



# Reconstruction statistique 3D à partir d'un faible nombre de projections : application : coronarographie RX rotationnelle

Ahmed Oukili

► **To cite this version:**

Ahmed Oukili. Reconstruction statistique 3D à partir d'un faible nombre de projections : application : coronarographie RX rotationnelle. Traitement du signal et de l'image. Université Rennes 1, 2015. Français. <NNT : 2015REN1S109>. <tel-01317532>

**HAL Id: tel-01317532**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01317532>**

Submitted on 18 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

*Mention : Traitement du signal et télécommunication*

Ecole doctorale Matisse

présentée par

**Ahmed OUKILI**

préparée à l'unité de recherche INSERM U1099 - LTSI  
Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image  
ISTIC UFR Informatique et Électronique

---

Reconstruction statistique  
3D à partir d'un faible  
nombre de projections  
Application :  
Coronarographie RX  
rotationnelle.

**Thèse soutenue à Rennes  
le 16 Decembre 2015**

devant le jury composé de :

**Laurent COHEN**

Directeur de Recherche au CNRS, Université Paris-Dauphine / rapporteur

**Eric PETIT**

Professeur, Université Paris Est Créteil / rapporteur

**Chafiaâ HAMITOUCHE**

Professeur, Télécom Bretagne / examinateur

**Laurent SARRY**

Professeur, Université Auvergne Clermon1 / examinateur

**Christine TOUMOULIN**

Maître de conférences, HDR, Université Rennes1 / directeur de thèse

**Jean-Claude NUNES**

Maître de conférences, Université Rennes1 / co-directeur de thèse



# Remerciements

Ce modeste travail n'aurait pas été possible sans la bienveillance de nombreuses personnes, ainsi, il me sera difficile de remercier tout le monde.

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à madame Christine TOUMOULIN et monsieur Jean-Claude NUNES, directrice et co-directeur de ma thèse, pour l'encadrement, la rigueur scientifique, les différents conseils et surtout leurs patiences.

Je tiens à remercier également messieurs Eric PETIT et Laurent COHEN qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, ont pris le temps d'écouter et de discuter avec moi de mes travaux. Je souhaiterais exprimer ma gratitude à monsieur Laurent SARRY d'avoir accepté de présider ma soutenance, ainsi qu'à madame Chafiaâ HAMITOUCHE d'avoir accepté d'examiner mon rapport de thèse.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble de personnel du LTSI, tout particulièrement au directeur du laboratoire Lotfi SENHADJI, au directeur de l'équipe **IMPACT**, Pascal HAIGRON, à l'ingénieur informaticien du laboratoire, Guillaume JEHENNE, aux secrétaires, Patricia BERNABE, Soizic CHARPENTIER et Muriel DIOP, ainsi qu'à l'ensemble des professeurs, maitres de conférence et ingénieurs, notamment Jean-Louis DILLENSEGER, Amar KACHENOURA, Jean-Jacques BELLANGER, Laurent ALBERA, Fabienne POREE, Ahmad KARFOUL, Mahmoud HASSAN et Pascal BENQUET. Je les remercie pour l'accueil chaleureux à chaque fois que j'ai sollicité leurs aides, ainsi que pour leurs encouragements.

Je souhaiterais aussi adresser ma gratitude aux professeurs et aux personnels de **PIUT de Saint Malo** – Réseaux et télécommunication, avec qui j'ai passé des moments inoubliables.

Un remerciement spécial au personnel de **LIST** de l'Université du Sud-Est de Nankin, pour l'accueil chaleureux durant mon séjour en Chine, en particulier le directeur Limin LUO et les collègues Yining HU, Guanyu YANG et Yang CHEN.

Merci à Geneviève GUILLOT, de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche, lors de mon premier stage au sein de IR4M.

Il m'est impossible d'oublier mes amis au sein du **LTSI**, qui m'ont toujours soutenu et encouragé. Merci à Gaël DREAN avec qui j'ai débuté cette thèse, pour sa gentillesse et ses conversations enrichissantes. Merci aux futurs docteurs, Auréline FARGEAS, Hélène FEUILLATRE et Frédéric COMMANDEUR pour leurs générosités, pour leurs gentillesse et pour leurs amitiés sincères. Merci à madame et monsieur BETANCUR, Julian et Zulma, merci à Juan MANTILLA, PABLO ALVAREZ, Karim EL HOUARI, Richard RIOS, Ricardo ENRIQUE, Matthieu DOYEN, Ahmed MHEICH et Mohamed SHAMAS, pour le climat sympathique dans lequel ils m'ont permis de travailler et pour les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec chacun qui m'ont beaucoup apporté.

Une thèse, c'est aussi les amis d'en-dehors. Merci à Khirou DJABAR, Tayeb AMOUKRAN, Sofiane MAIZ, Mahmoud et Kader KHERMINE, Amine BELAKHDAR, Mohammed ZEMMOUR, Ahmed BOUGHAZI, Mohammed HARMEL, Ihab ESHTAYA, Hocine ALILAT, Mehdi BENHAMOUCHE, Saïd AIET-OUARAB, Ammar ZAHAR, Mustapha EL-KHIR et à tous ceux que je ne nomme pas, mais qui se reconnaîtront. Je ne vais jamais vous oublier.

Je tiens à remercier ma petite famille, mon frère et ma sœur, Aziz et Soumia, mon neveu Farouk, mes grands-parents, mes oncles et mes tantes, la famille OUKILI et la famille GOUAL.

Enfin, je laisse mes derniers remerciements, aux personnes qui m'ont donné beaucoup de choses sans demander de retour, pour leurs sincérités, leurs générosités, leurs encouragements et leurs hospitalités, merci à la famille HAMADOUCHE, merci à la famille GESBERT, Dr. Jean-Charles, Audrey et leur petite princesse Eugénie, merci à Boumediene NEDJAR et à Nabil OUKILI.

Ces remerciements ne peuvent s'achever, sans une pensée pour l'âme de mon frère, Nabil BAROUDI, que Dieu bénisse son âme.

**Je dédie cette thèse aux deux personnes  
les plus chères à mon cœur,  
mon père Miloud  
et ma mère Hafida.**





# Table des matières

Table des matières	1
Table des figures	3
Liste des tableaux	10
1 Introduction	17
1.1 Contexte médical	17
1.2 Motivation	23
1.3 Problématique et contribution	26
2 Reconstruction conique 3D des réseaux artériels coronaire	29
2.1 Défis de la reconstruction 3D des artères coronaires	30
2.2 État de l’art des méthodes de reconstruction appliquées aux vaisseaux coronariens	32
2.3 Approches itératives statistiques en reconstruction RX	36
2.3.1 Reconstruction tomographique RX	36
2.3.2 Principales composantes des méthodes statistiques de reconstruction en tomographie statique	40
Modèle physique du processus d’acquisition	43
Modèle de connaissances a priori	45
Méthodes itératives d’optimisation	49
2.3.3 Quelques méthodes itératives numériques d’optimisation	52
Méthodes de descente	52
Algorithme Espérance-Maximisation EM	55
Non Convexité Graduelle (GNC)	56
2.4 Conclusion	57
3 Opérateurs de projection et de rétroprojection	61
3.1 État de l’art	61
3.2 Présentation de quelques operateurs	66
Aspects géométriques	67
Aspects physiques	69
3.2.1 Pixel-Driven	71
3.2.2 Ray-Driven	74
3.2.3 Distance Driven (Empreintes séparables)	77
3.2.4 Empreintes séparables : Trapèze/Trapèze	80
3.2.5 Conclusion	83
3.3 Distance Driven Simplifié DDS	84



3.3.1	Aspects calculatoires de la Distance-Driven Simplifiée . . . . .	84
3.3.2	Comparaison de la nouvelle méthode (DDS) avec la Distance-Driven (DD) et l'approche des Empreintes-Séparables Trapèze-Tapèze (SF-TT) . . . . .	85
3.4	Conclusion . . . . .	90
4	Méthodes de reconstruction statistique proposées . . . . .	93
4.1	Modèle physique du système d'acquisition . . . . .	96
4.1.1	Modèle statistique de bruit d'acquisition . . . . .	96
4.1.2	Modèle déterministe Simplifié de l'opérateur de projection . . . . .	96
4.2	Modèle a priori . . . . .	98
4.2.1	Fonction de coût - MAP . . . . .	99
4.2.2	Étude heuristique des propriétés de lissage avec préservation des contours . . . . .	100
	Analogie avec l'EDP de diffusion . . . . .	100
	Régularisation avec prise en compte des discontinuités . . . . .	102
4.2.3	Fonctions de pondération . . . . .	107
	Facteur d'échelle . . . . .	107
	Harmonisation des fonctions de pondération . . . . .	109
4.2.4	Conclusion . . . . .	111
4.3	Algorithme de reconstruction statistique . . . . .	112
4.3.1	Maximum A Posteriori - Newton Raphson Modifié MAP-MNR . . . . .	112
4.3.2	Maximum A Posteriori - ARTUR - Gradient conjugué MAP-ARTUR-GC . . . . .	114
4.4	Conclusion . . . . .	116
5	Évaluation des méthodes de reconstruction statistique proposées . . . . .	119
5.1	Modèles de données 3D (arbre coronaire) et 2D (projections) . . . . .	120
5.1.1	A. Modèles d'arbre coronaire 3D . . . . .	120
5.1.2	B. Modèles de projections . . . . .	121
5.2	Critères d'évaluation des algorithmes . . . . .	125
5.3	Tests de l'algorithme : Maximum A Posteriori - Newton Raphson Modifié MAP-MNR . . . . .	127
5.3.1	Comportement de l'algorithme en fonction des hyperparamètres $\rho$ et $\beta$ . . . . .	129
5.3.2	Convergence de l'algorithme . . . . .	140
5.4	Tests de l'algorithme : Maximum A Posteriori - ARTUR - Gradient conjugué MAP-ARTUR-GC . . . . .	143
5.4.1	Comportement de l'algorithme en fonction des hyperparamètres $\rho$ et $\beta$ . . . . .	144
5.4.2	Convergence de l'algorithme . . . . .	149
5.5	Comparaison des reconstructions MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC . . . . .	153
5.5.1	Influence de l'algorithme d'optimisation sur les $\beta$ et $\rho$ optimaux . . . . .	153
5.5.2	Influence de la dynamique de l'objet à reconstruire sur les $\beta$ et $\rho$ optimaux . . . . .	158
5.6	Conclusion . . . . .	161
6	Conclusions et perspectives . . . . .	163
6.1	Synthèse . . . . .	163

6.2	Résultats, limites et perspectives . . . . .	168
6.2.1	Modélisation du processus d'acquisition . . . . .	168
	A. Aspects déterministes du processus d'acquisition . . . . .	168
	B. Aspects aléatoires du processus d'acquisition . . . . .	170
6.2.2	Modèle a priori . . . . .	172
6.2.3	Algorithme d'optimisation numérique . . . . .	176
6.3	Conclusion . . . . .	177
	Références bibliographiques . . . . .	179
	Liste de publications . . . . .	198

## Table des figures

1.1	(A) Image microscopique d'un dépôt graisseux dans la tunique interne (intima) d'une artère [INSERM, 2015]. (B) Coupe schématique d'une artère saine et d'une artère athéroscléreuse [INSERM, 2015] : ① : Paroi artérielle, ② : Endothélium - Couche interne de la paroi du vaisseau, ③ : Caillot de sang se formant au-dessus d'une fissure de la paroi artérielle, ④ : Plaque athéromateuse, ⑤ : Amas de graisse, ⑥ : Cellules musculaires migrant vers la couche interne, ⑦ : Monocytes attirés par l'endothélium malade et commençant à adhérer à celui-ci. . . . .	18
1.2	Réseau coronarien (d'après A.D.A.M. Medical Encyclopedia). . . . .	18
1.3	Exemples de différents systèmes d'imagerie angiographique RX. (A) : Mono-Plan, se caractérise par une mobilité très réduite du couple émetteur/détecteur RX avec un seul mode statique d'acquisition [R.T.C, 2015]. (B) : Biplan, se caractérise par deux couples émetteur/détecteur RX, permettant une double acquisition RX simultanée [MEDIPOL, 2015]. (C) : rotationnel, se caractérise par des mouvements plus sophistiqués et diversifiés du couple émetteur/détecteur RX en combinant le mouvement d'arc en C avec celle du bras en L (les différents mouvements sont schématisés par les flèches rouges) [SIEMENS, 2015].	20
1.4	Exemples d'images issues d'un examen de coronarographie d'un même patient : (A) : Coronaire gauche en OAD (Oblique Antérieure Droite), (B) : Coronaire droite en OAG (Oblique Antérieure Gauche). . . . .	20
1.5	Exemple illustrant une angioplastie (A) et une pose de stent (B) [Dreamstime, 2015].	21
1.6	Exemple illustrant un pontage coronaire avec les vaisseaux sanguins les plus utilisés dans la routine clinique (artère mammaire, artère radiale et veine saphène) [B.H.C, 2015]. . . . .	22
1.7	Exemple illustrant le principe d'une acquisition angiographique RX en mode rotationnel (cardiac spin) : rotation dans le plan axial de l'arceau en C (portant le couple émetteur/détecteur RX) autour du patient, pouvant effectuer un balayage angulaire LAO/RAO de 200°. . . . .	24

2.1	Exemple d'angiogramme coronarien illustrant la difficulté d'une segmentation vasculaire automatique. Sa définition est de 512 pixels de largeur sur 512 pixels de hauteur. (A) Exemple des structures parasites en imagerie coronaire : les flèches vertes correspondent aux vertèbres, la flèche rouge à la fuite de produit de contraste, la flèche jaune au cathéter d'injection et les flèches en violet aux côtes. (B) Segmentation manuelle des coronaires à partir de l'image A. (C) Histogrammes des niveaux de gris à l'intérieur des vaisseaux (coronaire - trait plein) et à l'extérieur (structures de fond - trait pointillé) de la région d'intérêt (calculés à partir de A et B). . . . .	30
2.2	Exemple d'effets indésirables lié à l'injection du produit de contraste durant une coronarographie rotationnelle : variabilité du contraste et apparition de fuites (encadrées en rouge). . . . .	31
2.3	Illustration de la géométrie de mesure et les incidences de projection adoptées dans une acquisition conique en tomographie de transmission RX [Siltanen et al., 2003]. (A): principe d'une acquisition RX conique en mode rotationnel. (B): coupes axiales en géométrie conique, (B1): tomographie locale, (B2): tomographie globale. (C): stratégies différentes pour la collecte de données en tomographie, (C1): rotation complète avec un échantillonnage angulaire plein, (C2): rotation partielle avec un échantillonnage angulaire plein, (C3): rotation complète avec un échantillonnage angulaire éparsé, (C4): rotation partielle avec un échantillonnage angulaire éparsé. . . . .	38
2.4	Différentes formes de fonctions de potentiel au sein de la famille <i>MRF</i> , de gauche à droite : quadratique (Tikhonov), semi-quadratique (Huber) et non quadratique (semi- $L_0$ ). . . . .	49
2.5	Principe de la méthode GNC [Blake and Zisserman, 1987]. . . . .	57
3.1	Aspects géométriques lors d'une acquisition rotationnelle R-X dans le cas d'une géométrie en éventail et d'un détecteur plan. . . . .	67
3.2	Principe de de formation d'un profil dans une acquisition 1D RX . . . . .	69
3.3	Principe de la représentation discrète de l'objet imagé . . . . .	70
3.4	Principe de la méthode Pixel-Driven (1) : Projections coniques des points $\vec{n}(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$ (position de chaque échantillon de $\mu$ ). (2) : La contribution de l'échantillon $\mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$ pour la formation de la valeur du point détecteur $(s_u, t_v)$ égale à la surface hachurée normalisée par $\Delta_s$ et $\Delta_t$ (éq. 3.21). . . . .	72
3.5	Application de la projection Pixel-Driven sur un fantôme numérique voxélisé, pour les paramètres géométriques suivants : $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ , $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.6$ , $(i', j', k') \in [1, 2, \dots, 256]^3$ , $(u, v) \in [1, 2, \dots, 256]^2$ , $D_{SO} = 960$ , $D_{SD} = 1003$ (toutes les distances sont exprimées en <i>mm</i> ). (A) représente le fantôme numérique 3D et (B) sa projection en utilisant le projecteur Pixel-Driven. . . . .	74
3.6	Principe de la méthode Ray-Driven. (1) : Tracé de la droite numérique de direction $\vec{e}$ et de pas d'échantillonnage $\Delta_r$ , reliant la source RX au point détecteur $p$ de coordonnées $(s_u, t_v)$ (éq. 3.22). (2) : Pour un échantillon $r_m$ de droite (de coordonnée $(r_{mx}, r_{my}, r_{mz})$ ), le plan dont $r_m$ est la plus proche de son orthogonalité est sélectionné (dans ce cas c'est le plan <i>ZY</i> puisque $D_{r_{mx}/YZ}$ est la plus petite par rapport aux $D_{r_{my}/ZX}$ et $D_{r_{mz}/XY}$ ) afin de déterminer la contribution de chaque échantillon de $\mu$ appartenant à ce plan, à la formation de la valeur interceptée en $(s_u, t_v)$ . . . . .	75

3.7	Application de la projection Ray-Driven sur un fantôme numérique voxélisé, pour les paramètres géométriques suivants : $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ , $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.6$ , $(i', j', k') \in [1, 2, \dots, 256]^3$ , $(u, v) \in [1, 2, \dots, 256]^2$ , $D_{SO} = 960$ , $D_{SD} = 1003$ (toutes les distances sont exprimées en <i>mm</i> ). (A) représente le fantôme numérique 3D, (B) sa projection en utilisant le projecteur Distance-Driven et (C) la coupe $Z = 128$ de la rétroprojection de (B). . . . .	77
3.8	Principe de la la méthode Distance-Driven . . . . .	78
3.9	Calcul des coefficients de la matrice de projection, $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}]$ , en approximant la surface de chevauchement ( $O_1O_2$ ) entre la projection du la fonction de base à la position $\vec{n}$ et la rétroprojection d'un pixel $(s_u, t_v)$ (détecteur élémentaire $W_1W_2$ ) sur un plan commun ( $P_C$ ) : $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}] = D \frac{O_1 \times O_2}{W_1 \times W_2}$ . . . . .	79
3.10	Calcul exact de $q(s, t; \theta; \vec{n})$ et ses profils d'un voxel centré à (93, 93, 93) sur un détecteur plan avec $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 1\text{mm}$ , $D_{SD} = 949\text{mm}$ , $D_{SO} = 949\text{mm}$ , et $\theta = 0$ . . . . .	81
3.11	Principe de la méthode Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze. Approximation des empreintes coniques d'une fonction de base (position $\vec{n}$ ) par le produit de deux trapèzes séparable (selon l'axe $S$ et $T$ ) pour pouvoir calculer les coefficients $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}]$ de la matrice de projection, en exploitant les longueurs de chevauchement avec les détecteur élémentaires (Pixel) $(s_u, t_v)$ : $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}] = DA_s A_t$ . . . . .	81
3.12	Application de la projection Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze sur un fantôme numérique voxélisé, pour les paramètres géométriques suivants : $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ , $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.6$ , $(i', j', k') \in [1, 2, \dots, 256]^3$ , $(u, v) \in [1, 2, \dots, 256]^2$ , $D_{SO} = 960$ , $D_{SD} = 1103$ (toutes les distances sont exprimées en <i>mm</i> ). (A) représente le fantôme numérique 3D, (B) sa projection en utilisant le projecteur Empreintes séparable Trapèze-Trapèze et (C) la coupe $Z = 128$ de la rétroprojection de (B). . . . .	83
3.13	Principe de la méthode Distance Driven Simplifiée DDS. (1) : La détermination de projections coniques (en points verts) des quatre sommets d'une fonction de base $b_{\vec{\Delta}}$ (indicatrice de voxel). (2) : La définition du plus petit rectangle englobant les huit points de projection (rectangle en gris transparent). (3) : La détermination des probabilités de détection (les coefficients de la matrice de projection $A$ ) en fonction des surfaces de chevauchement entre la surface rectangulaire déterminée à l'étape (2) et les surfaces pixelliques (surface rectangulaire rouge). . . . .	85
3.14	Schéma comparatif des deux methodes : DDS et DD. (1): Approximation de l'empreinte conique d'un voxel, pointillés verts: DDS, pointillés bleus: DD. Approximation de la surface de chevauchement avec les pixels, carré jaune: DD, carré rouge: DDS. (2): Sélection des points représentatifs du voxel afin de les projeter, point verts : DDS, points bleus: DD (changement des points entre la vue $V_1$ et $V_2$ . . . . .	86
3.15	Schéma comparatif des trois méthodes: DD, SF-TT et DDS. (1): Comparaison entre la projection conique réelle d'un voxel (pointillés rouges) et celles approximées dans la DD (pointillés bleus) et dans la DDS (pointillés verts). (2): Distribution non uniforme des photons émis (flèches oranges) par un voxel, et sa modélisation par des trapèzes dans la méthode SF-TT. . . . .	87

3.16	Schéma comparatif des deux méthodes : DDS et SFTT. (1): Empreinte conique d'un voxel selon un seul axe est supérieure à la largeur de 3 pixels. (2): Empreinte conique d'un voxel selon un seul axe est inférieure à la largeur de 3 pixels. . . . .	89
3.17	Image de projection d'un fantôme 3d <b>Shepp-Logan</b> numérique de taille $128 \times 128 \times 128$ voxel, en utilisant la matrice de projection Distance Driven Simplifiée (DDS). Les paramètres d'acquisition sont: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 1$ , $(i, j, k) \in [0..127]^3$ , $(u, v) \in [0..127]^2$ , $D_{SO} = 720$ , $D_{SD} = 1050$ . A chaque fois nous faisons varier la taille de pixel : (A-1): $\Delta_s = \Delta_t = 1.2$ , (A-2): $\Delta_s = \Delta_t = 1.1$ , (A-3): $\Delta_s = \Delta_t = 1$ , (B-1): $\Delta_s = \Delta_t = 0.9$ , (B-2): $\Delta_s = \Delta_t = 0.8$ , (B-3): $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ . . . . .	89
3.18	Image de rétroprojection (coupe $Z = 64$ ) des projections calculées précédemment (Fig. 3.17) en utilisant les mêmes paramètres d'acquisition. . . . .	90
4.1	Organigramme des différentes méthodes de reconstruction coronariennes réalisées à partir d'une séquence rotationnelle d'angiographie RX (résumé de l'état de l'art - section 2.2). Le grand bloc en vert représente la méthode de reconstruction adoptée. Le bloc en rouge est détaillé dans la figure 4.2. . . . .	94
4.2	Schéma bloc représente les différentes procédures permettant l'élaboration de nos méthodes statistiques de reconstruction des artères coronaires à partir d'une série de projections correspondant à la même phase cardiaque. . . . .	95
4.3	Création d'un masque 3D (région d'intérêt) englobant les vaisseaux 3D. (0) : Calcul des matrices de rétro-projection en respectant les paramètres géométriques d'acquisition. (1) : Dilatation (zones 2D en rouge) du résultat des segmentations 2D des vaisseaux (zones 2D en noir) réalisées à partir des projections 2D. (2) : Détermination de la région 3D englobant le réseau coronarien, $RI_1$ , résultante de l'intersection des rétroprojections des segmentations 2D dilatées (zone 3D en noire). (3) : Dilatation de $RI_1$ afin de concevoir la région d'intérêt 3D finale, $RI$ (zone 3D en rouge). . . . .	97
4.4	Système de voisinage à 26-connexité définissant les interactions locales dans le modèle markovien de l'objet 3D à reconstruire : voxel gris : site central, voxels verts (6): sites voisins situés à une distance $\Delta$ , voxels rouges (12): sites voisins situés à une distance $\sqrt{2}\Delta$ , voxels bleus (8): sites voisins situés à une distance $\sqrt{3}\Delta$ . avec : $\Delta_X = \Delta_Y = \Delta_Z = \Delta$ est la distance entre deux voxels, elle représente l'espacement séparant leurs centres d'inertie. . . . .	99
4.5	Tracé des fonctions de potentiel $\varphi$ et de pondération $\psi$ associées. (A) : Conditions de l'éq. 4.7 sont vérifiées. (B) : Conditions de l'éq. 4.7 ne sont pas vérifiées (G-G/X gaussienne généralisée pour $\alpha = X$ ). . . . .	106
4.6	Tracé des courbes de fonctions de pondération avant (Tabl. 4.3) et après (Tabl. 4.4) harmonisation, pour les facteurs d'échelle : $\rho = 15$ et $\rho = 60$ . . . . .	110
5.1	Visualisation de deux modèles simulés coronariens $\mu_A$ et $\mu_B$ et leurs histogrammes. . . . .	121
5.2	Projections simulées ( $Y_A$ et $Y_B$ ) obtenues à partir de deux modèles 3D patient (vaisseaux en rouge $\mu_A$ et $\mu_B$ en niveau de gris) acquis à partir d'un scanner 64 barrettes (GE LightSpeed CT coronary angiography) [Yang et al., 2006]. Les projections ont été réalisées en utilisant l'opérateur $DDS$ (section 3.3) avec les paramètres : $\Delta_X = \Delta_Y = \Delta_Z = 0.5$ , $(i, j, k) \in [1..256]^3$ , $(u, v) \in [1..256]^2$ , $D_{SO} = 720$ , $D_{SD} = 1155$ et $\Delta_s = \Delta_t = 0.58$ (voir Fig. 3.1). . . . .	122

- 5.3 (A) et (B) : Données simulées de projection superposant les vaisseaux coronariens ( $Y_A$  et  $Y_B$ ) avec les structures environnantes du fond. (1)...(5) : Calcul des images soustraites du fond 2D : • Estimation du fond 2D (ligne 4) à partir des projections (ligne 1) et les segmentations des vaisseaux 2D (ligne 2), • Soustraction des images estimées (ligne 4) des images originales (ligne 1) pour générer les projections sans les structures du fond (ligne 5). . . . . 124
- 5.4 Différents pré-traitements appliqués aux images de projection idéales afin d'évaluer les algorithmes de reconstruction itératifs proposés .  $Y_{A||B}$  : Projections idéales des vaisseaux sanguins 3D en appliquant un simple produit matriciel  $A \times \mu_{A||B}$  (éq. 2.3),  $Y_{A||B,SF}$  : Projections obtenues avec présence de structures de fond puis après suppression du fond 2D par segmentation vasculaire (Fig. 5.3),  $Y_{A||B,5db}$ ,  $Y_{A||B,10db}$ ,  $Y_{A||B,15db}$  et  $Y_{A||B,20db}$  : Projections obtenues après avoir additionné aux projections idéales  $Y_1$  et  $Y_2$  (Fig. 5.2) un bruit gaussien centré de différentes variances correspondants respectivement aux rapports signal-sur-bruit 5, 10, 15 et 20 db. . . . . 125
- 5.5 Exemples de courbes des fonctions de pondération,  $\dot{\psi}_{Hub}$  (en bleu),  $\dot{\psi}_{SM}$  (en rouge) et  $\dot{\psi}_G$  (en vert), avant et après harmonisation, pour le facteur d'échelle :  $\rho = 50$ . . . . . 128
- 5.6 Tracé de l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\beta$  (abscisses -  $\beta \in [0.0007, 0.95]$ ) pour différents  $\rho$  constants (légendes -  $\rho \in [0.5, 40]$ /colonne gauche,  $\rho \in [50, 350]$ /colonne droite) et pour différentes fonctions de potentiel utilisées dans le modèle a priori (Hub. :Huber, Gre. : Green, S.M Surfaces Minimales). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées  $Y_{A,5db}$  (SNR= 5db - projections du premier modèle 3D  $\mu_A$ ). Pour chaque série de tests, le couple  $(\beta, \rho)$  réalisant la plus petite valeur de  $EQ_{3D}$  sont mentionnés au dessus des courbes. . . . . 130
- 5.7 Tracé de l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\rho$  (abscisses) pour différents  $\beta$  constants (en légende) et pour différentes fonctions de potentiel utilisées dans le modèle a priori (Hub. :Huber, Gre. : Green, S.M Surfaces Minimales). Les reconstructions ont été réalisées à partir de projections simulées bruitées  $Y_{B,15db}$  (SNR= 15db ( $\sigma = 0.95$ ) - projection du deuxième modèle 3D  $\mu_B$ ). Pour chaque série de tests, le couple  $(\beta, \rho)$  réalisant la plus petite valeur de  $EQ_{3D}$  est mentionné en dessous des courbes. . . . . 132
- 5.8 Tracé des poids  $\beta_{opt}$  de l'a priori (coordonnées) permettant d'obtenir des reconstructions optimales (selon le critère quadratique 3D), en fonction du facteur d'échelle  $\rho$  (abscisses) pour différentes fonctions de potentiel de Huber, de Surfaces Minimales et de Green (correspondant respectivement aux lignes bleues, rouges et vertes). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées (lignes alternées : SNR= 5db, lignes pointillées : SNR= 10db, lignes solides : SNR= 15db, tiretées : SNR= 20db). Ces projections ont été générées à partir des deux modèles 3D de coronaire,  $\mu_A$  et  $\mu_B$ . . . . . 134

5.9	Tracé des différentes évaluations des reconstructions optimales 3D selon le critère quadratique total $EQ_{3D}$ , en fonction des différents traitements appliqués aux données simulées de projection (voir figure 5.4). Les évaluations représentent la moyenne quadratique normalisée ( $UQMN_{3D}$ - (éq. 5.3) - en pourcentage ( $\times 100$ )), le rapport signal sur bruit ( $SNR_{3D}$ - éq. 5.5) et l'indice de qualité universelle ( $UQI_{3D}$ - 5.4). Pour chaque reconstruction optimale et chaque fonction de potentiel adoptée (Huber en bleu, Surfaces Minimales en rouge et Green en vert), nous mentionnons les valeurs de $\beta$ et $\rho$ correspondantes (en dessous des graphes). . . . .	136
5.10	Quelques reconstructions MAP-MNR (représentatives) réalisées à partir des projections simulées $Y_{A,10db}$ (partie en haut) et $Y_{B,10db}$ (partie en bas), pour des valeurs différentes de $\rho$ et de $\beta$ . Pour chaque reconstruction MAP adoptant la fonction de potentiel de Green, nous mentionnons la valeur de l'erreur quadratique $EQ_{3D}$ (en dessous). Les reconstructions optimales selon $EQ_{3D}$ (mentionnée en rouge) correspondent à ( $\beta = 0.6, \rho = 15$ ) pour $\mu_A$ et à ( $\beta = 0.5, \rho = 15$ ) pour $\mu_B$ . . . . .	139
5.11	Tracé selon 2 initialisations différentes (constante - Init. Const., Bruit Blanc Gaussien - Init. B.B.G.) de l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$ - éq.5.2), de l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$ - éq. 5.7) et de l'énergie a priori ( $E_{prior}$ - éq. 5.7) en fonction des itérations des reconstructions <i>MAP-MNR</i> optimales (selon le critère $EQ_{3D}$ ). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections bruitées $Y_{A,15db}$ , $Y_{A,20db}$ (premier modèle A - en haut), $Y_{B,5db}$ et $Y_{B,10db}$ (deuxième modèle B - en bas), en faisant varier les fonctions de potentiel (HUB. : Huber, GR. : Green, S.M. : Surfaces minimales) dans l'expression MAP (éq. 5.8). . . . .	141
5.12	Visualisation des courbes des fonctions de pondération de Hebert et Leahy $\psi_{HL}$ (en bleu) et de Perona et Malik $\psi_{PM}$ (en rouge), avant et après harmonisation, pour le facteur d'échelle : $\rho = 50$ . . . . .	144
5.13	Tracé de l'erreur quadratique 3D $EQ_{3D}$ en fonction de $\rho$ (abscisses) pour différents $\beta$ constants (dont les valeurs sont indiquées en légende) et pour différentes fonctions de potentiel utilisées dans le modèle a priori (P.M : Perona et Malik, H.L : Hebert et Leahy). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées $Y_{A,20db}$ (SNR= 20db - $\sigma = 0.75$ ), $Y_{A,10db}$ (SNR= 10db - $\sigma = 2.39$ ) et $Y_{A,5db}$ (SNR= 5db - $\sigma = 4.25$ ) - projections du premier modèle 3D $\mu_A$ ). . . . .	145
5.14	Tracé des poids $\beta_{opt}$ de l'a priori (coordonnées) permettant d'obtenir des reconstructions optimales (selon le critère quadratique 3D), en fonction du facteur d'échelle $\rho$ (abscisses) pour différentes fonctions de potentiel de Hebert et Leahy et de Perona et Malik (correspondant respectivement aux lignes bleues et rouges). Les reconstructions ont été réalisées à partir de projections simulées bruitées (lignes alternées : SNR= 5db, lignes pointillées : SNR= 10db, lignes solides : SNR= 15db, tiretées : SNR= 20db). Ces projections ont été générées à partir des deux modèles 3D de coronaire, $\mu_A$ et $\mu_B$ . . . . .	147

- 5.15 Tracé des différentes évaluations des reconstructions optimales 3D selon le critère quadratique total  $EQ_{3D}$ , en fonction de différents traitements appliqués aux données simulées de projection (voir figure 5.4). Les évaluations représentent la moyenne quadratique normalisée ( $UQMN_{3D}$  - (éq. 5.3) - en pourcentage ( $\times 100$ )), le rapport signal sur bruit ( $SNR_{3D}$  - éq. 5.5) et l'indice de qualité universelle ( $UQI_{3D}$  - 5.4). Pour chaque reconstruction optimale et chaque fonction de potentiel adoptée (Hebert et Leahy en bleu, Perona et Malik en rouge), nous mentionnons les valeurs de  $\beta$  et  $\rho$  correspondantes. . . . 148
- 5.16 Quelques reconstructions MAP-ARTUR-GC réalisées à partir des projections simulées  $Y_{A,10db}$  (en haut) et  $Y_{B,10db}$  (en bas), pour des valeurs différentes de  $\rho$  et de  $\beta$ . La fonction de potentiel de Perona et Malik a été adoptée dans la reconstruction de  $\mu_A$ , et celle de Hebert et Leahy pour  $\mu_B$ . Les reconstructions optimales selon le critère de l'erreur quadratique (mentionnée en rouge) correspondent à ( $\beta = 0.6, \rho = 0.5$ ) pour  $\mu_A$  et à ( $\beta = 0.6, \rho = 2$ ) pour  $\mu_B$ . . . . 150
- 5.17 Tracé selon 2 initialisations différentes (constante - Init. Const., Bruit Blanc Gaussien - Init. B.B.G.) de l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$  - éq.5.2), de l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  - éq. 5.7) et de l'énergie de l'a priori ( $E_{prior}$  - éq. 5.7) en fonction des itérations des reconstructions *MAP-ARTUR-GC* optimales (selon le critère  $EQ_{3D}$ ). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections bruitées  $Y_{A,15db}$ ,  $Y_{A,20db}$  (premier modèle A - en haut),  $Y_{B,5db}$  et  $Y_{B,10db}$  (deuxième modèle B - en bas), en faisant varier les fonctions de potentiel (H.L. : Hebert et Leahy, P.M. : Perona et Malik) dans l'expression MAP (éq. 5.8). . . . . 151
- 5.18 Tracé de l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$  - colonne gauche), de l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  - colonne en milieu) et de l'énergie de l'a priori ( $E_{prior}$  - colonne droite) en fonction des itérations des reconstructions optimales (selon  $EQ_{3D}$ ) **MAP-MNR** (lignes en vert, en cyan et en magenta) et **MAP-ARTUR-GC** (lignes en noir, en bleu et en rouge). Les reconstructions ont été appliquées sur les projections bruitées  $Y_{B,20db}$ ,  $Y_{B,15db}$ ,  $Y_{B,20db}$  et  $Y_{B,15db}$ , en faisant varier les fonctions de potentiel (GR. : Green, H.L. : Hebert et Leahy, P.M. : Perona et Malik) dans l'expression MAP (éq. 5.8). . . . . 155
- 5.19 Tracé de l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\rho$  (abscisses) pour différents  $\beta$  constants (légendes) et pour la fonction de potentiel de Green utilisées dans le modèle a priori. Les reconstructions MAP-MNR (lignes en pointillé) et MAP-ARTUR-GC (lignes solides) ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées  $Y_{B,20db}$ ,  $Y_{A,10db}$  et  $Y_{A,5db}$  - projections du deuxième modèle 3D  $\mu_B$ ). . . . 158
- 5.20 Visualisation des courbes des fonctions de pondération,  $\psi_{HL}$  (en bleu)  $\psi_{PM}$  (en rouge) et  $\psi_{Gr}$  (en vert), avant (lignes en pointillé) et après (lignes solides) harmonisation, pour les facteurs d'échelles optimaux en fonction de chaque niveau de bruit. . . . . 159
- 6.1 Schéma illustrant l'équivalence entre la rotation du couple autour d'un axe fixe de rotation et celle de l'objet imagé autour du même axe. . . . . 169



6.2	(A) : Visualisation de l'application d'une diffusion non linéaire selon le schéma AOS (Additive Operator Splitting [Weickert, 1998] - implémenté par Yan Zhang [Zhang et al., 2008]) des images de projection simulées $Y_{A,5db}$ (première ligne) et $Y_{A,10db}$ (deuxième ligne). Pour le même pas temporel $\Delta_t = 0.05$ , nous changeons le nombre d'itérations : $nb_{it.Diff.} = 100$ (colonne 2) et $nb_{it.Diff.} = 200$ (colonne 3). (B) : L'influence de la diffusion non linéaire appliquée aux projections simulées $Y_{A,5db}$ (première ligne) et $Y_{A,10db}$ (deuxième ligne) pour les reconstructions MAP-MNR. . . . .	171
6.3	(A) : Tracé de la nouvelle fonction de pondération $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)}$ en diminuant linéairement (sur 400 valeurs régulièrement espacées) le paramètre $\alpha$ de 10 à 0.01. La valeur du facteur d'échelle est fixée à 4. (B) : Exemples de reconstruction MAP-MNR réalisés à partir des données simulées $Y_{A,15db}$ (première ligne) et $Y_{A,20db}$ (première ligne). La première colonne représente une reconstruction en adoptant la nouvelle fonction $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)}$ ( $\rho=4$ et $\alpha = 0.01$ ), tandis que la deuxième colonne représente la reconstruction MAP-MNR optimale (selon le critère $EQ_{3D}$ ) adoptant la fonction de potentiel de Green. . . . .	174

## Liste des tableaux

2.1	Exemples de fonctions de potentiel utilisées en régularisation avec préservation de contour. <b>N.C : Non Convexe, C. : Convexe.</b> . . . . .	49
2.2	Schéma général d'un algorithme de gradient conjugué. . . . .	55
3.1	Tableau récapitulatif comparant les principales performances de trois fonctions atomiques de base : Indicatrices de voxel, Blobs et B-Splines [Momey, 2013]. . . . .	64
4.1	Exemples de fonctions de potentiel $\varphi$ continument dérivables vérifiant certaines conditions proposées par Charbonnier et al. [Charbonnier, 1994] afin d'assurer une régularisation avec préservation de contours (C. : convexe, N.C. : Non Convexe). . . . .	103
4.2	L'introduction de la constante d'échelle $\rho$ dans les exemples du tableau 4.1. . . . .	108
4.3	Multiplication des fonctions de potentiel $\varphi$ (Tabl. 4.2) par $\rho^2$ afin de respecter les conditions 4.7. . . . .	109
4.4	Harmonisation des fonctions de pondération $\varphi$ illustrées dans Tabl. 4.3, pour $V_h = 0.01$ . . . . .	111
4.5	L'algorithme MAP-MNR dans le cas d'un bruit blanc gaussien. . . . .	113
5.1	Optimisation alternée effectuée par la méthode MAP-ARTUR-GC. . . . .	156

# Liste des indices et des abréviations

$(\Delta_s, \Delta_t)$  : Pas d'échantillonnage des mesures  $G$  dans les deux directions principales du détecteur,  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$ . elles représentent aussi les deux cotés de chaque pixel du détecteur.

$(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$  : Pas d'échantillonnage de l'objet continu  $\tilde{\mu}$  dans les trois directions de  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  : Repère cartésien fixé sur le centre de rotation (fixé sur l'objet imagé).

$(s, t)$  : Coordonnées de n'importe quel point du détecteur.

$(s_u, t_v)/k \in [1, \dots, N_s], l \in [1, \dots, N_s]$  : Coordonnées des centres pixelliques exprimés dans le repère fixé au détecteur.

$\bar{\mu}$  : Valeur moyenne de  $\mu$  (espérance mathématique de  $\mu$ ).

$\bar{g}_i = [A\mu]_i$  : Valeur moyenne détectée.

$\beta$  : Hyperparamètre déterminant le poids de l'a priori dans l'expression de  $f$ .

$\chi(s, t, \theta)$  : Équation paramétrique de la droite reliant la source RX au point  $(s, t)$  de détecteur.

$\delta$  : Fonction numérique de Dirac.

$\Gamma^{-1}$  : Inverse de la matrice de covariance.

$[A\mu]_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}\mu_j$  :  $i^{ieme}$  composant de produit matriciel  $A\mu$ .

$\mathbb{R}$  : Ensemble des réelles.

$\mathbb{V}$  : Vecteur unitaire ayant la même taille de  $\mu$ .

$\mathbb{Z}$  : Ensemble des entiers relatifs.

$\arg \max_{\mu \geq 0} (f(\mu))$  : Argument du maximum de  $f(\mu)$  sous contrainte de non négativité de  $\mu$ .

$\arg \min_{\mu \geq 0} (f(\mu))$  : Argument du minimum de  $f(\mu)$  sous contrainte de non négativité de  $\mu$ .

$\mu^*$  : Minimum (maximum) de la fonction de coût  $f$ .

$\mu^k$  : Reconstruction à l'itération  $k$ .

- $\nabla$  : Gradient spatial.
- $\Omega_s$  : Champs aléatoire dur un site  $s$ .
- $\omega_{js}$  : Facteur de pondération inversement proportionnel à la distance séparant deux sites voisins,  $\mu_j$  et  $\mu_s$ .
- $\Pi$  : Fonction porte (fenêtre).
- $\rho$  : Facteur d'échelle.
- $\sigma_i$  : Écart type du bruit gaussien entachant la mesure  $g_i$ .
- $\theta$  : Angle (Incidence) de projection.
- $\tilde{\beta}$  : Angle polaire dans un système de coordonnées sphériques (repère du système d'acquisition).
- $\tilde{\mu}/\mu$  : Coefficients d'atténuation continus (linéique) et discrets (représentés sous forme d'un vecteur).
- $\tilde{\rho}$  : Paramètre de relaxation.
- $\tilde{\varphi}$  : Angle azimutal dans un système de coordonnées sphérique.
- $\varphi$  : Fonction de potentiel.
- $\varphi_G$  : Fonction de potentiel - Green.
- $\varphi_{GG}$  : Fonction de potentiel - Gaussienne Généralisée.
- $\varphi_{GM}$  : Fonction de potentiel - Geman et McClure.
- $\varphi_{GR}$  : Fonction de potentiel - German et Reynolds.
- $\varphi_{HL}$  : Fonction de potentiel - Hebert et Leahy.
- $\varphi_H$  : Fonction de potentiel - Huber.
- $\varphi_{l_1 l_2}$  : Fonction de potentiel -  $l_1 l_2$  (Charbonnier).
- $\varphi_{PM}$  : Fonction de potentiel - Perona et Malik.
- $\varphi_{QT}$  : Fonction de potentiel - Quadratique Tronquée.
- $\varphi_{SM}$  : Fonction de potentiel - Surfaces minimales (fonction de Aubert).
- $\vec{n}(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})/i' \in [1, \dots, N_x], j' \in [1, \dots, N_y], k' \in [1, \dots, N_z]$  : Coordonnées des centres voxeliques exprimées dans le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .
- $\vec{P}_0$  : Position de la source RX par rapport au repère cartésien fixé sur l'objet imagé.
- $A(a_{ij}, i \in [1, \dots, PK], j \in [1, \dots, N])$  : Matrice de taille  $PK \times N$  modélisant l'opérateur de projection.
- $a_\theta(s_u, t_v, \vec{n})$  : Coefficient exprimant la contribution de voxel d'indice  $\vec{n}$  à la création d la quantité photonique interceptée par le pixel repéré par  $(s_u, t_v)$ .

- ART : Algebraic Reconstruction Technique.
- B : Variable de nature aléatoire modelisant le bruit.
- $b_{\Delta}$  : Fonction atomique de base.
- CT – RX : Computed Tomography-Ray X.
- $d(X_1, X_2)$  : Distance mesurant l'adéquation de  $X_1$  avec  $X_2$ .
- $d^k$  : Direction de la descente à l'itération  $k$ .
- $D_{SD}$  : Distance entre la source RX et le détecteur.
- $D_{SO}$  : Distance entre la source RX et le centre de rotation  $O$ .
- DD : Distance - Driven.
- DDS : Distance - Driven Simplifiée
- $Dif_{iso}/Dif_{ani}$  : Diffusion isotrope et anisotrope.
- div : Divergence (opérateur différentiel).
- E : Energie photonique.
- ECG : ÉlectroCardioGramme.
- f : Fonction de coût.
- $f_{pinal}$  : Fonction de pénalité.
- FBP : Filtered BackProjection (Rétroprojection filtrée).
- $G(g_i \setminus i \in [1, \dots, PK])$  : Vecteur des mesures discrètes des  $\tilde{\mu}$  pour différents angles de projection.
- GC : Gradient Conjugué.
- GNC : Graduate Non Convexité (Non Convexité Graduelle).
- H : Matrice Hessienne.
- h : Réponse impulsionnelle du détecteur.
- $H(x)$  : Fonction de Heaviside (fonction échelon).
- ICD : Iterative Coordinate Descent.
- IRM : Imagerie par Résonance Magnétique.
- IRMf : Imagerie par Résonance Magnétique Fonctionnelle.
- K : Nombre d'incidence de projection.
- $M/M_0$  : Nombre de photons transmis et émis.
- MAP : Maximum A posteriori Probability (maximum de probabilité a posteriori).

MBIR : Model-Based Iterative Reconstruction.

ML : Maximum Likelihood (Maximum de vraisemblance).

MRF : Markov Random Field (champ aléatoire de Markov).

N : Nombre des échantillons de  $\mu$ .

$N_j$  : Voisinage du site  $\mu_j$ .

$N_s, N_t$  : Nombre des échantillons de  $G$  dans les deux directions principales du détecteur.

$N_x, N_y, N_z$  : Nombre des échantillons de  $\mu$  dans chaque direction de  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

OAD : Oblique Antérieur Droite.

OAG : Oblique Antérieur Gauche.

OS – EM : Ordered Subset Expectation-Maximization.

OSC : Ordered Subset Convex algorithm .

P : Nombre de pixels (détecteurs élémentaires) pour une incidence de projection donnée.

$P(\mu)$  : Probabilité a priori.

PD : Pixel-Driven (lancer de rayons).

PML : Penalized Maximum Likelihood (Maximum de vraisemblance pénalisée).

QDP : Quadratique Définie Positive.

R : Matrice de rétroprojection.

$r_\theta(s_u, t_v, \vec{n})$  : Coefficient exprimant la contribution de la valeur pixelique à la position  $(s_u, t_v)$  à la formation du quantité à la position  $\vec{n}$  dans le raie de sa rétroprojection.

RD : Ray-Driven (lancer de rayon).

RI : Région d'intérêt.

RX : Rayons X.

$S_p$  : Surface pixelique ( $S_p = \Delta_s \Delta_t$ ).

SF – TT : Separable Footprint Trapeze-Trapeze (empreintes séparables trapèze-trapèze).

SIRT : Simultaneous Iterative Reconstruction Technique.

SNR : Signal-to-Noise Ratio (rapport signal sur bruit).

$t^k$  : Pas de la descente à l'itération  $k$ .

TDM : TomoDensitoMétrie.

TEP : Tomographie par Émission de Positron.

trap : Fonction trapèze.

$V_p$  : Valeur transmise par l'objet imagé juste avant la détection en un point  $p(s, t)$  du détecteur.

$Z$  : Numéro atomique.

$Z(\beta)$  : Fonction de partition (constante de normalisation).

Fig. : Figure

Tab. : Tableau



# 1 Introduction

Le premier chapitre décrit le lien entre la problématique traitée dans cette thèse et son application clinique, c'est à dire, entre la reconstruction (statique) des artères coronaires à partir d'une séquence d'angiographie RX rotationnelle et son exploitation en routine clinique pour le traitement et le diagnostic des maladies cardiovasculaires.

La première section (section 1.1) présente les différentes techniques médicales dédiées aux traitements et aux diagnostics des maladies cardiovasculaires, en particulier celles dues aux anomalies lipidiques telle que l'athérosclérose. Cette section va nous permettre de comprendre l'intérêt de l'angiographie RX dans l'identification du type et de la sévérité des pathologies coronariennes, ainsi que dans le domaine interventionnel (c'est à dire les actes médicaux guidés par l'imagerie).

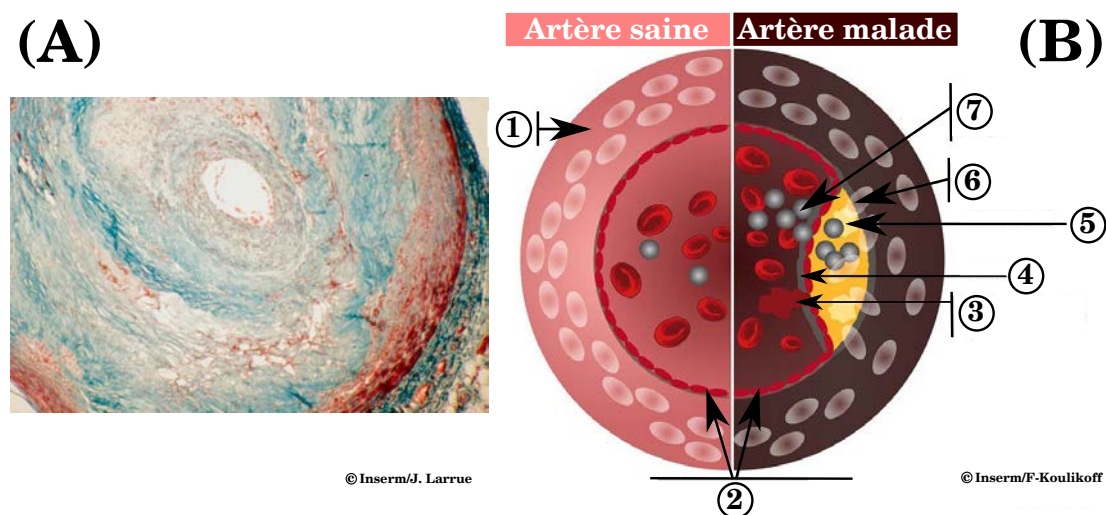
Dans la deuxième section (section 1.2), nous abordons l'intérêt d'une modélisation 3D des artères coronaires dans le domaine interventionnel lors de la planification et du traitement des coronaropathies (l'athérosclérose). Nos contributions pour résoudre cette problématique sont évoquées dans la section 1.3. Pour ce faire, nous citons les principaux points abordés le long des chapitres de manuscrit.

## 1.1 Contexte médical

D'après l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), les maladies cardio-vasculaires restent la première cause de mortalité dans le monde entier avec 17.5 millions de décès par an, soit 31% de la mortalité mondiale totale (chiffres 2012) [WHO, 2015]. Elles regroupent l'ensemble de troubles affectant le cœur et les vaisseaux sanguins (telles que les coronaires), les malformations cardiaques et les troubles du rythme cardiaque. Ces maladies résultent principalement d'anomalies lipidiques innées ou liées à des facteurs de risque tels que le tabagisme, l'excès de cholestérol, le diabète de type 2 et le sur-poids (l'obésité). Dans ce contexte nous pouvons citer l'athérosclérose (la première maladie cardiovasculaire au monde) qui se caractérise par l'accumulation de plaques blanchâtres nommées athéromes (du grec athérè : bouillie) sur les parois artérielles entraînant la réduction de la lumière vasculaire et le durcissement de ces plaques (Fig. 1.1 - pour plus de détails, voir [Libby, 2001]). Une mauvaise irrigation des tissus par les portions d'artères situées en aval de ces plaques peut être constatée.

À terme, ces plaques peuvent entraîner la lésion de la paroi artérielle (sclérose), conduire à l'obstruction du vaisseau, ou encore se rompre avec des conséquences dramatiques.



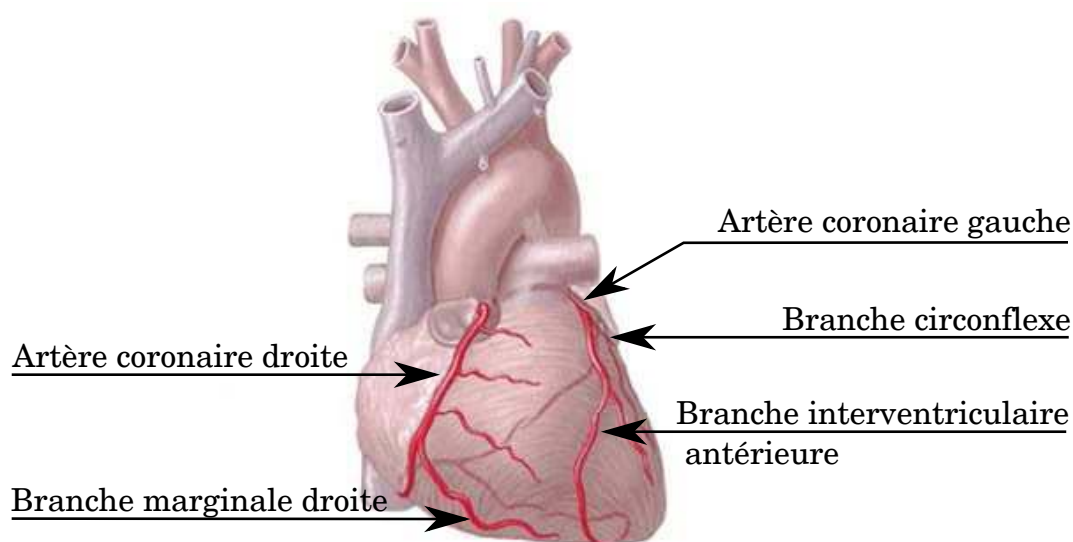


**Figure 1.1:** (A) Image microscopique d'un dépôt graisseux dans la tunique interne (intima) d'une artère [INSERM, 2015].

(B) Coupe schématique d'une artère saine et d'une artère athéroscléreuse [INSERM, 2015] :

- ① : Paroi artérielle,
- ② : Endothélium - Couche interne de la paroi du vaisseau,
- ③ : Caillot de sang se formant au-dessus d'une fissure de la paroi artérielle,
- ④ : Plaque athéromateuse,
- ⑤ : Amas de graisse,
- ⑥ : Cellules musculaires migrant vers la couche interne,
- ⑦ : Monocytes attirés par l'endothélium malade et commençant à adhérer à celui-ci.

Un cas particulier de cette anomalie lipidique se distingue quand elle affecte les vaisseaux sanguins irriguant les muscles myocardiques (réseau coronaire - Fig. 1.2), c'est l'athérome coronaire (coronaire vient du latin corona qui signifie couronne).



**Figure 1.2:** Réseau coronarien (d'après A.D.A.M. Medical Encyclopedia).

En effet, grâce aux contractions myocardiques, le cœur assure la circulation sanguine à travers l'organisme afin d'apporter les nutriments et le dioxygène dont il a besoin et

de permettre également d'éliminer ses déchets (tels que le dioxyde de carbone, l'urée, etc.). Par conséquent, cette coronaropathie peut engendrer de très graves conséquences sur la santé des individus telles que l'angine de poitrine et l'infarctus du myocarde (crise cardiaque), voire une mort subite.

Dans ce cas, une phase diagnostique se montre cruciale pour permettre de déterminer l'action thérapeutique la plus appropriée. Dans la pratique médicale cardiovasculaire, différents types de diagnostic peuvent être envisagés [Perrenot, 2008] :

- **Examens biologiques** : Une analyse des prélèvements de fluides biologiques issus du corps (sang, urine, selles, etc.) permet de relever d'éventuelles anomalies (en comparant avec des normes de la biologie humaine).  
Par exemple, le cas d'un infarctus du myocarde peut être confirmé en effectuant le dosage de certains enzymes.
- **Examens électrophysiologiques - ÉlectroCardioGramme ou ECG**: Un examen du système de conduction électrique du cœur permet d'étudier l'arythmie cardiaque (anomalie du rythme cardiaque).  
Par exemple, l'identification et la localisation d'un infarctus du myocarde ou d'une hypertrophie ventriculaire s'effectuent par comparaison des différents tracés des 12 dérivations de l'ECG ([Dubois, 2004]).
- **Examens d'imagerie médicale** : Ils regroupent les techniques d'exploration par l'image permettant de préciser la nature, la localisation et le degré de gravité des lésions coronarographiques ou myocardiques. Les images acquises peuvent être de nature anatomique ou fonctionnelle, en fonction des caractéristiques physiques des tissus étudiés (valves, ventricules, artères, etc.) et du type de modalité.  
Aujourd'hui, différentes modalités d'imagerie médicale peuvent exister en routine clinique, telles que l'imagerie par ultrasons (IVUS), par résonance magnétique anatomique et fonctionnelle (IRM, URMF), par rayons X (angiographie RX et tomodensitomètre X multidétecteurs), par cohérence optique (OCT) ou l'imagerie nucléaire (PET, SPECT).

Notons ici que l'ensemble de ces techniques diagnostiques apportent souvent chacune une information spécifique, ainsi, plusieurs examens peuvent être envisagés dans le but d'obtenir des informations complémentaires (anatomiques et fonctionnelles).

Cependant, l'angiographie RX (racine grecque, *Aggeion* signifie vaisseau - voir Fig. 1.3) reste la modalité de référence permettant de déterminer avec précision le degré et le nombre de sténoses présentes dans les différentes branches du réseau coronarien (dans ce cas, l'examen est connu sous le nom de coronarographie RX), malgré les importants progrès techniques réalisés ces dernières années par d'autres modalités (TEP, IRM, IRMF, CT, etc.) [Chen and Schäfer, 2009]. Elle génère des images RX de projection 2D des artères coronaires (gauche ou droite) enrichies de produit de contraste radio-opaque (riche en iode), selon différents angles de projection (Fig. 1.4).

Un cathéter introduit par voie fémorale ou radiale permet le transport du produit de contraste radio-opaque vers les artères coronaires, afin de pouvoir visualiser ainsi la lumière des vaisseaux exposés aux rayons X. L'angiographie RX fournit en temps réel des images 2D d'une très bonne résolution spatiale et temporelle permettant une

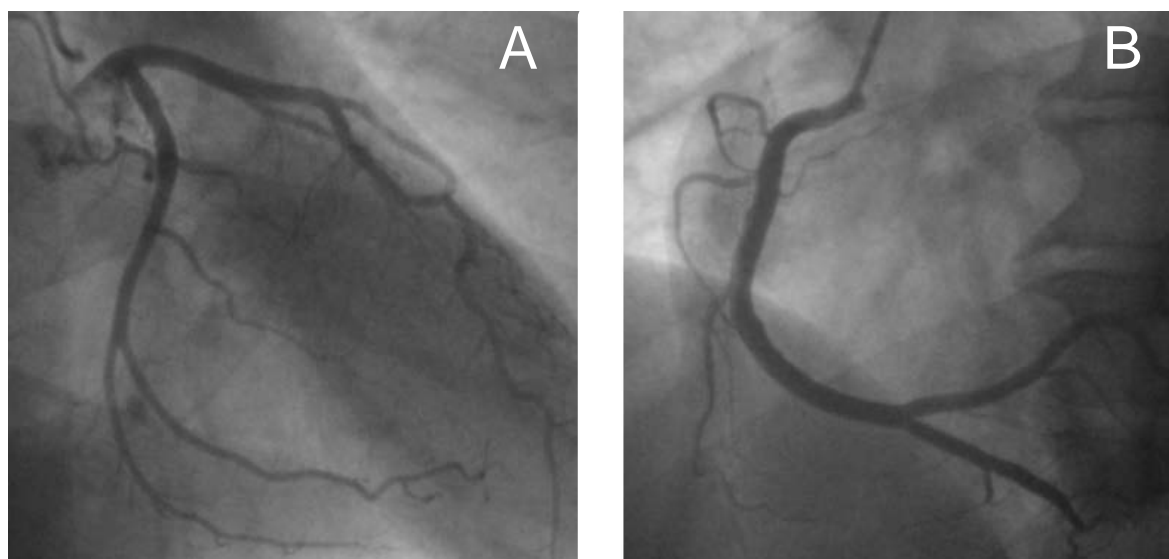


**Figure 1.3:** Exemples de différents systèmes d'imagerie angiographique RX.

(A) : Mono-Plan, se caractérise par une mobilité très réduite du couple émetteur/détecteur RX avec un seul mode statique d'acquisition [R.T.C, 2015].

(B) : Biplan, se caractérise par deux couples émetteur/détecteur RX, permettant une double acquisition RX simultanée [MEDIPOL, 2015].

(C) : rotationnel, se caractérise par des mouvements plus sophistiqués et diversifiés du couple émetteur/détecteur RX en combinant le mouvement d'arc en C avec celle du bras en L (les différents mouvements sont schématisés par les flèches rouges) [SIEMENS, 2015].



**Figure 1.4:** Exemples d'images issues d'un examen de coronarographie d'un même patient :

(A) : Coronaire gauche en OAD (Oblique Antérieure Droite),

(B) : Coronaire droite en OAG (Oblique Antérieure Gauche).

vision globale de l'ensemble du réseau coronaire (voir Fig. 1.4). C'est une des raisons principales pour laquelle la coronarographie RX reste aujourd'hui la seule approche validée notamment pour le choix entre angioplastie et pontage aortocoronaire [Xie, 2012] (principaux traitements des maladies coronariennes).

Afin de choisir la thérapie coronaire et le geste interventionnel les plus adéquats, une cartographie fine des lésions et une caractérisation précise des plaques athéromateuses doivent être effectuées (degré de sténose et de calcification, localisation, excentricité de la lésion, taille et forme géométrique, composition tissulaire, etc.) [Evans, 2007].

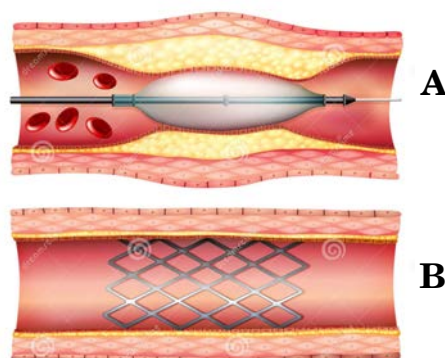
Nous distinguons trois différents types de traitement de la pathologie coronaire, à savoir pharmacologiques, interventionnels et chirurgicaux :

- **Traitements pharmacologiques** : Les médicaments peuvent remédier à certains cas de maladies coronariennes. Généralement, ils sont utilisés comme traitement complémentaire à d'autres types de thérapie (interventionnelle ou chirurgicale). Ils visent entre autres à la réduction de la tension artérielle, des caillots de sang et du taux de cholestérol dans le sang.
- **Traitements interventionnels** : Un traitement interventionnel désigne l'ensemble des actes thérapeutiques guidés et contrôlés par un moyen d'imagerie médicale.

Dans le cas des pathologies coronariennes, ce genre de traitement est généralement réalisé dans la continuation immédiate du diagnostic au cours d'une coronarographie RX, dans le but d'une revascularisation myocardique. Cette dernière permet la restauration de l'apport en oxygène du muscle cardiaque en rétablissant le flux sanguin dans les branches artérielles sténosées.

Sous contrôle radiologique (images de projection 2D de l'angiographie RX), le traitement s'effectue par insertion percutanée du cathéter dans la zone de l'anomalie à travers l'artère fémorale (au pli de l'aîne) ou radiale (au niveau du poignet). Le rétablissement du gabarit de la lumière normale du vaisseau malade se fait généralement en deux étapes (Fig. 1.5) :

- A) Angioplastie : appelée également angioplastie coronaire transluminale percutanée ACTP (Fig. 1.5 - A), elle consiste à écraser les plaques d'athéromes par inflation d'un ballonnet situé à l'extrémité du cathéter. Elle peut être réitérée plusieurs fois. Cela permet de dilater le rétrécissement de la branche sanguine.
- B) Pose de stent (endoprothèse coronaire) : (Fig. 1.5 - B) afin d'assurer une réparation durable de l'artère et d'éviter ainsi une resténose consécutive au geste d'angioplastie, un stent est posé à l'endroit de la sténose. La procédure consiste à gonfler un ballon montant l'endoprothèse pour la déployer, afin de la plaquer contre la paroi de l'artère. Cela permet de constituer un échafaudage maintenant l'artère ouverte. Dans certain cas, le cardiologue peut procéder à plusieurs gonflages de ballon afin de s'assurer que le stent est bien collé contre la paroi du vaisseau.

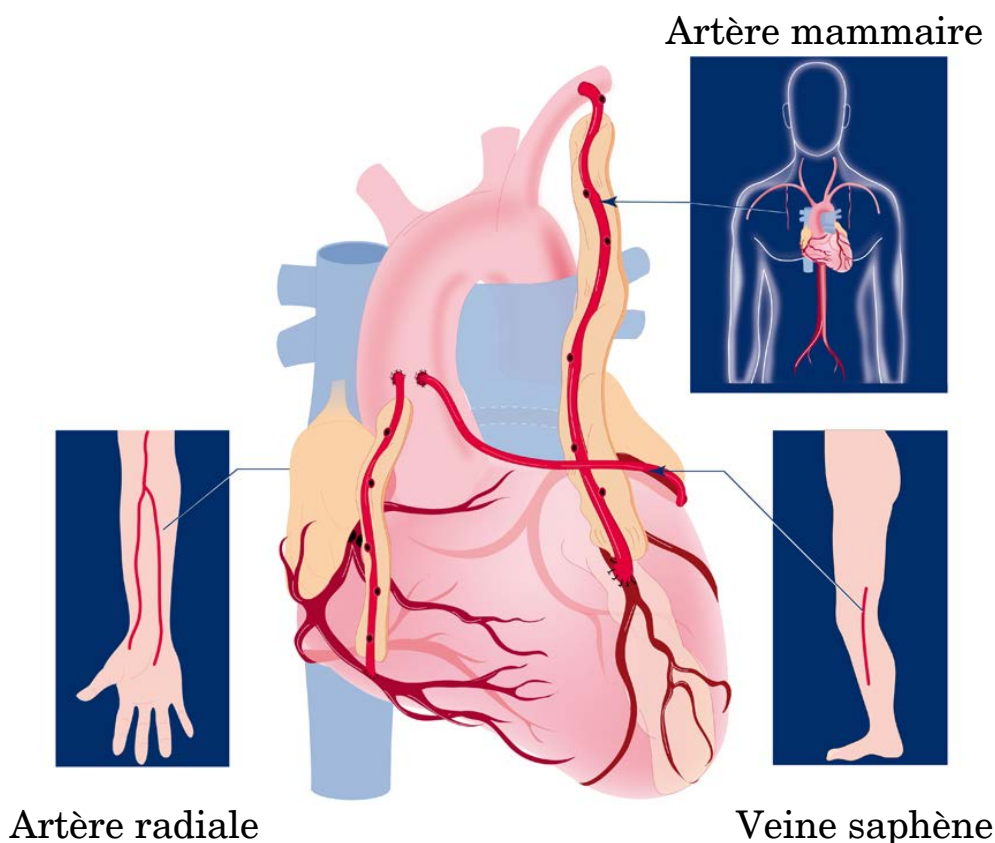


**Figure 1.5:** Exemple illustrant une angioplastie (A) et une pose de stent (B) [Dreamstime, 2015].

L'indication et les choix du matériel utilisé dans l'angioplastie et la pose de stent sont basés sur une étude soigneuse de la coronarographie. Ils dépendent de plusieurs

facteurs tels que la longueur de la lésion, le diamètre du vaisseau atteint et la complexité des lésions.

- **Traitement chirurgicaux** : Une opération chirurgicale à cœur ouvert est inévitable pour certains patients souffrant d'une maladie coronarienne grave telles que des lésions très sévères (obstructions totales, allongement des lésions) ou une angine grave de poitrine.



**Figure 1.6:** Exemple illustrant un pontage coronaire avec les vaisseaux sanguins les plus utilisés dans la routine clinique (artère mammaire, artère radiale et veine saphène) [B.H.C, 2015].

Le principe consiste à greffer une veine (souvent une veine saphène) ou une artère (souvent une artère mammaire interne dans la partie droite ou gauche du thorax) prise à un autre endroit du corps sur l'artère coronaire obstruée, afin de la relier directement à l'aorte (Fig. 1.6). D'autres artères peuvent être utilisées telles que les artères épiploïques, épigastriques ou radiales. Cela permet de réaliser une dérivation (pontage) de la partie obstruée de l'artère coronaire.

**NB** : L'angioplastie et la pose de stents ont montré des résultats probants dans le traitement des maladies coronariennes, étant donné qu'elle représentent des traitements beaucoup moins invasifs que le pontage chirurgical.

## 1.2 Motivation

L'angiographie RX demeure l'examen de référence dans les procédures diagnostiques et thérapeutiques des maladies cardiovasculaires (voir la section 1.1), notamment dans le domaine de la revascularisation myocardique. En France, 85% des gestes de revascularisation coronaire et la quasi-totalité des procédures d'ablation pour arythmies sont maintenant réalisés par voie percutanée. En 2009, plus de 250.000 actes ont été effectués par plus de 1000 cardiologues ayant une activité dominante ou exclusive en cardiologie interventionnelle ([http://www.sfcardio.fr/sites/default/files/pdf/Cardiologie\\_Interventionnelle.pdf](http://www.sfcardio.fr/sites/default/files/pdf/Cardiologie_Interventionnelle.pdf)). Néanmoins, un examen angiographique RX présente quelques inconvénients que nous résumons par les points suivants :

- ***Invasivité de l'examen*** : Comme toutes les modalités d'imagerie à rayon X, l'angiographie RX peut présenter des effets nocifs pour la santé de l'opérateur et celle du patient, dûs principalement à la nature ionisante de ces ondes électromagnétiques (à terme, les doses d'irradiation répétées ou continues peuvent engendrer des atteintes cutanées, ophtalmologiques et hématologiques, malformations fœtales, etc.). De plus, l'utilisation du produit de contraste iodé peut provoquer dans certains cas quelques complications telles que des réactions allergiques (bouton d'urticaire, gonflement du visage, choc anaphylactique, etc.) ou encore le risque d'une insuffisance rénale [Solomon, 1998].

- ***Limitations d'une représentation 2D*** : Les angiogrammes issus d'examen angiographiques RX représentent des images 2D de projection conique (pour plus de détail, voir le chapitre 3). Ils ne fournissent donc qu'une vue partielle de la structure 3D très complexe des coronaires. Une analyse quantitative des lésions en se basant sur des images 2D s'avère une tâche délicate en raison de la superposition et du croisement vasculaire, du raccourcissement des longueurs de branches artérielles et de la variation du facteur d'agrandissement (due à la projection conique).

De plus, chaque image 2D est composée d'une fine région d'intérêt (coronaires) superposée à une mosaïque de structures de fond (poumons, vertèbres, cage thoracique, etc.). Ainsi, le peu d'information issu des vaisseaux peut très bien être masqué par le chevauchement de luminance entre les coronaires et les structures avoisinantes. Par exemple, des structures longiformes parasites qui se superposent aux vaisseaux (vertèbres, cathéter d'injection, côtes) ou un taux important de bruits d'acquisition, dû aux contraintes d'une acquisition invasive et interventionnelle (faible dose RX et temps d'acquisition très court), qui peut masquer les informations des petits vaisseaux.

Notons aussi que les angiogrammes RX ne permettent pas de visualiser que la lumière artérielle sans fournir d'information claire sur la paroi artérielle.

Pour toutes ces raisons, les cardiologues cliniciens peuvent commettre des erreurs dans l'estimation des caractéristiques des lésions et dans le choix des instruments de revascularisation adéquats.

**NB** : Nous illustrons différentes limitations d'une représentation 2D dans la figure 2.1 (section 2.1).

- ***Risques des interventions vasculaires percutanées*** : Les interventions vasculaires percutanées impliquent l'insertion d'un cathéter dans le système circulatoire des patients ayant souvent de nombreuses comorbidités, et dans des environnements

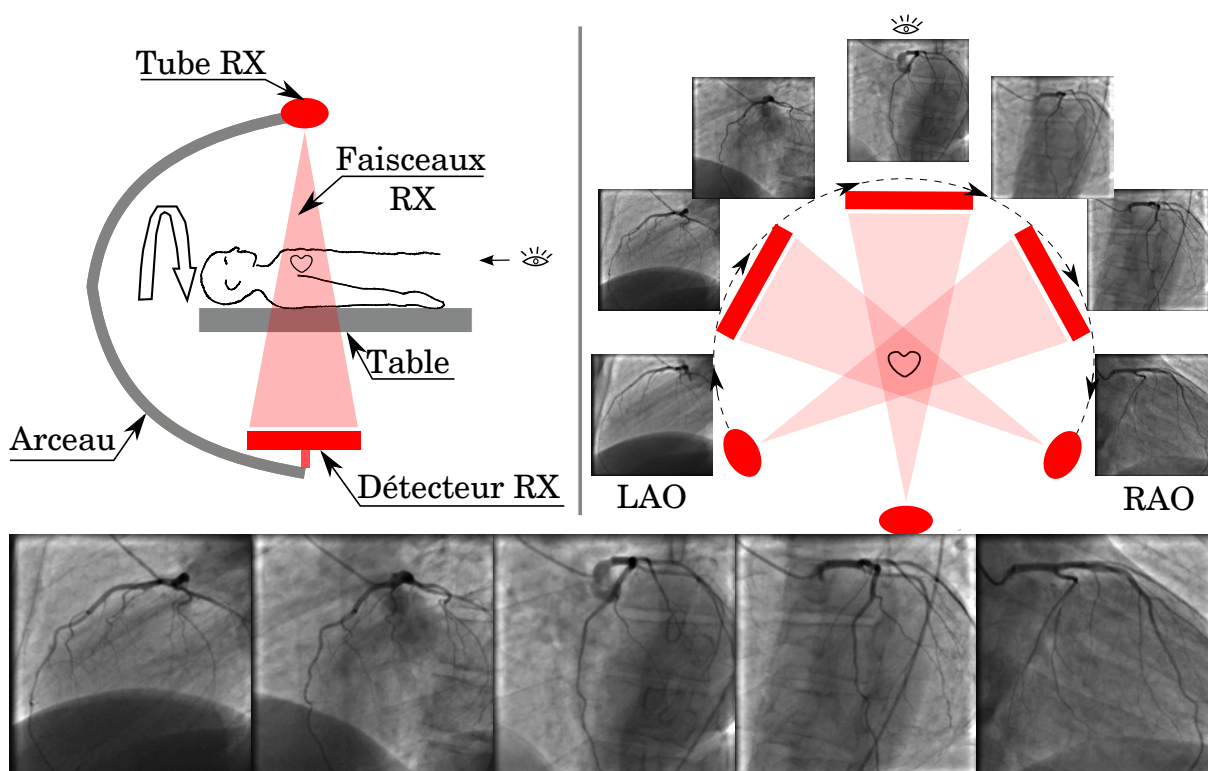


hautement dynamiques (telles que les coronaires). Ainsi, une variété d'événements indésirables et de risques peut en résulter [Grossman and Baim, 2006] :

- Des risques accidentels de cathétérisme tels que la lésion des structures nerveuses adjacentes (du système circulatoire), l'hématome rétropéritonéal pour le cathéter artériel fémoral, la thrombose artérielle et le pseudoanévrisme [Scheer et al., 2002].
- Un placement incorrect du stent à cause du mouvement des coronaires et la présence de calcification sur la zone à traiter.
- Un surdosage en rayons X et en produit radio-opaque pour mieux explorer les branches vasculaires dont l'anatomie coronarienne est complexe ou pour bien déterminer l'incidence optimale permettant un meilleur guidage des cathéters (le minimum de superpositions vasculaires et le moins de risque possible).

Afin de surmonter ces limites et d'optimiser les interventions vasculaires percutanées, plusieurs travaux et progrès ont été réalisés ces deux dernières décennies.

Les traitements médicaux des maladies cardiovasculaires ont pu évoluer à la fois sur le plan instrumental, en améliorant les équipements liés au cathétérisme (cathéter, ballons coaxiaux et prothèses) et à l'imagerie médicale (détecteur à panneau plat numérique, angiographie RX rotationnelle, TEP, IRM, IRMF, CT, etc.), sur le plan pharmaceutique et sur le plan interventionnel (techniques d'accès et de fermeture vasculaire, technique d'échographie endovasculaire, antérograde, rétrograde, etc.).



**Figure 1.7:** Exemple illustrant le principe d'une acquisition angiographique RX en mode rotationnel (cardiac spin) : rotation dans le plan axial de l'arceau en C (portant le couple émetteur/détecteur RX) autour du patient, pouvant effectuer un balayage angulaire LAO/RAO de 200°.

Dans le domaine de l'angiographie RX, un nouveau mode d'acquisition inspiré des toмоgraphes X tridimensionnels a été introduit au début des années 2000 [Raman et al., 2002] (Fig. 1.7). Il s'agit du mode cardiac spin pour lequel le couple émetteur/détecteur RX monté sur un arceau (en forme de C) effectue une rotation partielle (dans le plan axial) autour du patient, durant l'injection coronaire sélective du produit de contraste. Avec une vitesse angulaire de l'arceau qui peut atteindre  $40^\circ/s$ , la nouvelle acquisition permet d'obtenir un nombre de 80 à 150 projections 2D de l'arbre coronaire droit et gauche, sur une durée de 4 à 5 cycles cardiaques. Ainsi, elle fournit une représentation pseudo 3D (panoramique) de l'arbre coronaire avec une visualisation multi-perspective des lésions explorées.

En fournissant une vision pseudo 3D de l'arbre coronaire durant une seule injection de produit de contraste, le mode cardiac spin a pu limiter les doses en rayons X et en produit de contraste. En effet, dans les systèmes standards d'angiographie RX (Fig. 1.3-A), les opérateurs multiplient souvent les incidences d'observation (avec des injections répétitives de produit de contraste) pour bien appréhender la structure coronaire et caractériser les sténoses.

En dépit de cette révolution technologique qui a pu améliorer les techniques diagnostique et thérapeutique des maladies coronariennes, elle souffre tout de même de certains manques liés aux besoins cliniques. En effet, l'ensemble des angiogrammes acquis ne présentent que des projections coniques 2D des artères opacifiées (par le produit de contraste) et ne donnent aucune information sur ses parois ou sur l'anatomie des structures environnantes (pas assez radio opaque). De plus, aucune information sur les profondeurs ou sur le facteur d'agrandissement (projection conique) n'est fournie. Ainsi, pour compenser ce manque d'informations tridimensionnelles, les opérateurs procèdent par une représentation 3D mentale des coronaires en se basant sur leurs connaissances de l'anatomie humaine et les angiogrammes acquis (un facteur subjectif).

Cependant, une reconstruction tridimensionnelle de l'arbre coronaire (réalisée à partir de sa représentation pseudo 3D - acquisition rotationnelle) peut mettre fin à ces limites en apportant une aide substantielle dans la documentation des lésions.

Une reconstruction 3D des coronaires permet entre autres :

- une meilleure planification des interventions endovasculaires percutanées en apportant une assistance dans le diagnostic de l'atteinte coronarienne et une caractérisation approfondie des lésions (localisation spatiale, diamètre du vaisseau, excentricité, etc.),
- la détermination des incidences optimales d'observation dans lesquelles le cardiologue interventionnel pourra réaliser sa procédure d'angioplastie,
- une facilité de l'apprentissage des jeunes cardiologues interventionnels et plateforme 3-D dédiée pour la simulation et l'exécution des ACTP.
- un choix plus approprié des dispositifs médicaux (type, taille, diamètre, formes, etc.).



## 1.3 Problématique et contribution

Ayant pris connaissance de l'importance des examens angiographiques RX (statiques et/ou dynamiques) dans le domaine du diagnostic et du traitement des maladies cardiovasculaires, et de l'intérêt majeur d'une modélisation 3D du réseau coronarien, l'objectif de cette thèse porte sur la reconstruction 3D des artères coronaires à partir d'une séquence rotationnelle d'angiographie RX.

Nous nous sommes intéressés à une reconstruction 3D per-opératoire basée uniquement sur les informations radiographiques acquises pendant la phase diagnostique d'un examen d'angiographie RX. Ce choix est soutenu par la pratique interventionnelle clinique qui est confrontée souvent à des cas urgents de malaises cardiaques sans disposer d'examens pré-opératoires (MDCT ou IRM).

Afin de réaliser une reconstruction tridimensionnelle dans des conditions quasi temps réel (temps compatibles avec une intervention angiographique), nous avons fixé comme objectif d'adopter les méthodes réalisant le meilleur compromis entre rapidité des calculs et précision des résultats. Ainsi, après avoir étudié et bien compris les défis de la reconstruction coronarienne 3D (section. 2.1), puis effectué un état de l'art des méthodes de reconstruction proposées dans la littérature (section 2.2), nous avons opté pour une reconstruction itérative statistique.

En effet, pendant l'acquisition rotationnelle de l'angiographie RX autour du patient, les coronaires solidaires du muscle myocardique bougent avec un mouvement rapide et irrégulier. Ainsi, l'hypothèse d'une non variabilité spatio-temporelle de l'organe imagé n'est pas vérifiée, c'est à dire que les projections ne correspondent pas au même objet statistique. Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons opté pour une sélection des projections correspondant à la même phase cardiaque (de préférence celles correspondant à un mouvement minimal), en réduisant ainsi le nombre de projection utilisées dans les procédures de reconstruction (de l'ordre de 3 à 7). Ce nombre très réduit de projections (sous échantillonnage angulaire sévère) complique ce problème inverse mal posé (la reconstruction), d'où l'intérêt d'adopter une reconstruction statistique itérative qui permet de palier au manque de données mesurées en introduisant des informations a priori.

En discutant des approches itératives statistiques en reconstruction RX (section 2.3), nous avons orienté notre thèse vers trois axes principaux permettant d'améliorer la performance d'une reconstruction itérative statistique, à savoir (1) l'élaboration d'une modèle précis du processus d'acquisition, (2) l'adoption d'un modèle a priori le plus approprié et (3) la détermination d'un algorithme efficace d'optimisation. Ainsi, nous avons consacré deux chapitres de ce manuscrit (chapitres 3 et 4) afin de bien comprendre ces axes et de pouvoir les adapter à notre problématique :

- Le chapitre 3 est dédié à la modélisation directe du processus d'acquisition, c'est à dire l'opérateur de projection et de rétroprojection (modèle conjoint). Après avoir établi un état de l'art (section 3.1) des méthodes permettant d'estimer les profils de projection à partir d'un objet donné (2D et 3D), le reste du chapitre décrit les détails théoriques et techniques des modèles les plus utilisés dans la littérature et les plus adaptés à la géométrie conique de projection, à savoir pixel Driven, Ray-Driven, Distance Driven et les Empreintes Séparables Trapèze-Trapeze (section 3.2). Nous avons clôturé ce chapitre en introduisant une version simplifiée de Distance Driven

(section 3.3) ; une version qui est plus rapide du point de vue temps de calcul et quasiment aussi précise sous certaines conditions.

- Le chapitre 4 nous a permis de mettre en œuvre les méthodes de reconstruction statistique MAP incorporant de l'information a priori appartenant à la familles des a priori Markoviens (a priori de Gibbs). Un tel a priori ne nécessite aucune connaissance approfondie de la structure à reconstruire (coronaire - a priori bas niveau) et ne se base que sur une interprétation locale des interactions pouvant exister entre les sites voisins (voxels). Le fait de combiner cet a priori avec les données mesurées (terme d'attache aux données) dans une seule fonction objectif à optimiser (Maximum A postériori) nous a permis d'appliquer une régularisation avec préservation de contours de la reconstruction. Nous avons effectué ainsi une étude heuristique plus générale (section 4.2.2) permettant de caractériser les propriétés de lissage avec préservation de contours. Enfin, nous avons clos ce chapitre en choisissant les méthodes numériques d'optimisation que nous estimons plus adaptées à la forme analytique de notre fonction de coût, à savoir Newton Raphson Modifié [Fessler et al., 1997] et ARTUR - Gradient Conjugué [Charbonnier et al., 1997].

Ayant préparé une plateforme théorique et technique d'une reconstruction itérative statistique, nous avons effectué une évaluation approfondie des méthodes de reconstruction proposées en les testant sur des données simulées (chapitre 5). Ce chapitre nous a permis de bien comprendre le mode de fonctionnement de chaque algorithme, de visualiser ces limites et d'envisager des pistes pour les surmonter.



## 2 Reconstruction conique 3D des réseaux artériels coronaire

Ayant pris connaissance de l'intérêt d'une visualisation tridimensionnelle des coronaires dans le traitement et le diagnostic des maladies coronariennes (chapitre 1), dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux différentes techniques de reconstruction, notamment celles basées sur le formalisme bayésien (méthode statistique).

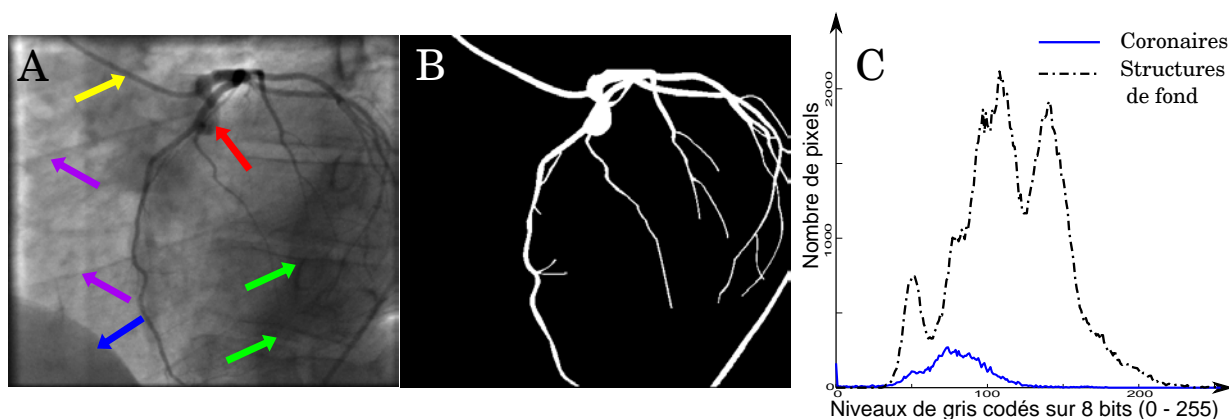
Pour ce faire, nous allons devoir discuter de défis de la reconstruction 3D des artères coronaires (section 2.1), puis, de différentes méthodes et techniques qui ont été proposées dans la littérature de reconstruction coronarienne 3D pour faire face à ces défis (section 2.2). Cela va nous permettre de bien comprendre la problématique et de planifier et justifier notre stratégie pour effectuer une reconstruction 3D des coronaires à partir d'une séquence d'angiographie RX rotationnelle.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous allons pouvoir discuter de la stratégie adoptée pendant notre thèse, c'est à dire la reconstruction itérative statistique des coronaires réalisée à partir des angiogrammes correspondant à la même phase cardiaque (section 2.3). Premièrement, nous commencerons par effectuer un rappel de premières techniques adoptées en tomographie RX (analytiques et algébriques) afin de montrer l'intérêt d'une reconstruction statistique (section 2.3.1). Ensuite, nous détaillerons les composantes principales d'une reconstruction itérative MAP (section 2.3.2), c'est à dire, un modèle physique de processus d'acquisition, un modèle de l'information a priori et un algorithme itératif d'optimisation.

Avant de clôturer ce chapitre en établissant le plan du reste de ce manuscrit (section 2.4), nous avons estimé utile d'introduire quelques notions de base concernant les algorithmes itératif d'optimisation (section 2.3.3).

## 2.1 Défis de la reconstruction 3D des artères coronaires

La reconstruction 3D en imagerie rotationnelle R-X est aujourd'hui validée pour la reconstruction de structures statiques. Dans le cas des coronaires, la difficulté majeure provient du mouvement du cœur auquel vient s'ajouter la complexité du contenu de l'image. Pour simplifier la résolution du problème, pour ainsi dire, toutes les méthodes de reconstruction s'appuient sur une segmentation vasculaire préalable des projections. Or, la détection des artères coronaires reste un problème particulièrement difficile (Fig. 2.1). Contrairement aux systèmes angiographiques mono ou bi-plan, les projections coniques acquises sur les systèmes rotationnels ne sont pas soustraites. Le fond de l'image est bruitée, incluant les empreintes des structures avoisinantes telles que l'aorte, la colonne vertébrale, le cœur, les poumons ou encore la cage thoracique. Par ailleurs, le débordement du produit de contraste dans l'aorte (Fig. 2.2), génère une zone sombre qui réduit fortement le contraste entre les coronaires et les tissus.



**Figure 2.1:** Exemple d'angiogramme coronarien illustrant la difficulté d'une segmentation vasculaire automatique. Sa définition est de 512 pixels de largeur sur 512 pixels de hauteur.

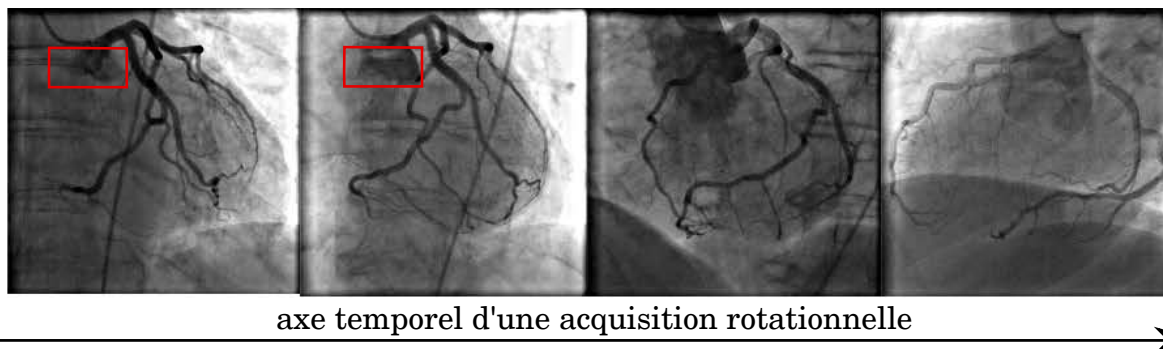
(A) Exemple des structures parasites en imagerie coronaire : les flèches vertes correspondent aux vertèbres, la flèche rouge à la fuite de produit de contraste, la flèche jaune au cathéter d'injection et les flèches en violet aux côtes.

(B) Segmentation manuelle des coronaires à partir de l'image A.

(C) Histogrammes des niveaux de gris à l'intérieur des vaisseaux (coronaire - trait plein) et à l'extérieur (structures de fond - trait pointillé) de la région d'intérêt (calculés à partir de A et B).

Le mouvement cardiaque non linéaire, alterne des phases lentes et rapides, générant des déformations importantes des structures coronaires. La reconstruction ne peut, en conséquence, se faire qu'avec les projections qui sont associées à une même phase du cycle cardiaque (ou à une même position du cœur dans l'espace), sauf à estimer au préalable le modèle de mouvement dense 4-D sur la séquence et à réaliser une reconstruction compensée en mouvement. Dans le cas d'une acquisition rotationnelle, la sélection des projections est basée sur l'hypothèse de périodicité du mouvement. Hors cette hypothèse est fausse.

En effet, l'examen pratiqué en routine clinique réalise une acquisition sur une durée moyenne de 4 secondes, ce qui correspond approximativement et en théorie à 4 cycles



**Figure 2.2:** Exemple d'effets indésirables lié à l'injection du produit de contraste durant une coronarographie rotationnelle : variabilité du contraste et apparition de fuites (encadrées en rouge).

cardiaques (si on considère un rythme cardiaque de 60 bps ; en pratique, ce rythme est supérieur, il peut atteindre 70 bps et peut être irrégulier sur la durée de l'examen). Le système est ensuite programmé selon un protocole approximativement identique d'un patient à l'autre (choix FOV, Angle Cranial-Caudal, vitesse de rotation du Carm, etc.). Cependant la qualité des images produites est fortement influencée par le paramétrage du système. En particulier, différents problèmes peuvent apparaître sur les images (Fig. 2.1, Fig. 2.2) :

- La structure vasculaire n'est pas centrée dans le champ d'observation et elle peut apparaître tronquée sur certaines incidences.
- Son opacification n'est pas stable sur la durée de l'examen : l'acquisition débute (1<sup>ier</sup> cycle) alors que le produit de contraste n'a pas atteint les artères coronaires et s'estompe sur le dernier cycle cardiaque. La structure n'est donc visible que pour 2,3 à 5 cycles.
- Les propriétés des structures varient dans le temps et l'espace. Ces modifications sont dues à : (1) la propagation du produit de contraste qui n'est pas homogène dans la structure coronaire, (2) l'épaisseur des organes traversés par les rayons X qui varie en fonction de l'incidence d'observation.
- L'acquisition n'est pour le moment pas synchronisée avec l'ECG ; ce qui entraîne une difficulté dans le choix des projections associées à une même phase du cycle cardiaque pour l'estimation du mouvement cardiaque.

Par ailleurs, l'examen génère souvent un stress au niveau du patient, provoquant ainsi une irrégularité du rythme cardiaque avec des accélérations plus ou moins rapides. Le nombre de projections varie ainsi d'un cycle à l'autre, ce qui complique la procédure d'estimation de mouvement.

L'enjeu est donc ici d'ordre méthodologique. Le fait de n'acquérir en rotation qu'un nombre limité de projections d'une part, d'un objet en mouvement, le cœur, d'autre part, introduit des difficultés spécifiques pour lesquelles une nouvelle famille d'algorithmes de reconstruction est nécessaire. Il s'agit de répondre au problème suivant : comment reconstruire un objet en mouvement rapide, irrégulier et à partir de projections 2-D issus d'un capteur en mouvement ?

## 2.2 État de l'art des méthodes de reconstruction appliquées aux vaisseaux coronariens

La reconstruction 3D du réseau coronarien, a débuté dans les années 80 [Toumoulin, 2009] en considérant une paire de projections acquises à partir d'un système angiographique mono ou bi-plan. Cependant pour les raisons évoquées plus haut, cette reconstruction est restée du domaine de recherche.

Deux grandes familles d'approche ont été considérées pour réaliser cette reconstruction, celles qui visent à établir une forme géométrique caractérisant la morphologie 3D des coronaires, et d'autres tomographiques plus précises, qui tentent de déterminer la distribution spatiale du produit de contraste dans les structures vasculaires.

D'un point de vue chronologique, les premières méthodes introduites se sont basées essentiellement sur les techniques employées en vision par ordinateur (*Méthode par Stéréovision*). Elles ont été appliquées aux systèmes angiographiques *mono plan* [Nguyen and Sklansky, 1994] et *biplan* [Ruan et al., 1994, Wahle et al., 1996, Henri and Peters, 1996]. Ces premiers travaux ont cherché à restituer les informations tridimensionnelles des lignes centrales coronariennes à partir d'images 2D de projection acquises selon 2 où 3 incidences différentes, sur lesquelles des points de repère et/ou des formes particulières (lignes centrales, points de bifurcation, etc.), ont été identifiés. Le principe consiste à établir une modélisation géométrique de la structure à reconstruire en s'appuyant sur celle de la caméra (**le modèle du sténopé**), pour effectuer une mise en correspondance entre les informations 2D extraites (primitives géométriques) des projections préalablement segmentées et celles 3D de l'objet que l'on cherche à reconstruire [Chen and Schäfer, 2009, Yang et al., 2009, Zifan et al., 2008, Sarry and Boire, 2001, Chen et al., 1996, Venaille et al., 1992, Kim et al., 1982, Kitamura et al., 1988, Dumay et al., 1994]. Les méthodes de mise en correspondance s'appuient sur des d'informations de nature *géométrique* [Blondel, 2004, Nguyen and Sklansky, 1994], *topologique* [Chen and Carroll, 1998, Wahle et al., 1996], et/ou *physiologique* [Garreau et al., 1991, Windyga et al., 1998], tout en se basant sur les connaissances anatomiques a priori [Mourgues et al., 2001]. Cependant, la qualité des reconstructions reste très dépendante de la phase d'extraction des primitives 2D encore considérée comme un véritable challenge.

**L'angiographie rotationnelle** [Tommasini et al., 1998] a permis de reconsidérer le problème de la reconstruction 3D, en offrant une plus large gamme d'incidences autour du patient [Gorges, 2007]. Ce nouveau système permet de réaliser une acquisition dynamique par le déplacement circulaire du couple émetteur/détecteur RX autour du patient, durant une injection de produit de contraste, générant ainsi une séquence de 80 à 150 projections acquises sous différentes incidences (correspondant à 3-7 cycles cardiaques). Par conséquent, ceci a permis d'améliorer les résultats des méthodes géométriques (initiées précédemment en fournissant d'avantage d'angiogrammes) telles que celles basées sur les contours déformables [Jandt et al., 2009], les chemins minimaux [Li and Cohen, 2011] et aussi d'exploiter les méthodes standards de reconstruction en tomographie, utilisées par ailleurs dans la tomodensitométrie X (scanners séquentiels, scanners hélicoïdaux monocoupe et multicoupe, etc.). Deux approches différentes de reconstruction tomographique

ont été appliquées aux séquences rotationnelles coronariennes, à savoir les **méthodes analytiques** (dites directes) inspirées essentiellement des travaux de Feldkamp et al. [Feldkamp et al., 1984] et de Radon [Radon, 1917] et **les approches itératives algébriques** (ART, SART, SIRT, etc.) [Schoonenberg et al., 2009, Andersen, 1989], ou **statistiques** (ML, ML-EM, MAP, PML etc.) [Rangayyan et al., 1985, Zhang et al., 2006] (pour plus de détails voir section 2.3).

Les méthodes de reconstruction (tomographique ou géométrique) ne sont applicables que si nous disposons de plusieurs images de projection de la même structure à reconstruire, et surtout, supposée statique. Dans le cas d'une variabilité spatio-temporelle de l'organe étudié (mouvement du cœur) au cours de l'acquisition RX, une procédure permettant de justifier une hypothèse de stationnarité doit être établie. C'est dans cet objectif qu'une synchronisation cardiaque se révèle une étape primordiale pour la reconstruction des réseaux coronariens (en mouvement). Elle permet de définir la correspondance entre chaque image acquise et les différentes phases cardiaques (instants précis du cycle cardiaque) décrivant son mouvement. Dans la littérature et sous l'hypothèse d'absence de mouvement autre que celui du cœur (table, patient, etc.), deux catégories de méthode de synchronisation se distinguent, selon l'utilisation ou non du signal ECG (**ElectroCardioGramme**) acquis simultanément avec la séquence rotationnelle RX.

- Dans la première catégorie, le signal ECG acquis parallèlement durant une séquence de coronarographie rotationnelle permet la distinction entre les projections correspondant à des instants différents de la séquence cardiaque [Kachelrieß et al., 2000, Rasche et al., 2006b, Hansis et al., 2008b, Xie, 2012]. Théoriquement, les phases pour lesquelles le mouvement cardiaque est quasiment nul (phases de relaxation du cœur à la fin de la systole et de la mi-diastole) génèrent des projections plus nettes (pas de flou lié au mouvement du cœur), assurant ainsi une meilleure qualité de reconstruction. Cependant, la détermination exacte des positions des phases par rapport au pic R dans le signal ECG qui est lui même variable (diffère selon les patients) et irrégulier, se montre une tâche très délicate. Rasche et al. [Rasche et al., 2006a] ont rajouté d'autres critères en exploitant les informations concernant les intensités des vaisseaux 2D. Ils partent de l'hypothèse que la meilleure phase cardiaque (avec un mouvement minimal) représente la plus étroite distribution d'intensité, en raison de l'absence de flou dans l'image lié au mouvement.
- La deuxième catégorie exploite uniquement les informations contenues dans les angiogrammes sans avoir recours à l'acquisition du signal ECG, pour effectuer la synchronisation cardiaque. Blondel et al. [Blondel et al., 2006], Vembar et al. [Vembar et al., 2003] et Lehmann et al. [Lehmann et al., 2006] ont proposé une méthode basée sur le calcul d'intégrales des lignes horizontales dans les images numérique 2D de projection, pour aboutir à un seul vecteur colonne représentant une seule projection. Le fait de mettre côte à côte ces vecteurs colonnes, permet de créer une image de toute la séquence d'angiographie rotationnelle, illustrant le décalage de contraste lié aux battements cardiaques et à la respiration. Cela permet ainsi de sélectionner les phases appropriées et de compenser les déformations (plus exactement les déplacements dans le sens vertical) dues principalement aux mouvements respiratoires.



En négligeant la diffusion du produit de contraste et en compensant les mouvements respiratoires, l'étape de synchronisation permet de regrouper effectivement les images acquises par phase cardiaque vérifiant l'hypothèse de la non-variabilité spatio-temporelle de l'organe étudié. Cependant, en une seule injection de produit de contraste, le nombre d'images correspondant à une même phase cardiaque reste très réduit et variable (de 3 à 7 images de projection) en fonction des vitesses de rotation du C-arm autour du patient (pas angulaire par seconde), des acquisitions (nombre d'images par seconde) et des battements cardiaques (bps).

Étant donné que certaines méthodes de reconstruction semblent plus sensibles au manque de projections par rapport à d'autres, deux stratégies différentes se distinguent, selon que l'on se limite à n'exploiter qu'un sous-ensemble réduit parmi les projections disponibles (nous la notons **stratégie 1**) ou bien, une grande partie voire la totalité des données acquises (nous la notons **stratégie2**) [Xie, 2012, Schoonenberg et al., 2009, Blondel, 2004].

Dans la **première stratégie**, les angiogrammes synchronisés issus uniquement de la même phase cardiaque sont exploités pour effectuer une reconstruction itérative statistique 3D coronarienne [Hu et al., 2012, Vembar et al., 2003]. Étant donné que le nombre de projections sélectionnées est très restreint (3 à 7), une fenêtre de sélection plus large peut être utilisée afin de compenser ce manque de données, de telle sorte que l'on sélectionne les projections adjacentes à une phase cardiaque donnée [Hansis et al., 2008a, Rasche et al., 2006b]. Cette fenêtre sélective peut avoir différentes formes, soit une configuration **rectangulaire** pour laquelle chaque image contribue avec la même pondération dans la reconstruction finale [Rasche et al., 2006b], soit une **allure gaussienne**, pour laquelle nous attribuons plus d'importance à l'image de la phase courante (située au centre de la fenêtre) [Schafer D, 2006]. Ainsi, le nombre de projections est multiplié par un facteur de 3 à 6. Bien que cette augmentation peut améliorer la qualité de la reconstruction, elle peut engendrer des artefacts de flou dus aux mouvements cardiaques, dont la qualité de la reconstruction varie en fonction de la phase sélectionnée et celles adjacentes prises en compte, en raison de la variabilité de vitesse de déplacement des coronaires. Cette stratégie est plus adaptée aux reconstructions des coronaires correspondant aux phases de relaxation cardiaque, durant lesquelles le cœur est relativement stable. De plus, les méthodes statistiques itératives s'avèrent plus appropriées à cette stratégie puisque les données de départ (projections) sont limitées [Hansis et al., 2008a]. Elles tentent de palier aux manques de données en intégrant des informations a priori sur la structure à reconstruire comme, par exemple, une hypothèse de positivité du résultat (c'est à dire les coefficient d'atténuation), un lissage avec préservation de contours, ou même une contrainte géométrique sur la forme des structures vasculaires à reconstruire [Li et al., 2002, Zhou et al., 2008, Hansis et al., 2008a].

Dans la **deuxième stratégie**, et afin d'exploiter un grand nombre de projections disponibles pour la reconstruction de chaque phase cardiaque, une compensation des déplacements des vaisseaux (par rapport à la phase que l'on cherche à reconstruire) est effectuée. Le principe consiste à estimer un champ de vecteurs de mouvement  $3D+t$  décrivant les déformations géométriques des coronaires, pour compenser la position des pixels sur chaque image 2D de la séquence, avant d'effectuer la reconstruction 3D [Hansis et al., 2008a, Bousse et al., 2009, Rasche et al., 2006b, Movassaghi et al., 2003, Movassaghi et al., 2004].

D'une manière générale, les méthodes de reconstruction analytiques telles que la rétro-projection filtrée [Schafer et al., 2006, Lehmann et al., 2006, Rohkohl et al., 2009], et al-

gébriques itératives [Blondel et al., 2006, Hansis et al., 2008a, Bousse et al., 2009] sont plus adaptées à cette stratégie exploitant un grand nombre de projections de la même scène supposée statique après compensation du mouvement [Rasche et al., 2006b, Schafer D, 2006, Lehmann et al., 2006].

Le modèle du mouvement cardiaque est généralement estimé de deux manières différentes.

- La première effectue une reconstruction 3D des coronaires (plus exactement, les lignes centrales) correspondant aux différentes phases cardiaques, puis, en extrapolant le champs de vecteurs du mouvement 3D+t par le suivi des lignes centrales coronariennes 3D ainsi que les points de bifurcation [Chen and Carroll, 2003, Jandt et al., 2009, Bousse et al., 2009]. Le suivi se fait généralement en s'appuyant sur les techniques de mise en correspondance 3D-3D des structures arborescentes [Tsong-Li Wang et al., 1994, Pisupati et al., 1996, Bülow et al., 2006]. La principale critique de cette approche est la difficulté d'estimer le champs 4D à partir des lignes centrales (calculée à partir des projections 2D).
- La deuxième façon d'estimer le mouvement 3D, consiste à propager un seul modèle 3D des coronaires (correspondant à une phase de donnée), sur les autres phases en le déformant pour se superposer artificiellement sur les données projetées 2D. La déformation est formulée comme un problème de mise en correspondance (3D/2D) et résolu par la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie appliquées sur des courbes associées aux lignes centrales, de type B-spline ou spline cubique [Sarry and Boire, 2001, Shechter et al., 2003, Blondel et al., 2006, Zheng et al., 2010].

Une analyse synthétique de l'ensemble des méthodes appliquées aux coronaires, montre leurs dépendances directes (méthodes géométriques) ou indirectes (méthodes toмоgraphiques) vis à vis d'une étape de segmentation 2D des vaisseaux projetés (contours ou lignes centrales). La sensibilité de la précision des segmentations qui en sont issues varie d'une méthode à l'autre. Par exemple, les méthodes itératives statistiques semblent être moins sensibles aux segmentations que celles basées sur la Stéréovision. Cependant, aucune méthode de segmentation automatique fiable n'a pu être jusque là proposée, à cause de la complexité des structures coronaires (diamètre très petit, intersection des branches, etc.) pour lesquelles l'histogramme des intensités varie avec le temps à l'intérieur des vaisseaux (à cause variation de la diffusion du produit de contraste), et se chevauche avec celui des structures environnantes (Fig. 2.1.(C)) et à la présence de bruits d'acquisition. Les méthodes de segmentation semi-automatiques donnent les meilleurs résultats, néanmoins, des variabilités inter- et intra-observateur peuvent être constatées [Sandor et al., 1987], influençant ainsi les résultats de reconstruction.

Concernant le choix d'une stratégie permettant la sélection des projections (première ou deuxième stratégie), cela dépendra de la précision souhaitée de la reconstruction et le temps de calcul. Il est clair que les reconstructions avec compensation de mouvement présentent de meilleurs résultats pour déterminer la forme géométrique 3D des coronaires et la distribution spatiale du produit de contraste et qu'elles sont plus susceptibles de détecter les anomalies vasculaires telles que les sténoses. Cependant, elles font appel à des calculs très sophistiqués et complexes (segmentation, mise en correspondance, interpolation, etc.), nécessitant ainsi un temps de calcul très élevé. Par ailleurs, les méthodes géométriques incapables de localiser les zones pathologiques, elles, sont plus rapides et

plus efficaces pour une représentation morphologique tridimensionnelle du réseau coronaire.

Enfin, dans toutes les reconstructions proposées, une synchronisation entre différentes prises de vues (projections 2D) se montre une étape primordiale, pouvant influencer la précision des résultats. Le signal ECG acquis parallèlement avec l'acquisition RX ne permet pas une détermination automatique des différentes phases cardiaques à cause de la variabilité et de l'irrégularité du rythme cardiaque. L'association des informations issues du signal ECG avec celles contenues dans les niveaux de gris des angiogrammes semblerait la méthode la plus précise pour la sélection des images correspondant à la même phase cardiaque. Elle permet, entre autre avantage, de corriger les déplacements (verticaux) des coronaires dûs aux mouvements respiratoires [Shechter et al., 2003, Blondel et al., 2006, Lehmann et al., 2006].

## 2.3 Approches itératives statistiques en reconstruction RX

Dans un premier temps (section 2.3.1), nous définissons la notion de **Reconstruction tomographique** d'une image RX, après un rappel du principe physique permettant la génération des profils issus de l'acquisition RX. Puis, nous parlons de l'évolution de la reconstruction 3D statique avec l'apparition des systèmes RX à géométrie conique et les premières techniques numériques de reconstruction, c'est à dire les méthodes analytiques directes et celles algébriques itératives.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons aux composantes principales d'une reconstruction itérative MAP (section 2.3.2), à savoir un modèle physique de processus d'acquisition, un modèle de l'information a priori et un algorithme itératif d'optimisation.

### 2.3.1 Reconstruction tomographique RX

En imagerie RX, les images brutes acquises représentent des profils d'atténuation des rayons X après avoir traversés une partie du corps humain. Cette atténuation suit une décroissance exponentielle selon la loi de Beer-Lambert (éq. 2.1) [Beer, 1852]. Pour une zone tissulaire exposée à  $M_0$  photons X émis par une source  $S$ , la quantité photonique  $M$  reçue (par un détecteur) dépend de la distance  $x$  parcourue (par les  $M_0$  photons initiaux) à travers les coefficients d'atténuation  $\mu$  des différents tissus irradiés.

$$M = M_0 \exp \left( - \int_x \tilde{\mu}(Z(x), E) dx \right) \quad (2.1)$$

avec,  $\tilde{\mu}$  le coefficient linéique ( $cm^{-1}$ ) dépend de la densité des tissus (qui est fonction du numéro atomique  $Z$ ), de la distance parcourue  $x$  et de l'énergie du faisceau incident  $E$ .

Ces rayons X atténués (représentés par l'exponentielle avec un exposant négatif dans l'équation 2.1), sont interceptés et convertis en un signal 1D ou 2D, selon les systèmes de détection utilisés. Ces images sont interprétées comme étant la somme des contributions des différents coefficients d'atténuation  $\tilde{\mu}$  des tissus imagés (c.à.d. l'intégrale dans l'éq. 2.1) sur le même plan de détection. Par conséquent, l'investigation directe de ces projections (intégrale de  $\tilde{\mu}$ ) ne donne aucune information sur la distribution spatiale de ces coefficients d'atténuation caractérisant les structures imagées ; alors que c'est

une information capitale pour les deux finalités : diagnostique et thérapeutique. Afin d'estimer cette information manquante, les méthodes de reconstruction ont été introduites.

Une reconstruction tomographique est une résolution mathématique numérique d'un problème **inverse**, puisque nous cherchons à déterminer les coefficients d'atténuation (les  $\mu$  (éq. 2.1)) et leurs distributions spatiales à partir de plusieurs profils d'atténuation acquis selon différents angles de projection.

Ce problème inverse est **mal posé** au sens de Hadamard [Hadamard, 2003] admettant une solution approchée, puisque une reconstruction exacte nécessite un nombre infini de projections. De plus, cette solution est instable à cause de l'aspect aléatoire du bruit (généralisé au cours des différentes étapes de l'acquisition RX) venant perturber le modèle direct d'acquisition RX (éq. 2.1).

Avec l'introduction des principes issus de la tomographie assistée par ordinateur, appelé aussi tomodynamométrie (TDM) ou plus simplement scanner (CT-RX Computed Tomograph), par Godfrey Hounsfield [Hounsfield, 1973], le problème de la reconstruction est passé du domaine continu au numérique (discret). Dans cette procédure de numérisation, le problème est resté toujours mal posé, à cause du bruit d'acquisition qui le rend **mal conditionné**, voire singulier [Bloch, 2010].

Actuellement, la totalité des appareils radiologiques RX sont numériques. Ils sont donc équipés d'un système de détection de dimension finie, composé de  $P$  détecteurs élémentaires. Sous l'hypothèse d'un rayonnement RX monochromatique (l'énergie  $E$  est supposée constante) tout en discrétisant l'objet imagé en  $N$  échantillons  $\mu_j$ , nous pouvons établir une relation linéaire et discrète reliant chaque mesure  $g_i$  (représente une quantité proportionnelle à  $\ln(\frac{M_0}{M})$ ) aux différents échantillons  $\mu_j \in \mathbb{R}_+^N$  (éq. 2.2) de la région examinée :

$$g_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \mu_j \quad (2.2)$$

où,  $a_{ij}$  est un coefficient reliant l'échantillon  $j$  à la mesure  $i$ , dépendant de plusieurs paramètres que nous détaillerons plus tard dans [la section 3.2](#),  $\sum_{j=1}^N$  représente la formulation discrète de l'intégrale (éq. 2.1) le long de l'objet (imagé).

En tenant compte de  $K$  incidences de projection (c.à.d des différentes positions du couple émetteur/récepteur RX autour de la région examinée), l'équation 2.2 peut être réécrite sous une forme plus générale :

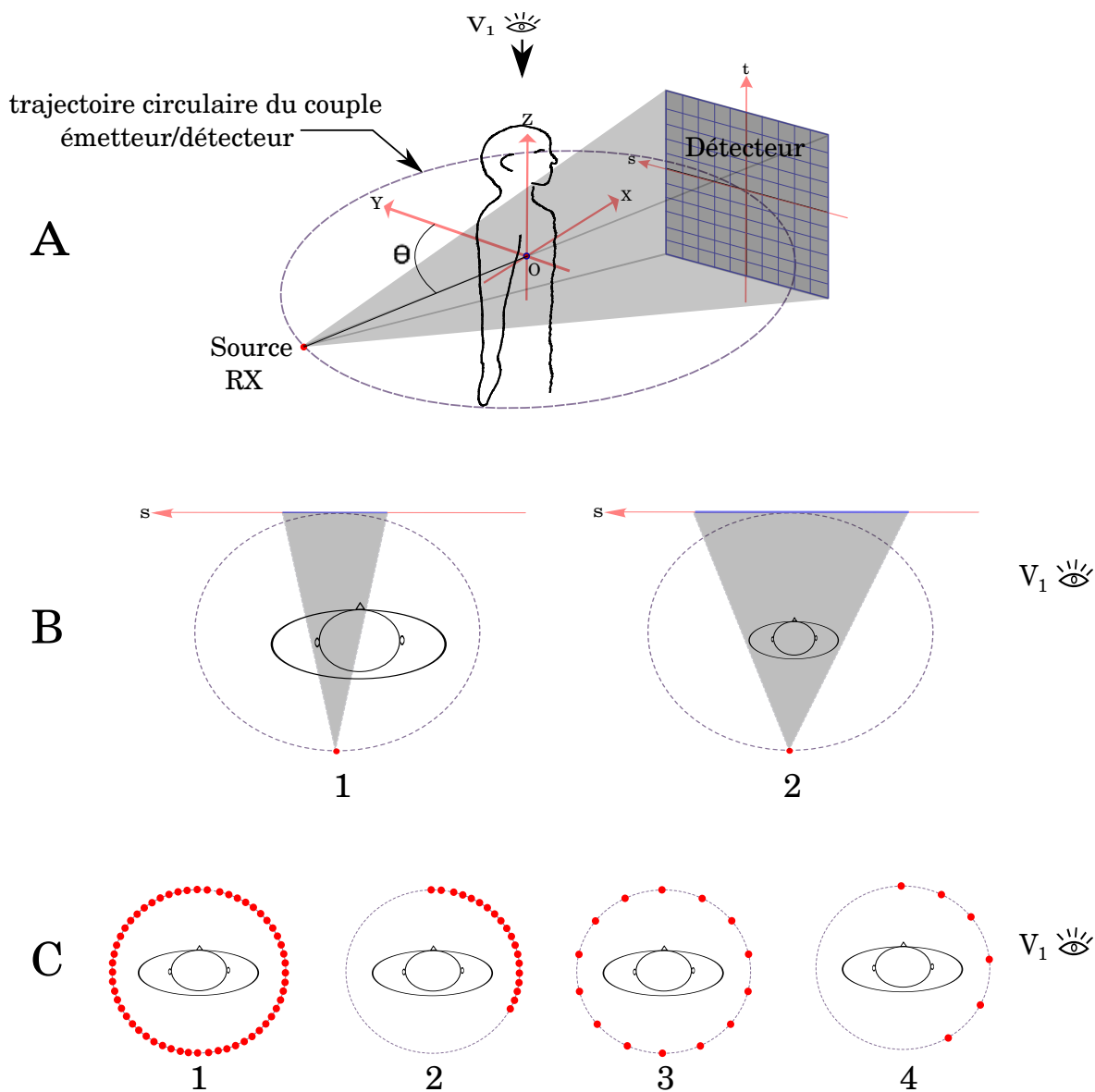
$$G = A\mu \quad (2.3)$$

où,  $A$  est une **matrice** de taille  $PK \times N$  modélisant le problème direct (opérateur de projection - chapitre 3),  $\mu$  (inconnues) et  $G$  (mesures) deux **vecteurs** de taille  $N$  et  $PK$ .

Ainsi, nous pouvons redéfinir la reconstruction comme étant une méthode de calcul numérique des échantillons  $\mu_j$  (coefficients d'atténuation discrétisés) à partir de la formule discrète d'acquisition (éq. 2.3).

Dans la littérature, un grand nombre d'algorithmes de reconstruction ont été proposés. Le choix d'un algorithme **idéal** n'a de sens que dans un contexte précis et restreint

par rapport à la variété des applications pour lesquelles les images (reconstruites) sont utilisées [Defrise, 2007, Barrett et al., 2005] et selon le nombre et la stratégie de collectes de données de projection [Siltanen et al., 2003] (Fig. 2.3.B et Fig. 2.3.C).



**Figure 2.3:** Illustration de la géométrie de mesure et les incidences de projection adoptées dans une acquisition conique en tomographie de transmission RX [Siltanen et al., 2003].

(A): principe d'une acquisition RX conique en mode rotationnel.

(B): coupes axiales en géométrie conique, (B1): tomographie locale, (B2): tomographie globale.

(C): stratégies différentes pour la collecte de données en tomographie, (C1): rotation complète avec un échantillonnage angulaire plein, (C2): rotation partielle avec un échantillonnage angulaire plein, (C3): rotation complète avec un échantillonnage angulaire épars, (C4): rotation partielle avec un échantillonnage angulaire épars.

Historiquement, les premières techniques de reconstruction tomographique étaient basées sur l'expression **analytique** de l'inverse de la transformée de Radon [Radon, 1917], qui ne prennent pas en compte les aspects statistiques (bruit d'acquisition) ou d'information a priori sur l'objet que l'on cherche à reconstruire (connaissance anatomique de l'organe

étudié, une forme géométrique donnée, etc.). Dans cette catégorie, l'exemple le plus répandu et commercialisé est la rétro-projection filtrée (**FBP** Filtered backprojection) [Kak and Slaney, 1988, Katsevich, 2002]. Ces méthodes ont l'avantage d'être très rapides (d'un point de vue temps de calcul), cependant, elles souffrent de limitations dues essentiellement à leurs incapacités à modéliser précisément les phénomènes physiques intervenant dans la formation des images de projection [Viguié, 2008] tels que le bruit d'acquisition et la nature polychromatique des rayons X. De plus, elles sont incapables d'incorporer des informations a priori des objets à reconstruire.

Dans la même période, d'autres travaux ont adopté des techniques de calculs **algébriques** afin d'inverser le modèle discret du dispositif d'acquisition (éq. 2.3). En effet, l'information a priori concernant la géométrie du système d'acquisition (caractérisée par la forme du faisceau, la distance entre la source et l'objet, le pas d'échantillonnage de l'objet et du détecteur, etc. - voir la section 3.2) représentée dans la matrice  $A$  (éq. 2.3) va permettre de résoudre ce problème inverse. Contrairement aux méthodes analytiques, les méthodes algébriques expriment directement le problème de reconstruction dans un espace discret.

La solution idéale consiste donc à inverser directement la matrice  $A$  ( $\mu = A^{-1}G$ ), cependant, cette inversion directe n'est pas réalisable en pratique à cause de la très grande taille de la matrice (surtout pour une modélisation 3D) et de sa forme qui n'est pas carrée.

Une alternative pour résoudre l'équation 2.3 est de procéder à une **approximation d'inversion** par des méthodes **itératives**. Ces méthodes itératives cherchent à résoudre le problème de reconstruction par des estimations successives à partir d'une solution initiale  $\mu^0$ . Ensuite, elles vont corriger pas à pas  $\mu^0$  pour converger vers une solution approchée de l'éq. 2.3. La stratégie des corrections effectuées diffère d'une méthode à une autre. Elle peut se baser sur la technique dite de projection ou de Kaczmarz [Kaczmarz, 1937] telles que les approches ART (Algebraic Reconstruction Technique) [Gordon et al., 1970, Hounsfield, 1973] et SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique) [Gilbert, 1972] et leurs variantes, ou bien, sur des processus numériques qui minimisent une distance  $d$  (souvent quadratique et/ou convexe) mesurant l'adéquation de  $\mu$  (l'objet que l'on cherche à reconstruire) avec  $G$  (les données mesurées) (éq. 2.4).

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} d(A\mu, G) \quad (2.4)$$

avec  $\mu \geq 0$  une contrainte de positivité de la solution (puisque les coefficients d'atténuation  $\mu_i$  sont toujours positifs ou nuls)

Dans ce contexte, nous citons la distance la plus utilisée dans la littérature ; c'est la distance quadratique (éq. 2.5).

$$d_Q(G, \mu) = \sum_i ([A\mu]_i - g_i)^2 \quad (2.5)$$

avec,  $[A\mu]_i$  représente le  $i^{eme}$  composant du produit  $A\mu$  (une ligne d'intégrale).

La précision de l'estimation de l'objet 3D est très dépendante des données de mesure  $G$ . Ainsi, en présence d'un bruit important d'acquisition, la minimisation d'une telle distance (éq. 2.4) est incapable de réaliser des reconstructions précises. Ce bruit peut provenir de différentes sources, à savoir celles de la **biologie humaine** (mouvement du sang,

battements cardiaques, respirations, etc.), des **circuits électroniques** (échauffements thermiques), de **la modalité d'imagerie utilisée** (énergie des rayons X, sources et capteurs RX utilisés, inertie en mouvement de rotation du couple émetteur/récepteur RX, etc.), et des **interactions rayonnement-matière** (absorption, diffusion, relaxation, etc.) [Recur, 2010].

Une nouvelle famille d'algorithmes (dits **statistiques**) de reconstruction a été introduite, en incorporant ces aspects stochastiques ainsi que des modèles d'information a priori. De nombreux chercheurs [Smith et al., 1978, Grünbaum, 1982, Kazantsev, 1991, Siltanen et al., 2003] ont montré la difficulté d'effectuer une reconstruction tomographique de haute qualité à partir de données de projection éparses (Fig. 2.3.(C3, C4)) sans avoir recours à **une information a priori** sur l'objet que l'on cherche à reconstruire. D'où, le double intérêt de l'utilisation de méthodes statistiques de reconstruction capables d'incorporer cette information a priori (modèle de l'objet), ainsi que celle concernant le bruit d'acquisition (modèle de bruit).

**NB :** Nous discuterons des aspects aléatoires liés aux bruits d'acquisition, ainsi que des différents modèles a priori considérés dans les deux parties, *Modèle physique du processus d'acquisition* et *Modèle de connaissances a priori* dans la section suivante (section 2.3.2).

### 2.3.2 Principales composantes des méthodes statistiques de reconstruction en tomographie statique

Une reconstruction est dite **statistique** lorsqu'elle prend en compte des **phénomènes aléatoires** liés aux **bruits** intervenant dans l'acquisition des données. Ces phénomènes ne peuvent se modéliser que de manière probabiliste. Pour ce faire, une variable stochastique de bruit  $B$  est introduite dans l'équation (éq. 2.3) correspondant au modèle direct d'acquisition (éq. 2.6) :

$$G = A\mu + B \quad (2.6)$$

où,  $B$  est une variable à caractère aléatoire, modélisant un bruit additif qui suit une loi de probabilité  $P_B$  (il faut noter qu'il existe d'autres modèles de bruit et notamment multiplicatifs).

Une méthode itérative statistique de reconstruction consiste à optimiser (minimiser ou maximiser) une fonction  $f$  dite **objectif** (éq. 2.7) ou **de coût**, imposant certaines propriétés désirables (maximisation) ou contraignant d'autres indésirables (minimisation) de l'objet à construire, tout en adoptant une méthode d'optimisation numérique :

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} f(A, G, \mu, B) \quad (2.7)$$

avec,  $f$  qui est une fonction de  $G$ ,  $\mu$ ,  $B$  et  $A$ , elle représente une mesure (ou métrique) à optimiser, et  $\mu \geq 0$  est une contrainte de non-négativité de la solution.

**NB :** Les distances évoquées dans les éq. 2.4 et éq. 2.5 sont aussi considérées comme des fonctions de coût imposant une fidélité des reconstructions aux données mesurées.

Le **formalisme bayésien** [Bernardo et al., 1994, Hanson, 1993] consiste donc à déterminer la réalisation d'un champ aléatoire  $\mu$  à travers les observations  $G$ , permettant de maximiser une fonction de coût associée à un estimateur bayésien.

Le premier estimateur utilisé en reconstruction tomographique est celui du

**Maximum de Vraisemblance**  $P(G|\mu)$  (MV ou ML-Maximum likelihood) [Dempster et al., 1977, Shepp and Vardi, 1982, Lewitt and Muehllehner, 1986].

Il vise à chercher une solution  $\mu^*$  permettant de maximiser la probabilité conditionnelle (la fonction de vraisemblance)  $P(g_i|\mu)$  (éq. 2.8) qu'un événement  $g_i$  se réalise étant donné  $\mu$  (autrement dit à minimiser l'écart entre les projections mesurées  $G$  et celles résultant de l'estimation de  $\mu$  ( $A\mu$ )).

$$P(g_i|\mu) = P_B(b_i = g_i - [A\mu]_i) \quad (2.8)$$

La solution choisie au sens du maximum de vraisemblance  $P(G|\mu)$ , ou d'une façon équivalente, au sens du minimum de moins-log-vraisemblance  $-\log(P(G|\mu))$  (sous l'hypothèse d'une **indépendance statistique** des variables  $g_i$  (éq. 2.9)) est définie (éq. 2.10).

$$P(G|\mu) = \prod_i P(g_i|\mu) \quad (2.9)$$

avec,  $P(G|\mu)$  représente la loi de probabilité jointe des variables aléatoires indépendantes  $P(g_i|\mu)$ .

$$\begin{aligned} \mu^* &= \arg \max_{\mu \geq 0} (P(G|\mu)) \\ &= \arg \max_{\mu \geq 0} \left( \log \left( \prod_i P(g_i|\mu) \right) \right) \\ &= \arg \min_{\mu \geq 0} \left( - \sum_i \log (P(g_i|\mu)) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'expression exacte de moins-log-vraisemblance (éq. 2.10) dépend du modèle de bruit adopté, pour laquelle nous citons les deux exemples les plus courants selon que l'on considère un bruit blanc gaussien (éq. 2.11) ou poissonien (éq. 2.12).

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} \sum_i \left( \frac{1}{2} \sigma_i^{-2} (g_i - [A\mu]_i)^2 \right) \quad (2.11)$$

où,  $\sigma_i$  est l'écart-type du bruit gaussien dégradant la qualité de mesure  $g_i$ .

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} \sum_i ([A\mu]_i - g_i \log([A\mu]_i)) \quad (2.12)$$

**NB :** Notons qu'une estimation au sens du ML dans le cas d'un bruit **blanc gaussien** revient à calculer une solution du type **moindres carrés** (éq. 2.5), connue sous le nom de **solution inverse généralisée** et qui vérifie l'équation normale,  $A^t A \mu = A^t G$  [Charbonnier, 1994].

La reconstruction ML dépend uniquement des données  $G$ , dont la qualité de reconstruction dépend du nombre disponible de projections et de leurs positions spatiales autour de l'objet  $\mu$  (Fig. 2.3, voir [Siltanen et al., 2003]).

Une information a priori sur l'objet à reconstruire peut être associée au terme d'attache aux données (la vraisemblance) (éq. 2.13) afin de pénaliser certaines propriétés indésirables de la solution  $ML$  et/ou imposer d'autres souhaitables [Grünbaum, 1982,



Kazantsev, 1991, Noo et al., 2002] (voir la partie 2.3.2). Dans ce cas, la reconstruction est connue sous le nom de **Maximum de Vraisemblance Pénalisé** (*PML* - **P**enalized **M**aximum **L**ikelihood) [Fessler and Hero, 1993, Fessler and Hero, 1995, Fessler et al., 1997, Simonoff, 1998].

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} \left( \left( \sum_i -\log(P(g_i | \mu)) \right) + \beta f_{penal}(\mu) \right) \quad (2.13)$$

où,  $\beta$  est un paramètre positif déterminant le poids de l'information a priori dans l'expression de *PML*,  $f_{penal}$  est un terme de pénalisation, appelé aussi un terme de régularisation puisque il régularise le problème inverse.

Un autre estimateur bayésien plus précis, connu sous le nom de **Maximum de Probabilité A Postérieur** (*MAMP* - **M**aximum **A** posteriori **P**robability) est également souvent exploité [Bouman and Sauer, 1993, Fessler et al., 1997].

La probabilité a posteriori  $P(\mu|G)$  permet en effet d'associer les informations, que nous connaissons préalablement, de l'objet  $\mu$  (la distribution a priori  $P(\mu)$ ) avec celles issues de l'expérience (la vraisemblance  $P(\mu|G)$ ) ; ainsi, sa maximisation peut améliorer considérablement la qualité de la reconstruction (éq. 2.14).

$$\begin{cases} \mu^* = \arg \max_{\mu \geq 0} (P(\mu|G)) \\ P(\mu|G) = P(\mu|G) P(\mu) \end{cases} \quad (2.14)$$

Etant donnée que la maximisation de  $P(G|\mu)$  est équivalente à la minimisation de  $-\log(P(G|\mu))$ , et en modélisant l'objet 3D  $\mu$  comme un champ de Markov [Aykroyd and Zimeras, 1999] (voir la section 2.3.2, éq. 2.25), nous nous retrouvons avec une expression (éq. 2.15) similaire (équivalente) à celle de PML (éq. 2.13).

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} \left( \left( \sum_i -\log(P(g_i | \mu)) \right) + \beta W_{prior}(\mu) \right) \quad (2.15)$$

avec,  $W_{prior}$  est une fonction d'énergie du champ markovien et  $\beta > 0$  est un hyperparamètre permettant d'ajuster le compromis entre la fidélité aux observations ( $\sum_i -\log(P(g_i | \mu))$ ) et un terme de régularisation associé aux informations a priori ( $W(\mu)$ ).

Il n'existe aucune méthode efficace (sauf dans le cas d'un a priori quadratique de Tikhonov) pour calculer de manière automatique le coefficient  $\beta$  [Hamelin, 2009, Zhou et al., 1997, Higdon et al., 1997]. L'approche **par essais et erreurs** reste l'alternative la plus utilisée.

Pour certains cas particuliers de problèmes inverses, d'autres estimateurs bayésiens ont été adoptés. Nous citons à titre indicatif, l'estimateur au sens du Maximum de la marginale a posteriori (Maximum of the Posterior Marginal *MPM*) [Marroquin et al., 1987] et celui du champs moyen [Pérez et al., 1991].

En résumé, une reconstruction statistique **performante** en tomographie statique doit passer par les **trois étapes** suivantes :

- 1) l'élaboration d'un modèle physique précis du processus d'acquisition ( $A$  et  $B$ ),
- 2) l'adoption d'un modèle a priori approprié ( $f_{penal}$  ou  $W$  et  $\beta$ ),
- 3) la définition d'un algorithme d'optimisation itératif efficace.

Nous détaillerons chaque étape dans les sections qui vont suivre.

### Modèle physique du processus d'acquisition

Définir un modèle physique du processus d'acquisition est le point de départ de tout algorithme de reconstruction. Dans la plupart des cas, le modèle physique du processus d'acquisition décrit deux aspects : **déterministes** et **statistiques**.

Les aspects **déterministes** englobent tous les modèles décrivant le lien entre la distribution spatiale de l'objet imagé  $\mu$  et les valeurs moyennes détectées  $\bar{g}_i$  (ce lien est modélisé par la matrice  $A$  dans l'éq. 2.6, pour laquelle  $\bar{g}_i = [A\mu]_i$  éq. 2.4). Ils sont principalement liés à la géométrie du système d'acquisition (parallèle ou conique). Pour prendre en compte ces aspects, nous devons d'abord définir un modèle numérique pour représenter la distribution des coefficients d'atténuation dans une forme discrète constituée de plusieurs échantillons  $\mu_j$ , afin d'établir un lien entre les  $\mu_j$  et les valeurs moyennes  $g_i$  détectées. Tous les modèles décrivant les aspects déterministes s'inspirent de la loi d'absorption de Beer-Lambert (éq. 2.1) [Beer, 1852], avec des variantes au niveau des hypothèses de départ, telles que la nature mono/poly-chromatique du rayonnement RX [De Man et al., 2001, Elbakri and Fessler, 2002] et la géométrie 2D/3D de l'acquisition RX. En tomographie RX numérique, les aspects déterministes sont souvent modélisés par une transformation linéaire reliant les valeurs interceptées par les différents détecteurs élémentaires avec l'ensemble des échantillons de l'objet imagé discrétisé (grâce aux opérateurs de projection et de rétroprojection) [Man and Basu, 2004, Long et al., 2009, Peters, 1981] (nous détaillerons ces aspects déterministes dans le **chapitre 3**).

Les aspects **statistiques** réunissent des modèles probabilistes décrivant le comportement des données mesurées  $g_i$  autour de leurs valeurs moyennes  $\bar{g}_i$ . Ils visent une modélisation mathématique la plus réaliste possible du système d'acquisition RX en incorporant les propriétés stochastiques des données mesurées et les réponses non linéaire des détecteurs (aux rayonnement X) tels que le durcissement et la dispersion des faisceaux RX [Lasio et al., 2007]. Selon les applications des appareils de tomographie à rayons X et le pré-traitement des images acquises, deux modèles de cette distribution sont souvent utilisés, soit **Gaussien** [De Man et al., 2005] ou soit **Poissonien** [Elbakri and Fessler, 2002].

Afin d'établir un modèle statistique **précis** et réaliste, il est nécessaire d'étudier le comportement de l'ensemble de la chaîne d'acquisition, à savoir **la source de rayons X**, **l'objet imagé** et le **système de détection** [Li et al., 2004, Whiting et al., 2006, Wang et al., 2008].

**Au niveau de la génération RX**, la distribution du bruit peut être modélisée comme

une fonctionnelle de **Poisson** (éq. 2.16) [Macovski, 1983].

$$P_k(N_0) = \frac{(N_0)^k e^{-N_0}}{k!} \quad (2.16)$$

où,  $P_k$  est la probabilité de l'émission de  $k$  photons de moyenne temporelle  $N_0$  dans un laps de temps donné (temps de pose).

Cette loi poissonnienne modélise le comportement aléatoire du nombre de photons X émis, par rapport à une valeur théorique moyenne, proportionnelle à l'intensité parcourant le filament du tube émetteur RX.

**Au niveau des tissus imagés**, la transmission d'un photon X peut être approximée par un modèle binaire : il ne peut qu'être transmis (vrai) ou pas (faux), en fonction des interactions orbitales des atomes. Il est évident que les photons traversant des structures ayant un nombre élevé d'électrons orbitaux (nombre atomique  $Z$  élevé) ont moins de chance d'être transmis que celles ayant un faible nombre d'électrons. Cette transmission dépend aussi de la fréquence d'émission (énergie  $E$ ) des photons X. C'est le principe même de la loi de Beer-Lambert ( $\mu(Z(x), E)$  dans l'éq. 2.1). Par conséquent, un **modèle binomial** semble très réaliste pour la modélisation de bruit de transmission. Dans ce cas, la probabilité qu'un photon soit transmis vaut  $\exp(-\int \mu dx)$  et  $(1 - \exp(-\int \mu dx))$  dans le cas inverse (non transmis) [Wang et al., 2008, Macovski, 1983] ( $\mu$  est le coefficient d'atténuation linéaire, et  $dx$  représente une longueur élémentaire le long du trajet des photons).

Enfin, **au niveau de la détection**, les photons vont suivre une distribution associant une loi poissonnienne (liée à l'émetteur RX) suivie d'une autre binomiale (liée à la traversée des tissus). Cette association engendre une loi de **Poisson multivariée** (éq. 2.17), pour laquelle la moyenne (qui est égale à la variance / propriété de la loi de poisson) est variable en fonction des coefficients d'atténuation rencontrés le long des trajectoires photoniques ( $\int \mu dx$ ).

$$\begin{aligned} P_k(N) &= \text{Poisson} \{ N_0 \exp(-\int \mu dx) \} \\ &= \frac{N_0 \exp(-\int \mu dx) e^{-N_0 \exp \int \mu dx}}{k!} \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec,  $P_k$  est la probabilité de détection de  $k$  photons de moyenne temporelle  $N$  dans un laps de temps donné (temps de pose).

Afin d'incorporer la nature **polychromatique des RX**, plusieurs travaux l'ont modélisée par une **convolution** de la distribution de poisson avec le spectre d'émission des RX [Snyder and Miller, 1991, Whiting et al., 2006]. Les faisceaux polychromatiques peuvent induire des variations de niveaux de gris (des artefacts) dans les images de projection, modifiant ainsi la distribution poissonnienne [Snyder and Miller, 1991]. Pour minimiser ces artefacts et augmenter la qualité des images acquises, toutes les machines de tomographie RX sont munies d'un système de **calibration**. Par conséquent, le modèle établi initialement de bruit (selon une loi de Poisson multivariée) n'est plus réaliste à cause des modifications introduites par les différentes opérations de calibration [Li et al., 2004, Lu et al., 2001b].

L'analyse statistique des données après la procédure de calibration (de quelques systèmes

d'acquisition RX) a montré une **distribution normale** (gaussienne) avec une **variance non linéaire**, dépendant du signal acquis (une fonction de la moyenne du signal éq. 2.18) [Lei and Sewchand, 1992, Lu et al., 2001b, Lu et al., 2002, Papoulis and Pillai, 2002].

$$P(g_i) = \frac{1}{\sigma_i(\bar{g}_i) \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2} \left( \frac{g - \bar{g}_i}{\sigma_i(\bar{g}_i)} \right)^2 \quad (2.18)$$

avec,  $\sigma_i$  est une fonction de  $\bar{g}_i$ , représentent l'écart-type du signal acquis  $g_i$  dans un laps de temps (temps de pose), de moyenne  $\bar{g}_i$ .

Cependant, la manipulation d'un tel modèle complexe dans les procédures de reconstruction reste une tâche délicate. C'est la raison pour laquelle plusieurs travaux se sont orientés vers un post-traitement des données acquises, pour simplifier le modèle de bruit, et améliorer les résultats de reconstruction [Lu et al., 2001b, Demirkaya, 2001, Lu et al., 2003].

Dans la littérature, des transformations d'échelle appliquées aux images acquises (en niveau de gris) ont été largement utilisées afin de stabiliser les variances (les rendre constantes, indépendantes des moyennes) dans les modèles de bruit (éq. 2.18) [Anscombe, 1948, Bartlett, 1947, Curtiss, 1943]. Ces transformations d'échelle ont montré une grande efficacité concernant le temps de calcul et l'unicité des solutions. Elles ont aussi été considérablement utilisées dans le domaine de la médecine nucléaire [Lu et al., 2001b] telles que l'imagerie SPECT [Pélégrini et al., 1998, Lu et al., 2001a]. Ces transformations se déterminent à partir de relations qui peuvent exister entre les variances ( $\sigma_i^2$ ) et les moyennes ( $\bar{g}_i$ ) pour un type de bruit donné. Par exemple, l'application d'une transformation logarithmique (*log*) sur les images acquises  $G$  s'avère l'opération idéale pour rendre les variances quasi-constantes ( $\sigma_i^2 \approx \text{constante}$ ) dans les cas où elles peuvent être modélisées par des fonctions quadratiques de valeurs moyennes ( $\sigma_i^2 \approx \alpha_1 \bar{g}_i^2 + \alpha_2 \bar{g}_i + \alpha_3$ ) [Bartlett, 1947].

Un modèle théorique précis du bruit d'acquisition dépend d'une multitude de paramètres, à savoir le spectre d'émission et sa puissance, le type et la géométrie des détecteurs utilisés, les différentes étapes de calibration adoptées, etc. Sa détermination reste un vaste domaine de recherche, pour lequel l'étude statistique des données acquises reste l'outil le plus efficace, permettant ainsi l'adoption d'un modèle approprié.

### Modèle de connaissances a priori

Du fait du nombre restreint des données de projection et du caractère aléatoire du bruit d'acquisition (comme c'est le cas pour les angiogrammes correspondant à la même phase cardiaque dans un examen rotationnel d'angiographie), la reconstruction RX correspond souvent à un problème mal posé, nécessitant ainsi une étape de régularisation. Différentes approches de régularisation ont été proposées [Demoment, 1989] afin d'améliorer le conditionnement du problème inverse. Introduire des connaissances a priori décrivant certaines propriétés désirées et supposées connues de l'objet que l'on cherche à reconstruire [Hamelin, 2009] est la méthode la plus pertinente. Cette procédure permet d'exprimer un degré de certitude afin d'orienter le résultat de la reconstruction vers une solution privilégiée [Hanson, 1993].

Ces modèles a priori peuvent s'inspirer des connaissances anatomiques et physiologiques d'un expert, d'une reconstruction effectuée antérieurement à partir d'autres modalités d'imagerie (l'imagerie multi-modalité), ou d'une phase d'apprentissage. Ils sont souvent

décrits sous une forme qualitative (l'homogénéité des résultats par exemple) nécessitant ainsi une quantification mathématique (impliquant un critère de mesure) afin de pouvoir les incorporer dans la procédure de reconstruction [Siltanen et al., 2003].

D'une manière générale, il existe deux types d'information a priori, concernant soit la **structure**, soit la **cinétique** de l'organe que l'on cherche à reconstruire [Garnero et al., 1999]. Dans ce qui va suivre, nous allons nous focaliser sur les modèles a priori des structures sans tenir compte de leurs cinétiques.

Les modèles a priori peuvent être définis de deux manières différentes : **déterministe** ou **statistique**.

- 1) **A priori déterministe**: pour lequel les coefficients d'atténuations  $\mu$  sont considérés comme des variables déterministes caractérisées par leurs valeurs (intensités) et leurs positions spatiales (2D/3D). Souvent, les  $N$  valeurs de  $\mu_i$  sont rangées dans une grille (composée de pixels dans le cas 2D, et voxels dans le cas 3D) qui peut être représentée sous une forme vectorielle (éq. 2.19):

$$\mu = [\mu_j], j = 1, \dots, N \quad (2.19)$$

Nous distinguons deux types d'information a priori, de **haut** et de **bas** niveau.

Le modèle **bas niveau** est plus adapté aux manques d'information a priori, et s'exprime sous forme de contraintes. Afin de quantifier ces contraintes, plusieurs modèles numériques ont été proposés dont nous classifions en:

- \* **fonctions analytiques**, telles que les splines pour approximer les formes [Cinquin, 1987] et les polynomiales (en fonction des coordonnées spatiales) pour modéliser les intensités [Feng, 2002];
- \* **équations paramétriques** telles que l'utilisation de cercles (plusieurs paramètres tels que le centre, le rayon et l'orientation) pour la modélisation des sections des branches vasculaires [Rossi et al., 1989],
- \* **fonctionnelles à optimiser** telle que  $\|\Gamma_{op} \cdot \mu\|^2$  qui dépend du choix de l'opérateur matriciel  $\Gamma_{op}$ . Cette fonctionnelle peut sanctionner les solutions  $\mu$  ayant des normes assez élevées ( $\Gamma_{op}$  représente la matrice identité). Comme elle peut sanctionner aussi les variations rapides de  $\mu$  ( $\Gamma_{op}$  représente un opérateur passe-haut basé essentiellement sur les dérivés premières et/ou secondes). la fonctionnelle la plus connue dans cette catégorie des a priori est celle de Tikhonov [Tikhonov, 1963].

Notons ici que les a priori bas niveaux caractérisent des propriétés très locales de l'objet à reconstruire et ils peuvent se montrer inefficace, notamment pour des forts niveaux de bruit ou pour un nombre très limité de données mesurées.

Le modèle **haut niveau** ne peut être appliqué qu'en présence de connaissance précise de la classe de l'objet à reconstruire telle qu'une forme de référence. Il est modélisé par un ensemble de formes paramétrées, ou une liste de primitives ou d'objets structurés [Delageniere-Guillot, 1993]. Dans le cas de l'existence d'une forme de référence, l'alignement entre les formes de référence et l'objet reconstruit (dans la plupart des cas, elles ne possèdent pas la même orientation, position et taille) est un facteur très important qui nécessite la construction appropriée d'une mesure de

similarité ou d'une distance entre formes, telle que des distances quadratiques entre fonctions distances signées ou fonctions caractéristiques (associées à la forme de référence) [Rousson and Paragios, 2002, Riklin-Raviv et al., 2004]. Cependant, les a priori haut niveau ne sont pas toujours accessibles et leur mise en œuvre nécessite des procédures sophistiquées pouvant alourdir considérablement les temps de calcul (de la reconstruction).

- 2) **A priori statistique (Bayésien)** : pour lequel les  $\mu$  et les données de projection  $G$  sont considérés comme des variables aléatoires dont nous cherchons à estimer les lois de probabilité (une hypothèse réaliste puisque les valeurs exactes de la distribution des  $\mu$  ne pourront jamais être calculées avec précision). Dans cette configuration, l'objet à reconstruire  $\mu$  représente une réalisation d'un champs aléatoire  $\Omega$  défini souvent sur un réseau régulier de sites  $S$  (éq. 2.20).

$$P_\mu(\mu_S) = P(\Omega_S = \mu_S) \quad (2.20)$$

Dans les premiers temps, les a priori étaient principalement orientés vers des modèles favorisant l'**homogénéité isotropique** des solutions (de la reconstruction). Dans ce contexte, le modèle le plus connu est la distribution gaussienne [Hanson and Wecksung, 1983, Engl et al., 1996] (éq. 2.21).

$$P_\mu(\mu) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu - \bar{\mu})^T \Gamma^{-1}(\mu - \bar{\mu})\right) \quad (2.21)$$

avec,  $T$  représente l'opérateur transposé,  $\Gamma$  est la matrice de covariance, et  $\bar{\mu}$  est le vecteur de la moyenne dans un voisinage choisi.

Cependant, cette régularisation très dépendante de la base dans laquelle  $\mu$  est représentée (voxels, maillages triangulaires, etc.) [Kaipio et al., 1999], a tendance à lisser les contours de l'image reconstruite (puisque'elle est isotrope), engendrant ainsi des artefacts de flou.

Une autre forme d'a priori qui a été également utilisée en tomographie est celle du **bruit impulsif** afin d'obtenir des solutions contenant le minimum d'information (faible contraste) avec quelques valeurs aberrantes impulsives. Dans la littérature, plusieurs versions de cet a priori ont été proposées telle que la norme  $L_1$  [Kolehmainen et al., 2007] (éq. 2.22), la fonction d'entropie [Mohammad-Djafari et al., 1988] (éq. 2.23) et la distribution de Cauchy [Siltanen et al., 2003] (éq. 2.24).

$$P_\mu(\mu) \propto \exp(-\alpha \|\mu\|_1) \quad (2.22)$$

$$P_\mu(\mu) \propto \exp\left(\sum_k \mu_k \log\left(\frac{\mu_k}{\mu_0}\right)\right) \quad (2.23)$$

$$P_\mu(\mu) \propto \prod_k \frac{1}{1 + \alpha \mu_k^2} \quad (2.24)$$

Ces a priori ont la spécificité de régulariser uniquement chaque  $\mu_k$  ( $k \in [1, N]$ ) sans prendre en compte des valeurs voisines (pas de corrélation), et ils ne peuvent être efficaces que pour certains types d'image présentant une distribution plus au moins éparsée des intensités.

L'adoption d'un **modèle Markovien** dans le domaine du traitement d'image [Geman and Geman, 1984, Derin and Elliott, 1987, Hebert and Leahy, 1989, Green, 1990, Higdon et al., 1997, Leahy and Yan, 1991] a pu apporter des améliorations significatives dans les résultats de reconstruction tomographique [Ganan and McClure, 1985]. Le **modèle de Gibbs** (appliqué au champs aléatoire de Markov - *MRF* Markov Random Field) (éq. 2.25) a été largement utilisé comme a priori [Bouman and Sauer, 1993, Idier, 2001]. En effet, l'hypothèse markovienne se justifie bien (en se basant sur une analogie avec la physique statistique) dans la plupart des images constituées de plusieurs zones homogènes ou texturées pour lesquelles une connaissance locale de l'image suffit souvent à réaliser son interprétation partielle [Sigelle and Tupin, 1999a]. Ce modèle permet de relier la distribution globale à des attributs locaux de l'objet.

$$\begin{aligned} P_\mu(\mu) &= Z^{-1}(\beta) \exp[-\beta W(\mu)] \\ W(\mu) &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_{s \in N_j} \omega_{js} \varphi(\mu_j - \mu_s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec,  $W(\mu)$  est une fonction d'énergie du champs markovien  $\mu$ ,  $\beta$  est un paramètre positif déterminant la **force** de l'a priori,  $Z(\beta)$  est la fonction de partition appelée aussi constante de normalisation ( $\int_{-\infty}^{\infty} P_\mu(\mu) = 1 \Rightarrow Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\beta W(\mu)] d\mu$ ).

En pratique, il est quasiment impossible de calculer  $Z(\beta)$  à cause du très grand nombre de configurations possibles [Sigelle and Tupin, 1999b]. Dans la plupart des cas elle est supposée égale à 1.  $j$  est l'indice de pixel/voxel,  $\varphi$  appelé **potentiel** ou **fonction de potentiel**, détermine les propriétés d'interaction entre chaque paires de sites  $j$  et  $s$  se situant dans un voisinage  $N_j$ , et les  $\omega_{js}$  sont des facteurs de pondération qui dépendent du système de voisinage considéré (par exemple, en 2D, les sites voisins diagonaux sont pondérés par  $\omega_{js} = 1/\sqrt{2}$ , et les horizontaux ou verticaux sont pondérés par  $\omega_{js} = 1$  [Hamelin, 2009]).

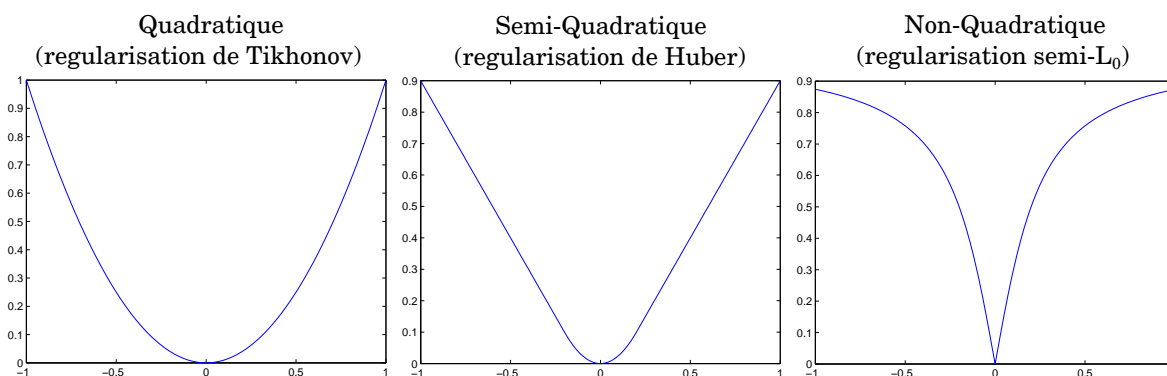
Une multitude de modèles différents existent (voir le tableau 2.1) au sein de la classe *MRF* utilisant différentes fonctions de potentiel  $\varphi$  (éq. 2.25). Chaque fonction de potentiel caractérise les interactions entre un groupe local de sites (pixels ou voxels) en contraignant les configurations qui sont le moins susceptibles de se produire [Bouman and Sauer, 1993]. Par exemple, une forme quadratique de cette différence tend à lisser la solution (par exemple, la régularisation de Tikhonov  $\varphi(t) = t^2$  [Groetsch, 1984, Deriche et al., 1995]) tandis qu'une forme linéaire favorise la discontinuité et la préservation de contour (la Norme  $L_1$ :  $\varphi(t) = |t|$ ). Ainsi, plusieurs travaux se sont orientés vers la détermination de fonctions de potentiel principalement non linéaires, assurant un lissage avec préservation du contours des solutions [Aykroyd and Zimeras, 1999, Green, 1990, Perona et al., 1994, Catté et al., 1992, Rudin et al., 1992, Bouman and Sauer, 1993, Charbonnier et al., 1997]. Selon la forme analytique des fonctions de potentiel, nous distinguons trois grandes catégories au sein de la famille des a priori *MRF* (Fig.2.4), à savoir celles adoptant une fonction de potentiel quadratique, ou semi-quadratique (telle que l'équation de Huber (éq. 2.26) ou non quadratique (telle que la semi norme  $L_0$  - éq. 2.27).

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } |t| \leq 1 \\ |t| - \frac{1}{2} & \text{si } |t| > 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

<i>Nom de la fonction de potentiel</i> $\varphi(t)$	<i>Expr. mathématique</i>
Quadratique tronquée [Geman and Yang, 1995] $\varphi_{QT}$	$\min(t^2, 1)$ (N.C.)
Geman et McClure [Geman and McClure, 1985] $\varphi_{GM}$	$\frac{t^2}{1+t^2}$ (N.C.)
Huber [Huber, 2011] $\varphi_H$	$\max(t^2, 2t - 1)$ (C.)
Gaussienne généralisée [Bouman and Sauer, 1993] $\varphi_{GG}$	$ t ^P, P \in [1, 2]$ (C.)
Green [Green, 1990] $\varphi_G$	$2 \log \cosh(t)$ (C.)
Lange $\varphi_{GM}$	$\rho^2 \left[ \frac{ t }{\rho} - \log \left( 1 + \frac{ t }{\rho} \right) \right]$ (N.C.)
German et Reynolds [Geman and Reynolds, 1992] $\varphi_{GR}$	$\frac{ t }{1+ t }$ (N.C.)
Hebert et Leahy [Hebert and Leahy, 1989] $\varphi_{HL}$	$\log(t^2 + 1)$ (N.C.)
Aubert (surfaces minimales) [Charbonnier et al., 1994] $\varphi_{SM}$	$\sqrt{1 + t^2} - 1$ (C.)
Perona et Malik [Perona and Malik, 1990] $\varphi_{PM}$	$0.5(\exp(-t^2) - 1)$ (N.C.)
$l_2l_1$ [Charbonnier et al., 1997] $\varphi_{L_1L_2}$	$\sqrt{t^2 + \rho^2} - \rho, \rho > 0$ (C.)

**Table 2.1:** Exemples de fonctions de potentiel utilisées en régularisation avec préservation de contour.

N.C : Non Convexe, C. : Convexe.



**Figure 2.4:** Différentes formes de fonctions de potentiel au sein de la famille  $MRF$ , de gauche à droite : quadratique (Tikhonov), semi-quadratique (Huber) et non quadratique (semi- $L_0$ ).

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{|t|}{\rho} \right) \quad (2.27)$$

avec,  $\rho$  est un paramètre positif qui contrôle la convergence de la semi-norme  $L_0$  vers la norme  $L_0 = |sgn(t)|$  ( $sgn$  représente la fonction signe).

Notons ici, que la plupart des a priori au sein de la famille  $MRF$  est souvent représentée sous forme de contrainte (a priori bas niveau), ce qui n'empêche pas l'adoption de modèles de haut niveau, telle que la version probabiliste de la fonction caractéristique dans le cas de l'existence d'une forme de référence [Cremers et al., 2008].

## Méthodes itératives d'optimisation

Dans cette section, nous allons commencer par introduire brièvement des notions de base nécessaires pour la conception et le choix d'un algorithme itératif d'optimisation



(pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter les références suivantes [Bierlaire, 2006, Pedregal, 2004, Wright and Nocedal, 1999]), puis, nous effectuerons une classification (non-exhaustive) des principaux algorithmes appliqués aux problèmes de la reconstruction tomographique.

La reconstruction tomographique se traduit souvent comme un problème d'optimisation (maximisation ou minimisation) (éq. 2.28) d'une fonction objectif  $f$  avec contraintes (appelée aussi fonction de coût ou critère de décision - modèles mathématiques définis dans la section précédente).

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \in D} (f(\mu)) \Leftrightarrow \mu^* = \arg \max_{\mu \in D} (-f(\mu)) \quad (2.28)$$

avec,  $D$  est le domaine des solutions admissibles (au maximum  $D = \mathbb{R}_+$  (contrainte de positivité)), et le symbole  $\Leftrightarrow$  signifie que les solutions sont les mêmes et que les valeurs optimales sont opposées (ainsi, dans ce qui va suivre, nous allons nous limiter à la détermination d'un minimum).

Optimiser ce problème avec contraintes revient à chercher un point de minimum (maximum)  $\mu^*$  de  $f$  dans le domaine des points admissibles  $D$ . Le minimum peut être **local** (ou **relatif**) sur un voisinage  $\nu_{\mu^*}$  (éq. 2.29) ou bien **global** (ou **absolu**) sur la totalité du domaine  $D$  ( $\forall \mu \in D$ ).

$$\forall \mu \in D \cap \nu_{\mu^*}, f(\mu) \geq f(\mu^*) \quad (2.29)$$

Dans les techniques de reconstruction itératives, les méthodes d'optimisation adoptées visent la détermination du minimum global à partir d'une estimation initiale de l'objet à construire. Cette solution est souvent déterminée en adoptant les deux principes fondamentaux de recherche, à savoir **l'exploration** permettant une localisation grossière de la solution du problème, et **l'exploitation** qui a pour rôle d'affiner (plus de précision) les résultats de l'exploration.

La performance d'un algorithme d'optimisation numérique se détermine en évaluant plusieurs critères tels que la sensibilité, la robustesse, la précision, la convergence, la complexité et l'efficacité.

Dans la littérature, un grand nombre d'algorithmes itératifs d'optimisation numérique ont été adoptés et créés pour résoudre le problème de la reconstruction en tomographie RX [Beister et al., 2012] (Ordered Subset Expectation-Maximization (OS-EM) [Manglos et al., 1995], Ordered Subset Convex algorithm (OSC) [Kamphuis and Beekman, 1998, Erdogan and Fessler, 1999, Beekman and Kamphuis, 2001], Iterative Coordinate Descent (ICD) [Sauer and Bouman, 1993, Bouman and Sauer, 1996], Ordered subset (OS) [Lee, 2000], Model-Based Iterative Reconstruction (MBIR) [Yu et al., 2011]).

Cette pluralité d'algorithmes est due essentiellement aux différentes considérations de conception et d'utilisation telles que le temps de calcul par itération, le taux de convergence, la parallélisation, le besoin de stockage, la facilité de mise en œuvre des programmes, etc. Ces exigences souvent contradictoires imposent de prévoir des compromis appropriés pour une application donnée [Fessler, 2006]. Plusieurs classifications peuvent exister selon que l'on change de critère de comparaison, dont nous avons choisi la plus pertinente en se basant sur le mode de recherche de l'optimum, à savoir les méthodes déterministes et celles stochastiques.

- **Méthodes stochastiques:** sont généralement des algorithmes à convergence globale, en revanche elles sont prohibitives en terme de temps de calcul, ceci impactant directement sur leur efficacité. C'est la raison principale de la rareté d'utilisation de telles méthodes en reconstruction tomographique. Néanmoins, nous pouvons citer quelques travaux adoptant les méthodes telles que celle du recuit simulé (inspirée d'un processus utilisé en métallurgie) dans le domaine du traitement d'image [Geman and Geman, 1984, Pellet et al., 1994].
- **Méthodes directes:** sont les plus utilisées en reconstruction puisqu'elles sont les plus rapides. Une grande partie de ces méthodes fait appel (directement et indirectement) aux **méthodes de descente** (de gradient [Avriel, 2012] et de **Newton** [Wright and Nocedal, 1999]), aux méthodes de **programmation linéaire** [Schrijver, 1998], **quadratique** [Wright and Nocedal, 1999] et **dynamique** [Bertsekas et al., 1995] et aux méthodes du **simplexe** [Nelder and Mead, 1965]). Dans le cas où la fonction objectif à minimiser est **non convexe** et admet donc plusieurs minima locaux, les méthodes d'optimisation directe de descente (**algorithmes à convergence locale**) peuvent converger vers un minimum **local** et fournir une estimation de la solution très éloignée de celle réelle (correspondant au minimum global). C'est la raison pour laquelle certains auteurs [Bouman and Sauer, 1993] plaident pour l'utilisation de fonctions convexes tout en considérant que les problèmes de reconstruction dans le cas inverse (non convexe) restent toujours **mal posés**. Cependant, d'autres auteurs ont essayé d'adapter les algorithmes d'optimisation directe pour les problèmes non convexes. Ils ont pu garantir des solutions proches des minima globaux en élaborant différentes stratégies, telles que les modes conditionnels itérés ICM [Besag, 1986], la non Convexité Graduelle (GNC) [Blake and Zisserman, 1987] et le recuit par champ moyen (RFA) [Geiger and Girosi, 1991]. De plus, dans certains cas, les fonctions de coût représentent des modèles numériques complexes à évaluer, pour lesquelles l'utilisation de méthodes d'optimisation directes reposant sur le calcul différentiel (par exemple, les méthodes de descente) s'avèrent impraticables, à cause de la non existence des dérivées premières et/ou secondes ou de la lenteur des calculs numériques (des formes analytiques très complexes). Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées afin de surmonter ces problèmes liés aux procédures d'optimisation [Bouman and Sauer, 1996, Fessler et al., 1997, Mumcuoglu et al., 1994, Sauer and Bouman, 1993, Sauer et al., 1995, Lange and Carson, 1984].

**NB :** Notons ici qu'il existe plusieurs manières de désigner (donner un nom) une méthode statistique de reconstruction. Cela dit, dans le plupart des cas, le nom d'une méthode de reconstruction est généralement choisi en associant le nom de la fonction objectif à minimiser à celui de la méthode d'optimisation adoptée (ML-EM, MAP-OSL, PL-SAGE, etc.) [Fessler, 2006].

Dans cette thèse, nous avons opté pour les méthodes directes d'optimisation (relativement rapides) et plus appropriées (par rapport aux méthodes stochastiques) aux problèmes de reconstruction 3D. Les données utilisées dans une reconstruction ( $A$ ,  $\mu$  et  $G$ ) sont très volumineuses, nécessitant ainsi un temps considérable pour pouvoir les gérer et les manipuler, ce qui justifie l'impraticabilité des méthodes stochastiques car prohibitives en

terme de temps de calcul.

### 2.3.3 Quelques méthodes itératives numériques d'optimisation

Étant donné que les méthodes itératives directes font souvent appel à la notion de **descente**, dans la section suivante nous introduisons le principe d'un algorithme de descente, tout en citant deux exemples largement utilisés dans le domaine du traitement d'image et que l'on peut appliquer pour la résolution de problèmes inverses mal posés (restauration, reconstruction), à savoir la méthode du descente de gradient et celle du gradient conjugué [Hestenes and Stiefel, 1952]. Ayant connaissance que la performance de ces algorithmes à convergence locale est très liée à la forme de fonctions de coût à optimiser (la forme de l'expression de MAP éq. 2.15), nous introduirons aussi le mécanisme de deux techniques permettant de résoudre les problèmes liés à la complexité analytique de la fonction objectif (grâce aux algorithmes d'Espérance-Maximisation EM [Dempster et al., 1977]) et à sa non convexité (grâce à l'approche Non Convexité Graduelle GNC [Blake and Zisserman, 1987]).

#### Méthodes de descente

Une méthode de descente représente une classe d'algorithmes itératifs d'optimisation (directe) fondés sur la notion de direction de descente. Une direction de descente  $d$  d'une fonction  $f$  à partir d'un point  $\mu$  de  $\mathbb{R}^N$  est un vecteur (de  $\mathbb{R}^N$ ) vérifiant la condition suivante [Rondepierre and Weiss, 2013]:  $\exists s > 0$  (réel positif), tel que  $\forall t \in ]0, s]$ ,  $f(\mu + td) < f(\mu)$ . Dans le cas où  $f$  est différentiable, la direction  $d$  vérifie l'inégalité suivante:

$$\nabla f(\mu)^T d < 0 \quad (2.30)$$

Ainsi, un algorithme de descente peut être défini comme étant une suite d'itérés  $(\mu^k)$  vérifiant la décroissance graduelle de  $f$  dans une direction de descente  $d^k$  (éq. 2.31).

$$\begin{cases} \mu^{k+1} = \mu^k + t^k d^k \\ f(\mu^{k+1}) \leq f(\mu^k) \end{cases} \quad (2.31)$$

où, le vecteur  $d^k$  et le scalaire  $t^k > 0$  représentent respectivement la direction de descente et le pas effectué dans cette direction.

Par conséquent, un algorithme de descente est complètement déterminé par le choix du **pas**  $t$  et de la **direction**  $d$  à chaque itération :

- **Pas de descente:** Étant donnée une direction de descente  $d^k$  pour une itération  $k$ , le pas  $t^k$  ( $t^k > 0$ ) dans cette direction doit être défini de sorte qu'il vérifie la condition de descente  $f(\mu^k + t^k d^k) < f(\mu^k)$ . Par conséquent, un choix optimal de  $t_{opt}$  (éq. 2.32) est défini comme étant le pas minimisant au maximum la fonction  $f$  dans la direction  $d^k$  (correspondant aux algorithmes de descente à pas optimal):

$$t_{opt}^k = \arg \min_{t>0} f(\mu^k + td^k) \quad (2.32)$$

Cependant, le calcul exact du pas optimal (résolution analytique ou en adoptant une méthode itérative de recherche linéaire) n'est pas toujours facile à mettre en œuvre

et peut être très couteux du point de vue du temps de calcul. Ce calcul de  $t_{opt}^k$  est souvent remplacé par une détermination approximative d'un pas **acceptable** (fixe ou variable par itération) permettant de faire décroître **suffisamment**  $f$ . Ce pas non optimal ne doit pas être trop grand, provoquant la divergence de l'algorithme (puisque la direction de descente est définie localement dans un voisinage de l'itéré courant), ou pas trop petit, augmentant significativement le nombre d'itérations [Rondepierre and Weiss, 2013].

- **Direction de descente:** Le choix d'une direction de descente est un facteur très important permettant de définir la vitesse de convergence d'un algorithme de descente. Dans la littérature, nous distinguons trois grandes familles d'algorithmes selon la stratégie de calcul de cette direction : **les algorithmes de relaxation** pour laquelle la descente est faite de façon cyclique le long de chacun des axes de coordonnées  $(\mu_i)_{i \in [1..N]}$  ( $N$  est le nombre des  $\mu_i$  constituant le vecteur  $\mu$ ), **les algorithmes de Gradient** pour lesquels les directions  $d^k$  sont calculées en fonction du gradient  $\nabla f(\mu^k)$  (la stratégie de Cauchy), et **les algorithmes de Newton** pour lesquels les  $d^k$  sont fonction des gradients et de la matrice hessienne  $Hf(\mu^k)$ . Il faut bien **noter** que toutes les directions des méthodes de descente **s'annulent** pour tous les points **stationnaires** (minima et points d'inflexion) et aucun de ces algorithmes ne pourra progresser.

Dans la partie suivante, nous allons donner le principe des algorithmes de descente souvent utilisés en reconstruction tomographique RX, à savoir les algorithmes de descente de gradient et de gradient conjugué [Avriel, 2012].

**Algorithmes de descente de gradient:** Dans le cas d'une fonction différentiable, un choix évident consiste à prendre  $d = -\nabla f(\mu)$  vérifiant la condition dans éq. 2.30 ( $(-\nabla f(\mu)\nabla f(\mu)) = -\|\nabla f(\mu)\|^2 < 0$ ). Cette direction  $d^k$  (éq. 2.33) est appelée la plus forte descente de  $f$  au point  $\mu$ . Selon le choix du pas de la descente  $t^k$ , nous pouvons distinguer les méthodes de gradient à pas fixe et à pas variable non optimal, et les méthodes de plus profonde descente (éq. 2.32).

$$d^k = -\nabla f(\mu^k) \quad (2.33)$$

**Algorithmes de gradient conjugué:** Cette méthode [Hestenes and Stiefel, 1952] est une variante de la méthode de gradient avec un pas optimal. Initialement, elle a été introduite pour résoudre un système d'équations linéaires pour lequel la matrice  $A$  (du système linéaire) est symétrique ( $A^T = A$ ) et définie positivement ( $\forall \mu \in \mathbb{R}^N, \mu^T A \mu > 0$ ). La résolution de ce problème linéaire est équivalente à la minimisation de la forme quadratique définie positive (QDP):

$$f(\mu) = \frac{1}{2}\mu^T A \mu - G^T \mu \Rightarrow \nabla f(\mu) = A\mu - G \quad (2.34)$$

**NB :** un problème QDP est strictement convexe. Il possède un unique point stationnaire, c'est le minimum global :  $\nabla f(\mu^*) = A\mu^* - G = 0 \Leftrightarrow A\mu^* = G$ .

Le principe de base de la méthode de gradient conjugué est d'utiliser des directions  $d^{(k)}$  A-conjugués (éq. 2.36) avec des pas optimaux (éq. 2.32).

L'intérêt d'utiliser des directions A-conjuguées vient du fait qu'elles construisent une famille de vecteurs linéairement indépendants, dont le nombre maximal ne dépasse pas l'ordre  $N$  de la matrice  $A$ . Dans le cas de l'utilisation de  $N$  directions A-conjuguées, l'algorithme de gradient parcourt tout l'espace  $\mathbb{R}^N$  dans toutes les directions possibles, ainsi, la convergence est assurée pour  $N$  itérations au maximum.

$d^1, \dots, d^k$  est un ensemble de vecteurs non nuls, A-conjugués, alors:

$$\forall i \neq j, d^{iT} A d^j = \langle d^i, d^j \rangle_A = 0 \quad (2.35)$$

L'idée de gradient conjugué est de construire d'une manière itérative les  $N$  directions A-conjuguées à partir des gradients calculés à chaque itération par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, pour lequel la famille des  $N$  directions  $d^{(k)}$  peut être calculée en exploitant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} d^0 = -\nabla f(\mu^0) \\ d^k = -\nabla f(\mu^k) + \frac{\|\nabla f(\mu^k)\|^2}{\|\nabla f(\mu^{k-1})\|^2} d^{k-1} \end{cases} \quad (2.36)$$

Le pas optimal (éq. 2.37) de la méthode GC appliquée aux problèmes QDP se calcule facilement en développant l'équation 2.32.

$$t_{opt}^k = -\frac{d^{kT} \nabla f(\mu^k)}{d^{kT} A d^k} \quad (2.37)$$

**NB :** Notons ici que l'on peut généraliser l'algorithme de gradient conjugué (tableau .2.2) quand la matrice du système  $A$  n'est pas carrée en effectuant un changement d'échelle (éq. 2.38), et quand la fonction objectif  $f$  n'est pas quadratique en effectuant un développement de Taylor de deuxième ordre (à condition que  $f$  soit différentiable) (éq. 2.39).

$$A\mu = G \Leftrightarrow (A^T A) \mu = (A^T G) \quad (2.38)$$

avec,  $A^T A$  est une matrice symétrique (elle est positive dans le cas de l'utilisation des matrices de projection pour lesquelles les coefficients  $a_{i,j} \geq 0$ ).

$$f(\mu + h) = f(\mu) + \nabla f(\mu)^T h + \frac{1}{2} H f(\mu) h + \|h\|^2 \varepsilon(h); \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (2.39)$$

L'algorithme de gradient conjugué est l'une des techniques d'optimisation les plus utilisées (directement ou indirectement) dans les problèmes mal posés [Hanke, 1995] et plus spécialement en reconstruction tomographique [Lalush and Tsui, 1995, Mumcuoglu et al., 1994, Servieres et al., 2005, Kawata and Nalcioglu, 1985], grâce à la facilité de sa mise en œuvre et sa détermination automatique du pas optimal de descente. Cependant comme toutes les méthodes de descente, la reconstruction stagne pour le premier optimum local rencontré dans la procédure de descente.

### **NB : Méthode de projection**

En reconstruction tomographique, une contrainte de non négativité ( $\mu \geq 0$ ) sur les données reconstruites est toujours imposée. Afin d'adapter les méthodes citées précédemment, introduites initialement pour des problèmes d'optimisation sans contrainte, nous pouvons

**Étape 1 :** définir  $\mu^0$  (solution initiale) et un/des critères d'arrêt.

$$d^0 = -\nabla f(\mu_0); k = 0.$$

**Étape 2 :** Tant que le/les critères d'arrêt ne sont pas vérifiés, répéter 2-A, 2-B et 2C.

**2-A :**  $t^k = -\frac{d^{kT} \nabla f(\mu^k)}{d^{kT} A d^k}$

**2-B :**  $\mu^{k+1} = \mu^k + t^k d^k$

**2-C :**  $d^{k+1} = -\nabla f(\mu^{k+1}) + \frac{\|\nabla f(\mu^{k+1})\|^2}{\|\nabla f(\mu^k)\|^2} d^k$

**Étape 3 :** une fois sortie de la boucle, renvoyer la dernière valeur calculée  $\mu^k$ .

**Table 2.2:** Schéma général d'un algorithme de gradient conjugué.

appliquer la procédure de projection sur des contraintes admissibles  $D$ . Dans le cas d'utilisation d'une contrainte non fonctionnelle convexe  $D$ , la projection d'une solution  $\mu^{(k)}$  (à chaque itération) sur  $D$  est obtenue comme étant la solution du problème suivant:

$$\mu_{fin}^{(k)} = \arg \min_{\lambda \in D} \frac{1}{2} \|\mu^{(k)} - \lambda\|_2^2 \quad (2.40)$$

Le calcul de projections sur le domaine des solutions admissibles représente aussi un problème d'optimisation avec contrainte et peut parfois être aussi difficile que le problème initial. Néanmoins, dans le cas d'une contrainte de non négativité ( $D = \mathbb{R}_+^N$ ), la solution devient triviale (éq. 2.41) étant donnée que la norme Euclidienne au carrée  $\|\cdot\|_2^2$  est toujours supérieure ou égale à zéro.

$$\begin{aligned} \mu_{fin}^k &= \arg \min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{2} \|\mu^k - \lambda\|_2^2 \\ &= \arg \min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\mu_j^k - \lambda_j)^2 \\ &= \left( \begin{cases} \lambda_j = \mu_j^k, & Si \quad \mu_j^k \geq 0 \\ \lambda_j = 0, & Si \quad \mu_j^k < 0 \end{cases} \right)_{j \in [1, \dots, N]} \\ &= \max(\mu_{fin}^k, 0) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ainsi, la contrainte de non négativité se traduit par une forme simple et rapide à calculer (pour la mise en œuvre et le temps de calcul), pour laquelle toutes les valeurs négatives de  $\mu$  à chaque itération  $k$  sont mises à zéro.

### Algorithme Espérance-Maximisation EM

L'algorithme Espérance-Maximisation (EM-Expectation-Maximization) a été introduit initialement [Dempster et al., 1977] pour effectuer un calcul itératif des estimateurs de vraisemblance maximale (MLE maximum-likelihood estimation) appliqués aux problèmes statistiques avec des données manquantes ou incomplètes ( $\mathbf{G}$ ) telles qu'en reconstruction. L'expression de **données incomplètes** représentent une notion générale regroupant une

variété de modèles statistiques tels que les données tronquées, les effets aléatoires ou un mélange de plusieurs distributions stochastiques.

Souvent, la fonction de vraisemblance de ces modèles possède une forme analytique complexe difficile à maximiser (ou à minimiser). En complétant les données manquantes ( $\mathbf{Z}$ ) (en formant les données complètes  $\mathbf{X}$ ), la forme de la vraisemblance associée aux données complètes se simplifie et facilite ainsi sa procédure d'optimisation.

Partant de ce constat, l'algorithme EM est développé de telle sorte qu'il résout le problème des données incomplètes en formulant celui des données complètes associées, afin de pouvoir exploiter la simplicité de calcul du maximum de vraisemblance pour estimer indirectement celle du problème original [Ng et al., 2012].

Donc, pour des données originales incomplètes  $G$ , l'approche EM aborde le problème de maximum de vraisemblance incomplet (maximiser  $\log(P(G|\mu))$ ) indirectement, en procédant de manière **itérative** la maximisation ML complet (maximiser  $\log(P(X|\mu))$ ). Étant donné que les données complètes  $X$  sont non mesurables, le calcul de sa vraisemblance est remplacé par l'évaluation de son **Espérance conditionnelle** sachant  $G$  ( $E(\log(P(X|\mu)|G))$ ), afin de la **Maximiser** (l'espérance conditionnelle de  $\log(P(X|\mu))$  sachant  $G$  est une fonction de  $G$  donnant la meilleure approximation de  $\log(P(X|\mu))$  quand  $G$  est connu). Cette procédure se fait d'une manière itérative pour laquelle chaque itération  $k$  est composée de deux étapes :

- **Étape E - Espérance:** nous calculons l'espérance conditionnelle de la vraisemblance des données complètes  $Q(\mu, \mu^{(k-1)})$ , en prenant en compte les données mesurées (non complètes)  $G$  et les dernières valeurs estimées de  $\mu$  (de l'itération précédente  $k-1$ ):

$$Q(\mu, \mu^{k-1}) = E(\log P(X|\mu^{k-1})|G) \quad (2.42)$$

- **Étape M - Maximisation:** nous calculons une nouvelle approximation de  $\mu$  ( $\mu^k$ ) maximisant l'espérance conditionnelle calculée à l'étape précédente:

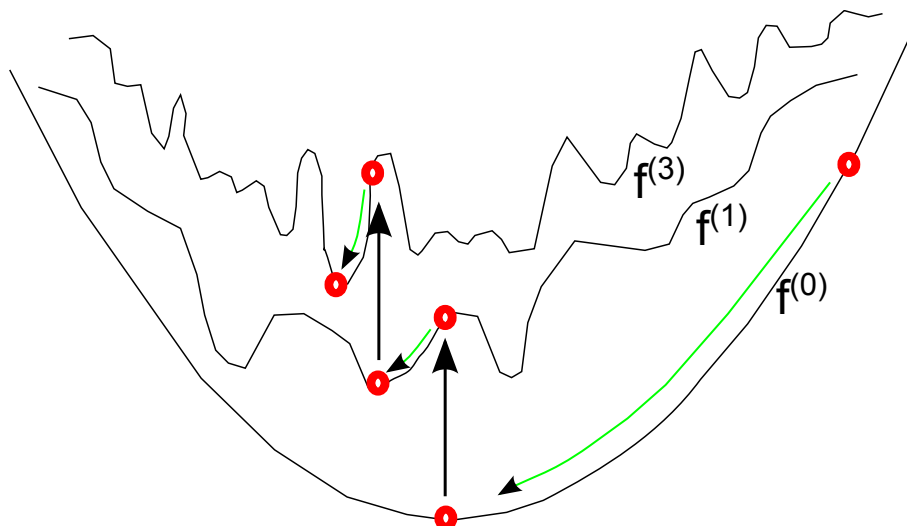
$$\mu^k = \arg \max Q(\mu, \mu^{k-1}) \quad (2.43)$$

L'exemple le plus connu de cette application dans le domaine de la tomographie, est l'algorithme EM-ML introduit par Lange et al. [Lange and Carson, 1984, Shepp and Vardi, 1982] appliqué à l'imagerie de transmission et d'émission, dans le cas d'une hypothèse Poissonienne de bruit. D'autres auteurs ont pu adapté cette méthode dans les reconstructions MAP et PML [Levitan and Herman, 1987, Fessler and Hero, 1995].

La méthode EM a pu montrer son efficacité dans plusieurs problèmes complexes de reconstruction. Cependant, elle peut se montrer très lente. En effet, le choix d'une bonne initialisation (la plus proche de l'optimum) peut jouer un rôle prépondérant dans la réduction du temps de calcul.

### Non Convexité Graduelle (GNC)

La GNC (Graduated Non Convexity) a été introduite initialement dans les problèmes de débruitage et de segmentation d'image par Blake et Zisserman [Blake and Zisserman, 1987] avant d'être généralisée pour des problèmes linéaires inverses [Nikolova et al., 1994]. C'est un algorithme déterministe d'optimisation du critère non convexe du MAP (plusieurs



**Figure 2.5:** Principe de la méthode GNC [Blake and Zisserman, 1987].

minima locaux).

Le principe de la méthode GNC (Fig. 2.5) consiste à réduire le calcul d'un minimum global de  $f$  par une suite d'optimisations locales de fonctions continûment différentiables  $f^{(i)}$  convergeant vers  $f$  quand  $i$  tend vers l'infini (en adoptant une simple descente de gradient). Ainsi, l'optimisation est divisée en plusieurs étapes  $i$  pour lesquelles la non convexité du critère à minimiser est introduite graduellement, tout en partant d'une approximation convexe  $f^{(0)}$  de  $f$ . Pour chaque étape  $i$ , le minimum local de l'étape précédente  $i - 1$  est utilisé comme initialisation. Souvent, la construction d'une telle suite est faite en introduisant un paramètre de relaxation  $\tilde{\rho}$  paramétrant les fonctions  $f^{(i)}$  de telle façon qu'elle converge vers  $f$  quand  $\tilde{\rho}$  tend vers zéro, tout en assurant une introduction graduelle de la non convexité de critère.

Il faut noter que la convergence théorique de cette méthode n'est pas prouvée, cependant, la probabilité d'atteindre le minimum global est forte en faisant varier la suite de fonctions  $f^{(i)}$  de façon infime entre chaque deux étapes successives. Cette approche représente une solution efficace pour surmonter les problèmes liés à la non convexité du critère du MAP, cependant, la construction de suite  $f^{(i)}$  demeure l'étape la plus difficile.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un tour d'horizon des procédures nécessaires pour résoudre le problème inverse mal posés, et plus spécialement, la reconstruction RX conique des réseaux artériels coronaire.

Après avoir établi un diagnostic des défis que l'on doit surmonter, lors d'une reconstruction 3D des artères coronaires (section 2.1), nous avons effectué un état de l'art des différentes méthodes de reconstruction appliquées aux vaisseaux coronariens (section 2.2). Nous avons clôturé cette première partie avec l'établissement de comparaisons entre les méthodes de reconstruction géométriques [Zifan et al., 2008, Sarry and Boire, 2001] et celles tomographiques [Hansis et al., 2008a, Bousse et al., 2009], et entre les procédures de reconstruction avec compensation du mouvement [Zheng et al., 2010, Blondel et al., 2006]



et celles sélectionnant uniquement les angiogrammes correspondant à la même phase cardiaque [Hu et al., 2012, Vembar et al., 2003]. En analysant les avantages et les inconvénients des différentes techniques comparées, nous avons conclu que l'efficacité d'une méthode de reconstruction n'a pas de sens sans avoir défini un compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul, et la complexité des méthodes et les objectifs visés. Ainsi, dans l'espérance d'élaborer des méthodes de reconstruction rapides, simples et relativement précises, nous avons opté pour les méthodes itératives statistiques à partir des angiogrammes synchronisés (même phase cardiaque).

Ensuite, nous avons entamé une deuxième partie pour discuter les composantes principales nécessaires pour effectuer une reconstruction statistique itérative (section. 2.3). En suivant une certaine chronologie, nous avons abordé les différentes étapes qui ont permis l'adoption de formalisme statistique bayésien dans la reconstruction tomographique RX [Dempster et al., 1977, Shepp and Vardi, 1982, Lewitt and Muehlechner, 1986, Fessler and Hero, 1993, Fessler and Hero, 1995, Fessler et al., 1997, Simonoff, 1998, Bouman and Sauer, 1993, Fessler et al., 1997]. Plusieurs auteurs ont prouvé le rôle majeur de l'information a priori dans l'amélioration des reconstructions, effectuées à partir d'un nombre très réduit de mesures (par exemple, les angiogrammes correspondant à la même phase cardiaque) [Smith et al., 1978, Griinbaum, 1982, Kazantsev, 1991, Siltanen et al., 2003]. Ainsi, nous avons effectué une classification non exhaustive de différentes formes d'a priori proposée dans la littérature [Tikhonov, 1963, Hanson and Weeksung, 1983, Cinquin, 1987, Rossi et al., 1989, Mohammad-Djafari et al., 1988]. Le modèle a priori de Gibbs a apporté les améliorations les plus significatives sur les reconstructions statistiques [Geman and Geman, 1984, Derin and Elliott, 1987, Hebert and Leahy, 1989, Green, 1990, Higdon et al., 1997, Leahy and Yan, 1991]. Il se base sur une interprétation locale de l'objet à reconstruire (éq. 2.25), supposé constitué de plusieurs zones homogènes ou texturées. En imposant des contraintes sur les variations locales de l'objet à reconstruire, à travers les différentes formes de fonctions de potentiel (Tab. 2.4), il arrive à régulariser le problème mal posé.

Puisque nous ne possédons pas de connaissances précises sur le réseau coronaire telle qu'une forme de référence (a priori haut niveau), nous avons opté pour une reconstruction statistique MAP avec un a priori de Gibbs, apte à incorporer simultanément de l'information a priori sous forme de simples contraintes et celle de bruit d'acquisition.

Enfin, dans la dernière partie, nous avons abordé les algorithmes itératifs d'optimisation les plus appropriés à notre reconstruction statistique. Nous avons préféré les méthodes directes [Bouman and Sauer, 1996, Fessler et al., 1997, Mumcuoglu et al., 1994, Sauer and Bouman, 1993] à celles stochastiques [Geman and Geman, 1984, Pellot et al., 1994], puisqu'elles sont plus rapides et plus adaptées aux reconstructions 3D (données très volumineuses -  $A$ ,  $\mu$  et  $G$ ).

Puisque les méthodes directes se basent en grande partie sur la notion de descente, nous avons présenté le principe de base d'une méthode de descente, en citant deux exemples très utilisés dans les reconstructions tomographiques, c'est-à-dire, la descente de gradient et le gradient conjugué [Hestenes and Stiefel, 1952]. La performance de ces algorithmes est dépendante de la forme de la fonction de coût à minimiser (MAP), ainsi, nous avons évoqué deux procédures numériques permettant de surmonter les problèmes liés à la complexité analytique de la fonction objectif (Espérance-

Maximisation [Dempster et al., 1977]) et à sa non convexité (Non Convexité Graduelle GNC [Nikolova et al., 1994]).

Avant de rentrer dans les détails techniques permettant la mise en œuvre des reconstructions itératives MAP avec un a priori de Gibbs (chapitre 4), nous avons décidé de dédier le prochain chapitre aux différentes méthodes de modélisation directe de l'acquisition conique RX ; une étape très importante dans la définition du problème inverse (reconstruction).



## 3 Opérateurs de projection et de rétroprojection

Dans le chapitre précédent, nous avons pu montrer l'importance d'une modélisation de la procédure de projection (la matrice  $A$  - éq. 2.3) dans les différentes techniques itératives de reconstruction tomographique (algébriques et statistiques). Elle intervient pratiquement dans toutes les expressions de modèles inverses (ML éq. 2.10, IPML éq. 2.13, MAP éq. 2.15, etc.). Ainsi, elle joue un rôle primordial dans la précision des calculs. De plus, dans une reconstruction statistique, les différents types de bruit que l'on peut adopter (Gaussien ou Poissonien) n'ont de sens que sous l'hypothèse d'un calcul précis et réaliste des opérateurs de projection, afin de pouvoir négliger les erreurs de modélisation devant celle introduite par le bruit d'acquisition.

Dans notre problématique, nous allons nous intéresser aux méthodes de modélisation des opérateurs de projection, les plus appropriées à la géométrie conique de projection [Long, 2011, Galigekere et al., 2003, Birkfellner et al., 2005, Basu and De Man, 2006, Riddell and Troussel, 2006, Ziegler et al., 2006], sous l'hypothèse d'un rayonnement monochromatique et d'un effet négligeable de diffusion. Cette géométrie se caractérise par des faisceaux  $X$  divergents (Fig. 3.1), induisant un facteur d'agrandissement des projections (inversement proportionnel à la distance séparant l'objet imagé à la source émettrice  $X$ ). C'est la raison pour laquelle plusieurs techniques efficaces de calcul dédiées à la géométrie parallèle ne peuvent pas être adoptées [Boccacci et al., 1999, Schretter, 2006, Scheins et al., 2006, Hong et al., 2007].

En outre, nous nous situons dans le cas d'une tomographie statique, pour laquelle tout le système est supposé figé pendant un laps de temps donné, c'est-à-dire les positions spatiales de la source, la grille détectrice  $RX$  et l'objet projeté sont fixes (une invariabilité spatiotemporelle). Dans le cas d'une tomographie dynamique, les calculs se compliquent en intégrant une dimension supplémentaire pour représenter les évolutions temporelles.

Dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord par proposer un état de l'art des différentes méthodes de calcul des opérateurs de projection et de rétroprojection, puis, nous expliquons en détail les méthodes de calcul les plus utilisées en géométrie 3D, à savoir Pixel-Driven [Peters, 1981], Ray-Driven [Joseph, 1982], Distance-Driven [Man and Basu, 2004], et les Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze [Long et al., 2009]. Enfin, nous clôturons ce chapitre en introduisant une nouvelle approche simplifiée de la Distance-Driven [Oukili et al., 2013].

### 3.1 État de l'art

La modélisation directe et/ou inverse du processus d'acquisition reste une étape primordiale dans plusieurs applications d'imagerie médicale, telles que les procédures de reconstruction, la correction d'artefacts et la simulation numérique [Man and Basu, 2004]. Le modèle direct, connu sous le nom d'**opérateur de projection** (ou encore le rendu

volumique dans certains cas), permet d'estimer des profils de projection à partir d'un objet donné (2D ou 3D) [De Man et al., 1999]. Il fait appel à des considérations géométriques et physiques permettant d'établir une relation entre l'espace des objets et celui des données de mesure.

L'opérateur de projection peut intervenir dans de nombreuses applications de traitement d'image telles que la simulation de radiographies d'un patient à partir d'une image TDM [Sherouse et al., 1990], le recalage entre volume 3D et des images 2D [Weese et al., 1999], la génération d'un système d'équations linéaires visant à être résolu par une méthode de reconstruction discrète [Gilbert, 1972], la simulation des effets des rayonnements polychromatiques dans les acquisitions CT-RX [De Man et al., 2001, De Man et al., 1999] et les méthodes itératives de correction cherchant à réduire les artefacts dus au durcissement des faisceaux RX [Hsieh et al., 2000].

L'**opérateur de rétroprojection** est défini comme étant le modèle adjoint (transposé) de celui de projection et permet de répartir et de propager les données mesurées au niveau des capteurs dans le domaine de la reconstruction. C'est l'opérateur de base dans les méthodes analytiques de reconstruction, pour lesquelles on cherche à inverser la transformée de Radon adaptée aux différentes géométries d'acquisition (parallèle/éventail, 2D/3D) [Kak and Slaney, 1988].

Avec l'apparition de la tomographie numérique, ces deux opérateurs peuvent être représentés sous des formes matricielles (matrice  $A$  dans l'éq. 2.3). La détermination de ces deux matrices (de projection et de rétroprojection) se montre très importante et peut considérablement influencer les résultats des méthodes de reconstruction itératives [Gordon, 1974, Dempster et al., 1977, Elbakri and Fessler, 2002], dans lesquelles chaque itération fait appel à ces deux opérateurs afin d'approximer progressivement l'optimum d'une fonction objectif.

En imagerie RX, les valeurs mesurées sont proportionnelles aux absorptions (atténuations) des faisceaux RX traversant les différents tissus imagés (loi de Beer-Lambert éq. 2.1). La valeur interceptée en un détecteur élémentaire donné peut très bien s'interpréter comme étant l'intégrale des coefficients d'atténuation se situant le long de la droite qui relie la source RX à ce point (voir la section 2.3.1). Cependant, dans un cadre numérique de traitement des données (le cas de la tomographie numérique), l'objet d'intérêt est représenté sous une forme discrète en plusieurs échantillons régulièrement espacés (une discrétisation des coefficients d'atténuation dans chaque direction de l'espace). Le calcul intégral est approximé par une simple sommation pondérée, introduisant ainsi des erreurs d'approximation. Par conséquent, le choix d'une méthode de discrétisation plus représentative de l'information contenue (des tissus) s'avère une étape importante, permettant de réduire au maximum ces erreurs (d'approximation) et d'obtenir une modélisation réaliste.

Cette discrétisation est basée sur une décomposition de l'objet d'intérêt sur une base discrète de fonctions invariantes par translation régulièrement disposée sur la grille de discrétisation, nommées fonctions atomiques de la base (éq. 3.26). En s'inspirant des travaux de la théorie de l'échantillonnage [Momey, 2013, Shannon, 1949, Blu and Unser, 1999, Thévenaz et al., 2000a, Thévenaz et al., 2000b], plusieurs articles se sont intéressés au choix de ces fonctions atomiques de la base et son influence sur le calcul des projections et les résultats de la reconstruction. Nous pouvons citer les fonctions de base sphériques (les éléments de volume à symétrie sphérique connus sous le nom de **blobs**) telles que **Kaiser-Bessel généralisées** [Lewitt, 1992, Zhuang et al., 1994, Lewitt, 1990], fonctions

de base **tri-linéaires** [Kohler et al., 2000], les **pixels naturels** [Hsieh et al., 1996] et les **B-splines** [Momey, 2013].

Tous ces travaux ont essayé d'établir un certain compromis entre les propriétés souhaitables des fonctions atomiques de base. Ils ont visé une modélisation précise de l'objet continu afin de préserver les transitions brusques (frontières) des tissus, une fonction atomique de base à support compact, séparable suivant les directions de l'espace et à symétrie sphérique afin de réduire au maximum le coût calculatoire et l'espace mémoire (des matrices creuses), et une représentation robuste aux artefacts générés par les différentes transformations géométriques. Pour plus de détail, le lecteur est invité à lire le chapitre *Modèle numérique de projection optimisé* du rapport de thèse de Fabien Momey [Momey, 2013]. Il a effectué une étude comparative (voir Tableau 3.1) des trois principales fonctions atomiques de base, à savoir les indicatrices de voxel (éq. 3.1) [Man and Basu, 2004, Long et al., 2009], les blobs (éq. 3.2) [Ziegler et al., 2006, Isola et al., 2008] et les B-splines (éq. 3.3) [Horbelt et al., 2002, Momey, 2013].

$$\begin{aligned}
 b_{\Delta}(\vec{x}) &= \Pi(x_1) \times \Pi(x_2) \times \Pi(x_3) \\
 \vec{x} &= (x_1, x_2, x_3) \\
 \Pi(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \Delta/2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \Delta/2 \\ 0 & \text{si } |x| > \Delta/2 \end{cases} \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

avec,  $b_{\Delta}$  est l'*indicatrice de voxel*, elle représente le produit de trois fonctions portes dans les trois directions de la grille cartésienne (Fig. 3.1),  $\Delta$  est le pas de discrétisation, et  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  représente le centre de la fonction de base.

$$b_{\Delta=1}^{m,a,\alpha}(r) = \begin{cases} \frac{1}{I_m(\alpha)} \left[ \sqrt{1 - (r/a)^2} \right]^m I_m \left( \alpha \sqrt{1 - (r/a)^2} \right) & \text{si } |r| < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec,  $b_{\Delta=1}^{m,a,\alpha}(r)$  une fonction correspond aux éléments de volume à symétrie sphérique communément appelé **blobs**,  $r$  est la distance au centre du blob,  $a$  et  $\alpha$  deux paramètres contrôlant respectivement le support de la fonction et sa forme, et  $I_m$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $m$  (tout est normalisé par rapport au pas de discrétisation ( $\Delta = 1$ )).

$$b_{\Delta}^d(x) = \sum_{k=0}^{d+1} (-1)^k \binom{d+1}{k} \left( \frac{d+1}{2} + \frac{x}{\Delta} - k \right)_+^d \quad (3.3)$$

avec,  $b_{\Delta}^d$  représente une fonction **B-Spline** monodirectionnelle (fonction atomique 1D) de degré  $d$  et  $(x)_+^d = (\max(0, x))^d$ .

D'après cette étude [Momey, 2013], les blobs semblent être les fonctions atomiques de base permettant la meilleure précision. Néanmoins, ils présentent les inconvénients suivants :

Indicatrice de voxel	Blobs	B-Splines
Séparable par rapport aux axes $OX$ , $OY$ et $OZ$ (Fig. 3.1).	Non séparables sur la grille cartésienne.	Séparables sur la grille cartésienne.
Pas de symétrie sphérique. (pas d'isotropie)	Symétrie sphérique. (isotropie)	Quasi-symétrie sphérique pour un degré de B-Splines élevé (quasi-isotropie).
Support compact en fonction du pas d'échantillonnage.	Support compact en fonction du pas d'échantillonnage.	Support étendu en fonction du degré de B-Splines.
Base relativement grossière pour représenter le signal continu.	Base relativement précise pour représenter le signal continu.	Base relativement précise pour représenter le signal continu, conditionné par l'adoption d'un degré assez élevé de B-Splines.
Expression mathématique simple et facile à manipuler numériquement.	Expression mathématique complexe et difficile à manipuler numériquement.	Expression mathématique relativement simple et facile à manipuler numériquement.

**Table 3.1:** Tableau récapitulatif comparant les principales performances de trois fonctions atomiques de base : Indicatrices de voxel, Blobs et B-Splines [Momey, 2013].

(i) être difficilement paramétrables et manipulables numériquement (éq. 3.2) et (ii) être coûteux en temps de calculs. Les B-Splines pourraient constituer le meilleur compromis précision/temps de calcul. En revanche, cette fonction atomique de base a très peu été utilisée dans la littérature des opérateurs de projection et nécessiterait donc d'être d'avantage étudiée. Dans notre thèse, nous avons opté pour la fonction atomique de base la plus utilisée dans la littérature : l'indicatrice de voxel. Elle présente entre autre l'avantage d'une expression mathématique facile à manipuler numériquement et un temps de calcul relativement court, qui est donc plus adapté à une reconstruction 3D. De plus, même si elle constitue une base de représentation grossière du signal continu, sa précision peut être améliorée par un choix approprié du pas de discrétisation (éq. 3.1). Ainsi, dans tout le reste de ce chapitre, nous n'évoquons pas ces bases (blobs et B-Splines) pour nous concentrer uniquement sur l'indicatrice de voxels.

Historiquement, les premières modélisations de projection se sont focalisées sur l'estimation des intégrales de quelques **lignes représentatives**, sans trop prendre en compte les aspects de discrétisation (en tous cas, pas explicitement) évoqués dans la partie précédente. L'objet 2D/3D et le détecteur RX 1D/2D sont représentés avec des valeurs ponctuelles, disposées régulièrement sur des grilles d'échantillonnage. Nous pouvons les classer schématiquement en deux catégories : **Pixel/Voxel-Driven** (lancer de pixels/voxels) et **Ray-Driven** (lancer de rayons).

Les approches Pixel/Voxel Driven ont été introduites initialement dans le cadre d'une reconstruction FBP (rétroprojection filtrée) [Herman, 1979, Peters, 1981]. Les lignes représentatives sont définies comme étant celles reliant la source RX avec les échantillons ponctuels de l'objet imagé. La valeur interceptée au niveau de l'intersection de chaque

ligne avec le détecteur sera proportionnelle à la valeur ponctuelle (représentant un Pixel/Voxel), et elle sera partagée par les détecteurs élémentaires adjacents, en effectuant des interpolations, souvent linéaires, ou du plus proche voisin [Peters, 1981]. Au fil des années, avec les progrès techniques des appareils en tomographie RX, la méthode Pixel-Driven a été adaptée pour différentes géométries du système de détection (détecteur plan, détecteur multi-barrettes, etc.), et pour une mise en œuvre matérielle à travers des circuits électroniques spécialisés [Kotian et al., 1995]. Cependant, malgré l'efficacité de cette technique au niveau de la rétroprojection, elle introduit des artefacts de haute fréquence au niveau des projections, à cause des interpolations effectuées [De Man and Basu, 2004] (des artefacts qui vont forcément influencer les résultats de reconstruction). Ces artefacts peuvent être traités en utilisant des schémas de pondération plus élaborés, en augmentant la complexité des calculs, tels que le **splating** [Zwicker et al., 2002] pour lequel Mueller et al. ont pu démontrer son applicabilité dans un processus de reconstruction itératif [Mueller et al., 1999].

A l'inverse du Pixel-Driven, les approches Ray-Driven, appelées aussi méthodes de Joseph [Joseph, 1982], cherchent à déterminer la contribution des pixels/voxels adjacents à chaque ligne représentative dans la formation de la valeur mesurée en chaque détecteur élémentaire (on sélectionne un seul rayon par détecteur élémentaire). La contribution de chaque pixel/voxel adjacent est proportionnelle à la distance qui le sépare de ces raies [Siddon, 1985]. Ces distances sont approximées en échantillonnant les raies et en interpolant tri-linéairement la valeur de l'échantillon dans un voisinage prédéfini. Différentes méthodes adoptent cette approche en faisant varier le pas d'échantillonnage, la taille du voisinage et la méthode de pondération [Zeng and Gullberg, 2003, Hermann, 1980, Zhuang et al., 1994]. Certaines optent pour un échantillonnage régulier de manière à ce que l'échantillon tombe exactement sur les plans de coupe du volume dans la direction principale de projection, et une interpolation bilinéaire entre chaque paire de pixels croisant horizontalement et verticalement la ligne intégrale [Joseph, 1982]. Des travaux comparant différentes méthodes d'interpolation dans les approches Ray-Driven [Turbell, 2001, Xu and Mueller, 2006] ont montré l'efficacité (temps de calcul et qualité des résultats) de l'interpolation bilinéaire utilisée dans la méthode de Joseph [Joseph, 1982]. Lacroute et al. [Lacroute and Levoy, 1994] ont proposé une autre variante de Ray-Driven, en effectuant une factorisation **shear-warp**. Le principe consiste à décomposer l'opérateur de projection en deux transformations. Une première transformation, **Shear**, permet de générer une image intermédiaire en effectuant un décalage et une mise à l'échelle des plans de pixel/voxel de manière à ce que les rayons soient perpendiculaires à ces plans. Elle permet de générer ainsi un profil de projection de taille optimale. Une deuxième transformation au niveau 2D, **Warp**, applique des distorsions sur l'image intermédiaire, compensant les déformations causées par la première transformation.

Contrairement aux Pixel-Driven, cette méthode présente une bonne performance au niveau des projections et elle a tendance à introduire des artefacts de hautes fréquences (artefacts d'interpolation) dans la rétroprojection [De Man and Basu, 2004]. C'est la raison pour laquelle de nombreux travaux concernant la reconstruction tomographique itérative utilisent une méthode de projection différente de celle de la rétroprojection, dont la mise en œuvre a été prouvée sous certaines conditions [Zeng and Gullberg, 2000].

Les deux approches citées précédemment (pixel-driven et ray-driven) sont basées sur un calcul d'intégrales pour certaines raies de projection pré-sélectionnées, en compensant les



faisceaux non représentés par des opérations d'interpolation, causant ainsi des artefacts de haute fréquence. Ziegler [Ziegler et al., 2005] a montré que l'utilisation de l'intégrale d'une bande au lieu de l'intégrale de ligne, sans procéder à une interpolation, peut résoudre le problème de ces artefacts. En effet, étant donné que la grille de détection est aussi échantillonnée en plusieurs détecteurs élémentaires, une modélisation précise de projection nécessite une évaluation du produit de convolution des empreintes des faisceaux RX issus des différentes fonctions de base adoptées de l'objet que l'on cherche à reconstruire avec les surfaces de tous les capteurs élémentaires [Long et al., 2009].

Dans ce contexte, De Man et Basu [De Man and Basu, 2002, De Man and Basu, 2004] ont introduit une nouvelle approche appelée **Distance-Driven** tout en choisissant l'indicatrice de voxels comme fonction atomique de base. En sélectionnant une bande de faisceau traversant l'indicatrice de pixels/voxels, ils ont pu déterminer sa contribution dans la formation des profils de projection, en exploitant la surface de chevauchement de cette bande avec le plan de détection. Les projections et les rétroprojections sont évaluées en mappant les deux distances délimitant respectivement, les bords de chaque fonction de base et celles des détecteurs élémentaires, sur un axe commun, afin d'utiliser les longueurs de chevauchement dans le calcul des contributions. En effet, la Distance-Driven est une approche basée empreinte, puisqu'elle cherche à approximer l'empreinte de chaque fonction de base sur le plan détecteur. Dans ce cas (le cas Distance-Driven), la forme des empreintes est approximée grossièrement par un rectangle. Long et al. [Long, 2011] ont proposé une méthode très similaire, **Empreintes séparables Trapèze-Trapèze** [Long et al., 2009] et **rectangle-trapèze** [Long et al., 2010], en affinant l'approximation des empreintes des fonctions de base avec des calculs relativement plus complexes (pour plus de détails, voir la section 3.2.4). D'autres travaux ont proposé plusieurs approximations des empreintes tout en réalisant un compromis entre la complexité de calcul et la précision [Galigekere et al., 2003, Riddell and Trouset, 2006, Ziegler et al., 2006].

En effet, lors d'une reconstruction 3D, le coût d'un pré-calcul des matrices de projection/rétroprojection reste élevé et requiert des espaces de stockage très importants. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le problème de stockage et du temps de calcul. Nous pouvons citer l'utilisation de cartes spécialisées type GPU et/ou des plateformes de calculs parallèles pour accélérer les opérations [Herraiz et al., 2009], la factorisation de la matrice pour réduire à la fois le temps de calcul et l'espace de stockage [Cloquet et al., 2010, Rapisarda et al., 2010, Zhou and Qi, 2011], et la limitation des calculs dans des zones d'intérêt [Ye et al., 2008].

Dans la section suivante, nous allons décrire en détails les méthodes de calcul les plus utilisées dans le cas d'un système d'acquisition 3D (dans le cas d'une géométrie en éventail).

## 3.2 Présentation de quelques opérateurs

L'opérateur de projection modélise la génération des images de profil à partir d'un objet numérique. Ainsi, il doit tenir compte de l'aspect géométrique de l'acquisition que l'on peut approximer par une fonction de projection perspective dite modèle de caméra sténopé [Gorges, 2007]. De plus, il doit représenter l'aspect physique de l'acquisition RX en approxinant l'atténuation des faisceaux (loi de Beer-Lambert (eq. 2.1)) par des sommes pondérées.

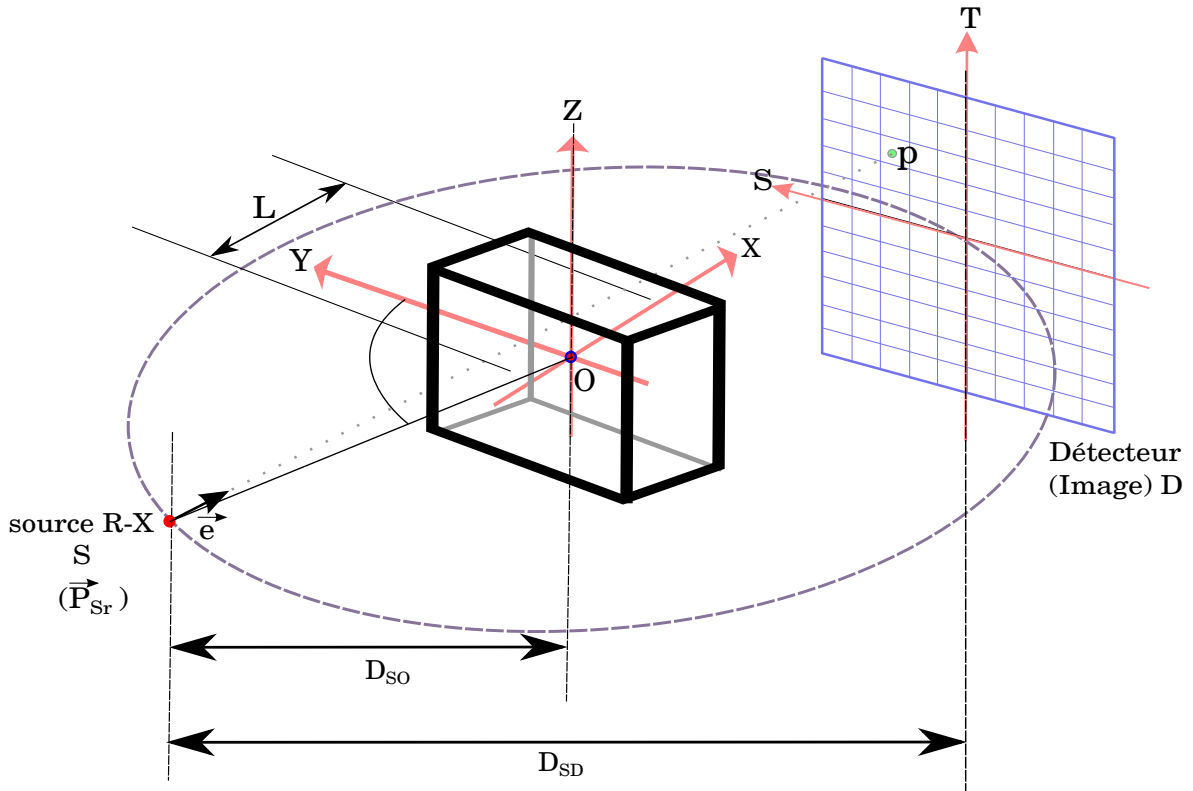
Dans cette section, nous allons commencer par introduire les outils mathématiques nécessaires pour effectuer une modélisation géométrique et physique d'un examen an-

giographique RX. Puis, nous présentons les modèles considérés comme de référence, depuis une trentaine d'années [Momey, 2013], c'est à dire le Voxel-Driven et le Ray-Driven. Enfin, nous clôturons cette partie en détaillons les modèles basés-empreintes les plus récents, à savoir le Distance-Driven et Empreintes-Séparables Trapèze-Trapèze.

### Aspects géométriques

Les aspects géométriques correspondent au positionnement, à l'orientation et aux caractéristiques internes de l'arceau (couple source RX/détecteur) lors de la formation de l'image.

À un instant donné d'une acquisition rotationnelle RX, l'objet 3D  $\mu$  est situé entre une source R-X ponctuelle  $S$ , et un détecteur plan qui se trouve à une distance  $D_{SD}$  de  $S$ . Afin de représenter graphiquement notre objet 3D discret  $\mu$ , il est placé dans un repère orthogonal cartésien fixe  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , nommé repère objet, tel que  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  désignent respectivement les vecteurs unitaires des axes,  $OX$ ,  $OY$  et  $OZ$ , avec  $\|\vec{u}_x\| = \Delta_x$ ,  $\|\vec{u}_y\| = \Delta_y$ , et  $\|\vec{u}_z\| = \Delta_z$ .  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  et  $\Delta_z$  sont les pas d'échantillonnage de l'objet discrétisé (Fig. 3.1). Ainsi, notre objet  $\mu$  est représenté numériquement par une grille 3D cartésienne constituée de  $N_X \times N_Y \times N_Z$  points espacés de  $\vec{\Delta}_{ob} = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ . Chaque voxel de l'objet 3D numérique est repéré par les coordonnées de son centre  $\vec{n}(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$ .



**Figure 3.1:** Aspects géométriques lors d'une acquisition rotationnelle R-X dans le cas d'une géométrie en éventail et d'un détecteur plan.

Le couple émetteur/détecteur peut se déplacer sur un trajet circulaire autour de l'axe  $Z$  fixé sur l'objet. Ainsi, pendant une acquisition rotationnelle, le positionnement et l'orientation de l'arceau vasculaire peuvent être repérés par le vecteur  $\vec{P}_{Sr}$  indiquant la position de la source R-X  $S$  exprimée en coordonnées polaires, en fonction du rayon de

rotation  $D_{SO}$  et de l'angle polaire de rotation de la source/détecteur, correspondant donc à l'angle de projection (éq. 3.4).

$$\vec{P}_{Sr} = \begin{pmatrix} -D_{SO} \sin(\theta) \\ D_{SO} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

De plus, afin de représenter chaque point  $p$  du détecteur, nous avons défini un référentiel  $(O', \vec{u}_s, \vec{u}_t)$  fixé sur le plan de détection, nommé repère détecteur, constitué de deux axes orthogonaux,  $O'S$  et  $O'T$ , tels que  $O'T$  est parallèle à l'axe  $OZ$  (fixé sur l'objet). Les normes des vecteurs unitaires associés,  $\vec{u}_s$  et  $\vec{u}_t$ , sont choisies de telles sorte qu'elles soient respectivement égales aux longueurs des deux cotés d'un pixel (de l'image de projection),  $\Delta_s$  et  $\Delta_t$ . Ainsi, nous avons placé notre détecteur plan dans une grille 2D cartésienne (Fig. 3.1) composée de  $P_s \times P_t$  points espacés de  $\vec{\Delta}_D = (\Delta_s, \Delta_t)$ . Chaque détecteur (capteur - pixel) est repéré par les coordonnées de son centre,  $(s_u, t_v)$ .

Enfin, une fois les repères (objet et détecteur) bien définis, nous pouvons établir les équations des droites  $\chi$  reliant la source RX à chaque point  $p(s, t)$  du détecteur plan (éq. 3.5), et la projection conique (en coordonnées image  $(s, t)$ ) de n'importe quel point  $\mu(x, y, z)$  (coordonnées objet) de l'objet imagé, pour un angle  $\theta$  de projection (éq. 3.7).

$$\chi(s, t, \theta) = \left\{ \vec{P}_{Sr} + l\vec{e} : l \in [0, L_p[ \right\} \quad (3.5)$$

$$L_p \triangleq \sqrt{D_{SD}^2 + s^2 + t^2}$$

avec,  $\vec{e}$  est la direction de la droite reliant la source RX au point  $p(s, t; \theta)$ , représentée en coordonnées sphériques (éq. 3.6).

$$\vec{e} = \frac{\vec{p} - \vec{P}_{Sr}}{\|\vec{p} - \vec{P}_{Sr}\|} = \begin{pmatrix} \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\beta} \\ -\cos \tilde{\varphi} \cos \tilde{\beta} \\ \sin \tilde{\beta} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\beta} = -\text{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{s^2 + D_{SD}^2}}\right)$$

$$\tilde{\varphi} = \text{arctg}\left(\frac{s}{D_{SD}}\right) + \theta$$

avec  $D_{OD} = D_{SD} - D_{SO}$ ,  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\beta}$  représentent respectivement l'angle azimutal et polaire.

$$s = D_{SD} \frac{x \cos(\theta) + g \sin(\theta)}{D_{SO} + x \sin(\theta) - g \cos(\theta)} \quad (3.7)$$

$$t = z \frac{D_{SD}}{D_{SO} + x \sin(\theta) - g \cos(\theta)}$$

Nous pouvons également exprimer les points de projection  $p(s, t)$  dans le repère 3D fixé à l'objet (éq. 3.8).

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} s \cos(\theta) + D_{OD} \sin(\theta) \\ s \sin(\theta) - D_{OD} \cos(\theta) \\ t \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

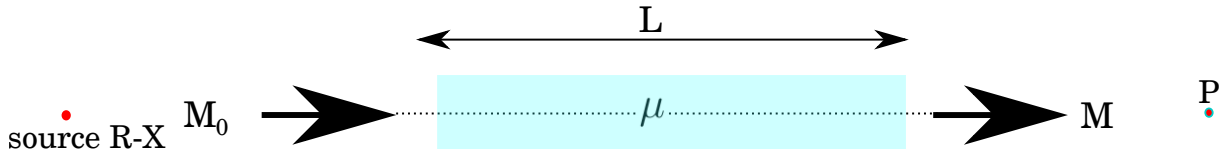
Il faut noter, que tous ces aspects géométriques peuvent se réunir en une seule matrice de taille 3x4 (exprimée en coordonnées homogènes) permettant d'obtenir des informations tridimensionnelles à partir des coordonnées du repère détecteur (image), ou bien à l'inverse (pour plus de détails, le lecteur est invité à lire la partie Modélisation géométrique des images à rayons X, du manuscrit de thèse de Sébastien Gorges [Gorges, 2007]).

### Aspects physiques

Maintenant, nous allons associer au modèle géométrique une partie liée à la physique de l'acquisition d'image RX, pour le rendre plus réaliste. Dans les sections précédentes, nous avons vu comment adopter la formule d'atténuation de Beer-Lambert (éq. 2.1) pour l'adapter à la tomographie numérique, en approximant les intégrales par des sommes pondérées.

Dans un premier lieu, nous allons simplifier au maximum la représentation géométrique pour nous focaliser sur les aspects physiques. Nous supposons un faisceau monochromatique entre une source émettant  $M_0$  photons qui parcourt le long d'une ligne une distance  $L$  à travers les tissus  $\mu(x)$ , et un point  $P$  détectant  $M$  photons (Fig. 3.2). La valeur interceptée  $V_P$  est proportionnelle à l'intégrale de la fonction d'atténuation linéaire  $\mu(x)$  le long de la droite reliant la source au point  $P$  (éq. 3.9).

$$V_P = \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = \int_L \mu(x) dx \quad (3.9)$$



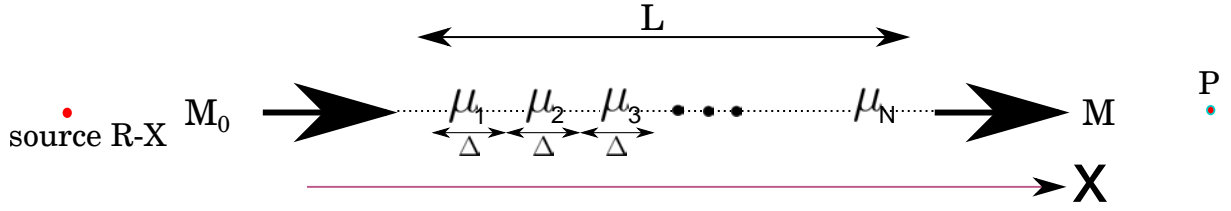
**Figure 3.2:** Principe de de formation d'un profil dans une acquisition 1D RX

**NB :** l'équation 3.9 est déduite de celle de l'atténuation de Beer Lambert (éq. 2.1).

Cependant, en tomographie numérique, l'objet que l'on cherche à reconstruire est représenté sous une forme discrète (Fig. 3.3) en plusieurs échantillons régulièrement espacés. Afin de pouvoir approximer au mieux le calcul intégral (calcul continu - éq. 3.9), plusieurs travaux [Siddon, 1985, Lewitt, 1990, Lewitt, 1992, Kohler et al., 2000] ont cherché la meilleure représentation continue de l'objet  $\mu$  à partir des  $N$  échantillons discrets  $\mu_j$  ( $j \in [1, 2, \dots, N]$ ). Le principe consiste à trouver la meilleure fonction atomique de base  $b_\Delta$  (invariante par translation) représentative de la continuité de l'objet imagé (échantillonné en plusieurs  $\mu_j$ ) (éq. 3.10).

$$\mu(x) = \sum_{j=1}^N \mu_j b_\Delta(x - x_j) \quad (3.10)$$

avec,  $\mu_j$  est la valeur des échantillons situés à la position  $x_j$  (Fig. 3.3),  $j \in [1, 2, \dots, N]$ ,  $b_\Delta$  est la fonction atomique de la base. Elle détermine les valeurs de  $\mu$  en fonction de la distance par rapport aux points  $x_j$  dans l'intervalle  $[x_j - \frac{\Delta}{2}, x_j + \frac{\Delta}{2}[$ , et  $\Delta$  représente le



**Figure 3.3:** Principe de la représentation discrète de l'objet imagé

pas d'échantillonnage.

Pour cette configuration géométrique simpliste (Fig. 3.2, Fig. 3.3), le choix de la fonction de base porte (qui est équivalente à une B-Splines d'ordre 0) (éq. 3.11) rend facile le calcul de la valeur détectée  $V_P$ . Elle présente la somme de tous les échantillons  $\mu_j$  pondérés par le pas de discrétisation  $\Delta$  (éq. 3.12).

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \Delta/2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq \Delta/2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} V_p &= \int_L \mu(x) dx = \int_L \sum_{j=1}^N \mu_j b_\Delta(x - x_j) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \mu_j \int_L b_\Delta(x - x_j) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \Delta \mu_j \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le détecteur est constitué généralement de pixels discrétisant physiquement le signal RX transmis. Ainsi, le calcul d'une ligne d'intégrale,  $V_P$ , s'avère incomplet pour évaluer la quantité photonique interceptée par chaque surface pixelique. De plus, étant donné qu'un capteur élémentaire représente un processus transformant un signal d'entrée (Signal RX) en un autre de sortie (en niveaux de gris), il peut être modélisé par sa réponse impulsionnelle  $h$  définie sur sa surface  $S_P$ . À un instant donné (supposé ponctuel), le signal détecté peut être modélisé comme étant une impulsion unité pondérée par la valeur du signal (l'intégrale)  $V_p$ . Ainsi, la valeur surfacique moyenne détectée  $\bar{g}$  (exprimée en niveau de gris) est calculée en fonction de la réponse impulsionnelle  $h$  et la valeur interceptée  $V_p$  (éq. 3.9) en chaque point de la surface pixelique  $S_P$  (éq. 3.13).

$$\bar{g} = \int_{\Delta_s} \int_{\Delta_t} h(s_u - s, t_v - t) V_{p(s,t)} ds dt \quad (3.13)$$

avec,  $(s_u, t_v)$  représente le centre des pixels tel que :  $S_P = \Delta_s \times \Delta_t$  ( $u = 1, \dots, N_s$  et  $v = 1, \dots, N_t$ ),  $V_{p(s,t)}$  (éq. 3.9) représente l'approximation de l'intégrale de ligne en un point détecteur de coordonnées  $(s, t)$ , et le signe  $\bar{g}$  représente la valeur moyenne de  $g$ .

Maintenant, revenons au cas plus général avec une géométrie conique de rayonnements RX et un détecteur plan (Fig. 3.1). Il est clair que les calculs (de l'éq. 3.2 à l'éq. 3.13) deviennent plus difficiles avec l'augmentation de la complexité géométrique

et analytique des fonctions de base  $b_\Delta$  et des réponses impulsionnelles  $h$  adoptées. Plusieurs travaux ont cherché à approximer ces longs calculs afin de les simplifier et les rendre plus rapides, tout en préservant une certaine précision des résultats [Siddon, 1985, Matej and Lewitt, 1996, Man and Basu, 2004, Ziegler et al., 2006, Riddell and Troussset, 2006, Schretter, 2006, Long et al., 2009]. Le principe consiste à approximer la valeur moyenne détectée  $\bar{g}$  (éq. 3.13) par une somme pondérée de tous les échantillons  $\mu_j$  qui ont contribué à sa formation (éq. 3.32).

$$\bar{g} = \int_{\Delta_s} \int_{\Delta_t} h(s_u - s, t_v - t) V_{P(s,t)} ds dt \approx \sum_{j=1}^N a_j \mu_j \quad (3.14)$$

avec, les  $a_j$  représentent les coefficients de pondération que l'on cherche à calculer.

En réorganisant les valeurs  $\mu_j$  et celles moyennes détectées  $\bar{g}$  sous formes de deux vecteurs,  $\mu$  et  $\bar{G}$ , cette approximation (éq. 3.14) peut être réécrite comme un produit matriciel (éq. 3.15).

$$\bar{G} = A\mu \quad (3.15)$$

avec :  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq N_s N_t, 1 \leq j \leq N_X N_Y N_Z}$  est appelée matrice de projection.

En effet, chaque ligne  $i$  de la matrice de projection exprime la contribution de toutes les fonctions de base de  $\mu$  pour la génération d'un élément  $i$  de l'image de projection  $\bar{G}$ , et chaque colonne  $j$  désigne la participation d'une fonction de base pour la génération des valeurs pixelliques de  $\bar{G}$ . Ainsi, on définit la matrice de rétroprojection  $R = (r_{i,j})_{1 \leq i \leq N_X N_Y N_Z, 1 \leq j \leq N_s N_t}$  comme la transposée de la matrice de projection (éq. 3.16).

$$\begin{aligned} R &= A^T \\ \mu_{retro} &= R.\bar{G} \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'application de l'opérateur de rétroprojection sur l'image moyenne de projection  $\bar{G}$  permet de faire propager les valeurs de  $g_i$  sur le domaine de la reconstruction de l'objet 3D ( $\mu_{retro}$ ), le long des lignes d'intégrale.

Dans la partie suivante, nous présentons certaines méthodes calculant les coefficients des opérateurs de projection et de rétroprojection, dans le cas d'une géométrie 3D en éventail (avec un capteur RX plan), d'un signal RX monochromatique et d'un détecteur plan.

### 3.2.1 Pixel-Driven

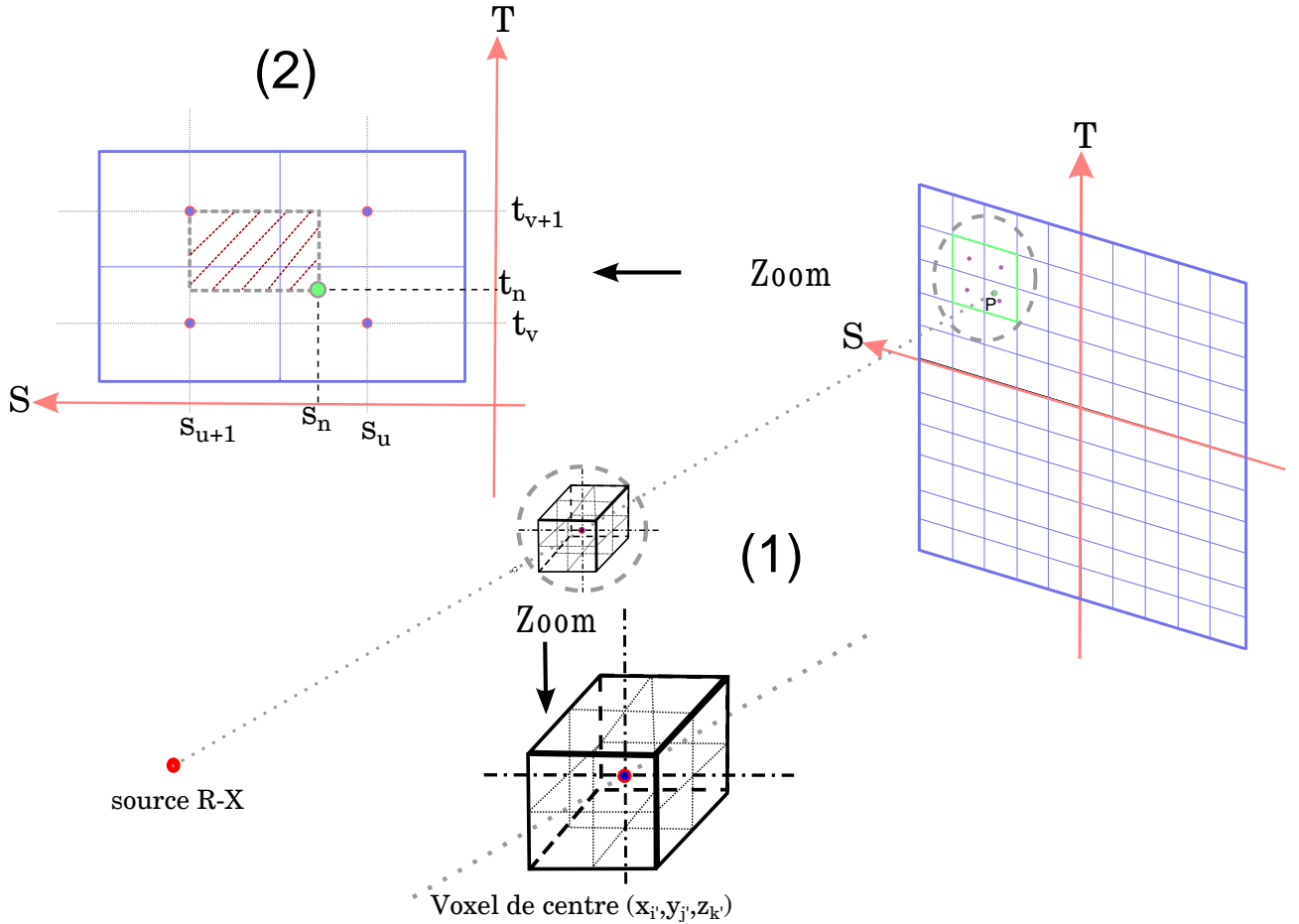
Pour l'approche Pixel-Driven [Peters, 1981], les approximations effectuées ne prennent pas en compte des réponses impulsionnelles  $h$  des détecteurs ou de la fonction atomique de base  $b_\Delta$ . Nous considérons uniquement les deux représentations discrètes de l'objet 3D  $\mu$  et l'image de détection  $G$  (éq. 3.17).

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mu} = \mu(x, y, z) \sum_{i'=1}^{N_X} \delta(x - x_{i'}) \sum_{j'=1}^{N_Y} \delta(y - y_{j'}) \sum_{k'=1}^{N_Z} \delta(z - z_{k'}) \\ \widehat{G} = G(s, t) \sum_{u=1}^{N_S} \delta(s - s_u) \sum_{v=1}^{N_T} \delta(t - t_v) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

où,  $(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$  et  $(s_u, t_v)$  représentent respectivement les coordonnées des échantillons  $\mu_j$  de l'objet 3D et  $g_i$  de l'image 2D de projection, avec :  $(i', j', k') \in [1, \dots, N_X] \times [1, \dots, N_Y] \times [1, \dots, N_Z]$  et  $(u, v) \in [1, \dots, N_S] \times [1, \dots, N_T]$ , et  $\delta$  représente la fonction de Dirac (éq. 3.18).

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

L'objectif que l'on veut atteindre dans cette méthode est de déterminer la contribution de chaque échantillon de  $\mu$  situé à la position  $\vec{n}(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$  (éq. 3.17) dans la formation de l'image  $\widehat{G}$ . Pour cela, nous commençons d'abord par déterminer les coordonnées  $(s_n, t_n)$  (dans le repère détecteur) de la projection conique de chaque point  $\vec{n}$  sur le détecteur plan (éq. 3.19 - Fig. 3.4), en utilisant l'équation 3.7.



**Figure 3.4:** Principe de la méthode Pixel-Driven

(1) : Projections coniques des points  $\vec{n}(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$  (position de chaque échantillon de  $\mu$ ).

(2) : La contribution de l'échantillon  $\mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$  pour la formation de la valeur du point détecteur  $(s_u, t_v)$  égale à la surface hachurée normalisée par  $\Delta_s$  et  $\Delta_t$  (éq. 3.21).

$$s_n = D_{sd} \frac{x_{i'} \cos(\theta) + y_{j'} \sin(\theta)}{D_{so} + x_{i'} \sin(\theta) - y_{j'} \cos(\theta)} \quad (3.19)$$

$$t_n = z_{k'} \frac{D_{sd}}{D_{so} + x_{i'} \sin(\theta) - y_{j'} \cos(\theta)}$$

Ensuite, nous supposons que la valeur interceptée en  $(s_n, t_n; \theta)$ , qui est égale à la valeur de l'échantillon  $\mu(\vec{n})$ , va être partagée par les quatre points détecteurs adjacents (4 pixels voisins - nous approximons grossièrement et implicitement une bande de projection), de coordonnées  $(s_u, t_v)$ ,  $(s_{u+1}, t_v)$ ,  $(s_u, t_{v+1})$ , et  $(s_{u+1}, t_{v+1})$   $s_u \leq s_n \leq s_{u+1}$  et  $t_v \leq t_n \leq t_{v+1}$  (éq. 3.20 - Fig. 3.4).

Il est évident que plus le point détecteur est proche du point  $(s_n, t_n)$ , plus sa valeur sera proche de  $g(s_n, t_n; \theta)$ . Ainsi, nous pouvons appliquer une interpolation linéaire pour déterminer les pondérations par rapport au voisinage des pixels entourant le point  $(s_n, t_n)$  (eq.3.20).

$$\left\{ \begin{array}{l} g(s_u, t_v, \theta) = \frac{s_{u+1} - s_n}{\Delta_s} \times \frac{t_{v+1} - t_n}{\Delta_t} \times \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) \\ g(s_{u+1}, t_v, \theta) = \frac{s_n - s_u}{\Delta_s} \times \frac{t_{v+1} - t_n}{\Delta_t} \times \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) \\ g(s_u, t_{v+1}, \theta) = \frac{s_{u+1} - s_n}{\Delta_s} \times \frac{t_n - t_v}{\Delta_t} \times \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) \\ g(s_{u+1}, t_{v+1}, \theta) = \frac{s_n - s_u}{\Delta_s} \times \frac{t_n - t_v}{\Delta_t} \times \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

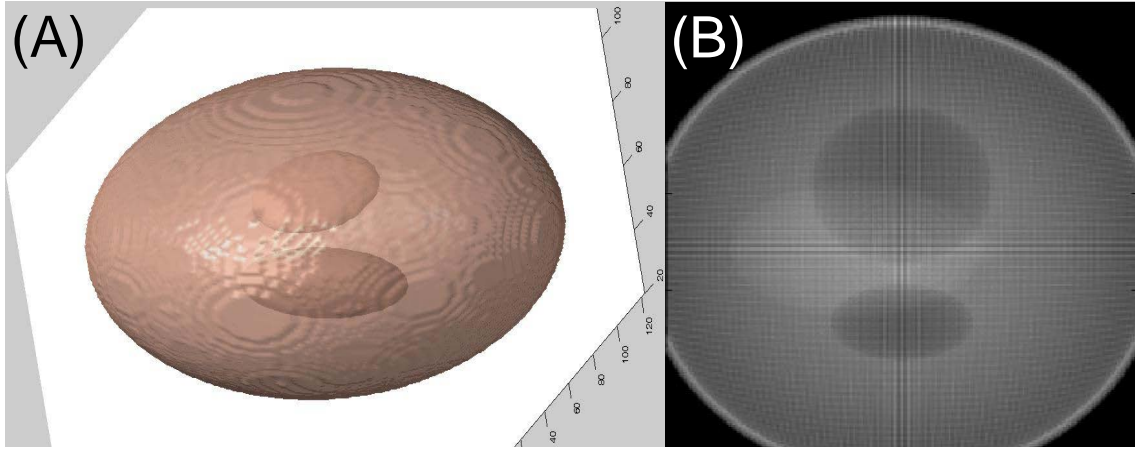
$$\text{avec : } g(s_u, t_v, \theta) + g(s_{u+1}, t_v, \theta) + g(s_u, t_{v+1}, \theta) + g(s_{u+1}, t_{v+1}, \theta) = \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}).$$

Pour un angle de projection  $\theta$ , la réitération de cette procédure (éq. 3.19, éq. 3.20) pour tous les échantillons  $\mu_j$ , permet la génération d'une matrice (de projection) reliant l'objet discret 3D avec l'image de projection. Chaque élément de cette matrice,  $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}]$ , détermine la contribution de l'échantillon situé à la position  $\vec{n}$  au calcul de la valeur du pixel de centre  $(s_u, t_v)$ , selon un angle  $\theta$  de projection (éq. 3.21).

$$\begin{aligned} g(s_u, t_v, \theta) &= \frac{s_{u+1} - s_n}{\Delta_s} \times \frac{t_{v+1} - t_n}{\Delta_t} \times \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) \\ &= a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}] \times \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La méthode Pixel-Driven a été introduite initialement pour modéliser l'**opérateur de projection** puisqu'elle cherche à déterminer la contribution de chaque échantillon de  $\mu$  pour la formation de l'image  $G$ . La matrice de rétroprojection se détermine à partir de celle de projection, en appliquant l'opérateur transposé. La technique de Pixel-Driven est peu utilisée dans les algorithmes itératifs de reconstruction, parce qu'elle engendre des artefacts de haute fréquence dans l'image de projection [Man and Basu, 2004, Herman, 1995] (fig. 3.5).





**Figure 3.5:** Application de la projection Pixel-Driven sur un fantôme numérique voxélisé, pour les paramètres géométriques suivants :  $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ ,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.6$ ,  $(i', j', k') \in [1, 2, \dots, 256]^3$ ,  $(u, v) \in [1, 2, \dots, 256]^2$ ,  $D_{SO} = 960$ ,  $D_{SD} = 1003$  (toutes les distances sont exprimées en *mm*).

(A) représente le fantôme numérique 3D et (B) sa projection en utilisant le projecteur Pixel-Driven.

### 3.2.2 Ray-Driven

Dans la méthode Ray-Driven, nous allons procéder d'une manière différente de celle de Pixel-Driven. Initialement, la Ray-Driven a été proposée [Joseph, 1982] pour modéliser l'**opérateur de rétroprojection**. En adoptant toujours les mêmes modèles numériques de l'objet  $\mu$  et de l'image de projection  $G$  (ils sont définis comme étant ponctuels sur leur grille d'échantillonnage - éq. 3.17), tout en négligeant les réponses impulsionnelles  $h$  des capteurs, nous cherchons à déterminer la contribution de tous les échantillons  $\mu_i$  qui ont participé au calcul de la valeur d'un point détecteur situé à la position  $(s_u, t_v)$ .

Pour ce faire, nous sélectionnons un point détecteur  $p(s_u, t_v)$ , puis, nous traçons la droite (de direction  $\vec{e}$ ) qui le relie à la source RX, en utilisant l'équation 3.5 (Fig. 3.6). Ensuite, nous supposons que la valeur interceptée en ce point est le résultat de contributions des échantillons de  $\mu$  situés au voisinage de cette droite (Fig. 3.6).

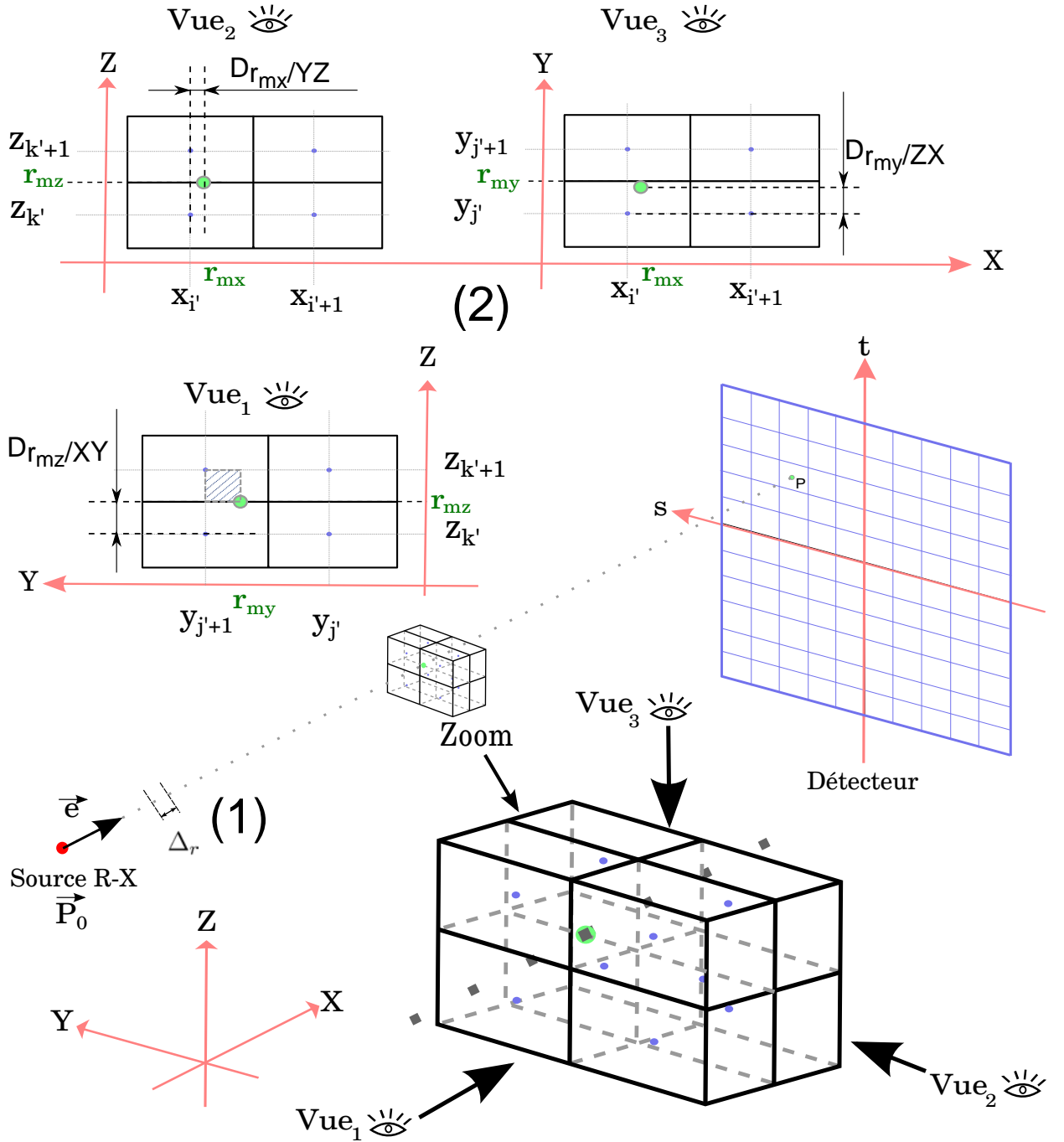
Afin de bien spécifier ce voisinage, nous décomposons (numériquement) cette droite en plusieurs points  $\vec{r}_m$  régulièrement espacés selon une distance  $\Delta_r$  (éq. 3.22).

$$\begin{aligned} \vec{r}_m &= \vec{p}_0 + (m \times \Delta_r \times \vec{e}) \\ \|\vec{r}_m\| &\in [0, L_P] \quad \text{avec} \quad L_P = \sqrt{D_{SD}^2 + s_u^2 + t_v^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec  $m \in [1, 2, \dots, M]$ , et  $M$  se définit en fonction du pas  $\Delta_r$  et de la longueur  $L_P$ .

Étant donné que le principe de la rétroprojection consiste à faire propager la valeur détectée  $g(s_u, t_v, \theta)$  le long de la droite modélisant les faisceaux RX, nous allons supposer que chaque échantillon de  $\vec{r}_m$  va participer d'une façon équiprobable au calcul de la valeur du point détecteur sélectionné (éq. 3.23).

$$\mu(\vec{r}_m) = \frac{g(s_u, t_v, \theta)}{M} \quad (3.23)$$



**Figure 3.6:** Principe de la méthode Ray-Driven.

(1) : Tracé de la droite numérique de direction  $\vec{e}$  et de pas d'échantillonnage  $\Delta_r$ , reliant la source RX au point détecteur  $p$  de coordonnées  $(s_u, t_v)$  (éq. 3.22).

(2) : Pour un échantillon  $r_m$  de droite (de coordonnée  $(r_{mx}, r_{my}, r_{mz})$ ), le plan dont  $r_m$  est la plus proche de son orthogonalité est sélectionné (dans ce cas c'est le plan  $ZY$  puisque  $D_{r_{mx}/YZ}$  est la plus petite par rapport aux  $D_{r_{my}/ZX}$  et  $D_{r_{mz}/XY}$ ) afin de déterminer la contribution de chaque échantillon de  $\mu$  appartenant à ce plan, à la formation de la valeur interceptée en  $(s_u, t_v)$ .

Pour chaque point  $\vec{r}_m (r_{mx}, r_{my}, r_{mz})$ , nous déterminons les quatre échantillons de  $\mu$  les plus proches qui appartiennent au plan (parallèle à une des trois coupes principales de la grille d'échantillonnage 3D,  $XY$ ,  $YZ$ , et  $ZX$ ) pour lequel  $\vec{r}_m$  est le plus proche de son orthogonalité.

Dans notre schéma illustratif (Fig. 3.6), le plan  $ZY$  intersectant avec  $\mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$ ,  $\mu(x_{i'}, y_{j'+1}, z_{k'})$ ,  $\mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'+1})$ ,  $\mu(x_{i'}, y_{j'+1}, z_{k'+1})$  est sélectionné. En effet, la distance séparant le point  $\vec{r}_m$  et l'orthogonalité de ce plan,  $D_{r_{mx}/XY}$ , représente la plus petite valeur par rapport aux  $D_{r_{my}/ZX}$  et  $D_{r_{mz}/XY}$  (Distances respectives par rapport aux plan  $ZX$  et  $XY$ ).

Enfin, comme dans la méthode Pixel-Driven, les quatre valeurs des  $\mu$  adjacents à chaque point de la droite sont déterminées (rétroprojection), en effectuant des interpolations linéaires. Plus l'échantillon de  $\mu$  est proche de  $\vec{r}_m$ , plus il va contribuer au calcul de la valeur de  $\vec{r}_m$  (éq. 3.24).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) = \frac{y_{j'+1} - r_{my}}{\Delta_y} \times \frac{z_{k'+1} - r_{mz}}{\Delta_z} \mu(\vec{r}_m) \\ \mu(x_{i'}, y_{j'+1}, z_{k'}) = \frac{r_{my} - j\Delta_y}{\Delta_y} \times \frac{z_{k'+1} - r_{mz}}{\Delta_z} \mu(\vec{r}_m) \\ \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'+1}) = \frac{y_{j'+1} - r_{my}}{\Delta_y} \times \frac{r_{mz} - z_{k'}}{\Delta_z} \mu(\vec{r}_m) \\ \mu(x_{i'}, y_{j'+1}, z_{k'+1}) = \frac{r_{my} - y_{j'}}{\Delta_y} \times \frac{r_{mz} - z_{k'}}{\Delta_z} \mu(\vec{r}_m) \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Au fur et à mesure que l'on incrémente les  $\vec{r}_m$  pour toutes les droites reliant la source RX aux points détecteurs  $(s_u, t_v)$  ( $(u, v) \in [1, 2, \dots, N_s] \times [1, 2, \dots, N_t]$ ), tout en remplaçant les  $\mu(\vec{r}_m)$  dans l'équation (éq. 3.24) par leurs vrais valeurs (éq.3.23), les coefficients de la matrice de rétroprojection  $R$  se déterminent (éq. 3.25).

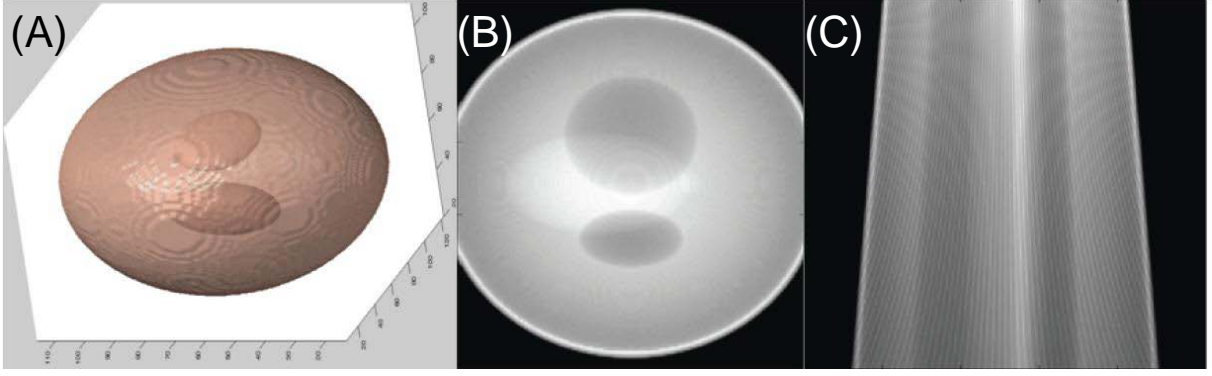
$$\begin{aligned} \mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) &= \frac{y_{j'+1} - r_{my}}{\Delta_y} \times \frac{z_{k'+1} - r_{mz}}{\Delta_z} \mu(\vec{r}_m) \\ &= \frac{y_{j'+1} - r_{my}}{\Delta_y} \times \frac{z_{k'+1} - r_{mz}}{\Delta_z} \times \frac{1}{M} g(s_u, t_v, \theta) \\ &= r_\theta [s_u, t_v, \vec{n}] g(s_u, t_v, \theta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

↓

$$\mu_{retro} = RG$$

**NB :** Selon le pas  $\Delta_r$  que l'on peut définir et les paramètres géométriques adoptés pour modéliser les aspects géométrique de l'acquisition RX, nous pouvons avoir plusieurs coefficients de  $R$  reliant le même point projectif  $g(s_u, t_v, \theta)$  à l'échantillon  $\mu(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$ . Dans ce cas, nous calculons un seul coefficient  $r_\theta [s_u, t_v, \vec{n}]$  qui représente la somme de ces coefficient.

L'opérateur de projection  $A$  représente le transposé de celui de rétroprojection (éq. 3.16). Quant à cette méthode, nous trouvons les mêmes artefacts de haute fréquence dans l'image de rétroprojection [Man and Basu, 2004, Zeng and Gullberg, 2003] (fig. 3.6).



**Figure 3.7:** Application de la projection Ray-Driven sur un fantôme numérique voxélisé, pour les paramètres géométriques suivants :  $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ ,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.6$ ,  $(i', j', k') \in [1, 2, \dots, 256]^3$ ,  $(u, v) \in [1, 2, \dots, 256]^2$ ,  $D_{SO} = 960$ ,  $D_{SD} = 1003$  (toutes les distances sont exprimées en  $mm$ ). (A) représente le fantôme numérique 3D, (B) sa projection en utilisant le projecteur Distance-Driven et (C) la coupe  $Z = 128$  de la rétroprojection de (B).

**NB :** Les inconvénients majeurs des méthodes citées jusqu'à maintenant sont qu'elles ne prennent pas en considération la représentation continue de l'objet 3D (éq. 3.10). Les bandes de faisceaux RX (l'intégrale des bandes [Ziegler et al., 2005]) sont approximées grossièrement et implicitement par le nombre des échantillons choisis afin d'effectuer les interpolations (éq. 3.20, éq. 3.24). C'est pourquoi des artefacts de hautes fréquences peuvent apparaître (Fig. 3.5, Fig. 3.7). Dans la partie qui va suivre, nous allons discuter deux méthodes de calcul plus évoluées et plus précises.

### 3.2.3 Distance Driven (Empreintes séparables)

Pour cette méthode [De Man and Basu, 2004], nous allons reprendre la formule de la représentation continue de l'objet discret  $\mu$  (éq. 3.10), tout en l'adaptant pour une géométrie conique de l'acquisition (Fig. 3.1) et en prenant l'indicatrice de voxel (éq. 3.1) comme fonction atomique de base (éq.3.26).

$$\mu(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}} \mu_{\vec{n}} b_{\vec{\Delta}}(\vec{x} - \vec{n}) \quad (3.26)$$

La sommation dans l'équation 3.26 s'effectue sur la grille cartésienne constituée de  $N_X \times N_Y \times N_Z$  points espacés de  $\vec{\Delta} = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ ,  $\vec{n}$  représente le centre de la  $n^{ieme}$  fonction de base  $b_{\vec{\Delta}}$ , tel que  $\vec{n} = (x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}) \in \mathbb{Z}^3$ .

Nous tenons en compte également la réponse impulsionnelle de chaque pixel (éq. 3.13), ainsi, nous définissons la fonction  $h(s, t)$  (éq. 3.27) qui est supposée invariante au translation ou au rotation du détecteur (indépendante de l'angle  $\theta$ ).

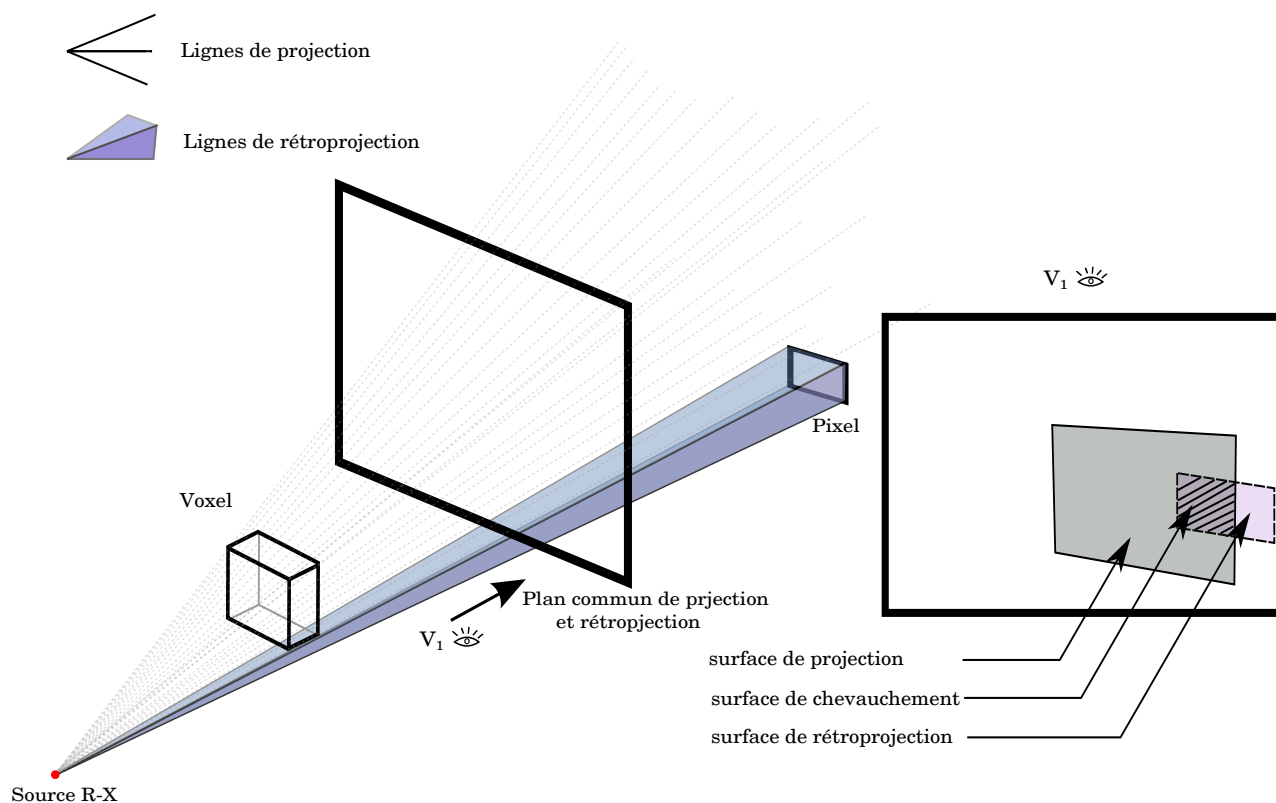
$$h(s, t) \approx \frac{1}{\Delta_s \Delta_t} \times \prod\left(\frac{s}{\Delta_s}\right) \times \prod\left(\frac{t}{\Delta_t}\right) \quad (3.27)$$

avec,  $h$  est une fonction de pondération séparable (pour les deux axes  $s$  et  $t$ ) qui va servir à pénaliser les points capteur à chaque fois qu'ils s'éloignent du centres pixellique (éq. 3.28). Elle est appelée dans la littérature "détecteur de flou", puisqu'elle est sensée éviter le flou engendré par un simple moyennage le long de la surface pixellique.

$$\bar{y}_\theta [s_u, t_v] = \int_{\Delta_s} \int_{\Delta_t} h(s_u - s, t_v - t) V_{p(s,t)} ds dt \quad (3.28)$$

avec,  $(s_u, t_v)$  représente le centre des pixels à la position  $(k, l)$  telles que  $u = 1, 2, \dots, N_s$  et  $v = 1, 2, \dots, N_t$ .

L'idée principale consiste à approximer les valeurs en chaque point  $V_{p(s,t)}$  (éq. 3.28) en approchant la forme des empreintes coniques, que l'on note  $q(s, t; \theta; \vec{n})$ , de chaque fonction de base  $b_{\vec{\Delta}}$  (de centre  $\vec{n}$ ) sur le plan détecteur (qui sera en fonction de coordonnées  $(s, t)$ ). Pour ce faire, nous exploitons la surface de chevauchement qui peut exister entre la projection d'un voxel, et la rétroprojection d'un pixel, dans un plan commun (Fig.3.8). Cette surface de chevauchement permet de réaliser une certaine bijection traduisant le fait que chaque point de l'objet 3D soit mappé (une seule incidence) sur un unique point de la grille de détection.

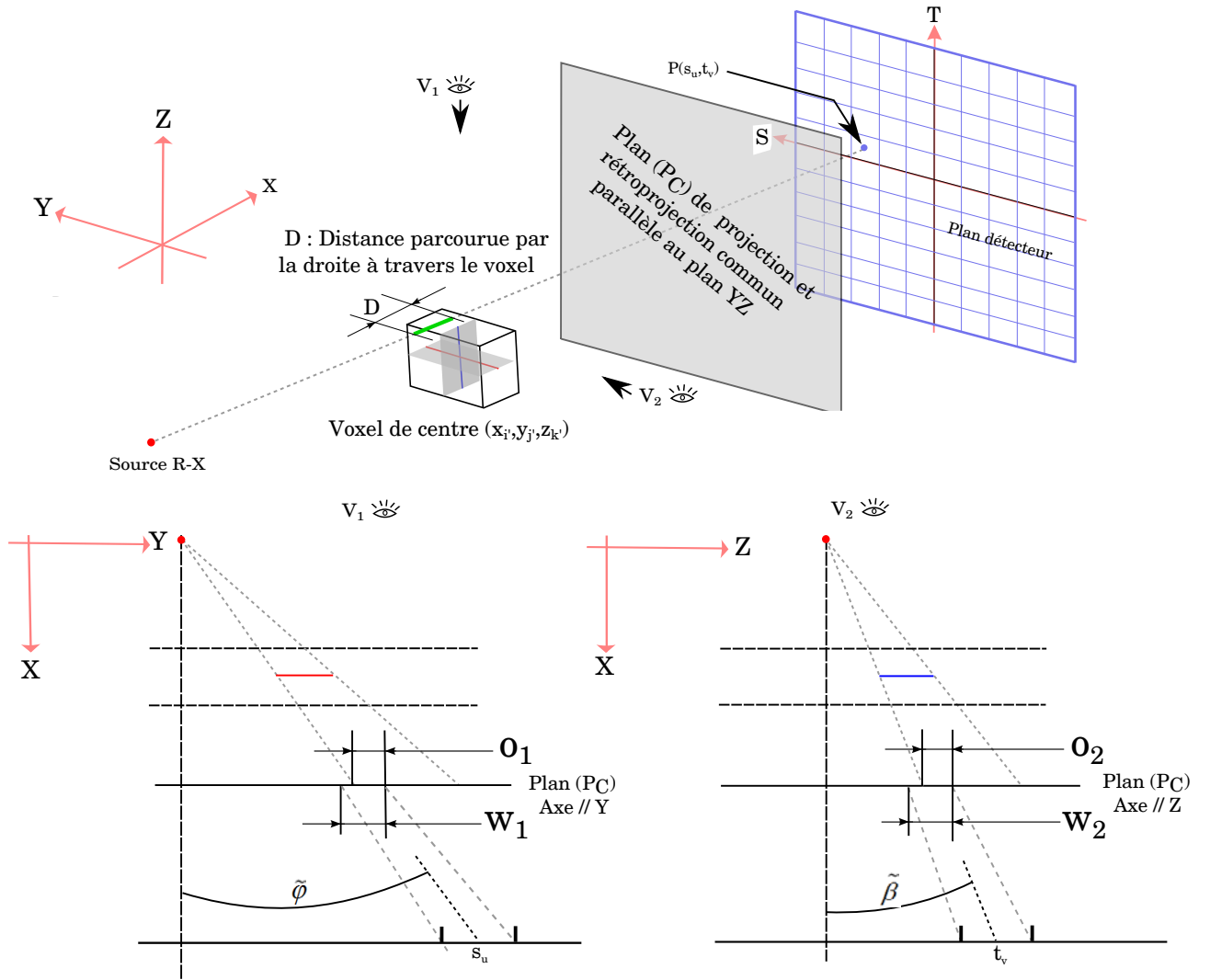


**Figure 3.8:** Principe de la méthode Distance-Driven

Ainsi, on peut dire que l'empreinte du faisceau conique,  $q$  (éq. 3.29), de la fonction de base  $\beta_0 \left( (\vec{x} - \vec{n}) / \vec{\Delta} \right)$  sur un pixel du centre  $(s_u, t_v)$ , est proportionnelle à la surface de chevauchement :

$$q(s, t; \theta; \vec{n}) \propto S_{chevauchement} \quad (3.29)$$

Le calcul exact de cette surface de chevauchement n'est pas évident, et il dépend du choix du plan de projection et de rétroprojection commun, ainsi que les paramètres géométriques de l'acquisition. Bruno De Man et Samit Basu [Man and Basu, 2004] ont proposé de faire une approximation de cette surface en procédant de la manière suivante (fig. 3.9) :



**Figure 3.9:** Calcul des coefficients de la matrice de projection,  $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}]$ , en approxinant la surface de chevauchement ( $O_1O_2$ ) entre la projection de la fonction de base à la position  $\vec{n}$  et la rétroprojection d'un pixel  $(s_u, t_v)$  (détecteur élémentaire  $W_1W_2$ ) sur un plan commun ( $P_C$ ) :

$$a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}] = D \frac{O_1 \times O_2}{W_1 \times W_2}$$

- 1) nous désignons un plan commun de projection et de rétroprojection ( $P_C$ ), parallèle au plan (YZ),
- 2) nous projetons les deux points de bordure de voxel  $(x_{j'}, y_{j'}, z_{k'} + \frac{\Delta z}{2})$  et  $(x_{j'}, y_{j'}, z_{k'} - \frac{\Delta z}{2})$ , et on détermine la distance de chevauchement avec la rétroprojection des deux points du contour de pixel,  $(s_u, t_v + \frac{\Delta t}{2})$  et  $(s_u, t_v - \frac{\Delta t}{2})$ , qu'on va noter  $O_1$ ,
- 3) nous répétons la même étape 2, en projetant cette fois-ci  $(x_{j'}, y_{j'} + \frac{\Delta y}{2}, z_{k'})$  et  $(x_{j'}, y_{j'} - \frac{\Delta y}{2}, z_{k'})$  pour déterminer la distance de chevauchement avec la rétroprojection

de  $(s_u + \frac{\Delta_s}{2}, t_v)$  et  $(s_u - \frac{\Delta_s}{2}, t_v)$ , que l'on notera  $O_2$ ,

4) nous calculons la distance  $D$ , parcourue par la droite reliant la source  $S$  au centre de détecteur  $(s_u, t_v)$ , à travers le voxel,

5) nous calculons le coefficient de la matrice de projection  $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}]$  en multipliant  $D$  par les deux distances de chevauchement  $O_1$  et  $O_2$  normalisées par les valeurs de rétroprojection  $W_1$  et  $W_2$ .

La surface de chevauchement normalisée  $\frac{O_1 \times O_2}{W_1 \times W_2}$  n'est qu'une approximation de la surface réelle, où nous l'approximons par un rectangle. En fait, la forme rectangulaire est le résultat de l'hypothèse que la fonction d'empreinte du faisceau conique  $q$  est séparable (éq. 3.30), et elle est proportionnelle au produit de deux distances de chevauchement.

$$q(s, t; \theta; \vec{n}) \propto O_1 \times O_2 \quad (3.30)$$

La fonction  $q$  est aussi proportionnelle à la distance  $D$  (éq. 3.31), parcourue par la ligne d'intégrale reliant  $S$  avec le centre de pixel  $s_u, t_v$ .

$$D = \frac{\Delta_x}{|\cos(\tilde{\beta})| \times \max(|\cos(\tilde{\varphi})|, |\sin(\tilde{\varphi})|)} \quad (3.31)$$

où, les angles  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\beta}$  sont définis dans équation 3.6.

Finalement, en approximant la fonction  $q$  (éq. 3.32) et  $h$  (éq. 3.27), nous déterminons les coefficients de la matrice de projection  $A$  (éq. 3.33).

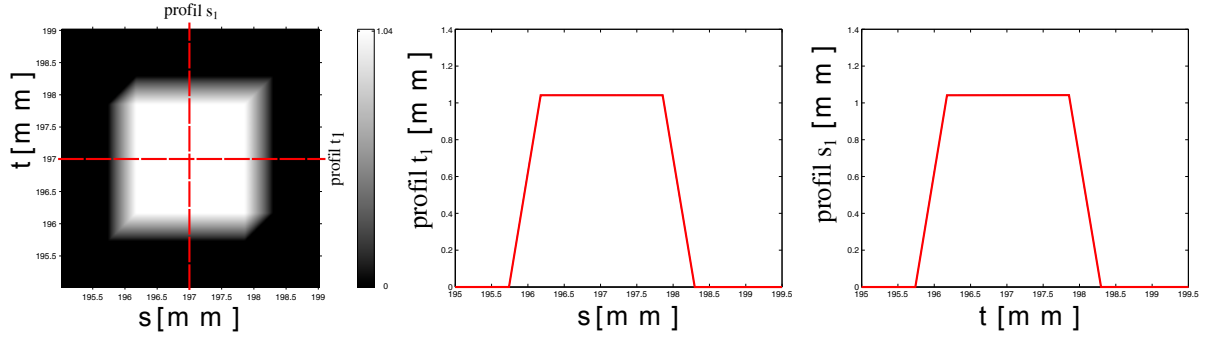
$$q(s, t; \theta; \vec{n}) \approx D \times \frac{O_1 O_2}{W_1 W_2} \quad (3.32)$$

$$h(s, t) \approx \frac{1}{\Delta_s \Delta_t} \times \prod\left(\frac{s}{\Delta_s}\right) \times \prod\left(\frac{t}{\Delta_t}\right)$$

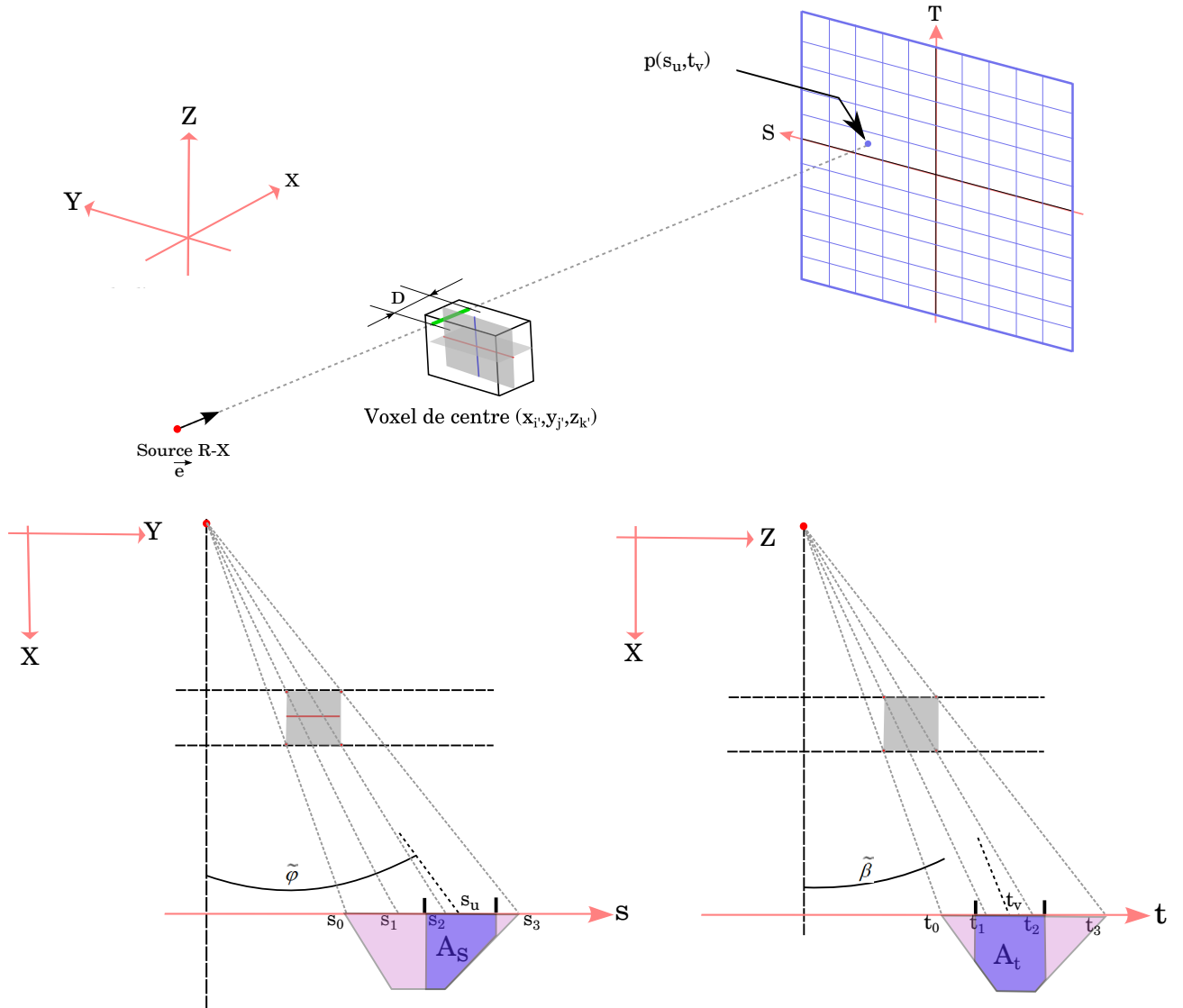
$$\begin{aligned} a_\theta [s_u, t_v; \vec{n}] &= \int_{\Delta_s} \int_{\Delta_t} h(s_u - s, t_v - t) q(s, t; \theta; \vec{n}) ds dt \\ &= D \times \frac{O_1 O_2}{W_1 W_2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.2.4 Empreintes séparables : Trapèze/Trapèze

En adoptant le même modèle de la fonction de base  $b_{\Delta}$  dans la représentation continue de l'objet 3D (éq. 3.26), Yong Long et al. [Long et al., 2009] ont pu calculer avec une grande précision son empreinte de faisceau conique (Fig. 3.10), après avoir développé l'expression de  $q$  (éq. 3.34).



**Figure 3.10:** Calcul exact de  $q(s, t; \theta; \vec{n})$  et ses profils d'un voxel centré à  $(93, 93, 93)$  sur un détecteur plan avec  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 1\text{mm}$ ,  $D_S D = 949\text{mm}$ ,  $D_S O = 949\text{mm}$ , et  $\theta = 0$ .



**Figure 3.11:** Principe de la méthode Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze. Approximation des empreintes coniques d'une fonction de base (position  $\vec{n}$ ) par le produit de deux trapèzes séparables (selon l'axe  $S$  et  $T$ ) pour pouvoir calculer les coefficients  $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}]$  de la matrice de projection, en exploitant les longueurs de chevauchement avec les détecteur élémentaires (Pixel)  $(s_u, t_v)$  :  $a_\theta [s_u, t_v, \vec{n}] = D A_s A_t$



$$\begin{aligned}
 q(s, t; \theta; \vec{n}) &= \int_{\chi(s, t, \theta)} \beta_0 \left( (\vec{x} - \vec{n}) \div \vec{\Delta} \right) dl \\
 &= \int_0^{L_P} \beta_0 \left( \left( \vec{P}_{Sr} + l\vec{e} - \vec{n} \right) \div \vec{\Delta} \right) dl \\
 &= \int_0^{L_P} \left( (P_{Srx} + le_x - i\Delta_x) \div \Delta_x \right) \times \left( (P_{Sry} + le_y - j\Delta_y) \div \Delta_y \right) \times \\
 &\quad \left( (P_{Srz} + le_z - k\Delta_z) \div \Delta_z \right) dl
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

où  $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)^T$  est défini dans éq. 2.5 et  $\vec{P}_{Sr} = (P_{Srx}, P_{Sry}, P_{Srz})^T$  est défini dans éq. 3.4.

Inspiré par la forme de la fonction d’empreinte de faisceau conique exact  $q(s, t; \theta; \vec{n})$ , nous approximons  $q$  (éq. 3.35) d’une manière plus robuste que celle de la Distance-Driven, en fusionnant le plan commun avec celui de la grille détectrice (Fig. 3.11).

$$q(s, t; \theta; \vec{n}) \approx D \times \text{trap}(s; s_0, s_1, s_2, s_3) \times \text{trap}(t; t_0, t_1, t_2, t_3) \tag{3.35}$$

avec,  $\text{trap}$  étant la fonction trapèze (eq.3.36).

$$\text{trap}(a; b_0, b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} \frac{a-b_0}{b_1-b_0}, & b_0 < a < b_1 \\ 1, & b_1 \leq a \leq b_2 \\ \frac{b_3-a}{b_3-b_2}, & b_2 < a < b_3 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.36}$$

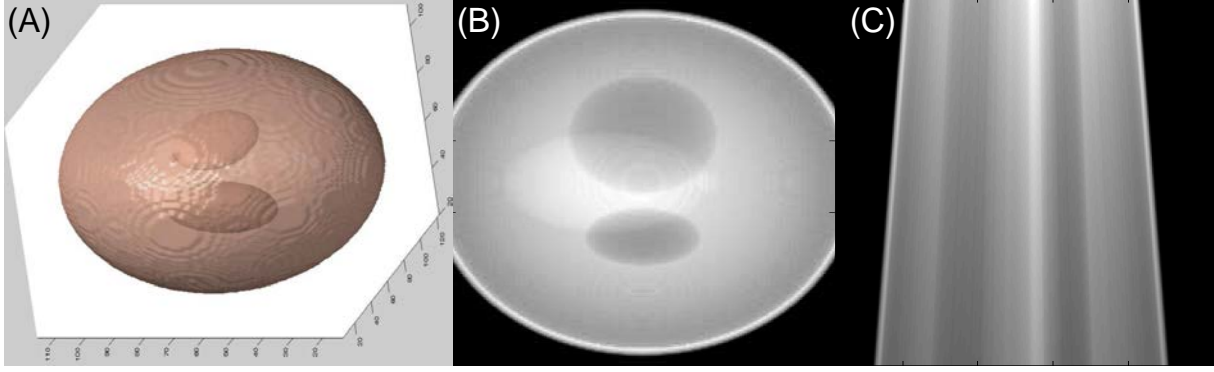
En gardant le même modèle de  $h$  (éq. 3.32), nous calculons les coefficients de la matrice  $A$  (éq. 3.37) ; c’est la méthode d’Empreintes Séparées Trapèze-Trapèze [Long et al., 2009].

$$\begin{aligned}
 a_\theta [s_u, t_v; \vec{n}] &= \int_{\Delta_s} \int_{\Delta_t} h(s_u - s, t_v - t) q(s, t; \theta; \vec{n}) ds dt \\
 &= D \times T(s_u - \frac{\Delta_s}{2}, s_v + \frac{\Delta_s}{2}) \times T(t_u - \frac{\Delta_t}{2}, t_v + \frac{\Delta_t}{2})
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

où,  $T$  représente la surface d’intersection (éq. 3.38) dans les deux axes  $s$  et  $t$  (dans Fig. 3.11, les deux surfaces sont nommées  $A_s$  et  $A_t$ ).

$$\begin{aligned}
 T(ii, jj) &= \int_i^j j \text{trap}(x; x_0, x_1, x_2, x_3) dx \\
 &= T_1((\max(ii, x_0), \min(jj, x_1)) + T_2((\max(ii, x_1), \min(jj, x_2)) + T_3((\max(ii, x_2), \min(jj, x_3))) \\
 T_1(ii, jj) &= \frac{1}{2(x_1-x_0)} [(jj - x_0)^2 - (ii - x_0)^2] \quad \text{pour } ii < jj \quad 0 \text{ ailleurs} \\
 T_2(ii, jj) &= (jj - ii) \quad \text{pour } ii < jj \quad 0 \text{ ailleurs} \\
 T_3(ii, jj) &= \frac{1}{2(x_3-x_2)} [(jj - x_3)^2 - (ii - x_3)^2] \quad \text{pour } ii < jj \quad 0 \text{ ailleurs}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

L’application de l’opérateur de projection donne des résultats meilleurs sans artefacts de hautes fréquences (fig. 3.12).



**Figure 3.12:** Application de la projection Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze sur un fantôme numérique voxelisé, pour les paramètres géométriques suivants :  $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ ,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.6$ ,  $(i', j', k') \in [1, 2, \dots, 256]^3$ ,  $(u, v) \in [1, 2, \dots, 256]^2$ ,  $D_{SO} = 960$ ,  $D_{SD} = 1103$  (toutes les distances sont exprimées en *mm*). (A) représente le fantôme numérique 3D, (B) sa projection en utilisant le projecteur Empreintes séparable Trapèze-Trapèze et (C) la coupe  $Z = 128$  de la rétroprojection de (B).

### 3.2.5 Conclusion

Nous avons évoqué les méthodes de modélisation directe et inverse de l'opérateur de projection les plus utilisées dans la littérature de la reconstruction itérative tomographique. La Pixel-Driven a l'avantage de présenter une simplicité et une rapidité de calcul très souhaitables. Cependant, les artefacts de haute fréquence constatés au niveau des images de projection (Fig. 3.5) peuvent très bien fausser les modèles de bruit adoptés dans les approches statistiques de reconstruction ; c'est la raison pour laquelle nous ne pouvons l'utiliser dans notre problématique. En revanche, la Ray-Driven génère des projections sans artefacts visibles (Fig. 3.7), ce qui empêche pas son utilisation dans une reconstruction statistique. Cela dit, les artefacts que l'on remarque au niveau des images de rétroprojection (domaine de l'objet 3D) (Fig. 3.7) peuvent empêcher le bon déroulement d'une reconstruction MAP basée sur des modèles a priori très locaux (de l'objet  $\mu$ ), tel que celui de Markov (éq. 2.25). Certes, nous pouvons réduire considérablement ces artefacts dans le domaine de reconstruction, en augmentant le nombre de données initiales, cela dit, ce n'est plus notre cas pour lequel nous nous retrouvons avec un nombre très réduit des angiogrammes (voir section 2.1).

La Distance-Driven est la méthode qui a pu améliorer significativement les résultats des deux anciennes approches, en regroupant les avantages de Pixel-Driven au niveau de la rétroprojection, et de Ray-Driven au niveau de la projection. Ainsi, nous pouvons négliger ces erreurs dues aux approximations effectuées devant celle de bruit d'acquisition. Elle peut très bien être adoptée pour le cas d'une reconstruction statistique MAP à partir d'un nombre réduit de projection.

L'approche des Empreintes-Séparables Trapèze-Trapèze n'est qu'une amélioration de la Distance-Driven ; elle ne peut que rendre meilleurs les résultats de la reconstruction. Cependant, elle est très coûteuse en temps de calcul, d'où la nécessité d'évaluer son efficacité (évaluer le rapport entre le gain en précision et la perte en temps de calcul).

En conclusion, nous avons décidé de garder uniquement les deux dernières approches, étant donné que les anciennes approches (Ray-Driven et Pixel-Driven) sont inappropriées à notre problématique.

Dans la section qui va suivre, nous allons proposer une version similaire à la méthode Distance-Driven [Oukili et al., 2013], simple à calculer et relativement rapide. Ensuite nous allons la comparer avec la Distance-Driven (DD) et les Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze (SF-TT).

### 3.3 Distance Driven Simplifié DDS

Dans cette partie, nous allons pouvoir présenter le principe de la nouvelle approche (section 3.3.1), et évaluer ses performance à travers une étude comparative avec les méthodes les plus précises dans le domaine de modélisation des opérateurs de projection (section 3.3.2).

#### 3.3.1 Aspects calculatoires de la Distance-Driven Simplifiée

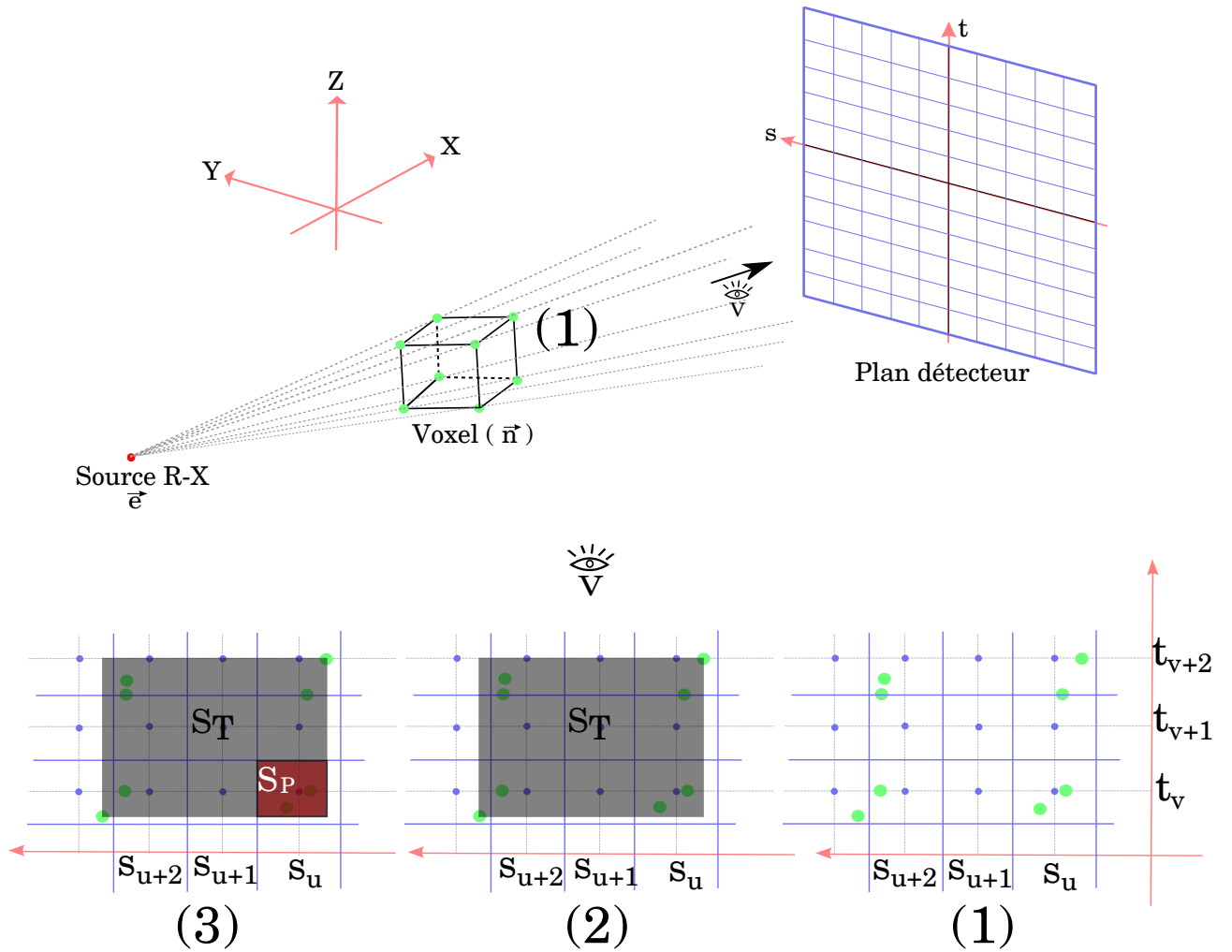
Dans une acquisition RX, il est réaliste de considérer la détection photonique des RX comme un phénomène de comptage, pour laquelle chaque capteur RX de la grille détectrice compte les photons transmis par chaque voxel de l'objet  $\mu$ . Ainsi, chaque élément  $(a_{ij})$  de la matrice  $A$  (éq. 2.2, éq. 2.3) peut être défini comme étant la probabilité qu'une quantité photonique soit transmise par le voxel  $j$  et détectée par le pixel  $i$ . Cette probabilité est proportionnelle à la surface de chevauchement entre l'empreinte conique du voxel  $j$  et de l'aire pixellique  $i$  (les photons ont plus de chance d'être interceptés étant donnée une grande surface de chevauchement).

En partant de cette définition, le principe de notre nouvelle méthode, que l'on a appelé Distance-Driven Simplifiée, se résume comme suit (en adoptant les notations de la section 3.2.3):

Pour chaque voxel de centre  $\vec{n} (x_{i'}, y_{j'}, z_{k'})$ :

- **Étape 1:** Nous calculons les projections coniques des huit sommets  $(x_{i'} \pm \frac{\Delta x}{2}, y_{j'} \pm \frac{\Delta y}{2}, z_{k'} \pm \frac{\Delta z}{2})$ , en utilisant les équations eq.3.19 (les points verts Fig. 3.13(1)).
- **Étape 2:** Nous déterminons la plus petite surface  $S_T$  du rectangle englobant les huit points de projection calculés à l'étape précédente (la surface grise Fig. 3.13.(2)). Cette surface représente une approximation de la forme de l'empreinte conique voxelique ( $\vec{n}$ ) sur le plan détecteur, pour laquelle nous pouvons supposer que la probabilité qu'un photon émis par ce voxel soit intercepté par  $S_T$  est égale à 1.
- **Étape 3:** Enfin, la probabilité  $a_\theta [s_u, t_v; \vec{n}]$  qu'une quantité photonique soit émise par un voxel  $\vec{n}$  et interceptée par un pixel de centre  $(s_k, t_l)$  (pour un angle de projection  $\theta$ ) se détermine en fonction de la surface de chevauchement  $S_p$  (la surface rouge Fig. 3.13.(3)) avec  $S_T : a_\theta [s_u, t_v; \vec{n}] = S_p/S_T$ .

Notons ici que ce calcul de la probabilité  $a_{ij} (a_\theta [s_u, t_v; \vec{n}])$  vérifie bien l'hypothèse d'une incompatibilité statistique (non recouvrement) des événements de détection, assurant ainsi qu'un photon ne puisse pas être intercepté par deux détecteurs élémentaires en même temps (bijection). Notons aussi que la notion d'incompatibilité statistique utilisée ici n'empêche pas l'hypothèse d'une indépendance entre les probabilités conditionnelles des  $g_i$  (éq. 2.9), puisque nous ne parlons pas de la même probabilité.  $P(g_i|\mu)$  représente



**Figure 3.13:** Principe de la méthode Distance Driven Simplifiée DDS.

(1) : La détermination de projections coniques (en points verts) des quatre sommets d'une fonction de base  $b_{\vec{\Delta}}$  (indicatrice de voxel).

(2) : La définition du plus petit rectangle englobant les huit points de projection (rectangle en gris transparent).

(3) : La détermination des probabilités de détection (les coefficients de la matrice de projection  $A$ ) en fonction des surfaces de chevauchement entre la surface rectangulaire déterminée à l'étape (2) et les surfaces pixelliques (surface rectangulaire rouge).

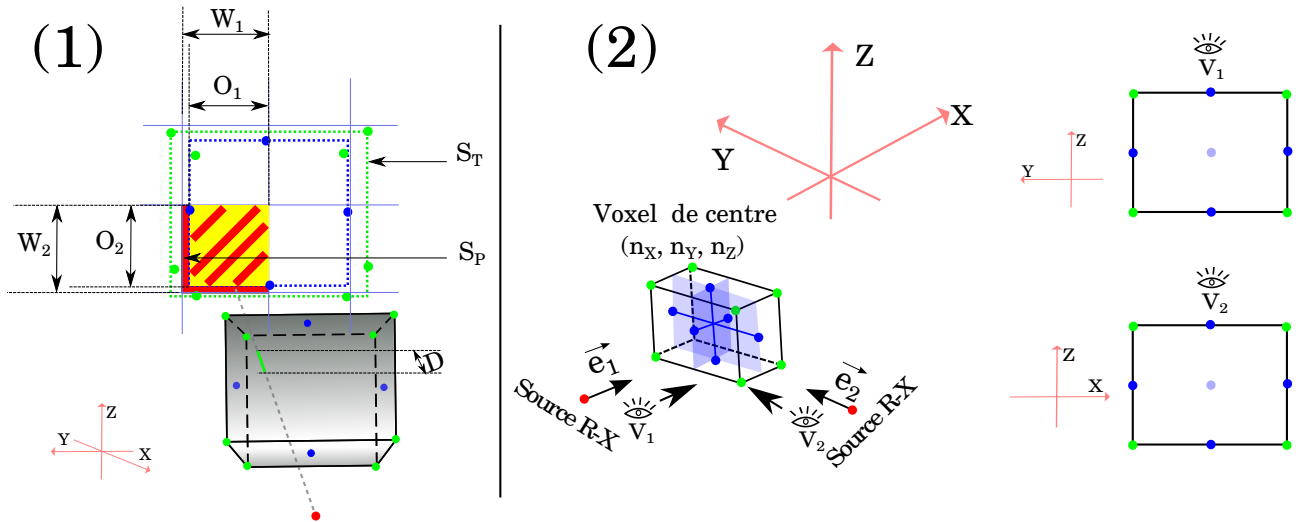
la probabilité de détection des variables aléatoires  $g_i$  conditionnées par la réalisation de  $\mu$  (considéré aussi comme une variable aléatoire), pour laquelle la valeur interceptée par chaque détecteur élémentaire n'est pas influencée par les valeurs du reste de la grille détectrice (indépendance de réalisation).

### 3.3.2 Comparaison de la nouvelle méthode (DDS) avec la Distance-Driven (DD) et l'approche des Empreintes-Séparables Trapèze-Trapèze (SF-TT)

La nouvelle approche que nous avons proposée est très similaire à celle de la Distance-Driven, puisque les deux approches se basent sur une approximation rectangulaire (calculée différemment) des empreintes voxeliques coniques (cadre pointillé vert pour

DDS et bleu pour DD Fig. 3.14.(1)) et de leurs surfaces de chevauchement avec les pixels (surface carrée rouge pour DDS qui se trouve derrière la jaune de la DD Fig. 3.14(1), les hachures rouges représentent l'intersection entre les deux surfaces rouge-jaune).

En effet, en superposant le plan de projection et de rétroprojection commun ( $P_C$  utilisé dans DD Fig. 3.9) avec le plan détecteur, les deux méthodes calculent de la même façon les surfaces de chevauchement ( $O_1 \times O_2$  pour DD et  $S_P$  pour DDS (Fig. 3.14.(1))). Cependant, la normalisation dans DD de la valeur calculée ( $O_1 \times O_2$ ) se fait par rapport à l'aire pixellique  $W_1 \times W_2$  (Fig. 3.14(1)), tandis que la nouvelle méthode (DDS) effectue une normalisation par rapport à la surface rectangulaire approximative de l'empreinte voxellique conique  $S_T$  (délimitée avec des pointillés verts dans Fig. 3.14.(1)). La normalisation en DDS s'avère plus cohérente avec la définition probabiliste des coefficients  $a_{ij}$  de la matrice de projection, puisque dans le cas où un pixel  $i$  est complètement immergé (à l'intérieur) dans l'empreinte conique d'un voxel  $j$  (surface de chevauchement égale à la surface de normalisation de DD), le coefficient calculé égal à 1 ( $O_1 \times O_2 / W_1 \times W_2 = 1$ ), or, la probabilité réelle est inférieure à cette valeur ( $< 1$ ) puisque les photons ont une chance d'être détectés en dehors (à l'extérieur) du pixel ( $i$ ).



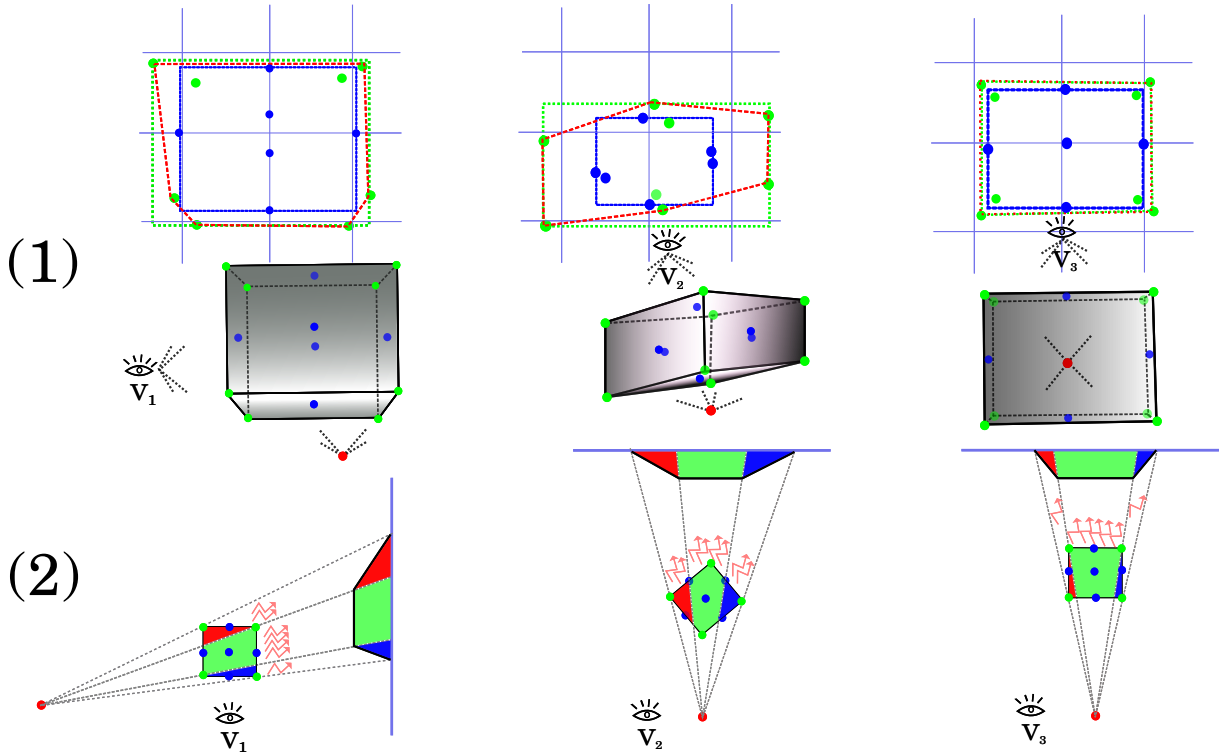
**Figure 3.14:** Schéma comparatif des deux méthodes : DDS et DD.

(1): Approximation de l'empreinte conique d'un voxel, pointillés verts: DDS, pointillés bleus: DD. Approximation de la surface de chevauchement avec les pixels, carré jaune: DD, carré rouge: DDS.

(2): Sélection des points représentatifs du voxel afin de les projeter, point verts : DDS, points bleus: DD (changement des points entre la vue  $V_1$  et  $V_2$ ).

De plus, l'approximation des empreintes coniques voxelliques sur le plan de détection se détermine à partir de projection des huit vertices de chaque voxel  $(x_{i'} \pm \frac{\Delta_x}{2}, y_{j'} \pm \frac{\Delta_y}{2}, z_{k'} \pm \frac{\Delta_z}{2})$  pour DDS (les points en vert Fig. 3.14.(1)/(2)), tandis qu'en DD, elle est calculée à partir des projections des 4 points (points bleus Fig. 3.14.(1)/(2)) formant un plan qui coupe le voxel en deux parties symétriques (les plans en bleu transparent dans Fig. 3.14(2))  $((x_{i'}, y_{j'}, z_{k'} \pm \frac{\Delta_z}{2})$  et  $(x_{i'}, y_{j'} \pm \frac{\Delta_y}{2}, z_{k'})$ , ou  $(x_{i'}, y_{j'}, z_{k'} \pm \frac{\Delta_z}{2})$  et  $(x_{i'} \pm \frac{\Delta_x}{2}, y_{j'}, z_{k'})$ .

Le choix d'approximer l'empreinte conique de voxel à partir des projections des huit vertices se montre aussi plus cohérent avec la définition probabiliste, puisque la surface approximative calculée (pointillés verts dans Fig. 3.15(1)) englobe toujours l'empreinte réelle (pointillés rouges dans Fig. 3.15(1)), assurant ainsi que la probabilité de détection des photons égale à 1, tandis que cette hypothèse (probabilité égale à 1) n'est pas vérifiée dans l'approche DD, puisque l'empreinte approximée (pointillés bleus en Fig.3.15.(1)) est toujours inférieure à celle réelle. De plus, ce choix permet d'éviter la permutation que l'on doit faire en DD, entre les plans coupant symétriquement chaque voxel (les plans en bleu transparent dans Fig. 3.14(2)), qui doit être en fonction des angles de projection (afin d'adapter DD pour le cas où nous faisons superposer le plan  $P_C$  avec la grille détectrice et éviter cette permutation les plans, nous proposons d'effectuer les projections coniques des six points situés au centre des facettes du cube (les points bleus dans Fig. 3.15(1)), et de prendre la plus petite surface qui englobe leurs projections comme une approximation de la forme de l'empreinte conique (le cadre pointillé bleu Fig. 3.15(1)).



**Figure 3.15:** Schéma comparatif des trois méthodes: DD, SF-TT et DDS.

(1): Comparaison entre la projection conique réelle d'un voxel (pointillés rouges) et celles approximées dans la DD (pointillés bleus) et dans la DDS (pointillés verts).

(2): Distribution non uniforme des photons émis (flèches oranges) par un voxel, et sa modélisation par des trapèzes dans la méthode SF-TT.

Enfin, dans la nouvelle approche (DDS), nous n'avons pas effectué la multiplication de chaque coefficient  $a_{ij}$  par la distance représentant le parcours des faisceaux RX à l'intérieur des voxels  $i$  (éq. 3.31, éq. 3.33), avant d'être détectés par les pixels  $j$ . En effet, dans notre façon de calculer les coefficients de la matrice de projection (Fig. 3.13.(3)), nous supposons que tous les photons émis par un voxel ont une distribution (répartition) uniforme. Or, le nombre (intensité) des photons émis varie en fonction des profondeurs parcourues par les faisceaux RX à l'intérieur des voxels (Loi de Beer-Lambert). Par

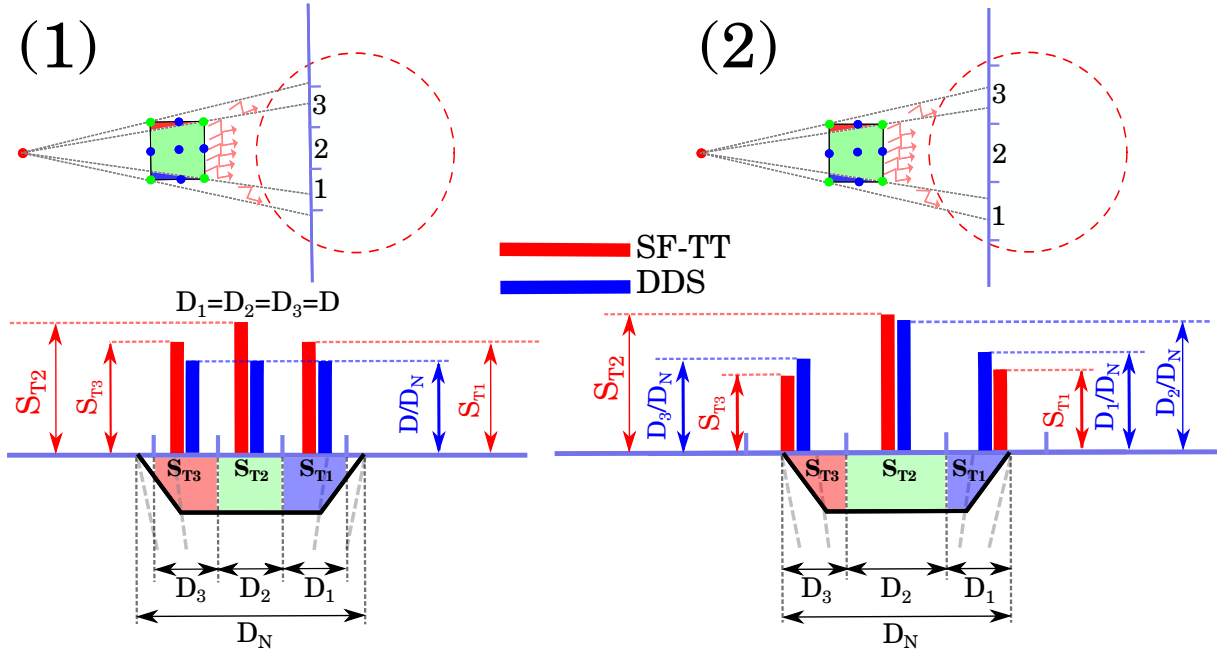
exemple, dans la figure 3.15(2), il est clair que les parties de voxel les plus exposées aux rayonnements RX (surfaces vertes) vont émettre plus de photons (représentés par des flèches oranges) par rapport aux autres (surfaces rouges et bleues). Ainsi, l'approximation des empreintes coniques réelles des cubes par le produit de deux trapèzes (trapèze en rouge-vert-bleu en  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  Fig.3.15.(2)) dans la méthode de empreintes séparables Trapèze-Tapèze (SF-TT [Long et al., 2009]) semble la plus réaliste, avec les formes de trapèzes qui donnent plus de probabilité de détection à la région centrale de l'empreinte conique (zones en vertes dans Fig. 3.16).

Cependant, étant donné que le calcul se fait dans le domaine discret, pour lequel il existe un seul coefficient (scalaire)  $a_{ij}$  reliant le voxel  $j$  au pixel  $i$ , les résultats sont similaires entre la DDS et SF-TT dans le cas où l'empreinte conique d'un voxel ne dépasse pas la largeur de 3 pixels dans les deux directions,  $s$  et  $t$ , du détecteur.

**NB** : Pour notre problématique, nous allons nous mettre dans la situation où la largeur des empreintes d'un voxel sur le plan détecteur ne dépasse pas les trois pixels dans les deux directions principale  $s$  et  $t$ .

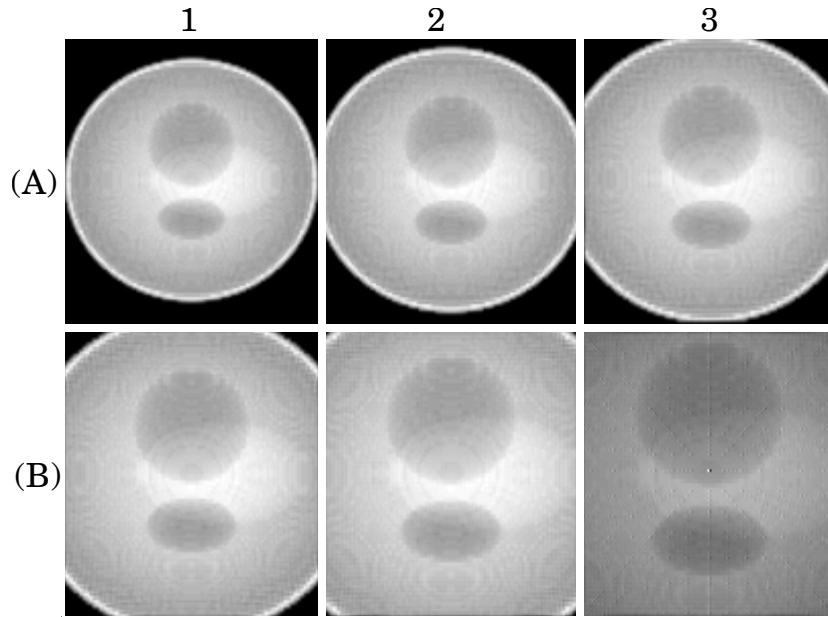
Dans la figure 3.16.(2), pour laquelle les coefficients  $a_{ij}$  sont représentés par des rectangles rouges pour la SF-TT ( $S_{TX}$ ) et bleus pour DDS ( $D_X/D_N$ ), avec  $X \in [1, 2, 3]$ , nous remarquons que les deux méthodes attribuent des probabilités de détection  $a_{ij}$  plus élevées pour les pixels se situant dans la zone qui présente une grande concentration des photons (surface verte  $S_{T2}|D_2/D_N$ ), par rapport à ceux les moins irradiés (surfaces de trapèze rouges et bleues  $S_{T1}|D_1/D_N$  et  $S_{T3}|D_3/D_N$ ). Une fois que l'empreinte conique d'un voxel dépasse la largeur de 3 pixels dans les deux directions du détecteur, la nouvelle approche (DDS) présente une surévaluation des coefficients  $a_{ij}$  concernant les pixels ( $i$ ) les moins exposés aux photons émis par le voxel  $j$ , ce qui explique l'apparition d'artefacts de hautes fréquences dans les images de projection (Fig. 3.17) et de rétroprojection (Fig. 3.18).

Du point de vue complexité temporelle, la méthode SF-TT est la plus complexe et la plus lente, nécessitant (pour chaque voxel) 12 projections [Long et al., 2009] (les huit sommets + quatre points situés au centre des facettes exposées au rayonnement RX) pour définir les deux formes trapézoïdes (dans les deux directions  $s$  et  $t$  du détecteur) et une procédure plus au moins sophistiquée (éq. 3.38) pour déterminer les intersections des empreintes séparables (les deux trapèzes) avec les pixels (surface  $S_{TX}$  en Fig.3.16 avec  $X \in [1, 2, 3]$ ) afin de définir les coefficients  $a_{ij}$ . La méthode DD proposée initialement par Bruno De Man et Samit Basu [Man and Basu, 2004] se montre moins couteuse du point de vu temps de calcul par rapport à la SF-TT, puisqu'elle nécessite 4 projections et 4 rétroprojections sur le même plan  $P_C$  (Fig. 3.9) et une procédure simple pour déterminer les surfaces de chevauchement. Enfin, notre méthode DDS est la plus rapide et facile à mettre en œuvre, étant donné qu'elle nécessite uniquement le calcul de 8 projections (pour chaque voxel) sans avoir recours aux calculs des distances ( $D$ ) représentant les parcours des faisceaux RX à l'intérieur des voxels.



**Figure 3.16:** Schéma comparatif des deux méthodes : DDS et SF-TT.

- (1): Empreinte conique d'un voxel selon un seul axe est supérieure à la largeur de 3 pixels.  
 (2): Empreinte conique d'un voxel selon un seul axe est inférieure à la largeur de 3 pixels.



**Figure 3.17:** Image de projection d'un fantôme 3d **Shepp-Logan** numérique de taille  $128 \times 128 \times 128$  voxel, en utilisant la matrice de projection Distance Driven Simplifiée (DDS).

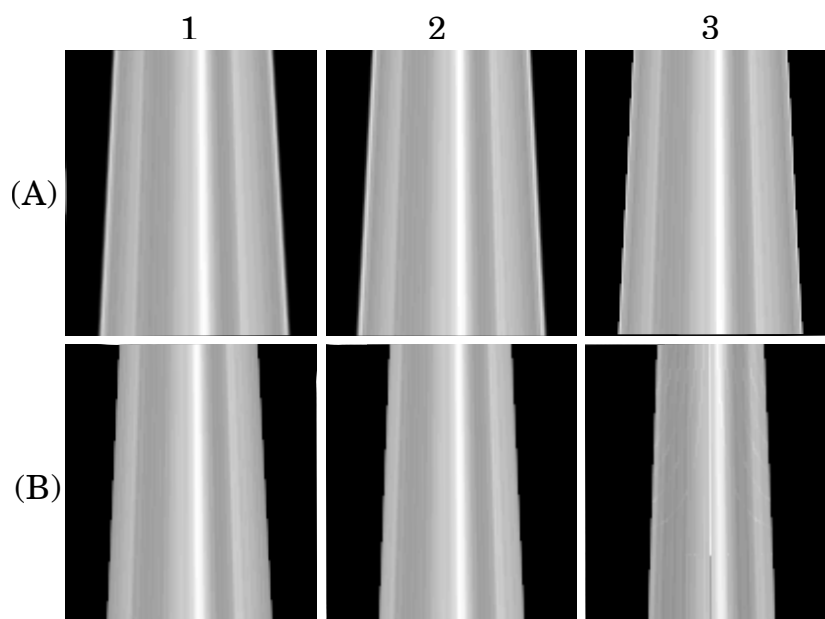
Les paramètres d'acquisition sont:

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 1, (i, j, k) \in [0 \dots 127]^3, (u, v) \in [0 \dots 127]^2, D_{SO} = 720, D_{SD} = 1050.$$

A chaque fois nous faisons varier la taille de pixel :

- (A-1):  $\Delta_s = \Delta_t = 1.2$ , (A-2):  $\Delta_s = \Delta_t = 1.1$ , (A-3):  $\Delta_s = \Delta_t = 1$ , (B-1):  $\Delta_s = \Delta_t = 0.9$ ,  
 (B-2):  $\Delta_s = \Delta_t = 0.8$ , (B-3):  $\Delta_s = \Delta_t = 0.7$ .





**Figure 3.18:** Image de rétroprojection (coupe  $Z = 64$ ) des projections calculées précédemment (Fig. 3.17) en utilisant les mêmes paramètres d’acquisition.

### 3.4 Conclusion

La modélisation directe de processus d’acquisition RX est une étape importante pour la résolution du problème inverse, c’est à dire la reconstruction tomographique. Un modèle précis des opérateurs de projection et de rétroprojection doit intégrer les aspects physiques et géométriques des systèmes d’acquisition, y compris les modèles de la fonction atomique de base utilisés dans la discrétisation des objets imagés. Le principe consiste à désigner la fonction atomique de base de discrétisation la plus représentative du signal 3D continu (reconstruction), et d’estimer sa contribution à la formation de données interceptées et mesurées par chaque capteur élémentaire (pixel). Les opérateurs de projection et de rétroprojection qui ont été proposés dans la littérature réalisent différents niveaux de compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats (section 3.1).

Dans le cas d’une géométrie conique d’un système d’acquisition composé d’une source ponctuelle RX et un détecteur plan, nous avons présenté en détail les outils mathématiques et physiques nécessaires pour la mise en œuvre de quatre modèles différents des opérateurs de projection, à savoir Pixel-Driven [Peters, 1981] (section 3.2.1), Ray-Driven [Joseph, 1982] (section 3.2.2), Distance-Driven [Man and Basu, 2004] (section 3.2.3), et les Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze [Long et al., 2009] (section 3.2.4). L’implémentation de ces différents modèles nous a permis d’approfondir nos connaissances techniques et théoriques sur la modélisation de la physique d’acquisition et d’orienter nos choix vers les techniques les plus avantageuses et les plus adoptées pour notre problématique, basées sur le principe des intégrales des bandes (section 3.2.5) pour estimer la quantité photonique émis (plus exactement transmis) par une fonction atomique de base donnée (indicatrice de voxel) avant d’être intercepté par les capteurs élémentaire de la grille détectrice.

En adoptant le principe des intégrales des bandes, l'indicatrice de voxel comme fonction atomique de base et une définition probabiliste des coefficients des matrices de projection et de rétroprojection (représentation numérique de l'opérateur de projection), nous avons proposé une nouvelle technique similaire à celle de Distance-Driven, c'est la Distance-Driven Simplifiée (Fig. 3.13 - section 3.3). À travers une étude comparative de la nouvelle méthode avec la Distance-Drive et les Empreintes Séparable Trapèze-Tapèze (section 3.3.2), nous avons pu montré la rapidité de la nouvelle approche et la facilité de sa mise en œuvre (par rapport à DD et à SF-TT). Visuellement, dans le cas où les empreintes coniques des voxels ne dépassent pas la largeur de 3 pixels sur les deux directions du détecteur, la nouvelle méthode DDS ne présente pas les artefacts de haute fréquence (que l'on peut voir dans le cas de Pixel-Driven et de Ray-Driven Fig. 3.5 Fig. 3.7) au niveau de projection (Fig. 3.17) et de rétroprojection (Fig. 3.18). Cependant, une évaluation qualitative et quantitative de la nouvelle matrice de projection (et de rétroprojection) utilisée dans les procédures de reconstruction s'avère une étape très importante et obligatoire.

Dans le chapitre suivant, nous allons pouvoir incorporer notre modèle de l'opérateur de projection et de rétroprojection dans les procédures statistiques itératives MAP, appliquées à la reconstruction 3D des réseaux coronaires.



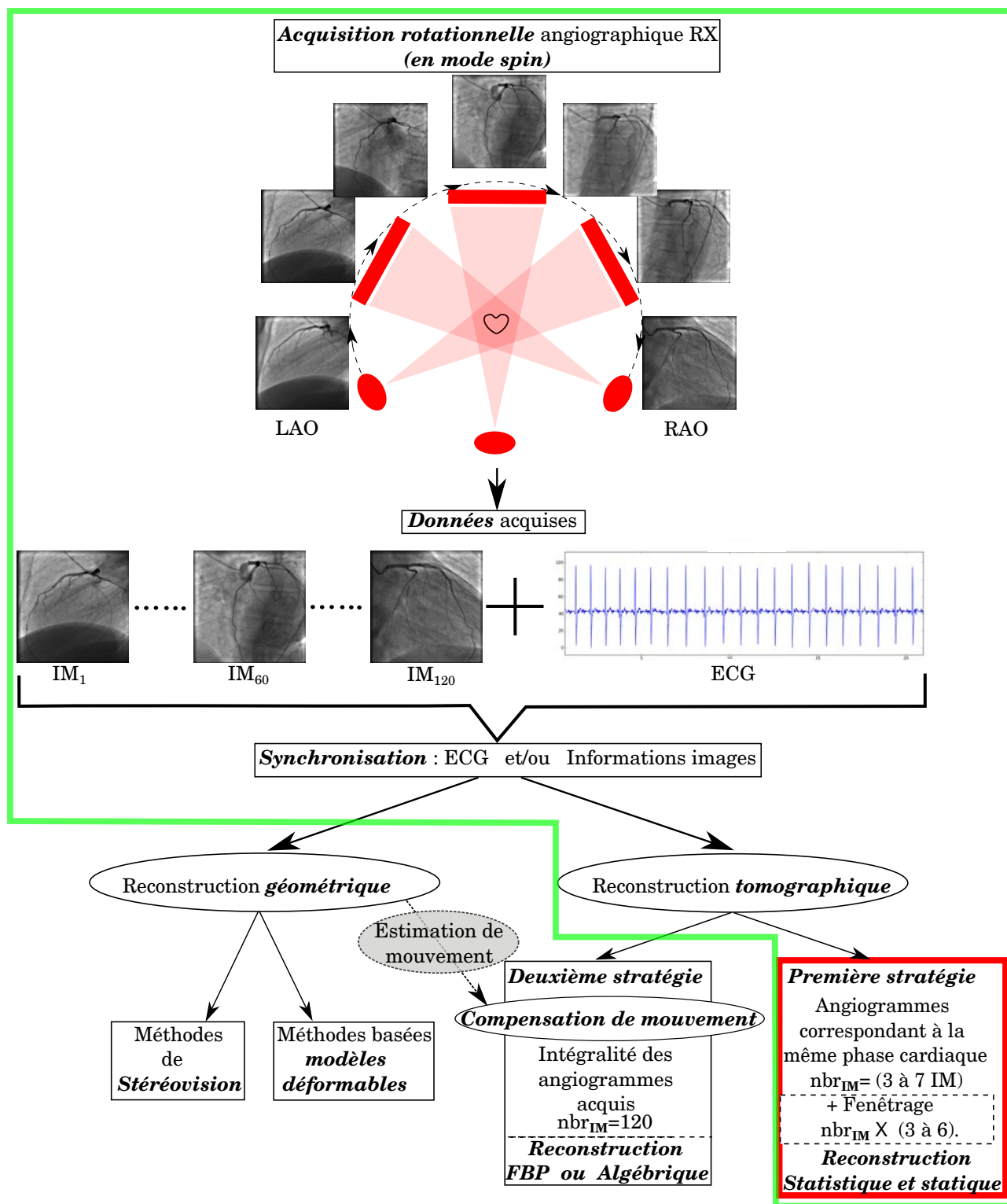
## 4 Méthodes de reconstruction statistique proposées

Après avoir consacré tout un chapitre aux opérateurs de projection et de rétroprojection (chapitre 3), nous nous concentrons, maintenant, sur les différentes étapes permettant la mise en œuvre de nos algorithmes itératifs statistiques de reconstruction, appliqués aux données acquises à partir d'une séquence rotationnelle d'angiographie RX.

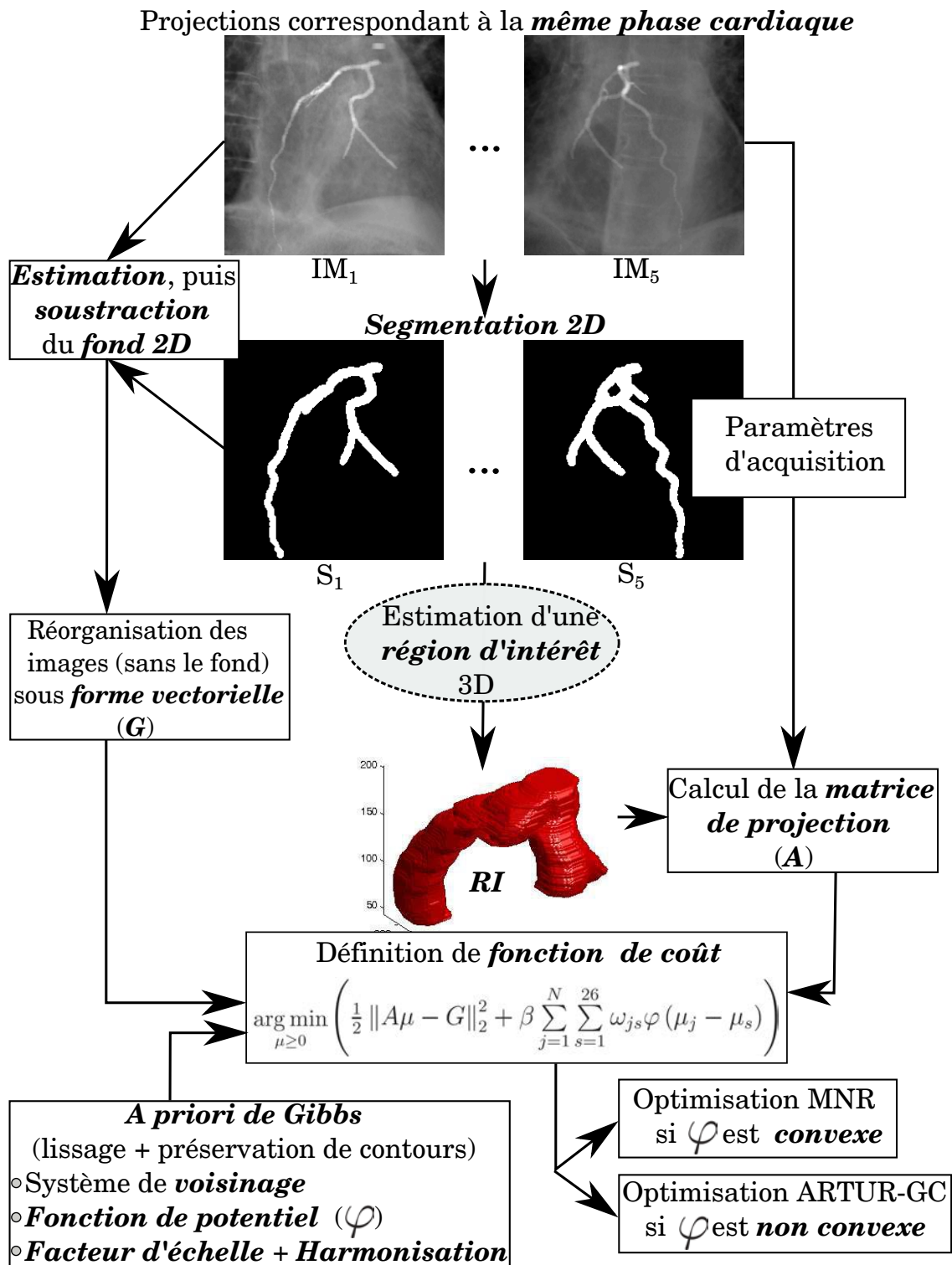
Ayant pris connaissance de différentes techniques et stratégies permettant la reconstruction vasculaire 3D (Fig. 4.1 - voir aussi section 2.2), nous avons opté pour une reconstruction itérative statistique réalisée à partir des angiogrammes correspondant à la même phase cardiaque (zone délimitée par des traits verts dans Fig. 4.1). Ainsi, dans toutes les discussions qui vont suivre, une hypothèse de non variabilité spatio-temporelle de l'objet à reconstruire est imposée, c'est à dire une étape de synchronisation est censé être effectuée (zone délimitée par des traits rouge dans la Fig. 4.1, détaillée dans Fig. 4.2).

Dans un premier temps, nous construisons notre fonction de coût MAP à minimiser (équ. 4.1) en justifiant nos différents choix. Pour ce faire, nous définissons un terme d'attache aux données en adoptant un modèle gaussien pour le bruit d'acquisition (section 4.1.1) et une matrice simplifiée de type Distance Driven Simplifiée pour l'opérateur de projection (section 4.1.2). Puis, nous déterminons le terme d'a priori basé sur le modèle de Gibbs (section 4.2) ; un modèle pouvant incorporer différentes formes de fonctions de potentiel (voir table 2.3.2 - section 2.3.2). Afin de choisir les fonctions de potentiel les plus appropriées à notre problématique, c'est à dire celles fournissant des reconstructions lisses avec des contours nets, nous étudions les conditions assurant une régularisation avec prise en compte des discontinuités des solutions MAP (sections 4.2.2 et 4.2.3).

Après avoir défini l'expression exacte de notre fonction objectif MAP, nous introduisons les procédures itératives d'optimisation (section 4.3) que nous estimons plus adaptées à la forme des fonctions de potentiel adoptées (convexes ou non convexes). Ainsi, nous présentons les algorithmes : (1) maximum A posteriori - Newton Raphson modifié MAP-MNR (section 4.3.1) et (2) maximum a posteriori - ARTUR - gradient conjugué (section 4.3.2).



**Figure 4.1:** Organigramme des différentes méthodes de reconstruction coronariennes réalisées à partir d'une séquence rotationnelle d'angiographie RX (résumé de l'état de l'art - section 2.2). Le grand bloc en vert représente la méthode de reconstruction adoptée. Le bloc en rouge est détaillé dans la figure 4.2.



**Figure 4.2:** Schéma bloc représente les différentes procédures permettant l'élaboration de nos méthodes statistiques de reconstruction des artères coronaires à partir d'une série de projections correspondant à la même phase cardiaque.

## 4.1 Modèle physique du système d'acquisition

A la lumière des discussions effectuées dans la section 2.3.2 et le chapitre 3, nous définissons et justifions nos choix concernant les modèles qui décrivent les deux aspects, déterministes et statistiques, de la procédure d'acquisition, à savoir l'opérateur de projection et le modèle de bruit d'acquisition.

### 4.1.1 Modèle statistique de bruit d'acquisition

La définition d'un modèle théorique précis de bruit d'acquisition reste un domaine de recherche très délicat, nécessitant une connaissance approfondie d'une multitude de paramètres, tels que ceux liés à la calibration du système d'acquisition RX (voir la partie *Modèle physique du processus d'acquisition* dans la section 2.3.2). Par conséquent, la nature du bruit peut changer d'un appareil d'acquisition à un autre.

Cependant, nous n'avons pas de connaissance précise de toutes les étapes de calibration (ces données constructeur sont généralement confidentielles) et nous ne pouvons pas définir un modèle uniquement à partir d'une étude théorique.

Nous avons décidé d'adopter le modèle de bruit le plus simple et le plus utilisé dans le domaine du traitement d'image, c'est à dire le bruit blanc gaussien (éq. 2.11). Nous justifions notre choix en nous appuyant sur les deux arguments suivants :

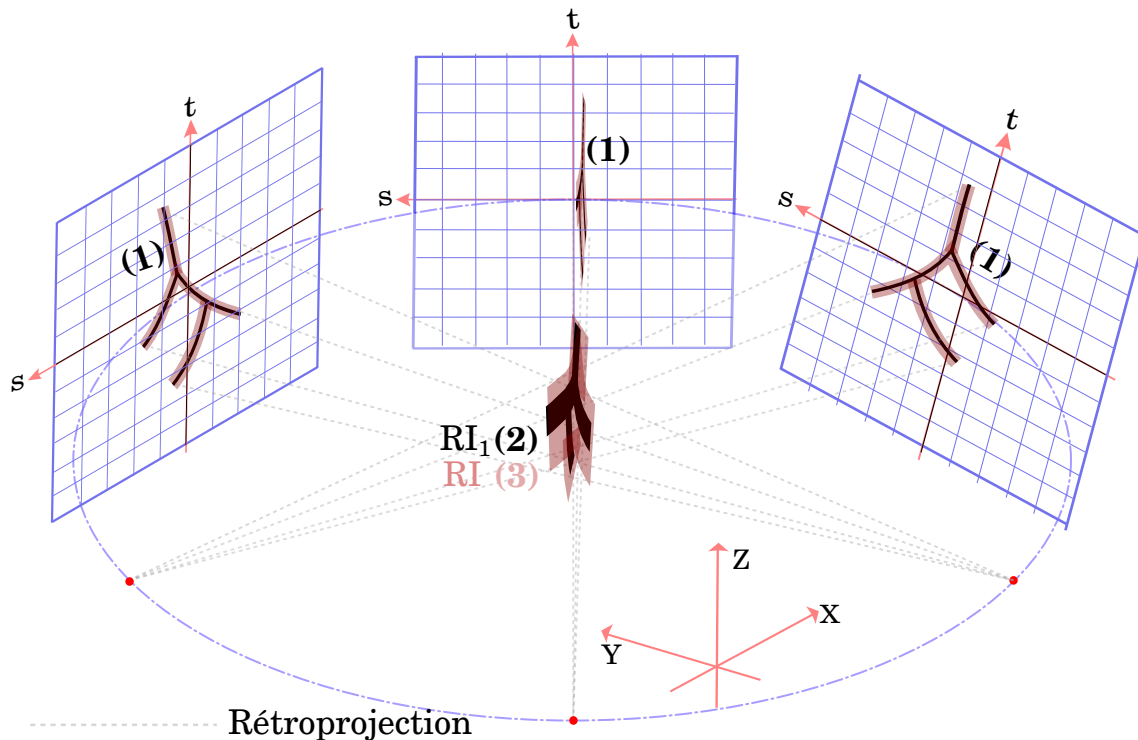
- D'un point de vue pratique, l'adoption d'un tel modèle nous garantit une forme convexe et quadratique de l'énergie d'attache aux données (éq. 2.11), une propriété très souhaitable dans les procédures numériques d'optimisation pour la détermination de l'optimum global (voir section 2.3.3).
- D'un point de vue théorique, le modèle gaussien (normal) peut très bien approximer celui de Poisson (éq. 2.12) lorsque la moyenne de ce dernier (Poisson) est grande (quand la moyenne  $> 20$ ).

### 4.1.2 Modèle déterministe Simplifié de l'opérateur de projection

Dans une reconstruction 3D, les matrices de projection ainsi que les données mesurées et reconstruites sont de très grande taille (dans notre cas, notre matrice est composée de  $256^3 \times (256^2 \times 5)$  éléments pour reconstruire un objet échantillonné en  $256^3$  voxels à partir de 5 projections de  $256^2$  pixels), nécessitent ainsi un espace de stockage important et augmentant considérablement le temps de calcul. De plus, le nombre restreint des projections correspondant à la même phase cardiaque (dans notre cas, 5 projections) complique le problème mal posé de reconstruction. Pour ces raisons, nous avons décidé de restreindre la reconstruction à un volume d'intérêt englobant les structures 3D coronariennes. Cette restriction améliore le conditionnement du problème de reconstruction en limitant le nombre d'inconnues à déterminer (les coefficients d'atténuation). Elle permet également de générer des matrices de projection pré-calculées (simplifiées) définies uniquement dans la région d'intérêt, en réduisant ainsi l'espace de stockage et le temps de calcul (en diminuant les nombres d'opérations effectuées durant une reconstruction statistique itérative).

Pour ce faire, nous proposons de suivre les étapes suivantes (Fig. 4.3) :

- **Étape 0** : Calcul des matrices de rétroprojection en respectant les paramètres géométriques de l'acquisition RX (voir section 3.2). Notons ici qu'un calcul précis



**Figure 4.3:** Création d'un masque 3D (région d'intérêt) englobant les vaisseaux 3D.

(0) : Calcul des matrices de rétro-projection en respectant les paramètres géométriques d'acquisition.

(1) : Dilatation (zones 2D en rouge) du résultat des segmentations 2D des vaisseaux (zones 2D en noir) réalisées à partir des projections 2D.

(2) : Détermination de la région 3D englobant le réseau coronarien,  $RI_1$ , résultante de l'intersection des rétroprojections des segmentations 2D dilatées (zone 3D en noire).

(3) : Dilatation de  $RI_1$  afin de concevoir la région d'intérêt 3D finale,  $RI$  (zone 3D en rouge).

des modèles de rétroprojection n'est pas requis puisque nous n'allons pas forcément les utiliser directement dans la procédure itérative de reconstruction. Ainsi, nous proposons d'utiliser la modélisation la plus rapide à calculer tel que le Pixel-Driven (section 3.2.1).

- **Étape 1** : Segmentations des coronaires 2D en appliquant un filtre de Frangi [Frangi et al., 1998] à partir des angiogrammes, suivi d'une dilatation morphologique (régions noires et rouges dans les plans de détection - Fig. 4.3).
- **Étape 2** : Détermination d'une région d'intérêt initiale  $RI_1$  qui représente l'intersection des différentes rétroprojections des segmentations 2D effectuées dans l'étape 1 (régions noires dans la zone de reconstruction - Fig. 4.3).
- **Étape 3** : Détermination de la région d'intérêt  $RI$  finale en dilatant  $RI_1$  (régions rouges dans la zone de reconstruction - Fig. 4.3). Nous proposons d'appliquer une dilatation morphologique avec un élément structurant en forme de boule (rayon de 3 à 5 voxels).



**Remarques :**

- Les dilatations 2D (étape 1) et 3D (étape 3) compensent approximativement les erreurs dues aux segmentations et aux procédures de rétroprojection (modèles utilisés imparfaits). En quelque sorte, ces dilatations effectuées garantissent une marge de confiance assurant que la région d'intérêt englobent entièrement l'objet à reconstruire (vaisseaux coronaires).
- En partant de l'hypothèse que le centre de rotation est fixe pendant toute l'acquisition RX (selon l'axe  $Z$  associé à l'objet 3D - Fig 3.1), l'intersection effectuée lors de l'étape 3 peut se faire avec un seul opérateur de projection/rétroprojection (étape 3) associé à une position du C-arm (par exemple  $\theta = 0$  - Fig 3.1). En respectant les incidences de projection, nous appliquons des rotations autour de l'axe fixe de rotation des différentes rétroprojections, avant de calculer leurs intersections.
- Les matrices simplifiées de projection (en tenant compte de  $RI$ ) s'avèrent plus appropriées pour une reconstruction statistique à partir des projections soustraites (les fonds des images 2D sont supprimés - voir section 5.1.B). En effet, la suppression du fond 2D permet d'éviter l'incorporation des informations concernant les structures environnantes 3D dans la procédure de reconstruction, accélérant ainsi les calculs et améliorant également les résultats.

## 4.2 Modèle a priori

Dans la section 2.3, nous avons pu relever les points suivants :

- L'importance de l'information a priori dans le cas d'une reconstruction tomographique réalisée à partir d'un nombre très réduit de projections (Fig. 2.3 (C3, C4)) [Smith et al., 1978, Griinbaum, 1982, Kazantsev, 1991, Siltanen et al., 2003].
- La contribution majeure des a priori Markoviens d'une manière générale et en particulier le modèle de Gibbs (appliqué au champ aléatoire de Markov) dans l'amélioration des résultats de reconstruction [Geman and Geman, 1984, Derin and Elliott, 1987, Hebert and Leahy, 1989, Green, 1990, Higdon et al., 1997, Leahy and Yan, 1991].
- Le grand intérêt d'utiliser le formalisme bayésien dans la définition des fonctions de coût incorporant à la fois le modèle statistique de bruit d'acquisition et celui a priori permettant de régulariser le problème inverse [Bernardo et al., 1994, Hanson, 1993].

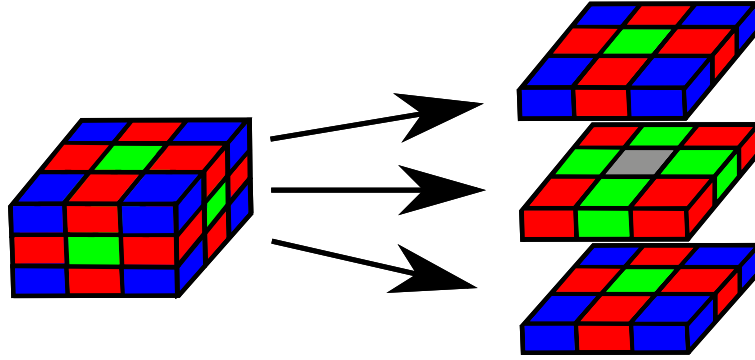
Pour toutes ces raisons, nous avons adopté la reconstruction *MAP* (éq. 2.15) avec un modèle de Gibbs comme a priori, qui nous semble le plus adapté à notre problème inverse mal posé.

Dans cette section, nous commençons par définir la forme générale de la fonction de coût MAP, dans le cas de l'adoption d'un a priori Markovien de Gibbs. Ensuite, nous effectuons une étude théorique des propriétés analytiques des fonctions de potentiel (utilisées au sein de la famille des a priori *MRF* - éq. 2.25), assurant une régularisation avec prise en compte des discontinuités de la solution MAP. A la lumière de cette étude, nous allons pouvoir introduire un nouveau paramètre (le facteur d'échelle  $\rho$ ) dans l'expression du coût total et justifier le choix de fonctions de potentiel que l'on compte

utiliser dans nos reconstructions de réseaux coronariens.

### 4.2.1 Fonction de coût - MAP

Afin de pouvoir déterminer avec exactitude notre fonction de coût, dans le cadre d'une reconstruction bayésienne MAP (éq. 2.15) avec un a priori Markovien (éq. 2.25), nous devons définir un système de voisinage. Cependant, dans notre problématique, nous sommes confrontés à deux propriétés contradictoires de ce système de voisinage. D'un côté, les vaisseaux coronariens 3D correspondent à des structures tubulaires complexes et très fines, par conséquent, nous ne pouvons pas trop élargir la zone locale associée aux interactions du champ Markovien (ce qui implique la réduction du système de voisinage). D'autre part, nous disposons d'un nombre très réduit de projections, nécessitant une reconstruction fortement régularisée, avec un nombre considérable d'intersections locales entre les sites voisins (nous avons intérêt dans cet autre cas à élargir le système de voisinage). Ainsi, nous avons opté pour un système de voisinage à 26-connexité (Fig. 4.4) que nous estimons un choix acceptable.



**Figure 4.4:** Système de voisinage à 26-connexité définissant les interactions locales dans le modèle markovien de l'objet 3D à reconstruire : voxel gris : site central, voxels verts (6): sites voisins situés à une distance  $\Delta$ , voxels rouges (12): sites voisins situés à une distance  $\sqrt{2}\Delta$ , voxels bleus (8): sites voisins situés à une distance  $\sqrt{3}\Delta$ .

avec :  $\Delta_X = \Delta_Y = \Delta_Z = \Delta$  est la distance entre deux voxels, elle représente l'espacement séparant leurs centres d'inertie.

Finalement, avec l'adoption d'une modélisation gaussienne de bruit (éq. 2.11), nous pouvons établir l'expression exacte de notre fonction objectif (éq. 4.1).

$$\begin{aligned}
 \mu^* &= \arg \min_{\mu \geq 0} (f^L(\mu) + \beta f^P(\mu)) \\
 &= \arg \min_{\mu \geq 0} \left( \frac{1}{2} \|A\mu - G\|_2^2 + \beta f^P(\mu) \right) \\
 &= \arg \min_{\mu \geq 0} \left( \frac{1}{2} \|A\mu - G\|_2^2 + \beta \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \varphi(\mu_j - \mu_s) \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec,  $f^L$  représente le terme d'attache aux données (éq. 5.2), le terme d'a priori  $f^P$  représente la somme de potentiels  $\varphi$  des sites voisins  $\mu_j$  et  $\mu_s$  (Fig. 4.4) et  $\omega_{js}$  est un facteur de pondération inversement proportionnel à la distance séparant les sites voisins  $s$  et  $j$ .

### 4.2.2 Étude heuristique des propriétés de lissage avec préservation des contours

Dans la littérature, nous pouvons citer deux approches qui ont permis de déterminer de façon théorique les propriétés que doit vérifier la fonction de potentiel  $\varphi$  (éq. 4.1), afin d'assurer une régularisation avec prise en compte des discontinuités (c.à.d. des contours) de la reconstruction  $\mu^*$  [Charbonnier, 1994].

La première approche dite de **processus de ligne** (que l'on cite à titre indicatif), fait appel à des variables auxiliaires marquant les discontinuités entre deux sites voisins [Geman and Geman, 1984]. Les processus de ligne ont pour rôle d'attribuer un coût évaluant la discontinuité dans le système de voisinage adopté. Ils peuvent être évoqués d'une manière explicite [Geiger and Girosi, 1991, Marroquin, 1984] ou implicite [Blake and Zisserman, 1987, Ganan and McClure, 1985], booléenne [Blake and Zisserman, 1987] ou continue [Ganan and McClure, 1985].

Dans ce contexte, Geman et al. [Geman and Reynolds, 1992] ont défini deux propriétés essentielles pour la préservation des discontinuités dans le processus de régularisation, à savoir la concavité de  $\varphi(\sqrt{t})$  et le comportement asymptotique de  $\varphi(t)$ .

Dans la deuxième approche, les processus de ligne n'interviennent pas dans la définition des règles assurant la régularisation avec préservation du contour des fonctions de potentiel  $\varphi$ . Plusieurs auteurs ont établi de manière souvent **empirique** [Hebert and Leahy, 1989, Lalush and Tsui, 1992] des règles garantissant une diffusion anisotropique que doit exercer les fonctions de potentiel. Dans ce contexte, nous pouvons citer les travaux de Huber [Huber, 2011], de Lange [Lange, 1990] et de Perona et al. [Perona and Malik, 1990].

Une lecture de ces travaux nous montre que certaines conditions imposées aux fonctions de potentiel  $\varphi$  peuvent se contredire (d'un article à l'autre). Ces contradictions sont observées au niveau des contraintes garantissant la convergence algorithmique et/ou analytique des fonctions objectif à minimiser. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi l'étude effectuée par Charbonnier et al. [Charbonnier, 1994, Blanc-Féraud et al., 1995, Charbonnier et al., 1997] qui ont opté pour une démarche **unificatrice** afin d'étudier le comportement des fonctions de potentiel  $\varphi$ . Ils se sont basés sur une étude **heuristique** des équations normales associées au problème de reconstruction (éq. 4.1) dans le cas où les fonctions  $\varphi$  sont **continûment dérivables**.

#### Analogie avec l'EDP de diffusion

L'étude que nous allons effectuer est un peu différente de celle proposée dans la thèse de Charbonnier [Charbonnier, 1994], puisque nous nous basons sur une interprétation heuristique de l'algorithme de descente de gradient (éq. 2.33) appliqué au problème de reconstruction (au lieu des équations normales associées). Il faut dire que l'adoption d'un tel algorithme (éq. 4.4) ne garantit pas toujours la convergence vers un minimum global (la solution optimale numériquement), néanmoins, il converge vers un minimum local.

**NB :** Étant donné que cette procédure (de lissage avec préservation de contours) est appliquée sur tous les sites (voxels) de l'objet à reconstruire, il semble évident de traiter

de la même façon les différences entre deux sites voisins (même valeur absolue et de signe opposé  $(\mu_j - \mu_s) = -(\mu_s - \mu_j)$ ). C'est la raison pour laquelle toutes les fonctions de potentiel  $\varphi$  proposées dans la littérature sont **paires** :  $\varphi(\mu_j - \mu_s) = \varphi(-(\mu_s - \mu_j))$  (à titre illustratif, voir le Tabl. 2.4). Ainsi, l'étude qui va suivre est restreinte au domaine  $[0, +\infty[$ .

Dans un premier temps, nous calculons le gradient numérique (éq. 4.2, éq. 4.3) de notre fonction de coût (éq. 4.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f^P}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \frac{\partial \varphi(\mu_j - \mu_s)}{\partial \mu_j} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \left( \omega_{js} \frac{\varphi'(\mu_j - \mu_s)}{(\mu_j - \mu_s)} \right) (\mu_j - \mu_s) = -\Delta_{pond} \mu \\ \frac{\partial f^L}{\partial \mu} = A^T A \mu - A^T G \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec,  $\varphi' = \frac{\partial \varphi(\mu_j - \mu_s)}{\partial \mu_j}$  représente la dérivée de  $\varphi$  par rapport à la variable  $\mu_j$ , et l'expression linéaire  $\sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \left( \omega_{js} \frac{\varphi'(\mu_j - \mu_s)}{(\mu_j - \mu_s)} \right) (\mu_j - \mu_s)$  peut être représentée sous la forme d'un produit matriciel  $-\Delta_{pond} \mu$ , dont  $\Delta_{pond}$  représente une approximation discrète de l'opérateur Laplacien  $\Delta$ , pondéré par les fonctions (dites de **pondération**)  $\psi = \frac{\varphi'(\mu_j - \mu_s)}{(\mu_j - \mu_s)}$  et les constantes  $\omega_{js}$ .

$$\nabla f = A^T A \mu - A^T G - \beta \Delta_{pond} \mu \quad (4.3)$$

Ainsi, nous définissons une itération de l'algorithme de descente de gradient (éq. 4.4), en exploitant sa forme générique (éq. 2.33) et l'expression du gradient (éq. 4.3) .

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - t^{(k)} \nabla \mu^{(k)} \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}}{t^{(k)}} = -(A^T A \mu^{(k)} - A^T G - \beta \Delta_{pond} \mu^{(k)}) \end{array} \right. \quad (4.4) \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}}{t^{(k)}} - \beta \Delta_{pond} \mu^{(k)} = (A^T G) - A^T A \mu^{(k)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

En analysant la contribution de l'a priori ( $-\beta \Delta_{pond} \mu$ ) à chaque itération (éq. 4.4), nous pouvons dire qu'il permet de filtrer la solution courante  $\mu^{(k)}$  par un laplacien négatif pondéré  $-\Delta_{pond}$  (indépendamment du terme d'attache aux données  $f^L$ ).

Les constantes de pondération  $\omega_{js}$  sont inversement proportionnelles à la distance séparant les sites voisins  $s$  et  $j$ . Elles ont pour objectif d'assurer le même "degré" de filtrage dans les différentes directions au voisinage d'un site  $\mu_j$  (cette valeur de pondération est égale à 1 dans les directions des sites les plus proches (voxels verts dans la Fig. 4.4), et égale à  $1/\sqrt{2}$  ou  $1/\sqrt{3}$  dans la direction des sites les moins proches ( $1/\sqrt{2}$  pour les voxels bleus et  $1/\sqrt{3}$  pour les rouges dans la Fig. 4.4)).

En choisissant le pas de descente  $t^{(k)}$  infiniment petit ( $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}}{t^{(k)}} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial t}$ ) (garantissant ainsi une convergence théorique) et la rétroprojection des données initiales  $G$

comme objet initial  $\mu^{(0)} = A^T Y$ , nous nous retrouvons dans le cas d'un **schéma d'une EDP de diffusion non linéaire** (éq. 4.5) très similaire à celui proposé par Nordström [Nordström, 1990] (éq. 4.6).

$$\begin{cases} \mu^0 = A^T G \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} - \beta \Delta_{pond} \mu = (A^T G) - A^T A \mu \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \mu_0(\text{image initiale}) \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} - \text{div}(c(|\nabla \mu|)) \nabla \mu = \mu_0 - \mu \end{cases} \quad (4.6)$$

avec,  $c$  est une fonction paire (puisque'elle est fonction de  $|\nabla \mu|$ ) caractérisant le comportement et la force de la diffusion, et  $\mu_0 - \mu$  est un terme forçant la solution  $\mu$  à rester proche de l'image initiale  $\mu_0$ . La discrétisation du terme  $\text{div}(c(|\nabla \mu|)) \nabla \mu$  peut aussi être représentée sous la forme d'un laplacien pondéré  $\Delta_{pond}$  par la fonction  $c$ .

Maintenant, en faisant la correspondance entre les deux équations (éq. 4.5 et éq. 4.6), nous pouvons dire que la reconstruction MAP consiste à appliquer un processus de diffusion à l'objet  $\mu^0$ , défini par la rétroprojection des données mesurées  $G$  ( $A^T G$ ). Le comportement de cette diffusion est déterminé par la constante  $\beta$  et les fonctions  $\psi$ , définissant la puissance de la diffusion (partie a priori), et par le terme  $(A^T G) - A^T A \mu$ , forçant la solution de la diffusion à respecter (c.à.d. rester proche) des données mesurées  $G$  (partie attache aux données).

### Régularisation avec prise en compte des discontinuités

Le principe (élément clef) d'une régularisation avec préservation de contours est basé sur **l'interruption du processus de lissage (diffusion)** (assuré par  $-\Delta_{pond}$ ) aux emplacements des discontinuités (liées aux contours).

- La propriété de lissage est souhaitable dans le cas où le site  $\mu_j$  est situé dans une zone de faible variation ( $\forall s \in [1, 26], t = \mu_j - \mu_s \approx 0$ ). Ces petites variations peuvent être considérées comme dues au bruit. Le cas échéant, une régularisation quadratique de Tikhonov ( $\varphi(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \frac{\varphi(t)'}{t} = 1$ ) se montre idéale pour un bon conditionnement du problème inverse mal posé, tout en imposant une contrainte globale de lissage (régularisation) de la solution (de la reconstruction). Ainsi, en posant la condition,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi'(t)}{t} = 1$ , le Laplacien pondéré (éq. 4.5) se comporte comme un Laplacien simple, produisant ainsi une diffusion isotropique (dans toutes les directions) au voisinage de  $\mu_j$ .
- La propriété de préservation des discontinuités est imposée au niveau des contours. La présence d'une frontière dans un voisinage  $s$  du site  $j$  peut très bien être modélisée par une forte variation de la différence  $t = \mu_j - \mu_s$ . Il s'agit alors d'interrompre le processus de lissage afin de préserver la discontinuité au voisinage du site voisin  $\mu_s$ . Pour ce faire, un choix évident consiste à annuler la fonction de pondération dans cette direction  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi'(t)}{t} = 0$ .

$\varphi(t)$	$\dot{\psi}(t) = \frac{\varphi'(t)}{t}$	$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}(t)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t)$
$\varphi_{GM} = \frac{t^2}{1+t^2}$ (N.C.)	$\dot{\psi}_{GM} = \frac{2}{(1+t^2)^2}$	2	0
$\varphi_G = \log \cosh(t)$ (C.)	$\dot{\psi}_G = \frac{\tanh(t)}{t}$	1	0
$\varphi_{HL} = \log(t^2 + 1)$ (N.C.)	$\dot{\psi}_{HL} = \frac{2}{1+t^2}$	2	0
$\varphi_{SM} = \sqrt{1+t^2} - 1$ (C.)	$\dot{\psi}_{SM} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	1	0
$\varphi_{PM} = -0.5(\exp(-t^2) - 1)$ (N.C.)	$\dot{\psi}_{PM} = \exp(-t^2)$	1	0

**Table 4.1:** Exemples de fonctions de potentiel  $\varphi$  continûment dérivables vérifiant certaines conditions proposées par Charbonnier et al. [Charbonnier, 1994] afin d'assurer une régularisation avec préservation de contours (C. : convexe, N.C. : Non Convexe).

De cette manière, Charbonnier a pu établir deux conditions aux limites des fonctions de pondération  $\frac{\varphi'(t)}{t}$  associées à celles de potentiel  $\varphi$  **continûment dérivables**. Entre ces deux limites, il a imposé une contrainte de décroissance stricte et de continuité des  $\dot{\psi}$  afin de prendre en compte toutes les valeurs possibles des différences entre sites voisins (assurer la continuité de la solution par rapport aux données).

Avec ces trois conditions (éq. 4.7) (à une constante positive multiplicative près), il a pu démontrer le comportement de lissage avec prise en compte de discontinuité pour un grand nombre de fonctions de potentiel  $\varphi$  continûment dérivables (Tabl. 4.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \text{ est strictement décroissante et continue sur } [0, +\infty[ \\ \lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}(t) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

avec,  $\dot{\psi}(t)$  représente la fonction de pondération  $\frac{\varphi'(t)}{t}$ .

**NB :** Il faut noter que la fonction de Green ( $\dot{\psi}_G$  dans Tabl. 4.1) n'est pas définie quand la différence entre deux sites voisins est nulle ( $t = 0$ ). Néanmoins, elle admet une limite finie en 0 (qui égale à 1), ainsi, elle peut être prolongeable par continuité.

Cependant, ces conditions (éq. 4.7) ne sont pas toutes vérifiées par des fonctions de potentiel, mêmes très pertinentes dans le domaine du lissage avec préservation de contour, telles que la fonction linéaire ( $|t|$ ) [Besag, 1986] ou d'une façon plus générale la Gaussienne généralisée [Bouman and Sauer, 1993] (éq. 4.8) ainsi que la fonction de Huber (éq. 4.9).

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{GG} = |t|^\alpha, (1 \leq \alpha < 2) \Rightarrow \dot{\psi}_{GG}(t) = \frac{\alpha}{2} |t|^{\alpha-2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}_{GG}(t) = +\infty \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\dot{\psi}_H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t > 1 \end{cases} \Rightarrow \dot{\psi}_H \text{ n'est pas décroissante sur } [0, +\infty[. \quad (4.9)$$

où, la fonction de pondération  $\dot{\psi}_H(t)$  est calculée à partir de l'éq. 2.26. Notons ici que la fonction de Huber vérifie bien les conditions aux limites imposées dans l'éq. 4.7 :

$\dot{\psi}_H(0) = 1$  et  $\dot{\psi}_H(+\infty) = 0$ .

De notre côté, nous proposons une explication heuristique similaire à celle de Charbonnier, mais plus unificatrice concernant les propriétés de lissage avec prise en compte de discontinuité.

La correspondance effectuée entre les deux équations, éq. 4.5 et éq. 4.6), nous a montré l'équivalence entre une régularisation avec préservation de contour et une diffusion anisotrope.

Le principe consiste donc à effectuer une diffusion conditionnelle : forte dans les zones à faible gradient (régularisation) et faible dans les zones à fort gradient, voir nulle, dans lesquelles des discontinuités intéressantes (frontières) peuvent exister [Perona et al., 1994]. Étant donné que le basculement entre les deux états de la diffusion est assuré par les fonctions de pondération  $\dot{\psi}$  évaluant les différences entre sites voisins  $t$  (gradient), nous allons imposer les conditions suivantes (éq. 4.10).

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\psi}(t) = 0 \\ 2) \lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}(t) > \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\psi}(t) \\ 3) \dot{\psi}(t) \text{ est paire} \\ 4) \forall t_1, t_2 \in [0, +\infty[, t_1 < t_2 \Rightarrow \dot{\psi}(t_1) \geq \dot{\psi}(t_2) \end{array} \right. \quad (4.10)$$

La condition 1) permet d'interrompre la diffusion à partir d'une certaine valeur de différence (approximation du gradient) entre sites voisins (transition situé dans une zone frontière).

La condition 2) permet d'avoir une diffusion plus forte dans une zone de faible gradient par rapport à une de fort gradient.

La condition 3) empêche la création d'une discontinuité non désirable (par le processus de diffusion) dans une zone homogène ou constante (le poids de la diffusion doit être le même quel que soit le signe de la différence entre deux sites voisins).

La condition 4) modélise la non croissance (décroissance non stricte) de la fonction  $\dot{\psi}$  sur  $[0, +\infty[$ , afin de garantir la diffusion anisotrope.

**NB** : Notons ici que l'on peut déduire d'autres conditions à partir de celles proposées dans l'éq. 4.10. Par exemple, nous pouvons conclure qu'à partir des conditions :

- 1) et 2), que la limite de la fonction de pondération  $\dot{\psi}$  au voisinage de zéro doit être strictement positive,
- 1) , 3) et 4), que la fonction de pondération est toujours positive,
- 3), que la fonction de potentiel  $\varphi(t)$  est paire aussi.

Notons aussi que les quatre conditions mentionnées dans l'éq. 4.10 ne contredisent pas celles proposées par Charbonnier (éq. 4.7). Cependant, elles ne garantissent pas l'**unicité** ou la **stabilité** de la solution MAP.

Après avoir défini les conditions à vérifier par les fonctions de pondération, afin d'assurer des solutions régularisées (lisses) avec des contours nets, il est intéressant d'analyser la

manière dont elles gèrent le compromis entre le lissage et la préservation de contours. Pour cela, nous allons étudier les courbes de différentes fonctions de pondération (Fig. 4.5).

**NB :** Afin de pouvoir comparer toutes les fonctions de pondération vérifiant les conditions de l'éq. 4.7 (Fig. 4.5-(A)), nous avons multiplié la fonction de Hebert et Leahy  $\varphi_{SM}$  et celle de Geman et McClure  $\varphi_{GM}$  (Tab. 4.1) par une constante positive égale à 0.5, pour avoir les mêmes conditions aux limites.

En analysant la Fig. 4.5, nous remarquons une similarité de comportement entre les courbes  $\psi$  (fonctions de pondération) : des fortes valeurs pour des faibles gradients (au voisinage de zéro), assurant ainsi une diffusion maximale (lissage), et des faibles valeurs pour des gradients forts, minimisant ainsi la puissance de la diffusion afin de préserver au maximum les discontinuités. Ce basculement entre ces deux états (lissage et préservation de contour) se fait de manière continûment décroissante, à l'exception de  $\psi_H$  associée à la fonction de Huber qui reste constante au voisinage de zéro (la partie quadratique - régularisation de Tikhonov).

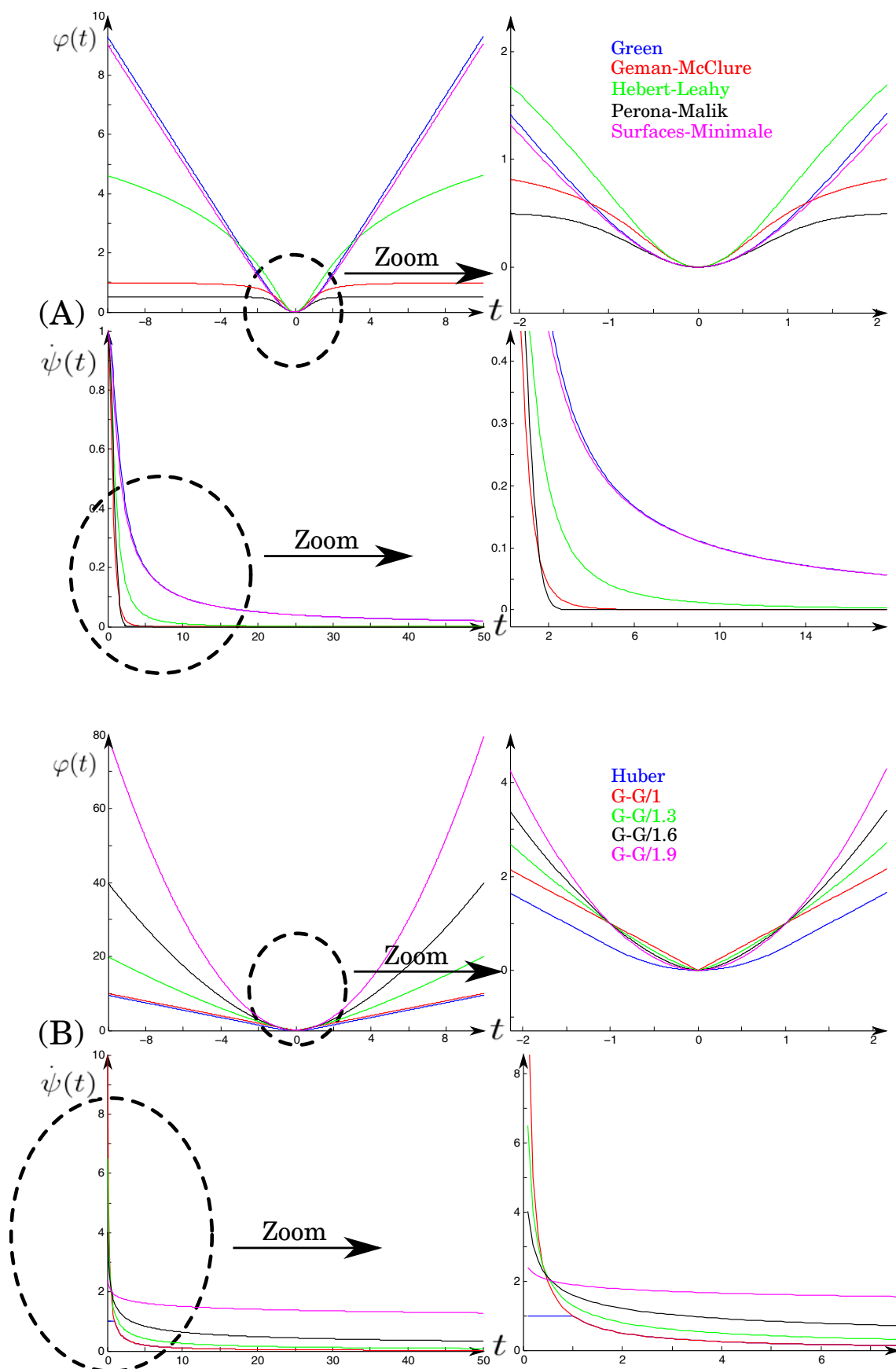
Sur la partie (A) de la Fig. 4.5 (les conditions 4.7 sont vérifiées), nous constatons une similitude de comportements entre les deux fonctions **convexes**, de Green (en bleu) et de surfaces minimales (en magenta) et entre les deux fonctions **non convexes**, de Perona-Malilk (en noire) et de Geman-MacClure (en Rouge). Les fonctions de pondération associées aux fonctions de potentiel non convexe (de Perona-Malilk, de Hebert-leahy et de Geman-MacClure) décroissent plus rapidement que celle associées aux fonctions de potentiel convexes (Green et surface minimal). Dans le premier cas ( $\psi_{PM}$  et  $\psi_{GM}$ ), le passage de l'état de lissage à celui de préservation du contour s'effectue brusquement, à l'inverse du premier cas ( $\psi_G$  et  $\psi_{SM}$ ). Ainsi, nous pouvons nous attendre (prédire) à une meilleure préservation de contour (avoir des contours francs) lorsque nous appliquons les fonctions de potentiel non convexes  $\varphi_{PM}$  et  $\varphi_{GM}$  que celles convexes,  $\varphi_G$  et  $\varphi_{SM}$ . Cependant, la convergence n'est pas garantie (pour des fonctions non convexes) et les reconstructions résultantes peuvent souffrir d'une instabilité due aux passages quasi abrupts entre les deux états de lissage et d'interruption de lissage (petite variation des données peut entraîner un changement important de la solution).

Sur la partie (B) de la Fig. 4.5, nous représentons les fonctions convexes qui ne vérifient pas les conditions imposées par Charbonnier (eq. 4.7). Nous constatons que la limite en 0 des fonctions de pondération associées à celles Gaussiennes Généralisées tend vers l'infini, pouvant ainsi provoquer une instabilité numérique pendant le calcul. Cependant, elles (les  $\psi$ ) sont bien définies et bornées au voisinage proche de zéro.

Nous remarquons aussi que la transition entre les deux états extrêmes des  $\psi_{GG}$  baissent avec l'augmentation du paramètre  $\alpha$  ( $1 \leq \alpha < 2$  - eq. 4.8), en favorisant plus un lissage isotropique (pour  $\alpha = 1$ , nous nous trouvons dans le cas d'une régularisation de Tikhonov). Ce qui peut très bien expliquer le phénomène de flou observé dans les images reconstruites quand  $\alpha$  tend vers la valeur de 2.

Enfin, la fonction de Huber est quasi-identique à la fonction gaussienne généralisée d'ordre 1 (Fig. 4.5-(B)). La seule différence est constatée uniquement au voisinage de zéro (très faibles variations), avec l'interruption de la convergence de  $\psi_H$  vers l'infinie, en évitant ainsi le risque d'instabilité numérique à l'origine de  $\psi_{GG/1}$ .





**Figure 4.5:** Tracé des fonctions de potentiel  $\varphi$  et de pondération  $\psi$  associées.  
 (A) : Conditions de l'éq. 4.7 sont vérifiées.  
 (B) : Conditions de l'éq. 4.7 ne sont pas vérifiées (G-G/ $X$  gaussienne généralisée pour  $\alpha = X$ ).

**NB :** Étant donnée que la dynamique des niveaux de gris change en fonction des organes étudiés (à reconstruire) et du bruit d'acquisition, les fonctions de potentiel (et celles de pondération associées) initialement proposées (Tabl. 4.1) ne peuvent fonctionner correctement et efficacement pour tous les intervalles de variations de  $\mu_j - \mu_s$ .

Par exemple, prenons le cas d'un objet 3D qui se caractérise par des niveaux de gris compris entre 0 et 1. L'application de la fonction de Green ( $\varphi_G$  Tabl. 4.1) s'avère inefficace, puisque la fonction de pondération associée ( $\psi_G$  Fig. 4.5) n'atteint jamais une valeur inférieure à 0.75 ( $\approx \tanh(1)/1$ , le maximum de la différence que l'on peut avoir est 1 (1-0)), ce qui implique la non interruption de la procédure de lissage (lissage des contours).

Par la suite, nous allons donc proposer un traitement d'harmonisation permettant de contourner cette limite des fonctions de potentiel.

### 4.2.3 Fonctions de pondération

Dans cette section, nous introduisons un deuxième hyperparamètre dans l'expression de l'a priori (plus exactement la fonction de potentiel),  $\rho$ , appelé facteur d'échelle (ou de normalisation). Le nouveau paramètre va permettre d'adapter les fonctions de potentiel proposées aux différentes dynamiques pouvant exister. Ensuite, nous proposons une procédure d'harmonisation des fonctions de pondération associées afin de bien encadrer leurs domaine utile de variation (entre 0 et 1 lorsque les variations locales ( $\mu_j - \mu_s$ ) sont comprises entre 0 et  $\rho$ ).

#### Facteur d'échelle

Afin de résoudre les problèmes dus à l'incapacité des fonctions de potentiel à prendre en compte les différentes dynamiques des objets que l'on cherche à reconstruire, un coefficient de normalisation ou d'échelle  $\rho$  a été introduit (éq. 4.11).

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} \left( \frac{1}{2} \|A\mu - G\|_2^2 + \beta \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \varphi \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right) \right) \quad (4.11)$$

La division de la différence ( $\mu_j - \mu_s$ ) par le paramètre  $\rho$  (éq. 4.11) permet de changer l'échelle de variations des fonctions de pondération  $\psi$  associées. Ainsi, nous pouvons adopter notre procédure de régularisation sélective pour les différentes dynamiques rencontrées, en cherchant la valeur de  $\rho$  la plus appropriée.

Le choix approprié de la valeur de  $\rho$  doit forcément dépendre de la dynamique des objets reconstruits. En reprenant l'exemple de l'objet à reconstruire se caractérisant par une dynamique comprise entre 0 et 1, et pour laquelle la fonction de Green s'avère inefficace, le choix d'un coefficient  $\rho = 0.1$  permet d'avoir un intervalle plus large (entre 0 et 10  $\rightarrow [0/0.1, 1/0.1]$ ), assurant ainsi un passage plus net entre le lissage ( $\psi_G(0) = 1$ ) et la préservation des discontinuités ( $\psi_G(10) = 0.1$ ).

Cependant, il faut noter que cette normalisation d'échelle du domaine de définition des fonctions  $\varphi$  (éq. 4.11), change les caractéristiques et les propriétés de celles de pondération associées (Tabl. 4.2). Les valeurs aux limites  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$  ne sont plus les mêmes et elles sont multipliées par l'inverse du carré du coefficient  $\rho$  ( $1/\rho^2$  souligné dans l'éq. 4.12 - Tabl. 4.2).

$\varphi(t)$	$\dot{\psi}(t) = \frac{\varphi'(t)}{t}$	$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}(t)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t)$
$\varphi_{GM} = 0.5 \frac{(t/\rho)^2}{1 + (t/\rho)^2}$	$\dot{\psi}_{GM} = \frac{\rho^2}{(\rho^2 + t^2)^2}$	$1/\rho^2$	0
$\varphi_G = \log \cosh(t/\rho)$	$\dot{\psi}_G = \frac{\tanh(t/\rho)}{\rho t}$	$1/\rho^2$	0
$\varphi_{HL} = 0.5 \log \left( (t/\rho)^2 + 1 \right)$	$\dot{\psi}_{HL} = \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{(1 + (t/\rho)^2)}$	$1/\rho^2$	0
$\varphi_{SM} = \sqrt{1 + (t/\rho)^2} - 1$	$\dot{\psi}_{SM} = \frac{1}{\rho^2 \sqrt{1 + (t/\rho)^2}}$	$1/\rho^2$	0
$\varphi_{PM} = -0.5 \left( \exp \left( - (t/\rho)^2 \right) - 1 \right)$	$\dot{\psi}_{PM} = \frac{1}{\rho^2} \exp \left( - (t/\rho)^2 \right)$	$1/\rho^2$	0
$\varphi_{Hub} = \begin{cases} 0.5 \left( \frac{t}{\rho} \right)^2 & si \  t  \leq \rho \\ \left  \frac{t}{\rho} \right  - 0.5 & si \  t  > \rho \end{cases}$	$\dot{\psi}_{Hub} = \begin{cases} \left( \frac{1}{\rho} \right)^2 & si \  t  \leq \rho \\ \frac{1}{\rho t} & si \  t  > \rho \end{cases}$	$1/\rho^2$	0

**Table 4.2:** L'introduction de la constante d'échelle  $\rho$  dans les exemples du tableau 4.1.

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= A^T A \mu - A^T G - \beta \left( \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \frac{1}{\rho} \varphi' \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right) \right) \\
 &= A^T A \mu - A^T G - \beta \left( \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \frac{1}{\rho^2} \frac{\varphi' \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right)}{\left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right)} (\mu_j - \mu_s) \right) \\
 &= A^T A \mu - A^T G - \beta \left( \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \underbrace{\left( \frac{1}{\rho^2} \right)}_{\dot{\psi}} \dot{\psi} \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Afin de pouvoir unifier les conditions aux limites des fonctions de pondération associées, nous avons multiplié toutes les fonctions de potentiel par  $\rho^2$  (Tabl. 4.3). Cette unification nous permet de réduire la différence entre les différentes fonctions de potentiel utilisées. Cela nous permet d'étudier uniquement l'influence de la vitesse de transition par rapport à la qualité des reconstructions.

**NB :** Dans le travail de Charbonnier [Charbonnier, 1994], la multiplication des fonctions de potentiel par  $\rho^2$  n'est pas envisagée. Néanmoins, il intègre le  $1/\rho^2$  (éq. 4.12) dans le  $\beta$  (poids de l'a priori), en créant un nouveau paramètre  $\beta' = \beta/\rho^2$ , qu'il a interprété comme un coefficient de lissage normalisé.

**NB :** La condition imposée à la limite supérieure (à l'infini) reste purement théorique, sachant que l'on ne peut jamais atteindre cette valeur. Pratiquement, nous définissons préalablement un seuil supérieur de la fonction de pondération, pour lequel, au delà d'une certaine valeur de variations locales (à déterminer aussi), la procédure de régularisation est quasiment interrompue. De plus, nous souhaitons éviter que les algorithmes de reconstruction fournissent des solutions très différentes (en changeant la fonction de potentiel)

$\varphi(t)$	$\dot{\psi}(t) = \frac{\varphi'(t)}{t}$	$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}(t)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t)$
$\varphi_{GM} = 0.5\rho^2 \frac{(t/\rho)^2}{1+(t/\rho)^2}$	$\dot{\psi}_{GM} = \frac{1}{\left(1+(t/\rho)^2\right)^2}$	1	0
$\varphi_G = \rho^2 \log \cosh \left(t/\rho\right)$	$\dot{\psi}_G = \frac{\tanh \left(t/\rho\right)}{t/\rho}$	1	0
$\varphi_{HL} = 0.5\rho^2 \log \left(\left(t/\rho\right)^2 + 1\right)$	$\dot{\psi}_{HL} = \frac{1}{\left(1+(t/\rho)^2\right)}$	1	0
$\varphi_{SM} = \rho^2 \sqrt{1 + \left(t/\rho\right)^2} - \rho^2$	$\dot{\psi}_{SM} = \frac{1}{\sqrt{1+(t/\rho)^2}}$	1	0
$\varphi_{PM} = -0.5\rho^2 \left(\exp \left(-\left(t/\rho\right)^2\right) - 1\right)$	$\dot{\psi}_{PM} = \exp \left(-\left(t/\rho\right)^2\right)$	1	0
$\varphi_{Hub} = \begin{cases} 0.5(t)^2 & si \  t  \leq \rho \\ \rho t  - 0.5\rho^2 & si \  t  > \rho \end{cases}$	$\dot{\psi}_{Hub} = \begin{cases} 1 & si \  t  \leq \rho \\ \frac{\rho}{t} & si \  t  > \rho \end{cases}$	1	0

**Table 4.3:** Multiplication des fonctions de potentiel  $\varphi$  (Tabl. 4.2) par  $\rho^2$  afin de respecter les conditions 4.7.

pour les mêmes paramètres fixes,  $\beta$  et  $\rho$ . Pour ce faire, nous avons fait appel à une procédure d'**harmonisation**.

### Harmonisation des fonctions de pondération

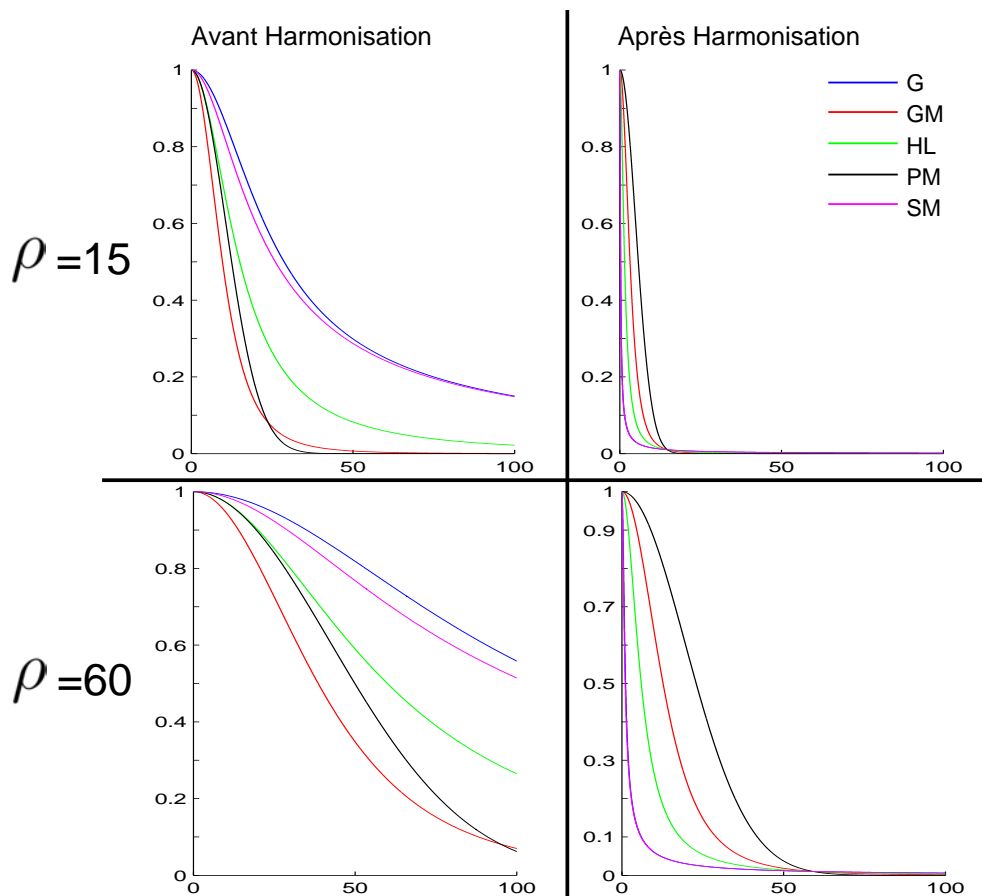
Dans notre procédure d'harmonisation, nous allons pouvoir aussi, attribuer un rôle bien défini à la constante d'échelle  $\rho$ . Le principe consiste à paramétrer les fonctions de pondération  $\dot{\psi}$  de telle sorte qu'elles soient quasiment nulles ( $\dot{\psi}(t) \approx 0$  - arrêt de la procédure de lissage/préservation du contour - section 4.2.2), lorsque la différence entre deux sites voisins  $t$  est proche de la valeur du paramètre d'échelle  $\rho$  ( $t \approx \rho$ ). Pour cela, nous proposons de procéder de la façon suivante :

- **Étape 1** : Multiplier chaque  $\rho$  dans les expressions de  $\dot{\psi}$  (Tabl. 4.3) par un paramètre  $C_h$  (à déterminer dans l'étape 3), que l'on nommera constante d'harmonisation (remplacer chaque  $\rho$  par  $C_h\rho$ ).

Exemple :  $\dot{\psi}_{GM}(t) = \frac{1}{\left(1+(t/C_h\rho)^2\right)^2}$

- **Étape 2** : Définir une valeur  $V_h$  associée à la fonction de pondération  $\dot{\psi}$ , lorsque la différence entre deux sites voisins  $t$  est égale au facteur d'échelle  $\rho$  :  $\dot{\psi}(t = \rho) = V_h$ . Dans notre cas, cette valeur va nous servir à fixer une valeur limite pour laquelle la régularisation est quasiment interrompue (préservation des contours).  $V_h$  sera considérée comme seuil de lissage.

Exemple :  $\dot{\psi}_{GM}(\rho) = V_h = 0.01$  (proche de zéro).



**Figure 4.6:** Tracé des courbes de fonctions de pondération avant (Tabl. 4.3) et après (Tabl. 4.4) harmonisation, pour les facteurs d'échelle :  $\rho = 15$  et  $\rho = 60$ .

- **Étape 3 :** Déterminer la valeur de la constante  $C_h$  en calculant analytiquement ou numériquement (méthode de Newton-Raphson, méthode de dichotomie, etc.) les racines positives de l'équation  $\dot{\psi}(t = \rho) - V_h = 0$ .

$$\text{Exemple : } \dot{\psi}_{GM}(\rho) - V_h = 0, V_h = 0.01 \Rightarrow \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{C_h}\right)\right)^2} - 0.01 = 0 \Rightarrow C_h = 0.33$$

Des exemples de fonctions de potentiel après harmonisation de celles de pondération associées sont illustrés dans le Tabl. 4.4 et Fig. 4.6 . Les constantes  $C_h$  ont été fixées à 0.01 ; une valeur très faible simulant l'arrêt de la diffusion ( $V_h = 0.01$ , pour  $t = \rho$ ) afin de préserver les contours.

**NB :** Dans la littérature, l'harmonisation des fonctions de pondération est peu abordée, néanmoins, nous pouvons citer quelques travaux qui ont discuté (entre autres) du paramétrage des fonctions de potentiel [Green, 1990, Lalush and Tsui, 1992].

Il faut noter aussi, que l'harmonisation des fonctions de pondération (correspondant à la multiplication des  $\rho$  par les  $C_h$ ) ainsi que les conditions concernant les valeurs aux limites (la multiplication des fonctions de potentiel par  $\rho^2$ ) n'influent pas la capacité des fonctions initialement proposées (Tabl. 4.1) à régulariser les solutions MAP. Cependant, elles s'avèrent très utiles pour comprendre et comparer efficacement les comportements des différentes fonctions de potentiel que nous allons tester (section 5).

$\varphi(t)$	$\dot{\psi}(t) = \frac{\varphi'(t)}{t}$	$C_h$
$\varphi_{GM} = 0.5(0.33\rho)^2 \frac{(t/0.33\rho)^2}{1+(t/0.33\rho)^2}$	$\frac{1}{\left(1+(t/0.33\rho)^2\right)^2}$	0.33
$\varphi_G = (0.01\rho)^2 \log \cosh \left(t/0.01\rho\right)$	$\frac{\tanh\left(t/0.01\rho\right)}{t/0.01\rho}$	0.01
$\varphi_{HL} = 0.5(0.10\rho)^2 \log \left(\left(t/0.10\rho\right)^2 + 1\right)$	$\frac{1}{\left(1+(t/0.10\rho)^2\right)}$	0.10
$\varphi_{SM} = (0.01\rho)^2 \sqrt{1 + \left(t/0.01\rho\right)^2} - (0.01\rho)^2$	$\frac{1}{\sqrt{1+(t/0.01\rho)^2}}$	0.01
$\varphi_{PM} = -0.5(0.46\rho)^2 \left(\exp\left(-\left(t/0.46\rho\right)^2\right) - 1\right)$	$\exp\left(-\left(t/0.46\rho\right)^2\right)$	0.01
$\varphi_{Hub} = \begin{cases} 0.5(t)^2 & si  t  \leq 0.01\rho \\ 0.01\rho  t  - 0.5(0.01\rho)^2 & si  t  > 0.01\rho \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & si  t  \leq 0.01\rho \\ \left \frac{0.01\rho}{t}\right  & si  t  > 0.01\rho \end{cases}$	$C_h$

**Table 4.4:** Harmonisation des fonctions de pondération  $\varphi$  illustrées dans Tabl. 4.3, pour  $V_h = 0.01$ .

#### 4.2.4 Conclusion

Nous avons pu établir une analogie entre une reconstruction MAP et une diffusion anisotropique (telle que celle de Nordström [Nordström, 1990]), lorsque nous utilisons un modèle markovien comme a priori (éq. 4.5 et éq. 4.6). Ce lien nous a permis de mieux comprendre le comportement de ces fonctions de potentiel à travers celles de pondération associées, lors d'une reconstruction itérative MAP. Ainsi, nous avons proposé des conditions plus générales (unificatrices) que doivent vérifier les fonctions de potentiel, afin d'assurer les propriétés de lissage avec préservation de contours de la solution MAP (section 4.2.2 - éq. 4.10).

Ces propriétés désirables sont assurées implicitement par les fonctions de pondération associées (Tab. 4.1). En fonction de la différence entre deux sites voisins de l'objet à reconstruire, elle bascule continûment entre la diffusion (valeurs très supérieures à zéro) et son interruption (valeurs très proches de zéro).

La qualité de la reconstruction peut être prédite en analysant la vitesse de transition entre les deux valeurs limites des fonctions de pondération  $\dot{\psi}$ . Pour une transition franche, les reconstructions MAP sont censées produire des frontières très nettes (bonne préservation des contours). Cependant, en présence d'un certain niveau de bruit d'acquisition, le résultat de la reconstruction peut devenir instable et trop bruité. Cette instabilité vient du fait que ce bruit peut être préservé et amplifié dans la procédure d'interruption de diffusion. En baissant la vitesse de basculement, les reconstructions produisent des résultats moins bruités et plus flous. D'où la nécessité de trouver un compromis entre le lissage et la préservation de contours pour estimer la vitesse de transition optimale (et le type de fonction de pondération associée) permettant de bien préserver les contours sans amplifier le bruit. Ce compromis doit obligatoirement tenir compte des différentes

dynamiques des objets reconstruits, ainsi que le niveau de bruit.

Pour ces raisons, nous avons décidé de tester cinq fonctions de potentiel différentes et largement utilisées dans la littérature : trois fonctions convexes dont une semi-quadratique ( $\varphi_H$ ) et deux non quadratiques ( $\varphi_G$  et  $\varphi_{SM}$ ), et les deux dernières non convexes et non quadratiques ( $\varphi_{PM}$  et  $\varphi_{HL}$ ).

Enfin, nous avons discuté de l'introduction d'un nouveau paramètre dans la fonction objectif à minimiser. Ce paramètre, appelé facteur d'échelle  $\rho$ , permet d'adapter les fonctions de potentiel proposées aux différentes dynamiques (des objets à reconstruire) pouvant exister.

En introduisant la procédure d'harmonisation, le facteur d'échelle permet de bien encadrer les fonctions de pondération associées (entre zero et  $\rho$ ). Elles présentent des valeurs maximales pour des petites variations entre sites voisins, et convergent vers zéro (interruption) pour celles supérieures à  $\rho$  ( $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 1$  et  $\forall t \geq \rho, \psi(t) \approx 0$ ).

La valeur de  $\rho$  doit être théoriquement proche de la différence maximale entre deux zones homogènes de l'objet reconstruit, pour prendre en compte l'ensemble de la dynamique de l'objet à reconstruire, une dynamique qui est influencée par le bruit d'acquisition.

Dans la section suivante, nous détaillerons les algorithmes itératifs d'optimisation, permettant de minimiser notre fonction de coût MAP (éq. 4.11), dans le cas d'utilisation de fonctions de potentiel que nous avons choisies, à savoir  $\varphi_G, \varphi_{SM}, \varphi_H, \varphi_{PM}$  et  $\varphi_{HL}$ .

### 4.3 Algorithme de reconstruction statistique

Dans le cas d'une reconstruction 3D (tel que dans notre cas), les données traitées sont volumineuses ( $A, \mu$  et  $G$ ), nécessitant ainsi un coût calculatoire considérable. Dans cette thèse, nous avons opté pour les méthodes directes d'optimisation, plus rapides et plus appropriées par rapport aux méthodes stochastiques (section 2.3.3).

Étant donné que le terme de vraisemblance dans notre expression MAP présente une forme quadratique facile à minimiser (éq. 2.11), la convergence de nos algorithmes directs (globale ou locale) est très influencée par la forme analytique des fonctions de potentiel utilisées (convexe, non convexe).

Dans cette section, nous avons choisi deux algorithmes d'optimisation les plus adaptés aux formes de fonctions de coûts proposées, à savoir le Maximum A Posteriori - Newton Raphson Modifié MAP-MNR dans le cas d'une forme convexe de l'a priori, et le Maximum A Posteriori - ARTUR - Gradient conjugué MAP-ARTUR-GC dans le cas d'une forme non convexe de l'a priori.

#### 4.3.1 Maximum A Posteriori - Newton Raphson Modifié MAP-MNR

Maintenant, nous cherchons à déterminer la solution MAP,  $\mu^*$ , qui minimise la fonction objectif composée d'un terme d'attache aux données et un autre d'a priori **convexe** issu de la famille Markovienne (éq. 4.11).

Tous d'abord, nous avons décidé de modifier la fonction objectif à minimiser (éq. 4.11)

**Étape 0:** définir  $\mu^{(0)}$  (solution initiale), la précision associée au critère d'arrêt et un nombre maximal d'itérations  $N_{iter}$

$k = 0$ .

**Étape 2:** Tant que les tests d'arrêt ne sont pas vérifiés (boucle)

$$\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - \frac{(1-\beta)(A^T(A\mu^{(k)} - G)) + \beta NN^{(k)}}{(1-\beta)d^{(k)} + 2\beta DD^{(k)}}$$

avec,  $NN^{(k)}$  et  $d^{(k)}$  sont donnés en éq. 4.15, et  $DD^{(k)}$  est vecteur de taille  $N$  tels que :

$$\forall j \in N : DD_j^k = \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \dot{\psi} \left( \frac{\mu_j^{(k)} - \mu_s^{(k)}}{\rho} \right)$$

k++

**Étape 3:** une fois sortie de la boucle, retourner la dernière valeur calculée

**Table 4.5:** L'algorithme MAP-MNR dans le cas d'un bruit blanc gaussien.

en introduisant un facteur de pondération au terme d'attache aux données,  $(1 - \beta)$  (éq. 4.13).

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} \left( \frac{1}{2} (1 - \beta) \|A\mu - G\|_2^2 + \beta \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \varphi \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right) \right) \quad (4.13)$$

Le facteur  $(1 - \beta)$  (éq. 4.13) permet de renforcer le poids de l'a priori ( $\beta$ ) dans l'expression de l'énergie totale, en réduisant simultanément celle d'attache aux données. Il permet aussi de réduire le domaine de variation de  $\beta$  de telle sorte qu'il soit compris entre 0 et 1. Pour résoudre ce problème d'optimisation (éq. 4.13), nous avons opté pour la méthode de **Newton-Raphson modifiée** qui se caractérise par sa facilité de mise en œuvre (Tabl. 4.5), par la détermination automatique du pas de descente (robustesse) et par **la convergence globale** dans le cas où les  $\varphi$  adoptées (éq. 4.13) sont **convexes** et vérifient les **conditions** suivantes [Fessler et al., 1997, Huber, 2011] (dans le cas où le terme d'attache aux données présente bien une forme quadratique définie positive (QDP)) :

- $\varphi$  est symétrique.
- $\varphi$  est de classe  $C^1$  (dérivable et continue sur le domaine de définition).
- $\varphi'(t)$  (la dérivée) est non décroissante .
- $\dot{\psi}$  est non croissante  $\forall t \geq 0$ .
- $\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\psi}(t)$  est finie et elle est différente de zéro.

À la différence de la méthode de Newton-Raphson (éq. 4.14), sa version modifiée (MNR) peut très bien fonctionner dans le cas où la fonction de potentiel utilisée n'est pas deux fois différentiable (Classe  $C^2$ ), telle que celle de **Huber** (éq. 2.26). En fait, la MNR



remplace le calcul de la dérivée seconde de  $\varphi$  ( $\varphi''$  - éq. 4.14, éq. 4.15) par sa fonction de pondération associée  $\psi$  (Tabl. 4.5) en assurant ainsi la monotonie de l'algorithme [Fessler et al., 1997].

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - \frac{\nabla(f(\mu^{(k)}))}{\nabla^2(f(\mu^{(k)}))} \\ = \mu^{(k)} - \frac{(1-\beta)A^T(A\mu^{(k)}-G)+\beta NN^{(k)}}{(1-\beta)d^{(k)}+\beta dd^{(k)}} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

avec,  $k$  est l'indice de l'itération,  $NN^{(k)}$ ,  $d^{(k)}$  et  $dd^{(k)}$  représentent trois vecteurs de taille  $N$  tels que :

$$\forall j \in N : \left\{ \begin{array}{l} NN_j^{(k)} = \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \varphi' \left( \frac{\mu_j^{(k)} - \mu_s^{(k)}}{\rho} \right) \\ d_j^k = A^T A \mathbb{V}_1 \\ dd_j^k = \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \varphi'' \left( \frac{\mu_j^{(k)} - \mu_s^{(k)}}{\rho} \right) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

avec,  $\mathbb{V}_1$  est un vecteur de taille  $N$  qui contient que des 1, et  $\varphi''$  représente la dérivée seconde.

### 4.3.2 Maximum A Posteriori - ARTUR - Gradient conjugué MAP-ARTUR-GC

Dans cette partie, nous allons discuter de l'algorithme adopté pour résoudre le problème d'optimisation MAP (éq. 4.13) dans le cas de l'utilisation d'une fonction de potentiel **non convexe** telle que celle de Perona-Malik et de Hebert-Leahy ( $\varphi_{PM}$  et  $\varphi_{HL}$  dans Table. 4.4). Pour cela, nous avons décidé d'appliquer la méthode ARTUR-Gradient conjugué **MAP-ARTUR-GC**.

La méthode MAP-ARTUR-GC entre dans le cadre de la régularisation semi-quadratique (cette notion a été introduite pour la première fois par Geman et Yang [Geman and Yang, 1995]). Le principe de base (de la régularisation semi-quadratique) consiste à remplacer l'expression de l'énergie totale à minimiser par une autre ayant un même minimum global et pour laquelle nous pouvons appliquer les outils d'optimisation quadratique (y compris les méthodes d'algèbre linéaire).

Dans le cas d'ARTUR, la fonction d'énergie totale à minimiser est remplacée par une autre en se basant sur le théorème suivant [Charbonnier et al., 1997] (théorème de Geman et Reynolds étendu [Geman and Reynolds, 1992] ).

#### **Théorème :**

Soit  $\varphi$  une fonction telle que :  $\varphi : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ ,  $\varphi(\sqrt{t})$  est strictement concave sur  $]0, +\infty[$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(t)}{t} = L$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(t)}{t} = M$ , alors :

$\exists$  une fonction  $\Gamma : [L, M] \rightarrow [\alpha, \chi]$  décroissante et **strictement convexe** telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = \inf_{L \leq b \leq M} (bt^2 + \Gamma(b)) \\ \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \varphi(t) - t^2 \frac{\varphi'(t)}{t} \right) \\ \chi = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\varphi(t)) \end{array} \right. \quad (4.16)$$

De plus, pour tout  $t \geq 0$  fixe, la valeur de  $b$  vérifiant  $\inf_{L \leq b \leq M} (bt^2 + \Gamma(b))$  est **unique** et donnée par :

$$b_u = \frac{\varphi'(t)}{t} \quad (4.17)$$

Ainsi, en remplaçant l'expression de l'éq. 4.16 dans l'éq. 4.13, nous obtenons une nouvelle énergie duale semi-quadratique à minimiser (eq. 4.18).

$$\frac{1}{2} (1 - \beta) \|A\mu - T\|_2^2 + \beta \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \left( b_{js} \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right)^2 + \Gamma(b_{js}) \right) \quad (4.18)$$

avec,  $b_{js} \in [0, 1[$  est appelée variable auxiliaire.

L'analyse de l'expression de l'énergie duale (eq. 4.18) nous montre que lorsque les  $b_{js}$  sont fixes, le critère est quadratique et simple à minimiser. De la même façon, pour  $\mu$  fixe, le critère est convexe par rapport aux variables auxiliaires  $b_{js}$  (puisque  $\Gamma$  est strictement convexe - théorème) dont l'expression du minimum est donnée dans l'éq. 4.17. En exploitant ces deux propriétés ( $\mu_j$  avec  $b_{js}$  fixe et  $b_{js}$  avec  $\mu_j$  fixe), l'algorithme d'ARTUR a été proposé dans [Charbonnier et al., 1993], dont le principe consiste à minimiser indirectement l'énergie duale (eq. 4.18) en alternant entre l'optimisation par rapport aux  $\mu_j$  (en fixant les  $b_{js}$ ) et celle relative aux variables auxiliaires  $b_{js}$  (en fixant  $\mu_j$ ).

### Remarques :

- Notons ici que la connaissance exacte de l'expression mathématique de la fonction  $\Gamma$  (eq. 4.18) n'est pas nécessaire pour pouvoir implémenter numériquement cet algorithme. En effet, la minimisation de  $\varphi$  avec  $b$  fixe est indépendante de  $\Gamma$ , et celle de  $b$  avec  $\varphi$  fixe est donnée dans l'équation 4.17 (elle est indépendante aussi de  $\Gamma$ ).
- L'algorithme ARTUR ne garantit pas une convergence vers un minimum global lorsque la fonction de potentiel n'est pas convexe, cependant, l'expérimentation a montré qu'il fournit souvent des résultats de très bonne qualité. Il faut noter aussi que ARTUR ressemble à la GNC car il introduit progressivement des discontinuités dans la solution (préservation du contour) avec l'évolution du  $b$  en fonction des itérations.

## 4.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons justifié nos choix concernant chaque étape permettant l'élaboration de nos méthodes de reconstruction statique, à savoir le Maximum A Posteriori - Newton Raphson Modifié MAP-MNR et le Maximum A Posteriori ARTUR-Gradient Conjugué MAP-ARTUR-GC.

Dans un premier temps, nous avons discuté de tous les éléments nécessaires pour générer notre fonction de coût MAP, composée d'un terme d'attache aux données et un autre d'a priori :

- Le terme d'attache aux donnée - Vraisemblance (section 4.1) : nous avons dû définir une modèle de l'opérateur de projection (aspects déterministes) et un autre de bruit d'acquisition (aspects aléatoires). Dans notre cas, nous avons opté pour la matrice de projection Distance Driven Simplifié SDD (section 3.3) définie dans une région d'intérêt 3D (section 4.1.2) et un bruit blanc gaussien (section 4.1.1). Ainsi, nous avons pu généré une forme analytique simple à minimiser du terme d'attache aux données (quadratique) et accélérer le temps des calculs tout en améliorant le conditionnement du problème inverse mal posé (restriction de la reconstruction dans une région d'intérêt).
- Le terme a priori (section 4.2) : L'adoption d'un a priori de Gibbs (défini sur un système de voisinage à 26 connexités - Fig. 4.4) nous a permis d'établir l'expression générale de notre fonction objectif (section 4.2.1 - éq. 4.1). Le choix d'un tel a priori a l'avantage de pouvoir incorporer différentes formes de fonction de potentiel (Tab. 2.1), sans connaissance précise de l'objet à reconstruire. Dans notre cas, nous avons opté pour les fonctions de potentiel permettant de régulariser les solutions MAP (reconstructions) tout en préservant leurs contours. Cela nous a conduit à effectuer une étude heuristique (section 4.2.2) discutant les propriétés de lissage avec préservation des contours dans une reconstruction statistique itérative, en se basant sur une analogie avec un schéma d'une EDP de diffusion non linéaire (éq. 4.5 et éq. 4.6). Après avoir établi les conditions (des fonctions de pondération associées - éq. 4.10) assurant une régularisation avec préservation de contours, nous avons désigné cinq fonctions de potentiel ayant différentes formes analytiques : convexe/semi-quadratique (fonction de Huber  $\varphi_H$ ), convexe/non quadratique (fonctions de Green  $\varphi_G$  et Surfaces-Minimales  $\varphi_{SM}$ ) et non convexes/non quadratiques (fonctions de Perona Malik  $\varphi_{PM}$  et de Hebert et Leahy  $\varphi_{HL}$ ). Nous avons également introduit un deuxième hyperparamètre,  $\rho$ , appelé facteur d'échelle (ou de normalisation) ; un paramètre adaptant les fonctions de potentiel proposées aux différentes dynamiques pouvant exister (section 4.2.3). Nous avons aussi proposé une procédure d'harmonisation permettant d'encadrer le domaine utile des fonctions de pondération associées (entre 0 et 1) pour des variations locales ( $\mu_j - \mu_s$ ) comprises entre 0 et  $\rho$ .

Dans un second temps, nous avons désigné les méthodes numériques directes d'optimisation que nous avons estimé plus adaptées aux formes analytiques des fonctions de potentiel utilisées (section 4.3) et aux données volumineuse 3D. Ainsi, selon la convexité ou pas des fonctions de potentiel, nous avons proposé l'algorithme de Newton Raphson Modifié (section 4.3.1) dans le cas où les fonctions sont convexes ( $\varphi_H, \varphi_G$  et  $\varphi_{SM}$ ) et l'algorithme d'ARTUR-Gradient conjugué (section 4.3.2) dans le cas d'utilisation des fonctions non convexes ( $\varphi_{PM}$  et  $\varphi_{HL}$ ), en se basant sur le théorème de Geman et Rynolds (éq. 4.16).

Dans le chapitre suivant, nous allons pouvoir évaluer qualitativement et quantitativement les résultats de nos reconstructions, et analyser leurs comportements en présence de bruit blanc gaussien.



## 5 Évaluation des méthodes de reconstruction statistique proposées

Dans notre thèse, nous avons opté pour une reconstruction itérative bayésienne MAP basée sur le modèle de Gibbs comme a priori de l’objet à reconstruire (section 2.2). Ce choix était appuyé entre autres par la facilité relative de la mise en œuvre de ces algorithmes (sections 2.3.3 et 4.3), par la simplicité d’une interprétation heuristique de la procédure de reconstruction (section 4.2.2) et par la grande capacité des modèles Markoviens à améliorer les reconstructions, en se basant uniquement sur une interprétation partielle de l’objet à reconstruire à partir des connaissances locales (a priori bas niveau - section 2.3).

Ainsi, nous avons proposé deux algorithmes itératifs MAP de reconstruction : **MAP-ARTUR-GC** et **MAP-MNR** (chapitre 4), en restreignant les reconstructions sur un volume d’intérêt englobant les structures 3D coronariennes (voir les détails techniques dans section 4.1.2), après avoir effectué une soustraction des structures environnantes 2D. Le choix de ces deux méthodes de reconstruction [Fessler et al., 1997, Huber, 2011, Geman and Yang, 1995, Charbonnier et al., 1997] a été influencé principalement par la forme analytique de l’expression MAP (éq. 4.13) :

- Le premier algorithme, Maximum A Posteriori - Newton Raphson Modifié, est plus approprié aux problèmes MAP dont les fonctions de potentiel associées sont convexes et vérifient certaines conditions (voir section 4.3.1).
- Dans le cas où les fonctions de potentiel ne sont pas convexes, nous avons choisi le Maximum A Posteriori - ARTUR - Gradient conjugué ; une méthode de reconstruction qui est censée fournir des solutions de très bonnes qualités sans atteindre forcément l’optimum global de l’éq. 4.11 (voir section 4.3.2).

Ayant généré une base simulée de données de projection (Fig. 5.4) à partir de deux modèles coronariens simulés (section 5.1), une évaluation précise des résultats et du mode de fonctionnement de chaque algorithme (convergence et évolution des solutions MAP pendant les itérations des procédures, etc.) se montre importante.

Nous avons décidé d’effectuer une série de tests en évaluant nos reconstructions selon la puissance de bruit d’acquisition, les valeurs des hyperparamètres  $\rho$  et  $\beta$  (éq. 4.13) et les modèles simulés coronariens 3D, afin d’approfondir notre compréhension technique et théorique des reconstructions MAP et d’établir les conditions optimales permettant d’aboutir à des résultats plus fidèles aux objets de références (d’après la vérité terrain). Afin d’effectuer des évaluations quantitatives précises, nous nous sommes basés sur deux modèles coronariens simulés (section 5.1) et sur différents critères d’évaluation (section 5.2).

## 5.1 Modèles de données 3D (arbre coronaire) et 2D (projections)

Dans cette section, nous présentons notre base de données simulées (2D et 3D) permettant de tester et évaluer les méthodes de reconstruction proposées dans ce manuscrit.

### 5.1.1 A. Modèles d'arbre coronaire 3D

Nous ne disposons pas de la vérité terrain correspondant à un examen réel d'angiographie rotationnelle, c'est à dire une reconstruction que l'on peut considérer comme de référence. Ainsi, une évaluation précise des algorithmes de reconstruction se montre très délicate. Pour surmonter ce problème, nous avons décidé de tester nos méthodes sur des données simulées représentant des séquences rotationnelles angiographiques.

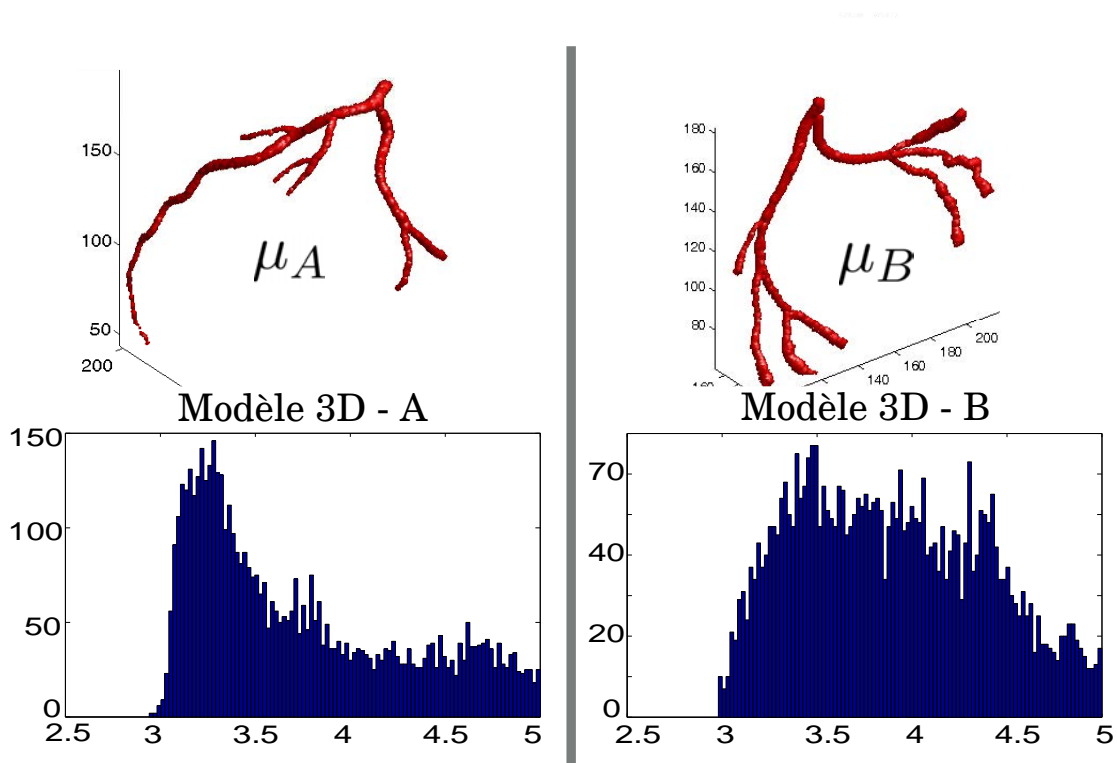
Étant donné que l'efficacité de nos reconstructions est très liée à l'hypothèse d'une non-variabilité spatio-temporelle des vaisseaux 3D, les modèles coronariens doivent vérifier deux hypothèses, à savoir une distribution homogène des coefficients d'atténuation (produit de contraste) et une absence de mouvements cardiaques (statique). Dans plusieurs travaux [Xie, 2012, Yang et al., 2007, Li et al., 2002], l'homogénéité du produit de contraste à l'intérieur des vaisseaux était souvent approximée par un signal constant. Étant donné qu'un signal constant est un cas particulier d'un signal homogène (des variations minimales entre les sites voisins ( $\mu_j - \mu_s$ ) à l'intérieur des vaisseaux, voire négligeables devant celles constatées aux frontières des parois artérielles), nous estimons qu'un signal 3D en niveau de gris est plus réaliste.

Notre simulation des structures artérielles 3D doit aussi permettre de modéliser des vaisseaux réels composés de plusieurs branches et de bifurcations. Ainsi, nous avons opté pour des modèles issus de reconstructions réelles effectuées à partir de données scanner RX. Nous avons prévu deux modèles coronariens en niveau de gris,  $\mu_A$  et  $\mu_B$  (Fig. 5.1). Ils ont été obtenus à partir de deux données patient différentes acquises par un scanner 64 barrettes (GE LightSpeed CT coronary angiography) [Yang et al., 2006]. Ces données ont été segmentées par une méthode semi-automatique basée sur des techniques de suivi de lignes centrales [Yang et al., 2006].

Afin d'obtenir des coronaires en niveau de gris à partir de segmentations binaires, nous avons effectué un filtrage gaussien 3D sur les données  $\mu_A$  et  $\mu_B$ . Il faut dire que la convolution par une gaussienne des vaisseaux 3D segmentés a permis la génération d'un objet avec une faible dynamique de niveau de gris (pas de variations brusques entre deux sites voisins), respectant ainsi l'hypothèse d'une homogénéité de luminance correspondant à la présence de produit de contraste.

**NB :**

- Après le filtrage gaussien, les intensités des petites branches sanguines de l'arbre simulé 3D et filtré ( $\mu_A$  ou  $\mu_B$ ) sont inférieures à celles des branches ayant des sections plus grandes. De plus, Le modèle  $\mu_B$  est moins réaliste que  $\mu_A$  sur le plan géométrique, puisque nous remarquons une dilatation irréaliste des vaisseaux terminaux (vers les extrémités). Bien que ces constatations ne sont pas réalistes, nous estimons qu'elles n'empêchent pas une bonne analyse quantitative de nos méthodes de reconstruction.



**Figure 5.1:** Visualisation de deux modèles simulés coronariens  $\mu_A$  et  $\mu_B$  et leurs histogrammes.

• Les algorithmes que nous allons tester ne sont pas destinés à résoudre la problématique du mouvement cardiaque ou de la diffusion du produit de contraste (section 2.1). Une telle hypothèse est plus réaliste dans le cas de :

- (1) une reconstruction à partir d'angiogrammes appartenant à des phases cardiaques les moins rapides (diastole, systole, etc.), détectables facilement avec une grande précision en adoptant les outils courants de synchronisation cardiaque (section 2.2),
- (2) une bonne synchronisation entre l'injection de produit de contraste et le début de l'acquisition rotationnelle, assurant une homogénéité de produit de contraste (non diffusion) à l'intérieur des vaisseaux au cours de toute l'acquisition (fin de rotation).

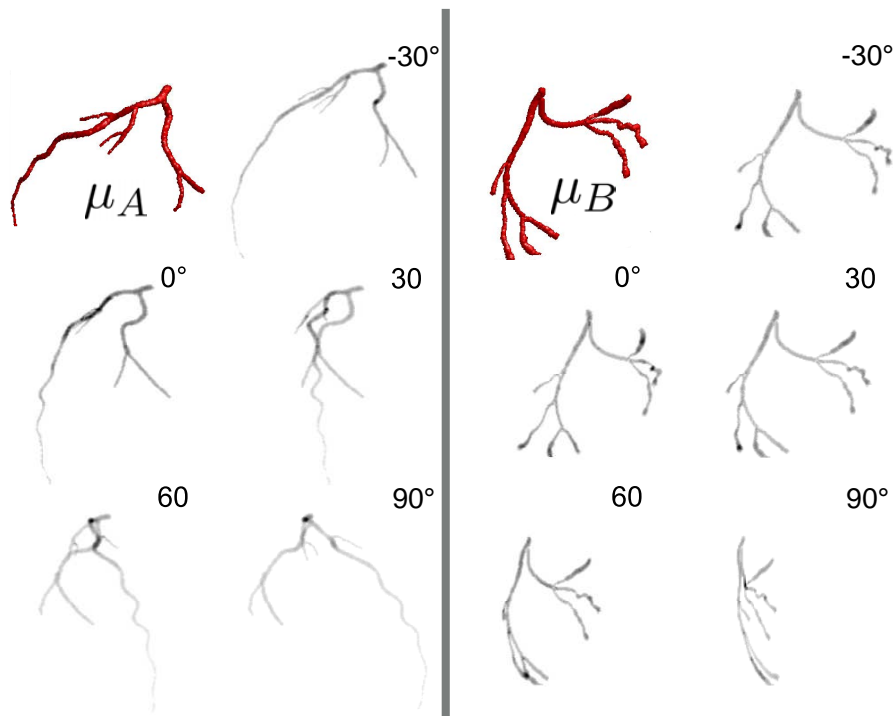
### 5.1.2 B. Modèles de projections

À partir des modèles coronariens 3D, nous avons généré une séquence de projections 2D (Fig. 5.2). Pour ce faire, il a fallu choisir un opérateur de projection parmi ceux qui ont été abordés dans le chapitre 2, permettant de générer des projections sans artefacts (fausser les modèles de bruit adoptés). En se basant sur notre comparaison théorique effectuée entre différents opérateurs de projection (section 3.3.2) et sur quelques résultats qualitatifs (Fig. 3.16, Fig. 3.18) et quantitatifs [Oukili et al., 2013], nous avons estimé utile de tester la nouvelle version simplifiée de la Distance-Driven (section 3.3). Sous certaines conditions (voir section 3.4), la méthode de Distance Driven Simplifiée s'est montrée compétitive face à celles proposées dans la littérature (telles que la SF-TT et DD).

Pour définir les différents paramètres géométriques d'acquisition (voir section 3.2 - Fig.



3.1), nous avons adopté des valeurs inspirées de la routine clinique (choix réaliste) :  $\Delta_X = \Delta_Y = \Delta_Z = 0.5$ ,  $(i, j, k) \in [1\dots 256]^3$ ,  $(u, v) \in [1\dots 256]^2$ ,  $D_{SO} = 720$ ,  $D_{SD} = 1155$  et  $\Delta_s = \Delta_t = 0.58$  (les distances sont exprimées en  $mm$ ).



**Figure 5.2:** Projections simulées ( $Y_A$  et  $Y_B$ ) obtenues à partir de deux modèles 3D patient (vaisseaux en rouge  $\mu_A$  et  $\mu_B$  en niveau de gris) acquis à partir d'un scanner 64 barrettes (GE LightSpeed CT coronary angiography) [Yang et al., 2006]. Les projections ont été réalisées en utilisant l'opérateur  $DDS$  (section 3.3) avec les paramètres :  $\Delta_X = \Delta_Y = \Delta_Z = 0.5$ ,  $(i, j, k) \in [1\dots 256]^3$ ,  $(u, v) \in [1\dots 256]^2$ ,  $D_{SO} = 720$ ,  $D_{SD} = 1155$  et  $\Delta_s = \Delta_t = 0.58$  (voir Fig. 3.1).

**NB :** Les choix de la taille et de la résolution spatiale des objets 3D ( $256^3$  de voxels de taille 0.5) ont été faits en respectant à la fois les conditions théoriques permettant le bon fonctionnement de la DDS (voir section 3.4), et la capacité de l'algorithme à reconstruire des branches sanguines coronariennes de taille moyenne de 2 à 3  $mm$ .

Les projections simulées sont censées représenter des angiogrammes correspondant à la même phase cardiaque, acquis pendant une seule séquence rotationnelle d'angiographie RX. Sachant que le couple émetteur/détecteur RX peut parcourir un angle de  $220^\circ$  (autour du patient) en une seule injection de produit de contraste, et que les battements cardiaques suivent un rythme moyen de 60 batt./s, nous avons estimé que la simulation de cinq projections espacées de  $30^\circ$  (de la même phase cardiaque) était un choix réalisable en routine clinique (Fig. 5.2).

Dans nos reconstructions, nous avons décidé de soustraire les structures environnantes 2D (considérées comme parasites) des images de projections. Cela nous permet de réduire le coût calculatoire des algorithmes (moins de données) et de limiter au maximum l'interférence entre le signal utile (issus de produit de contraste) avec les données environnantes 3D dans la procédure de reconstruction, accélérant ainsi les calculs et

améliorant les résultats.

Pour ce faire (soustraction 2D), nous avons suivi les étapes suivantes, telles que proposées dans [Xie, 2012] (Fig. 5.3) :

- **Étape 1** : Segmentation des images de projection ((A) et (B) dans Fig. 5.3) pour extraire les vaisseaux 2D, en appliquant un filtre de Frangi [Frangi et al., 1998] (Fig. 5.3.(1)).
- **Étape 2** : Suppression des informations de projections à l'endroit des segmentations effectuées dans l'étape 1 (Fig. 5.3.(2)), c'est à dire, mettre à zéros les zones segmentées.
- **Étape 3** : Estimation du fond 2D en appliquant une des méthodes d'inpainting[Xu and Sun, 2010, Bertalmio et al., 2000, Chan and Shen, 2001](Fig. 5.3.(3)).
- **Étape 4** : Calcul des images sans les structures de fond,  $Y_{A,SF}$  et  $Y_{B,SF}$ , en appliquant une soustraction arithmétique entre les images initiales et celles de l'étape numéro 3 (Fig. 5.3.(4)).

**NB** :

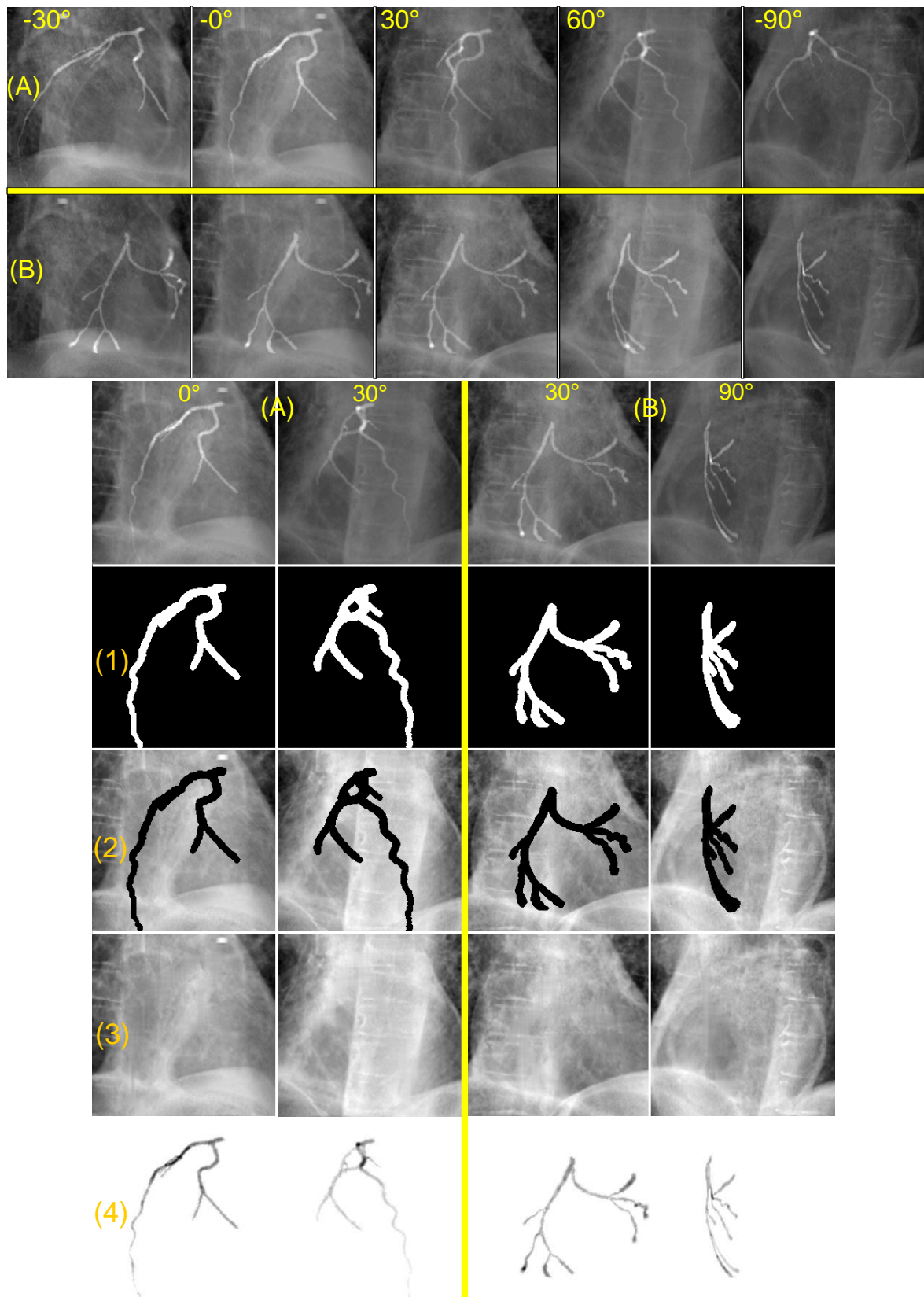
Pour générer les images de projection avec des structures du fond 2D, nous avons eu recours à cinq images réalistes contenant uniquement les projections des structures environnantes, afin de pouvoir les additionner à celles des coronaires,  $Y_A$  et  $Y_B$  (Fig.5.2). Ces images sans la structure coronarienne 2D ont été obtenues à partir d'un simulateur réaliste d'angiographie rotationnelle, réalisé au sein du **CRIBS** (Centre de Recherche en Information Biomedicale sino-français – Université de Rennes – SouthEast University) [Yang et al., 2006].

L'application directe des opérateurs DDS sur les objets 3D simulés ( $A \times \mu_{A||B}$  - éq. 2.3) a permis la génération de deux séquences simulées de projection **idéales** ( $Y_A$  et  $Y_B$ ) sans bruit d'acquisition et sans structures de fond (Fig. 5.2). Afin d'évaluer l'efficacité de nos algorithmes basés MAP (éq. 4.13) à restreindre l'influence de bruit de mesure sur le modèle d'attache aux données (et par conséquent sur la reconstruction), nous avons choisi de dégrader les projections simulées par différents niveaux de bruit (Fig. 5.4). Le choix de la nature de ce bruit respecte le modèle statistique adopté de la vraisemblance (section 4.1.1) ; il s'agit du bruit blanc gaussien.

Ainsi, pour chaque séquence idéale de projection ( $Y_A$  ou  $Y_B$ ), nous avons généré quatre autres séquences ( $Y_{A||B,5db}$ ,  $Y_{A||B,10db}$ ,  $Y_{A||B,15db}$  et  $Y_{A||B,20db}$  - Fig. 5.4) en additionnant aux séquences  $Y_A$  et  $Y_B$  un bruit gaussien centré de différentes variances. Ces variances ( $\sigma$ ) ont été choisies de telle sorte qu'elles vérifient les rapports signal-sur-bruit (SNR-2D) suivants (éq. 5.1) : 20 db, 15 db, 10 db et 5 db. Pour ce faire, nous avons utilisé la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{P_{signal}}{P_{bruit.init.} 10^{\left(\frac{SNR}{10}\right)}}} \quad (5.1)$$

avec,  $\sigma$  est l'écart type du bruit que l'on veut calculer,  $P_{signal}$  et  $P_{bruit.init.}$  représentent respectivement les puissances du signal (moyenne des niveaux de gris à l'intérieur des vaisseaux 2D -  $Y_A$  et  $Y_B$ ) et d'un bruit gaussien initial ( $\sigma = 1$ ), et  $SNR$  représente la

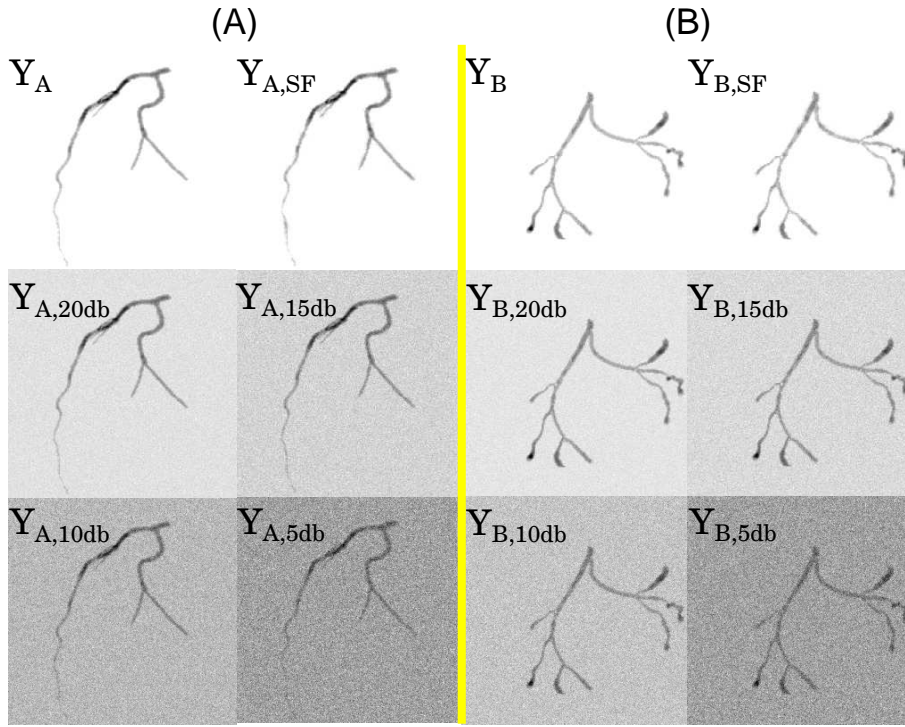


**Figure 5.3:** (A) et (B) : Données simulées de projection superposant les vaisseaux coronariens ( $Y_A$  et  $Y_B$ ) avec les structures environnantes du fond.

(1)...(5) : Calcul des images soustraites du fond 2D :

- Estimation du fond 2D (ligne 4) à partir des projections (ligne 1) et les segmentations des vaisseaux 2D (ligne 2),
- Soustraction des images estimées (ligne 4) des images originales (ligne 1) pour générer les projections sans les structures du fond (ligne 5).

valeur du rapport signal-sur-bruit que l'on veut atteindre.



**Figure 5.4:** Différents pré-traitements appliqués aux images de projection idéales afin d'évaluer les algorithmes de reconstruction itératifs proposés .

$Y_{A||B}$  : Projections idéales des vaisseaux sanguins 3D en appliquant un simple produit matriciel  $A \times \mu_{A||B}$  (éq. 2.3),

$Y_{A||B,SF}$  : Projections obtenues avec présence de structures de fond puis après suppression du fond 2D par segmentation vasculaire (Fig. 5.3),

$Y_{A||B,5db}$ ,  $Y_{A||B,10db}$ ,  $Y_{A||B,15db}$  et  $Y_{A||B,20db}$  : Projections obtenues après avoir additionné aux projections idéales  $Y_1$  et  $Y_2$  (Fig. 5.2) un bruit gaussien centré de différentes variances correspondants respectivement aux rapports signal-sur-bruit 5, 10, 15 et 20 db.

**NB :**

Pour prendre en compte de dégradations introduites par les pré-traitements des angiogrammes réels (segmentation vasculaire puis soustraction du fond) sur les procédures de reconstruction, nous avons estimé utile de les tester sur les  $Y_{A,SF}$  et  $Y_{B,SF}$  (Fig. 5.3).

## 5.2 Critères d'évaluation des algorithmes

Afin de pouvoir évaluer quantitativement nos algorithmes de reconstruction, il a fallu trouver des critères mesurant la précision des résultats [Bian et al., 2010]. Dans le cas d'existence d'un objet de référence (cas des données simulées), nous avons calculé l'erreur quadratique  $EQ_{3D}$  entre l'arbre coronarien reconstruit  $\mu^R$  et celui de référence  $\mu_{A||B}$  (éq. 5.2), effectuée sur  $256^3$  échantillons (voxels).

$$EQ_{3D} = \sum_{j=1}^N (\mu_j^R - \mu_{j,A||B})^2 \quad (5.2)$$

avec,  $N$  représente le nombre total d'échantillons (voxels)  $\mu_j$ .

Le critère de l'erreur quadratique nous a permis d'évaluer voxel par voxel l'écart entre deux objets, autrement dit, entre la reconstruction et l'objet de référence. Cependant, ces valeurs mesurent des erreurs absolues difficile à interpréter. Dans nos tests, le critère  $EQ_{3D}$  nous a servi uniquement à comparer les différentes reconstructions (en fonction des itérations et/ou des méthodes de reconstruction MAP-MNR ou MAP-ARTUR-GC). Nous estimons que la reconstruction présentant la plus petite valeur de  $EQ_{3D}$  est la plus précise (en disposant de la vérité terrain).

Afin de prévoir des métriques permettant de mesurer la précision des reconstructions sans devoir les comparer avec d'autres résultats, nous avons fait appel à deux autres critères connus dans le domaine de la tomographie, à savoir l'erreur quadratique moyenne normalisée -  $EQMN_{3D}$  (éq.5.3) et l'indice de qualité universel (éq. 5.4) [Wang and Bovik, 2002] :

- **Erreur quadratique moyenne normalisée - EQMN** (éq. 5.3) : représente l'erreur quadratique moyenne des  $N$  échantillons normalisée par la moyenne des objets de référence au carré ( $\mu_{A||B}^2$ ).

$$EQMN_{3D} \{ \mu^R, \mu_{\{A,B\}} \} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mu_j^R - \mu_{j,A||B})^2}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mu_{j,A||B})^2} \quad (5.3)$$

EQMN représente une erreur relative, ainsi, sa multiplication par 100 permet de donner une appréciation de l'erreur de reconstruction en pourcentage : 100% dans le cas d'une reconstruction nulle (que des zéros) et 0% pour une reconstruction idéale.

**NB :**  $EQMN_{3D}$  n'est pas toujours comprise entre 0 et 1, ainsi, nous pouvons mesurer des erreurs qui dépassent les 100%.

- **Indice de la qualité universelle - UQI** (Universal Quality Index - éq. 5.4) : mesure la similarité voxel par voxel, entre l'objet reconstruit  $\mu^R$  et celui de référence ( $\mu_{A||B}$ ).

$$UQI = \frac{2Cov \{ \mu^R, \mu_{A||B} \}}{(\sigma^R)^2 - (\sigma_{A||B})^2} \frac{2\bar{\mu}^R \times \bar{\mu}_{A||B}}{(2\bar{\mu}^R)^2 + (\bar{\mu}_{A||B})^2} \quad (5.4)$$

avec,  $Cov\{X_1, X_2\}$  désigne la covariance entre les deux objets,  $X_1$  et  $X_2$ ,  $\bar{\mu}^R$ ,  $\bar{\mu}_{A||B}$ ,  $\sigma^R$  et  $\sigma_{A||B}$  représentent respectivement les moyennes et les écart types des objets reconstruits et ceux de référence.

Les valeurs de UQI sont comprises entre 0 et 1, telles que les petites valeurs correspondent à des mauvaises similarités et celles proches de 1 représentent les meilleures reconstructions.

Tous les critères cités jusqu'à maintenant nécessitent un objet de référence ( $\mu_{A||B}$ ). Ainsi, afin d'enrichir notre évaluation quantitative en proposant d'autres métriques indépendantes des objets de référence, nous avons adopté la métrique du rapport signal sur bruit (éq. 5.5) :

**Rapport signal sur bruit SNR** (éq. 5.5) : permet d'évaluer le contraste de l'objet reconstruit, ainsi que les propriétés de bruit de reconstruction, en définissant une région d'intérêt  $\mu^{R.S}$  située à l'intérieur de vaisseaux 3D (région d'intérêt RI) reconstruits et une autre de fond,  $\mu^{R.B}$ , à l'extérieur de RI (éq. 5.5).

$$SNR_{3D} = \frac{2 |\bar{\mu}^{R.S} - \bar{\mu}^{R.B}|}{\sigma^S + \sigma^B} \quad (5.5)$$

Ainsi, nous avons choisi quatre métriques différentes permettant de quantifier la précision de nos algorithmes :  $EQ_{3D}$  et  $EQMN_{3D}$  pour mesurer les erreurs absolues et relatives des reconstructions effectuées par rapport aux modèles de référence,  $UQI$  pour évaluer la similarité des objets reconstruits  $\mu^R$  par rapport aux  $\mu_{A||B}$  et le SNR pour évaluer le contraste des reconstructions.

Enfin, nous avons calculé aussi les valeurs des deux composantes principales formant nos fonctions de coût (MAP - éq. 4.13), à savoir celle de l'attache aux données (éq. 5.6) que l'on peut considérer comme une erreur quadratique 2D entre les projections reconstruites  $A\mu^R$  et celles mesurées  $Y_{A,B}$ , et l'énergie a priori (éq. 5.7).

$$EQ_{2D} = \sum_{i=1}^{PK} ([A\mu^R]_i - g_i)^2 \quad (5.6)$$

$$E_{prior} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \varphi \left( \frac{\mu_j^R - \mu_s^R}{\rho} \right) \quad (5.7)$$

Les deux derniers critères (éq. 5.6 et éq. 5.7) nous ont permis d'obtenir des informations supplémentaires concernant l'évolution de la solution MAP pendant les itérations des algorithmes, influencés par les différents choix de fonctions de potentiel (Tabl. 4.6) et des hyperparamètres ( $\rho$  et  $\beta$ ) au sein de l'énergie totale.

## 5.3 Tests de l'algorithme : Maximum A Posteriori - Newton Raphson Modifié MAP-MNR

Nous avons évalué l'algorithme statistique itératif **MAP-MNR** (Tab. 4.5), appliqué aux dix séquences de projections simulées (Fig. 5.4). Concernant la fonction de coût modélisant le problème de reconstruction (éq. 5.8), nous avons choisi les trois fonctions de potentiel les plus appropriées (vérifiant certaines conditions mentionnées dans la section 4.3.1), à savoir, celle de Hubert ( $\varphi_H$ ), de Green ( $\varphi_G$ ) et de surfaces minimales ( $\varphi_{SM}$ ) (Tab. 4.4).

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \geq 0} \left( \frac{1}{2} (1 - \beta) \|A\mu - G\|_2^2 + \beta \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{js} \varphi \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right) \right) \quad (5.8)$$

Nous avons décidé de diviser cette section en deux parties :

- Une première définissant d'une manière empirique les valeurs des hyperparamètres (le facteur d'échelle  $\rho$  et le poids  $\beta$  de l'a priori) permettant d'obtenir les meilleures reconstructions selon le critère de l'erreur quadratique (éq. 5.2). Pour cela, nous

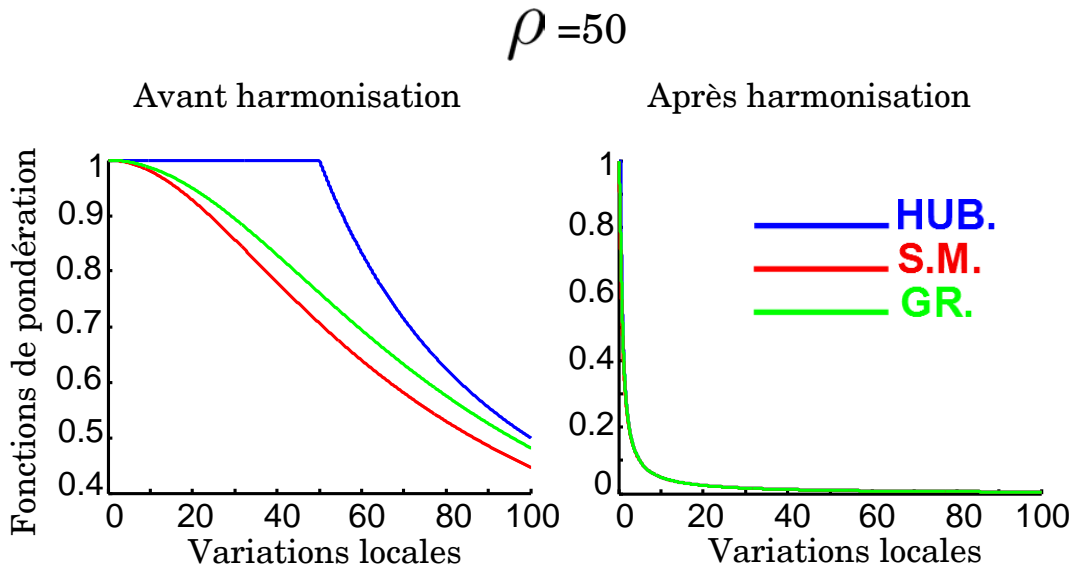
avons effectué une série de tests de l'algorithme en faisant varier  $\rho$  et  $\beta$  dans des intervalles (échantillonnés) qui ont été fixés préalablement.

- Une deuxième partie dans laquelle nous avons discuté de la convergence des algorithmes et analysé l'évolution de la solution MAP au cours des procédures de reconstruction. Pour ce faire, nous avons tracé l'erreur quadratique 3D (éq. 5.2), l'énergie de l'attache aux données (éq. 5.2) et celle de l'a priori (éq. 5.7) en fonction des itérations.

Par définition, les deux hyperparamètres sont strictement positifs, ainsi, pour pouvoir désigner les domaines de variations de  $\rho$  et  $\beta$ , il a suffi de déterminer les valeurs maximales (nous avons choisi des valeurs proches de 0 comme limite inférieure).

La valeur maximale que peut atteindre  $\beta$  est strictement inférieure à 1. En effet, dans l'expression MAP (éq. 5.8), le terme d'attache aux données  $0.5(1 - \beta) \|A\mu - G\|_2^2$  a été multiplié par  $(1 - \beta)$  et ne peut être négatif ( $1 - \beta < 0$  puisque  $\|A\mu - G\|_2^2 \geq 0$ ).

Ainsi, l'intervalle de variations de  $\beta$  a été choisi entre 0 et 1



**Figure 5.5:** Exemples de courbes des fonctions de pondération,  $\psi_{Hub}$  (en bleu),  $\psi_{SM}$  (en rouge) et  $\psi_G$  (en vert), avant et après harmonisation, pour le facteur d'échelle :  $\rho = 50$ .

Pour déterminer une valeur théorique maximale du facteur d'échelle  $\rho$ , nous avons fait appel à quelques notions élémentaires abordées dans la section 4.2.3, notamment, la fonction de pondération et la procédure d'harmonisation (Fig. 5.5).

En effet, notre procédure d'harmonisation nous a permis d'attribuer le rôle de détecteur de discontinuités maximales à la constante d'échelle  $\rho$ . Dans l'exemple de la figure 5.5, après harmonisation et pour  $\rho = 50$ , les fonctions de pondération associées à celles de potentiel de Huber ( $\psi_{Hub}$ ), de Green ( $\psi_G$ ) et de surfaces minimales ( $\psi_{SM}$ ) varient entre 1 (diffusion) et 0.01 (quasi-interruption de diffusion - préservation des contours) quand les variations locales (la différence entre deux sites voisins (voxels) de l'objet à reconstruire) croissent de 0 à 50. En conséquence, nous avons estimé que la valeur théorique maximale de  $\rho$  était proche de la plus grande variation (gradient) entre deux échantillons voisins de  $\mu$ .

En visualisant les histogrammes des modèles de référence ( $\mu_{A||B}$  - Fig. 5.1), la variation



maximale a été estimée à 5. Cependant, nous avons dépassé largement cette valeur ( $\rho = 5$ ) pour laisser un intervalle de confiance (sachant que la vitesse de décroissance des fonctions de pondération harmonisées est très lente au voisinage de  $\rho$  - Fig. 5.5) et pour pouvoir bien comprendre l'influence du choix de  $\rho$  sur les résultats de reconstruction, notamment pour les très grandes valeurs.

Ainsi, l'intervalle de variation de  $\rho$  est **compris entre 0 et 350**.

### 5.3.1 Comportement de l'algorithme en fonction des hyperparamètres $\rho$ et $\beta$

Dans un premier temps, nous avons tracé uniquement les résultats des données simulées de projections bruitées avec un SNR de 5db ( $Y_{A,5db}$  et  $Y_{B,5db}$  - Fig. 5.4).

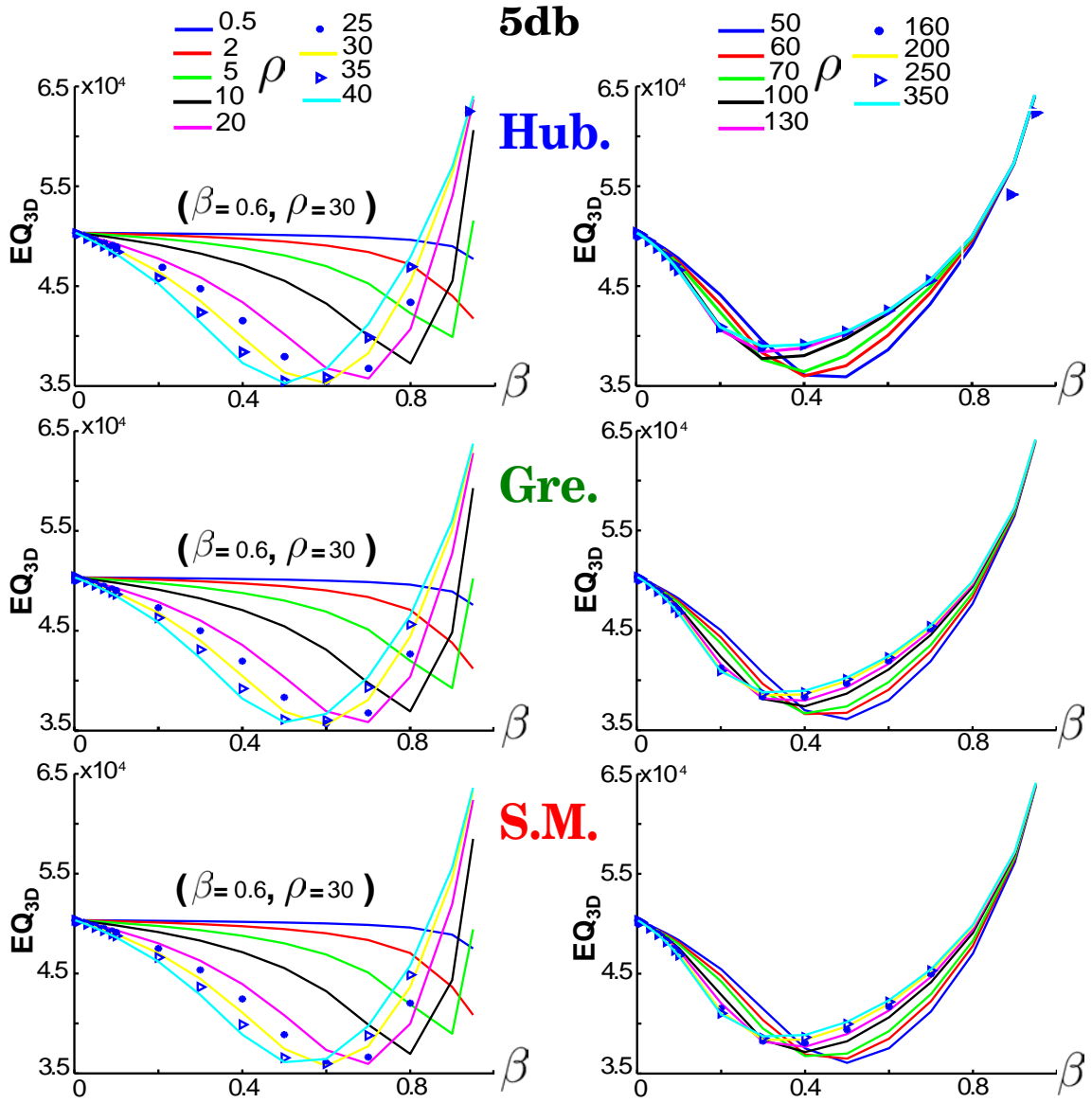
Les deux premières figures (Fig. 5.6 et 5.7) représentent les variations (de deux façons différentes) de l'erreur quadratique (éq. 5.2) par rapport aux paramètres  $\rho$  et  $\beta$  et aux fonctions de potentiel adoptées ( $\varphi_H$ ,  $\varphi_G$  et  $\varphi_{SM}$ ) pour la reconstruction **MAP-MNR**.

**NB** : Les deux figures 5.6 et 5.7, sont représentatives des autres tests effectués. En effet, elles permettent de bien comprendre et interpréter l'influence des variations de  $\beta$  et  $\rho$  sur l'erreur quadratique 3D, étant donné que l'on retrouve les mêmes allures des courbes pour d'autres niveaux de bruit. Dans les figures 5.8 et 5.9, nous avons récapitulé tous les tests effectués en désignant les valeurs des hyperparamètres  $\beta$  et  $\rho$  correspondant aux meilleures reconstructions (selon le critère de l'erreur quadratique).

**Discussion de la figure 5.6** : Chaque courbe, distinguée par une couleur ou un symbole spécifique, a représenté la variation de l'erreur quadratique (coordonnées) en fonction de  $\beta$  (abscisses), pour différentes valeurs de  $\rho$  (légendes). Elles rassemblent une série de tests de l'algorithme MAP-MNR appliqués aux projections bruitées  $Y_{A,5db}$ , pour différentes fonctions de potentiel (Huber, Green et Surfaces Minimales).

À la lumière de l'étude heuristique des propriétés de lissage avec préservation de contours (section 4.2), nous avons pu analyser et discuter des résultats illustrés sur les figures 5.6 et 5.7 :





**Figure 5.6:** Tracé de l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\beta$  (abscisses -  $\beta \in [0.0007, 0.95]$ ) pour différents  $\rho$  constants (légendes -  $\rho \in [0.5, 40]$ /colonne gauche,  $\rho \in [50, 350]$ /colonne droite) et pour différentes fonctions de potentiel utilisées dans le modèle a priori (Hub. : Huber, Gre. : Green, S.M. Surfaces Minimales). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées  $Y_{A,5db}$  (SNR = 5db - projections du premier modèle 3D  $\mu_A$ ). Pour chaque série de tests, le couple  $(\beta, \rho)$  réalisant la plus petite valeur de  $EQ_{3D}$  sont mentionnés au dessus des courbes.

- **Allure des courbes  $EQ_{3D}$  en fonction de  $\beta$  :**

À  $\rho$  constant tout en faisant croître les valeurs de  $\beta$  (entre 0 et 1), l'erreur quadratique décroît jusqu'à ce qu'elle atteigne un minimum (autour de  $3.5 \times 10^4$ ) avant de diverger. Cette évolution peut très bien s'expliquer par le fait qu'au départ, l'énergie de l'a priori contrôlée par son poids  $\beta$  (qui est très proche de zéro) est assez faible pour pouvoir réellement régulariser la solution MAP. En augmentant  $\beta$ , le compromis entre l'énergie de l'a priori et celle de l'attache aux données s'équilibre (décroissance de l'erreur), avec l'introduction progressive de la diffusion anisotropique dans la solution de reconstruction (analogie avec l'EDP de diffusion - section 4.2). À par-

tir d'une certaine valeur de  $\beta$ , l'énergie de l'a priori domine celle de la vraisemblance, provoquant ainsi l'infidélité des reconstructions aux données mesurées (divergence le l'erreur au voisinage de  $\beta = 1$ ).

- **Comportement de  $EQ_{3D}$  au voisinage des valeurs extrêmes de  $\beta$  :**

Toujours à  $\rho$  constant, l'erreur quadratique au voisinage de  $\beta = 1$  ( $EQ_{3D} \approx 6 \times 10^4$ ) est généralement largement supérieure à celle constatée à l'origine,  $\beta = 0$  (proches de  $3.5 \times 10^4$ ). Cet écart est évident, car le terme de vraisemblance représente l'unique partie modélisant la vérité terrain (projections) dans l'expression du coût à minimiser (éq. 5.8), tandis que l'a priori ne sert qu'à régulariser l'objet au cours de la reconstruction (a priori bas niveau - Modèle de connaissance a priori 2.3.2).

- **Dispersion des courbes  $EQ_{3D}$  :**

Au fur et à mesure que l'on augmente les valeurs de  $\rho$ , les courbes des erreurs en fonction de  $\beta$  (initialement dispersées pour  $\rho < 40$ ) se rapprochent de plus en plus ( $\rho > 40$ ), jusqu'à une superposition quasi-totale, à partir d'une certaine valeur de  $\rho$  ( $\rho = 200$ ).

En effet, le facteur d'échelle  $\rho$  permet de restreindre le contrôle de la fonction de pondération (exercé sur la dynamique de l'objet reconstruit) dans un domaine bien défini (entre 0 et  $\rho$  après harmonisation Fig. 5.5). Ces fonctions contrôlent les variations locales de reconstruction qui appartiennent forcément à un intervalle borné  $D_{var}$ . (entre 0 et  $\nabla\mu_{max}$ ). Ainsi, toute variation de  $\rho$  à l'intérieur de  $D_{var}$ . à  $\beta$  constant provoque forcément un changement de comportement de la diffusion anisotropique (administrée par  $\rho$ ), d'où la dispersion des courbes de  $EQ_{3D}$ .

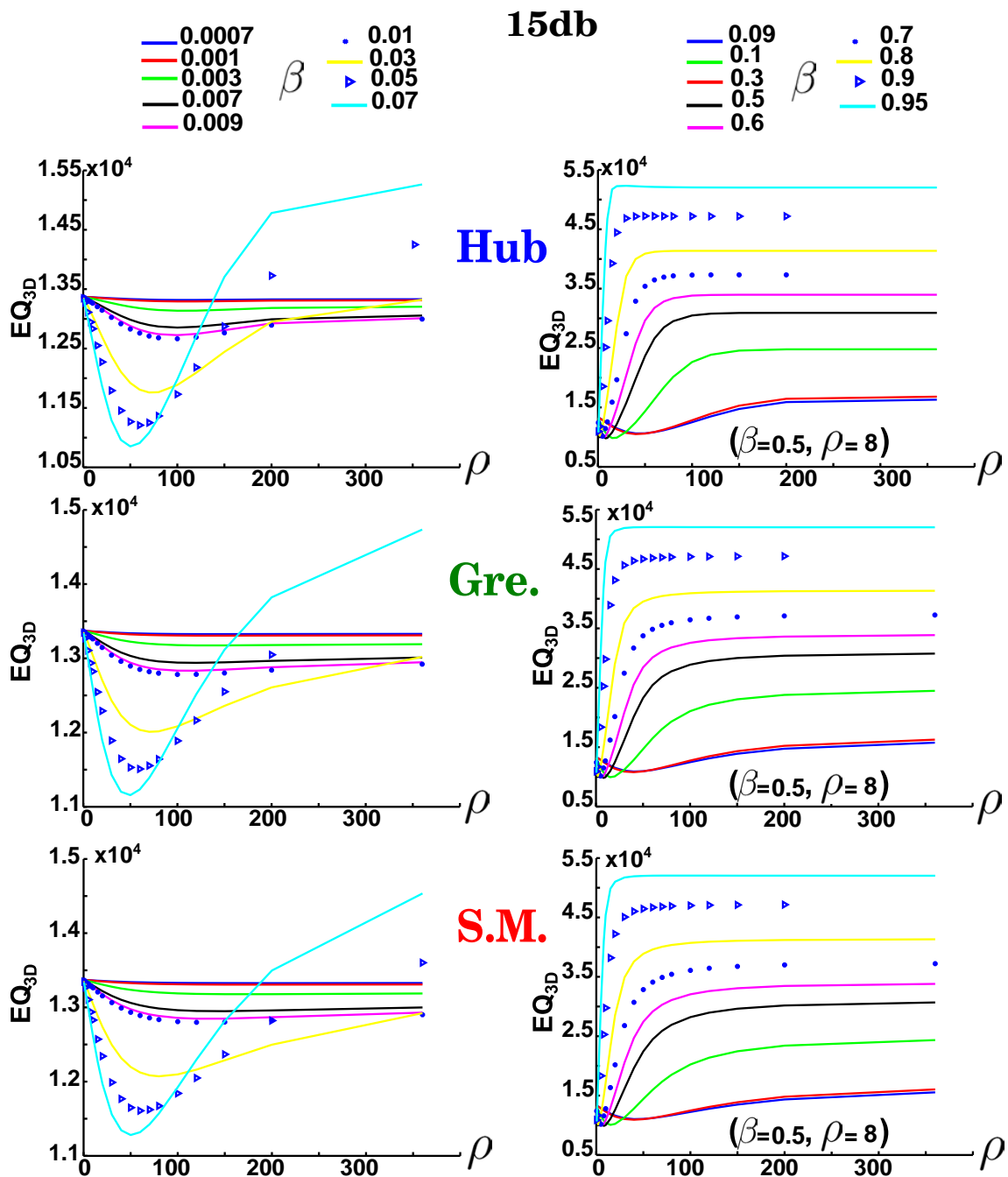
Quand  $\rho$  s'éloigne des valeurs limites,  $\pm \nabla\mu_{max}$ , la dynamique de l'objet à reconstruire normalisée par  $\rho$  (facteur d'échelle) converge vers zéro. Ainsi, les fonctions de pondération associées favorisent d'avantage une homogénéité isotropique globale de la solution MAP, indépendamment des variations locales, d'où le rapprochement des courbes  $EQ_{3D}$  jusqu'à superposition totale (courbes correspondant à  $\rho = 200$ ,  $\rho = 256$  et  $\rho = 350$ ).

- **Comportement des erreurs minimales  $EQ_{3D}$  :**

Quand les courbes de  $EQ_{3D}$  sont dispersées ( $\rho \leq 40$ ), il faut noter que les erreurs minimales pour chaque série de tests (à  $\rho$  constant) sont quasiment identiques (proches de  $3.5 \times 10^4$ ). Cependant, leurs localisations (erreurs minimales) par rapport aux abscisses ( $\beta$ ) sont différentes. Elles se décalent vers l'origine (lors d'une diminution de la valeur de  $\beta$ ) à chaque fois que l'on augmente la valeur de  $\rho$ . Ce décalage nous informe de l'existence d'une certaine proportionnalité entre les valeurs des deux paramètres,  $\rho$  et  $\beta$ , permettant d'obtenir les meilleures reconstructions (selon le critère de l'erreur quadratique).

**NB :** nous avons abordé cette proportionnalité entre  $\beta$  et  $\rho$  dans la discussion portant sur la figure 5.8.

**Discussion de la figure 5.7 :** Nous avons tracé l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\rho$  (abscisses) pour différents  $\beta$  constants (dont les valeurs sont précisées dans les légendes) et pour différentes fonctions convexes de potentiel. Les reconstructions ont été réalisées à partir de projections simulées bruitées  $Y_{B,15db}$  (SNR= 15db ( $\sigma = 0.95$ ) - projections du deuxième modèle 3D ( $\mu_B$ ).



**Figure 5.7:** Tracé de l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\rho$  (abscisses) pour différents  $\beta$  constants (en légende) et pour différentes fonctions de potentiel utilisées dans le modèle a priori (Hub. : Huber, Gre. : Green, S.M. Surfaces Minimales). Les reconstructions ont été réalisées à partir de projections simulées bruitées  $Y_{B,15db}$  (SNR= 15db ( $\sigma = 0.95$ ) - projection du deuxième modèle 3D  $\mu_B$ ). Pour chaque série de tests, le couple  $(\beta, \rho)$  réalisant la plus petite valeur de  $EQ_{3D}$  est mentionné en dessous des courbes.

• **Allure des courbes  $EQ_{3D}$  en fonction de  $\rho$  :**

À  $\beta$  constant (compris entre 0.0007 et 0.95) tout en faisant croître la valeur de  $\rho$  (de 0.5 à 350), l'erreur  $EQ_{3D}$  décroît (pour les valeurs de  $\rho$  entre 0 et 50) jusqu'à atteindre une valeur minimale ( $EQ_{3D} \approx 10^4$ ), puis, elle augmente avant de se stabiliser à un niveau d'erreur très dépendant de la valeur de  $\beta$  (quand  $\beta$  varie de 0.09 à 0.95, l'erreur de stabilité augmente de  $1.6 \times 10^4$  à  $5.2 \times 10^4$ ).

Au début, les variations locales de l'objet à reconstruire se montrent trop importantes pour des valeurs de  $\rho$  proches de zéro. Ainsi, les fonctions de pondération associées (après harmonisation) vont quasiment interrompre toute procédure de régularisation (pour des valeurs inférieures à 0.01 - voir Fig.5.5). L'énergie de l'a priori s'atténue sévèrement à tel point que l'on peut considérer la reconstruction comme une maximisation de la vraisemblance ( $ML$ ) ; ce qui peut expliquer la concentration des courbes  $EQ_{3D}$  à des valeurs d'erreur très proches ( $\approx 1.3 \times 10^4$ ).

En faisant croître  $\rho$ , les fonctions de pondération associées contrôlent d'avantage la dynamique normalisée (par  $\rho$ ) de l'objet à reconstruire qui se chevauchent graduellement dans leurs domaines fonctionnels de variation, c'est à dire, le basculement continue entre 0 et 1. Par conséquent, la régularisation de la solution MAP débute en provoquant la diminution de l'erreur quadratique. Cette erreur atteint sa valeur minimale lorsque  $\rho$  se rapproche de la valeur maximale  $\nabla\mu_{max}$  de variations locales. Au delà de cette valeur limite ( $\nabla\mu_{max}$ ), la reconstruction bascule graduellement vers une régularisation quadratique (isotropique) de la solution MAP ayant une faible dynamique normalisée (facteur d'échelle  $\rho$ ). A partir d'une certaine valeur de  $\rho$ , l'algorithme se comporte comme une reconstruction MAP avec une contrainte globale de lissage, contrôlée par le poids  $\beta$  de l'a priori (la croissance puis la stabilité (dépendante de  $\beta$ ) de l'erreur  $EQ_{3D}$ ).

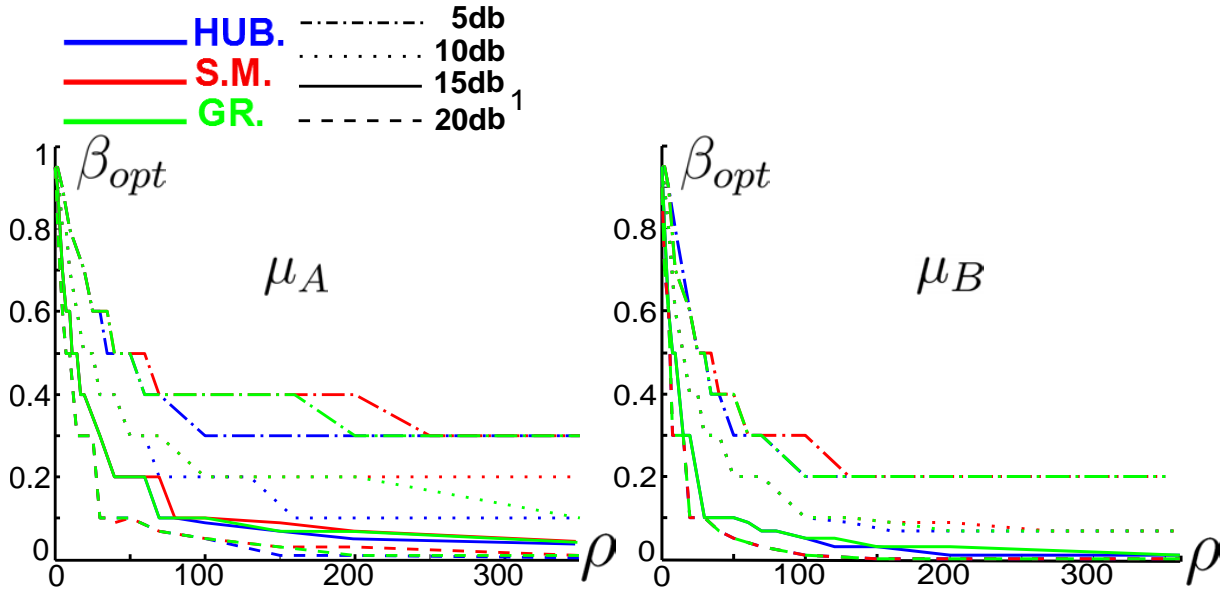
• **Comportement des erreurs minimales  $EQ_{3D}$  :**

Les positionnements des erreurs quadratiques minimales pour chaque série de tests (à  $\beta$  constant) se décalent vers l'origine à chaque fois que l'on augmente la valeur de  $\beta$ . Ce décalage nous informe de l'existence d'un couplage entre les valeurs des deux paramètres,  $\rho$  et  $\beta$ , permettant d'obtenir les meilleures reconstructions (selon le critère de l'erreur quadratique).

**NB :** Dans les deux figures 5.6 et 5.7, pour des valeurs fixes de  $\rho$  et  $\beta$ , le changement de fonctions de potentiel dans l'expression MAP (Huber, Green et Surfaces Minimales) n'influe quasiment pas le comportement des erreurs quadratiques 3D (une quasi-superposition des courbes  $EQ_{3D}$ ). Cela est dû au fait que notre procédure d'harmonisation (Fig. 5.5) a pu imposer le même comportement aux différentes fonctions de potentiel adoptées (pour des valeurs fixes de  $\rho$ ).

Nous avons constaté aussi une proportionnalité entre les deux hyperparamètres  $\rho$  et  $\beta$ , permettant d'obtenir les meilleures reconstructions. Afin de pouvoir analyser ce couplage pour différents niveaux de bruit, nous avons tracé les poids de l'a priori  $\beta_{opt}$  réalisant les meilleures reconstructions pour des valeurs fixes de  $\rho$  (Fig 5.8).

**Discussion de la figure 5.8 :** Nous avons tracé le poids de l'a priori  $\beta_{opt}$  permettant la réalisation des reconstructions MAP les plus fidèles aux objets 3D de référence ( $\mu_A$  ou  $\mu_B$  - selon le critère de l'erreur quadratique), pour différentes valeurs du facteur d'échelle  $\rho$  (abscisses entre 0 et 350) et de différents niveaux de bruit (lignes alternées pour un



**Figure 5.8:** Tracé des poids  $\beta_{opt}$  de l'a priori (coordonnées) permettant d'obtenir des reconstructions optimales (selon le critère quadratique 3D), en fonction du facteur d'échelle  $\rho$  (abscisses) pour différentes fonctions de potentiel de Huber, de Surfaces Minimales et de Green (correspondant respectivement aux lignes bleues, rouges et vertes). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées (lignes alternées : SNR= 5db, lignes pointillées : SNR= 10db, lignes solides : SNR= 15db, tiretées : SNR= 20db). Ces projections ont été générées à partir des deux modèles 3D de coronaire,  $\mu_A$  et  $\mu_B$ .

SNR = 5db, pointillées pour SNR = 10db, solides pour SNR = 15db et tiretées pour SNR = 20db). Les reconstructions MAP ont été réalisées en adoptant les trois fonctions de potentiel de Huber (lignes bleues), de Green (lignes vertes) et de surfaces minimales (lignes rouge). Nous avons résumé notre analyse des résultats illustrés sur cette figure comme suit :

- **Comportement quasi identique des fonctions de potentiel adoptées dans la reconstruction MAP :**

Pour le même niveau de bruit (entre 5 db et 20 db) et le même objet à reconstruire ( $\mu_A$  ou  $\mu_B$ ), nous avons relevé une grande ressemblance des courbes de  $\beta_{opt}$  correspondantes aux différentes fonctions de potentiel adoptées (Huber, Green et Surfaces Minimales). Cette constatation ne fait que confirmer l'efficacité de notre procédure d'harmonisation à imposer le même comportement aux différentes fonctions de pondération associées.

- **Comportement de  $\beta$  optimal en fonction de  $\rho$  :**

En faisant croître la valeur du facteur d'échelle  $\rho$  (entre 0 et 350), le poids optimal  $\beta_{opt}$  de l'a priori diminue jusqu'à une valeur de stabilité  $\beta_{opt}^\infty$ . Cette valeur,  $\beta_{opt}^\infty$ , dépend du niveau de bruit appliqué aux images simulées de projection. Par exemple, pour les reconstructions du modèle  $\mu_B$  à partir de ses projections bruitées avec des SNR de 5db, 10db, 15db et 20db, les valeurs de  $\beta_{opt}^\infty$  correspondantes sont 0.2, 0.07, 0.01 et 0.0007.

En effet, pour de petites valeurs de  $\rho$  ( $\rho \approx 0$ ), l'énergie de l'a priori est quasiment nulle ( $\nabla\mu \leq \rho$  - interruption quasi totale de la diffusion). Ainsi, le poids optimal  $\beta_{opt}$  de l'a priori prend sa valeur maximale ( $\beta_{opt}(\rho \approx 0) \approx 1$ ) afin de compenser

au maximum ce déséquilibre énergétique entre les deux termes constituant le coût MAP, c'est à dire l'énergie de l'attache aux données et celle de l'a priori.

Le fait d'augmenter la valeur de  $\rho$  permet d'accroître l'énergie de l'a priori en positionnant progressivement le domaine de variations utiles des fonctions de pondération associées (entre 0 et 1) sur celui de la dynamique de l'objet à reconstruire. Cette amplification énergétique de l'a priori s'accompagne ainsi d'une diminution de  $\beta_{opt}$  afin de maintenir le même niveau d'équilibre (l'équilibre optimal) avec celle de la vraisemblance (décroissance des courbes  $\beta_{opt}$ ).

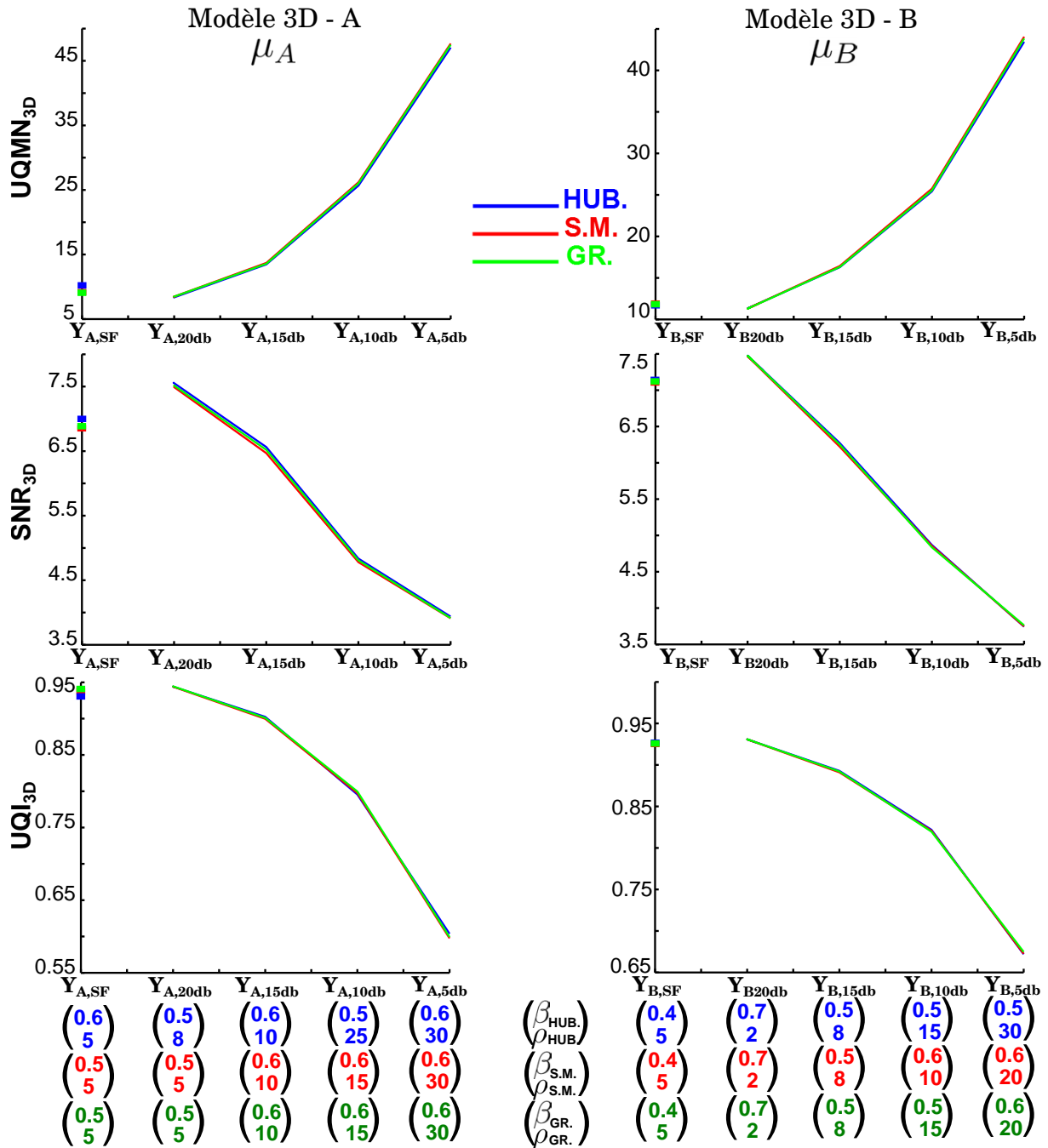
Quand  $\rho$  dépasse largement la dynamique maximale de l'objet à reconstruire ( $\nabla\mu_{max}$ ), notre reconstruction applique une diffusion isotropique sur la solution MAP (voir les discussions des Fig. 5.6 et 5.7). La puissance de cette diffusion est contrôlée uniquement par le poids  $\beta$  de l'a priori, indépendamment des valeurs de  $\rho$  (constance de  $\beta_{opt}$ ). Dans ce cas, le  $\beta_{opt} \approx \beta_{opt}^\infty$  représente le poids de l'a priori qui permet d'obtenir la reconstruction la plus lisse (homogène) avec le meilleur contraste possible au niveau des frontières (les parois de vaisseaux coronaires). Pour gérer ce compromis entre le lissage et la préservation de contours, les valeurs de  $\beta_{opt}^\infty$  sont relativement faibles afin de ne pas trop lisser les contours (dans l'exemple précédent,  $\beta_{opt}^\infty < 0.1$  pour un  $SNR \leq 15db$ ). L'augmentation du niveau de bruit des images de projection va forcément augmenter les variations locales de l'objet à reconstruire, nécessitant un lissage plus fort, c'est à dire, des  $\beta_{opt} \approx \beta_{opt}^\infty$  plus grands. Ce qui peut expliquer la dépendance de  $\beta_{opt}^\infty$  par rapport à la puissance du bruit appliqué au niveau des projections.

**NB** : Dans les tests illustrés dans la figure 5.8, nous avons fait varier la puissance du bruit blanc additif pour des  $\beta$  et  $\rho$  permettant d'obtenir des reconstructions optimales à partir des projections simulées du même objet de référence ( $\mu_A$  ou  $\mu_B$ ).

Ainsi, nous avons pu constater l'influence des bruits de projection sur le comportement du couple  $\beta$  et  $\rho$  ayant une certaine proportionnalité, permettant de réaliser les meilleures reconstructions. Cependant, cette proportionnalité est liée à la dynamique de l'objet au cours de la reconstruction ; une dynamique qui dépend entre autres des opérateurs de rétroprojection utilisés qui font propager les données acquises dans l'espace de reconstruction (3D), et aux dynamiques des projections influencées par plusieurs paramètres tels que les incidences de projection (plus ou moins de croisements), le mouvement cardiaque et la diffusion du produit de contraste. Par conséquent, toute tentative visant à élaborer un paramétrage plus avancé et plus généralisable entre  $\beta_{opt}$  et les différentes valeurs de  $\rho$  (pour des niveaux de bruit différents) se montre inutile.

Dans la figure 5.9, nous nous sommes concentrés sur les valeurs de  $\beta$  et  $\rho$  permettant la réalisation de reconstructions optimales, selon le critère de l'erreur quadratique 3D.

**Discussion de la figure 5.9** : Pour les différents traitements appliqués à notre base de projections simulées  $Y_{A||B}$  (Fig. 5.4), nous avons présenté différentes évaluations de reconstructions optimales selon le critère d'erreur quadratique globale  $EQ_{3D}$ . Les critères d'évaluation représentent la moyenne quadratique normalisée ( $UQMN_{3D}$  - (éq. 5.3) - en pourcentage ( $\times 100$ )), le rapport signal sur bruit ( $SNR_{3D}$  - éq. 5.5) et l'indice de qualité universelle ( $UQI_{3D}$  - éq. 5.4)). Les reconstructions MAP ont été réalisées en adoptant les trois fonctions de potentiel de Huber (lignes bleues), de Green (lignes vertes) et de surfaces minimales (lignes rouge). Nous pouvons résumer notre analyse de cette figure comme suit :



**Figure 5.9:** Tracé des différentes évaluations des reconstructions optimales 3D selon le critère quadratique total  $EQ_{3D}$ , en fonction des différents traitements appliqués aux données simulées de projection (voir figure 5.4). Les évaluations représentent la moyenne quadratique normalisée ( $UQMN_{3D}$  - (éq. 5.3) - en pourcentage ( $\times 100$ )), le rapport signal sur bruit ( $SNR_{3D}$  - éq. 5.5) et l'indice de qualité universelle ( $UQI_{3D}$  - 5.4). Pour chaque reconstruction optimale et chaque fonction de potentiel adoptée (Huber en bleu, Surfaces Minimales en rouge et Green en vert), nous mentionnons les valeurs de  $\beta$  et  $\rho$  correspondantes (en dessous des graphes).

• **Comportement des  $EQMN_{3D}$ ,  $SNR_{3D}$  et de  $UQI_{3D}$  correspondants aux reconstructions optimales, en fonction du bruit d'acquisition :**

En se basant sur les trois critères d'évaluation,  $UQMN_{3D}$ ,  $SNR_{3D}$  et  $UQI_{3D}$ , nous avons remarqué une dégradation des reconstructions optimales, proportionnelle à l'augmentation du niveau de bruit dans les projections simulées.

En faisant varier le SNR des projections de 20db à 5db, cette dégradation se traduit par une augmentation des erreurs voxel par voxel ( $UQMN_{3D}$  exprimées en % allant de 10 à 50), accompagnée d'une diminution du rapport signal sur bruit ( $SNR_{3D}$  allant de 7.5 à 3.7) et de similarité voxel à voxel par rapport aux objets de référence ( $UQI_{3D}$  allant de 0.93 à 0.55 (pour  $\mu_A$ ) ou 0.65 (pour  $\mu_B$ )).

En effet, l'augmentation du niveau de bruit 2D va se manifester par une croissance du bruit 3D qui va se superposer avec le signal utile (la rétroprojection des vaisseaux 2D sans bruit). En faisant croître le bruit 3D, sa dynamique se chevauche progressivement avec celle des coronaires, provoquant ainsi, l'incapacité de la procédure de reconstruction à trouver un compromis efficace entre le lissage (destiné entre autre à lisser ce bruit) et la préservation des contours (pour les frontières des coronaires), d'où l'amplification constatée des dégradations au niveau des reconstructions.

**NB :** Nous remarquons que la qualité de la reconstruction réalisée à partir des projections  $Y_{\{A,B\},SF}$  (censées simuler une soustraction du fond 2D) est légèrement inférieure à celle de la reconstruction des données simulées bruitées avec un niveau de bruit correspondant à 20 db,  $Y_{\{A,B\},20db}$  ( $EQMN_{3D}(Y_{\{A,B\},20db}) \leq EQMN_{3D}(Y_{\{A,B\},SF}) \leq EQMN_{3D}(Y_{\{A,B\},15db})$ ,  $UQI_{3D}(Y_{\{A,B\},15db}) \leq UQI_{3D}(Y_{\{A,B\},SF}) \leq UQI_{3D}(Y_{\{A,B\},20db})$  et  $SNR_{3D}(Y_{\{A,B\},15db}) \leq SNR_{3D}(Y_{\{A,B\},SF}) \leq SNR_{3D}(Y_{\{A,B\},20db})$ ).

Ainsi, nous avons pu établir une évaluation grossière des dégradations de la reconstruction liées aux procédures de soustraction du fond 2D ( $Y_{\{A,B\},SF}$ ). Cependant, il faut dire que cette dégradation n'est pas stable puisqu'elle dépend de plusieurs facteurs, tels que la précision des segmentations 2D et des méthodes d'estimation du fond effectuée (voir Fig. 5.3).

• **Valeurs de  $\rho$  et  $\beta$  permettant d'obtenir des reconstructions optimales :**

Dans la plupart des cas, la valeur du poids  $\beta$  de l'a priori permettant la meilleure reconstruction MAP selon le critère de l'erreur quadratique est très proche de 0.5 (elle est à 0.5 pour les reconstructions réalisées à partir de 5 séries de projections simulées  $Y_{A,20db}$ ,  $Y_{A,10db}$ ,  $Y_{B,15db}$ ,  $Y_{B,10db}$  et  $Y_{B,5db}$ ).

Cependant, les valeurs du facteur d'échelle permettant les reconstructions optimales augmentent proportionnellement avec le niveau du bruit. Par exemple, dans le cas des reconstructions MAP du deuxième modèle  $\mu_B$ , avec l'utilisation des fonctions de potentiel de Green et de Surfaces Minimales, la valeur de  $\rho$  augmente de 2 à 20 quand le SNR passe de 5 à 10 db.

En analysant le comportement quasi-constant de  $\beta$  (au voisinage de 0.5) et variable de  $\rho$  (entre 2 et 30), nous avons estimé que nos algorithmes de reconstruction ont maintenu des valeurs de  $\beta$  proches de 0.5 tout en variant les valeurs du facteur d'échelle  $\rho$  (en fonction du bruit d'acquisition) pour avoir les reconstructions les plus fidèles aux données 3D de référence.

En effet, à  $\beta$  fixe, l'augmentation des valeurs de  $\rho$  permet de faire pencher la reconstruction vers plus de lissage (quand  $\rho$  tend vers l'infini, la régularisation est



quadratique - discussion des figures 5.6, 5.7 et 5.9), afin de prendre en compte l'amplification du bruit 3D associée à celle du bruit de projections 2D.

**NB** : Nous avons pu comprendre le comportement des deux hyperparamètres  $\rho$  et  $\beta$  permettant de réaliser des reconstructions optimales. Cependant, jusqu'à maintenant, nous n'avons pas discuté du lien qui pouvait exister entre le bruit d'acquisition et les différentes valeurs optimales de  $\rho$  et de  $\beta$  (voir section 5.5).

### Conclusion récapitulative des discussions des figures 5.6, 5.7, 5.8 et 5.9 :

Ci dessous, nous avons effectué un résumé des discussions effectuées en s'appuyant sur quelques aspects qualitatifs des objets reconstruits (Fig. 5.10).

- **Le comportement de la procédure de lissage avec préservation des contours pour des valeurs limites de  $\rho$  et de  $\beta$  :**

Nous avons pu constater le changement du comportement de notre algorithme de reconstruction pour des valeurs limites de  $\rho$  et de  $\beta$  :

- 1) **Reconstruction au sens du maximum de vraisemblance  $ML$  :**

- ♣ Pour des poids  $\beta$  de l'a priori proches de zéro ( $\beta \approx 0$ ) et des valeurs pas (trop) élevées de  $\rho$ , l'énergie de la vraisemblance domine dans l'expression MAP, ainsi, notre algorithme se comporte comme une reconstruction ML.

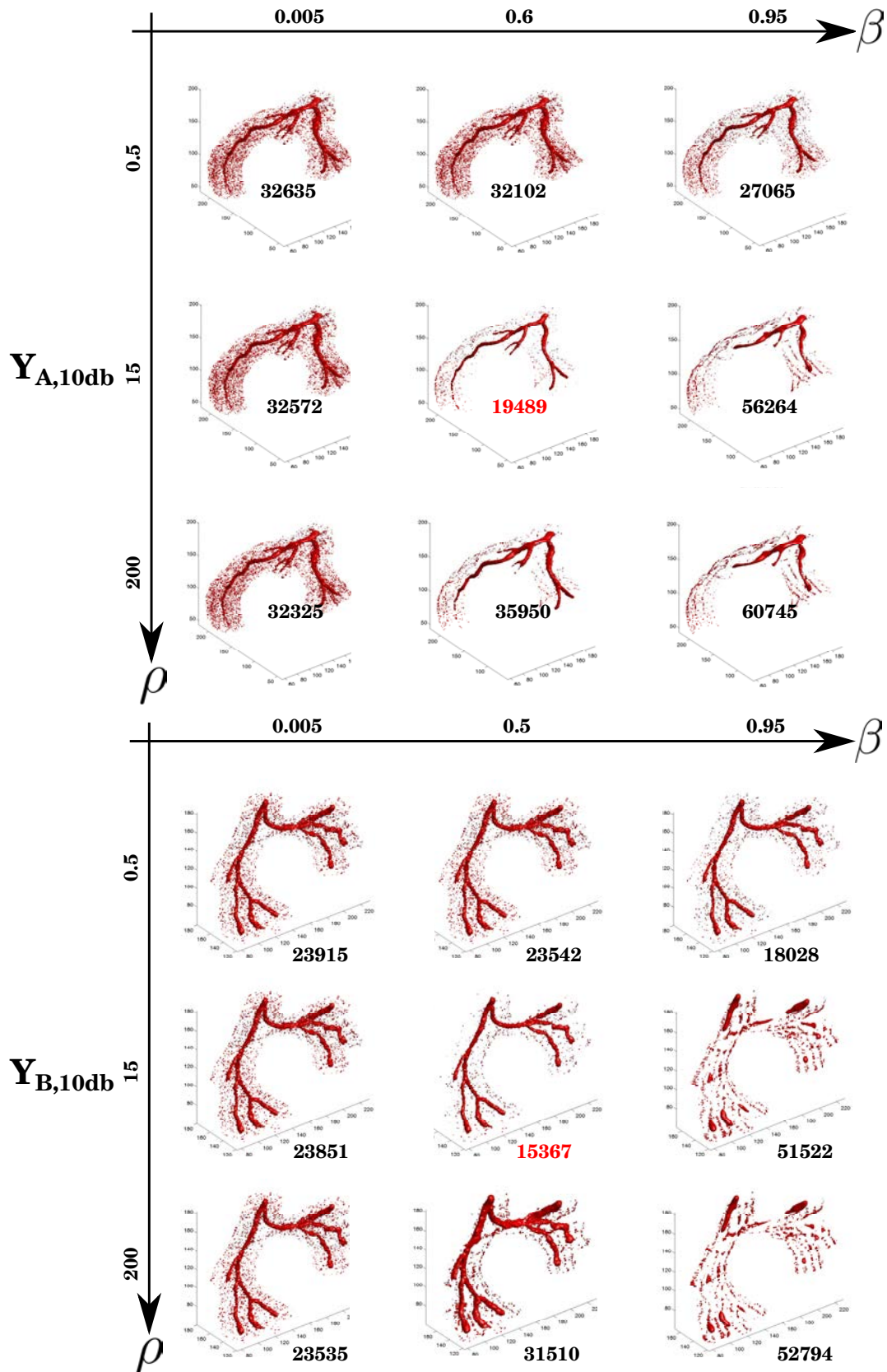
- ♣ Pour des valeurs très faibles du facteur d'échelle ( $\rho \approx 0$ ) et des valeurs pas (trop) élevées de  $\beta$  (généralement inférieures à 0.9), la dynamique de l'objet à reconstruire est largement supérieure à  $\rho$ , se situant ainsi dans la zone d'interruption quasi-totale de la procédure de lissage (après harmonisation - voir Fig. 5.5 et section 4.2.3). Ainsi, l'énergie de l'a priori n'a aucune influence sur les objets reconstruits et la reconstruction se contente de maximiser l'énergie de vraisemblance.

La figure 5.10 confirme notre première conclusion. Par exemple, les reconstructions du premier modèle ( $\mu_A$ ) correspondant à  $\rho = 0.5$  avec  $\beta \leq 0.6$  et à  $\beta = 0.005$  avec  $\rho \leq 200$ , sont très bruitées (pas de lissage) et représentent le même niveau d'erreur  $EQ_{3D}$  ( $\approx 32 \times 10^4$ ).

- 2) **Reconstruction avec une contrainte globale de lissage :**

Pour des valeurs très élevées de  $\rho$  (dans notre cas,  $\rho$  est approximativement supérieur à 150 - voir Fig.5.7) et des  $\beta$  pas trop faibles ( $\beta$  est approximativement supérieur à 0.003 - voir Fig. 5.7), la dynamique de l'objet à reconstruire normalisée par les valeurs de  $\rho$  converge vers zéro, se situant ainsi dans une zone de diffusion isotrope (les fonctions de pondération associées sont très proches de 1  $\psi \approx 1$  - voir Fig. 5.5 et section 4.2.3). Par conséquent, l'algorithme se caractérise par un comportement similaire à une reconstruction avec une régularisation quadratique.

Dans la figure 5.10, pour une valeur très élevée du facteur d'échelle ( $\rho = 200$ ) et  $\beta = 0.5$ , la reconstruction du deuxième modèle ( $\mu_B$ ) correspondante est très lisse, se caractérisant par des branches sanguines plus larges. Nous constatons la même chose pour la reconstruction du premier modèle correspondant à  $\rho = 200$  et  $\beta = 0.6$ , avec une perte d'information au niveau des branches les plus fines. Ces constatations viennent appuyer l'hypothèse d'une régularisation quadratique.



**Figure 5.10:** Quelques reconstructions MAP-MNR (représentatives) réalisées à partir de projections simulées  $Y_{A,10db}$  (partie en haut) et  $Y_{B,10db}$  (partie en bas), pour des valeurs différentes de  $\rho$  et de  $\beta$ . Pour chaque reconstruction MAP adoptant la fonction de potentiel de Green, nous mentionnons la valeur de l'erreur quadratique  $EQ_{3D}$  (en dessous). Les reconstructions optimales selon  $EQ_{3D}$  (mentionnée en rouge) correspondent à  $(\beta = 0.6, \rho = 15)$  pour  $\mu_A$  et à  $(\beta = 0.5, \rho = 15)$  pour  $\mu_B$ .

- **Proportionnalité entre les hyperparamètres  $\rho$  et  $\beta$  afin d'obtenir les meilleures reconstructions :**

Afin de réaliser les meilleures reconstructions avec un bon compromis entre le lissage (diffusion isotope) et la préservation de contours (interruption de la diffusion), les faibles valeurs de  $\rho$  ( $\rho \approx 0.5$ ) correspondent à des  $\beta$  très élevés ( $\beta \approx 1$ ), tandis que pour des fortes valeurs de  $\rho$  ( $\rho \approx 200$ ), les  $\beta$  doivent avoir des faibles valeurs (dépendantes du niveau de bruit dans les projections). Entre les deux valeurs extrêmes de  $\rho$ , les  $\beta$  décroissent continument avec l'augmentation de  $\rho$ . Cette décroissance se manifeste avec une diminution des erreurs  $EQ_{3D}$  (amélioration des reconstructions) jusqu'à une valeur minimale (reconstruction optimale) avant de diverger. C'est ce que nous remarquons sur la figure 5.10 : pour  $\beta = 0.6$  (modèle  $\mu_A$ ), le niveau d'erreur  $EQ_{3D}$  baisse en faisant croître  $\rho$  de 0.5 à 15 (de 32102 à 19489), puis augmente pour  $\rho = 200$  ( $EQ_{3D} = 35950$ ).

En effet, pour des valeurs très faibles de  $\rho$  (interruption quasi-totale de la diffusion), l'énergie de l'a priori est très faible par rapport à celle de vraisemblance, ainsi, les  $\beta$  prennent leurs valeurs maximales ( $\beta \approx 1$ ) pour palier à ce déséquilibre énergétique. En revanche, pour des valeurs élevées de  $\rho$ , l'énergie de l'a priori est à son maximum avec une régularisation quadratique de la solution MAP, nécessitant ainsi des faibles valeurs de  $\beta$  ( $\beta \approx 0.005$ ). Le facteur d'échelle optimal ( $\rho_{opt}$ ) permettant le meilleur compromis entre le lissage et la préservation de contour est situé forcément entre les deux cas extrêmes (reconstruction ML (interruption totale de diffusion) et MAP avec régularisation quadratique). Ce qui explique la convergence de l'erreur quadratique vers une valeur minimale (correspondant à  $\rho_{opt}$ ) avant sa divergence.

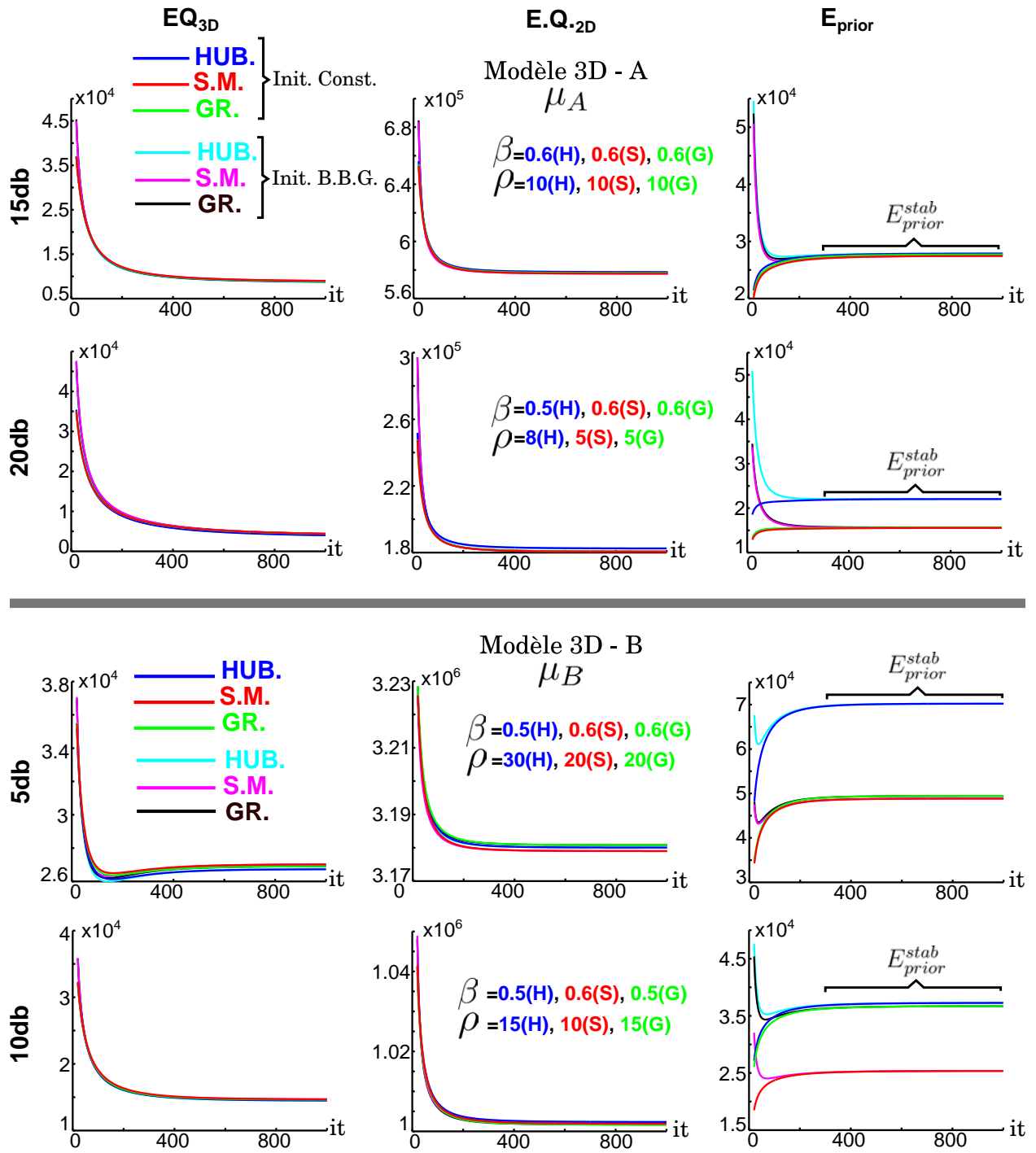
- **Comportement de  $\rho$  et  $\beta$  pour obtenir les meilleures reconstructions selon le critère de l'erreur quadratique :**

L'évaluation empirique de l'algorithme MAP-MNR effectué ne nous a pas permis d'établir un lien clair entre  $\beta$  et  $\rho$  permettant d'obtenir réellement la meilleure reconstruction selon le critère  $EQ_{3D}$ . Cependant, nous pouvons mentionner un comportement quasi constant de  $\beta$  ( $\approx 5$ ) et une proportionnalité entre les valeurs de  $\rho_{opt}$  et les niveaux de bruit d'acquisition. Dans nos tests, les valeurs de  $\rho_{opt}$ , pour les SNR de 20db, 15db, 10db et 5db, les  $\rho_{opt}$  correspondant appartiennent aux intervalles respectifs [2, 8], [8, 10], [15, 25] et [20, 30].

### 5.3.2 Convergence de l'algorithme

**Discussion de la figure 5.11 :** Afin d'évaluer la convergence de notre méthode de reconstruction, nous avons tracé l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$  - éq. 5.2), l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  - éq. 5.6) et l'énergie de l'a priori ( $E_{prior}$  - éq. 5.7) en fonction des itérations des reconstructions *MAP - MNR* optimales (selon le critère  $EQ_{3D}$ ). Pour chaque reconstruction, nous avons fixé le nombre des itérations à 1000 et initialisé les objets à reconstruire par des zéros ou par un bruit blanc gaussien de variance unitaire. Les reconstructions optimales ont été obtenues à partir des projections bruitées  $Y_{A,15db}$ ,  $Y_{A,20db}$ ,  $Y_{B,5db}$  et  $Y_{B,10db}$  en adoptant différentes fonctions de potentiel :

- **Convergence de  $EQ_{3D}$  (éq. 5.2), de  $EQ_{2D}$  (éq. 5.6) et de  $E_{prior}$  (éq. 5.6):**  
Pour les mêmes niveaux de bruit (5, 10, 15 ou 20db) et les mêmes fonctions de potentiel (Huber, Green ou Surfaces Minimales), les variations de  $EQ_{3D}$ , de  $EQ_{2D}$  ou de  $E_{prior}$  en fonction des itérations (1000 itérations) convergent vers le même



**Figure 5.11:** Tracé selon 2 initialisations différentes (constante - Init. Const., Bruit Blanc Gaussien - Init. B.B.G.) de l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$  - éq.5.2), de l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  - éq. 5.7) et de l'énergie a priori ( $E_{prior}$  - éq. 5.7) en fonction des itérations des reconstructions  $MAP - MNR$  optimales (selon le critère  $EQ_{3D}$ ). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections bruitées  $Y_{A,15db}$ ,  $Y_{A,20db}$  (premier modèle A - en haut),  $Y_{B,5db}$  et  $Y_{B,10db}$  (deuxième modèle B - en bas), en faisant varier les fonctions de potentiel (HUB. : Huber, GR. : Green, S.M. : Surfaces minimales) dans l'expression MAP (éq. 5.8).

point, quel que soit le choix de l'objet initial (initialisation nulle ou avec un bruit blanc gaussien - superpositions totales des lignes en bleu avec celles en cyan (Huber), en rouge avec celles en magenta (Surfaces Minimales) et en vert avec celles en noires (Green)). Ainsi, nous estimons que nous avons adopté un **algorithme itératif de descente, globalement convergent** pour résoudre notre problème MAP (vérifiant certaines conditions - voir section 4.3.1).

- **Comportement de la courbe  $EQ_{2D}$  :**

Quel que soit le choix de l'objet initial (constant ou bruit blanc gaussien) et le niveau de bruit, la courbe  $EQ_{2D}$  décroît continument et converge vers une valeur minimale  $EQ_{2D}^{stab}$ . Cette valeur minimale est proportionnelle au niveau du bruit appliqué aux images simulées de projection.

Cette constatation est cohérente avec notre reconstruction MAP, basée entre autre sur la réduction de la distance quadratique  $EQ_{2D}$  entre la projection de l'objet au cours de reconstruction et les données mesurées (terme de fidélité aux données). La distance minimale que l'on peut atteindre est dépendante du niveau de bruit qui vient affaiblir la puissance d'attache aux données (c'est à dire, augmenter la valeur de  $EQ_{2D}$ ).

- **Comportement de la courbe  $E_{prior}$  :**

Le comportement de l'énergie de l'a priori  $E_{prior}$  en fonction des itérations est dépendant du choix de l'objet initial.

Pour une initialisation de l'objet à reconstruire ( $\mu^0$ ) avec un bruit blanc gaussien, c'est à dire une forte énergie initiale de l'a priori  $E_{prior}^0$  (métrique proportionnelle à la dynamique de la reconstruction),  $E_{prior}$  décroît jusqu'à atteindre une valeur de stabilité  $E_{prior}^{stab}$ .

Dans le cas où  $\mu^0$  représente un vecteur de zéros ( $\mu^0 = \vec{0}$ ) qui se caractérise avec une énergie nulle de l'a priori (la plus petite valeur que peut atteindre  $E_{prior}$ ),  $E_{prior}$  croît continument pour converger vers la même valeur  $E_{prior}^{stab}$  (de stabilité).

En effet, dans notre reconstruction itérative, la solution MAP réalisée (à la convergence) présente le même équilibre énergétique entre le terme de vraisemblance et celui de l'a priori quelle que soit l'initialisation  $\mu^0$ . Par conséquent, dans le cas où l'énergie initiale de l'a priori ( $E_{prior}^0$ ) est nulle ( $\mu^0 = \vec{0}$ ) ou très importante (bruit blanc), elle converge (décroît ou croît) vers la même valeur positive et stable  $E_{prior}^{stab}$  afin de maintenir le même équilibre énergétique avec l'énergie de l'attache aux données.

**NB :** Pour un niveau important de bruit (SNR=10db et SNR =5db) et une initialisation  $\mu^0$  correspondant à des à un bruit blanc gaussien, l'énergie de l'a priori passe par une étape de décroissance monotone (jusqu'à atteindre une valeur minimale) avant de changer de direction (croissance) pour converger vers  $E_{prior}^{stab}$  (lignes solides en cyan, en magenta et en noir des reconstructions du modèle  $\mu_B$ ).

En effet, pour traiter des niveaux très élevés de bruit d'acquisition, nous avons constaté que notre algorithme de reconstruction favorise plus le lissage que la préservation de contours, en augmentant les valeurs du facteur d'échelle ( $\rho = 30$  pour les reconstructions à partir de  $Y_{\{B,5db\}}$  - fonction de potentiel de Huber).

En initialisant l'objet à reconstruire avec un bruit blanc gaussien de variance unitaire ( $\sigma = 1$ ), l'énergie de l'a priori initiale se montre très importante, imposant ainsi un lissage sévère de la solution initiale. Par conséquent, nous constatons une

forte descente de  $E_{Q_{prior}}$  pendant les premières itérations (40 itérations). Dans ce cas, l'énergie de lissage est très importante devant celle de la vraisemblance affaiblie par le bruit d'acquisition, et la vitesse de minimisation de l'a priori est plus rapide que celle de la maximisation du terme d'attache aux données. C'est la raison pour laquelle l'énergie de l'a priori  $E_{prior}$  a dépassé son état de stabilité  $E_{prior}^{stab}$ . Au fur et à mesure que l'on progresse dans la procédure de reconstruction, la dynamique de la reconstruction décroît et un équilibre entre les deux énergies constituant notre fonction de coût s'installe progressivement. Ainsi, le terme de l'a priori converge vers son état de stabilité ( $E_{prior}^{stab}$ ).

- **Comportement de la courbe  $E_{Q_{3D}}$  :**

Pour des niveaux importants de bruit d'acquisition ( $SNR = 5db$ ), l' $E_{Q_{3D}}$  passe par une étape de décroissance monotone jusqu'à atteindre une valeur minimale (de l'itération 1 jusqu'à 145), suivie d'une autre étape de croissance (de l'itération 146 jusqu'à 600), avant de se stabiliser (convergence). En effet, nous avons vu que le comportement de notre régularisation est quasi-quadratique (des valeurs de  $\rho$  plus élevées) face à des images de projection fortement bruitées. Dans ce cas, l'erreur  $E_{Q_{3D}}$  diminue avec la progression de la procédure de lissage jusqu'à une certaine itération, pour laquelle notre régularisation commence à lisser les frontières des vaisseaux. Ainsi,  $E_{Q_{3D}}$  s'éloigne progressivement de sa valeur minimale, pour se stabiliser à une valeur  $E_{Q_{3D}}^{stab}$  correspondant au compromis établi entre  $E_{prior}^{stab}$  et  $E_{Q_{2D}}^{stab}$ .

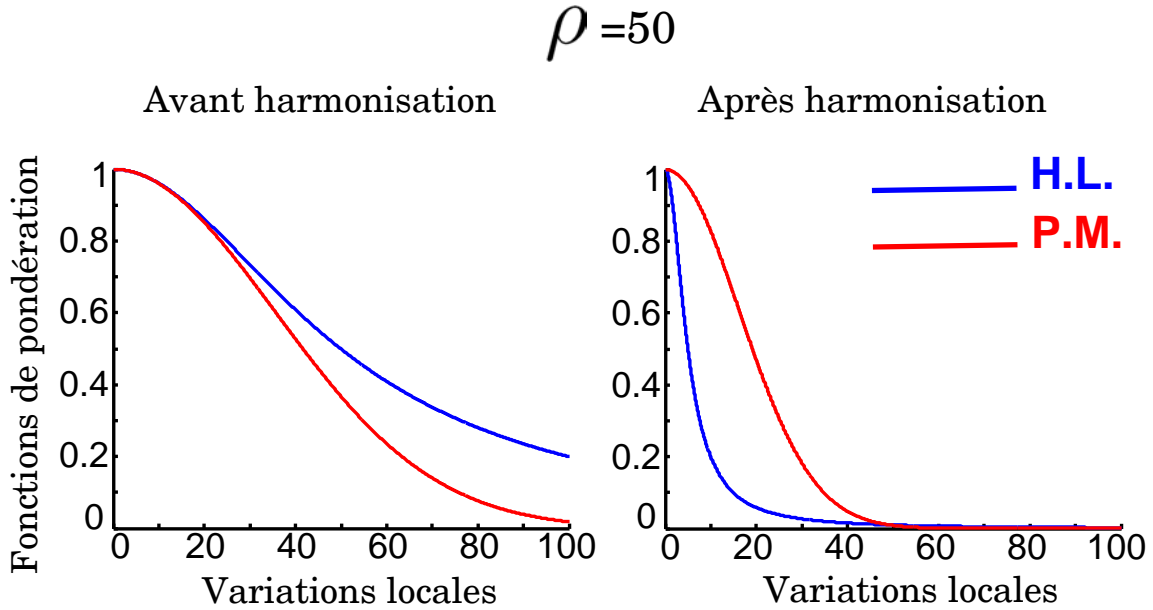
**Remarque :** Pour le même niveau de bruit des projections simulées (Fig. 5.11), les  $\beta$  et  $\rho$  permettant la réalisation des meilleures reconstructions MAP (selon le critère  $E_{Q_{3D}}$ ) des différents modèles 3D ( $\mu_A$  ou  $\mu_b$ ) sont quasi-identiques et invariant pour les fonctions de potentiel adoptées (Huber, Green ou Surfaces Minimales). Dans le cas d'existence de petites différences, les deux hyperparamètres  $\rho$  et  $\beta$  gardent toujours la même proportionnalité évoquée dans les discussions précédentes. Par exemple, pour un  $SNR = 5db$ , les hyperparamètres,  $\beta = 0.5$  et  $\rho = 30$  permettant les reconstructions optimales dans le cas de l'utilisation de la fonction de Huber correspondent à  $\beta = 0.6$  et  $\rho = 20$  dans le cas de l'adoption de la fonction de Green et de Surfaces Minimales (une augmentation de la valeur de  $\beta$  est accompagnée d'une diminution de  $\rho$ ).

## 5.4 Tests de l'algorithme : Maximum A Posteriori - ARTUR - Gradient conjugué MAP-ARTUR-GC

Dans cette partie, la fonction de coût (éq. 5.8) est composée d'un terme quadratique d'attache aux données, associé à un a priori de Gibbs défini par la fonction de potentiel de Hebert et Leahy [Hebert and Leahy, 1989] ou par celle de Perona et Malik [Perona and Malik, 1990] (fonctions non convexes -  $\phi_{H.L.}$ , et  $\phi_{PM}$  - Tab. 4.4).

Pour les mêmes séquences simulées de projection (Fig. 5.4), nous allons tester notre algorithme itératif de reconstruction **MAP-ARTUR-GC** (voir section. 4.3.2).

Les fonctions de pondération associées ( $\psi_{HL}$  et  $\psi_{PM}$ ) ont été harmonisées afin de restreindre leurs domaines de variations utiles (entre 0 et 1) entre l'origine (0) et le facteur d'échelle  $\rho$  (Fig. 5.12).



**Figure 5.12:** Visualisation des courbes des fonctions de pondération de Hebert et Leahy  $\dot{\psi}_{HL}$  (en bleu) et de Perona et Malik  $\dot{\psi}_{PM}$  (en rouge), avant et après harmonisation, pour le facteur d'échelle :  $\rho = 50$ .

**NB :** Il faut noter que notre procédure d'harmonisation n'a pas imposé la même vitesse de décroissance pour la même valeur de  $\rho$  aux différentes fonctions de pondération ( $\dot{\psi}_{PM}$  et  $\dot{\psi}_{HL}$  - table 4.4). Nous avons discuté de l'influence de cette vitesse de décroissance pour les reconstructions MAP dans la section 5.5.

Pour approfondir notre compréhension des comportements des reconstructions MAP-ARTUR-GC lorsque nous faisons varier les valeurs des hyperparamètres,  $\rho$  et  $\beta$ , nous avons effectué les mêmes tests discutés dans la section précédente (reconstruction MAP-MNR).

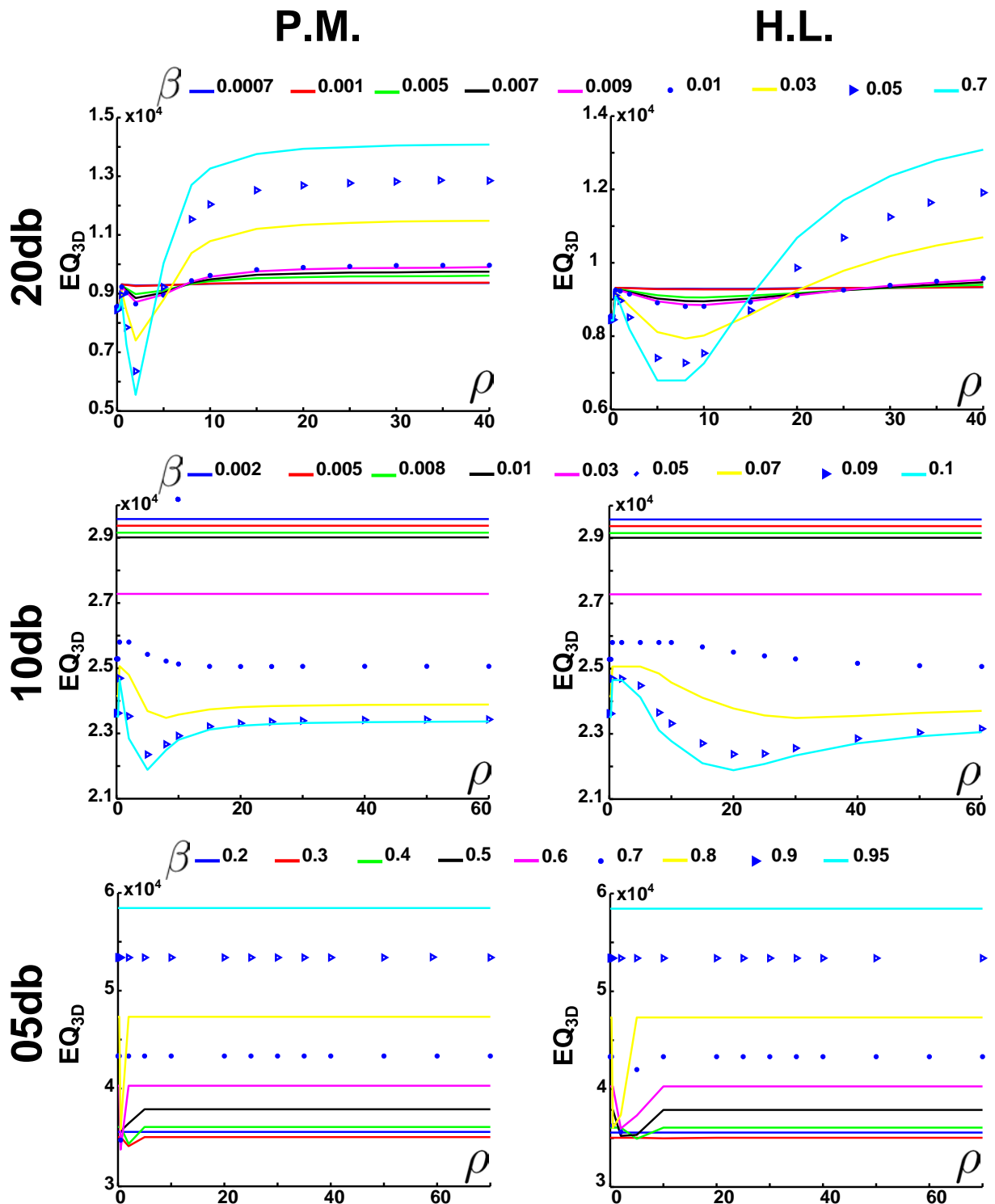
**NB :** D'une manière générale, nous remarquons un comportement similaire entre les courbes illustrées dans cette section (MAP adoptant  $\varphi_{HL}$  et  $\varphi_{PM}$ ) avec celles illustrées dans la section précédente (MAP adoptant  $\varphi_{SM}$ ,  $\varphi_G$  et  $\varphi_H$ ). Ainsi, nos discussions se sont restreintes à des cas particuliers (exceptions) et à des points que nous avons pas évoqués dans la section précédente.

#### 5.4.1 Comportement de l'algorithme en fonction des hyperparamètres $\rho$ et $\beta$

**Discussion de la figure 5.13 :** Nous avons tracé l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\rho$  (abscisses) pour différents  $\beta$  constants (dont les valeurs sont indiquées en légende) et pour différentes fonctions non convexes de potentiel (P.M. et H.L). Les reconstructions ont été réalisées à partir de projections simulées bruitées  $Y_{A,20db}$ ,  $Y_{A,10db}$  et  $Y_{A,5db}$ .

- **Allure des courbes  $EQ_{3D}$  en fonction de  $\rho$  :**

Comme dans la figure 5.7 (section précédente), à  $\beta$  constant et en faisant croître la valeur de  $\rho$  (entre 0.5 et 60), l'erreur  $EQ_{3D}$  décroît (pour des valeurs de  $\rho$  entre 0



**Figure 5.13:** Tracé de l'erreur quadratique 3D  $EQ_{3D}$  en fonction de  $\rho$  (abscisses) pour différents  $\beta$  constants (dont les valeurs sont indiquées en légende) et pour différentes fonctions de potentiel utilisées dans le modèle a priori (P.M. : Perona et Malik, H.L. : Hebert et Leahy). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées  $Y_{A,20db}$  (SNR= 20db -  $\sigma = 0.75$ ),  $Y_{A,10db}$  (SNR= 10db -  $\sigma = 2.39$ ) et  $Y_{A,5db}$  (SNR= 5db -  $\sigma = 4.25$ ) - projections du premier modèle 3D  $\mu_A$ .



et 20) jusqu'à atteindre une valeur minimale ( $EQ_{3D} \approx 0.4 \times 10^4$ ) pour SNR=20db,  $EQ_{3D} \approx 2.3 \times 10^4$  pour SNR=10db et  $EQ_{3D} \approx 3.5 \times 10^4$  pour SNR=5db), puis, elle augmente avant de se stabiliser.

Cependant, pour des petites valeurs du poids de l'a priori ( $\beta < 0.03$ ) et un niveau important de bruit de projections simulées (correspondant à une SNR=10db ou SNR=5db), l'erreur quadratique  $EQ_{3D}$  reste constante quelle que soit la variation du facteur d'échelle. Cette constatation ne fait que confirmer le comportement très similaire à une reconstruction  $ML$  de notre algorithme MAP-ARTUR-GC, lorsque  $\beta$  a une très faible valeur.

Pour le même niveau de bruit de projection et le même poids  $\beta$  de l'a priori, les variations des erreurs  $EQ_{3D}$  des reconstructions MAP-ARTUR-GC adoptant la fonction de potentiel de Hebert et Leahy, sont moins sensibles aux changements de  $\rho$  que celles des reconstructions avec une fonction de potentiel de Perona et Malik. Cela est dû forcément aux changements de vitesses de décroissance des fonctions de pondération harmonisées associées (Figure. 5.12). Nous discutons de ce phénomène plus en détail dans la section 5.5.

**NB :** Pour des valeurs très élevées de  $\beta$  ( $\beta \approx 1$ ), les erreurs quadratiques sont indépendantes du choix de  $\rho$  (pour  $\beta \geq 0.9$ , les courbes de  $EQ_{3D}$  sont constantes pour des reconstructions réalisées à partir de  $Y_{A,5db}$ ).

- **Comportement des erreurs minimales  $EQ_{3D}$  :**

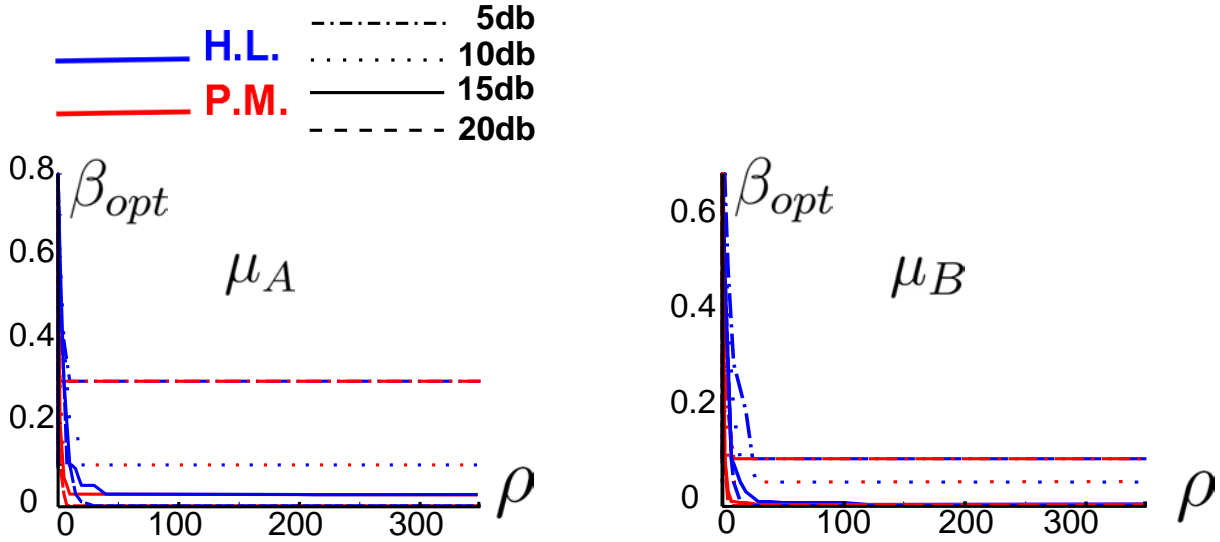
Nous remarquons que les positionnements des erreurs quadratiques minimales pour chaque série de tests (à  $\beta$  constant) se décalent vers l'origine ( $\rho = 0$ ) à chaque fois que l'on augmente la valeur de  $\rho$ . Cela confirme l'existence d'une proportionnalité entre  $\rho$  et  $\beta$  permettant d'obtenir les meilleures reconstructions :  $\rho^{opt}$  diminue à chaque fois que l'on augmente la valeur de  $\beta$ .

**Discussion de la figure 5.14 :** Nous avons tracé les poids  $\beta_{opt}$  de l'a priori qui permettent de réaliser les reconstructions MAP les plus fidèles aux objets 3D de référence ( $\mu_A$  ou  $\mu_B$  - selon le critère de l'erreur quadratique), pour différentes valeurs du facteur d'échelle  $\rho$  (abscisses entre 0 et 350) et de niveau de bruit (lignes alternées pour un SNR = 5db, pointillées pour SNR = 10db, solides pour SNR = 15db et tiretées pour SNR = 20db). Les reconstructions MAP ont été réalisées en adoptant les deux fonctions de potentiel de Hebert et Leahy (lignes bleues) et de Perona et Malik (lignes rouges) :

- **Comportement de  $\beta$  optimal en fonction de  $\rho$  :**

D'une manière générale, le comportement des courbes des  $\beta$  optimaux en fonction de  $\rho$  sont très similaires à celle de figure 5.8. Quelle que soit la fonction de potentiel adoptée dans l'a priori de Gibbs (P.M. ou H.L.), nous avons remarqué un comportement quasi identique des courbes  $\beta_{opt}$  en fonction de  $\rho$ , pour les reconstructions réalisées à partir de la même série simulée de projections bruitées. En faisant croître la valeur du facteur d'échelle  $\rho$  (entre 0 et 350), le poids  $\beta_{opt}$  de l'a priori chute brusquement (de  $\rho \approx 0$  jusqu'à une valeur située dans l'intervalle  $]0, 50[$ ) avant de se stabiliser à une valeur  $\beta_{opt}^\infty$  qui dépend de niveau du bruit de projections. Par exemple, pour les reconstructions du modèle  $\mu_A$  à partir des projections entachées par un bruit blanc gaussien de différents écarts types,  $\sigma = 4.25$  (5db),  $\sigma = 2.39$  (10db),  $\sigma = 1.35$  (15db) et  $\sigma = 0.75$  (20db), les valeurs de  $\beta_{opt}^\infty$  correspondantes sont 0.3, 0.1, 0.03 et 0.001.

Cependant, la vitesse de convergence de  $\beta_{opt}$  vers  $\beta_{opt}^\infty$  est plus importante lorsque



**Figure 5.14:** Tracé des poids  $\beta_{opt}$  de l'a priori (ordonnées) permettant d'obtenir des reconstructions optimales (selon le critère quadratique 3D), en fonction du facteur d'échelle  $\rho$  (abscisses) pour différentes fonctions de potentiel de Hebert et Leahy et de Perona et Malik (correspondant respectivement aux lignes bleues et rouges). Les reconstructions ont été réalisées à partir de projections simulées bruitées (lignes alternées : SNR= 5db, lignes pointillées : SNR= 10db, lignes solides : SNR= 15db, tiretées : SNR= 20db). Ces projections ont été générées à partir des deux modèles 3D de coronaire,  $\mu_A$  et  $\mu_B$ .

nous adoptons la fonction de potentiel de Perona Malik (nous discutons de cela dans la section 5.5).

**Discussion de la figure 5.15 :** Nous avons présenté différentes évaluations ( $UQMN_{3D}$  - éq. 5.3,  $SNR_{3D}$  - éq. 5.5 et  $UQI_{3D}$  - éq. 5.4) des reconstructions optimales selon l'erreur quadratique globale  $EQ_{3D}$ , réalisées à partir de notre base de données simulées de projection (Fig. 5.4).

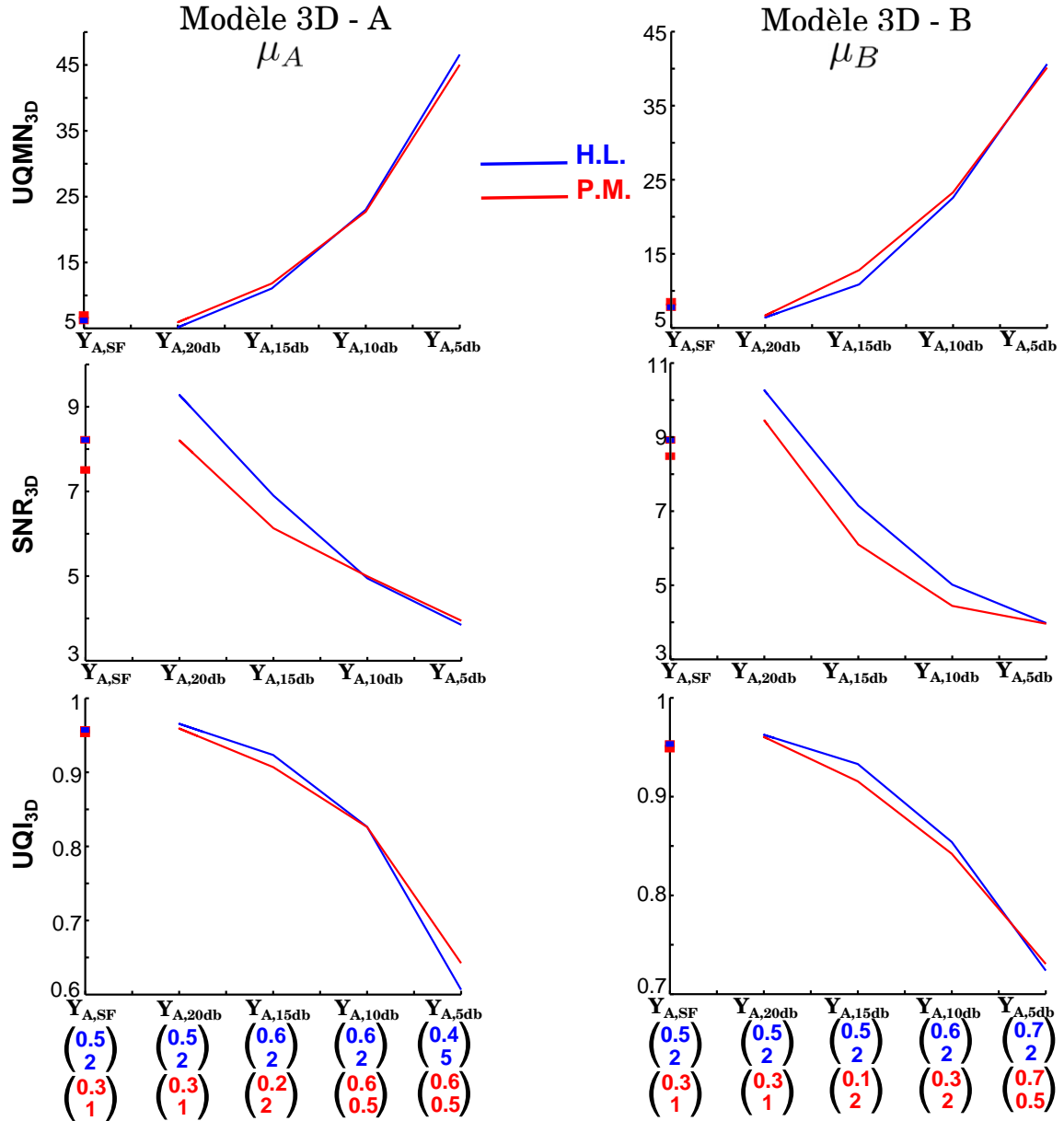
- **Comportement des  $EQMN_{3D}$ ,  $SNR_{3D}$  et de  $UQI_{3D}$  correspondants aux reconstructions optimales, en fonction de bruits d'acquisition :**

En augmentant le niveau de bruit des projections simulées (SNR passe de 20 à 5 db), la reconstruction MAP se dégrade progressivement. Cette dégradation est quantifiée par l'augmentation de l'erreur quadratique moyenne normalisée ( $UQMN_{3D}$  passe de 10 à 50 %) et la diminution de l'indice de qualité universel ( $UQI_{3D}$  passe de 0.95 à 0.6 (pour  $\mu_A$ ) ou à 0.73 (pour  $\mu_B$ )), entre la reconstruction et les objets de référence  $\mu_A$  ou  $\mu_B$ . Elle est accompagnée également d'une diminution du rapport signal sur bruit ( $SNR_{3D}$  passe de [8 - 9] à 3.5).

**NB :** Comme dans la Fig. 5.9, la qualité de la reconstruction réalisée à partir des projections  $Y_{\{A,B\},SF}$  (simulant une soustraction du fond 2D) est située entre celles des reconstructions réalisées à partir de  $Y_{\{A,B\},20db}$  et de  $Y_{\{A,B\},15db}$ .

- **Valeurs de  $\rho$  et  $\beta$  permettant d'obtenir des reconstructions optimales :**

D'une manière générale, pour le même objet à reconstruire ( $\mu_A$  ou  $\mu_B$ ) et le même niveau de bruit d'acquisition simulée, nous remarquons que les valeurs des



**Figure 5.15:** Tracé des différentes évaluations des reconstructions optimales 3D selon le critère quadratique total  $EQ_{3D}$ , en fonction de différents traitements appliqués aux données simulées de projection (voir figure 5.4). Les évaluations représentent la moyenne quadratique normalisée ( $UQMN_{3D}$  - (éq. 5.3) - en pourcentage ( $\times 100$ )), le rapport signal sur bruit ( $SNR_{3D}$  - éq. 5.5) et l'indice de qualité universelle ( $UQI_{3D}$  - 5.4). Pour chaque reconstruction optimale et chaque fonction de potentiel adoptée (Hebert et Leahy en bleu, Perona et Malik en rouge), nous mentionnons les valeurs de  $\beta$  et  $\rho$  correspondantes.

hyperparamètres correspondant aux reconstructions MAP optimales (selon  $EQ_{3D}$  - éq. 5.2) sont dépendantes du modèle de fonction de potentiel adopté dans l'a priori de Gibbs (éq. 5.8). Les valeurs de  $\beta$  et de  $\rho$  correspondant au modèle de Perona Malik sont globalement inférieures à celles relatives à la fonction de potentiel de Hebert et Leahy ( $\beta_{HL} \in [0.4, 0.7]$  et  $\beta_{PM} \in [0.1, 0.7]$ ,  $\rho_{HL} \approx 2$  et  $\rho_{PM} \in [0.5, 2]$ ).

**NB :** En analysant différentes valeurs optimales des facteurs d'échelle, nous n'avons pu trouver aucune relation entre les valeurs optimales de  $\rho$  et les niveaux de bruit de projections (à l'inverse des résultats des premiers tests - section 5.3). Par exemple,

pour les reconstructions optimales du deuxième modèle  $\mu_B$  tout en adoptant la fonction H.L dans le terme de l'a priori, le facteur d'échelle correspondant reste pratiquement inchangé ( $\rho_{HL} = 2$ ).

**Discussion de la figure 5.16 :** Nous avons présenté quelques reconstructions MAP-ARTUR-GC réalisées à partir des projections simulées  $Y_{A,10db}$  (partie en haut) et  $Y_{B,10db}$  (partie en bas), pour des valeurs différentes de  $\rho$  et de  $\beta$ . La fonction de potentiel de Perona et Malik a été adoptée dans la reconstruction de  $\mu_A$  et celle de Hebert et Leahy pour  $\mu_2$  :

- **Comportement de MAP-ARTUR-GC similaire à une reconstruction au sens de maximum du vraisemblance  $ML$  :**

Pour des poids  $\beta$  de l'a priori proches de zéro ( $\beta \approx 0$ ) ou des valeurs faibles du facteur d'échelle ( $\rho \approx 0$ ) associées à des  $\beta$  pas (trop) élevées ( $\beta \approx 0.8$ ), l'algorithme se comporte comme une reconstruction ML. Les reconstructions qui en résultent sont très bruitées (pas de lissage) et représentent globalement le même niveau d'erreur  $EQ_{3D}$  ( $\approx 25 \times 10^4$  pour  $\mu_A$  et  $\approx 20 \times 10^4$  pour  $\mu_B$ ).

- **Comportement de MAP-ARTUR-GC similaire à une reconstruction avec une contrainte globale de lissage (régularisation de Tikhonov) :**

Pour des valeurs très élevées de  $\rho$  et des  $\beta$  pas trop faibles, nos reconstructions sont très lissées comme dans le cas de l'application d'une régularisation de Tikhonov. Par exemple, pour  $\rho = 50$  et  $\beta = 0.6$ , les reconstructions du premier modèle ( $\mu_A$ ) se caractérisent par des branches sanguines plus larges et très lissées et celle du deuxième modèle par une perte de l'information des branches les plus fines (à cause du lissage).

**NB :** Nous remarquons aussi que pour des valeurs de  $\beta$  proche de 1, le comportement de nos reconstructions MAP-ARTUR-GC est similaire aussi à celui des reconstructions MAP avec une régularisation de Tikhonov. À  $\beta$  constant ( $\beta_{HL} = 0.95$  et  $\beta_{PM} = 0.9$ ), toutes les reconstructions sont trop lisses et présentent le même niveau important d'erreur quadratique ( $EQ_{3D} = 52630$  pour  $\mu_A$  et  $EQ_{3D} = 47214$  pour  $\mu_B$ ).

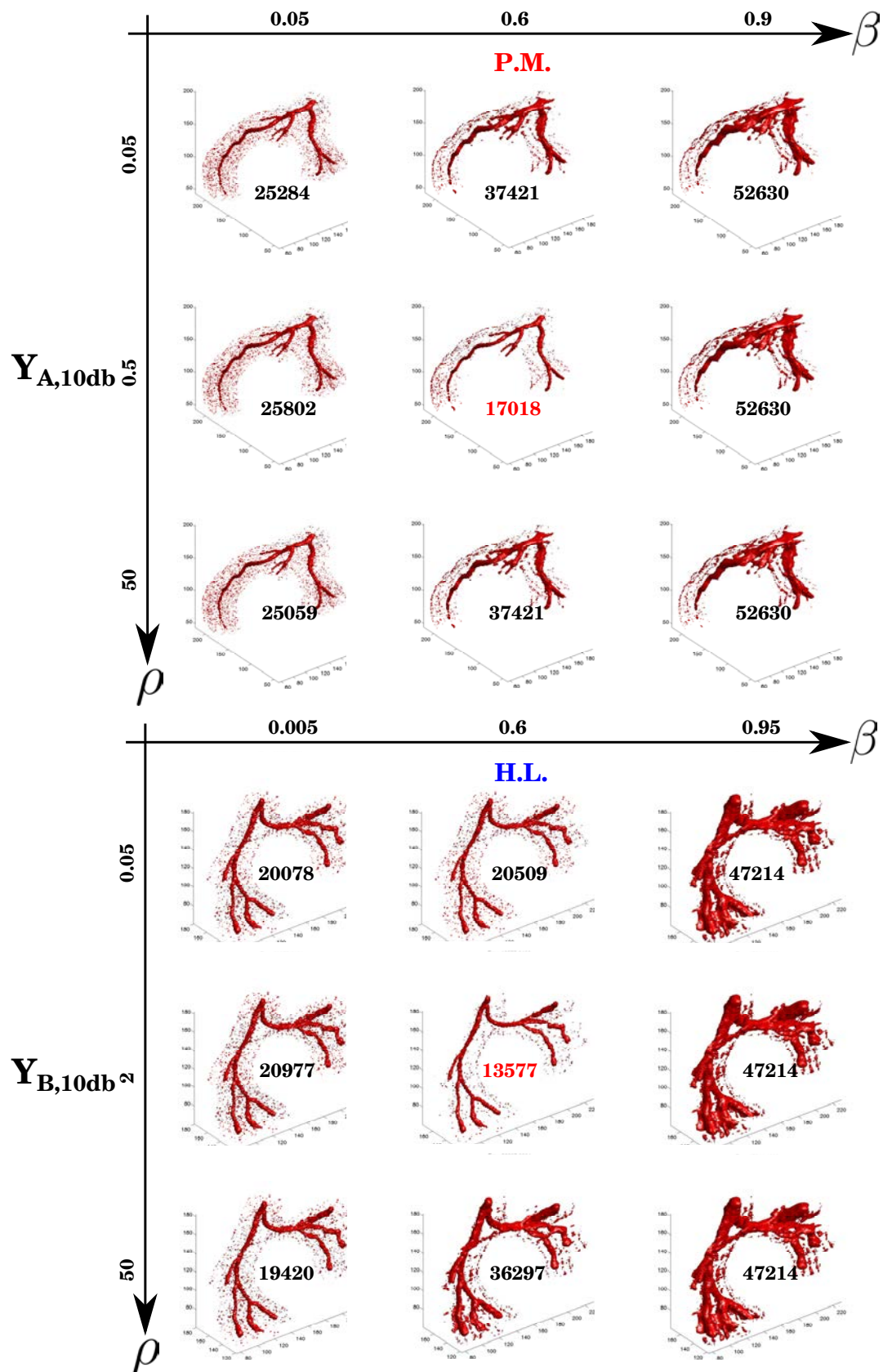
## 5.4.2 Convergence de l'algorithme

**Discussion de la figure 5.17 :** Pour évaluer la convergence de notre méthode de reconstruction, nous avons tracé l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$  - éq.5.2), l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  - éq. 5.6) et l'énergie de l'a priori ( $E_{prior}$  - éq. 5.7) en fonction des itérations des algorithmes MAP-ARTUR-GC. Pour chaque reconstruction, nous avons fixé le nombre des itérations à 1000 et initialisé les objets à reconstruire par des zéros ou par un bruit blanc gaussien de variance unitaire.

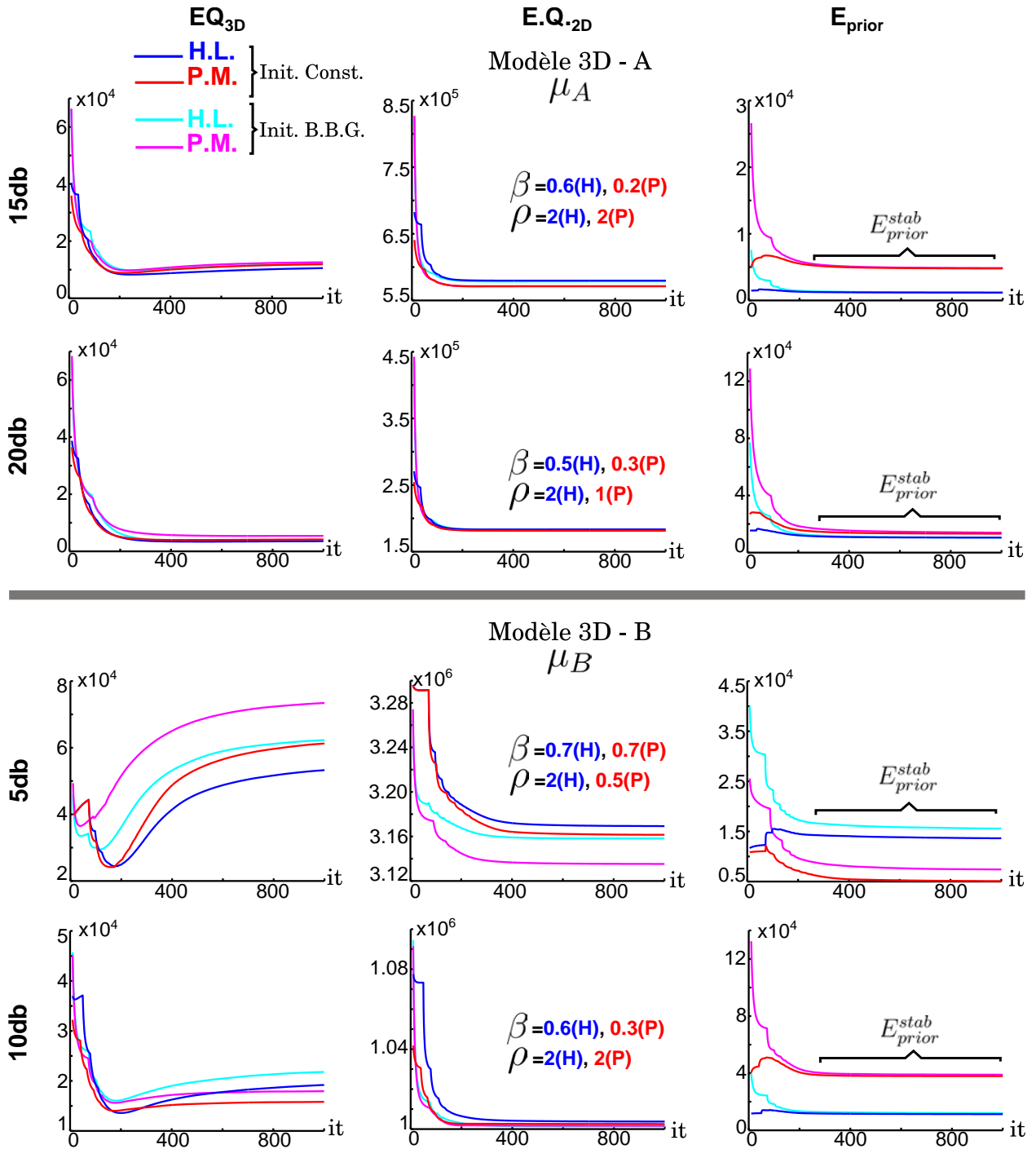
**NB :** Pour bien visualiser les courbes  $EQ_{3D}$ ,  $EQ_{2D}$  et  $E_{prior}$ , nous avons illustré uniquement les résultats à partir des 15 premières itérations, pour éviter les variations initiales trop importantes quand il s'agit d'initialiser la reconstruction avec un bruit blanc gaussien (pouvant masquer les variations).

- **Convergence de  $EQ_{3D}$ , de  $EQ_{2D}$  et de  $E_{prior}$  :**

Pour des SNR supérieurs ou égal à 15db, nous remarquons que les variations de  $EQ_{3D}$ , de  $EQ_{2D}$  ou de  $E_{prior}$  en fonction des itérations (jusqu'à 1000 itérations)



**Figure 5.16:** Quelques reconstructions MAP-ARTUR-GC réalisées à partir des projections simulées  $Y_{A,10db}$  (en haut) et  $Y_{B,10db}$  (en bas), pour des valeurs différentes de  $\rho$  et de  $\beta$ . La fonction de potentiel de Perona et Malik a été adoptée dans la reconstruction de  $\mu_A$ , et celle de Hebert et Leahy pour  $\mu_B$ . Les reconstructions optimales selon le critère de l'erreur quadratique (mentionnée en rouge) correspondent à  $(\beta = 0.6, \rho = 0.5)$  pour  $\mu_A$  et à  $(\beta = 0.6, \rho = 2)$  pour  $\mu_B$ .



**Figure 5.17:** Tracé selon 2 initialisations différentes (constante - Init. Const., Bruit Blanc Gaussien - Init. B.B.G.) de l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$  - éq.5.2), de l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  - éq. 5.7) et de l'énergie de l'a priori ( $E_{prior}$  - éq. 5.7) en fonction des itérations des reconstructions *MAP - ARTUR - GC* optimales (selon le critère  $EQ_{3D}$ ). Les reconstructions ont été réalisées à partir des projections bruitées  $Y_{A,15db}$ ,  $Y_{A,20db}$  (premier modèle A - en haut),  $Y_{B,5db}$  et  $Y_{B,10db}$  (deuxième modèle B - en bas), en faisant varier les fonctions de potentiel (H.L : Hebert et Leahy, P.M. : Perona et Malik) dans l'expression MAP (éq. 5.8).

convergent vers le même point, quel que soit le choix de l'objet initial ou la méthode d'optimisation. Par contre, cette convergence dépendra du choix de l'objet initial pour un niveau important de bruit ( $SNR \leq 10db$ ).

Ainsi, nous pouvons confirmer que la méthode d'ARTUR n'est pas une méthode à convergence globale dans le cas où la fonction de coût à minimiser n'est pas convexe. Néanmoins, pour des niveaux de bruit pas trop élevés, elle converge vers des solutions très proches de la solution MAP.

- **Comportement de la courbe  $EQ_{2D}$  :**

Quel que soit le choix de l'objet initial (constant ou bruit blanc gaussien) et le niveau de bruit d'acquisition (simulé), la courbe  $EQ_{2D}$  décroît continument en forme d'escalier (changement brusques de vitesses pendant quelques itérations) et converge vers sa valeur minimale  $EQ_{2D}^{stab}$ . Cette valeur minimale est proportionnelle au niveau de bruit appliqué aux images simulées de projection. En effet, les variations abruptes de vitesse de descente correspondent aux changements des variables auxiliaires  $b_{js}$  lors de l'optimisation ARTUR (voir section 4.3.2).

- **Comportement de la courbe  $E_{prior}$  :**

Le comportement de l'énergie a priori  $E_{prior}$  en fonction des itérations est dépendant du choix de l'objet initial.

Pour une initialisation de l'objet à reconstruire ( $\mu^0$ ) avec un bruit blanc gaussien, c'est à dire une forte énergie initiale de l'a priori  $E_{prior}^0$ ,  $E_{prior}$  décroît (en forme d'escalier) jusqu'à atteindre une valeur de stabilité  $E_{prior}^{stab}$  (comme dans la Fig. 5.11)

Dans le cas où  $\mu^0$  représente un vecteur de zéros ( $\mu^0 = \vec{0} - E_{prior}^0 = 0$ ),  $E_{prior}$  initialement nulle croît (en forme d'escalier) continument pour atteindre une valeur maximale  $E_{prior}^{MAX}$ , avant de décroître pour converger vers la même valeur  $E_{prior}^{stab}$  (dans le cas où le niveau de bruit de projection n'est pas important).

En effet, toutes les formes en escalier constatées sur les courbes  $E_{prior}$  sont dues aux changements des variables auxiliaires  $b_{js}$  lors de l'optimisation ARTUR (voir section 4.3.2).

Pour une initialisation nulle de la reconstruction ( $\mu^0 = \vec{0}$ ), les valeurs des variables auxiliaires correspondantes  $b_{js}$  sont égales à 1 ( $b_u = \psi(0)$  - éq. 4.17). Ainsi, la régularisation exercée initialement sur la solution MAP est équivalente à celle de Tikhonov (quadratique), se caractérisant par un grand niveau énergétique. Dans ce cas, l'énergie de lissage est très importante devant celle de la vraisemblance à tel point que l'énergie de l'a priori  $E_{prior}$  dépasse son état de stabilité  $E_{prior}^{stab}$  (déséquilibre énergétique). Au fur et à mesure que l'on progresse dans la procédure de reconstruction tout en mettant à jour les valeurs de  $b_{js}$ , l'équilibre entre les deux énergies constituant notre fonction de coût s'installe progressivement. Ainsi, le terme de l'a priori converge vers son état de stabilité ( $E_{prior}^{stab}$ ).

- **Comportement de la courbe  $EQ_{3D}$  :**

Pour des niveaux importants de bruit d'acquisition (correspondant à un  $SNR = 5db$  et  $SNR = 10db$ ), l' $EQ_{3D}$  passe par une étape de décroissance en forme d'escalier jusqu'à atteindre une valeur minimale (de l'itération 1 jusqu'à  $\approx 200$ ), suivie d'une autre étape de croissance (de l'itération  $\approx 200$  jusqu'à  $\approx 800$ ), avant de se stabiliser (convergence). C'est une conséquence de l'instabilité de l'algorithme d'optimisation pour des niveaux très élevés de bruit.

**NB :** Jusqu'à maintenant, nous avons pu comprendre le comportement de l'algorithme MAP-ARTUR-GC et l'influence du choix des hyperparamètres sur sa performance. Globalement, nous avons constaté la même proportionnalité entre  $\beta$  et  $\rho$  que celle dans une reconstruction MAP-MNR, permettant la réalisation des meilleures reconstructions. Nous avons montré aussi la stabilité de l'algorithme face à des niveaux pas trop élevés de bruit d'acquisition (un  $SNR \geq 10db$ ). Cependant, nous n'avons pas expliqué les valeurs de  $\rho$  et  $\beta$  réalisant les reconstructions optimales selon l'erreur quadratique  $EQ_{3D}$  (voir la section suivante).

## 5.5 Comparaison des reconstructions MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC

Nous avons étudié le comportement de deux algorithmes statistiques de reconstruction, MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC, en faisant varier le niveau de bruit d'acquisition (supposé blanc gaussien) et les valeurs des hyperparamètres du modèle a priori adopté, c'est à dire le poids  $\beta$  et le facteur d'échelle  $\rho$ .

Les résultats de nos tests ont montré une nette proportionnalité entre  $\rho$  et  $\beta$ , permettant la réalisation des meilleures reconstructions (à  $\beta$  constant) : une augmentation des valeurs de  $\rho$  est accompagnée par une diminution des  $\beta$  (voir Fig. 5.8 et Fig. 5.14). Cependant la vitesse de cette diminution peut dépendre de la méthode de reconstruction ou de la fonction de potentiel utilisée dans l'expression MAP (éq. 5.8).

Dans le but de localiser l'origine de cette différence (l'algorithme de reconstruction ou la fonction de potentiel) et d'interpréter les valeurs optimales de  $\rho$  et  $\beta$  (voir Fig. 5.9 et Fig. 5.15), nous avons décidé d'effectuer une brève étude comparative entre les deux méthodes de reconstruction, MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC.

Tout d'abord, nous avons analysé l'influence de la méthode d'optimisation sur les valeurs optimales des hyperparamètres. Ensuite, nous avons étudié le lien pouvant exister entre le modèle de la fonction de potentiel (à travers celle de pondération associée), les  $\beta$  et  $\rho$  optimaux et la dynamique de l'objet à reconstruire.

### 5.5.1 Influence de l'algorithme d'optimisation sur les $\beta$ et $\rho$ optimaux

Nous avons comparé l'influence de l'algorithme d'optimisation sur la solution MAP, en choisissant la même séquence de projections à reconstruire et les mêmes valeurs optimales de  $\rho$  et de  $\beta$  (Figure. 5.18).

**Discussion de la figure 5.18 :** Nous avons tracé l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$ ), l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$ ) et celle de l'a priori ( $E_{prior}$ ) en fonction des itérations des reconstructions MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC. Les reconstructions ont été appliquées sur les projections bruitées du deuxième modèle  $\mu_B$  ( $Y_{B,20db}$ ,  $Y_{B,15db}$ ,  $Y_{B,20db}$  et  $Y_{B,15db}$ ) en faisant varier les fonctions de potentiel (GR. : Green, H.L. : Hebert et Leahy, P.M. : Perona et Malik) dans l'expression MAP (éq. 5.8).

**NB :** Nous avons constaté une quasi-similitude des résultats de reconstruction MAP-MNR, quel que soit le choix de la fonction de potentiel dans le modèle a priori de Gibbs (Green, Huber ou Surfaces Minimales). Ainsi, nous avons choisi une seule fonction, celle de Green, que l'on peut considérer comme représentative des fonctions de potentiel



utilisées (section 5.3).

Pour les mêmes valeurs optimales de  $\rho$  et  $\beta$  (Fig. 5.9) et la même fonction de potentiel dans l'expression MAP, nous avons testé nos deux algorithmes de reconstruction (MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC) sur les projections simulées du deuxième modèle  $\mu_B$ . En changeant la méthode de reconstruction, les courbes de l'erreur quadratique totale  $EQ_{3D}$  initialement superposées (lignes en vert/noir - Green-, lignes en bleu/cyan - Hebert et Leahy-, lignes en rouge/magenta - Perona et Malik) pour de faibles niveaux de bruit ( $SNR = 20db$ ) se séparent progressivement en fonction de l'augmentation du niveau de bruit (en le faisant varier le SNR de 15 à 5 db). Nous retrouvons globalement les mêmes erreurs de convergence  $EQ_{3D}^{conv}$  des solutions MAP-ARUR-GC et MAP-MNR, pour un niveau de bruit qui correspond à un  $SNR \leq 15db$ . Cependant, dans le cas d'un bruit élevé ( $SNR = 5db$ ), une nette différence entre les  $EQ_{3D}^{conv}$  se distingue lorsque nous changeons la méthode de reconstruction. Cet écart entre les erreurs  $EQ_{3D}^{conv}$  est accompagné par une différence des valeurs de stabilité des  $EQ_{2D}$  et  $E_{prior}$  associées. La reconstruction MAP-ARTUR-GC se caractérise par de faibles énergies d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  plus grand) et de l'a priori ( $E_{prior}$  plus petit) relativement à celle de MAP-MNR.

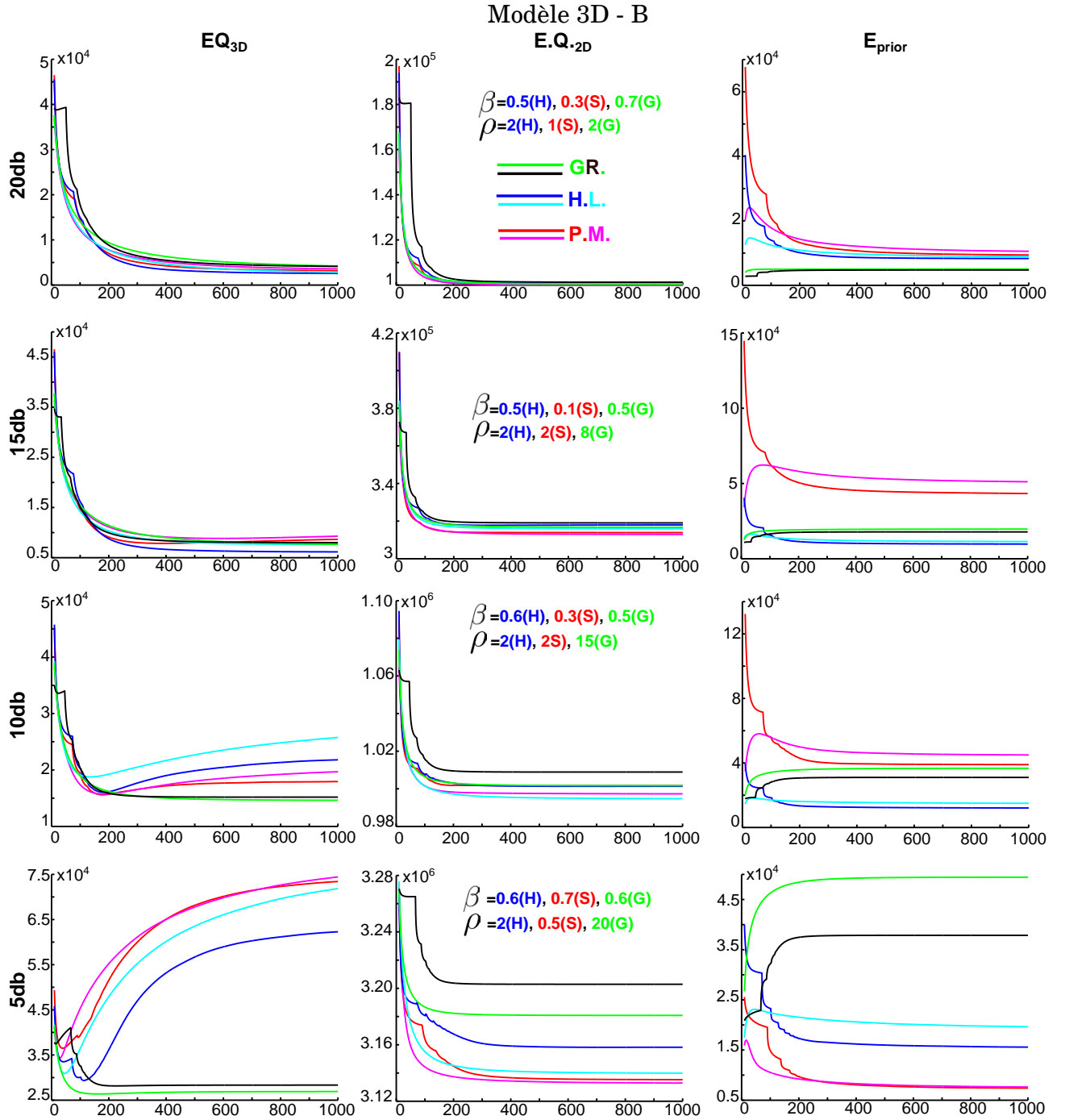
Afin d'expliquer cette constatation, nous nous sommes concentrés sur le cas de la fonction de potentiel de Green. En effet, la fonction de potentiel de Green est bien convexe et représente des propriétés favorisant la localisation du minimum global du problème de type MAP. Théoriquement, pour les mêmes valeurs de  $\rho$  et de  $\beta$ , la reconstruction MAP réalisée à partir de la même séquence de projection doit avoir les mêmes niveaux énergétiques de l'a priori et de l'attache aux données, indépendamment de n'importe quel algorithme d'optimisation à convergence globale.

Dans le cas d'ARTUR (voir section 4.3.2), le coût total MAP à minimiser est approximé par un autre de substitution semi quadratique (éq. 4.18), dont l'optimisation est dépendante de la mise à jour des variables auxiliaires  $b_{js}$  (éq. 4.17 - voir tableau 5.1). Quant à la méthode MAP-MNR (voir section 4.3.1), nous procédons par une minimisation directe de la fonction objectif MAP originale, sans avoir recours à des fonctions de substitution. Ainsi, en passant de l'optimisation MAP-ARTUR-GC vers MAP-MNR, nous pouvons nous attendre à une différence dans les états énergétiques (de l'a priori et de la vraisemblance) des solutions MAP, étant donnée que nous ne minimisons pas exactement la même fonction de coût. Cependant, comment peut on expliquer la proportionnalité entre l'écart des  $EQ_{3D}$ ,  $EQ_{2D}$  et  $E_{prior}$  (en changeant l'algorithme) et le niveau de bruit des projections simulées ?

Pour répondre à cette question, nous allons devoir discuter de la manière dont l'algorithme MAP-ARTUR-GC détermine la solution MAP. Le principe consiste à effectuer une minimisation alternée de l'énergie de substitution de MAP (Tabl. 5.1).

1<sup>0</sup>) En commençant toujours l'algorithme par la mise à jour des variables auxiliaires (éq. 4.17), toutes les valeurs de  $b_{js}$  seront à 1 lorsque nous initialisons l'objet à reconstruire par des zéros ( $b_{i,j}^{opt} = \frac{\varphi'(0)}{0} = 1$  - voir section 4.2.2).

2<sup>0</sup>) La première optimisation de l'énergie duale (éq. 4.18) est similaire à une reconstruction quadratique de Tikhonov. Elle applique une diffusion isotopique dans les zones



**Figure 5.18:** Tracé de l'erreur quadratique totale ( $EQ_{3D}$  - colonne gauche), de l'énergie d'attache aux données ( $EQ_{2D}$  - colonne en milieu) et de l'énergie de l'a priori ( $E_{prior}$  - colonne droite) en fonction des itérations des reconstructions optimales (selon  $EQ_{3D}$ ) **MAP-MNR** (lignes en vert, en cyan et en magenta) et **MAP-ARTUR-GC** (lignes en noir, en bleu et en rouge). Les reconstructions ont été appliquées sur les projections bruitées  $Y_{B,20db}$ ,  $Y_{B,15db}$ ,  $Y_{B,20db}$  et  $Y_{B,15db}$ , en faisant varier les fonctions de potentiel (GR. : Green, H.L. : Hebert et Leahy, P.M. : Perona et Malik) dans l'expression MAP (éq. 5.8).

Initialisation de $\mu$ Répéter (1) et (2) :
<hr/> 1) à $\mu$ fixe, trouver la valeur optimale de $b_{i,j}$ permettant de résoudre l'équation 4.16 : $b_{i,j}^{opt} = \frac{\varphi'(t)}{t}$ 2) à $b_{j_s}$ fixe, optimiser l'énergie duale (de substitution) : $\frac{1}{2} (1 - \beta) \ A\mu - T\ _2^2 + \beta \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^{26} \omega_{j_s} \left( b_{j_s} \left( \frac{\mu_j - \mu_s}{\rho} \right)^2 + \Gamma(b_{j_s}) \right)$ <hr/> jusqu'à convergence

**Table 5.1:** Optimisation alternée effectuée par la méthode MAP-ARTUR-GC.

de la solution MAP dont les variations locales sont comprises entre 1 et  $\rho$  (facteur d'échelle).

$1^k$ .. $2^k$ ) Après une première régularisation quadratique (étapes  $1^0$  et  $2^0$ ), la solution MAP courante se caractérise par des régions homogènes séparées par des frontières lisses (floues). Une nouvelle mise à jour des variables auxiliaires générera des  $b_{ij}$  très proches de 1 dans les zones homogènes ( $b_{i,j}^{opt} = \frac{\varphi'(t \approx 0)}{t \approx 0} \approx 1$ ) et des valeurs comprises entre 0 et 1 (qui restent supérieures à zéros) au niveau des frontières lisses. L'optimisation de la nouvelle énergie de substitution produira l'effet d'une faible diffusion anisotropique (différence dans la puissance de la diffusion en fonction des variations locales). Ainsi, les frontières initialement floues deviennent relativement plus nettes. Au fur et à mesure que l'on progresse dans la reconstruction itérative (plusieurs répétitions des étapes 1 et 2 - Table 5.1), l'écart entre les  $b_{j_s}$  marquant les frontières et celles des régions homogènes s'amplifie pour converger vers 1 avec l'augmentation du contraste au niveau des frontières ( $b_{j_s}$  des régions restent proches de 1 (diffusion) et proches de zéro au niveau des frontières), ce qui explique la stabilité de la solution MAP.

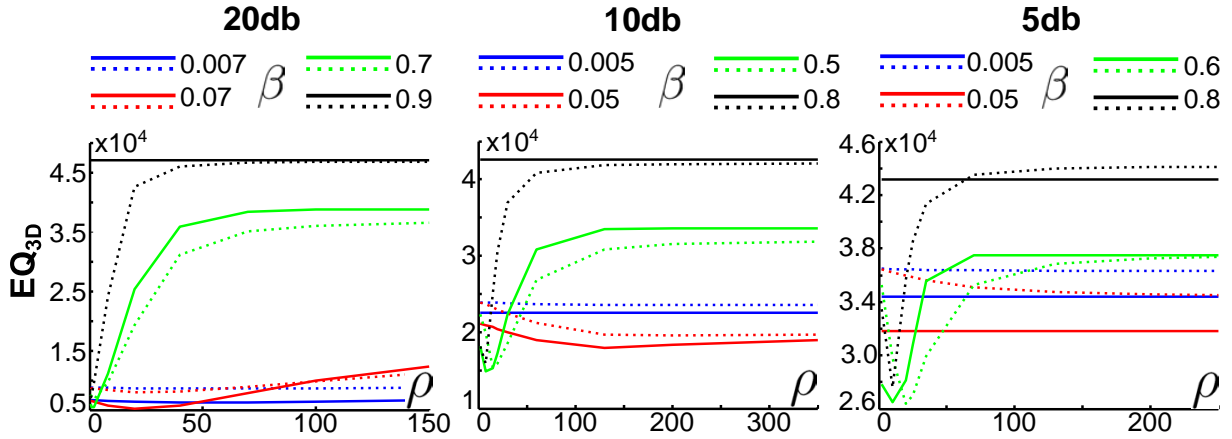
En récapitulant, nous pouvons dire que :

- Au cours des itérations de la méthode MAP-ARTUR-GC, l'écart entre les variables auxiliaires associées aux zones homogènes ( $b_{ij} \approx 1$ ) et celles associées aux frontières ( $b_{ij}$  convergent vers 0) converge progressivement vers 1.
- l'écart entre  $b_{ij}$  des régions et des frontières dépend de l'évolution de la dynamique de reconstruction (mises à jour de  $b_{ij}$  dépendant de  $\mu_j - \mu_s$ ) et de la forme de la fonction de potentiel adoptée,
- le facteur d'échelle  $\rho$  sert principalement à (1) délimiter la zone utile des variations des fonctions de pondération (entre 1 et 0.01 quand  $t$  varie de 0 jusqu'à  $\rho$ ), et à (2) définir la forme de la fonction de pondération de convergence de l'algorithme (quand les  $b_{ij}$  des frontières convergent vers zéro).

Ainsi, nous pouvons interpréter l'influence du bruit d'acquisition sur les performances de la reconstruction MAP-ARTUR-GC, et sur les hyperparamètres optimaux comme suit :

- \* Pour un niveau de bruit de projection assez faible ( $SNR \geq 15db$ ), la régularisation initiale de Tikhonov (exercée pendant les premières itérations d'ARTUR) réalise une première reconstruction composée principalement de deux régions homogènes séparées par des frontières lisses au niveau des parois artérielles. Au fur et à mesure que l'on progresse dans les itérations de MAP-ARTUR-GC, les variables auxiliaires  $b_{ij}$  (marqueurs de discontinu) évoluent de deux façons différentes selon les localisations spatiales des sites voisins  $\mu_j$  et  $\mu_s$  : les  $b_{ij}$  des zones homogènes restent moyennement proches de 1 (diffusion isotopique), et les  $b_{ij}$  situés dans les frontières des vaisseaux décroîtront (moins de lissage) progressivement. Ainsi, la solution MAP réalisée présentera les caractéristiques recherchées, c'est à dire, la réalisation d'une solution MAP composée de deux régions homogènes séparées par des frontières nettes au niveau des parois artérielles.
- \* En augmentant le niveau de bruit ( $SNR < 15db$ ), l'énergie de vraisemblance dans l'expression MAP, affaiblie par le nombre restreint de projections (mesures), se retrouve incapable de réduire la propagation de bruit 2D (assez fort) dans la zone de reconstruction. Ainsi, au bout de quelques mises à jour des variables auxiliaires  $b_{ij}$  (progression de la diffusion anisotropique), le contraste de bruit 3D (assez important) se chevauche avec celui de frontières ( $b_{ij}^{bruit} \approx b_{ij}^{front.}$ ). Ainsi, l'algorithme commence à préserver le bruit 3D (pas de lissage), ce qui explique la divergence des courbes d'erreurs  $EQ_{3D}$  dans la figure 5.18.
- \* Pour la reconstruction d'ARTUR, la fonction de pondération associée (à celle de potentiel adoptée) sert de support sur lequel les valeurs auxiliaires  $b_{ij}$  peuvent varier : la convergence de l'écart entre les variables auxiliaires modélisant les zones homogènes et celles détectant les frontières converge plus rapidement vers 1 lorsque la fonction de pondération décroît plus rapidement. La performance de sa régularisation est basée en grande partie sur l'évolution des  $b_{ij}$  à des instants distincts de reconstruction. Ainsi, la fonction de pondération ne joue pas le même rôle qu'en MAP-MNR, et il semble logique que la méthode d'ARTUR peut influencer le  $\rho$  permettant la réalisation d'une reconstruction optimale. Afin d'avoir une idée plus précise de la nature de cette influence, nous avons décidé d'effectuer quelques reconstructions MAP-ARTUR-GC en adoptant la fonction de potentiel de Green, afin de les comparer avec celles de MAP-MNR (Fig. 5.19).

Lorsque nous changeons la méthode de reconstruction (voir Fig. 5.19), nous remarquons que les résultats de l'algorithme MAP-ARTUR-GC sont insensibles (pas de variation) aux changements du facteur d'échelle  $\rho$  (par rapport à ceux de MAP-MNR), quand il s'agit d'utiliser de très faibles/fortes valeurs du poids  $\beta$  ( $\beta = 0.007$  - lignes solides en bleu- et  $\beta = 0.8$  - lignes solides en noir-). Entre les valeurs extrémales de  $\beta$ , l'allure des courbes  $EQ_{3D}$  en fonction de  $\rho$  garde la même forme (décroissance + croissance + stabilité) quelle que soit la méthode de reconstruction utilisée. Cependant, nous constatons un décalage entre les courbes  $EQ_{3D}$  de MAP-ARTUR-ARTUR par rapport à celles de MAP-MNR : les variations des  $EQ_{3D}$  (en fonction de  $\rho$ ) avant leurs stabilités sont plus rapides dans le cas d'ARTUR.



**Figure 5.19:** Tracé de l'erreur quadratique 3D en fonction de  $\rho$  (abscisses) pour différents  $\beta$  constants (légendes) et pour la fonction de potentiel de Green utilisées dans le modèle a priori. Les reconstructions MAP-MNR (lignes en pointillé) et MAP-ARTUR-GC (lignes solides) ont été réalisées à partir des projections simulées bruitées  $Y_{B,20db}$ ,  $Y_{A,10db}$  et  $Y_{A,5db}$  - projections du deuxième modèle 3D  $\mu_B$ ).

Ce décalage est dû probablement au comportement de la reconstruction MAP-ARTUR. Elle introduit progressivement une discontinuité de la solution MAP après une succession de mises à jours de  $b_{ij}$ . Au convergence des  $b_{ij}$ , nous avons intérêt à utiliser des fonctions de pondération favorisant prioritairement la préservation de contour, pour maintenir une stabilité au niveau des marqueurs de discontinuité  $b_{ij}$ . Ainsi, nous pouvons nous attendre à des facteurs d'échelle  $\rho$  optimaux pour une reconstruction MAP-ARTUR-MNR inférieurs ou égaux à ceux de MAP-MNR.

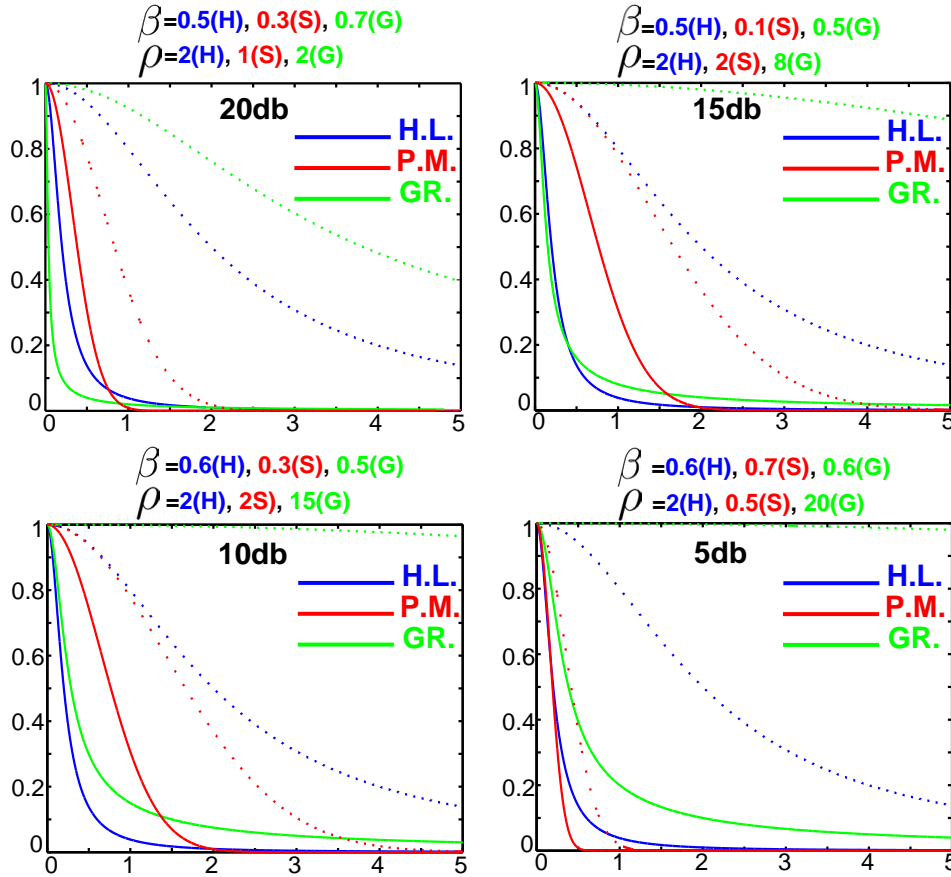
**Conclusion :** La méthode MAP-ARTUR-GC peut influencer la valeur du facteur d'échelle  $\rho$  permettant la réalisation des meilleures reconstructions MAP. Pour un niveau de bruit correspondant à un  $SNR \geq 10db$ , les  $\rho$  optimaux de la reconstruction MAP-ARTUR-GC sont généralement inférieurs ou égaux à ceux de MAP-MNR.

### 5.5.2 Influence de la dynamique de l'objet à reconstruire sur les $\beta$ et $\rho$ optimaux

Après avoir étudié l'influence de la méthode de reconstruction sur les valeurs optimales de  $\rho$ , nous allons maintenant nous intéresser aux liens pouvant exister entre les hyperparamètres  $\beta$  et  $\rho$  optimaux et la dynamique de l'objet à reconstruire, ainsi que le bruit d'acquisition. Pour ce faire, nous avons tracé (Fig. 5.17) les fonctions de pondération correspondant aux hyperparamètres optimaux pour la reconstruction MAP-ARTUR-GC (pondération P.M en rouge et H.L en bleu) et celles de MAP-MNR (fonction de Green en vert).

- **Comportement du facteur d'échelle  $\rho$  :**

D'une manière générale, en faisant croître le niveau de bruit (SNR passe de 20db à 5 db), les variations les plus significatives des fonctions harmonisées de pondération (entre 0.05 et 1) sont constatées dans l'intervalle  $(\mu_j - \mu_s) \in [0, 5[$ . Étant donné que la valeur 5 représente le contraste maximal de l'objet à reconstruire (voir Fig.



**Figure 5.20:** Visualisation des courbes des fonctions de pondération,  $\psi_{HL}$  (en bleu)  $\psi_{PM}$  (en rouge) et  $\psi_{Gr}$  (en vert), avant (lignes en pointillé) et après (lignes solides) harmonisation, pour les facteurs d'échelles optimaux en fonction de chaque niveau de bruit.

5.1), nous estimons qu'elle peut être considérée comme une limite supérieure du domaine utile des variations des fonctions de pondération associées.

En adoptant la méthode MAP-MNR avec la fonction de potentiel de Green, les valeurs optimales de  $\rho$  augmentent avec l'amplification du niveau de bruit 2D ( $\rho$  passe de 2 à 20 quand le SNR passe de 20 à 5db). Initialement, pour un niveau très faible de bruit (SNR=20db), la fonction de pondération optimale de Green se caractérise par la plus forte vitesse de décroissance (la plus petite valeur de  $\rho$ ), favorisant ainsi un maximum de préservation des contours. L'augmentation du niveau de bruit 2D provoque le ralentissement des vitesses de décroissance des fonctions de pondération associées ( $\rho$  plus grands), afin de limiter au maximum les effets de bruit 3D (qui peuvent s'intensifier).

Quant à la méthode MAP-ARTUR-GC avec les fonctions de potentiel de Hebert et Leahy (H.L) et de Perona et Malik (P.M.), les valeurs de  $\rho$  optimales sont généralement inférieures à celles constatées dans le MAP-MNR. Ceci est dû entre autre (effet de l'algorithme) à la variabilité des vitesses de décroissance des fonctions de pondération au voisinage du facteur d'échelle  $\rho$  :  $\psi_{HL}$  et  $\psi_{PM}$  sont plus rapides que  $\psi_{Gr}$ . Par exemple, sur les courbes correspondant aux reconstructions des

données  $Y_{B,15db}$ , nous remarquons une quasi superposition des courbes de  $\dot{\psi}_{HL}$  et de  $\dot{\psi}_{Gr}$ , bien qu'elles n'ont pas les mêmes valeurs du facteur d'échelle ( $\rho_{GR} = 8$  correspond à  $\rho_{HL} = 2$ ). De plus, à l'inverse de la méthode MNR-MAP, les  $\rho$  optimaux ne sont pas trop influencés par le niveau de bruit ( $\rho \approx 2$  pour  $\dot{\psi}_{HL}$  et  $\dot{\psi}_{PM}$ ).

En conclusion, nous pouvons dire que :

(1) le domaine utile des variations des fonctions de pondération associées ne dépasse pas la valeur maximale de la dynamique de l'objet que l'on cherche à reconstruire,

(2) que notre procédure d'harmonisation est moins efficace dans le cas des fonctions de pondération de Green (par rapport à celles de Huber et de Surfaces Minimales), puisque les valeurs du facteur d'échelle n'arrive pas à limiter réellement les variations des fonctions de pondération entre 0 et  $\rho$  (pour  $\rho = 8$ , la grande partie des variations de  $\dot{\psi}_{Gr}$  est localisée entre 0 et 2),

(3) que l'efficacité de l'algorithme *ARTUR* est due principalement aux successions des mises à jour des variables auxiliaires  $b_{ij}$ , en introduisant progressivement la diffusion anisotropique sur la solution MAP, étant donné que la forme des fonctions de pondération associées (vitesse de décroissance) n'est pas trop affectée par le niveau de bruit 2D qui peut s'amplifier.

- **Comportement du poids  $\beta$  de l'a priori :**

Théoriquement, l'hyperparamètre  $\beta$  est censé trouver un équilibre (énergétique) optimal entre l'énergie de l'a priori et celle de vraisemblance. Étant donné que les aspects énergétiques peuvent dépendre de plusieurs facteurs tels que le nombre de projections, la complexité de l'objet à reconstruire, le niveau de bruit d'acquisition et le modèle de l'opérateur de projection adopté (tout facteur influant l'expression MAP éq. 5.8), il s'avère difficile de l'estimer ou d'établir une relation encadrant son domaine de variation.

Néanmoins, une grande partie des figures illustrées dans la section 5.3 nous ont montré une proportionnalité entre les valeurs de  $\beta$  et de  $\rho$  permettant la réalisation des meilleures reconstructions selon le critère  $EQ_{3D}$ . L'augmentation des valeurs de  $\rho$  (ralentissement des vitesses de décroissance des fonctions de pondération associées) est accompagnée par une diminution de celles de  $\beta$ .

La figure 5.17 confirme cette constatation. Une proportionnalité directe liant les valeurs de  $\beta$  avec les vitesses de décroissance des fonctions de pondération se distingue : la valeur de  $\beta$  est proportionnelle à la rapidité de transition entre la diffusion isotropique ( $\dot{\psi} = 1$ ) et son interruption ( $\dot{\psi} = 0$ ). Par exemple dans le cas d'un SNR de 20 db, en sélectionnant les fonctions de pondération par ordre décroissant des vitesses de décroissance, c'est à dire  $\dot{\psi}_{GR}$  (en verts),  $\dot{\psi}_{HL}$  (en bleu) puis  $\dot{\psi}_{PM}$  (en rouge), les valeurs des  $\beta$  correspondant décroît de 0.7 (Gr.) à 0.5 (H.L.), puis 0.3 (P.M). Dans le cas d'un SNR de 15db, bien que les valeurs de  $\rho$  sont différentes entre la fonction H.L ( $\rho = 2$ ) et Gr. ( $\rho = 8$ ), elles ont la même valeur de  $\beta$  ( $\beta = 0.5$ ), puisque leur vitesses de décroissance sont pratiquement les

mêmes (superposition des deux courbes).

En effet, nous avons constaté que la valeur de  $\beta$  diminue à chaque fois que l'énergie de l'a priori augmente en écartant l'équilibre énergétique de la fonction MAP de sa stabilité (entre l'énergie a priori et celle de l'attache aux données). Sachant que la procédure de régularisation avec préservation des contours est équivalente à une diffusion isotropique interrompue (principe de diffusion anisotropique) en fonction des variations locales ( $\mu_j - \mu_s$ ), nous pouvons conclure que l'état énergétique d'une diffusion isotropique (lissage) est plus élevé que celle anisotropique. Ainsi, les valeurs de  $\beta$  ne peuvent qu'augmenter en favorisant d'avantage la préservation de contours (vitesse rapide de décroissance de  $\psi$  - état énergétique faible) et diminuer dans le cas contraire (vitesses rapides de décroissance de  $\psi_{PM}$  - état énergétique fort) afin de maintenir l'équilibre énergétique de la solution MAP.

## 5.6 Conclusion

Afin de clôturer la section 5.5 qui nous a permis d'approfondir nos connaissances sur le comportement d'une reconstruction statistique itérative MAP, nous avons décidé d'établir quelques règles à la lumière des discussions effectuées :

- ▷ Dans une reconstruction MAP itérative réalisée à partir d'un nombre restreint de projections, l'énergie de vraisemblance joue le rôle le plus important en imposant une forme générale 3D (fidélité aux mesures 2D) à la solution MAP. Quant à l'énergie de l'a priori, son rôle est fondamental pour affiner la reconstruction (régions et frontières - a priori bas niveau).
- ▷ Le poids  $\beta$  de l'a priori définit l'équilibre énergétique optimal entre les deux parties constituant l'énergie totale de la solution MAP (éq. 5.8). En déséquilibrant l'état énergétique optimal de la reconstruction dans le sens de la vraisemblance ou de l'a priori, l'hyperparamètre  $\beta$  change de valeur de telle sorte qu'il inverse le sens du déséquilibre. Ainsi, pour les mêmes données mesurées (projections), les valeurs optimales de  $\beta$  sont directement proportionnelles à la vitesse de décroissance (entre 0 et 1) des fonctions de pondération associées à l'énergie de l'a priori de Gibbs (la rapidité de la décroissance de la fonction de pondération est associée à une augmentation de  $\beta$ ).
- ▷ Le facteur d'échelle  $\rho$  est fortement lié à la dynamique de l'objet au cours de la reconstruction ; une dynamique très affectée par le niveau de bruit d'acquisition :
  - 1) Pour un niveau très faible du bruit d'acquisition ( $SNR = 20db$ ), l'énergie d'attache aux données limite la propagation de bruit 2D dans la zone de reconstruction. Toute variation significative de la dynamique de l'objet au cours de la reconstruction se situe globalement au niveau de ses frontières (parois des vaisseaux). Ainsi, une diffusion anisotropique de forte puissance (basculement brusque entre 0 et 1 des fonctions de pondération associées) est capable de préserver au maximum ces contours sans affecter les régions homogènes.
  - 2) En augmentant le niveau de bruit 2D, l'énergie de la vraisemblance affaiblie par le nombre réduit de données mesurées (5 projections) perd progressivement son efficacité à réduire la propagation de bruit 2D dans l'espace de reconstruction. Ainsi, il



faut baisser la puissance de la diffusion anisotropique exercée par la reconstruction MAP afin de ne pas amplifier le niveau de bruit 3D.

**NB :** La puissance d'une diffusion anisotropique est proportionnelle à la rapidité de transition entre les valeurs extrêmes (0 et 1) des fonctions de pondération associées ( $\psi$ ). Pour accélérer la transition entre les deux états limites des  $\psi$ , nous pouvons diminuer les valeurs des facteurs d'échelle  $\rho$  ou changer le modèle de la fonction de potentiel adoptée (par exemple la décroissance de  $\psi_{PM}$  est plus rapide à  $\psi_{Gr}$ ).

- ▷ Pour la même valeur de facteur d'échelle  $\rho$ , la procédure d'harmonisation adoptée (section 4.2.3) a imposé un comportement identique entre les fonctions de potentiel convexes de Green, de Surfaces Minimales et de Huber. Cependant, elle a échoué à imposer la même vitesse de décroissance au fonction de pondération de Perona et Malik ainsi que celle de Hebert et Leahy.
- ▷ L'efficacité de l'algorithme MAP-ARTUR-GC réside dans les successions de mises à jour automatiques et adaptatives des variables auxiliaires  $b_{ij}$ . Pour une initialisation de l'algorithme avec un  $\mu^0$  à dynamique nulle, l'évolution des variables  $b_{ij}$  au cours des itérations (mises à jour) a pour effet de basculer progressivement la reconstruction d'un lissage pur (diffusion isotropique) vers plus de préservation de contours.

**NB :** Pour un niveau de bruit assez élevé ( $SNR \leq 10db$ ), les reconstructions MAP-ARTUR-GC donnent toujours de meilleurs résultats lors d'une initialisation de la solution MAP par des zéros (voir Fig. 5.17).

## 6 Conclusions et perspectives

Ce dernier chapitre résume les techniques et les discussions théoriques évoquées dans cette thèse. Dans un premier temps, nous reprenons toutes les étapes permettant la mise en œuvre de nos algorithmes itératifs de reconstruction statistique (section 6.1). Ensuite, une deuxième section évoque les principaux résultats, montre les limites de nos approches et propose quelques pistes pour les améliorer (section 6.2). Nous clôturons ce chapitre ainsi que ce manuscrit par une conclusion générale (section 6.3).

### 6.1 Synthèse

Ce manuscrit aborde les différents aspects d'une reconstruction 3D du réseau coronarien à partir d'une séquence rotationnelle d'angiographie RX et d'un faible nombre de projections. Notre motivation principale est le grand apport que pourrait apporter une reconstruction/modélisation 3D des artères coronaires dans le domaine du diagnostic et du traitement des maladies cardiovasculaires (chapitre 1). Ainsi, nous avons réservé tout un chapitre pour définir les défis d'une telle reconstruction et effectuer un état de l'art des procédures visant une modélisation tridimensionnelle des coronaires (chapitre 2).

Différentes procédures ont été proposées dans la littérature (section 2.2) pour faire face à la complexité de notre problématique (section 2.1) ; une complexité qui est due essentiellement au mouvement non linéaire et irrégulier du cœur et à la fine structure arborescente et complexe des coronaires. Ayant pour objectif d'effectuer une reconstruction précise et rapide sans avoir recours à des connaissances très élaborées des structures à reconstruire (coronaires), nous avons envisagé d'adopter une reconstruction statistique itérative à partir des angiogrammes correspondant à la même phase cardiaque .

Le nombre restreint de projections (correspondant à la même phase cardiaque) complique notre reconstruction, considérée alors comme un problème inverse mal posé. la résolution d'un tel problème nécessite une procédure de régularisation. Dans notre cas, nous avons opté pour le formalisme bayésien qui nous a permis de régulariser notre problème. En considérant le résultat de la reconstruction comme étant l'optimum d'une fonction énergétique MAP, nous introduisons une contrainte de lissage avec préservation de contours en associant un terme d'attache aux données (mesures) avec un a priori de Gibbs (un modèle Markovien qui est basé uniquement sur une interprétation partielle de l'objet à reconstruire à partir de connaissances locales).

Le choix de ce type de reconstruction nous a conduit à évoquer les détails théoriques et techniques permettant son élaboration (section 2.3). Ainsi, nous avons discuté des trois principales composantes définissant la performance d'une reconstruction statistique en tomographie statique (section 2.3.2), à savoir (1) l'élaboration d'un modèle physique précis du processus d'acquisition, (2) l'adoption d'un modèle a priori approprié et (3) la définition d'un algorithme d'optimisation itératif efficace (section 2.3.3). Cette discussion

nous a été utile pour établir le plan de ce manuscrit, en consacrant un chapitre pour la modélisation des opérateurs de projection et de rétroprojection (chapitre 3), un autre pour les différentes étapes de conception de nos algorithmes de reconstruction (chapitre 4), un avant dernier pour l'évaluation des méthodes proposées (chapitre 5).

Dans le chapitre 3, nous avons discuté de deux opérateurs importants, reliant l'espace de mesure 2D avec celui 3D de reconstruction, autrement dit les opérateurs de projection et de rétroprojection. L'opérateur de projection permet de simuler des profils de projection à partir d'un objet 3D donné, tandis que la rétroprojection, considérée comme l'opérateur adjoint de celui de projection, permet de répartir et de propager les données mesurées au niveau des capteurs dans le domaine de reconstruction. Dans le cas d'une représentation matricielle de ces deux opérateurs, la matrice de rétroprojection,  $R$  n'est que la transposée de celle de projection,  $A$ .

Le calcul de la matrice  $A$  (par conséquent  $R : R = A^T$ ) est primordial étant donné que chaque itération, dans n'importe quelle procédure itérative de reconstruction statistique, fait appel aux opérations de projection et de rétroprojection afin d'approximer progressivement l'optimum des fonctions énergétiques adoptées (ML ou MAP). Un calcul imprécis de ces deux opérateurs peut introduire des artefacts dégradant, voire faussant, le réalisme des modèles adoptés pour simuler le bruit d'acquisition. Il peut générer également des artefacts au niveau des reconstructions effectuées.

Connaissant l'importance de ces deux modèles dans nos reconstructions, ce chapitre établit un état de l'art des différentes méthodes de calcul des opérateurs de projection et de rétroprojection (section 3.1). Cela nous a permis d'élargir nos connaissances sur les différentes méthodes proposées dans la littérature et de comprendre les aspects théoriques assurant un calcul précis. Une modélisation réaliste des matrices  $A$  et  $R$  doit tenir compte du choix de la fonction atomique de base dans la procédure de discrétisation de l'objet à reconstruire (numérisation) et de l'estimation des profils de projection issus de ces bases. Pesant le pour et le contre des différentes fonctions de base proposées dans ce domaine (Tabl. 3.1), à savoir l'indicatrice de voxel, les Blobs et les B-Splines, nous avons opté pour l'indicatrice de voxel. Elle a l'avantage de posséder une expression mathématique simple et facile à manipuler et un support compact séparable par rapport aux trois axes principaux de l'espace de reconstruction. Nous avons estimé également que l'insuffisance de cette base pour représenter précisément les signaux continus peut être surmontée en effectuant un choix approprié du pas de discrétisation. Concernant le choix d'une méthode numérique permettant d'approximer les empreintes des fonctions de base sur la grille détectrice, nous avons opté pour les techniques les plus récentes et les plus précises, basées sur les intégrales de bandes. Ces techniques ont surmonté les artefacts de hautes fréquences apparus lors de l'utilisation des approches traditionnelles, fondées sur le calcul d'intégrales pour certaines raies de projection pré-sélectionnées (tels que Pixel-Driven et Ray-Driven).

Après le choix de la fonction atomique de base et de la méthode estimant sa projection, nous avons jugé utile d'introduire les outils mathématiques et physiques nécessaires pour effectuer une telle modélisation (section 3.2), et de présenter les détails techniques de quelques opérateurs adaptés à la géométrie conique de projection, à savoir le Pixel-Driven (section 3.2.1), le Ray-Driven (section 3.2.2), le Distance-Driven (section 3.2.3) et les Empreintes séparables : Trapèze/Trapèze (section 3.2.4).

Sous les hypothèses d'une géométrie conique de projection reliant un émetteur RX ponctuel à une grille plane détectrice et d'une rotation isocentrique de l'acquisition

angiographique RX (Fig 3.1), nous avons défini deux systèmes de coordonnées cartésiennes, l'un tridimensionnel fixe dans l'espace de reconstruction et l'autre bidimensionnel mobile dans la zone de détection. Ils nous ont permis de paramétrer le positionnement, l'orientation et les caractéristiques internes de l'arceau du système d'acquisition lors de la formation de l'image (paramètres intrinsèques et extrinsèques). Quant aux paramètres physiques, nous avons pu établir une expression mathématique précise de la valeur moyenne détectée par une surface pixellique (éq. 3.14), tenant compte de la nature monochromatique du rayonnement RX (simplification de l'équation de Beer-Lambert), du choix de la fonction de base de discrétisation (indicatrice de voxel), des paramètres géométriques calculés et de la réponse impulsionnelle des détecteurs élémentaires (associés aux pixels).

Le calcul exact de ces valeurs moyennes détectées en chaque capteur élémentaire s'avère très complexe est couteux du point de vue temps de calcul. Il fait appel souvent à des méthodes d'approximations numériques. Ainsi, nous avons étudié quelques techniques d'estimation de référence, à savoir Pixel-Driven [Peters, 1981], Ray-Driven [Joseph, 1982], Distance-Driven [De Man and Basu, 2004] et Empreintes séparables Trapèze-Trapèze [Long et al., 2009]. Cette étude nous a montré la supériorité des méthodes exploitant des surfaces de chevauchement (Fig. 3.8) entre des projections des voxels (indicatrice de voxel) et la rétroprojection des pixels de détection (Distance-Driven et Empreintes Séparable Trapèze-Trapèze). Elles ont pu générer des projections et des rétroprojections sans artefacts de haute fréquence (Fig. 3.12) en exploitant le principe qu'un point de l'objet 3D ne soit détecté que par un unique point de la grille détectrice. Dans le même contexte, nous avons proposé une version similaire à la méthode Distance-Driven, simple et rapide à calculer (section 3.3). En exploitant toujours les surfaces de chevauchement (Fig. 3.12), nous avons pu approximer la valeur moyenne des photons émis par un voxel et détectée par un pixel. Notre raisonnement était fondé sur une interprétation probabiliste des éléments  $a_{ij}$  constituant la matrice de projection.  $a_{ij}$  est défini comme étant la probabilité qu'une quantité photonique soit transmise par le voxel  $j$  et détectée par le pixel  $i$ . L'étude théorique comparative (section 3.3.2) de la nouvelle méthode simplifiée DDS avec celles de références : Distance-Driven et des Empreintes Séparables Trapèze-Trapèze, a prouvé la rapidité de sa mise en œuvre. Cependant, la DDS a présenté des artefacts de haute fréquence au niveau de la projection et de la rétroprojection (Fig. 3.17 et Fig. 3.18) dans le cas d'un choix inapproprié des volumes voxeliques ayant des empreintes coniques supérieure à la largeur de 3 pixels sur les deux directions du détecteur.

Ayant discuté des différentes méthodes modélisant le problème direct d'une acquisition RX à géométrie conique (Matrice de projection  $A$ ) et choisi une procédure statistique itérative pour la résolution du problème inverse mal posé (la reconstruction), nous avons consacré le chapitre 4 pour préparer les outils nécessaires à la mise en œuvre (implémentation) de nos algorithmes. Pour ce faire, il a fallu choisir un modèle de bruit d'acquisition pour formuler une expression énergétique de la vraisemblance aux données mesurées (projections) (section 4.1), ainsi que des fonctions de potentiel pour définir l'énergie de l'a priori de Gibbs (section 4.2).

Nous avons opté pour le modèle de bruit le plus simple et le plus utilisé dans le domaine du traitement d'image (section 4.1.1), à savoir le bruit blanc normal (gaussien). Ce choix nous a semblé judicieux d'un point de vue pratique puisque il garantit une forme convexe et quadratique de l'énergie d'attache aux données (éq. 2.11), et d'un point de vue théorique puisque il peut approximer un bruit de poisson.

Ainsi, nous avons pu concevoir l'énergie de vraisemblance mesurant l'adéquation de la reconstruction face aux mesures. Dans le but de renforcer cette énergie affaiblie par le nombre réduit de projections (mesures), nous avons proposé deux techniques permettant la suppression des données parasites (structures environnantes) occupant une grande partie des images acquises (Fig. 5.3) et la restriction de la reconstruction à un volume d'intérêt enveloppant (le plus proche possible) les structures coronariennes 3D à reconstruire (Fig. 4.3). Par conséquent, nous avons limité au maximum l'interférence du signal utile issus des coronaires (à travers les rétroprojections) avec celles des structures environnantes dans la procédure de reconstruction, et amélioré le conditionnement du problème inverse en limitant le nombre d'inconnues à déterminer. Cette restriction nous a été utile pour réduire l'espace de stockage et le temps de calcul en simplifiant les matrices de projection (très éparses).

Afin de compléter l'expression de notre fonction de coût total, nous avons dû effectuer une étude théorique des propriétés analytiques des fonctions de potentiel, permettant d'imposer une contrainte de lissage avec préservation de contours sur nos reconstructions (section 4.2.2). Ayant choisi un a priori Markovien basé sur une interprétation partielle de l'objet à reconstruire, attribuant une valeur énergétique aux interactions entre sites voisins, nous avons commencé par établir un système de voisinage (Fig. 4.4). En évitant de trop élargir la zone locale associée aux interactions (des reconstructions considérées alors comme des champs Markoviens) à cause des structures vasculaires très fines (sections de branches) ou de trop la réduire pour maximiser la zone de régularisation du problème inverse mal posé, nous avons choisi un système de voisinage à 26 connexités. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la forme des fonctions de potentiel définissant l'énergie markovienne (Fig. 4.5). À travers une analyse des fonctions de pondération associées à celles de potentiel et une analogie heuristique de la procédure de reconstruction avec celle d'une diffusion anisotropique (éq. 4.5 et éq. 4.6), nous avons pu établir quatre conditions garantissant le lissage avec préservation de contours de solutions MAP (éq. 4.10). En fonction de la différence entre sites voisins de l'objet à reconstruire, ces quatre conditions imposées sur les fonctions de pondération associées ont garanti un basculement progressif entre le lissage maximal (faibles variations) et son interruption (fortes variations). Étant donné que la littérature propose un nombre considérable de fonctions de potentiel vérifiant nos conditions (Tabl. 2.4), nous avons décidé de sélectionner cinq fonctions de potentiel que nous avons estimé très représentatives de celles existantes (Tabl. 4.2), à savoir trois fonctions convexes dont une semi-quadratique ( $\phi_H$  [Huber, 2011]) et deux non quadratiques ( $\phi_G$  [Green, 1990] et  $\phi_{SM}$  [Charbonnier et al., 1994]), et les deux dernières non convexes et non quadratiques ( $\phi_{HL}$  [Hebert and Leahy, 1989] et  $\phi_{PM}$  [Perona and Malik, 1990]).

Afin de pouvoir adapter les fonctions de potentiel aux différentes dynamiques de niveau de gris des organes à reconstruire, nous avons dû introduire et étudier un nouveau paramètre, c'est à dire le facteur d'échelle  $\rho$  (section 4.2.3). En divisant la dynamique de l'objet à reconstruire selon  $\rho$ , nous avons prévu une solution afin de changer l'échelle des variations utiles des fonctions de pondération associées (entre le lissage et l'interruption quasi-totale). Nous avons également proposé une procédure d'harmonisation des fonctions de pondération associées en attribuant un rôle bien défini au facteur d'échelle  $\rho$ , afin d'interrompre la procédure de lissage lorsque la différence entre deux sites voisins est proche de la valeur de  $\rho$  (Tabl. 4.4).

La somme pondérée des deux termes énergétiques, a priori et attache aux données, nous a permis de construire notre fonction de coût MAP à optimiser (éq. 4.13 - l'énergie

de l'a priori et celle de vraisemblance sont respectivement pondérées par  $\beta$  et  $(1 - \beta)$ . Étant donné que le terme d'attache aux données a présenté une expression mathématique quadratique facile à minimiser, le choix des méthodes d'optimisation itérative a été principalement influencé par la forme de la fonction de potentiel de l'a priori (section 4.3). Dans le but d'approximer au mieux l'optimum global de notre fonction MAP, nous avons choisi deux algorithmes d'optimisation numérique en fonction des convexités des fonctions de potentiel choisies, à savoir Newton Raphson Modifié pour les fonctions convexes  $\phi_H$ ,  $\phi_G$  et  $\phi_{SM}$  (section 4.3.1), et ARTUR-Gradient conjugué pour les fonctions  $\phi_{PM}$  et  $\phi_{HL}$  non convexes (section 4.3.2).

Afin d'évaluer nos méthodes statistiques de reconstruction vasculaire, nous commençons par présenter dans le chapitre 4 notre base de données simulées (section 5.1). Cette base simulée nous a permis de disposer d'une vérité terrain nécessaire pour une évaluation quantitative précise des algorithmes proposés. Ainsi, nous avons prévu deux modèles réalistes 3D en niveau de gris des coronaires (Fig. 5.1), obtenus à partir de deux données patient différentes acquises par un scanner 64 multi-barrettes (GE LightSpeed CT coronary angiography). En s'inspirant des acquisitions réalisées en routine clinique, nous avons proposé des paramètres géométriques d'une acquisition simulée permettant la génération de cinq projections espacées de  $30^\circ$  à partir de chaque modèle coronarien 3D (Fig. 5.2). Les deux séquences de projections simulées, générées en utilisant nos matrices DDS, ont été bruitées par quatre niveaux différents de bruit blanc gaussien afin d'évaluer l'efficacité de nos algorithmes à restreindre l'influence du bruit durant la procédure de reconstruction (Fig. 5.4). Le choix de la nature de ce bruit (bruit blanc gaussien) a été influencé par le modèle statistique adopté dans la vraisemblance. Enfin, pour prendre en compte les dégradations introduites par la soustraction du fond 2D dans nos reconstructions, nous avons rajouté à notre base de données deux séquences (de chaque modèle) obtenu après notre procédure de suppression du fond (Fig. 5.3).

Après avoir réuni tous les éléments permettant d'effectuer des reconstructions vasculaires itératives MAP, nous avons dédié le chapitre 5 à l'évaluation de nos algorithmes de reconstruction statistique, MAP-MNR (section 5.3) et MAP-ARTUR-GC (section 5.3). Pour cela, nous avons décidé d'effectuer une série de tests selon la puissance du bruit d'acquisition, les valeurs des hyperparamètres  $\alpha$  et  $\beta$  (éq. 4.13) et les modèles simulés coronariens 3D, afin d'approfondir notre compréhension technique et théorique des reconstructions MAP et d'établir les conditions optimales permettant d'aboutir à des résultats plus fidèles aux objets de références (d'après la vérité terrain). Nos évaluations ont été basées sur des critères mesurant la précision et l'énergie des solutions MAP (section 5.2), à savoir l'erreur quadratique totale  $EQ_{3D}$  (éq. 5.2), l'erreur quadratique moyenne normalisée  $EQMN_{3D}$  (éq. 5.3), l'indice de qualité universelle  $UQI$  (éq. 5.4), le rapport signal sur bruit  $SNR_{3D}$  (éq. 5.5), l'énergie d'attache aux données  $EQ_{2D}$  (éq. 5.6) ainsi que celle de l'a priori  $E_{prior}$  (éq. 5.7).

Ainsi, nous avons effectué une série de tests à partir de notre base simulée de projections, composée de 5 séquences de chaque modèle 3D,  $\mu_A$  et  $\mu_B$  :  $Y_{A||B,5db}$ ,  $Y_{A||B,10db}$ ,  $Y_{A||B,15db}$ ,  $Y_{A||B,20db}$  et  $Y_{A||B,SF}$ .

Nous avons focalisé nos analyses sur le comportement de nos algorithmes en fonction de différentes valeurs des hyperparamètres  $\rho$  et  $\beta$  (sections 5.3.1 et 5.4.1) et sur leurs convergences (sections 5.3.2 et 5.4.2). Nous nous sommes intéressés également à l'influence de nos algorithmes d'optimisation et de la dynamique des objets à reconstruire sur les hyperparamètres  $\beta$  et  $\rho$  permettant la réalisation des reconstructions optimales selon le

critère  $EQ_{3D}$  (section 5.5).

## 6.2 Résultats, limites et perspectives

Dans cette section, nous résumons tous les points abordés durant cette thèse. Ainsi, nous discutons de chaque composante de notre méthode statistique itérative de reconstruction, à savoir la modélisation du processus d'acquisition (section 6.2.1), le modèle a priori (section 6.2.2) et l'algorithme numérique d'optimisation (section 6.2.3). Pour chaque composante, nous abordons les techniques proposées, leurs limites et les perspectives permettant de surmonter ces limites.

### 6.2.1 Modélisation du processus d'acquisition

Toute reconstruction statistique est basée sur une modélisation des aspects déterministes et aléatoires de la physique d'acquisition.

#### A. Aspects déterministes du processus d'acquisition

**Une modélisation déterministe précise de l'opérateur de projection** doit intégrer les différents aspects décrivant le lien entre la contribution spatiale de l'objet imagé et les valeurs moyennes détectées. Dans une acquisition numérique, ces aspects doivent tenir compte de la discrétisation spatiale des tissus imagés ( $\mu$  - coefficients d'atténuation) en plusieurs échantillons,  $\mu_j$ , et de la contribution de chaque échantillon pour la formation des valeurs moyennes mesurées,  $\bar{g}_i$ .

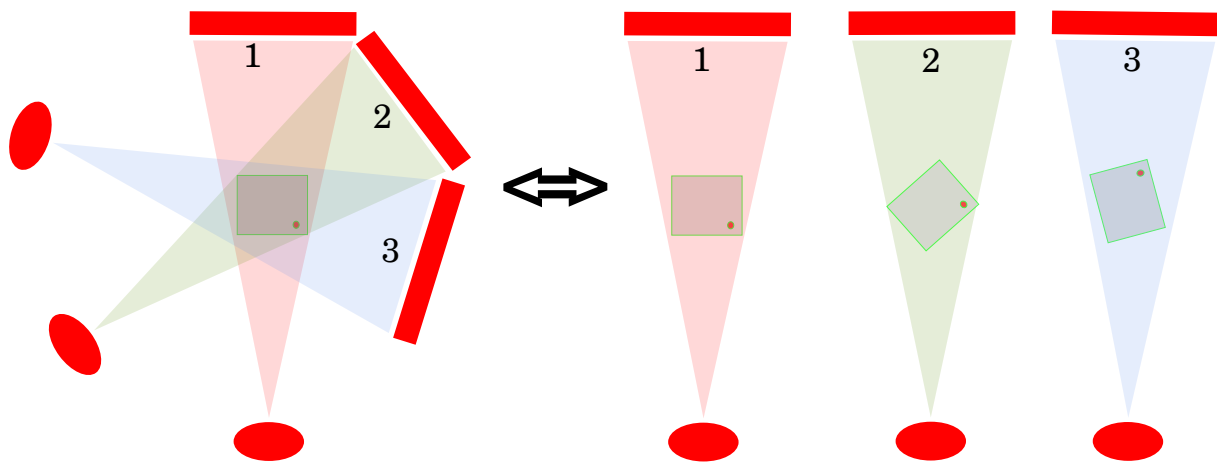
Le chapitre 3) discute de ces différents aspects et de la mise en œuvre de cette modélisation. Nous pouvons résumer les travaux effectués par les points suivants :

- Nous avons effectué un état de l'art des différentes méthodes proposées dans littérature, concernant les opérateurs de projection et de rétroprojection (section 3.1).
- Sous l'hypothèse d'un rayonnement monochromatique et lors d'une acquisition RX à géométrie conique, nous avons établi les outils techniques et théoriques nécessaires pour effectuer une implémentation numérique de trois matrices différentes de référence (de projection et de rétroprojection) : le Ray-Driven (section 3.2.2), le Distance-Driven (section 3.2.3) et les Empreintes séparables : Trapèze/Trapèze (section 3.2.4).
- En adoptant une définition statistique des coefficients de la matrice de projection, nous avons introduit une nouvelle technique de modélisation similaire à celle de la Distance Driven, c'est la Distance Driven Simplifiée (section 3.3). En comparant la performance de la technique proposée par rapport à la DD et à la SF-TT (les techniques les plus récentes et précises), nous avons montré la compétitivité de la DDS, et la simplicité de sa mise en œuvre (section 3.3.2).
- Nous avons implémenté une technique permettant d'accélérer la mise en œuvre des opérateurs de projection et de réduire l'espace de stockage, en concentrant nos calculs sur une région d'intérêt 3D.

### Limites et perspectives :

L'implémentation des opérateurs de projection (et de rétroprojection),  $A$ , est un processus exorbitant en temps de calcul et en espace de stockage. Pour une procédure visant une reconstruction quasi temps réel (c'est à dire exploitable en routine clinique), un tel calcul peut se montrer impraticable. Dans notre cas, nous avons pu surmonter cette limite en restreignant les calculs sur des régions d'intérêt enveloppant les branches coronaires 3D. Cependant, la détermination de ces régions d'intérêt est dépendante du résultat des segmentations vasculaires des projections, ce qui peut engendrer une source de perte d'information 3D (perte partielle ou complète d'une branche sanguine non détectée).

Pour une rotation du couple émetteur/détecteur RX autour d'un axe fixe (isocentrique),  $Z$ , nous pouvons estimer les projections correspondant aux différentes incidences d'acquisition en appliquant une seule matrice de projection, à condition de prévoir une procédure numérique simulant la rotation de l'objet imagé autour de  $Z$  (Fig. 6.1). Cela va nous permettre de réaliser un gain de temps de calcul et une réduction de l'espace de stockage, dépendants de la rapidité des procédures de rotation (de l'objet imagé) effectuées. Notons ici que la précision des rotations appliquées peut influencer les résultats des reconstructions.



**Figure 6.1:** Schéma illustrant l'équivalence entre la rotation du couple autour d'un axe fixe de rotation et celle de l'objet imagé autour du même axe.

La Distance Driven Simplifiée a montré ses limites dans le cas où l'empreinte conique de chaque fonction de base (voxel) dépasse la largeur de trois pixels sur les deux directions du détecteur plan. Notre hypothèse d'uniformité de la distribution des photons émis par chaque voxel s'est avérée trop simpliste, étant donné que le nombre des photons émis varie en fonction des distances parcourues par les faisceaux RX (Loi de Beer-Lambert). Pour résoudre ce problème, nous devons trouver une méthode rapide et précise permettant de modérer la puissance de détection de chaque pixel selon sa position spatiale à l'intérieur de la surface approximative de l'empreinte conique voxelique (Fig. 3.13).



## B. Aspects aléatoires du processus d'acquisition

**Une modélisation précise des propriétés stochastiques des projections** nécessite une étude approfondie de l'ensemble de la chaîne d'acquisition, à savoir la source RX, l'objet imagé et le système de détection. N'ayant pas accès aux informations concernant les étapes de calibration dans la chaîne de détection (ces données constructeur sont généralement confidentielles), nous avons pu :

- effectuer une brève étude discutant des aspects aléatoires générés au niveau de la source RX et modifiés lors de la transmission (section 2.3.2),
- citer les modèles de bruit les plus adoptés dans la littérature de la reconstruction statistique,
- adopter le modèle d'un bruit normal centré pour l'élaboration de notre fonction de coût MAP.

### Limites et perspectives :

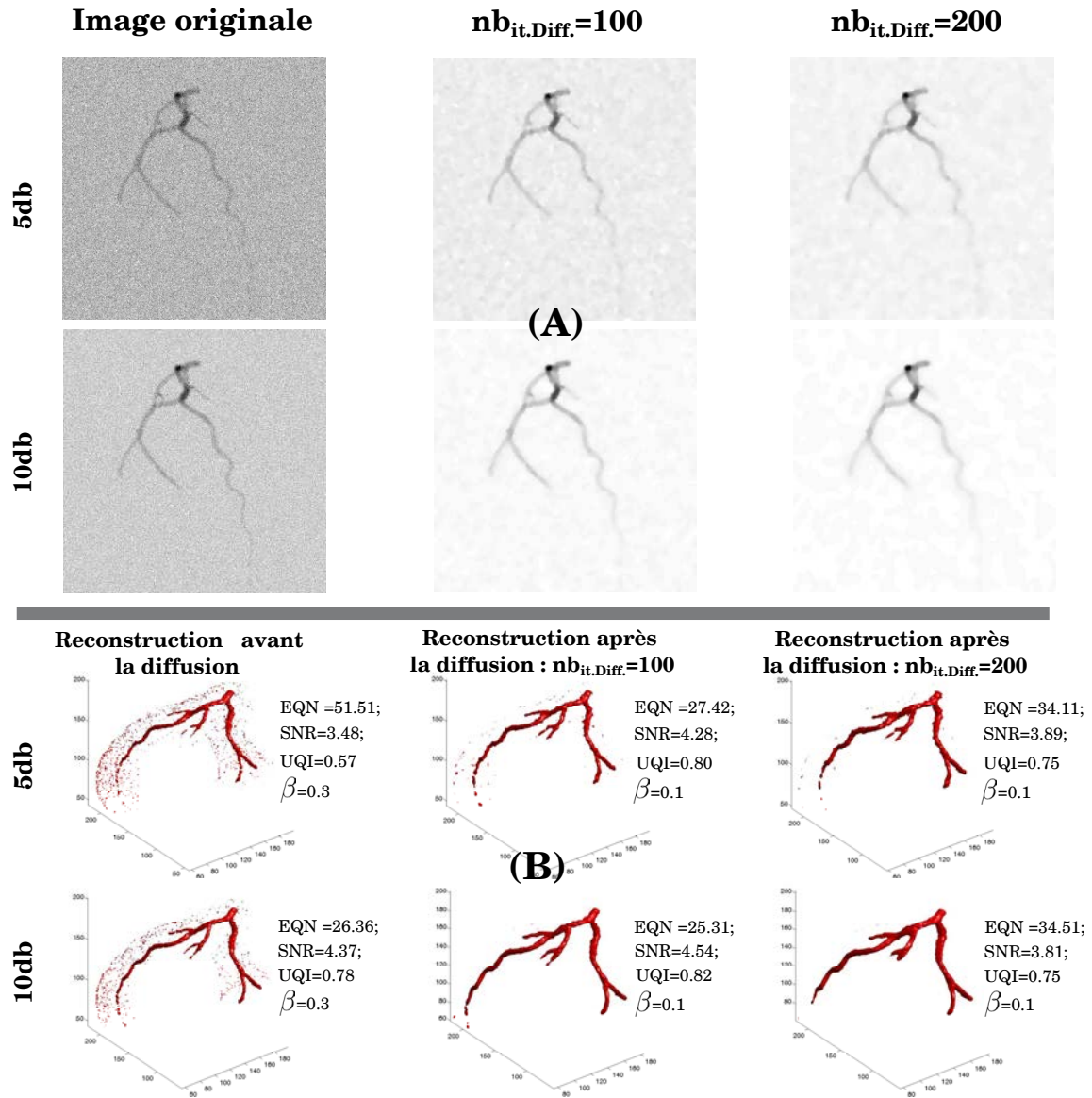
Le modèle de bruit blanc gaussien est une approximation des aspects aléatoires d'une acquisition RX. Il nous permet de simplifier l'expression de la vraisemblance (plus exactement de moins-log-vraisemblance - éq. 2.10) qui se manifeste comme une mesure de l'erreur quadratique entre les données détectées (angiogrammes) et les projections des objets au cours de la reconstruction. Pour pouvoir établir un modèle plus réaliste, il faut prévoir un protocole d'acquisition plus approprié pour effectuer une étude statistique approfondie.

Pour un modèle complexe de bruit (comme dans l'éq. 2.18), nous estimons important de réaliser une évaluation théorique poussée des transformations d'échelle appliquée sur des données bruitées permettant de simplifier les modèles complexes (telles que celles utilisées dans l'imagerie nucléaire [Lu et al., 2001b, Péligrini et al., 1998, Lu et al., 2001a]), et de quantifier leurs influences sur les résultats de reconstruction (temps de calcul et/ou précision).

Pour des niveaux élevés de bruit blanc gaussien ( $SNR \leq 10\text{db}$  - Fig 5.4), les reconstructions effectuées à partir d'un nombre très réduit de projections (tests du chapitre 5) ont montré l'incapacité de notre énergie d'attache aux données à restreindre efficacement l'influence du bruit lors de reconstructions (voir Fig. 5.15 et Fig 5.9). En effet, le manque de mesures affaiblit l'énergie d'attache aux données, et surtout en présence d'un niveau élevé de bruit. Cette insuffisance énergétique de la vraisemblance se manifeste par la propagation de bruit d'acquisition dans l'espace de reconstruction (plus de détail, voir section 6.2.2).

Dans ces cas, une des pistes que l'on peut envisager est de renforcer l'énergie d'attache aux données en effectuant un prétraitement approprié des images fortement bruitées. Ce prétraitement 2D doit viser une réduction maximale du bruit sans trop affecter les valeurs de niveau de gris correspondant au signal utile, et d'évaluer son influence sur la reconstruction.

Par exemple, une application d'une diffusion non linéaire selon le schéma AOS aux images de projection simulées  $Y_{A,5db}$  et  $Y_{A,10db}$  (AOS : Additive Operator Splitting [Weickert, 1998] - implémenté par Yan Zhang [Zhang et al., 2008]) nous a permis d'améliorer les résultats de reconstruction (Fig. 6.2).

**Figure 6.2:**

(A) : Visualisation de l'application d'une diffusion non linéaire selon le schéma AOS (Additive Operator Splitting [Weickert, 1998] - implémenté par Yan Zhang [Zhang et al., 2008]) des images de projection simulées  $Y_{A,5db}$  (première ligne) et  $Y_{A,10db}$  (deuxième ligne). Pour le même pas temporel  $\Delta_t = 0.05$ , nous changeons le nombre d'itérations :  $nb_{it.Diff.} = 100$  (colonne 2) et  $nb_{it.Diff.} = 200$  (colonne 3).

(B) : L'influence de la diffusion non linéaire appliquée aux projections simulées  $Y_{A,5db}$  (première ligne) et  $Y_{A,10db}$  (deuxième ligne) pour les reconstructions MAP-MNR.

Dans le cas de l'application de la diffusion non linéaire aux images bruitées correspondant à un SNR de 5db, nous constatons une amélioration significative des reconstructions effectuées sur la plan qualitatif (présence de toute les branches - Fig. 6.2-(B)) et sur le plan quantitatif avec une diminution de l'erreur quadratique normalisée (EQN passe de 51.51 à 27) et l'amélioration du rapport signal-sur-bruit (SNR passe de 3.48 à 4.28) et de l'indice de qualité universel (UQI passe de 0.57 à 0.80).

**NB :** Le résultat présenté dans la Fig. 6.2 n'est qu'un exemple pour illustrer et appuyer la faisabilité de la piste proposée. D'autres prétraitements peuvent être envis-

agés et étudiés tels que le filtrage anisotrope [Perona et al., 1994, Gilboa et al., 2003], le filtrage multi-échelle [Frangi et al., 1998] et le filtrage de débruitage et de restauration [Buades et al., 2005, Tarel and Hautiere, 2009], etc.

### 6.2.2 Modèle a priori

Plusieurs chercheurs ont montré la difficulté de réaliser des reconstructions (statiques ou dynamique) précises à partir d'un nombre très réduit de projections, sans avoir recours à une information a priori sur l'objet que l'on cherche à reconstruire [Smith et al., 1978, Grünbaum, 1982, Kazantsev, 1991, Siltanen et al., 2003]. Un modèle a priori peut se baser sur des connaissances anatomiques et physiologiques d'un expert, sur une reconstruction effectuée antérieurement à partir d'autres modalités d'imagerie (l'imagerie multi-modalité), ou sur une phase d'apprentissage. Il est décrit généralement sous une forme qualitative nécessitant une quantification mathématique afin de pouvoir l'incorporer dans une procédure de reconstruction. En focalisant notre étude sur des modèles a priori des structures sans tenir compte de leurs cinétiques, nous avons pu :

- Établir une classification non exhaustive des différents modèles a priori utilisés dans les reconstructions statistiques, abordés de deux manières différentes : déterministe et probabiliste (section 2.3.2).
- Définir un système de voisinage encadrant la zone d'interactions locales dans une modélisation Markovienne des objets à reconstruire (Fig. 4.4).
- Adopter un modèle de Gibbs appliqué au champs aléatoire de Markov comme a priori de bas niveau, dans le but d'appliquer une contrainte de lissage avec préservation du contour pour les reconstructions statistiques réalisées.
- Établir les conditions que doivent vérifier les fonctions de potentiel définissant l'énergie de Gibbs afin qu'elles puissent réaliser une régularisation avec préservation de contours (équ. 4.10). Ces conditions ont été établies sur les fonctions de pondérations associées à celles de potentiel, en se basant sur une analogie entre une reconstruction statistique et l'EDP de diffusion anisotrope (section 4.2.2).
- Introduire le facteur d'échelle dans les expressions des fonctions de potentiel et définir une procédure d'harmonisation des fonctions de pondération associées, afin de pouvoir bien adapter notre a priori aux dynamiques des objets à reconstruire (section 4.2.3).
- Évaluer et tester cinq formes différentes de fonctions de potentiel dans des procédures statistiques itératives de reconstruction ( $\phi_H$ ,  $\phi_G$ ,  $\phi_{SM}$ ,  $\phi_{HL}$  et  $\phi_{PM}$  - chapitre 5).

#### Limites et perspectives :

Le modèle de Gibbs adopté est considéré comme un modèle de bas niveau, basé sur une interprétation locale des objets reconstruits. Son optimisation lors d'une reconstruction itérative MAP se manifeste par une régularisation de la solution. Cette régularisation est similaire à une diffusion anisotropie : la puissance de la diffusion est inversement proportionnelle à la différence entre sites voisins (gradient numérique) de l'objet au cours de reconstruction. Ainsi, en présence d'un niveau important de bruit 3D qui est dû à l'incapacité de l'énergie de vraisemblance à restreindre la propagation du bruit 2D dans l'espace de reconstruction (le cas d'un  $SNR \leq 10\text{db}$  - Fig 5.4), le contraste de bruit 3D peut se chevaucher avec celui des frontières, provoquant ainsi une instabilité des reconstructions (divergence de l'algorithme).

Dans ce cas difficile de reconstruction, nous devons prévoir d'autres a priori moins

dépendants de la dynamique de la reconstruction, telle que les équations paramétriques et les fonctions analytiques. Cependant, la mise en œuvre de ces a priori peut s'avérer complexe, très coûteuse en temps de calcul et impraticable pour effectuer une reconstruction 3D quasi-temps réel.

En se basant sur notre étude heuristique (section 4.2.2), nous avons pu interpréter et expliquer le changement de comportement de nos algorithmes en fonction des hyperparamètres  $\rho$  et  $\beta$  liées à notre a priori Markovien :

**Comportement au sens d'une reconstruction ML (Maximum de Vraisemblance) :** Pour des valeurs minimales du poids  $\beta$  de l'a priori, l'énergie de la vraisemblance se montre logiquement la plus dominante. De la même façon, l'énergie de l'a priori se montre inefficace et négligeable quand il s'agit d'utiliser des valeurs minimales de  $\rho$ . En effet, en choisissant une valeur du facteur d'échelle proche de 0, une grande partie de la dynamique de l'objet à reconstruire se voit supérieure à  $\rho$ , se situant ainsi dans la zone d'interruption quasi-totale de la procédure de lissage avec préservation des contours.

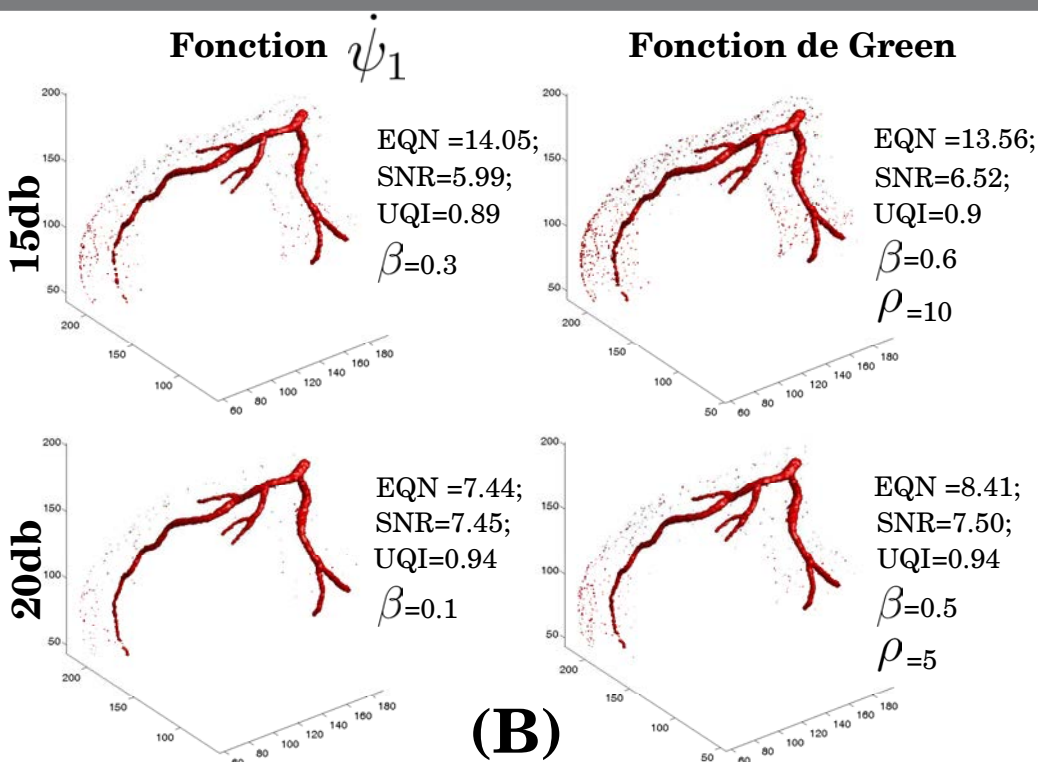
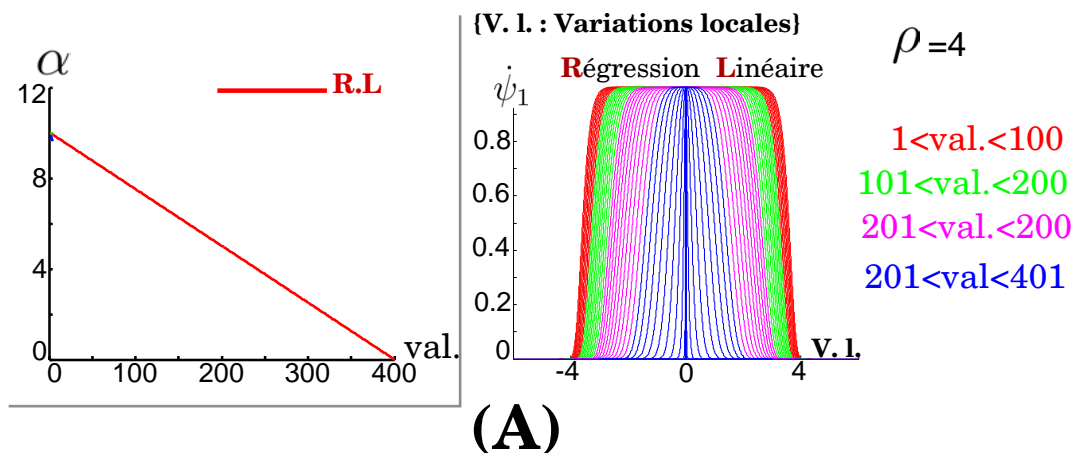
**Comportement au sens d'une reconstruction avec une contrainte globale de lissage :** En augmentant considérablement la valeur de  $\rho$ , la dynamique de l'objet à reconstruire, normalisée par le facteur d'échelle tend vers zéro. Ainsi, elle se situe dans la zone de diffusion isotope des fonctions de pondération associées (analogie entre la reconstruction MAP et une diffusion anisotrope).

Entre les deux valeurs extrêmes de  $\rho$  et de  $\beta$ , nous avons constaté une proportionnalité entre  $\rho$  et  $\beta$  permettant de réaliser les meilleures reconstructions : une décroissance de  $\beta$  est accompagnée par une amplification de  $\rho$  (voir Fig. 5.8 et Fig. 5.14). Ce couplage entre les deux hyperparamètres s'interprète facilement en raisonnant par rapport à une reconstruction optimale, caractérisée par un choix approprié des hyperparamètres ( $\rho_{opt}$  et  $\beta_{opt}$ ) assurant un équilibre énergétique optimal entre la vraisemblance et l'a priori. En déséquilibrant ce rapport énergétique optimal avec l'augmentation de la valeur de  $\rho$  ( $\rho > \rho_{opt}$ ), l'énergie de l'a priori augmente en basculant la reconstruction vers plus de lissage, nécessitant ainsi une diminution de son poids  $\beta$ , afin de rétablir l'équilibre. De la même façon, en baissant la valeur de  $\rho$ , l'a priori perd de sa puissance en se comportant vers plus de préservation de contours, d'où l'augmentation des valeurs de  $\beta$ .

Cependant, notre étude ne nous a pas permis de prédire les hyperparamètres optimaux,  $\rho_{opt}$  et  $\beta_{opt}$ . En effet, nos tests ont montré que  $\rho_{opt}$  est très dépendant de la procédure d'harmonisation adoptée (voir section 4.2.3), de la dynamique de l'objet à reconstruire et du niveau de bruit d'acquisition. Quant à l'estimation de  $\beta_{opt}$ , elle se montre plus difficile à localiser étant donné qu'elle est dépendante de plusieurs facteurs tels que le nombre de projections, la complexité de l'objet à reconstruire et le modèle utilisé dans le calcul des opérateurs de projection et de rétroprojection.

Dans notre procédure d'harmonisation proposée, nous avons pu attribuer un rôle au facteur d'échelle  $\rho$ , de telle sorte qu'il représente une limite supérieure du domaine des variations des fonctions de pondération associées ( $\psi(t \geq \rho) \approx 0$ ). Cependant, il s'avère difficile de paramétrer les vitesses de décroissance des  $\psi$  ; un aspect primordial dans la détermination des performances de lissage et de préservation des contours et dans la désignation

des valeurs optimales de  $\beta$  (Fig. 5.17). Une harmonisation que l'on souhaite est celle permettant de paramétrer séparément la vitesse de la fonction de pondération associée ainsi que son domaine de variation utile (entre 0 et  $\rho$ ). Afin d'atteindre cet objectif, nous proposons une nouvelle fonction paramétrique de pondération  $\dot{\psi}_1$  (éq. 6.1, Fig. 6.3-(A)).



**Figure 6.3:**

(A) : Tracé de la nouvelle fonction de pondération  $(\dot{\psi}_1(t))^{(\alpha)}$  en diminuant linéairement (sur 400 valeurs régulièrement espacées) le paramètre  $\alpha$  de 10 à 0.01. La valeur du facteur d'échelle est fixée à 4.

(B) : Exemples de reconstruction MAP-MNR réalisés à partir des données simulées  $Y_{A,15db}$  (première ligne) et  $Y_{A,20db}$  (deuxième ligne). La première colonne représente une reconstruction en adoptant la nouvelle fonction  $(\dot{\psi}_1(t))^{(\alpha)}$  ( $\rho = 4$  et  $\alpha = 0.01$ ), tandis que la deuxième colonne représente la reconstruction MAP-MNR optimale (selon le critère  $EQ_{3D}$ ) adoptant la fonction de potentiel de Green.

$$\dot{\psi}_1(t) = \exp(-|t|^{2\alpha}) \quad (6.1)$$

La fonction proposée (éq. 6.1) s'est inspirée de celle de Perona et Malik [Perona and Malik, 1990] (Tabl. 4.1) et de gaussienne généralisée [Bouman and Sauer, 1993] (Tabl. 2.1).

En imposant une contrainte de stricte positivité du paramètre  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ),  $\dot{\psi}_1$  vérifie une condition importante pour garantir une diffusion anisotrope ; c'est la décroissance (entre 1 et 0) dans le domaine  $]0, +\infty[$ . Cette nouvelle fonction nous offre la possibilité de changer sa vitesse de décroissance dans le domaine  $[0, 1]$  (deux points critiques de la fonction) en modifiant seulement la valeur de  $\alpha$  : la vitesse de décroissance est inversement proportionnelle à la valeur de  $\alpha$ .

En introduisant la notion de facteur d'échelle ( $\rho$ ) tout en harmonisant  $\dot{\psi}_1$  (section 4.2.3), nous avons pu générer une suite de fonctions de pondération  $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)}$  (éq. 6.2) en faisant varier uniquement les valeurs de  $\alpha$  (Fig. 6.3.(A)). Pour chaque valeur constante de  $\alpha$ , toute fonction  $\dot{\psi}_1$  garde toujours les mêmes valeurs aux points  $t = 0$  ( $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)} = 1$ ) et  $t = \rho$  ( $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)} = \exp(-460) \approx 0$ ), en modifiant ainsi la vitesse de décroissance sans affecter la valeur du facteur d'échelle  $\rho$ .

$$\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)} = \exp\left(-460 \left|\frac{t}{\rho}\right|^{2\alpha}\right), \alpha > 0 \quad (6.2)$$

L'adoption de la nouvelle fonction de pondération dans la reconstruction MAP-MNR nous a montré sa compétitivité par rapport à celle de Green. Pour un  $\rho = 4$  et  $\alpha = 0.01$ ,  $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)}$  fournit des reconstructions similaires à celles optimales (selon  $EQ_{3D}$ ) de la MAP-MNR avec l'adoption de la fonction de potentiel de Green (Fig. 6.3.(B)).

**NB :**

- Avec un bon paramétrage de  $\alpha$  et de  $\rho$ , la fonction de pondération proposée,  $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)}$ , peut approximer une grande partie des fonctions introduites dans la littérature des procédures de lissage avec préservation de contours (Table. 2.4).
- Pour des valeurs élevées de  $\alpha$  ( $\alpha \approx 10$ ), notre fonction de pondération (éq. 6.2) est très similaire à celle associée à la fonction de potentiel de Blake et Zisserman (Quadratique tronquée [Blake and Zisserman, 1987]). De plus, pour des valeurs de  $\alpha$  inférieures à 10,  $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)}$  présente une constance au voisinage de l'origine ( $\approx 1$ ), ainsi, elle peut être une bonne approximation de la fonction de pondération associée de Huber (éq. 2.26).
- Afin d'inclure notre nouvelle fonction de pondération dans une procédure itérative MAP-MNR, nous avons calculé la dérivée de la fonction de potentiel associée (éq. 6.3).

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = t \left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)} \\ &= t \exp\left(-460 \left|\frac{t}{\rho}\right|^{2\alpha}\right), \alpha > 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

- Les résultats des reconstructions MAP-MNR adoptant  $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha)}$ , illustrés sur la figure 6.3, ne présentent pas forcément les reconstructions optimales selon le critère  $EQ_{3D}$ .
- Pour  $\alpha = 0.01$ , la fonction de pondération  $\left(\dot{\psi}_1(t)\right)^{(\alpha=0.01)}$  est censée appliquer une préservation maximale des contours lors de la procédure itérative de reconstruction (proportionnelle à la vitesse maximale de décroissance de la fonction de pondération).

### 6.2.3 Algorithme d'optimisation numérique

Après avoir défini l'expression de notre fonction de coût MAP à optimiser, nous devons prévoir un algorithme itératif d'optimisation numérique. Nous avons opté pour les méthodes directes d'optimisation, caractérisées par un temps de calcul relativement rapide (par rapport aux méthodes stochastiques) et plus appropriées pour des reconstructions tridimensionnelles. En abordant la problématique de l'optimisation numérique itérative dans notre thèse, nous avons pu :

- Établir les bases théoriques d'une méthode directe de descente et proposer deux procédures numériques permettant de surmonter les problèmes liés à la complexité analytique de la fonction objectif adopté et à sa non convexité (section 2.3.3).
- Mettre en œuvre et implémenter l'algorithme de Newton Raphson Modifié qui est plus adapté aux problèmes MAP dont les fonctions de potentiel associées sont convexes et vérifient certaines conditions discutées dans la section 4.3.1 ( $\phi_H$ ,  $\phi_G$  et  $\phi_{SM}$  vérifient ces conditions).
- Mettre en œuvre et implémenter l'algorithme ARTUR-gradient conjugué dans le cas où les fonctions de potentiel ne sont pas convexes et vérifient le théorème de Geman et Reynolds étendu [Geman and Reynolds, 1992, Charbonnier et al., 1997] (voir section 4.3.2). Cette méthode de reconstruction est censée fournir des solutions de très bonnes qualités sans atteindre forcément l'optimum global MAP.

#### **Limites et perspectives :**

Nous avons pu tester et évaluer deux algorithmes de reconstruction statistique plus adaptés à la forme analytique (convexe ou non convexe) de la fonction de potentiel dans l'expression de l'énergie MAP (éq. 5.8) à minimiser. En effet, la convexité du coût total joue un rôle important pour garantir la localisation de son optimum global. Théoriquement, tout algorithme globalement convergent est censé donner les mêmes résultats (même état énergétique de la solution MAP) quand il s'agit d'utiliser une fonction de potentiel convexe dans notre modèle a priori (étant donné que le terme de vraisemblance est quadratique). Or, en adoptant la fonction convexe de Green dans le terme a priori, nous avons remarqué une différence au niveau des états énergétiques (vraisemblance et a priori) entre les reconstructions MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC réalisées à partir de la même séquence de projection (Fig. 5.18). Nous estimons que cette différence est liée à la méthode D'ARTUR qui n'est pas un algorithme à convergence globale (voir aussi Fig. 5.17), bien qu'elle donne des résultats similaires à celle de MAP-MNR pour des niveaux faibles de bruit d'acquisition ( $SNR \leq 10db$ ).

En présence d'un niveau important de bruit, les deux méthodes d'optimisation présentent des reconstructions de mauvaises qualités en se basant sur nos critères d'évaluation (section 5.2). En effet, un bruit 2D important ( $SNR \leq 10db$ ) se manifeste par une amplification du bruit 3D dans l'espace de reconstruction et une divergence des algorithmes. Dans ce cas, une interruption des algorithmes itératifs avant leur divergence peut améliorer les résultats. Cette interruption peut se faire en fixant un nombre prédéterminé d'itérations (l'interruption est considérée comme un filtre passe bas) ou en prévoyant une mesure statistique de la dynamique de l'objet au cours de la reconstruction permettant la détection de l'itération où la divergence survient durant l'exécution de nos algorithmes MAP (amplification du bruit 3D).

## 6.3 Conclusion

Ce manuscrit a permis d'aborder la problématique de la reconstruction des artères coronaires à partir d'une séquence d'angiographie RX, en se focalisant sur les procédures statistiques itératives de reconstruction à partir d'un faible nombre de projections.

En introduction, le premier chapitre a présenté le contexte médical associé à nos travaux. Il a mis l'accent sur la contribution d'une modélisation vasculaire 3D des coronaires pour le traitement et le diagnostic des maladies cardiovasculaires. Ensuite, le deuxième chapitre a décrit les défis de la reconstruction 3D des artères coronaires. Il a également établi un état de l'art des différentes méthodes de reconstruction de la littérature. En évaluant les avantages et les inconvénients de chaque procédure proposée, nous avons décidé d'adopter une reconstruction statistique itérative MAP dans le but d'obtenir des résultats précis et rapides à calculer.

En tenant compte de composantes principales d'une reconstruction statistique itérative, nous avons dédié un troisième chapitre pour discuter des aspects théoriques et techniques permettant la mise en œuvre d'une modélisation des opérateurs de projection et de rétroprojection, puis un quatrième chapitre pour établir les procédures d'inversion itérative basée sur l'optimisation de l'énergie a posteriori. Afin de pouvoir effectuer une évaluation qualitative et quantitative approfondie des méthodes proposées, nous avons réalisé une série de tests sur des données simulées en se basant sur quelques critères mesurant la qualité de reconstruction (le chapitre 5). Enfin, nous avons clôturé ce manuscrit en effectuant une synthèse des travaux réalisés, suivi d'une discussion des principaux résultats (chapitre 6). Cette discussion nous a permis d'évoquer les limites des différentes techniques proposées et d'envisager quelques pistes pour surmonter ces limites (une synthèse détaillée du manuscrit est établie dans la section 6.1).

Nous pouvons résumer nos conclusions générales à la lumière des résultats illustrés dans ce manuscrit par les points suivants :

- ♣ Une reconstruction itérative MAP avec un a priori de bas niveau de Gibbs peut pallier le manque de données de projections, en imposant une contrainte de lissage avec préservation de contours. Sa mise en œuvre nécessite la détermination appropriée d'une énergie d'attache aux données, une énergie a priori et un algorithme d'optimisation numérique.
- ♣ L'énergie de la vraisemblance en adoptant un modèle de bruit blanc gaussien est équivalente à une mesure de l'erreur quadratique entre les projections réelles et



celles générées à partir de modèles reconstruits. Le modèle de bruit adopté doit tenir compte des différents étapes de la chaîne d'acquisition et peut varier d'un appareil à un autre (chaînes de calibration).

- ♣ Une modélisation des opérateurs de projection et de rétroprojection est une étape importante pour définir l'expression de la vraisemblance, étant donnée qu'elle représente le seul lien entre l'espace de détection bidimensionnel et celui tridimensionnel de reconstruction. Un calcul précis de ces opérateurs nécessite un paramétrage de la géométrie d'acquisition et des aspects physiques liés principalement aux interactions des rayons X lors de l'acquisition (loi de Beer-Lambert - interaction rayonnement émis/tissus imagés, réponse impulsionnelle des détecteurs - interaction rayonnement transmis/détecteur).
- ♣ L'a priori de Gibbs est basé sur une interprétation partielle des objets à reconstruire, considéré alors comme un champ Markovien. En définissant un système de voisinage (dans notre cas, 26 voisins) adoptés, elle mesure un potentiel de l'objet qui est proportionnel à la dynamique des sites voisins. La minimisation de cette énergie au cours d'une reconstruction statistique itérative est équivalente à une diffusion anisotropique. En fonction des gradients numériques, des fonctions de pondération associées gèrent la diffusion appliquée à la reconstruction.
- ♣ Deux hyperparamètres sont liés à l'énergie de l'a priori, à savoir le poids  $\beta$  de l'a priori et le facteur d'échelle  $\rho$ . Le paramètre  $\beta$  est de nature globale permettant un équilibre énergétique global entre la vraisemblance et l'a priori, tandis que  $\rho$  est un hyperparamètre de nature locale lié à la dynamique des objets reconstruits. Une fois le modèle MAP établi, la détermination de ces deux hyperparamètres reste l'étape la plus importante pour envisager des algorithmes de reconstruction performants.
- ♣ Une méthode numérique d'optimisation permet la localisation exacte ou approchée de l'optimum de l'énergie MAP. Dans le cas de l'adoption des méthodes directes (non stochastiques), la forme analytique de l'expression *MAP* joue un rôle important pour le choix de l'algorithme. Un choix idéal consiste à trouver l'algorithme numérique localisant le plus rapidement possible l'optimum global MAP. Dans les procédures de reconstruction, nous distinguons deux types distincts d'algorithmes d'optimisation :
  - Des algorithmes généraux visant l'optimisation directe des fonctions objectif tel que la méthode de Newton Raphson (modifié dans notre cas).
  - Des algorithmes spécialisés visant l'optimisation indirecte des fonctions objectif à travers des procédures de substitution telle que la méthode d'ARTUR.

# Références bibliographiques

- [Andersen, 1989] Andersen, A. H. (1989). Algebraic reconstruction in ct from limited views. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 8(1):50–55.
- [Anscombe, 1948] Anscombe, F. J. (1948). The transformation of poisson, binomial and negative-binomial data. *Biometrika*, 35(3-4):246–254.
- [Avriel, 2012] Avriel, M. (2012). *Nonlinear programming: analysis and methods*. Courier Dover Publications.
- [Aykroyd and Zimeras, 1999] Aykroyd, R. and Zimeras, S. (1999). Inhomogeneous prior models for image reconstruction. *Journal of the American Statistical Association*, pages 934–946.
- [Barrett et al., 2005] Barrett, H. H., Myers, K. J., and Dhurjaty, S. (2005). Foundations of image science. *Journal of Electronic Imaging*, 14(2):29901.
- [Bartlett, 1947] Bartlett, M. S. (1947). The use of transformations. *Biometrics*.
- [Basu and De Man, 2006] Basu, S. and De Man, B. (2006). Branchless distance driven projection and backprojection. In *Electronic Imaging 2006*, pages 60650Y–60650Y. International Society for Optics and Photonics.
- [Beekman and Kamphuis, 2001] Beekman, F. J. and Kamphuis, C. (2001). Ordered subset reconstruction for x-ray ct. *Physics in medicine and biology*, 46(7):1835.
- [Beer, 1852] Beer, A. (1852). Bestimmung der absorption des rothen lichts in farbigen flüssigkeiten. *Ann. Phys. Chem*, 86(2):78–90.
- [Beister et al., 2012] Beister, M., Kolditz, D., and Kalender, W. A. (2012). Iterative reconstruction methods in x-ray ct. *Physica medica*, 28(2):94–108.
- [Bernardo et al., 1994] Bernardo, J., Smith, A., and Berliner, M. (1994). *Bayesian theory*, volume 62. Wiley New York.
- [Bertalmio et al., 2000] Bertalmio, M., Sapiro, G., Caselles, V., and Ballester, C. (2000). Image inpainting. In *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 417–424. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [Bertsekas et al., 1995] Bertsekas, D. P., Bertsekas, D. P., Bertsekas, D. P., and Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic programming and optimal control*, volume 1. Athena Scientific Belmont, MA.
- [Besag, 1986] Besag, J. (1986). On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of the Royal Statistical Society*, 48(3):259–302.

- [B.H.C, 2015] B.H.C (consulté le 25 Juillet 2015). Pontage-coronaire. <http://www.brusselsheartcenter.be/fr/chirurgie-cardiaque/interventions/pontage-coronaire.html>.
- [Bian et al., 2010] Bian, J., Siewerdsen, J. H., Han, X., Sidky, E. Y., Prince, J. L., Pelizzari, C. A., and Pan, X. (2010). Evaluation of sparse-view reconstruction from flat-panel-detector cone-beam ct. *Physics in medicine and biology*, 55(22):6575.
- [Bierlaire, 2006] Bierlaire, M. (2006). *Introduction à l'optimisation différentiable*. PPUR presses polytechniques.
- [Birkfellner et al., 2005] Birkfellner, W., Seemann, R., Figl, M., Hummel, J., Ede, C., Homolka, P., Yang, X., Niederer, P., and Bergmann, H. (2005). Wobbled splatting—a fast perspective volume rendering method for simulation of x-ray images from ct. *Physics in medicine and biology*, 50(9):N73.
- [Blake and Zisserman, 1987] Blake, A. and Zisserman, A. (1987). *Visual reconstruction*, volume 2. MIT press Cambridge.
- [Blanc-Féraud et al., 1995] Blanc-Féraud, L., Charbonnier, P., Aubert, G., and Barlaud, M. (1995). Nonlinear image processing: modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. In *Image Processing, 1995. Proceedings., International Conference on*, volume 1, pages 474–477. IEEE.
- [Bloch, 2010] Bloch, I. (2010). Reconstruction d'images de tomographie. *École Nationale Supérieure des Télécommunications, département Traitement du Signal et des Images*.
- [Blondel, 2004] Blondel, C. (2004). *Modélisation 3D et 3D+ t des artères coronaires à partir de séquences rotationnelles de projections rayons X*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- [Blondel et al., 2006] Blondel, C., Malandain, G., Vaillant, R., and Ayache, N. (2006). Reconstruction of coronary arteries from a single rotational x-ray projection sequence. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 25(5):653–663.
- [Blu and Unser, 1999] Blu, T. and Unser, M. (1999). Quantitative fourier analysis of approximation techniques. i. interpolators and projectors. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 47(10):2783–2795.
- [Boccardi et al., 1999] Boccardi, P., Bonetto, P., Calvini, P., and Formiconi, A. (1999). A simple model for the efficient correction of collimator blur in 3d spect imaging. *Inverse Problems*, 15(4):907.
- [Bouman and Sauer, 1993] Bouman, C. and Sauer, K. (1993). A generalized gaussian image model for edge-preserving map estimation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 2(3):296–310.
- [Bouman and Sauer, 1996] Bouman, C. and Sauer, K. (1996). A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 5(3):480–492.

- [Bousse et al., 2009] Bousse, A., Zhou, J., Yang, G., Bellanger, J.-J., and Toumoulin, C. (2009). Motion compensated tomography reconstruction of coronary arteries in rotational angiography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 56(4):1254–1257.
- [Buades et al., 2005] Buades, A., Coll, B., and Morel, J.-M. (2005). A non-local algorithm for image denoising. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on*, volume 2, pages 60–65. IEEE.
- [Bülöw et al., 2006] Bülöw, T., Lorenz, C., Wiemker, R., and Honko, J. (2006). Point based methods for automatic bronchial tree matching and labeling. In *Medical Imaging*, pages 614300–614300. International Society for Optics and Photonics.
- [Catté et al., 1992] Catté, F., Lions, P., Morel, J., and Coll, T. (1992). Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 182–193.
- [Chan and Shen, 2001] Chan, T. F. and Shen, J. (2001). Nontexture inpainting by curvature-driven diffusions. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 12(4):436–449.
- [Charbonnier, 1994] Charbonnier, P. (1994). *Reconstruction d'image: Régularisation avec prise en compte des discontinuités*. PhD thesis.
- [Charbonnier et al., 1994] Charbonnier, P., Blanc-Feraud, L., Aubert, G., and Barlaud, M. (1994). Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*, volume 2, pages 168–172. IEEE.
- [Charbonnier et al., 1997] Charbonnier, P., Blanc-Féraud, L., Aubert, G., and Barlaud, M. (1997). Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 6(2):298–311.
- [Charbonnier et al., 1993] Charbonnier, P., Blanc-Féraud, L., and Barlaud, M. (1993). An adaptive reconstruction method involving discontinuities. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1993. ICASSP-93., 1993 IEEE International Conference on*, volume 5, pages 491–494. IEEE.
- [Chen et al., 1996] Chen, S., Hoffmann, K., and Carroll, J. (1996). Computer assisted coronary intervention: 3d reconstruction and determination of optimal views. In *Computers in Cardiology, 1996*, pages 117–120. IEEE.
- [Chen and Schäfer, 2009] Chen, S. J. and Schäfer, D. (2009). Three-dimensional coronary visualization, part 1: modeling. *Cardiology clinics*, 27(3):433–452.
- [Chen and Carroll, 2003] Chen, S.-Y. and Carroll, J. D. (2003). Kinematic and deformation analysis of 4-d coronary arterial trees reconstructed from cine angiograms. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 22(6):710–721.
- [Chen and Carroll, 1998] Chen, S.-Y. J. and Carroll, J. D. (1998). Computer assisted coronary intervention by use of on-line 3d reconstruction and optimal view strategy. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI'98*, pages 377–385. Springer.

- [Cinquin, 1987] Cinquin, P. (1987). *Application des fonctions-spline au traitement d'images numériques*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I.
- [Cloquet et al., 2010] Cloquet, C., Sureau, F., Defrise, M., Van Simaey, G., Trotta, N., and Goldman, S. (2010). Non-gaussian space-variant resolution modelling for list-mode reconstruction. *Physics in medicine and biology*, 55(17):5045.
- [Cremers et al., 2008] Cremers, D., Schmidt, F. R., and Barthel, F. (2008). Shape priors in variational image segmentation: Convexity, lipschitz continuity and globally optimal solutions. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2008. CVPR 2008. IEEE Conference on*, pages 1–6. IEEE.
- [Curtiss, 1943] Curtiss, J. H. (1943). On transformations used in the analysis of variance. *The Annals of Mathematical Statistics*, 14(2):107–122.
- [De Man and Basu, 2002] De Man, B. and Basu, S. (2002). Distance-driven projection and backprojection. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2002 IEEE*, volume 3, pages 1477–1480. IEEE.
- [De Man and Basu, 2004] De Man, B. and Basu, S. (2004). Distance-driven projection and backprojection in three dimensions. *Physics in medicine and biology*, 49(11):2463.
- [De Man et al., 2005] De Man, B., Basu, S., Thibault, J.-B., Hsieh, J., Fessier, J., Bouman, C., and Sauer, K. (2005). A study of four minimization approaches for iterative reconstruction in x-ray ct. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2005 IEEE*, volume 5, pages 2708–2710. IEEE.
- [De Man et al., 1999] De Man, B., Nuyts, J., Dupont, P., Marchal, G., and Suetens, P. (1999). Reduction of metal streak artifacts in x-ray computed tomography using a transmission maximum a posteriori algorithm. In *Nuclear Science Symposium, 1999. Conference Record. 1999 IEEE*, volume 2, pages 850–854. IEEE.
- [De Man et al., 2001] De Man, B., Nuyts, J., Dupont, P., Marchal, G., and Suetens, P. (2001). An iterative maximum-likelihood polychromatic algorithm for ct. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 20(10):999–1008.
- [Defrise, 2007] Defrise, M. (2007). Reconstruction d'image en tomographie par émission. *Médecine nucléaire*, 31(4):142–152.
- [Delageniere-Guillot, 1993] Delageniere-Guillot, S. (1993). Utilisation d'un modèle d'objet en reconstruction d'image tridimensionnelle, application à l'imagerie médicale —thèse. *Institut National Polytechnique de Grenoble, France*.
- [Demirkaya, 2001] Demirkaya, O. (2001). Reduction of noise and image artifacts in computed tomography by nonlinear filtration of projection images. In *Medical Imaging 2001*, pages 917–923. International Society for Optics and Photonics.
- [Demoment, 1989] Demoment, G. (1989). Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structures and problems. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 37(12):2024–2036.
- [Dempster et al., 1977] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 1–38.

- [Deriche et al., 1995] Deriche, R., Faugeras, O., et al. (1995). Les edp en traitement des images et vision par ordinateur.
- [Derin and Elliott, 1987] Derin, H. and Elliott, H. (1987). Modeling and segmentation of noisy and textured images using gibbs random fields. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, (1):39–55.
- [Dreamstime, 2015] Dreamstime (consulté le 25 Juillet 2015). Images libres de droits : Angioplastie de stent. <http://fr.dreamstime.com/images-libres-de-droits-angioplastie-de-stent-image34202969>.
- [Dubois, 2004] Dubois, R. (2004). *Application des nouvelles méthodes d'apprentissage à la détection précoce d'anomalies en électrocardiographie*. PhD thesis, UNIVERSITÉ PARIS 6.
- [Dumay et al., 1994] Dumay, A. C., Reiber, J., and Gerbrands, J. (1994). Determination of optimal angiographic viewing angles: basic principles and evaluation study. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 13(1):13–24.
- [Elbakri and Fessler, 2002] Elbakri, I. A. and Fessler, J. A. (2002). Statistical image reconstruction for polyenergetic x-ray computed tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 21(2):89–99.
- [Engl et al., 1996] Engl, H. W., Hanke, M., and Neubauer, A. (1996). *Regularization of inverse problems*, volume 375. Springer.
- [Erdogan and Fessler, 1999] Erdogan, H. and Fessler, J. (1999). Ordered subsets algorithms for transmission tomography. *Physics in medicine and biology*, 44:2835.
- [Evans, 2007] Evans, J. (Octobre 2007). Les maladies coronaires et valvulaires revisitées, unité de recherche et développement pour les risques aggravés focus. <http://www.scor.com/images/stories/pdf/library/focus>.
- [Feldkamp et al., 1984] Feldkamp, L., Davis, L., and Kress, J. (1984). Practical cone-beam algorithm. *JOSA A*, 1(6):612–619.
- [Feng, 2002] Feng, H. (2002). *Curve evolution object-based techniques for image reconstruction and segmentation*. Imprimerie de Didot le jeune.
- [Fessler, 2006] Fessler, J. A. (2006). Iterative methods for image reconstruction. *ISBI Tutorial. Arlington Virginia: April*.
- [Fessler et al., 1997] Fessler, J. A., Fiacaro, E. P., Clinthorne, N. H., and Lange, K. (1997). Grouped-coordinate ascent algorithms for penalized-likelihood transmission image reconstruction. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 16(2):166–175.
- [Fessler and Hero, 1993] Fessler, J. A. and Hero, A. O. (1993). New complete-data spaces and faster algorithms for penalized-likelihood emission tomography. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, 1993., 1993 IEEE Conference Record.*, pages 1897–1901. IEEE.
- [Fessler and Hero, 1995] Fessler, J. A. and Hero, A. O. (1995). Penalized maximum-likelihood image reconstruction using space-alternating generalized em algorithms. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 4(10):1417–1429.

- [Frangi et al., 1998] Frangi, A. F., Niessen, W. J., Vincken, K. L., and Viergever, M. A. (1998). Multiscale vessel enhancement filtering. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI’98*, pages 130–137. Springer.
- [Galigekere et al., 2003] Galigekere, R. R., Wiesent, K., and Holdsworth, D. W. (2003). Cone-beam reprojection using projection-matrices. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 22(10):1202–1214.
- [Ganan and McClure, 1985] Ganan, S. and McClure, D. (1985). Bayesian image analysis: an application to single photon emission tomography. *Amer. Statist. Assoc*, pages 12–18.
- [Garnero et al., 1999] Garnero, L., Fonroget, J., Coutand, F., and Bailly, P. (1999). Problèmes inverses en tomographie d’émission—nouvelles tendances. In *Annales de Physique*, volume 24, pages 155–195. EDP Sciences.
- [Garreau et al., 1991] Garreau, M., Coatrieux, J. L., Collorec, R., and Chardenon, C. (1991). A knowledge-based approach for 3-d reconstruction and labeling of vascular networks from biplane angiographic projections. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 10(2):122–131.
- [Geiger and Giroso, 1991] Geiger, D. and Giroso, F. (1991). Parallel and deterministic algorithms from mrfs: Surface reconstruction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(5):401–412.
- [Geman and Reynolds, 1992] Geman, D. and Reynolds, G. (1992). Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 14(3):367–383.
- [Geman and Yang, 1995] Geman, D. and Yang, C. (1995). Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 4(7):932–946.
- [Geman and Geman, 1984] Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, (6):721–741.
- [Gilbert, 1972] Gilbert, P. (1972). Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *Journal of Theoretical Biology*, 36(1):105–117.
- [Gilboa et al., 2003] Gilboa, G., Sochen, N., and Zeevi, Y. Y. (2003). Texture preserving variational denoising using an adaptive fidelity term. In *Proc. VLsM*, volume 3.
- [Gordon, 1974] Gordon, R. (1974). A tutorial on art (algebraic reconstruction techniques). *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 21(3):78–93.
- [Gordon et al., 1970] Gordon, R., Bender, R., and Herman, G. T. (1970). Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of theoretical Biology*, 29(3):471–481.
- [Gorges, 2007] Gorges, S. (2007). *Vers un système de navigation 3D en neuroradiologie interventionnelle*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I.
- [Green, 1990] Green, P. (1990). Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified em algorithm. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 9(1):84–93.

- [Griinbaum, 1982] Griinbaum, F. A. (1982). The limited angle reconstruction problem. In *Proc. Symposia Applied Mathematics*, volume 27, page 5.
- [Groetsch, 1984] Groetsch, C. (1984). *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind*, volume 105. Pitman Boston.
- [Grossman and Baim, 2006] Grossman, W. and Baim, D. S. (2006). *Grossman's cardiac catheterization, angiography, and intervention*. Lippincott Williams & Wilkins.
- [Grünbaum, 1982] Grünbaum, F. A. (1982). The limited angle reconstruction problem in computer tomography. In *Proc. Symp. Appl. Math*, volume 27, pages 43–61.
- [Hadamard, 2003] Hadamard, J. (2003). *Lectures on Cauchy's problem: In linear partial differential equations*. DoverPublications. com.
- [Hamelin, 2009] Hamelin, B. (2009). *Accélération d'une approche régularisée de reconstruction en tomographie à rayons X avec réduction des artéfacts métalliques*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [Hanke, 1995] Hanke, M. (1995). *Conjugate gradient type methods for ill-posed problems*, volume 327. CRC Press.
- [Hansis et al., 2008a] Hansis, E., Schafer, D., Dossel, O., and Grass, M. (2008a). Evaluation of iterative sparse object reconstruction from few projections for 3-d rotational coronary angiography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 27(11):1548–1555.
- [Hansis et al., 2008b] Hansis, E., Schäfer, D., Dössel, O., and Grass, M. (2008b). Projection-based motion compensation for gated coronary artery reconstruction from rotational x-ray angiograms. *Physics in medicine and biology*, 53(14):3807.
- [Hanson, 1993] Hanson, K. M. (1993). Introduction to bayesian image analysis. In *Medical Imaging 1993*, pages 716–731. International Society for Optics and Photonics.
- [Hanson and Wecksung, 1983] Hanson, K. M. and Wecksung, G. W. (1983). Bayesian approach to limited-angle reconstruction in computed tomography. *JOSA*, 73(11):1501–1509.
- [Hebert and Leahy, 1989] Hebert, T. and Leahy, R. (1989). A generalized em algorithm for 3-d bayesian reconstruction from poisson data using gibbs priors. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 8(2):194–202.
- [Henri and Peters, 1996] Henri, C. and Peters, T. (1996). Three-dimensional reconstruction of vascular trees. theory and methodology. *Medical Physics*, 23:197.
- [Herman, 1995] Herman, G. (1995). Image reconstruction from projections. *Real-Time Imaging*, 1(1):3–18.
- [Herman, 1979] Herman, G. T. (1979). Image reconstruction from projections. *Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications*, 1.
- [Hermann, 1980] Hermann, G. T. (1980). Image reconstruction from projections. *The Fundamentals of Computerized Tomography*.



- [Herraiz et al., 2009] Herraiz, J., Espaa, S., García, S., Cabido, R., Montemayor, A., Desco, M., Vaquero, J. J., and Udías, J. M. (2009). Gpu acceleration of a fully 3d iterative reconstruction software for pet using cuda. In *Nuclear Science Symposium Conference Record (NSS/MIC), 2009 IEEE*, pages 4064–4067. IEEE.
- [Hestenes and Stiefel, 1952] Hestenes, M. R. and Stiefel, E. (1952). *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, volume 49. NBS.
- [Higdon et al., 1997] Higdon, D., Bowsher, J., Johnson, V., Turkington, T., Gilland, D., and Jaszczak, R. (1997). Fully bayesian estimation of gibbs hyperparameters for emission computed tomography data. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 16(5):516–526.
- [Hong et al., 2007] Hong, I., Chung, S., Kim, H., Kim, Y., Son, Y., and Cho, Z. (2007). Ultra fast symmetry and simd-based projection-backprojection (ssp) algorithm for 3-d pet image reconstruction. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 26(6):789–803.
- [Horbelt et al., 2002] Horbelt, S., Liebling, M., and Unser, M. (2002). Discretization of the radon transform and of its inverse by spline convolutions. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 21(4):363–376.
- [Hounsfield, 1973] Hounsfield, G. N. (1973). Computerized transverse axial scanning (tomography): Part 1. description of system. *British Journal of Radiology*, 46(552):1016–1022.
- [Hsieh et al., 2000] Hsieh, J., Molthen, R. C., Dawson, C. A., and Johnson, R. H. (2000). An iterative approach to the beam hardening correction in cone beam ct. *Medical physics*, 27:23.
- [Hsieh et al., 1996] Hsieh, Y.-L., Gullberg, G. T., Zeng, G. L., and Huesman, R. (1996). Image reconstruction using a generalized natural pixel basis. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 43(4):2306–2319.
- [Hu et al., 2012] Hu, Y., Jung, M., Oukili, A., Yang, G., Nunes, J.-C., Fehrenbach, J., Peyré, G., Bedossa, M., Luo, L., Toumoulin, C., et al. (2012). Sparse reconstruction from a limited projection number of the coronary artery tree in x-ray rotational imaging. In *Biomedical Imaging (ISBI), 2012 9th IEEE International Symposium on*, pages 804–807. IEEE.
- [Huber, 2011] Huber, P. J. (2011). *Robust statistics*. Springer.
- [Idier, 2001] Idier, J. (2001). Approche bayésienne pour les problèmes inverses, traité ic2. *Traitement du signal et de l'image, Lavoisier*.
- [INSERM, 2015] INSERM (consulté le 20 Juillet 2015). Athérosclérose. <http://www.inserm.fr/thematiques/physiopathologie-metabolisme-nutrition/dossiers-d-information/atherosclerose>.
- [Isola et al., 2008] Isola, A. A., Ziegler, A., Kohler, T., Niessen, W. J., and Grass, M. (2008). Efficient projection model for blobs in motion-compensated iterative cone-beam ct. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2008. NSS'08. IEEE*, pages 4130–4137. IEEE.

- [Jandt et al., 2009] Jandt, U., Schäfer, D., Grass, M., and Rasche, V. (2009). Automatic generation of time resolved motion vector fields of coronary arteries and 4d surface extraction using rotational x-ray angiography. *Physics in medicine and biology*, 54(1):45.
- [Joseph, 1982] Joseph, P. M. (1982). An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 1(3):192–196.
- [Kachelrieß et al., 2000] Kachelrieß, M., Ulzheimer, S., and Kalender, W. A. (2000). Ecg-correlated image reconstruction from subsecond multi-slice spiral ct scans of the heart. *Medical physics*, 27:1881.
- [Kaczmarz, 1937] Kaczmarz, S. (1937). Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen. *Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences et des Lettres*, 35:355–357.
- [Kaipio et al., 1999] Kaipio, J., Kolehmainen, V., Vauhkonen, M., and Somersalo, E. (1999). Inverse problems with structural prior information. *Inverse problems*, 15(3):713.
- [Kak and Slaney, 1988] Kak, A. C. and Slaney, M. (1988). *Principles of computerized tomographic imaging*, volume 33. Siam.
- [Kamphuis and Beekman, 1998] Kamphuis, C. and Beekman, F. J. (1998). Accelerated iterative transmission ct reconstruction using an ordered subsets convex algorithm. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 17(6):1101–1105.
- [Katsevich, 2002] Katsevich, A. (2002). Theoretically exact filtered backprojection-type inversion algorithm for spiral ct. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(6):2012–2026.
- [Kawata and Nalcioglu, 1985] Kawata, S. and Nalcioglu, O. (1985). Constrained iterative reconstruction by the conjugate gradient method. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 4(2):65–71.
- [Kazantsev, 1991] Kazantsev, I. (1991). Information content of projections. *Inverse problems*, 7(6):887.
- [Kim et al., 1982] Kim, H. C., Min, B. G., Lee, T. S., Lee, S. J., Lee, C. W., Park, J. H., and Han, M. C. (1982). Three-dimensional digital subtraction angiography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 1(2):152–158.
- [Kitamura et al., 1988] Kitamura, K., Tobis, J. M., and Sklansky, J. (1988). Estimating the 3d skeletons and transverse areas of coronary arteries from biplane angiograms. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 7(3):173–187.
- [Kohler et al., 2000] Kohler, T., Turbell, H., and Grass, M. (2000). Efficient forward projection through discrete data sets using tri-linear interpolation. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2000 IEEE*, volume 2, pages 15–113. IEEE.
- [Kolehmainen et al., 2007] Kolehmainen, V., Vanne, A., Siltanen, S., Järvenpää, S., Kaipio, J. P., Lassas, M., and Kalke, M. (2007). Bayesian inversion method for 3d dental x-ray imaging. *e & i Elektrotechnik und Informationstechnik*, 124(7-8):248–253.
- [Kotian et al., 1995] Kotian, F., Martin, G. W., Metz, S. W., Collins, A. K., and Wu, M. A. (1995). Backprojection for x-ray ct system. US Patent 5,473,654.

- [Lacroute and Levoy, 1994] Lacroute, P. and Levoy, M. (1994). Fast volume rendering using a shear-warp factorization of the viewing transformation. In *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 451–458. ACM.
- [Lalush and Tsui, 1992] Lalush, D. S. and Tsui, B. (1992). Simulation evaluation of gibbs prior distributions for use in maximum a posteriori spect reconstructions. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 11(2):267–275.
- [Lalush and Tsui, 1995] Lalush, D. S. and Tsui, B. M. (1995). A fast and stable maximum a posteriori conjugate gradient reconstruction algorithm. *Medical physics*, 22(8):1273–1284.
- [Lange, 1990] Lange, K. (1990). Convergence of em image reconstruction algorithms with gibbs smoothing. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 9(4):439–446.
- [Lange and Carson, 1984] Lange, K. and Carson, R. (1984). Em reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of computer assisted tomography*, 8(2):306.
- [Lasio et al., 2007] Lasio, G. M., Whiting, B. R., and Williamson, J. F. (2007). Statistical reconstruction for x-ray computed tomography using energy-integrating detectors. *Physics in medicine and biology*, 52(8):2247.
- [Leahy and Yan, 1991] Leahy, R. and Yan, X. (1991). Incorporation of anatomical mr data for improved functional imaging with pet. In *Information Processing in Medical Imaging*, pages 105–120. Springer.
- [Lee, 2000] Lee, S.-J. (2000). Accelerated coordinate descent methods for bayesian reconstruction using ordered subsets of projection data. In *International Symposium on Optical Science and Technology*, pages 170–181. International Society for Optics and Photonics.
- [Lehmann et al., 2006] Lehmann, G. C., Holdsworth, D. W., and Drangova, M. (2006). Angle-independent measure of motion for image-based gating in 3d coronary angiography. *Medical physics*, 33:1311.
- [Lei and Sewchand, 1992] Lei, T. and Sewchand, W. (1992). Statistical approach to x-ray ct imaging and its applications in image analysis. i. statistical analysis of x-ray ct imaging. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 11(1):53–61.
- [Levitan and Herman, 1987] Levitan, E. and Herman, G. T. (1987). A maximum a posteriori probability expectation maximization algorithm for image reconstruction in emission tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 6(3):185–192.
- [Lewitt, 1990] Lewitt, R. M. (1990). Multidimensional digital image representations using generalized kaiser-bessel window functions. *JOSA A*, 7(10):1834–1846.
- [Lewitt, 1992] Lewitt, R. M. (1992). Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. *Physics in Medicine and Biology*, 37(3):705.
- [Lewitt and Muehllehner, 1986] Lewitt, R. M. and Muehllehner, G. (1986). Accelerated iterative reconstruction for positron emission tomography based on the em algorithm for maximum likelihood estimation. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 5(1):16–22.

- [Li and Cohen, 2011] Li, J. and Cohen, L. D. (2011). Reconstruction of 3d tubular structures from cone-beam projections. In *Biomedical Imaging: From Nano to Macro, 2011 IEEE International Symposium on*, pages 1162–1166. IEEE.
- [Li et al., 2002] Li, M., Yang, H., and Kudo, H. (2002). An accurate iterative reconstruction algorithm for sparse objects: Application to 3d blood vessel reconstruction from a limited number of projections. *Physics in medicine and biology*, 47(15):2599.
- [Li et al., 2004] Li, T., Li, X., Wang, J., Wen, J., Lu, H., Hsieh, J., and Liang, Z. (2004). Nonlinear sinogram smoothing for low-dose x-ray ct. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 51(5):2505–2513.
- [Libby, 2001] Libby, P. (2001). Current concepts of the pathogenesis of the acute coronary syndromes. *Circulation*, 104(3):365–372.
- [Long, 2011] Long, Y. (2011). *Statistical Image Reconstruction and Motion Estimation for Image-Guided Radiotherapy*. PhD thesis, The University of Michigan.
- [Long et al., 2009] Long, Y., Fessler, J., and Balter, J. (2009). A 3d forward and back-projection method for x-ray ct using separable footprint. *Arbor*, 1001:48109.
- [Long et al., 2010] Long, Y., Fessler, J. A., and Balter, J. M. (2010). 3d forward and back-projection for x-ray ct using separable footprints. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 29(11):1839–1850.
- [Lu et al., 2001a] Lu, H., Chen, D., Li, L., Han, G., and Liang, Z. (2001a). Combined transformation of ordering spect sinograms for signal extraction from measurements with poisson noise. In *Medical Imaging 2001*, pages 943–951. International Society for Optics and Photonics.
- [Lu et al., 2001b] Lu, H., Hsiao, I.-T., Li, X., and Liang, Z. (2001b). Noise properties of low-dose ct projections and noise treatment by scale transformations. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2001 IEEE*, volume 3, pages 1662–1666. IEEE.
- [Lu et al., 2002] Lu, H., Li, X., Hsiao, T., and Liang, Z. (2002). Analytical noise treatment for low-dose ct projection data by penalized weighted least-square smoothing in the kl domain. In *Medical Imaging 2002*, pages 146–152. International Society for Optics and Photonics.
- [Lu et al., 2003] Lu, H., Li, X., Li, L., Chen, D., Xing, Y., Hsieh, J., and Liang, Z. (2003). Adaptive noise reduction toward low-dose computed tomography. In *Medical Imaging 2003*, pages 759–766. International Society for Optics and Photonics.
- [Macovski, 1983] Macovski, A. (1983). *Medical imaging systems*, volume 20. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- [Man and Basu, 2004] Man, B. and Basu, S. (2004). Distance-driven projection and back-projection in three dimensions. *Physics in medicine and biology*, 49:2463.
- [Manglos et al., 1995] Manglos, S., Gagne, G., Krol, A., Thomas, F., and Narayanaswamy, R. (1995). Transmission maximum-likelihood reconstruction with ordered subsets for cone beam ct. *Physics in Medicine and Biology*, 40(7):1225.

- [Marroquin et al., 1987] Marroquin, J., Mitter, S., and Poggio, T. (1987). Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397):76–89.
- [Marroquin, 1984] Marroquin, J. L. (1984). Surface reconstruction preserving discontinuities.
- [Matej and Lewitt, 1996] Matej, S. and Lewitt, R. (1996). Practical considerations for 3-d image reconstruction using spherically symmetric volume elements. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 15(1):68–78.
- [MEDIPOL, 2015] MEDIPOL (consulté le 22 Juillet 2015). Technology. <http://www.internationalmedipol.com/Technology>.
- [Mohammad-Djafari et al., 1988] Mohammad-Djafari, A. et al. (1988). 3-utilisation de l’entropie dans les problèmes de restauration et de reconstruction d’images.
- [Momey, 2013] Momey, F. (2013). *Reconstruction en tomographie dynamique par approche inverse sans compensation de mouvement*. PhD thesis, Saint Etienne.
- [Mourgues et al., 2001] Mourgues, F., Devernay, F., Malandain, G., Coste-Maniere, E., et al. (2001). Modélisation 3d+ t de l’arbre coronaire à partir de séquences angiographiques. In *Journées ORASIS-2001*.
- [Movassaghi et al., 2003] Movassaghi, B., Rasche, V., Florent, R., Viergever, M. A., and Niessen, W. (2003). 3d coronary reconstruction from calibrated motion-compensated 2d projections. In *International Congress Series*, volume 1256, pages 1079–1084. Elsevier.
- [Movassaghi et al., 2004] Movassaghi, B., Rasche, V., Viergever, M. A., and Niessen, W. J. (2004). 3d coronary reconstruction from calibrated motion-compensated 2d projections based on semi-automated feature point detection. In *Medical Imaging 2004*, pages 1943–1950. International Society for Optics and Photonics.
- [Mueller et al., 1999] Mueller, K., Yagel, R., and Wheller, J. J. (1999). Fast implementations of algebraic methods for three-dimensional reconstruction from cone-beam data. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 18(6):538–548.
- [Mumcuoglu et al., 1994] Mumcuoglu, E., Leahy, R., Cherry, S., and Zhou, Z. (1994). Fast gradient-based methods for bayesian reconstruction of transmission and emission pet images. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 13(4):687–701.
- [Nelder and Mead, 1965] Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer journal*, 7(4):308–313.
- [Ng et al., 2012] Ng, S. K., Krishnan, T., and McLachlan, G. J. (2012). The em algorithm. In *Handbook of computational statistics*, pages 139–172. Springer.
- [Nguyen and Sklansky, 1994] Nguyen, T. V. and Sklansky, J. (1994). Reconstructing the 3-d medial axes of coronary arteries in single-view cineangiograms. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 13(1):61–73.

- [Nikolova et al., 1994] Nikolova, M., Mohammad-Djafari, A., and Idier, J. (1994). Inversion of large-support ill-conditioned linear operators using a markov model with a line process. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1994. ICASSP-94., 1994 IEEE International Conference on*, pages V–357. IEEE.
- [Noo et al., 2002] Noo, F., Defrise, M., Clackdoyle, R., and Kudo, H. (2002). Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan. *Physics in Medicine and Biology*, 47(14):2525.
- [Nordström, 1990] Nordström, N. K. (1990). Variational edge detection.
- [Oukili et al., 2013] Oukili, A., Nunes, J.-C., Chen, Y., Luo, L., and Toumoulin, C. (2013). Object-based 3d binary reconstruction from sparse projections in cone beam ct: Comparison of three projection operators. In *Biomedical Imaging (ISBI), 2013 IEEE 10th International Symposium on*, pages 1276–1279. IEEE.
- [Papoulis and Pillai, 2002] Papoulis, A. and Pillai, S. U. (2002). *Probability, random variables, and stochastic processes*. Tata McGraw-Hill Education.
- [Pedregal, 2004] Pedregal, P. (2004). *Introduction to optimization*. Springer.
- [Pélegrini et al., 1998] Pélegrini, M., Benali, H., Buvat, I., El Fakhri, G., and Di Paola, R. (1998). Two-dimensional statistical model for regularized backprojection in spect. *Physics in medicine and biology*, 43(2):421.
- [Pellot et al., 1994] Pellot, C., Herment, A., Sigelle, M., Horain, P., Maître, H., and Peronneau, P. (1994). A 3d reconstruction of vascular structures from two x-rays angiograms using an adapted simulated annealing algorithm. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, (MI-6):48–60.
- [Pérez et al., 1991] Pérez, P., Heitz, F., et al. (1991). Une approche multiéchelle à l’analyse d’images par champs markoviens.
- [Perona and Malik, 1990] Perona, P. and Malik, J. (1990). Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 12(7):629–639.
- [Perona et al., 1994] Perona, P., Shiota, T., and Malik, J. (1994). Anisotropic diffusion. *Geometry-driven diffusion in computer vision*, 1:72–92.
- [Perrenot, 2008] Perrenot, B. (2008). *Reconstruction tomographique 3D de stents coronaires avec prise en compte du mouvement en angiographie rotationnelle cardiaque par rayons X*. PhD thesis.
- [Peters, 1981] Peters, T. (1981). Algorithms for fast back-and re-projection in computed tomography. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 28(4):3641–3647.
- [Pisupati et al., 1996] Pisupati, C., Wolff, L., Mitzner, W., and Zerhouni, E. (1996). Geometric tree matching with applications to 3d lung structures. In *Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry*, pages 419–420. ACM.
- [Radon, 1917] Radon, J. (1917). On determination of functions by their integral values along certain multiplicities. *Ber. der Sachische Akademie der Wissenschaften Leipzig, (Germany)*, 69:262–277.

- [Raman et al., 2002] Raman, S., Magorien, R., Vaillant, R., Payne, P., Benali, K., and Bush, C. (2002). Rotational cardiovascular x-ray imaging for left coronary artery angiography using a digital flat-panel cardiac imaging system. In *American Journal of Cardiology*, volume 90, pages 129H–129H. EXCERPTA MEDICA INC 650 AVENUE OF THE AMERICAS, NEW YORK, NY 10011 USA.
- [Rangayyan et al., 1985] Rangayyan, R., Dhawan, A. P., and Gordon, R. (1985). Algorithms for limited-view computed tomography: an annotated bibliography and a challenge. *Applied optics*, 24(23):4000–4012.
- [Rapisarda et al., 2010] Rapisarda, E., Bettinardi, V., Thielemans, K., and Gilardi, M. (2010). Image-based point spread function implementation in a fully 3d osem reconstruction algorithm for pet. *Physics in medicine and biology*, 55(14):4131.
- [Rasche et al., 2006a] Rasche, V., Movassaghi, B., Grass, M., Schäfer, D., and Buecker, A. (2006a). Automatic selection of the optimal cardiac phase for gated three-dimensional coronary x-ray angiography. *Academic radiology*, 13(5):630–640.
- [Rasche et al., 2006b] Rasche, V., Movassaghi, B., Grass, M., Schäfer, D., Kühl, H. P., Günther, R. W., and Buecker, A. (2006b). Three-dimensional x-ray coronary angiography in the porcine model: a feasibility study. *Academic radiology*, 13(5):644–651.
- [Recur, 2010] Recur, B. (2010). *Qualité et Précision en Reconstruction Tomographique: Algorithmes et Applications*. PhD thesis, Ph. D. thesis, LaBRI, Bordeaux 1 University.
- [Riddell and Trouset, 2006] Riddell, C. and Trouset, Y. (2006). Rectification for cone-beam projection and backprojection. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 25(7):950–962.
- [Riklin-Raviv et al., 2004] Riklin-Raviv, T., Kiryati, N., and Sochen, N. (2004). Unlevel-sets: geometry and prior-based segmentation. pages 50–61.
- [Rohkohl et al., 2009] Rohkohl, C., Lauritsch, G., Prümmer, M., and Hornegger, J. (2009). Interventional 4-d motion estimation and reconstruction of cardiac vasculature without motion periodicity assumption. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI 2009*, pages 132–139. Springer.
- [Rondepierre and Weiss, 2013] Rondepierre, A. and Weiss, P. (2012-2013). Partie i : Méthode standard en optimisation non linéaire déterministe, cours 4 eme année.
- [Rossi et al., 1989] Rossi, D. J., Willsky, A. S., and Spielman, D. M. (1989). Object shape estimation from tomographic measurements—a performance analysis. *Signal processing*, 18(1):63–87.
- [Rousson and Paragios, 2002] Rousson, M. and Paragios, N. (2002). Shape priors for level set representations. pages 78–92.
- [R.T.C, 2015] R.T.C (consulté le 22 Juillet 2015). Universal angiography. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/fr/>.
- [Ruan et al., 1994] Ruan, S., Bruno, A., and Coatrieux, J.-L. (1994). Three-dimensional motion and reconstruction of coronary arteries from biplane cineangiography. *Image and Vision Computing*, 12(10):683–689.

- [Rudin et al., 1992] Rudin, L., Osher, S., and Fatemi, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1-4):259–268.
- [Sandor et al., 1987] Sandor, T., D’Adamo, A., Hanlon, W. B., and Spears, J. R. (1987). High precision quantitative angiography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 6(3):258–265.
- [Sarry and Boire, 2001] Sarry, L. and Boire, J.-Y. (2001). Three-dimensional tracking of coronary arteries from biplane angiographic sequences using parametrically deformable models. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 20(12):1341–1351.
- [Sauer et al., 1995] Sauer, K., Borman, S., and Bouman, C. (1995). Parallel computation of sequential pixel updates in statistical tomographic reconstruction. In *Image Processing, 1995. Proceedings., International Conference on*, volume 2, pages 93–96. IEEE.
- [Sauer and Bouman, 1993] Sauer, K. and Bouman, C. (1993). A local update strategy for iterative reconstruction from projections. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(2):534–548.
- [Schafer et al., 2006] Schafer, D., Borgert, J., Rasche, V., and Grass, M. (2006). Motion-compensated and gated cone beam filtered back-projection for 3-d rotational x-ray angiography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 25(7):898–906.
- [Schafer D, 2006] Schafer D, Borgert J, R. V. e. a. (2006). Motion compensated and gated cone beam filtered back projection for 3d rotational angiography. *IEEE Trans Med Imaging*, 25(7):898–906.
- [Scheer et al., 2002] Scheer, B. V., Perel, A., and Pfeiffer, U. J. (2002). Clinical review: complications and risk factors of peripheral arterial catheters used for haemodynamic monitoring in anaesthesia and intensive care medicine. *Critical Care*, 6(3):199.
- [Scheins et al., 2006] Scheins, J. J., Boschen, F., and Herzog, H. (2006). Analytical calculation of volumes-of-intersection for iterative, fully 3-d pet reconstruction. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 25(10):1363–1369.
- [Schoonenberg et al., 2009] Schoonenberg, G., Neubauer, A., and Grass, M. (2009). Three-dimensional coronary visualization, part 2: 3d reconstruction. *Cardiology clinics*, 27(3):453–465.
- [Schretter, 2006] Schretter, C. (2006). A fast tube of response ray-tracer. *Medical physics*, 33:4744.
- [Schrijver, 1998] Schrijver, A. (1998). *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons.
- [Servieres et al., 2005] Servieres, M., Idier, J., Normand, N., and Guedon, J.-P. (2005). Conjugate gradient mojette reconstruction. In *Medical Imaging*, pages 2067–2074. International Society for Optics and Photonics.
- [Shannon, 1949] Shannon, C. E. (1949). Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1):10–21.



- [Shechter et al., 2003] Shechter, G., Devernay, F., Coste-Manière, E., Quyyumi, A., and McVeigh, E. R. (2003). Three-dimensional motion tracking of coronary arteries in biplane cineangiograms. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 22(4):493–503.
- [Shepp and Vardi, 1982] Shepp, L. A. and Vardi, Y. (1982). Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 1(2):113–122.
- [Sherouse et al., 1990] Sherouse, G. W., Novins, K., and Chaney, E. L. (1990). Computation of digitally reconstructed radiographs for use in radiotherapy treatment design. *International Journal of Radiation Oncology\* Biology\* Physics*, 18(3):651–658.
- [Siddon, 1985] Siddon, R. (1985). Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional ct array. *Medical Physics*, 12:252.
- [SIEMENS, 2015] SIEMENS (consulté le 22 Juillet 2015). Artis interventional angiography systems. <http://www.healthcare.siemens.com/angio/artis-interventional-angiography-systems>.
- [Sigelle and Tupin, 1999a] Sigelle, M. and Tupin, F. (1999a). Champs de markov en traitement d’image. *Support de cours du module C3M, ENST Paris*.
- [Sigelle and Tupin, 1999b] Sigelle, M. and Tupin, F. (1999b). Champs de markov en traitement d’image. *Support de cours du module C3M, ENST Paris*.
- [Siltanen et al., 2003] Siltanen, S., Kolehmainen, V., Järvenpää, S., Kaipio, J., Koistinen, P., Lassas, M., Pirttilä, J., and Somersalo, E. (2003). Statistical inversion for medical x-ray tomography with few radiographs: I. general theory. *Physics in medicine and biology*, 48(10):1437.
- [Simonoff, 1998] Simonoff, J. S. (1998). Penalized maximum likelihood. *Encyclopedia of Biostatistics*.
- [Smith et al., 1978] Smith, K. T., Solmon, D. C., and Wagner, S. L. (1978). Addendum to: “practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs” (bull. amer. math. soc. 83 (1977), no. 6, 1227–1270). *Bull. Amer. Math. Soc*, 84:691.
- [Snyder and Miller, 1991] Snyder, D. and Miller, M. (1991). Random point processes in time and space 2e springer-verlag. *New York, NY*.
- [Solomon, 1998] Solomon, R. (1998). Radiocontrast-induced nephropathy. In *Seminars in nephrology*, volume 18, pages 551–557.
- [Tarel and Hautiere, 2009] Tarel, J.-P. and Hautiere, N. (2009). Fast visibility restoration from a single color or gray level image. In *Computer Vision, 2009 IEEE 12th International Conference on*, pages 2201–2208. IEEE.
- [Thévenaz et al., 2000a] Thévenaz, P., Blu, T., and Unser, M. (2000a). Image interpolation and resampling.
- [Thévenaz et al., 2000b] Thévenaz, P., Blu, T., and Unser, M. (2000b). Interpolation revisited [medical images application]. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 19(7):739–758.

- [Tikhonov, 1963] Tikhonov, A. N. (1963). Regularization of incorrectly posed problems. In *Soviet Math. Dokl*, volume 4, pages 1624–1627.
- [Tommasini et al., 1998] Tommasini, G., Camerini, A., Gatti, A., Derchi, G., Bruzzone, A., and Vecchio, C. (1998). Panoramic coronary angiography. *Journal of the American College of Cardiology*, 31(4):871–877.
- [Toumoulin, 2009] Toumoulin, C. (2009). *Extraction de formes, Suivi d’objets déformables et Reconstruction en Imagerie Médicale: Application à l’Angiographie RX et au scanner X multibarette*. PhD thesis, Université Rennes 1.
- [Tsong-Li Wang et al., 1994] Tsong-Li Wang, J., Zhang, K., Jeong, K., and Shasha, D. (1994). A system for approximate tree matching. *Knowledge and Data Engineering, IEEE Transactions on*, 6(4):559–571.
- [Turbell, 2001] Turbell, H. (2001). *Cone-beam reconstruction using filtered backprojection*. PhD thesis, Linköping.
- [Vembar et al., 2003] Vembar, M., Garcia, M., Heuscher, D., Haberl, R., Matthews, D., Böhme, G., and Greenberg, N. (2003). A dynamic approach to identifying desired physiological phases for cardiac imaging using multislice spiral ct. *Medical physics*, 30:1683.
- [Venaille et al., 1992] Venaille, C., Mishler, D., and Coatrieux, J. (1992). Un algorithme peu contraint d’appariement de primitives courbes par stereovision trinoculaire. *Rev. Technique Thomson*, (24):1071–1099.
- [Viguié, 2008] Viguié, G. (2008). *Apport de la programmation graphique pour la reconstruction rapide d’images 3D en tomographie par émission monophotonique*. PhD thesis, Toulouse 3.
- [Wahle et al., 1996] Wahle, A., Oswald, H., and Fleck, E. (1996). 3d heart-vessel reconstruction from biplane angiograms. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 16(1):65–73.
- [Wang et al., 2008] Wang, J., Lu, H., Liang, Z., Eremina, D., Zhang, G., Wang, S., Chen, J., and Manzione, J. (2008). An experimental study on the noise properties of x-ray ct sinogram data in radon space. *Physics in medicine and biology*, 53(12):3327.
- [Wang and Bovik, 2002] Wang, Z. and Bovik, A. C. (2002). A universal image quality index. *Signal Processing Letters, IEEE*, 9(3):81–84.
- [Weese et al., 1999] Weese, J., Goecke, R., Penney, G. P., Desmedt, P., Buzug, T. M., and Schumann, H. (1999). Fast voxel-based 2d/3d registration algorithm using a volume rendering method based on the shear-warp factorization. In *Medical Imaging’99*, pages 802–810. International Society for Optics and Photonics.
- [Weickert, 1998] Weickert, J. (1998). *Anisotropic diffusion in image processing*, volume 1. Teubner Stuttgart.
- [Whiting et al., 2006] Whiting, B. R., Massoumzadeh, P., Earl, O. A., O’Sullivan, J. A., Snyder, D. L., and Williamson, J. F. (2006). Properties of preprocessed sinogram data in x-ray computed tomography. *Medical physics*, 33(9):3290–3303.

- [WHO, 2015] WHO (Aide-mémoire Janvier 2015, consulté le 20 Juillet 2015). Maladies cardiovasculaires. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/fr/>.
- [Windyga et al., 1998] Windyga, P., Garreau, M., and Coatrieux, J.-L. (1998). Estimation of search-space in 3d coronary artery reconstruction using angiographic biplane images. *Pattern recognition letters*, 19(14):1325–1330.
- [Wright and Nocedal, 1999] Wright, S. and Nocedal, J. (1999). *Numerical optimization*, volume 2. Springer New York.
- [Xie, 2012] Xie, L. (2012). *Reconstruction 3-D des artères coronaires en imagerie rotationnelle RX*. PhD thesis, Rennes 1.
- [Xu and Mueller, 2006] Xu, F. and Mueller, K. (2006). A comparative study of popular interpolation and integration methods for use in computed tomography. In *Biomedical Imaging: Nano to Macro, 2006. 3rd IEEE International Symposium on*, pages 1252–1255. IEEE.
- [Xu and Sun, 2010] Xu, Z. and Sun, J. (2010). Image inpainting by patch propagation using patch sparsity. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 19(5):1153–1165.
- [Yang et al., 2006] Yang, G., Bousse, A., Toumoulin, C., and Shu, H. (2006). A multiscale tracking algorithm for the coronary extraction in msct angiography. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2006. EMBS'06. 28th Annual International Conference of the IEEE*, pages 3066–3069. IEEE.
- [Yang et al., 2007] Yang, G., Bousse, A., Toumoulin, C., and Shu, H. (2007). Simulation environment for the evaluation of 3d coronary tree reconstruction algorithms in rotational angiography. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2007. EMBS 2007. 29th Annual International Conference of the IEEE*, pages 4484–4487. IEEE.
- [Yang et al., 2009] Yang, J., Wang, Y., Liu, Y., Tang, S., and Chen, W. (2009). Novel approach for 3-d reconstruction of coronary arteries from two uncalibrated angiographic images. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 18(7):1563–1572.
- [Ye et al., 2008] Ye, Y., Yu, H., and Wang, G. (2008). Exact interior reconstruction with cone-beam ct. *International Journal of Biomedical Imaging*, 2007.
- [Yu et al., 2011] Yu, Z., Thibault, J.-B., Bouman, C. A., Sauer, K. D., and Hsieh, J. (2011). Fast model-based x-ray ct reconstruction using spatially nonhomogeneous icd optimization. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 20(1):161–175.
- [Zeng and Gullberg, 2003] Zeng, G. and Gullberg, G. (2003). A ray-driven backprojector for backprojection filtering and filtered backprojection algorithms. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, 1993., 1993 IEEE Conference Record.*, pages 1199–1201. IEEE.
- [Zeng and Gullberg, 2000] Zeng, G. L. and Gullberg, G. T. (2000). Unmatched projector/backprojector pairs in an iterative reconstruction algorithm. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 19(5):548–555.
- [Zhang et al., 2006] Zhang, Y., Chan, H.-P., Sahiner, B., Wei, J., Goodsitt, M. M., Hadjiiski, L. M., Ge, J., and Zhou, C. (2006). A comparative study of limited-angle cone-beam reconstruction methods for breast tomosynthesis. *Medical physics*, 33:3781.

- [Zhang et al., 2008] Zhang, Y., Matuszewski, B. J., Shark, L., and Moore, C. J. (2008). Medical image segmentation using new hybrid level-set method. In *BioMedical Visualization, 2008. MEDIVIS'08. Fifth International Conference*, pages 71–76. IEEE.
- [Zheng et al., 2010] Zheng, S., Meiyang, T., and Jian, S. (2010). Sequential reconstruction of vessel skeletons from x-ray coronary angiographic sequences. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 34(5):333–345.
- [Zhou et al., 2008] Zhou, J., Bousse, A., Yang, G., Bellanger, J.-J., Luo, L., Toumoulin, C., and Coatrieux, J.-L. (2008). A blob-based tomographic reconstruction of 3d coronary trees from rotational x-ray angiography. In *Medical Imaging*, pages 69132N–69132N. International Society for Optics and Photonics.
- [Zhou and Qi, 2011] Zhou, J. and Qi, J. (2011). Fast and efficient fully 3d pet image reconstruction using sparse system matrix factorization with gpu acceleration. *Physics in medicine and biology*, 56(20):6739.
- [Zhou et al., 1997] Zhou, Z., Leahy, R. M., and Qi, J. (1997). Approximate maximum likelihood hyperparameter estimation for gibbs priors. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 6(6):844–861.
- [Zhuang et al., 1994] Zhuang, W., Gopal, S., and Hebert, T. (1994). Numerical evaluation of methods for computing tomographic projections. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 41(4):1660–1665.
- [Ziegler et al., 2005] Ziegler, A., Köhler, T., Nielsen, T., and Proksa, R. (2005). Iterative cone-beam ct image reconstruction with spherically symmetric basis functions. In *International meeting on fully three-dimensional image reconstruction in radiology and nuclear medicine*, pages 80–83.
- [Ziegler et al., 2006] Ziegler, A., Köhler, T., Nielsen, T., and Proksa, R. (2006). Efficient projection and backprojection scheme for spherically symmetric basis functions in divergent beam geometry. *Medical physics*, 33:4653.
- [Zifan et al., 2008] Zifan, A., Liatsis, P., Kantartzis, P., Gavaises, M., Karcianas, N., and Katritsis, D. (2008). Automatic 3-d reconstruction of coronary artery centerlines from monoplane x-ray angiogram images. *International Journal of Biological Sciences*, 1:44–49.
- [Zwicker et al., 2002] Zwicker, M., Pfister, H., Van Baar, J., and Gross, M. (2002). Ewa splatting. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 8(3):223–238.

## Liste de publications

### Revue scientifique :

Y. Li, Y. Chen, Y. Hu, A. Oukili, L. Luo, W. Chen, and C. Toumoulin, « Strategy of computed tomography sinogram inpainting based on sinusoid-like curve decomposition and eigenvector-guided interpolation », *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 29, Issue 1, pp. 153-163 (2012).

### Conférences :

A. Oukili, J.-C. Nunes, Y. Chen, L. Luo, C. Toumoulin, « Object-based 3D reconstruction from sparse projections in cone beam computed tomography: comparison of three projection operators », *ISBI 2013*.

Y. Hu, M. Jung, A. Oukili, G. Yang, J.-C. Nunes, J. Fehrenbach, G. Peyré, M. Bedossa, L. Luo, C. Toumoulin, L. D. Cohen, « Sparse reconstruction from a limited projection number of the coronary artery tree in X-ray rotational imaging », *ISBI 2012*: 804-807.

A. Oukili, Y. Hu, J.-C. Nunes, M. Bedossa, L. Luo, C. Toumoulin, « Reconstruction 3D des artères coronaires en imagerie rotationnelle RX », *Colloque R.I.T.S.*, CHU Rennes, 6-8 Avril 2011.



**Résumé :** La problématique de cette thèse concerne la reconstruction statistique itérative 3D de l'arbre coronaire, à partir d'un nombre très réduit d'angiogrammes coronariens (5 images). Pendant un examen rotationnel d'angiographie RX, seules les projections correspondant à la même phase cardiaque sont sélectionnées afin de vérifier la condition de non variabilité spatio-temporelle de l'objet à reconstruire (reconstruction statique). Le nombre restreint de projections complique cette reconstruction, considérée alors comme un problème inverse mal posé. La résolution d'un tel problème nécessite une procédure de régularisation. Pour ce faire, nous avons opté pour le formalisme bayésien en considérant la reconstruction comme le champ aléatoire maximisant la probabilité à postériori (MAP), composée d'un terme quadratique de vraisemblance (attache aux données) et un a priori de Gibbs (à priori markovien basé sur une interprétation partielle de l'objet à reconstruire). La maximisation MAP adoptant un algorithme d'optimisation numérique nous a permis d'introduire une contrainte de lissage avec préservation de contours des reconstructions en choisissant adéquatement les fonctions de potentiel associées à l'énergie à priori. Dans ce manuscrit, nous avons discuté en détail des trois principales composantes d'une reconstruction statistique MAP performante, à savoir (1) l'élaboration d'un modèle physique précis du processus d'acquisition, (2) l'adoption d'un modèle à priori approprié et (3) la définition d'un algorithme d'optimisation itératif efficace. Cette discussion nous a conduit à proposer deux algorithmes itératifs MAP, MAP-MNR et MAP-ARTUR-GC, que nous avons testés et évalués sur des données simulées réalistes (données patient issues d'une acquisition CT- 64 multi-barrettes).

**Mots clefs :** Problème inverse mal posé, Angiographie rotationnelle RX, Reconstruction statistique 3D, MAP, modélisation 3D des artères coronaires, régularisation avec préservation des contours, A priori de Gibbs, Fonction de potentiel.

**Abstract :** The problematic of this thesis concerns the statistical iterative 3D reconstruction of coronary tree from a very few number of coronary angiograms (5 images). During RX rotational angiographic exam, only projections corresponding to the same cardiac phase are selected in order to check the condition of space and time non-variability of the object to reconstruct (static reconstruction). The limited number of projections complicates the reconstruction, considered then as an illness inverse problem. The answer to a similar problem needs a regularization process. To do so, we choose baysian formalism considering the reconstruction as a random field maximizing the posterior probability (MAP), composed by quadratic likelihood terms (attached to data) and Gibbs prior (prior markovian based on a partial interpretation of the object to reconstruct). The MAP maximizing allowed us using a numerical optimization algorithm, to introduce a smoothing constraint and preserve the edges on the reconstruction while choosing wisely the potential functions associated to prior energy. In this paper, we have discussed in details the three components of efficient statistical reconstruction MAP, which are : 1- the construction of precise physical model of acquisition process; 2- the selection of an appropriate prior model; and 3- the definition of an efficient iterative optimization algorithm. This discussion lead us to propose two iterative algorithms MAP, MAP-MNR and MAP-ARTUR-GC, which we have tested and evaluated on realistic simulated data (Patient data from 64-slice CT).

**Keywords :** Illness inverse problem, RX rotational angiographic exam, statistical 3D reconstruction, 3D coronary vessels model, Regularization with edges preservation, Gibbs priori, potential function.