



Une modélisation du contact par l'approche mortier : application à la mise en forme

Achraf Kallel

► **To cite this version:**

Achraf Kallel. Une modélisation du contact par l'approche mortier : application à la mise en forme. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 2014. Français. <NNT : 2014COMP2173>. <tel-01322260>

HAL Id: tel-01322260

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01322260>

Submitted on 26 May 2016

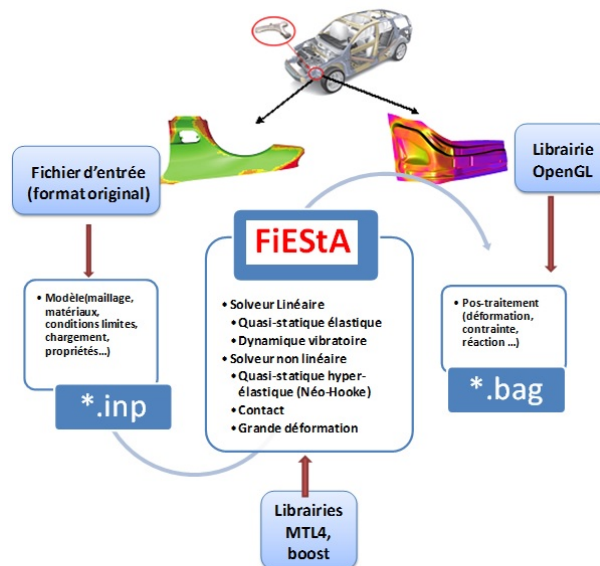
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par Achraf KALLEL

*Une modélisation du contact par l'approche mortier :
application à la mise en forme*

Thèse présentée
pour l'obtention du grade
de Docteur de l'UTC



Soutenue le 10 décembre 2014
Spécialité : Mécanique Avancée

D2173

Université de Technologie de Compiègne

Mémoire de Thèse

**Une modélisation du contact par l'approche mortier –
application à la mise en forme**

Achraf KALLEL

Directeurs de Thèse : Salim BOUABDALLAH

Jean-Marc ROELANDT

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements à Jean-Marc ROELANDT, mon directeur de thèse, avec qui j'ai eu un réel plaisir à travailler. Je remercie également mon co-encadrant Salim BOUABDALLAH pour son soutien permanent. Je le remercie particulièrement pour sa disponibilité, la pertinence de ses conseils et la qualité de son encadrement.

Ce travail a été mené, à la fois, au laboratoire de Laboratoire Roberval, Unité de Recherche en Mécanique UTC-CNRS, FRE 2833 et au département Mécanique Numérique et Modélisation (MNM) de l'Ecole Supérieure des Ingénieurs Léonard de Vinci. Je tiens à remercier chacun de leurs membres.

Je tiens à remercier Zhi Qiang FENG et Hakim NACEUR qui ont consacré du temps à l'examen de ce travail et accepté d'en être les rapporteurs.

J'exprime toute ma gratitude à Jean-Michel BERGHEAU pour l'honneur qu'il nous fait de présider ce jury de thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Piotr BREITKOPF, Alain REYNAERT et Alain RASSINEUX pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie tous les membres de l'ESILV pour leur bonne humeur.

Enfin, à ma famille, mes parents, mes sœurs, mes proches et mes amis, je dédie ce mémoire.

Table des matières

1-Introduction

- 1.1 Contexte de l'étude
- 1.2 Présentation du problème de contact normal
- 1.3 Revue bibliographique
 - 1.3.1 Application des conditions de contact
 - 1.3.2 Discrétisation de l'interface de contact
- 1.4 Plan de thèse

2- Résolution d'un problème de contact avec l'approche Mortier

- 2.1 Introduction
- 2.2 Description de l'approche mortier
- 2.3 Formulation d'un problème de contact normal
 - 2.3.1 Méthode de Pénalité
 - 2.3.1.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.3.1.2 Algorithme de résolution
 - 2.3.1.3 Exemple de validation
 - 2.3.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange
 - 2.3.2.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.3.2.2 Algorithme de résolution
 - 2.3.2.3 Exemple de validation
 - 2.3.3 Méthode du Lagrangien augmenté
 - 2.3.3.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.3.3.2 Algorithme de résolution
 - 2.3.3.3 Exemple de validation
- 2.4 Formulation d'un problème de contact avec frottement
 - 2.4.1 Méthode de pénalité
 - 2.4.1.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.4.1.2 Algorithme de résolution
 - 2.4.1.3 Exemple de validation
 - 2.4.2 Méthode du Lagrangien augmenté
 - 2.4.2.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.4.2.2 Algorithme de résolution
 - 2.4.2.3 Exemple de validation
- 2.5. Conclusion

3-Lissage de la surface de contact

- 3.1 Introduction
- 3.2 Méthode de la normale moyennée
- 3.3 Fonction d'Hermite cubique

3.4 B-Spline cubique

3.5 Conclusion

4- Résultats numériques

4.1 Problème de repassage

4.2 Simulation d'un jonc

4.3 Repoussage d'un bloc de caoutchouc dans une filière métallique

5- Conclusion générale et perspectives

Annexe A

Annexe B

Annexe C

Annexe D

Liste des figures

Figure 1.1. Exemple de pièce obtenue par emboutissage (Image du projet OASIS)

Figure 1.2. Problème mécanique de contact bidimensionnelles et notations

Figure 1.3. Vecteurs normaux dans l'interface de contact

Figure 1.4 Interface de contact entre deux maillages conformes : discrétisation NTN

Figure 1.5 Interface de contact entre deux maillages non conformes

Figure 1.6. Problème de contact patch-test

Figure 1.7. Appariement et projection avec la méthode NTS

Figure 1.8. Discrétisation de l'interface de contact à des segments de contact Simo et al. dans [Simo85b].

Figure 1.9. Appariement et projection avec la méthode mortier (3 points d'intégration pour segment esclave)

Figure 2.1 Application des conditions de Signorini avec à gauche la formulation des multiplicateurs de Lagrange et à droite la méthode de pénalité.

Figure 2.2. Discrétisation du problème de contact par la méthode des éléments finis

Figure 2.3 projection des points d'intégration du segment non mortier sur les segments mortier

Figure 2.4 Vecteur tangent et vecteur normal pour un point mortier

Figure 2.5 Non-respect des conditions d'interpénétration

Figure 2.6. Interpénétration des ressorts dans l'interface : méthode de pénalité [Yastrebov11]

Figure 2.7 projection dans l'interface du contact mortier

Figure 2.8. Segmentation de l'interface de contact mortier avec la méthode de pénalité

2.9. Condition d'activation des points d'intégration pour la méthode de pénalité

Figure 2.10. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec la méthode de pénalisation

Figure 2.11. Schéma du problème de contact entre une poutre et un support.

Figure 2.12. Configuration déformée du problème de contact entre poutre et support.

Figure 2.13. Variation de la réaction normale et tangentielle en fonction de la valeur du coefficient de pénalité

Figure 2.14. Fonctions de formes pour l'interpolation des multiplicateurs de Lagrange.

Figure 2.15. Segmentation de l'interface de contact mortier avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Figure 2.16 Condition d'activation des multiplicateurs pour la méthode de Lagrange

Figure 2.17 Algorithme des 'Active Set' pour la formulation de Lagrange pour la vérification de la condition de non pénétration et le maintien des point de Gauss actifs

Figure 2.18 Algorithme de résolution d'un problème de contact avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Figure 2.19. Schéma du problème de contact entre un disque et une

Figure 2.20. Distribution des multiplicateurs de Lagrange du problème de contact entre un disque et une base

Figure 2.21. Configuration déformée du problème de contact entre un disque et une base

Figure 2.22. Evolution de la réaction et des multiplicateurs de Lagrange pour le problème de contact entre un disque et une couronne

Figure 2.23. Schéma de l'algorithme d'UZAWA pour l'augmentation du multiplicateur

Figure 2.24. Schéma d'augmentation du multiplicateur de Lagrange normal pour un pas de chargement n

Figure 2.25. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec la méthode du Lagrangien augmenté

Figure 2.26. Données géométrique du problème de contact entre anneaux et poutre.

Figure 2.27. Configuration déformée du problème de contact entre anneau et poutre.

Figure 2.28. Contact avec frottement de deux corps entre deux pas de chargement

Figure 2.29 Calcul du jeu pour un problème de contact avec frottement

Figure 2.30. Mouvement du cône de friction pour un contact collant

Figure 2.31. Actualisation du cône de friction pour un contact glissant

Figure 2.32. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec frottement par la méthode de pénalité

Figure 2.33. Schéma du problème de contact entre un anneau et un bâti.

Figure 2.34. Configuration déformée du problème de contact entre anneau et bâti.

Figure 2.35. Evolution de l'effort de contact et de la réaction du problème de contact entre anneau et bâti.

Figure 2.36. Evolution de la réaction et de l'effort de contact pour le problème de contact entre anneau et bâti

Figure 2.37. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec frottement par la formulation du Lagrangien augmenté

Figure 2.38. Contact avec frottement entre corps déformable et un corps rigide

Figure 2.39. Configuration déformé d'un problème de contact avec frottement entre corps déformable et un corps rigide

Figure 3.1. Normales multiples sur un nœud.

Figure 3.2. Vecteur normal moyenné

Figure 3.3. Vecteur normal moyenné pondéré avec la longueur des éléments

Figure 3.4. Vecteur normal moyenné à partir du vecteur tangent moyenné

Figure 3.5. Génération d'une géométrie décalée du maillage

Figure 3.6. Éléments de frontières lissées avec des polynômes d'Hermite

Figure 3.7. Projection sur une courbe lissée avec des polynômes cubiques d'Hermite

Figure 3.8 Influence du vecteur normal lissé sur la précision du calcul du gap

Figure 3.9. Éléments de frontière lissée avec un B-Spline Cubique

Figure 3.10. Application de la B-Spline Cubique dans FiEStA

Figure 3.11. B-spline pour une interpolation de 4 nœuds

Figure 3.12. Projection sur la surface mortier lissée par une B-Spline cubique

Figure 3.13. Influence du changement de la position d'un point de contrôle.

Figure 3.14 Contact entre deux semi anneaux

Figure 3.15 configuration déformée pour le problème de contact entre deux demi anneaux

Figure 3.16 Contrainte de Von Mises pour le problème de contact entre deux demi anneaux

Figure 3.17 Déformation pour le problème de contact entre deux demi anneaux

Figure 4.1. Architecture de FiEStA

Figure 4.2. Description géométrique du problème de repassage

Figure 4.3. Configuration déformée du 'Ironing problem'. (a) déplacement : $u=0$, $w=0.72UL$, (b) déplacement : $u=4.8 UL$, $w=0.72 UL$, (c) déplacement : $u=9.6 UL$, $w=0.72 UL$.

Figure 4.4. Utilisation des Jonc de retenus dans la simulation de l'emboutissage

Figure 4.5. Données géométrique de la simulation du jonc

Figure 4.6. Configuration déformée du problème de simulation de Jonc.

Figure 4.7. Données géométrique du problème de la simulation de repoussage

Figure 4.8. Configuration déformée du problème de simulation de repoussage.

Figure A.1. Déplacement du problème 'patchtest' avec la formulation des multiplicateurs de Lagrange

Figure A.2. Déplacement du problème 'patchtest' avec la formulation de pénalisation

Figure A.3. Contraintes de Von Mises du problème 'patchtest' avec la formulation des multiplicateurs de Lagrange

Figure A.4. Contraintes de Von Mises du problème 'patchtest' avec la formulation de pénalisation

Figure A.5. Distribution des multiplicateurs de Lagrange

Notations

- β_i un corps dans l'espace R^2
- $\Omega_0^{(i)}$ le domaine occupé par le corps β_i dans la configuration de référence
- $\Omega_t^{(i)}$ le domaine occupé par le corps β_i dans la configuration courante
- $\Gamma_u^{(i)}$ la partie de $\Gamma^{(i)}$ où les déplacements \hat{u}^i sont imposés.
- $\Gamma_\sigma^{(i)}$ la partie sur laquelle des forces surfaciques $\hat{t}^{(i)}$ sont appliquées.
- $\Gamma_c^{(i)}$ la partie en contact avec un autre corps
- $\gamma_u^i, \gamma_\sigma^i$ et γ_c^i sont les transformées de $\Gamma_u^{(i)}, \Gamma_\sigma^{(i)}$ et $\Gamma_c^{(i)}$ dans la configuration actuelle
- d la distance qui sépare deux corps β_i
- n^i vecteur normal à la surface γ_c^i
- \tilde{n}_i^m vecteur normal moyenné
- \hat{n}^m vecteur normal lissé
- a^i vecteur tangent à la surface γ_c^i
- \tilde{a}_i^m vecteur tangent moyenné
- \hat{a}^m vecteur tangent lissé
- g_N jeu minimal dans la direction normale qui sépare les deux corps en contact
- g_T jeu minimal dans la direction tangente
- F le gradient de transformation
- S second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff
- ρ_0 masse volumique dans la configuration de référence

b	Force volumique
t	Force surfacique
$E^{(i)}$	déformation de Green-Lagrange du corps β_i
$C^{(i)}$	le tenseur constitutive
$S^{(i)}$	contrainte par la loi St.Venant-Kirchhoff
G_C	travail de l'effort de contact
$G_{\text{int}}^{(i)}$	travail des efforts internes
$G_{\text{ext}}^{(i)}$	travail des efforts externes
Γ^m	surface de contact mortier (maître)
Γ^{nm}	surface de contact non mortier (esclave)
ξ	coordonnée naturelle dans sur un segment mortier
ζ	coordonnée naturelle dans sur un segment non mortier
N_i^{nm}	fonction de forme sur un segment non mortier
N_i^m	fonction de forme sur un segment mortier
X_i^{nm}	position d'un point non mortier dans la configuration de référence
x_i^{nm}	position d'un point non mortier dans la configuration courante
λ_N	multiplicateur de Lagrange normal
λ_T	multiplicateur de Lagrange tangent
c_N	expression du travail du contact en fonction des termes d'un contact normal
c_T	expression du travail du contact en fonction des termes d'un contact tangent
\bar{t}_{c_n}	effort de contact normal
\bar{t}_{c_t}	effort de contact tangent

ε_N coefficient de pénalité normal

ε_T coefficient de pénalité tangent

ω_{GP} poids d'intégration

$[B_{GP}]$ matrice des fonctions de formes pour le déplacement

$[B_{GP,\xi}]$ matrice de la dérivé des fonctions de formes pour le déplacement

$\langle x_n \rangle$ vecteur de la position des points d'intégration dans l'interface de contact

$[M_{GP}^{Lag}]$ matrice des fonctions de forme pour les multiplicateurs de Lagrange

f_s fonction de glissement

μ coefficient de frottement de Coulomb

R vecteur résidu

K matrice tangente

H_i^m polynômes d'Hérmite

U vecteur des nœuds d'une B-Spline

Chapitre 1

Introduction

Cette partie introductive présente le cadre général de ce travail de thèse ainsi que ses motivations industrielles. Une étude bibliographique pour la mécanique du contact et les différentes méthodes et approches numériques utilisées pour la modélisation de ce type de problème sera détaillée. Une attention particulière est donnée à la discrétisation par l'approche mortier. La littérature concernant cette méthode et sa cinématique pour un problème de contact est également abordée dans cette partie. Le plan du mémoire sera détaillé à la fin de ce chapitre qui vise à mieux cerner les enjeux et l'intérêt des contributions apportées.

Sommaire

- 1.1 Contexte de l'étude
 - 1.2 Présentation du problème de contact normal
 - 1.3 Revue bibliographique
 - 1.3.1 Application des conditions de contact
 - 1.3.2 Discrétisation de l'interface de contact
 - 1.4 Plan de thèse
-

1.1 Contexte de l'étude

Ce travail se situe dans le cadre du projet OASIS (Optimization of Addendum Surfaces In Stamping). Ce projet a pour but le développement d'un outil numérique libre capable de produire une gamme d'emboutissage optimisée (Figure 1.1). Ce dernier doit permettre d'optimiser les paramètres du procédé d'emboutissage tels que la géométrie de l'outil, la forme du flan, l'effort du poinçon, l'effort sous serre-flan... La partie du projet qui concerne ce travail est dédiée au développement d'un algorithme plus approprié à la modélisation d'un problème de contact pour la mise en forme.

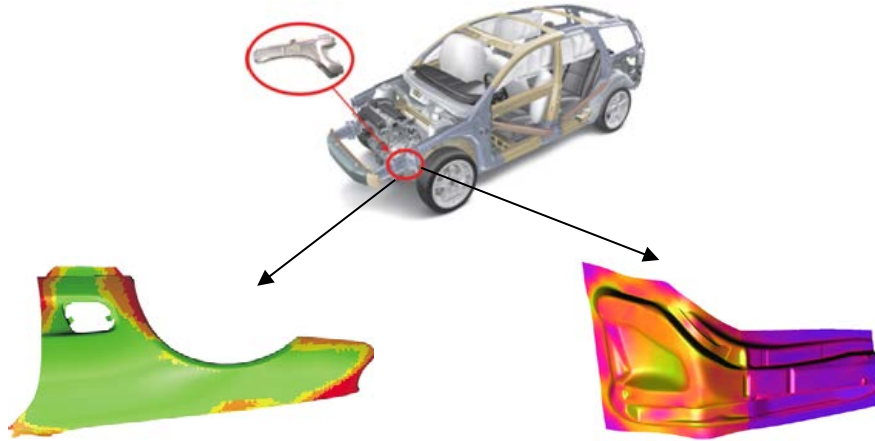


Figure 1.1. Exemple de pièce obtenue par emboutissage (Image du projet OASIS)

La mécanique du contact fait partie d'un large éventail de problèmes d'ingénierie. L'interaction entre différents corps fait généralement le sujet d'une analyse de contact qui est fréquente dans différents secteurs industriels (étude de crash, simulation de mise en forme, support des structures,...). De nos jours, il y a eu plusieurs algorithmes numériques de contact, mais pour certain application il reste encore de nombreux défis à relever.

Le présent travail est une contribution au développement d'éléments numériques avancés de contact dans FiEStA, code élément finis maison de mécanique générale.

La mécanique de contact est un phénomène présent dans différents secteurs industriels. Tout système de mécanique de contact fait imbriquer plusieurs autres disciplines :

- ✓ Mécanique des milieux continus : Conditions aux limites mixtes, fracture ...
- ✓ Mécanique des matériaux : Elasticité, viscoélasticité, plasticité, ténacité ...
- ✓ Interactions entre surfaces : Van der Waals, capillarité, physico-chimie....
- ✓ Mécanique des fluides : Lubrification hydrodynamique, elasto-hydrodynamique

Toutes ces interactions avec les autres disciplines font de la mécanique du contact un thème d'intérêt important pour les chercheurs et les ingénieurs mécaniciens. Vu que les problèmes en mécanique de contact font alignés plusieurs types de non-linéarité qui rendent ces problèmes difficiles à résoudre, plusieurs travaux récents se focalisent dans la recherche des méthodes de résolution robustes, précises et moins coûteuses en terme de temps de calcul.

1.2. Présentation du problème de contact normal

Considérons le problème de contact plan entre deux corps β_1 et β_2 , occupant dans leur configuration initiale les domaines $\Omega_0^{(1)}$ et $\Omega_0^{(2)}$ de \mathbb{R}^2 et les domaines $\Omega_t^{(1)}$ et $\Omega_t^{(2)}$ dans la configuration actuelle (figure 1.2). L'espace R^2 est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Notons Γ^1 et Γ^2 les frontières de $\Omega_0^{(1)}$ et $\Omega_0^{(2)}$ dans la configuration de référence et que γ^1 et γ^2 les frontières de $\Omega_t^{(1)}$ et $\Omega_t^{(2)}$ dans la configuration actuelle.

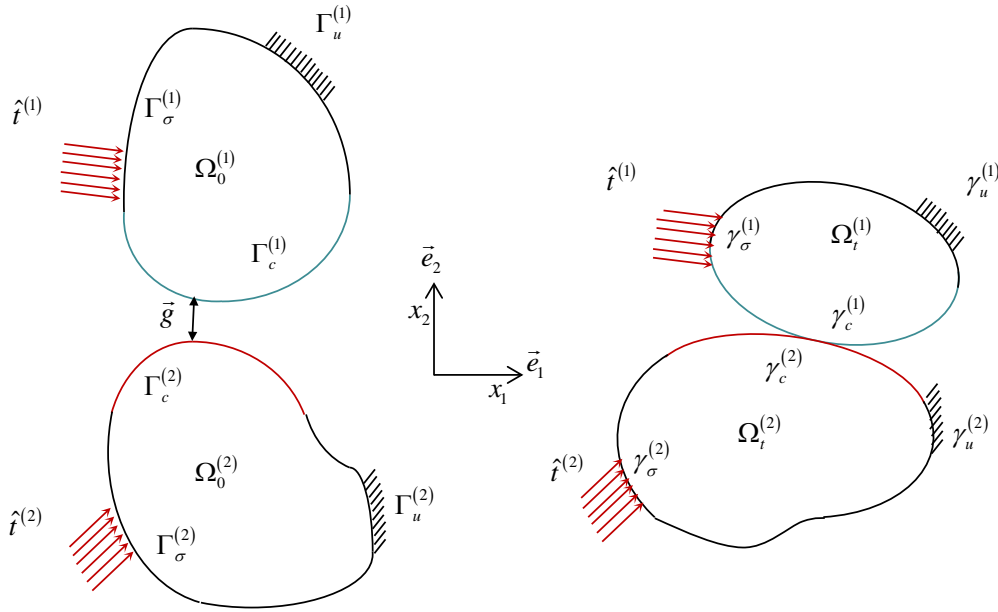


Figure 1.2. Problème mécanique de contact bidimensionnelles et notations

A l'instant t , l'image x^i du point $X^i \in \Omega_0^i$ est donnée par la relation :

$$x^i = x^i(X^i, t) \quad \text{avec} \quad x^i : \Omega_t^i \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

La frontière de chaque corps est décomposée en trois parties disjointes telles que :

$$\begin{aligned} \Gamma_u^{(i)} + \Gamma_\sigma^{(i)} + \Gamma_c^{(i)} &= \Gamma^{(i)} \\ \Gamma_u^{(i)} \cap \Gamma_\sigma^{(i)} &= \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_c^{(i)} = \Gamma_u^{(i)} \cap \Gamma_c^{(i)} = \emptyset \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ces trois parties sont définies de la façon suivante :

- ✓ $\Gamma_u^{(i)}$ est la partie de $\Gamma^{(i)}$ où les déplacements \hat{u}^i sont imposés.
- ✓ $\Gamma_\sigma^{(i)}$ est la partie sur laquelle des forces surfaciques $\hat{t}^{(i)}$ sont appliquées.
- ✓ $\Gamma_c^{(i)}$ est la partie en contact avec un autre corps.

γ_u^i , γ_σ^i et γ_c^i sont les transformées de $\Gamma_u^{(i)}$, $\Gamma_\sigma^{(i)}$ et $\Gamma_c^{(i)}$ dans la configuration actuelle.

La résolution d'un problème de contact normal (sans frottement) revient à la détermination de l'interaction entre un point x^1 appartenant à la frontière de contact γ_c^1 et le point x^2 de γ_c^2 qui lui est le plus proche. Cette interaction se traduit par un effort normal de résistance à la pénétration des deux corps, il est noté t_N . La distance entre ces deux points est communément appelée normal gap et notée g_N . Dans une résolution du problème par la méthode des éléments finis, il existe trois approches selon la nature des points x^1 et x^2 :

- toutes les paires de points x^1 et x^2 sont des nœuds du maillage : il s'agit de l'approche nœud à nœud (notée dans la suite NTN).
- un des deux points correspond à un nœud du maillage : cette approche est dite nœud à segment (notée dans la suite NTS).
- si les deux points sont des points quelconques de l'interface de contact, on est dans le cas d'une approche segment à segment (notée dans la suite STS).

Notons par ' d ' la distance séparant un point maître x^1 donné sur la surface γ_c^1 et un point x^2 sur la surface esclave γ_c^2 . Cette fonction est exprimée par :

$$d = \|x^1 - x^2\| \quad (1.3)$$

La relation qui relie un point de la surface maître X^1 dans la configuration de référence à son homologue x^1 dans la configuration actuelle après l'application d'un déplacement u^1 est donné par :

$$x^1(X^1, t) = X^1 + u^1(X^1, t) \quad (1.4)$$

De même, pour un point de la surface esclave, la relation s'écrit :

$$x^2(X^2, t) = X^2 + u^2(X^2, t) \quad (1.5)$$

n^1 est le vecteur normal sortant de la surface γ_c^1 au point x^1 et n^2 , le vecteur normal sortant de la surface γ_c^2 (figure 1.3).

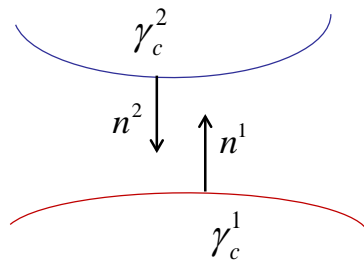


Figure 1.3. Vecteurs normaux dans l'interface de contact

La distance minimale entre un point de la surface esclave x^2 et son homologue le plus proche appartenant à la surface maître \bar{x}^1 est donnée par :

$$g_N = (x^2 - \bar{x}^1) \cdot \bar{n}^1 \quad (1.6)$$

Le gap doit être toujours positif ou nul afin de traduire la non pénétration entre les deux corps en contact.

$$g_N = (x^2 - \bar{x}^1) \cdot \bar{n}^1 \geq 0 \quad (1.7)$$

L'effort normal qui représente une pression de contact, est conventionnellement négatif lorsque le gap est nul. Il s'annule dès que le gap devient positif et les deux corps ne sont plus en contact. Il existe une relation de complémentarité entre l'effort normal t_N et le gap g_N . Ces trois relations peuvent être écrites sous la forme des conditions de Karush-Kuhn-Tucker :

$$g_N \geq 0, \quad t_N \leq 0, \quad g_N t_N = 0 \quad (1.8)$$

Les relations dans (1.8) sont habituellement utilisées pour la résolution de problèmes d'optimisation. Traditionnellement, en mécanique du contact ces relations portent le nom des conditions de Hertz-Signorini-Moreau.

Pour un problème de contact avec frottement, Duvaut et Lions dans [Duvaut71] puis dans [Duvaut76] ont présenté une solution avec la formulation classique de Signorini avec la loi de Coulomb. L'application des conditions de contact d'Hertz-Signorini-Moreau conduit à une expression géométrique sous forme d'inégalité [Kikuchi88] et [Curnier95].

$$\int_{\Omega} [\delta E : S] d\Omega_0 \geq \int_{\Omega} \rho_0 b \cdot \delta u d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{t} \cdot \delta u d\Gamma_{\sigma} \quad (1.9)$$

Nous traitons le problème de contact dans l'approche statique en établissant l'équilibre des interactions de contact dans un domaine γ_c de contact bien définie. Nous calculons les contraintes ramenées dans la configuration de référence d'un point de la configuration courante par le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff. L'équation d'équilibre est formulée dans la configuration de référence. En associant l'équilibre avec les conditions limites de déplacement imposé sur Γ_u^i et des forces surfacique imposé sur Γ_{σ}^i , on peut définir le problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Div}(F.S)^{(i)} + \rho_0^{(i)} b^{(i)} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_0^{(i)} \\ u^{(i)} &= \hat{u}^{(i)} \quad \text{dans } \Gamma_u^{(i)} \\ t^{(i)} &= \hat{t}^{(i)} \quad \text{dans } \Gamma_{\sigma}^{(i)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Avec F : le gradient de transformation

S : Second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff

ρ_0 : Masse volumique dans la configuration de référence

b : Force volumique

t : Force surfacique

Le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff est obtenu par la déformation de Gren-Lagrange $E^{(i)} = \frac{1}{2}(F^T \cdot F - I)^{(i)}$ en utilisant la loi de matériau de St.Venant-Kirchhoff suivante :

$$S^{(i)} = C^{(i)} : E^{(i)} \quad (1.11)$$

Avec $C^{(i)}$ est le tenseur constitutive.

Kikuchi et Oden dans [Kikuchi88] ont montré l'existence et l'unicité de la solution pour un problème de contact sans frottement en petits déplacement. Le travail des efforts de contact $G_C(u, \delta u, t_c)$ contribue au travail des efforts internes $G_{\text{int}}^{(i)}(u, \delta u)$ et celui des efforts externes $G_{\text{ext}}^{(i)}(\delta u)$ pour donner l'expression du travail global suivante :

$$G(u, \delta u, t_c) = \sum_{i=1}^2 \left(G_{\text{int}}^{(i)}(u, \delta u) + G_{\text{ext}}^{(i)}(\delta u) \right) + G_C(u, \delta u, t_c) = 0, \quad (1.12)$$

Avec :

$$G_{\text{int}}^{(i)}(u, \delta u) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^{(i)}} \left[\delta E^{(i)} : S^{(i)} \right] d\Omega_0^{(i)}$$

$$G_{\text{ext}}^{(i)}(\delta u) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \rho_0^{(i)} \int_{\Omega_0^{(i)}} b^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} d\Omega_0^{(i)} - \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \hat{t}^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} d\Gamma_\sigma^{(i)} \right\}$$

$$G_C(u, \delta u, t_c) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(i)}} t_c^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} d\Gamma_c^{(i)} \quad (1.13)$$

Où t_c représente l'effort de contact.

L'expression de G_C dépend du choix de la formulation utilisée. Il existe dans la littérature différentes techniques [Feng03], [Wriggers06] pour imposer les conditions de contact. Dans le cas d'un problème de contact avec frottement, les conditions de glissement conduisent à la définition d'une composante tangentielle dans l'interface de contact notée t_t .

1.3 Revue bibliographique

Dans la pratique seule une partie des surfaces candidates au contact est active. C'est la portion de la surface où le normal gap est nul. L'annulation de ce dernier déclenche le calcul de l'effort de contact ainsi que les nouvelles positions des corps en contact. Le reste de l'interface se présente comme une zone de contact inactive et qui peut devenir active, à son tour, dans la suite de la déformation des deux corps en contact. La détermination des zones de contact actives ou non est assurée par l'utilisation d'un algorithme dit 'Active Set Strategy'

dont son application est détaillée dans [Hartmann07], [Hueber05a], [Hueber05b] et [Popp09]. Supposons que nous connaissons à ce stade la zone effective ou bien active du contact, on peut alors appliquer les conditions de contact (et de frottement) et résoudre le problème.

Dans la littérature il existe différentes méthodes pour appliquer les ‘contraintes’ de contact et modéliser sa contribution à la solution générale du problème. Parmi ces dernières on peut citer les méthodes :

- ✓ de pénalité
- ✓ des multiplicateurs de Lagrange
- ✓ du Lagrangien augmenté
- ✓ du Lagrangien perturbé
- ✓ de Nitsche
- ✓ d’élimination directe des efforts

Ces méthodes et d’autres sont bien détaillées dans [Kikuchi82], [Bertsekas84], [Simo92], [Simo85b] et [Wriggers06]. Nous nous limiterons dans ce travail aux trois premières méthodes : pénalité, multiplicateurs de Lagrange et Lagrangien augmenté. Dans ce document, la formulation liée aux trois méthodes mentionnées sera détaillée. Elles seront ensuite comparées sur des applications numériques.

1.3.1 Application des conditions de contact

La méthode de pénalisation demeure la plus utilisée dans les codes de calcul industriels. Elle permet de transformer les conditions de contact écrites sous forme d’inégalité à un système d’équation en ajoutant un terme de pénalité noté ε_N . Cette technique est simple à mettre en œuvre et à interpréter du point de vue physique. Les conditions de contact ne sont vérifiées exactement que pour un coefficient de pénalité tendant vers l’infini. Une valeur très élevée de ce dernier conduit à un mauvais conditionnement du système à résoudre. Une faible valeur conduit à une violation des conditions de non pénétrabilité. La qualité de la solution obtenue par cette méthode dépend fortement du choix de la valeur du coefficient de pénalité.

Dans la méthode du multiplicateur de Lagrange, les conditions de contact sont exactement vérifiées par l’introduction de degrés de libertés supplémentaires appelées multiplicateurs de Lagrange [Bertsekas84], [Hallquist85] et [Rebel00]. Cette formulation doit être appliquée en combinaison avec une stratégie d’activation (communément appelée Active Set Strategy) qui contrôle et met à jour dans chaque boucle de convergence les multiplicateurs actifs et passifs comme le montrent Fischer et Wriggers dans [Fischer05] et Popp et al. dans [Popp09]. Ce ne sont que les multiplicateurs actifs qui font partie des inconnues du problème.

Si les conditions de non pénétration sont violées dans un segment non mortier, tous les points d’intégration de ce dernier vont contribuer à l’effort de contact afin d’augmenter la rigidité de contact et ramener la pénétration à une valeur nulle. Les multiplicateurs de Lagrange associés au nœud de cet élément seront activés. Cette condition est appliquée comme une initialisation de contact tant que l’élément en question n’est pas encore en contact puisque ses multiplicateurs de Lagrange sont désactivés par défaut. Les éléments qui ont déjà en contact, la moyenne de leurs multiplicateurs au point d’intégration doit être négative pour que les multiplicateurs au nœud restent actifs. Si la contrainte de contact dans un segment non mortier devient positive, ce segment devient inactive et ses multiplicateurs de Lagrange associés disparaissent et seront retirés du système à résoudre. Pour cette raison les deux multiplicateurs de même élément ou segment non mortier ont toujours le même statut : ou bien actif ou bien

inactif. Les deux algorithmes du ‘Set Strategy’ seront détailler d’avantage dans le chapitre d’implémentation par la méthode des éléments finis.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange ne tolère pas de pénétration relative au début de l’activation de contact. Contrairement à la méthode de pénalité, les conditions de contact dans cette méthode s’appliquent d’une manière brutale [Papadopoulos90]. Ce qui rend cette méthode moins robuste que la méthode de pénalité en raison de difficultés de convergence dans certains cas.

La méthode du Lagrangien augmentée est une sorte de formulation avec des multiplicateurs de Lagrange régularisée par un coefficient de pénalité. Cette méthode permet de satisfaire exactement les conditions de contact sans sur-contraindre le problème avec des inconnues supplémentaires. La méthode du lagrangien augmenté vérifie les conditions de non pénétration progressivement en partant d’une valeur initiale nulle du multiplicateur et en augmentant son amplitude en fonction de la valeur de pénétration. Powell dans [Powell69] a utilisé, pour des problèmes d’optimisation, une formulation algébrique pour mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange à chaque itération. De nos jours, une telle approche est connue sous le nom d’algorithme d’Uzawa. Une autre approche a été développée par Fletcher dans [Fletcher70]. Elle consiste en une minimisation du problème continu (point de selle) avec une mise à jour simultanée des variables primale et duale. Glowinski et Le Tallec dans [Glowinski89] ont présenté une des premières applications de la méthode du lagrangien augmenté à un problème de contact sans frottement. Une généralisation de la méthode par l’algorithme d’Uzawa aux problèmes de frottement a été développée par Simo et Laursen dans [Simo92] et [Laursen93a]. Pietrzak et Curnier dans [Pietrzak99] ont mis en œuvre la formulation du Lagrangien augmenté par la méthode des éléments finis pour un problème de contact avec frottement en grand déplacement. La méthode du Lagrangien augmenté combine les avantages des deux méthodes de pénalité et des multiplicateurs de Lagrange tout en évitant leurs inconvénients. Elle converge vers la solution moyennant un grand coefficient de pénalité sans influencer le bon conditionnement du problème. Cette technique demande un algorithme d’actualisation supplémentaire, mais l’effort de calcul requis par cet algorithme reste raisonnable. La méthode des multiplicateurs de Lagrange ne permet pas d’écrire le problème d’optimisation avec contraintes d’inégalité sous forme d’un problème sans contrainte puisque la condition de positivité des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_N \geq 0$ doit être satisfaite. La méthode du Lagrangien augmenté n’a pas cette restriction et elle est donc préférable pour une utilisation pratique. Ces trois méthodes et leur implémentation seront détaillées dans le chapitre suivant.

1.3.2 Discrétisation de l’interface de contact

Le premier calcul d’une solution analytique d’un problème de contact a été effectué par Hertz dans [Hertz1882] entre une sphère et un demi-espace infini. Johnson dans [Johnson87] a étendu la solution analytique avec des solides ayant d’autres géométries. La résolution analytique d’un problème de contact reste restreinte à des géométries simples qui peuvent être décrites analytiquement. Afin de traiter un problème de contact entre des corps de géométrie complexe, Ciarlet dans [Ciarlet78], Curnier et Alart dans [Curnier88], Kikuchi et Oden dans [Kikuchi88] ainsi que Zienkiewicz et Taylor dans [Zienkiewicz91] ont développé une approximation de la solution par la méthode des éléments finis.

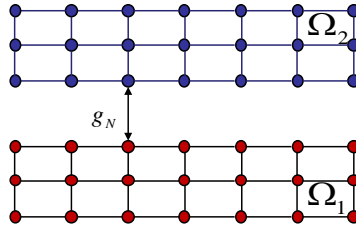


Figure 1.4 Interface de contact entre deux maillages conformes : discrétisation NTN

Dans ces premières tentatives de modélisation des problèmes de contact entre deux corps déformables par la méthode des éléments finis, les applications étaient limitées aux cas des petites déformations et des petits déplacements d'où l'utilisation des théories linéaires. Dans ce cas, les maillages utilisés à l'interface des corps étaient conformes. La discrétisation proposé dans [Francavilla75] interdit tout glissement entre les deux corps en contact. La première application de cette méthode pour un problème de contact avec grand déplacement est développée par Hughes et al. dans [Hughes77]. L'application des conditions de contact se fait nœud à nœud comme l'ont détaillé Kikuchi et Oden dans [Kikuchi88]. La méthode nœud à nœud (NTN) peut être considérée comme la méthode numérique la plus simple pour traiter le contact.

La résolution mathématique de la méthode se résume à l'addition de forces au nœud qui compensent l'effort de contact. Son implémentation nécessite un algorithme qui gère l'activation ou la désactivation des efforts nodaux de contact. Le maillage de discrétisation des deux corps en contact doit être compatible pour que cette méthode puisse être utilisée. Cette méthode alors est restreinte aux maillages conformes pour un problème de contact en petites déformations et petits déplacements relatifs dans l'interface.

Le normal gap g_N qui sépare les deux corps en contact (figure 1.4) est calculé par projection. Le gap a toujours une valeur positive afin d'éviter le chevauchement des deux corps (condition de non pénétration). Dans le cas général, les nœuds sont distribués d'une manière arbitraire sur l'interface de contact vue que les deux corps ne sont pas forcément maillés avec les mêmes tailles de maille (figure 1.5). Et si c'est le cas, cette approche reste limitée aux cas de petite déformation dans le domaine élastique.

Simo et Taylor dans [Simo85a] ont développé l'approche nœud à segment (NTS) pour discrétiser l'interface de contact à maillage non conforme (figure 1.5). Dans la méthode NTS, les conditions de contact et de frottement sont appliquées entre, d'un côté un nœud de la surface de contact du premier corps et de l'autre côté un segment appartenant à l'autre corps. Au début, cette méthode a été appliquée pour des problèmes de contact bidimensionnel avec loi de comportement élastique en grande déplacement. Simo et Laursen dans [Simo92] et [Laursen93b], Wriggers et al. dans [Wriggers90] et [Wriggers94] puis Alart et Curnier dans [Alart91] ont présenté, chacun, une extension pour le cas des lois de comportement non linéaire comme la loi hyper-élastique et la loi élasto-plastique.

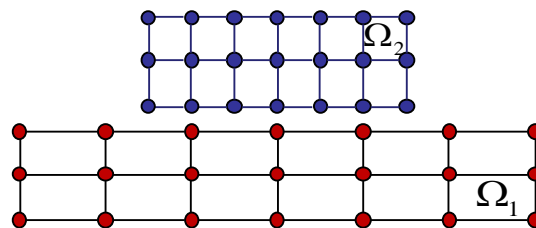


Figure 1.5 Interface de contact entre deux maillages non conformes

El-Abbasi et Bathe dans [El-Abbasi01] ont montré que cette technique de discrétisation ne permettait pas la satisfaction du patch-test proposé par Taylor et Papadopoulos dans [Taylor91]. Les travaux d'El-Abbasi montrent que la méthode NTS a du mal à bien transmettre les efforts de contact d'un corps à un autre pour une interface parfaitement plane.

Le patch-test présente un bloc rectangulaire de $4 UL$ (Unité de Longueur) de longueur et de $2 UL$ de largeur en appui sur son arête inférieure. Un autre bloc rectangulaire de dimension $[2UL \times 1UL]$ repose sur le premier, comme le montre la figure 1.6. Les deux blocs sont soumis à une pression uniforme de $1 F/UL^2$ sur leurs surfaces supérieures. Une loi de comportement néo-Hookeenne est considérée pour les deux blocs dont le module d'élasticité est $E = 1000 F/UL^2$ et le coefficient de poisson correspondant est $\nu = 0.3$. Le bloc inférieur est discrétisé avec 16×8 éléments, quant au bloc supérieur est discrétisé avec 20×4 éléments. La solution analytique de ce problème a été discutée par Fischer et al. dans [Fischer05], la valeur de la contrainte verticale attendue est constante sur tous les éléments du maillage est $\sigma_{yy} = -1 F/UL^2$.

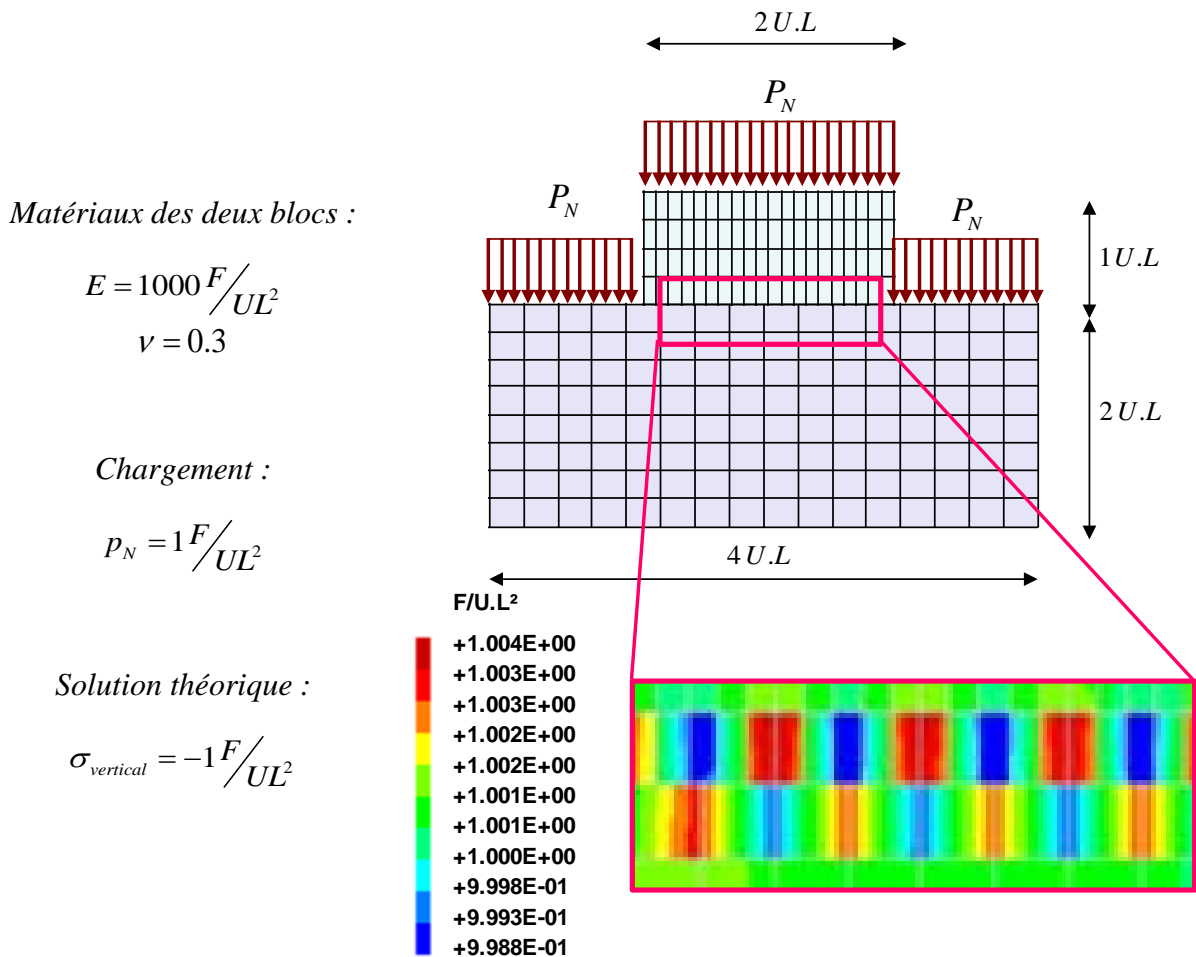


Figure 1.6. Problème de contact patch-test

La méthode NTS demeure la plus utilisée dans une grande partie des codes de calcul industriels. Dans la littérature, il existe des algorithmes pour l'approche NTS à double passe [Sauer12] permettant de résoudre le problème du patch-test. Ce qui signifie qu'à chaque étape de la solution le problème est résolu deux fois: sur la première étape on affecte le choix des

surfaces maîtres et esclaves et sur la deuxième étape les surfaces maîtres et esclaves sont échangés. Cette technique reste limitée au cas d'éléments à interpolation linéaire et présente des problèmes de convergence pour des éléments d'ordre supérieur pour lesquels les conditions de compatibilité dit (Inf-Sup) ne sont pas. Pour réduire ces problèmes de convergence sans trop pénaliser le temps de calcul, on trouve dans la littérature l'utilisation du raffinement local du maillage dans la région de contact [Renaud09]. Un rapport détaillé sur le patch-test avec la discrétisation NTS peut être trouvée dans [Crisfield00], où une nouvelle approche combinant des fonctions de forme linéaires et quadratiques est également proposée.

Dans le cas de la méthode NTS, on a également besoin de définir une surface maître et une surface esclave. Le choix de la surface esclave parmi les deux surfaces dans l'interface est théoriquement arbitraire. Dans la pratique, la surface esclave est associée au maillage le plus fin ou le corps le moins rigide. La distance minimale (communément appelée normal gap) qui sépare les deux corps en contact est calculée par projection orthogonale de tous les nœuds de la surface esclave sur la surface maître (figure 1.7). Les conditions de non-pénétration pour l'approche NTS se présentent comme l'empêchement du nœud esclave à pénétrer le segment maître associé via une projection.

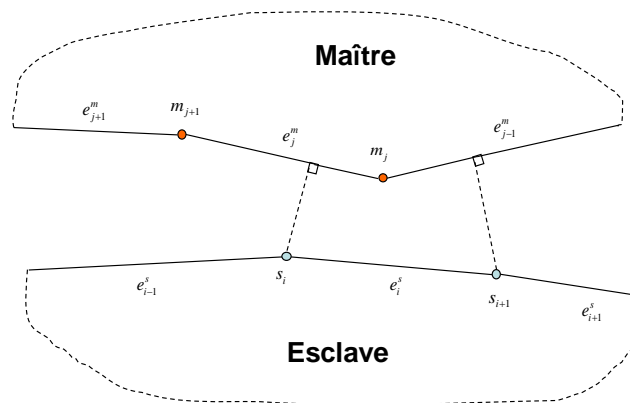


Figure 1.7. Appariement et projection avec la méthode NTS

La discrétisation segment à segment STS a été proposé d'abord par Simo et al. dans [Simo85b] pour le cas à d'un problème de contact bidimensionnel. L'approche proposée par Simo et al. est l'utilisation d'une surface de contact intermédiaire qui se produit naturellement à partir de la discrétisation de l'interface de contact en segments de contact (Fig. 1.8). Récemment cette discrétisation a été efficacement généralisé pour les problèmes de contact à trois dimensions. Cette technique de discrétisation a été couplée avec l'approche des éléments mortier inspirée par la méthode de décomposition de domaine [Paczelt99] et [Wohlmuth00a]. La discrétisation avec la méthode mortier, qui fait partie de la famille STS, est stable et passe avec le patch-test mais sa mise en œuvre est difficile et demande beaucoup de technicité qui sera présenté avec plus de détail dans le sous chapitre qui suit. Cette technique a été appliquée avec succès pour des problèmes de contact normal [Puso04a], [Fischer05] et [Puso08] ainsi pour des problèmes de contact avec frottement [McDevitt00], [Puso04b], [Puso04c], [Yang05], [Fischer06], [Hueber07], [Tur09], [Gitterle10].

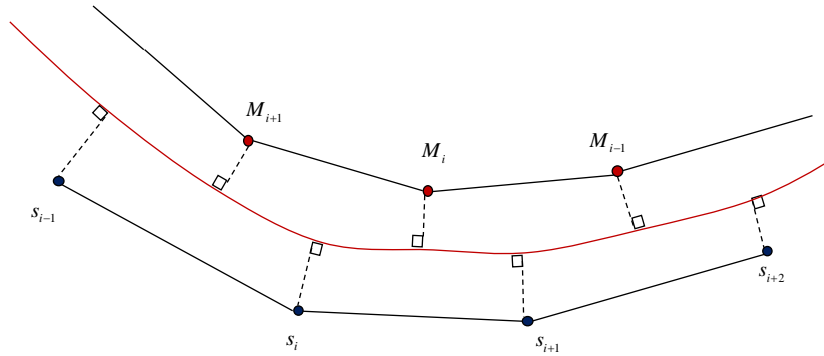


Figure 1.8. Discretisation de l'interface de contact à des segments de contact
Simo et al. dans [Simo85b].

La méthode mortier est une technique initialement utilisée par Bernardi et al. dans [Bernardi90] et [Bernardi94] pour la résolution de problèmes de décomposition de domaines non conformes. Elle a été adaptée à la modélisation du contact par Belgacem et al. dans [Belgacem97] et [Belgacem99] pour un problème de contact sans frottement unilatéral ou entre différents corps. Cette technique s'adapte bien à l'application des conditions de contact dans un système discrétisé composé d'un maillage non conforme dans l'interface.

Elle est basée sur l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange représentant l'effort de contact résultant aux nœuds [Hild00]. McDevitt et Laursen dans [McDevitt00] utilisent une surface intermédiaire comme surface de référence pour les multiplicateurs de Lagrange. Ils appliquent cette méthode pour la résolution d'un problème de contact avec frottement en grand déplacement et glissement. Wohlmuth dans [Wohlmuth00b] et Krause et Wohlmuth dans [Krause02] montrent que la surface porteuse des multiplicateurs de Lagrange peut être une des deux surfaces de contact (maître ou esclave). Une méthode duale modifiée pour le cas de contact entre surfaces à géométrie complexe est détaillé par Flemiscli et al. dans [Flemiscli05] dans laquelle les deux surfaces de contact se succède a été une surface de référence pour les multiplicateurs de Lagrange. Un algorithme proche de celui utilisé avec la méthode NTS à double passe est déployé. Une généralisation de cette technique a été développée par Popp et al. dans [Popp10] pour un problème de contact en 3D.

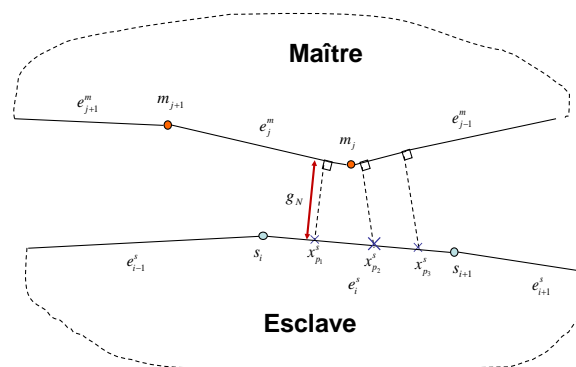


Figure 1.9. Appariement et projection avec la méthode mortier
(3 point d'intégration pour segment esclave)

Les conditions de contact et de frottement sont appliquées d'une manière faible, la discrétisation doit vérifier les conditions de Brezzi-Babuska [Babuska73] et [Brezzi74] puis

plus tard [Brezzi91]. L'expression algorithmique de la méthode ainsi que son développement théorique sont bien détaillés dans les travaux d'El-Abbasi et Bathe dans [El-Abbasi01], Wohlmuth et Krause dans [Wohlmuth04], Hueber et al. dans [Hueber05a] et Hueber et Wohlmuth dans [Hueber05b]. Les conditions de non-pénétration seront appliquées sur les points d'intégration des segments esclaves pour qu'ils ne pénètrent pas dans les segments maîtres et non pas sur les nœuds esclaves comme pour l'approche NTS (figure 1.9).

Dans la littérature, les techniques de lissages ont été toujours appliquées d'une manière locale. L'idée dans ce travail c'est de combiner le lissage local de la description de la géométrie avec un lissage global sur l'application des conditions de contact. L'approche mortier constitue une évaluation exacte des intégrales dans l'interface pour satisfaire les conditions de contact. Un problème de contact peut être sur-conditionné s'il est combiné avec d'autres contraintes comme le calcul thermo-mécanique [Wriggers92] et [Hueber09] ou le problème de contact dynamique [Tur09]. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode mortier s'avère importante dans la résolution de la contribution du contact vu qu'elle permet de lisser l'application des différentes conditions dans l'interface sous forme d'une intégrale [Hild00], [Puso08] et [Hesch09]. Si on ajoute à la gestion du contact par la méthode mortier une technique de lissage direct appliquée sur la surface de contact, comme dans [Kikuchi88], [Padmanabhan01] et [Hueber05b], on peut garantir une robustesse supérieure dans l'algorithme de résolution. Une caractérisation 'exacte' (ou très proche) de la géométrie de l'analyse initiale aide à l'obtention d'une description lisse qui peut ensuite être combiné avec l'approche mortier pour la résolution d'un problème de contact en grande déformation.

1.4 Plan de thèse

Ce document se décompose en cinq chapitres. Dans le chapitre 2, l'application de la méthode mortier pour des problèmes de contact est rappelée. On va mettre en valeur les atouts de cette méthode pour traiter des problèmes de contact avec maillage non conforme. Une revue des différentes formulations d'un problème de contact pour la méthode des éléments finis sera détaillée dans ce chapitre. Les formulations classiques (de pénalité, des multiplicateurs de Lagrange et du lagrangien augmenté) adaptées à l'approche mortier seront discrétisées avec la méthode des éléments finis. Une écriture explicite sous forme matricielle pour les trois types de formulations sera présentée dans cette partie.

La méthode de gestion de contact proposée dans ce travail est dédiée à des applications avec de grandes déformations. Les corps en contact changent de forme au cours du calcul, ce qui entraîne une discontinuité de la normale à l'interface. Pour un problème de contact discrétisé avec la méthode des éléments finis, deux éléments adjacents appartenant à l'interface de contact peuvent présenter deux vecteurs normaux de directions différentes pour une structure curviligne (courbure présente avant ou après déformation). Cette non continuité de la normale peut engendrer divers problèmes aussi bien à la phase de l'appariement qu'au cours de la résolution. L'existence et l'unicité de la projection utilisée pour le calcul du jeu entre les corps en contact nécessite la définition d'une normale unique entre deux éléments. Cette régularité est également nécessaire pour garantir la continuité de la pression de contact à l'interface au cours de la résolution. Une solution pour la continuité de la normale est proposée dans le chapitre 3. Pour garantir une meilleure continuité de l'évolution de la normale, trois méthodes de lissage de la surface de contact sont détaillées dans cette partie : la méthode classique de la normale moyennée, l'utilisation de fonctions d'Hermite cubiques et l'utilisation de B-Spline cubique pour la discrétisation de la surface de contact.

Le but de notre travail est le développement d'une modélisation stable du contact avec frottement en grande déformations avec différents types de formulation et avec un lissage des surfaces de contact. Le chapitre 4 regroupe des applications numériques démontrant l'efficacité de notre approche.

Une conclusion générale et quelques perspectives à ce travail sont présentées dans le dernier chapitre.

Chapitre 2

Résolution d'un problème de contact avec l'approche Mortier

Après avoir détaillé les différentes méthodes de discrétisation d'un problème de contact et en particulier l'approche mortier, nous présentons dans ce chapitre la contribution du contact au travail virtuel en utilisant différentes formulations. Une modélisation du problème de contact avec et sans frottement par la méthode des éléments finis sera détaillée pour trois approches différentes. Pour conclure ce chapitre, une critique des différentes formulations employées sera présentée.

Sommaire

- 2.1 Introduction
 - 2.2 Description de l'approche mortier
 - 2.3 Formulation d'un problème de contact normal
 - 2.3.1 Méthode de Pénalité
 - 2.3.1.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.3.1.2 Algorithme de résolution
 - 2.3.1.3 Exemple de validation
 - 2.3.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange
 - 2.3.2.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.3.2.2 Algorithme de résolution
 - 2.3.2.3 Exemple de validation
 - 2.3.3 Méthode du Lagrangien augmenté
 - 2.3.3.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.3.3.2 Algorithme de résolution
 - 2.3.3.3 Exemple de validation
 - 2.4 Formulation d'un problème de contact avec frottement
 - 2.4.1 Méthode de pénalité
 - 2.4.1.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.4.1.2 Algorithme de résolution
 - 2.4.1.3 Exemple de validation
 - 2.4.2 Méthode du Lagrangien augmenté
 - 2.4.2.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente
 - 2.4.2.2 Algorithme de résolution
 - 2.4.2.3 Exemple de validation
 - 2.5. Conclusion
-

2.1 Introduction

La non-différentiabilité de l'effort normal de contact et du terme de frottement (s'il y en a) présente un problème majeur pour la résolution numérique d'un problème de contact. La contribution du contact dans la formulation variationnelle peut être écrite grâce à différentes techniques. Dans la littérature, une grande partie des problèmes en mécanique du contact adoptent la technique des multiplicateurs de Lagrange afin de garantir la continuité des champs de déplacement entre les deux domaines en contact. Pour formuler le problème de contact avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, un multiplicateur λ qui peut être assimilé à une pression de contact à l'interface. Ce multiplicateur est une inconnue du problème portée par la surface esclave. $\lambda = -\bar{t}_c$. La méthode des multiplicateurs applique d'une manière stricte les conditions de Signorini. La brutalité de cette application rend le calcul parfois difficile à converger. Les multiplicateurs de Lagrange se présentent comme des degrés de liberté supplémentaires à chaque nœud de la surface esclave, d'où une augmentation de la taille du problème à résoudre.

La méthode de pénalisation est également omniprésente dans la littérature pour la modélisation des problèmes de contact. Le principe de cette méthode consiste à introduire un coefficient de pénalité pour appliquer progressivement les conditions Signorini (figure 2.1).

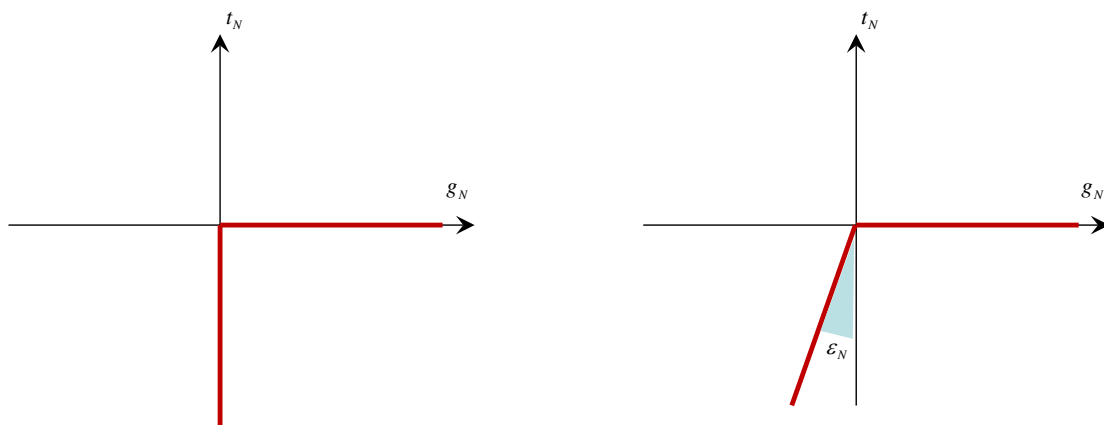


Figure 2.1 Application des conditions de Signorini avec à gauche la formulation des multiplicateurs de Lagrange et à droite la méthode de pénalité.

Le terme de pénalité réagit comme un ressort situé à l'interface de contact empêchant l'interpénétration des deux corps. Bien qu'elle soit présente dans plusieurs codes industriels, cette technique reste sensible à la valeur du coefficient de pénalité.

Une combinaison de ces deux techniques a donné naissance à la formulation du contact par Lagrangien augmenté. Les multiplicateurs de Lagrange dans cette méthode ne se présentent plus comme des inconnues supplémentaires au problème. Cette technique garantit, en outre, des pas de chargement plus importants par rapport aux deux méthodes précédentes.

Dans ce qui suit une écriture détaillée inspirée par les travaux de Fischer et al. dans [Fischer05] et [Fischer06] et Wriggers [Wriggers06] sera présentée.

2.2 Description de l'approche mortier

La méthode de discrétisation de l'interface de contact adoptée pour la suite de ce travail est celle de l'approche mortier. Dans l'interface de contact, on désigne la frontière Γ^1 comme

surface maître et la frontière Γ^2 comme surface esclave. Dans l'approche mortier, on utilisera les termes surface mortier Γ^m (maître) et surface non mortier Γ^{nm} (esclave).

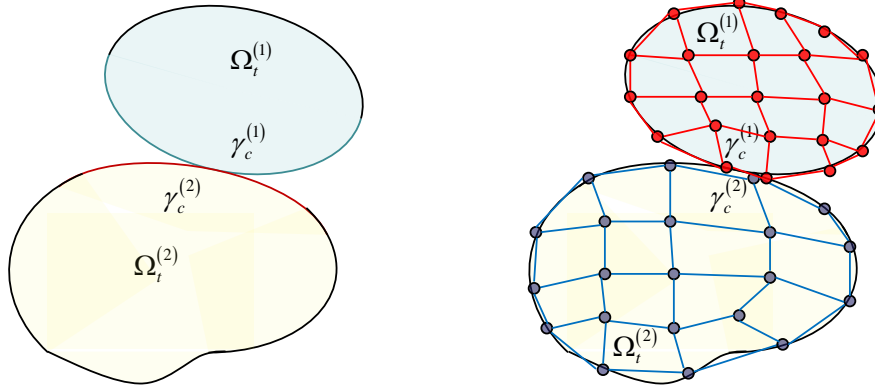


Figure 2.2. Discretisation du problème de contact par la méthode des éléments finis

La méthode mortier permet le couplage des sous domaines issus des surfaces de contact des deux corps définis par deux maillages indépendants. Dans cette approche, le terme ‘segments’ désigne les éléments des surfaces de contact discrétisées (figure 2.2). La surface mortier discrétisée (idem non mortier) n’est que l’union de tous les segments qui la composent :

$$\Gamma^{nm} \approx \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^{nm} \quad \Gamma^m \approx \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i^m \quad (2.1)$$

Les exposants nm et m indiquent respectivement non mortier et mortier. L’interface de contact présente respectivement (M) et (N) segments mortier et non mortier. Vu que les maillages des deux corps en contact ne sont pas conformes, les deux surfaces Γ^{nm} et Γ^m ne sont pas identiques. Pour la suite, c’est la surface non mortier qui servira de support d’intégration pour le calcul des différentes expressions ($\Gamma_c = \Gamma^{nm}$), les variables ξ et ζ désigneront respectivement la coordonnée naturelle dans un segment mortier et non mortier. Avec la méthode des éléments finis le déplacement est discrétisé à travers des fonctions de forme. On s’est limité dans cette étude à l’utilisation d’une approximation linéaire du champ de déplacement sur la frontière. Les fonctions de forme utilisées pour l’interpolation du déplacement sont données par :

$$\begin{aligned} N_1^{nm}(\zeta) &= 1 - \zeta & N_2^{nm}(\zeta) &= \zeta \\ N_1^m(\xi) &= 1 - \xi & N_2^m(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le déplacement u et la position d’un point X de l’interface de contact s’écrivent:

Sur un segment mortier de Γ^m :

$$u^m(\zeta) = \sum_{i=1}^2 N_i^m(\zeta) u_i^m$$

$$X^m(\zeta) = \sum_{i=1}^2 N_i^m(\zeta) X_i^m$$

Sur un segment non-mortier de Γ^{nm} :

$$u^{nm}(\zeta) = \sum_{i=1}^2 N_i^{nm}(\zeta) u_i^{nm}$$

$$X^{nm}(\zeta) = \sum_{i=1}^2 N_i^{nm}(\zeta) X_i^{nm} \quad (2.3)$$

La contribution des efforts de contact au travail virtuel global peut être exprimée comme une fonction de différentes variables, selon la formulation : le gap normal g_N , le gap tangent g_T , le multiplicateur de Lagrange normal λ_N , le multiplicateur de Lagrange tangent λ_T et leurs variations respectives δg_N , δg_T , $\delta \lambda_N$ et $\delta \lambda_T$ ainsi que la pression normale de contact p_N . Cette fonction est la somme de c_N , contribution des efforts normaux de contact, et c_T celle des efforts tangentiels.

$$G_c = \int_{\Gamma_c} c_N(\lambda_N, g_N, \delta \lambda_N, \delta g_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} c_T(\lambda_T, g_T, \delta \lambda_T, \delta g_T, p_N) d\Gamma \quad (2.4)$$

Indépendamment du choix de la formulation, le problème de contact nécessite la résolution d'un système d'équations non linéaires. Après linéarisation des expressions c_N et c_T pour établir le vecteur résidu et la matrice tangente, nous utiliserons l'algorithme de Newton-Raphson pour la résolution du problème final. D'autres non linéarités matérielles et/ou géométriques peuvent s'ajouter à la non linéarité du contact. Détaillons dans ce qui suit les expressions des matrices tangentes et vecteurs résidu pour différentes formulations.

En remplaçant la surface de contact par sa discrétisation (2.1) on peut écrire :

$$G_c = \int_{\Gamma_c} c_N(\lambda_N, g_N, \delta \lambda_N, \delta g_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} c_T(\lambda_T, g_T, \delta \lambda_T, \delta g_T, p_N) d\Gamma$$

$$= \bigcup_{s=1}^N \left[\int_{\Gamma_c^s} c_N(\lambda_N, g_N, \delta \lambda_N, \delta g_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^s} c_T(\lambda_T, g_T, \delta \lambda_T, \delta g_T, p_N) d\Gamma \right] \quad (2.5)$$

Dans cette expression on trouve deux termes à détailler : c_N et c_T . Dans le cas d'un problème de contact sans frottement, seul le premier terme a un sens. La prochaine section est dédiée à la discrétisation de ce terme sous différentes formulations. Une extension au cas de contact avec frottement sera détaillée dans la section suivante.

Pour résoudre un problème de contact, il faut définir une relation entre les deux surfaces de l'interface de contact Γ^{nm} et Γ^m . Cette relation permet d'associer à tout point non mortier le point mortier qui lui est le plus proche. Cette relation exige la résolution d'un problème de minimisation de la distance qui sépare les deux points. Notons par $x^m(X^m, t)$ et $x^{nm}(X^{nm}, t)$ les positions dans la configuration courante des points sur les surfaces mortier et non mortier respectivement.

On introduit une fonction d qui décrit la distance entre un point esclave (non mortier) x^{nm} donné sur la surface γ^{nm} et un point $x^m = \bar{x}^m(\xi, t)$ sur la surface mortier γ^m , avec ξ désignant la coordonnée naturelle sur la surface mortier (figure 2.3). Cette relation est donnée par :

$$d = \|x^{nm} - x^m(\xi, t)\| \quad (2.6)$$

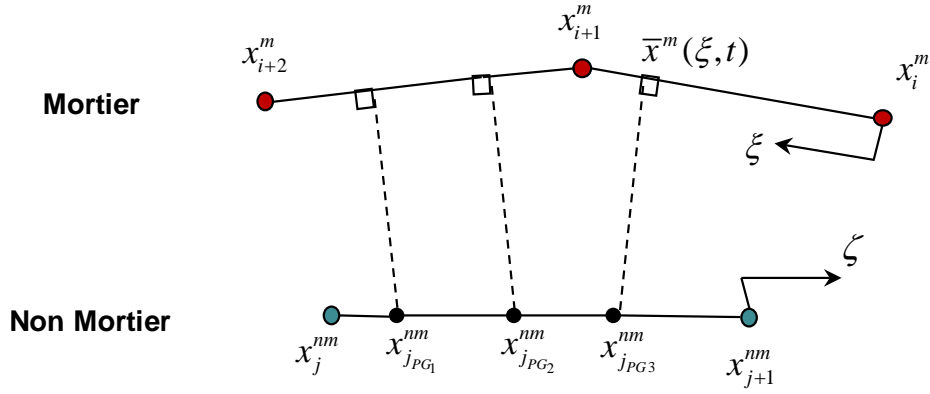


Figure 2.3 projection des points d'intégration du segment non mortier sur les segments mortier

La relation qui relie un point de la surface mortier X^m dans la configuration de référence à son homologue x^m dans la configuration actuelle après l'application d'un déplacement u^m est donnée par :

$$x^m(X^m, t) = X^m + u^m(X^m, t) \quad (2.7)$$

Il en est de même pour un point de la surface non mortier :

$$x^{nm}(X^{nm}, t) = X^{nm} + u^{nm}(X^{nm}, t) \quad (2.8)$$

La distance qui sépare les deux points x^{nm} et \bar{x}^m doit être minimale, cette condition est assurée en vérifiant la relation suivante :

$$\left. \frac{d}{d\xi} d(\xi, t) \right|_{\xi=\bar{\xi}} = 0 \quad (2.9)$$

$\bar{\xi}$ est la valeur de coordonnée naturelle sur le segment mortier qui vérifie (2.9). La droite qui passe par le point x^{nm} et par sa projection \bar{x}^m nous donne la direction du vecteur normal au segment mortier noté n^m et utilisé pour la projection (figure 2.4). Le vecteur normal unitaire peut être donc défini par :

$$n^m = \frac{x^{nm} - \bar{x}^m}{\|x^{nm} - \bar{x}^m\|} \quad (2.10)$$

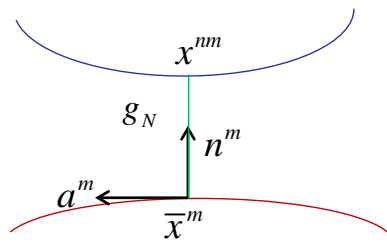


Figure 2.4 Vecteur tangent et vecteur normal pour un point mortier

L'équilibre des efforts sur l'interface de contact γ_c donne :

$$\bar{t}_c^{nm} \cdot d\Gamma^{nm} = -\bar{t}_c^m \cdot d\Gamma^m \quad (2.15)$$

Le travail virtuel des efforts de contact est décrit par :

$$G_C(u, \delta u, t_c) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(i)}} t_c^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} d\Gamma_c^{(i)} \quad (2.16)$$

En utilisant l'égalité de (2.16) le travail virtuel de contact sur la surface de contact esclave γ^{nm} s'écrit :

$$G_C = -\int_{\Gamma^{nm}} \bar{t}_c^{nm} \cdot [\delta u^{nm}(X) - \delta u^m(\bar{X})] d\Gamma^{nm} \quad (2.17)$$

Pour le cas d'un contact normal sans frottement, (2.5) se réduit aux composantes normales et s'écrit :

$$G_c = \int_{\Gamma^{nm}} \lambda_N \cdot \delta g_N d\Gamma^{nm} \quad (2.18)$$

2.3 Formulation d'un problème de contact normal

La résolution du problème par la méthode de Newton-Raphson nécessite la linéarisation de c_N par rapport aux deux variables de contact λ_N et g_N et de leurs variations $\delta\lambda_N$ et δg_N .

$$G_c = \int_{\Gamma_c} c_N(\lambda_N, g_N, \delta\lambda_N, \delta g_N) d\Gamma = \bigcup_{s=1}^N \left[\int_{\Gamma_c^s} c_N(\lambda_N, g_N, \delta\lambda_N, \delta g_N) d\Gamma \right] \quad (2.19)$$

La linéarisation de la fonction c_N peut s'écrire comme suit :

$$\Delta c_N = \frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} \Delta \lambda_N + \frac{\partial c_N}{\partial g_N} \Delta g_N + \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} \Delta \delta g_N + \frac{\partial c_N}{\partial \delta \lambda_N} \Delta \delta \lambda_N \quad (2.20)$$

L'application des conditions de contact peut se faire grâce à différentes formulations [Wriggers06], nous étudierons ici les méthodes de pénalité, des multiplicateurs de Lagrange et du lagrangien augmenté. Pour commencer, on va étudier la résolution par la méthode de pénalité.

2.3.1 Méthode de Pénalité

Dans cette approche, la composante normale de l'effort de contact est proportionnelle à la valeur du gap normal :

$$\lambda_N = \varepsilon_N g_N \quad (2.21)$$

On reprend l'expression de c_N dans le cas de la méthode de pénalité, la contribution du contact au travail virtuel sur un segment non mortier peut être écrite comme suit:

$$G_c = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N g_N \delta g_N d\Gamma = \varepsilon_N \sum_{GP=1}^{n_{GP}} g_N(\zeta) \delta g_N(\zeta) \|X_2^{nm} - X_1^{nm}\| \omega_{GP} \quad (2.22)$$

Avec n_{GP} le nombre des points d'intégration actifs dans le segment non mortier considéré. ω_{GP} désigne le poids d'intégration associé au point et $\|X_2^{nm} - X_1^{nm}\|$ la longueur initiale du segment (notée aussi l_0^{nm}). Etant donné que les variables avec cette méthode sont le gap et sa variation, la linéarisation de c_N se traduit par :

$$\frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} = 0, \quad \frac{\partial c_N}{\partial g_N} = \varepsilon_N \delta g_N, \quad \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} = \varepsilon_N g_N \quad (2.23)$$

Et :

$$\Delta c_N = \varepsilon_N \delta g_N \Delta g_N + \varepsilon_N g_N \Delta \delta g_N \quad (2.24)$$

Pour satisfaire les conditions de non-pénétration, une pression de contact notée p_N se crée à l'interface de contact quand le gap devient négatif (figure 2.6).

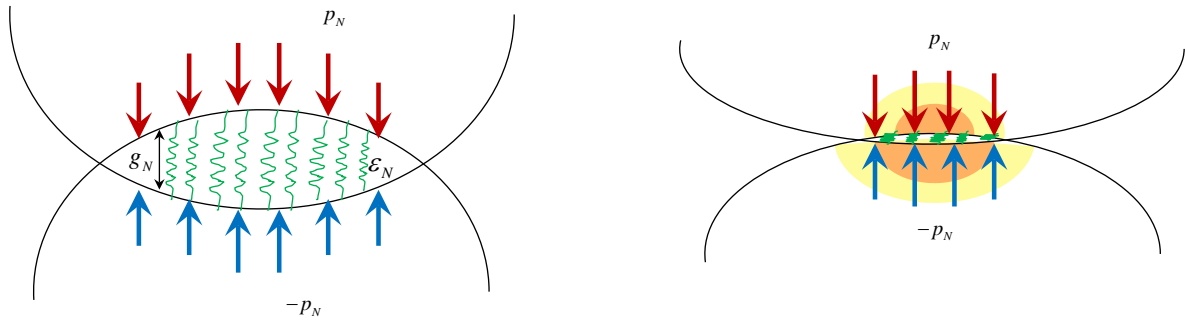


Figure 2.6. Interpénétration des ressorts dans l'interface : méthode de pénalité [Yastrebov11]

Avec la formulation par pénalité, les conditions de Hertz-Signorini-Moreau ne sont pas satisfaites au sens strict puisque la pression de contact n'est générée que s'il y a pénétration entre les deux corps (figure 2.1).

Luenberger dans [Luenberger84] ainsi que Kikuchi et Oden dans [Kikuchi88] ont présenté la pression normale de contact p_N comme une relation linéaire en fonction du gap g_N et un coefficient de pénalisation noté ε_N . La pression normale et le gap sont donc proportionnels, ils sont liés par la relation $p_N = \varepsilon_N g_N$. Plus l'effort de contact est élevé plus la pénétration est faible et les conditions de Hertz-Signorini-Moreau satisfaites. Cette approximation implique que la surface de contact n'élimine pas la pénétration, mais elle résiste à la pénétration. L'interprétation physique conduit à une représentation de la surface principale comme une série de ressorts à longueur initiale nulle qui peut s'allonger à l'intérieur du corps perpendiculairement à la surface principale. La réaction présente une relation linéaire avec l'allongement du ressort. L'allongement pour le ressort est équivalent à la pénétration pour un problème de contact avec la formulation de pénalité. Pour réduire au maximum cet allongement (pénétration), il faut augmenter au maximum la rigidité du ressort (coefficient de

pénalité). Des valeurs trop élevées de ε_N , conduisent à un mauvais conditionnement du système à résoudre et à une dégradation de la convergence.

2.3.1.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente

Considérons un segment non mortier s_j^{nm} en contact avec un segment mortier s_i^m . Les points d'intégration dans s_j^{nm} seront projetés sur s_i^m . En raison de la non-conformité du maillage, des points d'intégration de s_j^{nm} peuvent se projeter sur les segments mortier voisins de s_i^m comme s_{i-1}^m ou bien s_{i+1}^m . Reprenons l'expression du gap normal (2.13) appliquée à un point d'intégration $x_{GP}^{nm}(\zeta)$:

$$g_N = \left[x_{GP}^{nm}(\zeta) - \bar{x}^m(\bar{\xi}) \right] \cdot n^m(\bar{\xi}) \quad (2.25)$$

Pour calculer le gap g_N ainsi que sa variation δg_N il faut d'abord calculer la coordonnée naturelle $\bar{\xi}$ pour chaque projection. A partir de (2.12) et (2.13), la projection peut se traduire par le produit scalaire suivant :

$$\left(x_{GP}^{nm} - \bar{x}^m \right) \cdot a^m = 0 \quad (2.26)$$

Avec a^m le vecteur tangent au segment mortier contenant la projection (figure 2.7). Son expression est la suivante :

$$a^m = x_2^m - x_1^m \quad (2.27)$$

La position du point de projection \bar{x}^m dans un segment mortier est donnée, en fonction de la position des deux nœuds du segment x_1^m et x_2^m , par :

$$\bar{x}^m = (1 - \bar{\xi}) x_1^m + \bar{\xi} x_2^m \quad (2.28)$$

De même, le point non mortier à projeter x_{GP}^{nm} est relié aux deux nœuds non mortier x_1^{nm} et x_2^{nm} par :

$$x_{GP}^{nm} = (1 - \zeta) x_1^{nm} + \zeta x_2^{nm} \quad (2.29)$$

L'expression (2.26) peut être réécrite comme suit :

$$\left(x_{GP}^{nm} - \left[(1 - \bar{\xi}) x_1^m + \bar{\xi} x_2^m \right] \right) \cdot a^m = 0 \quad (2.30)$$

Et donc

$$x_{GP}^{nm} \cdot a^m - x_1^m \cdot a^m + \bar{\xi} (x_1^m - x_2^m) \cdot a^m = 0 \quad (2.31)$$

L'expression de la coordonnée naturelle $\bar{\xi}$ nécessaire au calcul du gap est donnée par :

$$\zeta = \frac{(x_{GP}^{nm} - x_1^m) \cdot a^m}{a^m \cdot a^m} \quad (2.32)$$

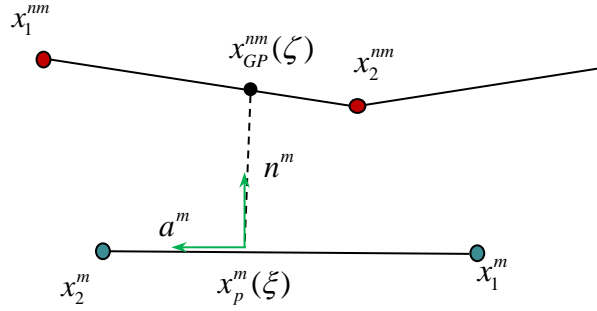


Figure 2.7 projection dans l'interface du contact mortier

En mettant (2.28) et (2.29) dans l'expression du gap (2.25), on obtient :

$$g_N = [(1-\zeta)x_1^{nm} + \zeta x_2^{nm} - (1-\xi)x_1^m - \xi x_2^m] \cdot \bar{n}^m(\xi) \quad (2.33)$$

En utilisant une écriture matricielle plus adaptée à l'implémentation de l'algorithme, on peut écrire :

$$g_N = \langle x_n \rangle [B_{GP}] \{n^m\} \quad (2.34)$$

Avec :

$$\langle x_n \rangle = \langle \langle x_1^{nm} \rangle, \langle x_2^{nm} \rangle, \langle x_1^m \rangle, \langle x_2^m \rangle \rangle \quad (2.35)$$

$$\{n^m\} = \begin{Bmatrix} n_x^m \\ n_y^m \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

$$B_{GP} = \begin{bmatrix} N_1^{nm}(\zeta) \cdot \hat{1} \\ N_2^{nm}(\zeta) \cdot \hat{1} \\ -N_1^m(\xi) \cdot \hat{1} \\ -N_2^m(\xi) \cdot \hat{1} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

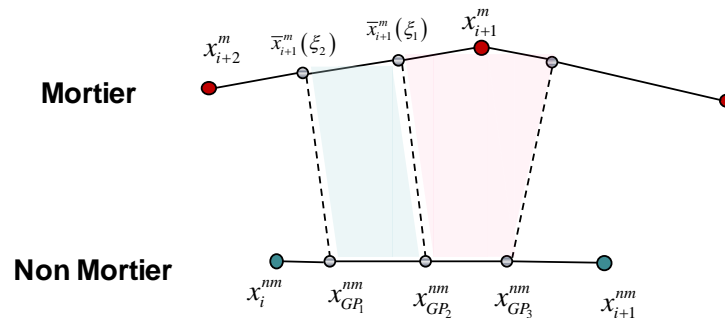


Figure 2.8. Segmentation de l'interface de contact mortier avec la méthode de pénalité

La variation de l'expression (2.25) donne :

$$\delta g_N = \left[\delta x_{GP}^{nm}(\xi) - \delta \bar{x}^m(\bar{\xi}) \right] \cdot n^m(\bar{\xi}) \quad (2.38)$$

Et sous forme matricielle :

$$\delta g_N = \langle \delta x_n \rangle [B_{GP}] \{n^m\} \quad (2.39)$$

$$\text{Avec } \langle \delta x_n \rangle = \langle \langle \delta x_1^{nm} \rangle, \langle \delta x_2^{nm} \rangle, \langle \delta x_1^m \rangle, \langle \delta x_2^m \rangle \rangle \quad (2.40)$$

On peut réécrire (2.22) comme suit :

$$G_c = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N g_N \delta g_N d\Gamma = \varepsilon_N \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \left[\langle \delta x_n \rangle \left([B_{GP}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}]^T \right) \{x_n\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.41)$$

Le vecteur résidu pour le contact peut être écrit dans le cas de la formulation par pénalité comme suit :

$$R_N^{Pen} = \varepsilon_N \left[[B_{GP}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}]^T \right] \{x_n\} l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.42)$$

Il reste à linéariser le deuxième terme de (2.24) pour obtenir l'expression de la matrice tangente.

A partir de (2.11), (2.29) et (2.32), la variation de la coordonnée naturelle ξ est donnée par :

$$\delta \xi = \frac{1}{(l^m)^2} \left[(\delta x^{nm} - \delta \bar{x}^m) \cdot \bar{x}_{,\xi}^m + g_N \bar{n}^m \cdot \delta \bar{x}_{,\xi}^m \right] \quad (2.43)$$

$$\text{Avec } l^m = \|a^m\|$$

En utilisant les relations (2.7) et (2.8), on peut écrire :

$$\Delta \xi = \frac{1}{(l^m)^2} \left[(\Delta u^{nm} - \Delta u^m) \cdot \bar{x}_{,\xi}^m + g_N n^m \cdot \Delta u_{,\xi}^m \right] \quad (2.44)$$

La linéarisation de (2.38) donne :

$$\Delta g_N = \left[\Delta u^{nm} - \Delta u^m(\xi) \right] \cdot n^m(\xi) \quad (2.45)$$

Finalement la linéarisation de la variation du jeu minimal dans la direction normale $\Delta(\delta g_N)$ peut être écrite comme suit:

$$\Delta(\delta g_N) = - \left(\delta x_{,\xi}^m \Delta \xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta \xi \right) \cdot \bar{n}^1 + \frac{g_N}{(l^m)^2} \delta x_{,\xi}^m \cdot \left[n^m \otimes n^m \right] \Delta u_{,\xi}^m \quad (2.46)$$

Remplaçons les expressions de (2.7), (2.11), (2.43) et (2.44) dans (2.46) on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta g_N) = & - \left(\delta a^m \left[\frac{1}{(l^m)^2} \left[(\Delta u^{nm} - \Delta u^m) \cdot a^m + g_N n^m \cdot \Delta u_{,\xi}^m \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \Delta u_{,\xi}^m \left[\frac{1}{(l^m)^2} \left[(\delta x^{nm} - \delta \bar{x}^m) \cdot a^m + g_N \bar{n}^m \cdot \delta a^m \right] \right] \right) \cdot \bar{n}^1 \right. \\
& \left. + \frac{g_N}{(l^m)^2} \delta a^m \cdot [n^m \otimes n^m] \Delta u_{,\xi}^m \right)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

En utilisant (2.8), (2.12), (2.47) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta g_N) = & -\Delta \xi (\delta x_2^m - \delta x_1^m) \cdot n^m + [\delta x^{nm} - (1 - \bar{\xi}) \delta x_1^m - \bar{\xi} \delta x_2^m] \cdot n^m \\
= & -\frac{1}{l^m} [\Delta u^{nm} - (1 - \bar{\xi}) \Delta u_1^m - \bar{\xi} \Delta u_2^m] \cdot a^m (\delta x_2^m - \delta x_1^m) \cdot n^m \\
& - \frac{g_N}{(l^m)^2} (\delta x_2^m - \delta x_1^m) \cdot n^m (\Delta u_2^m - \Delta u_1^m) \cdot n^m \\
& - \frac{1}{l^m} [\delta x^{nm} - (1 - \bar{\xi}) \delta x_1^m - \bar{\xi} \delta x_2^m] \cdot a^m (\Delta u_2^m - \Delta u_1^m) \cdot n^m
\end{aligned} \tag{2.48}$$

En utilisant (2.28), (2.45) et (2.33), l'expression (2.48) devient :

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta g_N) = & \langle \delta x_n \rangle \left[-\frac{1}{(l^m)^2} \left([B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP}]^T + [B_{GP}] \{a^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right. \right. \\
& \left. \left. + g_N [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right) \right] \{ \Delta x_n \}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Sous forme matricielle on peut réécrire (2.24) comme suit :

$$\Delta(c_N) = \langle \delta x_n \rangle [K_N^{Pen}] \{ \Delta x_n \} \tag{2.50}$$

La matrice tangente est finalement donnée, pour la formulation par pénalité, par :

$$\begin{aligned}
K_N^{Pen} = & \varepsilon_N \left[[B_{GP}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}]^T - \left([B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP}]^T + [B_{GP}] \{a^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right. \right. \\
& \left. \left. + g_N [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right) \frac{g_N}{\|a^m\|^2} \right] l_0^{nm} \omega_{GP}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Avec

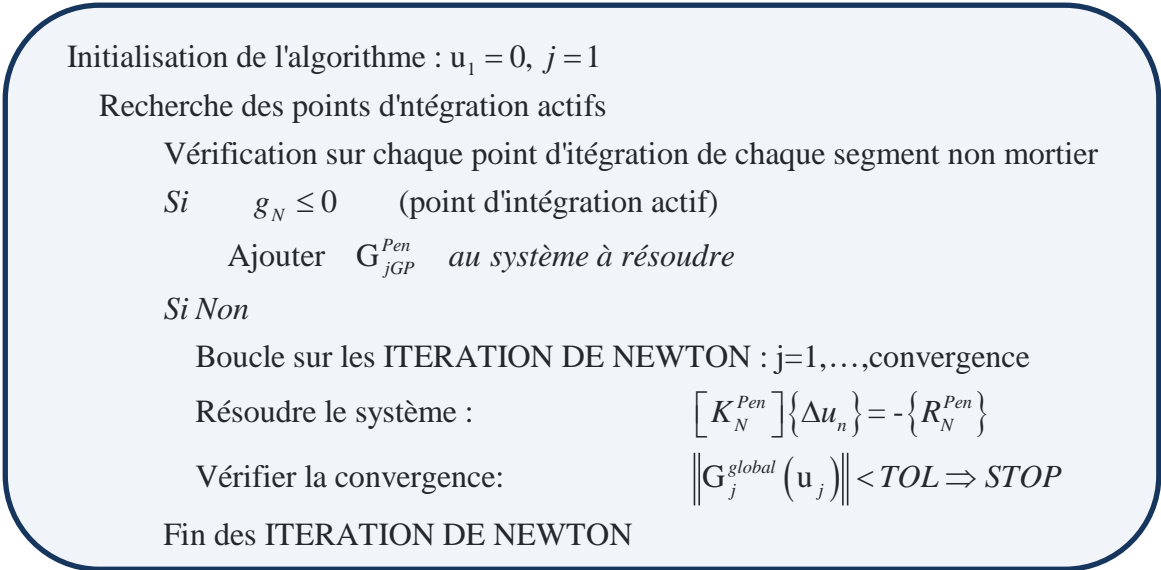


Figure 2.10. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec la méthode de pénalisation

2.3.1.3 Exemple de validation

Une poutre en aluminium est à moitié posée sur un support en acier. Afin d'éviter son basculement, un plateau de 15 mm de longueur est posé sur la poutre à partir de son extrémité droite pour empêcher le déplacement vertical. On applique une force verticale vers le bas sur l'extrémité gauche de la poutre (figure 2.11).

Matériaux des deux corps :

$$E_{\text{support}} = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu_{\text{support}} = 0.3$$

$$E_{\text{plaque}} = 6.9 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu_{\text{plaque}} = 0.33$$

Chargement :

$$F_y = 1.0 \times 10^8 \text{ N}$$

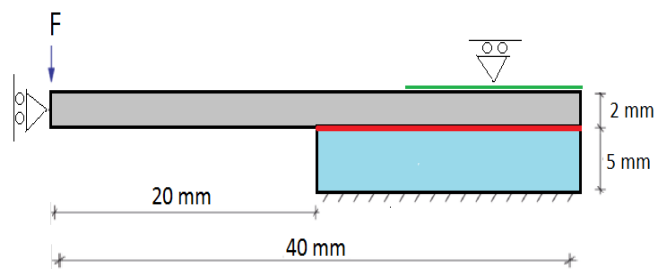
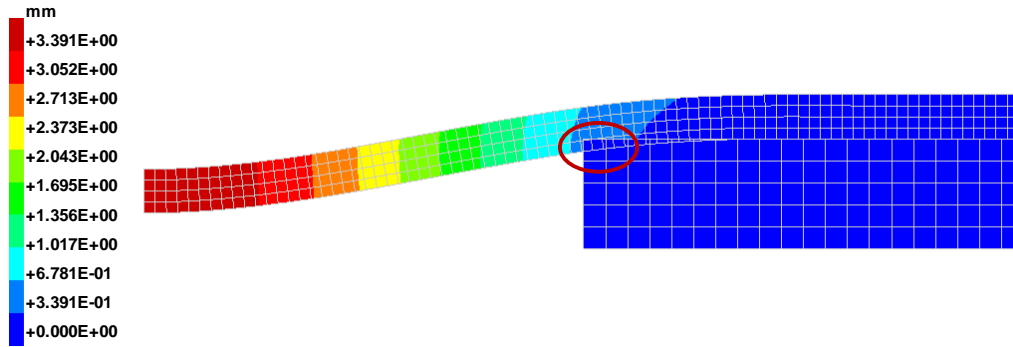
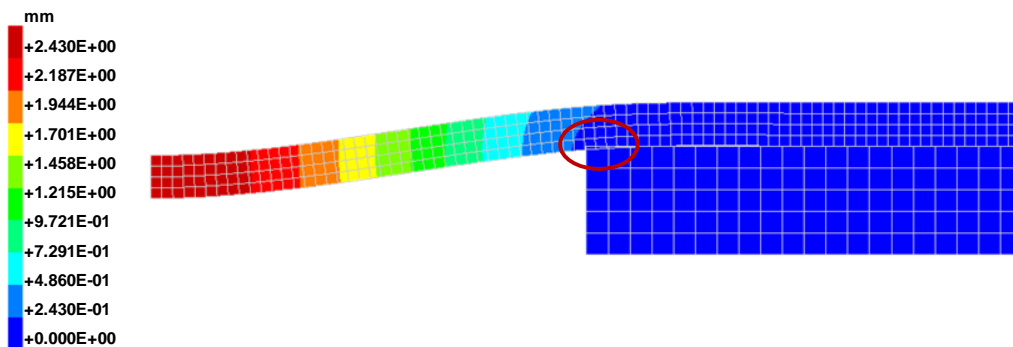


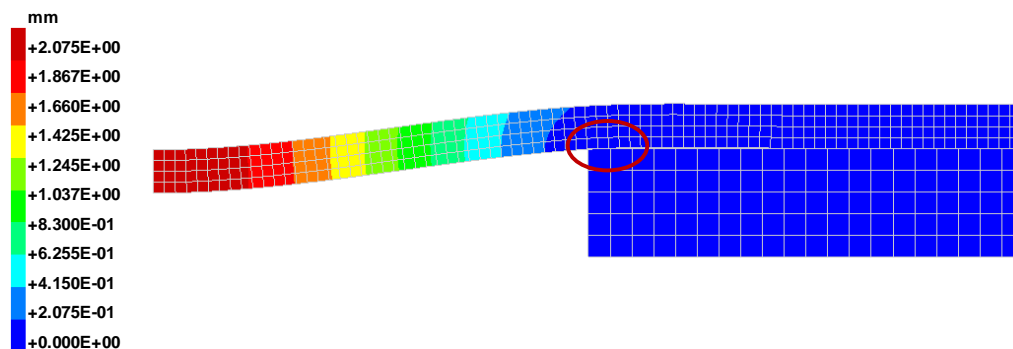
Figure 2.11. Schéma du problème de contact entre une poutre et un support.



(a) Coefficient de pénalité $\varepsilon_N = 1 \times 10^8$



(b) Coefficient de pénalité $\varepsilon_N = 1 \times 10^9$



(c) Coefficient de pénalité $\varepsilon_N = 1 \times 10^{10}$

Figure 2.12. Configuration déformée du problème de contact entre poutre et support.

On remarque l'influence du coefficient de pénalité sur la qualité de la solution (figure 2.12). Pour cet exemple de contact entre l'acier et l'aluminium, une valeur de $\varepsilon_N = 1 \times 10^{10}$ était nécessaire pour éviter le chevauchement entre la poutre et le support au niveau de l'angle droit. La réaction dans la direction horizontale se stabilise à partir d'une valeur de $\varepsilon_N = 1 \times 10^9$, alors qu'une valeur à partir de $\varepsilon_N = 1 \times 10^{10}$ est nécessaire pour stabiliser les réactions verticales (Figure 2.13). Le coefficient de pénalité peut être estimé en fonction de la rigidité des corps en contact comme il peut être actualisé au cours du calcul en fonction de la pénétration [Zavarise12].

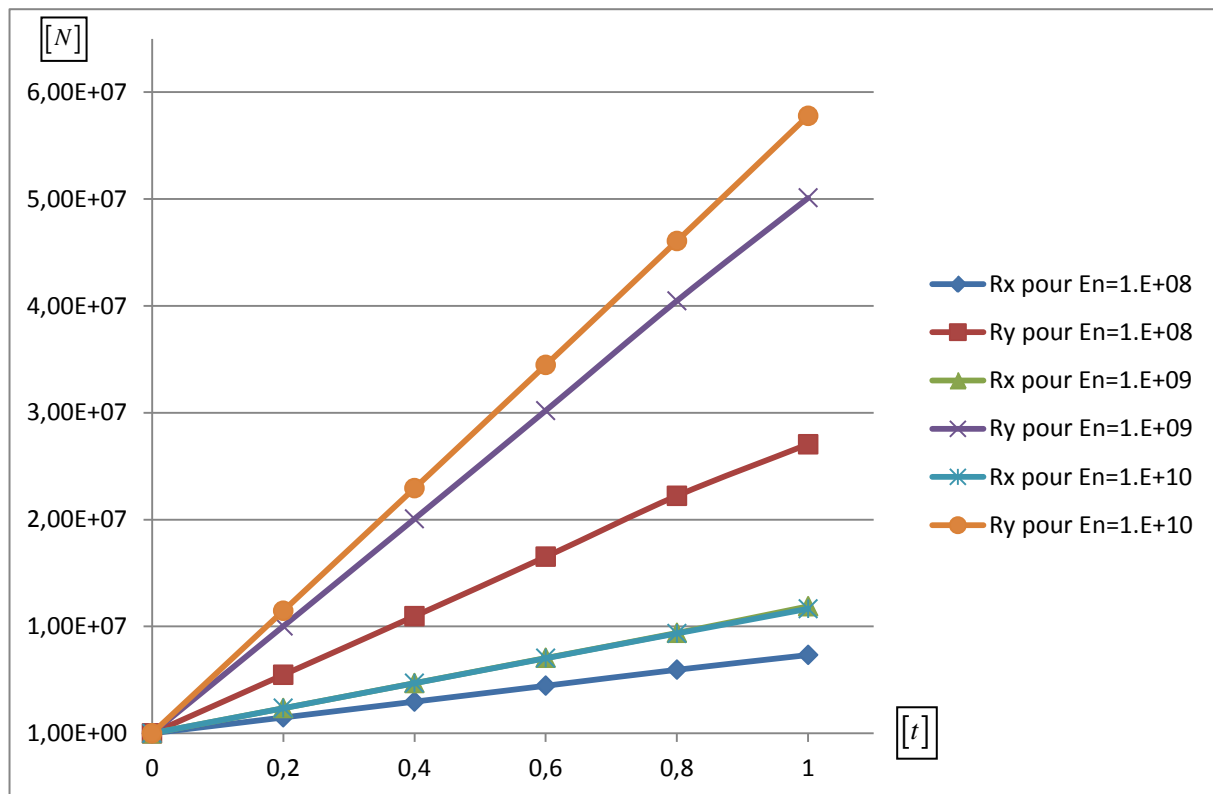


Figure 2.13. Variation de la réaction normale et tangentielle en fonction de la valeur du coefficient de pénalité

2.3.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

On peut également transformer l'écriture d'un problème de contact sous forme d'une inégalité à un système d'équations (égalités) en utilisant des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode initialement utilisée dans la théorie de l'optimisation pour trouver une valeur minimale d'une fonction soumise à certaines contraintes. Pour la formulation d'un problème de contact, les contraintes à vérifier sont les conditions de non-pénétration. Les multiplicateurs de Lagrange représentent la pression de contact, inconnue, à calculer d'une manière optimisée pour satisfaire ces conditions. Ce problème, dans certaines circonstances, peut être remplacé par la recherche d'un point fixe (extremum, point de selle précisément) d'une fonctionnelle dont l'inconnue est le multiplicateur de Lagrange. L'application des conditions de contact avec la formulation des multiplicateurs de Lagrange est développée dans cette partie avec la méthode de discrétisation de l'interface de contact mortier. Cette méthode permet le couplage des sous domaines issus des surfaces de contact des deux corps définis par deux maillages différents.

Les multiplicateurs de Lagrange seront considérés comme des inconnues supplémentaires dans le système à résoudre. Pour une modélisation par la méthode des éléments finis, cela signifie que ces multiplicateurs seront traités comme des degrés de liberté de plus qui constituent un champ à calculer avec le champ de déplacement. Comme pour l'interpolation du champ de déplacement, il faut employer des fonctions de forme pour l'interpolation des multiplicateurs de Lagrange. Il reste maintenant à clarifier le choix de ces fonctions. Wohlmuth dans [Wohlmuth00b] a détaillé l'importance du choix des fonctions de formes

pour l'interpolation des multiplicateurs de Lagrange et les auteurs ont choisi les fonctions de forme suivantes :

$$M_1^{nm} = 2 - 3\zeta \quad M_2^{nm} = -1 + 3\zeta \quad (2.56)$$

Les deux expressions de M_1^{nm} et de M_2^{nm} sont en fonction de la coordonnée naturelle ζ vu que les multiplicateurs de Lagrange sont définis sur les segments non mortier (surface esclave). Dans la littérature, on peut trouver une application duale des multiplicateurs de Lagrange qui consiste à succéder l'intégration des multiplicateurs sur la surface esclave puis sur la surface maître ou l'inverse. On peut trouver plus de détail sur cette technique dans les travaux de [Wohlmuth00b], [Hueber05a], [Hueber05b], [Flemiscli05], [Hartmann07], [Hartmann08], [Popp09], [Popp10] et [Cichosz11]. Les fonctions de forme adoptées par Wohlmuth et présentées dans (2.56) n'expriment pas une valeur maximale du multiplicateur aux extrémités. En remplaçant la valeur de la coordonnée naturelle ζ par 0 et par 1 les fonctions de forme ne s'annulent pas. D'où la valeur maximale du multiplicateur est à l'intérieur de l'élément et non pas au sommet (figure 2.14).

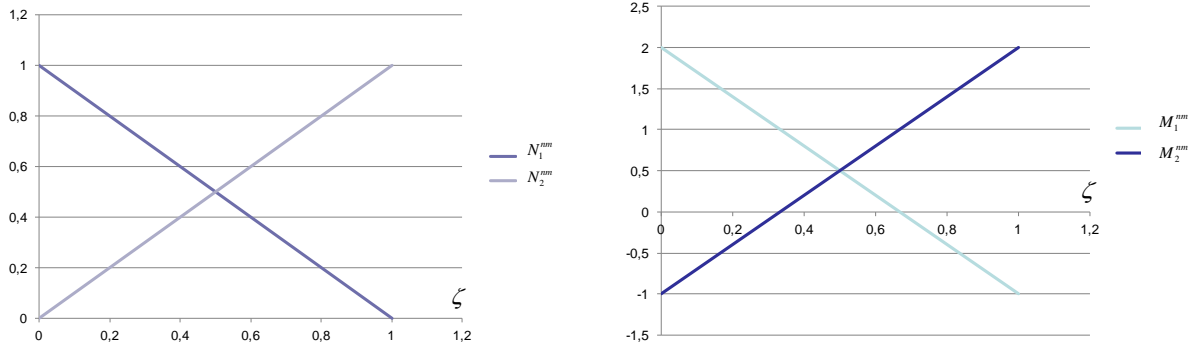


Figure 2.14. Fonctions de forme pour l'interpolation des multiplicateurs de Lagrange.

Les fonctions de forme pour les multiplicateurs de Lagrange M_i^{nm} doivent être du même ordre que celles utilisées pour le champ de déplacement. Après avoir testé les fonctions de forme proposées par Wolmuth, nous avons finalement opté, dans ce travail, pour l'utilisation de fonctions de forme identiques pour l'interpolation du champ de déplacement et des multiplicateurs de Lagrange. Avec ce choix, les multiplicateurs de Lagrange sont définis aux nœuds et ils seront considérés comme un degré de liberté supplémentaire sur chaque nœud.

Dans cette approche, la composante normale de l'effort est égale au multiplicateur de Lagrange normal λ_N . On reprend l'expression de la contribution du contact au travail virtuel sur un segment non mortier dans le cas de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on peut écrire:

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_N \delta g_N + \delta \lambda_N g_N) d\Gamma = \sum_{GP=1}^{n_{GP}} (\lambda_N(\zeta) \delta g_N(\zeta) + \delta \lambda_N(\zeta) g_N(\zeta)) l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.57)$$

Etant donné que les variables avec cette méthode sont le gap normal g_N et sa variation δg_N ainsi que le multiplicateur normal λ_N et sa variation $\delta \lambda_N$, la linéarisation de c_N se traduit par :

$$\frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} = \delta g_N, \quad \frac{\partial c_N}{\partial g_N} = \delta \lambda_N, \quad \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} = \lambda_N \quad (2.58)$$

Et

$$\Delta c_N = \delta g_N \Delta \lambda_N + \delta \lambda_N \Delta g_N + \lambda_N \Delta \delta g_N \quad (2.59)$$

Le multiplicateur de Lagrange injecté dans la solution représente physiquement la pression de contact. Son introduction brutale dans la formulation du contact rend la résolution plus difficile qu'un problème approché par la méthode de pénalisation dont la réponse est progressive et proportionnelle à la pénétration. La solution du problème nécessite l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson. La matrice tangente et le vecteur résidu pour la formulation des multiplicateurs de Lagrange seront détaillés dans la section qui suit.

2.3.2.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente

Nous reprenons l'expression du gap dans (2.33) et nous l'écrivons sous forme matricielle dans le cas de la formulation par multiplicateurs de Lagrange :

$$g_N = \langle x_n^{Lag} \rangle [B_{GP}^{Lag}] \{n^m\} \quad (2.60)$$

Avec :

$$\langle x_n^{ML} \rangle = \langle \langle x_1^{nm} \rangle, \langle x_2^{nm} \rangle, \langle x_1^m \rangle, \langle x_2^m \rangle, \lambda_{N_1}, \lambda_{N_2} \rangle \quad (2.61)$$

$$B_{GP}^{Lag} = \begin{bmatrix} N_1^{nm}(\zeta) \cdot \hat{1} \\ N_2^{nm}(\zeta) \cdot \hat{1} \\ -N_1^m(\xi) \cdot \hat{1} \\ -N_2^m(\xi) \cdot \hat{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Le vecteur $\langle x_n^{ML} \rangle$ contient, par rapport à son équivalent dans la formulation avec pénalisation, deux inconnues supplémentaires λ_{N_1} et λ_{N_2} qui correspondent aux valeurs du multiplicateur de Lagrange aux nœuds du segment non mortier (figure 2.15).

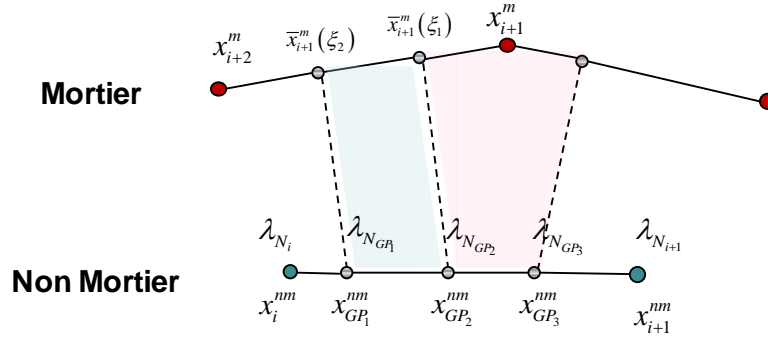


Figure 2.15. Segmentation de l'interface de contact mortier avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange

La variation de l'expression (2.25) sous forme matricielle pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange est donnée par:

$$\delta g_N = \langle \delta x_n \rangle [B_{GP}] \{n^m\} \quad (2.63)$$

$$\text{Avec } \langle \delta x_n \rangle = \langle \langle \delta x_1^{nm} \rangle, \langle \delta x_2^{nm} \rangle, \langle \delta x_1^m \rangle, \langle \delta x_2^m \rangle, \delta \lambda_{N_1}, \delta \lambda_{N_2} \rangle \quad (2.64)$$

La valeur du multiplicateur de Lagrange à un point d'intégration du segment non mortier est donnée par :

$$\lambda_{N_{GP}} = (1 - \zeta) \lambda_1 + \zeta \lambda_2 \quad (2.65)$$

Et sous forme matricielle :

$$\lambda_{N_{GP}} = \langle x_n \rangle [M_{GP}^{Lag}] \quad (2.66)$$

Avec

$$[M_{GP}^{Lag}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1^{nm}(\zeta) \\ M_2^{nm}(\zeta) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

La variation de (2.66) est donnée par :

$$\delta \lambda_{N_{GP}} = \langle \delta x_n \rangle [M_{GP}^{Lag}] \quad (2.68)$$

On peut réécrire (2.57) comme suit :

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_N \delta g_N + \delta \lambda_N g_N) d\Gamma = \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \left[\langle \delta x_n \rangle \left([B_{GP}^{Lag}] \{n^m\} [M_{GP}^{Lag}]^T + [M_{GP}^{Lag}] \langle n^m \rangle [B_{GP}^{Lag}]^T \right) \{x_n\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.69)$$

Le vecteur résidu pour le contact peut être écrit dans le cas de la formulation par multiplicateurs de Lagrange comme suit :

$$R_N^{Lag} = \left[[B_{GP}^{Lag}] \{n^m\} [M_{GP}^{Lag}]^T + [M_{GP}^{Lag}] \langle n^m \rangle [B_{GP}^{Lag}]^T \right] \{x_n\} l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.70)$$

Pour obtenir l'expression de la matrice tangente, il faut linéariser les trois termes de (2.59) et la réécrire sous forme matricielle. Avec (2.45), (2.63) et (2.68), on peut réécrire les deux premiers termes de (2.59). Il reste à trouver une écriture matricielle du troisième terme.

La variation de la coordonnée naturelle ξ est détaillée dans (2.43) et sa linéarisation dans (2.44). La linéarisation de la variation du gap $\Delta(\delta g_N)$ est donnée dans (2.50).

Sous forme matricielle on peut réécrire (2.59) comme suit :

$$\Delta(c_N) = \langle \delta x_n \rangle [K_N^{Lag}] \{\Delta x_n\} \quad (2.71)$$

La matrice tangente pour la formulation par multiplicateur de Lagrange est donnée par :

$$K_N^{Lag} = \left[[B_{GP}^{Lag}] \{n^m\} [M_{GP}^{Lag}]^T + [M_{GP}^{Lag}] \langle n^m \rangle [B_{GP}^{Lag}]^T - \left([B_{GP,\xi}^{Lag}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP}^{Lag}]^T + [B_{GP}^{Lag}] \{a^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}^{Lag}]^T \right) + g_N [B_{GP,\xi}^{Lag}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}^{Lag}]^T \right] \frac{\lambda_N}{\|a^m\|^2} l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.72)$$

Avec

$$B_{GP,\xi}^{Lag} = \begin{bmatrix} \hat{0} \\ \hat{0} \\ -N_{1,\xi}^m(\xi) \cdot \hat{1} \\ -N_{2,\xi}^m(\xi) \cdot \hat{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Le vecteur résidu (2.70) et la matrice tangente (2.72) constituent la contribution d'un point d'intégration de l'interface de contact (figure 2.15) au système global. Notons qu'il faut tenir compte de la contribution de tous les points d'intégration de l'interface.

2.3.2.2 Algorithme de résolution

Un segment non mortier possède une valeur du multiplicateur de Lagrange par nœud (figure 2.14). Deux multiplicateurs de même segment possèdent le même statut : ils sont tous les

deux actifs, ou inactifs. Les multiplicateurs de chaque segment sont inactifs par défaut. Une violation de la condition de non pénétration active ces derniers. La vérification de cette condition ne se fait pas point par point comme c'est le cas dans la méthode de pénalité mais plutôt sur tout le segment. A chaque pas de chargement, les conditions de contact ne sont considérées que pour les segments actifs.

Au premier pas de chargement, on vérifie le statut de chaque segment. Si la somme des jeux (gap) pondérés des points d'intégration d'un même segment est négative, ce segment devient actif et ses multiplicateurs seront considérés dans le système à résoudre (figure 2.16).

$$\sum_{GP}^{N_{GP}} g_N \omega_{GP} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow & \text{segment non mortier actif} \\ & \lambda_{N_1} \text{ et } \lambda_{N_2} \text{ deviennent actifs} \\ > 0 \Rightarrow & \text{segment non mortier non actif} \\ & \text{désactivation de } \lambda_{N_1} \text{ et } \lambda_{N_2} \end{cases}$$

Figure 2.16 Condition d'activation des multiplicateurs pour la méthode de Lagrange

Au cours du prochain pas de calcul, l'algorithme présenté dans la figure 2.16 sera utilisé pour les segments inactifs, mais on ajoute un autre algorithme pour vérifier si les multiplicateurs déjà actifs vont maintenir leur statut pour ce pas de chargement. Les segments actifs gardent leur statut si la somme des multiplicateurs pondérés calculés aux points d'intégration est négative. Si cette somme devient positive, les deux multiplicateurs de Lagrange (nodaux) de ce segment seront désactivés et retirés du système à résoudre. Tous les points d'intégration du segment seront, de même, retirés de la liste des points actifs, et ils ne contribuent plus au calcul du vecteur résidu et de la matrice tangente (figure 2.17).

$$\sum_{GP}^{N_{GP}} \lambda_{N_{sGP}} \omega_{GP} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow & \text{segment non mortier actif} \\ & \lambda_{N_1} \text{ et } \lambda_{N_2} \text{ deviennent actifs} \\ > 0 \Rightarrow & \text{segment non mortier non actif} \\ & \text{désactivation de } \lambda_{N_1} \text{ et } \lambda_{N_2} \end{cases}$$

Figure 2.17 Algorithme des 'Active Set' pour la formulation de Lagrange pour la vérification de la condition de non pénétration et le maintien des points d'intégration actifs

L'algorithme de résolution détaillé pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange est présenté dans la figure (2.18).

Initialisation de l'algorithme : $u_1 = 0, j = 1$

Vérification pour chaque segment non mortier si ses multiplicateurs sont déjà actifs

Si OUI, et $\sum_{GP=1}^N \lambda_{N_{GP}} \omega_{GP} \leq 0$ segment reste actif

Si NON, et $\sum_{GP=1}^N g_{N_{GP}} \omega_{GP} \leq 0$ multiplicateurs deviennent actifs

Ajouter $G_{jGP}^{Lag}(u_i)$ au système à résoudre

Si NON aucun multiplicateur ne sera ajouté au système à résoudre

Boucle sur les ITERATIONS DE NEWTON : $j=1, \dots, \text{convergence}$

Résoudre le système : $[K_N^{Lag}] \{\Delta u_n\} = -\{R_N^{Lag}\}$

Vérifier la convergence: $\|G_j^{global}(u_i)\| < TOL \Rightarrow STOP$

Fin des ITERATIONS DE NEWTON

Figure 2.18 Algorithme de résolution d'un problème de contact avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange

2.3.2.3 Exemple de validation

Dans ce problème de contact en grand déplacement [Tur12], un disque solide interagit avec une demi-couronne (base) avec un déplacement vertical $\Delta_y = 80 UL$ (figure 2.19). Le rayon du disque et la surface de la base de contact est $R = 50 UL$, tandis que le rayon externe de la base est de $R_e = 125 UL$. Un comportement de matériau hyper-élastique néo-Hookeen est considéré pour les deux solides. Le disque, avec le module de Young $E_{disque} = 1.10^5 F/UL^2$, est 10 fois plus rigide que le bloc. Les deux corps présentent le même coefficient de Poisson, $\nu = 0.3$.

Matériaux des deux corps :

$$E_{disque} = 1.10^5 F/UL^2 \quad \nu = 0.3$$

$$E_{base} = 1.10^4 F/UL^2 \quad \nu = 0.3$$

Chargement :

$$\Delta_y = 80 UL$$

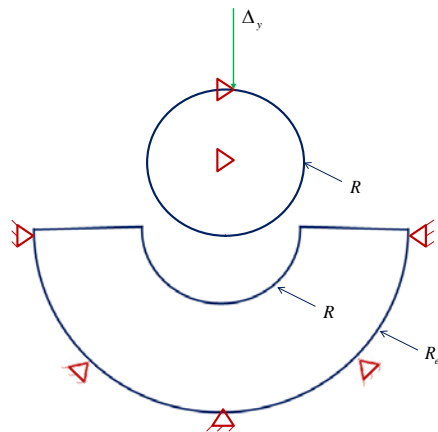


Figure 2.19. Schéma du problème de contact entre un disque et une couronne

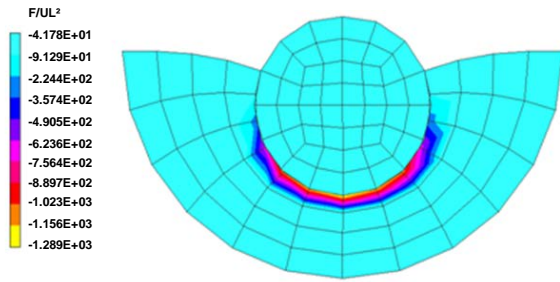


Figure 2.20. Distribution des multiplicateurs de Lagrange du problème de contact entre un disque et une couronne

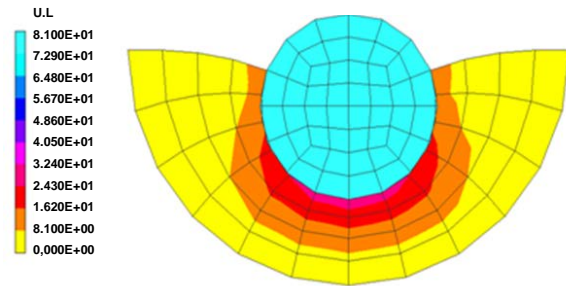


Figure 2.21. Configuration déformée du problème de contact entre un disque et une couronne

Cet exemple est similaire à celui de [Fischer06]. Dans ce papier Fischer et al. ont utilisé jusqu'à 20 points d'intégration par élément. Dans notre exemple, nous avons remarqué qu'il n'y avait pas besoin d'utiliser plus que 6 points d'intégration pour avoir une bonne précision.

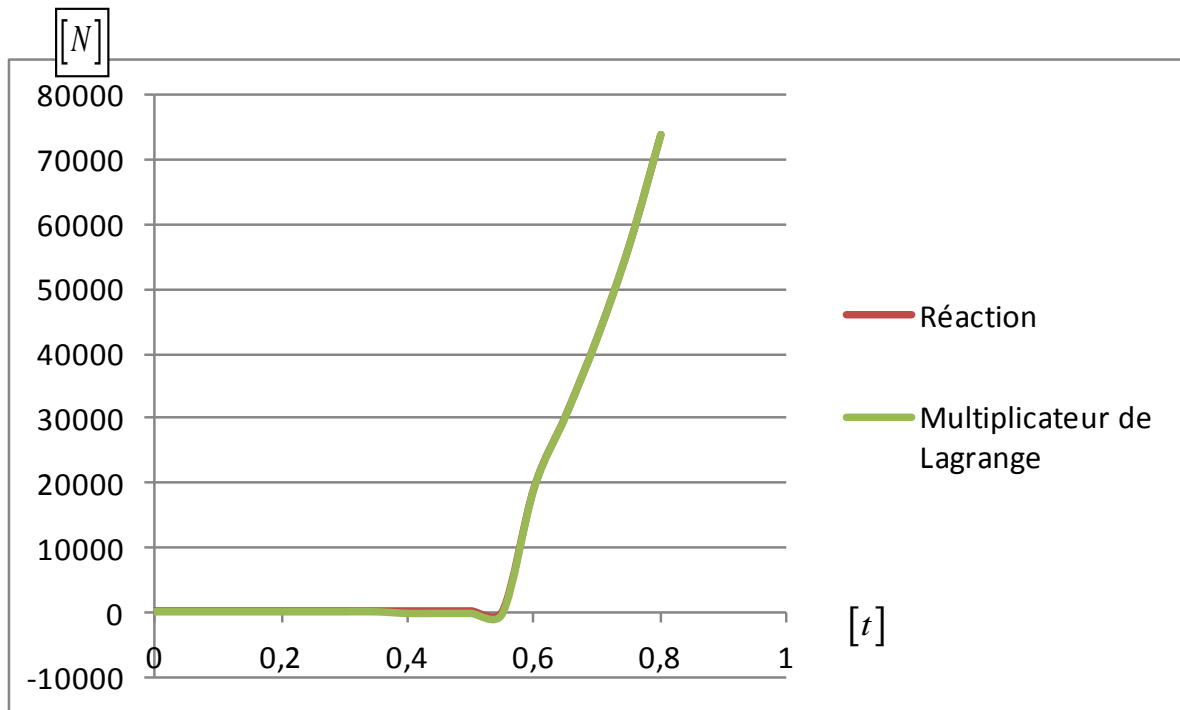


Figure 2.22. Evolution de la réaction et des multiplicateurs de Lagrange pour le problème de contact entre un disque et une couronne

On remarque qu'avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, l'intégralité de l'effort appliqué sur le disque est reprise par les efforts de contact (figure 2.22). La somme de ces derniers est exactement égale pour cette formulation à la somme des multiplicateurs de Lagrange. Ce qui n'est pas toujours le cas avec la méthode de pénalité (comme montré ultérieurement).

2.3.3 Méthode du lagrangien augmenté

Cette formulation a pour but de régulariser la non différentiabilité des termes de contact (déplacement et forces) pour un problème avec ou sans frottement en combinant la méthode de pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ce type de formulation a été initialement considéré dans le contexte de l'incompressibilité des contraintes [Glowinski84], puis dans les problèmes de contact sans frottement [Wriggers85] et [Kikuchi88], et enfin pour la résolution des problèmes de contact avec frottement et en grandes transformations comme dans [Simo92] et [Laursen93a]. Cette méthode mène à un problème de point de selle qui est C^1 différentiable [Pietrzak99].

L'effort normal de contact est obtenu par la combinaison d'un multiplicateur de Lagrange et d'un terme de pénalité. On cherche une bonne approximation du multiplicateur exact par la formule

$$\lambda_N^{(k+1)} = \left\langle \lambda_N^{(k)} + \varepsilon_N g_N \right\rangle \quad (2.74)$$

Le symbole $\langle \cdot \rangle$ représente les crochets de Macauley. Il est défini par $\langle x \rangle = \frac{1}{2} [x + |x|]$ et l'indice k présente le compteur des augmentations. Une variation simplifiée de cette écriture à travers une technique adaptée par des multiplicateurs de Lagrange est utilisée afin de mettre à jour la valeur des multiplicateurs d'une itération à une autre. La valeur exacte du multiplicateur de Lagrange est obtenue par un algorithme itératif d'augmentation. Cette valeur est maintenue pendant l'itération de newton i pour résoudre la forme faible et sera actualisée dans l'itération suivante $i+1$. Cet algorithme d'augmentation est connu sous le nom de la technique d'Uzawa (Figure 2.23).

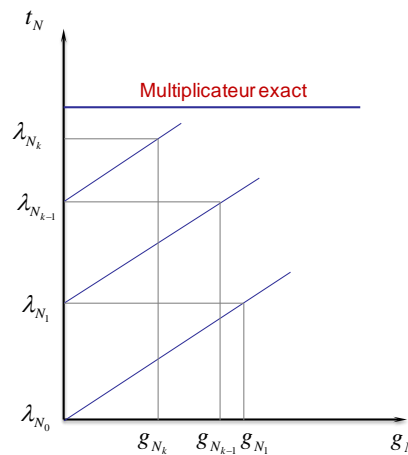


Figure 2.23. Schéma de l'algorithme d'Uzawa pour l'augmentation du multiplicateur

Pour un point donné dans l'interface, on essaie de calculer l'effort de contact normal pour un segment actif. Un processus itératif est nécessaire pour atteindre la valeur exacte du multiplicateur de Lagrange λ_N . Au début de chaque pas de chargement, la valeur initiale du multiplicateur de Lagrange λ_{N_0} est nulle. L'approximation de l'effort de contact sera composée uniquement du terme de pénalité. Si la rigidité de contact à ce stade est insuffisante pour satisfaire les conditions de non pénétration, une valeur de pénétration est alors détectée. Cette valeur déclenche l'algorithme d'augmentation du multiplicateur de Lagrange. L'amplitude de la pression normale de contact avant la première itération d'augmentation est égale au multiplicateur de Lagrange $\lambda_{(1)}^{(n)}$ et qui n'est que le produit de la valeur de la pénétration par le coefficient de pénalité. La valeur du multiplicateur obtenue sera cumulée

avec le produit de la nouvelle valeur de pénétration et le coefficient de pénalité. Ce cumul augmente la valeur du multiplicateur de Lagrange d'une itération à une autre alors que la valeur de la pénétration, elle, diminue. Le système à résoudre contiendra la nouvelle valeur du multiplicateur. La valeur de la pénétration continue à diminuer avec les itérations d'augmentation jusqu'à celle s'annule (figure 2.24). Dans ce cas (pénétration nulle) la condition de non pénétration sera vérifiée et la valeur du multiplicateur augmenté obtenue représente la valeur exacte de la pression de contact. La technique d'augmentation de la valeur du multiplicateur de Lagrange au cours d'un pas de chargement est détaillée dans le schéma suivant.

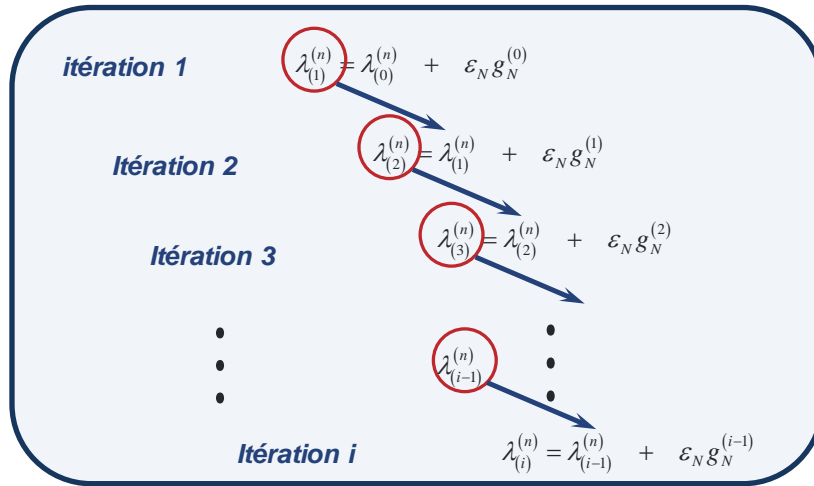


Figure 2.24. Schéma d'augmentation du multiplicateur de Lagrange normal pour un pas de chargement n

Dans cette approche, la composante normale de l'effort est égale au multiplicateur de Lagrange normal λ_N donné par (2.74). On reprend l'expression de la contribution du contact normal c_N pour la méthode du lagrangien augmenté, la contribution du contact au travail virtuel sur un segment non mortier peut être écrite comme suit:

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma_c} (\bar{\lambda}_N + \varepsilon_N g_N) \delta g_N d\Gamma = \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \left((\bar{\lambda}_N(\zeta) + \varepsilon_N g_N(\zeta)) \delta g_N(\zeta) \right) l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.75)$$

Les variables avec cette méthode sont le gap normal g_N et sa variation δg_N , le multiplicateur normal $\bar{\lambda}_N$ n'est pas une inconnue du système à résoudre. Il est actualisé à chaque pas de chargement et calculé à partir de g_N par l'expression (2.74). La linéarisation de c_N se traduit par :

$$\frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} = 0, \quad \frac{\partial c_N}{\partial g_N} = \varepsilon_N \delta g_N, \quad \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} = \bar{\lambda}_N + \varepsilon_N g_N \quad (2.76)$$

Et

$$\Delta c_N = \varepsilon_N \delta g_N \Delta g_N + (\bar{\lambda}_N + \varepsilon_N g_N) \Delta \delta g_N \quad (2.77)$$

La valeur du multiplicateur de Lagrange présent dans (2.75) égale la pression de contact. La matrice tangente et le vecteur résidu pour la formulation du Lagrangien augmenté seront détaillés dans la section qui suit.

2.3.3.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente

Nous reprenons l'expression du gap dans (2.33) et nous l'écrivons sous forme matricielle dans le cas de la formulation du Lagrangien augmenté:

$$g_N = \langle x_n^{Aug} \rangle [B_{GP}^{Aug}] \{n^m\} \quad (2.78)$$

Les multiplicateurs utilisés dans cette approche ne sont pas des variables supplémentaires : donc le vecteur $\langle x_n^{Aug} \rangle$ et la matrice des fonctions de forme $[B_{GP}^{Aug}]$ sont identiques à ceux utilisés dans la formulation avec pénalité et détaillés dans (2.35) et (2.37). La segmentation de l'interface de contact dans cette approche est celle utilisée pour la formulation de pénalité (figure 2.8). L'expression de la variation de (2.78) sous forme matricielle est identique à celle définie dans (2.39).

On peut réécrire (2.75) comme suit :

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma_c} (\bar{\lambda}_N + \varepsilon_N g_N) \delta g_N d\Gamma = \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \langle \delta x_n \rangle \left[\bar{\lambda}_N [B_{GP}^{Aug}] \{n^m\} + \varepsilon_N \left([B_{GP}^{Aug}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}^{Aug}]^T \right) \{x_n\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.79)$$

La contribution d'un point d'intégration GP au vecteur résidu pour le contact peut être écrite dans le cas de la formulation du Lagrangien augmenté comme suit :

$$R_N^{Aug} = \left[\bar{\lambda}_N [B_{GP}^{Aug}] \{n^m\} + \varepsilon_N \left([B_{GP}^{Aug}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}^{Aug}]^T \right) \{x_n\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.80)$$

On remarque dans l'expression du vecteur résidu que si $\bar{\lambda}_N$ est nul on retrouve l'expression du vecteur résidu de la formulation de pénalité. La variation de la coordonnée naturelle ξ est détaillée dans (2.43) et sa linéarisation dans (2.44). La linéarisation de la variation du gap $\Delta(\delta g_N)$ est donnée dans (2.50). Pour obtenir l'expression de la matrice tangente, il faut linéariser les deux termes de (2.77) en utilisant (2.63) et (2.78).

Sous forme matricielle on peut réécrire (2.77) comme suit :

$$\Delta(c_N) = \langle \delta x_n \rangle [K_N^{Aug}] \{\Delta x_n\} \quad (2.81)$$

La matrice tangente pour la formulation du Lagrangien augmenté est donnée par :

$$K_N^{Aug} = \left[\varepsilon_N [B_{GP}^{Aug}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}^{Aug}]^T - \left([B_{GP,\xi}^{Aug}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP}^{Aug}]^T + [B_{GP}^{Aug}] \{a^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}^{Aug}]^T \right) \right. \\ \left. + g_N [B_{GP,\xi}^{Aug}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}^{Aug}]^T \right) \frac{\bar{\lambda}_N + \varepsilon_N g_N}{(l^m)^2} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.82)$$

La matrice contenant les dérivées des fonctions de forme $[B_{GP,\xi}^{Aug}]$ est identique à celle utilisée pour la formulation de pénalité (2.54). Le vecteur résidu (2.80) et la matrice tangente (2.82) constituent la contribution d'un point d'intégration de l'interface de contact au système

global. Notons qu'il faut tenir compte de la contribution de tous les points d'intégration de l'interface.

2.3.3.2 Algorithme de résolution

La différence significative de la méthode du lagrangien augmenté par rapport aux deux autres méthodes précédemment présentées est que tous les éléments de l'interface de contact contribuent au travail virtuel du système même si le gap normal est différent de zéro et donc le segment non actif. Ce fait garantit la régularité du potentiel énergétique et la continuité du travail virtuel. Cependant, les éléments de contact inactifs augmentent de façon significative le nombre de conditionnement de la matrice tangente du système. La phase de détection de la zone effective de contact doit être évoquée soigneusement pour une résolution par la méthode du lagrangien augmenté.

Pour optimiser la résolution du contact par cette formulation et réduire le conditionnement de la matrice tangente, on va appliquer l'algorithme de la recherche des segments actifs déployé dans la méthode de pénalité (figure 2.9). Et pour garder l'avantage de continuité du travail virtuel, les points d'intégration voisins aux points des extrémités sont ajoutés au conditionnement du contact. L'algorithme de résolution détaillé pour la méthode du lagrangien augmenté est présenté dans la figure 2.25.

Pas de chargement n

(1) Initialisation

Initialisation de l'algorithme : $u_1 = 0, j = 1, k = 0$

Initialisation du multiplicateur de Lagrange $\lambda_{(k)}^{(n)} = \lambda_{(k)}^{(n-1)}$ avec $\lambda_{(0)}^{(0)} = 0$

(2) Résolution

Recherche des points d'intégration actifs

Vérification sur chaque point d'intégration de chaque segment non mortier

Si $g_N \leq 0$ (point d'intégration actif)

Ajouter G_{jGP}^{Aug} au système à résoudre

Boucle sur les ITERATION DE NEWTON : $j=1, \dots$, convergence avec $\lambda_{(k)}^{(n)}$ fixe

Résoudre le système : $[K_N^{Aug}] \{\Delta u_n\} = -\{R_N^{Aug}\}$

Si CONVERGENCE $\|G_j^{global}(u_j)\| < TOL$

(3) Vérification

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \max g_{Ni} \leq TOL \Rightarrow \text{pas de chargement suivant } n = n + 1 \\ \text{Si non} \Rightarrow \text{augmenter le multiplicateur de Lagrange} \\ \lambda_{(k+1)}^{(n)} = \lambda_{(k)}^{(n)} + \varepsilon_N g_N, \quad k = k + 1 \end{array} \right.$$

Figure 2.25. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec la méthode du lagrangien augmenté

Si le résultat converge pour un pas de chargement (n), on garde la valeur du multiplicateur $\lambda_{(k)}^{(n)}$ résultant de ce calcul et on l'utilise comme multiplicateur initial dans l'algorithme d'augmentation du pas de chargement suivant. Cette opération nous épargne des itérations d'augmentation inutiles vu que la valeur exacte du multiplicateur $\lambda_{(k)}^{(n+1)}$ dans le pas de chargement (n+1) sera proche de celle au pas de chargement précédent. En comparant l'algorithme de résolution avec l'approche du Lagrangien augmenté à celui de la formulation par pénalité, on remarque que la convergence du système global dans cette approche n'est pas suffisante pour donner une solution. Il faut que la solution obtenue passe un test de pénétration. Et si ce dernier ne passe pas on augmente la valeur du multiplicateur de Lagrange utilisée pour la résolution et on recommence le calcul. Avec cette technique, même avec une faible valeur de coefficient de pénalité, on ne risque pas de violer la condition de non pénétration à la fin du pas de chargement. Ce qui n'est pas le cas avec la méthode de pénalité.

2.3.3.3 Exemple de validation

Un anneau est initialement en contact avec une poutre, figure 2.26. Un comportement hyper-élastique néo-Hooke est considéré pour ce problème [Yang05]. Le module de Young et le coefficient de Poisson pour l'anneau ainsi que pour la poutre sont indiqués dans le schéma qui suit. Nous appliquons un déplacement dans la direction verticale à l'extrémité droite de l'anneau alors que le côté gauche est encasté. Simultanément, un déplacement horizontal est appliqué aux deux extrémités de la poutre. Nous utilisons une formulation de pénalisation avec un coefficient de pénalité $\varepsilon_N = 5 \times 10^3 F/UL^2$. Le calcul est effectué pour une période de temps [0, 8] avec un pas de temps $\Delta t = 0.025$.

Matériaux des deux corps :

$$E_{\text{Anneau}} = 2.25 \times 10^3 F/UL^2$$

$$\nu_{\text{Anneau}} = 0.125$$

$$E_{\text{poutre}} = 2.7 \times 10^3 F/UL^2$$

$$\nu_{\text{poutre}} = 0.35$$

Chargement :

$$\Delta_x = 16 UL$$

$$\Delta_y = 9.6 UL$$

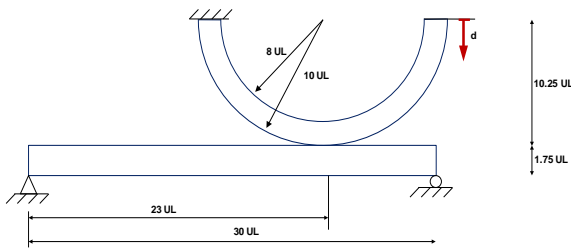
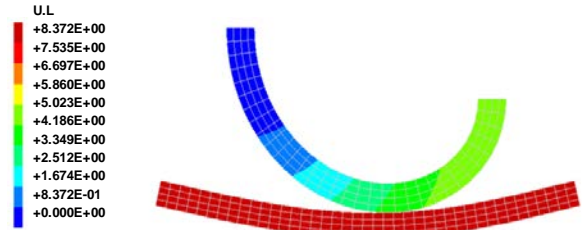
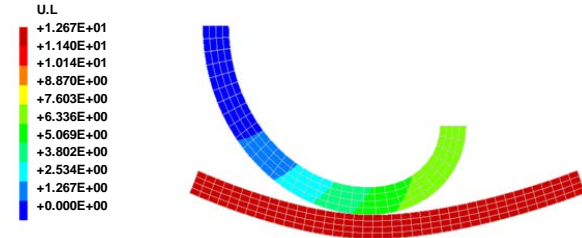


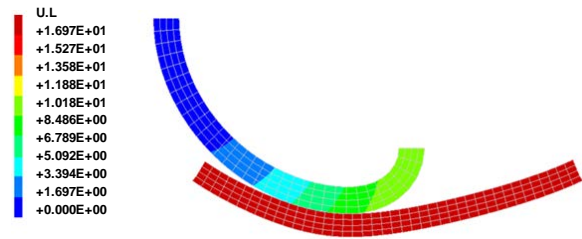
Figure 2.26. Données du problème de contact entre arc et poutre.



(a) $t = 4 UT$



(b) $t = 6 UT$



(c) $t = 8 UT$

Figure 2.27. Configuration déformée du problème de contact entre arc et poutre.

Cet exemple a été également résolu par la méthode de Lagrange et de pénalité, un pas de temps de $\Delta t=0.0125$ a été nécessaire pour résoudre le problème à l'aide de ces dernières. En général, la méthode du lagrangien augmenté permet la résolution de pas de chargement plus importants que les autres formulations.

2.4 Formulation d'un problème de contact avec frottement

La contribution des efforts de contact au travail virtuel global est donnée dans (2.4), puis en utilisant la description de l'interface de contact dans (2.5). Pour résoudre un problème de contact avec frottement (figure 2.28), les expressions de c_N et de c_T sont à linéariser en fonction des variables de la formulation de contact choisie [Hueber07] et [Gitterle10].

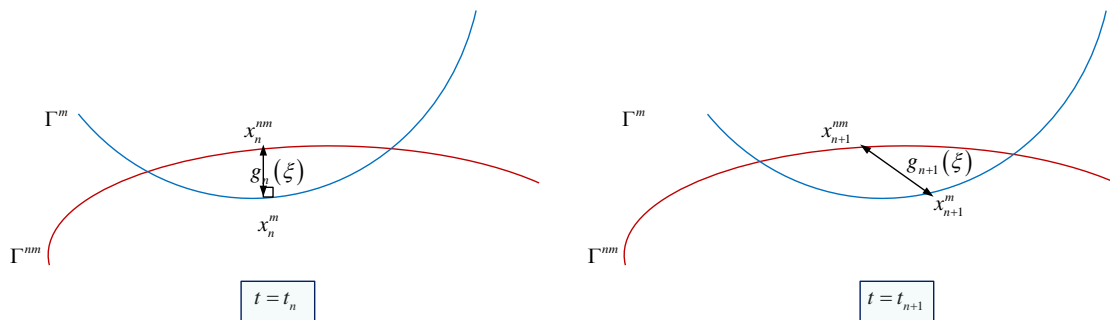


Figure 2.28. Contact avec frottement de deux corps entre deux pas de chargement

L'expression de la contribution du contact normal c_N a été détaillée dans la section précédente. Il reste maintenant à donner l'expression de c_T , l'expression de c_N a été déjà détaillée dans la section précédente.

L'expression du travail virtuel du au contact en général peut être écrite comme suit :

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_c \delta \mathbf{g} d\Gamma \quad (2.83)$$

Sachant que l'effort de contact \mathbf{t}_c est la somme de deux vecteurs d'efforts normal et tangent comme suit :

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{t}_{c_N} + \mathbf{t}_{c_T} \quad (2.84)$$

Et

$$\mathbf{g} = g_N \mathbf{n}^m + g_T \mathbf{a}^m \quad (2.85)$$

Le vecteur \mathbf{g} a une composante normale (2.86) et une autre tangentielle (2.87) comme le montre la figure 2.29.

$$\text{Avec } g_N = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}^m \quad (2.86)$$

$$\text{Et } g_T = \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{a}^m}{\|\mathbf{a}^m\|} \quad (2.87)$$

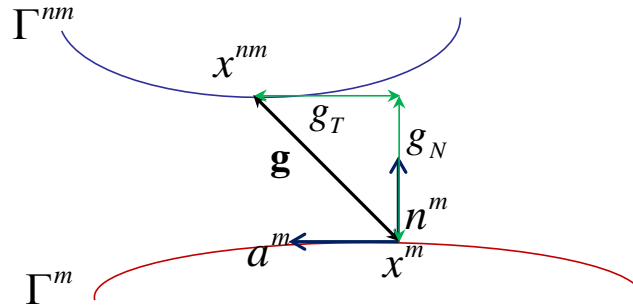


Figure 2.29 Calcul du jeu pour un problème de contact avec frottement

Dans le cas d'un problème de contact avec frottement (figure 2.26), on peut avoir deux situations possibles : contact collant ou contact glissant. Pour distinguer ces deux cas, on utilise la loi de Coulomb pour le frottement et on évalue la fonction f_s définie par :

$$f_s = \|\mathbf{t}_{c_T}\| - \mu \|\mathbf{t}_{c_N}\| \quad (2.88)$$

Sachant que \mathbf{t}_{c_N} est l'effort normal de contact et μ est le coefficient de frottement de Coulomb, il reste à déterminer le vecteur d'effort de contact tangent \mathbf{t}_{c_T} pour évaluer la

fonction (2.88). \mathbf{t}_{c_T} est obtenu par la projection du vecteur de contact global \mathbf{t}_c sur le plan tangent :

$$\mathbf{t}_{c_T} = \frac{1}{\|a^m\|^2} (\{a^m\} \otimes \{a^m\}) \mathbf{t}_c \quad (2.89)$$

La fonction de glissement (2.88) peut être maintenant calculée et le statut du contact tangent sera défini en fonction du signe de cette fonction comme suit :

$$f_s \begin{cases} \|\mathbf{t}_{c_T}\| - \mu |t_{c_N}| \geq 0 & \text{glissement} \\ \|\mathbf{t}_{c_T}\| - \mu |t_{c_N}| < 0 & \text{pas de glissement} \end{cases} \quad (2.90)$$

La présence du frottement ajoute des variables au problème de contact mais aussi des instabilités numériques à la résolution. Cette instabilité est issue du passage d'un point de contact dans l'interface d'un statut de non glissement à un statut glissant ou l'inverse. Ce passage résulte une instabilité numérique qui nécessite un traitement spécifique afin de réduire son influence sur la qualité de convergence du calcul. Opara et al. dans [Opara05] pour une géométrie bidimensionnelle et Wriggers dans [Wriggers04] pour le cas d'un problème en trois dimensions ont adopté l'approche du cône de friction (Moving Friction Cone MFC) appliquée avec la loi de Coulomb pour résoudre un problème de contact avec frottement. Cette technique sera appliquée dans ce travail. Quand les forces tangentielles dépasse une certaine limite, les deux surfaces en contact ne seront plus attachées mais on constate un déplacement relatif entre elles. Ce déplacement relatif représente le glissement qui est décrit par la loi de Coulomb comme suit :

$$\mathbf{t}_{c_T} = \mu |t_{c_N}| \frac{g_{T,t}}{\|g_{T,t}\|} \quad \text{si} \quad \|\mathbf{t}_{c_T}\| > \mu |t_{c_N}| \quad (2.91)$$

$g_{T,t}$ est la vitesse de glissement. Le coefficient de Coulomb μ est maintenu constant durant le contact entre les deux surfaces. Afin d'évaluer le statut d'un point d'intégration sur un segment non mortier déjà en contact avec un segment mortier, il faut calculer la fonction de glissement (2.88) avec la coordonnée naturelle ξ du point. Dans le cas d'un contact collant, l'amplitude de l'effort tangent $\|\mathbf{t}_{c_T}\|$ est inférieure à la limite de la contrainte normale $\mu |t_{c_N}|$ évaluée par la loi de Coulomb. En appliquant l'approche du cône de frottement, chaque point d'intégration non mortier se trouve à l'intérieur d'un cône comme le montre la figure 2.30 :

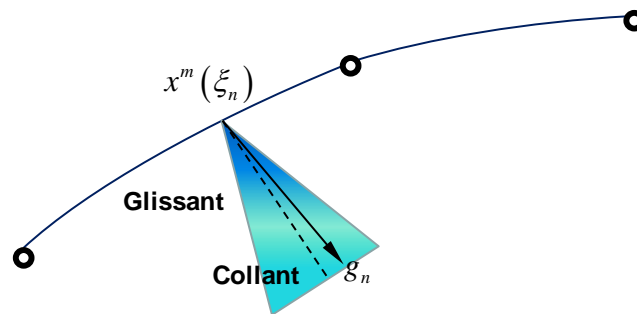


Figure 2.30. Position du cône de friction pour un contact collant

Si un point d'intégration dans le segment non mortier entre le pas de temps t_n et t_{n+1} manifeste un déplacement relatif dans la direction tangentielle au segment mortier associé (sur lequel est faite la projection au pas de chargement t_n), la position ξ_n va changer à une autre ξ_{n+1} . Dans le cas d'un contact sans frottement, la mise à jour de la position ξ_n est effectuée directement, mais pour le contact avec frottement il faut vérifier quelques conditions pour changer sa valeur. Si l'effort de contact obtenu à partir du déplacement constaté est à l'intérieur du cône de frottement, l'effort tangent est inférieur à la limite $\mu |t_{c_N}|$, le déplacement tangent n'est pas suffisant pour faire sortir le point non mortier du cône, donc il n'y aura pas d'actualisation de la position de projection ξ_n et le vecteur g_{n+1}^{st} reste invariant avec $\xi_{n+1} = \xi_n$. Si la fonction f_s est positive, on peut conclure que l'effort tangentiel t_T est supérieur à l'adhérence normale $\mu |t_{c_N}|$. Le vecteur g_{n+1}^{st} sera actualisé et la coordonnée naturelle après projection sera actualisée et prendra alors la nouvelle valeur ξ_{n+1} (Figure 2.31).

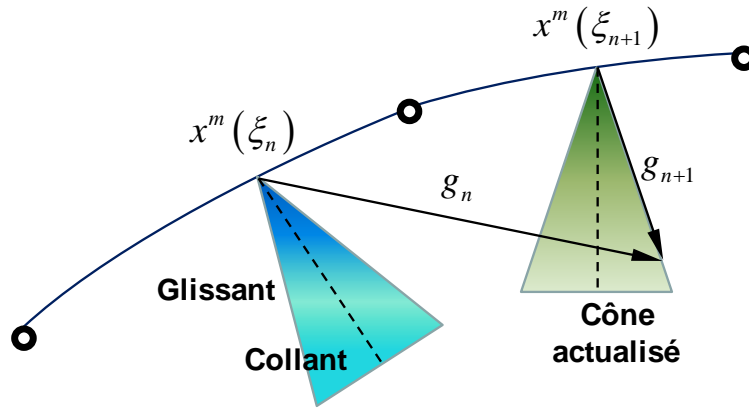


Figure 2.31. Actualisation du cône de friction pour un contact glissant

L'expression du travail virtuel du contact (2.83) dépend du choix de la formulation, nous détaillerons, dans ce qui suit, cette expression en utilisant la méthode de pénalité.

2.4.1 Méthode de pénalité

L'application de la méthode de Newton-Raphson pour la résolution du problème nécessite la linéarisation du travail virtuel de contact. Avec la méthode de pénalité, l'effort de contact peut être décrit comme suit :

$$\mathbf{t} = \varepsilon \mathbf{g} = \varepsilon [x^{nm} - x^m(\xi)] \quad (2.92)$$

Avec ε , le coefficient de pénalité.

L'expression du travail virtuel de contact (2.83) pour la formulation de pénalité est :

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma_c} \varepsilon [x^{nm} - x^m(\xi)] [\delta x^{nm} - \delta x^m(\xi)] d\Gamma \quad (2.93)$$

Pour la linéarisation de (2.93), il faut tester avant si on est dans un contact avec ou sans glissement. Pour un contact sans glissement, la coordonnée naturelle ξ pour un pas de chargement entre les instants t_n et t_{n+1} ne change pas de valeur puisque le point d'intégration ne quitte pas le cône $\mu|p_N|$. On peut négliger ξ pour la linéarisation puisque $\xi_n = \xi_{n+1}$. On utilisant (2.7) et (2.8), on peut réécrire (2.93) pour le cas d'un contact collant comme suit :

$$G_{c_s}^{collant} = \int_{\Gamma_c} \varepsilon \left[\delta u^{nm} - \delta u^m(\xi) \right] \cdot \left[\Delta u^{nm} - \Delta u^m(\xi) \right] d\Gamma \quad (2.94)$$

Pour le cas d'un contact glissant, la linéarisation de (2.93) donne :

$$\begin{aligned} G_{c_s}^{glissant} = & \int_{\Gamma_c} -\delta u_{,\xi}^m \Delta \xi \mathbf{t} d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma_c} \left[\delta u^{nm} - \delta u^m(\xi) \right] \cdot \left[\Delta u^{nm} - \Delta u^m(\xi) \right] d\Gamma \\ & - \varepsilon \int_{\Gamma_c} \left[\delta u^{nm} - \delta u^m(\xi) \right] \cdot a^m(\xi) \Delta \xi d\Gamma \end{aligned} \quad (2.95)$$

La matrice tangente et le vecteur résidu pour la formulation de pénalité pour un problème de contact avec frottement seront détaillés dans la section qui suit.

2.4.1.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente

En reprenant l'expression de la linéarisation du travail virtuel de contact avec frottement sans glissement, l'expression du vecteur des points mortier et non mortier (2.35) et la matrice des fonctions de forme (2.37), on peut réécrire (2.94) comme suit :

$$G_{c_s}^{collant} = \varepsilon_N \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \left[\left[B_{GP} \right] \left[B_{GP} \right]^T \{x_n\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.96)$$

Le vecteur résidu pour le contact avec frottement sans glissement peut être écrit dans le cas de la formulation par pénalité comme suit :

$$R_{Pen}^{Collant} = \varepsilon \left[B_{GP} \right] \left[B_{GP} \right]^T \{x_n\} l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.97)$$

Si le point d'intégration en question glisse et quitte le cône de frottement (2.91), il faut réécrire le travail virtuel (2.96) avec la nouvelle position de $\xi = \xi_{n+1}$ obtenue par la projection à l'extérieur du cône de frottement (figure 2.29). Ce qui donne :

$$G_{c_s}^{glissant} = \varepsilon_N \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \left[\left[B_{GP}(\xi_{n+1}) \right] \left[B_{GP}(\xi_{n+1}) \right]^T \{x_n(\xi_{n+1})\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.98)$$

Et le vecteur résidu :

$$R_{Pen}^{Glissant} = \varepsilon \left[B_{GP}(\xi_{n+1}) \right] \left[B_{GP}(\xi_{n+1}) \right]^T \{x_n(\xi_{n+1})\} l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.99)$$

Pour déterminer la matrice tangente, il faut linéariser l'expression de la variation du travail virtuel de contact. Dans le cas d'un problème de contact avec frottement collant, on peut négliger la variation de ξ . Ce n'est pas le cas si le point d'intégration quitte le cône de

frottement et un glissement est constaté. Dans ce qui suit intéressons-nous au cas de contact collant.

$$K_{Pen}^{Collant} = \varepsilon \left[B_{GP} \right] \left[B_{GP} \right]^T l_0^{mm} \omega_{GP} \quad (2.100)$$

On reprend l'expression du jeu dans le cas d'un contact avec glissement, dès que la fonction de glissement (2.88) s'annule, la nouvelle valeur de ξ_{n+1} doit remplacer ξ_n dans (2.37) et (2.54). En utilisant (2.85), (2.94) et du fait que le coefficient de pénalité est le même pour la direction normale et tangente, l'expression (2.88) au pas de chargement correspondant à t_{n+1} peut être remplacée par :

$$g_T(\xi_{n+1}) \text{signe}(g_T(\xi_{n+1})) - \mu g_N(\xi_{n+1}) \text{signe}(g_N(\xi_{n+1})) = 0 \quad (2.101)$$

Dans l'équation (2.101) le signe peut être négatif comme positif. La linéarisation de la coordonnée naturelle peut être obtenue par le produit scalaire de (2.101) et le vecteur a^m :

$$\begin{aligned} \Delta \xi = & -\frac{1}{\text{signe}(g_T) \|a^m\|^2} \left[(\Delta u^{mm} - \Delta u^m) \cdot \text{signe}(g_T) a^m - \mu \text{signe}(g_N) \cdot n^m \|a^m\| \right. \\ & \left. + (x^{nm} - x^m) \cdot \left[\text{signe}(g_T) \Delta u_{,\xi}^m + \mu \text{signe}(g_N) \frac{a^m}{\|a^m\|} \Delta u_{,\xi}^m \cdot n^m - \mu \text{signe}(g_N) \frac{n^m}{\|a^m\|} \Delta u_{,\xi}^m \cdot a^m \right] \right] \end{aligned} \quad (2.102)$$

La matrice tangente pour un contact avec glissement est définie par :

$$\begin{aligned} K_{Pen}^{glissant} = & \varepsilon \left[B_{GP} \right] \left[B_{GP} \right]^T - \frac{1}{\|a^m\|^2} \left[\left[B_{GP,\xi} \right] \left[B_{GP} \right]^T \{x^m\} + \left[B_{GP} \right] \{a^m\} \right] \left[\left[\langle a^m \rangle - \mu s_{N_0} s_{T_0} \|a_{mp}\| \langle n^m \rangle \right] \left[B_{GP} \right]^T \right. \\ & \left. + \langle x^m \rangle \left[B_{GP} \right] \left[I + \frac{\mu s_{N_0} s_{T_0}}{\|a^m\|} \left[\{a^m\} \langle n^m \rangle - \{n^m\} \langle a^m \rangle \right] \right] \left[B_{GP,\xi} \right]^T \right] l_0^{mm} \omega_{GP} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Avec

$$s_{N_0} = \text{sign} \left[\langle x_n(\xi_n) \rangle \left[B_{GP}(\xi_n) \right] \{n^m(\xi_n)\} \right] \quad (2.104)$$

$$s_{T_0} = \text{sign} \left[\langle x_n(\xi_n) \rangle \left[B_{GP}(\xi_n) \right] \frac{a^m(\xi_n)}{\|a^m(\xi_n)\|} \right] \quad (2.105)$$

Pour un problème de contact avec frottement sans glissement, le vecteur résidu (2.97) et la matrice tangente (2.100), permettent de calculer la contribution d'un point d'intégration de l'interface de contact au système global tandis que pour un problème de contact avec glissement il faut plutôt utiliser le vecteur résidu (2.99) et la matrice tangente (2.103). Notons qu'il faut tenir compte de la contribution de tous les points d'intégration de l'interface.

2.4.1.2 Algorithme de résolution

A chaque pas de chargement, les conditions de contact et de frottement ne sont considérées que pour les points d'intégration actifs. Pour un pas de chargement à l'instant t_n , chaque point d'intégration du segment non mortier est relié à son homologue sur le segment maître par une projection. La position de la projection définie par la coordonnée naturelle ξ_n est sauvegardée pour le pas de chargement suivant à l'instant t_{n+1} pour juger le statut glissant ou collant du contact avec frottement. Comme on peut le voir dans l'algorithme décrit dans la figure 2.32, la résolution du système dépend d'abord de l'information sur le statut de contact qui définit le choix de la matrice tangente et du vecteur résidu.

Initialisation de l'algorithme : $u_1 = 0, j = 1$

Recherche des points d'intégration actifs

Vérification sur chaque point d'intégration de chaque segment non mortier

Si $g_N \leq 0$ (point d'intégration actif)

Ajouter G_{jGP}^{Pen} au système à résoudre

Si Non

Si $\left\| \mathbf{t}_{c_T} \right\| - \mu |t_{c_N}| < 0 \Rightarrow$ pas de glissement $\xi_{n+1} = \xi_n$

Boucle sur les ITERATIONS DE NEWTON : $j=1, \dots, \text{convergence}$

Résoudre le système : $\left[K_{Pen}^{Collant}(\xi_n) \right] \{ \Delta u_n \} = - \{ R_{Pen}^{Collant}(\xi_n) \}$

Vérifier la convergence: $\left\| G_j^{global}(u_j) \right\| < TOL \Rightarrow STOP$

Fin des ITERATIONS DE NEWTON

Si Non $\left\| \mathbf{t}_{c_T} \right\| - \mu |t_{c_N}| \geq 0 \Rightarrow$ glissement

Boucle sur les ITERATIONS DE NEWTON : $j=1, \dots, \text{convergence}$

Résoudre le système : $\left[K_{Pen}^{Glissant}(\xi_{n+1}) \right] \{ \Delta u_n \} = - \{ R_{Pen}^{Glissant}(\xi_{n+1}) \}$

Vérifier la convergence: $\left\| G_j^{global}(u_j) \right\| < TOL \Rightarrow STOP$

Fin des ITERATIONS DE NEWTON

Figure 2.32. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec frottement par la méthode de pénalité

Pour le problème avec frottement, on garde l'historique de la projection d'un pas de chargement à un autre. De ce fait, la résolution nécessite plus de mémoire par rapport au cas d'un problème sans frottement, de plus, le test de glissement au début de chaque pas de chargement ralentit l'algorithme de résolution.

2.4.1.3 Exemple de validation

Un anneau élastique constitué de deux couches d'épaisseur $e = 5UL$ chacune et de rigidités différentes est appuyé contre un bâti rigide fixe (figure 2.33). La couche intérieure de l'anneau est 100 fois plus rigide que la couche extérieure. Le matériau des deux couches est

hyper-élastique, il est décrit par la loi Néo-Hooke [Fischer05]. Un coefficient de frottement $\mu = 0.1$ est considéré dans l'interface de contact entre l'anneau extérieure et le bâti. L'anneau au départ n'est pas en contact avec le bâti mais décalé de $20 UL$. Nous appliquons un déplacement à la direction verticale sur les deux extrémités de l'anneau d'une valeur maximale $d_{y_{\max}} = 60 UL$.

Matériaux des deux corps :

$$E_{\text{anneau_extérieur}} = 1 \times 10^5 F / UL^2$$

$$\nu_{\text{anneau_extérieur}} = 0.3$$

$$E_{\text{anneau_intérieur}} = 1 \times 10^3 F / UL^2$$

$$\nu_{\text{anneau_intérieur}} = 0.3$$

$$E_{\text{bâti}} = 1 \times 10^8 F / UL^2$$

$$\nu_{\text{bâti}} = 0.0$$

Chargement :

$$d_{y_{\max}} = 60 UL$$

Coefficient de frottement

$$\mu = 0.17$$

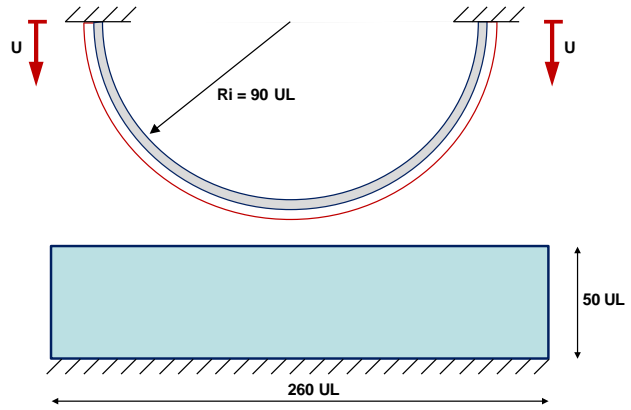
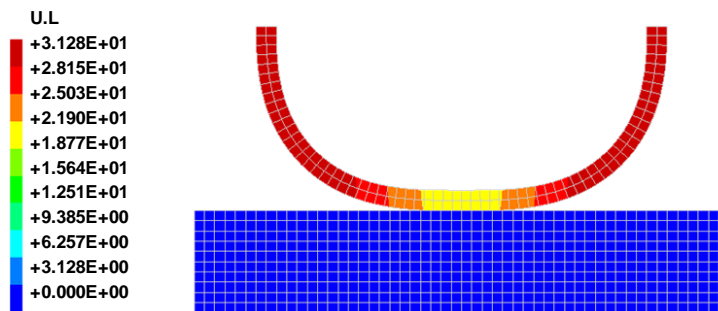
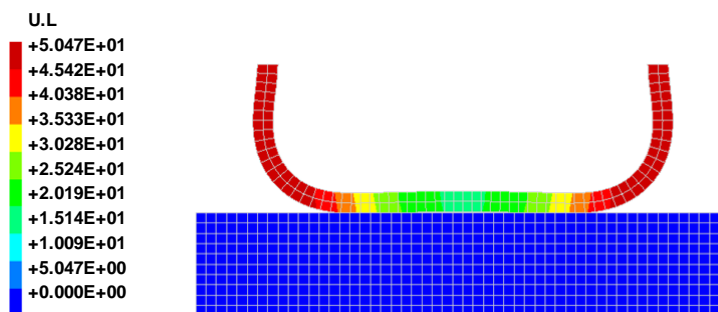


Figure 2.33. Schéma du problème de contact entre un anneau et un bâti.



(a) $d_y = 30 UL$



(b) $d_y = 50 UL$

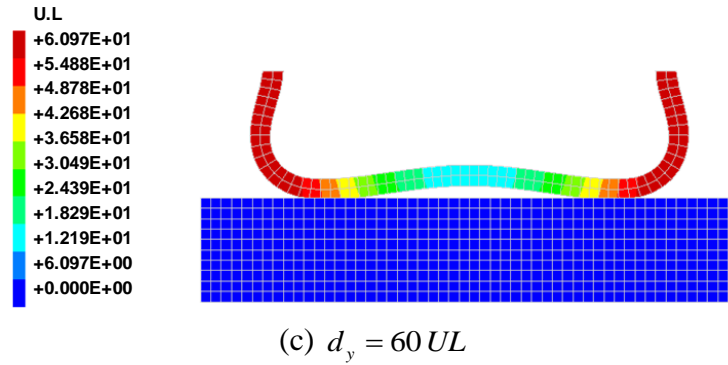


Figure 2.34. Configuration déformée du problème de contact entre anneau et bâti.

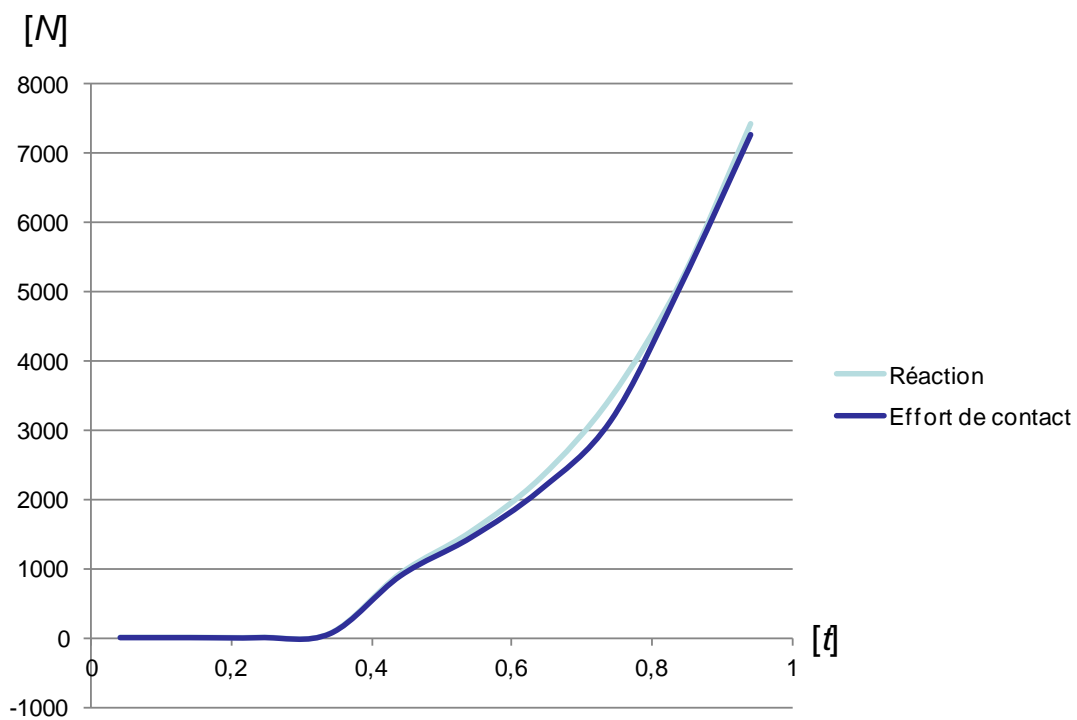


Figure 2.35. Evolution de la réaction et de l'effort de contact pour le problème de contact entre anneau et bâti

On remarque une faible différence entre la réaction à l'effort appliqué et l'effort de contact (figure 2.35). Ce décalage est dû à la tolérance, en fonction de la valeur du coefficient de pénalité, de cette formulation à la pénétration.

2.4.2 Méthode du lagrangien augmenté

L'expression du travail virtuel du contact pour la formulation du Lagrangien augmenté d'un problème de contact avec frottement [Heege96] et [Simo92] est définie par:

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma_c} [t_N n \cdot \delta u - \mathbf{t}_T \cdot \delta u_T] d\Gamma \quad (2.106)$$

Dans le cas de problème de contact avec frottement l'effort de contact normal t_N et l'effort de contact tangent \mathbf{t}_T sont tous les deux définis par la somme d'un multiplicateur de Lagrange et d'un terme de pénalité. t_N conserve la même définition que dans le cas d'un problème de contact normal (2.74). L'expression de l'effort tangent \mathbf{t}_T dépend du statut du contact (glissant ou collant). En utilisant la définition de la fonction de glissement (2.88), on peut décrire l'évolution de l'effort tangent par :

$$\dot{u}_T - \xi \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}_T} f_s = \frac{1}{\varepsilon_T} \dot{\mathbf{t}}_T \quad (2.107)$$

Avec \dot{u}_T est la variation du déplacement dans le plan de contact entre les pas de temps t_n et t_{n+1} . Notons que $\dot{u}_T = 0$ si le contact est collant ($f_s < 0$). Sa linéarisation est donnée par :

$$\Delta u_T = u_{T_{n+1}} - u_{T_n} \quad (2.108)$$

La linéarisation du terme de Lagrange dans la variation de l'effort tangent est donnée par :

$$\Delta \lambda_T = \lambda_{T_{n+1}} - \lambda_{T_n} \quad (2.109)$$

Lorsqu'un point d'intégration change de position dans le plan de contact (figure 2.26), il faut vérifier en appliquant (2.88) s'il quitte le cône de friction ou non afin de définir son statut de contact (collant ou glissant). On note l'effort tangent calculé pour le test du statut $\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{test}$, son expression est donnée par :

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{test} = \mathbf{t}_{T_n} + \Delta \lambda_T + \varepsilon_T \Delta u_T \quad (2.110)$$

Il reste à donner l'expression de la linéarisation de la variation de l'effort tangent :

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}} = \mathbf{t}_{T_n} + \Delta \lambda_T + \varepsilon_T \left(\Delta u_T - \Delta \xi \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{test}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{test}\|} \right) \quad (2.111)$$

Avec

$$\Delta \xi = \begin{cases} 0 & \text{si } f_{s_{n+1}} \leq 0 \\ \frac{f_{s_{n+1}}}{\varepsilon} & \text{si } f_{s_{n+1}} > 0 \end{cases} \quad (2.112)$$

$$f_{s_{n+1}} = \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}\| - \mu t_{N_{n+1}} \quad (2.113)$$

Le vecteur \mathbf{t}_{T_n} dans l'expression (2.111) est défini comme la somme de la contribution d'un terme de pénalité et d'un multiplicateur de Lagrange. Il représente l'effort tangent exact après la convergence du dernier pas de chargement à l'instant t_n . Etant donné que l'effort dans le

plan tangent (2.107) est défini par une dérivée par rapport au temps, on utilise plutôt le terme $\Delta\lambda_T$ que le terme λ_T pour le multiplicateur de Lagrange tangent. Avec la définition du vecteur tangent à l'instant t_n , L'expression du travail virtuel de contact (2.106) peut être réécrite :

$$G_{c_s} = \int_{\Gamma} \left[\langle \lambda_N + \varepsilon_N g \rangle \delta u \cdot n + (\delta\lambda_T + \varepsilon_T \delta u_T) \cdot \delta u_T \right] d\Gamma \quad (2.114)$$

La contribution d'un point d'intégration actif dans la solution globale passe par le calcul de son travail virtuel (2.114). La solution du problème nécessite l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson. La matrice tangente et le vecteur résidu pour la formulation du lagrangien augmenté pour un problème de contact avec frottement seront détaillés dans la section qui suit.

2.4.2.1 Expressions du vecteur résidu et de la matrice tangente

En reprenant l'expression de la linéarisation du travail virtuel du contact avec frottement (2.114), l'expression du vecteur des points mortier et non mortier (2.35) et la matrice des fonctions de forme (2.37), on peut écrire :

$$\begin{aligned} G_{c_s} &= \int_{\Gamma} \left[\langle \lambda_N + \varepsilon_N g \rangle \delta u \cdot n + (\delta\lambda_T + \varepsilon_T \delta u_T) \cdot \delta u_T \right] d\Gamma \\ &= \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \langle \delta x_n \rangle \left[\bar{\lambda}_N [B_{GP}] \{n^m\} + \lambda_T [B_{GP,\xi}] \{a^m\} + 2 \varepsilon_T \left([B_{GP}] [B_{GP}]^T \right) \{x_n\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Le vecteur résidu pour le contact avec frottement peut être écrit dans le cas de la formulation du lagrangien augmenté comme suit :

$$R_{Aug}^{Glis/Coll} = \left[\bar{\lambda}_N [B_{GP}] \{n^m\} + \lambda_T [B_{GP,\xi}] \{a^m\} + 2 \varepsilon_T \left([B_{GP}] [B_{GP}]^T \right) \{x_n\} \right] l_0^{nm} \omega_{GP} \quad (2.116)$$

Rappelons que le calcul du vecteur résidu change en fonction du statut de contact (collant ou glissant). Si le point d'intégration glisse en vérifiant la première inéquation de (2.88), les fonctions de formes utilisées dans (2.116) seront calculées en fonction de la nouvelle valeur de projection ξ_{n+1} . Dans le cas contraire, la coordonnée naturelle garde la même valeur obtenue dans le pas de chargement précédent.

La matrice tangente pour un problème de contact avec frottement par la formulation du lagrangien augmenté peut être décomposée en deux parties : une partie qui traduit la rigidité du contact pour un effort normal et une deuxième partie pour la rigidité au glissement tangentiel. La matrice peut être écrite comme suit :

$$K^{Aug} = K_N^{Aug} + K_T^{Aug} \quad (2.117)$$

On s'intéresse dans ce qui suit à la partie tangente de la matrice de rigidité K_T^{Aug} . En appliquant l'équation (2.88) on peut rencontrer deux statuts de contact possibles. Une partie

de la matrice K_T^{Aug} ne change pas d'expression indépendamment du statut du point d'intégration actif qui va contribuer à sa rigidité et une deuxième partie, notée $K_T^{Aug^{Gliss/Coll}}$, dont l'expression dépend du statut de contact (collant ou glissant). On peut écrire la matrice tangente comme suit :

$$\begin{aligned}
K_T^{Aug} &= K_T^{Aug^{Gliss/Coll}} + \frac{\mathbf{t}_T}{\|a_{mp}\|^2} \left[\frac{2g_N}{\|a_{mp}\|^2} \left([B_{GP,\xi}] \{a^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T + [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{\|a_{mp}\|^2} \left([B_{GP,\xi}] \{a^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP}] + [B_{GP}] \{a^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right) \\
&\quad \left. - [B_{GP}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T - [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}]^T \right]
\end{aligned} \tag{2.118}$$

En ce qui concerne la première partie on peut noter pour le cas d'un contact collant :

$$\begin{aligned}
K_T^{Aug^{Collant}} &= \frac{\varepsilon_T}{\|a_{mp}\|^2} \left[[B_{GP}] \{a^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP}]^T + g_N [B_{GP}] \{a^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}] \right. \\
&\quad + g_N [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP}]^T + (g_N)^2 [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \\
&\quad \left. - 2[B_{GP}] \{a^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T - 2[B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right]
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Et pour le cas d'un statut glissant :

$$\begin{aligned}
K_T^{Aug^{Glissant}} &= -\frac{\mu}{\|a_{mp}\|^2} \frac{t_{T_{n+1}}^{test}}{\|t_{T_{n+1}}^{test}\|} \left(\varepsilon_N \left[[B_{GP}] \{a^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}]^T + g_N [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle n^m \rangle [B_{GP}]^T \right] \right. \\
&\quad \left. + t_N \left[[B_{GP}] \{a^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T + g_N [B_{GP,\xi}] \{n^m\} \langle a^m \rangle [B_{GP,\xi}]^T \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Pour un problème de contact avec frottement sans glissement, le vecteur résidu (2.116) et la matrice tangente décrits par (2.118) et (2.119), permettent de calculer la contribution d'un point d'intégration de l'interface de contact au système global et pour un problème de contact avec glissement il faut plutôt utiliser (2.120) au lieu de (2.119) pour la matrice tangente et la même expression pour le vecteur résidu.

2.4.2.2 Algorithme de résolution

Pour obtenir la valeur exacte du multiplicateur de Lagrange normal λ_N , on applique la formule d'augmentation (2.74) comme pour un problème de contact sans frottement. Si le calcul converge au pas de chargement t_n , on peut déduire que le multiplicateur tangent est exactement égal à l'effort tangent, $\mathbf{t}_{T_n} = \lambda_{T_n}$. Egalement si le calcul converge au pas de

chargement t_{n+1} , on peut écrire $\mathbf{t}_{T_{n+1}} = \lambda_T$. Le terme $\Delta\lambda_T$ qui présente la variation exacte u multiplicateur tangent entre t_n et t_{n+1} est définie par :

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}} = \mathbf{t}_{T_n} + \Delta\lambda_T \quad (2.121)$$

Un problème de contact avec frottement par la méthode du lagrangien augmenté nécessite un algorithme d'augmentation pour le multiplicateur normal λ_N pour trouver la valeur exacte du multiplicateur qui représente la pression de contact (2.74), et un algorithme d'augmentation pour le multiplicateur tangent λ_T . En utilisant (2.111) et (2.121), l'augmentation du multiplicateur tangent peut être définie par :

$$\Delta\lambda_T^{(k+1)} = \Delta\lambda_T^{(k)} + \varepsilon_T \left(\Delta\mathbf{u}_T^{(k)} - \Delta\xi^{(k)} \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{test(k)}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{test(k)}\|} \right) \quad (2.122)$$

Les termes dans (2.122) avec un exposant (k) sont calculés au pas de chargement t_{n+1} mais dans l'itération d'augmentation (k). Comme dans la résolution d'un problème sans frottement, les multiplicateurs λ_N et λ_T sont maintenus fixes au cours d'une itération. Si le calcul ne converge pas, une augmentation sera nécessaire. Dans le passage d'une itération d'augmentation (k) à l'itération (k+1), le terme de pénalité diminue et l'information sera transférée au terme de Lagrange jusqu'à la convergence où le terme de pénalité s'annule et le terme de Lagrange sera exactement égal à l'effort de contact (figure 2.36).

Pas de chargement n

(1) Initialisation

Initialisation des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_N^{(0)} = \langle \lambda_N + \varepsilon_N g_N \rangle$

$$\Delta\lambda_T^{(0)} = 0$$

$$k = 0$$

(2) Résolution

Si $\|t_{c_T}\| - \mu |t_{c_N}| < 0 \Rightarrow$ pas de glissement

$$t_T(u_{n+1}^{(k)}) = t_{T_n} + \Delta\lambda_T^{(k)} + \varepsilon \Delta u_T^{(k)}$$

Résoudre le système :

$$\left[K^{Aug}(\xi_n) \right] \{ \Delta u_n \} = - \{ R_{Aug}^{Glis/Coll}(\xi_n) \}$$

Vérifier la convergence:

$$\|G_j^{global}(u_j)\| < TOL \Rightarrow STOP$$

Si $\|t_{c_T}\| - \mu |t_{c_N}| \geq 0 \Rightarrow$ glissement

$$t_T(u_{n+1}^{(k)}) = t_{T_n} + \Delta\lambda_T^{(k)}$$

Résoudre le système :

$$\left[K^{Aug}(\xi_{n+1}) \right] \{ \Delta u_n \} = - \{ R_{Aug}^{Glis/Coll}(\xi_{n+1}) \}$$

Vérifier la convergence:

$$\|G_j^{global}(u_j)\| < TOL \Rightarrow STOP$$

(3) Vérification

Si $g(u_{n+1}^{(k)}) \leq TOL1$ ET $\|u_{T_{n+1}} - u_{T_n}\| \leq TOL2$

Avec $\|t_{T_{n+1}}\| < \mu (\langle \lambda_N + \varepsilon_N g_N \rangle)$

\Rightarrow pas de chargement suivant $n = n + 1$

Si non

\Rightarrow augmenter les multiplicateurs de Lagrange

$$\lambda_N^{(k+1)} = \langle \lambda_N^{(k)} + \varepsilon_N g(u_{n+1}^{(k)}) \rangle$$

$$\Delta\lambda_T^{(k+1)} = \begin{cases} \Delta\lambda_T^{(k)} + \varepsilon_T \Delta u_T^{(k)} & 0 \quad \text{si } \|t_{T_n} + \Delta\lambda_T^{(k)} + \varepsilon_T \Delta u_T^{(k)}\| \leq \mu \lambda_N^{(k+1)} \\ \frac{t_{T_n} + \Delta\lambda_T^{(k)} + \varepsilon_T \Delta u_T^{(k)}}{\|t_{T_n} + \Delta\lambda_T^{(k)} + \varepsilon_T \Delta u_T^{(k)}\|} \mu \lambda_N^{(k+1)} - t_{T_n} & \text{sur le reste} \end{cases}$$

$$k = k + 1$$

Figure 2.36. Algorithme de résolution d'un problème de contact avec frottement par la formulation du lagrangien augmenté

Comme on l'a déjà fait pour le problème sans frottement, si le résultat converge pour un pas de chargement (n), les multiplicateurs $\lambda_N^{(n+1)}$ et $\Delta\lambda_T^{(n+1)}$ normal et tangent ne seront pas initialisés à zéro au début du pas de chargement (n+1) mais plutôt par les valeurs obtenues après convergence du pas de chargement (n) calculées à la dernière itération d'augmentation.

2.4.2.3 Exemple de validation

Considérons le problème de contact avec frottement entre un bloc élastique rectangulaire, de dimension $(4UL \times 2UL)$, déposé sur un bâti rigide [Oden84], [Wriggers90] et [Simo92]. On applique une pression sur la partie supérieure du bloc et un effort surfacique horizontal $P_x = 60 F/UL^2$ sur le côté droit. Le bâti, considéré rigide, est 100000 fois plus rigide que le bloc (figure 2.37). Ce problème a été traité avec la formulation de pénalisation par Wriggers et al. dans [Wriggers90]. Dans ce dernier, les auteurs arrivent à trouver une solution du problème en un seul pas de chargement avec la loi de frottement de Coulomb. Mais ils ont éliminé les premier et dernier nœuds du bloc de la zone active du contact.

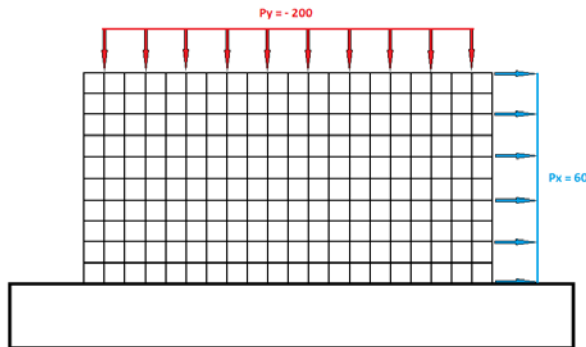


Figure 2.37. Contact avec frottement entre un corps déformable et un corps rigide

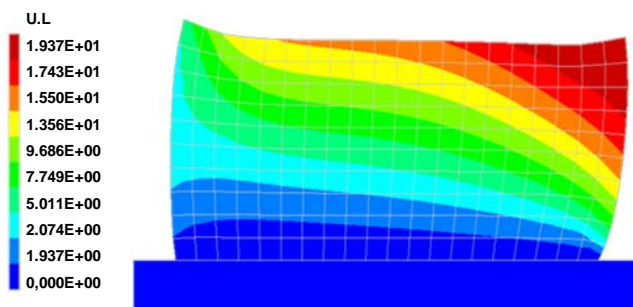


Figure 2.38. Configuration déformée d'un problème de contact avec frottement entre un corps déformable et un corps rigide

Matériaux des deux corps :

$$E_{block} = 1. \cdot 10^3 F/UL^2$$

$$E_{bâti} = 1. \cdot 10^8 F/UL^2$$

$$\nu_{block} = 0.3$$

$$\nu_{bâti} = 0.0$$

Chargement

$$P_y = 200 F/UL^2$$

$$P_x = 60 F/UL^2$$

Paramètres du lagrangien augmenté :

$$\varepsilon_N = 1 \times 10^8 F/UL^2$$

$$\varepsilon_T = 1 \times 10^4 F/UL^2$$

Coefficient de Coulomb :

$$\mu = 0.5$$

2.4 Conclusion

Nous avons détaillé dans ce chapitre trois formulations pour la résolution d'un problème de contact par la méthode mortier. La méthode de pénalité est une technique simple qui n'introduit pas de nouvelles équations pouvant augmenter la taille du système à résoudre. Mais cette formulation souffre des problèmes de conditionnement qui apparaissent d'avantage quand le coefficient de pénalité devient important. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est plus précise que la formulation de pénalité. Le multiplicateur de Lagrange λ_N représente dans la surface la valeur exacte de l'effort normal de contact. Cette approche nécessite l'ajout de variables additionnelles qui sont les valeurs du multiplicateur de Lagrange aux nœuds de l'interface de contact. La méthode du lagrangien augmenté est une

combinaison entre la formulation de pénalité et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. L'application des conditions de contact est appliquée par un multiplicateur de Lagrange approché sans augmenter la dimension du problème. Le coefficient de pénalité ε_N dans la méthode du Lagrangien augmenté a moins d'influence sur la qualité du résultat et la robustesse de la solution que dans la formulation de pénalité.

Chapitre 3

Lissage de la surface de contact

Après avoir détaillé les trois formulations utilisées, nous présenterons dans ce chapitre l'influence du lissage de la surface de contact sur la robustesse de la solution en particulier dans le cas des problèmes de grande déformation. Trois méthodes de lissage différentes seront présentées dans ce chapitre. L'historique et le mode d'application de chacune sera détaillé. Pour conclure, une critique des différentes méthodes de lissage employées sera présentée ainsi que le domaine de prédilection de chacune.

Sommaire

- 3.1 Méthode de la normale moyennée
 - 3.2 Fonction d'Hermite cubique
 - 3.3 B-Spline cubique
 - 3.4 Exemples d'applications
 - 3.5 Conclusion
-

La plupart des techniques de discrétisation par la méthode des éléments finis utilisées pour la résolution d'un problème de contact sont de continuité C^0 . Une discrétisation non lissée conduit souvent à des problèmes de convergence ou bien à des interactions de contact hautement oscillatoires notamment pour les forces tangentielles dans le cas d'un problème de contact avec frottement. Afin d'atténuer certaines de ces observations indésirables, différentes techniques de lissage de l'interface de contact pour un problème bidimensionnel ont été développées. On peut citer les polynômes d'Hermite comme dans les travaux de [Foley90], [Wriggers01] et [Padmanabhan01], l'interpolation de Bernstein cubique sous forme de courbe de Bezier, [Pietrzak99] et [Lengiewicz11] ou bien des Splines cubiques comme dans [Al-Dojayli02] et [Munoz08]. Dans ces deux derniers travaux, les splines sont utilisées localement se qui revient finalement à l'utilisation des courbes de Bézier. Pour le lissage des surfaces de contact dans le cas d'un problème 3D on trouve dans la littérature l'utilisation des patches de Gregory comme dans [Puso02]. Tous les travaux cités ont utilisé l'approche NTS pour l'application des conditions de contact.

Dans la littérature, le terme lissage a été souvent directement lié à la description de la géométrie, et en particulier au vecteur normal à la surface. En effet, le lissage peut être global moyennant une écriture avec un ordre de continuité élevé, comme il peut être local en agissant sur les termes d'interactions de contact comme la pression du contact et l'effort tangentiel.

Pour un problème de contact, le lissage est appliqué uniquement sur la zone de contact afin d'éviter toute surcharge de calcul. En supprimant les sauts de la normale induits par la description polygonale de la peau, le lissage de l'interface permet d'améliorer l'estimation des efforts de contact. Pour des problèmes de grande déformation, malgré le lissage de la géométrie, quelque oscillation peuvent persister en raison des fortes interactions entre les surfaces discrétisées.

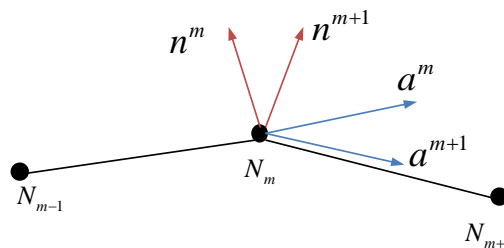


Figure 3.1. Normales multiples sur un nœud.

Dans la phase de résolution d'un problème de contact, on constate l'influence de la formulation choisie sur la qualité des résultats et sur la vitesse de convergence. Bien que l'utilisation de la méthode du lagrangien augmenté permette de stabiliser le calcul et obtenir des résultats cohérents, elle demeure parfois insuffisante surtout dans le cas des problèmes à grandes déformations. Deux segments adjacents, non colinéaires après déformation, présentent une discontinuité du vecteur tangent. Les expressions de la matrice tangente et de l'effort tangent pour un problème de contact avec frottement dépendent du vecteur tangent à la surface mortier a^m . Une discontinuité de ce dernier entraîne directement un problème dans le calcul de ces deux termes. Le vecteur normal à la surface mortier n^m est directement lié au vecteur tangent:

$$n^m = \frac{\vec{e}_3 \times a^m}{\|\vec{e}_3 \times a^m\|} \quad (3.1)$$

Un problème de discontinuité dans le vecteur tangent entrainera automatiquement un problème de même ordre pour le vecteur normal. Le vecteur normal à la surface mortier n^m est employé pour le calcul du gap. Une discontinuité de ce vecteur peut engendrer des problèmes pour l'existence et l'unicité de la projection, (figure 3.1). La solution proposée à cette problématique est d'adjoindre une méthode de lissage à l'approche mortier. Le lissage est proposé avec différentes techniques.

3.1 Méthode de la normale moyennée

Cette méthode, largement utilisée dans la littérature, est implémentée sous différentes variantes dans les codes de calcul. Dans certains travaux, tel que [Popp09], on calcule la moyenne du vecteur normal à chaque nœud à partir des deux vecteurs normaux des segments adjacents comme suit:

$$\tilde{n}_i^m = \frac{(n_i^m + n_{i+1}^m)}{\|n_i^m + n_{i+1}^m\|} \quad (3.2)$$

La configuration du vecteur normal moyenné est comme donnée dans la figure suivante :

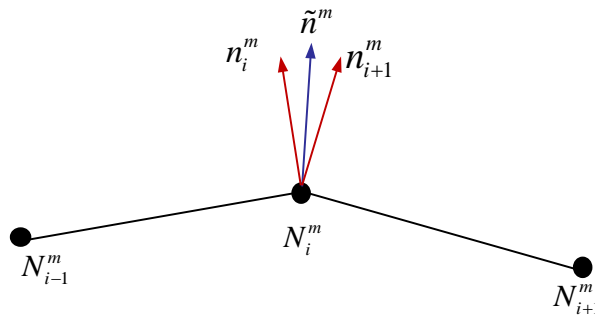


Figure 3.2. Vecteur normal moyenné

Dans les travaux de [Yang05], le vecteur normal est moyenné à partir des vecteurs normaux des deux segments adjacents pondérés par la dimension de ces deux derniers comme le montre la formule suivante :

$$\tilde{n}_i^m = 0.5 \frac{(l_{i+1}^m n_i^m + l_i^m n_{i+1}^m)}{\|l_{i+1}^m n_i^m + l_i^m n_{i+1}^m\|} \quad (3.3)$$

L'application de cette méthode est détaillée dans la figure suivante :

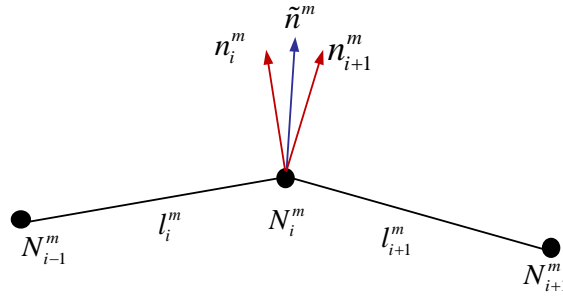


Figure 3.3. Vecteur normal moyenné pondéré avec la longueur des éléments

La méthode que nous avons retenue dans ce travail, est celle employée dans l'article [Tur09] dans laquelle on calcule le vecteur tangent moyenné par :

$$\tilde{a}_i^m = 0.5 \frac{(a_i^m + a_{i+1}^m)}{\|a_i^m + a_{i+1}^m\|} \quad (3.4)$$

Puis on applique la relation (3.1) pour obtenir le vecteur normal moyenné (figure 3.4) :

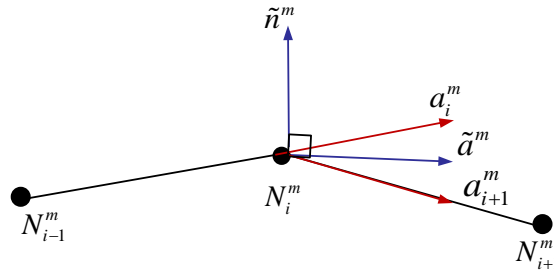


Figure 3.4. Vecteur normal moyenné à partir du vecteur tangent moyenné

Dans la résolution du problème de contact, le calcul du jeu normal g_N sera en fonction du nouveau vecteur normal \tilde{n}^m et respectivement le jeu tangent g_T pour un problème avec frottement sera calculé en utilisant le vecteur tangent moyenné \tilde{a}^m .

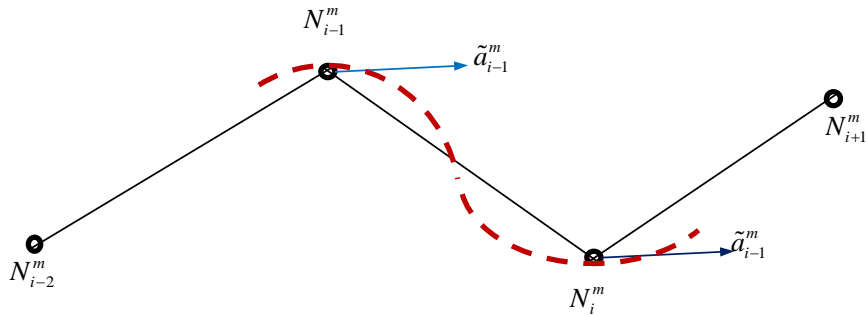


Figure 3.5. Génération d'une géométrie décalée du maillage

Pour conclure, cette technique évite le saut dans la direction de la normale (respectivement de la tangente) à proximité des nœuds. L'évolution de la normale dans le segment reste linéaire et la surface de contact maintient une continuité d'ordre C^0 . Pour une projection proche des nœuds (la valeur de la coordonnée naturelle ξ très proche de 0 ou 1), on remarque une

amélioration sur l'erreur du calcul du gap par rapport à une projection sans vecteur moyenné. Si la direction du vecteur moyenné est éloignée de celle du vecteur original, une géométrie décalée du maillage sera construite (figure 3.5). De la matière sera ajoutée ou soustraite du corps sur lequel ces normales sont définies. Cela peut légèrement perturber la conservation de la masse du système à résoudre. Ce phénomène restreint l'application de cette technique pour les problèmes en grande déformation.

3.2 Fonction d'Hermite cubique

Dans cette section, nous proposons un lissage de continuité C^1 dans l'interface d'un problème de contact mortier bidimensionnel. Considérons des éléments linéaires avec une interpolation lagrangienne pour la discrétisation de la géométrie des corps en contact et une description par des polynômes d'Hermite pour la frontière, Figure 3.6.

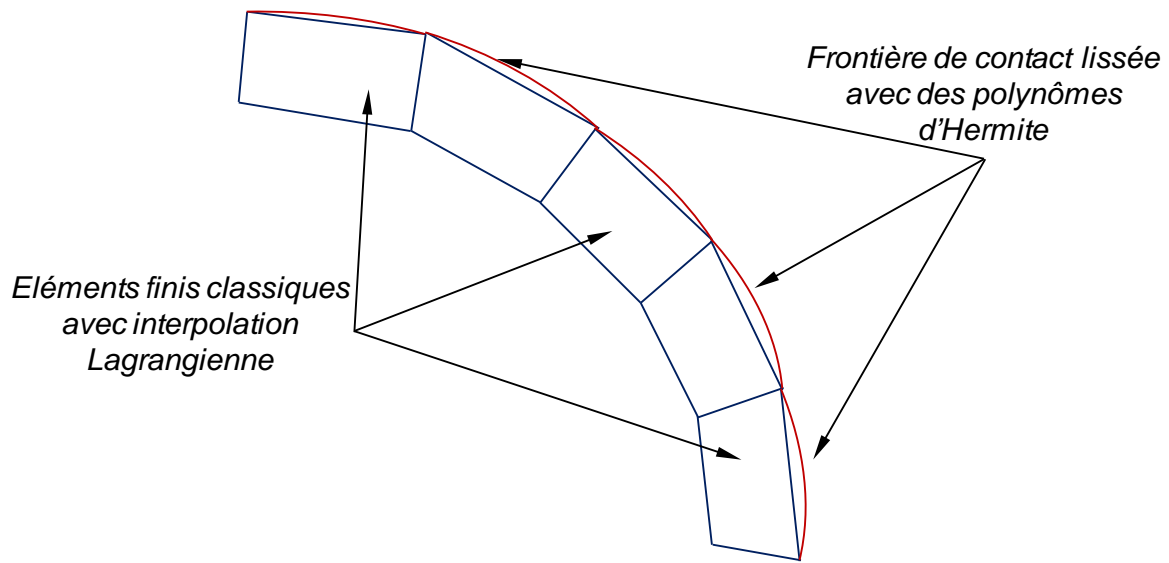


Figure 3.6. Éléments de frontières lissées avec des polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite cubiques sont utilisés uniquement pour la description de la surface de contact [Tur12]. Le calcul du jeu minimal qui sépare les deux corps sera assuré par une projection utilisant un nouveau vecteur normal lissé noté \hat{n}^m . Ce dernier est normal à la surface mortier, pour cette raison on s'est limité au lissage de cette surface uniquement. Pour trouver l'expression du vecteur normal, il faut d'abord calculer le vecteur tangent lissé :

$$\hat{a}^m(\xi) = \frac{\partial \hat{x}^m(\xi)}{\partial \xi} \quad (3.5)$$

puis appliquer la relation (3.1). Il reste à trouver une expression détaillée d'un point mortier sur la nouvelle courbe définie par les polynômes d'Hermite noté \hat{x}^m en fonction de sa coordonnée naturelle $\xi \in [0,1]$. Cette expression est donnée par :

$$\hat{x}^m(\xi) = H_1^m(\xi) x_{m-1}^m + H_3^m(\xi) x_m^m + H_2^m(\xi) x_{m-1,\xi}^m + H_4^m(\xi) x_{m,\xi}^m \quad (3.6)$$

Avec $H_i^m \quad i = \{1, 2, \dots, 4\}$ les polynômes d'Hermite. Ils sont définis comme suit :

$$H_1^m(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3,$$

$$H_2^m(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3,$$

$$H_3^m(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$H_4^m(\xi) = -\xi^2 + \xi^3 \quad (3.7)$$

En appliquant (3.5), l'équation (3.7) peut être réécrite comme suit :

$$\hat{x}^m(\xi) = H_1^m(\xi) x_{m-1}^m + H_3^m(\xi) x_m^m + H_2^m(\xi) \tilde{a}_{m-1}^m + H_4^m(\xi) \tilde{a}_m^m \quad (3.8)$$

Avec la technique du vecteur moyenné détaillée dans la section précédente, on arrive à lisser la pression de contact au voisinage des nœuds mais l'évolution de la normale reste linéaire à l'intérieur du segment. Dans l'expression (3.8), on a utilisé les vecteurs tangents moyennés \tilde{a}^m obtenus dans (3.4).

Dans l'interface de contact, un point d'intégration de la surface non mortier $x^{nm}(\zeta)$ est associé à son homologue dans la surface mortier $\bar{x}^m(\xi)$ par une projection. Le vecteur du gap

$$g = x^{nm} - \bar{x}^m(\xi) \quad (3.9)$$

doit être colinéaire au vecteur normal lissé \hat{n}^m . Il faut chercher la valeur de la coordonnée naturelle ξ qui vérifie cette condition :

$$\overrightarrow{\bar{x}^m(\xi) x^{nm}} \wedge \hat{n}^m(\xi) = \vec{0} \quad (3.10)$$

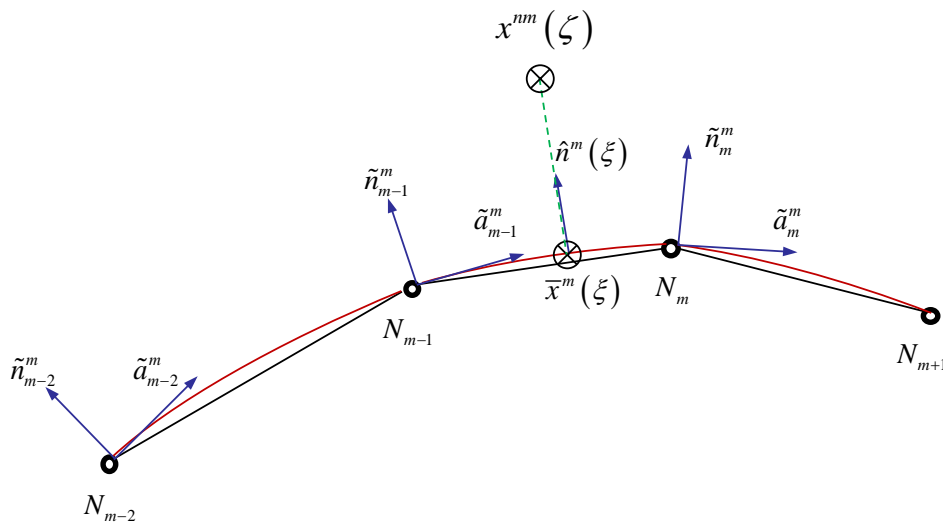


Figure 3.7. Projection sur une courbe lissée avec des polynômes cubiques d'Hermite

Appliquons l'expression (3.8) dans (3.5), le vecteur tangent lissé \hat{a}^m peut être réécrit comme suit :

$$\hat{a}^m(\xi) = H_{1,\xi}^m x_{m-1}^m + H_{3,\xi}^m x_m^m + H_{2,\xi}^m \tilde{a}_{m-1}^m + H_{4,\xi}^m \tilde{a}_m^m \quad (3.11)$$

En appliquant (3.11) dans (3.1), on peut obtenir l'expression du vecteur normal lissé \hat{n}^m comme suit :

$$\hat{n}^m = \begin{Bmatrix} \hat{n}_X^m \\ \hat{n}_Y^m \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H_{1,\xi}^m x_{m-1_Y}^m - H_{2,\xi}^m x_{m_Y}^{m+1} - H_{3,\xi}^m a_{m-1_Y}^m - H_{4,\xi}^m a_{m_Y}^m \\ H_{1,\xi}^m x_{m-1_X}^m + H_{3,\xi}^m x_{m_X}^{m+1} + H_{2,\xi}^m a_{m-1_X}^m + H_{4,\xi}^m a_{m_X}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

En utilisant l'expression du gap (3.9), la condition de projection (3.10) peut être réécrite:

$$(x_X^{nm} - x_X^m) \hat{n}_Y^m - (x_Y^{nm} - x_Y^m) \hat{n}_X^m = 0 \quad (3.13)$$

Avec les expressions (3.8) et (3.12), on peut réécrire (3.13) comme suit :

$$\begin{aligned} & \left(x_X^{nm} - \left[H_1^m(\xi) x_{m-1_X}^m + H_3^m(\xi) x_{m_X}^m + H_2^m(\xi) a_{m-1_X}^m + H_4^m(\xi) a_{m_X}^m \right] \right) \\ & \left[H_{1,\xi}^m x_{m-1_X}^m + H_{3,\xi}^m x_{m_X}^{m+1} + H_{2,\xi}^m a_{m-1_X}^m + H_{4,\xi}^m a_{m_X}^m \right] \\ & - \left(x_Y^{nm} - \left[H_1^m(\xi) x_{m-1_Y}^m + H_3^m(\xi) x_{m_Y}^m + H_2^m(\xi) a_{m-1_Y}^m + H_4^m(\xi) a_{m_Y}^m \right] \right) \\ & \left[-H_{1,\xi}^m x_{m-1_Y}^m - H_{3,\xi}^m x_{m_Y}^{m+1} - H_{2,\xi}^m a_{m-1_Y}^m - H_{4,\xi}^m a_{m_Y}^m \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

La position d'un point d'intégration sur la surface mortier $x^m(\xi)$ est un polynôme cubique en fonction de ξ . Quant au vecteur normal, en utilisant les expressions (3.1) et (3.5), il sera défini par un polynôme quadratique. L'opération de projection dans (3.14) peut alors être décrite par un polynôme d'ordre cinq comme suit :

$$P(\xi) = \alpha_1 \xi^5 + \alpha_2 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi + \alpha_6 \quad (3.15)$$

Après la détermination des expressions des coefficients α_i (Annexe B), des itérations de Newton seront indispensables pour le calcul de ξ .

Dans [Wriggers01] et [Padmanabhan01], on trouve que l'utilisation des polynômes d'Hermite pour le lissage des surfaces de contact améliore considérablement la convergence et la robustesse de la solution d'un problème de contact traité avec la méthode 'Nœud à Segment'. Cette amélioration est moins remarquable avec la méthode mortier. Les conditions de contact sont appliquées d'une manière faible et les forces de contact sont transmises sur toute la surface de contact et non pas point par point. L'intégrale employée dans la méthode mortier produit une certaine régularité de la pression de contact. D'où le faible apport sur la régularité par le lissage avec polynôme d'Hermite par rapport à la méthode NTS.

L'utilisation des polynômes d'Hermite pour le lissage de la surface mortier de contact permet de réduire l'erreur sur le calcul du gap minimal (figure 3.8) et par conséquent l'erreur globale. La diminution de l'erreur sur le gap a été le sujet de recherche de plusieurs travaux vu sa grande influence sur la solution du système. On trouve dans la littérature comme [Fischer06], [Puso08] et [Popp09] l'utilisation d'éléments quadratique avec l'approche mortier pour diminuer l'erreur au niveau du calcul du gap.

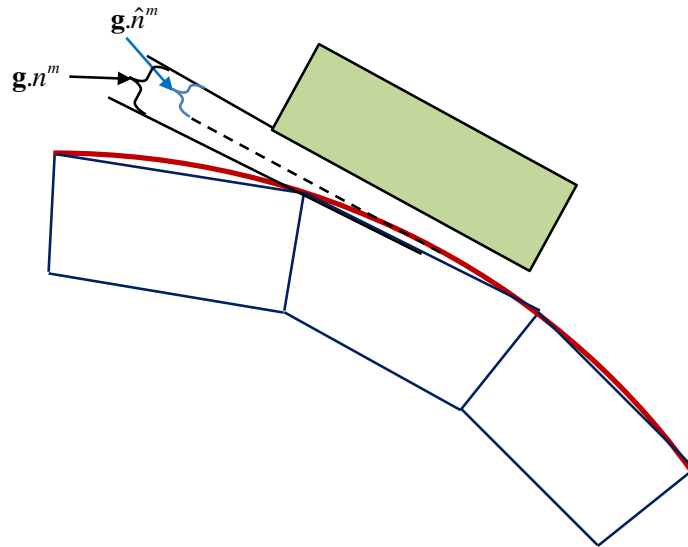


Figure 3.8 Influence du vecteur normal lissé sur la précision du calcul du gap

Dans notre cas, et avec des éléments linéaires, le lissage de la surface de contact avec les polynômes d’Hermite améliore la description de l’interface de contact. La fonction qui décrit l’évolution sur cette surface n’est cubique qu’à l’intérieur des segments. La surface mortier sera donc définie comme une suite de courbes cubiques. Bien que cette technique donne à la surface une continuité d’ordre C^1 , son algorithme de résolution est pénalisé par les itérations de Newton supplémentaires nécessaires à la projection.

3.3 B-Spline cubique

Dans cette section la totalité de la surface de contact est paramétrée par une B-Spline cubique en utilisant une description globale de tous les segments. Avec cette technique, la projection des points non mortier sur les segments mortier sera décrite par un unique ensemble de paramètres. Pour cette raison, une méthode de discrétisation structurée doit être employée pour reconstruire la surface mortier. Dans la littérature, (voir [Piegl97] et [Farin92]) l’utilisation des B-Spline a été initialement employée pour la conception géométrique et non pas pour améliorer l’analyse mécanique. Ce sous-chapitre comprend une méthodologie qui transforme les surfaces structurées interpolées avec des éléments finis linéaires (après un maillage) en courbes B-Spline. On garde une interpolation lagrangienne linéaire pour les éléments à l’intérieur du corps maître. Quant à sa frontière, tous les segments qui la constituent seront transformés en une seule courbe B-Spline cubique (Figure 3.9).

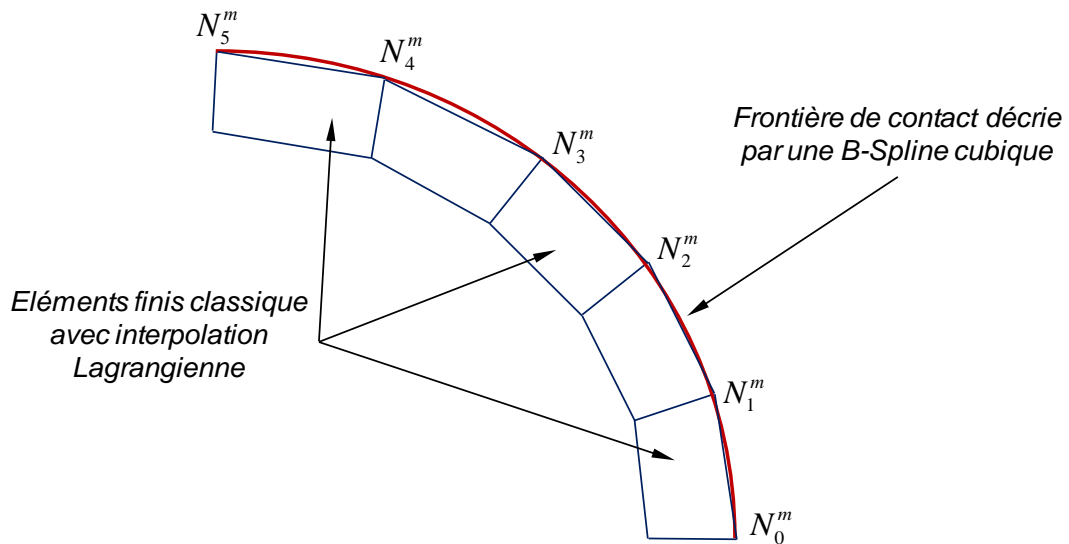


Figure 3.9. Éléments de frontière lissée avec un B-Spline Cubique

La discontinuité de l'évolution de la normale pose des problèmes au niveau de la précision du calcul de gap et influence directement la convergence du calcul. Cela présente un problème supplémentaire qui s'ajoute aux instabilités rencontrées dans le glissement pour chercher un ordre de continuité élevé sur la totalité de la surface mortier. Plusieurs algorithmes dans la littérature décrivent l'interpolation d'un ensemble de points et des tangentes à une courbe B-Spline avec un ordre de continuité prescrit (normalement plus élevé que C^1). Reprenons en particulier les algorithmes développés dans [Piegl97] et [Farin92] et remplaçons la série de points par l'ensemble des nœuds de la surface mortier.

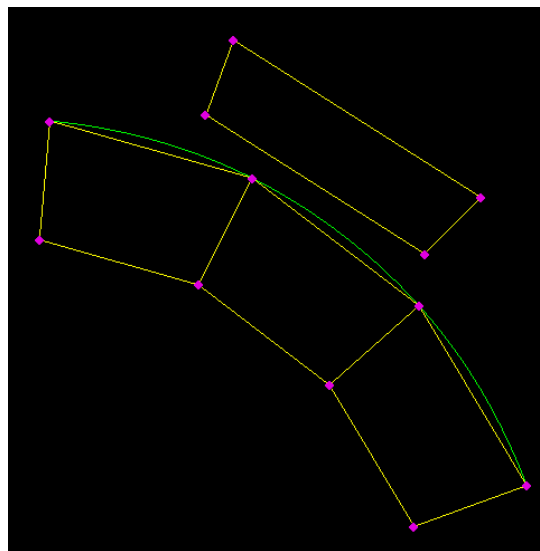


Figure 3.10. Application de la B-Spline Cubique dans FiESa

Les nœuds de la surface mortier N_i^m , $i = 0, \dots, n$, vont être interpolés avec une courbe B-Spline cubique. Attribuons à chacun de ces nœuds un paramètre noté $u_i \in [0, 1]$. Un vecteur de nœuds, noté U et de dimension $m = n + 2p$, contient tous les paramètres u_i de tous les nœuds

à interpoler. p est l'ordre de la B-spline qui est égal à 3 pour une B-Spline cubique. Pour définir U on a :

$$u_0 = \dots = u_3 = 0, \quad u_{m-3} = \dots = u_m = 1$$

$$u_{k+3} = \frac{1}{3} \sum_{j=k}^{k+2} \bar{u}_j \quad k = 1, \dots, n-3 \quad (3.16)$$

Avec

$$\bar{u}_j = \bar{u}_{j-1} + \frac{|N_j^m - N_{j-1}^m|}{r} \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.17)$$

où r est la somme de la longueur de tous les segments mortier :

$$r = \sum_{j=1}^n |N_j^m - N_{j-1}^m| \quad (3.18)$$

En utilisant les expressions (3.16)-(3.18), le vecteur U est donné par :

$$U = \{0, 0, 0, 0, u_{k+3}, \dots, u_n, 1, 1, 1, 1\} \quad k = 1, \dots, n-3 \quad (3.19)$$

Après avoir défini le vecteur des nœuds U , il reste à calculer les points de contrôle pour construire la courbe B-Spline (figure 3.11) qui passe par les nœuds N_i^m . On peut définir un système d'équation $(n+1) \times (n+1)$:

$$N_i^m = \sum_{j=0}^n B_j(\bar{u}_i) P_j \quad (3.20)$$

Sous forme matricielle, on peut réécrire (3.20) comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_0(\bar{u}_1) & B_1(\bar{u}_1) & \dots & B_{n-1}(\bar{u}_1) & \vdots \\ B_0(\bar{u}_2) & B_1(\bar{u}_2) & \dots & B_{n-1}(\bar{u}_2) & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & B_1(\bar{u}_{n-1}) & \dots & B_{n-1}(\bar{u}_{n-1}) & B_n(\bar{u}_{n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0^m \\ N_1^m \\ \vdots \\ N_{n-1}^m \\ N_n^m \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

P_j sont les points de contrôle à calculer et $B_{j,3}$ les fonctions de forme (détaillées dans l'annexe B). A partir de (3.21), les points de contrôle sont obtenus avec :

$$\{P_n\} = [B_n]^{-1} \{N_n^m\} \quad (3.22)$$

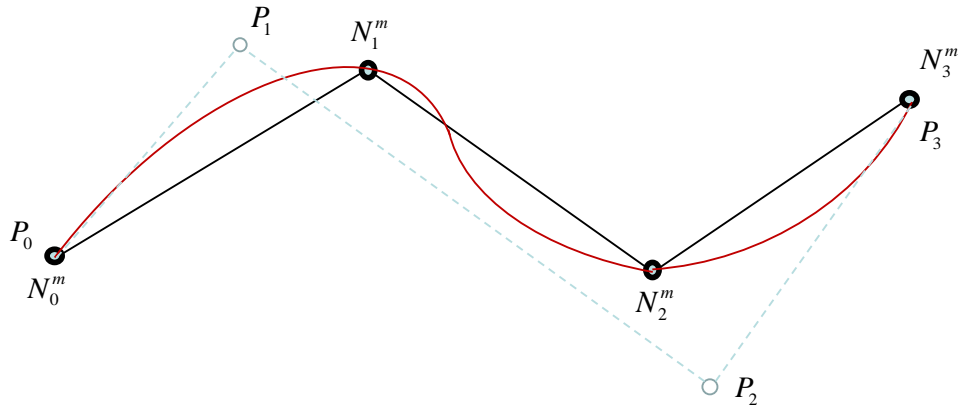


Figure 3.11. B-spline pour une interpolation de 4 nœuds

Avec l'expression (3.20) et (3.22), on peut écrire tout point de la courbe B-Spline comme suit :

$$x^m(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) P_i \quad (3.23)$$

Avec $t \in [0,1]$. En particulier, si t correspond à une valeur dans le vecteur U , le point calculé est un nœud mortier.

Nous dérivons (3.23) pour obtenir l'expression du vecteur tangent en appliquant (3.5) :

$$a^m(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,\xi}(t) P_i \quad (3.24)$$

Pour calculer la distance minimale qui sépare les deux corps, il faut vérifier la condition de projection (figure 3.12) :

$$\overrightarrow{\bar{x}^m(t) x^{nm}} \cdot a^m(t) = 0 \quad (3.25)$$

Le vecteur normal à la courbe B-Spline est obtenu en appliquant (3.1).

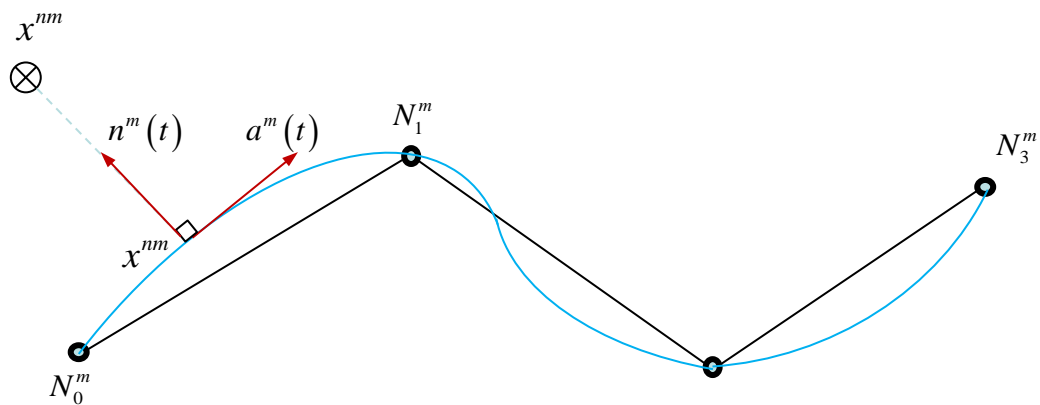


Figure 3.12. Projection sur la surface mortier lissée par une B-Spline cubique

L'application de la condition de projection (3.5) nous donne :

$$\left(x_X^{mm} - x_X^m\right) a_X^m - \left(x_Y^{mm} - x_Y^m\right) a_Y^m = 0 \quad (3.26)$$

En utilisant l'expression (3.23) et (3.24), nous obtenons un polynôme d'ordre 5 en fonction de la variable t . Des itérations de Newton seront indispensables afin de déterminer la bonne valeur de t pour vérifier les conditions (3.26).

Après quelque itération, nous obtenons la valeur de t qui assure la projection. Cette valeur se localise entre deux valeurs u_i et u_{i+1} du vecteur des nœuds U . Nous pouvons calculer la valeur de la coordonnée naturelle correspondante ξ afin de calculer la matrice tangente et le vecteur résidu pour la résolution du problème de contact. Un changement de variable sera nécessaire dans ce cas, il s'applique comme suit :

$$\xi = \frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i} \quad (3.37)$$

Au cours du calcul, des nœuds mortier peuvent changer de position. Il faut recalculer dans ce cas les points de contrôle et le vecteur des nœuds U . La modification est alors locale et non pas globale. Un point $x^m(u)$ sur la courbe, est piloté par quatre points de contrôle dans le cas d'une interpolation cubique. Il ne sera pas influencé par un changement de la position d'un point de contrôle dont il ne dépend pas (figure 3.13).

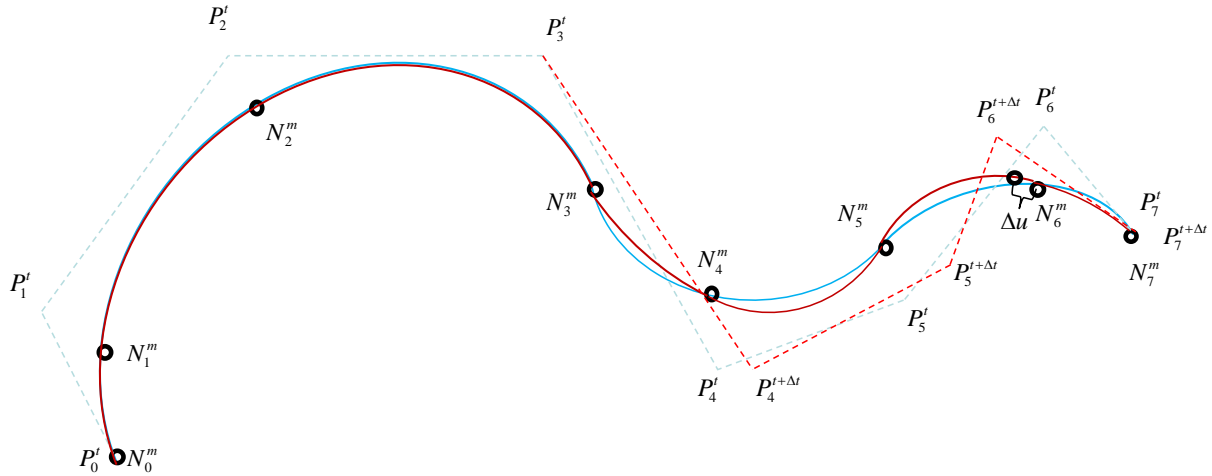


Figure 3.13. Influence du changement de la position d'un point de contrôle.

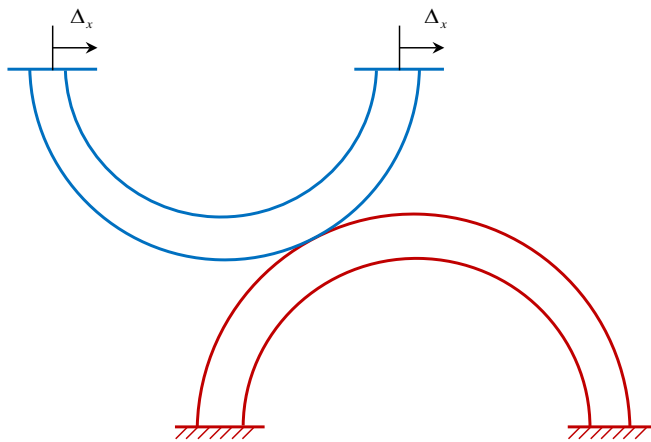
Le lissage de la surface mortier par une B-Spline cubique assure une continuité C^2 pour la totalité de la courbe. Le champ de déplacement dans l'élément est souvent défini par une interpolation lagrangienne (linéaire dans notre cas) alors que la géométrie de la frontière est décrite par un polynôme cubique. Cette différence dans le degré d'interpolation peut présenter une incompatibilité entre la géométrie et la description cinématique.

Nous rappelons que le calcul de la valeur de la coordonnée naturelle ξ nécessite l'utilisation des itérations de Newton pour satisfaire la condition de projection. Ces itérations ont peu d'influence sur le temps de recherche de projection par rapport à une interface non lissée.

L'ajout de ces itérations est minime par rapport à la continuité de la normale et la régularité de la pression de contact qu'apporte cette technique.

3.4 Exemples d'applications

On considère deux demi-anneaux en contact [Yang05] comme le montre la figure 3.14. Un anneau est fixé sur sa base quant à l'autre, il se déplace horizontalement $\Delta_x = 4 UL$. Le même matériau hyper-élastique décrit par la loi néo-Hooke est considéré pour les deux solides [Tur2012]. Le module de Young est de $E_{anneau} = 689.56 F/UL^2$ et le coefficient de Poisson est $\nu = 0.32$. Le rayon intérieur de l'anneau fixe est $R_i = 10 UL$ quant au rayon extérieur il est $R_e = 12 UL$. Ces dimensions sont respectivement $R_i = 8 UL$ et $R_e = 10 UL$ pour le semi anneau mobile.



Matériaux des deux corps :

$$E_{anneau} = 689.56 F/UL^2$$

$$\nu = 0.32$$

Chargement

$$\Delta_x = 4 UL$$

Figure 3.14 Contact entre deux demi anneaux

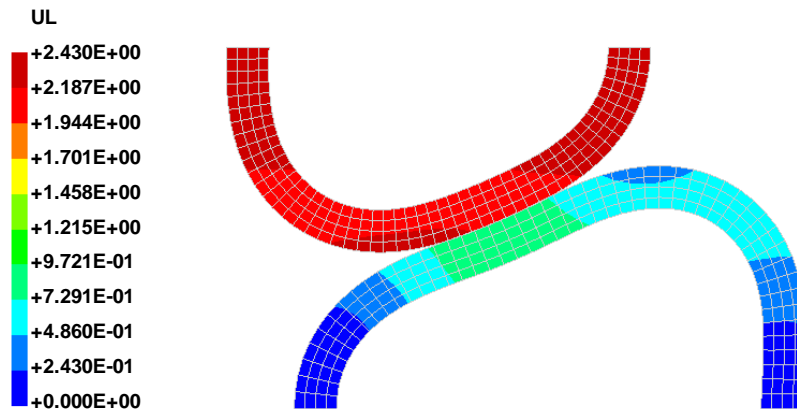


Figure 3.15 configuration déformée pour le problème de contact entre deux demi anneaux

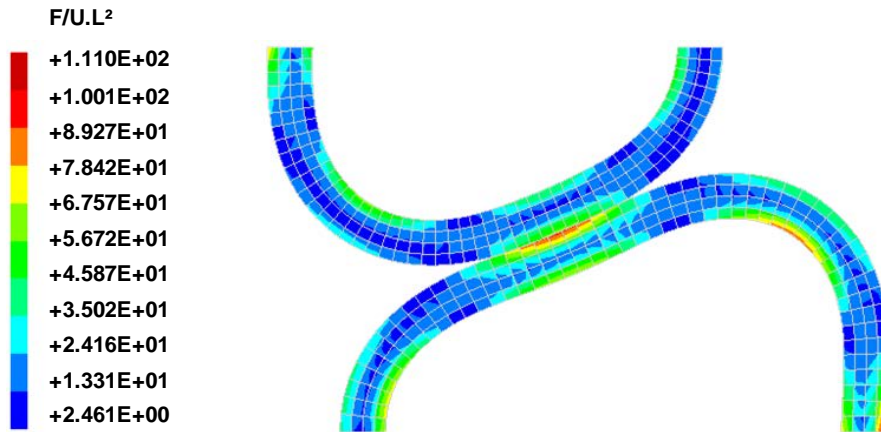


Figure 3.16 Contrainte de Von Mises pour le problème de contact entre deux demi anneaux

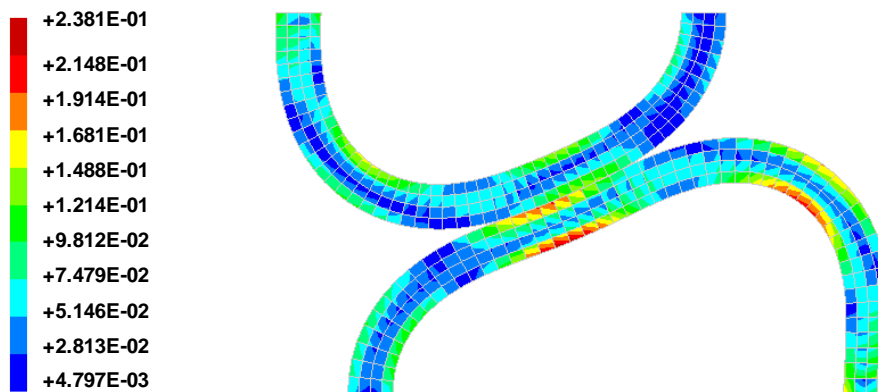


Figure 3.17 Déformation pour le problème de contact entre deux demi anneaux

Nous avons eu recours à un lissage de la surface maître pour résoudre ce problème.

Conclusion

Même en utilisant différentes techniques de lissage, le problème de contact avec frottement demeure assez difficile en particulier pour le cas d'une géométrie présentant des courbures. Le rôle du lissage dans ce cas est de rapprocher le modèle éléments finis à celui issu de la CAO. Cette approche peut être évitée en utilisant un modèle iso-géométrique.

Chapitre 4

Résultats numériques

Une approche mortier de la modélisation par éléments finis des problèmes de contact avec et sans frottement en grandes transformations a été présentée dans ce travail. Les formulations de la pénalité, des multiplicateurs de Lagrange et du lagrangien augmenté ont été considérées et appliquées aux cas de problèmes bidimensionnels. Les exemples illustrés dans ce chapitre ont un aspect industriel plus proche d'une application de mise en forme que les exemples déjà présentés dans les chapitres précédents. Les problèmes à résoudre représentent une combinaison du contact avec d'autres types de non-linéarités (géométriques, matérielles ...).

Sommaire

4.1 Problème de repassage

4.2 Simulation d'un jonc

4.3 Repoussage d'un bloc de caoutchouc dans une filière métallique

Tous les algorithmes détaillés dans les chapitres précédents sont implémentés dans un code maison **FiEStA** (**F**inite **E**lements for **S**tructural **A**nalysis) [Bouadallah2014]. C'est un code de calcul par éléments finis développé en langage C++. L'intégralité du module du contact a été développée au cours de ce travail de thèse. Le code présente une interface graphique simplifiée pour minimiser le temps nécessaire à la création d'un modèle de calcul. FiEStA utilise un solveur itératif.

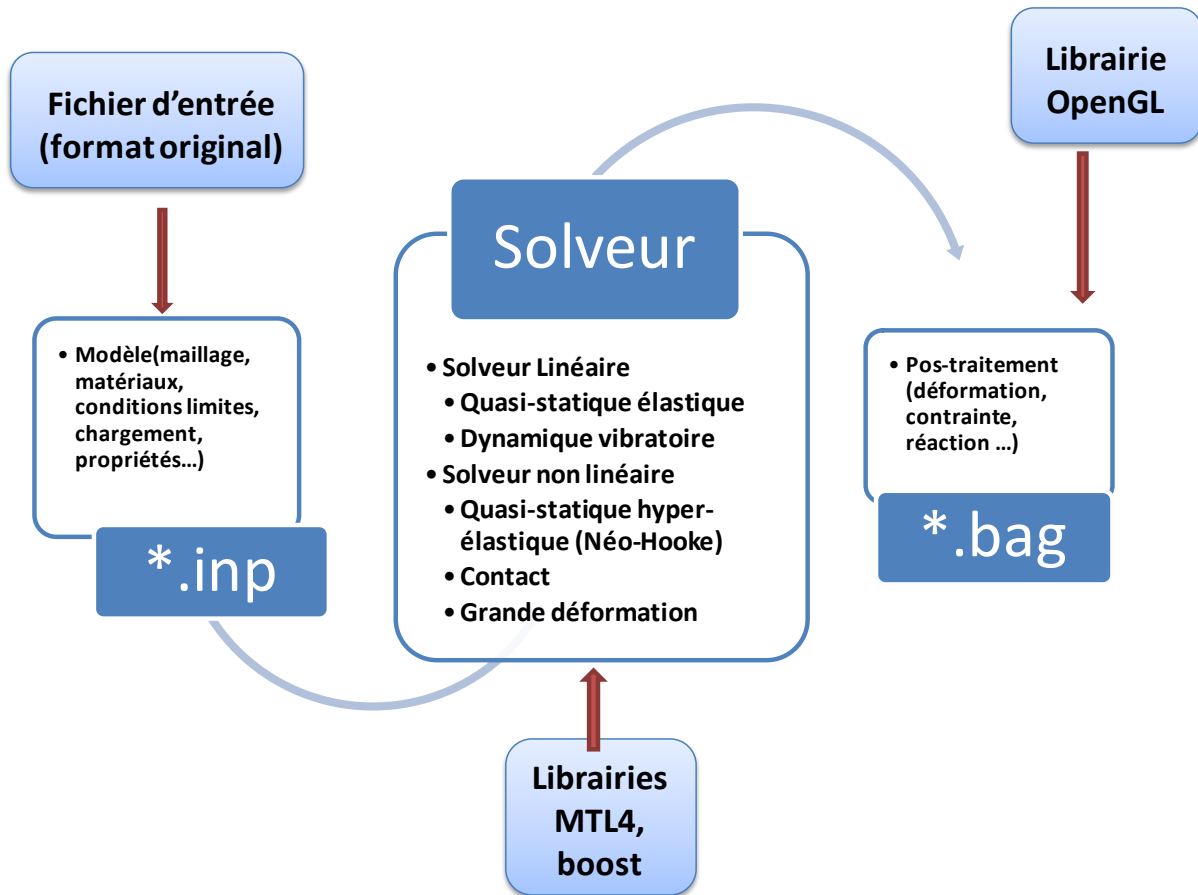


Figure 4.1. Architecture de FiEStA

FiEStA reste plus adapté à la résolution des problèmes de contact pour lesquels il a été développé. Le code présente une interface graphique pour la partie CAO, qui reste limitée pour certaines applications et restreinte au domaine bidimensionnel.

4.1. Problème de repassage « Ironing problem »

En première étape le disque se déplace verticalement vers le bas avec $w = 0,72 UL$, puis il translate horizontalement de $u = 9,6 UL$ tout en maintenant le déplacement vertical de la première étape. Les déplacements sont prescrits sur la moitié supérieure du disque, figure 4.8. Le disque et le bloc ont un comportement hyper-élastique (loi Néo-Hooke). Le disque avec un module de Young $E_{disque} = 6.896 \times 10^3 F/UL^2$, est 10 fois plus rigide que le bloc et ils ont le même coefficient de Poisson $\nu = 0.35$. Nous utilisons une formulation de pénalité dont le coefficient de pénalité est $\varepsilon_N = 5 \times 10^3 F/UL^2$. Nous pouvons nous référer pour ce problème à [Popp09].

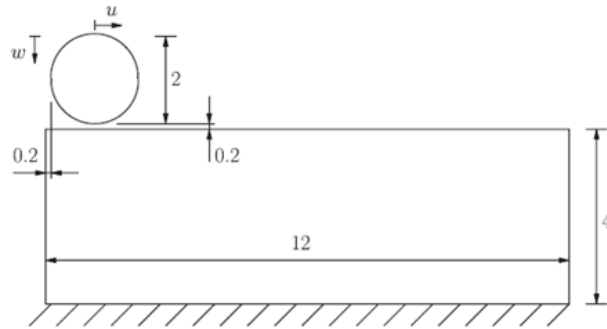
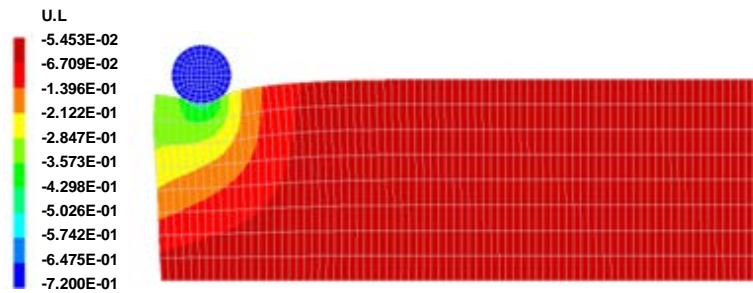
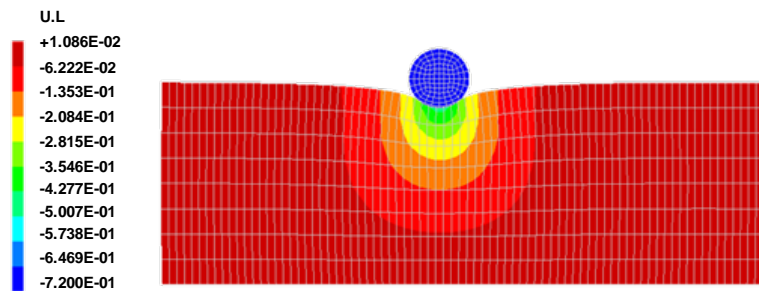


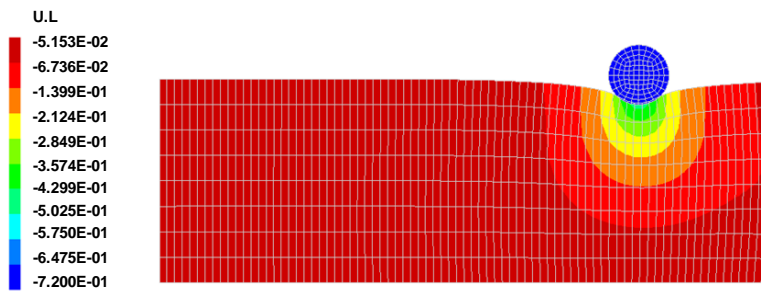
Figure 4.2. Description géométrique du problème de repassage



(a)



(b)



(c)

Figure 4.3. Configuration déformée du 'Ironing problem'.

(a) déplacement : $u=0$, $w=0.72 UL$, (b) déplacement : $u=4.8 UL$, $w=0.72 UL$,

(c) déplacement : $u=9.6 UL$, $w=0.72 UL$.

4.2. Simulation d'un jonc

Dans de nombreuses opérations complexes de formage de métal, une feuille de métal est déformée par les parties actives, le poinçon et la matrice. La déformation de la plaque est généralement contrôlée par des joncs de retenue comme on peut le voir sur la figure 4.10. Pour plus de détails sur cet exemple on peut se référer à [Maker87], [Padmanabhan01] et [Chun02]. Les données géométriques sont présentées sur la figure 5.5. Le module de Young et le coefficient de Poisson pour la tôle (aluminium AL60022-T4) sont $E_{AL60022-T4} = 68 \text{ Gpa}$, $\nu_{AL60022-T4} = 0.29$. Le poinçon et la matrice sont de l'acier à très haute résistance dont son module de Young et le coefficient de Poisson sont $E_{HSS} = 200 \text{ Gpa}$, $\nu_{HSS} = 0.3$. La plasticité n'a pas été considérée dans ce cas, notre préoccupation principale étant la modélisation du contact.

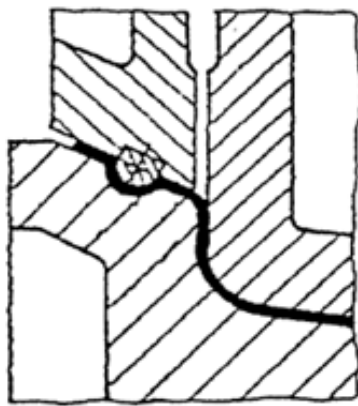


Figure 4.4. Utilisation des joncs de retenue en emboutissage

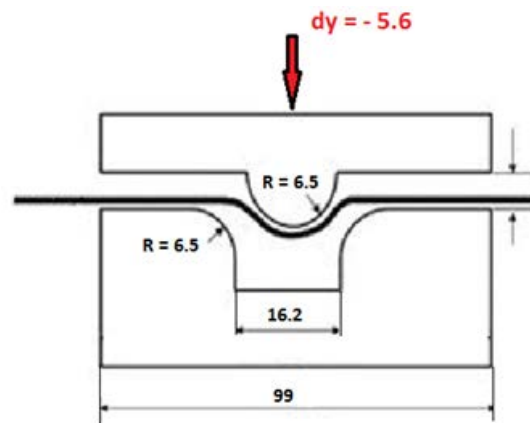


Figure 4.5. Données géométriques pour la simulation du jonc

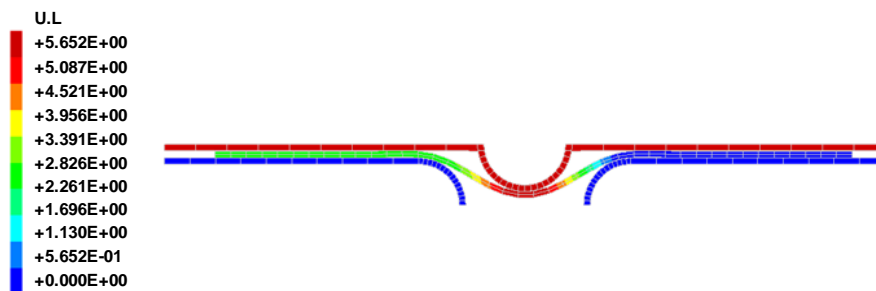


Figure 4.6. Configuration déformée du problème de simulation d'un jonc.

4.3. Repoussage d'un bloc de caoutchouc dans une filière métallique

Ce problème présente la simulation du repoussage d'un bloc de caoutchouc dans une filière métallique, figure 4.13. Le bloc a un comportement hyper-élastique (loi Néo-Hooke) et la filière a un comportement élastique [Fisch06]. Le module de Young et le coefficient de Poisson pour le bloc de caoutchouc sont $E_{caoutchouc} = 1 \times 10^9 \text{ Mpa}$, $\nu_{caoutchouc} = 0.43$. La filière est

en acier dont le module de Young et le coefficient de Poisson sont $E_{\text{Acier}} = 210 \times 10^9 \text{ Mpa}$, $\nu_{\text{Acier}} = 0.3$. Le bloc de caoutchouc se déplace dans la direction horizontale avec $d_{\text{max}} = 130$ mm. Nous avons modélisé la moitié du modèle en tenant compte des conditions de symétrie.

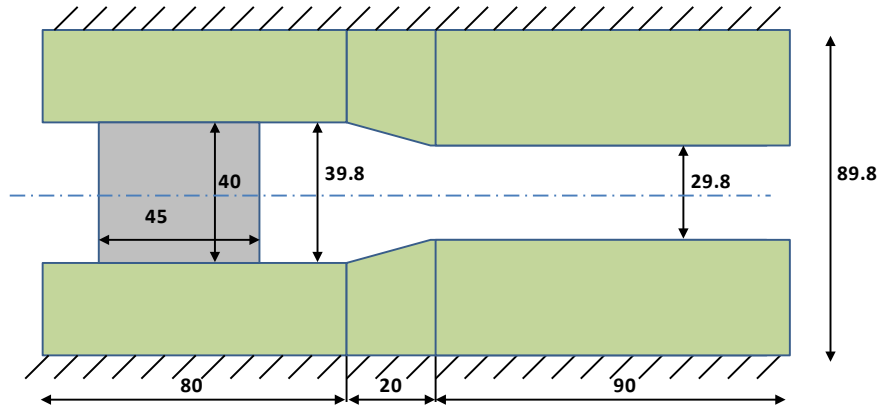
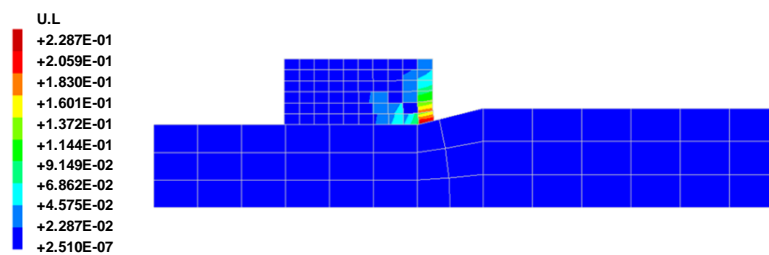
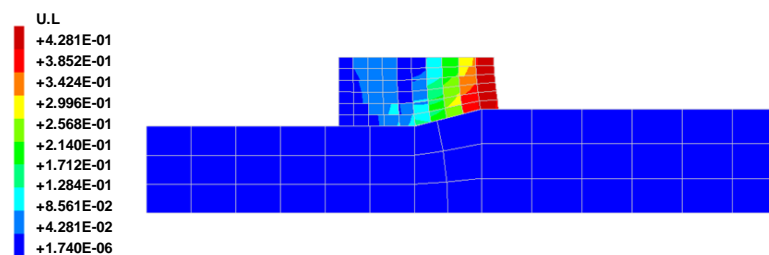


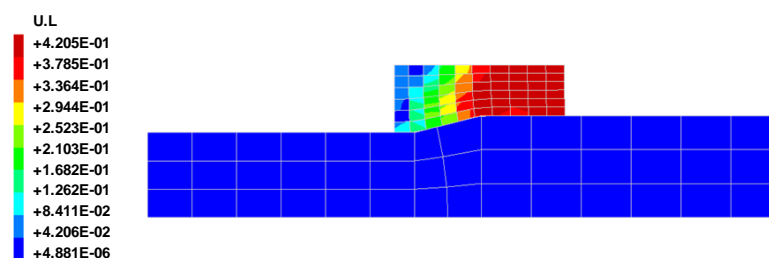
Figure 4.7. Données géométriques du problème de la simulation du repoussage



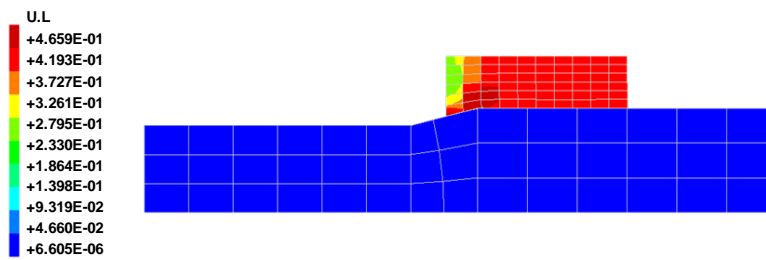
(b) $u = 30 \text{ mm}$



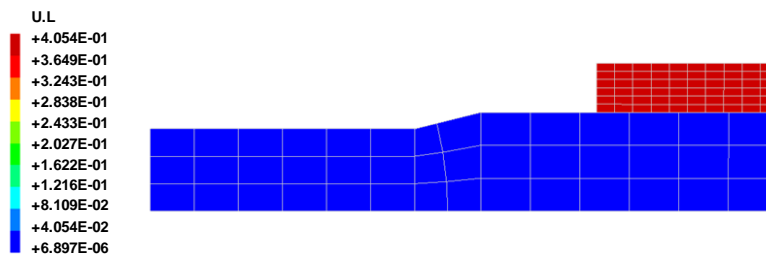
(b) $u = 50 \text{ mm}$



(c) $u = 70 \text{ mm}$



(d) $u = 90 \text{ mm}$



(e) $u = 130 \text{ mm}$

Figure 4.8. Configuration déformée du problème de simulation du repoussage.

Avec un lissage, la simulation du repoussage d'un bloc de caoutchouc dans une filière en acier devient possible. La réduction de la section de la filière au milieu présente une singularité dans l'évolution de la normale. Cette singularité est réduite grâce au lissage.

Chapitre 5

Conclusion général et perspectives

Ce travail de thèse a porté sur la simulation et la modélisation d'un problème de contact entre solides bidimensionnels déformables en grandes transformations. Nous avons utilisé la méthode mortier pour la discrétisation du contact avec différentes formulations pour l'application des conditions de contact et de frottement. Nous avons examiné plusieurs exemples numériques et en particulier des tests de contact proches d'une modélisation de mise en forme. Nous avons dégagé suite à ces exemples des choix concernant la formulation de contact utilisé ainsi une nécessité d'amélioration de la discrétisation de l'interface de contact. Nous avons essentiellement revisité deux points de détail numérique :

- i. Une discontinuité de l'évolution de la normale à la surface mortier est constatée et qui nécessite une régularisation. Ce besoin a été comblé au début par une méthode de pondération moyenné de la normale à la surface maître du contact. Cette solution reste restreinte à des exemples de petites transformations, d'où l'utilisation des polynômes d'Hermite. Une amélioration est constatée mais la surface de contact ne présente pas une continuité constante d'où l'utilisation d'une courbe B-Spline cubique pour la description de la surface mortier du contact. Avec cette technique, toute la surface maître de contact est décrite par une seule et unique surface sur la quelle on constate une évolution lisse et continue de la normale qui résulte une précision meilleure au calcul du jeu entre les corps en contact et une réduction conséquence sur la non stabilité de la pression normale de contact.
- ii. Le choix de la formulation pour l'application des conditions de contact et de frottement a une grande influence sur la qualité du résultat obtenue. Bien que la méthode de pénalité présente la formulation la plus utilisée dans la résolution des problèmes de contact, la solution demeure trop dépendent du choix du coefficient de pénalité. Malgré les travaux de recherche pour l'automatisation de la valeur de ce coefficient, son influence sur la qualité du calcul est diminuée mais pas supprimé. La méthode des multiplicateurs de Lagrange présente une solution exacte et non pas approximé comme dans le cas de la formulation par pénalité. Cette méthode présente une tolérance quasi-nulle à la pénétration ce qui rend le calcul parfois difficile à converger dans certaines applications. En plus, les multiplicateurs de Lagrange, qui présentent les efforts de contact, sont considérés comme des inconnus supplémentaires à calculer dans la solution générale. Dans la littérature on trouve des travaux pour la condensation de ces multiplicateurs pour ne pas modifier la taille du calcul, mais cette opération présente un effort supplémentaire à la résolution. Ces constatations nous a motivé à utiliser la formulation de Lagrange augmenté. Cette méthode est bien présente dans la littérature pour la résolution des problèmes de contact avec frottement. Elle offre une solution avec une précision proche de celle proposée par la formulation des multiplicateurs de Lagrange sans ajouter des inconnus au système à résoudre et très peut influencée par le choix du coefficient de pénalité. La description des termes nécessaires à l'implémentation de cette formulation par la méthode des éléments finis est quasi absente dans la littérature contrairement au deux autres formulations. Dans ce travail on a essayé de présenter des expressions détaillées des termes nécessaires à l'implémentation ainsi un algorithme détaillé de la résolution pour le contact normal et le contact avec frottement.

Toutes les formulations pour l'application des conditions de contact ainsi les méthodes de lissage de la surface mortier de contact sont développées et implémentées sur un code de calcul implicite maison par la méthode des éléments finis sous C++ intitulé 'FiESStA'.

Comme perspectives nous mentionnons principalement trois axes :

- i. La modélisation des problèmes illustrés dans ce travail reste dans le cadre du contact bidimensionnel. Pour une simulation d'un problème de mise en forme, une extension au domaine tridimensionnel sera indispensable.
- ii. Les développements présentés dans ce travail sont situés dans le cadre de la mécanique quasi-statique du contact. Les termes nécessaires pour l'implémentation par la méthode des éléments finis des développements de ce travail dans FiESStA sont situés dans le cadre d'un calcul implicite. Ce travail peut être généralisé par une étude dans le cadre de la mécanique de contact en dynamique afin de balayer une plage plus étendue des problèmes de contact [Magnain05]. La modélisation en dynamique d'un problème de contact peut être développée dans un code de calcul implicite comme explicite.
- iii. L'utilisation des courbes B-Spline pour le lissage de la surface mortier a été restreint à la peau de contact et non pas à la totalité du corps en contact. Ce choix peut générer une incompatibilité cinématique entre une description lagrangienne linéaire à l'intérieur des éléments et une évolution cubique à l'interface. Une description par B-Spline des frontière de tous les éléments même ceux qui ne sont pas en contact présentera une perte conséquente du temps de calcul inutile vue que cela n'apporte pas de précision supplémentaire ni au calcul du jeu ni à l'évolution de l'effort de contact. Une étude en utilisant l'analyse iso-géométrique pour remplacer le maillage classique et la méthode mortier pour l'application des conditions de contact présentera une bonne alternative.

Annexes

A-Linéarisation des variables du contact

Due au non linéarité géométrique, la variation de la variable qui définit le jeu minimal normal δg_N et la variation du déplacement relatif dans l'interface du contact Γ_c notée δg_T doivent être linéarisées.

A.1 Contact normal

Pour un problème de contact sans frottement, il faut donner une expression en fonction du champ de déplacement de la linéarisation du jeu normal Δg_N et de sa variation notée $\Delta \delta g_N$. Reprenons l'expression du jeu normal :

$$g_N = [x^{nm} - x^m(\xi)] \cdot n^m(\xi) \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

La variation de (A.1) donne :

$$\delta g_N = \delta([x^{nm} - x^m(\xi)] \cdot n^m(\xi)) \quad (\text{A.2})$$

L'expression (A.2) peut être exprimée :

$$\delta g_N = [\delta x^{nm} - \delta x^m(\xi)] \cdot n^m(\xi) + [x^{nm} - x^m(\xi)] \cdot \delta n^m(\xi) \quad (\text{A.3})$$

La distance qui sépare les deux corps se calcule en utilisant le vecteur $\mathbf{g} = \overline{x^{nm} x^m}$. Cette valeur est minimale quand ce vecteur devient colinéaire au vecteur normal à la surface mortier n^m . On peut déduire que $n^m \cdot \delta n^m = 0$ pour la valeur de ξ qui vérifie cette condition et on peut réécrire (A.3) comme suit :

$$\delta g_N = [\delta x^{nm} - \delta x^m(\xi)] \cdot n^m(\xi) \quad (\text{A.4})$$

Remplaçons δx^{nm} par Δu^{nm} et δx^m par Δu^m , on peut réécrire (A.4) :

$$\Delta g_N = [\Delta u^{nm} - \Delta u^m(\xi)] \cdot n^m(\xi) \quad (\text{A.5})$$

Reprenons l'expression (A.1) autrement :

$$x^{nm} - x^m(\xi) = g_N n^m \quad (\text{A.6})$$

La variation de (A.6) donne :

$$\delta x^{mm} - \delta x^m(\xi) - x_{,\xi}^m \delta \xi = \delta g_N n^m + g_N \delta n^m \quad (\text{A.7})$$

Le vecteur x^{mm} ne dépend pas de la coordonnée naturelle ξ , alors que le vecteur x^m dépend de cette variable et des champs de déplacement. La linéarisation de (A.7) donne :

$$-\left[\delta x_{,\xi}^m \Delta \xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta \xi + x_{,\xi\xi}^m \Delta \xi \delta \xi + x_{,\xi}^m \Delta \delta \xi \right] = \Delta(\delta g_N) n^m + \delta g_N \Delta n^m + \Delta g_N \delta n^m + g_N \Delta \delta n^m \quad (\text{A.8})$$

Le champs de déplacement est interpolé avec des fonctions de forme linéaire. Le vecteur qui décrit la position d'un point sur la surface mortier x^m est alors linéaire en ξ . La dérivée seconde de ce dernier en fonction de cette variable est nulle $x_{,\xi\xi}^m = 0$. La valeur de ξ indique la position du point mortier x^m dans le segment mortier entre les nœuds N_i^m et N_{i+1}^m . Supposons que ces deux derniers correspondent respectivement aux points x_1^m et x_2^m . On peut définir un vecteur tangent à la surface mortier $a^m = x_2^m - x_1^m$. Le vecteur normal à la surface mortier est en fonction de la coordonnée naturelle ξ . Quand le point x^m représente le point de la surface mortier le plus proche du point non mortier x^{mm} les conditions d'orthogonalité entre a^m et n^m seront vérifiées et on peut écrire :

$$\delta n^m \cdot a^m = -n^m \cdot \delta a^m \quad (\text{A.9})$$

Sachant que $n^m \cdot \delta n^m = 0$, on peut exprimer la variation de la normale comme suit :

$$\delta n^m = -\left[a^m \otimes n^m \right] \cdot \delta a^m = -(n^m \cdot \delta a^m) \cdot a^m \quad (\text{A.10})$$

Et sa linéarisation donne :

$$\Delta n^m = -\left[a^m \otimes n^m \right] \cdot \Delta a^m = -(n^m \cdot \Delta a^m) \cdot a^m \quad (\text{A.11})$$

Pour le point x^m qui vérifie la condition de projection, la coordonnée naturelle ξ peut être exprimée comme suit :

$$\xi = \frac{(x^{mm} - x_1^m) \cdot (x_2^m - x_1^m)}{(x_2^m - x_1^m) \cdot (x_2^m - x_1^m)} \quad (\text{A.12})$$

Et sa variation :

$$\delta \xi = \frac{1}{\|x_2^m - x_1^m\|^2} \left[(\delta x^{mm} - \delta x^m) \cdot x_{,\xi}^m + g_N n^m \cdot \delta x_{,\xi}^m \right] \quad (\text{A.13})$$

Pour la linéarisation de (A.13) on peut écrire :

$$\Delta\xi = \frac{1}{\|x_2^m - x_1^m\|^2} \left[(\Delta u^{nm} - \Delta u^m) \cdot a^m + g_N n^m \cdot \Delta u_{,\xi}^m \right] \quad (\text{A.14})$$

Si on multiplie l'égalité (A.2.8) avec le vecteur normal n^m , on obtient :

$$\begin{aligned} & - \left[\delta x_{,\xi}^m \Delta\xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta\xi + x_{,\xi\xi}^m \Delta\xi \delta\xi + x_{,\xi}^m \Delta\delta\xi \right] \cdot n^m \\ & = \Delta(\delta g_N) + \delta g_N \Delta n^m \cdot n^m + \Delta g_N \delta n^m \cdot n^m + g_N \Delta\delta n^m \cdot n^m \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Comme $n^m \cdot \delta n^m = 0$ et aussi $n^m \cdot \Delta n^m = 0$, on peut réécrire (A.15) :

$$\Delta(\delta g_N) = - \left[\delta x_{,\xi}^m \Delta\xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta\xi + x_{,\xi\xi}^m \Delta\xi \delta\xi + x_{,\xi}^m \Delta\delta\xi \right] \cdot n^m - g_N \Delta\delta n^m \cdot n^m \quad (\text{A.16})$$

En utilisant ces équations

$$\begin{aligned} n^m \cdot \delta n^m &= 0 \\ \Delta(n^m \cdot \delta n^m) &= 0 \\ \Delta n^m \cdot \delta n^m + n^m \cdot \Delta\delta n^m &= 0 \\ n^m \cdot \Delta\delta n^m &= -\Delta n^m \cdot \delta n^m \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

L'expression de (A.16) peut être réécrite comme suit :

$$\Delta(\delta g_N) = - \left[\delta x_{,\xi}^m \Delta\xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta\xi + x_{,\xi\xi}^m \Delta\xi \delta\xi + x_{,\xi}^m \Delta\delta\xi \right] \cdot n^m + g_N \Delta n^m \cdot \delta n^m \quad (\text{A.18})$$

En utilisant l'expression du vecteur normal linéarisé (A.11), on peut écrire :

$$\Delta(\delta g_N) = - \left(\delta x_{,\xi}^m \Delta\xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta\xi \right) \cdot n^m + \frac{g_N}{\|x_2^m - x_1^m\|^2} \left(n^m \cdot \delta x_{,\xi}^m \right) \cdot \left(\Delta u_{,\xi}^m \cdot n^m \right) \quad (\text{A.19})$$

A.2 Contact tangent

Nous traitons la linéarisation des variables du contact tangent en fonction du champ de déplacement des deux corps pour un problème de contact avec frottement. Comme on l'a signalé avant, en présence du frottement, il faut distinguer le contact collant du contact glissant. Il faut revoir l'expression de (A.14) ainsi que la linéarisation de la variation de l'expression (A.13) pour ce problème. L'expression (A.8) a été multipliée par le vecteur normal pour la cas d'un contact normal afin de trouver une linéarisation de la variation de la coordonnée naturelle $\Delta\delta\xi$. Dans le cas d'un contact tangent nous multiplions cette expression par le vecteur tangent a^m .

$$\begin{aligned} & - \left[\delta x_{,\xi}^m \Delta\xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta\xi + x_{,\xi\xi}^m \Delta\xi \delta\xi + x_{,\xi}^m \Delta\delta\xi \right] \cdot a^m \\ & = \Delta(\delta g_N) n^m \cdot a^m + \delta g_N \Delta n^m \cdot a^m + \Delta g_N \delta n^m \cdot a^m + g_N \Delta\delta n^m \cdot a^m \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

En appliquant la condition d'orthogonalité $n^m \cdot a^m = 0$ et avec une interpolation linéaire on peut réécrire (A.20) comme suit :

$$-x_{,\xi}^m \cdot a^m \Delta \delta \xi = \delta x_{,\xi}^m \Delta \xi + \Delta u_{,\xi}^m \delta \xi + \delta g_N \Delta n^m \cdot a^m + \Delta g_N \delta n^m \cdot a^m + g_N \Delta \delta n^m \cdot a^m \quad (\text{A.21})$$

Le vecteur tangent peut être défini par $a^m = x_{,\xi}^m$, le coefficient avant $\Delta \delta \xi$ dans (A.21) n'est donc que le produit scalaire de ce dernier qui vaut $\|x_2^m - x_1^m\|^2$. En utilisant ces équations

$$\begin{aligned} \Delta \left[\delta (n^m \cdot a^m) \right] &= \Delta \left[\delta n^m \cdot a^m + n^m \cdot \delta a^m \right] \\ &= \Delta \delta n^m \cdot a^m + \delta n^m \cdot \Delta a^m + \Delta n^m \cdot \delta a^m + n^m \cdot \Delta \delta a^m = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

On peut écrire :

$$\Delta \delta n^m \cdot a^m = -(\delta n^m \cdot \Delta a^m + \Delta n^m \cdot \delta a^m + n^m \cdot \Delta \delta a^m) \quad (\text{A.23})$$

Reprenons la variation du jeu minimal (A.2) et calculons sa linéarisation :

$$\begin{aligned} \left[\delta x^{mm} - \delta x^m(\xi) \right] &= g_N \delta n^m \\ \left[\Delta u^{mm} - \Delta u^m(\xi) \right] &= g_N \Delta n^m \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Dans l'expression (A.21) on connaît déjà l'expression de $\delta \xi$ et de $\Delta \xi$, pour les trois termes qui restent en utilisant (A.23) et (A.24) on a :

$$\delta g_N \Delta n^m \cdot a^m + \Delta g_N \delta n^m \cdot a^m - g_N (\delta n^m \cdot \Delta a^m + \Delta n^m \cdot \delta a^m) = (\delta x^{mm} - \delta x^m) \cdot \Delta a^m - (\Delta u^{mm} - \Delta u^m) \cdot \delta a^m \quad (\text{A.25})$$

On peut donc donner une expression de la linéarisation de la variation de ξ par :

$$\Delta \delta \xi = \frac{1}{\|x_2^m - x_1^m\|^2} \left[-2 \cdot a^m (\Delta u_{,\xi}^m \delta \xi + \delta x_{,\xi}^m \Delta \xi) + (\delta x^{mm} - \delta x^m) \cdot \Delta u_{,\xi}^m + (\Delta u^{mm} - \Delta u^m) \cdot \delta x_{,\xi}^m \right] \quad (\text{A.26})$$

La résolution du problème par la méthode de Newton-Raphson nécessite la linéarisation de c_N par rapport aux deux variables de contact λ_N et g_N et de leurs variations $\delta \lambda_N$ et δg_N .

$$G_c = \int_{\Gamma_c} c_N(\lambda_N, g_N, \delta \lambda_N, \delta g_N) d\Gamma = \bigcup_{s=1}^N \left[\int_{\Gamma_c^s} c_N(\lambda_N, g_N, \delta \lambda_N, \delta g_N) d\Gamma \right] \quad (\text{A.27})$$

La linéarisation de la fonction c_N peut s'écrire comme suit :

$$\Delta c_N = \frac{\partial c_N}{\partial \lambda_N} \Delta \lambda_N + \frac{\partial c_N}{\partial g_N} \Delta g_N + \frac{\partial c_N}{\partial \delta g_N} \Delta \delta g_N + \frac{\partial c_N}{\partial \delta \lambda_N} \Delta \delta \lambda_N \quad (\text{A.28})$$

L'expression de (A.28) change d'une formulation à une autre. Sa linéarisation donne l'expression de la matrice en utilisant cette relation :

$$\Delta(c_N) = \langle \delta x_n \rangle [K_N] \{ \Delta x_n \} \quad (\text{A.29})$$

Quant au vecteur résidu, on peut le déterminer à partir de l'expression de la contribution du contact à l'énergie potentielle G_c comme suit :

$$G_c = \sum_{GP=1}^{n_{GP}} \left[\langle \delta x_n \rangle R_{N_{GP}} \right] \quad (\text{A.30})$$

Exemple du patch test

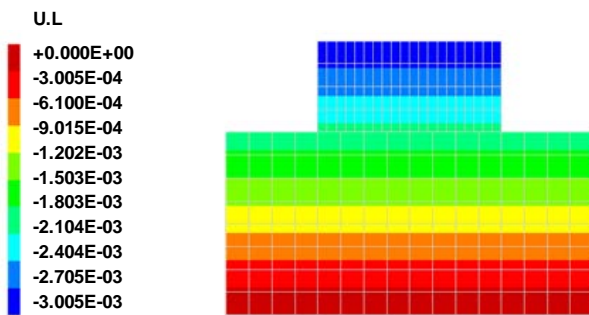


Figure A.1. Déplacement du problème 'patchtest' avec la formulation des multiplicateurs de Lagrange

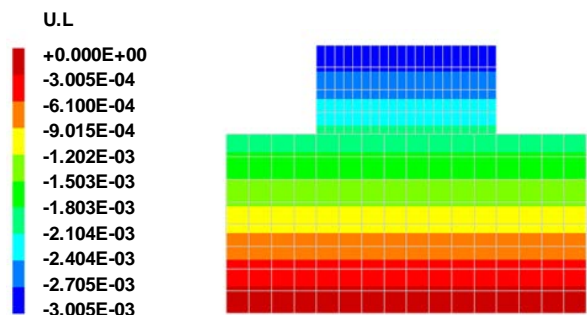


Figure A.2. Déplacement du problème 'patchtest' avec la formulation de pénalisation

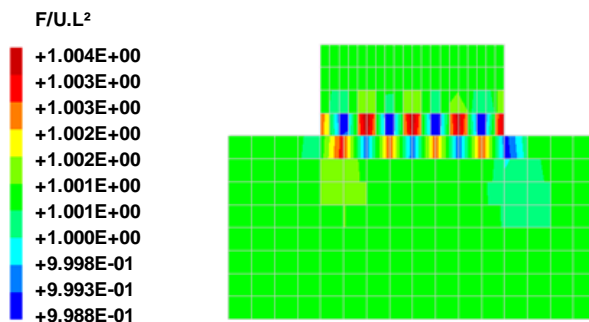


Figure A.3. Contraintes de Von Mises du problème 'patchtest' avec la formulation des multiplicateurs de Lagrange

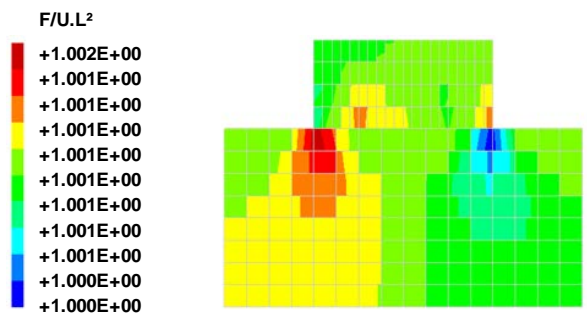


Figure A.4. Contraintes de Von Mises du problème 'patchtest' avec la formulation de pénalisation

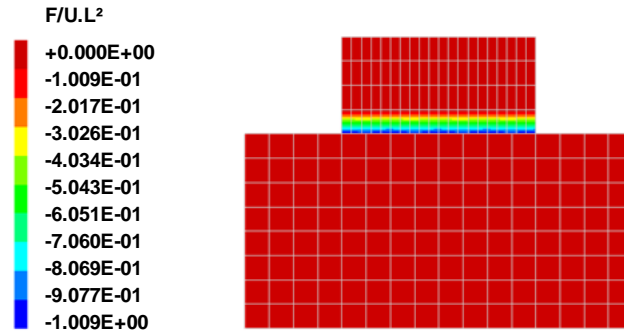


Figure A.5. Distribution des multiplicateurs de Lagrange

La solution analytique du problème ‘patchtest’ donne une contrainte verticale stable d’une valeur de $\sigma_{vertical} = -1 \frac{F}{UL^2}$. On remarque que ce résultat est prouvé numériquement avec la méthode mortier pour la formulation de pénalisation ainsi pour la formulation des multiplicateurs de Lagrange. Pour cette dernière formulation, on constate que la valeur des multiplicateurs de Lagrange dans l’interface de contact est très proche du résultat théorique. En effet, les multiplicateurs de Lagrange présentent la valeur exacte de la pression normale de contact ce qui explique sa valeur.

B- Algorithme de résolution pour le lissage avec B-Spline Cubique

On peut exprimer tous les points de la courbe B-Spline en fonction d'une liste de points de contrôle et une fonction de forme polynômiale comme le montre la relation (3.23). Dans ce qui suit, on va détailler le mode de calcul de cette fonction de forme ainsi le contenu de la liste des points de contrôle. Dans la figure (B.1), les points P_{i_i} et P_{2i} sont des points fictifs utilisés pour trouver une interpolation cubique à partir d'une succession de trois interpolations linéaires.

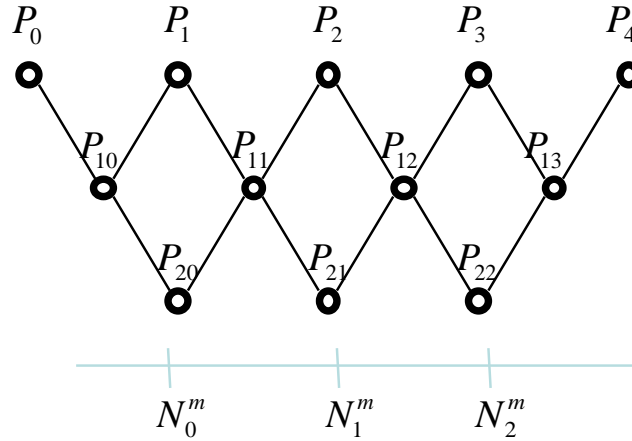


Figure B.1 Définition des fonctions de forme pour une B-Spline

On va définir l'expression d'un point de la courbe B-Spline situé entre les nœuds N_0^m et N_1^m . Cette expression sera un polynôme d'ordre 3 en fonction de la variable t (B-Spline cubique).

$$\begin{aligned}
 P &= (1-t) P_{20} + t P_{21} \\
 &= (1-t) [(1-t) P_{10} + t P_{11}] + t [(1-t) P_{11} + t P_{12}] \\
 &= (1-t) [(1-t) [(1-t) P_0 + t P_1] + t [(1-t) P_1 + t P_2]] \\
 &\quad + t [(1-t) [(1-t) P_1 + t P_2] + t [(1-t) P_2 + t P_3]]
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Le calcul du polynôme P dépend des point de contrôle P_0 , P_1 , P_2 et P_3 . Une modification de la géométrie de base pour le segment mortier entre les nœuds N_0^m et N_1^m ne change pas la définition de toute la courbe B-Spline mais uniquement la position des quatre points de contrôle qui définissent tous les points de la courbe sur ce segment. L'expression (B.10) peut être réécrite comme suit :

$$P = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \tag{B.11}$$

Revenons à l'application de la condition de projection (3.25), nous avons :

$$(x^{nm} - x^m) \cdot a^m = 0 \tag{B.12}$$

Pour satisfaire cette condition, on a choisi de donner une expression de x^m en fonction des points de contrôle qui lui sont associés et aussi du vecteur tangent a^m dans ce point en utilisant la relation (3.5). Ce dernier peut être défini comme suit :

$$a^m = -3(1-t)^2 P_0 + (3-12t+9t^2)P_1 + (6t-9t^2)P_2 + 3t^2P_3 \quad (\text{B.13})$$

En appliquant la relation (B.12) avec la relation (B.13) on obtient un polynôme d'ordre 5 à résoudre afin de trouver la bonne valeur de t qui vérifie la condition de projection. En appliquant les itérations de Newton, on ne va pas développer tous les termes de (B.12) en fonction des points de contrôle pour éviter une expression compliquée en fonction de ces derniers. En dérivant l'expression (B.12) nous obtenons :

$$-(a^m)^2 + (x^{mm} - x^m) \cdot a_{,t}^m = 0 \quad (\text{B.14})$$

Avec

$$a_{,t}^m = (6-6t)P_0 + (-12+18t)P_1 + (6-18t)P_2 + 6tP_3 \quad (\text{B.15})$$

On a toute les expressions des termes dans (B.14) pour calculer la projection par la méthode de Newton

C. Comportement hyper-élastique

Dans cette sous-section nous détaillons les expressions qui ont permis à implémenter la loi de comportement hyper-élastique dans FiEStA.

Rappelons la fonction de l'énergie de déformation pour le modèle le Mooney-Rivlin.

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{\text{déviatorique}} + \varphi_{\text{volumique}} \\ \varphi &= C_1(\bar{I}_1 - 3) + C_2(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{2}k(J-1)^2\end{aligned}\tag{C.1}$$

Avec

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= I_1 I_3^{-1/3} = I_1 J^{-2/3} \\ \bar{I}_2 &= I_2 I_3^{-2/3} = I_2 J^{-4/3}\end{aligned}$$

Les termes I_1 , I_2 et I_3 représentent les invariants de C (Cauchy-Green droite).

$$I_1 = \text{tr}(C) = \text{II} : C$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(C^2))$$

$$I_3 = J^2 = \det(C) = \frac{1}{3}(\text{tr}(C^3) - I_1 \text{tr}(C^2) - I_2 \text{tr}(C))\tag{C.2}$$

$J = \det(F)$, F est le gradient de déformation avec $C = F^T F$.

Le modèle de Néo-Hooke, le modèle de loi de comportement hyper-élastique implémenté dans FiEStA, est un cas particulier du modèle Money-Rivlin avec $C_2 = 0$ dans (C.1). Avec E le tenseur de Green-Lagrange défini par $E = \frac{1}{2}(C - \text{II})$. Reprenons l'expression du deuxième tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff :

$$S = \frac{\partial \varphi}{\partial E} = \frac{2\partial \varphi}{\partial C} = \frac{\partial \varphi_d}{\partial C} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial C} = 2 \left[A_1 \frac{\partial I_1}{\partial C} + A_2 \frac{\partial I_2}{\partial C} + A_3 \frac{\partial I_3}{\partial C} \right]\tag{C.3}$$

Avec

$$A_1 = C_1 I_3^{-1/3}$$

$$A_2 = C_2 I_3^{-2/3}$$

$$A_3 = -\frac{1}{3}C_1 I_3^{-4/3} I_1 - \frac{2}{3}C_2 I_3^{-5/3} I_2 + \frac{k(J-1)}{2J}$$

En utilisant (C.2) on peut écrire :

$$\delta I_1 = \frac{\partial I_1}{\partial C} : \delta C = \mathbb{I} : \delta C = \text{tr}(\delta C)$$

$$\delta I_2 = \frac{\partial I_2}{\partial C} : \delta C = (I_1 \mathbb{I} - C) : \delta C$$

$$\delta I_3 = \frac{\partial I_3}{\partial C} : \delta C = I_3 C^{-1} : \delta C = J^2 C^{-1} : \delta C \quad (\text{C.4})$$

Dans le cas d'une pression uniforme on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ (élongation) , (C.2) donne :

$$I_1 = 3\lambda^2, \quad I_2 = 3\lambda^4, \quad I_3 = \lambda^6, \quad I = \lambda^3, \quad C = F^T F = \lambda^2 \mathbb{I}, \quad C^{-1} = \lambda^{-2} \mathbb{I}$$

Dans ce cas le tenseur de Piola-Kirchoff s'écrit :

$$S = K J (J-1) C^{-1} = K J (J-1) \lambda \mathbb{I} \quad (\text{C.5})$$

Nous écrivons la contrainte de Cauchy en fonction de la contrainte de Piola-Kirchoff :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{J} F S F^T \\ &= \frac{1}{J} F [K (J-1) C^{-1}] F^T \mathbb{I} \\ &= K (J-1) C^{-1} \mathbb{I} \\ &= K \frac{dv - dv_0}{dv_0} \mathbb{I} \\ &= -p \mathbb{I} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Avec p la pression qui est positive dans le cas d'une compression.

$$p = -K (J-1) \quad (\text{C.7})$$

En utilisant (C.7), on peut réécrire (C.3) comme suit :

$$S = [B_1 \mathbb{I} + B_2 C + B_3 C^{-1}] - p I_3^{1/2} C^{-1} = \frac{\partial \varphi_d}{\partial E} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial E} \quad (\text{C.8})$$

Avec

$$B_1 = 2C_1 I_3^{-1/3} + 2C_2 I_3^{-2/3} I_1$$

$$B_2 = -2C_2 I_3^{-2/3}$$

$$B_3 = -\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} I_1 - \frac{4}{3} C_2 I_3^{-2/3} I_2$$

Pour un modèle Néo-Hookéen ($C_2 = 0$) on a la relation :

$$\begin{aligned} S &= \left[2C_1 I_3^{-1/3} \mathbb{I} - \frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} I_1 C^{-1} \right] - p I_3^{1/2} C^{-1} \\ &= 2C_1 I_3^{-1/3} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} I_1 C^{-1} \right] - p J C^{-1} \\ &= \mu J^{-2/3} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} I_1 C^{-1} \right] - p J C^{-1} \end{aligned} \quad (C.9)$$

avec $\mu = 2C_1$

En cas d'incompressibilité de matériau ($J = I_3 = 1$), la pression p peut être traité aux nœuds comme un multiplicateur de Lagrange ou en faisant tendre k vers ∞ . En appliquant la formulation de Lagrange totale, l'expression (C.9) permet de calculer le vecteur des forces internes. Elle doit être différenciée pour le calcul de la matrice tangente. En appliquant (C.4) et pour un matériau Néo-Hookéen on a :

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{\partial S}{\partial I_1} \delta I_1 + \frac{\partial S}{\partial I_3} \delta I_3 + \frac{\partial S}{\partial C} \delta C + \frac{\partial S}{\partial p} \delta p \\ &= \frac{\partial S}{\partial I_1} [\mathbb{I} : \delta C] + \frac{\partial S}{\partial I_3} [I_3 C^{-1} : \delta C] + \frac{\partial S}{\partial C} \delta C + \frac{\partial S}{\partial p} \delta p \end{aligned} \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} C^{-1} [\mathbb{I} : \delta C] \\ &\quad + \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} I_1 C^{-1} \right] - \frac{p}{2} I_3^{-1/2} C^{-1} \right] [I_3 C^{-1} : \delta C] \\ &\quad + \left[\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} I_1 + p I_3^{1/2} \right] C^{-2} \delta C - I_3^{1/2} C^{-1} \delta p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} (C^{-1} : \delta C) \right] \mathbb{I} \\ &\quad + \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} [\mathbb{I} : \delta C] + \frac{2}{9} C_1 I_1 I_3^{-1/3} [C^{-1} : \delta C] - \frac{p}{2} I_3^{1/2} [C^{-1} : \delta C] \right] C^{-1} \\ &\quad + \left[\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} I_1 + p I_3^{1/2} \right] [C^{-1} \delta C C^{-T}] - I_3^{1/2} C^{-1} \delta p \end{aligned} \quad (C.11)$$

$$\delta S = D_1 \Pi + D_3 C^{-1} + D_5 [C^{-1} \delta C C^{-T}] - I_3^{1/2} C^{-1} \delta p \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \left[-\frac{4}{3} C_1 I_3^{-1/3} C^{-1} \Pi - \frac{4}{3} C_1 I_3^{-1/3} \Pi C^{-1} + \frac{4}{9} C_1 I_1 I_3^{-1/3} C^{-1} C^{-1} - p I_3^{1/2} C^{-1} C^{-1} \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} C_1 I_3^{-1/3} I_1 C^{-1} C^{-1} + 2p I_3^{1/2} C^{-1} C^{-1} \right] : \delta E + \left[-I_3^{1/2} C^{-1} \right] \delta p \end{aligned}$$

$$\delta S = D_i^{PK2} : \delta E + G_i^{PK2} \delta p \quad (\text{C.13})$$

En utilisant (C.7), on peut exprimer δp en fonction de δE , on peut écrire :

$$p = -K (J - 1) = -K \left(I_3^{1/2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{\partial p}{\partial I_3} \delta I_3 = \frac{\partial p}{\partial I_3} I_3 C^{-1} : \delta C \\ &= -\frac{K}{2} I_3^{-1/2} I_3 C^{-1} : 2\delta E \\ &= -K I_3^{1/2} C^{-1} : \delta E \\ &= -K J C^{-1} : \delta E \end{aligned}$$

Dans le cas d'une déformation plane, on peut écrire :

$$C_{33} = \lambda_3 = 1, \quad C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = 0$$

On peut réécrire C comme suit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{I_3} \begin{bmatrix} C_{22} & -C_{12} & 0 \\ -C_{21} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = C_{11} + C_{22} + 1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1 \quad \delta I_1 = \delta C_{11} + \delta C_{22}$$

$$I_2 = C_{11}C_{22} + C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \quad \delta I_2 = 2C_{11}\delta C_{22} + 2\delta C_{11}\delta C_{22} - \delta C_{12}C_{21} - C_{12}\delta C_{21}$$

$$I_3 = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \quad \delta I_3 = C_{11}\delta C_{22} + \delta C_{11}\delta C_{22} - \delta C_{12}C_{21} - C_{12}\delta C_{21}$$

$$S = 2C_1 I_3^{-1/3} \left[\Pi - \frac{1}{3} I_1 C^{-1} \right] - p I_3^{1/2} C^{-1}$$

$$S = 2C_1 I_3^{-1/3} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{3} \frac{I_1}{I_3} C_{22} & \frac{1}{3} \frac{I_1}{I_3} C_{12} & 0 \\ \frac{1}{3} \frac{I_1}{I_3} C_{21} & 1 - \frac{1}{3} \frac{I_1}{I_3} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{3} I_1 \end{bmatrix} - p I_3^{-1/2} \begin{bmatrix} C_{22} & -C_{12} & 0 \\ -C_{21} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = 2C_1 I_3^{-1/3} \left[1 - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-1} C_{22} \right] - p I_3^{-1/2} C_{22}$$

$$\delta S_{11} = \frac{\delta S_{11}}{\delta I_1} \delta I_1 + \frac{\delta S_{11}}{\delta I_3} \delta I_3 + \frac{\delta S_{11}}{\delta C_{22}} \delta C_{22} + \frac{\delta S_{11}}{\delta p} \delta p$$

$$\delta S_{11} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{22} \right] \delta I_1 + \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} - \frac{2}{3} C_1 I_1 \left(-\frac{4}{3} \right) I_3^{-7/3} C_{22} \right] \delta I_3 \\ + \left[\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{22} \right] \delta I_3 + \left[-\frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} \right] \delta C_{22} - p I_3^{-1/2} \delta C_{22} - I_3^{-1/2} C_{22} \delta p$$

$$\delta S_{11} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{22} \right] (\delta C_{11} + \delta C_{22}) + \left[\frac{2}{3} C_1 \left[-I_3^{-4/3} + \frac{4}{3} I_1 I_3^{-7/3} C_{22} \right] + \frac{1}{2} p I_3^{-1/2} C_{22} \right] \\ (C_{11} \delta C_{22} + C_{22} \delta C_{11} - 2C_{12} \delta C_{12}) - \frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} \delta C_{22} - p I_3^{-1/2} \delta C_{22} - I_3^{-1/2} C_{22} \delta p$$

$$S_{22} = 2C_1 I_3^{-1/3} \left[1 - \frac{1}{3} I_1 I_3^{-1} C_{11} \right] - p I_3^{-1/2} C_{11}$$

$$\delta S_{22} = \frac{\delta S_{22}}{\delta I_1} \delta I_1 + \frac{\delta S_{22}}{\delta I_3} \delta I_3 + \frac{\delta S_{22}}{\delta C_{11}} \delta C_{11} + \frac{\delta S_{22}}{\delta p} \delta p$$

$$\delta S_{22} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{11} \right] \delta I_1 + \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} + \frac{2}{3} \frac{4}{3} C_1 I_1 I_3^{-7/3} C_{22} \right] \delta I_3 \\ + \left[\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{11} \right] \delta I_3 + \left[-\frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} \right] \delta C_{11} - p I_3^{-1/2} \delta C_{11} - I_3^{-1/2} C_{11} \delta p$$

$$\delta S_{22} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{22} \right] (\delta C_{11} + \delta C_{22}) + \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} + \frac{8}{9} C_1 I_1 I_3^{-7/3} C_{11} + \frac{1}{2} p I_3^{-1/2} C_{11} \right] \\ (C_{11} \delta C_{22} + C_{22} \delta C_{11} - 2C_{12} \delta C_{12}) - \left[\frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} + p I_3^{-1/2} \right] \delta C_{11} - I_3^{-1/2} C_{11} \delta p$$

$$S_{21} = 2C_1 I_3^{-4/3} \left[\frac{1}{3} I_1 C_{21} \right] - p I_3^{-1/2} C_{21}$$

$$\delta S_{21} = \frac{\partial S_{21}}{\partial I_1} \delta I_1 + \frac{\partial S_{21}}{\partial I_3} \delta I_3 + \frac{\partial S_{21}}{\partial C_{21}} \delta C_{21} + \frac{\partial S_{21}}{\partial p} \delta p$$

$$\delta S_{21} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{11} \right] \delta I_1 + \left[\frac{2}{3} \frac{4}{3} C_1 I_1 I_3^{-7/3} C_{21} \right] \delta I_3 + \left[\frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} \right] \delta C_{21} \\ - \left[\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{21} \right] \delta I_3 + p I_3^{-1/2} \delta C_{21} - I_3^{-1/2} C_{21} \delta p$$

$$\delta S_{21} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{11} \right] (\delta C_{11} + \delta C_{22}) + \left[\frac{2}{3} \frac{4}{3} C_1 I_1 I_3^{-7/3} C_{21} - \frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{21} \right] \\ (C_{11} \delta C_{22} + C_{22} \delta C_{11} - 2C_{12} \delta C_{12}) + \left[\frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} + p I_3^{-1/2} \right] \delta C_{21} - I_3^{-1/2} C_{21} \delta p$$

$$S_{33} = 2C_1 I_3^{-1/3} \left[-1 - \frac{1}{3} I_1 \right] - p I_3^{1/2}$$

$$\delta S_{33} = \frac{\partial S_{33}}{\partial I_1} \delta I_1 + \frac{\partial S_{33}}{\partial I_3} \delta I_3 + \frac{\partial S_{33}}{\partial p} \delta p$$

$$\delta S_{33} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} C_{11} \right] \delta I_1 - \left[\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} \left(1 - \frac{1}{3} I_1 \right) \right] \delta I_3 - \frac{1}{2} p I_3^{-1/2} \delta I_3 - I_3^{1/2} \delta p$$

$$\delta S_{33} = \left[-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} C_{11} \right] (\delta C_{11} + \delta C_{22}) - \left[\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} \left(1 - \frac{1}{3} I_1 \right) - \frac{1}{2} p I_3^{-1/2} \right] \\ (C_{11} \delta C_{22} + C_{22} \delta C_{11} - 2C_{12} \delta C_{12}) - I_3^{1/2} \delta p$$

$$\begin{array}{c}
\delta C_{11} \qquad \qquad \qquad \delta C_{22} \qquad \qquad \qquad \delta C_{12} \qquad \qquad \qquad \delta p \\
\left[\begin{array}{c} \delta S_{11} \\ \delta S_{22} \\ \delta S_{21} \\ \delta S_{33} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc}
-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{22} & -\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{22} - p I_3^{-1/2} & & \\
-\frac{2}{3} C_1 \left[I_3^{-4/3} - \frac{4}{3} I_1 I_3^{-7/3} C_{22} \right] C_{22} & -\frac{2}{3} C_1 \left[I_3^{-4/3} - \frac{4}{3} I_1 I_3^{-7/3} C_{22} \right] C_{11} & \frac{4}{3} C_1 \left[I_3^{-4/3} - \frac{4}{3} I_1 I_3^{-7/3} C_{22} \right] C_{12} & -I_3^{-1/2} C_{22} \\
+\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{22}^2 & +\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{22} C_{11} - \frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} & -p I_3^{-3/2} C_{22} C_{12} & \\
-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{11} - p I_3^{-1/2} & -\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{11} & \frac{4}{3} C_1 \left[I_3^{-4/3} - \frac{4}{3} I_1 I_3^{-7/3} C_{11} \right] C_{12} & \\
-\frac{2}{3} C_1 \left[I_3^{-4/3} - \frac{4}{3} I_1 I_3^{-7/3} C_{11} \right] C_{22} & -\frac{2}{3} C_1 \left[I_3^{-4/3} - \frac{4}{3} I_1 I_3^{-7/3} C_{11} \right] C_{11} & -p I_3^{-3/2} C_{11} C_{12} & -I_3^{-1/2} C_{11} \\
+\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{22} C_{11} - \frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} & +\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{11}^2 & & \\
\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{21} & \frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3} C_{21} & \frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} & \\
-\frac{8}{9} C_1 I_1 I_3^{-7/3} C_{21} C_{22} & -\frac{8}{9} C_1 I_1 I_3^{-7/3} C_{21} C_{22} & 2 \frac{8}{9} C_1 I_1 I_3^{-7/3} C_{21}^2 & -I_3^{-1/2} C_{12} \\
-\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{21} C_{11} & -\frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{21} C_{11} & +p I_3^{-3/2} - \frac{1}{2} p I_3^{-3/2} C_{21}^2 & \\
-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} & -\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} & \frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{-4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{12} & -I_3^{1/2} \\
-\frac{2}{3} \left[C_1 I_3^{-4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{22} & -\frac{2}{3} \left[C_1 I_3^{-4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{11} & +p I_3^{-1/2} C_{12} & \\
-\frac{p}{2} I_3^{-1/2} C_{22} & -\frac{p}{2} I_3^{-1/2} C_{11} & &
\end{array} \right]
\end{array}$$

En utilisant les termes suivants :

$$F_1 = \frac{8}{9} C_1 I_1 I_3^{-7/3} + \frac{p}{2} I_3^{-3/2}$$

$$F_2 = -\frac{2}{3} C_1 I_3^{-4/3}$$

$$F_3 = \frac{2}{3} C_1 I_1 I_3^{-4/3} + p I_3^{-1/2}$$

On peut réécrire la matrice comme suit :

$$\begin{array}{c}
\delta C_{11} \\
\delta C_{22} \\
\delta C_{12}
\end{array}
\begin{array}{l}
F_1 C_{22}^2 + 2F_2 C_{22} \\
F_1 C_{11} C_{22} + F_2 (C_{11} + C_{22}) \\
-F_1 C_{12} C_{22} - F_2 C_{12} \\
+\frac{k}{2} I_3 C_{22}^2 \\
-F_3 + \frac{k}{2} I_3 C_{11} C_{22} \\
-\frac{k}{2} I_3 C_{12} C_{22}
\end{array}
\begin{array}{l}
F_1 C_{11} C_{22} + F_2 (C_{11} + C_{22}) \\
F_1 C_{11}^2 + 2F_2 C_{11} \\
-F_1 C_{11} C_{12} - F_2 C_{12} \\
-F_3 + \frac{k}{2} I_3 C_{11} C_{22} \\
+\frac{k}{2} I_3 C_{11}^2 \\
-\frac{k}{2} I_3 C_{12} C_{22}
\end{array}
\begin{array}{l}
-F_1 C_{21} C_{22} - F_2 C_{21} \\
-F_1 C_{12} C_{11} - F_2 C_{21} \\
F_1 C_{21}^2 - \frac{F_3}{2} \\
+\frac{k}{2} I_3 C_{12} C_{22} \\
+\frac{k}{2} I_3 C_{12} C_{11} \\
-\frac{k}{2} I_3 C_{12}^2
\end{array}
\begin{array}{l}
-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} \\
-\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} \\
\frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{12} \\
+\frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{11} \\
+\frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{12} \\
+\frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{11} \\
+\frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{12} \\
+\frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{11} \\
+\frac{4}{3} \left[C_1 I_3^{4/3} \left(1 - \frac{I_1}{3} \right) \right] C_{12}
\end{array}
\begin{array}{l}
-\frac{p}{2} I_3^{-1/2} C_{22} \\
-\frac{p}{2} I_3^{-1/2} C_{11} \\
\end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{l}
\delta S_{11} \\
\delta S_{22} \\
\delta S_{21} \\
\delta S_{33}
\end{array}$$

Reprenons l'expression de la pression :

$$p = -K (J - 1) = -K \left(I_3^{1/2} - 1 \right)$$

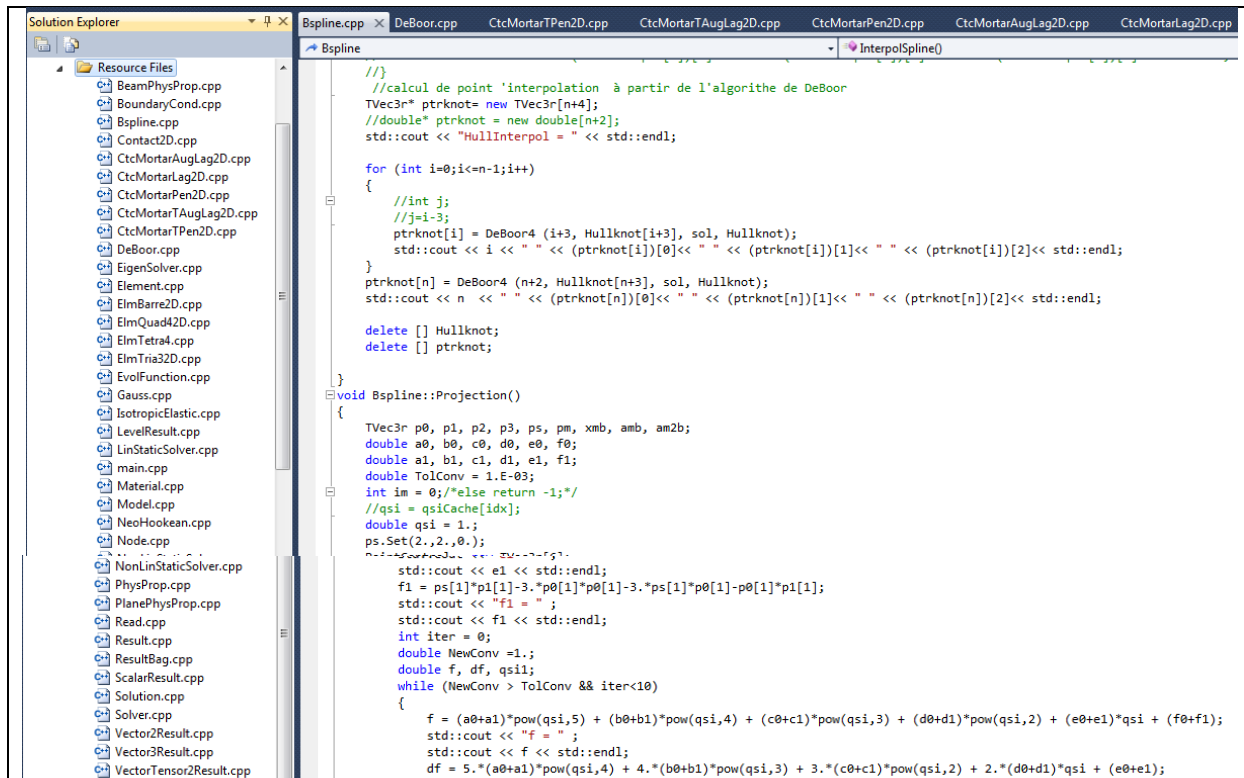
$$\delta p = -\frac{1}{2} K I_3^{-1/2} (C_{11} \delta C_{22} + C_{22} \delta C_{11} - 2C_{12} \delta C_{12})$$

Donc les termes $-I_3^{-1/2} C_{ii} \delta p$ donnent :

$$\frac{1}{2} K C_{ii} I_3^{-1/2} (C_{11} \delta C_{22} + C_{22} \delta C_{11} - 2C_{12} \delta C_{12})$$

D- Code FiEStA

FiEStA est un code éléments finis développé en C++ (Figure D.1) généré avec une interface graphique. Ce code traite des problèmes en 2D en petites et en grandes déformations. Une loi de comportement linéaire élastique et une loi de comportement hyper-élastique non linéaire sont implémentées dans ce code. Il présente deux solveurs : un solveur direct et un solveur itératif. FiEStA présente aussi différents types d'élément : élément de barre 'ROD', élément de poutre 'BEAM', élément triangulaire 'PLANT3', élément 'PLANQ4' et aussi un élément 'SOLIDT4' pour la version 3D du code qui n'est pas encore stable.



```

//calcul de point 'interpolation à partir de l'algorithme de DeBoor
TVec3r* ptrknot= new TVec3r[n+4];
//double* ptrknot = new double[n+2];
std::cout << "HullInterpol = " << std::endl;

for (int i=0;i<n-1;i++)
{
    //int j;
    //j=i-3;
    ptrknot[i] = DeBoor4 (i+3, Hullknot[i+3], sol, Hullknot);
    std::cout << i << " " << (ptrknot[i])[0]<< " " << (ptrknot[i])[1]<< " " << (ptrknot[i])[2]<< std::endl;
}
ptrknot[n] = DeBoor4 (n+2, Hullknot[n+3], sol, Hullknot);
std::cout << n << " " << (ptrknot[n])[0]<< " " << (ptrknot[n])[1]<< " " << (ptrknot[n])[2]<< std::endl;

delete [] Hullknot;
delete [] ptrknot;

void Bspline::Projection()
{
    TVec3r p0, p1, p2, p3, ps, pm, xmb, amb, am2b;
    double a0, b0, c0, d0, e0, f0;
    double a1, b1, c1, d1, e1, f1;
    double TolConv = 1.E-03;
    int im = 0; /*else return -1;*/
    //qsi = qsiCache[idx];
    double qsi = 1.;
    ps.Set(2.,2.,0.);
    //ps.Set(2.,2.,0.);
    std::cout << e1 << std::endl;
    f1 = ps[1]*p1[1]-3.*p0[1]*p0[1]-3.*ps[1]*p0[1]-p0[1]*p1[1];
    std::cout << "f1 = " << std::endl;
    std::cout << f1 << std::endl;
    int iter = 0;
    double NewConv =1.;
    double f, df, qsi1;
    while (NewConv > TolConv && iter<10)
    {
        f = (a0+a1)*pow(qsi,5) + (b0+b1)*pow(qsi,4) + (c0+c1)*pow(qsi,3) + (d0+d1)*pow(qsi,2) + (e0+e1)*qsi + (f0+f1);
        std::cout << "f = " << std::endl;
        std::cout << f << std::endl;
        df = 5.*(a0+a1)*pow(qsi,4) + 4.*(b0+b1)*pow(qsi,3) + 3.*(c0+c1)*pow(qsi,2) + 2.*(d0+d1)*qsi + (e0+e1);
    }
}

```

Figure D.1. FiEStA en C++ sur Visual Studio

Le code présente une interface graphique avec des panels simplifiés pour diminuer le temps de mise en route d'un calcul (figure D.2). FiEStA se repose aussi sur l'efficacité de son solveur itératif qui donne une précision et une rapidité de calcul pour des problèmes assez compliqués, comme le cas du problème de contact, le sujet de ce travail, comparable à des résultats obtenus par des codes industriels.

FiEStA reste plus adapté à des calculs des problèmes de contact pour lequel il a été développé. Il présente une interface graphique pour la partie CAO, qui reste limitée pour certaine application et restreint au domaine bidimensionnel. Cette interface équipée par des modules très simple à utiliser permet de créer un modèle de calcul en quelque minute.

Après avoir créé un modèle de calcul à travers l'interface FiEStA sous forme d'un fichier 'fst' on peut faire l'étude de deux manières différentes : on peut lancer le calcul directement en utilisant le solveur rattaché à l'interface graphique puis visualiser les résultats sur le modèle en lui-même, ou bien on peut exporter le modèle sous forme d'un fichier 'inp' puis lancer le calcul sur un terminal en utilisant le solveur sous forme d'un exécutable et à la fin du calcul.

On obtient un fichier de résultat ‘bag’ qui peut être visualisé sur l’interface après avoir chargé le fichier ‘fst’ correspondant (Figure D.3).

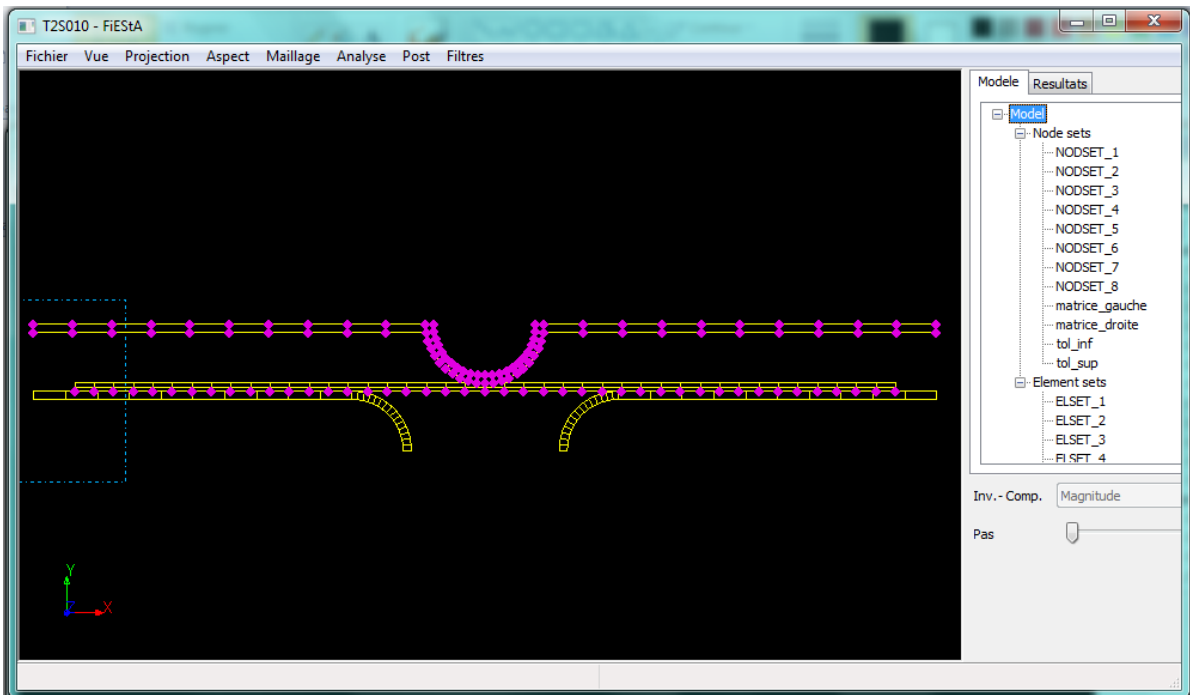


Figure D.2 Interface graphique du Code FiEStA pour la création d’un modèle

La deuxième méthode donne plus de liberté puisqu’on a un accès direct sur le fichier donné et on peut donc modifier certains paramètres qui sont pris par défaut dans le premier cas.

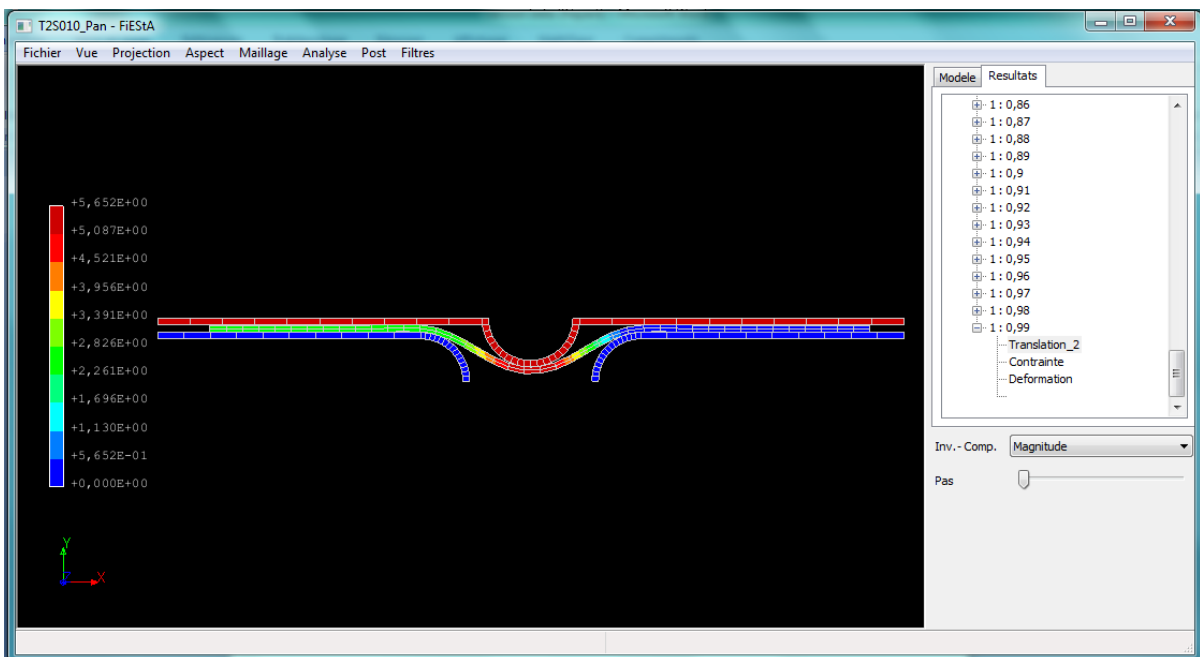


Figure D.3 Interface graphique du Code FiEStA pour la visualisation des résultats

Bibliographie

- [Alart91] Alart P. and Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92:353-375 (1991).
- [Al-Dojayli02] Al-Dojayli M. et Meguid S.A. Accurate modeling of contact using cubic splines. *Finite Elements in Analysis and Design* 38 (2002) 337–352.
- [Babuska73] Babuska I. the finite element methode with larangian multipliers. *Numer. Math.*, 20 :179-192, 1973.
- [Belgacem97] Belgacem F.B., Hild P. and Laborde P. Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser I*, 324:123-127 (1997).
- [Belgacem99] Belgacem F.B., Hild P. and Laborde P. Extensinos of the mortar finite element method to a variational inequality modelling unilateral contact. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 9:287-303 (1999).
- [Bernardi90] Bernardi C., Debit N. and Maday Y. Coupling finite element and spectral methods: First results. *Mathematics of Computation*, vol. 54, pages 21–39, 1990.
- [Bernardi94] Bernardi C, Maday Y. and Patera A. A new nonconforming approach to domain decomposition: the motar element method. In H. Brezis and J.L. Lions, editors. *Nonlinear Partial Differential Equations and their Application*. Pitman (1994).
- [Bertsekas84] Bertsekas D.P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, New York (1984).
- [Bouabdallah14] Bouabdallah S. Rapport interne Dept MNM/ ESILV : Architecture d'un programme orienté objet pour l'analyse des structures par Elements finis FiEStA
- [Brezzi74] Brezzi, F. On the existence, uniqueness ad approximation of saddle-pont problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO, Anal. Numér.*, 8(R2):129-151, 1974.
- [Brezzi91] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [Chun02] Chun B.K., Kim H.Y. et Lee J.K. Modeling the Bauschinger effect for sheet metals, part II: applications. *Int, Jou, Plas* Volume 18, Issues 5–6, October 2002, Pages 597–616.
- [Ciarlet78] Ciarlet G. The finite element method for elliptic problems. *North-Holland, Amsterdam, 1978*.

- [Cichosz11] Cichosz T. and Bischoff M. Consistent treatment of boundaries with mortar contact formulations using dual Lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 200 (2011) 1317-1332.
- [Crisfield00] Crisfield M.A. Re-visiting the contact patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, pages 435–449, 2000.
- [Curnier88] Curnier A. and Alart P. A generalized newton method for contact problems with friction. *J, Mec. Theor. Appl*, 7:67-82 (1988).
- [Curnier95] Curnier A., He Q.C. and Klarbring A. Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction. In M. Raous, M. Jean and J. Moreau, editors. *Contact Mechanics*, pages 145-158. Plenum Press (1995).
- [Duvaut71] G. Duvaut & J.L. Lions. Elasticité avec frottement. *Journal de Mécanique*, vol. 10, pages 409–420, 1971.
- [Duvaut76] Duvaut G. and Lions J.L. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer Verlag, Berlin (1976).
- [El-Abbasi01] El-Abbasi N. and Bathe K.J. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computers and Structures*, 79:1473-1486 (2001).
- [Farin92] Farin G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 3rd edn, Academic Press Inc. 1992.
- [Feng03] Feng Z. Q., Peyraut F. et Labeled N. Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz–Ko hyperelastic bodies . *International Journal of Engineering Science*. 41 (2003) 2213–2225
- [Fischer05] Fischer K.A. and Wriggers P. Frictionless 2d contact formulations for finite deformations based on the mortar method. *Computational Mechanics*, 36:226-244 (2005).
- [Fischer06] Fischer K.A. and Wriggers P. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2006).
- [Flemiscli05] Flemiscli B., Puso M.A. and Wolilmutli B. A new dual mortar method for curved interfaces: 2d elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:813-832 (2005).
- [Fletcher70] Fletcher. R. A class of methods in nonlinear programming with termination and convergence properties. In J. Abadie, ed., *Integer and Nonlinear Programming*. North- Holland Publishing Company, 1970.
- [Foley90] Foley J, vanDam A, Feiner S and Hughes J. *Computer Graphics Principles and Practice*. 2nd edn, Addison Wesley Publishing Company. 1990.

- [[Francavilla75](#)] Francavilla A. and Zienkiewicz O.C. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:913-924 (1975).
- [[Gitterle10](#)] Gitterle M., Popp A., Gee M. W. and Wall W. A. Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth Newton method with consistent linearization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2010; 84:543–571.
- [[Glowinski84](#)] Glowinski R and Le Tallec P. Finite element analysis in nonlinear incompressible elasticity. In *Finite Element Vol. V: Special Problems in Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1984).
- [[Glowinski89](#)] Glowinski R. and Le Tallec P. Augmented lagrangians and operator-splitting methods in nonlinear mechanics. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [[Hallquist85](#)] Hallquist J.O., Goudreau G.L., and Benson D.J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:107-137, 1985.
- [[Hartmann07](#)] Hartmann S. Brunssen S. Ramm E. and Wohlmuth B. Unilateral non-linear dynamic contact of thin-walled structures using a primal-dual active set strategy. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2007; 70:883–912.
- [[Hartmann08](#)] Hartmann S. and Ramm E. A mortar based contact formulation for non-linear dynamics using dual Lagrange multipliers. *Finite Elements in Analysis and Design*. 44 (2008) 245 – 258.
- [[Heege96](#)] Heege A. et Alart P. A frictional contact element for strongly curved contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, 165-184 (1996).
- [[Hertz1882](#)] Hertz H. Uber die Berihrung fester elastischer Korper. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 29:156-171 (1882).
- [[Hesch09](#)] Hesch C. et Betsch P. A mortar method for energy-momentum conserving schemes in frictionless dynamic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009; 77:1468–1500.
- [[Hild00](#)] Hild P. Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 184 (2000) 99-123.
- [[Hueber05a](#)] Hueber S. Mair M. and Wohlmuth B. A priori error estimates and an inexact primal dual active set strategy for linear and quadratic finite elements applied to multibody contact problems. *Applied Numerical Mathematics*, 54 :555–576 (2005a).

- [Hueber05b] Hueber S. and Wohlmuth B. A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:3147-3166 (2005b).
- [Hueber07] Hueber S., Matei A. and Wohlmuth B.I. Efficient algorithms for problems with friction. *Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM J. SCI. COMPUT.* Vol. 29, No. 1, pp. 70–92.
- [Hueber09] Hueber S. et Wohlmuth B.I. Thermo-mechanical contact problems on non-matching meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 198 (2009) 1338–1350.
- [Hughes77] T.R.J. Hughes, R.L. Taylor & W. Kanoknukulchai. A finite element method for large displacement contact and impact problems. In K.J. Bathe, J.T. Oden, W. Wunderlich & E.L. Wilson, ed., *Formulations and computational algorithms in FE analysis*, pages 468–495. MIT Press, 1977.
- [Hughes05] Hughes T.J.R., Cottrell J.A. et Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite element, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 194 (2005) 4135-4195.
- [Johnson87] Johnson C. Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. *Cambridge University Press (1987)*.
- [Kikuchi82] Kikuchi N. Smoothing technique for reduced integration penalty method in contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, VOL. 18, 343-350 (1982).
- [Kikuchi88] Kikuchi N. and Oden J.T. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, Philadelphia (1988).
- [Krause02] Krause R.H. and Wohlmuth B.I. A dirichlet-neumann type algorithm for contact problems with friction. *CVS*, 5:139-148 (2002).
- [Laursen93a] Laursen T.A and Simo J.C. Algorithmic symmetrisation of Coulomb frictional problems using augmented Lagrangians. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108:133-146 (1993).
- [Laursen93b] Laursen T.A. and Simo J.C. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3451-3485 (1993b).
- [Laursen02] Laursen T.A. Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis. Springer-Verlag, 2002.
- [Lengiewicz11] Lengiewicz L., Korelc J. et Stupkiewicz1 S. Automation of finite element formulations for large deformation contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85:1252–1279 (2011).

- [Luenberger84] Luenberger D.G. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading, Mass., second edition (1984).
- [Magnain05] Magnain B., Feng Z. Q. et Cro J. M. Modélisation des problèmes d'impact avec dissipation d'énergie par frottement. *Compte-rendu Mécanique*. 333 (2005) 419–424
- [Maker87] B. Maker, S.K. Samantha, B. Grab, N. Triantafylidis, An analysis of drawbeads in sheet metal forming: Part II} experimental verification, *J. Eng. Mater. Technol.* 109 (1987) 164}170.
- [McDevitt00] McDevitt T.W. and Laursen T.A. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1525-1547 (2000).
- [Munoz08] Munoz J.J. Modelling unilateral frictionless contact using the null-space method and cubic B-Spline interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197 979–993 (2008).
- [Oden84] Oden J. T. et Pires E. B. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws. *Comput. Struct.* 19, 137-147 (1984).
- [Opara05] Opara L. K. and Wriggers P. A three-dimensional contact element based on the moving friction cone approach and the elliptical Coulomb law. *VIII International Conference on Computational Plasticity*. CIMNE, Barcelona (2005).
- [Paczelt99] Paczelt I., Szabo B. and Szabo T. Solution of contact problem using the hp-version of the finite element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 38:49-69 (1999).
- [Padmanabhan01] Padmanabhan V. et Laursen T.A. A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37 (2001) 173-198.
- [Papadopoulos90] Papadopoulos P. et Taylor, R.L. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Technical Report UCB/SEMM Report 90/18, University of California at Berkeley*, 1990.
- [Piegl97] Piegl L. et Tiller W. *The NURBS Book*, second edition, Monographs in visual Communication, Springer, Verlag, 1997.
- [Pietrzak99] Pietrzak G. and Curnier A. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangean treatment. *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177:351-381 (1999).
- [Popp09] Popp A., Gee M.W., and Wolfgang A. Wall. A finite deformation mortar contact formulation using a primal–dual active set strategy *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2009; 79:1354–1391.

- [Popp10] Popp A., Gitterle M., Gee M. W. and Wall W. A. A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2010; 83:1428–1465.
- [Powell69] M.J.D. Powell. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In R. Fletcher, ed., *Optimization*, pages 283–298. Academic Press, London, 1969.
- [Puso04a] A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 193 (2004) 601-629.
- [Puso04b] A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 193 (2004) 4891–4913.
- [Puso04c] Puso M. A. A 3D mortar method for solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:315-336, 2004.
- [Puso08] A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 197 (2008) 555–566.
- [Rebel00] Rebel C, Park K.C. and Felippa C.A. A contact-impact formulation based on localized Lagrange multipliers. *Technical Report CU-CAS-00-18*, College of Engineering at University of Colorado, Bolder, Colorado 80309 (2000).
- [Renaud09] Renaud C., Cros J.M., Feng Z. Q. et Feng B. The Yeoh model applied to the modeling of large deformation contact/impact problems. *International Journal of Impact Engineering*. 36 (2009) 659–666.
- [Sauer12] Sauer R. A. and De Lorenzis L. A computational contact formulation based on surface potentials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 253 (2013) 369–395.
- [Simo85a] Simo J.C. and Taylor R.L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48:101-118 (1985).
- [Simo85b] J.C. Simo, P. Wriggers & R.L. Taylor. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 50, pages 163–180, 1985.
- [Simo92] Simo J.C. and Laursen T.A. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 42:97-116 (1992).
- [Taylor91] Taylor R.L. and Papadopoulos O. On a patch test for contact problems in two dimensions. In P. Wriggers & W. Wagner, ed., *Nonlinear Comp.*

- [Tur09] Tur M., Fuenmayor F.J. et Wriggers P. A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using Lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37-40):2860–2873, 2009.
- [Tur12] Tur M., Giner E., Fuenmayor F.J. and Wriggers P. 2D contact smooth formulation based on the mortar method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 247–248 (2012) 1–14.
- [Wohlmuth00a] Wohlmuth B.I. *Discretization Methods and Iterative Solvers based on Domain Decomposition*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (2000a).
- [Wohlmuth00b] Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 38:989-1012 (2000b).
- [Wohlmuth04] Wohlmuth B. and Krause R. Monotone methods on non-matching grids for non linear contact problems. *SISC*, 25:324-347 (2004).
- [Wriggers85] Wriggers P and Simo J.C. A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1:199-203 (1985).
- [Wriggers90] Wriggers P., Van T. vu. Stein E. Finite Element Formulation of Large Deformation impact-contact problems with friction. *Computers & Structures*, 37:319-331, 1990.
- [Wriggers92] Wriggers P. and Mische C. On the treatment of contact constraints within coupled thermomechanical analysis. In D. Besdo and E. Stein, editors, *Proc. of EUROMECH, Finite Inelastic Deformations*. Springer, Berhn (1992).
- [Wriggers94] Wriggers P. Finite element algorithms for contact problems. *Arch. Compt. Meth. Engin.*, 2(4):1-49,1994.
- [Wriggers01] Wriggers P., Krstulovic-Opara L. et Korelc J. Smooth C1-interpolations for two-dimensional frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51:1469–1495 (2001).
- [Wriggers04] Wriggers P. The moving friction cone approach for three-dimensional contact simulations. *International Journal of Computational Methods Vol. 1, No. 1 (2004) 105–119*.
- [Wriggers06] Wriggers P. *Computational contact mechanics*. Second edition, Springer-Verlag, 2006.
- [Yang05] Yang B, Laursen TA, Meng X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; **62**:1183–1225.

- [Yastrebov11] Yastrebov V. A. Computational contact mechanics: geometry, detection and numerical techniques. PhD thesis, l'École nationale supérieure des mines de Paris, France, 2011. Sc. advisor P. Alart. G. Cailletaud and F. Feyel
- [Zavarise12] Zavarise G. De Lorenzis L et Taylor R.L. A non-consistent start-up procedure for contact problems with large load-steps. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volumes 205–208, 15 January 2012, Pages 91-109.
- [Zienkiewicz91] Zienkiewicz. O.C and Taylor R.L. The Finite Element Method 4th ed. *McGraw-Hill, London., 1991.*