rightarrow B$  où  $A = K_0^n, K_0, \mathcal{M}$  et où  $B$  est un anneau bien connu (par exemple un anneau de polynômes). Il est aussi nécessaire que de telles réalisations ne soient pas trop naïves au sens où l'image d'un tel morphisme doit conserver un maximum d'information (par exemple le morphisme composante angulaire et/ou l'action).

Actuellement, nous profitons de la richesse de la structure de ces anneaux pour réaliser des calculs et obtenir les résultats présentés ci-dessus. Cependant, pour l'instant, nous ne connaissons que des réalisations relativement naïves. La plus riche étant le polynôme de Poincaré virtuel de l'espace ambiant ou d'une fibre d'un morphisme composante angulaire. Cette réalisation est suffisamment riche pour encoder la dimension et permettre d'obtenir des premiers résultats mais elle n'encode ni les morphismes composantes angulaires ni l'action et ainsi nous ne connaissons pas de formule de convolution pour les fonctions zêta de Fichou. L'autre réalisation que nous utilisons est la caractéristique d'Euler à support compact qui est, bien entendu, très naïve. Paradoxalement, c'est justement cet aspect naïf qui permet d'obtenir une formule de convolution pour les fonctions zêta de Koike–Parusiński à signe : les caractéristiques d'Euler des parties qui font obstruction à l'obtention d'une formule de convolution pour le polynôme de Poincaré virtuel sont nulles.

Il serait ainsi intéressant de construire une réalisation  $A \rightarrow B$  ne perdant pas trop d'information et compatible avec le produit de convolution  $*$  de sorte à retrouver la formule de convolution directement pour des fonctions zêta à coefficients dans  $B$ .

### 1.10.2 Classification des polynômes de Brieskorn

Nous avons vu que la fonction zêta permettait de démontrer que l'ensemble des degrés des monômes purs d'un polynôme de Brieskorn était un invariant de l'équivalence blow-Nash. Nous pensons que la fonction zêta permet de classier complètement les polynômes de Brieskorn. Plus précisément nous conjecturons le résultat suivant :

**Conjecture 1.10.1.** Soient

$$f(x) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i x_i^{k_i} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^d \eta_i x_i^{l_i}$$

deux polynômes de Brieskorn avec  $\varepsilon_i, \eta_i \in \{\pm 1\}$ . On peut supposer que  $k_1 \leq \dots \leq k_d$  (resp.  $l_1 \leq \dots \leq l_d$ ) et que si  $k_i = k_{i+1} = \dots = k_{i+m}$  alors  $\varepsilon_i \geq \dots \geq \varepsilon_{i+m}$  (resp. si  $l_i = l_{i+1} = \dots = l_{i+m}$  alors  $\eta_i \geq \dots \geq \eta_{i+m}$ ). Alors les points suivants sont équivalents :

- (i)  $f$  et  $g$  sont blow-Nash équivalents.
- (ii)  $Z_f(T) = Z_g(T)$
- (iii)  $\forall i, k_i = l_i$  et pour  $j$  tel que  $k_j$  soit pair mais ne soit pas le multiple d'un  $k_m$  impair, on a  $\varepsilon_j = \eta_j$ .

Nous savons déjà que le point (i) implique le point (ii). Le lemme suivant montre que le point (i) est une conséquence du point (iii). Comme nous savons déjà que deux polynômes

de Brieskorn ayant la même fonction zêta partagent les mêmes poids, la seule partie de la conjecture encore à démontrer est que le point (ii) implique la deuxième partie du point (iii).

**Lemme 1.10.2.** Soient  $p \in \mathbb{N}_{>0} \setminus (2\mathbb{N}_{>0})$  et  $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Alors les polynômes

$$f(x, y) = x^p + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i y_i^{m_i p} \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^p + \sum_{i=1}^k y_i^{m_i p}$$

sont *blow-Nash équivalents*.

*Démonstration.* Cette démonstration s'inspire de [59, p.2095].

Posons

$$h_s(x, y) = x^p + \sum_{i, \varepsilon_i = -1} \left( p x y_i^{m_i(p-1)} + s y_i^{m_i p} \right) + \sum_{i, \varepsilon_i = 1} \left( p x y_i^{m_i(p-1)} + y_i^{m_i p} \right), \quad s \in [-1, 1]$$

Par le Corollaire 3.7.13,  $h_{-1}$  et  $h_1$  sont *blow-Nash équivalents*.

Posons

$$l_s(x, y) = x^p + \sum_{i=1}^k \left( p s x y_i^{m_i(p-1)} + \varepsilon_i y_i^{m_i p} \right), \quad s \in [0, 1]$$

Alors, encore par le Corollaire 3.7.13,  $f = l_0$  et  $h_{-1} = l_1$  sont *blow-Nash équivalents*. On montre de la même façon que  $h_1$  et  $g$  sont *blow-Nash équivalents*. ■

### 1.10.3 Polynômes homogènes par poids commodes non-dégénérés par rapport à leurs polyèdres de Newton

**Définition 1.10.3.** Un polynôme  $f \in k[x_1, \dots, x_d]$  est homogène par poids s'il existe un système de poids  $(w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{N}_{>0}^d$  et un entier  $w$  tels que  $f(\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_d} x_d) = \lambda^w f(x_1, \dots, x_d)$  pour tout  $\lambda \in k$ .

**Remarque 1.10.4.** On supposera dans la suite que les poids  $(w_1, \dots, w_d)$  sont premiers entre eux.

K. Saito [92, Lemma 4.3] a démontré que le système de poids était un invariant analytique local de  $(\mathbb{C}^d, f^{-1}(0))$  pour un polynôme  $f$  homogène par poids à singularité isolée en l'origine. De même, pour  $d = 2, 3$ , il est connu qu'il s'agit d'un invariant topologique local de  $(\mathbb{C}^d, f^{-1}(0))$  pour un polynôme  $f$  homogène par poids à singularité isolée en l'origine [104, 81, 91].

T. Fukui [38, Conjecture 9.2] a conjecturé un analogue réel pour l'équivalence *blow-analytique*. Est-ce que les systèmes de poids de deux polynômes homogènes par poids à singularité isolée en l'origine *blow-analytiquement équivalents* coïncident ?

Une première réponse positive a été donnée par O. M. Abderrahmane [2] dans le cas de deux variables à l'aide des invariants de Fukui et des fonctions zêta de Koike–Parusiński.

Dans le cadre de l'équivalence *blow-Nash*, G. Fichou et T. Fukui [36] ont démontré que la conjecture était vraie pour les polynômes de trois variables homogènes par poids commodes non-dégénérés par rapport à leurs polyèdres de Newton. Pour cela, ils utilisent une formule permettant de calculer la fonction zêta d'un polynôme non-dégénéré à partir de la combinatoire de son polyèdre de Newton [50] (voir aussi [24] et [23] respectivement pour la fonction zêta topologique et la fonction zêta  $p$ -adique).

Nous verrons au Théorème 3.5.15 qu'une telle formule existe dans une complétion de l'anneau  $\mathcal{M}$ . Il est donc naturel de se demander si ce cadre permet d'aller plus loin dans cette entreprise de classification, notamment à l'aide de la fonction zêta modifiée.

# Un théorème d'inversion pour les applications blow-Nash sur un espace singulier

## 2.1 Introduction

*Blow-analytic* maps were introduced by T.-C. Kuo in order to classify real singularities [63, 64, 65]. A map  $f : X \rightarrow Y$  between real algebraic sets is called blow-analytic if there exists  $\sigma : M \rightarrow X$  a finite sequence of blowings-up with non-singular centers such that  $f \circ \sigma$  is analytic. In the same vein a semialgebraic map between real algebraic sets is called blow-Nash if the composition with some finite sequence of blowings-up with non-singular centers is Nash (i.e. semialgebraic and analytic). *Arc-analytic* maps were introduced by K. Kurdyka [67]. A map  $f : X \rightarrow Y$  between two real algebraic sets is called arc-analytic if every real analytic arc on  $X$  is mapped by  $f$  to a real analytic arc on  $Y$ . By a result of E. Bierstone and P. D. Milman [12] in response to a question of K. Kurdyka, if  $f : X \rightarrow Y$  is semialgebraic (i.e. its graph is semialgebraic) and if  $X$  is non-singular then  $f$  is arc-analytic if and only if it is blow-Nash. When  $X$  is non-singular, the set of points where such a map is analytic is dense [67, 5.2] and thus the Jacobian determinant of  $f$  is defined everywhere except on a nowhere dense subset of  $X$ .

The following Inverse Function Theorem is known for  $X$  non-singular [40]: *if the Jacobian determinant of a blow-Nash self-homeomorphism  $h : X \rightarrow X$  is locally bounded from below by a non-zero constant, on the set it is defined, then  $h^{-1}$  is blow-Nash and its Jacobian determinant is also locally bounded from below by a non-zero constant on the set it is defined.*

In this paper, we generalize this theorem to singular algebraic sets.

We first introduce, in subsection 2.2.3, the notion of generically arc-analytic maps which are maps  $f : X \rightarrow Y$  between real algebraic sets such that there exists a nowhere dense subset  $S$  of  $X$  with the property that every arc on  $X$  not entirely included in  $S$  is mapped by  $f$  to a real analytic arc on  $Y$ . When  $\dim \text{Sing}(X) \geq 1$ , we see that this condition is strictly weaker than being arc-analytic, otherwise a continuous generically arc-analytic map is an arc-analytic map. Then we show that the semialgebraic generically arc-analytic maps are exactly the blow-Nash ones.

Given  $f : X \rightarrow X$  a blow-Nash self-map on a real algebraic set  $X$ , we have the following diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \sigma \swarrow & & \searrow \tilde{\sigma} \\
 X & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

with  $\sigma$  given by a sequence of blowings-up with non-singular centers and  $\tilde{\sigma}$  a Nash map. We may now give an analogue of the lower bound of the Jacobian determinant condition: we say that  $f$  satisfies the *Jacobian hypothesis* if the Jacobian ideal of  $\sigma$  is included in the Jacobian ideal of  $\tilde{\sigma}$ . This condition doesn't depend on the choice of  $\sigma$ .

We are now able to state the main theorem of this paper: *let  $f : X \rightarrow X$  be a semialgebraic*

self-homeomorphism with  $X$  an algebraic subset then  $f$  is blow-Nash and satisfies the Jacobian hypothesis if and only if  $f^{-1}$  satisfies the same conditions.

Heuristically, the main idea of the proof consists in comparing the “motivic volume” of the set of arcs on  $X$  and the “motivic volume” of the set of arcs on  $X$  coming from arcs on  $M$  by  $\tilde{\sigma}$ . This allows us to prove that we can uniquely lift by  $\tilde{\sigma}$  an arc not entirely included in some nowhere dense subset of  $X$ . Thereby, such an arc is mapped to an analytic arc by  $f^{-1}$ . Thus  $f^{-1}$  is generically arc-analytic and so blow-Nash.

Therefore, we first define the arc space on an algebraic subset  $X$  of  $\mathbb{R}^N$  as the set of germs of analytic arcs on  $\mathbb{R}^N$  which lie in  $X$ , i.e.  $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow X$  such that  $\forall f \in I(X), f(\gamma) = 0$ . For  $n \in \mathbb{N}$ , we define the space of  $n$ -jets on  $X$  as the set of  $n$ -jets  $\gamma$  on  $\mathbb{R}^N$  such that  $\forall f \in I(X), f(\gamma(t)) \equiv 0 \pmod{t^{n+1}}$ . The subsection 2.2.4 contains some general properties of these objects and some useful results for the proof of the main theorem.

The additive invariant used in order to apply motivic integration arguments is the virtual Poincaré polynomial which associates to a set of a certain class, denoted  $\mathcal{AS}$ , a polynomial with integer coefficients. We recall the main properties of the collection  $\mathcal{AS}$  in subsection 2.2.1. The virtual Poincaré polynomial was constructed by C. McCrory, A. Parusiński [76] and G. Fichou [32]. The subsection 2.2.2 contains the main properties of this invariant and motivates its use.

In order to compute the above-cited “motivic volumes”, we first prove a version of Denef–Loeser key lemma for the motivic change of variables formula which fulfills our requirements and with a weaker hypothesis: we don’t assume the map to be birational but only generically one-to-one.

Based on these results, we may finally prove there exists a subset on  $X$  such that every analytic arc on  $X$  not entirely included in this subset may be uniquely lifted by  $\tilde{\sigma}$ . This part relies on real analysis arguments and on the fact that an arc not entirely included in the center of a blowing-up may be lifted by this blowing-up.

## 2.2 Preliminaries

### 2.2.1 Constructible sets and maps

Arc-symmetric sets have been first defined and studied by K. Kurdyka in [67]. A subset of an analytic manifold  $M$  is arc-symmetric if all analytic arcs on  $M$  meet it at isolated points or are entirely included in it. Semialgebraic arc-symmetric sets are exactly the closed sets of a noetherian topology  $\mathcal{AR}$  on  $\mathbb{R}^N$ . We work with a slightly different framework defined by A. Parusiński in [84] and consider the collection of sets  $\mathcal{AS}$  defined as the boolean algebra generated by semialgebraic arc-symmetric subsets of  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . The advantages of  $\mathcal{AS}$  over  $\mathcal{AR}$  are that we get a constructible category in the sense of [84] as explained below and a better control of the behavior at infinity. We refer the reader to [69] for a survey.

**Definition 2.2.1** ([84, 2.4]). Let  $C$  be a collection of semialgebraic sets. A map between two  $C$ -sets is a  $C$ -map if its graph is a  $C$ -set. We say that  $C$  is a constructible category if it satisfies the following axioms:

- A1.  $C$  contains the algebraic sets.
- A2.  $C$  is stable by boolean operations  $\cap, \cup$  and  $\setminus$ .
- A3. a. The inverse image of a  $C$ -set by a  $C$ -map is a  $C$ -set.

- b. The image of a  $C$ -set by an *injective*  $C$ -map is a  $C$ -set.
- A4. Each locally compact  $X \in C$  is Euler in codimension 1, i.e. there is a semialgebraic subset  $Y \subset X$  with  $\dim Y \leq \dim X - 2$  such that  $X \setminus Y$  is Euler\*.

**Remark 2.2.2.** A locally compact semialgebraic set  $X$  is Euler in codimension 1 if and only if it admits a fundamental class for the homology with coefficient in  $\mathbb{Z}_2$ . For instance, this property is crucial in the construction of the virtual Poincaré polynomial in order to use the Poincaré duality.

Given a constructible category  $C$ , we have a notion of  $C$ -closure.

**Theorem 2.2.3** ([84, 2.5]). *Let  $C$  be a constructible category and let  $X \in C$  be a locally closed set. Then for any subset  $A \subset X$  there is a smallest closed subset of  $X$  which belongs to  $C$  and contains  $A$ . It is denoted by  $\overline{A}^C$ . Any other closed subset of  $X$  that is in  $C$  and contains  $A$  must contain  $\overline{A}^C$ .*

**Remark 2.2.4** ([84, 2.7]). If  $A$  is semialgebraic then  $\dim \overline{A}^C = \dim A$ . In particular, if  $A \in C$  then  $\overline{A}^C = A \cup \overline{A \setminus A}^C$  and hence  $\dim(\overline{A}^C \setminus A) < \dim A$ .

**Definition 2.2.5** ([84, §4.2]). A semialgebraic subset  $A \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  is an  $\mathcal{AS}$ -set if for every real analytic arc  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  such that  $\gamma((-1, 0)) \subset A$  there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $\gamma((0, \varepsilon)) \subset A$ .

Using the proof of [84, Theorem 2.5], we get the following proposition.

**Proposition 2.2.6.** *There exists a unique noetherian topology on  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  whose closed sets are exactly the closed  $\mathcal{AS}$ -subsets.*

**Theorem 2.2.7** ([84]).

- The algebraically constructible sets form a constructible category denoted by  $\mathcal{AC}$ .
- $\mathcal{AS}$  is a constructible category.
- Every constructible category contains  $\mathcal{AC}$  and is contained in  $\mathcal{AS}$ . This implies that each locally compact set in a constructible category is Euler.
- $\mathcal{AS}$  is the only constructible category which contains the connected components of compact real algebraic sets.

In what follows, *constructible subset* stands for  $\mathcal{AS}$ -subset, *constructible map* stands for map with constructible graph and *constructible isomorphism* stands for  $\mathcal{AS}$ -homeomorphism.

In our proof of Lemma 2.4.5 we need the following result which is, in some sense, a replacement of Chevalley's theorem for Zariski-constructible sets over an algebraically closed field.

**Theorem 2.2.8** ([84, 4.3]). *Let  $A$  be a semialgebraic subset of a real algebraic subset  $X$  of  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Then  $A \in \mathcal{AS}$  if and only if there exist a regular morphism of real algebraic varieties  $f : Z \rightarrow X$  and  $Z'$  the union of some connected components of  $Z$  such that*

$$x \in A \Leftrightarrow \chi(f^{-1}(x) \cap Z') \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \notin A \Leftrightarrow \chi(f^{-1}(x) \cap Z') \equiv 0 \pmod{2}$$

\*A locally compact semialgebraic set  $X$  is Euler if for every  $x \in X$  the Euler-Poincaré characteristic of  $X$  at  $x$   $\chi(X, X \setminus x) = \sum (-1)^i \dim H_i(X, X \setminus x; \mathbb{Z}_2)$  is odd.

where  $\chi$  is the Euler characteristic with compact support.

In particular the image of an  $\mathcal{AS}$ -subset by a regular map whose Euler characteristics with compact support of all the fibers are odd is an  $\mathcal{AS}$ -subset.

In this paper, we need to work with  $\mathcal{AS}$ -sets in order to use the virtual Poincaré polynomial discussed below.

In our settings, the noetherianity of the  $\mathcal{AS}$  topology will also allow us to prove a version of J. Denef and F. Loeser key lemma for the motivic change of variables formula with a weaker hypothesis. Indeed, we won't assume that the map is birational but only Nash, proper and generically one-to-one.

### 2.2.2 The virtual Poincaré polynomial

C. McCrory and A. Parusiński proved in [76] there exists a unique additive invariant of real algebraic varieties which coincides with the Poincaré polynomial for (co)homology with  $\mathbb{Z}_2$  coefficients for compact and non-singular real algebraic varieties. Moreover, this invariant behaves well since its degree is exactly the dimension and the leading coefficient is positive. This virtual Poincaré polynomial has been generalized to  $\mathcal{AS}$ -subsets by G. Fichou in [32]. Furthermore Nash-equivalent  $\mathcal{AS}$ -subsets have the same virtual Poincaré polynomial. These proofs use the weak factorization theorem [103, 3] in a way similar of what has been done by Bittner in [15] to give a new description of the Grothendieck ring in terms of blowings-up.

**Theorem 2.2.9** ([32]). *There is an additive invariant  $\beta : \mathcal{AS} \rightarrow \mathbb{Z}[u]$ , called the virtual Poincaré polynomial, which associates to an  $\mathcal{AS}$ -subset a polynomial with integer coefficients  $\beta(X) = \sum \beta_i(X)u^i \in \mathbb{Z}[u]$  and satisfies the following properties:*

- $\beta\left(\bigsqcup_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k \beta(X_i)$
- $\beta(X \times Y) = \beta(X)\beta(Y)$
- For  $X \neq \emptyset$ ,  $\deg \beta(X) = \dim X$  and the leading coefficient of  $\beta(X)$  is positive<sup>\*</sup>.
- If  $X$  is non-singular and compact then  $\beta_i(X) = \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2)$ .
- If  $X$  and  $Y$  are Nash-equivalent then  $\beta(X) = \beta(Y)$ .

The virtual Poincaré polynomial is a more interesting additive invariant than the Euler characteristic with compact support since it stores more information, like the dimension. Notice that it is well known that if we forget the arc-symmetric hypothesis and work with all semialgebraic sets, the Euler characteristic with compact support is the only additive invariant [89].

### 2.2.3 Geometric settings

For the sake of convenience, we recall some basics of Nash geometry and arc-analytic maps before introducing generically arc-analytic maps.

---

<sup>\*</sup> $\beta(\emptyset) = 0$

A Nash function on an open semialgebraic subset of  $\mathbb{R}^N$  is an analytic function which satisfies a non-trivial polynomial equation. This notion coincides with  $C^\infty$  semialgebraic functions. We can therefore define the notion of Nash submanifold in an obvious way. This notion is powerful since we can use tools from both algebraic and analytic geometries, for example we have a Nash implicit function theorem. For more details on Nash geometry, we refer the reader to [17] and [95].

Arc-analytic maps were first introduced by K. Kurdyka in relation with arc-symmetric sets in [67]. These are maps that send analytic arcs to analytic arcs by composition and hence it is suitable to work with arc-analytic maps between arc-symmetric sets. A semi-algebraic map  $f : M \rightarrow N$  is blow-Nash if there is a finite sequence of blowings-up with non-singular centers  $\sigma : \tilde{M} \rightarrow M$  such that  $f \circ \sigma : \tilde{M} \rightarrow N$  is Nash. Let  $M$  be an analytic manifold and  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a blow-analytic map, since we can lift an analytic arc by a blowing-up with non-singular center of a non-singular variety,  $f$  is clearly arc-analytic. Kurdyka conjectured the converse with an additional semialgebraicity<sup>\*</sup> hypothesis and E. Bierstone and P. D. Milman brought us the proof in [12]. A. Parusiński gave another proof in [83]. We refer the reader to [69] for a survey on arc-symmetric sets and arc-analytic maps.

**Definition 2.2.10.** Let  $U$  be a semialgebraic open subset of  $\mathbb{R}^N$ . Then an analytic function  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be *Nash* if there are polynomials  $a_0, \dots, a_d$  with  $a_d \neq 0$  such that

$$a_d(x)(f(x))^d + \dots + a_0(x) = 0$$

**Theorem 2.2.11** ([17, Proposition 8.1.8]). *Let  $U$  be a semialgebraic open subset of  $\mathbb{R}^N$ . Then  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  is a Nash function if and only if  $f$  is semialgebraic and of class  $C^\infty$ .*

**Definition 2.2.12.** A *Nash submanifold* of dimension  $d$  is a semialgebraic subset  $M$  of  $\mathbb{R}^p$  such that every  $x \in M$  admits a Nash chart  $(V, \varphi)$ , i.e. there are  $U$  an open semialgebraic neighborhood of  $0 \in \mathbb{R}^p$ ,  $V$  an open semialgebraic neighborhood of  $x$  in  $\mathbb{R}^p$  and  $\varphi : U \rightarrow V$  a Nash-diffeomorphism satisfying  $\varphi(0) = x$  and  $\varphi((\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap U) = M \cap V$ .

**Remark 2.2.13.** A non-singular algebraic subset  $M$  of  $\mathbb{R}^p$  has a natural structure of Nash submanifold given by the Jacobian criterion and the Nash implicit function theorem.

**Definition 2.2.14** ([67]). Let  $X$  and  $Y$  be arc-symmetric subsets of two analytic manifolds. Then  $f : X \rightarrow Y$  is arc-analytic if for all analytic arcs  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$  the composition  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Y$  is again an analytic arc.

**Theorem 2.2.15** ([12]). *Let  $f$  be a semialgebraic map defined on a non-singular algebraic subset. Then  $f$  is arc-analytic if and only if  $f$  is blow-Nash.*

**Remark 2.2.16.** Let  $f : X \rightarrow Y$  be a semialgebraic arc-analytic map between algebraic sets. Then  $f$  is blow-Nash even if  $X$  is singular. Indeed we may first use a resolution of singularities  $\rho : U \rightarrow X$  given by a sequence of blowings-up with non-singular centers [55] and apply Theorem 2.2.15 to  $f \circ \rho : U \rightarrow Y$ .

**Remark 2.2.17.** If  $M$  is a non-singular algebraic set and  $\rho : \tilde{M} \rightarrow M$  the blowing-up of  $M$  with a non-singular center, it is well known that we can lift an arc on  $M$  by  $\rho$  to an arc

<sup>\*</sup>The question is still open for the general case: is a map blow-analytic if and only if it is subanalytic and arc-analytic?



on  $\tilde{M}$ . This result is obviously false for a singular algebraic set as shown in the following examples. However, if  $X$  is a singular algebraic set and  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  the blowing-up of  $X$  with a non-singular center we can lift an arc on  $X$  not entirely included in the center\* and this lifting is unique.

**Example 2.2.18.** Consider the Whitney umbrella  $X = V(x^2 - zy^2)$  and  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  the blowing-up along the singular locus  $I(X_{\text{sing}}) = (x, y)$ . Then we can't lift by  $\rho$  an arc included in the handle  $\{x = 0, y = 0, z < 0\}$  ( $\rho$  is not even surjective).

**Example 2.2.19.** This phenomenon still remains in the pure dimensional case. Let  $X = V(x^3 - zy^3)$ . Then  $X$  is of pure dimension 2 and the blowing-up  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  along the singular locus  $I(X_{\text{sing}}) = (x, y)$  is surjective. However we can't lift the (germ of) analytic arc  $\gamma(t) = (0, 0, t)$  to an analytic arc. In the  $y$ -chart,  $\tilde{X} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3, X^3 = Z\}$  and  $\rho(X, Y, Z) = (XY, Y, Z)$ . Then the lifting of  $\gamma$  should have the form  $\tilde{\gamma}(t) = (t^{\frac{1}{3}}, 0, t)$ .

**Remark 2.2.20.** A continuous subanalytic map  $f : U \rightarrow V$  is locally Hölder, i.e. for each compact subset  $K \subset U$ , there exist  $\alpha > 0$  and  $C > 0$  such that for all  $x, y \in K$ ,  $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha$ . See for instance [53], it's a consequence of [56, §9, Inequality III]. See also [11, Corollary 6.7]. Or we can directly use Łojasiewicz inequality [11, Theorem 6.4] with  $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$  and  $(x, y) \mapsto |x - y|$ .

The following result will be useful.

**Proposition 2.2.21.** *Let  $f : X \rightarrow Y$  be a surjective proper subanalytic map (resp. proper semi-algebraic map) and  $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow Y$  a real analytic (resp. Nash) arc. Then there exist  $m \in \mathbb{N}_{>0}$  and  $\tilde{\gamma} : [0, \delta) \rightarrow X$  analytic (resp. Nash) with  $\delta^m \leq \varepsilon$  such that  $f \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t^m)$ .*

*Proof.* The proof is divided into two parts. First we use the properness of  $f$  to lift  $\gamma$  to an arc on  $X$  and then we conclude thanks to Puiseux theorem.

Consider the following diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\text{pr}_X} & \tilde{X} = X \times_Y [0, \varepsilon) \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ Y & \xleftarrow{\gamma} & [0, \varepsilon) \end{array}$$

Let  $X_1 = \tilde{f}^{-1}([0, \varepsilon))$ . Since  $f$  is proper,  $\overline{X_1} \setminus X_1 \subset \tilde{X}$ . Let  $x_0 \in \overline{X_1} \setminus X_1$ , then by the curve selection lemma ([17, Proposition 8.1.13] for the semialgebraic case) there exists  $\gamma_1 : [0, \eta) \rightarrow \tilde{X}$  analytic (resp. Nash) such that  $\gamma_1(0) = x_0$  and  $\gamma_1((0, \eta)) \subset X_1$ . We have the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xleftarrow{\gamma_1} & [0, \eta) \\ \tilde{f} \downarrow & \swarrow h & \\ [0, \varepsilon) & & \end{array}$$

Then,  $h(0) = 0$  and  $h((0, \eta)) \subset (0, \varepsilon)$ . Hence there exists  $\alpha \in (0, \eta)$  such that  $h : [0, \alpha) \rightarrow [0, \beta)$  is a subanalytic (resp. semialgebraic) homeomorphism.

By Puiseux theorem ([17, Proposition 8.1.12] for the semialgebraic case; see also [85]), there exist  $m \in \mathbb{N}_{>0}$  and  $\delta \leq \beta^{\frac{1}{m}}$  such that  $h^{-1}(t^m)$  is analytic (resp. Nash) for  $t \in [0, \delta)$ .

Finally,  $\tilde{\gamma} : [0, \delta) \rightarrow X$  defined by  $\tilde{\gamma}(t) = \text{pr}_X \gamma_1 h^{-1}(t^m)$  satisfies  $f \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t^m)$ .  $\blacksquare$

\*Such an arc meets the center only at isolated points since it is algebraic and hence arc-symmetric.

In the singular case we will work with a slightly different framework.

**Definition 2.2.22.** Let  $X$  and  $Y$  be two algebraic sets. A map  $f : X \rightarrow Y$  is said to be *generically arc-analytic in dimension  $d = \dim X$*  if there exists an algebraic subset  $S$  of  $X$  with  $\dim S < \dim X$  such that for all analytic arc  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$  not entirely included<sup>\*</sup> in  $S$ ,  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Y$  is analytic.

If  $X$  is non-singular, these maps are exactly the arc-analytic ones.

**Lemma 2.2.23.** Let  $X$  be a non-singular algebraic set of dimension  $d^\dagger$  and  $Y$  an algebraic set. Let  $f : X \rightarrow Y$  be a continuous semialgebraic map. If  $f$  is generically arc-analytic in dimension  $d$  then  $f$  is arc-analytic.

*Proof.* Let  $S$  be as in Definition 2.2.22. By the Jacobian criterion and the Nash implicit function theorem we may assume that  $S$  is locally a Nash subset of  $\mathbb{R}^d$ . Taking the Zariski closure we may moreover assume that  $S$  is an algebraic subset of  $\mathbb{R}^d$  since it doesn't change the dimension. Let  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$  be an analytic arc entirely included in  $S$ .

As in [68, Corollaire 2.7], by Puiseux theorem, we may assume that

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= \sum_{i \geq 0} b_i t^{\frac{i}{p}}, t \geq 0 \\ f(\gamma(t)) &= \sum_{i \geq 0} c_i (-t)^{\frac{i}{q}}, t \leq 0 \end{aligned}$$

By [68, Corollaire 2.8 & Corollaire 2.9], two phenomena may prevent  $f(\gamma(t))$  from being analytic: either one of these expansions has a non-integer exponent or these expansions don't coincide.

To handle the first case, we assume that one of these expansions, for instance for  $t \geq 0$ , has a non-integer exponent, i.e.

$$f(\gamma(t)) = \sum_{i=0}^m b_i t^i + b t^{\frac{p}{q}} + \dots, b \neq 0, m < \frac{p}{q} < m+1, t \geq 0$$

It follows from Remark 2.2.20 there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that for every analytic arc  $\delta$  we have  $f(\gamma(t) + t^N \delta(t)) \equiv f(\gamma(t)) \pmod{t^{m+1}}$ . We are going to prove that for  $\eta \in \mathbb{R}^d$  generic, the arc  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + t^N \eta$  is not entirely included in  $S$  in order to get a contradiction since  $f(\tilde{\gamma}(t)) \equiv f(\gamma(t)) \pmod{t^{m+1}}$ .

Let  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ . Since  $\dim S < d$ , there is  $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^d \setminus C_{\gamma(t_0)} S$  where  $C_{\gamma(t_0)} S$  is the tangent cone of  $S$  at  $\gamma(t_0)$ . Thus there exists  $F \in I(S)$  with  $F(\gamma(t_0) + x) = F_\mu(x) + \dots + F_{\mu+r}(x)$  where  $\deg F_i = i$  and such that  $F_\mu(\tilde{\eta}) \neq 0$ . Then  $F(\gamma(t_0) + st_0^N \tilde{\eta}) = (st_0^N)^\mu F_\mu(\tilde{\eta}) + (st_0^N)^{\mu+1} G(s, t)$  and hence for  $s$  small enough the arc  $\gamma(t) + t^N s \tilde{\eta}$  isn't entirely included in  $S$ .

Then we prove that the expansions coincide in a similar way. Assume that the expansions are different, i.e.

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i + b t^m + \dots, t \geq 0 \\ f(\gamma(t)) &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i + c t^m + \dots, t \leq 0 \end{aligned}$$

<sup>\*</sup> $\gamma^{-1}(S) \neq (-\varepsilon, \varepsilon)$

<sup>†</sup>We mean that every point of  $X$  is non-singular of dimension  $d$ .

with  $b \neq c$ . As in the previous case, we may construct an arc  $\tilde{\gamma}$  not entirely included in  $S$  such that  $f\gamma(t)$  and  $f\tilde{\gamma}(t)$  coincide up to order  $m + 1$ . That leads to a contradiction. ■

**Remark 2.2.24.** If  $\dim \text{Sing}(X) = 0$  then a generically arc-analytic map  $X \rightarrow Y$  is also arc-analytic since the analytic arcs contained in the singular locus are constant.

**Remark 2.2.25.** The previous proof fails when  $X$  isn't assumed to be non-singular. Let  $X = V(x^3 - zy^3)$  and  $S = X_{\text{sing}} = O_z$ . Consider (germ of) analytic arc  $\gamma(t) = (0, 0, t)$  entirely included in  $S$ . Given any  $N \in \mathbb{N}$  we can't find  $\eta(t)$  such that  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + t^N \eta(t)$  isn't entirely included in  $S$ . Indeed, if we inject the coordinates of  $\tilde{\gamma}$  in the equation  $x^3 = zy^3$  we get a contradiction considering the orders of vanishing.

**Remark 2.2.26.** A continuous semialgebraic generically arc-analytic in dimension  $d = \dim X$  map  $f : X \rightarrow Y$  may not be arc-analytic if  $\dim \text{Sing}(X) \geq 1$ . Indeed, let  $X = V(x^3 - zy^3)$  and  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(x, y, z) = \frac{x}{y}$ . Then  $f(0, 0, t) = t^{\frac{1}{3}}$  is not analytic.

In the non-singular case, by Theorem 2.2.15, the blow-Nash maps are exactly the semialgebraic arc-analytic ones. With the following proposition, we notice that more generally the blow-Nash maps are exactly the semialgebraic generically arc-analytic ones.

**Proposition 2.2.27.** *Let  $X$  be an algebraic set of dimension  $d$ . Let  $f : X \rightarrow Y$  be a semialgebraic map which is continuous on  $\overline{\text{Reg}_d X}$ . Then  $f$  is generically arc-analytic in dimension  $d$  if and only if it is blow-Nash.*

*Proof.* Assume that  $f$  is generically arc-analytic. Let  $\rho : U \rightarrow X$  be a resolution of singularities given by a sequence of blowings-up with non-singular centers, then  $f \circ \rho : U \rightarrow Y$  is semialgebraic and generically arc-analytic with  $U$  non-singular. Thus  $f \circ \rho$  is arc-analytic by Lemma 2.2.23. By Theorem 2.2.15, there exists a sequence of blowings-up with non-singular centers  $\eta : M \rightarrow U$  such that  $f \circ \rho \circ \eta$  is Nash. Finally  $f \circ \sigma$  is Nash where  $\sigma = \rho \circ \eta : M \rightarrow X$  is a sequence of blowings-up with non-singular centers.

Assume that  $f$  is blow-Nash. Then there is  $\sigma : M \rightarrow X$  a sequence of blowings-up with non-singular centers such that  $f \circ \sigma : M \rightarrow Y$  is Nash. Let  $\gamma$  be an arc on  $X$  not entirely included in the singular locus of  $X$  and the center of  $\sigma$ , then there is  $\tilde{\gamma}$  an arc on  $M$  such that  $\gamma = \sigma(\tilde{\gamma})$ . Thus  $f(\gamma(t)) = f \circ \sigma(\tilde{\gamma}(t))$  is analytic. ■

## 2.2.4 Arcs & jets

Arc spaces and truncations of arcs were first introduced by J. F. Nash in 1964 [80] and their study has gained new momentum with the works of M. Kontsevich [60], J. Denef and F. Loeser [26] on motivic integration. We can notice that K. Kurdyka [67], A. Nobile [82], M. Lejeune-Jalabert [72] [45], M. Hickel [54] and others studied arc space and jet spaces before the advent of motivic integration. Most of these works concern the relationship between the singularities of a variety and its jet spaces.

In this section, we define the arc space and the jet spaces of a real algebraic set. We first work with the whole ambient Euclidean space and then use the equations of the algebraic set to define arcs and jets on it. Finally we will give and prove a collection of results concerning these objects.

The arc space on  $\mathbb{R}^N$  is defined by

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^N, \gamma \text{ analytic}\}$$

and, for  $n \in \mathbb{N}$ , the set of  $n$ -jets on  $\mathbb{R}^N$  is defined by

$$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) / \sim_n$$

where  $\gamma_1 \sim_n \gamma_2$  if and only if  $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod{t^{n+1}}$ . Obviously,  $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N) \simeq (\mathbb{R}\{t\}/t^{n+1})^N$ . We also consider the truncation maps  $\pi_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N)$  and  $\pi_n^m : \mathcal{L}_m(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N)$ , where  $m > n$ . These maps are clearly surjective.

Next, assume that  $X \subset \mathbb{R}^N$  is an algebraic subset. The set of analytic arcs on  $X$  is

$$\mathcal{L}(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X), f(\gamma(t)) = 0\}$$

and, for  $n \in \mathbb{N}$ , the set of  $n$ -jets on  $X$  is

$$\mathcal{L}_n(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X), f(\gamma(t)) \equiv 0 \pmod{t^{n+1}}\}$$

When  $X$  is singular, we will see that the truncation maps may not be surjective.

**Example 2.2.28.** Let  $X \subset \mathbb{R}^N$  be an algebraic subset, then  $\mathcal{L}_0(X) \simeq X$  and  $\mathcal{L}_1(X) \simeq T^{\text{Zar}} X = \bigsqcup T_x^{\text{Zar}} X$ . Indeed, we just apply Taylor expansion to  $f(a + bt)$  where  $f \in I(X)$  (or we may directly use that the Zariski tangent space at a point is given by the linear parts of the polynomials  $f \in I(X)$  after a translation).

The following lemma is useful to find examples which are hypersurfaces since the constructions of arc space and jet spaces on an algebraic set are algebraic. See [17, Theorem 4.5.1] for a more general result with another proof. We may find similar results for non-principal ideals in [17, Proposition 3.3.16, Theorem 4.1.4]. See also [71, §6].

**Lemma 2.2.29.** *Let  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  be an irreducible polynomial which changes sign, then  $I(V(f)) = (f)$ .*

*Proof.* The following proof comes from [71, Lemma 6.14]. After an affine change of coordinates, we may assume that  $f(a, b_1) < 0 < f(a, b_2)$  with  $a = (a_1, \dots, a_{N-1})$ . Let  $g \in I(V(f))$  and assume that  $f \nmid g$  in  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ . In the PID (and hence UFD)  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_{N-1})[x_N]$ ,  $f$  is also irreducible and  $f \nmid g$  too. In this PID, we may find  $\varphi$  and  $\gamma$  such that  $\varphi f + \gamma g = 1$ . Let  $\varphi = \varphi_0/h$  and  $\gamma = \gamma_0/h$  with  $0 \neq h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{N-1}]$  and  $\varphi_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{N-1}][x_N]$ . Then  $\varphi_0 f + \gamma_0 g = h$ . Let  $V$  be a neighborhood of  $a$  in  $\mathbb{R}^{N-1}$  such that  $\forall v \in V, f(v, b_1) < 0 < f(v, b_2)$ . By the IVT, for all  $v \in V$ , there is  $b_1 \leq b_v \leq b_2$  such that  $f(v, b_v) = 0$ , and so  $g(v, b_v) = 0$ . Then  $\forall v \in V, h(v) = 0$  and hence  $h \equiv 0$  which is a contradiction. ■

**Example 2.2.30.** Let  $X = V(y^2 - x^3)$ . Since  $y^2 - x^3$  is irreducible and changes sign, we have  $I(X) = (y^2 - x^3)$  by Lemma 2.2.29. Hence we get,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(X) &= \left\{ (a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t) \in (\mathbb{R}\{t\}/t^2)^2, (b_0 + b_1 t)^2 - (a_0 + a_1 t)^3 \equiv 0 \pmod{t^2} \right\} \\ &= \left\{ (a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t) \in (\mathbb{R}\{t\}/t^2)^2, a_0^3 = b_0^2, 3a_1 a_0^2 = 2b_0 b_1 \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2(X) = \left\{ \begin{array}{l} (a_0 + a_1t + a_2t^2, b_0 + b_1t + b_2t^2) \in (\mathbb{R}\{t\}/t^3)^2, \\ (b_0 + b_1t + b_2t^2)^2 - (a_0 + a_1t + a_2t^2)^3 \equiv 0 \pmod{t^3} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (a_0 + a_1t + a_2t^2, b_0 + b_1t + b_2t^2) \in (\mathbb{R}\{t\}/t^3)^2, \\ a_0^3 = b_0^2, \\ 3a_1a_0^2 = 2b_0b_1, \\ 3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2 = 2b_0b_2 + b_1^2 \end{array} \right\}$$

Then the preimage of  $(0, t) \in \mathcal{L}_1(X)$  by  $\pi_1^2$  is obviously empty.

We therefore take care not to confuse the set  $\mathcal{L}_n(X)$  of  $n$ -jets on  $X$  and the set  $\pi_n(\mathcal{L}(X))$  of  $n$ -jets on  $X$  which can be lifted to analytic arcs. Thanks to Hensel's lemma and Artin approximation theorem [5], this phenomenon disappears in the non-singular case.

**Proposition 2.2.31.** *Let  $X$  be an algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$ . The following are equivalent:*

- (i) *For all  $n$ ,  $\pi_n^{n+1} : \mathcal{L}_{n+1}(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$  is surjective.*
- (ii) *For all  $n$ ,  $\pi_n : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$  is surjective.*
- (iii)  *$X$  is non-singular.*

*Proof.* (iii) $\Rightarrow$ (ii) is obvious using Hensel's lemma and Artin approximation theorem [5].

(ii) $\Rightarrow$ (i) is obvious since  $\pi_n = \pi_n^{n+1} \circ \pi_{n+1}$ .

(i) $\Rightarrow$ (iii): Assume that 0 is a singular point of  $X$ . We can find  $\gamma = \alpha t \in \mathcal{L}_1(X)$  which doesn't lie in the tangent cone of  $X$  at 0, i.e. such that  $f(\alpha t) \not\equiv 0 \pmod{t^{m+1}}$  for some  $f \in I(X)$  of order  $m$ . Such a 1-jet can't be lifted to  $\mathcal{L}_m(X)$ .  $\blacksquare$

The set  $\mathcal{L}_n(X)$  of  $n$ -jets on  $X \subset \mathbb{R}^N$  can be seen as an algebraic subset of  $\mathbb{R}^{(n+1)N}$ . By a theorem of M. J. Greenberg [48], given an algebraic subset  $X \subset \mathbb{R}^N$ , there exists  $c \in \mathbb{N}_{>0}$  such that for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(\mathcal{L}(X)) = \pi_n^{cn}(\mathcal{L}_{cn}(X))$ . Then if we work over  $\mathbb{C}$  the sets  $\pi_n(\mathcal{L}(X))$  are Zariski-constructible by Chevalley theorem. See for instance [72]<sup>\*</sup>, [45] or [26].

In our framework, the following example shows that the  $\pi_n(\mathcal{L}(X))$  may not even be  $\mathcal{AS}$ .

**Example 2.2.32.** Let  $X = V(x^2 - zy^2)$ . Then for every  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_a(t) = (0, t^2, at^2) \in \mathcal{L}_2(X)$ . Let  $\eta(t) = (bt^3 + t^4\eta_1(t), t^2 + t^3\eta_2(t), at^2 + t^3\eta_3(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ . Let  $f(x, y, z) = x^2 - zy^2$ , then  $f(\eta(t)) = (b^2 - a)t^6 + t^7\tilde{\eta}(t)$ . So if  $a < 0$ ,  $\gamma_a(t) \notin \pi_2(\mathcal{L}(X))$ . However if  $a \geq 0$ ,  $\gamma_a(t) = \pi_2(\sqrt{at^3}, t^2, at^2) \in \pi_2(\mathcal{L}(X))$ .

**Proposition 2.2.33.** *Let  $X \subset \mathbb{R}^N$  be an algebraic subset of dimension  $d$ . Then:*

- (i)  $\dim(\pi_n(\mathcal{L}(X))) = (n+1)d$
- (ii)  $\dim(\mathcal{L}_n(X)) \geq (n+1)d$
- (iii) *The fibers of  $\tilde{\pi}_n^m = \pi_n^m|_{\pi_m(\mathcal{L}(X))} : \pi_m(\mathcal{L}(X)) \rightarrow \pi_n(\mathcal{L}(X))$  are of dimension smaller than or equal to  $(m-n)d$  where  $m \geq n$ .*
- (iv) *A fiber  $(\pi_n^{n+1})^{-1}(\gamma)$  of  $\pi_n^{n+1} : \mathcal{L}_{n+1}(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$  is either empty or isomorphic to  $T_{\gamma(0)}^{\text{Zar}}X$ .*

If moreover we assume that  $X$  is non-singular, we get the following statement since  $\mathcal{L}_n(X) = \pi_n(\mathcal{L}(X))$ :

- (v)  $\dim(\mathcal{L}_n(X)) = (n+1)d$

*Proof.* We first notice that (i) is a direct consequence of (iii).

(ii)  $(\pi_0^n)^{-1}(X \setminus X_{\text{sing}})$  is of dimension  $(n+1)d$  since the fiber of  $\pi_0^n$  over a non-singular point is of dimension  $nd$ .

<sup>\*</sup>She uses a generalization of [6, Theorem 6.1] instead of Greenberg theorem.

(iii) We may assume that  $m = n+1$ . Let  $\gamma \in \pi_n(\mathcal{L}(X))$ . We may assume that  $\gamma \in (\mathbb{R}_n[t])^N$ . We consider the following diagram

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{R}^N & & \mathbb{R} \end{array}$$

with  $p_1(x, t) = \gamma(t) + t^{n+1}x$  and  $p_2(x, t) = t$ . Let  $\mathfrak{X} = \overline{p_1^{-1}(X) \cap \{t \neq 0\}}^{\text{Zar}}$ . For  $c \neq 0$ ,  $\mathfrak{X} \cap p_2^{-1}(c) \simeq X$  and  $\dim \mathfrak{X} \cap p_2^{-1}(c) = \dim \mathfrak{X} - 1$ . Hence  $\dim \mathfrak{X} \cap p_2^{-1}(0) \leq \dim \mathfrak{X} - 1 = \dim X$ .

We are looking for objects of the form  $\pi_{n+1}(\gamma(t) + t^{n+1}\alpha(t))$  with  $\gamma(t) + t^{n+1}\alpha(t) \in \mathcal{L}(X)$ . Such an  $\alpha$  is equivalent to a section of  $p_{2|_{\mathfrak{X}}}$  i.e.  $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathfrak{X} \\ t & \mapsto & (\alpha(t), t) \end{array}$ . Since we want an arc modulo  $t^{n+2}$ , we are looking for the constant term of  $\alpha$ , therefore  $(\tilde{\pi}_n^{n+1})^{-1}(\gamma) \subset \mathfrak{X} \cap p_2^{-1}(0)$ .

(iv) Let  $\gamma \in \mathcal{L}_n(X)$ . Let  $\eta \in \mathbb{R}^N$ . Assume that  $I(X) = (f_1, \dots, f_r)$ . By Taylor expansion we get

$$f_i(\gamma + t^{n+1}\eta) \equiv f_i(\gamma(t)) + t^{n+1}(\nabla_{\gamma(t)}f_i)(\eta) \pmod{t^{n+2}}$$

Assume that  $f_i(\gamma(t)) \equiv t^{n+1}\alpha_i \pmod{t^{n+2}}$ . Since  $t^{n+1}(\nabla_{\gamma(t)}f_i)(\eta) \equiv t^{n+1}(\nabla_{\gamma(0)}f_i)(\eta) \pmod{t^{n+2}}$ , we have

$$f_i(\gamma + t^{n+1}\eta) \equiv t^{n+1}(\alpha_i + (\nabla_{\gamma(0)}f_i)(\eta)) \pmod{t^{n+2}}$$

Hence,  $\gamma(t) + t^{n+1}\eta$  is in the fiber  $(\pi_n^{n+1})^{-1}(\gamma)$  if and only if  $\alpha_i + (\nabla_{\gamma(0)}f_i)(\eta) = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . ■

An arc-analytic map  $f : X \rightarrow Y$  induces a map  $f_* : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ . Moreover, if  $f : X \rightarrow Y$  is analytic, then we also have maps at the level of  $n$ -jets  $f_{*n} : \mathcal{L}_n(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(Y)$  such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{L}(Y) \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ \mathcal{L}_n(X) & \xrightarrow{f_{*n}} & \mathcal{L}_n(Y) \end{array}$$

In particular, if  $X$  is non-singular,  $\text{Im } f_{*n} \subset \pi_n(\mathcal{L}(Y))$  since  $\pi_n : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$  is surjective.

For  $M$  a non-singular algebraic set and  $\sigma : M \rightarrow X \subset \mathbb{R}^N$  analytic, we define  $\text{Jac}_\sigma(x)$  the Jacobian matrix of  $\sigma$  at  $x$  with respect to a coordinate system at  $x$  in  $M$ . For  $\gamma$  an arc on  $M$  with origin  $\gamma(0) = x$ , we define the order of vanishing of  $\gamma$  along  $\text{Jac}_\sigma$  by  $\text{ord}_t \text{Jac}_\sigma(\gamma(t)) = \min\{\text{ord}_t \delta(\gamma(t)), \forall \delta \text{ } m\text{-minor of } \text{Jac}_\sigma\}$  where  $m = \min(d, N)$  and  $\gamma$  is expressed in the local coordinate system. This order of vanishing is independent of the choice of the coordinate system.

The critical locus of  $\sigma$  is  $C_\sigma = \{x \in M, \delta(x) = 0, \forall \delta \text{ } m\text{-minor of } \text{Jac}_\sigma\}$ . If  $E \subset M$  is locally described by an equation  $f = 0$  around  $x$  and if  $\gamma$  is an arc with origin  $\gamma(0) = x$  then  $\text{ord}_\gamma E = \text{ord}_t f(\gamma(t))$ .

### 2.3 The main theorem

**Lemma 2.3.1.** *Let  $X$  be an algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$  and  $f : X \rightarrow X$  a blow-Nash map. Let  $\sigma : M \rightarrow X$  be a sequence of blowings-up with non-singular centers such that  $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma : M \rightarrow X$  is Nash.*

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \tilde{\sigma} \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

After adding more blowings-up, we may assume that the critical loci of  $\sigma$  and  $\tilde{\sigma}$  are simultaneously normal crossing and denote them by  $\sum_{i \in I} \nu_i E_i$  and  $\sum_{i \in I} \tilde{\nu}_i E_i$ .

Then the property

$$\forall i \in I, \nu_i \geq \tilde{\nu}_i \tag{2.1}$$

doesn't depend on the choice of  $\sigma$ .

*Proof.* Given  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  as in the statement and using Hironaka flattening theorem [57] (which works as it is in the real algebraic case), there exist  $\pi_1$  and  $\pi_2$  regular such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{M} & & \\ & \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 & \\ M_1 & & & & M_2 \\ & \searrow \sigma_1 & & \swarrow \sigma_2 & \\ & & X & & \\ & \swarrow \tilde{\sigma}_1 & \downarrow f & \searrow \tilde{\sigma}_2 & \\ & & X & & \end{array}$$

The relation 2.1 means exactly that the Jacobian ideal of  $\sigma_i$  is included in the Jacobian ideal of  $\tilde{\sigma}_i$ . By the chain rule, the relations at the level  $M_i$  are preserved in  $\widetilde{M}$ . Again by the chain rule and since the previous diagram commutes, the relations in  $M_1$  and  $M_2$  must coincide.  $\blacksquare$

**Definition 2.3.2.** We say that a map  $f : X \rightarrow X$  as in Lemma 2.3.1 verifying the relation (2.1) satisfies the *Jacobian hypothesis*.

**Question 2.3.3.** May we find a geometric interpretation of this hypothesis?

The following example is a direct consequence of the chain rule.

**Example 2.3.4.** Let  $X$  be a non-singular algebraic set and  $f : X \rightarrow X$  a regular map satisfying  $|\det df| > c$  for a constant  $c > 0$ , then  $f$  satisfies the *Jacobian hypothesis*.

**Theorem 2.3.5 (Main theorem).** *Let  $X$  be an algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$  and  $f : X \rightarrow X$  a semialgebraic homeomorphism (for the Euclidean topology). If  $f$  is blow-Nash and satisfies the Jacobian hypothesis then  $f^{-1}$  is blow-Nash and satisfies the Jacobian hypothesis too.*

By Lemma 2.2.23 and Proposition 2.2.27, if  $X$  is a non-singular algebraic subset we get the following corollary.

**Corollary 2.3.6** ([40]). *Let  $X$  be a non-singular algebraic subset and  $f : X \rightarrow X$  a semialgebraic homeomorphism (for the Euclidean topology). If  $f$  is arc-analytic and if there exists  $c > 0$  satisfying  $|\det df| > c$  then  $f^{-1}$  is arc-analytic and there exists  $\tilde{c} > 0$  satisfying  $|\det df^{-1}| > \tilde{c}$ .*

**Remark 2.3.7.** We recover [40, Theorem 1.1] using the last corollary and [40, Corollary 2.2 & Corollary 2.3].

## 2.4 Proof of the main theorem

### 2.4.1 Change of variables

An algebraic version of the following lemma was already known in [31], [87] or [88, §2] with a proof in [97, 4.1]. The statement given below is more geometric and the proof is quite elementary.

**Lemma 2.4.1.** *Let  $X$  be a  $d$ -dimensional algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$ . We consider the following ideal of  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$*

$$H = \sum_{f_1, \dots, f_{N-d} \in I(X)} \Delta(f_1, \dots, f_{N-d}) ((f_1, \dots, f_{N-d}) : I(X))$$

where  $\Delta(f_1, \dots, f_{N-d})$  is the ideal generated by the  $(N-d)$ -minors of the matrix  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, N-d \\ j=1, \dots, N}}$ .

Then  $V(H)$  is the singular locus<sup>\*</sup>  $X_{\text{sing}}$  of  $X$ .

*Proof.* Let  $x \notin V(H)$  then there exist  $f_1, \dots, f_{N-d} \in I(X)$ ,  $\delta$  a  $(N-d)$ -minor of  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, N-d \\ j=1, \dots, N}}$  and  $h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  with  $hI(X) \subset (f_1, \dots, f_{N-d})$  and  $h\delta(x) \neq 0$ . Since  $\delta(x) \neq 0$ ,  $x$  is a non-singular point of  $V(f_1, \dots, f_{N-d})$ . Furthermore we have  $X = V(I(X)) \subset V(f_1, \dots, f_{N-d}) \subset V(hI(X))$  and, since  $h(x) \neq 0$ , in an open neighborhood  $U$  of  $x$  in  $\mathbb{R}^N$  we have  $V(hI(X)) \cap U = X \cap U$ . Hence  $V(f_1, \dots, f_{N-d}) \cap U = X \cap U$ . So  $x$  is a non-singular point of  $X$  by [17, Proposition 3.3.10]. We proved that  $X_{\text{sing}} \subset V(H)$ .

Now, assume that  $x \in X \setminus X_{\text{sing}}$ . With the notation of [17, §3], the local ring  $\mathcal{R}_{X,x} = \mathcal{R}_{\mathbb{R}^N,x}/I(X)\mathcal{R}_{\mathbb{R}^N,x}$  is regular, so we may find a regular system of parameters  $(f_1, \dots, f_N)$  of  $\mathcal{R}_{X,x}$  such that  $I(X)\mathcal{R}_{\mathbb{R}^N,x} = (f_1, \dots, f_{N-d})\mathcal{R}_{\mathbb{R}^N,x}$  by [62, VI.1.8&VI.1.10]<sup>†</sup> (see also [17, Proposition 3.3.7]). Moreover, we may assume that the  $f_1, \dots, f_{N-d}$  are polynomials. We may use the following classical argument.  $\theta : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N] \rightarrow \mathbb{R}^N$  defined by  $f \mapsto f(x)$  induces an isomorphism  $\theta' : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Then  $\text{rk} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) = \dim \theta((f_1, \dots, f_{N-d}))$  which is, by  $\theta'$ , the dimension of  $((f_1, \dots, f_{N-d}) + \mathfrak{m}_x^2)/\mathfrak{m}_x^2$  as a subspace of  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . If we denote by  $\mathfrak{m}$  the maximal ideal of  $\mathcal{R}_{X,x} = (\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]/(f_1, \dots, f_{N-d}))_{\mathfrak{m}_x}$ , we have  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{m}_x/((f_1, \dots, f_{N-d}) + \mathfrak{m}_x^2)$ . So we have  $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + \text{rk} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) = N$ . Furthermore, since  $\mathcal{R}_{X,x}$  is a  $d$ -dimensional regular local ring,  $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d$ . Hence  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, N-d \\ j=1, \dots, N}}$  is of rank  $N-d$  and so there exists  $\delta$  a  $(N-d)$ -minor of  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, N-d \\ j=1, \dots, N}}$ .

<sup>\*</sup>By singular locus we mean the complement of the set of non-singular points in dimension  $d$  as in [17, 3.3.13] (and not the complement of non-singular points in every dimension). We may avoid this precision with the supplementary hypothesis that every irreducible component of  $X$  is of dimension  $d$  or in the pure dimensional case.

<sup>†</sup>Since  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}^N,x} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]_{\mathfrak{m}_x}$



such that  $\delta(x) \neq 0$ . Assume that  $I(X) = (g_1, \dots, g_r)$  in  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ . Then  $g_i = \sum \frac{f_j}{q_j}$  with  $q_j(x) \neq 0$ , so  $g_i h_i \in (f_1, \dots, f_{N-d})$  with  $h_i = \prod q_j$ . Then  $h = \prod h_i$  satisfies  $h(x) \neq 0$  and  $hI(X) \subset (f_1, \dots, f_{N-d})$ . So  $x \notin V(H)$ . Hence  $V(H) \subset X_{\text{sing}} \cup (\mathbb{R}^N \setminus X)$ .

To complete the proof, it remains to prove that  $V(H) \subset X$ . Let  $x \notin X$ . There exist  $f_1, \dots, f_{N-d} \in I(X)$  such that  $f_i(x) \neq 0$ . We construct by induction  $N - d$  polynomials of the form  $g_i = a_i f_i$  with  $g_i(x) \neq 0$  and  $(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{N-d})_x \neq 0$ . Suppose that  $g_1, \dots, g_{j-1}$  are constructed, if  $(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{j-1} \wedge df_j)_x \neq 0$ , we can take  $a_j = 1$ , so we may assume that  $(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{j-1} \wedge df_j)_x = 0$ . Then we just have to take some  $a_j$  satisfying  $(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{j-1} \wedge da_j)_x \neq 0$  and  $a_j(x) \neq 0$  since  $(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{j-1} \wedge d(a_j f_j))_x = f_j(x)(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{j-1} \wedge da_j)_x$ . Then we have  $g_1, \dots, g_{N-d} \in I(X)$  whose a  $(N - d)$ -minor  $\delta$  satisfies  $\delta(x) \neq 0$ . Moreover we have  $g_i(x) \neq 0$  and  $g_i I \subset (g_1, \dots, g_{N-d})$ . So  $x \notin V(H)$ .  $\blacksquare$

**Definition 2.4.2.** Let  $X$  be an algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$ . For  $e \in \mathbb{N}$ , we set

$$\mathcal{L}^{(e)}(X) = \{ \gamma \in \mathcal{L}(X), \exists g \in H, g(\gamma(t)) \not\equiv 0 \pmod{t^{e+1}} \}$$

where  $H$  is defined in Lemma 2.4.1.

**Remark 2.4.3.**  $\mathcal{L}(X) = \left( \bigcup_{e \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{(e)}(X) \right) \sqcup \mathcal{L}(X_{\text{sing}})$

**Remark 2.4.4.** In [26], Denef–Loeser set  $\mathcal{L}^{(e)}(X) = \mathcal{L}(X) \setminus \pi_e^{-1}(\mathcal{L}_e(X_{\text{sing}}))$  and used the Nullstellensatz to get that  $I(X_{\text{sing}})^c \subset H$  for some  $c$  since  $X_{\text{sing}} = V(H)$ . Since we can't do that in our case, we defined differently  $\mathcal{L}^{(e)}(X)$ .

The following lemma is an adaptation of Denef–Loeser key lemma [26, Lemma 3.4] to fulfill our settings. The aim of the above-mentioned lemma is to allow the proof of a generalization of Kontsevich's birational transformation rule (change of variables) of [60] to handle singularities. We can find a first adaption to our settings in the non-singular case in [59, Lemma 4.2].

**Lemma 2.4.5.** Let  $\sigma : M \rightarrow X$  be a proper generically<sup>\*</sup> one-to-one Nash map where  $M$  is a non-singular algebraic subset of  $\mathbb{R}^p$  of dimension  $d$  and  $X$  an algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$  of dimension  $d$ . For  $e, e' \in \mathbb{N}$ , we set

$$\Delta_{e,e'} = \left\{ \gamma \in \mathcal{L}(M), \text{ord}_t(\text{Jac}_\sigma(\gamma(t))) = e, \sigma_*(\gamma) \in \mathcal{L}^{(e')}(X) \right\}$$

For  $n \in \mathbb{N}$ , let  $\Delta_{e,e',n}$  be the image of  $\Delta_{e,e'}$  by  $\pi_n$ . Let  $e, e', n \in \mathbb{N}$  with  $n \geq \max(2e, e')$ , then:

- (i) Given  $\gamma \in \Delta_{e,e'}$  and  $\delta \in \mathcal{L}(X)$  with  $\sigma_*(\gamma) \equiv \delta \pmod{t^{n+1}}$  there exists a unique  $\eta \in \mathcal{L}(M)$  such that  $\sigma_*(\eta) = \delta$  and  $\eta \equiv \gamma \pmod{t^{n-e+1}}$ .
- (ii) Let  $\gamma, \eta \in \mathcal{L}(M)$ . If  $\gamma \in \Delta_{e,e'}$  and  $\sigma(\gamma) \equiv \sigma(\eta) \pmod{t^{n+1}}$  then  $\gamma \equiv \eta \pmod{t^{n-e+1}}$  and  $\eta \in \Delta_{e,e'}$ .
- (iii) The set  $\Delta_{e,e',n}$  is a union of fibers of  $\sigma_{*n}$ .
- (iv)  $\sigma_{*n}(\Delta_{e,e',n})$  is constructible and  $\sigma_{*n|_{\Delta_{e,e',n}}} : \Delta_{e,e',n} \rightarrow \sigma_{*n}(\Delta_{e,e',n})$  is a piecewise trivial fibration<sup>†</sup> with fiber  $\mathbb{R}^e$ .

<sup>\*</sup>i.e.  $\sigma$  is a Nash map which is one-to-one away from a subset  $S$  of  $X$  with  $\dim S < \dim X$  and  $\dim \sigma^{-1}(S) < \dim M$ .

<sup>†</sup>By a trivial piecewise fibration, we mean there exist a finite partition of  $\sigma_{*n}(\Delta_{e,e',n})$  with constructible parts and a trivial fibration given by a constructible isomorphism over each part.

**Remark 2.4.6.** It is natural to use Taylor expansion to prove some approximation theorems concerning power series as we are going to do for 2.4.5.(i). For instance, we may find similar argument in [48], [6], or [31]. For 2.4.5.(i), we will follow the proof of [26, Lemma 3.4] with some differences to match our framework. Concerning 2.4.5.(iv), we can't use anymore the section argument of [26] since  $\sigma$  is not assumed to be birational.

**Lemma 2.4.7** (Reduction to complete intersection). *Let  $X$  be an algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$  of dimension  $d$ . For each  $e \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}^{(e)}(X)$  is covered by a finite number of sets of the form*

$$A_{h,\delta} = \{ \gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), (h\delta)(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{t^{e+1}} \}$$

with  $\delta$  a  $N - d$ -minor of the matrix  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,\dots,N-d \\ j=1,\dots,N}}$  and  $h \in ((f_1, \dots, f_{N-d}) : I(X))$  for some  $f_1, \dots, f_{N-d} \in I(X)$ .  
Moreover,

$$\mathcal{L}(X) \cap A_{h,\delta} = \{ \gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), f_1(\gamma) = \dots = f_{N-d}(\gamma) = 0, h\delta(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{t^{e+1}} \}$$

**Remark 2.4.8.** We may have different polynomials  $f_1, \dots, f_{N-d}$  for two different  $A_{h,\delta}$ .

*Proof.* By noetherianity, we may assume that  $H = (h_1\delta_1, \dots, h_r\delta_r)$  with  $h_i, \delta_i$  as desired. Therefore,  $\mathcal{L}^{(e)}(X) \subset \cup A_{h_i,\delta_i}$ .

Finally,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) \cap A_{h,\delta} &= \{ \gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X), f(\gamma) = 0, h\delta(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{t^{e+1}} \} \\ &= \{ \gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), f_1(\gamma) = \dots = f_{N-d}(\gamma) = 0, h\delta(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{t^{e+1}} \} \end{aligned}$$

Indeed, for the second equality, if  $f \in I(X)$  then  $hf \in (f_1, \dots, f_{N-d})$ , hence if  $\gamma$  vanishes the  $f_i$ , then  $hf(\gamma) = 0$ , and so  $f(\gamma) = 0$  since  $h(\gamma) \neq 0$ .  $\blacksquare$

*Proof of Lemma 2.4.5.* We first notice that 2.4.5.(iii) is a consequence of 2.4.5.(ii): using that  $\mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}_n(M)$  is surjective since  $M$  is smooth and that  $\pi_n \circ \sigma_* = \sigma_{*n} \circ \pi_n, \forall \pi_n(\gamma) \in \Delta_{e,e',n}$  we have

$$\begin{aligned} \pi_n(\gamma) \in \sigma_{*n}^{-1}(\sigma_{*n}(\pi_n(\gamma))) &= \{ \pi_n(\eta), \eta \in \mathcal{L}(M), \sigma(\eta) \equiv \sigma(\gamma) \pmod{t^{n+1}} \} \\ &\subset \{ \eta \in \Delta_{e,e',n}, \gamma \equiv \eta \pmod{t^{n-e+1}} \} \subset \Delta_{e,e',n} \text{ by 2.4.5.(ii)} \end{aligned}$$

Next 2.4.5.(ii) is a direct consequence of 2.4.5.(i). We apply 2.4.5.(i) to  $\gamma$  with  $\delta = \sigma_*(\eta)$ , hence there exists a unique  $\tilde{\eta}$  such that  $\tilde{\eta} \equiv \gamma \pmod{t^{n-e+1}}$  and  $\sigma_*(\tilde{\eta}) = \sigma_*(\eta)$ . By the assumptions on  $\sigma$  and the definition of  $\Delta_{e,e'}$ , for  $\varphi_1 \in \mathcal{L}(M)$  and  $\varphi_2 \in \Delta_{e,e'}$  with  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  we have  $\sigma(\varphi_1) \neq \sigma(\varphi_2)$ . Hence  $\eta = \tilde{\eta}$  and  $\eta \equiv \gamma \pmod{t^{n-e+1}}$ . Since  $\sigma(\gamma) \equiv \sigma(\eta) \pmod{t^{n+1}}$  and  $n \geq e'$ ,  $\sigma(\eta) \in \mathcal{L}^{(e')}(X)$ . We may write  $\eta(t) = \gamma(t) + t^{n+1-e}u(t)$  and applying Taylor expansion to  $\text{Jac}_\sigma(\gamma(t) + t^{n+1-e}u(t))$  we get that  $\text{Jac}_\sigma(\eta(t)) \equiv \text{Jac}_\sigma(\gamma(t)) \pmod{t^{e+1}}$  since  $n+1-e \geq e+1$ . So  $\eta \in \Delta_{e,e'}$ .

So we just have to prove 2.4.5.(i) and 2.4.5.(iv).

We begin to refine the cover of Lemma 2.4.7: for  $e'' \leq e'$ , we set

$$A_{h,\delta,e''} = \left\{ \gamma \in A_{h,\delta}, \text{ord}_t \delta(\gamma) = e'' \text{ and } \text{ord}_t \delta'(\gamma) \geq e'' \text{ for all } (N-d)\text{-minor } \delta' \text{ of } \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,\dots,N-d \\ j=1,\dots,N}} \right\}$$

Fix some  $A = A_{h,\delta,e''}$ , then it suffices to prove the lemma for  $\Delta_{e,e'} \cap \sigma^{-1}(A)$ .

Up to renumbering the coordinates, we may also assume that  $\delta$  is the determinant of the first  $N - d$  columns of  $\Delta = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,\dots,N-d \\ j=1,\dots,N}}$ .

We choose a local coordinate system of  $M$  at  $\gamma(0)$  in order to define  $\text{Jac}_\sigma$  and express arcs of  $M$  as elements of  $\mathbb{R}\{t\}^d$ .

Now, a crucial observation is that the first  $N - d$  rows of  $\text{Jac}_\sigma(\gamma)$  are  $\mathbb{R}\{t\}$ -linear combinations of the last  $d$  rows: the application

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N-d} \\ y & \longmapsto & \sigma(y) & \longmapsto & (f_i(\sigma(y)))_{i=1,\dots,N-d} \end{array}$$

is identically zero, so its Jacobian matrix is identically zero too and thus  $\Delta(\sigma(\gamma)) \text{Jac}_\sigma(\gamma) = 0$ . Let  $P$  be the transpose of the comatrix of the submatrix of  $\Delta$  given by the first  $N - d$  columns of  $\Delta$ , then  $P\Delta = (\delta I_{N-d}, W)$ . Moreover, we have  $W(\sigma(\gamma)) \equiv 0 \pmod{t^{e''}}$ . Indeed, if we denote  $\Delta_1, \dots, \Delta_{N-d}$  the  $N - d$  first columns of  $\Delta$  and  $W_1, \dots, W_d$  the columns of  $W$ , then  $W_j(\sigma(\gamma))$  is solution of  $(\Delta_1(\sigma(\gamma)), \dots, \Delta_{N-d}(\sigma(\gamma))) X = \delta(\sigma(\gamma)) \Delta_{N-d+j}(\sigma(\gamma))$  since

$$\begin{aligned} \delta(\sigma(\gamma)) \Delta(\sigma(\gamma)) &= (\Delta_1(\sigma(\gamma)), \dots, \Delta_{N-d}(\sigma(\gamma))) P(\sigma(\gamma)) \Delta(\sigma(\gamma)) \\ &= (\Delta_1(\sigma(\gamma)), \dots, \Delta_{N-d}(\sigma(\gamma))) (\delta(\sigma(\gamma)) I_{N-d}, W(\sigma(\gamma))) \end{aligned}$$

So, by Cramer's rule,

$$(W_j(\sigma(\gamma)))_i = \det(\Delta_1(\sigma(\gamma)), \dots, \Delta_{i-1}(\sigma(\gamma)), \Delta_{N-d+j}(\sigma(\gamma)), \Delta_{i+1}(\sigma(\gamma)), \dots, \Delta_{N-d}(\sigma(\gamma)))$$

Finally, the congruence arises because the minor formed by the  $N - d$  first columns is of minimal order by definition of  $A$ .

Now the columns of  $\text{Jac}_\sigma(\gamma)$  are solutions of

$$\left( t^{-e''} \cdot P(\sigma(\gamma)) \cdot \Delta(\sigma(\gamma)) \right) X = 0 \quad (2.2)$$

but since  $t^{-e''} \cdot P(\sigma(\gamma)) \cdot \Delta(\sigma(\gamma)) = \left( t^{-e''} \delta(\sigma(\gamma)) I_{N-d}, t^{-e''} W(\sigma(\gamma)) \right)$  we may express the first  $N - d$  coordinates of each solution in terms of the last  $d$  coordinates. This completes the proof of the observation.

For 2.4.5.(i), it suffices to prove that for all  $v \in \mathbb{R}\{t\}^N$  satisfying  $\sigma(\gamma) + t^{n+1}v \in \mathcal{L}(X)$  there exists a unique  $u \in \mathbb{R}\{t\}^d$  such that

$$\sigma(\gamma + t^{n+1-e}u) = \sigma(\gamma) + t^{n+1}v \quad (2.3)$$

By Taylor expansion, we have

$$\sigma(\gamma(t) + t^{n+1-e}u) = \sigma(\gamma(t)) + t^{n+1-e} \text{Jac}_\sigma(\gamma(t))u + t^{2(n+1-e)} R(\gamma(t), u) \quad (2.4)$$

with  $R(\gamma(t), u)$  analytic in  $t$  and  $u$ . By (2.4), (2.3) is equivalent to

$$t^{-e} \text{Jac}_\sigma(\gamma(t))u + t^{n+1-2e} R(\gamma(t), u) = v \quad (2.5)$$

with  $n + 1 - 2e \geq 1$  by hypothesis.

Since  $\sigma(\gamma(t)) + t^{n+1}v \in \mathcal{L}(X)$  and using Taylor expansion, we get

$$0 = f_i(\sigma(\gamma(t)) + t^{n+1}v) = t^{n+1} \Delta(\sigma(\gamma(t)))v + t^{2(n+1)} S(\gamma(t), v)$$

with  $S(\gamma(t), v)$  analytic in  $t$  and  $v$ . So  $v$  is a solution of (2.2) and hence the first  $N - d$  coefficients of  $v$  are  $\mathbb{R}\{t\}$ -linear combinations of the last  $d$  coefficients with the same relations that for  $\text{Jac}_\sigma(\gamma)$ . This allows us to reduce (2.5) to

$$t^{-e} \text{Jac}_{p \circ \sigma}(\gamma(t))u + t^{n+1-2e} p(R(\gamma(t), u)) = p(v) \quad (2.6)$$

where  $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$  is the projection on the last  $d$  coordinates. The observation ensures that  $\text{ord}_t \text{Jac}_{p \circ \sigma}(\gamma(t)) = \text{ord}_t \text{Jac}_\sigma(\gamma(t)) = e$  and thus (2.6) is equivalent to

$$u = (t^{-e} \text{Jac}_{p \circ \sigma}(\gamma(t)))^{-1} p(v) - t^{n+1-2e} (t^{-e} \text{Jac}_{p \circ \sigma}(\gamma(t)))^{-1} p(R(\gamma(t), u)) \quad (2.7)$$

Applying the implicit function theorem to  $u(t, v)$  ensures that given an analytic arc  $v(t)$  there exists a solution  $u_v(t) = u(t, v(t))$ . Using the same argument as in the proof of 2.4.5.(ii), the solution  $u_v(t)$  is unique. This proves 2.4.5.(i).

Let us prove 2.4.5.(iv). Let  $\gamma \in \Delta_{e,e'} \cap \sigma^{-1}(A)$  then

$$\begin{aligned} \sigma_{*n}^{-1}(\pi_n(\sigma_*(\gamma))) &= \{ \eta \in \mathcal{L}_n(M), \sigma_{*n}(\eta) = \pi_n(\sigma_*(\gamma)) \} \\ &= \{ \pi_n(\eta), \eta \in \mathcal{L}(M), \sigma(\eta) \equiv \sigma(\gamma) \pmod{t^{n+1}} \} \text{ using that } \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}_n(M) \text{ is} \\ &\text{ surjective since } M \text{ is smooth and that } \pi_n \circ \sigma_* = \sigma_{*n} \circ \pi_n. \\ &= \{ \gamma(t) + t^{n+1-e}u(t) \pmod{t^{n+1}}, u \in \mathbb{R}\{t\}^d, \text{Jac}_{p \circ \sigma}(\gamma(t))u(t) \equiv 0 \pmod{t^e} \} \\ &\text{ by 2.4.5.(ii) and (2.6)} \end{aligned}$$

Thus, the fiber is an affine subspace of  $\mathbb{R}^{de}$ . There are invertible matrices  $A$  and  $B$  with coordinates in  $\mathbb{R}\{t\}$  such that  $A \text{Jac}_{p \circ \sigma}(\gamma(t))B$  is diagonal with entries  $t^{e_1}, \dots, t^{e_d}$  such that  $e = e_1 + \dots + e_d$ . Therefore the fiber is of dimension  $e$ .

Since  $\sigma$  is not assumed to be birational, we can't use the section argument of [26, 3.4] or [59, 4.2], instead we use a topological noetherianity argument to prove that  $\sigma_{*n|_{\Delta_{e,e',n}}}$  is a piecewise trivial fibration.

We may assume that  $M$  is semialgebraically connected, then by Artin-Mazur theorem [17, 8.4.4], there exist  $Y \subset \mathbb{R}^{p+q}$  a non-singular irreducible algebraic set of dimension  $\dim M$ ,  $M' \subset Y$  an open semialgebraic subset of  $Y$ ,  $s : M \rightarrow M'$  a Nash-diffeomorphism and  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^N$  a polynomial map such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{p+q} & \longleftarrow & Y & & \\ \downarrow \Pi & & \downarrow & \searrow g & \\ \mathbb{R}^p & \longleftarrow & M & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R}^N \\ & & \uparrow s \simeq & \nearrow & \\ & & M' & & \end{array}$$

Thus, we have

$$\sigma_{*n}^{-1}(\pi_n(\sigma_*(\gamma))) = \{ \gamma(t) + t^{n+1-e}u(t) \pmod{t^{n+1}}, u \in \mathbb{R}\{t\}^d, \text{Jac}_{g \circ s}(\gamma(t))u(t) \equiv 0 \pmod{t^e} \}$$

So  $\Delta_{e,e',n}$  is constructible and we may assume that  $\sigma_{*n} : \Delta_{e,e',n} \rightarrow \sigma_{*n}(\Delta_{e,e',n})$  is polynomial up to working with arcs over  $M'$  via  $s$ . The fibers (i.e.  $\mathbb{R}^e$ ) have odd Euler characteristic with compact support, so by Theorem 2.2.8 the image  $\sigma_{*n}(\Delta_{e,e',n})$  is constructible.

Let  $V = \{u_0 + u_1 t + \dots + u_n t^n, u_i \in \mathbb{R}^d\}$  and fix  $\Lambda_0 : V \rightarrow V_0$  a linear projection on a subspace of dimension  $e$ . The set  $\Omega_0 = \{\pi_n(\gamma(t)) \in \Delta_{e,e',n}, \dim \Lambda_0(\sigma_{*n}^{-1}(\pi_n(\sigma_*(\gamma)))) < e\}$

is closed, constructible and union of fibers of  $\sigma_{*n}$ . Therefore  $(\sigma_{*n}, \Lambda_0) : \Delta_{e,e',n} \setminus \Omega_0 \rightarrow \sigma_{*n}(\Delta_{e,e',n} \setminus \Omega_0) \times V_0$  is a constructible isomorphism. We now repeat the argument to the closed constructible subset  $\sigma_{*n}(\Omega_0)$  and so on. Indeed, assume that  $\Delta_{e,e',n} \supsetneq \Omega_0 \supsetneq \Omega_1 \supsetneq \dots \supsetneq \Omega_{i-1}$  are constructed as previously and that  $\Omega_{i-1} \neq \emptyset$ , then we may choose  $\Lambda_i$  such that  $\Omega_i \subsetneq \Omega_{i-1}$ . So on the one hand the process continues until one  $\Omega_i$  is empty, on the other hand it must stop because of the noetherianity of the  $\mathcal{AS}$ -topology. Therefore after a finite number of steps, one  $\Omega_i$  is necessarily empty.  $\blacksquare$

### 2.4.2 Essence of the proof

By our hypothesis, there exists a sequence of blowings-up  $\sigma : M \rightarrow X$  with non-singular centers such that  $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma : M \rightarrow X$  is Nash.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \tilde{\sigma} \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

After adding more blowings-up, we may assume that the critical loci of  $\sigma$  and  $\tilde{\sigma}$  are simultaneously normal crossing and denote them by  $\sum v_i E_i$  and  $\sum \tilde{v}_i E_i$ . Our hypothesis ensures that  $v_i \geq \tilde{v}_i$ .

In the same way, we may ensure that the inverse images of  $H$  (defined in Lemma 2.4.1) by  $\sigma$  and  $\tilde{\sigma}$  are also simultaneously normal crossing and denote them  $\sigma^{-1}(H) = \sum_{i \in I} \lambda_i E_i$  (resp.  $\tilde{\sigma}^{-1}(H) = \sum_{i \in I} \tilde{\lambda}_i E_i$ ).

We recall the usual notation<sup>\*</sup>. For  $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ , we set  $J = J(\mathbf{j}) = \{i, j_i \neq 0\} \subset I$ ,  $E_J = \cap_{i \in J} E_i$  and  $E_J^\bullet = E_J \setminus \cup_{i \in I \setminus J} E_i$ .

We also define:  $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M), \forall i \in J, \text{ord}_\gamma E_i = j_i, \gamma(0) \in E_J^\bullet\}$  and for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbf{j},n} = \pi_n(\mathcal{B}_{\mathbf{j}})$  and  $X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = \pi_n(\sigma_* \mathcal{B}_{\mathbf{j}}) = \sigma_{*n}(\mathcal{B}_{\mathbf{j},n})$ .

**Lemma 2.4.9.** *We have  $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{e(\mathbf{j}),e'(\mathbf{j})}(\sigma)$  where  $e(\mathbf{j}) = \sum_{i \in I} v_i j_i$  and  $e'(\mathbf{j}) = \sum_{i \in I} \lambda_i j_i$ .*

*Proof.* Let  $\gamma \in \mathcal{B}_{\mathbf{j}}$  and choose a local coordinate system of  $M$  at  $\gamma(0)$  such that the critical locus of  $\sigma$  is locally described by the equation  $\prod_{i \in J} x_i^{v_i} = 0$  and  $E_i$  by the equation  $x_i = 0$ . Since  $\text{ord}_\gamma E_i = j_i$ , we have  $\gamma_i(t) = c_j t^{j_i} + \dots$  and  $c_{j_i} \neq 0$ . Then  $\prod_{i \in J} \gamma_i^{v_i} = c t^{e(\mathbf{j})} + \dots$  with  $c \neq 0$ .

So we have  $\text{ord}_t(\text{Jac}_\sigma(\gamma(t))) = e(\mathbf{j})$ .

In the same way,  $\text{ord}_\gamma \sigma^{-1}(H) = e'(\mathbf{j})$  thus  $\text{ord}_{\sigma(\gamma)}(H) = e'(\mathbf{j})$ .  $\blacksquare$

Therefore we set  $A_n(\sigma) = \{\mathbf{j}, \sum_{i \in I} v_i j_i \leq \frac{n}{2}, \sum_{i \in I} \lambda_i j_i \leq n\}$ . Indeed, for each  $\mathbf{j} \in A_n(\sigma)$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{e(\mathbf{j}),e'(\mathbf{j})}(\sigma)$  and we may apply Lemma 2.4.5 at the level of  $n$ -jets.

The argument of the following lemma is essentially the same as [40, §4.2].

**Lemma 2.4.10** (A decomposition of jet spaces). *For all  $\mathbf{j} \in A_n(\sigma)$ , the sets  $X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$  are constructible subsets of  $\mathcal{L}_n(X)$  and  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = d(n+1) - s_{\mathbf{j}} - \sum_{i \in I} v_i j_i$  where  $s_{\mathbf{j}} = \sum_{i \in I} j_i$ .*

<sup>\*</sup>This notation is natural and classical. See [58, Chapter II, §1] for some properties of this stratification.

Moreover  $\text{Im}(\sigma_{*n}) = Z_n(\sigma) \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$  and the set  $Z_n(\sigma)$  satisfies  $\dim Z_n(\sigma) < d(n+1) - \frac{n}{c}$  where  $c = \max(2\nu_{\max}, \lambda_{\max})$ .

*Proof.* Consider  $\mathbf{j}$  such that  $E_{\mathbf{j}}^{\bullet} \neq \emptyset$  and  $\forall i \in I, 0 \leq j_i \leq n$ . The fiber of  $\mathcal{B}_{\mathbf{j},n} \rightarrow E_{\mathbf{j}}^{\bullet}$  is

$$\prod_{i \in J} (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n-j_i}) \times (\mathbb{R}^n)^{d-|J|} \simeq (\mathbb{R}^*)^{|J|} \times \mathbb{R}^{dn-s_{\mathbf{j}}}$$

since truncating the coordinates of  $\gamma \in \mathcal{B}_{\mathbf{j}}$  to degree  $n$  produces  $d - |J|$  polynomials of degree  $n$  with fixed constant terms and for  $i \in J$  a polynomial of the form  $c_{j_i} t^{j_i} + c_{j_i+1} t^{j_i+1} + \dots + c_n t^n$  with  $c_{j_i} \in \mathbb{R}^*$  and other  $c_k \in \mathbb{R}$ . We conclude that  $\dim \mathcal{B}_{\mathbf{j},n} = d(n+1) - s_{\mathbf{j}}$ .

We first assume that  $\mathbf{j} \in A_n(\sigma)$ . By Lemma 2.4.9,  $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{e(\mathbf{j}), e'(\mathbf{j})}(\sigma)$ . Hence by 2.4.5.(iv),  $X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$  is constructible since it is the image of the constructible set  $\mathcal{B}_{\mathbf{j},n}$  by the map  $\sigma_{*n|_{\Delta_{e(\mathbf{j}), e'(\mathbf{j})},n}}$  with fibers of odd Euler characteristic with compact support. Let  $\gamma_1 \in \mathcal{B}_{\mathbf{j},n}$  and  $\gamma_2 \in \Delta_{e(\mathbf{j}), e'(\mathbf{j})},n$  with  $\sigma_{*n}(\gamma_1) = \sigma_{*n}(\gamma_2)$ , then, by 2.4.5.(ii),  $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod{t^{n-e(\mathbf{j})+1}}$  with  $n - e(\mathbf{j}) \geq e(\mathbf{j})$  and hence  $\gamma_2 \in \mathcal{B}_{\mathbf{j},n}$ . Thus by 2.4.5.(iv) the map  $\mathcal{B}_{\mathbf{j},n} \rightarrow X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$  is a piecewise trivial fibration with fiber  $\mathbb{R}^{e(\mathbf{j})}$ . So we have  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = d(n+1) - s_{\mathbf{j}} - e(\mathbf{j})$  as claimed.

Otherwise  $\mathbf{j} \notin A_n(\sigma)$  and then  $\dim X_{\mathbf{j},n} \leq \dim \mathcal{B}_{\mathbf{j},n} = d(n+1) - s_{\mathbf{j}} < d(n+1) - \frac{n}{c}$  (since  $\frac{n}{2} < e(\mathbf{j}) \leq \nu_{\max} s_{\mathbf{j}}$  or  $n < e'(\mathbf{j}) \leq \lambda_{\max} s_{\mathbf{j}}$ ).  $\blacksquare$

**Remark 2.4.11.** The two previous lemmas work as they are if we replace  $\sigma$  by  $\tilde{\sigma}$ ,  $\nu_i$  by  $\tilde{\nu}_i$ ,  $\lambda_i$  by  $\tilde{\lambda}_i$  and  $c$  by  $\tilde{c}$ .

**Remark 2.4.12.** Remember that  $\text{Im} \sigma_{*n} \subset \pi_n(\mathcal{L}(X))$  (resp.  $\text{Im} \tilde{\sigma}_{*n} \subset \pi_n(\mathcal{L}(X))$ ). Moreover, since we may lift by  $\sigma$  an arc not entirely included in the singular locus,  $\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \text{Im} \sigma_{*n} \subset \pi_n(\mathcal{L}(X_{\text{sing}}))$ . The second part only works for  $\sigma$  and doesn't stand for  $\tilde{\sigma}$ .

In order to apply the virtual Poincaré polynomial, we are going to modify the objects of the partitions of Lemma 2.4.10.

**Notation 2.4.13.** We set

$$\begin{aligned} \pi_n(\widetilde{\mathcal{L}(X)}) &:= \overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \text{Im} \sigma_{*n})}^{AS} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma) \\ &\left( \text{resp. } \widetilde{\text{Im} \tilde{\sigma}_{*n}} := \overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{AS} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma})} X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma}) \right) \end{aligned}$$

where the closure is taken in the complement of  $\bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$  (resp. in  $\pi_n(\widetilde{\mathcal{L}(X)}) \setminus \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma})} X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})$ ).

Hence we still have the inclusion  $\widetilde{\text{Im} \tilde{\sigma}_{*n}} \subset \pi_n(\widetilde{\mathcal{L}(X)})$ , the unions are still disjoint and the dimensions remain the same.

**Lemma 2.4.14.** For  $\mathbf{j} \in A_n(\sigma)$  we have  $\beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) = \beta(E_{\mathbf{j}}^{\bullet}) (u-1)^{|J|} u^{nd - \sum (v_i+1)j_i}$ .  
(resp. for  $\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma})$  we have  $\beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})) = \beta(E_{\mathbf{j}}^{\bullet}) (u-1)^{|J|} u^{nd - \sum (\tilde{v}_i+1)j_i}$ )

*Proof.* We have

$$\begin{aligned} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) &= \beta(\mathcal{B}_{\mathbf{j},n}) u^{-\sum v_i j_i} \text{ by Lemma 2.4.5 and Lemma 2.4.9} \\ &= \beta(E_{\mathbf{j}}^{\bullet} \times (\mathbb{R}^*)^{|J|} \times \mathbb{R}^{dn-s_{\mathbf{j}}}) u^{-\sum v_i j_i} \text{ by the beginning of the proof of Lemma 2.4.10} \\ &= \beta(E_{\mathbf{j}}^{\bullet}) (u-1)^{|J|} u^{nd-s_{\mathbf{j}}-\sum v_i j_i} \end{aligned}$$

The same argument works for  $\tilde{\sigma}$  too.  $\blacksquare$

**Lemma 2.4.15.**  $\forall i \in I, v_i = \tilde{v}_i$

*Proof.* Applying the virtual Poincaré polynomial to the partitions of Notation 2.4.13, we get

$$\begin{aligned} & \beta\left(\pi_n(\overline{\mathcal{L}(X)})\right) - \beta\left(\overline{\text{Im } \tilde{\sigma}_{*n}}\right) - \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \cap A_n(\tilde{\sigma})} (\beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma}))) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \setminus A_n(\tilde{\sigma})} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma}) \setminus A_n(\sigma)} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})) + \beta\left(\overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \text{Im } \sigma_{*n})}^{AS}\right) - \beta\left(\overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{AS}\right) \end{aligned}$$

We set

$$\begin{aligned} P_n &= \beta\left(\pi_n(\overline{\mathcal{L}(X)})\right) - \beta\left(\overline{\text{Im } \tilde{\sigma}_{*n}}\right), & Q_n &= - \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \cap A_n(\tilde{\sigma})} (\beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma}))), \\ R_n &= \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \setminus A_n(\tilde{\sigma})} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)), & S_n &= - \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma}) \setminus A_n(\sigma)} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})), \\ T_n &= \beta\left(\overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \text{Im } \sigma_{*n})}^{AS}\right), & U_n &= -\beta\left(\overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{AS}\right). \end{aligned}$$

Assume there exists  $i_0 \in I$  such that  $v_{i_0} > \tilde{v}_{i_0}$ .

Then for  $n$  big enough,  $K_n = \left\{ s_{\mathbf{j}} + \sum_{i \in I} \tilde{v}_i j_i, \mathbf{j} \in A_n(\sigma) \cap A_n(\tilde{\sigma}), \sum_{i \in I} (v_i - \tilde{v}_i) j_i > 0 \right\}$  is not empty. The minimum  $k_n = \min K_n$  stabilizes for  $n$  greater than some rank  $n_0$ . Let  $k = k_{n_0}$ . Then, for  $n \geq n_0$ , the degree of  $Q_n$  is  $\max \{d(n+1) - s_{\mathbf{j}} - \sum_{i \in I} \tilde{v}_i j_i\} = d(n+1) - k$  using the computation at the beginning of the proof of Lemma 2.4.10.

The leading coefficients of  $P_n$  is positive since  $P_n = \beta\left(\pi_n(\overline{\mathcal{L}(X)}) \setminus \overline{\text{Im } \tilde{\sigma}_{*n}}\right)$ . The leading coefficient of  $Q_n$  is also positive. Hence the degree of the LHS is at least  $d(n+1) - k$ . Moreover, we have  $\deg R_n < d(n+1) - \frac{n}{c}$ ,  $\deg S_n < d(n+1) - \frac{n}{c}$ ,  $\deg T_n < d(n+1) - \frac{n}{\max(c,1)}$  and  $\deg U_n < d(n+1) - \frac{n}{c}$ . Indeed, for  $T_n, \pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \text{Im } \sigma_{*n} \subset \pi_n(\mathcal{L}(X_{\text{sing}}))$  and  $\dim(\pi_n(\mathcal{L}(X_{\text{sing}}))) \leq (n+1)(d-1) < d(n+1) - n$  by 2.2.33.(i). So the degree of the RHS is less than  $d(n+1) - \frac{n}{\max(c, \tilde{c}, 1)}$ . We get a contradiction for  $n$  big enough.  $\blacksquare$

**Corollary 2.4.16.**  $Q_n = 0$

Since  $\tilde{\sigma} : M \rightarrow X$  is a proper Nash map generically one-to-one, there exists a closed semialgebraic subsets  $S \subset X$  with  $\dim S < d$  such that for every  $p \in X \setminus S$ ,  $\tilde{\sigma}^{-1}(p)$  is a singleton.

**Corollary 2.4.17.** *Every arc on  $X$  not entirely included in  $S \cup X_{\text{sing}}$  may be uniquely lifted by  $\tilde{\sigma}$ .*

*Proof.* Let  $\gamma$  be an analytic arc on  $X$  not entirely in  $S$  and not entirely in the singular locus of  $X$ .

Assume that  $\gamma \notin \text{Im } \tilde{\sigma}_*$ . Then, by Proposition 2.2.21, we have

$$\tilde{\sigma}^{-1}(\gamma(t)) = \sum_{i=0}^m b_i t^i + b t^{\frac{p}{q}} + \dots, \quad b \neq 0, \quad m < \frac{p}{q} < m+1, \quad t \geq 0$$

Since  $\tilde{\sigma}^{-1}$  is locally Hölder by Remark 2.2.20, there is  $N \in \mathbb{N}$  such that for every analytic arc  $\eta$  on  $X$  with  $\gamma \equiv \eta \pmod{t^N}$  we have  $\tilde{\sigma}^{-1}(\eta(t)) \equiv \tilde{\sigma}^{-1}(\gamma(t)) \pmod{t^{m+1}}$ . Hence such an analytic arc  $\eta$  isn't in the image of  $\tilde{\sigma}_*$  and for  $n \geq N$ ,  $\pi_n(\eta)$  isn't in the image of  $\tilde{\sigma}_{*n} : \mathcal{L}_n(M) \rightarrow \pi_n(\mathcal{L}(X))$ . Hence  $\left(\pi_n^n|_{\pi_n(\mathcal{L}(X))}\right)^{-1}(\pi_n(\gamma)) \subset \pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \text{Im}(\tilde{\sigma}_{*n})$ .

The first step consists in computing the dimension of the fiber  $\left(\pi_N^n|_{\pi_n(\mathcal{L}(X))}\right)^{-1}(\pi_N(\gamma))$  where  $n \geq N$ . For that, we will work with a resolution  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  (for instance  $\sigma$ ) instead of  $\tilde{\sigma}$  since every analytic arc on  $X$  not entirely included in  $X_{\text{sing}}$  may be lifted to  $\tilde{X}$  by  $\rho$ . Let  $\theta$  be the unique analytic arc on  $\tilde{X}$  such that  $\rho(\theta) = \gamma$ . Let  $e = \text{ord}_t(\text{Jac}_\rho(\theta(t)))$  and  $e'$  be such that  $\gamma \in \mathcal{L}^{(e')}(X)$ . We may assume that  $N \geq \max(2e, e')$  in order to apply Lemma 2.4.5 to  $\rho$  for  $\gamma$ .

We consider the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\tilde{X}) & \xrightarrow{\rho_*} & \mathcal{L}(X) \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ \mathcal{L}_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{\rho_{*n}} & \pi_n(\mathcal{L}(X)) \\ \pi_N^n \downarrow & & \downarrow \pi_N^n \\ \mathcal{L}_N(\tilde{X}) & \xrightarrow{\rho_{*N}} & \pi_N(\mathcal{L}(X)) \end{array}$$

Since the fibers of  $\rho_{*n}|_{\Delta_{e,e',n}}$  and  $\rho_{*N}|_{\Delta_{e,e',N}}$  are of dimension  $e$ , and since the fibers of  $\pi_N^n : \mathcal{L}_n(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{L}_N(\tilde{X})$  are of dimension  $(n - N)d$ , we have  $\dim \left( \left(\pi_N^n|_{\pi_n(\mathcal{L}(X))}\right)^{-1}(\pi_N(\gamma)) \right) = (n - N)d$ .

Hence  $\dim(\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \text{Im}(\tilde{\sigma}_{*n})) \geq (n - N)d$ . And so, with the notation of Lemma 2.4.15, we have

$$P_n + 0 = R_n + S_n + T_n + U_n$$

with  $\deg P_n \geq (n - N)d = (n + 1)d - (N + 1)d$  and  $\deg(R_n + S_n + T_n + U_n) < (n + 1)d - \frac{n}{\max(c, \tilde{c}, 1)}$ . We get a contradiction for  $n$  big enough. ■

*End of the proof of Theorem 2.3.5.* Let  $\gamma$  be an analytic arc on  $X$  not entirely included in  $S \cup X_{\text{sing}}$ . By Corollary 2.4.17 and since  $\gamma$  is not entirely included in  $S \cup X_{\text{sing}}$ ,  $\tilde{\sigma}^{-1}(\gamma(t))$  is well defined and analytic. Hence  $f^{-1}(\gamma(t)) = \sigma(\tilde{\sigma}^{-1}(\gamma(t)))$  is real analytic. Finally  $f^{-1}$  is generically arc-analytic in dimension  $d = \dim X$ .

So  $f^{-1}$  is blow-Nash by Proposition 2.2.27 and  $\forall i \in I$ ,  $v_i = \tilde{v}_i$  by Lemma 2.4.15. Then, arguing as in Lemma 2.3.1,  $f^{-1}$  satisfies the Jacobian hypothesis too. ■





# Une fonction zêta motivique pour l'équivalence blow-Nash

## 3.1 Introduction

In the context of motivic integration, J. Denef and F. Loeser [25] [29] associate a formal power series to a function  $f : X \rightarrow \mathbb{A}^1$  defined on a non-singular (scheme theoretic) algebraic variety. This power series, called the motivic zeta function of  $f$ , comes in various forms by modifying the ring where the coefficients lie. For instance they work with the classical Grothendieck ring of algebraic varieties over some field in order to define the naive motivic zeta function or they work with an equivariant Grothendieck ring which encodes actions of the unit roots in order to define the equivariant motivic zeta function. This equivariant structure allows them to get a convolution formula [27] which computes a modified equivariant zeta function of  $f \oplus g$  by applying coefficientwise a product defined in terms of quotient to some modified equivariant zeta functions of  $f$  and  $g$ .

The key lemma for the motivic change of variables formula [26] ensures that their zeta functions are rational. Thus they admit a limit whose additive inverses coincide with the classical Milnor fiber for the known realizations. So the convolution formula induces a Thom–Sebastiani formula for these motivic Milnor fibers.

Similarly S. Koike and A. Parusiński [59] associate a formal power series with coefficients in  $\mathbb{Z}$  to a real analytic function  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  using the Euler characteristic with compact support which is the only additive invariant of semialgebraic sets. This way they define a naive zeta function and two zeta functions with sign (a positive one and a negative one) which play the role of the equivariant zeta function. Particularly these zeta functions with sign admit formulas similar to the ones of Denef–Loeser such as a convolution formula. Thanks to an adaptation to the real analytic case of the key lemma for the motivic change of variables formula, it turns out that Koike–Parusiński zeta functions are invariants of the blow-analytic equivalence of T.-C. Kuo [65] for real analytic germs.

G. Fichou [32] brings a richer structure by using its virtual Poincaré polynomial for  $\mathcal{AS}$ -sets instead of the Euler characteristic with compact support. This way he defines a naive zeta function and two zeta functions with sign (although he has to modify the definition to make sense). He also has to restrict to Nash functions in order to get a rationality formula. Thus he introduces [32] a first notion of blow-Nash equivalence for Nash germs so that its zeta functions are invariants of this relation. As it is not known if this relation is an equivalence relation, he introduces a more general notion of blow-Nash equivalence [33] in terms of Nash modifications which is an equivalence relation but two Nash germs which are blow-Nash equivalent in the sense of [33] have to satisfy an additional condition to ensure they have the same zeta functions. One now uses a definition which is midway between the both previous ones [36, 34, 35] by adding the above cited additional condition, but it is not clear that this relation is an equivalence relation.

Notice that contrary to the zeta functions of Denef–Loeser, the zeta functions of Koike–

Parusiński or the ones of Fichou are local in a sense we will precise.

G. Guibert, F. Loeser and M. Merle [51] introduced an equivariant Grothendieck ring for actions of the multiplicative group on (scheme theoretic) algebraic varieties over some fixed algebraic variety (this Grothendieck ring is equivalent to the one of Denef–Loeser for actions of the unit roots). In this paper we first adapt this framework to  $\mathcal{AS}$ -sets up to  $\mathbb{R}^*$ -equivariant  $\mathcal{AS}$ -bijections over  $\mathbb{R}^*$ .

Then this allows us to define a local zeta function similar to the one of Fichou but with additional structures. After having highlighted the links between our zeta function to the ones of Koike–Parusiński and Fichou, we show that our zeta function is also rational.

The main part of this work consists in proving that our additional structures bring a convolution formula. The main idea of the proof consists in monomializing  $f$  and  $g$  in order to assume that they have only normal crossings. This way we observe that if we modify slightly the definition of our zeta function, the modified zeta function of  $f \oplus g$  may be computed by applying coefficientwise a certain product to the modified zeta functions of  $f$  and  $g$ . The definition of this product is very natural and is based on the fact that our Grothendieck ring encodes the angular components thus we avoid taking a quotient.

We may notice that this modified zeta function already appeared in [27] and [59] in their respective settings. In a way similar to [59] we prove that our modified zeta function is equivalent to our zeta function. Particularly, we don't lose any information working with this modified zeta function.

The end of this paper is devoted to the study of the links with the blow-Nash equivalence. To this purpose we introduce a new characterization of the blow-Nash equivalence which is an equivalence relation. Our zeta function is an invariant of this relation. The convolution formula allows us to make some progress concerning the blow-Nash classification of Brieskorn polynomials.

## 3.2 Geometric framework

K. Kurdyka [67] introduced semialgebraic arc-symmetric subsets of  $\mathbb{R}^d$  which are semialgebraic subsets of  $\mathbb{R}^d$  such that given a real analytic arc on  $\mathbb{R}^d$  either this arc is entirely included in the subset or it meets it at isolated points only. We are going to work with  $\mathcal{AS}$ -sets, a slightly different notion introduced by A. Parusiński [84].

**Definition 3.2.1** ([84]). We say that a semialgebraic subset  $A \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  is an  $\mathcal{AS}$ -set if for every real analytic arc  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  such that  $\gamma((-1, 0)) \subset A$  there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $\gamma((0, \varepsilon)) \subset A$ .

**Definition 3.2.2.** By an  $\mathcal{AS}$ -map we mean a map between  $\mathcal{AS}$ -sets whose graph is  $\mathcal{AS}$  and by an  $\mathcal{AS}$ -isomorphism we mean a bijection between  $\mathcal{AS}$ -sets whose graph is  $\mathcal{AS}$ .

**Remark 3.2.3** ([84, Remark 4.2]). The family  $\mathcal{AS}$  is the boolean algebra spanned by semialgebraic arc-symmetric subsets of  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  (in the sense of [67, Définition 1.1]). Moreover closed (for the Euclidean topology)  $\mathcal{AS}$ -sets are exactly the semialgebraic arc-symmetric subsets of  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .

The following proposition results from the proof of [84, Theorem 2.5]. It is an  $\mathcal{AS}$  version of [67, Théorème 1.4].

**Proposition 3.2.4.** *The closed  $\mathcal{AS}$ -subsets of  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  are exactly the closed sets of a noetherian topology on  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .*

**Definition 3.2.5.** Let  $Y, X, F$  be three  $\mathcal{AS}$ -sets and  $p : Y \rightarrow X$  be an  $\mathcal{AS}$ -map. We say that  $p$  is a locally trivial  $\mathcal{AS}$ -fibration with fibre  $F$  if every  $x \in X$  admits an open  $\mathcal{AS}$  neighborhood  $U$  such that  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  is an  $\mathcal{AS}$ -isomorphism such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

The following proposition is a direct consequence of the noetherianity of the  $\mathcal{AS}$  topology.

**Proposition 3.2.6.** *A locally trivial  $\mathcal{AS}$ -fibration  $p : Y \rightarrow X$  with fibre  $F$  is a piecewise trivial fibration with fiber  $F$ , i.e. we may break  $X$  into finitely many  $\mathcal{AS}$ -sets  $X = \bigsqcup_{\alpha=1}^k X_{\alpha}$  such that  $p^{-1}(X_{\alpha})$  is  $\mathcal{AS}$ -isomorphic to  $X_{\alpha} \times F$ .*

Nash maps and Nash manifolds were introduced by J. Nash in [79] considering real analytic functions satisfying non-trivial polynomial equations. M. Artin and B. Mazur gave a new description of these objects in [7] in terms of maps which can be lifted to polynomial maps on non-singular irreducible real algebraic set.

The benefits of Nash functions is that they share good algebraic properties with polynomial functions and good geometric properties with real analytic geometry.

**Definition 3.2.7** (Nash functions and Nash maps [79][17]). Let  $U \subset \mathbb{R}^d$  be an open semialgebraic subset. A function  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be Nash if it satisfies one of the two following equivalent conditions:

1.  $f$  is semialgebraic and  $C^{\infty}$ .
2.  $f$  is analytic and satisfies a nontrivial polynomial equation.

A map  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  is Nash if its coordinate functions are Nash.

**Remark 3.2.8.** Obviously, the zero locus of a Nash function is an  $\mathcal{AS}$ -set.

**Definition 3.2.9.** A Nash submanifold of dimension  $d$  is a semialgebraic subset  $M$  of  $\mathbb{R}^n$  such that for every  $x \in M$  there exist an open semialgebraic neighborhood  $U$  of  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ , an open semialgebraic neighborhood  $V$  of 0 in  $\mathbb{R}^n$  and a Nash isomorphism  $\varphi : U \rightarrow V$  such that  $\varphi(x) = 0$  et  $\varphi(M \cap U) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V$ .

**Example 3.2.10** ([17, Proposition 3.3.11]). Let  $V \subset \mathbb{R}^d$  be a non-singular<sup>\*</sup> algebraic set. Then, by the Jacobian criterion [17, Proposition 3.3.8] and the Nash inverse theorem [17, Proposition 2.9.7],  $V$  is a Nash submanifold of  $\mathbb{R}^d$ .

**Example 3.2.11.** A non-singular real algebraic set has a natural structure of Nash manifold.

<sup>\*</sup>Every point of  $V$  are non-singular in the same dimension, see [17, Definition 3.3.4].

**Proposition 3.2.12.** *Let  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  be a Nash function defined on a algebraic set  $V$ . There exists  $\sigma : \tilde{V} \rightarrow V$  a finite sequence of (algebraic) blowings-up with non-singular centers such that  $\tilde{V}$  is non-singular and  $f \circ \sigma : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$  has only normal crossings\**.

*Proof.* Let  $G(x, y) = \sum_{i=0}^p G_i(x)y^{p-i}$  be a non-trivial polynomial such that  $G(x, f(x)) = 0$ . We may assume that  $G_p \neq 0$ . Then  $f$  divides  $G_p$  seen as a Nash function.

There exists a finite sequence of algebraic blowings-up with non-singular centers such that  $G_p \circ \sigma$  is monomial, thus  $f \circ \sigma$  is monomial.  $\blacksquare$

### 3.3 A Grothendieck ring

In this section we adapt the Grothendieck ring introduced in [51] to our framework over  $\mathbb{R}$ . The classical Grothendieck ring of  $\mathcal{AS}$ -sets is too naive to get a convolution formula as in Section 3.6 and the lack of real unit roots prevents us from using an equivariant Grothendieck ring similar to the one of [25] or [28] as in [27].

**Definition 3.3.1.** We denote by  $K_0(\mathcal{AS})$  the free abelian group spanned by symbols  $[X]$  where  $X \in \mathcal{AS}$  with the relations

- (1) If there is a bijection whose graph is  $\mathcal{AS}$  between  $X$  and  $Y$  then  $[X] = [Y]$
- (2) If  $Y \subset X$  is a closed  $\mathcal{AS}$ -subset then  $[X \setminus Y] + [Y] = [X]$

Moreover we have a ring structure induced by the cartesian product  $[X \times Y] = [X][Y]$ . The unit is  $1 = [\text{pt}]$ .

**Remark 3.3.2.** The group  $K_0(\mathcal{AS})$  is well defined since  $\mathcal{AS}$  is a set.

**Remark 3.3.3.** If  $A, B \in \mathcal{AS}$  then  $[A \sqcup B] = [A] + [B]$ . We may prove this observation using that an  $\mathcal{AS}$ -set may be written as a finite disjoint union of locally closed  $\mathcal{AS}$ -sets.

We denote by  $\mathbb{L}_{\mathcal{AS}} = [\mathbb{R}]$  the class of the affine line and by  $\mathcal{M}_{\mathcal{AS}} = K_0(\mathcal{AS}) [\mathbb{L}_{\mathcal{AS}}^{-1}]$  the localization by the class of the affine line.

We define the category  $\text{Var}_{\text{mon}}^n$  whose objects are  $\mathcal{AS}$ -sets  $X$  endowed with an  $\mathcal{AS}$  action of  $\mathbb{R}^*$  (i.e. the graph of the map  $\mathbb{R}^* \times X \rightarrow X$  defined by  $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$  is  $\mathcal{AS}$ ) together with an  $\mathcal{AS}$ -map  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  such that  $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda^n \varphi(x)$ .

A morphism is an equivariant  $\mathcal{AS}$  map  $f : X \rightarrow Y$  over  $\mathbb{R}^*$ , i.e.  $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$  and the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow \varphi_1 & \swarrow \varphi_2 \\ & & \mathbb{R}^* \end{array}$$

**Definition 3.3.4.** We denote by  $K_0^n$  the free abelian group spanned by the symbols  $[\varphi : \mathbb{R}^* \circlearrowleft X \rightarrow \mathbb{R}^*]$  where  $\varphi : \mathbb{R}^* \circlearrowleft X \rightarrow \mathbb{R}^* \in \text{Var}_{\text{mon}}^n$  with the relations

\*i.e. every  $x \in \tilde{V}$  admits an open  $\mathcal{AS}$ -neighborhood such that  $f \circ \sigma$  equals a monomial times a nowhere vanishing function on this neighborhood.

(1) If there is  $f : X \rightarrow Y$  an equivariant bijection over  $\mathbb{R}^*$  whose graph is  $\mathcal{AS}$ , i.e.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\simeq]{f} & Y \\ & \searrow \varphi_X & \swarrow \varphi_Y \\ & \mathbb{R}^* & \end{array}$$

$$\text{then } [\varphi_X : \mathbb{R}^* \circ X \rightarrow \mathbb{R}^*] = [\varphi_Y : \mathbb{R}^* \circ Y \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

(2) If  $Y$  is a closed  $\mathcal{AS}$ -subset of  $X$  invariant by the action of  $\mathbb{R}^*$  then

$$[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circ X \rightarrow \mathbb{R}^*] = [\varphi_{X|X \setminus Y} : \mathbb{R}^* \circ X \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}^*] + [\varphi_{X|Y} : \mathbb{R}^* \circ Y \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

(3) Let  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}^* \in \text{Var}_{\text{mon}}^n$  and  $\psi = \varphi \circ \text{pr}_Y : Y \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^*$ . Let  $\sigma$  and  $\sigma'$  two actions on  $Y \times \mathbb{R}^m$  that are two liftings of the same action  $\tau$  on  $Y$ , i.e.  $\text{pr}_Y(\lambda \cdot_{\sigma} x) = \text{pr}_Y(\lambda \cdot_{\sigma'} x) = \lambda \cdot_{\tau} \text{pr}_Y(x)$ . Then  $(\psi, \sigma)$  and  $(\psi, \sigma')$  are in  $\text{Var}_{\text{mon}}^n$  and we add the relation  $[\psi, \sigma] = [\psi, \sigma']$ .<sup>\*</sup>

Moreover,  $K_0^n$  has a ring structure given by the fiber product over  $\mathbb{R}^*$  where the action is diagonal. Furthermore the class  $\mathbb{1}_n = [\text{id} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*]$ , where  $\mathbb{R}^*$  acts on  $\mathbb{R}^*$  by  $\lambda \cdot a = \lambda^n a$ , is a unit for this product.

Finally, the cartesian product induces a structure of  $K_0(\mathcal{AS})$ -algebra by

$$K_0(\mathcal{AS}) \rightarrow K_0^n, [A] \mapsto [A] \cdot \mathbb{1}_n = [A \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*]$$

Particularly we set  $\mathbb{L}_n = \mathbb{L}_{\mathcal{AS}} \mathbb{1}_n = [\text{pr}_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] \in K_0^n$  and  $\mathcal{M}^n = K_0^n [\mathbb{L}_n^{-1}]$ .

We consider the directed partial order  $<$  on  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  defined by  $n < m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n = km$ . For,  $n < m$ , we define the morphism  $\theta_{mn} : \text{Var}_{\text{mon}}^m \rightarrow \text{Var}_{\text{mon}}^n$  which keeps the same object, the same morphism but which replaces the action by  $\lambda \cdot_n x = \lambda^k \cdot_m x$ . Thus  $(\text{Var}_{\text{mon}}^n)_{n \geq 1}$  is an inductive system and we set  $\text{Var}_{\text{mon}} = \varinjlim \text{Var}_{\text{mon}}^n$ . We define  $K_0 = \varinjlim K_0^n$  and  $\mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{M}^n$  in the same way.

Thereby  $K_0$  has a natural structure of  $K_0(\mathcal{AS})$ -algebra and  $\mathcal{M}$  has a natural structure of  $\mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$ -algebra.

**Notation 3.3.5.** Since there is no confusion, we shall use the notation  $\mathbb{L}$  for  $\mathbb{L}_{\mathcal{AS}} \in K_0(\mathcal{AS})$ ,  $\mathbb{L}_n \in K_0^n$  and  $\varinjlim \mathbb{L}_n \in K_0$ .

We have a forgetful morphism of  $K_0(\mathcal{AS})$ -modules  $K_0^n \rightarrow K_0(\mathcal{AS})$  which associates  $\overline{[X]}$  to  $[X]$  where  $\overline{[X]}$  is just the class of  $X$  in  $K_0(\mathcal{AS})$ . This morphism isn't compatible with the ring structures. It extends to the morphism of  $K_0(\mathcal{AS})$ -modules  $K_0 \rightarrow K_0(\mathcal{AS})$  and to the morphisms of  $\mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$ -modules  $\mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$  and  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$ .

**Remark 3.3.6.**  $\overline{\left(\frac{A}{\mathbb{L}^n}\right)} = \frac{\overline{A}}{\mathbb{L}_{\mathcal{AS}}}$

**Remark 3.3.7.**  $\overline{\mathbb{1}} = \overline{[\mathbb{R}^*]} = \mathbb{L}_{\mathcal{AS}} - 1 \neq 1 \in K_0(\mathcal{AS})$

**Notation 3.3.8.** A class with an overline will always denote a naive class in  $K_0(\mathcal{AS})$  or  $\mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$ .

<sup>\*</sup>This relation allows us to focus on the angular component, we can move out the other coefficients, e.g. in the rationality formula.

### 3.4 The motivic local zeta function

In [25] and [29], J. Denef and F. Loeser introduced and studied a motivic global zeta function and defined the motivic Milnor fiber as a limit of this zeta function. In their framework, the realizations of the motivic Milnor fiber and the classical Milnor fiber coincide for the known additive invariants.

In real geometry, a similar work was first initiated by S. Koike and A. Parusiński [59] using the Euler characteristic with compact support. They defined a naive motivic local zeta function for real analytic functions. They also introduced a positive and a negative zeta function in order to study the equivariant side. Next, G. Fichou [32] defined similar zeta functions of Nash functions using the virtual Poincaré polynomial. These constructions are used to classify real singularities in terms of blow-analytic and blow-Nash equivalences, following T.-C. Kuo's work [63, 65].

Following J. Denef and F. Loeser, as well as G. Guibert, F. Loeser and M. Merle [51], we introduce a motivic local zeta function for Nash germs with coefficients in  $\mathcal{M}$ . This way, we obtain a richer zeta function which, in particular, encodes the equivariant aspects. By means of a resolution, we show that this zeta function is rational as all of the above-cited zeta functions. Finally, we shall exhibit the links with the zeta functions of S. Koike and A. Parusiński as well with those of G. Fichou.

#### 3.4.1 Definition

**Definitions 3.4.1.** For  $M$  a Nash manifold, we set

$$\mathcal{L}(M) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow M, \gamma \text{ analytic}\}$$

and

$$\mathcal{L}_n(M) = \mathcal{L}(M) / \sim_n$$

where  $\gamma_1 \sim_n \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod{t^{n+1}}$  in a local Nash coordinate system around  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ .

We have truncation maps  $\pi_n : \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}_n(M)$  and  $\pi_n^m : \mathcal{L}_m(M) \rightarrow \mathcal{L}_n(M)$  where  $m \geq n$ . These maps are surjective.

J. Nash first studied truncation of arcs on algebraic varieties in order to study singularities in 1964 [80]. They were then studied by K. Kurdyka, M. Lejeune-Jalabert, A. Nobile, M. Hickel and many others. They are a centerpiece of motivic integration developed by M. Kontsevich and then J. Denef and F. Loeser.

If  $h : M \rightarrow N$  is Nash, then  $h_* : \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(N)$  and  $h_{*n} : \mathcal{L}_n(M) \rightarrow \mathcal{L}_n(N)$  are well defined and the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M) & \xrightarrow{h_*} & \mathcal{L}(N) \\ \pi_m \downarrow & & \downarrow \pi_m \\ \mathcal{L}_m(M) & \xrightarrow{h_{*m}} & \mathcal{L}_m(N) \\ \pi_n^m \downarrow & & \downarrow \pi_n^m \\ \mathcal{L}_n(M) & \xrightarrow{h_{*n}} & \mathcal{L}_n(N) \end{array}$$

We refer the reader to [19, §2.4] for the properties of  $\mathcal{L}_n(M)$  and  $\mathcal{L}(M)$ .

Let  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash germ and let

$$\mathfrak{X}_n(f) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d), \gamma(0) = 0, f(\gamma(t)) \equiv ct^n \pmod{t^{n+1}}, c \neq 0\} \text{ for } n \geq 1$$

Then  $\mathfrak{X}_n(f)$  is Zariski-constructible and  $[\mathfrak{X}_n(f)]$  is well defined in  $K_0^n$  by the morphism  $\varphi : \mathfrak{X}_n(f) \rightarrow \mathbb{R}^*$  with  $\varphi(\gamma) = \text{ac}(f\gamma)$  and the action of  $\mathbb{R}^*$  given by  $\lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$ .

**Definition 3.4.2.** The motivic local zeta function is then defined by

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} [\mathfrak{X}_n(f)] \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}[[T]]$$

**Example 3.4.3.** Let  $f_k^\varepsilon = \varepsilon x^k$  where  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ . Then

$$Z_{f_k^\varepsilon}(T) = [f_k^\varepsilon : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] \frac{\mathbb{L}^{-1} T^k}{1 - \mathbb{L}^{-1} T^k}$$

*Proof.* Obviously

$$[\mathfrak{X}_n(f_k^\varepsilon)] \mathbb{L}^{-n} = \begin{cases} [f_k^\varepsilon : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] \mathbb{L}^{-q} & \text{if } n = kq \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

■

### 3.4.2 Link with previously defined motivic real zeta functions

#### 3.4.2.1 Koike–Parusiński zeta functions

**Definition 3.4.4.** We denote by  $K_0(SA)$  the free abelian group spanned by symbols  $[X]$  where  $X$  is semialgebraic with the relations

- (1) If there is a semialgebraic homeomorphism  $X \rightarrow Y$  then  $[X] = [Y]$ .
- (2) If  $Y \subset X$  is closed-semialgebraic then  $[X \setminus Y] + [Y] = [X]$ .

Moreover we have a ring structure induced by the cartesian product

- (3)  $[X \times Y] = [X][Y]$ .

**Remark 3.4.5** ([89]). The Grothendieck ring of semialgebraic sets up to semialgebraic homeomorphisms is isomorphic to  $\mathbb{Z}$  via the Euler characteristic with compact support, thus every additive invariants factorise through the Euler characteristic with compact support.

**Notation 3.4.6.** We set  $\mathbb{L}_{SA} = [\mathbb{R}] \in K_0(SA)$  and  $\mathcal{M}_{SA} = K_0(SA) [\mathbb{L}_{SA}^{-1}]$ .

**Remark 3.4.7.** The cartesian product induces a structure of  $K_0(\mathcal{AS})$ -module (resp.  $\mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$ -module) on  $K_0(SA)$  (resp.  $\mathcal{M}_{SA}$ ).

**Proposition 3.4.8.** *The maps*

$$F^> : \begin{array}{ccc} \text{Var}_{\text{mon}}^n & \longrightarrow & SA \\ (X, \sigma, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^*) & \longmapsto & \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) \end{array}$$



$$F^< : \begin{array}{ccc} \text{Var}_{\text{mon}}^n & \longrightarrow & SA \\ (X, \sigma, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^*) & \longmapsto & \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{<0}) \end{array}$$

induce morphisms of  $K_0(\mathcal{AS})$ -modules (resp.  $\mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$ -modules)

$$F^< : K_0 \rightarrow K_0(SA) \quad (\text{resp. } F^> : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{SA})$$

$$F^< : K_0 \rightarrow K_0(SA) \quad (\text{resp. } F^< : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{SA})$$

**Remark 3.4.9.** These morphisms are not compatible with the ring structures. Particularly, the following computation shows that the unit is not mapped to the unit

$$\chi_c(F^>(1)) = \chi_c(\mathbb{R}_{>0}) = -1 \neq 1 = \chi_c(\text{pt})$$

**Remark 3.4.10.** Given a rational fraction in  $\mathcal{M}[[T]]$ , we can't directly apply the forgetful morphism or the morphisms  $F^>$ ,  $F^<$  to the coefficients in the numerator and the denominator. We first have to develop it in series. Indeed, whereas  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}T^n = \frac{T}{1-T}$ , we have

$$\sum_{n \geq 1} \overline{\mathbb{1}}T^n = (\mathbb{L} - 1) \frac{T}{1-T} \neq \frac{(\mathbb{L} - 1)T}{(\mathbb{L} - 1) - (\mathbb{L} - 1)T} \in K_0(\mathcal{AS})[[T]]$$

This phenomenon is due to the fact that these morphisms are not compatible with the ring structures.

**Remark 3.4.11.**  $F^\varepsilon \left( \frac{A}{\mathbb{L}^n} \right) = \frac{F^\varepsilon(A)}{\mathbb{L}_{SA}^n}$ ,  $\varepsilon \in \{<, >\}$

**Proposition 3.4.12.** Given  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  a Nash germ, we recover from  $Z_f(T)$  the motivic zeta functions considered by S. Koike and A. Parusiński [59] applying the previous morphisms and the Euler characteristic with compact support at each coefficient:

$$Z_f^{\chi_c}(T) = \sum_{n \geq 1} \chi_c \left( \overline{[\mathfrak{X}_n(f)]} \right) (-1)^{nd} T^n \in \mathbb{Z}[[T]]$$

and

$$Z_f^{\chi_{c,\varepsilon}}(T) = \sum_{n \geq 1} \chi_c \left( F^\varepsilon \left( [\mathfrak{X}_n(f)] \right) \right) (-1)^{nd} T^n \in \mathbb{Z}[[T]]$$

where  $\varepsilon = >, <$ .

### 3.4.2.2 Fichou zeta functions

C. McCrory and A. Parusiński [76] proved there exists a unique additive invariant of real algebraic varieties which coincides with the Poincaré polynomial for compact non-singular varieties. This construction relies on the weak factorization theorem [3] in order to describe the Grothendieck ring of real algebraic varieties in terms of blowings-up. Then G. Fichou [32] extended this construction to  $\mathcal{AS}$ -sets up to Nash isomorphisms. Using an extension theorem of F. Guillén and V. Navarro Aznar [52], C. McCrory and A. Parusiński [76] proved the virtual Poincaré polynomial is in fact an invariant of  $\mathcal{AS}$ -sets up to bijections with  $\mathcal{AS}$  graph.

**Theorem 3.4.13** (The virtual Poincaré polynomial for  $\mathcal{AS}$ -sets [76][32][78]). *There is a unique map  $\beta : \mathcal{AS} \rightarrow \mathbb{Z}[u]$  which factorises through  $K_0(\mathcal{AS})$  as a ring morphism  $\beta : K_0(\mathcal{AS}) \rightarrow \mathbb{Z}[u]$ ,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AS} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}[u] \\ & \searrow & \nearrow \beta \\ & K_0(\mathcal{AS}) & \end{array}$$

such that

- If  $X \in \mathcal{AS}$  is non-empty, then  $\deg \beta(X) = \dim X$  and the leading coefficient is positive.
- If  $X \in \mathcal{AS}$  is compact and non-singular,  $\beta(X) = \sum_i \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2)u^i$ .

**Remark 3.4.14.** We recall the argument of [78, Theorem 4.6] which explains why the virtual Poincaré polynomial is an invariant of  $\mathcal{AS}$ -sets up to  $\mathcal{AS}$ -isomorphism. Let  $f : X \rightarrow Y$  be an  $\mathcal{AS}$ -isomorphism (i.e. a bijection whose graph is  $\mathcal{AS}$ ). First we may break  $X$  into a finite decomposition of locally compact  $\mathcal{AS}$ -sets,  $X = \sqcup X_i$ . Since  $f : X_i \rightarrow f(X_i)$  is semialgebraic we may break  $X_i$  into a finite decomposition of  $\mathcal{AS}$ -sets,  $X_i = \sqcup X_{ij}$ , where  $f : X_{ij} \rightarrow f(X_{ij})$  is continuous. Now we repeat these arguments on  $f^{-1} : f(X_{ij}) \rightarrow X_{ij}$  in order to get a finite decomposition  $X = \sqcup X_{ijk}$  of  $X$  into locally compact  $\mathcal{AS}$ -sets such that  $f : X_{ijk} \rightarrow f(X_{ijk})$  is a homeomorphism whose graph is  $\mathcal{AS}$ . By [78, Proposition 4.3],  $\beta(X_{ijk}) = \beta(f(X_{ijk}))$ . We conclude using the additivity of the virtual Poincaré polynomial.

**Proposition 3.4.15.** *The maps*

$$F^+ : \begin{array}{ccc} \text{Var}_{\text{mon}}^n & \longrightarrow & \mathcal{AS} \\ (X, \sigma, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^*) & \longmapsto & \varphi^{-1}(1) \end{array}$$

$$F^- : \begin{array}{ccc} \text{Var}_{\text{mon}}^n & \longrightarrow & \mathcal{AS} \\ (X, \sigma, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^*) & \longmapsto & \varphi^{-1}(-1) \end{array}$$

induce morphisms of  $K_0(\mathcal{AS})$ -algebras (resp.  $\mathcal{M}_{\mathcal{AS}}$ -algebras)

$$F^+ : K_0 \rightarrow K_0(\mathcal{AS}) \quad (\text{resp. } F^+ : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{AS}})$$

$$F^- : K_0 \rightarrow K_0(\mathcal{AS}) \quad (\text{resp. } F^- : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{AS}})$$

**Remark 3.4.16.**  $F^\varepsilon \left( \frac{A}{\mathbb{1}^n} \right) = \frac{F^\varepsilon(A)}{\mathbb{1}_{\mathcal{AS}}^n}$ ,  $\varepsilon \in \{-, +\}$

**Proposition 3.4.17.** *Given  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  a Nash germ, we recover from  $Z_f(T)$  the motivic zeta functions considered by G. Fichou in [32][33] applying the previous morphisms and the virtual Poincaré polynomial at each coefficient:*

$$Z_f^\beta(T) = \sum_{n \geq 1} \beta \left( \overline{[\mathfrak{X}_n(f)]} \right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$$

and

$$Z_f^{\beta, \varepsilon}(T) = \sum_{n \geq 1} \beta \left( F^\varepsilon \left( [\mathfrak{X}_n(f)] \right) \right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$$

where  $\varepsilon = +, -$ .

### 3.4.3 Rationality of the motivic local zeta function

#### 3.4.3.1 Change of variables key lemma

The following lemma is an adaptation of Denef–Loeser change of variables key lemma [26, Lemma 3.4] to our framework and avoiding the singular case. Denef–Loeser key lemma was introduced in order to generalize Kontsevich transformation rule.

**Lemma 3.4.18** (Change of variables key lemma [19, Lemma 4.5]). *Let  $h : M \rightarrow \mathbb{R}^d$  be a proper generically one-to-one Nash map with  $M$  a non-singular Nash variety. For  $e \in \mathbb{N}$ , let*

$$\Delta_e = \{ \gamma \in \mathcal{L}_n(M), \text{ord}_t \text{Jac}_h(\gamma) = e \}$$

*Then for  $n \geq 2e$ ,  $h_{*n}(\pi_n \Delta_e)$  is an  $\mathcal{AS}$ -set and  $h_{*n} : \pi_n \Delta_e \rightarrow h_{*n}(\pi_n \Delta_e)$  is a piecewise trivial fibration<sup>\*</sup> with fiber  $\mathbb{R}^e$ .*

#### 3.4.3.2 Monomialization

Let  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash function. By Proposition 3.2.12 there exists  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}^d$  a finite sequence of algebraic blowings-up such that  $f \circ h$  and the jacobian determinant  $\text{Jac}_h$  have simultaneously only normal crossings.

We denote by  $X_0(f) = f^{-1}(0)$  the zero locus of  $f$ . We denote by  $(E_i)_{i \in A}$  the irreducible  $\mathcal{AS}$  components of  $h^{-1}(X_0(f))$  and we set

$$N_i = \text{ord}_{E_i} f \circ h$$

and

$$v_i - 1 = \text{ord}_{E_i} \text{Jac } h$$

We use the usual stratification of  $Y$ : for  $I \subset A$ , we set  $E_I = \cap_{i \in I} E_i$  and  $E_I^\bullet = E_I \setminus \cup_{j \in A \setminus I} E_j$ . Thus  $Y = \sqcup_{I \subset A} E_I^\bullet$  and  $E_\emptyset = Y \setminus h^{-1}(X_0)$ .

For  $I \neq \emptyset$ , we define  $U_I$  using the following classical construction [96, 3.2 Existence Theorem]<sup>†</sup>.

Let  $(U_k, x)$  (resp.  $(U_l, x')$ ) be a coordinate system on  $Y$  around  $E_I^\bullet$  with  $U_k$  (resp.  $U_l$ ) an open  $\mathcal{AS}$  set such that  $(f \circ h)|_{U_k} = u(x) \prod_{i \in I} x_i^{N_i}$  with  $u$  a unit and  $E_i : x_i = 0$  (resp.  $(f \circ h)|_{U_l} = u'(x') \prod_{i \in I} x_i'^{N_i}$  with  $u'$  a unit and  $E_i : x_i' = 0$ ).

Assume that  $U_k \cap U_l \neq \emptyset$ . Then on  $U_k \cap U_l$  we have  $x_i' = \alpha_i^{kl}(x) x_i$  with  $\alpha_i^{kl}$  a unit so that  $f \circ \sigma(x') = u'(x') \prod_{i \in I} x_i'^{N_i} = (u'(x') \prod_{i \in I} \alpha_i^{kl}(x)^{N_i}) \prod_{i \in I} x_i^{N_i}$  hence  $u(x) = u'(x') \prod_{i \in I} \alpha_i^{kl}(x)^{N_i}$ . We index a family of such  $U_k$  covering  $E_I^\bullet$  by  $k \in K$ . Then let

$$T = \{ (x, (a_i), k) \in E_I^\bullet \times (\mathbb{R}^*)^{|I|} \times K, x \in U_k \}$$

and  $U_I = T / \sim$  where

$$(x, (a_i), k) \sim (y, (b_i), l) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ b_i = \alpha_i^{kl}(x) a_i \end{cases}$$

<sup>\*</sup>We mean that we may break  $h_{*n}(\pi_n \Delta_e)$  into disjoint  $\mathcal{AS}$  parts  $B_i$  such that  $h_{*n}^{-1}(B_i)$  is  $\mathcal{AS}$  and  $\mathcal{AS}$ -isomorphic to  $B_i \times \mathbb{R}^e$ .

<sup>†</sup>Using the adjunction formula, we may prove that  $U_I$  is in fact the fiber product of the  $U_i|_{E_i^\bullet}$ , where  $U_i$  is the complementary of the null section of the normal bundle of  $E_i$  in  $Y$ . Then  $f_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^*$  is just the map induced by  $f \circ h$ .

so that  $p_I : U_I \rightarrow E_I^\bullet$  is a locally trivial  $\mathcal{AS}$ -fibration with fiber  $(\mathbb{R}^*)^{|I|}$ .

For  $x \in U_k$  we define  $f_I^k : (E_I^\bullet \cap U_k) \times (\mathbb{R}^*)^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}^*$  by  $f_I^k(x, (a_i)) = u(x) \prod_{i \in I} a_i^{N_i}$  which induce a map  $f_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^*$ .

Let  $N_I = \gcd_{i \in I}(N_i)$  then there are  $\alpha_i$  such that  $N_I = \sum_{i \in I} \alpha_i N_i$ . We consider the action  $\tau$  of  $\mathbb{R}^*$  on  $U_I$  locally defined by  $\lambda \cdot (x, (a_i)_i) = (x, (\lambda^{\alpha_i} a_i)_i)$ .

**Definition 3.4.19.** The class  $[f_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^*, \tau]$  is well defined in  $K_0^{N_I}$ . We shall simply denote it by  $[U_I]$ .

**Proposition 3.4.20.**  $\overline{[U_I]} = (\mathbb{L} - 1)^{|I|} \overline{[E_I^\bullet]} \in K_0(\mathcal{AS})$

*Proof.* By Proposition 3.2.6, we have  $E_I^\bullet = \bigsqcup_{\alpha=1}^k X_\alpha$  with  $p_I^{-1}(X_\alpha) \simeq X_\alpha \times (\mathbb{R}^*)^{|I|}$ . Thus,

$$\overline{[U_I]} = \sum_{i=1}^k \overline{[p_I^{-1}(X_\alpha)]} = \sum_{i=1}^k \overline{[X_\alpha]} (\mathbb{L} - 1)^{|I|} = \overline{[E_I^\bullet]} (\mathbb{L} - 1)^{|I|} \in K_0(\mathcal{AS})$$

■

### 3.4.3.3 A rational expression of the motivic local zeta function

The following theorem is similar to the rationality results of the zeta functions of [29, 74, 51, 59, 32] in their respective frameworks.

**Theorem 3.4.21** (Rationality formula). *Let  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash germ. Let  $h : (Y, h^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  be as in Section 3.4.3.2. Then*

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}$$

*Proof.* The sum

$$[\mathfrak{X}_n(f)] = \sum_{e \geq 1} [\mathfrak{X}_n(f) \cap h_{*n} \Delta_e]$$

is finite since for  $\gamma = h_{*n} \varphi \in \mathfrak{X}_n(f) \cap \Delta_e$  we have  $\text{ord}_I \text{Jac}_h(\varphi) = \sum (v_i - 1) k_i$  and  $\text{ord}_I f \gamma = \sum N_i k_i$  where  $k_i = \text{ord}_{E_i} \varphi$ .

By the change of variables key lemma we have  $[\mathfrak{X}_n(f) \cap h_{*n} \Delta_e] = [h_{*n}^{-1} \mathfrak{X}_n(f) \cap \Delta_e] \mathbb{L}^{-e}$ .

Next

$$[h_{*n}^{-1} \mathfrak{X}_n(f) \cap \Delta_e] \mathbb{L}^{-e} = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} [h_{*n}^{-1} \mathfrak{X}_n(f) \cap \Delta_e \cap E_I^\bullet] \mathbb{L}^{-e}$$

and

$$h_{*n}^{-1} \mathfrak{X}_n(f) \cap \Delta_e \cap E_I^\bullet = \left\{ \gamma \in \mathcal{L}_n(Y), \gamma(0) \in E_I^\bullet \cap h^{-1}(0), \sum_{i \in I} k_i (v_i - 1) = e, \sum_{i \in I} k_i N_i = n, k_i = \text{ord}_{E_i} \gamma \right\}$$

Let  $\gamma \in \mathcal{L}_n(Y)$  with  $\gamma(0) \in E_I^\bullet$  then  $\text{ac}_{f \circ h}(\gamma) = f_I(\gamma(0), (\text{ac } \gamma_i)_{i \in I})$  and  $\text{ord}_I(f \circ h)(\gamma(t)) = \sum_{i \in I} k_i N_i$  where  $k_i = \text{ord}_{E_i} \gamma$ . The action  $\lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$  of  $\mathbb{R}^*$  on  $\mathcal{L}_n(Y)$  induces an action  $\sigma$  of  $\mathbb{R}^*$  on  $U_I$  locally defined by  $\lambda \cdot (x, (a_i)_i) = (x, (\lambda^{k_i} a_i)_i)$  and  $f_I(\lambda \cdot (x, (a_i)_i)) = \lambda^n f_I(x, (a_i)_i)$  where  $n = \sum_{i \in I} k_i N_i$ . So the class  $[f_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^*, \sigma]$  is well defined in  $K_0^n$ . Let  $\beta = \frac{n}{N_I}$ , and consider the action  $\sigma'$  of  $\mathbb{R}^*$  on  $U_I$  locally defined by  $\lambda \cdot (x, (a_i)_i) = (x, (\lambda^{\beta \alpha_i} a_i)_i)$ , then  $[f_I, \sigma']$  is well defined in  $K_0^n$  and  $[f_I, \sigma'] = [f_I, \tau]$  in  $K_0$ .

We locally define  $W_I$  and  $g_I : W_I \rightarrow \mathbb{R}^*$  by  $W_{IU} = \{(x, r) \in (E_I^\bullet \cap U) \times \mathbb{R}^*, u(x)r^{N_I} \neq 0\}$

and  $g_I|_U(x, r) = u(x)r^{N_I}$ . We locally define an action of  $\mathbb{R}^*$  on  $W_I$  by  $\lambda \cdot (x, r) = (x, \lambda^{\frac{n}{N_I}} r)$  then  $[W_I, g_I]$  is well defined in  $K_0^n$ . Next  $U_I \xrightarrow[\simeq]{\psi} W_I \times \left\{ a \in (\mathbb{R}^*)^I, \prod a_i^{\frac{N_i}{N_I}} = 1 \right\}$  where  $\psi$  and  $\psi^{-1}$  are locally defined by

$$\psi(x, a) = \left( x, r = \prod a_i^{\frac{N_i}{N_I}}, (r^{-\alpha_i} a_i)_i \right)$$

and

$$\psi^{-1}(x, r, a) = (x, (r^{\alpha_i} a_i)_i)$$

Thus, by 3.3.4.(3), we have  $[U_I, \sigma] = [U_I, \sigma'] \in K_0^n$  since  $\text{pr}_{W_I} \psi(\lambda \cdot_{\sigma} y) = \lambda \cdot \text{pr}_{W_I} \psi(y) = \text{pr}_{W_I} \psi(\lambda \cdot_{\sigma'} y)$ . So  $[U_I, \sigma] = [U_I, \tau]$  in  $K_0$ . Then, we have

$$\begin{aligned} Z_f(T) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{e \geq 1} \sum_{\emptyset \neq I \subset A} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^{|I|} \\ \sum k_i N_i = n \\ \sum k_i (v_i - 1) = e}} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)] \mathbb{L}^{-\sum k_i - e} T^n \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subset A} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)] \sum_{k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{|I|}} \mathbb{L}^{-\sum k_i v_i} T^{\sum k_i N_i} \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subset A} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}} \end{aligned}$$

■

**Definition 3.4.22.** Denote by  $\mathcal{M}[[T]]_{\text{sr}}$  the  $\mathcal{M}$ -submodule of  $\mathcal{M}[[T]]$  spanned by 1 and finite products of terms of the forms  $\frac{\mathbb{L}^v T^N}{1 - \mathbb{L}^v T^N}$  and  $\frac{1}{1 - \mathbb{L}^v T^N}$  where  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  and  $v \in \mathbb{Z}$ .

**Remark 3.4.23.** There exists a unique morphism of  $\mathcal{M}$ -modules

$$\lim_{T \rightarrow \infty} : \mathcal{M}[[T]]_{\text{sr}} \rightarrow \mathcal{M}$$

such that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{v_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{v_i} T^{N_i}} \prod_{j \in J} \frac{1}{1 - \mathbb{L}^{v_j} T^{N_j}} \right) = \begin{cases} (-1)^{|I|} & \text{if } J = \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Definition 3.4.24.** Let  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash germ. By 3.4.21,

$$\mathcal{S}_f = -\lim_{T \rightarrow \infty} Z_f(T) \in \mathcal{M}$$

is well defined. It is called the motivic Milnor fiber of  $f$ .

**Remark 3.4.25.** Given  $h$  as in Section 3.4.3.2, we have the following explicit formula

$$\mathcal{S}_f = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} (-1)^{|I|+1} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)]$$

**Example 3.4.26.** Let  $f(x, y) = x^3 - y^3$ , let  $h$  be the blowing-up along the origin.

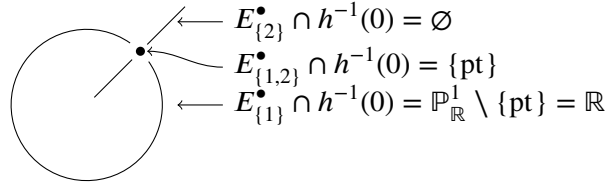
In the  $y$ -chart,  $h$  is given by  $h(X, Y) = (XY, Y)$  then  $fh(X, Y) = Y^3(X^3 - 1)$  where  $E_1 : Y = 0$  is the exceptional divisor and  $E_2 : X^3 - 1 = 0$  is the strict transform. We also

have  $\text{Jac}_h(X, Y) = \begin{vmatrix} Y & X \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = Y$ . And after the change of variables  $\tilde{Y} = Y$  and  $\tilde{X} = X - 1$  we get  $f h(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{Y}^3 \tilde{X}(\tilde{X}^2 + 3\tilde{X} + 3)$  where  $E_1 : \tilde{Y} = 0$  and  $E_2 : \tilde{X} = 0$ .

In the  $x$ -chart,  $h$  is given by  $h(X', Y') = (X', X'Y')$  then  $f h(X', Y') = X'^3(1 - Y'^3)$  where  $E_1 : X' = 0$  and  $E_2 : 1 - Y'^3 = 0$ . We also have  $\text{Jac}_h(X', Y') = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y' & X' \end{vmatrix} = X'$ . And after the change of variables  $\tilde{X}' = X'$  and  $\tilde{Y}' = Y' - 1$  we get  $f h(\tilde{X}', \tilde{Y}') = \tilde{X}'^3 \tilde{Y}'(-\tilde{Y}'^2 - 3\tilde{Y}' - 3)$  where  $E_1 : \tilde{X}' = 0$  and  $E_2 : \tilde{Y}' = 0$ .

Thus  $N_1 = 3$  and  $N_2 = 1$ , i.e.  $f \circ h^{-1}(0) = 3E_1 + 1E_2$ . Also  $v_1 = 2$  and  $v_2 = 1$ .

Notice that  $(X', Y') = (XY, \frac{1}{X})$  and thus that  $(\tilde{X}', \tilde{Y}') = (\tilde{Y}(\tilde{X} + 1), \tilde{X} \frac{-1}{\tilde{X}+1})$  and  $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\tilde{Y}' \frac{-1}{\tilde{Y}'+1}, \tilde{X}'(\tilde{Y}' + 1))$ . Now we can construct  $f_{\{1\}} : U_{\{1\}} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f_{\{2\}} : U_{\{2\}} \rightarrow \mathbb{R}^*$  and  $f_{\{1,2\}} : U_{\{1,2\}} \rightarrow \mathbb{R}^*$  following the construction before Definition 3.4.19.



Thus

- $U_{\{1\}} \cap (h \circ p_I)^{-1}(0) = (\mathbb{P}^1 \setminus [1 : 1]) \times \mathbb{R}^*$  and  $f_{\{1\}}([r : s], a) = a^3(r^3 - s^3)$ .
- $U_{\{2\}} \cap (h \circ p_I)^{-1}(0) = \emptyset$ .
- $U_{\{1,2\}} \cap (h \circ p_I)^{-1}(0) = (\mathbb{R}^*)^2$  and  $f_{\{1,2\}}(a, b) = a^3 b$ .

Finally

$$\begin{aligned} Z_f(T) &= [f_{\{1\}} : (\mathbb{P}^1 \setminus [1 : 1]) \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} + [f_{\{1,2\}} : (\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^*] \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} \frac{\mathbb{L}^{-1}T}{1 - \mathbb{L}^{-1}T} \\ &= \mathbb{L} \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} + (\mathbb{L} - 1) \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} \frac{\mathbb{L}^{-1}T}{1 - \mathbb{L}^{-1}T} \end{aligned}$$

■

We recover the rationality of Koike–Parusiński or Fichou zeta functions.

**Proposition 3.4.27** ([32, Proposition 3.2& Proposition 3.5]). *For  $\varepsilon \in \{+, -\}$ , we have*

$$\begin{aligned} Z_f^\beta(T) &= \sum_{\emptyset \neq I \subset A} (u-1)^{|I|} \beta(E_I^\bullet \cap h^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-v_i} T^{N_i}}{1 - u^{-v_i} T^{N_i}} \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]] \\ Z_f^{\beta, \varepsilon}(T) &= \sum_{\emptyset \neq I \subset A} \beta(U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0) \cap f_I^{-1}(\varepsilon 1)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-v_i} T^{N_i}}{1 - u^{-v_i} T^{N_i}} \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]] \end{aligned}$$

*Proof.* We apply the forgetful morphism (resp.  $F^\pm$ ) to the coefficients of

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)] \sum_{k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{|I|}} \mathbb{L}^{-\sum k_i v_i} T^{\sum k_i N_i}$$

■

**Example 3.4.28.** Let  $f(x, y) = x^3 - y^3$ . We deduce from Example 3.4.26 that

$$Z_f^\beta(T) = u(u-1) \frac{u^{-2}T^3}{1-u^{-2}T^3} + (u-1)^2 \frac{u^{-2}T^3}{1-u^{-2}T^3} \frac{u^{-1}T}{1-u^{-1}T}$$

$$Z_f^{\beta,+}(T) = Z_f^{\beta,-}(T) = u \frac{u^{-2}T^3}{1-u^{-2}T^3} + (u-1) \frac{u^{-2}T^3}{1-u^{-2}T^3} \frac{u^{-1}T}{1-u^{-1}T}$$

**Proposition 3.4.29** ([59, (1.1)&(1.2)]). For  $\varepsilon \in \{<, >\}$ , we have

$$Z_f^{\chi_c}(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} (-2)^{|I|} \chi_c(E_I^\bullet \cap h^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{v_i} T^{N_i}}{1 - (-1)^{v_i} T^{N_i}} \in \mathbb{Z}[[T]]$$

$$Z_f^{\chi_{c,\varepsilon}}(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} \chi_c(U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0) \cap f_I^{-1}(\mathbb{R}_{\varepsilon 0})) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{v_i} T^{N_i}}{1 - (-1)^{v_i} T^{N_i}} \in \mathbb{Z}[[T]]$$

**Example 3.4.30.** Let  $f(x, y) = x^3 - y^3$ . We deduce from Example 3.4.26 that

$$Z_f^{\chi_c}(T) = 2 \frac{T^3}{1-T^3} + 4 \frac{T^3}{1-T^3} \frac{T}{1+T}$$

$$Z_f^{\chi_{c,>}}(T) = Z_f^{\chi_{c,<}}(T) = \frac{T^3}{1-T^3} + 2 \frac{T^3}{1-T^3} \frac{T}{1+T}$$

### 3.5 Example: non-degenerate polynomials

In this section we follow G. Guibert [50, §2.1] to compute the motivic local zeta function of a non-degenerate polynomial. We may find similar construction for the topological case [24, §5] and for the  $p$ -adic case [23]. Some ideas of these constructions go back to [61] and [99].

We may find a first adaptation in the real non-equivariant case using the virtual Poincaré polynomial in [36].

#### 3.5.1 The Newton polyhedron of a polynomial

We first recall some definitions related to the Newton polyhedron of a polynomial. We refer the reader to [4, §8] for more details.

**Definition 3.5.1.** The Newton polyhedron  $\Gamma_f$  of  $f(x) = \sum_{v \in \mathbb{N}^d} c_v x^v \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$  is the convex hull of

$$\bigcup_{v \in \mathbb{N}^d, c_v \neq 0} v + (\mathbb{R}_+)^d$$

in  $(\mathbb{R}_+)^d$ .

**Definition 3.5.2.** Given a face  $\tau \in \Gamma_f$ , we set  $f_\tau(x) = \sum_{v \in \tau} c_v x^v$ .

**Definition 3.5.3.** A polynomial  $f$  is said to be non-degenerate if for every compact face<sup>\*</sup>  $\tau$  of  $\Gamma_f$ , the polynomials

$$f_\tau, \frac{\partial f_\tau}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq d,$$

have no common zero in  $(\mathbb{R}^*)^d$ .

<sup>\*</sup>We mean the proper faces (not only the facets) and  $\Gamma_f$  itself.

**Definition 3.5.4.** For  $k \in (\mathbb{R}_+)^d$ , we define the supporting function

$$m(k) = \inf_{x \in \Gamma_f} \{k \cdot x\} = \min_{x \in \Gamma_f} \{k \cdot x\}$$

*Proof.* We can take the infimum in the compact set  $C = \text{Conv}(\{v, c_v \neq 0\})$  since  $\Gamma_f = C + (\mathbb{R}_+)^d$ . ■

**Notation 3.5.5.** For  $k \in (\mathbb{R}_+)^d$ , the trace  $\tau(k) = \{x \in \Gamma_f, k \cdot x = m(k)\}$  is a face of  $\Gamma_f$ .

*Proof.* That is the nonempty intersection of a hyperplane with  $\Gamma_f$ . ■

**Proposition 3.5.6.** •  $\tau(0) = \Gamma_f$

- For  $k \neq 0$ ,  $\tau(k)$  is a proper face of  $\Gamma_f$
- $\tau(k)$  is a compact face if and only if  $k \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^d$

**Notation 3.5.7.** For  $\tau$  a face of  $\Gamma_f$ , we define the cone  $\sigma(\tau) = \{k \in (\mathbb{R}_+)^d, \tau(k) = \tau\}$  and  $\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma(\tau) \cap \mathbb{N}^d$ .

**Notation 3.5.8.** Let  $\tau$  be a facet (i.e. a face of codimension 1), then  $\tau$  is supported by a hyperplane which contains at least one point with integer coefficients. So this hyperplane has a unique equation

$$\sum_{i=1}^d a_i x_i = N$$

with  $a_i, N \in \mathbb{N}$  and  $\gcd\{a_i\} = 1$ . Thus  $e^\tau = (a_1, \dots, a_d)$  is the unique primitive vector in  $\mathbb{N}^d \setminus \{0\}$  which is perpendicular to  $\tau$ .

**Lemma 3.5.9.** Let  $\tau$  be a proper face of  $\Gamma_f$ , denote by  $\tau_1, \dots, \tau_l$  the facets containing  $\tau$ . Then

$$\sigma(\tau) = \left\{ \sum_{i=1}^l \alpha_i e^{\tau_i}, \alpha_i \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

### 3.5.2 The motivic zeta function and Milnor fiber of a non-degenerate polynomial

We may easily adapt the proof of [90, Proposition 3.13] in order to get the following lemma.

**Lemma 3.5.10.** For  $\tau$  a compact face of  $\Gamma_f$  and  $k \in \tilde{\sigma}(\tau)$  we define the class  $[(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_\tau^{-1}(0), \sigma_k] \in K_0^{m(k)}$  where the morphism is  $f_\tau$  and the action given by  $\lambda \cdot_{\sigma_k} x = (\lambda^{k_i} x_i)_i$ . Then for  $k, k' \in \sigma(\tau)$ ,  $[(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_\tau^{-1}(0), \sigma_k] = [(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_\tau^{-1}(0), \sigma_{k'}] \in K_0$ . We simply denote it by  $[(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_\tau^{-1}(0)]$ .

**Remark 3.5.11.** We consider  $(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_\tau^{-1}(0)$  and not  $f_\tau^{-1}(\mathbb{R}^*) \subset (\mathbb{R}^*)^d$ .

**Lemma 3.5.12.** Let  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  be a weighted homogeneous polynomial of weight  $(k_1, \dots, k_d; m)$  with  $k_i \in \mathbb{N}_{>0}$  such that  $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}$  have no common zero in  $(\mathbb{R}^*)^d$ . For  $l \geq 1$ , we consider

$$A = \{\gamma \in \mathcal{L}_{m+l}(\mathbb{R}^d), \text{ord}_t \gamma = k, \text{ord}_t f\gamma = m+l\}$$

with the morphism  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^*$  which associates to  $\gamma$  the angular component of  $f\gamma$  and the action  $\lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$ . Thus  $[A] \in K_0^{m+l}$  is well defined. Then

$$[A] = \overline{[f^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^*)^d]} \mathbb{L}^{l(d-1)+md-\sum_{i=1}^d k_i} \in K_0^{m+l}$$



*Proof.* We set  $\gamma(t) = (t^{k_1} a_1(t), \dots, t^{k_d} a_d(t))$  with  $a_i(0) \neq 0$  then developping  $f\gamma(t)$ , the coefficient of  $t^m$  is  $f(a_{10}, \dots, a_{d0})$ , the coefficient of  $t^{m+1}$  is of the form

$$l_1(a_{11}, \dots, a_{d1}) - C_{a_0}$$

the coefficient of  $t^{m+2}$  is of the form

$$l_2(a_{12}, \dots, a_{d2}) - C_{a_0, a_1}$$

and so on where the  $l_i$  are non-trivial linear equations. Thus we may resolve  $f(\gamma(t)) = ct^{m+l}$  mod  $t^{m+l+1}$  with  $c \neq 0$  line by line, which brings

$$[A] = \overline{[f^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^*)^d]} \mathbb{L}^{(d-1)(l-1)} [g : g^{-1}(\mathbb{R}^*) \rightarrow \mathbb{R}^*] \mathbb{L}^{\sum_{i=1}^d (m-k_i)}$$

where  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by  $g(x) = l_l(x) - C_{a_0, \dots, a_{l-1}}$ .

Up to reordering the coordinates, we have the following  $\mathcal{AS}$ -bijection over  $\mathbb{R}^*$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^d \\ & \searrow g & \swarrow \text{Pr}_d \\ & \mathbb{R}^* & \end{array}$$

defined by  $\Psi(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, g(x))$  so that

$$[g : g^{-1}(\mathbb{R}^*) \rightarrow \mathbb{R}^*] = \mathbb{L}^{d-1} [\text{id} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] = \mathbb{L}^{d-1} \mathbb{1}_{m+l} = \mathbb{L}^{d-1}$$

Therefore

$$[A] = \overline{[f^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^*)^d]} \mathbb{L}^{(d-1)l} \mathbb{L}^{md - \sum_{i=1}^d k_i}$$

■

**Definition 3.5.13.** For  $m \in \mathbb{Z}$  we define  $\mathcal{F}^m \mathcal{M}$  as the subgroup of  $\mathcal{M}$  spanned by elements  $[S] \mathbb{L}^{-i}$  with  $i - \dim S \geq m$ . We denote by  $\widehat{\mathcal{M}}$  the completion of  $\mathcal{M}$  with respect to the filtration  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{M}$ .

**Remark 3.5.14.** The ring  $\widehat{\mathcal{M}}$  allows us to handle terms of the form  $\sum_i \mathbb{L}^{-k_i}$  that may appear in the following formula.

**Theorem 3.5.15.** *Let  $f$  be non-degenerate, then*

$$Z_f(T) = \sum_{\tau \text{ compact face}} \left( [(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_\tau^{-1}(0)] + \overline{[f_\tau^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^*)^d]} \frac{\mathbb{L}^{-1} T}{\mathbb{1} - \mathbb{L}^{-1} T} \right) \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} \mathbb{L}^{-\sum k_i} T^{m(k)} \in \widehat{\mathcal{M}}[[T]]$$

*Proof.* We first notice that

$$(\mathbb{N} \setminus \{0\})^d = \bigsqcup_{\tau \text{ compact face of } \Gamma_f} \tilde{\sigma}(\tau)$$

Thus\*

$$\begin{aligned}
 Z_f(T) &= \sum_{n \geq 1} [\mathfrak{X}_n(f)] \mathbb{L}^{-nd} T^n \\
 &= \sum_{\tau \text{ compact face}} \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} \sum_{n \geq m(k)} [\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d), \text{ord}_t \gamma = k, \text{ord}_t f\gamma = n] \mathbb{L}^{-nd} T^n \\
 &= \sum_{\tau} \left( \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} [\gamma \in \mathcal{L}_{m(k)}(\mathbb{R}^d), \text{ord}_t \gamma = k, \text{ord}_t f\gamma = m(k)] \mathbb{L}^{-m(k)d} T^{m(k)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} \sum_{l \geq 1} [\gamma \in \mathcal{L}_{m(k)+l}(\mathbb{R}^d), \text{ord}_t \gamma = k, \text{ord}_t f\gamma = m(k) + l] \mathbb{L}^{-(m(k)+l)d} T^{m(k)+l} \right) \\
 &= \sum_{\tau} (Z_{\tau}^{\leq}(T) + Z_{\tau}^{>}(T))
 \end{aligned}$$

Fix  $\tau$  a compact face of  $\Gamma_f$  and  $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d$  such that  $\tau(k) = \tau$ . Let  $\gamma \in \mathcal{L}_{m(k)}(\mathbb{R}^d)$  satisfying  $\text{ord}_t \gamma = k$  and  $\text{ord}_t f\gamma = m(k)$ . Then  $\gamma(t) = (t^{k_i} a_i(t))_i$  with  $a_i(0) \neq 0$  and

$$f\gamma(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} a(t)^{\nu} t^{k \cdot \nu} = f_{\tau}(a(0)) t^{m(k)} + t^{m(k)+1} R(t)$$

Thus  $\text{ord}_t f\gamma = \text{ord}_t f_{\tau}\gamma$  and  $\text{ac } f\gamma = \text{ac } f_{\tau}\gamma$  and

$$Z_{\tau}^{\leq}(T) = \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} [(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_{\tau}^{-1}(0), \sigma_k] \mathbb{L}^{-\sum k_i} T^{m(k)}$$

where the morphism is  $f_{\tau}$  and the action  $\sigma_k$  is the one induced by the action on  $\mathcal{L}_{m(k)}(\mathbb{R}^d)$ , i.e.  $\lambda \cdot_{\sigma_k} (x_1, \dots, x_d) = (\lambda^{k_1} x_1, \dots, \lambda^{k_d} x_d)$ . Thus  $[(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_{\tau}^{-1}(0), \sigma_k]$  is well defined in  $K_0^{m(k)}$ . By the lemma 3.5.10, we get

$$Z_{\tau}^{\leq}(T) = [(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_{\tau}^{-1}(0)] \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} \mathbb{L}^{-\sum k_i} T^{m(k)}$$

Now let  $l \geq 1$  and  $\gamma \in \mathcal{L}_{m(k)+l}(\mathbb{R}^d)$  satisfying  $\text{ord}_t \gamma = k$  and  $\text{ord}_t f\gamma = m(k) + l$ . We set  $\gamma(t) = (t^{k_1} a_1(t), \dots, t^{k_d} a_d(t))$  with  $a_i(0) \neq 0$ . By Lemma 3.5.12 we get

$$\begin{aligned}
 Z_{\tau}^{>}(T) &= \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} \sum_{l \geq 1} \overline{[f_{\tau}^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^*)^d]} \mathbb{L}^{-\sum k_i - l} T^{m(k)+l} \\
 &= \overline{[f_{\tau}^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^*)^d]} \frac{\mathbb{L}^{-1} T}{1 - \mathbb{L}^{-1} T} \sum_{k \in \tilde{\sigma}(\tau)} \mathbb{L}^{-\sum k_i} T^{m(k)}
 \end{aligned}$$

■

**Corollary 3.5.16.** *If  $f$  is non-degenerate then*

$$S_f = - \sum_{\tau \text{ compact face}} (-1)^{d - \dim \tau} \left( [(\mathbb{R}^*)^d \setminus f_{\tau}^{-1}(0)] - \overline{[f_{\tau}^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}^*)^d]} \cdot \mathbb{1} \right) \in \widehat{\mathcal{M}}$$

*Proof.* It's a direct application of [22, pp1006–1007] [50, Lemme 2.1.5], noticing that  $\dim \tau + \dim \sigma(\tau) = d$ . ■

\*The condition  $\gamma(0) = 0$  is satisfied since  $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d$ .

**Example 3.5.17.** Let  $f(x, y) = x^3 - y^3$ . The Newton polyhedron of  $f$  has 3 compact faces:

1.  $\tau_1 = \{\lambda(0, 3) + (1 - \lambda)(3, 0), \lambda \in [0, 1]\}$  with  $\tilde{\sigma}(\tau_1) = \mathbb{N}_{>0}(1, 1)$ .
2.  $\tau_2 = \{(0, 3)\}$  with  $\tilde{\sigma}(\tau_2) = (2, 1) + \mathbb{N}(1, 1) + \mathbb{N}(0, 1)$ .
3.  $\tau_3 = \{(3, 0)\}$  with  $\tilde{\sigma}(\tau_3) = (1, 2) + \mathbb{N}(1, 1) + \mathbb{N}(0, 1)$ .

Thus

$$\begin{aligned}
 Z_f(T) &= \left( [(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x^3 - y^3 \neq 0] + \overline{[(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x^3 - y^3 = 0]} \frac{\mathbb{L}^{-1}T}{1 - \mathbb{L}^{-1}T} \right) \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} \\
 &\quad + [(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 \mapsto x^3] \frac{1}{\mathbb{L} - 1} \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} + [(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 \mapsto -y^3] \frac{1}{\mathbb{L} - 1} \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} \\
 &= \left( [(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x^3 - y^3 \neq 0] + [x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^3] + [y \in \mathbb{R}^* \mapsto -y^3] \right. \\
 &\quad \left. + (\mathbb{L} - 1) \frac{\mathbb{L}^{-1}T}{1 - \mathbb{L}^{-1}T} \right) \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} \\
 &= \left( (\mathbb{L} - 1 - 1) + 1 + 1 + (\mathbb{L} - 1) \frac{\mathbb{L}^{-1}T}{1 - \mathbb{L}^{-1}T} \right) \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3} \\
 &= \left( \mathbb{L} + (\mathbb{L} - 1) \frac{\mathbb{L}^{-1}T}{1 - \mathbb{L}^{-1}T} \right) \frac{\mathbb{L}^{-2}T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2}T^3}
 \end{aligned}$$

Since

$$\begin{array}{ccc}
 \{(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x^3 - y^3 \neq 0\} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\
 & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\
 & & \mathbb{R}^*
 \end{array}$$

where  $f(x, y) = x^3 - y^3$ ,  $\tilde{f}(a, b) = a$ ,  $\psi(x, y) = \left(x^3 - y^3, \frac{y}{x}\right)$  and  $\psi^{-1}(a, b) = \left(\left(\frac{a}{1-b^3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{a}{1-b^3}\right)^{\frac{1}{3}} b\right)$ .

### 3.6 A convolution formula for the motivic local zeta function

The goal of this section is to express  $Z_{f_1 \oplus f_2}(T)$  in terms of  $Z_{f_1}(T)$  and  $Z_{f_2}(T)$  where the  $f_i : (\mathbb{R}^{d_i}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  are two Nash germs and  $f_1 \oplus f_2(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ .

The idea of the proof is the following, given two arcs  $\gamma_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$ , we have two cases to distinguish: either  $\text{ord}_t f_1 \gamma_1 \neq \text{ord}_t f_2 \gamma_2$ , let say  $\text{ord}_t f_1 \gamma_1 < \text{ord}_t f_2 \gamma_2$ , and then  $\text{ord}_t(f_1 \oplus f_2)(\gamma_1, \gamma_2) = \text{ord}_t f_1 \gamma_1$  and  $\text{ac}(f_1 \oplus f_2)(\gamma_1, \gamma_2) = \text{ac} f_1 \gamma_1$  or  $\text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2$  and then two phenomena may appear. In this case, either  $\text{ac} f_1 \gamma_1 + \text{ac} f_2 \gamma_2 \neq 0$  and then  $\text{ord}_t(f_1 \oplus f_2)(\gamma_1, \gamma_2) = \text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2$  and  $\text{ac}(f_1 \oplus f_2)(\gamma_1, \gamma_2) = \text{ac} f_1 \gamma_1 + \text{ac} f_2 \gamma_2$  or  $\text{ac} f_1 \gamma_1 + \text{ac} f_2 \gamma_2 = 0$  and then  $\text{ord}_t(f_1 \oplus f_2)(\gamma_1, \gamma_2) > \text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2$ .

In [27] or [74], the authors work with an equivariant Grothendieck ring over  $\mathbb{C}$  with actions of the unit roots (with the additional hypothesis that  $\text{ac} f \gamma = 1$  in  $\mathfrak{X}_n(f)$ ). Then they consider the motives of

$$\{x^n + y^n = \varepsilon\} \times (\mathfrak{X}_n(f_1) \times \mathfrak{X}_n(f_2)) / (\lambda \cdot (x, y), (\gamma_1, \gamma_2)) \sim ((x, y), \lambda \cdot (\gamma_1, \gamma_2))$$

where  $\lambda \in \mu_n$  and  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , to handle the case  $\text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2$ .

The lack of unit roots and the quotient don't allow us to adapt these constructions. However our ring  $K_0$ , adapted from the one of [51], remembers the angular component morphisms  $\text{ac}_f : \gamma \mapsto \text{ac} f \gamma$ . Thus, following [51, §5.1], we may define a convolution

product in order to get a convolution formula<sup>\*</sup>. The definition of this convolution product is motivated by the previous discussion.

**Definition 3.6.1.** The following construction induces a map  $K_0^m \times K_0^n \rightarrow K_0^{mn}$ . Let  $\alpha = [X, \sigma, \varphi] \in K_0^m$  and  $\beta = [Y, \tau, \psi] \in K_0^n$ . Then we set

$$\alpha * \beta = -[Z_1, \mu_1, f_1] + [Z_2, \mu_2, f_2] \in K_0^{mn}$$

where

$$\begin{cases} Z_1 = X \times Y \setminus (\varphi + \psi)^{-1}(0) \\ f_1 = \varphi + \psi \\ \lambda \cdot_{\mu_1} (x, y) = (\lambda^n \cdot_{\sigma} x, \lambda^m \cdot_{\tau} y) \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} Z_2 = (\varphi + \psi)^{-1}(0) \times \mathbb{R}^* \\ f_2 = \text{pr}_{\mathbb{R}^*} \\ \lambda \cdot_{\mu_2} (x, y, r) = (\lambda^n \cdot_{\sigma} x, \lambda^m \cdot_{\tau} y, \lambda^{mn} r) \end{cases}$$

This construction extends to a map  $K_0 \times K_0 \rightarrow K_0$  and to a map  $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Proposition 3.6.2.** *The convolution product  $*$  in  $K_0$  (resp.  $\mathcal{M}$ ) is commutative and associative. It is  $K_0(\mathcal{A}\mathcal{S})$ -bilinear (resp.  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}\mathcal{S}}$ -bilinear). The class  $\mathbb{1}$  is a unit for this product.*

*Proof.* We easily adapt the proof of [51, Proposition 5.2]. ■

**Lemma 3.6.3.** *Let  $g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash germ. Then, in  $K_0(\mathcal{A}\mathcal{S})$ , we have the relation*

$$[\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), \text{ord}_t g\gamma > n\}] = \mathbb{L}^{nd} \left( 1 - \sum_{i=1}^n [\mathfrak{X}_i(g)] \mathbb{L}^{-id} \right)$$

*Proof.*  $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0) = \bigsqcup_{i=1}^n (\pi_i^n)^{-1}(\mathfrak{X}_i(g)) \sqcup \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), \text{ord}_t g\gamma > n\}$ .

So  $\mathbb{L}^{nd} = \left( \sum_{i=1}^n [\mathfrak{X}_i(g)] \mathbb{L}^{(n-i)d} \right) + [\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), \text{ord}_t g\gamma > n\}]$ .

Finally,  $[\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), \text{ord}_t g\gamma > n\}] = \mathbb{L}^{nd} - \sum_{i=1}^n [\mathfrak{X}_i(g)] \mathbb{L}^{(n-i)d}$  ■

**Definition 3.6.4.** We define the motivic naive local zeta function by

$$Z_f^{\text{naive}}(T) = \sum_{n \geq 1} \overline{[\mathfrak{X}_n(f)]} \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}[[T]]$$

**Definition 3.6.5.** Let  $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ . We set

$$\begin{aligned} [\mathfrak{Y}_n(f)] &= [\mathfrak{X}_n(f)] - \overline{[\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), \text{ord}_t f\gamma > n\}]} \cdot \mathbb{1} \\ &= [\mathfrak{X}_n(f)] - \mathbb{L}^{nd} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \overline{[\mathfrak{X}_i(f)]} \mathbb{L}^{-id} \right) \end{aligned}$$

<sup>\*</sup>We may also notice that the convolution [51, §5.1] is compatible with the one of [74] by [51, (5.1.8)].

and we introduce the modified zeta function defined by

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_f(T) &= \sum_{n \geq 1} [\mathfrak{y}_n(f)] \mathbb{L}^{-nd} T^n \\
 &= \sum_{n \geq 1} [\mathfrak{x}_n(f)] \mathbb{L}^{-nd} T^n - \sum_{n \geq 1} T^n + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n \overline{[\mathfrak{x}_i(f)]} \mathbb{L}^{-id} T^n \\
 &= Z_f(T) - \frac{T}{1-T} + \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq i} \overline{[\mathfrak{x}_i(f)]} \mathbb{L}^{-id} T^n \\
 &= Z_f(T) - \frac{T-1+1}{1-T} + \frac{1}{1-T} \sum_{i \geq 1} \overline{[\mathfrak{x}_i(f)]} \mathbb{L}^{-id} T^i \\
 &= Z_f(T) - \frac{1 - Z_f^{\text{naive}}(T)}{1-T} + 1 \in \mathcal{M}[[T]]
 \end{aligned}$$

**Remark 3.6.6.**  $-\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{Z}_f(T) = \mathcal{S}_f - 1$

**Remark 3.6.7.** Applying the forgetful morphism or the morphisms  $F^>$ ,  $F^<$  and the Euler characteristic with compact support to the coefficients of  $\tilde{Z}_f(T)$  we recover the modified zeta functions of S. Koike and A. Parusiński [59].

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_f^{\chi_c, >}(T) &= \sum_{n \geq 1} \chi_c(\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = ct^n \pmod{t^{n+1}}, c \geq 0) (-1)^{nd} T^n \\
 &= \frac{1 - Z_f^{\chi_c}(T)}{1-T} - 1 + Z_f^{\chi_c, >}(T) \in \mathbb{Z}[[T]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_f^{\chi_c, <}(T) &= \sum_{n \geq 1} \chi_c(\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), f\gamma(t) = ct^n \pmod{t^{n+1}}, c \leq 0) (-1)^{nd} T^n \\
 &= \frac{1 - Z_f^{\chi_c}(T)}{1-T} - 1 + Z_f^{\chi_c, <}(T) \in \mathbb{Z}[[T]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_f^{\chi_c}(T) &= \tilde{Z}_f^{\chi_c, >}(T) + \tilde{Z}_f^{\chi_c, <}(T) = \sum_{n \geq 1} \chi_c(\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0), \text{ord}_t f\gamma \geq n) (-1)^{nd} T^n \\
 &= 2 \frac{1 - Z_f^{\chi_c}(T)}{1-T} - 2 + Z_f^{\chi_c}(T) \in \mathbb{Z}[[T]]
 \end{aligned}$$

**Example 3.6.8.** Let  $f_k^\varepsilon(x) = \varepsilon x^k$  where  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ , then

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_{f_k^\varepsilon}(T) &= - \sum_{r=1}^{k-1} T^r + \sum_{q \geq 1} \left( ([f_k^\varepsilon : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] - 1) \mathbb{L}^{-q} T^{kq} - \sum_{r=1}^{k-1} \mathbb{L}^{-q} T^{kq+r} \right) \\
 &= - \sum_{q \geq 0} \sum_{r=1}^{k-1} \mathbb{L}^{-q} T^{kq+r} - \sum_{q \geq 1} (1 - [f_k^\varepsilon : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*]) \mathbb{L}^{-q} T^{kq} \\
 &= -T - \dots - T^{k-1} - (1 - [f_k^\varepsilon]) \mathbb{L}^{-1} T^k - \mathbb{L}^{-1} T^{k+1} - \dots - \mathbb{L}^{-1} T^{2k-1} - (1 - [f_k^\varepsilon]) \mathbb{L}^{-2} T^{2k} - \mathbb{L}^{-2} T^{2k+1} - \dots
 \end{aligned}$$

*Proof.* Obviously

$$[\mathfrak{x}_{kq+r}(f_k^\varepsilon)] \mathbb{L}^{-(kq+r)} = \begin{cases} [f_k^\varepsilon : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] \mathbb{L}^{-q} & \text{if } r = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\overline{[\mathfrak{X}_{kq+r}(f_k^\varepsilon)]} \mathbb{L}^{-(kq+r)} = \begin{cases} (\mathbb{L} - 1)\mathbb{L}^{-q} & \text{if } r = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Thus

$$\begin{aligned} [\mathfrak{Y}_{kq+r}(f_k^\varepsilon)] \mathbb{L}^{-(kq+r)} &= \begin{cases} [f_k^\varepsilon : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] \mathbb{L}^{-q} + \sum_{i=1}^q (\mathbb{L} - 1)\mathbb{L}^{-i} - 1 & \text{if } r = 0 \\ \sum_{i=1}^q (\mathbb{L} - 1)\mathbb{L}^{-i} - 1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} ([f_k^\varepsilon : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*] - 1)\mathbb{L}^{-q} & \text{if } r = 0 \\ -\mathbb{L}^{-q} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

■

**Definition 3.6.9.** We define the motivic naive modified zeta function by

$$\tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T) = \sum_{n \geq 1} \overline{[\mathfrak{Y}_n(f)]} \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}[[T]]$$

**Proposition 3.6.10.** 
$$\frac{\mathbb{L} - \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T)}{\mathbb{L} - T} = \frac{1 - Z_f^{\text{naive}}(T)}{1 - T}$$

*Proof.* From

$$\tilde{Z}_f(T) = Z_f(T) - \frac{1 - Z_f^{\text{naive}}(T)}{1 - T} + 1$$

we deduce

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T) &= Z_f^{\text{naive}}(T) - (\mathbb{L} - 1) \frac{1 - Z_f^{\text{naive}}(T)}{1 - T} + \mathbb{L} - 1 \\ \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T) - \mathbb{L} &= (Z_f^{\text{naive}}(T) - 1) + (Z_f^{\text{naive}}(T) - 1) \frac{\mathbb{L} - 1}{1 - T} \\ \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T) - \mathbb{L} &= (Z_f^{\text{naive}}(T) - 1) \frac{\mathbb{L} - T}{1 - T} \end{aligned}$$

■

**Remark 3.6.11.** We recover the following formula of [59, p2070]

$$\frac{1 - Z_f^{\chi_c}(T)}{1 - T} = \frac{1 + \tilde{Z}_f^{\chi_c}(T)}{1 + T}$$

**Corollary 3.6.12.** We may compute  $\tilde{Z}_f(T)$  from  $Z_f(T)$  and  $Z_f(T)$  from  $\tilde{Z}_f(T)$ . More precisely, we have

$$\tilde{Z}_f(T) = Z_f(T) - \frac{1 - Z_f^{\text{naive}}(T)}{1 - T} + 1$$

and

$$Z_f(T) = \tilde{Z}_f(T) + \frac{\mathbb{L} - \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T)}{\mathbb{L} - T} - 1$$

**Theorem 3.6.13.** Let  $f_1 : (\mathbb{R}^{d_1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  and  $f_2 : (\mathbb{R}^{d_2}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be two Nash germs. Then

$$\tilde{Z}_{f_1 \oplus f_2}(T) = -\tilde{Z}_{f_1}(T) \otimes \tilde{Z}_{f_2}(T)$$

where the product  $\otimes$  is the Hadamard product which consists in applying the convolution product coefficientwise.

**Remark 3.6.14.** Similar formulas are known when the angular component is fixed to be 1 with an action of the unit roots [27, Main Theorem 4.2.4] or for the Euler characteristic with compact support [59, Theorem 2.3].

**Remark 3.6.15.** The definition of the modified zeta function could have been multiplied by a factor  $(-1)^d$  in order to avoid the sign in Theorem 3.6.13.

**Lemma 3.6.16** ([74, Lemma 7.6][27, Proposition 5.1.2]). *Let  $Z_1(T), Z_2(T) \in \mathcal{M}[[T]]_{\text{sr}}$  then*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Z_1(T) \otimes Z_2(T) = - \left( \lim_{T \rightarrow \infty} Z_1(T) \right) * \left( \lim_{T \rightarrow \infty} Z_2(T) \right)$$

**Corollary 3.6.17** (Motivic Thom–Sebastiani formula).  $\mathcal{S}_{f_1 \oplus f_2} = -\mathcal{S}_{f_1} * \mathcal{S}_{f_2} + \mathcal{S}_{f_1} + \mathcal{S}_{f_2}$

**Example 3.6.18.** Let  $f(x, y) = x^3 - y^3$ . We deduce from Example 3.6.8 and Theorem 3.6.13 that

$$\tilde{Z}_f(T) = - \sum_{q \geq 0} \sum_{r=1}^2 \mathbb{L}^{-2q} T^{3q+r} = - \frac{T + T^2}{1 - \mathbb{L}^{-2} T^3}$$

We recover that

$$\begin{aligned} Z_f(T) &= \tilde{Z}_f(T) + \frac{\mathbb{L} - \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T)}{\mathbb{L} - T} - \mathbb{1} \\ &= - \frac{T + T^2}{1 - \mathbb{L}^{-2} T^3} + \frac{\mathbb{L} + (\mathbb{L} - 1) \frac{T + T^2}{1 - \mathbb{L}^{-2} T^3}}{\mathbb{L} - T} - \mathbb{1} \\ &= \frac{T^3 - \mathbb{L}^{-2} T^4}{(\mathbb{L} - T)(1 - \mathbb{L}^{-2} T^3)} \\ &= \frac{\mathbb{L}^{-1} T^3 - \mathbb{L}^{-3} T^4}{(1 - \mathbb{L}^{-1} T)(1 - \mathbb{L}^{-2} T^3)} \\ &= \mathbb{L} \frac{\mathbb{L}^{-2} T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2} T^3} + (\mathbb{L} - 1) \frac{\mathbb{L}^{-1} T}{1 - \mathbb{L}^{-1} T} \frac{\mathbb{L}^{-2} T^3}{1 - \mathbb{L}^{-2} T^3} \end{aligned}$$

■

*Proof of Theorem 3.6.13.* In order to shorten the formulas, we set  $\mathcal{L}(M, A) = \{\gamma \in \mathcal{L}(M), \gamma(0) \in A\}$ .

First case:  $\text{ord}_t f_1 \gamma_1 \neq \text{ord}_t f_2 \gamma_2$ .

We set  $\mathfrak{X}_n^\neq(f_1 \oplus f_2) = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0), \text{ord}_t f_1 \gamma_1 \neq \text{ord}_t f_2 \gamma_2, \text{ord}_t(f_1 \gamma_1 + f_2 \gamma_2) = n\}$  with the natural action on jets and the natural morphism induced by the angular component. Then

$$\left[ \mathfrak{X}_n^\neq(f_1 \oplus f_2) \right] = \left[ \mathfrak{X}_n(f_1) \right] \overline{[\gamma_2 \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_2}, 0), \text{ord}_t f_2 \gamma_2 > n]} + \overline{[\gamma_1 \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1}, 0), \text{ord}_t f_1 \gamma_1 > n]} \left[ \mathfrak{X}_n(f_2) \right]$$

Second case:  $\text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2$ .

We set  $\mathfrak{X}_n^=(f_1 \oplus f_2) = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0), \text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2, \text{ord}_t(f_1 \gamma_1 + f_2 \gamma_2) = n\}$  with the natural action on jets and the natural morphism induced by the angular component.

Let  $h_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}$  be as in Section 3.4.3.2.

We may choose  $m \geq n$  big enough in order to apply the change of variables key lemma:

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{X}_n^{\bar{}}(f_1 \oplus f_2)] &= \left[ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0), \begin{array}{l} \text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2, \\ \text{ord}_t(f_1 \gamma_1 + f_2 \gamma_2) = n, \end{array} \right] \\
 &= \left[ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0), \begin{array}{l} \text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2, \\ \text{ord}_t(f_1 \gamma_1 + f_2 \gamma_2) = n, \end{array} \right] \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(n-m)} \\
 &= \sum_{\substack{e \geq 1 \\ e' \geq 1}} \left[ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0), \begin{array}{l} \text{ord}_t f_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 \gamma_2, \quad \gamma_1 \in h_{1 * m} \pi_m \Delta_e, \\ \text{ord}_t(f_1 \gamma_1 + f_2 \gamma_2) = n, \quad \gamma_2 \in h_{2 * m} \pi_m \Delta_{e'} \end{array} \right] \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(n-m)} \\
 &= \sum_{\substack{e \geq 1 \\ e' \geq 1}} \left[ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(M_1 \times M_2, h_1^{-1}(0) \times h_2^{-1}(0)), \begin{array}{l} \text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2, \\ \text{ord}_t(f_1 h_1 \gamma_1 + f_2 h_2 \gamma_2) = n, \\ \gamma_1 \in \pi_m \Delta_e, \gamma_2 \in \pi_m \Delta_{e'} \end{array} \right] \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(n-m)-e-e'} \\
 &= \sum_{\substack{e \geq 1 \\ e' \geq 1}} \sum_{\substack{I \neq \emptyset \\ J \neq \emptyset}} \left[ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(M_1 \times M_2), \begin{array}{l} \gamma_1(0) \in h_1^{-1}(0) \cap E_I^{\bullet}, \\ \gamma_2(0) \in h_2^{-1}(0) \cap F_J^{\bullet}, \\ \text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2, \\ \text{ord}_t(f_1 h_1 \gamma_1 + f_2 h_2 \gamma_2) = n, \\ \gamma_1 \in \pi_m \Delta_e, \gamma_2 \in \pi_m \Delta_{e'} \end{array} \right] \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(n-m)-e-e'}
 \end{aligned}$$

In a neighborhood of  $E_I^{\bullet}$  we have

$$f_1 h_1(x) = u(x) \prod_{i \in I} x_i^{N_i(f_1)}$$

and in a neighborhood of  $E_J^{\bullet}$  we have

$$f_2 h_2(y) = v(y) \prod_{j \in J} y_j^{N_j(f_2)}$$

where  $u, v$  are units and  $E_i : x_i = 0, F_j : y_j = 0$ . We set  $\gamma_{1i}(t) = t^{k_i} a_i(t)$  with  $a_i(0) \neq 0$  and  $\gamma_{2j}(t) = t^{l_j} b_j(t)$  with  $b_j(0) \neq 0$ .

We have to handle two cases.

- The angular components don't vanish, i.e.  $\text{ac}(f_1 h_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 h_2 \gamma_2) \neq 0$  and  $\text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2 = \text{ord}_t(f_1 h_1 \gamma_1 + f_2 h_2 \gamma_2) = n$ . Thus we get the motive

$$\sum_{\substack{e \geq 1 \\ e' \geq 1}} \sum_{\substack{I \neq \emptyset \\ J \neq \emptyset}} \left[ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(M_1 \times M_2), \begin{array}{l} (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \in (h_1^{-1}(0) \cap E_I^{\bullet}) \times (h_2^{-1}(0) \cap F_J^{\bullet}), \\ \text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2 = n, \\ \text{ac}(f_1 h_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 h_2 \gamma_2) \neq 0, \\ \gamma_1 \in \pi_m \Delta_e, \gamma_2 \in \pi_m \Delta_{e'} \end{array} \right] \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(n-m)-e-e'}$$

- The angular components vanish, i.e.  $\text{ac}(f_1 h_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 h_2 \gamma_2) = 0, \text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2 =$



$i < n$  and  $\text{ord}_t(f_1 h_1 \gamma_1 + \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2) = n$ . In a way similar to the proof of 3.5.12, we get

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{e \geq 1 \\ e' \geq 1}} \sum_{I \neq \emptyset} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \begin{array}{l} (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \in (h_1^{-1}(0) \cap E_I^\bullet) \times (h_2^{-1}(0) \cap F_J^\bullet), \\ \text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2 = i, \\ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(M_1 \times M_2), \text{ord}_t(f_1 h_1 \gamma_1 + f_2 h_2 \gamma_2) = n, \\ \text{ac}(f_1 h_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 h_2 \gamma_2) = 0, \\ \gamma_1 \in \pi_m \Delta_e, \gamma_2 \in \pi_m \Delta_{e'} \end{array} \right] \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(n-m)-e-e'} \\
 &= \sum_{\substack{e \geq 1 \\ e' \geq 1}} \sum_{I \neq \emptyset} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \begin{array}{l} (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \in (h_1^{-1}(0) \cap E_I^\bullet) \times (h_2^{-1}(0) \cap F_J^\bullet), \\ \text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2 = i, \\ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(M_1 \times M_2), \text{ac}(f_1 h_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 h_2 \gamma_2) = 0, \\ \gamma_1 \in \pi_m \Delta_e, \gamma_2 \in \pi_m \Delta_{e'} \end{array} \right] \begin{array}{l} \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(i-m)} \\ \mathbb{L}^{(n-i)(|I|+|J|-1)} \\ \mathbb{L}^{(m-n)(|I|+|J|)} \\ \mathbb{L}^{(d_1-|I|+d_2-|J|)(m-i)} \\ \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(n-m)-e-e'} \end{array} \\
 &= \sum_{\substack{e \geq 1 \\ e' \geq 1}} \sum_{I \neq \emptyset} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \begin{array}{l} (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \in (h_1^{-1}(0) \cap E_I^\bullet) \times (h_2^{-1}(0) \cap F_J^\bullet), \\ \text{ord}_t f_1 h_1 \gamma_1 = \text{ord}_t f_2 h_2 \gamma_2 = i, \\ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_m(M_1 \times M_2), \text{ac}(f_1 h_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 h_2 \gamma_2) = 0, \\ \gamma_1 \in \pi_m \Delta_e, \gamma_2 \in \pi_m \Delta_{e'} \end{array} \right] \begin{array}{l} \mathbb{L}^{(d_1+d_2)(i-m)-e-e'} \\ \mathbb{L}^{(d_1+d_2-1)(n-i)} \end{array}
 \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{X}_n^-(f_1 \oplus f_2)] &= [(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_n(f_1) \times \mathfrak{X}_n(f_2), \text{ac } f_1 \gamma_1 + \text{ac } f_2 \gamma_2 \neq 0] \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} [(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_i(f_1) \times \mathfrak{X}_i(f_2), \text{ac } f_1 \gamma_1 + \text{ac } f_2 \gamma_2 = 0] \mathbb{L}^{(d_1+d_2-1)(n-i)} \\
 &= [(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_n(f_1) \times \mathfrak{X}_n(f_2), \text{ac } f_1 \gamma_1 + \text{ac } f_2 \gamma_2 \neq 0] \\
 &\quad - [(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_n(f_1) \times \mathfrak{X}_n(f_2), \text{ac } f_1 \gamma_1 + \text{ac } f_2 \gamma_2 = 0] \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n [(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_i(f_1) \times \mathfrak{X}_i(f_2), \text{ac } f_1 \gamma_1 + \text{ac } f_2 \gamma_2 = 0] \mathbb{L}^{(d_1+d_2-1)(n-i)} \\
 &= -[\mathfrak{X}_n(f_1)] * [\mathfrak{X}_n(f_2)] + \sum_{i=1}^n \overline{[(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_i(f_1) \times \mathfrak{X}_i(f_2), \text{ac}(f_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 \gamma_2) = 0]} \mathbb{L}^{(n-i)(d_1+d_2-1)}
 \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{X}_n(f_1 \oplus f_2)] \mathbb{L}^{-n(d_1+d_2)} &= [\mathfrak{X}_n(f_1)] \mathbb{L}^{-nd_1} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \overline{[\mathfrak{X}_i(f_2)]} \mathbb{L}^{-id_2} \right) \\
 &\quad + \left( 1 - \sum_{i=1}^n \overline{[\mathfrak{X}_i(f_1)]} \mathbb{L}^{-id_1} \right) [\mathfrak{X}_n(f_2)] \mathbb{L}^{-nd_2} \\
 &\quad - [\mathfrak{X}_n(f_1)] \mathbb{L}^{-nd_1} * [\mathfrak{X}_n(f_2)] \mathbb{L}^{-nd_2} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \overline{[(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_i(f_1) \times \mathfrak{X}_i(f_2), \text{ac}(f_1 \gamma_1) + \text{ac}(f_2 \gamma_2) = 0]} \mathbb{L}^{-i(d_1+d_2)} \mathbb{L}^{i-n}
 \end{aligned}$$

In the same way<sup>\*</sup> we have

$$\begin{aligned}
 & \overline{[(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1+d_2}), \text{ord}_t(f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2) > n]} \cdot \mathbb{1} \\
 &= \overline{[\text{ord}_t f_1 > n, \text{ord}_t f_2 > n]} \cdot \mathbb{1} + \sum_{i=1}^n \overline{[\text{ord}_t f_1 = \text{ord}_t f_2 = i, \text{ord}_t(f_1 + f_2) > n]} \cdot \mathbb{1} \\
 &= \overline{[\text{ord}_t f_1 > n, \text{ord}_t f_2 > n]} \cdot \mathbb{1} + \sum_{i=1}^n \overline{[(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{X}_i(f_1) \times \mathfrak{X}_i(f_2), \text{ac}(f_1\gamma_1) + \text{ac}(f_2\gamma_2) = 0]} \mathbb{L}^{(n-i)(d_1+d_2-1)}
 \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
 & [\mathfrak{Y}_n(f_1 \oplus f_2)] \mathbb{L}^{-n(d_1+d_2)} \\
 &= [\mathfrak{X}_n(f_1 \oplus f_2)] \mathbb{L}^{-n(d_1+d_2)} - \overline{[(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^{d_1+d_2}), \text{ord}_t(f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2) > n]} \mathbb{L}^{-n(d_1+d_2)} \\
 &= [\mathfrak{X}_n(f_1)] \mathbb{L}^{-nd_1} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \overline{[\mathfrak{X}_i(f_2)]} \mathbb{L}^{-id_2} \right) \\
 &\quad + \left( 1 - \sum_{i=1}^n \overline{[\mathfrak{X}_i(f_1)]} \mathbb{L}^{-id_1} \right) [\mathfrak{X}_n(f_2)] \mathbb{L}^{-nd_2} \\
 &\quad - [\mathfrak{X}_n(f_1)] \mathbb{L}^{-nd_1} * [\mathfrak{X}_n(f_2)] \mathbb{L}^{-nd_2} \\
 &\quad - \overline{[\text{ord}_t f_1 > n]} \mathbb{L}^{-nd_1} \overline{[\text{ord}_t f_2 > n]} \mathbb{L}^{-nd_2} \\
 &= -([\mathfrak{Y}_n(f_1)] \mathbb{L}^{-nd_1}) * ([\mathfrak{Y}_n(f_2)] \mathbb{L}^{-nd_2})
 \end{aligned}$$

■

We recover the convolution [59, Theorem 2.3] thanks to the following lemma.

**Lemma 3.6.19.** *Let  $\varepsilon \in \{>, <\}$  then*

$$\chi_c(F^\varepsilon(x * y)) = -\chi_c(F^\varepsilon x) \chi_c(F^\varepsilon y)$$

We need the following lemma in order to prove the previous one.

**Lemma 3.6.20.** *Let  $X$  be an  $\mathcal{AS}$ -set endowed with an  $\mathcal{AS}$  action of  $\mathbb{R}^*$  and  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  be an  $\mathcal{AS}$ -map such that  $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda^n \varphi(x)$ . Then  $\varphi$  is a trivial semialgebraic fibration over  $\mathbb{R}_{>0}$  and over  $\mathbb{R}_{<0}$  (or over  $\mathbb{R}^*$  if  $n$  is odd).*

*Proof.* Indeed, the following diagram commutes (for the case  $> 0$ )

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) & \xrightarrow{\Psi} & \varphi^{-1}(1) \times \mathbb{R}_{>0} \\
 \searrow \varphi & & \swarrow \text{pr}_2 \\
 & & \mathbb{R}_{>0}
 \end{array}$$

where  $\Psi(x) = (\varphi(x)^{-\frac{1}{n}} \cdot x, \varphi(x))$  and  $\Psi^{-1}(x, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{n}} \cdot x$

■

<sup>\*</sup>We reduce to the DNC case to handle the case of equal orders.

*Proof of Lemma 3.6.19.* Assume that  $\varepsilon = >$ . Then, using the fact that  $\varphi_i$  is trivial over  $\mathbb{R}_{>0}$  (resp.  $\mathbb{R}_{<0}$ ) and that  $\chi_c(a + b \geq 0, a < 0) = \chi_c(a \geq 0, b = 0) = 0$ , we have

$$\begin{aligned}
 \chi_c(F^>([\varphi_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^*] * [\varphi_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^*])) &= -\chi_c((\varphi_1 + \varphi_2) > 0) + \chi_c((\varphi_1 + \varphi_2 = 0) \times \mathbb{R}_{>0}) \\
 &= -\chi_c((\varphi_1 + \varphi_2) > 0) - \chi_c((\varphi_1 + \varphi_2 = 0)) \\
 &= -\chi_c((\varphi_1 + \varphi_2) \geq 0) \\
 &= -\chi_c(\varphi_1 \geq 0, \varphi_2 \geq 0) \\
 &\quad + \chi_c((\varphi_1 + \varphi_2) \geq 0, \varphi_1 < 0) + \chi_c((\varphi_1 + \varphi_2) \geq 0, \varphi_2 < 0) \\
 &= -\chi_c(\varphi_1 \geq 0, \varphi_2 \geq 0) \\
 &= -\chi_c(\varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0) \\
 &\quad - \chi_c(\varphi_1 \geq 0, \varphi_2 = 0) - \chi_c(\varphi_1 = 0, \varphi_2 \geq 0) \\
 &= -\chi_c(\varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0) \\
 &= -\chi_c(F^>[\varphi_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^*]) \chi_c(F^>[\varphi_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^*])
 \end{aligned}$$

■

**Corollary 3.6.21** ([59, Theorem 2.3]). *Let  $\varepsilon \in \{>, <\}$  then*

$$\tilde{Z}_{f \oplus g}^{\chi_c, \varepsilon}(T) = \tilde{Z}_f^{\chi_c, \varepsilon}(T) \odot \tilde{Z}_g^{\chi_c, \varepsilon}(T)$$

where the product  $\odot$  is the Hadamard product which consists in applying the classical product of  $\mathbb{Z}$  coefficientwise.

We showed in the proof of 3.6.20 that  $\chi_c(F^>(a)) = -\chi_c(F^+(a))$ . In the same way we may prove that  $\chi_c(F^<(a)) = -\chi_c(F^-(a))$ . This allows us to state the following corollary.

**Corollary 3.6.22.** *Let  $\varepsilon \in \{+, -\}$  then*

$$\tilde{Z}_{f \oplus g}^{\chi_c, \varepsilon}(T) = -\tilde{Z}_f^{\chi_c, \varepsilon}(T) \odot \tilde{Z}_g^{\chi_c, \varepsilon}(T)$$

where the product  $\odot$  is the Hadamard product which consists in applying the classical product of  $\mathbb{Z}$  coefficientwise.

### 3.7 Blow-Nash equivalence

T.-C. Kuo [65] defined the notion of blow-analytic equivalence for analytic germs: two germs are blow-analytically equivalent if we can get one from the other composing by a homeomorphism which is blow-analytic and such that the inverse is also blow-analytic. In order to prove that this is an equivalence relation, he gave a characterization in terms of real modifications [65, Proposition 2]. Similarly to this characterization, G. Fichou [32, Definition 4.1] defined a notion of blow-Nash equivalence for Nash germs, which is an algebraic version of the blow-analytic equivalence of T.-C. Kuo. Its zeta functions are invariants of this relation. However it is not clear that this notion is an equivalence relation.

The definition of blow-Nash equivalence evolved, and we now use the following one [34, 35, 36]: two Nash germs are blow-Nash equivalent if they are blow-Nash equivalent via a blow-Nash isomorphism in the sense of [33, Definition 1.1]. The assumption “via a blow-Nash isomorphism” is needed to ensure that the zeta functions of G. Fichou are invariants of this relation, but with this assumption, it is not clear that it is an equivalence relation.

In this section, we introduce a new relation which is an equivalence relation and which is equivalent to the current version of the blow-Nash equivalence. The zeta function is an invariant of this relation.

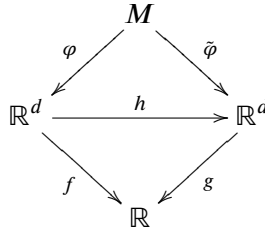
**Definition 3.7.1.** A semialgebraic function  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  defined on an algebraic set  $V$  is said to be blow-Nash if there exists  $\sigma : \tilde{V} \rightarrow V$  a finite sequence of (algebraic) blowings-up with non-singular centers such that  $\tilde{V}$  is non-singular and  $f \circ \sigma : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$  is Nash.

We recall the following useful result of Bierstone-Milman.

**Theorem 3.7.2** ([12, Theorem 1.1]). *A semialgebraic function  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  defined on a non-singular real algebraic set is blow-Nash if and only if it sends real analytic arcs to real analytic arcs by composition.*

**Definition 3.7.3.** Two germs  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  are said to be blow-Nash equivalent if there exists a semialgebraic homeomorphism  $h : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  satisfying  $f = g \circ h$  such that  $h$  is arc-analytic and such that there exists  $c > 0$  with  $|\det dh| > c$  where  $dh$  is defined.

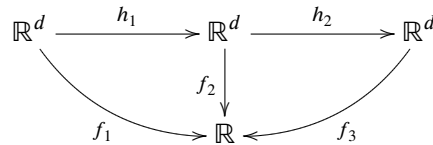
**Remark 3.7.4.** Let  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  and  $h : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  be as in Definition 3.7.3. Then there exists  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^d$  a finite sequence of blowings-up with non-singular centers such that  $\tilde{\varphi} = h \circ \varphi$  is Nash:



Notice that then  $\tilde{\varphi}$  is proper generically one-to-one Nash. Moreover, by [19, Corollary 4.17],  $\tilde{\varphi}$  induces a bijection between arcs on  $M$  and arcs on  $\mathbb{R}^d$  not entirely included in some nowhere dense subset of  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposition 3.7.5.** *Blow-Nash equivalence is an equivalence relation.*

*Proof.* The reflexivity is obvious, the symmetry comes from [19, Theorem 3.5]. Thus it suffices to prove the transitivity. We have the following diagram



where the  $f_i$  are Nash germs and the  $h_i$  are as in Definition 3.7.3. Obviously there exists  $c > 0$  such that  $|\det d(h_2 \circ h_1)| > c$ . The composition  $h_2 \circ h_1$  is obviously semialgebraic and arc-analytic (as the composition of such maps). ■

**Proposition 3.7.6.** *Two Nash germs which are blow-Nash equivalent in the sense of [32, Definition 4.1] are blow-Nash equivalent in our sense.*

*Proof.* Assume that  $f_1$  and  $f_2$  are blow-Nash equivalent in the sense of [32]. Then we have

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\
 \downarrow v_1 & & \downarrow v_2 \\
 \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^d \\
 \searrow f_1 & & \swarrow f_2 \\
 & \mathbb{R} &
 \end{array}$$

with  $\phi$  a semialgebraic homeomorphism,  $v_i$  two proper birational algebraic maps and  $\Phi$  a Nash isomorphism which preserves the multiplicities of the jacobian determinants of  $v_1$  and  $v_2$ .

Since we may lift analytic arcs by  $v_1$ ,  $\phi$  is arc-analytic. By the chain rule, since  $\Phi$  preserves the multiplicities of the jacobian determinants of  $v_1$  and  $v_2$ , we deduce that  $|\det d\phi| > c$  for some  $c > 0$ . ■

**Proposition 3.7.7.** *Two Nash germs are blow-Nash equivalent in our sense if and only if they are blow-Nash equivalent via a blow-Nash isomorphism in the sense of [33, Definition 1.1].*

*Proof.* Assume that  $f_1$  and  $f_2$  are blow-Nash equivalent via a blow-Nash isomorphism in the sense of [33]. Then we have

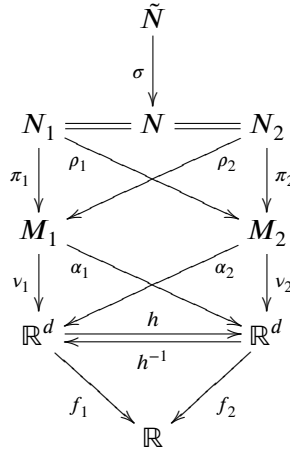
$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\
 \downarrow v_1 & & \downarrow v_2 \\
 \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^d \\
 \searrow f_1 & & \swarrow f_2 \\
 & \mathbb{R} &
 \end{array}$$

with  $\phi$  a semialgebraic homeomorphism,  $v_i$  two Nash modifications and  $\Phi$  a Nash isomorphism which preserves the multiplicities of the jacobian determinants of  $v_1$  and  $v_2$ .

Since we may lift analytic arcs by  $v_1$ ,  $\phi$  is arc-analytic. By the chain rule, since  $\Phi$  preserves the multiplicities of the jacobian determinants of  $v_1$  and  $v_2$ , we deduce that  $|\det d\phi| > c$  for some  $c > 0$ .

Assume that  $f_1$  and  $f_2$  are blow-Nash equivalent via  $h$ :  $f_1 = f_2 \circ h$  with  $h$  semialgebraic and arc-analytic satisfying  $|\det dh| > c > 0$ . Since  $h$  and  $h^{-1}$  are blow-Nash there exist  $v_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  and  $v_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  two finite sequences of blowings-up with non-singular centers such that  $\alpha_1 = h \circ v_1$  and  $\alpha_2 = h^{-1} \circ v_2$  are Nash. Let  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) be the fiber product of  $\alpha_1$  and  $v_2$  (resp.  $\alpha_2$  and  $v_1$ ). Then  $N_1 = N_2 = N$  in  $M_1 \times M_2$ . Notice that  $\pi_i$  and  $N_i$  are Nash. Let  $\sigma : \tilde{N} \rightarrow N$  be a resolution of singularities (for Nash spaces, see [13,

p234]). Then for  $i = 1, 2$ ,  $v_i \pi_i \sigma$  is a Nash modification.

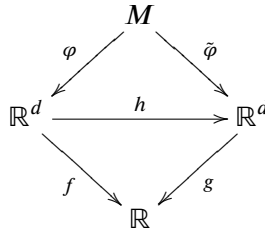


■

**Corollary 3.7.8.** *Blow-Nash equivalence via a blow-Nash isomorphism in the sense of [33, Definition 1.1] is an equivalence relation.*

**Theorem 3.7.9.** *If two Nash germs  $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  are blow-Nash equivalent then  $Z_f(T) = Z_g(T)$ .*

*Proof.* We have the following diagram



where  $h$  is a semialgebraic homeomorphism,  $\varphi$  a finite sequence of blowings-up with non-singular centers and  $\tilde{\varphi}$  a Nash map.

Notice that in the statement of Theorem 3.4.21 we only need that  $h$  is proper generically 1-to-1 Nash and not merely birational. Therefore we may also apply the theorem to  $\tilde{\varphi}$  in order to compute  $Z_g(T)$ .

Up to adding more blowings-up we may assume that  $f \circ \varphi, g \circ \tilde{\varphi} = g \circ h \circ \varphi$ ,  $\text{Jac } \varphi$  and  $\text{Jac } \tilde{\varphi}$  are simultaneously normal crossings. Denote by  $(E_i)_{i \in A}$  the irreducible components of the zero set of  $f \circ \varphi = g \circ \tilde{\varphi}$ . Set  $f \circ \varphi = \sum_{i \in A} N_i E_i, g \circ \tilde{\varphi} = \sum_{i \in A} \tilde{N}_i E_i, \text{Jac } \varphi = \sum_{i \in A} (v_i - 1) E_i$  and  $\text{Jac } \tilde{\varphi} = \sum_{i \in A} (\tilde{v}_i - 1) E_i$ .

By [19, Lemma 4.15],  $\forall i \in A, v_i = \tilde{v}_i$ . And since  $f \circ \varphi = g \circ \tilde{\varphi}$ , we have  $\forall i \in A, N_i = \tilde{N}_i$  and that  $U_I$  is well defined and doesn't depend on  $\varphi$  or  $\tilde{\varphi}$ .

Thus by Theorem 3.4.21

$$Z_f(T) = Z_g(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} [U_I \cap (h \circ p_I)^{-1}(0)] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{-v_i} T^{N_i}}$$

■

**Remark 3.7.10.** Particularly, by Proposition 3.7.7, we recover [33, Proposition 2.6].

By proposition 3.7.6, [32, Theorem 4.3] works as is in our settings (see also [33, Theorem 1.5] and [65, Theorem 1]).

**Theorem 3.7.11.** *Let  $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times (0, 1)^k \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash function such that  $\forall t \in (0, 1)^k$ ,  $F(\cdot, t) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  has an isolated singularity at 0 and there exists an algebraic proper birational map  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}^d \times (0, 1)^k$  such that  $F \circ \sigma$  has only normal crossings. Then the elements of the family  $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$  represent a finite number of blow-Nash equivalence classes.*

In the same way, we recover a version of [32, Proposition 4.17].

**Proposition 3.7.12.** *Let  $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times (0, 1)^k \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash function such that  $\forall t \in (0, 1)^k$ ,  $F(\cdot, t) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  has an isolated singularity at 0 and there exists an algebraic proper birational map  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}^d$  such that  $F \circ (\sigma, \text{id}_{(0,1)^k})$  has only normal crossings. Then the elements of the family  $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$  represent a unique blow-Nash equivalence class.*

Again, the following corollary is just a version of [32, Corollary 4.5].

**Corollary 3.7.13.** *Let  $F : (\mathbb{R}^d, 0) \times (0, 1) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be a Nash function such that  $F(\cdot, t) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  are weighted homogeneous polynomials with the same weights and have an isolated singularity at 0. Then the elements of the family  $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$  represent a unique blow-Nash equivalence class.*

**Example 3.7.14.** The Whitney family [101, Example 13.1]  $f_t(x, y) = xy(y - x)(y - tx)$ ,  $t \in (0, 1)$ , has only one blow-Nash equivalence class.

### 3.8 Classification of Brieskorn polynomials

In [59], S. Koike and A. Parusiński gave a complete classification of Brieskorn polynomials in two variables up to blow-analytic equivalence using their zeta functions and the Fukui invariants. In [32], G. Fichou classified Brieskorn polynomials in three variables up to blow-Nash equivalence thanks to his zeta functions. In this section we use the convolution formula to prove that two blow-Nash equivalent Brieskorn polynomials share the same weights.

**Definition 3.8.1.** A Brieskorn polynomial is a polynomial of the following form

$$f(x) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i x^{k_i}$$

where  $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$  and  $k_i \geq 1$ .

**Remark 3.8.2.** We will assume that  $k_i \geq 2$  since otherwise the polynomial is non-singular. Up to reordering the variables, we will always assume that  $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_d$ .

**Proposition 3.8.3.** *Let*

$$f(x) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i x^{k_i}$$

*be a Brieskorn polynomial. We may recover  $(k_1, \dots, k_d)$  from  $d$  and  $Z_f(T)$ .*

Remember from Example 3.6.8 that

$$\tilde{Z}_{\varepsilon_i x_i^{k_i}}(T) = -T \cdots -T^{k_i-1} - \left(1 - [\varepsilon_i x_i^{k_i}]\right) \mathbb{L}^{-1} T^{k_i} - \mathbb{L}^{-1} T^{k_i+1} - \cdots - \mathbb{L}^{-1} T^{2k_i-1} - \left(1 - [\varepsilon_i x_i^{k_i}]\right) \mathbb{L}^{-2} T^{2k_i} - \mathbb{L}^{-2} T^{2k_i+1} - \cdots$$

Notice that the coefficients of terms whose degrees are not multiples of  $k_i$  are of the form  $-\mathbb{L}^{-\alpha}$  where  $\alpha$  is the integral part of the degree divided by  $k_i$ .

Since the convolution product is  $\mathcal{M}_{AS}$ -bilinear, we have that  $\mathbb{L}^{-\alpha} * \mathbb{L}^{-\beta} = \mathbb{L}^{-(\alpha+\beta)}$ . Thus, if we denote

$$\tilde{Z}_f(T) = \sum_{n \geq 1} a_n T^n$$

we deduce from the convolution formula that if  $k_i$  doesn't divide  $n$  for all  $i$  then  $a_n = -\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d \lfloor \frac{n}{k_i} \rfloor}$ . Moreover, we may recover this degree using the virtual Poincaré polynomial:  $\sum_{i=1}^d \lfloor \frac{n}{k_i} \rfloor = -\deg \beta(\bar{a}_n) + 1$ .

The idea of the following proof is to use this fact to reduce to a combinatorial problem.

*Proof of Proposition 3.8.3.* Let

$$\tilde{Z}_f(T) = \sum_{n \geq 1} a_n T^n$$

Denote by  $\mathcal{P}$  the set of primes. For  $p \in \mathcal{P}$  big enough,  $p$  is not a multiple of a  $k_i$ . Thus

$$A = \lim_p \frac{-\deg(\beta(\bar{a}_p)) + 1}{p} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{k_i}$$

The following lemma ensures there exists  $K$  such that  $k_1 \leq \cdots \leq k_d \leq K$ .

**Lemma 3.8.4.** Fix  $m \in \mathbb{N}_{>0}$ . Let  $x = \sum_{i=1}^m \frac{1}{l_i}$  with  $l_i \in \mathbb{N}_{>0}$ . Then there exists a finite number of

$m$ -tuples  $(l'_i)_{i=1, \dots, m}$  such that  $x = \sum_{i=1}^m \frac{1}{l'_i}$ .

Assume that the statement is true for some  $m \in \mathbb{N}_{>0}$  and let  $x = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{l_i}$ . We may assume that  $l_1 \leq \cdots \leq l_{m+1}$ . Then  $l_1 \leq \frac{m+1}{x}$ . Then there is a finite number of choices for  $l_1$  and for every choice  $x - \frac{1}{l_1} = \sum_{i=2}^{m+1} \frac{1}{l_i}$  admits a finite number of expressions of this form. This proves the lemma.

Denote by  $\mathcal{P}'$  the set of primes lower or equal to  $K$  and for  $p \in \mathcal{P}'$ , we denote by  $\gamma_p$  the greatest exponent such that  $p^{\gamma_p} \leq K$ .

Set

$$Q = \left\{ \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\alpha_p}, 0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p \right\}$$

so that  $\{k_1, \dots, k_d\} \subset Q$ . We assume that  $2, 3, 5, 7 \in \mathcal{P}'$  and that  $\gamma_2 \geq 3, \gamma_3 \geq 2, \alpha_5 \geq 1, \alpha_7 \geq 1$ .

For  $q \in Q$ , set  $\text{mult}(q) = \#\{k_i, k_i = q\}$ . Our goal is to compute  $\text{mult } q, q \in Q$ , from  $Z_f$ .

First notice that  $\text{mult}(1) = 0$ .

We now distinguish different cases.



- Computation of mult  $q$  with  $6|q$ . Let choose, for  $p \in \mathcal{P}' \setminus \{2, 3\}$ ,  $0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p$ . Set  $\alpha_2, \alpha_3 \geq 1$ .

Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 2 \pmod{p} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Thus, on the one hand, for  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $n-1$  and  $n+1$  is not a multiple of  $q$  and on the other hand the only elements of  $\mathcal{Q}$  which divide  $n$  are those of the form  $\prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p}$  with  $0 \leq \beta_p \leq \alpha_p$ .

Therefore

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+1}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-1}}) = \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right)$$

- Computation of mult 2: assume that  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = \alpha_5 = 1$  and  $\alpha_p = 0$  for  $p \in \mathcal{P}' \setminus \{2, 3, 5\}$ .

Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 3 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p = 0 \end{cases}$$

Then  $n = 60 * n'$  where no term in  $\mathcal{P}'$  divides  $n'$ . No term in  $\mathcal{Q}$  divide  $n-1$  and  $n+1$ . And 2 but no other term in  $\mathcal{Q}$  divides  $n-2$  and  $n+2$ . Since  $\chi_c(F^+(1 - [\pm x^2])) = \pm 1$  we have

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+2}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-2}}) = \text{mult } 2 + \sum_{q \in \mathcal{Q}, q|60} \text{mult}(q)$$

Notice that in the first case we got an equation of the form

$$c = \sum_{q \in \mathcal{Q}, q|60} \text{mult}(q)$$

- Computation of mult  $q$  with  $2 \nmid q$  and  $3 \nmid q$ . Assume that  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 1 \pmod{8} \\ n \equiv 1 \pmod{p} & \text{if } p \neq 2, \alpha_p = 0 \end{cases}$$

Then the only elements of  $\mathcal{Q}$  which divide  $n$  are those of the form  $\prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p}$  with  $0 \leq \beta_p \leq \alpha_p$ , the only element in  $\mathcal{Q}$  which divides  $n+1$  and  $n-3$  is 2, no element in  $\mathcal{Q}$  divides  $n-2$  and 6 divides  $n-1$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+1}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-3}}) = \sum_{q \in \mathcal{Q}, q|n-1} \text{mult}(q) + \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right) + \text{mult}(2)$$

Notice that in the first case we got an equation of the form

$$c = \sum_{q \in \mathcal{Q}, q|n-1} \text{mult}(q)$$

Remark: either  $5|n$  (if  $5|q$ ) or  $5|n-1$ . Particularly, we get mult 5.

- Computation of mult 3 and mult 4. Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv 4 \pmod{8} \\ n \equiv 4 \pmod{9} \\ n \equiv 4 \pmod{5} \\ n \equiv 5 \pmod{7} \\ n \equiv 4 \pmod{p} \quad \text{if } p \in \mathcal{P}' \setminus \{2, 3, 5, 7\} \end{cases}$$

Then 2, 4 are the only element of  $Q$  dividing  $n$ , 3 is the only element of  $Q$  dividing  $n - 1$ , 5 is the only element of  $Q$  dividing  $n + 1$ , 2 is the only element of  $Q$  dividing  $n - 2$ , 6 divides  $n + 2$  and no element of  $Q$  divides  $n - 3, n + 3$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+3}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-3}}) = \sum_{q \in Q, q|n+1} \text{mult}(q) + 2 \text{mult } 2 + \text{mult } 3 + \text{mult } 4 + \text{mult } 5$$

Notice that in the first case we got an equation of the form

$$c = \sum_{q \in Q, q|n+1} \text{mult}(q)$$

So we have an equation of the form  $\text{mult } 3 + \text{mult } 4 = cst$ .

Now let  $\alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2, \alpha_5 = 1, \alpha_7 = 1$ . Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 5 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p \neq 0 \end{cases}$$

Then  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  divides  $n$ , no term of  $Q$  divides  $n - 1, n + 1$ , only 2 divides  $n - 2, n + 2$ , only 3 divides  $n - 3, n + 3$  and only 2, 4 divide  $n - 4, n + 4$ . Since  $\chi_c(F^+(1 - [\pm x^2])) = \pm 1$ ,  $\chi_c(F^+(1 - [\pm x^4])) = \pm 1$  and that  $\chi_c F^+$  is compatible with  $*$ , we have

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+4}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-4}}) = 3 \text{mult } 2 + 2 \text{mult } 3 + \text{mult } 4 + \sum_{q \in Q, q|n} \text{mult}(q)$$

but we already have an equation of the form  $\sum_{q \in Q, q|n} \text{mult}(q) = cst$ , thus we get an equation of the form

$$2 \text{mult } 3 + \text{mult } 4 = cst$$

- Computation of mult  $q$  with  $2|q, 4 \nmid q, 3 \nmid q$  and  $5 \nmid q$ . Let  $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = \alpha_5 = 0$  and  $0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p$  otherwise. Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 2 \pmod{9} \\ n \equiv 6 \pmod{25} \\ n \equiv 2 \pmod{7} \\ n \equiv 4 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p = 0 \text{ and } p \neq 3, 5, 7 \end{cases}$$

Then the only terms of  $Q$  dividing  $n$  are the divisors of  $\prod p^{\alpha_p}$ , the only term of  $Q$  dividing  $n - 1$  is 5, the only term of  $Q$  dividing  $n + 1$  is 3, the only terms of  $Q$  dividing  $n + 2$  are 2, 4, no term of  $Q$  divides  $n - 3, n + 3$  and 6 divides  $n - 2$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+3}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-3}}) = \text{mult } 2 + \text{mult } 3 + \text{mult } 4 + \text{mult } 5 + \sum_{q \in Q, q|n-2} \text{mult}(q) + \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right)$$

Notice that in the first case we got an equation of the form

$$c = \sum_{q \in Q, q|n-2} \text{mult}(q)$$

- Computation of mult  $q$  with  $4|q$ ,  $3 \nmid q$  and  $5 \nmid q$ . Let  $2 \leq \alpha_2 \leq \gamma_2$ ,  $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$  and  $0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p$  otherwise. Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 6 \pmod{25} \\ n \equiv 2 \pmod{9} \\ n \equiv 2 \pmod{7} \\ n \equiv 4 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p = 0, p \neq 3, 5, 7 \end{cases}$$

Then the only terms of  $Q$  dividing  $n$  are the divisors of  $\prod p^{\alpha_p}$ , the only term of  $Q$  dividing  $n - 1$  is 5, the only term of  $Q$  dividing  $n + 1$  is 3, the only term of  $Q$  dividing  $n + 2$  is 2, 6 divides  $n - 2$  and no term of  $Q$  divides  $n - 3, n + 3$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+3}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-3}}) = \text{mult } 2 + \text{mult } 3 + \text{mult } 5 + \sum_{q \in Q, q|n-2} \text{mult}(q) + \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right)$$

Notice that in the first case we got an equation of the form

$$c = \sum_{q \in Q, q|n-2} \text{mult}(q)$$

- Computation of mult  $q$  with  $2|q$ ,  $4 \nmid q$ ,  $3 \nmid q$ ,  $5|q$ . Let  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $1 \leq \alpha_5 \leq \gamma_5$  and  $0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p$  otherwise. Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \text{ and } p \neq 2 \\ n \equiv 2 \pmod{8} \\ n \equiv 2 \pmod{9} \\ n \equiv 3 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p = 0 \text{ and } p \neq 3 \end{cases}$$

Then the only terms of  $Q$  dividing  $n$  are the divisors of  $\prod p^{\alpha_p}$ , the only term in  $Q$  dividing  $n + 1$  is 3 and the only terms in  $Q$  dividing  $n + 2$  are 2, 4. No term of  $Q$  divides  $n - 1, n + 3$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+3}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-1}}) = \text{mult } 3 + \text{mult } 2 + \text{mult } 4 + \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right)$$

- Computation of mult  $q$  with  $4|q$ ,  $3 \nmid q$ ,  $5|q$ . Let  $2 \leq \alpha_2 \leq \gamma_2$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $1 \leq \alpha_5 \leq \gamma_5$  and  $0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p$  otherwise. Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 2 \pmod{9} \\ n \equiv 3 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p = 0 \text{ and } p \neq 3 \end{cases}$$

Then the only terms of  $Q$  dividing  $n$  are the divisors of  $\prod p^{\alpha_p}$ , the only term in  $Q$  dividing  $n + 1$  is 3 and the only terms in  $Q$  dividing  $n + 2$  are 2. No term of  $Q$  divides  $n - 1, n + 3$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+3}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-1}}) = \text{mult } 3 + \text{mult } 2 + \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right)$$

- Computation of  $\text{mult } q$  with  $3|q$ ,  $2 \nmid q$  and  $5 \nmid q$ . Let  $1 \leq \alpha_3 \leq \gamma_3$ ,  $\alpha_2 \alpha_5 = 0$  and  $0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p$  otherwise. Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 3 \pmod{16} \\ n \equiv 4 \pmod{25} \\ n \equiv 3 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p = 0, p \neq 2, p \neq 5 \end{cases}$$

Then the only terms of  $Q$  dividing  $n$  are the divisors of  $\prod p^{\alpha_p}$ , 2 is the only term of  $Q$  dividing  $n-1$ , 2, 4, 5, 10, 20 are the only terms of  $Q$  dividing  $n+1$  and no term in  $Q$  divides  $n-2, n+2$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+2}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-2}}) = \text{mult } 2 + \sum_{q \in Q, q|20} \text{mult}(q) + \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right)$$

Notice that in the previous case we got an equation of the form

$$c = \sum_{q \in Q, q|20} \text{mult}(q)$$

- Computation of  $\text{mult } q$  with  $3|q$ ,  $2 \nmid q$  and  $5|q$ . Let  $1 \leq \alpha_3 \leq \gamma_3$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $1 \leq \alpha_5 \leq \gamma_5$  and  $0 \leq \alpha_p \leq \gamma_p$  otherwise. Let  $n$  be such that

$$\begin{cases} n \equiv p^{\alpha_p} \pmod{p^{\alpha_p+1}} & \text{if } \alpha_p > 0 \\ n \equiv 3 \pmod{8} \\ n \equiv 3 \pmod{p} & \text{if } \alpha_p = 0, p \neq 2 \end{cases}$$

Then the only terms of  $Q$  dividing  $n$  are the divisors of  $\prod p^{\alpha_p}$ , 2 is the only term of  $Q$  dividing  $n-1$ , 2, 4 are the only terms of  $Q$  dividing  $n+1$  and no term in  $Q$  divides  $n-2, n+2$ . Thus

$$-\deg \beta(\overline{a_{n+2}}) + \deg \beta(\overline{a_{n-2}}) = 2 \text{mult } 2 + \text{mult } 4 + \sum_{0 \leq \beta_p \leq \alpha_p} \text{mult} \left( \prod_{p \in \mathcal{P}'} p^{\beta_p} \right)$$

These equations describe uniquely the sequence  $(\text{mult } q)_{q \in Q}$ . ■

**Corollary 3.8.5.** *Let*

$$f(x) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i x^{k_i} \quad \text{and} \quad g(x) = \sum_{i=1}^d \eta_i x^{l_i}$$

*be two Brieskorn polynomials. If  $f$  and  $g$  are blow-Nash equivalent then  $\forall i = 1, \dots, d$  we have  $k_i = l_i$ .*



# Bibliographie

- [1] O. M. ABDERRAHMANE, *Polyèdre de Newton et trivialité en famille*, J. Math. Soc. Japan, 54 (2002), pp. 513–550.
- [2] ———, *Weighted homogeneous polynomials and blow-analytic equivalence*, in Singularity theory and its applications, vol. 43 of Adv. Stud. Pure Math., Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, pp. 333–345.
- [3] D. ABRAMOVICH, K. KARU, K. MATSUKI, AND J. WŁODARCZYK, *Torification and factorization of birational maps*, J. Amer. Math. Soc., 15 (2002), pp. 531–572 (electronic).
- [4] V. I. ARNOLD, S. M. GUSEIN-ZADE, AND A. N. VARCHENKO, *Singularities of differentiable maps. Volume 2*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2012. Monodromy and asymptotics of integrals, Translated from the Russian by Hugh Porteous and revised by the authors and James Montaldi, Reprint of the 1988 translation.
- [5] M. ARTIN, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math., 5 (1968), pp. 277–291.
- [6] ———, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (1969), pp. 23–58.
- [7] M. ARTIN AND B. MAZUR, *On periodic points*, Ann. of Math. (2), 81 (1965), pp. 82–99.
- [8] V. V. BATYREV, *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities*, in Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 1–32.
- [9] ———, *Birational Calabi-Yau  $n$ -folds have equal Betti numbers*, in New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), vol. 264 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 1–11.
- [10] ———, *Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 1 (1999), pp. 5–33.
- [11] E. BIERSTONE AND P. D. MILMAN, *Semianalytic and subanalytic sets*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (1988), pp. 5–42.
- [12] ———, *Arc-analytic functions*, Invent. Math., 101 (1990), pp. 411–424.
- [13] ———, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. Math., 128 (1997), pp. 207–302.
- [14] E. BIERSTONE, P. D. MILMAN, AND A. PARUSIŃSKI, *A function which is arc-analytic but not continuous*, Proc. Amer. Math. Soc., 113 (1991), pp. 419–423.
- [15] F. BITTNER, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*, Compos. Math., 140 (2004), pp. 1011–1032.
- [16] M. BLICKLE, *A short course on geometric motivic integration*, in Motivic integration and its interactions with model theory and non-Archimedean geometry. Volume I, vol. 383 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, pp. 189–243.

- [17] J. BOCHNAK, M. COSTE, AND M.-F. ROY, *Real algebraic geometry*, vol. 36 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.
- [18] L. BORISOV, *Class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring*, ArXiv e-prints, (2014), 1412.6194.
- [19] J.-B. CAMPESATO, *An inverse mapping theorem for blow-Nash maps on singular spaces*, 2014, arXiv :1406.6637. To appear in Nagoya Math. J.
- [20] G. COMTE AND G. FICHOU, *Grothendieck ring of semialgebraic formulas and motivic real Milnor fibers*, *Geom. Topol.*, 18 (2014), pp. 963–996.
- [21] A. CRAW, *An introduction to motivic integration*, in *Strings and geometry*, vol. 3 of *Clay Math. Proc.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 203–225.
- [22] J. DENEFF, *On the degree of Igusa’s local zeta function*, *Amer. J. Math.*, 109 (1987), pp. 991–1008.
- [23] J. DENEFF AND K. HOORNAERT, *Newton polyhedra and Igusa’s local zeta function*, *J. Number Theory*, 89 (2001), pp. 31–64.
- [24] J. DENEFF AND F. LOESER, *Caractéristiques d’Euler-Poincaré, fonctions zêta locales et modifications analytiques*, *J. Amer. Math. Soc.*, 5 (1992), pp. 705–720.
- [25] ———, *Motivic Igusa zeta functions*, *J. Algebraic Geom.*, 7 (1998), pp. 505–537.
- [26] ———, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, *Invent. Math.*, 135 (1999), pp. 201–232.
- [27] ———, *Motivic exponential integrals and a motivic Thom-Sebastiani theorem*, *Duke Math. J.*, 99 (1999), pp. 285–309.
- [28] ———, *Geometry on arc spaces of algebraic varieties*, in *European Congress of Mathematics, Vol. I* (Barcelona, 2000), vol. 201 of *Progr. Math.*, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 327–348.
- [29] ———, *Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs*, *Topology*, 41 (2002), pp. 1031–1040.
- [30] ———, *Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence*, *Compositio Math.*, 131 (2002), pp. 267–290.
- [31] R. ELKIK, *Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6 (1973), pp. 553–603 (1974).
- [32] G. FICHOU, *Motivic invariants of arc-symmetric sets and blow-Nash equivalence*, *Compos. Math.*, 141 (2005), pp. 655–688.
- [33] ———, *Zeta functions and blow-Nash equivalence*, *Ann. Polon. Math.*, 87 (2005), pp. 111–126.
- [34] ———, *The corank and the index are blow-Nash invariants*, *Kodai Math. J.*, 29 (2006), pp. 31–40.
- [35] ———, *Blow-Nash types of simple singularities*, *J. Math. Soc. Japan*, 60 (2008), pp. 445–470.
- [36] G. FICHOU AND T. FUKUI, *Motivic invariant of real polynomial functions and Newton polyhedron*, ArXiv e-prints, (2010), 1009.1611. To appear in *Math. Proc. Camb. Phil. Soc* (2015).
- [37] T. FUKUI, *Modified analytic trivialization via weighted blowing up*, *J. Math. Soc. Japan*, 44 (1992), pp. 455–459.
- [38] ———, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence*, *Compositio Math.*, 105 (1997), pp. 95–108.

- [39] T. FUKUI, S. KOIKE, AND T.-C. KUO, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, in Real analytic and algebraic singularities (Nagoya/Sapporo/Hachioji, 1996), vol. 381 of Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman, Harlow, 1998, pp. 8–29.
- [40] T. FUKUI, K. KURDYKA, AND A. PARUSIŃSKI, *Inverse function theorems for arc-analytic homeomorphisms*, 2010, arXiv :1003.0826.
- [41] T. FUKUI, K. KURDYKA, AND L. PAUNESCU, *An inverse mapping theorem for arc-analytic homeomorphisms*, in *Geometric singularity theory*, vol. 65 of Banach Center Publ., Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2004, pp. 49–56.
- [42] T. FUKUI AND L. PAUNESCU, *Modified analytic trivialization for weighted homogeneous function-germs*, J. Math. Soc. Japan, 52 (2000), pp. 433–446.
- [43] ———, *On blow-analytic equivalence*, in Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry, vol. 24 of Panor. Synthèses, Soc. Math. France, Paris, 2007, pp. 87–125.
- [44] T. FUKUI AND E. YOSHINAGA, *The modified analytic trivialization of family of real analytic functions*, Invent. Math., 82 (1985), pp. 467–477.
- [45] G. GONZALEZ-SPRINGER AND M. LEJEUNE-JALABERT, *Sur l'espace des courbes tracées sur une singularité*, in Algebraic geometry and singularities (La Rábida, 1991), vol. 134 of Progr. Math., Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 9–32.
- [46] M. J. GREENBERG, *Schemata over local rings*, Ann. of Math. (2), 73 (1961), pp. 624–648.
- [47] ———, *Schemata over local rings. II*, Ann. of Math. (2), 78 (1963), pp. 256–266.
- [48] ———, *Rational points in Henselian discrete valuation rings*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (1966), pp. 59–64.
- [49] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (1964), p. 259.
- [50] G. GUIBERT, *Espaces d'arcs et invariants d'Alexander*, Comment. Math. Helv., 77 (2002), pp. 783–820.
- [51] G. GUIBERT, F. LOESER, AND M. MERLE, *Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic analogue of a conjecture of Steenbrink*, Duke Math. J., 132 (2006), pp. 409–457.
- [52] F. GUILLÉN AND V. NAVARRO AZNAR, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., (2002), pp. 1–91.
- [53] R. M. HARDT, *Continuité locale Hölder de la tranche d'une chaîne sous-analytique par une application sous-analytique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 287 (1978), pp. A993–A995.
- [54] M. HICKEL, *Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique*, Amer. J. Math., 115 (1993), pp. 1299–1334.
- [55] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; *ibid.* (2), 79 (1964), pp. 205–326.
- [56] ———, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Istituto Matematico “L. Tonelli” dell'Università di Pisa, Pisa, 1973. Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.
- [57] ———, *Flattening theorem in complex-analytic geometry*, Amer. J. Math., 97 (1975), pp. 503–547.
- [58] G. KEMPF, F. F. KNUDSEN, D. MUMFORD, AND B. SAINT-DONAT, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [59] S. KOIKE AND A. PARUSIŃSKI, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 53 (2003), pp. 2061–2104.



- [60] M. KONTSEVICH, *Lecture on motivic integration at Orsay*. 1995.
- [61] A. G. KOUCHNIRENKO, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, *Invent. Math.*, 32 (1976), pp. 1–31.
- [62] E. KUNZ, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the German by Michael Ackerman, With a preface by David Mumford.
- [63] T. C. KUO, *Une classification des singularités réelles*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 288 (1979), pp. A809–A812.
- [64] ———, *The modified analytic trivialization of singularities*, *J. Math. Soc. Japan*, 32 (1980), pp. 605–614.
- [65] ———, *On classification of real singularities*, *Invent. Math.*, 82 (1985), pp. 257–262.
- [66] T. C. KUO AND J. N. WARD, *A theorem on almost analytic equisingularity*, *J. Math. Soc. Japan*, 33 (1981), pp. 471–484.
- [67] K. KURDYKA, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, *Math. Ann.*, 282 (1988), pp. 445–462.
- [68] ———, *Points réguliers d'un sous-analytique*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 38 (1988), pp. 133–156.
- [69] K. KURDYKA AND A. PARUSIŃSKI, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings*, in *Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry*, vol. 24 of *Panor. Synthèses*, Soc. Math. France, Paris, 2007, pp. 33–67.
- [70] K. KURDYKA AND L. PAUNESCU, *Arc-analyticity is an open property*, in *Singularités Franco-Japonaises*, vol. 10 of *Sémin. Congr.*, Soc. Math. France, Paris, 2005, pp. 155–162.
- [71] T. Y. LAM, *An introduction to real algebra*, *Rocky Mountain J. Math.*, 14 (1984), pp. 767–814. *Ordered fields and real algebraic geometry* (Boulder, Colo., 1983).
- [72] M. LEJEUNE-JALABERT, *Courbes tracées sur un germe d'hypersurface*, *Amer. J. Math.*, 112 (1990), pp. 525–568.
- [73] F. LOESER, *Seattle lectures on motivic integration*, in *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, vol. 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 745–784.
- [74] E. LOOIJENGA, *Motivic measures*, *Astérisque*, (2002), pp. 267–297. *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1999/2000.
- [75] C. MCCRORY AND A. PARUSIŃSKI, *Algebraically constructible functions*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30 (1997), pp. 527–552.
- [76] ———, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336 (2003), pp. 763–768.
- [77] ———, *Algebraically constructible functions : real algebra and topology*, in *Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry*, vol. 24 of *Panor. Synthèses*, Soc. Math. France, Paris, 2007, pp. 69–85.
- [78] ———, *The weight filtration for real algebraic varieties*, in *Topology of stratified spaces*, vol. 58 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, pp. 121–160.
- [79] J. NASH, *Real algebraic manifolds*, *Ann. of Math. (2)*, 56 (1952), pp. 405–421.
- [80] J. F. NASH, JR., *Arc structure of singularities*, *Duke Math. J.*, 81 (1995), pp. 31–38 (1996). A celebration of John F. Nash, Jr.

- [81] T. NISHIMURA, *Topological invariance of weights for weighted homogeneous singularities*, Kodai Math. J., 9 (1986), pp. 188–190.
- [82] A. NOBILE, *On Nash theory of arc structure of singularities*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 160 (1991), pp. 129–146 (1992).
- [83] A. PARUSIŃSKI, *Subanalytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 344 (1994), pp. 583–595.
- [84] ———, *Topology of injective endomorphisms of real algebraic sets*, Math. Ann., 328 (2004), pp. 353–372.
- [85] W. PAWŁUCKI, *Le théorème de Puiseux pour une application sous-analytique*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 32 (1984), pp. 555–560.
- [86] B. POONEN, *The Grothendieck ring of varieties is not a domain*, Math. Res. Lett., 9 (2002), pp. 493–497.
- [87] D. POPESCU, *On Zariski’s uniformization theorem*, in Algebraic geometry, Bucharest 1982 (Bucharest, 1982), vol. 1056 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1984, pp. 264–296.
- [88] ———, *General Néron desingularization*, Nagoya Math. J., 100 (1985), pp. 97–126.
- [89] R. QUAREZ, *Espace des germes d’arcs réels et série de Poincaré d’un ensemble semi-algébrique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 51 (2001), pp. 43–68.
- [90] M. RAIBAUT, *Singularités à l’infini et intégration motivique*, Bull. Soc. Math. France, 140 (2012), pp. 51–100.
- [91] O. SAEKI, *Topological invariance of weights for weighted homogeneous isolated singularities in  $\mathbb{C}^3$* , Proc. Amer. Math. Soc., 103 (1988), pp. 905–909.
- [92] K. SAITO, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Invent. Math., 14 (1971), pp. 123–142.
- [93] J. SEBAG, *Intégration motivique sur les schémas formels*, Bull. Soc. Math. France, 132 (2004), pp. 1–54.
- [94] M. SEBASTIANI AND R. THOM, *Un résultat sur la monodromie*, Invent. Math., 13 (1971), pp. 90–96.
- [95] M. SHIOTA, *Nash manifolds*, vol. 1269 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [96] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. Reprint of the 1957 edition, Princeton Paperbacks.
- [97] R. G. SWAN, *Néron-Popescu desingularization*, in Algebra and geometry (Taipei, 1995), vol. 2 of Lect. Algebra Geom., Int. Press, Cambridge, MA, 1998, pp. 135–192.
- [98] A. TOGNOLI, *Su una congettura di Nash*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 27 (1973), pp. 167–185.
- [99] A. N. VARCHENKO, *Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram*, Invent. Math., 37 (1976), pp. 253–262.
- [100] W. VEYS, *Arc spaces, motivic integration and stringy invariants*, in Singularity theory and its applications, vol. 43 of Adv. Stud. Pure Math., Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, pp. 529–572.
- [101] H. WHITNEY, *Local properties of analytic varieties*, in Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965, pp. 205–244.
- [102] H. WHITNEY AND F. BRUHAT, *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels*, Comment. Math. Helv., 33 (1959), pp. 132–160.

- [103] J. WŁODARCZYK, *Toroidal varieties and the weak factorization theorem*, *Invent. Math.*, 154 (2003), pp. 223–331.
- [104] E. YOSHINAGA AND M. SUZUKI, *Topological types of quasihomogeneous singularities in  $\mathbb{C}^2$* , *Topology*, 18 (1979), pp. 113–116.



## Une fonction zêta motivique pour l'étude des singularités réelles

**Résumé.** Nous nous intéressons à l'étude des singularités réelles à l'aide d'arguments provenant de l'intégration motivique. Une telle démarche a été initiée par S. Koike et A. Parusiński puis poursuivie par G. Fichou.

Afin de donner une classification des singularités réelles, T.-C. Kuo a défini la notion d'équivalence blow-analytique. Il s'agit d'une relation d'équivalence pour les germes analytiques réels n'admettant pas de module continu pour les singularités isolées. Cette notion est étroitement liée à la notion d'applications analytiques par arcs définie par K. Kurdyka. Il est donc naturel d'adapter des arguments provenant de l'intégration motivique pour l'étude de l'équivalence blow-analytique. La difficulté réside désormais dans le fait de trouver des méthodes permettant de montrer que deux germes sont équivalents et de construire des invariants permettant de distinguer deux germes qui ne sont pas dans la même classe.

Nous travaillons avec une variante plus algébrique de cette notion, l'équivalence blow-Nash introduite par G. Fichou.

La première partie de la thèse consiste en un théorème d'inversion donnant des conditions pour que l'inverse d'un homéomorphisme blow-Nash soit encore blow-Nash. L'intérêt d'un tel énoncé est que de telles applications apparaissent dans la définition de l'équivalence blow-Nash.

La seconde partie est consacrée à l'étude d'une nouvelle fonction zêta motivique. Il s'agit d'associer à un germe analytique une série formelle. Cette fonction zêta motivique généralise les fonctions zêta de Koike–Parusiński et de Fichou et admet une formule de convolution. Il s'agit d'un invariant pour l'équivalence blow-Nash.

**Mots-clés.** équivalence blow-Nash, applications analytiques par arcs, ensembles symétriques par arcs, singularités réelles, intégration motivique, fonctions Nash, fonctions zêta.

---

## A motivic zeta function to study real singularities

**Abstract.** The main purpose of this thesis is to study real singularities using arguments from motivic integration as initiated by S. Koike and A. Parusiński and then continued by G. Fichou.

In order to classify real singularities, T.-C. Kuo introduced the blow-analytic equivalence which is an equivalence relation on real analytic germs without moduli for isolated singularities. This notion is closely related to the notion of arc-analytic maps introduced by K. Kurdyka, thus it is natural to adapt arguments from motivic integration to the study of the relation. The difficulty lies in finding efficient ways to prove that two germs are equivalent and in constructing invariants that distinguish germs which are not in the same class.

We focus on the blow-Nash equivalence, a more algebraic notion which was introduced by G. Fichou.

The first part of this thesis consists in an inverse theorem for blow-Nash maps. Under certain assumptions, this ensures that the inverse of a homeomorphism which is blow-Nash is also blow-Nash. Such maps are involved in the definition of the blow-Nash equivalence.

In the second part, we associate a power series to an analytic germ, called the zeta function of the germ. This construction generalizes the zeta functions of Koike–Parusiński and Fichou. Furthermore, it admits a convolution formula while being an invariant for the blow-Nash equivalence.

**Keywords.** blow-Nash equivalence, arc-analytic maps, arc-symmetric sets, real singularities, motivic integration, Nash functions, zeta functions.