



Analyse mathématique de modèles d'intrusion marine dans les aquifères côtiers

Ji Li

► **To cite this version:**

Ji Li. Analyse mathématique de modèles d'intrusion marine dans les aquifères côtiers. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2015. Français. <NNT : 2015DUNK0378>. <tel-01330904>

HAL Id: tel-01330904

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01330904>

Submitted on 13 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale régionale Sciences
Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France
Université du Littoral Côte d'Opale



Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

THÈSE

présenté et soutenue publiquement le 20 Octobre 2015
pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Lille Nord de France
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Titre de la thèse

**Analyse mathématique de modèles d'intrusion
marine dans les aquifères côtiers**

par

Ji LI

Composition du jury :

Brahim Amaziane
Abderahman Bouhamidi
Catherine Choquet
Andro Mikelić
Carole Rosier
Lech Zielinski

MCF HDR, Univ. de Pau, Rapporteur,
Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale,
Pr., Univ. de La Rochelle, Président de jury,
Pr., Univ. Lyon 1, Rapporteur,
Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale, Directrice de thèse,
Pr., Univ. du Littoral Côte d'Opale.

Remerciements

Tout d'abord, j'exprime ma profonde reconnaissance à Shalom Eliahou et Hasane Sadok, actuel et précédent directeurs du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville de l'Université du Littoral Côte d'Opale, pour m'avoir accueilli dans leur locaux et pour leurs soutiens constants.

Je remercie chaleureusement Carole Rosier, ma directrice de thèse pour m'avoir permis de travailler sur ce sujet passionnant. Elle a su me faire profiter de ses connaissances en analyse des EPDs tout en les appliquant au domaine complexe de l'hydrogéologie. J'espère avoir su profiter de sa clairvoyance en mathématiques appliquées.

Je tiens à remercier, également Catherine Choquet, pour son importante collaboration et l'intérêt qu'elle a porté à mon travail. Je la remercie aussi sincèrement d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie extrêmement, Messieurs Brahim Amaziane et Andro Mikelić pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et membres du jury. Je les remercie tout particulièrement pour les précieuses remarques constructives de leurs rapports qui m'ont permis d'améliorer ce document.

Ma gratitude va également à Abderahman Bouhamidi et Lech Zielinski qui se sont intéressés à mon travail et qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont aussi à Henrique Rodrigues pour son aide très utile et son amical soutien durant ma dernière année de thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement Isabelle Buchard et Philippe Marion pour m'avoir soutenu et aidé de manière constante tout au long de mon doctorat.

Je voudrais également remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées que j'ai eu la chance de côtoyer durant ces trois années.

Merci aussi au Professeur Changgui Zhang et à tous mes amis chinois: Feng Xing, Qingling Tang, Xi Lin, Jianwei Pu, Zuqi Tang, ...

Je dédie cette thèse à ma mère qui m'a prodigué le soutien moral et matériel nécessaire à l'accomplissement de ce travail, notamment pour mes études en France.

Résumé

Le thème de cette thèse est l'analyse mathématique de modèles décrivant l'intrusion saline dans les aquifères côtiers. On a choisi d'adopter la simplicité de l'approche avec interface nette: il n'y a pas de transfert de masse entre l'eau douce et l'eau salée (resp. entre la zone saturée et la zone sèche). On compense la difficulté mathématique liée à l'analyse des interfaces libres par un processus de moyennisation verticale nous permettant de réduire le problème initialement $3D$ à un système d'edps définies sur un domaine, Ω , $2D$. Un second modèle est obtenu en combinant l'approche 'interface nette' à celle avec interface diffuse; cette approche est déduite de la théorie introduite par Allen-Cahn, utilisant des fonctions de phase pour décrire les phénomènes de transition entre les milieux d'eau douce et d'eau salée (respectivement les milieux saturé et insaturé).

Le problème d'origine $3D$ est alors réduit à un système fortement couplé d'edps quasi-linéaires de type parabolique dans le cas des aquifères libres décrivant l'évolution des profondeurs des 2 surfaces libres et de type elliptique-parabolique dans le cas des aquifères confinés, les inconnues étant alors la profondeur de l'interface eau salée par rapport à eau douce et la charge hydraulique de l'eau douce.

Dans la première partie de la thèse, des résultats d'existence globale en temps sont démontrés montrant que l'approche couplée interface nette -interface diffuse est plus pertinente puisqu'elle permet d'établir un principe du maximum plus physique (plus précisément une hiérarchie entre les 2 surfaces libres). En revanche, dans le cas de l'aquifère confiné, nous montrons que les deux approches conduisent à des résultats similaires.

Dans la seconde partie de la thèse, nous prouvons l'unicité de la solution dans le cas non dégénéré, la preuve reposant sur un résultat de régularité du gradient de la solution dans l'espace $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$, ($\Omega_T = (0, T) \times \Omega$). Puis nous nous intéressons à un problème d'identification des conductivités hydrauliques dans le cas instationnaire. Ce problème est formulé par un problème d'optimisation dont la fonction coût mesure l'écart quadratique entre les charges hydrauliques expérimentales et celles données par le modèle.

Abstract

The theme of this thesis is the analysis of mathematical models describing saltwater intrusion in coastal aquifers. The simplicity of sharp interface approach is chosen: there is no mass transfer between fresh water and salt water (respectively between the saturated zone and the area dry.). We compensate the mathematical difficulty of the analysis of free interfaces by a vertical averaging process allowing us to reduce the 3D problem to system of pde's defined on a 2D domain Ω . A second model is obtained by combining the approach of 'sharp interface' in that with 'diffuse interface'; This approach is derived from the theory introduced by Allen-Cahn, using phase functions to describe the phenomena of transition between fresh water and salt water (respectively the saturated and unsaturated areas).

The 3D problem is then reduced to a strongly coupled system of quasi-linear parabolic equations in the unconfined case describing the evolution of the depths of two free surfaces and elliptical-parabolic equations in the case of confined aquifer, the unknowns being the depth of salt water/fresh water interface and the fresh water hydraulic head.

In the first part of the thesis, the results of global in time existence are demonstrated showing that the sharp-diffuse interface approach is more relevant since it allows to establish a more physical maximum principle (more precisely a hierarchy between the two free surfaces). In contrast, in the case of confined aquifer, we show that both approach leads to similar results.

In the second part of the thesis, we prove the uniqueness of the solution in the non-degenerate case. The proof is based on a regularity result of the gradient of the solution in the space $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$, ($\Omega_T = (0, T) \times \Omega$). Then we are interested in a problem of identification of hydraulic conductivities in the unsteady case. This problem is formulated by an optimization problem whose cost function measures the squared difference between experimental hydraulic heads and those given by the model.

Contents

1	Modélisation des aquifères.	12
1.1	Quelques définitions	12
1.1.1	Définition d'un aquifère	12
1.1.2	Définition de l'interface	12
1.1.3	Porosité totale et porosité efficace:	13
1.1.4	Hauteur piézométrique	13
1.1.5	Charge hydraulique	15
1.1.6	Coefficient d'emmagasinement	15
1.1.7	Coefficient d'emmagasinement spécifique	16
1.1.8	Conductivité hydraulique	16
1.2	Les différentes équations du modèle	16
1.2.1	Equation de Darcy:	16
1.2.2	Equation de continuité:	17
1.3	Les différentes hypothèses pour notre problème	17
1.3.1	Hypothèse sur la compressibilité du fluide	17
1.3.2	Hypothèse sur la compressibilité du sol	17
1.3.3	Hypothèse sur l'écoulement	17
1.3.4	Hypothèse d'interface nette:	18
1.3.5	Approche hydraulique	19
1.4	Dérivation des équations $2D$	19
1.4.1	Choix des inconnues	20
1.4.2	Termes sources	21
1.4.3	Intégration dans le domaine d'eau douce:	21
1.4.4	Intégration dans le domaine d'eau salée	22
1.5	Equations de continuité à l'interface	22
1.5.1	Continuité de la pression à l'interface $z = h$	22
1.5.2	Continuité de la viscosité à l'interface $z = h$	23
1.5.3	Continuités des composantes normales de la vitesse aux interfaces	24
1.6	Présentation finale des modèles	28
1.6.1	Cas d'un aquifère confiné	28
1.6.2	Cas d'un aquifère libre	30
1.6.3	Conditions aux limites - Conditions initiales	31
1.6.4	Présence d'une rivière	32

2	Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère confiné	33
2.1	Introduction	33
2.2	Résultats préliminaires et notations	33
2.3	Existence globale dans le cas d'une interface nette	36
2.4	Existence globale dans le cas de l'approche 'Interface diffuse'	50
3	Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère libre	62
3.1	Introduction	62
3.2	Existence globale en temps dans le cas de l'interface diffuse	62
3.2.1	Introduction	62
3.2.2	Enoncé du Théorème 5	63
3.2.3	Démonstration	63
3.3	Existence globale en temps dans le cas de l'interface nette	76
4	Unicité de la solution dans le cas de l'approche interface nette-diffuse	90
4.1	Introduction	90
4.2	Notations et résultats de régularité :	91
4.2.1	Notation	91
4.2.2	Rappels des résultats de régularité	92
4.2.3	Preuve du résultat de régularité	96
4.3	Unicité dans le cas confiné avec interface diffuse	100
4.4	Unicité dans le cas d'un aquifère libre	104
5	Identification des paramètres dans le cas instationnaire	106
5.1	Introduction	106
5.2	Formulation du problème	107
5.3	Existence du contrôle optimal	110
5.4	Conditions d'optimalité	111
5.5	Identification de la conductivité et de la porosité	121
6	Conclusions et Perspectives	123

Introduction

Sur terre, plus de 97% de l'eau est salée, l'eau douce représentant moins de 3% de l'eau totale de la planète. A peu près deux tiers de cette quantité d'eau douce est sous forme de glace, le tiers restant constitue les réserves d'eaux souterraines et le faible pourcentage restant représente les eaux de surface, qui, jusqu'à récemment étaient suffisantes pour répondre à la consommation humaine et aux activités industrielles. L'explosion démographique et industrielle nécessitent une quantité d'eau douce de plus en plus considérable. Les eaux de surface n'étant plus suffisantes, les réserves d'eau souterraines sont à présent indispensables et incontournables pour les besoins humains.

Une meilleure gestion des ressources en eau douce devient un enjeu primordial et "un défi planétaire majeur du XXI^e siècle". Nous devons tenir compte de nombreux facteurs : la diminution du niveau d'eau douce dans les aquifères à cause de leur sur-exploitation, les conséquences des changements climatiques sur le niveau des rivières, la pollution des aquifères par les pesticides et les engrais des terres agricoles qui contaminent l'eau douce pour des décennies.

Dans les zones côtières, la forte densité de population (occasionnant des pompes intensives d'eau douce) et la surélévation du niveau de la mer ne font qu'accroître le problème d'intrusion marine dans les nappes d'eau douce.

Les échanges hydrauliques entre l'eau douce souterraine et l'eau salée sont généralement lents dans des conditions naturelles, ils sont alors remplacés par un quasi-équilibre entre les 2 zones (ce qui correspond à l'approximation de Ghyben-Herzberg). Plusieurs modèles analytiques dérivent de cette approche (cf. [20],[51], [71], [77], [85], [122], [132], [133], [134], [135], [138], [139]) mais ces solutions analytiques se limitent à des géométries très simples et à des situations où l'hypothèse de Ghyben - Herzberg est satisfaite, elles sont donc essentiellement utilisées comme cas test pour valider des codes numériques. Supposer que la zone d'eau salée est immobile n'est plus possible dans des conditions plus drastiques dues à des événements météorologiques ou à l'intervention humaine qui, en pompant intensivement l'eau douce, provoque une baisse du niveau de la nappe phréatique et une intrusion de l'eau saline dans l'aquifère. L'eau salée, plus dense que l'eau douce, glisse en dessous de cette dernière et envahit l'aquifère sous forme d'un biseau salé. Afin d'optimiser l'exploitation des eaux souterraines, nous avons donc besoin de modèles précis et efficaces simulant le déplacement du front salé dans l'aquifère côtier.

Ils existent de nombreux livres de référence concernant la modélisation du problème d'intrusion marine, citons par exemple ([18],[20],[24]) et les références qui s'y rapportent. Dans l'optique de notre étude, nous dirons qu'on peut classer les modèles existants pour décrire l'intrusion saline en 2 grandes catégories:

Celle qui considère que les deux volumes d'eau interagissent entre eux, formant ainsi une zone de transition caractérisée par les variations de la concentration en sel. Cette approche est très lourde d'un point de vue théorique et numérique (cf. [3],[9],[57]).

Notons aussi qu'il existe une zone de transition entre la zone saturée en eau et la zone sèche du réservoir, la zone de "désaturation" restant difficile à définir. La seconde catégorie considère que l'eau douce et l'eau salée sont deux fluides immiscibles. Les domaines occupés par chaque fluide sont supposés séparés par une interface nette (on néglige alors les transports de masse entre la zone salée et la zone d'eau douce). Cette approximation est d'autant plus légitime que la dimension verticale de l'aquifère (de l'ordre d'une dizaine de mètres) est souvent très petite comparée aux dimensions horizontales de l'aquifère qui sont de l'ordre du km .

De la même façon, l'épaisseur de la zone de transition est négligeable par rapport aux dimensions horizontales de l'aquifère. Pour les mêmes raisons, on peut considérer que l'interface entre les zones saturée et sèche, est nette (négligeant ainsi les effets de la pression capillaire).

Clairement, ce type de modèle ne décrit pas le comportement de la zone de transition mais il donne des informations sur le mouvement du front salé (ou de la surface supérieure de l'aquifère). Récemment une nouvelle approche a été introduite dans [58] qui combine l'efficacité du modèle avec interface nette au réalisme des modèles avec interface diffuse. Cette approche est déduite d'un modèle de type Allen-Cahn, développé à l'origine pour les phénomènes de transition de phase dans un contexte fluide-fluide et qui est utilisé ici pour décrire les trois états stables caractérisant la zone de transition. Nous allons, dans ce document, étudier et comparer l'approche avec interface abrupte et celle avec interface diffuse.

On distingue deux types d'aquifère : Les aquifères confinés pour lesquels les couches supérieures et inférieures sont supposées imperméables, interdisant alors tout échange avec l'extérieur, et les aquifères libres pour lesquels le toit de l'aquifère est semi-perméable ou perméable (en particulier l'aquifère peut être rechargé en eaux pluviales).

D'un point de vue mathématique, le modèle consiste en un système fortement couplé d'équations dégénérée parabolique-elliptique quasi-linéaires pour le cas confiné et d'équations paraboliques dégénérées pour le cas libre. L'approche avec interface diffuse permet d'une part d'éliminer la dégénérescence mais surtout d'établir un principe du maximum plus réaliste d'un point de vue de la physique, plus précisément une hiérarchie entre les profondeurs des interfaces libres (cf. [59]). Les premiers travaux mathématiques sur le problème d'intrusion marine ont été faits en prenant pour cadre d'étude les problèmes à frontière libre (l'interface eau douce / eau salée étant cette frontière), citons les travaux de Van Duijn et al ([7], [8], [32], [78], [109], [137]) pour des résultats d'existence de la solution mais aussi de régularité de la frontière libre dans le cas d'un écoulement stationnaire. En particulier dans [137], les auteurs regardent le cas d'un aquifère confiné et ramène le problème dans le cas $1D(\Omega =]-1, 1[)$ à une équation parabolique non-linéaire avec 2 dégénérescences, l'une pour la solution " u " et l'autre pour " u_x ". Ils montrent alors dans plusieurs situations, l'existence et l'unicité pour des solutions de $L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(-1, 1))$. Cette étude permet de retrouver le phénomène de cisaillement observé par Josselin de Jong. Nous soulignons qu'elle se limite au cas 1D et les hypothèses de régularité sur la so-

lution sont très fortes en particulier u_t doit appartenir à $L^2(\Omega_T)$. Nous avons aussi les travaux de Baiocchi et al. ([14], [15], [16]) concernant les problèmes de filtrage de liquides dans des milieux poreux, et [4] pour un résultat d'existence et d'unicité pour le problème d'intrusion marine dans le cas stationnaire utilisant la formulation introduite pour un problème d'écoulement dans une digue donné par Brézis et al dans [39]. Dans tous ces travaux, le domaine d'étude est pris dans le plan vertical et l'interface eau douce / eau salée est traitée comme une frontière libre. Dans notre étude, nous considérons que l'écoulement des eaux souterraines est quasi-horizontale, notre domaine d'étude étant alors dans le plan horizontal (après avoir appliqué l'approximation de Dupuit au modèle initial 3D, ce qui permet de ramener notre étude à un problème 2D). Dans [129],[130],[131], les auteurs considèrent le modèle 2D résultant des approximations de Dupuit et interface nette, ils prouvent l'existence et l'unicité dans le cas stationnaire et établissent un résultat d'existence dans le cas instationnaire, utilisant une discrétisation de type différences finies pour traiter l'évolution en temps. Dans [106], les auteurs montrent directement l'existence d'une solution dans le cas confiné et instationnaire, la preuve s'appuyant sur le théorème du point fixe de Schauder. Ce résultat est généralisé dans [59], au cas de l'aquifère libre avec l'approche interface diffuse, le coefficient diffusif supplémentaire permettant alors d'établir une hiérarchie entre les hauteurs des surface libres.

Dans ce travail, nous proposons une étude mathématique comparative des deux approches interface nette et interface diffuse dans le cas d'un aquifère confiné et dans celui d'un aquifère libre, plus précisément, nous établissons dans le cas confiné avec interface diffuse, un résultat d'existence globale en temps de la solution montrant que, malgré l'ajout du terme diffusif, nous sommes toujours obligés de supposer une épaisseur d'eau douce strictement positive dans l'aquifère, pour obtenir une estimation uniforme de la norme L^2 du gradient de la charge hydraulique d'eau douce. Dans le cas d'une nappe libre, nous étudions le système issu du modèle avec interface abrupte. Nous donnons un résultat d'existence globale en temps plus délicat que celui établi dans [59] à cause de la dégénérescence des équations. Nous montrons que l'ajout des interfaces diffuses permet de prouver un principe du maximum plus fin que dans le cas des interfaces abruptes. Notons que les résultats des chapitres 2 et 3 ont donné lieu à la publication [61].

Compte tenu de la conjonction des trois difficultés : la non linéarité, la dégénérescence et le fort couplage des équations, il existe peu de résultats sur l'unicité des solutions pour de tels systèmes. Dans ce document, nous établissons un résultat d'unicité dans le cas de l'approche avec interface diffuse, ce qui permet d'éliminer la difficulté liée à la dégénérescence des équations. Ce résultat repose sur des estimations uniformes des normes $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ des gradients des charges hydrauliques. Cette régularité supplémentaire combinée aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg permet de traiter la non linéarité dans la preuve de l'unicité pour le cas confiné.

Enfin nous résolvons un problème d'identification de paramètres par la méthode de l'état adjoint, ces deux derniers résultats faisant l'objet de la pré-publication [97].

La manuscrit est organisé comme suit :

Après avoir rappelé des notations et des résultats préliminaires, le chapitre 1 est dédié à la description des modèles avec les approches interface nette - interface diffuse dans les cas des aquifère confinés et libres.

Dans le chapitre 2, nous donnons des résultats d'existence pour les aquifères confinés. Les preuves reposent sur l'application du théorème du point fixe de Schauder appliqué à un problème intermédiaire tronqué et régularisé. Puis on établit un principe du maximum et des estimations à priori qui nous permettent d'éliminer les termes de troncature et de passer à la limite. Ce chapitre établit que, malgré le terme diffusif supplémentaire résultant de l'approche avec interface diffuse, nous sommes toujours obligés de supposer une épaisseur d'eau douce > 0 dans l'aquifère pour démontrer une estimation uniforme en norme L^2 du gradient de la charge hydraulique, nécessaire pour le passage à la limite.

Dans le chapitre 3, nous étudions le système dans le cas de l'aquifère libre, les inconnues étant alors les hauteurs des interfaces. Nous regardons essentiellement le cas avec interface nette puisque celle avec interface diffuse a été traité dans [59]. Nous utilisons la technique introduite par Alt-Luckhaus [6] pour traiter la dégénérescence représentée par la fonction Ψ et ainsi donner des estimations des translatés en temps de $\Psi(u)$, u étant la solution, ce qui permet alors d'appliquer le résultat de compacité donné dans [64]. Ce chapitre montre l'importance dans le cas de l'aquifère libre, du terme diffusif supplémentaire introduit dans l'approche interface diffuse qui permet d'établir une hiérarchie entre les hauteurs de 2 surfaces libres.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'unicité de la solution dans le cas d'un aquifère confiné. Nous rappelons que nous sommes confrontés à trois difficultés : la non linéarité; la dégénérescence et le fort couplage des équations. À notre connaissance, les résultats d'unicité pour de tels systèmes sont très rares, le traitement des termes non linéaires nécessitant des résultats de régularité de la solution supplémentaires. Nous éliminons ici la difficulté liée à la dégénérescence en regardant l'approche avec interface diffuse. La clef du résultat repose sur un résultat de régularité donné par [103] dans le cas elliptique et généralisé dans [31],[101] par ses auteurs, au cas parabolique et donnant une estimation en norme $L^r(\Omega)$ (resp. $L^r(\Omega_T)$), $r > 2$ du gradient de la solution. L'exposant r dépend essentiellement des caractéristiques de l'opérateur elliptique.

Finalement, nous concluons ce travail, par la résolution du problème d'identifications de la conductivité hydraulique et de la porosité dans le cas instationnaire, généralisant ainsi les travaux faits par Talibi et Tber dans le cas stationnaire (cf. [127],[128], [129]).

Ce problème se ramène à chercher le minimum d'une fonction coût calculant l'écart quadratique entre les valeurs mesurées des charges hydrauliques et de la profondeur de l'interface eau douce-eau salée et celles données par le système d'état dans le cas d'un aquifère confiné. En considérant ce système comme une contrainte pour le problème d'optimisation et en introduisant le Lagrangien associé à la fonction coût et au système d'état, nous montrons que le système d'optimalité a au moins une solution.

Rappels Préliminaires

Formule de Leibniz

Soit I l'intégrale définie par :

$$I(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t) dx, \text{ avec } h, g, f \in C^1(\mathbb{R}),$$

Alors

$$\frac{dI}{dt} = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(h(t), t) \frac{\partial h(t)}{\partial t} - f(g(t), t) \frac{\partial g(t)}{\partial t},$$

d'où

$$\int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx = \frac{dI}{dt} - f(h(t), t) \frac{\partial h(t)}{\partial t} + f(g(t), t) \frac{\partial g(t)}{\partial t}.$$

Théorème 1 : (Schauder)

Soit X un espace de Banach, on suppose que $K \subset X$, est un convexe compact non vide et de plus

$$T : K \longrightarrow K$$

est une application continue. Alors T admet un point fixe dans K .

Théorème 2 : (Injections de Sobolev $N \geq 2$)

Soient $N \geq 1$, ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq +\infty$, q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

les injections continues :

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq N & \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N & \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \\ p > N & \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\bar{\Omega}), \end{cases}$$

les injections compactes : Supposons que Ω est de plus borné et de class C^1 , on a :

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq N & \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), r \in [1, p^*[\text{ avec } p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N & \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), r \in [1, +\infty[, \\ p > N & \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

Lemme 1 : (Gronwall) :

Soient $m, n \in L^1(0, T; R)$ telles que $m, n \geq 0$ p.p. sur $(0, T)$ et soit a un réel positif.

Soit aussi $\varphi : [0, T] \rightarrow R$ une fonction continue telle que :

$$\varphi(s) \leq a + \int_0^s m(t)dt + \int_0^s n(t)\varphi(t)dt, \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$\varphi(s) \leq (a + \int_0^s m(t)dt) \exp\left(\int_0^s n(t)dt\right), \forall s \in [0, T].$$

Pour simplifier les notations, on pose :

$$V = H_0^1(\Omega), V' = H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega), H = L^2(\Omega).$$

Lemme 2 : (Mignot) :

Soit $f : R \rightarrow R$ une fonction continue et croissante telle que :

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(\lambda)}{\lambda} \right| < +\infty$$

Soient $\omega \in L^2(0, T, H)$ telle que

$$\frac{d\omega}{dt} \in L^2(0, T, V') \text{ et } f(\omega) \in L^2(0, T, V).$$

Alors

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt}, f(\omega) \right\rangle_{V', V} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\int_0^{\omega(\cdot, y)} f(r) dr \right) dy \text{ dans } D'(0, T),$$

et pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{d\omega}{dt}, f(\omega) \right\rangle_{V', V} dt = \int_{\Omega} \left(\int_{\omega(t_1, y)}^{\omega(t_2, y)} f(r) dr \right) dy.$$

Chapter 1

Modélisation des aquifères.

1.1 Quelques définitions

1.1.1 Définition d'un aquifère

Un aquifère est une formation souterraine de roches perméables susceptible de retenir des quantités importantes d'eau. Les aquifères existent sous différentes formes, suivant la nature de leurs limites on peut distinguer :

1. Aquifère à nappe libre: c'est un aquifère dont le toit est constitué d'une couche perméable, qui se laisse traverser par l'eau à des vitesses raisonnables, il en résulte que cette limite (toit) supérieure, qu'on appelle aussi surface piézométrique, est soumise à des fluctuations libres : Il y a donc des échanges avec l'extérieur tels que les injections et l'alimentation en eaux pluviales ou tels que le pompage.

2. Aquifère à nappe captive: C'est un aquifère constitué de formation hydrogéologique perméable limitée par deux couches imperméables: le toit et le substratum (ou la base).

3. Aquifère à nappe semi-captive: C'est un aquifère dont le substratum et/ou le toit sont constitués de formations semi-perméables (c'est-à-dire de faible perméabilité, mais qui permettent sous des conditions hydrodynamiques favorables des échanges entre les formations hydrogéologiques superposées).

1.1.2 Définition de l'interface

On distingue plusieurs approches pour la zone de mélange qui apparaît entre la zone d'eau salée et celle d'eau douce.

Approche sans interface :

Cette approche consiste à considérer un modèle d'écoulement de deux fluides miscibles.

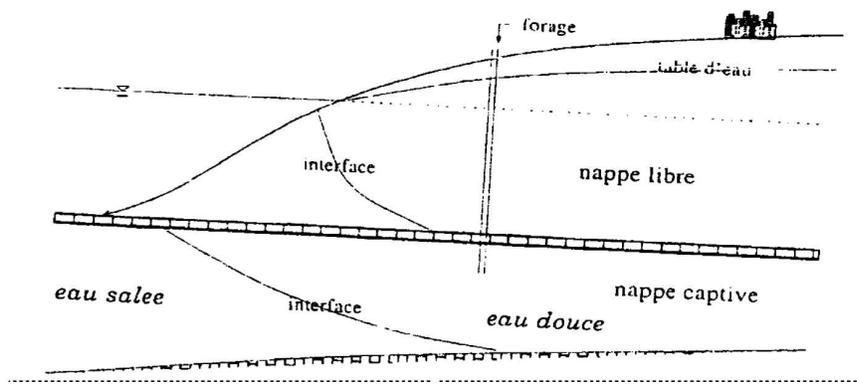


Figure 1.1: Nappe libre et nappe captive avec possibilité d'intrusion d'eau salée

Approche avec interface diffuse :

Une approche logique physiquement consiste à supposer que l'eau douce et l'eau salée sont deux fluides miscibles et qu'il existe entre ces deux fluides une zone de transition qui n'est ni salée ni douce. Concernant l'interface entre le milieu saturé en eau et le milieu insaturé en eau, il est difficile de définir la zone de désaturation.

Cette approche est très lourde des points de vue théorique et numérique.

Approche d'interface nettes ou abruptes :

Les deux fluides sont alors considérés immiscibles, les deux zones sont alors séparées par une interface nette (ou abrupte). Cette approximation physique a fait ses preuves, donc peut paraître raisonnable. Elle est basée sur l'hypothèse qu'il n'y a pas de transfert de masse entre la zone d'eau douce et la zone salée. On néglige les termes de pression capillaire mais le prix à payer du point de vue théorique est l'analyse des interfaces libres.

1.1.3 Porosité totale et porosité efficace:

Porosité totale: elle est donnée par

$$\Phi(\%) = \frac{\text{volume des vides}}{\text{volume total de l'échantillon}}$$

C'est la capacité du milieu poreux de comporter des vides interconnectés. Cette définition est peu utilisée en pratique, car un réservoir n'est jamais totalement dépourvu de son eau.

Porosité efficace: c'est un paramètre dépendant à la fois des diamètres des grains, de l'arrangement de ces derniers et de leurs surfaces spécifiques. Elle est donnée par le rapport du volume d'eau gravitaire (qui peut circuler) sur le volume total de la roche saturée en eau :

$$\Phi(\%) = \frac{\text{volume d'eau gravitaire}}{\text{volume total de l'échantillon}}$$

1.1.4 Hauteur piézométrique

La hauteur piézométrique (ou charge piézométrique) en un point A correspond à l'énergie potentielle par unité de poids de l'eau. Elle est définie par :

$$h_A = \frac{P_A}{\rho g} + z_A ,$$

où z_A est la cote du point, P_A désigne la pression au point A, g est l'accélération de la pesanteur et ρ la densité de l'eau.

Remarque 1:

Sur une colonne saturée, la hauteur piézométrique est la même. En effet:

$$h_A = \frac{P_A}{\rho g} + z_A = \frac{P_B + \rho g(z_B - z_A)}{\rho g} + z_A = h_B$$

1.1.5 Charge hydraulique

La charge hydraulique en un point A dans un fluide incompressible, correspond à l'énergie mécanique totale du fluide en ce point, elle est définie par:

$$\phi_A = \frac{P_A}{\rho g} + z_A + \frac{v^2}{2g},$$

où v est la vitesse réelle du fluide au point A.

Puisqu'en milieux poreux l'écoulement est généralement lent, on néglige souvent le terme cinétique $\frac{v^2}{2g}$, par conséquent la hauteur piézométrique et la charge hydraulique peuvent être confondues.

1.1.6 Coefficient d'emmagasinement

C'est le rapport du volume d'eau libéré ou emmagasiné par unité de surface de l'aquifère, sur la variation de charge hydraulique correspondante. Il est utilisé pour caractériser plus précisément le volume d'eau exploitable, il conditionne l'emmagasinement de l'eau souterraine mobile dans les vides du réservoir. Pour une nappe captive ce coefficient est extrêmement faible: il représente essentiellement le degré de compression de l'eau. Pour une nappe libre, il est de l'ordre de grandeur de la porosité efficace.

Nous verrons que ce coefficient peut s'exprimer en fonction de la porosité, du coefficient de compressibilité du fluide, noté α_P , résultant de la variation de la densité du fluide par rapport à celle de la pression et du coefficient de compressibilité du sol, noté β_P , dû à la variation de la porosité par rapport à celle de la pression. Nous admettrons que α_P et β_P sont définis par:

$$\alpha_P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}, \tag{1.1}$$

et

$$\beta_P = \frac{1}{(1 - \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial P} \tag{1.2}$$

1.1.7 Coefficient d'emmagasinement spécifique

Il est donné en unité d'eau libérée ou emmagasinée par unité de volume d'aquifère en m^3 sous l'action d'une variation unitaire de charge hydraulique.

1.1.8 Conductivité hydraulique

Ce tenseur exprime l'aptitude du sol à transmettre de l'eau, il est défini par:

$$K = \frac{\kappa \rho g}{\mu} \quad (1.3)$$

où

ρ est la masse volumique de l'eau,

g est l'accélération de la pesanteur,

μ est la viscosité dynamique de l'eau et

le tenseur κ est la perméabilité intrinsèque du milieu, il dépend uniquement des caractéristique du milieu poreux et non de celles du fluide.

1.2 Les différentes équations du modèle

Le modèle repose essentiellement sur le couplage de deux lois : la première étant celle qui caractérise la vitesse d'écoulement d'un fluide en milieux poreux, la seconde étant celle qui exprime le principe de conservation de la masse.

1.2.1 Equation de Darcy:

Découverte expérimentalement par **Darcy** en 1856, la loi de **Darcy** exprime la densité du flux d'un fluide newtonien ou vitesse de **Darcy** q à travers le milieu poreux, en fonction du gradient de charge hydraulique Φ :

$$q = -\frac{\kappa}{\mu}(\nabla P + \rho g \nabla z_h).$$

Cette équation peut aussi s'écrire à l'aide de la charge hydraulique:

$$q = -\frac{\kappa \rho_0 g}{\mu} \nabla \Phi - \frac{\kappa}{\mu}(\rho - \rho_0)g \nabla z_h, \quad K = \frac{\kappa \rho_0 g}{\mu}. \quad (1.4)$$

où P est la pression, ρ_0 est la densité de référence du fluide et z_h la hauteur du fluide, Φ est la charge hydraulique, définie précédemment et qu'on écrit comme suit :

$$\Phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z_h. \quad (1.5)$$

1.2.2 Equation de continuité:

L'équation de continuité de l'écoulement en milieux poreux est basée sur le principe de conservation de masse et s'écrit:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho q) = \rho Q \quad (1.6)$$

1.3 Les différentes hypothèses pour notre problème

1.3.1 Hypothèse sur la compressibilité du fluide

Les fluides que nous allons considérer sont connus pour être faiblement compressibles, i.e $\alpha_P \ll 1$.

Nous allons exploiter ce fait une première fois combiné à la faible mobilité d'un fluide en milieu poreux, pour simplifier l'équation de Darcy en :

$$q = -\frac{\kappa\rho_0 g}{\mu} \nabla\Phi.$$

Le fait que $\alpha_P \ll 1$ sera à nouveau exploité dans la modélisation du mouvement du fluide.

1.3.2 Hypothèse sur la compressibilité du sol

De façon analogue, nous allons supposer que le sol est faiblement compressible donc le coefficient de compressibilité β_P est petit (i.e $\beta_P \ll 1$).

1.3.3 Hypothèse sur l'écoulement

L'hypothèse de **Bear** consiste à négliger la variation de densité $\nabla(\rho g) \ll 1$ dans la direction de l'écoulement.

Le fait de négliger $\nabla(\rho q)$ découle de la faible compressibilité du fluide ($\alpha_P \ll 1$) et de la faible mobilité du fluide.

En prenant en considération cette hypothèse, l'équation (1.6) devient:

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q, \quad (1.7)$$

Par ailleurs, d'après les définitions de α_P et β_P (1.1) et (1.2), nous avons :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho\alpha_p \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = (1-\phi)\beta_p \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Soit, après substitution dans (1.7)

$$\rho((1 - \phi)\beta_p + \phi\alpha_p)\frac{\partial P}{\partial t} + \rho\nabla q = \rho Q$$

puisque

$$q = -\frac{K}{\mu}\nabla\Phi \text{ et } P = \rho_0 g\Phi - \rho_0 g z_h$$

on obtient après simplifications ($\rho \neq 0$), l'équation :

$$\rho_0 g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P)\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \nabla \cdot (K\nabla\Phi) = Q \quad (1.8)$$

où $S_0 = \rho_0 g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P)$ est le coefficient d'emménagement en eau du sol.

1.3.4 Hypothèse d'interface nette:

Le modèle d'interface abrupte consiste à supposer que l'eau salée et l'eau douce sont immiscibles et que donc les zones occupées par chaque fluide sont séparées par une interface **abrupte**.

Cette interface est en réalité une zone de transition (car ces deux fluides sont en fait miscibles), mais dans le modèle, on suppose que l'épaisseur de cette zone est très petite comparée aux dimensions horizontales de l'aquifère.

Dans chaque domaine, nous avons une équation de conservation de la masse simplifiée du type (1.8) pour l'eau salée et pour l'eau douce.

Ainsi dans le domaine de l'eau douce, nous avons:

$$S_f \frac{\partial\Phi_f}{\partial t} + \nabla \cdot q_f = Q_f, \quad (1.9)$$

et dans le domaine de l'eau de mer, nous avons:

$$S_s \frac{\partial\Phi_s}{\partial t} + \nabla \cdot q_s = Q_s, \quad (1.10)$$

où S_f (resp. S_s) est le coefficient d'emménagement en eau dans le domaine d'eau douce (resp. dans le domaine salé), ρ_f, ρ_s sont les densités de référence de l'eau douce et celle de l'eau salée, Φ_f, Φ_s sont les charges hydrauliques dans la zone d'eau douce et dans la zone salée, q_f, q_s sont les flux de Darcy dans la zone d'eau douce et dans celle d'eau salée et enfin Q_f, Q_s sont des termes sources.

On rappelle que:

$$S_f = \rho_f g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P), \quad q_f = -K_f \text{grad}(\Phi_f), \quad K_f = \frac{\kappa g \rho_f}{\mu_f},$$

$$S_s = \rho_s g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P), \quad q_s = -K_s \text{grad}(\Phi_s), \quad K_s = \frac{\kappa g \rho_s}{\mu_s}.$$

1.3.5 Approche hydraulique

L'écoulement dans un milieu poreux est en général tridimensionnel. Cependant, puisque les épaisseurs de la plupart des aquifères sont relativement petites devant leurs dimensions horizontales, on suppose que l'écoulement se fait de manière horizontale. Autrement dit les composantes verticales de celui ci sont négligées. Dans un aquifère captif, homogène, isotrope et d'épaisseur constante, cette approximation est exacte. Toutefois, elle reste bonne quand les variations de l'épaisseur sont plus petites que l'épaisseur moyenne de l'aquifère.

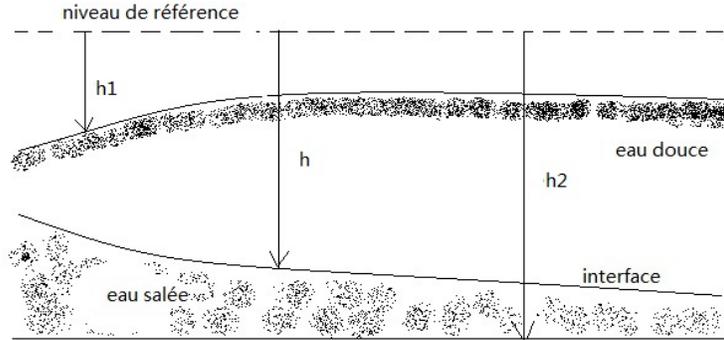
Dans les aquifères libres, cette approximation est basée sur le fait que les surfaces équipotentielles sont verticales et l'écoulement est essentiellement horizontal.

Dans ce travail, on adopte cette approximation nommée: Approche hydraulique ou Approximation de Dupuit. Cette hypothèse permet de remplacer les équations 3D d'origine par des équations moyennées verticalement. Cela permet de passer d'un problème tri-dimensionnel à un problème bi-dimensionnel.

1.4 Dérivation des équations 2D

Les équations (1.8) et (1.9) sont écrites dans l'espace tridimensionnel, avec une condition aux limites non linéaire à l'interface, la solution reste difficile à obtenir. Le problème peut être simplifié par une intégration des équations d'écoulement selon la direction verticale en supposant que l'écoulement est horizontal à l'intérieur de l'aquifère (cf. [18], [19], [20], [24]). Une dérivation formelle du modèle 2D peut aussi être obtenue à partir du développement asymptotique des équations du modèle 3D re-scalées, mais on a choisi ici de suivre la présentation de Bear pour l'obtention du modèle 2D.

L'aquifère est représenté par un domaine $\Omega \times (h_2, h_{max}), \Omega \in \mathbb{R}^2$.



1.4.1 Choix des inconnues

Les fonctions h_2 (resp. h_{max}), décrivent sa topographie inférieure (resp. supérieure). Pour des raisons de simplicité, on suppose que $h_{max} = constante = 0$.

Zone sèche Γ_T :

On suppose qu'entre $z = h_1$ et Γ_T , la pression est donnée égale à la pression atmosphérique P_a .

Si $h_1 < h_{max}$, on impose l'équilibre des pressions $P_f|_{z=h_1} = P_a$ et donc:

$$\Phi_{f|z=h_1} = \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1.$$

Si $h_1 = h_{max}$, on impose l'équilibre des pressions $P_f|_{z=h_{max}} = P_a$ donc :

$$\Phi_{f|z=h_{max}} = \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_{max}.$$

Dans toute la suite, pour simplifier, nous supposons que $h_{max} = 0$.

Cela va avoir une conséquence sur le choix des inconnues dans notre modèle, en effet on a vu que:

$$\text{si } h_1 < h_{max} \implies \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1,$$

$$\text{si } h_1 = h_{max} = 0 \implies \Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g}.$$

donc la bonne inconnue est $h_1^- = \inf(0, h_1)$, et

$$\Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + \inf(0, h_1) = \frac{P_a}{\rho_f g} + \chi_0(-h_1)h_1.$$

$$\text{avec } \chi_0(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq 0 \\ 1 & \text{si } h > 0. \end{cases}$$

Le même raisonnement s'applique à la hauteur d'eau salée, d'où l'introduction de l'inconnue $h^- = \inf(0, h)$.

1.4.2 Termes sources

Nous harmonisons les termes sources pour que les équations décrivant l'évolution de h et h_1 soient identiques lorsque $h = h_1$.

Cela implique : $\tilde{Q}_f = 0$ si $h = h_1$ i.e qu'on arrête de pomper lorsqu'on atteint l'eau salée.

Nous prenons donc un terme source de la forme:

$$Q_f = \tilde{Q}_f(h - h_1)^+, \quad \tilde{Q}_f \in \mathbb{R}.$$

De même, en supposant h_2 constante (pour simplifier) et en écrivant l'équation satisfaité par h pour $h = h_2$, on voit qu'il faut imposer $Q_s = 0$ si $h = h_2$. On choisit donc Q_s de la forme:

$$Q_s = \tilde{Q}_s(h_2 - h)^+, \quad \tilde{Q}_s \in \mathbb{R}.$$

1.4.3 Intégration dans le domaine d'eau douce:

En intégrant l'équation (1.9) selon la verticale entre la côte de l'interface h et celle du toit de l'aquifère h_1 , on obtient :

$$S_f B_f \frac{\partial \bar{\Phi}_f}{\partial t} = \nabla \cdot (B_f \bar{K}_f \nabla \bar{\Phi}_f) - q_f|_{h_1} \cdot \nabla(z - h_1) + q_f|_h \cdot \nabla(z - h). \quad (1.11)$$

où

$B_f = h_1 - h$ est l'épaisseur de la zone d'eau douce,

$\bar{\Phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_h^{h_1} \Phi_f dz$ la moyenne de Φ_f sur la verticale et

$\bar{K}_f = \frac{1}{B_f} \int_{h_2}^h K_f dz$ est la moyenne de chaque élément du tenseur K_f sur la verticale.

1.4.4 Intégration dans le domaine d'eau salée

De même en intégrant l'équation (1.10) selon la verticale, mais cette fois-ci entre la côte du substratum h_2 et celle de l'interface h , on obtient l'équation :

$$S_s B_s \frac{\partial \bar{\Phi}_s}{\partial t} = \nabla \cdot (B_s \bar{K}_s \nabla \bar{\Phi}_s) - q_s|_h \cdot \nabla(z-h) + q_s|_{h_2} \cdot \nabla(z-h_2). \quad (1.12)$$

où :

$B_s = h - h_2$ est l'épaisseur de la zone d'eau salée,

$\bar{\Phi}_s = \frac{1}{B_s} \int_{h_2}^h \Phi_s dz$ est la moyenne de Φ_s sur la verticale et

$\bar{K}_s = \frac{1}{B_s} \int_{h_2}^h K_s dz$ est la moyenne de chaque élément du tenseur K_s sur la verticale.

Dorénavant on note $\bar{\Phi}_f = \Phi_f$ et $\bar{\Phi}_s = \Phi_s$, de même pour les tenseurs K_f et K_s .

1.5 Equations de continuité à l'interface

1.5.1 Continuité de la pression à l'interface $z = h$

On a supposé Φ_f constant par rapport à z entre h et $inf(h_1, 0)$, on a donc :

$$\Phi_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + inf(0, h_1) := \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1$$

Or on a l'hypothèse de continuité de la pression entre la couche d'eau claire et la couche au-dessus de l'interface libre h_1 :

$$\begin{aligned} \Phi_{f|z=inf(0, h_1)} = \Phi_{f|z=h} &\iff \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1 = \frac{P_{f|z=h}}{\rho_f g} + h \\ &\iff P_{f|z=h} = P_a + \rho_f g(h_1 - h) \end{aligned}$$

Par ailleurs comme on a supposé la continuité de la pression au travers de l'interface h , on a :

$$\begin{aligned}
P_{f|z=h} = P_{s|z=h} = \rho_s g(\Phi_s - h) &\iff P_a + \rho_f g(h_1 - h) = \rho_s g(\Phi_s - h) \\
&\iff \rho_s g(\Phi_s - h) = P_a + \rho_f g(h_1 - h) \\
&\iff \rho_s \Phi_s = \frac{P_a}{g} + \rho_f (h_1 - h) + \rho_s h \\
&\iff \frac{\rho_s}{\rho_f} \Phi_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + (h_1 - h) + \frac{\rho_s}{\rho_f} h \\
&\iff (1 + \alpha) \Phi_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + (h_1 - h) + (1 + \alpha) h \\
&\iff (1 + \alpha) \Phi_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1 + \alpha h. \quad (1.13)
\end{aligned}$$

avec $(1 + \alpha) = \frac{\rho_s}{\rho_f}$.

Pour simplifier comme P_a et α sont constants, on a :

$$\begin{aligned}
P_{f|z=h} = P_{s|z=h} &\implies (1 + \alpha) \nabla \Phi_s = \nabla h_1 + \alpha \nabla h \\
&\implies (1 + \alpha) \nabla \Phi_s = \chi_0 (-h_1) \nabla h_1 + \alpha \nabla h
\end{aligned}$$

1.5.2 Continuité de la viscosité à l'interface $z = h$

Nous allons aussi supposer que notre milieu est homogène et isotrope et que les viscosités de l'eau douce et de l'eau salée sont identiques, on a:

$$\overline{K}_{f,x} = \overline{K}_{f,y} = K_f \text{ et } \overline{K}_{s,x} = \overline{K}_{s,y} = K_s,$$

or

$$\begin{aligned}
K_f = \frac{\kappa \rho_f g}{\mu_f} &\iff \mu_f = \frac{\kappa \rho_f g}{K_f} \\
K_s = \frac{\kappa \rho_s g}{\mu_s} &\iff \mu_s = \frac{\kappa \rho_s g}{K_s}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mu_f = \mu_s &\iff \frac{\kappa \rho_f g}{K_f} = \frac{\kappa \rho_s g}{K_s} \\
&\iff \frac{K_s}{\rho_s} = \frac{K_f}{\rho_f} \\
&\iff K_s = \frac{\rho_s}{\rho_f} K_f \\
&\iff K_s = (1 + \alpha) K_f \text{ avec } (1 + \alpha) = \frac{\rho_s}{\rho_f}
\end{aligned}$$

A partir de maintenant, on notera K pour K_f .

1.5.3 Continuités des composantes normales de la vitesse aux interfaces

Les équations (1.11) et (1.12) modélisent respectivement l'écoulement dans le domaine de l'eau douce et l'écoulement dans le domaine de l'eau salée.

A ce stade de la modélisation, nous proposons deux approches :

- celle des interfaces nettes entre l'eau douce et l'eau salée et la zone saturée et la zone insaturée,
- celle des interfaces faiblement diffuses entre l'eau douce et l'eau salée et la zone saturée et la zone insaturée.

1. Calcul du flux $q_f|_h \nabla(z-h)$ dans le cas d'une interface nette

L'interface mobile est une surface matérielle qui peut être représentée par une équation de la forme générale :

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

ou encore,

$$F(x, y, z, t) \equiv z - h(x, y, t) = 0.$$

Le long de cette interface, il faut respecter les deux conditions :

- les composantes normales de la vitesse à l'interface sont égales dans chaque zone ce qui correspond au fait que l'on suppose aucun transfert de masse au travers de l'interface. Ainsi on a :

$$\phi \frac{dF}{dt} = \phi \frac{\partial F}{\partial t} + q_f \cdot \nabla F = \phi \frac{\partial F}{\partial t} + q_s \cdot \nabla F, \quad (1.14)$$

- Les pressions dans chaque zone sont égales à l'interface $z = h$ et la relation (1.13) s'écrit aussi $h = \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_f} \Phi_s - \frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f} \Phi_f = (1 + \frac{1}{\alpha}) \Phi_s - \frac{1}{\alpha} \Phi_f$.

Compte tenu de (1.13) et (1.14), nous obtenons :

$$\begin{cases} q_f|_h \cdot \nabla(z-h) = \phi \frac{\partial h}{\partial t} = \phi(1-\delta) \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - \phi \delta \frac{\partial \Phi_f}{\partial t}, \\ q_s|_h \cdot \nabla(z-h) = \phi \frac{\partial h}{\partial t} = \phi(1-\delta) \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - \phi \delta \frac{\partial \Phi_f}{\partial t}. \end{cases}$$

avec $\alpha = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}$.

2. Calcul du flux $q_f|_{z=h} \cdot \nabla(z-h)$ dans le cas d'une interface faiblement diffuse

Nous incluons à présent dans notre modèle l'existence de deux interfaces diffuses : l'une d'épaisseur δ_1 entre la zone saturée et la zone insaturée et l'autre d'épaisseur δ_h entre la zone d'eau salée et la zone d'eau douce. Ce modèle a été

initialement introduit dans [58] et nous reprenons ici intégralement la présentation du calcul du flux donné dans cet article. Nous soulignons que ce modèle est complètement nouveau par rapport à la littérature existante et qu'il concilie la simplicité des modèles à interface nette avec le réalisme des modèles à interface diffuse.

Nous introduisons une fonction de phase F décrivant les 3 zones (eau douce, eau salée, mélange) telle que :

$$F = \begin{cases} 0 & \text{dans l'eau douce,} \\ \frac{c_s}{2} & \text{sur l'interface nette,} \\ c_s & \text{dans l'eau salée.} \end{cases}$$

où c_s est la concentration moyenne en sel dans la zone salée.

Ainsi l'ensemble $\{(x, y, z) \text{ tels que } F(x, y, z) = \frac{c_s}{2}\}$ représente l'interface nette à l'instant t .

La fonction F satisfait une équation de type **Allen-Cahn** tri-stable (les trois points de stabilités sont ici $0, \frac{c_s}{2}$ et c_s) :

$$\partial_t F + \vec{v} \nabla F - \delta_h \Delta' F + \frac{F(F - \frac{c_s}{2})(F - c_s)(3F^2 - c_s^2/4)}{\delta_h} = 0 \quad (1.15)$$

où le symbole Δ' correspond à la dérivation par rapport aux deux variables x et y . La forme détaillée du potentiel triple n'a pas d'importance; son rôle principal est d'établir et de maintenir les parois du domaine bien définies. La taille caractéristique de l'interface diffuse correspondante est $\delta_h > 0$ (voir par exemple [5] pour des résultats rigoureux). Le paramètre δ_h est petit. Un autre point en faveur du couplage de (1.15) avec l'approche interface nette est la convergence quand $\delta_h \rightarrow 0$ du modèle 'champ de phase' vers celui avec 'interface nette' (voir [117] [118] pour Allen-Cahn, [64] [26] pour Cahn-Hilliard). L'équation satisfaite par le champ de phase (1.15) contient également un terme d'advection par le fluide de l'ordre du paramètre, la vitesse efficace étant désignée par \vec{v} ([36]). Nous soulignons, par ailleurs, que nous avons déjà négligé la diffusion verticale par rapport au terme convectif. Le passage de 3D à 2D suppose que la zone de stabilité $\{F = \frac{c_s}{2}\}$ correspond à l'interface nette $z = h$, on a donc :

$$F(x, y, z, t) = \frac{c_s}{2} \Leftrightarrow z - h(x, y, t) = 0$$

La dérivée de la fonction constante $F(x, h^-(x, t), t) = \frac{c_s}{2}$ est nulle, nous déduisons de $\partial_l [F(x, h^-(x, t), t)] = 0$, $l = x, t$ que $\partial_t F(x, h^-, t) = -\partial_z F(x, h^-, t) \partial_t h^-$ et $\nabla' F(x, h^-, t) = -\partial_z F(x, h^-, t) \nabla' h^-$. Dérivant une nouvelle fois ces expressions, nous obtenons finalement que $\Delta' F(x, h^-, t) = -\partial_z F(x, h^-, t) \Delta' h^- - \partial_{zz}^2 F(x, h^-, t) |\nabla' h^-|^2 - \nabla' \partial_z F(x, h^-, t) \cdot \nabla' h^-$. En incluant ces calculs dans

la projection de l'équation de Allen-Cahn pour $F = \frac{c_s}{2}$, nous obtenons:

$$\partial_z F(-\partial_t h + \vec{v} \cdot \nabla(z-h) - \delta_h \Delta h) + \delta_h \nabla' \partial_z F \cdot \nabla' h^- + \delta_h |\nabla' h^-|^2 \partial_{zz}^2 F = 0 \quad (1.16)$$

En négligeant les deux derniers termes de l'équation (1.16) et en simplifiant par $\partial_z F \neq 0$ (la justification de ces deux points est loin d'être évidente et nous renvoyons à [58] pour plus de détails), nous obtenons :

$$-\partial_t h + \vec{v} \cdot \nabla(z-h) - \delta_h \Delta h = 0 \quad (1.17)$$

On revient alors à l'hypothèse traditionnelle de la modélisation à interface nette : pas de transfert de masse au travers de l'interface $\{F = \frac{c_s}{2}\}$ i.e les composantes normales de la vitesse sont continues et on a :

$$\left(\frac{q_f}{\phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = \left(\frac{q_s}{\phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = 0. \quad (1.18)$$

On a noté \vec{n} le vecteur normal unitaire par rapport à l'interface nette, \vec{v} est la vitesse moyenne réelle de l'interface.

Remarque : La pondération par $\frac{1}{\phi}$ provient de la définition de la vitesse moyenne réelle:

$$v = \frac{Q}{S_v} = \frac{Q}{\phi S} = \frac{1}{\phi} \frac{Q}{S} = \frac{q_f}{\phi} \text{ avec } q_f = \frac{Q}{S} \text{ et } \phi = \frac{S_v}{S}.$$

avec Q le débit s'écoulant dans la section, S la surface de la section, q_f la vitesse fictive de filtration, S_v la surface du vide dans le milieu poreux.

En combinant (1.17) et (1.18) nous obtenons :

$$\begin{aligned} q_f(h) \cdot \nabla(z-h) &= q_s(h) \cdot \nabla(z-h) = \phi \left[\frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \Delta h \right] \\ &= \phi \left[\chi_0(-h) \frac{\partial h}{\partial t} - \delta_h \operatorname{div}(\chi_0(-h) \nabla h) \right]. \end{aligned}$$

3. Calcul du flux $q_f|_{z=h_1} \cdot \nabla(z-h_1)$ dans le cas d'une interface faiblement diffuse

Nous appliquons le même type de raisonnement que dans le cas précédent pour décrire la zone de transition entre la zone saturée et la zone insaturée d'épaisseur δ_1 .

Ici pour modéliser la dynamique de cette interface, nous introduisons une fonction de phase F telle que:

$$F = \begin{cases} -1 & \text{dans la zone insaturée,} \\ 0 & \text{sur l'interface nette,} \\ 1 & \text{dans la zone saturée.} \end{cases}$$

Ainsi $\{F(x, y, z, t) = 0\}$ représente l'interface nette. La fonction F satisfait une équation de type **Allen-Cahn** :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F - \delta_1 \Delta F + \frac{F(F-1)(F+1)}{\delta_1} = 0$$

où \vec{v} est la vitesse de l'interface et δ_1 est l'épaisseur de la zone diffuse entre la zone saturée et la zone sèche. Nous notons que le passage de 3D à 2D suppose que la sone de transition $\{F = 0\}$ correspond à l'interface nette h_1 , on a donc:

$$F(x, y, z, t) = 0 \iff z - h_1(x, y, t) = 0.$$

et la projection d'Allen-Cahn pour $F = 0$ donne:

$$-\frac{\partial h_1}{\partial t} + \vec{v} \nabla(z - h_1) - \delta_1 \Delta h_1 = 0. \quad (1.19)$$

En combinant (1.19) et la continuité des composantes normales de la vitesse à l'interface $z = h_1$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} q_f(h_1) \cdot \nabla(z - h_1) &= \phi \left[\frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \Delta h_1 \right] \\ &= \phi [\chi_0(-h_1) \frac{\partial h_1}{\partial t} - \delta_1 \nabla(\chi_0(-h_1) \nabla h_1)]. \end{aligned}$$

4. Calcul du flux $q_f|_{z=h_1} \cdot \nabla(z - h_1)$ dans le cas d'un aquifère confiné

Dans le cas où on suppose que la couche supérieure de l'aquifère est imperméable i.e pas de flux entre la zone d'eau douce et le toit $z = h_1$, on a :

$$q_s(h_1) \nabla(z - h_1) = 0. \quad (1.20)$$

5. Calcul du flux $q_s(h_2) \cdot \nabla(z - h_2)$

Dans le cas où on suppose que la couche inférieure de l'aquifère est imperméable i.e pas de flux entre la zone salée et le fond $z = h_2$, on a :

$$q_s(h_2) \nabla(z - h_2) = 0. \quad (1.21)$$

Nous insistons sur le fait que, puisque nous avons supposé l'écoulement quasi-horizontale, la condition (1.21) impose des conditions sur la topographie $(x, y) \rightarrow h_2(x, y)$. Par exemple si le tenseur de perméabilité K_s est diagonal, on doit avoir $h_2 = \text{constante}$. Pour garder le maximum de généralités sur le tenseur K_s , il faudrait considérer la fonction h_2 variable.

Mais, pour simplifier les démonstrations qui vont suivre, nous avons supposé $h_2 = \text{constante}$. Nous insistons néanmoins sur le fait que les démonstrations se généralisent de manière automatique au cas $h_2 = h_2(x, y)$.

1.6 Présentation finale des modèles

Nous sommes à présent en mesure de donner les systèmes vérifiés par les modèles dans les 4 cas suivants :

- Cas de l'aquifère confiné avec l'approche de l'interface nette,
- Cas de l'aquifère confiné avec l'approche de l'interface diffuse,
- Cas de l'aquifère libre avec l'approche de l'interface nette,
- Cas de l'aquifère libre avec l'approche de l'interface diffuse.

1.6.1 Cas d'un aquifère confiné

Les inconnues naturelles étant la charge hydraulique de l'eau douce Φ_f et la profondeur de l'interface eau salée/eau douce, h , nous allons ré-écrire les systèmes avec (Φ_f, h) .

Compte tenu de l'étude précédente, nos modèles sont régis par les systèmes suivants où (Φ_f, Φ_s) sont les inconnues :

Approche Interface nette :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x)B_f(\Phi_f, \Phi_s)\nabla\Phi_f) = Q_f, \text{ sur } \Omega, \\ \phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot ((1 + \alpha)K(x)B_s(\Phi_f, \Phi_s)\nabla\Phi_s) = Q_s, \text{ sur } \Omega, \\ B_f(\Phi_f, \Phi_s) = h_1 - h, \\ B_s(\Phi_f, \Phi_s) = h - h_2, \\ h = (1 + \delta)\Phi_s - \delta\Phi_f. \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Approche Interface diffuse :

$$\begin{cases} -\phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (KB_f(\Phi_f, \Phi_s)\nabla\Phi_f) - \delta_h \nabla \cdot (\phi \nabla h) = Q_f, \text{ sur } \Omega, \\ \phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot ((1 + \alpha)KB_s(\Phi_f, \Phi_s)\nabla\Phi_s) = Q_s, \text{ sur } \Omega, \\ B_f(\Phi_f, \Phi_s) = h_1 - h, \\ B_s(\Phi_f, \Phi_s) = h - h_2, \\ h = (1 + \delta)\Phi_s - \delta\Phi_f. \end{cases}$$

Ces systèmes peuvent être ré-écrits sous une forme compacte si nous prenons la charge hydraulique de l'eau douce et la profondeur de l'interface comme inconnues. En effet, on a :

$$\Phi_s = \frac{\rho_f}{\rho_s}\Phi_f + \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_s}h = \frac{1}{1 + \alpha}\Phi_f + \frac{\alpha}{1 + \alpha}h.$$

Donc,

$$-\phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (K(h_1 - h)\nabla\Phi_f) - \delta_h \nabla \cdot (\phi \nabla h) = Q_f,$$

et

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha K(h - h_2)\nabla h) + \nabla \cdot (K(h_1 - h)\nabla\Phi_f) - \nabla \cdot (K(h_1 - h_2)\nabla\Phi_f) = Q_s.$$

En sommant ces deux équations on obtient :

$$-\nabla \cdot (K(h_1 - h_2)\nabla\Phi_f) - \nabla \cdot (\alpha K(h - h_2)\nabla h) - \delta_h \nabla \cdot (\phi \nabla h) = Q_f + Q_s .$$

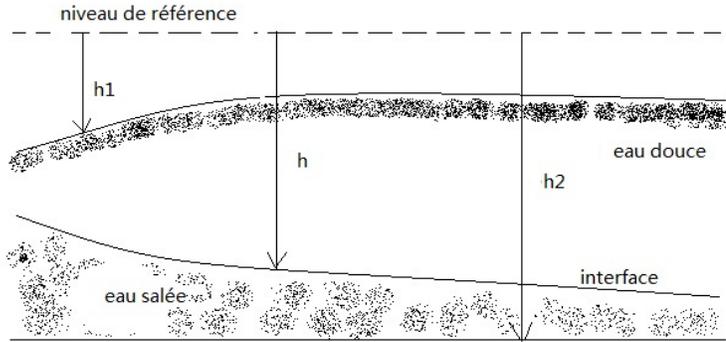


FIG.1.2 - Domaine d'écoulement de l'eau douce et de l'eau salée

Finalemnt, dans le cas d'un aquifère confiné, le modèle consiste en un système fortement couplé d'une équation elliptique et d'une équation parabolique toutes deux quasi-linéaires décrivant l'évolution de l'élévation de l'interface h entre la zone d'eau douce et celle d'eau salée et de la charge hydraulique de l'eau douce.

Cas Interface nette :

$$(1) \begin{cases} \phi \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (K(h_2 - h)\nabla\Phi_f - \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h)\nabla h) = -Q_s \\ -\nabla \cdot (K(h_2 - h_1)\nabla\Phi_f) + \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h)\nabla h) = Q_f + Q_s \end{cases}$$

Nous soulignons que l'équation parabolique peut dégénérer lorsque $h = h_2$ (ce qui correspond à la situation, où il n'y a pas d'eau salée dans l'aquifère).

Cas Interface diffuse :

Dans ce cas, le système consiste en un système fortement couplé d'une équation elliptique et d'une équation parabolique quasi-linéaire. Mais, dû à la présence de l'interface diffuse d'épaisseur δ_h , l'équation parabolique n'est plus dégénérée.

$$(2) \begin{cases} \phi \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (K(h_2 - h)\nabla\Phi_f - \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h)\nabla h) - \delta_h \nabla \cdot (\phi \nabla h) = -Q_s \\ -\nabla \cdot (K(h_2 - h_1)\nabla\Phi_f) + \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h)\nabla h) - \delta_h \nabla \cdot (\phi \nabla h) = Q_f + Q_s \end{cases}$$

Les surfaces supérieure et inférieure de l'aquifère sont imperméables, i.e. h_1 et h_2 sont des fonctions indépendantes du temps, mais elles peuvent dépendre de x et y .

1.6.2 Cas d'un aquifère libre

Les inconnues naturelles correspondant au cas de la nappe libre, sont les hauteurs des deux interfaces h_1 et h , précisément, ains que nous l'avons détaillé à la section 1.4.1, les bonnes inconnues sont $h_1^- = \chi_0(-h_1)h_1$ et $h^- = \chi_0(-h)h$. Nous introduisons le paramètre ζ tel que $\zeta = 1$ corresponde à l'approche avec interfaces diffuses et $\zeta = 0$ corresponde à l'approche avec interfaces nettes. En inversant le sens positif de l'axe vertical et en maintenant le coefficient d'emmagasinement, notre modèle devient :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \phi\chi_0(h)\partial_t h - \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h)\chi_0(h_1)\nabla h) - \nabla \cdot (\zeta\delta\phi\chi_0(h)\nabla h) \\ - \nabla \cdot (K\chi_0(h_1)(h_2 - h)\nabla h_1) = -Q_s(h_2 - h)^+, \\ \chi_0(h_1)(S_f(h - h_1) + \phi)\partial_t h_1 \\ - \nabla \cdot (K\chi_0(h_1)(h - h_1) + (h_2 - h)\nabla h_1) - \nabla \cdot (\zeta\delta\phi\chi_0(h_1)\nabla h_1) \\ - \nabla \cdot (K\alpha(h_2 - h)\chi_0(h_1)\chi_0(h)\nabla h) = -Q_f(h - h_1)^+ - Q_s(h_2 - h)^+. \end{array} \right.$$

Dans le cas où on néglige le coefficient d'emménagement dans le domaine d'eau douce i.e la zone d'eau salée est confinée ce qui correspond à $S_f \frac{\partial\phi_f}{\partial t} \ll \phi \frac{\partial h}{\partial t}$, on a le système suivant:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \phi\chi_0(h)\partial_t h - \nabla \cdot (\alpha K_f(h_2 - h)\chi_0(h_1)\nabla h) - \nabla \cdot (\zeta\delta\phi\chi_0(h)\nabla h) \\ - \nabla \cdot (K\chi_0(h_1)(h_2 - h)\nabla h_1) = -Q_s(h_2 - h)^+, \\ \chi_0(h_1)\phi\partial_t h_1 - \nabla \cdot (K\chi_0(h_1)((h - h_1) + (h_2 - h))\nabla h_1) \\ - \nabla \cdot (\zeta\delta\phi\chi_0(h_1)\nabla h_1) - \nabla \cdot (K\alpha(h_2 - h)\chi_0(h_1)\chi_0(h)\nabla h) \\ = -Q_f(h - h_1)^+ - Q_s(h_2 - h)^+. \end{array} \right.$$

Dans les deux systèmes précédents, la première équation modélise la conservation de masse totale d'eau, tandis que la seconde modélise la conservation de la masse d'eau douce. Il s'agit d'un modèle 2D, la troisième dimension est préservée au cours du processus d'up-scaling via les termes de surface h et h_1 .

1.6.3 Conditions aux limites - Conditions initiales

Les problèmes (1) - (2) et (3) - (4) sont complétés par les conditions aux bords et conditions initiales suivantes:

$$\begin{aligned} h &= h_D \text{ et } h_1 = h_{1,D} \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \\ h(0, x) &= h_0(x), \text{ et } h_1(0, x) = h_{1,0}(x) \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

Les fonctions $h_D, h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ telles que leurs dérivées en temps $\partial_t h_D, \partial_t h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T, H^1(\Omega)')$ où $[H^1(\Omega)]'$ est le dual de $H^1(\Omega)$.

Les fonctions $h_0, h_{1,0} \in H^1(\Omega)$ satisfont les conditions de compatibilité;

$$h_{0|\Gamma} = h_D(0, x), \quad h_{1,0|\Gamma} = h_{1,D}(0, x).$$

Nous supposons que les conditions aux bords et initiales satisfont aussi des conditions physiquement réalistes sur la hiérarchie des interfaces:

$$h_{1,D} \leq h_D \leq h_2 \text{ et } h_{1,0} \leq h_0 \leq h_2 \text{ p.p dans } \Omega.$$

Par ailleurs, on suppose que les termes sources $Q_f = \tilde{Q}_f(h - h_1)^+$, $Q_s = \tilde{Q}_s(h_2 - h)^+$ sont des fonctions de $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ telles que $\tilde{Q}_f \leq 0$ et $\tilde{Q}_s \leq 0$, ces cernières conditions sur les signes des termes sources pourront être affaiblies selon les cas.

On suppose aussi que la conductivité hydraulique K vérifie une condition d'ellipticité et est bornée et définie positive uniformément sur le domaine Ω .

1.6.4 Présence d'une rivière

On note Γ_r la partie de la frontière correspondant à la rivière.

Supposons la présence d'une rivière au dessus de l'aquifère, à l'équilibre hydrodynamique, on a:

$$P_r|_{z=h_{max}} = P_a + \rho_f g(0 - h_{max})$$

$A(x, y)$ fixé, c'est donc $P_r|_{z=h_{max}} = P_a - \rho_f g h_{max}(x, y)$ qui va remplacer la pression P_a .

La condition au bord classique à l'interface d'un aquifère et d'un réservoir d'eau est la continuité de Φ_f et cela donne:

$$\begin{aligned} \Phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \Phi_{riviere} &\iff \Phi_r|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_r|_{z=h_{max}}}{\rho_f g} + h_{max} \\ &\iff \Phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_a - \rho_f g h_{max}(x, y)}{\rho_f g} + h_{max} \\ &\iff \Phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_a}{\rho_f g} - h_{max} + h_{max} \\ &\iff \Phi_f|_{z=h_{max} \cap \Gamma_r} = \frac{P_a}{\rho_f g}. \end{aligned}$$

Chapter 2

Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère confiné

2.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons donner la preuve de l'existence globale en temps d'une solution du problème correspondant au cas de l'aquifère confiné dans le cas de l'approche 'interface diffuse'.

Concernant le cas 'interface nette', nous avons en partie, suivi les grandes lignes de la preuve donnée dans [106] mais en modifiant la définition de l'application introduite pour l'application du Théorème du point fixe de Schauder pour prouver l'existence d'une solution du problème tronqué. Nous avons, par ailleurs, détaillé la preuve du principe du maximum et le passage à la limite final.

Finalement, nous montrons que, malgré la non-dégénérescence des équations dans le cas 'interface diffuse', nous devons toujours supposer l'existence d'une zone d'eau douce d'épaisseur strictement positive dans le réservoir d'eau pour établir une majoration uniforme de la norme $L^2(\Omega_T)$ du gradient de la charge hydraulique.

2.2 Résultats préliminaires et notations

Dans cette partie, on introduit quelques notations et résultats.

On rappelle que Ω est le domaine d'étude et on pose $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$.

On suppose $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev :

$$H^1(\Omega) := \{\phi \in L^2(\Omega); \nabla\phi \in L^2(\Omega)\}$$

muni de norme

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit $H_0^1(\Omega) := \{\phi \in H^1(\Omega); \phi = 0 \text{ dans } \Gamma\}$

Dans la suite de l'espace $H_0^1(\Omega)$ sera muni de la norme Hilbertienne

$$\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, grâce à la deuxième inégalité de Poincaré.

Pour $u \in H^2(\Omega)$, on pose

$$A(u) := -\Delta u \in L^2(\Omega). \quad (2.1)$$

Soit une fonction $\omega \in L^2(\Omega)$ donnée, la fonction ϕ associée à ω est définie par

$$-\Delta \phi = \omega \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\phi = 0 \quad \text{dans } \Gamma_D = \Gamma \times (0, T). \quad (2.3)$$

Il est facile de voir que $\phi \in H_0^2(\Omega)$ et $\|\phi\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C \|\omega\|_{L^2(\Omega)}$ où C est une constante positive. En d'autres termes A^{-1} est un opérateur continu $L^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$ et $\phi = A^{-1}(\omega)$.

$H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$, muni de la norme dual :

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, \psi \rangle}{\left(\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dy \right)^{1/2}},$$

où $\langle f, \psi \rangle$ désigne l'appariement de la dualité. Si ω est simplement supposé être dans $H^{-1}(\Omega)$, la solution ϕ satisfait $\int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi dy = \langle \omega, \psi \rangle$ pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, donc (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dy \right)^{1/2} = \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Alors si $\omega \in L^2(\Omega)$, $\|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = 2\epsilon(\omega)$, où l'énergie fonctionnelle $\epsilon(\omega)$ est donnée par :

$$\epsilon(\omega) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi(y) \omega(y) dy.$$

La symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité entre V et V' .
On a les inclusions compactes et denses suivantes :

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Pour tout $T > 0$, soit $W(0, T)$ l'espace tel que :

$$W(0, T) := \left\{ \omega \in L^2(0, T, V), \frac{d\omega}{dt} \in L^2(0, T, V') \right\},$$

muni de la norme hilbertienne :

$$\|\omega\|_{W(0, T)} = \left(\|\omega\|_{L^2(0, T, V)}^2 + \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|_{L^2(0, T, V')}^2 \right)^{1/2}.$$

Donc, on a l'injection continue :

$$W(0, T) \subset C([0, T], [V, V']_{1/2}) = C([0, T], H)$$

et on déduit du lemme de Aubin que l'injection suivante:

$W(0, T) \subset L^2(0, T, H)$ est compacte.

Nous considérons que la nappe captive est délimitée par deux couches horizontales et imperméables. La surface inférieure correspond à $z = 0$ et la surface supérieure à $z = h_2$, h_2 est donc aussi l'épaisseur de la nappe supposée telle que $h_2 > \delta > 0$. On introduit la fonction $T_s(h)$ (qui représente l'épaisseur de la zone d'eau salée) :

$$T_s(h) = h_2 - h \quad \text{si} \quad \delta \leq h \leq h_2$$

On prolonge T_s continuellement par des constantes en dehors de $[\delta, h_2]$. Le prolongement de T_s pour $h \leq \delta$ nous permet d'assurer une zone d'eau douce d'épaisseur $\geq \delta$ dans l'aquifère.

On pose $\tilde{K} = \alpha K$ et $f = \frac{\Phi_f}{\alpha}$ et comme précédemment h désigne la profondeur de l'interface et donc f 'la charge de hydraulique' d'eau douce alors (h, f) satisfont le système suivant:

Cas de l'Interface nette:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (T_s(h) \nabla h) + \nabla \cdot (T_s(h) \nabla f) = -Q_s, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ -\nabla \cdot (h_2 \nabla f) + \nabla \cdot (T_s(h) \nabla h) = Q_s + Q_f, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ h = h_D, f = f_D, & \text{sur } \Gamma \times [0, T], \\ h(x, 0) = h_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Cas de l'Interface diffuse:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (T_s(h)\nabla h) + \nabla \cdot (T_s(h)\nabla f) - \delta_h \nabla \cdot (\nabla h) = -Q_s, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ -\nabla \cdot (h_2 \nabla f) + \nabla \cdot (T_s(h)\nabla h) = Q_s + Q_f, & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ h = h_D, f = f_D, & \text{sur } \Gamma \times [0, T], \\ h(x, 0) = h_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où les fonctions d'approvisionnement Q_s et Q_f représentent les termes sources extérieures correspondant au pompage ou à l'alimentation en eau douce ou en eau salée dans l'aquifère.

Nous soulignons que nous avons pris pour K le tenseur identité uniquement pour simplifier l'écriture des systèmes.

2.3 Existence globale dans le cas d'une interface nette

Le but de cette section est le résultat suivant (cf.[106]) :

Théorème 3 : Soit $h_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\delta \leq h_0(y) \leq h_2$ p.p. $y \in \Omega$, $h_D \in W(0, T)$ telle que $\frac{dh_D}{dt} \in L^2(0, T, (H^1(\Omega))')$ et $\delta \leq h_D(t, y) \leq h_2$ p.p. $(t, y) \in [0, T] \times \Omega$, $f_D \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ et $Q_s, Q_f \in L^2(0, T, H)$.

Alors ,

pour tout $T > 0$, il existe une solution $h \in W(0, T) + h_D$, $f \in L^2(0, T, V) + f_D$ satisfaisant les équations variationnelles suivantes :

$$\int_0^T \langle \frac{dh}{dt}, v \rangle_{V', V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} (T_s(h)\nabla(h-f)) \cdot \nabla v + Q_s v dydt = 0, \quad (2.4)$$

$\forall v \in L^2(0, T, V)$.

$$\int_0^T \int_{\Omega} (h_2 \nabla f - T_s(h)\nabla h) \cdot \nabla \omega - (Q_s + Q_f)\omega dydt = 0, \quad (2.5)$$

$\forall \omega \in L^2(0, T, V)$.

telle que

$$h(0, \cdot) = h_0. \quad (2.6)$$

$$\delta \leq h(t, y) \leq h_2, \text{ pour } p.p. (t, y) \in [0, T] \times \Omega. \quad (2.7)$$

Remarques :

1) Si on pose $u = h - h_D$ et $v = f - f_D$ dans (2.4)-(2.5), alors $(u, v) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ et ils satisfont le système couplé suivant pour tout $\omega \in L^2(0, T, V)$:

$$\int_0^T \left[\left\langle \frac{d(u+h_D)}{dt}, \omega \right\rangle_{V', V} + \int_{\Omega} \{T_s(u+h_D)\{\nabla(u+h_D) - \nabla(v+f_D)\} \cdot \nabla \omega + Q_s \omega\} dy \right] dt = 0. \quad (2.8)$$

$$\int_0^T \left[\int_{\Omega} \{h_2 \nabla(v+f_D) - T_s(u+h_D) \nabla(u+h_D)\} \cdot \nabla \omega - (Q_s + Q_f) \omega dy \right] dt = 0. \quad (2.9)$$

avec

$$u(0, \cdot) = u_0 := h_0 - h_D,$$

2) Puisque $u \in W(0, T) \subset C([0, T], L^2(\Omega))$ alors (2.6) a bien un sens. De plus,

$$u \in C([0, T], L^p(\Omega)), \forall p \in [2, +\infty),$$

et $\exists C > 0$, telle que :

$$\|(u(t) + h_D)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \forall t \in [0, T].$$

Preuve : Compte tenu des termes non linéaires et du couplage, nous sommes conduits à introduire des termes de troncature (cf. [116]). On note $x^+ := \max(x, 0)$ et soit M une constante que nous allons préciser plus tard, nous posons $h_M(x) = \min(1, M/x), x > 0$. Soient $(\epsilon_k)_{k \geq 0}$ une suite décroissante qui tend vers 0, nous remplaçons (2.4) - (2.6) par l'équation variationnelle suivante : $\forall \omega \in L^2(0, T, V)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\left\langle \frac{dh_k}{dt}, \omega \right\rangle_{V', V} + T_s(h_k) \{ \nabla h_k - h_M(\|\nabla f_k\|_{L^2(\Omega_T)}) \nabla f_k \} \cdot \nabla \omega dy \right] dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \epsilon_k \nabla h_k \cdot \nabla \omega + \int_0^T \int_{\Omega} Q_s \omega dy dt = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\int_0^T \left[\int_{\Omega} \left(\{h_2 \nabla(f_k) - T_s(h_k) \nabla(h_k)\} \nabla \omega - (Q_s + Q_f) \omega \right) dy \right] dt = 0. \quad (2.11)$$

En utilisant l'opérateur A précédemment défini par (2.1), nous pouvons écrire

$$v_k = A^{-1} \left\{ \frac{-1}{h_2} \operatorname{div}(-h_2 \nabla f_D + T_s(h_k) \nabla h_k) - Q_s - Q_f \right\} := A^{-1}(H(u_k)).$$

Nous rappelons que $h_k = u_k + h_D$ et $f_k = v_k + f_D$.

La preuve est décrite comme suit:

Dans la première étape, en utilisant le théorème de Schauder, nous prouvons que pour tout $T > 0$ et tout $k \in N$, (2.10) a une solution $u_k \in W(0, T)$ telle que $u_k(0, \cdot) = u_0$. Ensuite, nous montrons que, pour chaque k , $\delta \leq h_k(t, x) \leq h_2$ p.p. $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Puis nous montrons que la suite $\{f_k\}_k$ est bornée dans $L^2(0, T, H^1)$. Enfin, nous montrons que tout point limite faible u dans $W(0, T)$ de la suite $(u_k)_k$ satisfait (2.8)-(2.9).

Etape 1.

Soit $k \in N$ fixé. Pour tout $u \in V$, on note

$$d_k(u) := \epsilon_k \nabla h_D + T_s(u + h_D) \{ \nabla h_D - h_M (\| \nabla(v + f_D) \|_{L^2(\Omega_T)^2}) \nabla(v + f_D) \}$$

où

$$v = A^{-1} \left\{ \frac{-1}{h_2} \nabla(-h_2 \nabla f_D + T_s(u_k + h_D) \nabla(u_k + h_D)) - Q_s - Q_f \right\} := A^{-1}(H(u_k)) \quad (2.12)$$

Alors pour tout $u = u(t) \in L^2(0, T, V)$

$$\|d_k(u)\|_{L^2(0, T, H \times H)} \leq h_2 (M + (1 + \epsilon_k/h_2) \|\nabla h_D\|_{L^2(0, T, H)}) := C_1 \quad (2.13)$$

D'autre part, pour toute $g \in H, u \in V$,

$$\int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(g + h_D)) \nabla u \cdot \nabla u \, dy \geq \epsilon_k \|u\|_V^2.$$

Ainsi pour tout $g \in L^2(0, T, V)$, il existe une unique solution $u =: \mathcal{F}(g) \in W(0, T)$ du problème parabolique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \operatorname{div}(\epsilon_k + T_s(g + h_D) \nabla u) = \operatorname{div}(d_k(g)) - Q_s - \frac{dh_D}{dt} (\in L^2(0, T, V')), \\ u(t=0) = u_0. \end{cases}$$

En d'autres termes, pour tout $\bar{h} = \bar{u} + h_D$, $\bar{u} \in L^2(0, T, V)$, nous définissons un unique $h \in h_D + L^2(0, T, V)$, ($h = \mathcal{F}_1(\bar{u}) + h_D$) tel que pour tout $\omega \in L^2(0, T, V)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{dh}{dt}, \omega \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \{ (\epsilon_k + T_s(\bar{u} + h_D)) \nabla h \cdot \nabla \omega - \\ & h_M (\| \nabla(v + f_D) \|_{H \times H}) \nabla(v + f_D) \cdot \nabla \omega \, dy dt = - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s \omega \, dy dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec

$$v = A^{-1} \left\{ \frac{-1}{h_2} \nabla \cdot (-h_2 \nabla f_D + T_s(\bar{u} + h_D) \nabla(\bar{u} + h_D)) - Q_s - Q_f \right\}, \quad (2.15)$$

et

$$h(t=0, x) = h_0(x). \quad (2.16)$$

Plus précisément, nous avons défini l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(0, T; H^1(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ \bar{h} &\longmapsto \mathcal{F}(\bar{h}) = (h, f) := (\mathcal{F}_1(\bar{h}), \mathcal{F}_2(\bar{h})), \end{aligned}$$

où le couple (h, f) est la solution du problème :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t h, w \rangle_{V, V'} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \epsilon_k \nabla h \cdot \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}) \nabla h \cdot \nabla \omega dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}) h_M(\|\nabla f\|_{L^2}) \nabla f \cdot \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} Q_s \omega dx dt = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\forall \omega \in V = H_0^1(\Omega),$$

avec f l'unique fonction de $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telle que $f = f_D$ sur $\partial\Omega$ et

$$\int_0^T \int_{\Omega} \{h_2 \nabla(f) - T_s(\bar{h}) \nabla(\bar{h})\} \nabla \omega - (Q_s + Q_f) \omega dy dt = 0. \quad (2.18)$$

Clairement, tout point fixe de \mathcal{F} est solution de (2.10). Pour appliquer le théorème de point fixe de Schauder, on doit montrer que \mathcal{F} envoie un sous-ensemble convexe fermé borné non vide, W_k , de $W(0, T)$ dans lui-même et que \mathcal{F} est continue sur $W(0, T)$.

Montrons que \mathcal{F} est continue :

Déjà, clairement \mathcal{F}_2 est continue dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\|\nabla f_n\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \bar{C} + \|\nabla \bar{h}^n\|_{L^2(\Omega_T)}$, où C ne dépend que des données.

Montrons à présent la continuité de \mathcal{F}_1 :

Soit la suite $(\bar{h}^n)_n$ de $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et (\bar{h}) de $L^2(0, T; H^1)$ telle que

$$\bar{h}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{h} \text{ dans } L^2(0, T; H^1).$$

On pose $h_n = \mathcal{F}_1(\bar{h}^n)$ et $h = \mathcal{F}_1(\bar{h})$, montrons que $h_n \rightarrow h$ dans $W(0, T)$. Pour tout $n \in N$, si on pose $w = h_n - h_D$ dans (2.17), on obtient:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle \partial_t(h_n - h_D), (h_n - h_D) \rangle_{V',V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \cdot \nabla h_n dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_D \cdot \nabla h_n dxdt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}) h_M(\|\nabla f_n\|_{L^2}) \nabla f_n \cdot \nabla h_n dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}) h_M(\|\nabla f_n\|_{L^2}) \nabla f_n \cdot \nabla h_D dxdt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} Q_s(h_n - h_D) dxdt \\
&- \int_0^T \langle \partial_t h_D, (h_n - h_D) \rangle_{V',V} dt
\end{aligned} \tag{2.19}$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega} [h_2 \nabla \bar{h}^n \cdot \nabla \omega - h_2 T_s(f_n) \nabla \bar{h}^n \cdot \nabla \omega - (Q_s + Q_f) \omega] dydt = 0$$

En utilisant le résultat F.Mignot, on a:

$$\int_0^T \langle \partial_t(h_n - h_D), (h_n - h_D) \rangle_{V',V} dt = \frac{1}{2} \|h_n - h_D\|_H^2 - \frac{1}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2 \tag{2.20}$$

Par ailleurs

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \cdot \nabla h_n dxdt \geq \epsilon_k \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2. \tag{2.21}$$

On écrit aussi que:

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_D \cdot \nabla h_n dxdt \right| \leq (\epsilon_k + h_2) \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)},$$

et on applique l'égalité de Young : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_D \cdot \nabla h_n dxdt \right| \leq \frac{\epsilon}{4} \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 + \frac{(\epsilon_k + h_2)^2}{\epsilon} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^2. \tag{2.22}$$

Pour le terme:

$$\left| - \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}) h_M(\|\nabla f_n\|_{L^2}) \nabla f_n \cdot \nabla h_n dxdt \right| \leq M h_2 \sqrt{T} \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)},$$

nous avons , en appliquant l'inégalité de Young:

$$\left| - \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}) h_M(\|\nabla f_n\|_{L^2(\Omega_T)}) \nabla f_n \cdot \nabla h_n dxdt \right| \leq \frac{M^2 T}{\epsilon} h_2 + \frac{\epsilon}{4} \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2. \tag{2.23}$$

De plus

$$| - \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}) h_M (\|\nabla f_n\|_{L^2(\Omega_T)}) \nabla f_n \cdot \nabla h_D dx dt | \leq M h_2 \sqrt{T} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},$$

et enfin :

$$| - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s(h_n - h_D) dx dt | \leq \|Q_s\|_{L^2(0,T,H)} \|h_n - h_D\|_{L^2(0,T;H)},$$

en appliquant l'inégalité de Young, on obtient :

$$| - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s(h_n - h_D) dx dt | \leq \frac{\|Q_s\|_{L^2(0,T,H)}^2}{2} + \frac{1}{2} \|h_n - h_D\|_{L^2(0,T;H)}^2, \quad (2.24)$$

et

$$\begin{aligned} & | - \int_0^T \langle \partial_t h_D, (h_n - h_D) \rangle_{V',V} dt | \leq \\ & \frac{1}{\epsilon} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T,(H^1(\Omega))')}^2 + \frac{1}{2} \|h_D\|_{L^2(0,T,H)}^2 + \frac{\epsilon}{4} \|h_n\|_{L^2(0,T,H^1)}^2. \end{aligned}$$

En faisant la somme des précédentes estimations, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|h_n - h_D\|_H^2 + (\epsilon_k - \frac{3\epsilon}{4}) \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2 + (\frac{\|Q_s\|_{L^2(0,T,H)}^2}{2} + \frac{M^2 T}{\epsilon}) + (\frac{(\epsilon_k + h_2)^2}{\epsilon} + \frac{1}{2}) \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \\ & + \frac{1}{\epsilon} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T,(H^1(\Omega))')}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|h_n - h_D\|_H^2 dt + M \sqrt{T} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)} h_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ainsi si ϵ est choisi tel que : $(\epsilon_k - \frac{3\epsilon}{4}) > 0$, la relation (2.25) et le lemme de Gronwall, nous permettent de conclure qu'il existe deux réels $A_M = A_M(h_0, h_D, h_2, Q_s, M, T)$ et $B_M = B_M(h_0, h_D, h_2, Q_s, M, T)$ dépendant seulement des données du problème telles que :

$$\|h_n\|_{L^\infty(0,T,H)} \leq A_M, \quad \|h_n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq B_M$$

Donc la suite $(h_n)_n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,H)$. On pose $C_M = \text{Max}(A_M, B_M)$.

Nous allons maintenant montrer que $(\frac{\partial h_n}{\partial t})_n$ est bornée dans $L^2(0,T;V')$.

La norme dans cet espace est définie comme suit:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial h_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;V')} &= \sup_{\|\omega\|_{L^2(0,T;V)} \leq 1} \left| \int_0^T \left\langle \frac{\partial h_n}{\partial t}, \omega \right\rangle_{V',V} dt \right| \\
&= \sup_{\|\omega\|_{L^2(0,T;V)} \leq 1} \left| - \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \cdot \nabla \omega dx dt \right. \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}^n) h_M (\|f_n\|_{L^2(\Omega_T)}) \nabla f_n \cdot \nabla \omega dx dt \\
&\quad \left. - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s \omega dx dt \right|.
\end{aligned}$$

Nous allons estimer séparément les trois termes de cette expression:

$$\left| - \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \cdot \nabla \omega dx dt \right| \leq (\epsilon_k + h_2) \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)} \|\omega\|_{L^2(0,T;V)},$$

comme la suite $(h_n)_n$ est bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, alors

$$\left| - \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \nabla \omega dx dt \right| \leq (\epsilon_k + h_2) C_M \|\omega\|_{L^2(0,T;V)},$$

De plus,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} T_s(\bar{h}^n) h_M (\|f_n\|_{L^2(\Omega_T)}) \nabla f_n \cdot \nabla \omega dx dt \right| \leq M h_2 \sqrt{T} \|\omega\|_{L^2(0,T;V)},$$

et enfin en utilisant l'inégalité de Poincaré $\|\omega\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_p \|\omega\|_{L^2(0,T;V)}$:

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} Q_s \omega dx dt \right| \leq \|Q_s\| h_2 \|\omega\|_{L^2(0,T;V)}.$$

En faisant la somme de ces trois équations, on obtient une borne de la norme dans $L^2(0,T;V')$ de $\frac{\partial h_n}{\partial t}$:

$$\left\| \frac{\partial h_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;V')} \leq ((\epsilon_k + h_2) C_M + M h_2 \sqrt{T} + \|Q_s\|) \|\omega\|_{L^2(0,T;V)}.$$

avec $\|\omega\|_{L^2(0,T;V)} \leq 1$, donc

$$\left\| \frac{\partial h_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1)} \leq ((\epsilon_k + h_2) C_M + M h_2 \sqrt{T} + C_p \|Q_s\|) := D_M.$$

Donc $(\frac{\partial h_n}{\partial t})_n$ est bornée dans $L^2(0,T;V')$.

Nous venons de prouver que $(h_n)_{n \in \mathcal{N}}$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T,H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T,(H^1)')$. En utilisant le lemme d'Aubin, on extrait une sous-suite, toujours notée $(h_n)_{n \in \mathcal{N}}$ convergent fortement dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$

et faiblement dans l'espace $L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, (H^1)')$ vers une limite notée l . En utilisant en particulier la convergence forte dans $L^2(\Omega_T)$ et donc la convergence presque partout dans Ω_T , on vérifie que l est une solution de (2.17). La solution de (2.17) étant unique, nous obtenons que $l = h$. Il reste à prouver que $(h_n)_{n \in \mathcal{N}}$ converge fortement vers h dans $L^2(0, T, H^1(\Omega))$.

En soustrayant la formulation faible (2.17) à son homologue dépendant de n et en prenant pour fonction test $\omega = h_n - h$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t(h_n - h), h_n - h \rangle_{V, V'} + \int_{\Omega_T} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla(h_n - h) \cdot \nabla(h_n - h) - \\ \int_{\Omega_T} (T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) \nabla(h_n - h) \cdot \nabla h + \int_{\Omega_T} (T_s(\bar{h}^n) h_M(\|\nabla f^n\|_{L^2}) \nabla f^n \\ - T_s(\bar{h}) h_M(\|\nabla f\|_{L^2}) \nabla f) \cdot \nabla(h_n - h) + \int_{\Omega_T} Q_s(h_n - h) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

En utilisant que $\bar{h}^n \rightarrow \bar{h}$ dans $L^2(0, T, H^1)$ et les résultats de convergence précédents pour h_n , la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ dans (2.26) se réduit à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_T} (\epsilon_k + T_s(\bar{h}^n)) \nabla(h_n - h) \cdot \nabla(h_n - h) dxdt \right) = 0$$

Et nous déduisons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_T} \epsilon_k |t \nabla(h_n - h)|^2 dxdt + \int_{\Omega} T_s(\bar{h}^n) |t \nabla(h_n - h)|^2 dxdt \right) \leq 0.$$

D'où $\nabla h_n \rightarrow \nabla h$ fortement dans $L^2(0, T, H)$.

Donc la continuité de \mathcal{F}_1 pour la topologie forte de $L^2(0, T, H^1)$ est bien prouvée.

Conclusion :

\mathcal{F} est continue de $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))^2$, soit $A \in \mathbb{R}_+^*$ le nombre réel défini par

$$A = \max(C_M, D_M)$$

et

$$W_k = \{g \in W(0, T); g(0) = h(0), g|_{\tau} = h_D; \|g\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, V')} \leq A.\}$$

Nous avons montré que $\mathcal{F}(W_k) \subset W_k$. Il résulte du théorème de Schauder qu'il existe $h \in W_k$ telle que $\mathcal{F}(h) = h$. Ce point fixe de \mathcal{F} est une solution faible du problème (2.17)-(2.18).

Etape 2. Principe du maximum

Nous prétendons que pour chaque $k \geq 0$,

$$\text{pour p.p. } (t, y) \in (0, T) \times \Omega, \quad \delta \leq (u_k + h_D)(t, y) \leq h_2. \quad (2.27)$$

Fixons $k \geq 0$, et écrivons "u" pour u_k , "v" pour $A^{-1}(H(u_k))$, etc.

Soit $\eta > 0$, posons $u_\eta(t, y) := ((u + h_D)(t, y) - \eta - h_2)^+$.

Clairement $u_\eta \in L^2(0, T, V)$ et $\nabla u_\eta = \nabla(u + h_D)\chi_{u+h_D > \eta+h_2}$.

Soit $\tau \in (0, T]$ et posons $\omega(t, y) = u_\eta(t, y)\chi_{(0, \tau)}(t)$ dans (2.10), alors

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \left\langle \frac{dh}{dt}, u_\eta \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^\tau \int_\Omega (\epsilon_k + T_s(h)) |\nabla h|^2 dy dt \\ &= - \int_0^\tau \int_\Omega T_s(h) h_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \nabla f \cdot \nabla u_\eta dy dt - \int_0^\tau \int_\Omega Q_s u_\eta dy dt := I_1. \end{aligned}$$

Il résulte du lemme de Mignot appliqué à $f(\lambda) := (\lambda - \eta - h^2)^+$ que, pour chaque $\tau \in (0, T]$

$$\int_0^\tau \left\langle \frac{dh}{dt}, u_\eta \right\rangle_{V', V} dt = \frac{1}{2} \int_\Omega u_\eta^2(\tau) dy - 0. \quad \text{car } h_0(t, y) \leq h_2.$$

Puisque $T_s(h) = 0$ pour $h \geq h_2$ et $Q_s = 0$ si $h > h_2$, on a $I_1 = 0$.

Donc pour tout $\tau \in [0, T]$, $\int_\Omega u_\eta^2(\tau) dy \leq 0$, ainsi on a $h(\tau, y) \leq \eta + h_2$, p.p. $y \in \Omega$.

Faisons tendre $\eta \rightarrow 0^+$, on obtient $\forall \tau \in [0, T], (u + h_D)(\tau, y) \leq h_2$.

Prouvons que $h(\tau, y) \geq \delta$ p.p. $y \in \Omega, \forall \tau \in [0, T]$.

Soit $u_\eta(t, y) = (h - \delta)^-$, alors $u_\eta \in L^2(0, T, V)$ et $\nabla u_\eta = \nabla h \cdot \chi_{h < \delta}$.

Posons $\omega = u_\eta$ dans (2.10), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{dh}{dt}, u_\eta \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^T \int_\Omega \epsilon_k \chi_{h < \delta} \nabla h \cdot \nabla u_\eta + T_s(h) \chi_{h < \delta} \{ \nabla h \\ & \quad - h_M(\|\nabla f\|_{L^2}) \nabla f \} \cdot \nabla u_\eta dy dt + \int_0^T \int_\Omega Q_s u_\eta dy dt = 0. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Posons $\omega = \frac{h_2 - \delta}{h_2} u_\eta$ dans (2.11), alors

$$\int_0^T \left\{ \int_\Omega \{ h_2 \nabla f - T_s(h) \nabla(h) \} \nabla \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M(\|\nabla f\|) u_\eta - (Q_s + Q_f) \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M(\|\nabla f\|) u_\eta \right\} dy dt = 0. \quad (2.29)$$

Additionnons les deux équations (2.28) et (2.29), on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{du_\eta}{dt}, u_\eta \right\rangle_{V,V'} dt + \int_0^T \int_\Omega \chi_{h < \delta} (\epsilon_k + T_s(h)) |\nabla h|^2 - T_s(h) h_M (|\nabla f|) \nabla f \cdot \nabla u_\eta \\ & \quad + (h_2 - \delta) h_M (|\nabla f|) \nabla f \cdot \nabla u_\eta - T_s(h) \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M (|\nabla f|) \chi_{h < \delta} |\nabla h|^2 \\ & \quad + [Q_s (1 - \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M (|\nabla f|)) - Q_f \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M (|\nabla f|)] u_\eta dxdt = 0 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{du_\eta}{dt}, u_\eta \right\rangle_{V,V'} dt + \int_0^T \int_\Omega \chi_{h < \delta} (\epsilon_k + (h_s - \delta) (1 - \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M (|\nabla f|))) |\nabla h|^2 dxdt \\ & \quad + \int_0^T \int_\Omega [Q_s (1 - \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M (|\nabla f|)) - Q_f \frac{h_2 - \delta}{h_2} h_M (|\nabla f|)] u_\eta dxdt = 0. \end{aligned}$$

Puisque $Q_s = 0$ et $Q_f = 0$ pour $h < \delta$ on obtient :

$$0 \geq \int_0^T \left\langle \frac{du_\eta}{dt}, u_\eta \right\rangle_{V,V'} dt + \int_0^T \int_\Omega \chi_{h < \delta} (\epsilon_k + \frac{\delta}{h_2}) |\nabla h|^2 dxdt$$

(on a utilisé que $T_s(h) = h_2 - \delta$ si $h \leq \delta$),

or $\int_0^\tau \left\langle \frac{dh}{dt}, u_\eta \right\rangle_{V,V'} dt = \frac{1}{2} \int_\Omega u_\eta^2(\tau) dy - 0$, puisque $h_0(x) \geq \delta$.

Donc $\int_\Omega u_\eta^2(\tau, y) dy \leq 0$, c'est-à-dire, $\forall (t, y) \in (0, T] \times \Omega$, $\delta \leq h(t, y)$.

Conclusion :

$$\forall (t, x) \in (0, T] \times \Omega, \quad \delta \leq h(t, x) \leq h_2.$$

Etape 3. Elimination du terme de troncature

Nous prétendons maintenant qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall k \geq 0, \|f\|_{L^2(0,T,H^1)} \leq M, \text{ ce qui revient à dire que } \forall k \geq 0,$$

$$\|v_k\|_{L^2(0,T,V)} \leq M.$$

On fixe $k \geq 0$, $t \in (0, T]$ et on écrit u (resp. v) au lieu de u_k (resp. v_k).

En posant u (resp. v) dans (2.10)-(2.13), on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\langle \frac{dh}{dt}, u \right\rangle dt + \int_0^t \int_{\Omega} \{(\epsilon_k + T_s(h))|\nabla u|^2 - h_M(\|\nabla f\|_{H \times H})T_s(h)\nabla v \nabla u\} dy dt \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \{-\epsilon_k \nabla h_D \cdot \nabla u + T_s(h)h_M(\|\nabla f\|)\nabla f_D \cdot \nabla u\} - Q_s u dy dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} \{h_2 |\nabla f|^2 - T_s(h)\nabla h\} \cdot \nabla v dy dt = \int_0^t \int_{\Omega} (Q_s + Q_f)v dy dt. \quad (2.31)$$

Puis en additionnant (2.30) et (2.31), nous déduisons du lemme de Mignot que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2(t, y) - u_0^2(y)) dy + \int_0^t \int_{\Omega} \{\epsilon_k |\nabla u|^2 + T_s(h)|\nabla(u-v)|^2 \\ & + h|\nabla v|^2 + T_s(h)(1 - h_M(\|\nabla f\|_{H \times H}))|\nabla v|^2\} dy dt. \\ &= - \int_0^t \int_{\Omega} \{T_s(h)(1 - h_M(\|\nabla f\|_{H \times H}))\nabla(u-v) \cdot \nabla v \\ & + \epsilon_k \nabla h_D \cdot \nabla u - h \nabla f_D \cdot \nabla v - T_s(h)\nabla(f_D - h_D) \cdot \nabla(u-v) \\ & - T_s(h)(1 - h_M(\|\nabla f\|))[\nabla f_D \cdot (\nabla u - v) + \nabla f_D \cdot \nabla v] \\ & + Q_s u - (Q_s + Q_f)f\} dy dt - \int_0^t \left\langle \frac{dh_D}{dt}, u \right\rangle dt \end{aligned}$$

$$:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8. \quad (2.32)$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (1 - h_M(\|\nabla f\|_{H \times H}))^2 T_s(h) |\nabla v|^2 dy dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} T_s(h) |\nabla(u-v)|^2 dy dt \\ |I_2| &\leq \frac{\epsilon_k}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy dt + \frac{\epsilon_k}{2} \|\nabla h_D\|_{L^2(0, T, H)}^2 \\ |I_3| &\leq \frac{\delta}{4} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dy dt + \frac{4}{\delta} h_2^2 \|\nabla f_D\|_{L^2(0, T, H)}^2 \\ |I_4| &\leq 8h_2(\|\nabla h_D\|_{L^2(0, T, H)}^2 + \|\nabla f_D\|_{L^2(0, T, H)}^2) + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\Omega} T_s(h) |\nabla(u-v)|^2 dy dt \\ |I_5| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \frac{T_s(h)}{8} |\nabla(u-v)|^2 + 2 \int_0^T \int_{\Omega} T_s(h)(1 - h_M(\|\nabla f\|))^2 |\nabla f_D|^2 \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} T_s(h)(1 - h_M(\|\nabla f\|)) |\nabla v|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} T_s(h)(1 - h_M(\|\nabla f\|)) |\nabla f_D|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dy dt + \frac{1}{2} \|Q_s\|_{L^2(0,T,H)}^2 \\
|I_7| &\leq \frac{\delta}{4} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dy dt + \frac{8C(\Omega)^2}{\delta} (\|Q_s\|_{L^2(0,T,H)}^2 + \|Q_f\|_{L^2(0,T,H)}^2) \\
|I_8| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dy dt + \frac{1}{2} \left\| \frac{dh_D}{dt} \right\|_{L^2(0,T,V')}^2
\end{aligned}$$

En rassemblant toutes les précédentes estimations dans (2.32), nous pouvons conclure

$$\forall t \in (0, T],$$

$$\int_{\Omega} u(t, y)^2 dy \leq \int_0^t \int_{\Omega} u(s, y) dy ds + C(h_D, f_D, h_0, h_2, \partial_t h_D, Q_s, Q_f, \delta) := C_2 .$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} u(t, y)^2 dy \leq C_2(1 + te^t) \leq C_2(1 + Te^T),$$

en particulier, nous avons:

$$\int_0^T \int_{\Omega} u^2(t, y) dy dt \leq C_3 := C_2 T(1 + Te^T),$$

$$\text{et alors : } \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dy dt \leq M := \frac{2}{\delta}(C_2 + C_3).$$

En outre, nous avons également prouvé que :

$$\int_0^T \int_{\Omega} T_s(u_k + h_D) |\nabla(u_k - v_k)|^2 dy dt \leq 4 \times (C_2 + C_3),$$

donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} T_s(u_k + h_D) |\nabla u_k|^2 dy dt \leq C(C_2, C_3, M) \quad (2.33)$$

et

$$\epsilon_k \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dy dt \leq 2 \times (C_2 + C_3) \quad (2.34)$$

Etape 4. Passage à la limite

Nous allons maintenant passer à la limite lorsque $\epsilon_k \rightarrow 0$. Nous introduisons

$$\text{la fonction } \phi(x) = \int_0^x (h_2 - s)^{1/2} ds (= -\frac{2}{3}(h_2 - x)^{3/2} + \frac{2}{3}h_2^{3/2})$$

pour absorber la dégénérescence de l'équations parabolique (2.4). Donc l'inégalité (2.33) signifie que $\nabla \phi(h_k)$ est bornée dans $L^2(0, T, H)$.

Par ailleurs, ϕ est une fonction de classe C^1 et strictement décroissante sur $[0, h_2]$, donc ϕ^{-1} existe et est lipschitzienne et de classe C^1 sur $]0, h_2[$. Ne pouvant pas directement appliquer le lemme d'Aubin, nous allons utiliser la technique introduite par Alt et Lukhaus dans [6] pour obtenir une estimation des translatés en temps de $(h_k)_k$.

Rappelons le lemme :

Lemme 3 : Soient X un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_X$ et f un élément de $L^2(0, T, X)$ tel que $\partial_t f \in L^2(0, T, X')$. Nous avons l'inégalité :

$$\int_0^{T-\xi} \|f(t+\xi) - f(t)\|_X^2 \leq \xi^2 \int_0^T \|\partial_t f\|_X dt, \forall \xi \in [0, T[.$$

Lemme 4 : La suite $(h_k, \phi(h_k))_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie l'inégalité :

$$\int_\xi^T (h_k(\cdot, t) - h_k(\cdot, t - \xi), \phi(h_k(\cdot, t)) - \phi(h_k(\cdot, t - \xi))) dt \leq C \cdot \xi, \forall \xi \in [0, T[.$$

De plus, nous pouvons extraire, une sous-suite encore notée $(\xi_k, \phi(\xi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge fortement vers $(h, \phi(h))$ dans $L^2(\Omega_T)$.

Preuve : Soient $\xi \in [0, T]$ et $v \in L^2(0, T, V)$, on a

$$\begin{aligned} \int_\xi^T (h_k(\cdot, t) - h_k(\cdot, t - \xi), v) dt &\leq \int_\xi^T \|h_k(\cdot, t) - h_k(\cdot, t - \xi)\|_{V'} \|v\|_V dt \\ (\text{donc grâce au lemme 3}) &\leq \xi \|v\|_{L^2(0, T, V)} \left\| \frac{\partial h_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T, V')}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en prenant $v = \phi(h_k(\cdot, t)) - \phi(h_k(\cdot, t - \xi))$ et en utilisant la majoration uniforme sur $\left\| \frac{\partial h_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T, V')}$, nous obtenons alors l'inégalité du lemme 4.

Puisque ϕ est strictement décroissante sur $[0, h_2]$ et de classe C^1 sur $[0, h_2]$, on déduit que ϕ^{-1} est lipschitzienne sur $]0, h_2[$. Ainsi puisque $0 = h_1 + \delta \leq h \leq h_2$, nous avons :

(grâce au lemme 4 :)

$$\int_\xi^T (\phi^{-1} \circ \phi(h_k(\cdot, t)) - \phi^{-1} \circ \phi(h_k(\cdot, t - \xi)), \phi(h_k(\cdot, t)) - \phi(h_k(\cdot, t - \xi))) dt \leq C \cdot \xi$$

alors

$$\int_\xi^T (\phi(h_k(\cdot, t)) - \phi(h_k(\cdot, t - \xi)), \phi(h_k(\cdot, t)) - \phi(h_k(\cdot, t - \xi))) dt \leq C \cdot \xi$$

Puisque $\|\nabla \phi(h_k)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C$,

on déduit que $\phi(h_k)$ converge fortement vers $\phi(h)$ dans $L^2(\Omega_T)$.

En extrayant si nécessaire une sous-suite de (ϵ_k) , toujours notée (ϵ_k) , nous pouvons dire que:

$\exists u, v \in W(0, T)$, tels que

$$u_k \rightarrow u, \quad \text{dans } L^2(\Omega_T), \quad (2.35)$$

$$u_k \rightarrow u, \quad \text{p.p. } \Omega_T, \quad (2.36)$$

$$\partial_t u_k \rightarrow \partial_t u, \quad \text{dans } L^2(0, T, V'), \quad (2.37)$$

$$\Phi(u_k) \rightarrow \Phi(u), \quad \text{dans } L^2(0, T, V), \quad (2.38)$$

$$v_k \rightarrow v, \quad \text{dans } L^2(0, T, V). \quad (2.39)$$

En faisant tendre $k \rightarrow +\infty$ dans (2.10)-(2.13) et en utilisant le Théorème de Lebesgue, nous obtenons (2.4)-(2.5). (2.6) résulte du fait que $u \in W(0, T) \mapsto u(0) \in H$ est continue.

La démonstration du théorème est terminée.

2.4 Existence globale dans le cas de l'approche 'Interface diffuse'

On considère à présent le modèle correspondant au cas confiné avec l'approche interface diffuse.

Comme précédemment, nous introduisons les fonctions T_s et T_f définies par :

$$T_s(u) = h_2 - u \text{ et } T_f(u) = u, \forall u \in (\delta, h_2)$$

ces fonctions sont étendues continument et par des constantes eu dehors (δ, h_2) où $0 < \delta < h_2$. Le système s'écrit alors dans Ω_T .

$$\partial_t h - \nabla \cdot (T_s(h) \nabla h) - \nabla \cdot (\delta_h \nabla h) + \nabla \cdot (T_s(h) \nabla f) = -\tilde{Q}_s T_s(h), \quad (2.40)$$

$$-\nabla \cdot (h_2 \nabla f) + \nabla \cdot (T_s(h) \nabla f) = \tilde{Q}_s T_s(h) + \tilde{Q}_f T_f(h). \quad (2.41)$$

Le système (2.40)-(2.41) est complété par les conditions initiales et aux frontières :

$$h = h_D, \quad f = f_D \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (2.42)$$

$$h(0, x) = h(x) \text{ dans } \Omega$$

avec les conditions de compatibilité $h_0(x) = h_D(0, x), \forall x \in \Gamma$.

Les termes sources \tilde{Q}_s et \tilde{Q}_f sont des fonctions données de $L^2(0, T; H)$ telles que $\tilde{Q}_s < 0$.

Les fonctions h_D et f_D appartiennent à l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H^1(\Omega))')$ tandis que les fonction h_0 est une fonction de $H^1(\Omega)$. Finalement nous supposons que les données initiales et aux frontières satisfont les conditions physiquement réalistes de hiérarchie :

$$0 \leq h_D \leq h_2, \quad p.p. \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad 0 \leq h_0 \leq h_2, \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

Nous établissons alors le résultat suivant d'existence :

Théorème 4 : $\forall T > 0$, le problème (2.40)-(2.41) admet une solution faible (h, f) satisfaisant $(h - h_D, f - f_D) \in W(0, T) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. De plus, le principe suivant de maximum est valide :

$$\delta \leq h(t, x) \leq h_2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } t \in (0, T)$$

Nous allons présenter la stratégie de la preuve. La première étape consiste en l'utilisation du théorème de point fixe de Schauder qui établira un résultat pour un problème tronqué auxiliaire. Nous montrons que l'application impliquée dans le théorème du point fixe est continue dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, puis nous montrons que la solution tronquée satisfait le principe du maximum annoncé dans le théorème et finalement nous établissons des estimations uniformes suffisantes

pour lever la troncature.

Preuve : Soit une constante $M > 0$, qu'on précisera plus tard. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $L_M(x) = \min(1, \frac{M}{x})$. Pour tout $(g, g_1) \in [L^\infty(0, T; H^1(\Omega))]^2$, on pose $d(g, g_1) = -T_s(g)L_M(\|\nabla g_1\|_{L^2(\Omega_T) \times L^2(\Omega_T)})\nabla g_1$, on a $\|d(g, g_1)\|_{L^\infty(0, T; H)} = \sup_{t \in (0, T)} \|T_s(g)L_M(\|\nabla g_1\|_{L^2(\Omega_T) \times L^2(\Omega_T)})\nabla g_1\|_H \leq Mh_2$.
Pour la stratégie du point fixe, nous définissons l'application \mathcal{F} par

$$\mathcal{F} : L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)) \longrightarrow L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

$$(\bar{h}, \bar{f}) \longrightarrow \mathcal{F}(\bar{h}, \bar{f}) = (\mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{f}) = h, \mathcal{F}_2(\bar{h}, \bar{f}) = f),$$

où le couple (h, f) est solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t h, w \rangle_{V, V'} dt + \int_{\Omega_T} \delta_h \nabla h \cdot \nabla w + \int_{\Omega_T} \tilde{Q}_s T_s(\bar{h}) w dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h})(\nabla h \cdot \nabla w - L_M(\|\nabla \bar{f}\|_{L^2(\Omega_T)})\nabla \bar{f} \cdot \nabla w) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\int_{\Omega_T} h_2 \nabla f \cdot \nabla w dx dt - \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h}) \cdot \nabla h \cdot \nabla w dx dt - \int_{\Omega_T} (\tilde{Q}_s T_s(\bar{h}) + \tilde{Q}_f T_f(\bar{h})) w dx dt = 0 \quad (2.44)$$

pour tout $w \in V$.

Nous savons grâce à la théorie classique pour les équations paraboliques que le système variationnel linéaire (2.43)-(2.44) admet une unique solution. Nous allons à présent démontrer les différentes étapes de la stratégie du point fixe pour l'application \mathcal{F} .

Continuité de \mathcal{F}_1 :

Soit (\bar{h}^n, \bar{f}^n) une suite de fonctions de $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et (\bar{h}, \bar{f}) un couple de fonctions de $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ tel que

$$(\bar{h}^n, \bar{f}^n) \longrightarrow (\bar{h}, \bar{f}) \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

On pose $h_n = \mathcal{F}_1(\bar{h}^n, \bar{f}^n)$ et $h = \mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{f})$, montrons qu'alors $h_n \longrightarrow h$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, h_n satisfait (2.43). Prenons $w = h_n - h_D$ dans (2.43), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t (h_n - h_D), h_n - h_D \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \cdot \nabla h_n dx dt \\ & = \int_{\Omega_T} [T_s(\bar{h}^n) L_M(\|\nabla \bar{f}^n\|_H) \nabla \bar{f}^n \cdot \nabla (h_n - h_D) - \tilde{Q}_s T_s(\bar{h}^n) (h_n - h_D)] dx dt \\ & \quad - \int_0^T \langle \partial_t h_D, h_n - h_D \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h \cdot \nabla h_D dx dt \end{aligned}$$

Puisque $(h_n - h_D)$ appartient à $L^2(0, T, V) \cap H^1(0, T, V')$ donc aussi à $\mathcal{C}(0, T, L^2(\Omega))$, on peut écrire grâce au lemme de Mignot

$$\int_0^T \langle \partial_t(h_n - h_D), h_n - h_D \rangle_{V', V} dt = \frac{1}{2} \|h_n(\cdot, T) - h_D\|_H^2 - \frac{1}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2$$

Par ailleurs

$$\int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \cdot \nabla h_n dxdt \geq \delta \|\nabla h_n\|_{L^2(0, T; H)}^2.$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient $\forall \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\bar{h}^n)) \nabla h_n \nabla h_D \right| &\leq (\delta_h + h_2) \|\nabla h_n\|_{L^2(0, T; H)} \|h_D\|_{L^2(0, T; H)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|\nabla h_n\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \frac{(\delta_h + h_2)^2}{2\epsilon} \|\nabla h_D\|_{L^2(0, T; H)}^2 \\ \left| \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h}^n) L_M(\|\nabla \bar{f}^n\|_{H \times H}) \nabla \bar{f}^n \cdot \nabla h_n \right| &\leq \sqrt{T} \|d(\bar{h}^n, \bar{f}^n)\|_{L^\infty(0, T, H)} \|\nabla h_n\|_{L^2(0, T, H)} \end{aligned}$$

on a posé $d(\bar{h}^n, \bar{f}^n) = -T_s(\bar{h}^n) L_M(\|\nabla \bar{f}^n\|_{H \times H}) \nabla \bar{f}^n$.

Nous avons

$$\|d(\bar{h}^n, \bar{f}^n)\|_{L^\infty(0, T, H)} = \sup_{t \in (0, T)} \|T_s(\bar{h}^n) L_M(\|\nabla \bar{f}^n\|_{H \times H}) \nabla \bar{f}^n\|_H \leq M h_2, \quad (2.45)$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h}^n) L_M(\|\nabla \bar{f}^n\|_{H \times H}) \nabla \bar{f}^n \cdot \nabla h_n \right| &\leq \sqrt{T} M h_2 \|\nabla h_n\|_{L^2(0, T, H)} \\ &\leq \frac{M^2 T}{2\epsilon} h_2^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla h_n\|_{L^2(0, T, H)}^2. \end{aligned}$$

De plus

$$\left| \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h}^n) L_M(\|\nabla \bar{f}^n\|_{H \times H}) \nabla \bar{f}^n \cdot \nabla h_D \right| \leq \sqrt{T} M h_2 \|\nabla h_D\|_{L^2(0, T, H^1)}.$$

Finalement nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle \partial_t h_D, h_n - h_D \rangle_{V', V} dt \right| &\leq \frac{1}{2\delta_h} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0, T, (H^1(\Omega))')} + \frac{\delta_h}{2} \|h_n\|_{L^2(0, T, H)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|h_D\|_{L^2(0, T, H)}^2 \end{aligned}$$

et

$$| - \int_{\Omega_T} Q_s T_s(\overline{h^n})(h_n - h_D) dx dt | \leq \frac{\|Q_s\|_H^2}{2} h_2^2 + \frac{1}{2} \|h_n - h_D\|_{L^2(0,T,H)}^2.$$

Nous obtenons après simplification

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|h_n(\cdot, T) - h_D\|_H^2 + \left(\frac{\delta}{2} - \epsilon\right) \|\nabla h_n\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2 + \left(\frac{\|Q_s\|_H^2}{2} + \frac{M^2 T}{2\epsilon}\right) h_2^2 + \frac{(\delta_h + h_2)^2}{2\epsilon} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \\ & + \frac{1}{2\delta_h} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|h_n - h_D\|_H^2 dt \\ & + \frac{\delta}{2} \int_0^T \|h_n\|_H^2 dt + M h_2 \sqrt{T} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)} + \frac{1}{2} \|\nabla h_D\|_{L^2(0,T;H)}^2. \end{aligned}$$

On choisit ϵ tel que $\frac{\delta_h}{2} - \epsilon \geq \epsilon_0 \geq 0$.

Le précédente relation nous permet de conclure grâce au lemme de Gronwall, qu'il existe 2 réels $A_M(\delta_h, h_0, h_D, h_2, Q_s, M, t)$ et $B_M(\delta_h, h_0, h_D, h_2, Q_s, M, t)$ dépendant seulement des données du problème tels que

$$\|h_n\|_{L^\infty(0,T,H)} \leq A_M \text{ et } \|h_n\|_{L^2(0,T,H^1)} \leq B_M \quad (2.46)$$

Donc la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H)$. L'estimation dans $L^\infty(0, T, H)$ est justifiée par le fait que nous pouvons faire le même calcul en remplaçant T par tout $t \leq T$ dans l'intégrale par rapport au temps. On pose alors $C_M = \max(A_M, B_M)$.

Maintenant, nous allons établir que $(\partial_t(h_n - h_D))_n$ est bornée dans $L^2(0, T, V')$.

$$\begin{aligned} & \|\partial_t(h_n - h_D)\|_{L^2(0,T,V')} \\ & = \sup_{\|w\|_{L^2(0,T;V)} \leq 1} \left| \int_0^T \langle \partial_t(h_n - h_D), w \rangle_{V',V} dt \right| \\ & = \sup_{\|w\|_{L^2(0,T;V)} \leq 1} \left| \int_0^T - \langle \partial_t h_D, w \rangle_{V',V} dt \right. \\ & \quad - \int_{\Omega_T} [(\delta_h + T_s(\overline{h^n})) \nabla h_n \cdot \nabla w - T_s(\overline{h^n}) L_M(\|\nabla \overline{f^n}\|_{H \times H}) \nabla \overline{f^n} \cdot \nabla w \\ & \quad \left. - Q_s T_s(\overline{h^n}) w] dx dt \right| \end{aligned}$$

Puisque

$$\left| \int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\overline{h^n})) \nabla h_n \cdot \nabla w \right| \leq (\delta_h + h_2) \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \|w\|_{L^2(0,T;V)},$$

et puisque h_n est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, on écrit

$$|\int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\overline{h^n})) \nabla h_n \cdot \nabla w| \leq (\delta_h + h_2) C_M \|w\|_{L^2(0, T; V)},$$

de plus

$$|\int_{\Omega_T} T_s(\overline{h^n}) L_M (\|\nabla \overline{f^n}\|_{L^2(\Omega_T) \times L^2(\Omega_T)}) \nabla \overline{f^n} \cdot \nabla w dx dt| \leq M h_2 \|w\|_{L^2(0, T; V)}$$

et

$$|\int_{\Omega_T} Q_s T_s(\overline{h^n}) w dx dt| \leq \|Q_s\|_H h_2 \sqrt{T} \|w\|_{L^2(0, T; V)}$$

En rassemblant les précédentes estimations, nous concluons que

$$\|\partial_t(h_n - h_D)\|_{L^2(0, T; V')} \leq D_M,$$

où $D_M = \|\partial_t h_D\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} + \delta_h C_M + h_2(C_M + M\sqrt{T} + \|Q_s\|_H)$.

Nous venons de prouver que $(h_n)_n$ est uniformément bornée dans l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V')$.

En utilisant le lemme d'Aubin, nous extrayons une suite, non renommée pour simplifier, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergeant fortement dans $L^2(\Omega_T)$ et faiblement dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V')$ vers une limite notée l .

En utilisant en particulier la convergence forte dans $L^2(\Omega_T)$ et donc la convergence p.p. dans Ω , nous vérifions que l est une solution de l'équation de (2.43). La solution de (2.43) étant unique, donc $l = h$.

Il reste à prouver que $(h_n)_\mathbb{N}$ tend vers h fortement dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

En soustrayant la formulation faible (2.44) à sa version avec h_n et en prenant

$w = h_n - h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle \partial_t(h_n - h), h_n - h \rangle_{V', V} dt \\
& + \int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\bar{h}^n)) \nabla(h_n - h) \cdot \nabla(h_n - h) dxdt \\
& + \int_{\Omega_T} [T_s(\bar{h}^n) L_M(\|\nabla \bar{f}^n\|_{L^2(\Omega_T) \times L^2(\Omega_T)}) \nabla \bar{f}^n \\
& - T_s(\bar{h}) L_M(\|\nabla \bar{f}\|_{L^2(\Omega_T) \times L^2(\Omega_T)}) \nabla \bar{f}] \nabla(h_n - h) dxdt \\
& - \int_{\Omega_T} (T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) \nabla(h_n - h) \cdot \nabla h dxdt \\
& + \int_{\Omega_T} Q_s(T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h}))(h_n - h) dxdt = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

or $(\bar{h}^n, \bar{f}^n) \rightarrow (\bar{h}, \bar{f})(n \rightarrow +\infty)$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

En utilisant les précédents résultats de convergence pour h_n , la limite de (2.47) lorsque $n \rightarrow +\infty$, donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(\bar{h}^n)) \nabla(h_n - h) \cdot \nabla(h_n - h) dxdt \right) = 0,$$

donc $\nabla h_n \rightarrow \nabla h$ fortement $L^2(0, T; H)$.

Ce qui achève la preuve de la continuité de \mathcal{F}_1 pour la topologie forte de $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Continuité de \mathcal{F}_2 :

Nous établissons la continuité de \mathcal{F}_2 en posant $f_n = \mathcal{F}_2(\bar{h}^n, \bar{f}^n)$ et $f = \mathcal{F}_2(\bar{h}, \bar{f})$ et en montrant que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Les estimations "clefs" sont obtenues en utilisant le même type d'argument que dans la preuve de la continuité de \mathcal{F}_1 . Nous soulignons que nous allons utiliser les estimations uniformes obtenues pour (h_n) , (2.46), pour établir que

$$\|f_n\|_{L^2(0, T; H^1)} \leq F_M = F_M(\delta_h, f_D, h_2, Q_s, Q_f, M, C_M, T).$$

Nous extrayons une suite non renommée pour simplifier, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergeant faiblement dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ vers une limite $f_l \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

En utilisant les précédentes convergences établies pour la suite (h_n) et la convergence faible de (f_n) , on peut passer à la limite, et donc vérifier que f_l est une solution de l'équation (2.44).

La solution de (2.44) étant unique, nous avons donc établi que $f_l = f$.

Il nous reste à prouver que f_n tend vers f fortement dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

En soustrayant la formulation faible de (2.44) à sa version avec f_n et en prenant $w = f_n - f$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} h_2 (\nabla(f_n - f))^2 dxdt - \int_{\Omega_T} (T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) \nabla h \cdot \nabla(f_n - f) dxdt \\
& - \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h}^n) \nabla(h_n - h) \cdot \nabla(f_n - f) dxdt - \int_{\Omega_T} Q_s(T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) (f_n - f) dxdt \\
& - \int_{\Omega_T} Q_f(T_f(\bar{h}^n) - T_f(\bar{h})) (f_n - f) dxdt = 0 \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} |\nabla(f_n - f)|^2 dxdt - \int_{\Omega_T} (T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) \nabla h \cdot \nabla(f_n - f) dxdt \\
& - \int_{\Omega_T} Q_s(T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) (f_n - f) dxdt - \int_{\Omega_T} Q_f(T_f(\bar{h}^n) - T_f(\bar{h})) (f_n - f) dxdt \\
& \leq \int_{\Omega_T} \frac{h_2}{2} |\nabla(h_n - h)|^2 dxdt + \int_{\Omega_T} \frac{h_2}{2} |\nabla(f_n - f)|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} \frac{h_2}{2} |\nabla(f_n - f)|^2 dxdt - \int_{\Omega_T} (T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) \nabla h \cdot \nabla(f_n - f) dxdt \\
& - \int_{\Omega_T} (Q_s + Q_f)(T_s(\bar{h}^n) - T_s(\bar{h})) (f_n - f) dxdt \leq \int_{\Omega_T} \frac{h_2}{2} |\nabla(h_n - h)|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, on conclut que f_n tend fortement vers f dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Conclusion : \mathcal{F} est continue dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ car ses 2 composantes le sont.

De plus posons $A \in \mathbb{R}_+$ un réel tel que $A = \max(C_M, D_M)$, et W un ensemble convexe borné fermé non vide de $(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$ défini par :

$$\begin{aligned}
W = \{ & (g, g_1) \in W_1(0, T) = [L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V')] \times L^2(0, T; H^1(\Omega)); \\
& g(0) = h_0, g_1|_{\Gamma} = f_D, g|_{\Gamma} = h_D, \|(g, g_1)\|_{W_1(0, T)} \leq A \}.
\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\mathcal{F}(W) \subset W$. Il suit du théorème de Schauder qu'il existe $(h, f) \in W$ tel que $\mathcal{F}(h, f) = (h, f)$. Ce point fixe de \mathcal{F} est une solution

faible du problème (2.40)-(2.41).

Etape 2. Principe du maximum

Nous allons montrer que pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \in (0, T)$,

$$\delta \leq h(t, x) \leq h_2. \quad (2.49)$$

Montrons dans un premier temps que $h(t, x) \leq h_2$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0, T)$.

On introduit $u_m = |h - h_2|^+ = \sup(0, h - h_2) \in L^2(0, T; V)$ car $h_D \leq h_2$.

Il satisfait $\nabla u_m = \chi_{h > h_2} \nabla h$ et $u_m(t, x) \neq 0$ ssi $h(t, x) > h_2$, où χ dénote la fonction caractéristique.

Soit $\tau \in (0, T)$.

On prend $w(t, x) = u_m(t, x)\chi_{(0, \tau)}(t)$ dans (2.43), ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \langle \partial_t h, u_m \chi_{(0, \tau)} \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_t} \delta_h \nabla h \cdot \nabla u_m dx dt \\ & + \int_{\Omega_t} [T_s(h)(\nabla h \cdot \nabla u_m + L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \nabla f \cdot \nabla u_m) + \tilde{Q}_s T_s(h) u_m] dx dt = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega [u_m^2(\tau, x) - u_m^2(0, x)] dx + \int_{\Omega_T} \{|\nabla h|^2 \chi_{\{h > h_2\}} (\delta_h + T_s(h))\} dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} (T_s(h) L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \nabla f \cdot \nabla u_m(t, x) + \tilde{Q}_s T_s(h) u_m(t, x)) dx dt = 0 \quad (2.50) \end{aligned}$$

Par ailleurs $u_m(0, \cdot) = (h_0(\cdot) - h_2(\cdot))^+ = 0$ et puisque $T_s(h)\chi_{\{h > h_2\}} = 0$ par définition de T_s , (2.50) se réduit à :

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u_m^2(\tau, x) dx + \int_{\Omega_T} \chi_{\{h > h_2\}} \delta_h |\nabla h|^2 dx dt = 0,$$

ainsi,

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u_m^2(\tau, x) dx \leq - \int_{\Omega_T} \chi_{\{h > h_2\}} \delta_h |\nabla h|^2 dx dt \leq 0,$$

et donc,

$u_m = 0$ presque partout dans Ω_T et donc $h(t, x) \leq h_2$ p.p. dans Ω_T .

Nous allons à présent prouver que $\delta \leq h(t, x)$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0, T)$.

Nous posons maintenant $u_m = (h - \delta)^- \in L^2(0, T; V)$, alors $\nabla u_m = \nabla h \chi_{\{h < \delta\}}$.

Prenons $w = u_m$ dans (2.40) et $w = \frac{h_2 - \delta}{h_2} L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) u_m$ dans (2.41) et ajoutons les 2 équations, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle \partial_t, u_m \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta_h + T_s(h)) \nabla h \cdot \nabla u_m dx dt \\
& - \int_{\Omega_T} T_s(h) L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \nabla f \cdot \nabla u_m \\
& + \int_{\Omega_T} (h_2 - \delta) L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \nabla f \cdot \nabla u_m dx dt \\
& - \int_{\Omega_T} T_s(h) \frac{h_2 - \delta}{h_2} L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \nabla h \cdot \nabla u_m \\
& + \int_{\Omega_T} \{ \tilde{Q}_s T_s(h) (1 - \frac{h_2 - \delta}{h_2} L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) u_m \\
& - \tilde{Q}_f T_f(h) \frac{h_2 - \delta}{h_2} L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) u_m \} dx dt = 0
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $T_s(h) \chi_{\{h < \delta\}} = h_2 - \delta$ et $u_m(0, \cdot) = [h_0(\cdot) - \delta]^- = 0$, la précédente équation se simplifie en :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_m^2(\tau, x) dx + \int_{\Omega_T} \chi_{\{h < \delta\}} \delta_h |\nabla h|^2 dx dt \\
& + \int_{\Omega_T} (h_2 - \delta) (1 - \frac{h_2 - \delta}{h_2} L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) \chi_{\{h < \delta\}} |\nabla h|^2 dx dt \\
& - \int_{\Omega_T} (h - \delta) (-\tilde{Q}_s (h_2 - \delta) (1 - \frac{h_2 - \delta}{h_2} L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}))) \chi_{\{h < \delta\}} \\
& + \tilde{Q}_f T_f(h) \frac{h_2 - \delta}{h_2} L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \chi_{\{h < \delta\}} dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Par définition de $T_f(h)$, $T_f(h) \chi_{\{h < \delta\}} = 0$, donc en supposant que $\tilde{Q}_s < 0$, il résulte de la précédente équation que $\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_m^2(\tau, x) dx \leq 0$ et donc $u_m = 0$, presque partout dans Ω_T .

Ainsi $\delta \leq h(t, x)$ p.p. dans Ω .

Etape 3 : Elimination de la fonction auxiliaire L_M

Nous allons à present démontrer qu'il existe un réel $M' > 0$ ne dépendant ni de ϵ , ni de M , tel que , toute solution (h, f) du problème (2.40)-(2.41) satisfait

$$\|\nabla h\|_{L^2(0,T;H)} \leq M' \text{ et } \|\nabla f\|_{L^2(0,T;H)} \leq M'.$$

Prenons $w = h - h_D$ (resp. $w = f - f_D$) dans (2.40) (resp. (2.41)) donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t h, h - h_D \rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta + T_s(h)) \nabla h \cdot \nabla (h - h_D) dx dt \\ = & \int_{\Omega_T} T_s(h) L_M(\|\nabla f\|_{H \times H}) \nabla f \cdot \nabla (h - h_D) dx dt - \int_{\Omega_T} \tilde{Q}_s T_s(h) (h - h_D) dx dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} h_2 (\nabla f \cdot \nabla (f - f_D)) dt - \int_{\Omega_T} T_s(h) \nabla h \cdot \nabla (f - f_D) dx dt \\ = & \int_{\Omega_T} (\tilde{Q}_s T_s(h) (f - f_D) + \tilde{Q}_f T_f(h) (f - f_D)) dx dt. \end{aligned}$$

En sommant les 2 équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(h - h_D)^2(\tau, x) - (h - h_D)^2(0, x)] dx + \int_{\Omega_T} \delta |\nabla h|^2 dx dt + \int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla (h - f)|^2 dx dt \\ + & \int_{\Omega_T} (h_2 - T_s(h)) |\nabla f|^2 dx dt + \int_{\Omega_T} T_s(h) (1 - L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) |\nabla h|^2 dx dt \\ = & - \inf_0^T \langle \partial_t h_D, h - h_D \rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} T_s(h) (1 - L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) \nabla h \cdot \nabla (h - f) dx dt \\ + & \int_{\Omega_T} \delta \nabla h \cdot \nabla h_D dx dt + \int_{\Omega_T} T_s(h) \cdot \nabla (h - f) \cdot \nabla h_D dx dt \\ + & \int_{\Omega_T} T_s(h) (1 - L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) \nabla f \cdot \nabla h_D dx dt + \int_{\Omega_T} (T_s(h) - h_2) \nabla f \cdot \nabla f_D dx dt \\ + & \int_{\Omega_T} T_s(h) \nabla (h - f) \cdot \nabla f_D dx dt - \int_{\Omega_T} T_s(h) \nabla h \cdot \nabla f_D dx dt \\ + & \int_{\Omega_T} \tilde{Q}_s T_s(h) [(f - h) + (h_D - f_D)] dx dt + \int_{\Omega_T} \tilde{Q}_f h (f - f_D) dx dt \end{aligned}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 + I_{10}$$

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T,V')} \|h - h_D\|_{L^2(0,T,V)} \\
&\leq \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T,V')} (\|\nabla h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla h_D\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}), \\
|I_2| &\leq \left(\int_{\Omega_T} T_s(h)(1 - L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) |\nabla h|^2 dxdt \right)^{1/2} \times \left(\int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_T} T_s(h)(1 - L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) |\nabla h|^2 dxdt \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \right) \\
&\leq \frac{\delta}{6} \|\nabla h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{3}{2\delta} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T,V')}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T,V')}^2 \frac{1}{2} \|\nabla h_D\|_{L^2(0,T,V')}^2, \\
|I_3| &\leq \delta \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt \right)^{1/2} \leq \frac{\delta}{6} \int_{\Omega_T} |\nabla h|^2 dxdt + \frac{3}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt, \\
|I_4| &\leq \delta \left(\int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \right)^{1/2} \times \sqrt{h_2} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{6} \left(\int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \right) + \frac{3}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt, \\
|I_5| &\leq \sqrt{h_2} \left(\int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{\Omega_T} T_s(h)(1 - L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) |\nabla h|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{6} \int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{1}{6} \int_{\Omega_T} T_s(h)(1 - L_M(\|\nabla f\|_{H \times H})) |\nabla h|^2 dxdt + 3h_2 \int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt, \\
|I_6| &\leq \sqrt{h_2} \left(\int_{\Omega_T} (h_2 - T_s(h)) |\nabla f|^2 dxdt \right)^{1/2} \times \left(\int_{\Omega_T} |\nabla f_D|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{6} \left(\int_{\Omega_T} (h_2 - T_s(h)) |\nabla f|^2 dxdt \right) + \frac{3h_2}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla f_D|^2 dxdt, \\
|I_7| &\leq \sqrt{h_2} \left(\int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \right)^{1/2} \times \left(\int_{\Omega_T} |\nabla f_D|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{6} \left(\int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h-f)|^2 dxdt \right) + \frac{3h_2}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla f_D|^2 dxdt, \\
|I_8| &\leq h_2 \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h|^2 dxdt \right)^{1/2} \times \left(\int_{\Omega_T} |\nabla f_D|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\delta}{6} \int_{\Omega_T} |\nabla h|^2 dxdt + \frac{3h_2^2}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla f_D|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_9| &\leq h_2 \|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)} (\|h - h_D\|_{L^2(0,T;H)} + \|f - f_D\|_{L^2(0,T;H)}) \\
&\leq h_2 \|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)} (\|h - h_D\|_{L^2(0,T;H)} + C_p \|\nabla(f - f_D)\|_{L^2(0,T;H)}) \\
&\leq \frac{h_2}{2} \int_{\Omega_T} (h - h_D)^2 dxdt + \frac{h_2}{2} \|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)}^2 \\
&\quad + \frac{\delta}{6} \int_{\Omega_T} |\nabla f|^2 dxdt + h_2 \|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)} C_p \|\nabla f_D\| + \frac{3}{\delta} h_2^2 \|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)}, \\
|I_{10}| &\leq h_2 \|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)} \|f - f_D\|_{L^2(0,T;H)} \\
&\leq \frac{\delta}{6} \int_{\Omega_T} |\nabla f|^2 dxdt + h_2 \|\tilde{Q}_f\|_{L^2(0,T;H)} C_p \|\nabla f_D\| + \frac{3}{\delta} h_2^2 \|\tilde{Q}_f\|_{L^2(0,T;H)}.
\end{aligned}$$

En rassemblant ces inégalités et puisque $h \geq \delta$ p.p. dans Ω_T , on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\Omega_T} (h - h_D)^2(\tau, x) dx + \frac{\delta h}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla h|^2 dxdt + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla f|^2 dxdt \\
&\leq \frac{h_2}{2} \int_{\Omega_T} (h - h_D)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} (h - h_D)^2(0, x) dx + \left(\frac{3}{2\delta} + \frac{1}{2}\right) \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T;V')} \\
&\quad + \left(2 + \frac{9}{2} h_2\right) \|\nabla h_D\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 3h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \|\nabla f_D\|_{L^2(0,T;H)}^2 \\
&\quad + h_2 C_p \|\nabla f_D\|_{L^2(0,T;H)} (\|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)} + \|\tilde{Q}_f\|_{L^2(0,T;H)}) \\
&\quad + \|\tilde{Q}_s\|_{L^2(0,T;H)}^2 h_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\delta} h_2\right) + \frac{3}{\delta} h_2^2 \|\tilde{Q}_f\|_{L^2(0,T;H)} := K
\end{aligned}$$

Ainsi en appliquant le lemme de Gronwall on déduit que :

$$\|h\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T,H'(\Omega))} \leq K \text{ et } \|f\|_{L^2(0,T;H)} \leq K,$$

et ces estimations ne dépendent pas du choix de M introduit dans la fonction L_M .

Donc si on choisit $M = M'$, le terme $L_M(\|\nabla f\|_{L^2(0,T;H)} \times L^2(0,T;H)) = 1$ peut-être enlever des équations (2.43)-(2.44).

La preuve du Théoreme est donc terminée.

Chapter 3

Existence globale en temps de la solution dans le cas d'un aquifère libre

3.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons donner la preuve de l'existence globale en temps d'une solution du problème correspondant au cas de l'aquifère libre dans le cas de l'approche 'interface nette'.

Le cas correspondant à l'approche avec 'interface libre' a été traité dans [59] mais afin de faciliter la lecture de ce document et en particulier de souligner les différences avec le cas 'interface nette', nous en reproduisons la preuve ici.

En particulier, nous montrons que le terme diffusif supplémentaire est essentiel pour établir un principe du maximum plus naturel d'un point de vue de la physique. Précisément la preuve dans le cas 'interface diffuse' permet d'établir une hiérarchie entre les deux profondeurs des interfaces h et h_1 qu'il est impossible d'obtenir dans le cas de l'approche avec 'interface nette'.

3.2 Existence globale en temps dans le cas de l'interface diffuse

3.2.1 Introduction

Dans cette section, nous donnons la preuve de l'existence d'une solution faible globale en temps du système (1) de notre modèle d'intrusion d'eau de mer dans un aquifère libre sans coefficient d'emménagement, nous soulignons que ce résultat a été prouvé dans [59].

Nous considérons donc le système :

$$(1) \begin{cases} \phi\chi_0(h)\partial_t h - \operatorname{div}(KT_s(h)\chi_0(h_1)\nabla h) - \operatorname{div}(\delta\phi\chi_0(h)\nabla h) \\ -\operatorname{div}(KT_s(h)\chi_0(h_1)\nabla h_1) = -Q_s T_s(h), \\ \phi\chi_0(h_1)\partial_t h_1 - \operatorname{div}(K(T_f(h-h_1) + T_s(h))\chi_0(h_1)\nabla h_1) \\ -\operatorname{div}(\delta\phi K\chi_0(h_1)\nabla h_1) - \operatorname{div}(KT_s(h)\chi_0(h_1)\chi_0(h)\nabla h) \\ = -Q_f T_f(h-h_1) - Q_s T_s(h). \end{cases}$$

3.2.2 Enoncé du Théorème 5

Théorème 5 : On suppose qu'ils existent deux réels positifs K_- et K_+ tels que:

$$0 < K_- |\xi|^2 \leq \Sigma_{i,j=1,2} K_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq K_+ |\xi|^2 < \infty, x \in \Omega, \xi \in R^2 \text{ et } \xi \neq 0.$$

On suppose de plus une faible hétérogénéité spatiale:

$$K_- \leq K_+ \leq 2K_-.$$

Alors pour tout $T > 0$, le problème (1) admet une solution faible (h, h_1) satisfaisant:

- (a) $h - h_D, h_1 - h_{1,D} \in W$ sont solutions de (1),
- (b) $0 \leq h_1(t, x) \leq h(t, x) \leq h_2(t, x)$ pour presque tout x dans Ω et pour tout t dans $(0, T)$.

3.2.3 Démonstration

Nous considérons le système (1) où l'on supprime le terme $\chi_0(h)$ devant $\partial_t h$ ou ∇h et le terme $\chi_0(h_1)$ devant $\partial_t h_1$ ou ∇h_1 , du fait de la redondance de l'information sur l'inconnue et on garde le terme $\chi_0(h_1)$ devant ∇h . Soient $x^+ := \max(x, 0)$, M une constante que nous préciserons plus tard et $\epsilon > 0$, on pose:

$$L_M(x) = \min\left(1, \frac{M}{x}\right),$$

$$\chi_0(h_1) = \begin{cases} 0, & \text{si } h_1 \leq 0 \\ 1, & \text{si } h_1 > 0 \end{cases}, \chi_0^\epsilon(h_1) = \begin{cases} 0, & \text{si } h_1 \leq 0 \\ \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + \epsilon}}, & \text{si } h_1 > 0 \end{cases}.$$

On remarque que si : $h_1^\epsilon(h_1) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} h_1$ presque partout, on a :

$$\begin{cases} \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) = \frac{h_1^\epsilon}{\sqrt{(h_1^\epsilon)^2 + \epsilon}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \chi_0(h_1), \text{ presque partout} \\ 0 \leq \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \leq 1. \end{cases}$$

Etape 1: Existence pour le système avec Heaviside régularisée $\chi_0^\epsilon(h_1)$

On introduit la régularisation χ_0^ϵ sur χ_0 dans le système et on obtient:

$$(0) : \begin{cases} \phi \partial_t h^\epsilon - \operatorname{div}(\delta \phi \nabla h^\epsilon) - \operatorname{div}(KT_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \nabla h^\epsilon) \\ - \operatorname{div}(KT_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) L_M(\|\nabla h_1^\epsilon\|) \nabla h_1^\epsilon) = -Q_s T_s(h^\epsilon) \\ \phi \partial_t h_1^\epsilon - \operatorname{div}(\delta \phi \nabla h_1^\epsilon) - \operatorname{div}(K(T_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) + T_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon)) \nabla h_1^\epsilon) \\ - \operatorname{div}(KT_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \nabla h^\epsilon) = -Q_f T_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) - Q_s T_s(h^\epsilon) \end{cases}$$

La première étape de la preuve du théorème ?? va être de montrer un résultat d'existence similaire pour le système (0), complété des conditions initiales et aux bords

$$\begin{cases} h^\epsilon = h_D, & h_1^\epsilon = h_{1,D} & \text{sur } \Gamma, \\ h^\epsilon(0, x) = h_0, & h_1^\epsilon(0, x) = h_{1,0}(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

avec $\epsilon > 0$ fixé. Pour alléger les notations, nous allons maintenant omettre la dépendance en ϵ de la solution $(h^\epsilon, h_1^\epsilon)$ et chercher une solution (h, h_1) du système (1)

$$(1) : \begin{cases} \phi \partial_t h - \operatorname{div}(\delta \phi \nabla h) - \operatorname{div}(KT_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h) \\ - \operatorname{div}(KT_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|) \nabla h_1) = -Q_s T_s(h) \\ \phi \partial_t h_1 - \operatorname{div}(\delta \phi \nabla h_1) - \operatorname{div}(K(T_f(h - h_1) + T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1)) \nabla h_1) \\ - \operatorname{div}(KT_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h) = -Q_f T_f(h - h_1) - Q_s T_s(h) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} h = h_D, & h_1 = h_{1,D} & \text{sur } \Gamma, \\ h(0, x) = h_0, & h_1(0, x) = h_{1,0}(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Remplaçons le nouveau problème (1) par sa formulation variationnelle suivante:

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi < \partial_t h, w >_{V, V'} dt + \int_0^T \int_\Omega \delta \phi \nabla h \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_\Omega KT_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h \nabla \omega dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega KT_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \nabla h_1 \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h) \omega dx dt = 0, \\ \forall \omega \in V = H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi < \partial_t h_1, w >_{V, V'} dt + \int_0^T \int_\Omega \delta \phi \nabla h_1 \nabla \omega dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega K(T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_\Omega KT_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h \nabla \omega dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega (Q_s T_s(h) + Q_f T_f(h - h_1)) \omega dx dt = 0, \forall \omega \in V = H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nous utiliserons le théorème de **Schauder** pour montrer que pour tout $T > 0$, notre problème admet une solution (h, h_1) dans $W(0, T) \times W(0, T)$ et qui vérifiera les conditions initiales.

Soit $(\bar{h}, \bar{h}_1) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$, on définit l'application:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ (\bar{h}, \bar{h}_1) &\longmapsto \mathcal{F}(\bar{h}, \bar{h}_1) = (\mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{h}_1) = h, \mathcal{F}_2(\bar{h}, \bar{h}_1) = h_1) \end{aligned}$$

Soit (h, h_1) la solution du problème:

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi < \partial_t h, w >_{V, V'} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \phi \nabla h \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(\bar{h}) \chi_0^\varepsilon(\bar{h}_1) \nabla h \nabla \omega dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(\bar{h}) \chi_0^\varepsilon(\bar{h}_1) L_M(\|\nabla \bar{h}_1\|_{L^2}) \nabla \bar{h}_1 \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} Q_s T_s(\bar{h}) \omega dx dt = 0, \\ \forall \omega \in V = H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi < \partial_t h_1, w >_{V, V'} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \phi \nabla h_1 \nabla \omega dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} K(T_s(\bar{h}) \chi_0^\varepsilon(\bar{h}_1) + T_f(\bar{h} - \bar{h}_1)) \nabla h_1 \nabla \omega dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(\bar{h}) \chi_0^\varepsilon(\bar{h}_1) \nabla h \nabla \omega dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (Q_s T_s(\bar{h}) + Q_f T_f(\bar{h} - \bar{h}_1)) \omega dx dt = 0, \forall \omega \in V = H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.4)$$

D'après la théorie parabolique classique de **Ladyzenskaya**, la solution de ce problème existe car notre système d'équation est linéaire.

On pose:

$$\forall (g, g_1) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), d(g, g_1) = -T_s(g) L_M(\|\nabla g_1\|_{L^2}) \nabla h_1$$

alors ,

$$\begin{aligned} \forall (g(t, x), g_1(t, x)) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ \|d(g, g_1)\|_{L^\infty(0, T; L^2)} = \sup_{t \in (0, T)} \|T_s(g) L_M(\|\nabla g_1\|_{L^2}) \nabla g_1\|_{L^2} \leq M h_2 \end{aligned}$$

car $h_2 \in L^\infty(\Omega)$.

Nous allons montrer que \mathcal{F}_1 est continue :

Soient la suite $(\bar{h}^n, \bar{h}_1^n)_n$ de $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et (\bar{h}, \bar{h}_1) de $L^2(0, T; H^1) \times L^2(0, T; H^1)$ telle que :

$$(\bar{h}^n, \bar{h}_1^n) \longrightarrow (\bar{h}, \bar{h}_1) \text{ dans } L^2(0, T; H^1) \times L^2(0, T; H^1).$$

On pose $h_n = \mathcal{F}_1(\bar{h}^n, \bar{h}_1^n)$ et $h = \mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{h}_1)$, montrons que $h_n \longrightarrow h$ dans $W(0, T)$.

Pour tout $n \in N$, si on remplace $w = h_n - h_D$, on a:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \phi < \partial_t(h_n - h_D), (h_n - h_D) >_{V',V} dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} (\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)) \nabla h_n \nabla h_n dxdt \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} (\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)) \nabla h_n \nabla h_n dxdt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} KT_s(\bar{h})L_M(\|\nabla \bar{h}_1^n\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla \bar{h}_1^n \nabla h_n dxdt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} KT_s(\bar{h})L_M(\|\nabla \bar{h}_1^n\|_{L^2})\chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla \bar{h}_1^n \nabla h_D dxdt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s T_s(\bar{h}^n)(h_n - h_D) dxdt \\
& - \int_0^T \phi < \partial_t h_D, (h_n - h_D) >_{V',V} dt \tag{3.5}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat F.Mignot, on a:

$$\int_0^T \phi < \partial_t(h_n - h_D), (h_n - h_D) >_{V',V} dt = \frac{\phi}{2} \|h_n - h_D\|_H^2 - \frac{\phi}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2 \tag{3.6}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)) \nabla h_n \nabla h_n dxdt \geq \delta\phi \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \tag{3.7}$$

On écrit aussi que:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \int_{\Omega} (\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)) \nabla h_n \nabla h_n dxdt \right| \\
& \leq (\delta\phi + K_+ h_2) \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}.
\end{aligned}$$

et on applique l'égalité de Young : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (\delta\phi + KT_s(\bar{h}^n)\chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)) \nabla h_n \nabla h_n dxdt \right| \leq \frac{\epsilon}{4} \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 + \frac{(\delta\phi + K_+ h_2)^2}{2} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \tag{3.8}$$

Pour le terme:

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_0^T \int_{\Omega} KT_s(\bar{h})L_M(\|\nabla \bar{h}_1^n\|_{L^2}) \cdot \chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n)\nabla \bar{h}_1^n \nabla h_n dxdt \right| \\
& \leq MK_+ \|h_2\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{T} \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}
\end{aligned}$$

nous avons en appliquant l'inégalité de Young:

$$\begin{aligned} & \left| - \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(\bar{h}) L_M(\|\nabla \bar{h}_1^n\|_{L^2}) \chi_0^\epsilon(\bar{h}_1^n) \nabla \bar{h}_1^n \nabla h_n dx dt \right| \\ & \leq \frac{K_+^2 + M^2 T}{\epsilon} \|h_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{4} \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

et enfin:

$$\left| - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s T_s(\bar{h}^n)(h_n - h_D) dx dt \right| \leq |Q_s| \|h_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|h_n - h_D\|_{L^2(0,T;H)},$$

en appliquant l'inégalité de Young sur le premier terme et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger sur $(h_n - h_D)$ on obtient:

$$\left| - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s T_s(\bar{h}^n)(h_n - h_D) dx dt \right| \leq \frac{|Q_s|^2}{\epsilon} \|h_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{C_p \epsilon}{4} \|h_n\|_{L^2(0,T;H)}^2 \quad (3.10)$$

et

$$\left| - \int_0^T \phi \langle \partial_t h_D, (h_n - h_D) \rangle_{V',V} dt \right| \leq \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \int_0^T \|h_n - h_D\|_H^2 dt$$

En faisant le somme, on réécrit:

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{2} \|h_n - h_D\|_H^2 + \left(\delta\phi - \frac{(C_p + 2)\epsilon}{4} \right) \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \leq \frac{\phi}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2 + \\ & \left(\frac{|Q_s|^2 + K_+^2 M^2 T}{\epsilon} \right) \|h_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{(\delta\phi + K_+ h_2)^2}{\epsilon} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \\ & + \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \int_0^T \|h_n - h_D\|_H^2 dt + M K_+ \|h_2\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{T} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ainsi si ϵ est choisi tel que : $C_g := \left(\delta\phi - \frac{(C_p + 2)\epsilon}{4} \right) > 0$, on utilise le Lemme de Gronwall pour conclure que:

$$\begin{aligned} \|h_n\|_{L^\infty(H)} & \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}} \left(\frac{\phi}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2 + \left(\frac{|Q_s|^2 + K_+^2 M^2 T}{\epsilon} \right) \|h_2\|_{L^\infty(H)}^2 \right) + \frac{C}{2} + \\ & \frac{(\delta\phi + K_+ h_2)^2}{\epsilon} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 + M K_+ \|h_2\|_{L^\infty(H)} \sqrt{T} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^{1/2} e^{T/2}; \\ & \|h_n\|_{L^2(0,T;H^1)} \leq \\ & \frac{1}{\sqrt{C_g}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi}} \left(\frac{\phi}{2} \|h_0 - h_D|_{t=0}\|_H^2 + \left(\frac{|Q_s|^2 + K_+^2 M^2 T}{\epsilon} \right) \|h_2\|_{L^\infty(H)}^2 \right) + \frac{C}{2} + \\ & \frac{(\delta\phi + K_+ h_2)^2}{\epsilon} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 + M K_+ \|h_2\|_{L^\infty(H)} \sqrt{T} \|h_D\|_{L^2(0,T;H^1)}^{1/2} e^{T/2}. \end{aligned}$$

D'où la suite $(h_n)_n$ est bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H)$.

On a aussi $(\frac{\partial h_n}{\partial t})_n$ est bornée dans $L^2(0, T; V')$.

Donc d'après le théorème de compacité de **Aubin** la suite $(h_n)_n$ est séquentiellement compacte dans $L^2(0, T; H)$. On peut extraire une sous suite toujours nommée $(h_n)_n$ qui converge vers une limite l dans $L^2(0, T; H)$ et faiblement dans $L^2(0, T; H^1)$. On vérifie que l est solution et comme la solution est unique alors $l = h$. On a bien prouvé la continuité de \mathcal{F}_1 .

Montrons de même que \mathcal{F}_2 est continue :

On pose $h_{1,n} = \mathcal{F}_2(\overline{h^n}, \overline{h_1^n})$ et $h_1 = \mathcal{F}_2(\overline{h}, \overline{h_1})$, montrons que $h_{1,n} \rightarrow h_1$ dans $W(0, T)$.

De même que \mathcal{F}_1 on a donc $(\frac{\partial h_{1,n}}{\partial t})_n$ est bornée dans $L^2(0, T; V')$ et d'après le théorème de compacité de **Aubin** on peut extraire une sous suite toujours notée $(h_{1,n})_n$ qui converge vers une limite t dans $L^2(0, T; H)$ presque partout dans $(0, T) \times \Omega$ et faiblement dans $L^2(0, T; H^1)$, t est solution unique alors $t = f$, d'où la continuité de \mathcal{F}_2 .

Conclusion:

\mathcal{F} est continue car \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ses fonctions sont continues. De plus, si $B \in R_+^*$ est la constante définie par les estimation uniformes, c'est-à-dire :

$$B = \max(\|h_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}; \|h_{1,n}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}; \|\frac{\partial h_n}{\partial t}\|_{L^2(0,T;V')}; \|\frac{\partial h_{1,n}}{\partial t}\|_{L^2(0,T;V')}),$$

et si W est la partie fermée, bornée et convexe de $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ définie par

$$W = \{(g, g_1) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V'))^2; (g(0), g_1(0)) = (h_0, h_{1,0}), (g|_\Gamma, g_1|_\Gamma) = (h_D, h_{1,D}); \|(g, g_1)\|_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V'))^2} \leq B\},$$

alors $\mathcal{F}(W) \subset W$ et la restriction de \mathcal{F} à W est continue. D'après le théorème de point fixe de Schauder, il existe donc $(h, h_1) \in W$ point fixe de \mathcal{F} . On a ainsi l'existence d'une solution faible du système (1).

Etape 2: Elimination de la fonction auxiliaire L_M

Dans cette partie, nous allons montrer l'existence de $M > 0$ et $M' > 0$ tel que:

$$\|\nabla h\|_{L^2(0,T,H)} \leq M \tag{3.12}$$

et

$$\|\nabla h_1\|_{L^2(0,T,H)} \leq M' \quad (3.13)$$

En remplaçant respectivement $w = h - h_D$ dans le première équation et $w = h_1 - h_{1,D}$ dans le deuxième équation , on obtient donc:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h, h - h_D \rangle_{V',V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \phi \nabla h \nabla (h - h_D) dx dt \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h \nabla (h - h_D) dx dt = \\ & \quad - \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \nabla h_1 \nabla (h - h_D) dx dt \\ & \quad - \int_0^T \int_{\Omega} Q_s T_s(h) (h - h_D) dx dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, (h_1 - h_{1,D}) \rangle_{V',V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \phi \nabla h_1 \nabla (h_1 - h_{1,D}) dx dt \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Omega} K(T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \nabla (h_1 - h_{1,D}) dx dt = \\ & \quad - \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h \nabla (h_1 - h_{1,D}) dx dt \\ & \quad - \int_0^T \int_{\Omega} (Q_s T_s(h) + Q_f T_f(h - h_1)) (h_1 - h_{1,D}) dx dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

En appliquant les inéquaitité de Cauchy-Schwarz et de Young et en posant $u = h - h_D, v = h_1 - h_{1,D}$, on obtient pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} u^2(T, x) dx + \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} v^2(T, x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \underbrace{\left\{ \delta \phi - \frac{\epsilon}{4} (\delta \phi + 2K_+ T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1)) \right\}}_{(1)} |\nabla h|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \\ & \quad \underbrace{\left\{ \delta \phi + K_p (1 - L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})) \chi_0^\epsilon(h_1) T_s(h) + K_- T_f(h - h_1) - \frac{\epsilon}{4} (\delta \phi + K T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) (2 + L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}))) \right\}}_{(2)} \\ & \quad |\nabla h_1|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \underbrace{\left\{ K_- T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \right\}}_{(3)} |\nabla (h + h_1)|^2 dx dt \\ & \leq \frac{Q_s}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dx dt + \frac{Q_s + Q_f}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |v|^2 dx dt + C'(u_0, v_0, h_D, h_{1,D}, Q_s, Q_f) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $K_p = (K_- - \frac{K_+^2}{4K_-})$.

On choisit ϵ de sorte que :

$$\begin{aligned}
(1) &= \delta\phi - \frac{\epsilon}{4}(\delta\phi + 2K_+T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1)) \geq 0, \\
(2) &= \delta\phi + K_p(1 - L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}))\chi_0^\epsilon(h_1)T_s(h) + K_-T_f(h - h_1) \\
&\quad - \frac{\epsilon}{4}(\delta\phi + KT_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1)(2 + L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}))) \geq 0, \\
(3) &= K_-T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \geq 0.
\end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}
(1) \geq 0 &\Leftrightarrow \epsilon \leq 4 \frac{\delta\phi}{\delta\phi + 2K_+T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1)}, \\
(2) \geq 0 &\Leftrightarrow \epsilon \leq 4 \frac{\delta\phi + K_p(1 - L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}))\chi_0^\epsilon(h_1)T_s(h) + K_-T_f(h - h_1)}{\delta\phi + KT_s(h)(2 + L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}))\chi_0^\epsilon(h_1)} \\
(3) \geq 0 &\Leftrightarrow \text{toujours vrai car } L_M(x) = \min(1, \frac{M}{x}) \geq 0,
\end{aligned}$$

L'hypothèse $(K_- - \frac{K_+^2}{4K_-}) \geq 0 \Leftrightarrow K_+ \leq 2K_-$ est une sorte de limite à l'hétérogénéité spatiale du milieu.

En simplifiant d'avantage les conditions $(1) \geq 0, (2) \geq 0, (3) \geq 0$, on arrive à choisir ϵ tel que:

$$\epsilon = 4 \min \left\{ \frac{\delta\phi}{\delta\phi + 2K_+h_2}, \frac{\delta\phi + (K_- - \frac{K_+^2}{4K_-}) + K_-h_2}{\delta\phi + 3K_+h_2} \right\},$$

avec $K_+ \leq 2K_-$.

En utilisant le lemme de Gronwall, nous déduisons qu'il existe une constante C , indépendante de ϵ , de la régularisation de χ_0^ϵ et de M telle que:

$$\|h\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \text{ et } \|h_1\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

En particulier, $\|\nabla h_1\|_{L^2} \leq C$ et cela indépendamment du choix de la constante M définissant la fonction L_M .

Nous choisissons donc $M = C$ et pouvons affirmer que toute solution faible du problème

$$\begin{cases}
\phi \partial_t h - \operatorname{div}(\delta\phi \nabla h) - \operatorname{div}(KT_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1)\nabla h) \\
- \operatorname{div}(KT_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1)L_M(\|\nabla h_1\|)\nabla h_1) = -Q_s T_s(h) \\
\phi \partial_t h_1 - \operatorname{div}(\delta\phi \nabla h_1) - \operatorname{div}(K(T_f(h - h_1) + T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1))\nabla h_1) \\
- \operatorname{div}(KT_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1)\nabla h) = -Q_f T_f(h - h_1) - Q_s T_s(h)
\end{cases}$$

avec les conditions initiales et aux bords

$$\begin{cases} h = h_D, & h_1 = h_{1,D} & \text{sur} & \Gamma, \\ h(0, x) = h_0, & h_1(0, x) = h_{1,0}(x) & \text{p.p.dans} & \Omega. \end{cases}$$

satisfait $L_C(\|\nabla h_1\|_{L^2}) = 1$.

Etape 3: Principes du maximum pour la solution de (1)

Nous allons montrer que presque partout dans $(0, T) \times \Omega$

$$0 \leq h_1(t, x) \leq h(t, x) \leq h_2(t, x).$$

Dans cette partie, nous conservons les termes " $L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})$ ", bien qu'il soit maintenant établi qu'ils valent 1, pour la commodité du lecteur habitué à les trouver dans les formulations variationnelles.

1. Nous montrons que $h(t, x) \leq h_2(x)$, p.p. $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0, T)$.

Soit $\eta > 0$ fixé, on pose

$$h_\eta(t, x) = (h(t, x) - \eta - h_2)^+ \in L^2(0, T, V).$$

On a:

$$\nabla h_\eta = \chi_{\{h > \eta + h_2\}} \nabla h \text{ et } h_\eta(t, x) \neq 0 \text{ ssi } h(t, x) > \eta + h_2$$

où χ est la fonction caractéristique.

Soit $\tau \in (0, T)$, on choisit $w(t, x) = h_\eta(t, x)\chi_{(0, \tau)}(t)$ et on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi < \partial_t h, h_\eta >_{V', V} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \delta \phi \nabla h \nabla h_\eta(x, t) \\ + \int_0^T \int_\Omega K T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h \nabla h_\eta(x, t) \chi_{(0, \tau)}(t) dx dt + \\ \int_0^T \int_\Omega K T_s(h) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) \chi_{(0, \tau)}(t) dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega Q_s T_s(h) h_\eta(x, t) \chi_{(0, \tau)}(t) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

On introduit les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi < \partial_t h, h_\eta >_{V', V} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \delta \phi \chi_{\{h > \eta + h_2\}} |\nabla h|^2 dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega K T_s(h) \chi_0^\epsilon(h_1) \chi_{\{h > \eta + h_2\}} |\nabla h|^2 dx dt + \\ \int_0^T \int_\Omega K T_s(h) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) dx dt \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} Q_s T_s(h) h_{\eta}(x, t) dx dt = 0 \quad (3.18)$$

En effet si on pose:

$f(\lambda) := \lambda - \eta - h_2$, f est continue et croissante telle que

$$\overline{\lim}_{\lambda} \left| \frac{f(\lambda)}{\lambda} \right| = \overline{\lim}_{\lambda} \left| \frac{\lambda - \eta - h_2}{\lambda} \right| < \infty.$$

Donc on a:

$$\int_0^T \phi < \partial_t h, h_{\eta} >_{V', V} dt = \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} (h_{\eta}^2(\tau, x) - h_{\eta}^2(0, x)) dx \geq 0$$

car $h_{\eta}(0, x) = (h(0, x) - \eta - h_2)^+ = 0$ par hypothèse sur $h(0, x) = h_0$.

Comme $T_s(h) \chi_{\{h > \eta + h_2\}} = 0$ par définition de T_s ,

$\int_0^T \int_{\Omega} K T_s(h) \chi_0^{\epsilon}(h_1) \chi_{\{h > \eta + h_2\}} |\nabla h|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} K T_s(h) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \chi_0^{\epsilon}(h_1) \nabla h_1 \nabla h_{\eta}(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} Q_s T_s(h) h_{\eta}(x, t) dx dt$ dans (3.41) est nulle, et

$$\frac{\phi}{2} \int_{\Omega} (h_{\eta}^2(\tau, x)) dx = - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \delta \phi \chi_{\{h > \eta + h_2\}} |\nabla h_n|^2 dx dt \leq 0.$$

Comme h_{η} est positif ou nulle, son intégrale double doit l'être aussi d'où la contradiction sauf si h_{η} est nulle presque tout. Donc pour tout $\tau \in (0, T)$:

$$h(\tau, x) \leq h_2(x) + \eta, p.p. x \in \Omega.$$

En faisant tendre $\eta \rightarrow 0$, on obtient $h(\tau, x) \leq h_2(x), p.p. x \in \Omega$.

D'où

$$\forall \tau \in (0, T), p.p. dans \Omega, h(\tau, x) \leq h_2(x).$$

2. Nous montrons que : $0 \leq h_1(t, x), p.p. dans (0, T) \times \Omega$.

Soit $\eta > 0$ et maintenant

$$h_{\eta}(t, x) = (-h_1(t, x) - \eta)^+ \in L^2(0, T, V).$$

On a

$$\nabla h_{\eta} = \chi_{\{h_1 < -\eta\}} \nabla h_1 \text{ et } h_{\eta}(t, x) \neq 0 \text{ ssi } h_1(t, x) < -\eta$$

où χ est la fonction caractéristique.

Soit $\tau \in (0, T)$, on choisit $w(t, x) = -h_\eta(t, x)\chi_{(0, \tau)}(t)$ et on obtient:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, h_\eta(x, t) \rangle_{V', V} dt - \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) dx dt \\
& - \int_0^T \int_\Omega K(T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) dx dt \\
& - \int_0^T \int_\Omega K T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h \nabla h_\eta(x, t) dx dt \\
& - \int_0^T \int_\Omega (Q_f T_f(h - h_1) + Q_s T_s(h)) h_\eta(x, t) dx dt = 0 \tag{3.19}
\end{aligned}$$

avec

$$- \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, h_\eta(x, t) \rangle_{V', V} dt = \frac{\phi}{2} \int_\Omega (h_\eta^2(\tau, x) - h_\eta^2(0, x)) dx \geq 0$$

car $h_\eta(0, x) = (-h_1(0, x) - \eta)^+ = 0$ par hypothèse sur $h_1(0, x) = h_{1,0}$.

$$- \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) dx dt = \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \chi_{\{h_1 < -\eta\}} |\nabla h_1|^2 dx dt.$$

Comme $\chi_0^\epsilon(h_1) = 0$ car $h_1 \leq -\eta$, alors $-\int_0^T \int_\Omega K T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h \nabla h_\eta dx dt = 0$ et

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_\Omega K(T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \nabla h_\eta dx dt \\
& \geq \int_0^\tau \int_\Omega K_- T_f(h - h_1) \chi_{\{h_1 < -\eta\}} |\nabla h_1|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Enfin

$$- \int_0^T \int_\Omega (Q_f T_f(h - h_1) + Q_s T_s(h)) h_\eta(x, t) dx dt \geq 0$$

car

$$T_f(h - h_1) \chi_{\{h_1 < -\eta\}} \leq 0, T_s(h) \chi_{\{h_1 < -\eta\}} \leq 0, Q_f \leq 0 \text{ et } Q_s \leq 0.$$

Donc,

$$\frac{\phi}{2} \int_\Omega (h_\eta^2(\tau, x)) dx = -(\int_0^\tau \int_\Omega (\delta\phi + K_- T_f(h - h_1)) \chi_{\{h_1 < -\eta\}} |\nabla h_{1,n}|^2) dx dt \leq 0,$$

Donc, pour tout $\tau \in (0, T)$:

$$h_1(\tau, x) \geq -\eta, p.p. x \in \Omega,$$

d'où, en faisant tendre η vers 0,

$$\forall \tau \in [0, T], p.p. x \in \Omega, h_1(\tau, x) \geq 0.$$

Pour finir cette partie de la démonstration du principe du maximum,
nous allons montrer que:

$$h_1(t, x) \leq h(t, x), p.p.(t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

Soit $\eta > 0$ fixé et on pose:

$$h_\eta(t, x) = (h_1(t, x) - h(t, x) - \eta)^+ \in L^2(0, T, V).$$

On a:

$$\nabla h_\eta = \chi_{\{h_1 - h > \eta\}} \nabla(h_1 - h) \text{ et } h_\eta(t, x) \neq 0 \text{ ssi } (h_1 - h)(t, x) > \eta$$

où χ est la fonction caractéristique.

Soit $\tau \in (0, T)$, on choisit $w(t, x) = h_\eta(x, t)\chi_{(0, \tau)}(t)$, on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi < \partial_t(h_1 - h), h_\eta(x, t) >_{V', V} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \nabla(h_1 - h) \nabla h_\eta(x, t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega K(T_s(h)\chi_0^\epsilon(h_1) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) dx dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega K T_s(h) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega Q_f T_f(h - h_1) h_\eta(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Or $T_f(h - h_1)\chi_{\{h_1 - h > \eta\}} = 0$, par définition du prolongement de T_f , alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi < \partial_t(h_1 - h), h_\eta(x, t) >_{V', V} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \nabla(h_1 - h) \nabla h_\eta(x, t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega K T_s(h) (1 - L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})) \chi_0^\epsilon(h_1) \nabla h_1 \nabla h_\eta(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

De plus, en gardant à l'esprit que la constante M a été choisie telle sorte que $L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) = 1$, il reste:

$$\int_0^T \phi < \partial_t(h_1 - h), h_\eta(x, t) >_{V', V} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \nabla(h_1 - h) \nabla h_\eta(x, t) dx dt = 0 \quad (3.20)$$

avec

$$\int_0^T \phi < \partial_t(h_1 - h), h_\eta(x, t) >_{V', V} dt = \frac{\phi}{2} \int_\Omega (h_\eta^2(\tau, x) - h_\eta^2(0, x)) dx \geq 0,$$

et

$$\int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \nabla(h_1 - h) \nabla h_\eta(x, t) dx dt = \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \chi_{\{h_1 - h > \eta\}} |\nabla(h_1 - h)|^2 dx dt.$$

Ainsi,

$$\frac{\phi}{2} \int_\Omega (h_\eta^2(\tau, x)) dx = - \int_0^\tau \int_\Omega \delta\phi \chi_{\{h_1 - h > \eta\}} |\nabla(h_1 - h)|^2 dx dt \leq 0.$$

Comme précédemment, on conclut que:

$$\forall t \in (0, T), p.p.x \in \Omega, h_1(t, x) \leq h(t, x)$$

Conclusion:

Après cette partie prouvant les principes du maximum, on vient de montrer que :

$$\forall t \in (0, T), p.p.x \in \Omega, 0 \leq h_1(t, x) \leq h(t, x) \leq h_2(t, x).$$

A la fin de cette étape, nous avons donc prouvé l'existence d'une solution faible $(h^\epsilon, h_1^\epsilon) \in (L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$ du problème :

$$(3) : \begin{cases} \phi \partial_t h^\epsilon - \operatorname{div}(\delta\phi \nabla h^\epsilon) - \operatorname{div}(KT_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \nabla h^\epsilon) \\ - \operatorname{div}(KT_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \nabla h_1^\epsilon) = -Q_s T_s(h^\epsilon) \\ \phi \partial_t h_1^\epsilon - \operatorname{div}(\delta\phi \nabla h_1^\epsilon) - \operatorname{div}(K(T_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) + T_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon)) \nabla h_1^\epsilon) \\ - \operatorname{div}(KT_s(h^\epsilon) \chi_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \nabla h^\epsilon) = -Q_f T_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) - Q_s T_s(h^\epsilon) \end{cases}$$

avec les conditions initiales et aux bords :

$$\begin{cases} h^\epsilon = h_D, & h_1^\epsilon = h_{1,D} & \text{sur} & \Gamma, \\ h^\epsilon(0, x) = h_0, & h_1^\epsilon(0, x) = h_{1,0}(x) & p.p.dans & \Omega. \end{cases}$$

Cette solution satisfait de plus les principes du maximum suivants dans $(0, T)$,

$$0 \leq h_1^\epsilon \leq h^\epsilon \leq h_2^\epsilon, p.p.dans \Omega.$$

Enfin, on note que les estimations qui nous ont permis de définir l'ensemble W sont uniformes par rapport à ϵ . On a ainsi les estimations:

$$(4) \begin{cases} \|h^\epsilon\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C, \|h_1^\epsilon\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C \\ \|\partial_t h^\epsilon\|_{L^2(0, T; V')} \leq C, \|\partial_t h_1^\epsilon\|_{L^2(0, T; V')} \leq C. \end{cases}$$

Etape 4: Existence pour le système sans régularisation de la fonction Heaviside

Pour conclure, nous faisons tendre ϵ vers 0. Des estimations (4) et du théorème de compacité d'Aubin, nous concluons que les suites $(h^\epsilon)_\epsilon$ et $(h_1^\epsilon)_\epsilon$ sont séquentiellement compactes dans $L^2(0, T; H)$ et qu'il existe $(h, h_1) \in W$ tel que:

$$\begin{cases} h^\epsilon \longrightarrow h & \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ et } p.p. \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ h^\epsilon \rightarrow h & \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ \partial_t h^\epsilon \rightarrow \partial_t h & \text{faiblement dans } L^2(0, T; V') \\ h_1^\epsilon \longrightarrow h_1 & \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ et } p.p. \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ h_1^\epsilon \rightarrow h_1 & \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ \partial_t h_1^\epsilon \rightarrow \partial_t h_1 & \text{faiblement dans } L^2(0, T; V') \end{cases}$$

Ces résultats de convergence sont suffisants pour passer à la limite lorsque ϵ tend vers 0 dans le problème (3). De plus (h, h_1) satisfait le principe du maximum conforme à la réalité physique:

$$\forall t \in (0, T), p.p. x \in \Omega, 0 \leq h_1(t, x) \leq h(t, x) \leq h_2(t, x).$$

3.3 Existence globale en temps dans le cas de l'interface nette

On regarde à présent le cas de l'aquifère libre avec l'approche 'interfaces nettes'. Nous introduisons à nouveau les fonctions T_s et T_f définies par :

$$T_s(u) = \begin{cases} h_2 - u & , \forall u \in [0, h_2] \\ 0 & , u \leq 0 \end{cases}$$

et $T_f(u) = u, \forall u \in [\delta, h_2] (0 < \delta < h_2)$

et nous étendons continument par des constantes ces fonctions pour $u \geq h_2$ pour la fonction T_s et en dehors de l'intervalle $[\delta, h_2]$ pour la fonction T_f .

Cette condition sur T_f , impose à l'aquifère une épaisseur d'eau douce toujours $\geq \delta$.

Comme précédemment, les inconnues bien adaptées au cas de l'aquifère libre, sont les hauteurs de deux surfaces libres $h^+ = \sup(0, h) = \chi_0(h)h$ et $h_1^+ = \chi_0(h_1)h_1$. Elles satisfont :

$$\phi \partial_t h - \nabla \cdot (KT_s(h)\nabla h) - \nabla \cdot (KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h_1) = -Q_s T_s(h), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \phi \partial_t h_1 - \nabla \cdot (K(T_f(h - h_1) + T_s(h))\nabla h_1) - \nabla \cdot (KT_s(h)\mathcal{X}_0(h_1)\nabla h) \\ = -\mathcal{X}_0(h_1)(Q_f T_f(h - h_1) + Q_s T_s(h)). \end{aligned} \quad (3.22)$$

On rappelle que $\chi_0(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_1 \leq 0 \\ 1 & \text{si } h_1 \geq 0 \end{cases}$.

On remarque qu'on n'a pas utilisé h^+ et h_1^+ dans les fonctions T_f et T_s car ces informations seraient redondantes. Pour la même raison, on a supprimé $\chi_0(h)$ et $\chi_0(h_1)$ devant les termes $\partial_t h, \partial_t h_1, \nabla h$ et ∇h_1 et on les maintient là où ils sont nécessaires.

Le système (3.21)-(3.22) est complété par les conditions initiales et aux limites

$$h = h_D, h_1 = h_{1,D}, \text{ dans } \Gamma \times (0, T), \quad (3.23)$$

$$h(0, x) = h_0(x), h_1(0, x) = h_{1,0}(x), \text{ dans } \Omega, \quad (3.24)$$

avec les conditions de compatibilité

$$h_0(x) = h_D(0, x), h_{1,0}(x) = h_{1,D}(0, x), x \in \Gamma.$$

Les termes sources \tilde{Q}_f et \tilde{Q}_s sont des fonctions de $L^2(0, T; H)$.

Les fonctions h_D et $h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H'(\Omega))')$ tandis que les fonctions h_0 et $h_{1,0}$ sont dans $H^1(\Omega)$. Enfin, nous supposons que les données initiales et aux limites satisfont les conditions supplémentaires de hiérarchie des hauteurs des interfaces, $0 \leq h_{1,D} \leq h_{1,D} + \delta \leq h_D \leq h_2$, $\forall t \in (0, T)$ p.p. dans Ω et $0 \leq h_{1,0} \leq h_{1,0} + \delta \leq h_0 \leq h_2$ p.p. dans Ω .

Nous pouvons alors énoncer le théorème :

Théorème 6 : Supposons une hétérogénéité spatiale pour le tenseur de conductivité hydraulique:

$$K_+ \leq 2\sqrt{\gamma}K_-, \quad 0 < \gamma < \frac{8}{9}.$$

Alors, pour tout $T > 0$, le problème (3.21)-(3.24) admet une solution faible (h, h_1) satisfaisant

$$(h - h_D, h_1 - h_{1,D}) \in (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H_0^1(\Omega))'))^2$$

De plus, le principe du maximum suivant est vrai:

$$0 \leq h_1(t, x) \quad \text{et} \quad 0 \leq h(t, x) \leq h_2 \quad \text{pour p.p. } x \in \Omega \text{ et pour chaque } t \in (0, T).$$

Pour prouver ce résultat, nous introduisons un problème intermédiaire régularisé et tronqué.

La régularisation est introduite pour juguler la dégénérescence de l'équation (3.21), quant à la troncature, elle permet de contrôler la vitesse de la surface libre dans l'équation d'évolution du front salé.

La première étape consiste à montrer que le problème régularisé et tronqué admet une solution, ce que nous démontrons en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Nous prouvons que nous avons suffisamment contrôlé la vitesse de la surface libre pour éliminer le précédent contrôle. Puis nous montrons que la solution du système régularisé satisfait le principe du maximum énoncé dans

(3.21). Enfin, nous montrons des estimations uniformes suffisantes, nous permettant de faire tendre vers 0 la régularisation.

Preuve de Théorème 6:

Posons $\epsilon > 0$ et soit une constante $M > 0$ que nous préciserons plus tard. Pour toute $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous posons

$$L_M(x) = \min\left(1, \frac{M}{x}\right).$$

Une telle troncature L_M permet à nouveau d'utiliser le point suivant dans les estimations ci-après. Pour toute $(g, g_1) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$, nous posons

$$d(g, g_1) = -T_s(g)L_M(\|\nabla g_1\|_{L^2(\Omega_T)^2})\nabla g_1,$$

on a

$$\|d(g, g_1)\|_{L^2(0, T; H)} = \|T_s(g)L_M(\|\nabla g_1\|_{L^2(\Omega_T)^2})\nabla g_1\|_H \leq Mh_2.$$

Nous définissons également une fonction régularisée pour \mathcal{X}_0 par

$$\mathcal{X}_0(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } h_1 \leq 0 \\ 1 & \text{if } h_1 > 0 \end{cases}, \quad \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } h_1 \leq 0 \\ h_1/(h_1^2 + \epsilon)^{1/2} & \text{if } h_1 > 0. \end{cases}$$

Alors $0 \leq \mathcal{X}_0^\epsilon \leq 1$ et $\mathcal{X}_0^\epsilon \rightarrow \mathcal{X}_0$ comme $\epsilon \rightarrow 0$. En tenant compte de la régularisation \mathcal{X}_0^ϵ de \mathcal{X}_0 , nous remplaçons système (3.21)-(3.22) par :

$$\begin{aligned} \phi \partial_t h^\epsilon - \nabla \cdot (\epsilon \nabla h^\epsilon) - \nabla \cdot (KT_s(h^\epsilon) \nabla h^\epsilon) - \nabla \cdot (KT_s(h^\epsilon) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) L_M(\|\nabla h_1^\epsilon\|_{L^2}) \nabla h_1^\epsilon) \\ = -Q_s T_s(h^\epsilon), \\ \phi \partial_t h_1^\epsilon - \nabla \cdot (\epsilon \nabla h_1^\epsilon) - \nabla \cdot \left(K(T_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) + T_s(h^\epsilon)) \nabla h_1^\epsilon \right) - \nabla \cdot (KT_s(h^\epsilon) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \nabla h^\epsilon) \\ = -Q_f T_f(h^\epsilon - h_1^\epsilon) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) - Q_s T_s(h^\epsilon) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon). \end{aligned}$$

La preuve est décrite comme suit: Dans la première étape, en utilisant le théorème de Schauder, nous prouvons que pour chaque $T > 0$ et chaque $\epsilon > 0$, le système régularisé ci-dessus complété par des conditions initiales et aux limites

$$h^\epsilon = h_D, h_1^\epsilon = h_{1,D} \text{ in } \Gamma \times (0, T), \quad h^\epsilon(0, x) = h_0(x), h_1^\epsilon(0, x) = h_{1,0}(x) \text{ a.e. in } \Omega,$$

a une solution $(h^\epsilon - h_D, h_1^\epsilon - h_{1,D}) \in W(0, T) \times W(0, T)$.

Nous observons que la suite $(h^\epsilon - h_D, h_1^\epsilon - h_{1,D})$ est uniformément bornée dans $(L^2(0, T; V))^2$ et nous montrons le principe du maximum $0 \leq h_1^\epsilon(t, x)$ et $0 \leq h^\epsilon(t, x) \leq h_2$ p.p. dans Ω_T pour tout $\epsilon > 0$.

Enfin, nous prouvons que chaque limite faible (h, h_1) dans $(L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V'))^2$ de la suite $(h^\epsilon, h_1^\epsilon)$, $\epsilon > 0$ est une solution du

problème d'origine.

Etape 1: Existence pour le système régularisé

Nous omettons maintenant ϵ pour des raisons de simplicité dans les notations. La formulation faible de ce dernier problème s'écrit : pour tout $w \in V$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} \epsilon \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} KT_s(h) \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt \\ & \quad + \int_{\Omega_T} KT_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} Q_s T_s(h) w \, dxdt = 0, \quad (3.25) \\ & \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} \epsilon \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} K \left(T_s(h) + T_f(h - h_1) \right) \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dxdt \\ & \quad + \int_{\Omega_T} K \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) T_s(h) \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} \left(Q_f T_f(h - h_1) + Q_s T_s(h) \right) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) w \, dxdt = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pour la stratégie de point fixe, nous définissons l'application \mathcal{F} par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)) & \longrightarrow L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ (\bar{h}, \bar{h}_1) & \longmapsto \mathcal{F}(\bar{h}, \bar{h}_1) = \left(\mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{h}_1) = h, \mathcal{F}_2(\bar{h}, \bar{h}_1) = h_1 \right), \end{aligned}$$

où (h, h_1) est la solution de

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} \epsilon \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} KT_s(\bar{h}) \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt \\ & + \int_{\Omega_T} KT_s(\bar{h}) L_M(\|\nabla \bar{h}_1\|_{L^2}) \mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1) \nabla \bar{h}_1 \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} Q_s T_s(\bar{h}) w \, dxdt = 0 \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} \epsilon \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} K \left(T_s(\bar{h}) + T_f(\bar{h} - \bar{h}_1) \right) \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dxdt \\ & + \int_{\Omega_T} KT_s(\bar{h}) \mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1) \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt + \int_{\Omega_T} \left(Q_f T_f(\bar{h} - \bar{h}_1) + Q_s T_s(\bar{h}) \right) \mathcal{X}_0^\epsilon(\bar{h}_1) w \, dxdt = 0 \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Par ailleurs, nous savons de la théorie parabolique classique que le précédent système variationnelle linéaire admet une unique solution. Il reste à prouver que \mathcal{F} satisfait les propriétés du théorème de Schauder de point fixe .

Mais, puisque les preuves de la continuité de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont très semblables au cas précédent, nous ne reproduisons pas ici les calculs. Nous soulignons également que dans cette étape on peut considérer que le paramètre ϵ joue le même rôle que l'épaisseur de l'interface diffuse δ_1 . Bien sûr, les estimations dépendent

de ϵ , mais cela est suffisant pour cette étape. Nous pouvons donc conclure que \mathcal{F} est continue dans $(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$ parce que ses deux composantes \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 le sont.

De plus, il existe un nombre réel $A \in \mathbb{R}_+^*$ (dépendant des données et du paramètre ϵ) et un ensemble non vide (fortement) fermé convexe borné W de $(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$ défini par :

$$W = \left\{ (g, g_1) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V'))^2; (g(0), g_1(0)) = (h_0, h_{1,0}), \right. \\ \left. (g|_\Gamma, g_1|_\Gamma) = (h_D, h_{1,D}); \|(g, g_1)\|_{(L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V'))^2} \leq A \right\}.$$

telle que $\mathcal{F}(W) \subset W$.

Il résulte de théorème Schauder qu'il existe $(h, h_1) \in W$ telle que $\mathcal{F}(h, h_1) = (h, h_1)$.

Ce point fixe pour \mathcal{F} est une solution faible du problème (3.25)-(3.26).

Étape 2 : Principes du Maximum

Nous pouvons que pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \in (0, T)$,

$$0 \leq h_1(t, x) \quad \text{et} \quad 0 \leq h(t, x) \leq h_2.$$

• **Montrons que $h(t, x) \leq h_2$ p.p. $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0, T)$.**

On pose

$$h_m = (h - h_2)^+ = \sup(0, h - h_2) \in L^2(0, T; V).$$

De plus $\nabla h_m = \chi_{\{h > h_2\}} \nabla h$ et $h_m(t, x) \neq 0$ si et seulement si $h(t, x) > h_2$, où χ désigne la fonction caractéristique.

Soit $\tau \in (0, T)$. Prenons $w(t, x) = h_m(t, x) \chi_{(0, \tau)}(t)$ dans (3.25) cela conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \phi \langle \partial_t h, h_m \rangle_{V', V} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \epsilon \chi_{\{h > h_2\}} |\nabla h|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega K_- T_s(h) \chi_{\{h > h_2\}} \|\nabla h\|^2 dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1^\epsilon) \chi_{\{h > h_2\}} K T_s(h) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \nabla h_1 \cdot \nabla h(x, t) dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega Q_s T_s(h) h_m(x, t) dx dt \leq 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Le lemme de Mignot appliqué à (3.29), donne :

$$\int_0^\tau \phi \langle \partial_t h, h_m \rangle_{V', V} dt = \frac{\phi}{2} \int_\Omega (h_m^2(\tau, x) - h_m^2(0, x)) dx = \frac{\phi}{2} \int_\Omega h_m^2(\tau, x) dx,$$

compte tenu de $h_m(0, \cdot) = (h_0(\cdot) - h_2(\cdot))^+ = 0$ et puisque $T_s(h)\chi_{\{h>h_2\}} = 0$ par définition de T_s , les trois derniers termes de (3.29) sont nuls. D'où (3.29) devient :

$$\frac{\phi}{2} \int_{\Omega} h_m^2(\tau, x) dx \leq - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \epsilon \chi_{\{h>h_2\}} |\nabla h|^2 dx dt \leq 0.$$

Donc $h_m = 0$ p.p. dans Ω_T .

• **Nous prétendons maintenant que $0 \leq h(t, x)$ p.p. $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0, T)$.**

Posons

$$h_m = (-h)^+ \in L^2(0, T; V) \quad \text{puisque} \quad h_D(\cdot, \cdot) \geq 0.$$

Soit $\tau \in (0, T)$. Nous rappelons que $h_m(0, \cdot) = 0$ p.p. dans Ω grâce au principe du maximum satisfait par les données initiales h_0 .

Par ailleurs, $\nabla h_m = -\chi_{\{h<0\}} \nabla h$.

Ainsi, en prenant $w(t, x) = h_m(x, t)\chi_{(0, \tau)}(t)$ dans (3.29) on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \phi \langle \partial_t h, h_m \rangle_{V', V} dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \epsilon \chi_{\{h<0\}} \|\nabla h\|^2 dx dt \\ &= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} T_s(h) \chi_{\{h<0\}} K \nabla h \cdot \nabla h dx dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} Q_s T_s(h) h_m(x, t) dx dt \\ &+ \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \mathcal{X}_0^{\epsilon}(h_1) \chi_{\{h<0\}} K T_s(h) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \nabla h_1 \cdot \nabla h(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Appliquant le lemme de Mignot au premier terme de (3.30) et en tenant compte de $h_m(0, \cdot) = (-h_0)^+ = 0$, on a :

$$\int_0^{\tau} \phi \langle \partial_t h, h_m \rangle_{V', V} dt = \frac{-\phi}{2} \int_{\Omega} (h_m^2(\tau, x) - h_m^2(0, x)) dx = -\frac{\phi}{2} \int_{\Omega} h_m^2(\tau, x) dx.$$

Puisque $T_s(h)\chi_{\{h<0\}} = 0$ par définition de T_s , les trois derniers termes du membre gauche de (3.29) sont nuls.

D'où (3.30) devient :

$$\frac{\phi}{2} \int_{\Omega} h_m^2(\tau, x) dx \leq - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \epsilon \chi_{\{h>h_2\}} \|\nabla h\|^2 dx dt \leq 0.$$

Donc $h_m = 0$ p.p. dans Ω_T .

• **Enfin nous montrons que $0 \leq h_1(t, x)$ p.p. $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0, T)$.**

On pose

$$h_m = (-h_1)^+ \in L^2(0, T; V) \quad \text{car} \quad h_{1,D}(\cdot, \cdot) \geq 0.$$

Soit $\tau \in (0, T)$. Nous rappelons que $h_m(0, \cdot) = 0$, p.p. dans Ω , grâce au principe du maximum satisfait par les données initiales $h_{1,0}$.

De plus, $\nabla h_m = -\chi_{\{h_1 < 0\}} \nabla h_1$.

Ainsi, en prenant $w(t, x) = h_m(x, t)\chi_{(0, \tau)}(t)$ dans (3.26), on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \phi \langle \partial_t h_1, h_m \rangle_{V', V} dt - \int_{\Omega_\tau} \chi_{\{h_1 < 0\}} (\epsilon + T_s(h) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \cdot \nabla h_1 dx dt \\ & - \int_{\Omega_\tau} \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) T_s(h) \chi_{\{h_1 < 0\}} \nabla h \cdot \nabla h_1 dx dt \\ & - \int_{\Omega_\tau} (Q_s T_s(h) + Q_f T_f(h - h_1)) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \chi_{\{h_1 < 0\}} h_1 dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

En appliquant le lemme de Mignot à (3.31) et en tenant compte de $h_m(0, \cdot) = (-h_0)^+ = 0$, on déduit :

$$\int_0^\tau \phi \langle \partial_t h_1, h_m \rangle_{V', V} dt = -\frac{\phi}{2} \int_\Omega (h_m^2(\tau, x) - h_m^2(0, x)) dx = -\frac{\phi}{2} \int_\Omega h_m^2(\tau, x) dx.$$

puisque $\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \chi_{\{h_1 < 0\}} = 0$ par définition of $\mathcal{X}_0^\epsilon(\cdot)$, les deux derniers termes de (3.31) sont nuls.

D'où (3.31) devient (puisque T_s et T_f sont des fonctions non négatives):

$$\frac{\phi}{2} \int_\Omega h_m^2(\tau, x) dx \leq - \int_0^\tau \int_\Omega \epsilon \chi_{\{h > h_2\}} |\nabla h|^2 dx dt \leq 0.$$

Alors $h_m = 0$ p.p. dans Ω_T .

Etape 3: Elimination de la fonction auxiliaire L_M

Nous prétendons maintenant qu'il existe un nombre réel $B > 0$, ne dépendant ni de ϵ ni de M , tel que toute solution faible $(h, h_1) \in W$ du problème (3.25)-(3.26) satisfait :

$$\|\nabla h\|_{L^2(0, T; H)} \leq B \quad \text{and} \quad \|\nabla h_1\|_{L^2(0, T; H)} \leq B. \quad (3.32)$$

En prenant $w = h - h_D$ (resp. $w = h_1 - h_{1,D}$) dans (3.25) (resp. (3.26)) conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h, h - h_D \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} \epsilon \nabla h \cdot \nabla (h - h_D) dx dt + \int_{\Omega_T} K T_s(h) \nabla h \cdot \nabla (h - h_D) dx dt \\ & = - \int_{\Omega_T} K T_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M (\|\nabla h_1\|_{L^2}) \nabla h_1 \cdot \nabla (h - h_D) dx dt - \int_{\Omega_T} Q_s T_s(h) (h - h_D) dx dt \end{aligned} \quad (3.33)$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, h_1 - h_{1,D} \rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_T} \epsilon \nabla h_1 \cdot \nabla (h_1 - h_{1,D}) dxdt \\
& + \int_{\Omega_T} K (T_s(h) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \cdot \nabla (h_1 - h_{1,D}) dxdt = \\
& - \int_{\Omega_T} K T_s(h) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) \nabla h \cdot \nabla (h_1 - h_{1,D}) dxdt \\
& - \int_{\Omega_T} \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) (Q_f T_f(h - h_1) + Q_s T_s(h)) (h_1 - h_{1,D}) dxdt. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Résumant les relations (3.33) et (3.34), et en utilisant la décomposition

$$\begin{aligned}
& K \nabla h \cdot \nabla h + K \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) (L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) + 1) \nabla h_1 \cdot \nabla h \\
& + K \nabla h_1 \cdot \nabla h_1 = K \nabla (h + h_1) \cdot \nabla (h + h_1) \\
& + K \left(1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \right) \nabla h_1 \cdot \nabla h_1 \\
& - K \left(1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \right) \nabla h_1 \cdot \nabla (h + h_1),
\end{aligned}$$

nous pouvons dire que :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_0^T \phi \left(\langle \partial_t (h - h_D), h - h_D \rangle_{V',V} dt + \langle \partial_t (h_1 - h_{1,D}), h_1 - h_{1,D} \rangle_{V',V} \right) dt}_{J_1} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega_T} \epsilon (\nabla h \cdot \nabla h + \nabla h_1 \cdot \nabla h_1) dxdt}_{J_2} + \underbrace{\int_{\Omega_T} K T_s(h) \nabla (h + h_1) \cdot \nabla (h + h_1) dxdt}_{J_3} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega_T} K \left((1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})) T_s(h) + T_f(h - h_1) \right) \nabla h_1 \cdot \nabla h_1 dxdt}_{J_4} \\
& = \underbrace{\int_{\Omega_T} K (1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})) T_s(h) \nabla h_1 \cdot \nabla (h + h_1) dxdt}_{J_5} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega_T} (\epsilon + K T_s(h)) \nabla h \cdot \nabla h_D dxdt}_{J_6} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega_T} (\epsilon + K T_s(h) + K T_f(h - h_1)) \nabla h_1 \cdot \nabla h_{1,D} dxdt}_{J_7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\int_{\Omega_T} KT_s(h)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h_1 \cdot \nabla h_D \, dxdt}_{J_8} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega_T} KT_s(h)\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)\nabla h \cdot \nabla h_{1,D} \, dxdt}_{J_9} \\
& - \underbrace{\int_{\Omega_T} (Q_s T_s(h)(h - h_D) + \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)(Q_f T_f(h - h_1) + Q_s T_s(h))(h_1 - h_{1,D})) \, dxdt}_{J_{10}} \\
& - \underbrace{\int_0^T \phi(\langle \partial_t h_D, h - h_D \rangle_{V',V} + \langle \partial_t h_{1,D}, h_1 - h_{1,D} \rangle_{V',V}) \, dt}_{J_{11}}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Nous devons maintenant estimer tous les termes dans les dernières relations. Nous rappelons que

$$|\mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)| \leq 1, \quad L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \leq 1, \quad 0 \leq T_s(h) \leq h_2 \quad \text{and} \quad \delta_1 \leq T_f(h - h_1) \leq h_2.$$

Ensuite, nous notons que

$$\begin{aligned}
|J_1| &= \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} ((h - h_D)^2(T, x) - (h_0 - h_{0,D})^2(x)) \, dx \\
&\quad + \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} ((h_1 - h_{1,D})^2(T, x) - (h_{1,0} - h_{0,D})^2(x)) \, dx, \\
|J_2| &= \int_{\Omega_T} \epsilon |\nabla h|^2 \, dxdt + \int_{\Omega_T} \epsilon |\nabla h_1|^2 \, dxdt, \\
|J_3| &\geq \int_{\Omega_T} K_- T_s(h) |\nabla(h + h_1)|^2 \, dxdt, \\
|J_4| &\geq \int_{\Omega_T} K_- \left((1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1)L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}))T_s(h) + \delta_1 \right) |\nabla h_1|^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, nous obtenons pour

un réel $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned}
|J_5| &\leq \int_{\Omega_T} T_s(h) \left(\frac{1}{4\gamma} \left(1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \right)^2 \frac{K_+^2}{K_-} |\nabla h_1|^2 + \gamma K_- |\nabla(h+h_1)|^2 \right) dxdt, \\
|J_6| &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla h|^2 dxdt + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt + \frac{\gamma K_-}{16} \int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h+h_1)|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{4h_2 K_+^2}{\gamma K_-} \int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt + \frac{\delta_1 K_-}{12} \int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^2 dxdt + \frac{3h_2^2 K_+^2}{K_- \delta_1} \int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt, \\
|J_7| &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^2 dxdt + \frac{\delta_1 K_-}{6} \int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^2 dxdt + \int_{\Omega_T} \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{3h_2^2 K_+^2}{\delta_1 K_-} \right) |\nabla h_{1,D}|^2 dxdt \\
|J_8| &\leq \frac{\delta_1 K_-}{12} \int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^2 dxdt + \frac{6K_+^2 h_2^2}{2\delta_1 K_-} \int_{\Omega_T} |\nabla h_D|^2 dxdt, \\
|J_9| &\leq \frac{\delta_1 K_-}{12} \int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^2 dxdt + \frac{\gamma K_-}{16} \int_{\Omega_T} T_s(h) |\nabla(h+h_1)|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{K_+^2}{K_-} \left(\frac{3h_2^2}{\delta_1} + \frac{4h_2}{\gamma} \right) \int_{\Omega_T} |\nabla h_{1,D}|^2 dxdt, \\
|J_{10}| &\leq \int_{\Omega_T} T_s(h) |Q_s(h-h_D)| dxdt + \int_{\Omega_T} T_f(h-h_1) |Q_f(h_1-h_{1,D})| dxdt \\
&\quad + \int_{\Omega_T} T_s(h) |Q_s(h_1-h_{1,D})| dxdt \\
&\leq \frac{3\|Q_s\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 2\|Q_f\|_{L^2(0,T;H)}^2}{2\phi} h_2^2 + \frac{\phi}{2} \int_{\Omega_T} |h-h_D|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{\phi}{2} \int_{\Omega_T} |h_1-h_{1,D}|^2 dxdt, \\
|J_{11}| &\leq \frac{\phi}{2} \int_{\Omega_T} |h-h_D|^2 dxdt + \frac{\delta_1 K_-}{24} \int_{\Omega_T} |\nabla(h_1-h_{1,D})|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{\phi}{2} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{12\phi^2}{\delta_1 K_-} \|\partial_t h_{1,D}\|_{L^2(0,T;V')}^2 \\
&\leq \frac{\phi}{2} \int_{\Omega_T} |h-h_D|^2 dxdt + \frac{\delta_1 K_-}{12} \int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{\delta_1 K_-}{12} \int_{\Omega_T} |\nabla h_{1,D}|^2 dxdt + \frac{\phi}{2} \|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{12\phi^2}{\delta_1 K_-} \|\partial_t h_{1,D}\|_{L^2(0,T;V')}^2.
\end{aligned}$$

En additionnant toutes ces estimations, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \phi \int_{\Omega} (h - h_D)^2(T, x) dx + \phi \int_{\Omega} (h_1 - h_{1,D})^2(T, x) dx + \int_{\Omega_T} \epsilon (|\nabla h|^2 + |\nabla h_1|^2) dxdt \\
& + 2 \int_{\Omega_T} \underbrace{\left((K_- - \frac{K_+^2}{4\gamma K_-}) (1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2})) T_s(h) \right)}_{(1)} |\nabla h_1|^2 dxdt \\
& + 2 \int_{\Omega_T} \frac{\delta_1 K_-}{2} |\nabla h_1|^2 dxdt + 2 \int_{\Omega_T} K_- (1 - \frac{9\gamma}{8}) T_s(h) |\nabla(h + h_1)|^2 dxdt \\
& \leq \phi \int_{\Omega_T} |h - h_D|^2 dxdt + \phi \int_{\Omega_T} |h_1 - h_{1,D}|^2 dxdt + C, \tag{3.36}
\end{aligned}$$

où $C = C(u_0, v_0, h_D, h_{1,D}, h_2, Q_s, Q_f)$. Nous allons maintenant appliquer le lemme de Gronwall à (3.36). En raison de l'hypothèse sur K_- et K_+ , (1) ≥ 0 en prenant γ t.q. $0 < \gamma < \frac{8}{9}$, en effet, on a :

$$(1) \geq 0 : \text{ toujours vrai, car } 0 \leq 1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) L_M(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad K_+ \leq 2\sqrt{\gamma} K_-.$$

Maintenant, nous appliquons le lemme de Gronwall et on en déduit qu'il existe un nombre réel B , qui ne dépend ni de ϵ ni de M , tel que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} &\leq B, \quad \|\Psi(h)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq B \\
\text{and } \|h_1\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} &\leq B, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\text{où on pose } \Psi(x) = \int_0^x (h_2 - t)^{1/2} dt = \frac{2}{3} (h_2^{3/2} - (h_2 - x)^{3/2}).$$

En particulier, $\|\nabla h_1\|_{L^2(0,T;H)} \leq B$ et cette estimation ne dépend pas du choix du nombre réel M qui définit fonction L_M .

Ainsi, le terme $L_B(\|\nabla h_1\|_{L^2}) = 1$ peut être oté.

Remarque sur le principe du maximum

Même si nous établissons l'étape 3, nous ne pouvons pas prouver que $h_1(t, x) + \delta_1 \leq h(t, x)$ p.p. $x \in \Omega$ et $\forall t \in (0, T)$.

Posons

$$h_m = (\delta_1 + h_1 - h)^+ \in L^2(0, T; V) \quad \text{puisque} \quad h_{1,D}(\cdot, \cdot) + \delta_1 \leq h_D(\cdot, \cdot).$$

De même, nous rappelons que $h_m(0, \cdot) = 0$ p.p. dans Ω , grâce au principe du maximum satisfait par les données initiales : h_0 and $h_{1,0}$.

De plus, $\nabla h_m = \chi_{\{h < \delta_1 + h_1\}} \nabla(h_1 - h)$.

Soit $\tau \in (0, T)$, ainsi, en prenant $w(t, x) = h_m(x, t) \chi_{(0, \tau)}(t)$ dans (3.25) – (3.26)

entraîne :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \phi \langle \partial_t(h_1 - h), h_m \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_\tau} \chi_{\{h < \delta_1 + h_1\}} (\epsilon + T_s(h)) |\nabla(h_1 - h)|^2 dx dt \\
& + \int_{\Omega_\tau} T_f(h - h_1) \nabla h \cdot \nabla h_m dx dt \\
& + \int_{\Omega_\tau} \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) T_s(h) (\nabla h \cdot \nabla h_m - L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) \nabla h_1 \cdot \nabla h_m) dx dt \\
& - \int_{\Omega_\tau} Q_f T_f(h - h_1) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) h_m dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Appliquant le lemme Mignot à (3.31) et en tenant compte de $h_m(0, \cdot) = 0$, on a

$$\int_0^\tau \phi \langle \partial_t h_1, h_m \rangle_{V', V} dt = \frac{\phi}{2} \int_\Omega (h_m^2(\tau, x) - h_m^2(0, x)) dx = \frac{\phi}{2} \int_\Omega h_m^2(\tau, x) dx.$$

De plus, $L_M(\|\nabla h_1\|_{L^2}) = 1$, alors l'équation ci-dessus devient

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi}{2} \int_\Omega h_m^2(\tau, x) dx + \int_{\Omega_\tau} \chi_{\{h < \delta_1 + h_1\}} (\epsilon + T_s(h)(1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1))) |\nabla(h_1 - h)|^2 dx dt \\
& + \int_{\Omega_\tau} T_f(h - h_1) \nabla h \cdot \nabla h_m dx dt - \int_{\Omega_\tau} Q_f T_f(h - h_1) \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1) h_m dx dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Puisque $T_f(h - h_1) \chi_{\{h < \delta_1 + h_1\}} = \delta_1 > 0$ par définition de T_f , si nous supposons $Q_f \leq 0$, d'où (3.31) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\phi}{2} \int_\Omega h_m^2(\tau, x) dx & + \int_{\Omega_\tau} \delta_1 \nabla h \cdot \nabla h_m dx dt \\
& \leq - \int_0^\tau \int_\Omega \chi_{\{h < \delta_1 + h_1\}} (\epsilon + T_s(h)(1 - \mathcal{X}_0^\epsilon(h_1))) |\nabla(h_1 - h)|^2 dx dt \leq 0.
\end{aligned}$$

et en raison du terme $\int_{\Omega_\tau} \delta_1 \nabla h \cdot \nabla h_m dx dt$, nous ne pouvons pas plus conclure que $h_m = 0$ p.p. sur Ω_T .

Étape 4: Existence pour le système initial

Nous passons maintenant à la dernière étape de la preuve du théorème 3.3, à savoir nous laissons $\epsilon \rightarrow 0$. Nous déduisons des estimations ci-dessus que $(h_1^\epsilon - h_{1,D})_\epsilon$ est uniformément bornée dans $W(0, T)$. On déduit grâce au résultat de compacité de Aubin que $(h_1^\epsilon - h_{1,D})_\epsilon$ est séquentiellement compacte dans $L^2(0, T; H)$.

En ce qui concerne la suite $\{h^\epsilon - h_D\}_\epsilon$, nous procédons comme dans le cas de

l'aquifère confiné quand $\beta = 0$. Nous observons d'abord que Ψ est une fonction strictement décroissante de classe C^1 sur $[0, h_2]$ et Ψ^{-1} est continue sur $\left(0, \frac{2}{3}h_2^{\frac{3}{2}}\right)$.

En majorant les translatés en temps de la suite $\{\Psi(h^\epsilon)\}_\epsilon$, on en déduit que $\{\Psi(h^\epsilon)\}_\epsilon$ est séquentiellement compacte dans $L^2(\Omega_T)$. Précisément, (3.37) donne des estimations pour les translatés en temps dans la norme L^2 de la suite $\{\Psi(h^\epsilon)\}_\epsilon$:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi}^T \langle (h^\epsilon(t, \cdot) - h^\epsilon(t - \xi, \cdot)), \Psi(h^\epsilon(t, x)) - \Psi(h^\epsilon(t - \xi, \cdot)) \rangle_{V', V} dt \\ & \leq \left(\int_{\xi}^T \|h^\epsilon(t, \cdot) - h^\epsilon(t - \xi, \cdot)\|_{V'}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\xi}^T \|\Psi(h^\epsilon(t, \cdot)) - \Psi(h^\epsilon(t - \xi, \cdot))\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left(\int_{\xi}^T \|h^\epsilon(t, \cdot) - h^\epsilon(t - \xi, \cdot)\|_{V'}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{grâce à (3.37)}. \end{aligned}$$

Mais nous savons que, $\forall \xi \in (0, T)$ (cf. [38])

$$\frac{1}{\xi^2} \int_{\xi}^T \|h^\epsilon(t, \cdot) - h^\epsilon(t - \xi, \cdot)\|_{V'}^2 dt \leq \int_{\xi}^T \|\partial_t h^\epsilon\|_{(H^1(\Omega))'}^2 dt \leq C,$$

Enfin, nous obtenons

$$\int_{\xi}^T \langle (h^\epsilon(t, \cdot) - h^\epsilon(t - \xi, \cdot)), \Psi(h^\epsilon(t, x)) - \Psi(h^\epsilon(t - \xi, \cdot)) \rangle_{V', V} dt \leq C \xi, \quad \forall \xi \in (0, T).$$

Grâce à la régularité de Ψ , nous déduisons

$$\int_{\xi}^T \left(\Psi(h^\epsilon(t, \cdot)) - \Psi(h^\epsilon(t - \xi, \cdot)), \Psi(h^\epsilon(t, \cdot)) - \Psi(h^\epsilon(t - \xi, \cdot)) \right)_{L^2(\Omega)} dt \leq C \xi, \quad \forall \xi \in (0, T).$$

Par conséquent, comme dans [[64], Lemme 2.6], on en déduit que $\{\Psi(h^\epsilon)\}_\epsilon$ converge fortement dans $L^2(\Omega_T)$.

En extrayant une sous-suite, non renommée pour plus de commodité, nous affirmons qu'il existe des fonctions h et h_1 telles que

$(h - h_D, h_1 - h_{1,D}) \in W(0, T)^2$ et

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^\epsilon \rightharpoonup h & \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ et p.p. dans } \Omega \times (0, T), \\ \Psi(h^\epsilon) \rightharpoonup \Psi(h) & \text{faible dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \partial_t h^\epsilon \rightharpoonup \partial_t h & \text{faible dans } L^2(0, T; V'), \\ h_1^\epsilon \rightharpoonup h_1 & \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ et p.p. dans } \Omega \times (0, T), \\ h_1^\epsilon \rightharpoonup h_1 & \text{faible dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \partial_t h_1^\epsilon \rightharpoonup \partial_t h_1 & \text{faible dans } L^2(0, T; V'). \end{array} \right.$$

En faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$ dans la formulation faible du problème régularisé et en utilisant le théorème de Lebesgue (grâce aux estimations uniformes 3.37), nous obtenons immédiatement (3.21)-(3.22). La condition initiale (3.23)-(3.24) est satisfaite puisque l'application $i \in W(0, T) \mapsto i(0) \in H$ est continue. En outre le couple (h, h_1) satisfait un principe du maximum qui ne correspond pas à la réalité physique car nous avons perdu les informations entre h_1 et h :

$$0 \leq h_1(x, t) \quad \text{and} \quad 0 \leq h(x, t) \leq h_2, \quad \forall t \in (0, T), \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

La preuve du théorème 6 est complète.

Chapter 4

Unicité de la solution dans le cas de l'approche interface nette-diffuse

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'unicité de la solution pour le problème d'intrusion saline dans un aquifère côtier à nappe captive et à surface libre.

Ainsi que nous l'avons vu, il s'agit d'un système couplé quasi-linéaire d'une équation parabolique et d'une équation elliptique dans le cas de la nappe captive et de deux équations paraboliques dans le cas d'un aquifère libre. Les difficultés essentielles sont d'une part celle liée à la dégénérescence due à la possibilité d'avoir une zone du réservoir d'eau sans eau salée (ou sans eau douce) et d'autre part celle due au couplage non-linéaire entre les deux équations du système. Dans ce chapitre, nous n'aborderons que la seconde difficulté puisque nous nous limiterons au cas de l'approche avec interface diffuse qui permet donc d'éliminer la dégénérescence et de nous concentrer sur la difficulté liée au couplage et à la non-linéarité.

L'unicité de la solution est démontrée en établissant un résultat de régularité supplémentaire pour le couple de solution (h, f) dans le cas confiné et (h, h_1) dans le cas libre. Plus précisément nous généralisons au cas quasi-linéaire le résultat de régularité donné par Meyers ([103]) dans le cas elliptique et étendu au cas parabolique par A. Bensoussan, J.L Lions et G. Papanicolaou pour tout opérateur elliptique $A = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j a_{ij}(x) \partial_i$ (cf. [31]).

Les résultats supposent que l'opérateur A , satisfait une hypothèse d'uniforme ellipticité et que ses coefficients $a_{ij}(\cdot)$ sont des fonctions $L^\infty(\Omega)$. Les hypothèses sur A assurent alors l'existence d'un réel $r(A) > 2$ tel que le gradient de la solution de l'équation elliptique (resp. de l'équation parabolique) avec des conditions de Dirichlet homogènes appartienne à l'espace $L^r(\Omega)$ (resp. $L^r(\Omega_T)$).

Cette régularité supplémentaire combinée aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg permet de traiter la non-linéarité dans la preuve de l'unicité dans le cas confiné (resp. dans le cas libre).

Nous concluons cette introduction en mentionnant le résultat d'unicité dans le cas stationnaire établi par M. Tber et M. Talibi dans ([129], [131]). Le problème peut s'écrire sous la forme d'un système couplé de deux équations elliptiques quasi-linéaires, le couplage résidant alors dans les coefficients des opérateurs elliptiques, ces coefficients dépendant donc des inconnues du problème. La difficulté essentielle consiste à trouver des conditions suffisantes sur les paramètres physiques du problème permettant d'assurer l'uniforme ellipticité d'opérateurs. Le théorème du point-fixe de Schauder combiné au précédent résultat de Meyers permet alors d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème stationnaire. Le cas instationnaire est plus difficile car le couplage non-linéaire ne se limite pas aux coefficients des opérateurs elliptiques mais à l'ensemble des équations.

Ce chapitre est organisé comme suit : les deux premiers paragraphes sont consacrés au cas de l'aquifère confiné. Dans un premier temps, nous rappelons les notations et hypothèses sur les données puis nous prouvons le résultat de régularité supplémentaire, la seconde section donne alors la preuve de l'unicité. Le dernier paragraphe donne les résultats au cas d'un aquifère libre (cf. [60]).

4.2 Notations et résultats de régularité :

4.2.1 Notation

Dans le cas confiné, le système s'écrit

$$\phi \partial_t h - \nabla \cdot [(KT_s(h) + \delta\phi)\nabla h] + \nabla \cdot (KT_s(h)\nabla f) = -Q_s T_s(h), \quad (4.1)$$

$$-h_2 \nabla \cdot (K\nabla f) + \nabla \cdot (KT_s(h)\nabla h) = Q_s T_s(h) + Q_f T_f(h). \quad (4.2)$$

où la fonction $T_s(u) = h_2 - u$ sur $[\delta_1, h_2]$ et est étendue continument et par des constantes en dehors de (δ_1, h) et la fonction $T_f(h) = h$ sur $[0, h_2]$, étendue continument et par des constantes en dehors de $[0, h_2]$.

Ce système est complété par les conditions initiales et les conditions aux limites

$$h = h_D, f = f_D \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \quad (4.3)$$

$$h(0, x) = h_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (4.4)$$

avec la condition de compatibilité

$$h_0(x) = h_D(0, x), x \in \Gamma \quad (4.5)$$

Le tenseur représentant la conductivité hydraulique est tel qu'il existe 2 réels positifs K_- et K_+ vérifiant

$$0 < K_- |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1,2} K_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq K_+ |\xi|^2 < \infty, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^2, \xi \neq 0 \quad (4.6)$$

Nous introduisons l'espace de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) = \{v | v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\}, \quad (4.7)$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}. \quad (4.8)$$

Nous notons

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{Fermeture de } C_0^\infty(\Omega) \text{ dans } W^{1,p}(\Omega), \quad (4.9)$$

que nous munissons de la norme

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)^n}. \quad (4.10)$$

En vertu de l'inégalité de Poincaré, la norme (4.10) est équivalente à la norme (4.8) sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Puis nous définissons l'espace dual $W^{-1,p}(\Omega)$ comme suit:

Etant donné $1 < p < \infty$, on définit p' par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

On pose $W^{-1,p}(\Omega) = (W_0^{1,p'}(\Omega))'$ = espace dual de $W_0^{1,p'}(\Omega)$

où $L^2(\Omega)$ est identifié à son dual.

On observe que l'application

$$\begin{aligned} (L^p(\Omega))^n &\longrightarrow W^{-1,p}(\Omega) \\ \phi &\longmapsto \text{div } \phi \end{aligned}$$

est surjective. Nous munissons alors $W^{-1,p}(\Omega)$ avec la norme quotient associée, i.e.

$$\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = \inf_{\text{div} g = f} \|g\|_{(L^p(\Omega))^n}. \quad (4.11)$$

qui est une façon de définir la norme sur $W^{-1,p}(\Omega)$.

4.2.2 Rappels des résultats de régularité

- **Cas elliptique**

Nous rappelons enfin le résultat (cf. J. L. Lions et E. Magenes [101]):

$\forall p$, t.q. $1 < p < \infty$, $-\Delta$ est un isomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p}(\Omega)$.

On pose $G = (-\Delta)^{-1}$ et $g(p) = \|G\|_{\mathcal{L}(W^{-1,p}(\Omega); W_0^{1,p}(\Omega))}$.

On souligne que $g(2)=1$.

Nous donnons à présent deux lemmes préliminaires qui sont une conséquence du résultat de régularité de Meyers [103] et dont on peut trouver les détails de la démonstration dans [31].

On énoncera les lemmes pour tout domaine Ω dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) de frontière Γ suffisamment régulière.

Lemme 5 : Soit $A \in (L^\infty(\Omega))^n$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \forall x \in \Omega \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $\beta = \max_{1 \leq i,j \leq n} \|A_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Il existe $r(\alpha, \beta) > 2$, tel que , pour tout $f \in W^{-1,r}(\Omega)$ et $\forall g_0 \in W^{1,r}(\Omega)$, l'unique solution u du problème

$$\begin{cases} \nabla \cdot (A \nabla u) = f, \forall x \in \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) + g_0 \end{cases}$$

appartient à $W^{1,r}(\Omega)$. De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C(\alpha, \beta, r) \|f - \nabla \cdot (A \nabla g_0)\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \quad (4.12)$$

où $C(\alpha, \beta, r)$ est une constante ne dépendant que des constantes α et β caractérisant l'opérateur A et de r .

Remarque :

1) La preuve donnée dans [31] nous permet de préciser la constante $C(\alpha, \beta, r)$.

Soit $c \geq 0$, posons

$$\mu = \frac{\alpha + c}{\beta + c} \text{ et } \nu^2 = \frac{\beta^2 + c^2}{(\beta + c)^2}, \quad (4.13)$$

nous choisissons c t.q. $c > \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}$ de sorte à assurer $\nu < \mu$. Puisque $g(2) = 1$ et $0 < 1 - \mu + \nu < 1$, en utilisant la continuité de l'application $g(\cdot)$, on peut donc trouver $r > 2$ tel que

$$g(r)(1 - \mu + \nu) < 1. \quad (4.14)$$

Ainsi, plus $(1 - \mu + \nu)$ sera petit, plus r pourra être grand, donc la détermination de r dépendra des constantes α, β liées à l'opérateur elliptique A .

Le cas limite correspond au cas où l'opérateur A est le Laplacien, (ou proportionnel au Laplacien), alors $\mu = 1$ et $\nu = 0$ donc (4.14) est satisfaite

$\forall r \geq 2$.

Compte tenu des précédentes estimations, nous pouvons majorer la constante $C(\alpha, \beta, r)$ par

$$C(\alpha, \beta, r) \leq (1 - g(r)(1 - \mu + \nu))^{-1} \frac{g(r)}{\beta + c}. \quad (4.15)$$

2) Remarquons aussi que si le résultat est établi pour $r > 2$, alors il sera vrai aussi $\forall r', 2 \leq r' \leq r$.

3) Classiquement, la condition de Dirichlet peut être intégrée au second membre; par ailleurs, un calcul simple montre que

$$\|\nabla \cdot (A\nabla g_0)\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \leq \|\nabla g_0\|_{(L^r(\Omega))^n} \quad (4.16)$$

• **Cas parabolique**

Énonçons, à présent, le lemme correspondant au cas parabolique.

Nous définissons (cf. [31])

$$X_p = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)),$$

muni de la norme :

$$\left(\int_0^T \|v(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)^n}.$$

Nous introduisons

$$Y_p = L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$$

et nous soulignons que l'application $v \rightarrow \operatorname{div}_x v$ envoie $(L^p(\Omega_T))^n$ sur $L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$. Nous munissons alors Y_p de la norme $\|f\|_{Y_p} = \inf_{\operatorname{div}_x g=f} \|g\|_{L^p(\Omega_T)^n}$, nous pouvons alors énoncer l'analogie du lemme 5 (cf. [31]).

Lemme 6 : Soit f et u^0 étant donnés tels que $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ et $u^0 \in H$. Soit u la solution appartenant à $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f & \text{dans } \Omega_T \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

Alors, en supposant que Γ est suffisamment régulière, il existe $r > 2$, dépendant de α, β et Ω tel que si

$$f \in L^r(0, T; W^{-1,r}(\Omega))$$

et si

$$u^0 \in W^{-1,r}(\Omega)$$

alors $u \in L^r(0, T; W_0^{1,r}(\Omega))$ et il existe $\hat{C}(\alpha, \beta, r) > 0$ telle que

$$\|u\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \leq \hat{C}(\alpha, \beta, r)(\|f\|_{L^r(0,T;W^{-1,r}(\Omega))} + \|u_0\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}). \quad (4.17)$$

Remarque :

1) Comme pour le lemme 5, nous pouvons préciser la constante $\hat{C}(\alpha, \beta, r)$ (cf. [31]).

Posons

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, \text{ l'opérateur associé aux conditions de Dirichlet homogènes.}$$

Il est connu que, étant donné $F \in Y_p$, il existe une unique solution $u \in X_p$ telle que :

$$\begin{cases} Pu = F & \text{dans } \Omega_T. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Posons $\hat{g}(p) = \|P^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y_p; X_p)}$, alors $\hat{g}(2) = 1$.

En utilisant la continuité de l'application $\hat{g}(\cdot)$, on peut donc trouver $r > 2$ tel que

$$\hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1, \quad (4.18)$$

où les constantes $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ et \hat{c} sont les constantes définies précédemment par (4.13) grâce aux constantes $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

A nouveau, plus $(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu})$ sera petit, plus r pourra être grand, donc la détermination de r dépendra essentiellement des constantes $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ caractérisant l'opérateur elliptique A .

La constante $\hat{C}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, r)$ doit alors satisfaire :

$$\hat{C}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, r) \leq (1 - \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}))^{-1} \frac{\hat{g}(r)}{\hat{\beta} + \hat{c}}. \quad (4.19)$$

2) Nous pouvons reproduire la remarque 2.3 de [31] qui souligne que le problème peut être réduit au cas où la condition initiale $u^0 = 0$. En effet, on peut trouver $\phi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, $\frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, ϕ dépendant continument de u_0 (dans la topologie correspondant à l'espace précédent), telle que $\phi(0) = u^0$ alors on considère $u - \phi$ à la place de u .

4.2.3 Preuve du résultat de régularité

Détermination de l'exposant $r > 2$ en fonction des paramètres physiques:

La détermination de r dépend uniquement des coefficients d'ellipticité des opérateurs et de leur norme L_∞ . Nous allons préciser cette dépendance en fonction des paramètres physiques.

Rappelons que la quantité $g(r)(1 - \mu + \nu)$ dépend de α, β avec, dans notre cas, $\alpha = K_-, \beta = K_+$ et $g(r) = \|(\Delta)^{-1}\|_{L(W^{-1,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega))}$.

Donc

$$\mu = \frac{K_- + c}{K_+ + c} \text{ et } \nu^2 = \frac{K_+^2 + c^2}{(K_+ + c)^2} \quad (4.20)$$

et la constante c est choisie telle que $c > \frac{K_+^2 - K_-^2}{2K_-}$ de sorte à assurer $\nu < \mu$.

Ainsi, si r est tel que $k(r) := g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$, alors cet exposant convient. Réciproquement, soit r donné > 2 , on peut toujours ajuster K_- et K_+ pour que $k(r) = g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$.

Concernant $\hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu})$, nous avons $\hat{\alpha} = \delta, \hat{\beta} = \delta + K_+ \frac{(h_2 - \delta_1)}{\phi}$ et $\hat{g}(r) =$

$$\|P^{-1}\|_{L(Y_r, X_r)}.$$

Donc

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{c}}{\hat{\beta} + \hat{c}} \text{ et } \hat{\nu}^2 = \frac{\hat{\beta}^2 + \hat{c}^2}{(\hat{\beta} + \hat{c})^2}, \quad (4.21)$$

et nous choisissons $\hat{c} > 0$ t.q. $\hat{c} > \frac{\hat{\beta}^2 - \hat{\alpha}^2}{2\hat{\alpha}}$ de sorte à assurer $\hat{\nu} < \hat{\mu}$. Ainsi, si

$r \geq 2$ est tel que $\hat{k}(r) := \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$, alors cet exposant convient.

Réciproquement, soit r donné > 2 , on peut toujours ajuster h_2, δ_1, K_+, ϕ et δ pour que $\hat{k}(r) = \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$.

Soit $r_1(K_-, K_+) > 2$ le plus grand réel tel que $g(r_1)(1 - \mu - \nu) < 1$ où μ et ν sont définis par (4.20) et soit $r_2(\phi, \delta, \delta_1, h_2, K_+) > 2$, le plus grand réel tel que $\hat{g}(r_2)(1 - \hat{\mu} - \hat{\nu}) < 1$ où $\hat{\mu}$ et $\hat{\nu}$ sont définis par (4.21), posons

$$r(\phi, \delta, \delta_1, h_2, K_-, K_+) = \text{Inf}(r_1(K_-, K_+), r_2(\phi, \delta, \delta_1, h_2, K_+)). \quad (4.22)$$

Proposition 1:

Soit (h, f) une solution du problème (4.1)-(4.5) et $r(\phi, \delta, \delta_1, h_2, K_-, K_+) > 2$ le réel déterminé par (4.22). Si $(h_D, f_D) \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2, h_0 \in W^{1,r}(\Omega)$ et $(Q_s, Q_f) \in L^r(\Omega_T)^2$ alors ∇h et ∇f sont dans $L^r(\Omega_T)$, de plus on a

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_1(\phi, h_2, h_0, h_D, f_D, Q_s, Q_f, K_-, K_+, \delta, \delta_1) \quad (4.23)$$

et

$$\|\nabla f\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_2(\phi, h_2, h_0, h_D, f_D, Q_s, Q_f, K_-, K_+, \delta, \delta_1). \quad (4.24)$$

Pour montrer ce résultat de régularité supplémentaire, il faut repartir de la construction d'une solution du problème (4.1)-(4.5) dans la preuve du théorème d'existence plus précisément de la construction de la solution du problème intermédiaire tronqué et linéarisé. Nous rappelons que cette dernière solution apparait comme le point fixe d'une application, nous allons donc intégrer à ce processus de construction le résultat de régularité $L^r(\Omega_T)$. Sans redétailler cette preuve, nous allons rappeler les résultats importants qui avaient été établis au cours de l'étape 1 de la preuve de l'existence d'une solution et y intégrer l'estimation en norme $L^r(\Omega_T)$ des gradients des inconnues .

Étape 1: Existence pour le système tronqué :

Soit M une constante que nous préciserons plus tard, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous posons

$$L_M(x) = \min\left(1, \frac{M}{x}\right).$$

On introduit le problème tronqué :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi < \partial_t h, w >_{V, V'} + \int_{\Omega_T} \delta \phi \nabla h \cdot \nabla w + \int_{\Omega_T} Q_s T_s(h) w \, dxdt \\ & + \int_{\Omega_T} T_s(h) K (\nabla h \cdot \nabla w - L_M(\|\nabla f\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \nabla f \cdot \nabla w) \, dxdt = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\int_{\Omega_T} h_2 K \nabla f \cdot \nabla w \, dxdt - \int_{\Omega_T} T_s(h) K \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt - \int_{\Omega_T} (Q_s T_s(h) + Q_f T_f(h)) w \, dxdt = 0. \quad (4.26)$$

Pour la stratégie de point fixe, nous définissons l'application \mathcal{F} par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} & : (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)))^2 \longrightarrow (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)))^2 \\ & (\bar{h} - h_D, \bar{f} - f_D) \longrightarrow \mathcal{F}(\bar{h}, \bar{f}), \\ & \mathcal{F}(\bar{h}, \bar{f}) = (\mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{f}) = h, \mathcal{F}_2(\bar{h}, \bar{f}) = f), \end{aligned}$$

où le couple (h, f) est une solution du problème variationnel linéaire suivant, pour tout $w \in V$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \phi \langle \partial_t h, w \rangle_{V, V'} + \int_{\Omega_T} \delta \phi \nabla h \cdot \nabla w + \int_{\Omega_T} Q_s T_s(\bar{h}) w \, dxdt \\
& + \int_{\Omega_T} (T_s(\bar{h}) K \nabla h \cdot \nabla w - L_M(\|\nabla \bar{f}\|_{H^2(\Omega)}) K \nabla \bar{f} \cdot \nabla w) \, dxdt = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\int_{\Omega_T} h_2 K \nabla f \cdot \nabla w \, dxdt - \int_{\Omega_T} T_s(\bar{h}) K \nabla h \cdot \nabla w \, dxdt - \int_{\Omega_T} (Q_s T_s(\bar{h}) + Q_f T_f(\bar{h})) w \, dxdt = 0. \tag{4.28}$$

Nous savons de la théorie parabolique classique que ce système variationnel linéaire admet une solution unique. La suite de l'étape est consacrée à la preuve des propriétés que doit satisfaire l'application \mathcal{F} pour appliquer le théorème du point fixe.

Dans un premier, nous montrons qu'il existe des nombres réels

$A_M = A_M(\phi, \delta, K, h_0, h_D, h_2, Q_s, M, T)$ et

$B_M = B_M(\phi, \delta, K, h_{1,0}, h_{1,D}, h_2, Q_s, Q_f, M, C_M, T)$ dépendant uniquement des données tels que

$$\|h\|_{L^2(0,T;H)} \leq A_M, \quad \|f\|_{L^2(0,T;H^1)} \leq B_M. \tag{4.29}$$

Dans la suite, nous posons

$$C_M = \max(A_M, B_M).$$

Puis nous montrons qu'il existe une constante $D_M > 0$ telle que

$$\|\partial_t h\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2 \leq D_M := \frac{1}{\phi} \left(\|\partial_t h_D\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2 + \delta \phi C_M + h_2(K_+ C_M + M + \|Q_s\|_H) \right).$$

Ces estimations nous permettent de montrer que \mathcal{F} est continue dans $(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$.

Par ailleurs, en posant $A \in \mathbb{R}_+^*$ le nombre réel défini par :

$$A(M) = \max(C_M, D_M) \tag{4.30}$$

et en introduisant W l'ensemble convexe fermé borné

$$W = \{(g, g_1) \in I(0, T) = (L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V')) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))\}$$

$$, g(0) = h_0, (g|_\Gamma, g_1|_\Gamma) = (h_D, f_D); \|(g; g_1)\|_{I(0,T)} \leq A(M)\},$$

nous avons prouver que $\mathcal{F}(W) \subset W$.

(Ce qui permet d'appliquer le théorème du point fixe à l'application \mathcal{F} sur l'ensemble W). Nous allons améliorer ce résultat.

Soient (M', M'') , deux réels strictement positifs que nous allons définir ultérieurement, nous posons

$$\tilde{W} = \{(g, g_1) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega)))^2, g(0) = h_0, (g|_\Gamma, g_1|_\Gamma) = (h_D, f_D);$$

$$\|(g; g_1)\|_{I(0,T)} \leq A(M), \|\nabla g_1\|_{L^r(\Omega_T)} \leq M' \text{ et } \|\nabla g\|_{L^r(\Omega_T)} \leq M''\}. \quad (4.31)$$

Notre but est de montrer que $\mathcal{F}(\tilde{W}) \subset \tilde{W}$. En appliquant le lemme 6 à l'équation (4.27), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)^2} &\leq \frac{\hat{g}(r)}{(1-\hat{k}(r))(\hat{\beta}-\hat{c})} \left(\frac{(h_2-\delta_1)}{\phi} (K_+ \|\nabla \bar{f}\|_{L^r(\Omega_T)^2} + \|Q_s\|_{L^r(\Omega_T)}) \right. \\ &\quad \left. + \|h_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|\nabla h_D\|_{L^r(\Omega_T)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

De même, en appliquant le lemme 5 à l'équation (4.28), nous déduisons que

$$\begin{aligned} h_2 \|\nabla f\|_{L^r(\Omega_T)^2} &\leq \frac{g(r)}{(1-k(r))(\beta-c)} \times \left((h_2-\delta_1) (K_+ \|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)^2} + \|Q_s\|_{L^r(\Omega_T)}) \right. \\ &\quad \left. + \|Q_f\|_{L^r(\Omega_T)} + \|\nabla f_D\|_{L^r(\Omega_T)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

donc

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{L^r(\Omega_T)^2} &\leq \frac{g(r)}{(1-k(r))(\beta-c)} \times \frac{\hat{g}(r)}{(1-\hat{k}(r))(\hat{\beta}-\hat{c})} \frac{(h_2-\delta_1)^2 K_+^2}{\phi h_2} \|\nabla \bar{f}\|_{L^r(\Omega_T)^2} \\ &\quad + \frac{(h_2-\delta_1) \times g(r)}{h_2(1-k(r))(\beta-c)} \times \left(\left(\frac{(h_2-\delta_1) \times \hat{g}(r) K_+}{\phi(1-\hat{k}(r))(\hat{\beta}-\hat{c})} + 1 \right) \|Q_s\|_{L^r(\Omega_T)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{g}(r) K_+}{(1-\hat{k}(r))(\hat{\beta}-\hat{c})} (\|h_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|\nabla h_D\|_{L^r(\Omega_T)^2}) \right. \\ &\quad \left. + (\|Q_f\|_{L^r(\Omega_T)} + \|\nabla f_D\|_{L^r(\Omega_T)^2}) \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

On impose qu'il existe γ , $0 < \gamma < 1$ tel que ϕ , h_2 , K_- , K_+ , δ et δ_1 satisfassent

$$\frac{g(r)}{(1-k(r))(\beta-c)} \times \frac{\hat{g}(r)}{(1-\hat{k}(r))(\hat{\beta}-\hat{c})} \frac{(h_2-\delta_1)^2 K_+^2}{\phi h_2} \leq 1 - \gamma \quad (4.35)$$

et que la constante M' soit telle que les conditions initiales et aux limites ainsi que les termes sources satisfassent

$$\begin{aligned} \frac{(h_2-\delta_1) \times g(r)}{h_2(1-k(r))(\beta-c)} \times \left(\frac{\hat{g}(r) K_+}{(1-\hat{k}(r))(\hat{\beta}-\hat{c})} \left(\frac{(h_2-\delta_1)}{\phi} \|Q_s\|_{L^r(\Omega_T)} + \|h_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|\nabla h_D\|_{L^r(\Omega_T)^2} \right) \right. \\ \left. + (\|Q_s\|_{L^r(\Omega_T)} + \|Q_f\|_{L^r(\Omega_T)} + \|\nabla f_D\|_{L^r(\Omega_T)^2}) \right) \leq \gamma M'. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Compte tenu de (4.34), (4.35) et (4.36), on déduit que :

$$\|\nabla f\|_{L^r(\Omega_T)^2} \leq M' \quad (4.37)$$

et

$$\begin{aligned} \|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)^2} \leq M'' := & \frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} - \hat{c})} \left(\frac{(h_2 - \delta_1)}{\phi} (K_+ M' + \|Q_s\|_{L^r(\Omega_T)}) \right. \\ & \left. + \|h_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|\nabla h_D\|_{L^r(\Omega_T)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nous soulignons que les deux réels M' et M'' sont totalement indépendants de la troncature M . Soit \tilde{W} le convexe fermé borné défini par (4.31), nous venons de montrer que $\mathcal{F}(\tilde{W}) \subset \tilde{W}$. Il découle du théorème de Schauder qu'il existe $(\tilde{h}, \tilde{f}) \in \tilde{W}$ tel que $\mathcal{F}(\tilde{h}, \tilde{f}) = (\tilde{h}, \tilde{f})$. Ce point fixe de \mathcal{F} est une solution faible du problème tronqué.

À partir de cette étape, les preuves du principe du maximum et de l'élimination du terme de troncature L_M se faisant comme dans le chapitre 2, nous les omettons. Nous venons donc de prouver la Proposition 1 établissant que le gradient de la solution de notre problème vérifie une estimation uniforme dans l'espace $L^r(\Omega_T)$.

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, grâce aux inégalités d'interpolation, nous avons aussi les estimations précédentes (4.37) et (4.38) dans $L^{r'}(\Omega_T)$, $\forall r', 2 \leq r' \leq r$.

4.3 Unicité dans le cas confiné avec interface diffuse

Nous sommes à présent en mesure d'établir le résultat d'unicité qui nous permet de dire que notre problème est bien posé dans l'espace $W(0, T)$ introduit précédemment.

Soit (h, f) et (\bar{h}, \bar{f}) deux solutions de (4.1)-(4.5).

Posons $u = h - \bar{h} \in W(0, T)$, $v = f - \bar{f} \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$.

Alors (u, v) est solution de

$$\begin{aligned} & \phi \partial_t u - \nabla \cdot (\delta \phi + K T_s(\bar{h})) \nabla u - \nabla \cdot (K(T_s(h) - T_s(\bar{h})) \nabla h) \\ & \quad + \nabla \cdot (K(T_s(h) - T_s(\bar{h})) \nabla f) + \nabla \cdot (K T_s(\bar{h}) \nabla v) = 0 \\ & -h_2 \nabla \cdot (K \nabla v) + \nabla \cdot (K(T_s(h) - T_s(\bar{h})) \nabla h) + \nabla \cdot (K T_s(\bar{h}) \nabla u) = 0 \end{aligned}$$

Théorème 7 : Soient $(\phi, h_2, K_-, K_+, \delta, \delta_1) \in (\mathbb{R}_*^+)^6$ tels que $g(4)(1-\mu+\nu) < 1$ et $\hat{g}(4)(1-\hat{\mu}+\hat{\nu}) < 1$ et (4.41) et (4.42) soient vérifiées. Supposons de plus que $h_0 \in W^{1,4}(\Omega)$, $(h_D, f_D) \in L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))^2$ et $(Q_s, Q_f) \in L^4(\Omega_T)^2$, alors la solution du système (4.1)-(4.5) est unique dans $W(0, T) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

La preuve de ce théorème repose sur le précédent résultat de régularité établi pour $r = 4$, qui combiné aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg, nous permet de majorer les termes non-linéaires.

Preuve :

Soit $t \in [0, T]$, nous soulignons que toutes les estimations précédemment établies au temps T , sont valides $\forall t \leq T$. Puisque $h, \bar{h} \in [\delta_1, h_2]$, $T_s(h) - T_s(\bar{h}) = \bar{h} - h = -u$, donc les deux précédentes équations se simplifient en :

$$\begin{aligned} \phi \partial_t u - \nabla \cdot (\delta \phi + KT_s(\bar{h})) \nabla u + \nabla \cdot (Ku \nabla h) - \nabla \cdot (Ku \nabla f) + \nabla (KT_s(\bar{h}) \nabla v) &= 0 \\ -h_2 \nabla \cdot (K \nabla v) - \nabla \cdot (Ku \nabla h) + \nabla \cdot (KT_s(\bar{h}) \nabla u) &= 0 \end{aligned}$$

En intégrant ces équations sur $(0, t) \times \Omega$, nous obtenons $\forall (w_1, w_2) \in W(0, T)^2$

$$\begin{aligned} \phi \int_{\Omega_t} \partial_t u w_1 + \int_{\Omega_t} (\delta \phi + KT_s(\bar{h})) \nabla u \cdot \nabla w_1 \\ - Ku \nabla h \cdot \nabla w_1 + Ku \nabla f \cdot \nabla w_1 - KT_s(\bar{h}) \nabla v \cdot \nabla w_1 &= 0 \end{aligned}$$

et

$$h_2 \int_{\Omega_t} K \nabla v \cdot \nabla w_2 + \int_{\Omega_t} Ku \nabla f \cdot \nabla w_2 - \int_{\Omega_t} KT_s(\bar{h}) \nabla v \cdot \nabla w_2 = 0$$

En prenant $w_1 = u$ et $w_2 = v$, puisque $u(t=0, \cdot) = 0$ p.p sur Ω , la sommation des 2 équations nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + \int_{\Omega_t} (\delta \phi + KT_s(\bar{h})) \nabla u \cdot \nabla u + h_2 \int_{\Omega_t} K \nabla v \cdot \nabla v - 2 \int_{\Omega_t} KT_s(\bar{h}) \nabla v \cdot \nabla u \\ + \int_{\Omega_t} Ku \nabla f \cdot \nabla u - \int_{\Omega_t} Ku \nabla h \cdot \nabla u + \int_{\Omega_t} Ku \nabla h \cdot \nabla v = 0 \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + \int_{\Omega_t} \delta \phi \nabla u^2 + \int_{\Omega_t} KT_s(\bar{h}) \nabla (u - v) \cdot \nabla (u - v) \\ + \int_{\Omega_t} \bar{h} K \nabla v \cdot \nabla v + \int_{\Omega_t} Ku \nabla (f - h) \cdot \nabla u + \int_{\Omega_t} Ku \nabla h \cdot \nabla v = 0 \end{aligned}$$

Par définition de $T_s(\bar{h})$, nous obtenons

$$0 \leq \int_{\Omega_t} KT_s(\bar{h}) \nabla (u - v) \cdot \nabla (u - v)$$

Par ailleurs $\bar{h} \in [\delta_1, h_2]$, donc

$$\delta_1 K_- \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \leq \int_{\Omega_t} \bar{h} K \nabla v \cdot \nabla v.$$

D'autre part

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} K u \nabla(f-h) \cdot \nabla u \right| \leq \int_0^t K_+ \left(\int_{\Omega} u^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} (\nabla(f-h))^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} dt \quad (4.39)$$

En utilisant la Proposition 1, on déduit que

$$\left(\int_{\Omega_t} |\nabla(f-h)|^4 \right)^{1/4} \leq C_{4,1} + C_{4,2} := C_4,$$

D'autre part l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg avec $q = 2$ et $p = 4$ ($a = 1 - \frac{q}{2}$) entraîne que

$$\left(\int_{\Omega} |u|^4 \right)^{1/4} \leq C_G \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Finalement l'inégalité de Young appliqué à (4.39) donne

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_t} K u \nabla(f-h) \cdot \nabla u \right| \\ & \leq K_+ \left(\int_0^t (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla(f-h)|^4 dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq K_+ C_G C_4 \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right)^{3/4} \\ & \leq K_+ C_G C_4 \left\{ \frac{1}{8} \epsilon_1^{-3} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\epsilon_1 \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right\}, \quad \epsilon_1 > 0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Omega_t} K u \nabla h \cdot \nabla v \right| \\
& \leq \int_0^t K_+ \left(\int_{\Omega} u^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} dt \\
& \leq K_+ C_G \int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} dt \\
& \leq K_+ C_G \left(\int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h|^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq K_+ C_G C_{4,1} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq K_+ C_G C_{4,1} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_1} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + \frac{\epsilon_1}{2} \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right\} \\
& \leq K_+ C_G C_{4,1} \left\{ \frac{1}{16\epsilon_1^3} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon_1 \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right\} + \frac{K_+ C_G C_{4,1} \epsilon_1}{2} \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2
\end{aligned}$$

Finalement en regroupant toutes ces inégalité, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + (\delta\phi - K_+ C_G \epsilon_1 (2C_4 + C_{4,1})) \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 + (\delta_1 K_- - \frac{K_+ C_G C_{4,1}}{2} \epsilon_1) \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \\
\leq \frac{K_+}{8\epsilon_1^3} C_G \left(C_4 + \frac{C_{4,1}}{2} \right) \max_{t \in (0,T)} \left(\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \right) \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Fixons $\epsilon_1 > 0$ tel que

$$\delta\phi - K_+ \epsilon_1 C_G (2C_4 + C_{4,1}) > 0 \tag{4.41}$$

et

$$\delta_1 K_- - \frac{K_+ C_{4,1} C_G}{2} \epsilon_1 > 0 \tag{4.42}$$

alors, en passant au maximum sur $(0, T)$ à gauche de l'inégalité (4.40), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\phi}{2} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx & \leq \frac{K_+}{8\epsilon_1^3} \left(C_4 + \frac{C_{4,1}}{2} \right) \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx \\
\iff \\
\left(\frac{\phi}{2} - \frac{K_+}{8\epsilon_1^3} C_G \left(C_4 + \frac{C_{4,1}}{2} \right) \right) \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx & \leq 0 \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Ainsi si

$$\frac{\phi}{2} - \frac{K_+ C_G}{8\epsilon_1^3} \left(C_4 + \frac{C_{4,1}}{2} \right) > 0, \tag{4.44}$$

(4.43) implique que $\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx = 0$ et donc $u = 0$ presque partout dans Ω_T .

Cette information, intégrée à l'inégalité (4.40), entraîne que $\int_{\Omega_T} |\nabla v|^2 = 0$ et puisque $v \in H_0^1(\Omega)$, cela conduit à $v = 0$ p.p. dans Ω_T .

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque : La condition (4.44) peut paraître très restrictive, mais nous soulignons qu'en changeant l'échelle de temps, on peut prendre un coefficient devant " $\frac{\partial h}{\partial t}$ " arbitrairement grand, ce qui donne un sens à l'inégalité (4.44), ϕ ne représentant alors plus la porosité.

4.4 Unicité dans le cas d'un aquifère libre

Nous allons à présent énoncer un résultat d'unicité analogue à celui énoncé dans le cas confiné. Dans le cas des aquifères libres, les inconnues sont les hauteurs des deux interfaces libres (h, h_1) et nous rappelons que le système s'écrit alors

$$\phi \partial_t h - \nabla \cdot ((\delta\phi + KT_s(h))\nabla h) - \nabla \cdot (KT_s(h)\chi_0(h_1)\nabla h_1) = -\tilde{Q}_s \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \phi \partial_t h_1 - \nabla \cdot (\delta\phi + K(T_s(h) + T_f(h - h_1))\nabla h_1) &= \nabla \cdot (KT_s(h)\chi_0(h_1)\nabla h) \\ &= -\chi_0(h_1)(\tilde{Q}_f + \tilde{Q}_s) \end{aligned} \quad (4.46)$$

où $T_s(h) = h_2 - h$, $T_f(h) = h$, $\forall h \in (0, h_2)$ qu'on étend continument et par des constantes en dehors de $(0, h_2)$.

Le système est complété par les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$h = h_D, h_1 = h_{1,D}, \quad \text{dans } \Gamma \times (0, T), \quad (4.47)$$

$$h(0, x) = h_0(x), h_1(0, x) = h_{1,0}(x), \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.48)$$

avec les conditions de compatibilité

$$h_0(x) = h_D(0, x), h_{1,0}(x) = h_{1,D}(0, x), x \in \Gamma. \quad (4.49)$$

Les fonctions h_D et $h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H^1(\Omega))')$, tandis que les fonctions h_0 et $h_{1,0}$ sont dans $H^1(\Omega)$ et nous supposons que les données initiales et aux limites satisfont des conditions physiquement naturelle de hiérarchie entre les profondeurs des interfaces :

$0 \leq h_{1,D} \leq h_D \leq h_2$, p.p. dans $\Gamma \times (0, T)$, $0 \leq h_{1,0} \leq h_0 \leq h_2$, p.p. dans Ω .

Si nous supposons plus de régularité sur les données, nous pouvons alors énoncer le résultat :

Proposition 2 : Soit (h, h_1) une solution de (4.45)-(4.49), alors il existe $r(\alpha, \beta) > 2$ tel que si $(h_D, h_{1,D}) \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2$, $(h_0, h_{1,0}) \in W^{1,r}(\Omega)^2$, $(Q_s, Q_f) \in L^r(\Omega_T)^2$, alors ∇h et ∇h_1 sont dans $L^r(\Omega_T)^2$.

De plus, on a

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_{r,1}(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, Q_s, Q_f, h_2, \delta, K) \quad (4.50)$$

$$\|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_{r,2}(h_0, h_D, h_{1,0}, h_{1,D}, Q_s, Q_f, h_2, \delta, K) \quad (4.51)$$

La preuve de cette proposition reprend les étapes de la proposition précédente donnée dans le cas confiné mais elle est plus technique.

Précisons qu'ici $\alpha = \delta$ et $\beta = \delta + \frac{K_+ h_2}{\phi}$.

Ce résultat s'inscrivant dans le cadre plus général d'un système couplé d'équations paraboliques quasi-linéaires et dont la démonstration est donnée dans [60], nous n'entrerons pas plus dans les détails.

Nous concluons cette section, en énonçant le théorème d'unicité :

Théorème 8 : Supposons que $(h_2, \delta, K_+, \phi) \in \mathbb{R}_*^{+4}$ soient tels que $\hat{g}(4)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$ et que les données initiales et aux limites vérifient les hypothèses de la Proposition 2, alors la solution du système (4.45)-(4.49) est unique dans $W(0, T)^2$.

Remarque :

1) Les paramètres physiques sont ajustés de sorte que $r \geq 4$.

2) A nouveau, la preuve de ce résultat repose sur le même arguments que celui établi dans le cas confiné mais est plus technique. Nous renvoyons le lecteur à [60] pour le détail de la preuve.

Chapter 5

Identification des paramètres dans le cas instationnaire

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'identification de la conductivité hydraulique K et de la porosité ϕ . Nous soulignons que dans ce chapitre, le tenseur hydraulique K sera identifié à une constante. Il s'agit d'estimer ces paramètres en fonction d'observations ou de mesures sur le terrain faites sur les charges hydrauliques et sur la profondeur de l'interface eau douce/eau salée. Notons que, concrètement, nous ne disposons que d'observations ponctuelles (en espace et en temps) correspondant aux nombres du puits de monitoring.

Par ailleurs le phénomène d'intrusion marine est souvent transitoire et l'étude de sensibilité proposé dans [114] montre que la forme de l'interface eau douce/eau salée dépend essentiellement de la conductivité hydraulique, les autres paramètres telle que la porosité impactent surtout le temps mis à atteindre le régime permanent, c'est pourquoi on doit considérer le modèle instationnaire pour identifier simultanément ces deux paramètres (cf.[129], [131]).

Soulignons aussi que la problématique d'identification de paramètres a souvent été abordée dans le cadre de l'hydraulique souterraine (cf. [41],[76],[91],[102],[125],[145]), mais plus rarement en ce qui concerne le phénomène d'intrusion saline, les premières études faites par Sun et Yeh (cf. [126]) développent le cas des résolutions de problèmes inverses pour des systèmes couplés et proposent, notamment, dans le cas de l'intrusion saline, le système adjoint associé au système stationnaire correspondant.

Notons enfin que les études existantes concernent essentiellement les résolutions numériques de ces problèmes inverses. Cependant M. E. Talibi et M. H. Tber ont démontré l'existence du contrôle optimal et ont donné les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas d'une interface eau salée/eau douce stationnaire (cf. [127], [128], [129], [131]).

Ce chapitre est une généralisation de ce travail au cas instationnaire. Le prob-

lème inverse se traduit alors par un problème d'optimisation, la fonction coût calculant l'écart quadratique entre la profondeur de l'interface (et la charge hydraulique d'eau douce) mesurées et celles données par le modèle. Le convexe décrit par les paramètres admissibles est l'espace des fonctions à variations bornées ce qui permet de tenir compte de leurs discontinuités.

Le chapitre s'organise comme suit : Dans un premier temps, nous rappelons les propriétés essentielles de l'espace des fonctions à variations bornées. Le problème d'identification se ramène alors à chercher le minimum de la fonction coût associée à la solution du problème instationnaire. Grâce aux résultats de régularité établis aux chapitre 2 et 4 pour la solution du problème exact, nous montrons l'existence du contrôle optimal.

Puis en considérant ce système comme une contrainte pour le problème d'optimisation et en introduisant le Lagrangien associé à la fonction coût et à la solution du problème instationnaire, nous établissons que le système d'optimalité (constitué par les équations d'état, les équations d'état adjoint et la condition d'optimalité) admet au moins une solution.

Nous établissons ces résultats en ne considérant que K comme paramètre à identifier puis nous généralisons l'étude au cas de l'identification simultanée de la conductivité hydraulique K et de la porosité ϕ .

5.2 Formulation du problème

L'espace $BV(\Omega)$.

On se place sur un domaine Ω ouvert et borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ lipschitzienne, on note $M_b(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon bornée sur Ω , $M_b(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace des fonctions continues sur Ω s'annulant sur Γ muni de la topologie de la convergence uniforme. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{M_b(\Omega)} = |u|(\Omega) = \int_{\Omega} |u|,$$

où $|u|(\Omega)$ représente la variation totale de u sur Ω et $|u| = u^+ - u_-$, avec :

$$u^+ = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, u^- = \inf_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

En utilisant la définition de la dualité de $M_b(\Omega)$, on peut également définir $\|u\|_{M_b(\Omega)}$ de la façon suivant :

$$\|u\|_{M_b(\Omega)} = \int_{\Omega} |u| = \sup \left\{ \int_{\Omega} v(x) du(x), v \in C_0(\Omega), \|v\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}.$$

Définition.1. Soit f une fonction de $L^1(\Omega)$; on appelle variation totale de f sur Ω le réel

$$TV(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} v(x) dx, v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \|v\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

f est dite à variation bornée si $TV(f) < \infty$.

On note $BV(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^1(\Omega)$ à variation bornée sur Ω , qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_1 + TV(f).$$

Pour conclure cette section, nous rappelons quelques propriétés de l'espace $BV(\Omega)$ utiles pour la suite .

Proposition 3 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $BV(\Omega)$, alors

1. Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$, alors

$$TV(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} TV(f_n).$$

2. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\Omega)$, alors il existe une fonction f de $BV(\Omega)$ telle que, à une sous suite près,

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^1(\Omega).$$

3. Pour tout f dans $BV(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et $r \in [1, +\infty[$, il existe une sous suite $(f_n)_n$ de $C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f - f_n|^r d\Omega = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} TV(f_n) = TV(f).$$

4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans U_{adm} qui converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers un élément f . Alors f est dans U_{adm} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers f dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$.

Preuve de 4 : Comme f_n converge vers f dans $L^1(\Omega)$ et $K_m \leq f_n \leq K_M$, alors on a $K_m \leq f_n \leq K_M$ presque partout sur Ω . De plus, par (1) de la proposition précédente on a :

$$TV(f) \leq c,$$

d'où $f \in U_{adm}$.

La seconde partie de la démonstration découle de l'estimation suivant :

$$\|f_n - f\|_{L^r(\Omega)}^r \leq \text{mes}(\Omega)(K_M - K_m)^{r-1} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)}$$

pour tout $r \in [1, +\infty[$.

Formulation du problème :

Etant donné une observation répartie de la charge hydraulique de l'eau douce $\bar{\phi}_f$ et de la profondeur de l'interface eau douce / eau salée, h , appartenant à $L^2(\Omega)^2$, notre objectif est d'identifier la conductivité hydraulique et la porosité correspondante, (K^*, ϕ^*) , dans le cas de l'écoulement instationnaire régi par le

système (5.1)-(5.5). Pour étudier ce problème nous introduisons le problème de contrôle suivant :

$$(\mathcal{O}_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (K^*, \phi^*) \in U_{adm} \text{ tel que} \\ \mathcal{J}(K^*, \phi^*) = \inf_{(K, \phi) \in U_{adm}} \mathcal{J}(K, \phi) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où

$$\mathcal{J}(K, \phi) = \frac{1}{2} \|\phi_f(K, \phi) - \phi_{f,obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{2} \|h(K, \phi) - h_{obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2$$

Le tensor $K = K \cdot Id$, donc K est un scalaire.

avec $(\phi_f(K, \phi), h(K, \phi))$ la solution du problème variationnel (4.1)-(4.5), $(\phi_{f,obs}, h_{obs})$ étant les charges hydrauliques observées. Nous soulignons que dans la plupart des situations pratiques, déterminer la profondeur de l'eau douce / l'eau salée nécessite de creuser des puits qui doivent arriver à des niveaux, souvent, très profonds sous la surface, mais cela reste concevable.

Afin d'assurer l'existence d'une solution de (\mathcal{O}_c) , il faut choisir soigneusement l'ensemble des paramètres admissibles U_{adm} . Prendre U_{adm} dans l'espace $L^\infty(\Omega)$ assure bien sûr l'existence et l'unicité de la solution du problème direct (sous certaines conditions sur les paramètres physiques) mais ne permet pas d'avoir l'existence du contrôle optimal, d'autre part, le choix de U_{adm} dans $H^1(\Omega)$ est trop contraignant et doit être affaibli. Nous proposons donc de travailler sur l'ensemble des paramètres admissibles :

$$U_{adm} = \{(K, \phi) \in (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2, \phi_m \leq \phi \leq \phi_M, K_m \leq K \leq K_M \text{ et } TV(K, \phi) \leq c\}.$$

où ϕ_m, ϕ_M, K_m, K_M , et c sont des constantes réelles strictement positives.

Dans un premier temps, nous allons limiter notre étude à l'identification de la conductivité hydraulique, on supposera donc connue la porosité. Dans ce cas le problème de contrôle (\mathcal{O}_c) devient :

$$(\mathcal{O}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } K^* \in U_{adm} \text{ tel que} \\ \mathcal{J}(K^*) = \inf_{K \in U_{adm}} \mathcal{J}(K) \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{J}(K) = \frac{1}{2} \|\phi_f(K) - \phi_{f,obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{2} \|h(K) - h_{obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \lambda^2 TV(K).$$

Soient K_m, K_M et c sont constantes fixées, on définit :

$$U_{adm} = \{K \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), K_m \leq K \leq K_M \text{ et } TV(K) \leq c\},$$

$(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ est l'espace de Banach des fonctions à variation bornée sur Ω pour lequel nous allons rappeler quelques résultats connus. $TV(K)$, définie ci-dessous, désigne la variation totale de K .

Corollaire. 1. U_{adm} est un sous ensemble compact de $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$.

Preuve : Ce corollaire est une conséquence immédiate des points 3. et 4. de la proposition précédente.

5.3 Existence du contrôle optimal

A partir des résultat établis dans le chapitre précédent, nous allons étudier dans cette section le problème (\mathcal{O}) . Dans la suite on supposera toutes les hypothèses assurant l'existence, les estimations a priori, la régularité et l'unicité de la solution du problème direct, et nous désignerons par $\phi(K) = (\phi_f(K), h(K))$ la solution du problème variationnel correspondant à une conductivité donnée K . Nous donnons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 9 : Il existe au moins un contrôle optimal pour le problème (\mathcal{O}) .

Preuve : Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U_{adm}$ une suite minimisante telle que

$$\mathcal{J}(K_n) \longrightarrow \mathcal{J}^* = \inf_{K \in U_{adm}} \mathcal{J}(K).$$

Du corollaire 1, on déduit qu'il existe une sous suite, toujours notée K_n , et une fonction $K^* \in U_{adm}$ tels que

$$K_n \longrightarrow K^* \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (5.2)$$

D'autre part, d'après le théorème d'existence pour le cas confiné et $\beta = 1$, la solution $\phi = (\phi_f^n, h^n) = (\phi_f(K_n), h(K_n))$ du problème variationnel, vérifie :

$$\|\phi_f^n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} + \|h^n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq C, \quad \delta_1 \leq h^n \leq h_2, \quad (5.3)$$

$$\|\partial_t h^n\|_{L^2(0,T,V')} \leq C, \quad (5.4)$$

où C est une constante ne dépendant pas de n .

Nous pouvons alors reprendre le raisonnement du passage à la limite que nous avons fait dans la démonstration de l'existence globale en temps du problème (4.1)-(4.5).

Puisque $(h^n)_n$ est uniformément bornée dans $W(0, T)$, nous déduisons grâce au résultat de compacité d'Aubin que $(h^n - h_D)_n$ est sequentiellement compacte dans $L^2(0, T, H)$. Par ailleurs $(\phi_f^n)_n$ est faiblement sequentiellement compacte dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

On peut donc extraire une sous-suite, non renommée, $(\phi_f^n, h^n - h_D)_n \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times W(0, T)$ et $(\phi_f^*, h^* - h_D) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times W(0, T)$ tq:

$$\begin{aligned} h^n &\longrightarrow h^* \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ et p.p. dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t h^n &\longrightarrow \partial_t h^* \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V'), \\ \phi_f^n &\longrightarrow \phi_f^* \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Ce qui permet de passer à la limite dans la formulation variationnelle.
Donc de l'unicité de la solution, il vient que :

$$\phi^* = (\phi_f^*, h^*) = (\phi_f(K^*), h(K^*)) \text{ et donc } \mathcal{J}(K^*) = \mathcal{J}^*.$$

Ce qui termine la démonstration.

5.4 Conditions d'optimalité

Le problème d'identification se ramène à chercher le minimum de la fonction coût \mathcal{J} , le système d'état étant le problème instationnaire (4.1)-(4.5). On considère ce système comme une contrainte pour le problème d'optimisation et on introduit le Lagrangien \mathcal{L} défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_f, h, \lambda_i, K) &= \mathcal{J}(K) + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h}{\partial t} \lambda_i dx dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (\delta\phi + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i dx dt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} K T_s(h) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i dx dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} K(x) (h_2 - h_1) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_f dx dt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \alpha K(x) T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f dx dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} Q_s \lambda_i dx dt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (Q_s + Q_f) \lambda_f dx dt. \end{aligned} \tag{5.5}$$

La solution correspond alors à un point selle de ce Lagrangien considéré comme une fonction des variables indépendantes $h, \phi_f, \lambda_i, \lambda_f$ et K avec λ_i et λ_f les multiplicateurs de Lagrange. Le minimum recherché, K^* , vérifie le système d'optimalité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_f}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_f}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) \cdot (K - K^*) \geq 0, & \forall K \in U_{adm}. \end{array} \right. \tag{5.6}$$

En outre le système d'état est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha K T_s(h) \nabla h) + \operatorname{div}(K T_s(h) \nabla \phi_f) = -Q_s, \\ -\operatorname{div}(K (h_2 - h_1) \nabla \phi_f) + \operatorname{div}(\alpha K T_s(h) \nabla h) = Q_f + Q_s, \end{array} \right. \tag{5.7}$$

$$h = h_D, \phi_f = \phi_{f,D}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \tag{5.8}$$

$$h(0, x) = h_0(x), \forall x \in \Omega, \quad (5.9)$$

et le système d'état adjoint est donné par le système rétrograde suivant :

$$\begin{cases} -\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} - \operatorname{div}((\delta\phi + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_i) - \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i + K(x) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i, \\ + \operatorname{div}(\alpha K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f) + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f = h_{obs} - h, \\ - \operatorname{div}(K(x)(h_2 - h_1) \nabla \phi_f) + \operatorname{div}(K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i) = \phi_{f,obs} - \phi_f, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\lambda_i = 0, \lambda_f = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad \lambda_i(t_f, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Proposition 4 : Soit $(\phi_f, h) = \phi(K)$ la solution de (4.1)-(4.5) associée à la conductivité hydraulique $K(\in U_{adm})$. Alors le problème adjoint :

Trouver $(\lambda_i, \lambda_f) \in W(0, T) \times H_0^1(\Omega)$ tel que, $\forall (\varphi_f, \varphi_i) \in H_0^1(\Omega)^2$:

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} [-\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \varphi_i + (\delta\phi + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i - \alpha K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_i] dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} [K(x) (\nabla \phi_f - \alpha \nabla h) \cdot \nabla \lambda_i + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f] \varphi_i dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (h_{obs} - h) \varphi_i dx dt, \\ \int_0^T \int_{\Omega} [K(x)(h_2 - h_1) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_f - K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_f] dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (\phi_{f,obs} - \phi_f) \varphi_f dx dt \end{cases} \quad (5.12)$$

admet une unique solution.

Preuve : Dans un premier temps, nous posons $t = t_f - t'$, le système (5.12) devient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [-\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \varphi_i + (\delta\phi + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i - \alpha K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_i] dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} [K(x) (\nabla \phi_f - \alpha \nabla h) \cdot \nabla \lambda_i + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f] \varphi_i dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} (h_{obs} - h) \varphi_i dx dt, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [K(x)(h_2 - h_1) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_f - K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_f] dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} (\phi_{f,obs} - \phi_f) \varphi_f dx dt, \end{aligned} \quad (5.14)$$

et la condition initiale devient $\lambda_i(0, x) = 0, \forall x \in \Omega$.

Il s'agit d'un système couplé d'équations linéaires elliptique-parabolique.

Pour montrer l'existence d'une solution du système (4.1)-(4.5), nous allons procéder de la même façon que pour la preuve de l'existence globale d'une solution dans le cas confiné avec interface diffuse (cf. Chapitre 2). Nous soulignons que la seule difficulté dans le cas présent est la présence des termes linéaires $\int_{\Omega_T} K(\nabla\phi_f - \alpha\nabla h) \cdot \nabla\lambda_i$, $\int_{\Omega_T} K\nabla h \cdot \nabla\lambda_f$ pour lesquels nous allons utiliser le résultat de régularité établi au chapitre 4, donnant une estimation de la norme L^r ($r > 2$) des gradients de h et de ϕ_f .

Existence globale en temps :

Pour la stratégie du point fixe, nous introduisons l'application \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2 &\longrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2, \\ (\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f) &\longrightarrow \mathcal{F}(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f) = (\lambda_i, \lambda_f), \end{aligned}$$

avec $\mathcal{F}(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f) = (\mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f), \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f))$, le couple (λ_i, λ_f) est solution du problème variationnel.

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \phi \partial_t \lambda_i, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta\phi + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla w dx dt \\ - &\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_f\|_{L^2(\Omega_T)}) \nabla \bar{\lambda}_f \cdot \nabla w dx dt \\ + &\int_{\Omega_T} K(x) L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_i^2\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \cdot \nabla \bar{\lambda}_i^2 \cdot w dx dt \\ + &\alpha \int_{\Omega_T} K(x) L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_f\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \nabla \bar{\lambda}_f \cdot \nabla h w dx dt = \int_{\Omega_T} (h - h_{obs}) w dx dt \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} K(x)(h_2 - h_1) \nabla \lambda_f \cdot \nabla w dx dt &- \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i \cdot \nabla w dx dt \\ &= \int_{\Omega_T} (\phi_f - \phi_{f,obs}) w dx dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

$\forall w \in H_0^1(\Omega)$ (La fonction $L_M(x) = \min(1, \frac{M}{x})$, $x \in \mathbb{R}_+$ et M est une constante > 0 qu'on précisera ultérieurement).

Nous savons grâce à la théorie classique sur les équations paraboliques et elliptiques linéaires que le précédent système variationnel admet une unique solution. Montrons la continuité de \mathcal{F} , donc celles de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .

Continuité de \mathcal{F}_1 :

Soit $(\bar{\lambda}_i^n, \bar{\lambda}_f^n)$ une suite de fonction de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2$ et $(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2$ tels que $(\bar{\lambda}_i^n, \bar{\lambda}_f^n) \rightarrow (\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2$.

Posons $\lambda_{i,n} = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_i^n, \bar{\lambda}_f^n)$ et $h = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f)$, montrons qu'alors $\lambda_{i,n} \rightarrow \lambda$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Prenons $w = \lambda_{i,n}$ dans (5.15) écrite avec $\lambda_{i,n}$ et $\bar{\lambda}_f^n$. Nous obtenons après quelques transformations :

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi}{2} (\|\lambda_{i,n}\|_H^2 - \underbrace{\|\lambda_{i,n}(0, \cdot)\|_H^2}_{=0}) + \underbrace{\int_{\Omega_T} (\delta\phi + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_{i,n} \cdot \nabla \lambda_{i,n} dxdt}_{(1)} \\
& \quad - \alpha \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) L_M (\|\nabla \bar{\lambda}_f^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \nabla \bar{\lambda}_f^n \cdot \nabla \lambda_{i,n} dxdt}_{(2)} \\
& \quad + \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) (\nabla \phi_f - \alpha \nabla f) \cdot \nabla \bar{\lambda}_i^n L_M (\|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \lambda_{i,n} dxdt}_{(3)} \\
& \quad + \alpha \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) L_M (\|\nabla \bar{\lambda}_f^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \nabla \bar{\lambda}_f^n \cdot \nabla h \lambda_{i,n} dxdt}_{(4)} \\
& \quad = \underbrace{\int_{\Omega_T} (h - h_{obs}) \lambda_{i,n} dxdt}_{(5)}.
\end{aligned}$$

Clairement (1) $\geq \delta\phi \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega_T)}^2$.

Par ailleurs, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young ainsi qu'aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg, on obtient $\forall \epsilon > 0$:

$$|(2)| \leq \alpha K_+ h_2 M \sqrt{T} \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{\alpha^2 K_+^2 h_2^2 M^2 T}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega_T)}^2,$$

$$\begin{aligned}
|(3)| &\leq \int_0^T L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \left| \int_{\Omega} K(x)(\nabla \phi_f - \alpha \nabla h) \cdot \nabla \bar{\lambda}_i^n \lambda_{i,n} dx dt \right| \\
&\leq L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) K_+ \left\{ \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi_f|^4 dx \right) \right. \\
&\quad \left. + \alpha \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^4 dx \right) \right\}^{1/4} \left(\int_{\Omega} \lambda_{i,n}^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{\lambda}_i^n|^2 \right)^{1/2} dt \\
&\leq L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) K_+ \left\{ \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi_f|^4 dx \right) + \alpha \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^4 dx \right) \right\}^{1/4} \\
&\quad \cdot C(4, \Omega) \left(\int_{\Omega} |\nabla \lambda_{i,n}|^2 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \lambda_{i,n}^2 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{\lambda}_i^n|^2 \right)^{1/2} dt \\
&\leq L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) K_+ C(4, \Omega) \underbrace{\left(\|\nabla \phi_f\|_{L^4(\Omega_T)} + \alpha \|\nabla h\|_{L^4(\Omega_T)} \right)}_{\leq C_4(1+\alpha)} \\
&\quad \cdot \left(\int_0^T \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/4} \|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(\Omega_T)} \\
&\leq K_+^2 C_4^2 (1+\alpha)^2 C^2(4, \Omega) M^2 \times \frac{1}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \left(\int_0^T \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{K_+^2 C_4^2 (1+\alpha)^2 C^2(4, \Omega) M^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{4} \max_{t \in (0, T)} \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{4} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_{i,n}|^2.
\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
|(4)| &\leq \alpha K_+ L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_f^n\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \lambda_{i,n}^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{\lambda}_f^n|^2 \right)^{1/2} dt \\
&\leq \alpha K_+ M C_4 \left(\int_0^T \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/4} \\
&\leq \alpha^2 K_+^2 M^2 C_4^2 \times \frac{1}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \left(\int_0^T \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\alpha^2 K_+^2 C_4^2 M^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{4} \max_{t \in (0, T)} \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{4} \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega_T)}^2.
\end{aligned}$$

Finalement

$$|(5)| \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega_T} (h - h_{obs})^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \max_{t \in (0, T)} \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

En rassemblant ces inégalités, nous obtenons :

$$\frac{\phi}{2} \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\delta\phi - \epsilon) \|\nabla \lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq \max_{t \in (0, T)} \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C,$$

où C est une constante ne dépendant que des données et de M .

Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\delta\phi - \epsilon > 0$ et $\frac{\phi}{2} - \epsilon > 0$, nous venons d'établir qu'il existe

deux réels $A_M(h, h_{obs}, \phi_f, K, \alpha, C_4, \delta, \phi, h_2, T)$ et $B_M(h, h_{obs}, \phi_f, K, \alpha, C_4, \delta, \phi, h_2, T)$ dépendant seulement des données du problème tels que

$$\|\lambda_{i,n}\|_{L^\infty(0,T,H)}^2 \leq A_M \text{ et } \|\lambda_{i,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq B_M.$$

Donc la suite $(\lambda_{i,n})_n$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

On pose alors $C_M = \max(A_M, B_M)$.

Nous allons établir que $(\partial_t \lambda_{i,n})_n$ est bornée dans $L^2(0, T; V') \cap L^1(0, T; H)$.

$$\begin{aligned} & \| \partial_t \lambda_{i,n} \|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} = \\ & \sup_{\|w\|_{(L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H))} \leq 1} \left| \underbrace{\int_{\Omega_T} (\delta\phi + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_{i,n} \cdot \nabla w dx dt}_{(1)} \right. \\ & + \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_f^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2) \nabla \bar{\lambda}_f^n \cdot \nabla w}_{(2)} \\ & - \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) (\nabla \phi_f - \alpha \nabla h) \cdot \nabla \bar{\lambda}_i^n L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2) w dx dt}_{(3)} \\ & - \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) L_M(\|\nabla \bar{\lambda}_f^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2) \nabla \bar{\lambda}_f^n \cdot \nabla h w dx dt}_{(4)} \\ & \left. + \underbrace{\int_{\Omega_T} (h - h_{obs}) w dx dt}_{(5)} \right| \end{aligned}$$

Le principe des calculs étant le même que dans les inégalités précédentes, nous n'indiquerons que les estimations clefs.

$$\begin{aligned} |(1)| & \leq (\delta\phi + \alpha K_+ h_2) C_M \|w\|_{L^2(0,T;V)}, \\ |(2)| & \leq \alpha K_+ h_2 M \|w\|_{L^2(0,T;V)}, \\ |(3)| & \leq (1 + \alpha) K_+ M C_4 C_G \|w\|_{L^\infty(0,T;H)}^{1/4} \|w\|_{L^2(0,T;V)}^{1/2}, \\ |(4)| & \leq \alpha K_+ M C_4 C_G \|w\|_{L^\infty(0,T;H)}^{1/4} \|w\|_{L^2(0,T;V)}^{1/2}, \\ |(5)| & \leq \|h_{obs} - h\|_{L^2(\Omega_T)} \|w\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

En rassemblant les précédentes estimations, nous concluons que

$$\| \partial_t \lambda_{i,n} \|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} \leq D_M,$$

où D_M ne dépend que des données.

Ainsi $(\lambda_{i,n})_n$ est uniformément bornée dans l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V')$.

En utilisant le lemme d'Aubin, nous extrayons une suite, non renommée pour

simplifier, convergeant fortement dans $L^2(\Omega_T)$ et faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V')$ vers une limite noté λ_l .

Grâce à la convergence forte dans $L^2(\Omega_T)$ et donc la convergence p.p. dans Ω , nous vérifions que λ_l est une solution de l'équation (5.15). La solution de (5.15) étant unique, nous avons donc $\lambda_i = \lambda_l$.

Continuité de \mathcal{F}_2 :

De la même façon, nous montrons la continuité de \mathcal{F}_2 en posant $\lambda_{f,n} = \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_i^n, \bar{\lambda}_f^n)$ et $\lambda_f = \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f)$ et en montrant que $\lambda_{f,n} \rightarrow \lambda_f$ faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Prenons $w = \lambda_{f,n}$ dans l'équation (5.16) écrite avec $\lambda_{f,n}, \lambda_{i,n}$. Après quelques transformations, nous obtenons pour $\epsilon > 0$:

$$(h_2 - h_1)|\nabla \lambda_{f,n}|^2 \leq \epsilon \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_{f,n}|^2 + K_+^2 h_2^2 \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_{i,n}|^2 + C_p^2 \int_{\Omega_T} (\phi_f - \phi_{f,obs})^2,$$

C_p désignant la constante intervenant dans l'inégalité de Poincaré. Choissant ϵ tel que $K_-(h_2 - h_1) - \epsilon \geq 0$, on obtient

$$\int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_{f,n}|^2 \leq \underbrace{\frac{1}{K_-(h_2 - h_1) - \epsilon} (K_+^2 h_2^2 B_M + C_p^2 \|\phi_f - \phi_{f,obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2)}_{:=E_M}.$$

Il est en fait possible de montrer que $(\lambda_{i,n})_n$ converge fortement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et donc de déduire que $(\lambda_{f,n})_n$ converge aussi fortement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Ainsi \mathcal{F} est continue de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2$ dans lui-même.

Posons $S = \max(C_M; D_M, E_M)$ et W l'ensemble convexe fermé borné non vide de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ défini par :

$$W = \{(g, g_1) \in \underbrace{W(0, T) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}_{:=W_1(0, T)}; \lambda_i(0) = 0, \|(g, g_1)\|_{W_1(0, T)} \leq A\}$$

On vient de montrer que $\mathcal{F}(w) \subset W$, le théorème de Schauder permet de conclure qu'il existe un couple $(\lambda_i, \lambda_f) \in W$ tel que $\mathcal{F}(\lambda_i, \lambda_f) = (\lambda_i, \lambda_f)$.

Ce point fixe est une solution faible du problème (5.15)-(5.16).

Nous pouvons passer à la dernière étape qui consiste en l'élimination de la fonction de troncature L_M .

Elimination de la fonction auxiliaire L_M :

Nous allons à présent montrer qu'il existe une constante $B > 0$, ne dépendant pas de M , telle que, toute solution (λ_i, λ_f) du problème (5.15)-(5.16) satisfait :

$$\|\nabla \lambda_i\|_{L^2(\Omega_T)} \leq B \text{ et } \|\nabla f\|_{L^2(\Omega_T)} \leq B.$$

À nouveau, nous prenons λ_i (resp. λ_f) dans (5.15) (resp. (5.16)) et nous ajoutons

les deux équations ainsi obtenues, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} \lambda_i^2 + \delta\phi \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \int_{\Omega_T} \alpha K(x) T_s(h) |\nabla \lambda_i|^2 + \alpha \int_{\Omega_T} K(x) (h_2 - h_1) |\nabla \lambda_f|^2 \\
& - 2\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_f = \alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) (L_M(\|\nabla \lambda_f\|_{L^2(\Omega)^2}) - 1) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \lambda_i \\
& - \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) L_M(\|\nabla \lambda_i\|_{L^2(\Omega_T)^2}) (\nabla \phi_f - \alpha \nabla h) \cdot \lambda_i \lambda_i}_{(2)} \\
& - \alpha \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) L_M(\|\nabla \lambda_f\|_{L^2(\Omega_T)^2}) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f \lambda_i}_{(3)} + \underbrace{\int_{\Omega_T} (h - h_{obs}) \lambda_i + \int_{\Omega_T} (\phi_f - \phi_{f,obs}) \lambda_f}_{(4)}
\end{aligned}$$

\Leftrightarrow (compte tenu du fait que $h_1 + \delta_1 \leq h \leq h_2 - h_1$)

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} \lambda_i^2 + \delta\phi \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \alpha \delta_1 \int_{\Omega_T} K(x) |\nabla \lambda_f|^2 + \alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) |\nabla(\lambda_i - \lambda_f)|^2 \\
& + \alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) (1 - L_M(\|\nabla \lambda_f\|_{L^2(\Omega_T)^2})) |\nabla \lambda_f|^2 \\
& \leq \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) (L_M(\|\nabla \lambda_f\|_{L^2(\Omega_T)^2}) - 1) \nabla \lambda_f \cdot \nabla(\lambda_i - \lambda_f)}_{(1)} \\
& + (2) + (3) + (4)
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
|(1)| & \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) (1 - L_M(\|\nabla \lambda_f\|_{L^2(\Omega_T)^2})) |\nabla \lambda_f|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) |\nabla(\lambda_i - \lambda_f)|^2, \\
|(2)| & \leq K_+ C(4, \Omega) C_4 (1 + \alpha) \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \right)^{3/4} \\
& \leq \frac{K_+ C(4, \Omega) C_4 (1 + \alpha)}{8\epsilon^3} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) + 2K_+ C(4, \Omega) C_4 (1 + \alpha) \epsilon \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2, \\
|(3)| & \leq K_+ C(4, \Omega) C_4 \alpha \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq \alpha K_+ C(4, \Omega) C_4 \left(\frac{1}{2\epsilon} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \right)^{1/2} + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 \right) \\
& \leq \alpha K_+ C(4, \Omega) C_4 \left(\frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 + \frac{1}{8\epsilon^3} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) \right),
\end{aligned}$$

enfin

$$|(4)| \leq \left(\frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 + \frac{C_p^2}{2\epsilon} \int_{\Omega_T} (h - h_{obs})^2 + \frac{C_p^2}{2\epsilon} \int_{\Omega_T} (\phi_f - \phi_{f,obs})^2 \right).$$

Supposons $\epsilon > 0$ soit choisi tel que

$$\Theta_1 = (\delta\phi - \epsilon(K_+C(4, \Omega)C_4(2 + \frac{5}{2}\alpha) + \frac{1}{2})) > 0, \quad (5.17)$$

$$\Theta_2 = (\alpha\delta_1K_- - \frac{\epsilon}{2}(\alpha K_+C(4, \Omega)C_4 + 1)) > 0, \quad (5.18)$$

alors si on a :

$$(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{8\epsilon^3}K_+C(4, \Omega)C_4(1 + 2\alpha)) > 0, \quad (5.19)$$

nous pouvons déduire que, $\exists \hat{B} > 0$, ne dépendant que de $h, h_{obs}, \phi_f, \phi_{obs}$ et de C_p ($\hat{B} = \frac{C_p^2}{2\epsilon} \int_{\Omega_T} (h - h_{obs})^2 + \frac{C_p^2}{2\epsilon} \int_{\Omega_T} (\phi_f - \phi_{f,obs})^2$) tel que :

$$\Theta_1 \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \leq \hat{B} \text{ et } \Theta_2 \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 \leq \hat{B}.$$

Si nous posons $B = \max(\frac{\hat{B}}{\Theta_1}, \frac{\hat{B}}{\Theta_2})$, nous terminons la démonstration de cette étape.

Unicité de la solution du problème adjoint :

Soient $(\lambda_i, \lambda_f) \in W(0, T) \times H_0^1(\Omega)$ et $(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f) \in W(0, T) \times H_0^1(\Omega)$ deux solutions de (5.12). Posons $u = \lambda_i - \bar{\lambda}_i$ et $v = \lambda_f - \bar{\lambda}_f$. Clairement, puisque le système est linéaire, (u, v) satisfont (5.12) mais les seconds membres sont nuls. Nous pouvons reprendre point par point la démonstration précédente qui nous conduit à (compte tenu du fait que $\hat{B} = 0$)

$$\Theta_1 \int_{\Omega_T} |\nabla u|^2 \leq 0 \text{ et } \Theta_2 \int_{\Omega_T} |\nabla v|^2 \leq 0.$$

Puisque $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2$, cela implique $u = 0$ p.p. dans Ω_T et $v = 0$ p.p. dans Ω_T .

Remarque : La condition (5.19) peut paraître restrictive par rapport aux paramètres physiques, mais ainsi que nous l'avons remarqué au chapitre 4, un changement d'échelle pour le temps permet de justifier la condition (5.19).

Proposition 5 : Soit K^* une solution de problème (\mathcal{O}) , alors il existe un couple $(h^* - h_D, \phi_f^* - \phi_{f,D}) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ et un couple $\lambda^* = (\lambda_i^*, \lambda_f^*) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ satisfaisant, pour tout $K \in U_{adm}$ et $\varphi = (\varphi_i, \varphi_f) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, le système d'optimalité suivant : (problème direct)

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial h}{\partial t} - \text{div}(\alpha K T_s(h) \nabla h) + \text{div}(K T_s(h) \nabla \phi_f) = -Q_s \\ -\text{div}(K(h_2 - h_1) \nabla \phi_f) + \text{div}(\alpha K T_s(h) \nabla h) = Q_f + Q_s \end{cases}$$

$$h = h_D, \phi_f = \phi_{f,D}, \quad \text{sur } \Gamma_D$$

(problème adjoint)

$$\begin{cases} -\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} - \text{div}((\delta\phi + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_i) - \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i + K(x) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i, \\ + \text{div}(\alpha K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f) + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f = h_{obs} - h, \\ - \text{div}(K(x)(h_2 - h_1) \nabla \phi_f) + \text{div}(K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i) = \phi_{f,obs} - \phi_f, \end{cases}$$

et

$$D_K \mathcal{J}(K) \cdot (K(x) - K^*(x)) \geq 0.$$

où le gradient de la fonction coût est donné par :

$$\begin{aligned} D_K \mathcal{J}(K) \cdot (\delta_K) &= \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \alpha \delta_K T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i dx dt \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta_K T_s(h) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i dx dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta_K (h_2 - h_1) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_f dx dt \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \alpha \delta_K T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f dx dt, \quad \text{avec } \delta_K \in U_{adm}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

Preuve:

L'application $K \rightarrow (h(K), \phi_f(K))$ définie implicitement par le problème direct (5.7)-(5.9) est différentiable (cela résulte du corollaire du théorème des fonctions implicites ainsi que de la régularité de la solution du problème direct (h, ϕ_f)). Donc l'application $K \rightarrow \mathcal{J}(K)$ est différentiable et

$$D_K \mathcal{J}(K) = \partial_K \mathcal{L}(K, h, \phi_f, \lambda_i, \lambda_f), \quad \text{c-à-d } \forall \delta_K \in U_{adm}$$

avec

$$\begin{aligned} D_K \mathcal{J} \cdot \delta_K &= \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta_K \times (\alpha T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i - T_s(h) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i \\ &+ (h_2 - h_1) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_f - \alpha T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f) dx dt. \end{aligned}$$

En particulier si K^* réalise le minimum de \mathcal{J} , en notant

$$h^* = h(K^*), \phi_f^* = \phi_f(K^*), \lambda_i^* = \lambda_i(K^*, h^*, \phi_f^*) \quad \text{et} \quad \lambda_f^* = \lambda_f(K^*, h^*, \phi_f^*),$$

on obtient

$$\partial_K \mathcal{L}(K^*, h^*, \phi_f^*, \lambda_i^*, \lambda_f^*)(K - K^*) \geq 0, \quad \forall K \in U_{adm},$$

Ce qui achève la preuve.

5.5 Identification de la conductivité et de la porosité

Le problème est alors le problème (\mathcal{O}_c)

$$(\mathcal{O}_c) \begin{cases} \text{Trouver } (K^*, \phi^*) \in U_{adm} \text{ tel que} \\ \mathcal{J}(K^*, \phi^*) = \inf_{(K, \phi) \in U_{adm}} \mathcal{J}(K, \phi) \end{cases} \quad (5.21)$$

où

$$\mathcal{J}(K, \phi) = \frac{1}{2} \|\phi_f(K, \phi) - \phi_{f,obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{2} \|h(K, \phi) - h_{obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2$$

Vous pouvons établir de la même façon que dans le théorème ??, l'existence d'un contrôle optimal pour le problème (\mathcal{O}_c) .

Le problème d'identification se ramène à chercher le minimum de la fonction coût \mathcal{J} , le système d'état étant le problème instationnaire (4.1)-(4.5). On considère ce système comme une contrainte pour le problème d'optimisation et on introduit le Lagrangien \mathcal{L} défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_f, h, \lambda_i, K, \phi) &= \mathcal{J}(K, \phi) + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h}{\partial t} \lambda_i dxdt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (\delta_\phi + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i dxdt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} K T_s(h) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i dxdt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} K(x) (h_2 - h_1) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_f dxdt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \alpha K(x) T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f dxdt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} Q_s \lambda_i dxdt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (Q_s + Q_f) \lambda_f dxdt. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nous soulignons que nous avons substitué dans le système, le coefficient δ_ϕ au coefficient originel $\delta\phi$, car δ est un paramètre arbitraire que nous avons introduit pour représenter l'épaisseur de la zone diffuse et auquel nous venons d'incorporer la porosité. Cela nous permet de focaliser l'impact de la porosité essentiellement sur les variations en temps de la hauteur du front salé.

La solution correspond alors à un point selle de ce Lagrangien considéré comme une fonction des variables indépendantes $h, \phi_f, \lambda_i, \lambda_f$ et K avec λ_i et λ_f les multiplicateurs de Lagrange. Le minimum recherché, (K^*, ϕ^*) , vérifie le système d'optimalité suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*, \phi^*) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_f}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*, \phi^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*, \phi^*) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_f}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*, \phi^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*, \phi^*) \cdot (K - K^*) \geq 0, & \forall K \in U_{adm}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}(\phi_f^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*, \phi^*) \cdot (\phi - \phi^*) \geq 0, & \forall \phi \in U_{adm}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Le système d'état est le système (5.7)-(5.9) et le système adjoint est le système (5.10)-(5.11)

Nous pouvons alors énoncer l'analogie de la proposition 5 :

Proposition 6 : Soit (K^*, ϕ^*) une solution de problème (\mathcal{O}_c) , alors il existe un couple $(h^* - h_D, \phi_f^* - \phi_{f,D}) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ et un couple $\lambda^* = (\lambda_i^*, \lambda_f^*) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ satisfaisant, pour tout $(K, \phi) \in U_{adm}$ et $\varphi = (\varphi_i, \varphi_f) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, le système d'optimalité suivant : (problème direct)

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha K T_s(h) \nabla h) + \operatorname{div}(K T_s(h) \nabla \phi_f) = -Q_s \\ -\operatorname{div}(K(h_2 - h_1) \nabla \phi_f) + \operatorname{div}(\alpha K T_s(h) \nabla h) = Q_f + Q_s \end{cases}$$

$$h = h_D, \quad \phi_f = \phi_{f,D}, \quad \text{sur } \Gamma_D$$

(problème adjoint)

$$\begin{cases} -\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} - \operatorname{div}((\delta \phi + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_i) - \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i + K(x) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i, \\ + \operatorname{div}(\alpha K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f) + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f = h_{obs} - h, \\ -\operatorname{div}(K(x)(h_2 - h_1) \nabla \phi_f) + \operatorname{div}(K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i) = \phi_{f,obs} - \phi_f, \end{cases}$$

et

$$D_K \mathcal{J}(K, \phi) \cdot (K(x) - K^*(x)) \geq 0 \quad \text{et} \quad D_\phi \mathcal{J}(K, \phi) \cdot (\phi(x) - \phi^*(x)) \geq 0.$$

où les gradients de la fonction coût sont donnés par :

$$\begin{aligned} D_K \mathcal{J}(K) \cdot (\delta_K) &= \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \alpha \delta_K T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i dx dt \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta_K T_s(h) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_i dx dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta_K (h_2 - h_1) \nabla \phi_f \cdot \nabla \lambda_f dx dt \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \alpha \delta_K T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f dx dt, \quad \text{avec } \delta_K \in U_{adm}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

et

$$D_\phi \mathcal{J}(K, \phi) \cdot (\delta_\phi) = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (\delta_\phi) \frac{\partial h}{\partial t} \lambda_i dx dt, \quad \text{avec } \delta_\phi \in U_{adm} \quad (5.25)$$

Nous renvoyons le lecteur à [127], [128], [131] pour l'étude numérique de ce problème.

Chapter 6

Conclusions et Perspectives

Dans ce travail, nous avons proposé une étude mathématique comparative des deux approches 'interface nette' et 'interface diffuse' pour traiter le problème d'intrusion marine dans les aquifères côtiers confinés et libres. Plus précisément, nous avons établi dans le cas confiné avec interface diffuse, un résultat d'existence globale en temps de la solution montrant que, malgré l'ajout du terme diffusif, nous sommes toujours obligés de supposer une épaisseur d'eau douce strictement positive dans l'aquifère, pour obtenir une estimation uniforme de la norme L^2 du gradient de la charge hydraulique d'eau douce, estimation essentielle pour appliquer les théorèmes de compacité. Dans le cas d'une nappe libre, nous avons étudié le système issu du modèle avec interface abrupte pour lequel nous avons donné un résultat d'existence globale en temps plus délicat que celui établi dans [59] à cause de la dégénérescence des équations. Par ailleurs, nous avons aussi montré que l'ajout des interfaces diffuses permet de prouver un principe du maximum plus fin que dans le cas des interfaces abruptes.

Puis nous avons établi un résultat d'unicité qui est un résultat difficile à établir compte tenu de la conjonction des trois difficultés : la non-linéarité, la dégénérescence et le fort couplage des équations, il existe d'ailleurs peu de résultats sur l'unicité des solutions pour de tels systèmes. Nous avons traité le cas de l'approche avec interface diffuse, ce qui permet d'éliminer la difficulté liée à la dégénérescence des équations. Ce résultat repose sur des estimations uniformes des normes $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ des gradients des charges hydrauliques. Cette régularité supplémentaire combinée aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg permet de traiter la non-linéarité dans la preuve de l'unicité pour le cas confiné.

Enfin nous avons résolu un problème d'identification de paramètres par la méthode de l'état adjoint. Nous nous sommes intéressés à l'identification de la conductivité hydraulique K et de la porosité ϕ . Il s'agit d'estimer ces paramètres en fonction d'observations ou de mesures sur le terrain faites sur les charges hydrauliques et sur la profondeur de l'interface eau douce/eau salée. Le problème inverse se traduit alors par un problème d'optimisation, la fonction coût calculant l'écart quadratique entre la profondeur de l'interface (et la charge hydraulique d'eau douce) mesurées et celles données par le modèle. Le problème

d'identification se ramène alors à chercher le minimum de la fonction coût associée à la solution du problème instationnaire.

Puisque le résultat de régularité $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$ et d'unicité ont été obtenus dans le cas d'un aquifère libre dans [60], il serait très intéressant d'étendre l'étude faite sur l'identification de paramètres au cas d'une nappe côtière libre. Par ailleurs, il faudrait aussi pouvoir coupler au précédent système les effets dus aux conditions climatiques et aux interventions humaines, en outre, prendre en compte les effets de la contamination de la nappe phréatique par des engrais chimiques et des pesticides.

Bibliography

- [1] M. Alfaro, D. Hilhorst, M. Hiroshi, *Optimal interface width for the Allen-Cahn equation*, RIMS Kokyuroku, 1416, 148–160, 2005.
- [2] R. Acar, C. R. Vogel, Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems, Inverse Problem, Vol. 101. pp. 1217-1229, 1994.
- [3] P. Ackerer, A. Younes, *Efficient approximations for the the simulation of density driven flow in porous media*, Adv. Water Res., Vol. 31, 15–27, 2008.
- [4] G. Alducin, J. Esquivel-Avila, L. Reyes-Avila, Steady filtration problems with seawater intrusion : Variational analysis, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 151, pp. 13-25, 1998.
- [5] M. Alfaro, D. Hilhorst, M. Hiroshi, *Optimal interface width for the Allen-Cahn equation*, RIMS Kokyuroku, 1416, 148–160, 2005.
- [6] H. W. Alt, S. Lukhauss, Quasilinear elliptic-parabolic equations, Math.Z., Vol. 183, p.p. 311-341, 1983.
- [7] H. W. Alt, C. J. Van Duijn, A stationary flow of fresh and salt groundwater in coastal aquifer, Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, Vol. 14 No. 8 pp. 625-656, 1990.
- [8] H. W. Alt, C. J. Van Duijn, A free boundary problem involving a cusp. Part I: global analysis, European Journal of Appl. Math. 4, 39-63, 1993.
- [9] Y. Amirat, K. Hamdache, and A. Ziani. *Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media*, Math. Models Methods Appl. Sci., 6:729–747, 1996.
- [10] B. Amziane, A. Bourgeat, H. El Amri, Un résultat d’existence pour un modèle d’écoulement diphasique dans un milieu poreux à plusieurs types de roches, Publication du Laboratoire d’Analyse Numérique, No. 90-17, Université de Pau, 1990.
- [11] S. N. Antonsev, A. V. Kazhikov, V. N. Monakhov, Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids, Studies in mathematics and its applications, Vol. 22, North-Holland, Amsterdam, 1990.

- [12] S. N. Arbogast, The existence of weak solution to single porosity and simple dual-porosity models of two-phase incompressible flow, *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, Vol. 19, No. 11, pp. 1009-1031, 1992.
- [13] S. N. Antonsev, A. V. Dommansky, Uniqueness generalizated solutions of degenerate problem in two-phase filtration, *Numerical methods mechanics in continuum medium*, Collection Sciences Research, Sbornik, Vol. 15, No. 6, pp. 15-28, 1984, (en russe)
- [14] C. Baiocchi, Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série A*, Vol. 273, pp. 1215-1217, 1971.
- [15] C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes, G. A. Pozzi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : Existence and uniqueness theorem, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, Vol. 4, pp. 1-82, 1973.
- [16] C. Baiocchi, V. Comincioli, L. Guerri, G. Volpi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : A numerical approach, *Calcolo* 10, pp. 1-85, 1973.
- [17] S. Balay, W. D. Gropp, L. C. McInnes, B. F. Smith, PETSc, Web page: <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [18] J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier, New York, 1972.
- [19] J. Bear, *Hydraulics of groundwater*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [20] J. Bear, A. H-D. Cheng, S. Sorek, D. Ouazar, I. Herrera (Eds.), *Seawater Intrusion in Coastal Aquifers-Concepts, Methods and Practices*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1999.
- [21] J. Bear, G. Dagan, Solving the problem of local interface upcoming in a coastal aquifer by the method of small perturbations, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 6, No. 1, 1967.
- [22] J. Bear, J. Kapular, A numerical solution for the movement of an interface in a layered coastal aquifer, *Journal of Hydrology*, Vol. 50, pp. 273-298, 1981.
- [23] J. Bear, A. Gamliel, Optimal annual operation of a coastal aquifer, *Water Resour. Res.*, Vol. 20, pp. 435-444, 1984.
- [24] J. Bear, A. Verruijt, *Modelling groundwater flow and pollution*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.
- [25] J. Bear, A. Gamliel, Optimal annual operation of a coastal aquifer, *Water Resour. Res.*, Vol. 20, pp. 435-444, 1984.

- [26] G. Bellettini, L. Bertini, M. Mariani, M. Novaga, Convergence of the one-dimensional Cahn- Hilliard equation, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 44(5), 3458-3480, 2012.
- [27] H. Ben Ameer, G. Chavent, J. Jaffré, Refinement and coarsening indicators for adaptive parametrization : application to the estimation of hydraulic transmissivities, *Inverse problems* Vol. 18, pp. 775-794, 2002.
- [28] M. K. Benhachmi, D. Ouazar, A. Naji, A. H-D. Cheng, K. El Harrouni, Chance constrained optimal management in saltwater-intruded coastal aquifers using Genetic Algorithms, *First International Conference on Saltwater Intrusion and Coastal Aquifers-Monitoring, Modeling, and Management*. Essaouira, Morocco, April 23-25, 2001.
- [29] S. Benson, L. C. McInnes, J. J. Moré, J. Sarich, TAO Users Manual, ARGONNE National Laboratory, Mathematics and Computer Science Division, Technical Report ANL/MCS-TM-242-Revision 1.5, January 29, 2003.
- [30] S. J. Benson, J. Moré, A limited memory variable-metric algorithm for bound-constrained minimization, Tech. Report ANL/MSC-P909-O901, Mathematical and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, 2001.
- [31] A. Bensoussan, J. L. Lion, G. Papanicoulou, *Asymptotic analysis for periodic structure*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [32] C. H. Berestycki, A. Bonnet, C. J. Van Duijn, Flots stationnaires d'eau sale et d'eau douce en milieux poreux dans des couches aquifères, *C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I* 317, 255-260. 1993.
- [33] M. Bonnet, J. P. Sauty, un modèle simplifié pour la simulation des nappes avec intrusion saline, *A.I.H.S. Symposium Application of Mathematical Models in Hydrology and Water Resources System*, Bratislava, AIHS Publication No. 115, 1975.
- [34] B. Bouzouf, Modélisation du biseau salé par un schéma volumes finis et la méthode level set, Thèse de doctorat es-science appliquées, Ecole Mohammeda d'ingénieurs, Université Mohamed V, Rabat, 2001.
- [35] B. Bouzouf, D. Ouazar, I. Elmahi, Simulation of salt-freshwater interface in coastal aquifers using finite volume method on unstructured meshes. In *proceeding of Finite Volume for Complex Application II*, Edition Hermes, pp. 525-532, Germany, 1999.
- [36] A. J. Bray, Theory of phase-ordering kinetics, *Adv. in Physics*, Vol. 43(3), 357-459, 1994.
- [37] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et application*, Masson, Paris, 1983.

- [38] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Mathematics studies, 1973.
- [39] H. Brezis, D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A 278,711-714, 1984.
- [40] J. Carrillo, S. Challal, A. Lyaghfour : A free boundary problem for a flow of fresh and salt groundwater with nonlinear Darcy's law. Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 12, No. 1, pp. 191-215, 2002.
- [41] J. Carrera, State of the art of the inverse problem applied to the flow and solute transport problems, in Groundwater Flow Quality Modelling, NATO ASI Ser., Ser. C, pp. 549-589, Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1998.
- [42] E. Casas, Optimal control in coefficients of elliptic equations with states constraints, Applied Mathematical and Optimization, Vol. 26, pp. 21-37, 1992.
- [43] G. Castny, 'Principes et méthodes de l'hydrogéologie', Dunod, Paris, 1990.
- [44] L. Cermak, M. Zlamal, Transformation of dependent variables and the finite element solution of nonlinear evolution equations, Int. J. Numer. Methods Engg., 15 (1980) 31-40.
- [45] S. Challal, A Lyaghfour : A stationary flow of fresh and salt groundwater in a coastal aquifer with nonlinear Darcy's law, Applicable Analysis, Vol. 67, pp. 295-312, 1997.
- [46] S. Challal, A Lyaghfour : A stationary flow of fresh and salt groundwater in a heterogeneous coastal aquifer, Bollettino della Unione Matematica Italiana, Vol. 8, No. 3-B, pp. 505-533, 2000.
- [47] T. F. Chan, X. C. Tai, Augmented Lagrangian and total variation methods for recovering discontinuous coefficients from elliptic equations, CAM Report 97-2, 1997, University of California.
- [48] T. F. Chan, X. C. Tai, Identification of discontinuous coefficients from elliptic equations, CAM Report 97-35, 1997, University of California.
- [49] T. F. Chan, X. C. Tai, Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients, Journal of Computational Physics, Vol. 193, pp. 40-66, 2003.
- [50] J.R. Chan Hong, D. Hilhorst, J. van Kester, C. J. Van Duijn, The interface between fresh and salt groundwater: a numerical study, IMAJ. Applied Math. 42, 209-240, 1989.

- [51] S. Charmonman, A solution of the pattern of fresh-water flow in an unconfined coastal aquifer, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 70, No. 12, 1965.
- [52] G. Chavent, Analyse fonctionnelle et identifiabilité de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles, Thèse d'Etat, Faculté des Sciences de Paris, 1971.
- [53] G. Chavent, J. Jaffré, Mathematical models and finite elements for reservoir simulation, *Studies in mathematics and its applications*, Vol. 17, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [54] G. Chavent, K. Kunish, On weakly nonlinear inverse problem, *M²AN*, Vol. 27, pp. 535-564, 1993.
- [55] G. Chavent, K. Kunish, Regularization in state space, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 56, pp. 542-572, 1996.
- [56] X. Chen, Global asymptotic limit of solution of the Cahn-Hilliard equation, *J. Diff. Geom.*, Vol. 44, 262-311, 1996.
- [57] C. Choquet, *Parabolic and degenerate parabolic models for pressure-driven transport problems*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, Vol. 20, 543-566, 2010.
- [58] C. Choquet, M. M. Diédhiou, C. Rosier, Derivation of a sharp-diffuse interface model in a free aquifer. Numerical simulations, submitted, 2015.
- [59] C. Choquet, M. M. Diédhiou, C. Rosier, Mathematical analysis of a sharp-diffuse interfaces model for seawater intrusion, to appear in *J. Diff. Equations*, 2015.
- [60] C. Choquet, C. Rosier, L. Rosier, *Uniqueness for a strongly coupled system of quasi-linear parabolic equations issuing from a sea intrusion problem*, in preparation.
- [61] C. Choquet, J. Li, C. Rosier, *Global existence for seawater intrusion models : Comparison between sharp interface and sharp-diffuse interface approaches*, *EJDE*, Vol. 2015 (2015), No. 126, pp. 1-27.
- [62] R. G. Cummings, J. W. McFarland, *Groundwater Management and Salinity Control Water Resour. Research*, Vol. 10, No. 5, pp. 909-915, 1974.
- [63] A. Das, B. Datta, Development of multiobjective management models for coastal aquifers, *J. Water Resour. Planning Management*, ASCE, Vol. 125, pp. 76-87, 1999.
- [64] Z. Chen, R. Ewing, Mathematical analysis for reservoir models, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 30, No. 2, pp. 431-453, 1999.

- [65] A. H.-D. Cheng, D. Halhal, A. naji, D. Ouazar, Pumping optimization in saltwater-intruded coastal aquifers, *Water Resou. Res.*, Vol. 36, No. 8, pp. 2155-2165, 2000.
- [66] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [67] K. El Harrouni, D. Ouazar, A.H.-D. Cheng, Salt-/Fresh-Water Interface Model and Gas for Parameter Estimation, *Proceeding SWIM 15*, Ghent 1998, *Natuurwet. Tijdschr.*, Vol. 79, pp. 43-47, 2 tabs, 1999.
- [68] P. G. Emch, W. W. G. Yeh, Management model for conjunctive use if coastal surface water and groundwater, *J. Water Resour. Planning Management*, ASCE, 124, 129-139, 1998.
- [69] H. I. Essaid, A quasi-three dimensional finite difference model to simulate freshwater and saltwater flow in layered coastal aquifer systems, U. S. Geological survey Water-Ressources Investigations, Report 90-4130. Menlo Park, California, 1990.
- [70] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, *Studies Advanced Mathematics*, CRC Press, 1992.
- [71] C. W. Fetter, Position of saline water interface beneath oceanic islands, *Water Resour.* Vol. 8, No. 5, 1972.
- [72] G. Gagneux, R. Masson, A. Plouvier-Debigt, G. Vallet, S. Wolf, étude mathématique de la compaction verticale dans un bassin sédimentaire faillé, *ESAIM : M2AN- Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 37, No. 2, pp. 373-388, 2003.
- [73] G. Gagneux, M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles nonlinéaires de l'ingénierie pétrolière*, *Mathématiques et Applications*, Springer, Paris, 1996.
- [74] H. Gajewski, K. Groger, Zacharias, *Nichtlinear Operatorgleichungen and Operator-differentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [75] A. Gemitzi, D. Tolikas, Development of sharp interface model that simulates coastal aquifer flow with the coupled use if GIS, *Hydrogeology Journal*, Vol. 12, pp. 345-356, 2004.
- [76] T. R. Ginn, J. H. Gushman, *Inverse methods for subsurface flow : A critical review of stochastic techniques*, *Stochastic Hydrol. Hydraul.*, Vol. 4, pp. 1-26, 1990.
- [77] R. E. Glover, The pattern of freshwater flow in a coastal aquifer, *J. of Ground Water Resour.*, Vol. 64, pp. 439-475, 1959.
- [78] R.E. Grundy, C. J. Van Duijn, The fresh-salt water interface in a semi-pervious aquifer, *Applicable Analysis* 38, 69-96, 1990.

- [79] I. Halvacek, M. Kirzek, On Galerkin approximations of quasilinear non-potential elliptic problem of nonmonotone type, *J. Math. Ana. Appl.* Vol. 184, pp. 169-189, 1994.
- [80] F. Hecht, E. Saltel, EMC² un logiciel d'édition de maillages et contours bidimensionnels, Rapport technique N°118, INRIA, 1990.
- [81] B. Herrling, A. Heckeke, Coupling of finite element and optimization methods for the management of groundwater systems, *Adv. Water Resources*, Vol. 9, pp. 190-195, 1986.
- [82] A. Hidani, Modélisation des écoulements diphasiques en milieux poreux à plusieurs types de roches. Thèse de Doctorat, Université de Saint-Atienne, 1993.
- [83] P. S. Huyakorn, P. F. Anderson, J. W. Mercer, H. O. White, Salt intrusion in aquifers : developement and testing of three dimensional finite element model, *Water. Resou. Res.*, Vol. 23, pp. 293-319, 1987.
- [84] A. Jungel, A. Unterreiter, Discret maximum and minimum principales for finite element approximations of non-monotone elliptic aquations.
- [85] H. G. Keulegan, An example report on model laws for density curent, U.S. Natl. Bur. of Stand., Gaitherburg, Md, 1954.
- [86] M. Kimblowski, Salt-water-freshwater transient upconing-an implicit boundary-element solution, *Journal of hydrology*, Vol. 78, pp. 35-47, 1985.
- [87] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New York, 1980.
- [88] R. V. Kohn, B. D. A variational method for parameter identification, *M²AN*, Vol. 22, pp. 119-158, 1988.
- [89] C. Kravaris, J. H. Seinfeld, Identification of parameters in distributed systems by regularization, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 23, pp 217-241, 1985.
- [90] D. Kroener, S. Luckhauss, Flow of oil and water in porous medium, *J. of Differential Equations*, Vol. 55, pp. 276-288, 1984.
- [91] L. Kuiper, A comparaison of several methodsfor inverse for the solution of the inverse problem in the two-dimensional steady state groundwater modeling, *Water Resours. Res.*, Vol. 22, No. 5, pp. 705-714, 1986.
- [92] K. Kunish, L. W. White, Identifiability under approximation for an elliptic boundary value problem, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 25, pp. 279-297, 1987.

- [93] K. Kunish, Inherent identifiability of parameters in elliptic differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 132, pp. 453-472, 1988.
- [94] O. A. Ladezenskaja, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of elliptique type*, Academic press, New York, 1968.
- [95] S. Larsson, The long time behavior of finite element approximations of solutions to semilinear parabolic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 26, pp. 348-365, 1989.
- [96] S. Larsson, V. Thomée, N. Zhang, Interpolation of coefficients and transformation of the dependent variable in finite element methods for the nonlinear heat equation, *Math. Methods. Appl. Sci.*, Vol. 11, pp. 105-124, 1989.
- [97] J. Li, C. Rosier, Parameters identification in a saltwater intrusion problem, en préparation.
- [98] A. H. Loaiciga, R. B. Leipnik, Closed Form For Coastal aquifer Management, *J. Water Resour. Planning Management*, ASCE, Vol. 126, pp. 30-35, 2000.
- [99] D. Esselaoui, Y. Loukili, A. Bourgeat, Perfection of the simulation of freshwater/saltwater interface motion, *Recent Advances in Problems of Flow and Transport in porous Media*, eds. J. M. Crolet and M. E. Hatri, pp. 117-129, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [100] R. Luce, S. Perez, Parameter identification for an elliptic partial differential equation with distributed noisy data, *Inverse Problems*, Vol. 15, pp. 291-307, 1999.
- [101] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, Vol. 1, Dunod, 1968.
- [102] D. McLaughlin, L. R. Townley, A reassessment of the groundwater inverse problem, *Water Resour. Res.*, Vol. 32, No. 5, pp. 1131-1161, 1996.
- [103] N. G. Meyers, An L_p -estimate for the gradient of solution of second order elliptic divergence equations, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Vol. 17, pp. 189-206, 1963.
- [104] A. Naji, Deterministic and stochastic solution of saltwater intrusion into coastal aquifers using analytical, BEM and optimization techniques, Thèse de doctorat es-science, Ecole Mohammedia d'ingénieurs, Université Mohamed V, rabat, 1988.
- [105] A. Naji, D. Ouazar, A. H.-D. Cheng, Locating saltwater/freshwater using nonlinear programming and h-adaptive BEM, *Eng. Analy. Boundary Elements*, Vol. 21, pp. 253-259, 1988.

- [106] K. Najib, C. Rosier, *On the global existence for a degenerate elliptic-parabolic seawater intrusion problem*, Math. Comput. Simulation, Vol. 81 Issue 1, 2282–2295, 2011.
- [107] J. Necedal, S. J. Wright, Numerical Optimization, Springer, 1999.
- [108] O. A. Oleinik, Uniqueness and stability of generalized solution of the cauchy problem for a quasilinear equation, Uspehi Mat. Nauk, Vol. 14, pp. 165-170, 1959.
- [109] L.A. Peletier, C. J. Van Duijn, A boundary layer problem in fresh-salt groundwater flow, Quart. J. Mech. Appl. Math. 45, 1-24, 1992.
- [110] S. Perez, Identification et homogénéisation de paramètres dans les équations aux dérivées partielles, Thèse de l’université de Pau et des Pays de L’adour.
- [111] A. R. Piggot, A. G. Bobba, Inverse analysis implementation of the SUTRA groundwater flow and transport model and user’s guide for SUTRA-1, Environment Canada, National Water Research Institute, Burlington, Saskatoon, NWRI Contribution No. 93-115.
- [112] J. F. Polo, J. R. R. Francisco, Simulation of salt-fresh water interface Motion, Water. Resour. Research, Vol. 19, No. 1, pp. 61-68, 1983.
- [113] J. F. Polo, F. J. R. Ramis, Simulation of Salt water-Fresh water Interface Motion, Water. Resour. Research, Vol. 19, No. 1, pp. 61-68, 1983.
- [114] P. Ranjan, S. Kazama, M. Sawamoto, Modeling of the dynamics of saltwater-freshwater interface in coastal aquifers, URL :
- [115] Gerard R. Richter, Numerical identification of a spacially varying diffusion coefficient, Mathematics of Computation, Vol. 36, pp. 375-386, 1981.
- [116] C. Rosier, L. Rosier, *Well-posedness of a degenerate parabolic equation issuing from two-dimensional perfect fluid dynamics*, Applicable Anal., Vol. 75 (3-4), pp 441–465, 2000.
- [117] J. Rubinstein, P. Sternberg, J.B. Keller, Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening, SIAM Appl. Math., Vol. 49, 116?133, 1989.
- [118] J. Rubinstein, P. Sternberg, J.B. Keller, Front interaction and non-homogeneous equilibria for tristable reaction-diffusion equations, SIAM J. Appl. Math., Vol. 53, 1669?1685, 1993.
- [119] P. Saramito, N. Roquet, Rheolef users manual. Technical report, LMC-IMAG, 2002.
<http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef/usrman.ps.gz>
- [120] P. Saramito, N. Roquet, Rheolef users manual. LMC-IMAG, 2002.
<http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef/usrman.ps.gz>

- [121] E. Shimborski, Encadrement d'une frontière libre relative à un problème d'hydraulique. *Boll.Unione Mat. Ital.* B12,66-7, 1975.
- [122] S. Shmorak, A. Murcado, Upconong of fresh water-sea water interface below pumping wells, field study, *Water Resour.*, Vol. 5, No. 6, 1969.
- [123] L. J. Sooten, J. Hidalgo, J. Carrera, Parameter estimation in density dependent groundwater flow and solute transport medelling, 17th Salt Water Intrusion Meeting, Delft, Netherlands, 6-10 May 2002.
- [124] P. Sonnelved, CGS : a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 52, pp. 10-36, 1989.
- [125] N-Z Sun, *Inverse problems in groundwater modelling*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherland, 1994.
- [126] N-Z Sun, W. G. Yeh, 1990, Coupled inverse problems in groundwater modelling 1. Sensivity analysis and parameter identification, *Water Resources Research*, Vol. 26, pp. 2507-2525.
- [127] M. H. Tber, M. E. Talibi, A finite element method for hydraulic conductivity identification in a seawater intrusion problem, *Computers & Geosciences* 33 (2007) 860–874.
- [128] M. H. Tber, M. E. Talibi, D. Ouaraza, Parameters identification in a seawater intrusion model using adjoint sensitive method , *Math. Comput. Simul.* .77 (2008), pp 301-312.
- [129] M. H. Tber, M. E. Talibi, D. Ouaraza, Identification of the Hydraulic Conductivities in a Saltwater Intrusion Problem, *J. Inv. Ill-Posed Problems* 15 (2007), 1–20.
- [130] M. E. Talibi, M. H. Tber, *Existence of solutions for a degenerate seawater intrusion problem*, *EJDE*, Vol. 72, pp 1-14, 2005.
- [131] M. H. Tber, *Analyse Mathématique et Simulation Numérique de Problèmes Directs et Inverses Issus d'un Modèle d'Intrusion Marine dans les Aquifères Côtiers*, Doctorat thesis, Université Cadi Ayyad , Faculté des Sciences Semlalia Marrakech, April 21, 2006.
- [132] P. Van Der Veer, Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation, *Journal of Hydrology*, Vol. 34, pp. 1-11, 1977.
- [133] P. Van Der Veer, Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation, *Journal of Hydrology*, Vol. 35, pp. 271-278, 1977.
- [134] P. Van Der Veer, Exact solution for two dimensional groundwater flow problems involving a semi-previous boundary, *Journal of Hydrology*, Vol. 37, pp. 159-168, 1978.

- [135] J. C. Van Dam, P. C. Sikkema, Approximate solution of the problem of the shape of the interface in a semi-confined aquifer, *Journal of Hydrology*, Vol. 56, pp. 221-237, 1982.
- [136] H. Van der Vorst, Bi-CGSTAB : a fast smoothly converging variant of Bi-CG for the somution of non-symmetric linear systemes, *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, Vol. 13, pp. 631-644, 1992.
- [137] C. J. van Duijn, D. Hilhorst, On a Doubly Nonlinear Diffusion Equation in Hydrology, *Nonlinear Anal. Theory. Meth. Appl.*, Vol. 11, no. 3. pp. 305-333, (1987).
- [138] V. N. Vappicha, S. H. Nagaraja, An approximate solution for the transient interface in a coastal aquifer, *J. Hydrol.*, Vol. 31, pp. 161-173.
- [139] A. Verruijt, A note on the Ghiber-Herzberg formula, *IASH bull.*, 13, pp. 43-45, 1968.
- [140] C. R. Vogel, *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM, Frontiers in Applied Mathematics, 2002.
- [141] C. I. Voss, SUTRA: A finite element simulation model for saturated-unsaturated fluid density dependent groundwater flow with energy transport of chemically-reactive simple-species transport, *U. S. Geolg. Sur. Water. Resour. Invest.*, 84-4369, 409.
- [142] J. E. Warren, H. S. Price, Flow in heterogeneous porous media, *Society of Petroleum Engineering Journal*, pp. 153-169, 1967.
- [143] R. Willis, B. A. Finney, Planning model for optimal control of saltwater intrusion, *J. Water. Resour. Planning Management*, ASCE, Vol. 114, pp. 163-178, 1988.
- [144] J. L. Wilson, A. SA DA Costa, finite Element Simulation of A Saltwater/Freshwater Interface With Indirect Toe Tracking, *Water Resour. Research*, Vol. 18, No. 4, pp. 1069-1080, 1982.
- [145] W. W. G. Yeh, Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology : The inverse problem, *Water Resources Review*, 1986, 2, pp 95-108.
- [146] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, T1(Fixed-point theorems), Springer-Verlag, New York inc., 1986.