



Optomécanique fibrée des disques GaAs : dissipation, amplification et non-linéarités

David Parrain

► **To cite this version:**

David Parrain. Optomécanique fibrée des disques GaAs : dissipation, amplification et non-linéarités. Physique Quantique [quant-ph]. Université Denis Diderot Paris 7, 2014. Français. <tel-01333822>

HAL Id: tel-01333822

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01333822>

Submitted on 19 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
ÉCOLE DOCTORALE 564 : PHYSIQUE EN ÎLE-DE-FRANCE
LABORATOIRE MATÉRIAUX ET PHÉNOMÈNES QUANTIQUES
UFR DE PHYSIQUE

THÈSE

présentée par
David PARRAIN

pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences de l'Université Paris Diderot

**Optomécanique fibrée des disques GaAs :
dissipation, amplification et non-linéarités**

soutenue le 17 septembre 2014 devant le jury composé de :

M.	Anthony AYARI,	Rapporteur
M.	Yanne CHEMBO,	Examinateur
Mme	Sara DUCCI,	Directrice de thèse
M.	Ivan FAVERO,	Directeur de thèse
M.	Jean-Michel GÉRARD,	Examinateur
M.	Bernard LEGRAND,	Rapporteur
Mme	Pascale SENELLART,	Examinatrice
M.	Pierre VERLOT,	Examinateur

À ceux que j'aime

Remerciements

"You know nothing, John Snow"

George R. R. Martin, *A Song of Ice and Fire*

Cette citation illustrera, je l'espère, toute ma vie. Elle est garante de la remise en question permanente gouvernant mes avancées dans le monde scientifique. "Tout ce que je sais, c'est que je ne sais rien" aurait dit Socrate, cette affirmation est à la base de ma démarche scientifique. Tout réexaminer afin de mieux comprendre, aller voir au plus près du détail afin de mieux appréhender l'ensemble, tel est le chemin que je m'efforce de suivre dans mon voyage scientifique. Enfin cette citation contemporaine témoignera de mes goûts littéraires très affirmés.

Cette thèse s'achève enfin, il est donc grand temps de remercier tout le monde.

Je voudrais tout d'abord remercier mon jury de thèse pour avoir pris le temps d'apprécier à leur juste valeur mes travaux. En particulier mes rapporteurs pour leur travail estival imposé. Ainsi un grand merci à Bernard Legrand, Anthony Ayari et Pierre Verlot pour avoir pris le temps d'examiner en profondeur mon travail, d'y avoir décelé quelques erreurs et de m'avoir donné un éclairage nouveau sur certaines problématiques. Je remercie aussi mes examinateurs Yanne Chembo, Pascale Senellart et Jean-Michel Gérard pour avoir porté un regard critique mais néanmoins bienfaisant sur mon manuscrit. Merci à tous les membres du jury pour cette soutenance de thèse très intense et si intéressante.

Je voudrais remercier Ivan Favero, mon directeur de thèse pour tout ce qu'il m'a transmis durant ces quatre années et notamment pour la correction du manuscrit. Je remercie également les permanents de l'équipe Sara Ducci, Giuseppe Leo et Laetitia Doyennette pour m'avoir chaleureusement accueilli dans l'équipe. Merci aux personnels du laboratoire qui ont toujours réussi à rendre les tâches administratives aussi légères que possible et qui par leur travail acharné réussissent tant bien que mal à faire tourner la maison. Notamment, je tiens à chaleureusement remercier Anne, secrétaire exceptionnelle du laboratoire pour son travail, son humanité, nos conversations et la boîte à bonbons. Merci aussi à Patrick et Martial de l'atelier Mécanique pour leur travaux, leur créativité et leur bonne humeur.

Remerciements

Une expérience professionnelle se résume à peu de chose si elle n'est pas le cadre d'échanges humains intéressants, de joie, de bonne humeur, de déconne et de beaugossitude. Ainsi je remercie avec une sincérité profonde Alexandre Delga, Christophe Baker, Marc Savanier et William Hease. Merci les gars d'avoir réussi l'exploit de me donner chaque matin l'envie de me lever pour aller au labo en sachant que, quoi que nous raconterait la science aujourd'hui, la journée serait bonne. Je remercie par ailleurs tous les stagiaires, doctorants et post-doctorants qui m'ont précédé et me suivront dans ce grand cycle perpétuel de la recherche et avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger et de m'enrichir. Merci pour la bonne ambiance partagé, merci pour avoir ri aux blagues pas drôle, pour avoir râlé avec moi, pour avoir dansé et chanté (faux) avec moi. Merci donc à Alberto, Silvia, Filippo, Alessio, Fabien, Adeline, Guillaume, Cécile, Claire, Biswarup, Eduardo, Cadu, Andreas, Lu, Dac-Trung et tous les stagiaires (qu'il serait trop long de citer ici) d'avoir partagé ma vie professionnelle pendant ces quatre années.

Quatre années ne s'écoule pas paisiblement sans le soutien infaillible des amis. Un immense merci à Julien pour avoir sauvé l'orthographe de ce manuscrit. Merci à Robin, Marie, Alaric et Océane pour l'oreille attentive et les bons conseils, Sophie pour les sorties ciné. Merci à tous les copains du rugby pour la rigolade et la déconne, Béno, François, Hugo, Yvan, Léo, Matthieu, Bertrand, Cyprien, Nico... merci pour ces moments ineffables. Merci aux compagnons d'études, de la prépa (Polo, Anne) à l'ENS (Rémi, Erwan, Vincent) en passant par le master (Jérémie, JR, Antoine). Merci enfin à tous les autres, compagnons de vie, de moments de partage et d'échanges, qui se reconnaîtront.

Merci bien sûr à tous ceux qui sont venus assister à la soutenance de thèse, jour si particulier qui clôt quatre années de recherche à faire reculer le champ de l'ignorance, à dévoiler toujours un peu plus le voile de l'inconnu, à enrichir si modestement le grand livre de la connaissance humaine. Merci.

Je voudrais finir ces remerciements en m'adressant à la famille. Merci aux cousins, cousines, oncles et tantes, parrain et marraine pour les moments de détente et de retrouvailles en dehors de Paris, à Noël ou en week-end. Merci aux frangins qui m'ont toujours poussé à me dépasser et sur qui je sais pouvoir compter quoi qu'il advienne. Merci à mon père pour s'être intéressé sincèrement aux problématiques de mon sujet de thèse et dont les discussions ont toujours été profitables. Merci à ma mère pour tout ce qu'elle est. Merci tout simplement à mes parents pour leur soutien indéfectible.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Fondements de l'optomécanique des disques GaAs	7
1.1 Optique des disques	7
1.1.1 Les équations de Maxwell dans un cylindre	8
1.1.2 L'indice effectif	10
1.1.3 Simulation numérique	12
1.1.4 Fibre optique	15
1.1.5 Couplage fibre-disque	17
1.2 Mécanique des disques	23
1.2.1 Modes élastiques des disques	24
1.2.2 Densité spectrale de mouvement	28
1.3 Couplage optomécanique dans les disques	30
1.3.1 Forces optiques agissant sur le résonateur mécanique	30
1.3.2 Décalage optomécanique des résonances optiques	33
1.3.3 Equations couplées de l'optomécanique	35
1.3.4 Forces retardées	44
2 Techniques expérimentales pour l'optomécanique	49
2.1 Fabrication des échantillons	49
2.1.1 Principales étapes de fabrication	49
2.1.2 La lithographie électronique	51
2.1.3 La première gravure BCK	53
2.1.4 Création de la mesa	54
2.1.5 La sous gravure	54

2.2	Fabrication de la fibre optique effilée	56
2.2.1	Étirage de la fibre optique	56
2.3	Montage d'optomécanique à fibre effilée	58
2.3.1	Historique	58
2.3.2	Montage	59
2.4	Spectroscopie optique	60
2.4.1	Acquisition	60
2.4.2	Couplage évanescent disque-fibre	64
2.4.3	Identification des modes optiques	67
2.5	Spectroscopie mécanique	69
2.5.1	Densité spectrale de bruit	69
2.5.2	Mesure à faible puissance optique	71
2.5.3	Conclusion	73
3	Origine des pertes optiques dans les disques GaAs	75
3.1	Introduction	75
3.2	Les pertes par courbure	75
3.3	Les pertes par diffusion surfacique	77
3.3.1	Expériences TEM sur les disques GaAs	79
3.3.2	Analyse de la géométrie réelle	83
3.3.3	L'analyse multi-échelles	84
3.3.4	Calcul des pertes par diffusion surfacique	91
3.4	Les pertes par absorption	99
3.4.1	L'absorption linéaire	99
3.4.2	L'absorption à deux photons	107
3.5	Améliorer le facteur de qualité optique	110
4	Dissipation mécanique des disques GaAs	113
4.1	Amortissement fluide	113
4.1.1	Mesure du mouvement flexural des disques dans l'air	114
4.1.2	Théorie élastiques des plaques circulaires	118
4.1.3	Modèle des sphères de Stokes	120
4.1.4	Squeeze-film (pincement du film d'air)	122
4.1.5	Résultats obtenus par interférométrie optique	125
4.1.6	Amortissement fluide pour les modes radiaux	126
4.2	Pertes par ancrage	126
4.3	Amortissement thermoélastique	128
4.4	Conclusion	129
5	Auto-oscillation et non linéarités optomécaniques	131
5.1	Régime d'auto-oscillation optomécanique	131
5.1.1	Observation de l'auto-oscillation optomécanique	131
5.1.2	Bandes latérales	134
5.1.3	Modélisation de l'auto-oscillation	135

5.2	Anti-croisement dans le spectre mécanique mesuré optiquement	142
5.3	Auto-modulation de l'auto-oscillation optomécanique	144
5.3.1	Équations couplées pour l'auto-modulation	146
5.3.2	Dynamique du système en auto-modulation	146
5.3.3	Évolution de la fréquence d'auto-modulation	149
5.3.4	Conclusions	150
Conclusion		151
A Mode se propageant dans la fibre optique en silice		155
B Couplage évanescent		163
C Couplage clockwise-counterclockwise		167
C.1	Méthode des modes couplés dans le temps	167
C.2	Méthode des modes propagatifs	168
C.3	Unification des deux modèles	169
C.4	Mode stationnaire	172
C.5	Nombre de photons dans le modèle de doublet	173
D Optomécanique quantique linéarisée		175
D.1	Description de l'Hamiltonien	175
D.2	Équations de Langevin Quantiques	177
D.3	Séparation Champs moyens - fluctuations	180
D.3.1	Équations sur les champs moyens	180
D.3.2	Équations sur les fluctuations	181
D.3.3	Passage en transformée de Fourier	182
D.4	Spectre de l'énergie intracavité	184
Bibliographie		197

Introduction

L'optomécanique en cavité est le domaine de la physique qui étudie les interactions réciproques entre la lumière et les degrés de liberté mécaniques d'une cavité optique. Les photons, particules de lumière, transportent des quanta d'énergie et d'impulsion qu'ils peuvent céder partiellement ou totalement à un système mécanique. Ainsi, les photons piégés dans une cavité optique (pompée par un laser autour de la fréquence de résonance optique) exercent une force optique sur le degré de liberté mécanique du système, déformant la cavité. Réciproquement la déformation de la cavité change la fréquence de résonance optique, modifiant le nombre de photons piégés dans la cavité (*via* le désaccord en fréquence entre la pompe laser et la résonance). La force optique (proportionnelle au nombre de photons) dépend alors de la déformation mécanique de la cavité, induisant une rigidité optique sur le mouvement mécanique. Par ailleurs, le temps de vie caractéristique d'un photon dans la cavité introduit un retard dans la force optique. La cavité, en se déformant, subit alors une *rétro-action dynamique* de la part des forces optiques retardées, qui induit une "friction" optique additionnelle sur la vibration mécanique. Ces rigidité et friction additionnelles peuvent soit augmenter soit diminuer respectivement la fréquence propre et l'amortissement du mode mécanique. Cela dépend de la géométrie du système, des matériaux utilisés, du désaccord en fréquence du laser ainsi que de l'interaction optomécanique considérée.

Historique

Pression de radiation

La première force étudiée comme vecteur de l'interaction optomécanique est associée à la pression de radiation. Elle correspond au transfert d'impulsion de photons vers un corps lors de la réflexion de la lumière sur le corps. Kepler au XVIIème siècle postulait déjà l'existence de la pression de radiation [1] en remarquant que la queue des comètes présentait une courbure

pointant dans la direction opposée au soleil¹. L'effet est ensuite prédit théoriquement par Maxwell en 1871 et démontré pour la première fois par Nichols et Hull [2] et Lebedew [3].

La pression de radiation est généralement faible sur des systèmes macroscopiques. Elle devient non négligeable lorsqu'elle s'exerce sur des objets de faible masse ou lors de mesures de faibles déplacements. En 1967, Braginsky, en se questionnant sur les limites de sensibilité de mouvement obtenues par les systèmes optiques interférentiels de plus en plus perfectionnés remarque que la pression de radiation est responsable d'une force de friction sur un oscillateur mécanique [4]. En particulier, un faisceau de photons réfléchi sur la surface d'un objet oscillant exerce une force dépendant de la vitesse de la paroi du résonateur (de par l'effet Doppler). La partie DC de cette force est proportionnelle à la vitesse et est responsable d'un amortissement de la vibration mécanique. Dans le même papier il montre qu'en utilisant une cavité optique, l'effet peut être amplifié par l'augmentation du nombre de photons d'une part mais surtout par l'effet de retard de la force dû au temps de vie des photons dans la cavité (rétro-action dynamique). Par ailleurs il remarque que le signe de la force de friction dépend dans cette configuration du désaccord en fréquence du laser avec la cavité Fabry-Perot. Il pose ainsi les jalons de l'optomécanique en cavité permettant d'amortir ou d'amplifier la vibration mécanique de son résonateur. Il remarque notamment que lorsque la force de friction optomécanique compense la force de friction classique du mode mécanique, celui-ci n'est plus amorti. Il oscille alors avec une très grande amplitude et avec une largeur spectrale très faible. Cet état est appelé auto-oscillation optomécanique ("self-oscillation" en anglais). Il retrouve ainsi le résultat obtenu 30 ans plus tôt par Hartley [5] en électromécanique qui avait montré l'état d'auto-oscillation de la plaque élastiquement supportée d'un condensateur dans un circuit électrique résonant.

Braginsky présente trois ans plus tard une expérience prouvant ses prédictions [6] en faisant auto-osciller un miroir d'une cavité Fabry-Pérot micro-onde. Au niveau optique, Dorsell *et al.* [7] montrent la bistabilité d'une cavité d'une cavité Fabry-Pérot. Plus tard Cohadon *et al.* [8] montrent le refroidissement d'un mode mécanique basé sur la pression de radiation retardée par une boucle de retro-contrôle.

Les techniques de refroidissement optomécanique fondées sur la rétro-action dynamique ont connu un essor important depuis dix ans. De nombreux groupes tentent depuis la fin des années 90 de mettre un oscillateur macroscopique dans l'état quantique (mode mécanique peuplé de moins d'un phonon). Martinis et Cleland, sans faire de refroidissement optomécanique, sont les premiers à mesurer un mode mécanique ayant une population inférieure à 1 phonon [9] en 2010. Ils refroidissent l'oscillateur mécanique à l'aide d'un cryostat à dilution et couple leur résonateur mécanique à un circuit quantique à jonction Josephson supraconducteur. Par la suite le refroidissement optomécanique jusque dans le régime quantique de l'oscillateur mécanique est réalisé par Lehnert *et al.* dans un système électromécanique en 2011 [10], puis par Painter *et al.* dans un système optomécanique en 2011 [11].

Forces photothermiques

En plus de l'optomécanique par pression de radiation, les forces photothermiques permettent elles aussi un couplage optomécanique. Les forces photothermiques repose sur la déformation

1. c'est en fait les particules de poussières de la chevelure de la comète qui subissent la force de pression de radiation. Les gaz de la queue de la comète sont déviés par le vent solaire

du système mécanique lors de l'absorption de photons. Le matériau, en absorbant des photons, augmente en température et se dilate ou contracte en fonction de son tenseur de dilatation. Cette interaction peut être beaucoup plus forte que celle de pression de radiation. Cependant, elle est liée au temps thermique de réponse du système qui, s'il est plus long que le temps d'oscillation mécanique caractéristique, diminue fortement l'impact dynamique de la force.

L'optomécanique photothermique se développe dans la communauté de microscopie à pointe dont la lecture du déplacement est assuré par un système optique. Mertz *et al.* utilise une boucle de rétroaction sur un laser induisant une force photothermique afin de refroidir un mode mécanique du résonateur afin d'améliorer la sensibilité de la mesure [12]. Metzger *et al.* réalisent ensuite le refroidissement par rétro-action optomécanique dynamique d'un cantilever AFM en utilisant le cantilever comme miroir d'une cavité Fabry-Pérot [13]. Il a été discuté de savoir s'il était possible d'amener un oscillateur dans le régime quantique à l'aide de forces photothermiques. Différents auteurs avancent la faisabilité théorique en se basant sur un modèle de photothermie quantique [14, 15, 16].

Électrostriction

Plus récemment en 2010, l'électrostriction [17], force qui intervient lorsque la lumière se propage dans un matériau photo-élastique, a été mise en évidence comme une interaction participant au couplage optomécanique [18, 19, 20]. L'électrostriction est une interaction qui intervient de concert avec la pression de radiation dans les résonateurs optomécaniques à l'état solide comme les cavités semiconductrices et il est difficile de distinguer expérimentalement l'effet de ces deux forces lorsqu'elles sont toutes deux présentes. Par ailleurs elle ne devient importante que dans les matériaux de fort indice de réfraction.

État de l'art

L'optomécanique en cavité a réellement pris son envol au début des années 2000. De nombreux systèmes optomécanique ont été créés afin d'étudier le refroidissement ou l'auto-oscillation optomécanique. Un dispositif optomécanique performant doit en premier lieu coupler de façon efficace l'optique et la mécanique. La figure (1) présente une vue d'ensemble non exhaustive de différents dispositifs optomécaniques développés ces dix dernières années.

Qu'est ce qu'un bon dispositif optomécanique ?

- Un fort couplage optomécanique. Il augmente lorsque les champs optique et mécanique sont confinés sur un même faible volume. Au fil des développements technologiques, les équipes de recherche se sont focalisés sur l'augmentation du facteur de couplage optomécanique en descendant vers des systèmes de taille de plus en plus réduite.
- Un grand nombre de photons afin de maximiser les forces. Cela correspond notamment à une cavité ayant un haut facteur de qualité optique (Q_{opt}).
- Un faible couplage à l'environnement pour le mode mécanique (haut facteur de qualité mécanique Q_{meca}) et pour le mode optique (grand Q_{opt} là aussi).

Il est très difficile de maximiser les trois conditions à la fois. Les nombreux dispositifs faisant l'objet de recherche témoignent des différentes stratégies adoptées des équipes actives dans ce domaine de par le monde.

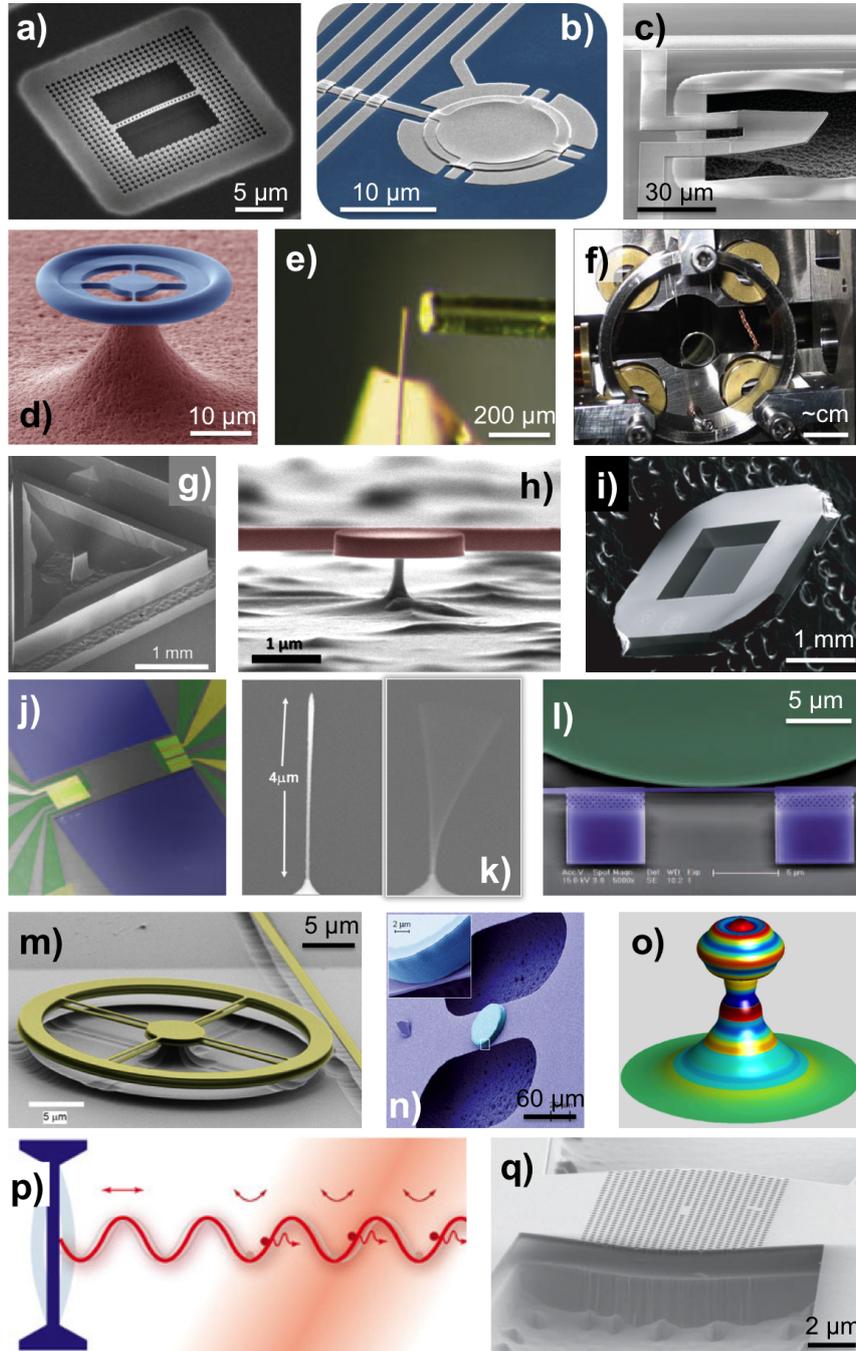


FIGURE 1: Vue d'ensemble non exhaustive de quelques systèmes optomécanique. (a) Nano-poutre silicium, Caltech [11]. (b) Membrane tambour en aluminium dans un circuit micro-onde supraconducteur, Boulder [10]. (c) Résonateur plongeoir en nitrure d'aluminium couplé à un Qubit supraconducteur, UCSB [9]. (d) Résonateur micro-toroïde en silice, EPFL, Caltech, U. of Queensland [21, 22, 23]. (e) poutre AFM plaqué d'or, LMU Munich [13]. (f) Miroir suspendu, MIT [24]. (g) Micro-pilier suspendu, LKB Paris [25]. (h) Microdisque (GaAs ou Si), MPQ Paris, Yale, Rochester [26, 27, 28, 29]. (i) Membrane suspendue, Yale, Boulder, Copenhagen [30, 31, 32]. (j) Résonateur électromécanique GaAs, NTT [33, 34]. (k) Nanorod ou nanotube de carbone dans une cavité fibrée, LMU Munich [35, 36]. (l) Résonateur guide d'onde suspendu, Yale [37]. (m) Résonateur double-disque, Cornell [38]. (n) Micro-miroir, U. de Vienne, LKB Paris, LMU Munich [39, 40, 41]. (o) Micro-sphère en silice, Caltech, U. of Oregon [42, 43]. (p) Optomécanique avec des atomes ultra-froids, Berkeley, Uni. Basel [44, 45]. (q) Cavité dans un cristal photonique 2D, NTT, EPFL, LPN [46, 47].

Présentation de notre résonateur optomécanique

Dans cette thèse nous étudions les phénomènes optomécaniques sur un disque en arséniure de gallium (GaAs) reposant sur un piédestal en arséniure d'aluminium et de gallium (AlGaAs) [48] (figure 2). L'épaisseur du disque GaAs est de 200 nm et le rayon varie de 1 μm à quelques dizaines de microns dans ce manuscrit. Ce disque est avant tout un résonateur optique (cavité) supportant des modes de galerie [49] localisé à la périphérie du disque et pouvant atteindre de hauts facteurs de qualité optique $Q_{opt} \sim 5 \cdot 10^5$ permettant un grand nombre de photons et une haute sensibilité dans les mesures. Le fort indice de réfraction du GaAs ($n \simeq 3,37$ pour $\lambda = 1550$ nm) permet de confiner le champ électromagnétique sur des volumes faibles et d'obtenir un fort couplage optomécanique. Le disque est aussi un résonateur mécanique qui, de par sa petite taille et sa masse de l'ordre du picogramme, possède des modes mécaniques de fréquence élevée. Il est principalement couplé à l'environnement mécanique par le piédestal et l'air environnant. A pression et température ambiante, les facteurs de qualité mécanique montent jusqu'à $Q_{meca} \sim 10^3 - 10^4$.

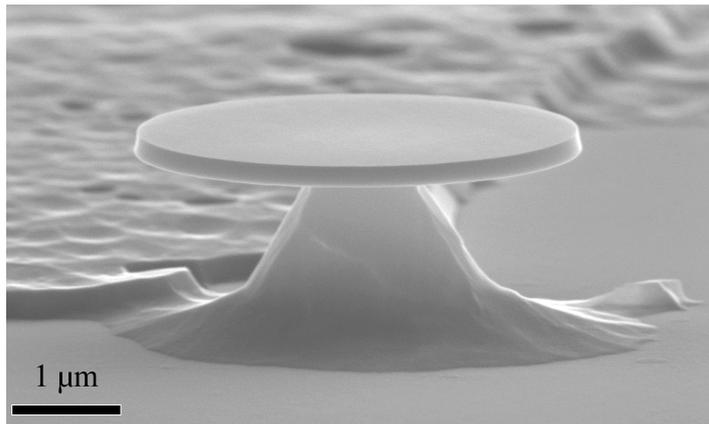


FIGURE 2: Cliché MEB d'un disque en GaAs.

Ainsi, ce résonateur GaAs possède de bons atouts. Même s'il ne possède pas les facteurs de qualité des micro-toroides en silice ($Q_{opt} \sim 10^8$), il présente des facteurs Q-fréquence mécanique très compétitifs et possède un facteur de couplage optomécanique parmi les plus élevés au monde. Ses fréquences mécaniques très hautes peuvent faciliter l'accès au régime quantique ou permettrait de développer des systèmes de détection à haute vitesse. D'autre part, la plateforme GaAs est bien développée notamment pour la photonique intégrée (laser, guide d'onde, détecteur...). Elle nous offre aussi la possibilité d'intégrer des milieux optiquement actifs comme des boîtes quantiques (InGaAs/GaAs) ou des puits quantiques (AlGaAs/GaAs) directement dans les disques.

Ce travail s'inscrit dans le régime classique de l'optomécanique. L'objectif de cette thèse est d'étudier les effets optomécaniques dynamiques des disques GaAs, particulièrement du côté de l'auto-oscillation, d'étudier le couplage optomécanique, ainsi que les dissipations optiques et mécaniques des disques afin de les contrôler. Ce travail de thèse s'inscrit dans un objectif plus long terme de mesure de forces par des techniques optomécaniques.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit de thèse est organisé de la manière suivante :

- Le **chapitre 1** est consacré à la théorie optomécanique. Nous décrivons les modes de galerie optiques supportés par le disque GaAs. Nous nous intéressons aux modes mécaniques des disques GaAs. Nous présentons le couplage optomécanique dû aux forces de pression de radiation, électrostrictives et photothermiques.
- Le **chapitre 2** présente les techniques expérimentales pour l'optomécanique développées pendant cette thèse. La fabrication des échantillons en salle blanche y est détaillée ainsi que la fabrication de la fibre effilée. Le montage expérimental permettant la spectroscopie optique et mécanique des disques y est décrit.
- Le **chapitre 3** s'intéresse aux pertes optiques dans les disques GaAs. Nous distinguons trois types de pertes : par courbure, par diffusion surfacique et par absorption. La diffusion surfacique fait l'objet d'une attention particulière car difficilement évaluable. Un modèle théorique est développé, permettant l'analyse fine de clichés TEM.
- Le **chapitre 4** traite des mécanismes de dissipation mécanique dans les disques GaAs : notamment amortissement fluide et pertes par ancrage. Des expériences et des modèles analytiques et numériques sont détaillés.
- Finalement le **chapitre 5** est consacré aux résultats expérimentaux sur l'auto-oscillation des disques GaAs et le test du modèle théorique développé au chapitre 1 . Des résultats originaux d'auto-modulation des auto-oscillations optomécaniques sont rapportés, qui impliquent des non-linéarités électro-optomécanique.

Fondements de l'optomécanique des disques GaAs

Ce chapitre fournit un cadre théorique à l'optomécanique dans les disques GaAs. Dans un premier temps nous étudions les modes optiques du système dans une gamme restreinte de longueur d'onde vers le proche infrarouge. Nous abordons ensuite la partie mécanique en nous limitant aux basses fréquences de vibration (≤ 10 GHz). Enfin nous verrons comment l'optique se couple à la mécanique par différents mécanismes physiques.

1.1 Optique des disques

L'arséniure de gallium est considéré comme un diélectrique parfait dans la gamme de longueur d'onde proche infrarouge. Une onde arrivant sur une interface composée de deux diélectriques subit le phénomène de réfraction. Elle est en partie transmise et en partie réfléchi selon son angle d'incidence et les indices de réfraction des deux diélectriques suivant la loi de Snell-Descartes. La réflexion devient totale à partir d'un certain angle d'incidence lorsque l'indice du milieu d'incidence est supérieur à celui de l'autre diélectrique.

Dans la configuration d'un diélectrique de fort indice encadré par deux diélectriques de plus faible indice, une onde peut être guidée par une série de réflexions totales. Ce phénomène de réflexion totale interne est à l'origine d'un grand nombre de systèmes guidant la lumière. Il permet notamment de confiner la lumière sur de faibles épaisseurs si la différence d'indice entre les deux milieux est suffisamment grande. Dans un disque en GaAs entouré d'air, nous nous intéressons aux photons se propageant dans le plan du disque grâce à ce mécanisme planaire de guidage illustré en figure 1.1(a). En plus de ce confinement dans le plan du disque, le photon subit une série de réflexions totales internes le long de la bordure de la cavité (figure 1.1(b)). Il réalise ainsi un tour complet du disque et revient à son point de départ où il interfère alors avec lui-même. Ce principe est caractéristique des cavités (ou résonateurs) optiques. Le champ dans la cavité se trouve amplifié pour une interférence constructive. Dans un langage corpusculaire pour la lumière, cela revient à dire que la cavité est capable de stocker un grand nombre de

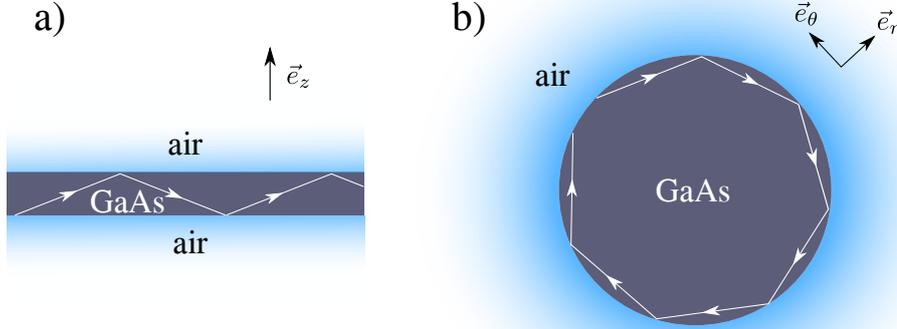


FIGURE 1.1: (a) Guidage de la lumière dans un empilement air-GaAs-air. (b) Guidage dans un disque GaAs par réflexion totale interne.

photons. Cette situation trouve une description ondulatoire dans la résolution des équations de Maxwell.

1.1.1 Les équations de Maxwell dans un cylindre

Le comportement du champ électromagnétique (champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ et champ magnétique $\vec{H}(\vec{r},t)$) est donné par les équations de Maxwell. L'hypothèse harmonique en notation complexe donne :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re \left(\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} \right) \quad (1.1)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \Re \left(\underline{\vec{H}}(\vec{r})e^{-i\omega t} \right) \quad (1.2)$$

Les équations de Maxwell pour des matériaux diélectriques s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = i\omega\mu_0\underline{\vec{H}}(\vec{r}) \\ \nabla \times \underline{\vec{H}}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_0\epsilon_r(\vec{r})\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \left(\epsilon_0\epsilon_r(\vec{r})\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \right) = 0 \\ \nabla \cdot \left(\mu_0\underline{\vec{H}}(\vec{r}) \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

où ϵ_0 représente la permittivité diélectrique du vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et $\epsilon_r(\vec{r}) = n(\vec{r})^2$ l'indice de réfraction du milieu diélectrique. ϵ_r est ici scalaire car le GaAs et l'air sont optiquement isotropes.

En prenant le rotationnel des deux premières équations de (1.3) on obtient :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}}(\vec{r})) - \Delta \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\vec{r}) \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \quad (1.4)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r(\vec{r})} \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \quad (1.5)$$

Ces deux équations ne possèdent pas de solutions simples sur tout l'espace. Dans ce genre de situation, on essaye de résoudre les champs dans chaque domaine ($\epsilon_r(\vec{r})$ constant) et d'utiliser les relations de continuité aux interfaces. Les équations deviennent alors :

$$\Delta \underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\Delta \underline{\vec{H}}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \underline{\vec{H}}(\vec{r}) = 0 \quad (1.7)$$

Les deux champs sont régis par la même équation dans les différents domaines. Résoudre la première équation revient alors à résoudre la seconde.

Le disque possède une géométrie cylindrique. Il est donc logique d'exprimer l'équation dans une base cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{F}_r(r, \theta, z) - \frac{\underline{F}_r(r, \theta, z)}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \underline{F}_\theta(r, \theta, z)}{\partial \theta} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \underline{F}_r(r, \theta, z) = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{F}_\theta(r, \theta, z) - \frac{\underline{F}_\theta(r, \theta, z)}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \underline{F}_r(r, \theta, z)}{\partial \theta} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \underline{F}_\theta(r, \theta, z) = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{F}_z(r, \theta, z) + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \underline{F}_z(r, \theta, z) = 0 \end{array} \right. \quad (1.8)$$

où $\underline{\vec{F}}$ représente soit $\underline{\vec{E}}$ soit $\underline{\vec{H}}$. Seule l'équation sur $\underline{F}_z(r, \theta, z)$ est découplé des autres composantes \underline{F}_r et \underline{F}_θ . Essayons de la résoudre. Le disque possède une symétrie de révolution autour de son axe. La dépendance angulaire θ du champ doit donc être indépendante des deux autres coordonnées r et z . Cette séparation des variables permet d'écrire $\underline{F}_z(\vec{r}) = \underline{F}_z(r, \theta, z) = \underline{S}_z(r, z) \underline{\Theta}(\theta)$. En injectant cette solution dans la troisième équation de (1.8) et en séparant les termes en fonction de leurs dépendances, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Theta}(\theta) = A e^{j k_\theta \theta} + B e^{-j k_\theta \theta} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{S}_z(r, z) + \left(\frac{n^2 \omega^2}{c^2} - \frac{k_\theta^2}{r^2} \right) \underline{S}_z(r, z) = 0 \end{array} \right. \quad (1.9)$$

où A et B sont des constantes à déterminer. k_θ est le vecteur d'onde azimutal d'un mode guidé par réflexion totale interne dans un disque. L'onde correspondante peut se propager selon le vecteur \vec{e}_θ ou $-\vec{e}_\theta$. Ces deux ondes sont propagatives, avec une propagation dans le sens des aiguilles d'une montre ("clockwise" en anglais), ou dans le sens contraire ("counterclockwise"). Une onde stationnaire, combinaison linéaire de ces deux ondes propagatives, peut aussi exister.

k_θ peut en réalité être complexe. Sa partie imaginaire correspond aux pertes linéaires lors de la propagation.

La condition nécessaire pour obtenir un mode de cavité (c'est-à-dire résonant) dans un disque est le retour en phase après avoir fait un tour complet. Mathématiquement cela se traduit par :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r, \theta + 2\pi, z) \quad (1.10)$$

impliquant :

$$e^{ik_\theta 2\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_\theta = m \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z} \quad (1.11)$$

m est un entier relatif qui représente le nombre d'oscillations du champ lors d'un tour de cavité. Le temps T_0 que met un photon à faire un tour complet de cavité ("round trip time" en anglais) est donné par :

$$T_0 = \frac{m}{\nu_0} = \frac{2\pi m}{\omega_0} \quad (1.12)$$

où ν_0 est la fréquence optique du mode et ω_0 sa fréquence angulaire.

La méthode de séparation des variables ne fonctionne pas pour le champ $\underline{S}_z(r, z)$ à cause de la discontinuité du champ électrique aux interfaces. Les champs n'ont pas de solutions analytiques simples. Pour circonvenir à ce problème deux solutions s'offrent à nous : la méthode de l'indice effectif ou la simulation numérique du champ $\underline{S}_z(r, z)$.

1.1.2 L'indice effectif

L'approche de l'indice effectif consiste à réduire le problème de trois à deux dimensions en s'affranchissant de la dimension de fort confinement selon \vec{e}_z . Le disque devient un cylindre infini invariant par translation le long de son axe \vec{e}_z . En 2D, ce cylindre infini devient un disque planaire 2D, dont l'indice n'est alors plus celui du GaAs, mais l'indice effectif dû au confinement vertical air-GaAs-air dans une tranche fine quasi-planaire de GaAs ("slab" en anglais). La dépendance spatiale du champ dans la direction \vec{e}_z est donnée par celle d'un mode se propageant dans ce "slab" et nous faisons l'hypothèse que les solutions aux équations de Maxwell se séparent alors en deux lots différents : "Transverse Magnétique" ("TM") pour $(\underline{E}_z, \underline{H}_r, \underline{H}_\theta) \neq (0, 0, 0)$ (propagation le long du slab avec champ électrique hors du plan du slab) et "Transverse Electric" ("TE") pour $(\underline{H}_z, \underline{E}_r, \underline{E}_\theta) \neq (0, 0, 0)$ (propagation dans le slab avec champ électrique dans le plan du slab) :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega\mu_0 \underline{H}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \theta} \\ i\omega\mu_0 \underline{H}_\theta = -\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial r} \\ -i\omega\epsilon_0 n_{eff}^{2(TM)} \underline{E}_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \underline{H}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \theta} \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -i\omega\epsilon_0 n_{eff}^{2(TE)} \underline{E}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \theta} \\ -i\omega\epsilon_0 n_{eff}^{2(TE)} \underline{E}_\theta = -\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} \\ i\omega\mu_0 \underline{H}_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \underline{E}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{E}_r}{\partial \theta} \right) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

où n_{eff} est l'indice effectif donné par le confinement vertical à une dimension, qui dépend donc du lot considéré : $n_{eff}^{(TE)}$ ou $n_{eff}^{(TM)}$. Notons ici l'abus de l'appellation "Transverse Electric (Magnetic)", qui est habituellement utilisée pour signifier que l'onde ne possède de composante électrique (magnétique) que dans le plan transverse à la direction de propagation (\vec{e}_θ ici). La polarisation "TE" est en réalité ici celle dont le champ électrique dominant est dans le plan transverse (\underline{E}_r mais avec $\underline{E}_\theta \neq 0$). La polarisation du mode "TM" correspond à l'inverse à \underline{E}_z dominant.

La dépendance selon θ étant connue, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{H}_r = \frac{m}{\omega\mu_0 r} \underline{E}_z \\ \underline{H}_\theta = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial r} \\ -i\omega r \epsilon_{eff}^{(TM)} \underline{E}_z = \underline{H}_\theta + r \frac{\partial \underline{H}_\theta}{\partial r} - im \underline{H}_r \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_r = \frac{-m}{\omega \epsilon_{eff}^{(TE)} r} \underline{H}_z \\ \underline{E}_\theta = -\frac{i}{\omega \epsilon_{eff}^{(TE)}} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} \\ i\omega\mu_0 r \underline{H}_z = \underline{E}_\theta + \frac{\partial \underline{E}_\theta}{\partial r} - im \underline{E}_r \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Les champs \underline{E}_z et \underline{H}_z permettent de calculer les quatre autres composantes. Si on suppose maintenant la séparabilité des variables r et z , ces champs sont eux-mêmes donnés par une même équation :

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \underline{F}_z(r) + (k^2 n_{eff}^2 r^2 - m^2) \underline{F}_z(r) = 0 \quad (1.15)$$

Où F_z représente E_z ou H_z indifféremment. Cette équation se réécrit :

$$\left(u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + u \frac{\partial}{\partial u} \right) \underline{F}_z \left(\frac{u}{kn_{eff}} \right) + (u^2 - m^2) \underline{F}_z \left(\frac{u}{kn_{eff}} \right) = 0 \quad (1.16)$$

où $u = \frac{\omega}{c} n_{eff} r$ est complexe car les fréquences de résonance du disque ω ont une partie imaginaire. Nous avons ici choisi une dépendance temporelle de la forme $e^{-i\omega t}$ donc $\omega = \omega_0 - i\kappa$ avec κ réel positif afin d'éviter la divergence des solutions. Les solutions de cette équation complexe

sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce $J_m(u)$ et $Y_m(u)$ et les fonctions de Hankel de première et deuxième espèce $H_m^{(1)}(u)$ et $H_m^{(2)}(u)$. À l'intérieur du disque le champ doit être nul en $r = 0 = u$ pour les ondes propagatives TE et TM considérées ici (pour ne pas avoir de singularité en polarisation en $r = 0$). Seule la fonction de Bessel de première espèce vérifie cette condition. À l'extérieur du disque, le champ doit tendre vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$. Seule la fonction de Hankel de seconde espèce vérifie cette condition. Si la convention de départ avait été $e^{i\omega t}$, la fonction de Hankel de première espèce aurait été solution.

Les solutions à l'intérieur et à l'extérieur du disque pour cette équation prennent finalement la forme :

$$F_z(r) = \begin{cases} AJ_m(kn_{eff}r) & \text{pour } r < R \\ BH_m^{(2)}(kr) & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (1.17)$$

Où A et B sont deux coefficients qui restent à déterminer. La continuité ou discontinuité des champs à l'interface $r = R$ fournit les équations d'auto-cohérence :

$$n_{eff}^{(TM)} \frac{\dot{J}_m(kn_{eff}^{(TM)}R)}{J_m(kn_{eff}^{(TM)}R)} = \frac{\dot{H}_m^{(2)}(kR)}{H_m^{(2)}(kR)} \quad \text{modes TM} \quad (1.18)$$

$$\frac{\dot{J}_m(kn_{eff}^{(TE)}R)}{J_m(kn_{eff}^{(TE)}R)} = n_{eff}^{(TE)} \frac{\dot{H}_m^{(2)}(kR)}{H_m^{(2)}(kR)} \quad \text{modes TE} \quad (1.19)$$

Pour chaque valeur de m , ces deux équations ont plusieurs solutions qui sont énumérées par un nombre entier p ($p = 1, 2, 3 \dots$) appelé nombre radial. Comme précisé précédemment, les solutions k de ces équations sont complexes. En effet les modes propres possèdent des pertes dues à la courbure des disques.

Le champ électromagnétique dans une cavité à mode de galerie est alors caractérisé par les deux nombres m et p . m , le nombre azimutal, détermine le nombre d'oscillations du champ autour du disque. Le signe de m autorise la propagation du mode dans un sens azimutal ou dans l'autre ($m > 0$ "clockwise" ou $m < 0$ "counterclockwise"). Le nombre radial, p donne le nombre de lobes de la polarisation dominante (E_r pour TE et E_z pour TM) lorsque la direction radiale est parcourue.

Le modèle des modes de galerie par l'indice effectif présenté ici repose sur une hypothèse forte de séparation des variables. Si il permet de prévoir les fréquences propres avec une bonne précision, il est souvent trop grossier pour obtenir le profil spatial exact des modes. Or la connaissance détaillée du champ dans la cavité est souvent nécessaire à notre travail. Nous recourons donc à la simulation numérique pour calculer le profil de mode de manière plus précise.

1.1.3 Simulation numérique

Les simulations numériques sont réalisées à l'aide d'un logiciel s'appuyant sur la méthode des éléments finis ("Finite Element Method" FEM) : Comsol Multiphysics. La simulation est bidimensionnelle car l'hypothèse de séparation de la variable θ est toujours valable. Nous utilisons

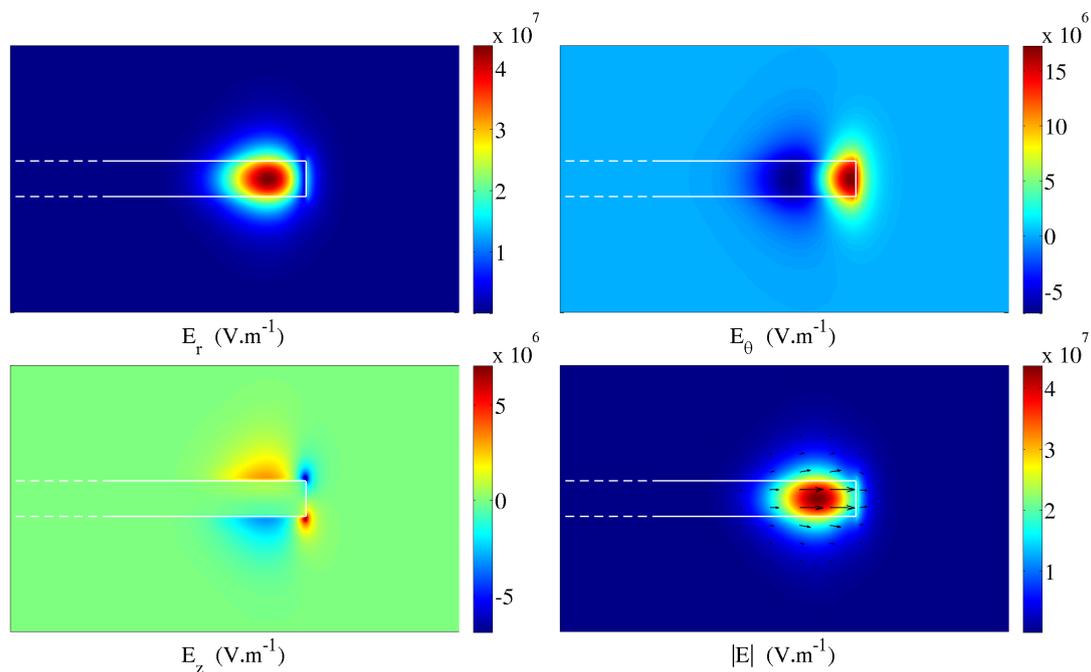


FIGURE 1.2: Mode de galerie TE $p = 1$, $m = 46$ simulé par Comsol, en échelle arbitraire du champ. Le disque a un rayon de $5 \mu\text{m}$ et une épaisseur de 200 nm (les dimensions ne sont pas respectées sur le dessin). Les flèches sur la figure montrant $|E|$ représentent la polarisation TE du champ, dominée par E_r .

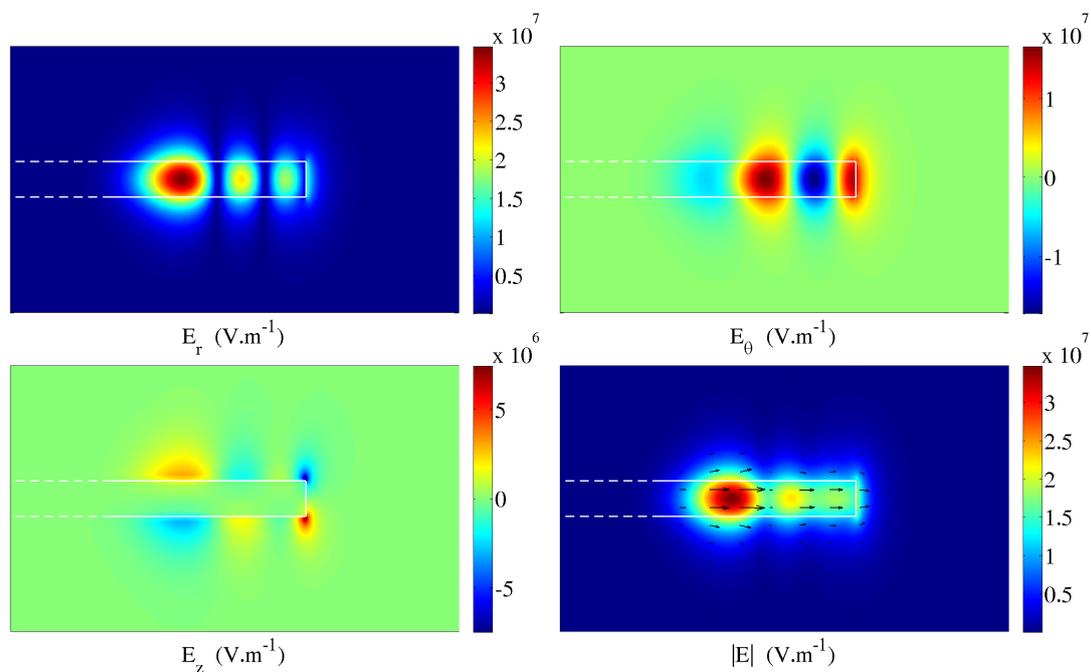


FIGURE 1.3: Mode de galerie TE $p = 3$, $m = 37$ simulé par Comsol, en échelle arbitraire du champ. Le disque a un rayon de $5 \mu\text{m}$ et une épaisseur de 200 nm (les dimensions ne sont pas respectées sur le dessin). Les flèches sur la figure montrant $|E|$ représentent la polarisation du champ, dominée par E_r .

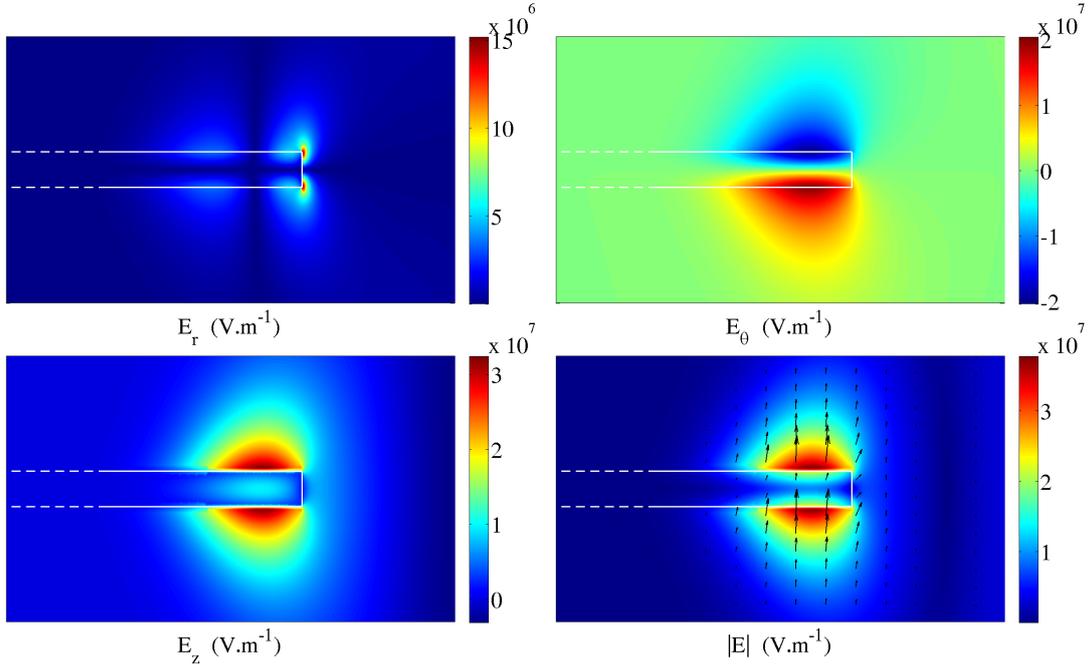


FIGURE 1.4: Mode de galerie TM $p = 1$, $m = 22$ simulé par Comsol, en échelle arbitraire du champ. Le disque a un rayon de $5 \mu\text{m}$ et une épaisseur de 200 nm (les dimensions ne sont pas respectées sur le dessin). Les flèches sur la figure montrant $|E|$ représentent la polarisation du champ, dominée par E_z .

un code développé par Oxborrow [50]. Le disque est dessiné sur un plan 2D (r, z) . L'épaisseur et le rayon sont renseignés ainsi que le nombre azimutal m . Le logiciel calcule les fréquences propres et les six composantes du champ. Les figures (1.2), (1.3) et (1.4) montrent l'exemple de tels calculs pour des modes de galerie TE ($p = 1$, $m = 46$), TE ($p = 3$, $m = 37$) et TM ($p = 1$, $m = 22$).

Les figures (1.5(a)) et (1.5(b)) montrent la composante du champ E_r sur une coupe vue de dessus des modes TE ($p = 1$, $m = 21$) et TE ($p = 3$, $m = 14$) d'un disque de rayon $2.5 \mu\text{m}$. Elles permettent de visualiser la dépendance azimutale du mode.

En complément, dans ces simulations sont ajoutées des couches parfaitement absorbantes ("Perfectly Matched Layer" ou PML). Ces dernières sont composées d'un matériau graduellement absorbant afin d'éviter les réflexions sur les bords du domaine de simulation (qui ne peut pas être infini). Cette méthode a été développée dans la référence [51]. Les PMLs permettent d'absorber la partie radiative du champ. Les fréquences fournies par Comsol deviennent alors complexes et la partie imaginaire donne les pertes par courbures. Le calcul nous fournit alors le facteur de qualité radiatif par la formule :

$$Q_{rad} = \frac{\Re(\omega_0)}{2\Im(\omega_0)} \quad (1.20)$$

Cette méthode numérique est la méthode de choix pour calculer Q_{rad} , grâce à la précision obtenue sur les profils spatiaux du champ et donc sur les parties radiatives du champ.

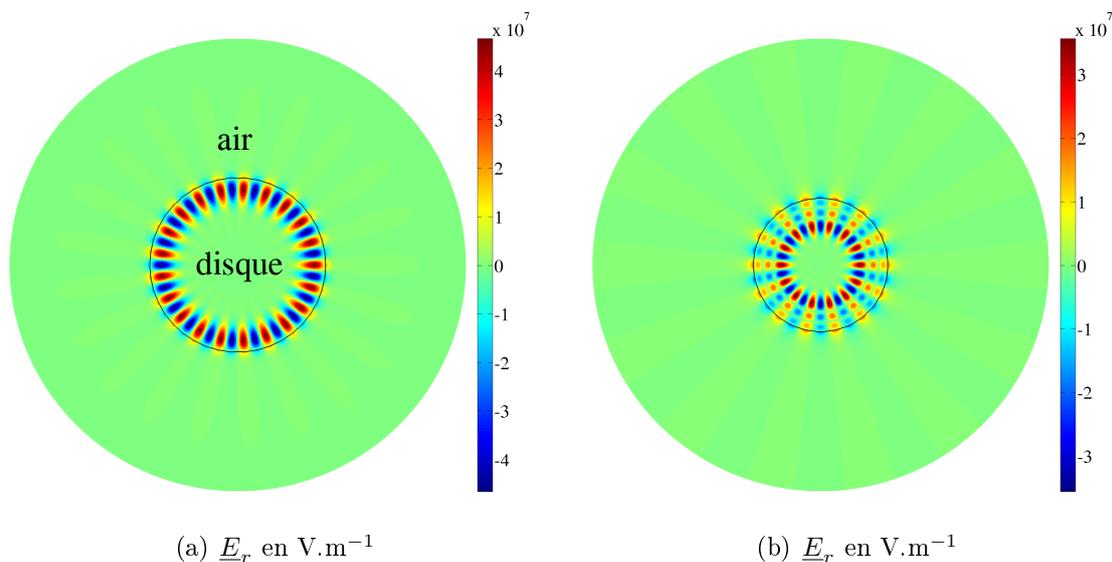


FIGURE 1.5: Modes de galerie dans un disque de rayon $R = 2.5 \mu\text{m}$ et d'épaisseur 200 nm en échelle arbitraire du champ. En (a) le mode est TE, $p = 1$, $m = 21$, $\lambda_0 = 1557.52 \text{ nm}$. En (b) le mode est TE, $p = 3$, $m = 14$, $\lambda_0 = 1546.20 \text{ nm}$.

1.1.4 Fibre optique

Afin de peupler les modes optiques du disque, nous couplons le résonateur à son environnement optique de façon contrôlée. Nous utilisons le couplage évanescent entre deux guides d'onde. Le disque est un guide d'onde qui reboucle sur lui-même pour former une cavité. L'autre guide est une fibre optique étirée de façon à ce qu'en son sein le guidage de la lumière ne repose que sur le contraste d'indice entre la silice et l'air.

À proximité du disque, la fibre est assimilée à un cylindre de rayon R_f . Les équations de Maxwell dans une base cylindrique sont de nouveau utilisées (base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\psi, \vec{e}_y)$) mais en considérant à présent la direction de propagation le long de l'axe de symétrie de la fibre \vec{e}_y (figure 1.7).

La solution des équations de Maxwell pour une fibre est développée dans l'annexe A. La différence majeure avec les modes de galerie vient du fait que la propagation est sans pertes, car elle s'opère selon l'axe de symétrie de translation \vec{e}_y . De plus la séparation des variables est justifiée exactement par cette invariance par translation et la symétrie de rotation par rapport à l'axe \vec{e}_y .

L'indexation des modes se fait à partir des champs E_y et H_y s'exprimant comme :

$$\underline{E}_y(\rho, \psi, y) = \begin{cases} AJ_N(k_{co}\rho)e^{iN\psi}e^{i\beta y} & \text{pour } \rho < R_f \\ CK_N(k_{cl}\rho)e^{iN\psi}e^{i\beta y} & \text{pour } \rho > R_f \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\underline{H}_y(\rho, \psi, y) = \begin{cases} BJ_N(k_{co}\rho)e^{iN\psi}e^{i\beta y} & \text{pour } \rho < R_f \\ DK_N(k_{cl}\rho)e^{iN\psi}e^{i\beta y} & \text{pour } \rho > R_f \end{cases} \quad (1.22)$$

Dans notre expérience, la fibre est étirée jusqu'à ce qu'elle devienne monomode, portant uniquement le mode étiqueté HE₁₁ [52]. Le premier indice est le nombre N d'oscillations azimu-

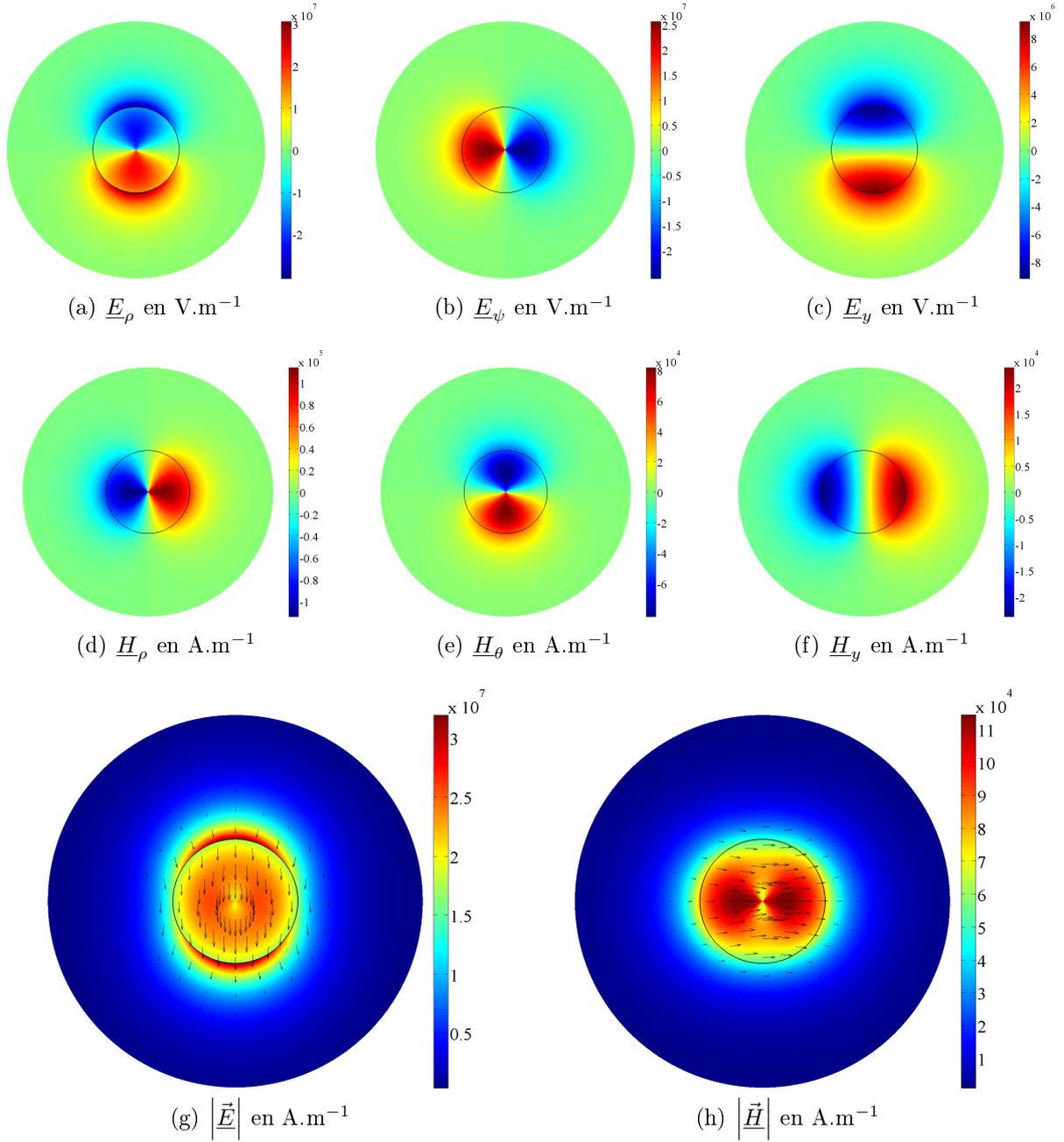


FIGURE 1.6: Mode guidé HE_{11} dans une fibre en silice effilée. Le rayon de la fibre est de 500 nm. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda = 1550$ nm. L'indice effectif pour ce mode est $n_{eff} \simeq 1.173$. Il existe un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre les composantes longitudinales et transverses. Il y a en fait deux modes dégénérés, l'autre polarisation est orthogonale à celle présentée ci-dessus. Les axes de polarisations sont ici définis par une rupture de symétrie due à la maille numérique du calcul, car la fibre elle même n'a pas d'axe transverse de polarisation privilégié. Dans une expérience, c'est la polarisation de la lumière excitatrice de la fibre qui peut fixer ces axes.

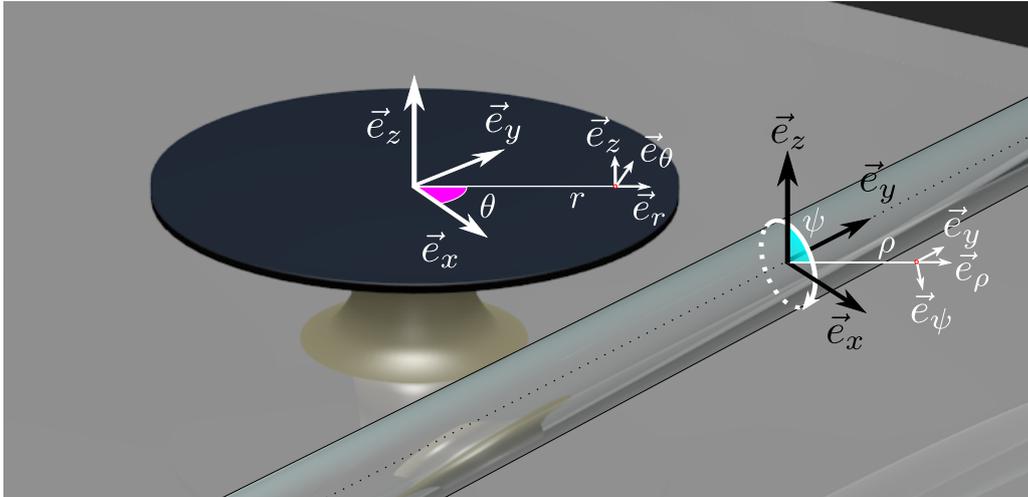


FIGURE 1.7: Représentation d'un disque en GaAs à proximité d'une fibre optique éfilée. Les différents systèmes de coordonnées cartésien et cylindrique sont présentés.

tales des composantes E_y et H_y . Le second est le nombre d'oscillations radiales de la fonction de Bessel de première espèce J_N . Notons brièvement que pour un rayon de 500 nm, l'approximation de guidage faible dans la fibre n'est plus valable et que c'est pour cela que le mode HE_{11} est le mode fondamental guidé, et non un mode LP_{01} à symétrie de rotation [53]. La figure (1.6) présente le mode HE_{11} guidée par une fibre optique ayant été étirée jusqu'à un rayon de 500 nm.

1.1.5 Couplage fibre-disque

Les modes électromagnétiques de la fibre et du disque étant maintenant décrits, nous étudions dans cette partie leur couplage mutuel.

Matrices de diffusion

Le formalisme des matrices permet d'exprimer simplement la diffusion d'une onde en ne considérant que les flux sortant et entrant dans la zone diffusante. Pour un couplage à deux canaux d'entrée et de sortie représentés respectivement par les vecteurs $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$, la matrice de diffusion notée S est de rang 2 et lie ces deux vecteurs par la relation : $B = SA$ [54]. S est complexe et s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$S = \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Le formalisme des matrices de diffusion [54] repose sur des considérations fondamentales d'électromagnétisme : le principe de réciprocité impose ${}^t S = S$, la conservation de l'énergie impose $S^\dagger = S^{-1}$ et le retournement temporel impose $S^* = S^{-1}$. Ces trois principes se traduisent par :

$$\begin{cases} \underline{S}_{12} = \underline{S}_{21} \\ |\underline{S}_{11}|^2 + |\underline{S}_{21}|^2 = 1 \\ |\underline{S}_{22}|^2 + |\underline{S}_{12}|^2 = 1 \\ \underline{S}_{11}^* \underline{S}_{12} + \underline{S}_{22}^* \underline{S}_{21} = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Les trois premières équations impliquent : $\underline{S}_{11} = te^{i\theta_1}$, $\underline{S}_{22} = te^{i\theta_2}$ et $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21} = ke^{i\phi}$ avec k et t réels vérifiant la relation $k^2 + t^2 = 1$. La dernière équation fournit la relation :

$$\begin{aligned} te^{-i\theta_1} ke^{i\phi} + ke^{i\phi} te^{i\theta_2} &= 0 \\ e^{-i(\theta_1 - \phi)} + e^{i(\theta_2 - \phi)} &= 0 \\ -(\theta_1 - \phi) &= \pi + \theta_2 - \phi + 2n\pi \\ \phi &= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} + n\pi \end{aligned} \quad (1.25)$$

La matrice de diffusion s'écrira finalement :

$$S = \begin{pmatrix} te^{i\theta_1} & ke^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} + n\pi)} \\ ke^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} + n\pi)} & te^{i\theta_2} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Les phases θ_1 et θ_2 peuvent être choisies arbitrairement. Cependant physiquement on choisira le coefficient de transmission sans déphasage. En effet le couplage est traité perturbativement, dans la limite où les deux systèmes ne se voient pas, il n'y a pas de déphasage et la transmission vaut 1. Cela impose de fixer $\theta_2 = \theta_1 = 0[2\pi]$. La matrice de diffusion devient finalement :

$$S = \begin{pmatrix} t & \pm ik \\ \pm ik & t \end{pmatrix} \quad \text{avec } (t, k) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.27)$$

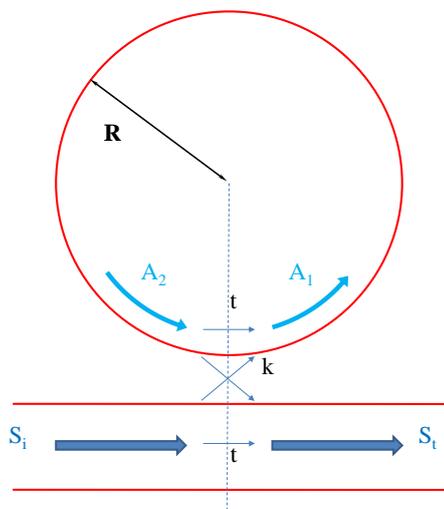
Pour le couplage guide-disque, le coefficient k est calculé dans la théorie des modes couplés dans l'annexe B. Il est donné par :

$$k = \left| \frac{\omega}{4} \int_V (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dV \right| \quad (1.28)$$

où \vec{E}_c est le champ électrique du mode de galerie et \vec{E}_w le champ électrique du mode se propageant le long de la fibre. ϵ_c est la permittivité diélectrique de la cavité disque seule et ϵ celle du système disque + fibre. Le volume de l'intégrale se réduit donc au volume de la fibre optique. Maintenant que le formalisme des matrices de diffusion est établi, nous l'appliquons au système disque-fibre.

Méthode des modes propagatifs

Chaque mode propagatif est représenté par son amplitude et sa phase (figure 1.8). Les équations issues du formalisme des matrices de diffusion sont :



$$\begin{cases} A_1 = -ikS_i + tA_2 \\ A_2 = \alpha e^{-i\phi} A_1 \\ S_t = tS_i - ikA_2 \end{cases} \quad (1.29)$$

FIGURE 1.8: Guide et disque

ϕ est la phase accumulée par le champ du disque pendant un tour complet du disque. α représente les pertes intrinsèques après un tour complet. Les trois amplitudes, normalisées de manière à ce que leur module carré donne la puissance optique, sont réexprimées en fonction de S_i :

$$A_1 = \frac{-ik}{1 - \alpha t e^{i\phi}} S_i \quad (1.30)$$

$$A_2 = \frac{-ik\alpha e^{-i\phi}}{1 - \alpha t e^{i\phi}} S_i \quad (1.31)$$

$$S_t = \frac{t - \alpha e^{-i\phi}}{1 - \alpha t e^{i\phi}} S_i \quad (1.32)$$

La puissance du champ à la sortie de la fibre est donnée par $|S_t|^2$:

$$\mathcal{P}_{out} = |S_t|^2 = \frac{t^2 + \alpha^2 - 2\alpha t \cos \phi}{1 + \alpha^2 t^2 - 2\alpha t \cos \phi} |S_i|^2 \quad (1.33)$$

La fréquence du laser étant expérimentalement proche d'une résonance optique, la phase sera proche d'un multiple de 2π : $\phi \approx 2\pi m = T_0 \omega_0$ avec T_0 le temps que met un photon à faire le tour de la cavité ("round-trip time" en anglais). On pose donc $\phi = T_0 \omega_L = T_0(\omega_0 + \delta\omega)$. Il vient naturellement $\cos \phi = 1 - T_0^2 \frac{(\omega_L - \omega_0)^2}{2}$. Ce développement limité est correct dans la limite où la largeur du mode optique est très petite devant l'intervalle spectral libre ("FSR" en anglais).

$$\mathcal{P}_{out} = \frac{\left(\frac{t - \alpha}{\sqrt{\alpha t T_0}}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2}{\left(\frac{1 - \alpha t}{\sqrt{\alpha t T_0}}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2} |S_i|^2 \quad (1.34)$$

De même la puissance circulant à l'intérieur de la cavité est donnée par le module carré de l'amplitude du champ intracavité, renommé $A_{\mathcal{P}}$:

$$\mathcal{P}_{circ} = |A_{\mathcal{P}}|^2 = \left| \frac{\frac{-ik}{\alpha t T_0}}{\frac{1-\alpha t}{\alpha t T_0} - i(\omega_L - \omega_0)} S_i \right|^2 \quad (1.35)$$

Les coefficients α et t sont tous deux très proches de 1 car nous considérons peu de pertes et un couplage faible (perturbatif). Nous utilisons leurs conjugués $k^2 = 1 - t^2$ et $\gamma^2 = 1 - \alpha^2$ qui sont eux proches de zero pour pouvoir effectuer des développements limités. On écrit $\alpha t = \sqrt{1 - k^2} \sqrt{1 - \gamma^2} \simeq (1 - \frac{k^2}{2})(1 - \frac{\gamma^2}{2}) \simeq 1 - \frac{k^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} \simeq 1$ et $1 - \alpha t \simeq \frac{k^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2}$ à l'ordre le plus bas. En réécrivant $\mathcal{P}_{in} = |S_i|^2$ la puissance incidente, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{out} = \frac{\left(\frac{\gamma^2 - k^2}{2T_0}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2}{\left(\frac{\gamma^2 + k^2}{2T_0}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2} \mathcal{P}_{in} \\ \mathcal{P}_{circ} = \frac{\left(\frac{k}{T_0}\right)^2}{\left(\frac{\gamma^2 + k^2}{2T_0}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2} \mathcal{P}_{in} \end{array} \right. \quad (1.36)$$

Théorie des modes couplés dans le temps

Une autre façon d'aborder le problème est de décrire l'évolution temporelle de l'amplitude du champ de cavité A_c . Son équation d'évolution est donnée par :

$$\frac{dA_c(t)}{dt} = -i(\omega_0 - \omega_L)A_c(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) A_c(t) - i\sqrt{\kappa_e}S_i \quad (1.37)$$

avec la distinction faite entre A_c en $\sqrt{\text{J}}$, normalisée de façon à ce que $|A_c|^2$ soit l'énergie stockée dans le mode résonant de cavité, et S_i en $\sqrt{\text{J.s}^{-1}}$, normalisé de façon à ce que $|S_i|^2$ soit la puissance dans le mode propagatif incident. κ_e en s^{-1} exprime le couplage au guide (pertes extrinsèques du point de vue du mode de galerie). κ_i en s^{-1} représente les pertes intrinsèques du mode de galerie. En régime permanent :

$$A_c = \frac{-i\sqrt{\kappa_e}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) + i(\omega_0 - \omega_L)} S_i \quad (1.38)$$

L'énergie dans le disque s'écrit :

$$\mathcal{E} = |A_c|^2 = \frac{\kappa_e}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_0 - \omega_L)^2} \mathcal{P}_{in} \quad (1.39)$$

Le lien entre l'énergie et la puissance circulante est donné par la relation :

$$\mathcal{P}_{circ}T_0 = \mathcal{E} \quad (1.40)$$

$$\frac{\frac{k^2}{T_0}}{\left(\frac{\gamma^2 + k^2}{2T_0}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2} \mathcal{P}_{in} = \frac{\kappa_e}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_0 - \omega_L)^2} \mathcal{P}_{in} \quad (1.41)$$

Permettant l'identification des coefficients k et γ :

$$\begin{cases} \kappa_i = \frac{\gamma^2}{T_0} \\ \kappa_e = \frac{k^2}{T_0} \end{cases} \quad (1.42)$$

et établissant une correspondance entre les deux modèles présentés.

Formules générales utiles

Nous venons de voir comment se comporte le couplage d'un mode propagatif simple venant d'une fibre à un mode propagatif résonant de galerie dit "clockwise" (cw). Dans la réalité des expériences, le mode "clockwise" peut être couplé au mode "counterclockwise" (ccw) se propageant en sens opposé, sous l'influence de non-idéalités. Ce sont alors des ondes stationnaires qui correspondent aux modes propres de galerie du disque. L'annexe C se propose de refaire les calculs précédents dans ce cas général légèrement plus compliqué.

Les deux résultats qui nous intéressent sont la transmission normalisée $\frac{\mathcal{P}_{out}}{\mathcal{P}_{in}}$, qui est une donnée qui peut être extraite expérimentalement, ainsi que le nombre de photons dans la cavité N_{cav} qui est une grandeur intervenant dans les effets optomécaniques.

Dans le cas d'un mode de galerie propagatif du disque (figure 1.8), le nombre maximal de photons dans la cavité est obtenu lorsque le contraste de la transmission est maximal ($\frac{\mathcal{P}_{out}}{\mathcal{P}_{in}} = 0$), pour $\kappa_e = \kappa_i$. Cette situation est appelée **couplage critique**.

$$\left\{ \begin{aligned} N_{cav} &= \frac{\frac{\kappa_e}{\hbar\omega_L}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2} \mathcal{P}_{in} \end{aligned} \right. \quad (1.43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathcal{P}_{out}}{\mathcal{P}_{in}} &= \frac{\left(\frac{\kappa_i}{2} - \frac{\kappa_e}{2}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - \omega_0)^2} \end{aligned} \right. \quad (1.44)$$

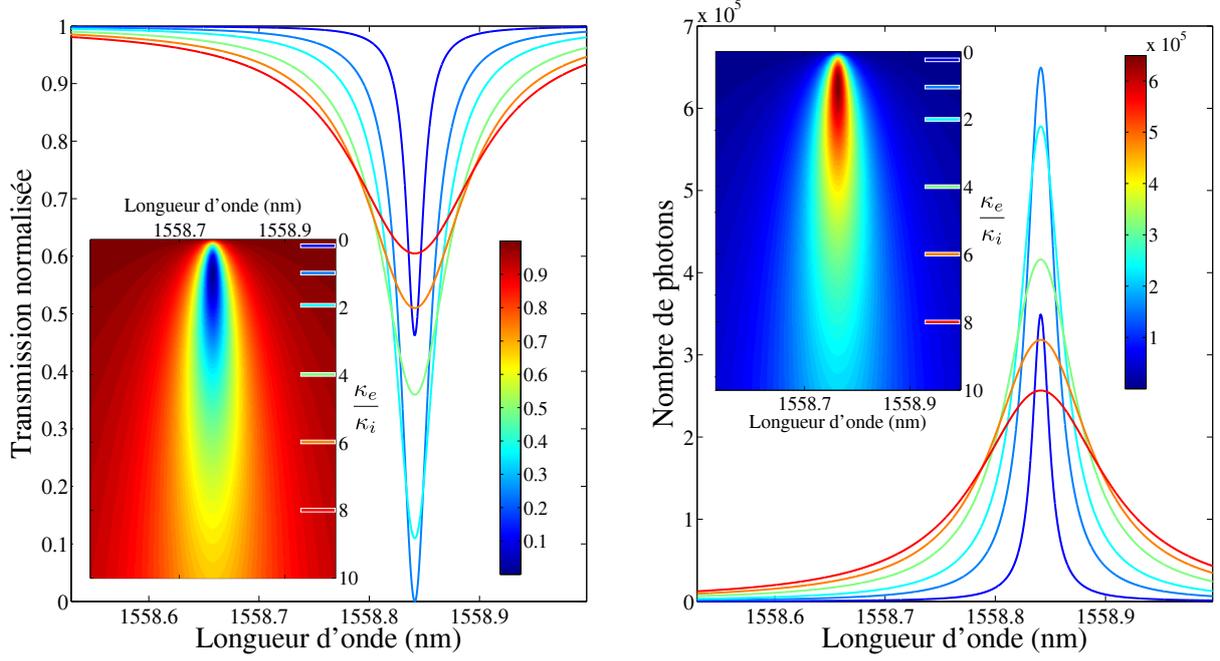


FIGURE 1.9: En (a) la transmission normalisée $\frac{\mathcal{P}_{out}}{\mathcal{P}_{in}}$ (équation 1.44) et en (b) le nombre de photons dans la cavité N_{cav} (équation 1.43) en fonction de la longueur d'onde du laser $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_L}$ pour différentes valeurs du ratio $\frac{\kappa_e}{\kappa_i}$. Les courbes bleue, bleu claire, cyan, verte, orange et rouge correspondent respectivement à des ratios $\frac{\kappa_e}{\kappa_i}$ de 0.2, 1, 2, 4, 6 et 8. Les paramètres du mode sont $Q_i = \frac{\omega_0}{\kappa_i} = 1 \cdot 10^5$, $\lambda_0 = 1558.84$ nm.

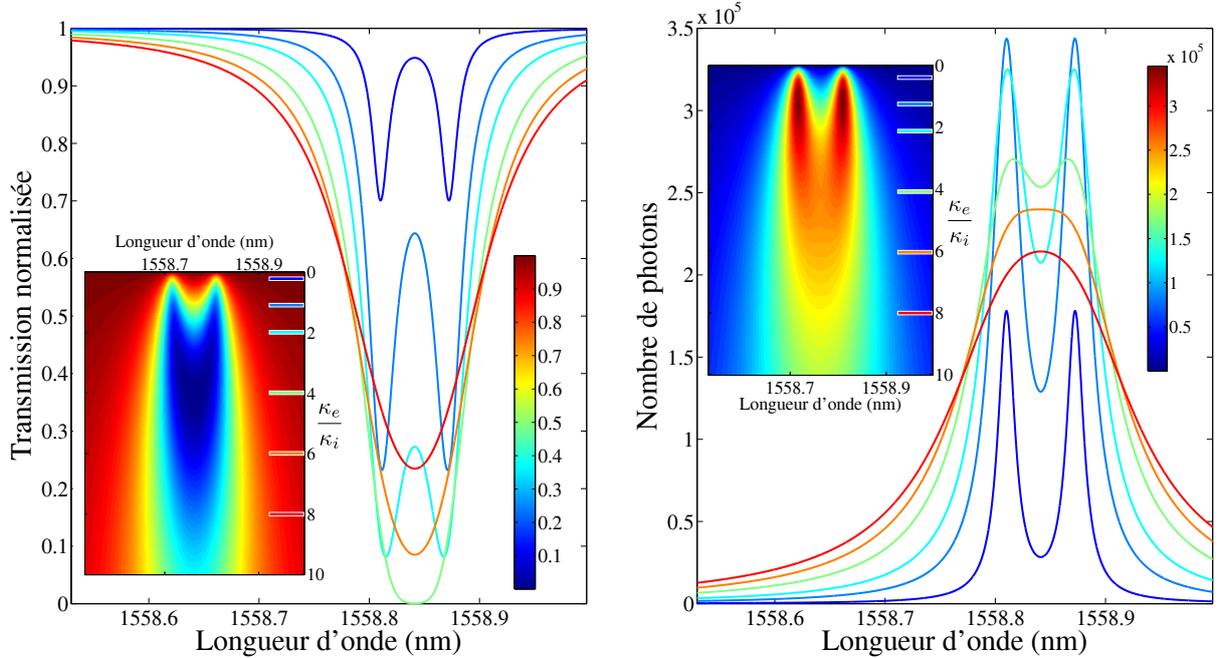


FIGURE 1.10: En (a) la transmission normalisée $\frac{\mathcal{P}_{out}}{\mathcal{P}_{in}}$ (équation 1.46) et en (b) le nombre de photon dans la cavité N_{cav} (équation 1.45) en fonction de la longueur d'onde du laser $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_L}$ pour différentes valeurs du ratio $\frac{\kappa_e}{\kappa_i}$. Les courbes bleue, bleu claire, cyan, verte, orange et rouge correspondent respectivement à des ratios $\frac{\kappa_e}{\kappa_i}$ de 0.2, 1, 2, 4, 6 et 8. Les paramètres du mode sont $Q_i = \frac{\omega_0}{\kappa_i} = 1 \cdot 10^5$, $\lambda_0 = 1558.84$ nm et $\beta = 2\kappa_i$.

Pour un mode stationnaire résultant du couplage clockwise-counterclockwise cw-ccw (cf annexe C) le nombre de photons et la transmission normalisée s'écrivent par contre :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{cav} = \left(\frac{1}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - (\omega_0 + \beta))^2} + \frac{1}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - (\omega_0 - \beta))^2} \right) \frac{\kappa_e}{2\hbar\omega_L} \mathcal{P}_{in} \quad (1.45) \\ \frac{\mathcal{P}_{out}}{\mathcal{P}_{in}} = \left| \frac{\left(\frac{\kappa_i^2}{4} - \frac{\kappa_e^2}{4}\right) - (\omega_L - \omega_0)^2 + \beta^2 + i\kappa_i(\omega_L - \omega_0)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega_L - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega_L - \omega_0)} \right|^2 \quad (1.46) \end{array} \right.$$

où β est le coefficient de couplage cw-ccw. En prenant $\beta = 0$, on retombe sur les deux expressions du mode propagatif simple (1.43) et (1.44).

Dans le cas d'un mode stationnaire de galerie, le nombre maximal de photons dans la cavité est obtenu pour la même condition de couplage critique que précédemment $\kappa_e \simeq \kappa_i$. Cependant le contraste en transmission observé en sortie de fibre n'est plus maximum dans ces conditions. Il dépend de β . Pour un couplage fort ($\beta > \kappa_i$) le contraste en transmission du doublet de résonance qui apparaît dans ce cas n'est pas maximal. Expérimentalement, il faut donc être prudent lorsque l'on considère un doublet dans le spectre optique et ne pas se placer à un contraste de 100% en pensant que le couplage critique est obtenu (N_{cav} maximal). Notons par ailleurs que pour les mêmes paramètres, le nombre maximal de photons dans le mode propagatif (cas de la résonance singulet dans le spectre) est le double de celui des deux modes stationnaires associés au doublet. Ces aspects expérimentaux importants sont illustrés dans les figures (1.9) et (1.10). Dans nos expériences nous essayerons bien souvent de nous positionner au couplage critique afin de maximiser le nombre de photons dans la cavité.

1.2 Mécanique des disques

Les vibrations d'un réseau cristallin sont décrites dans la théorie quantique des solides par une approche harmonique. Elle fait état de modes de vibration normaux appelés phonons. Dans cette thèse nous nous intéressons uniquement aux modes de phonons de basse énergie pouvant être décrits très correctement à l'aide de la théorie de l'élasticité, qui est l'approche la plus usuelle en mécanique des milieux continus.

Les équations d'onde utilisées pour décrire ces modes dérivent d'une linéarisation du problème qui n'est valable que dans le cadre de faibles déformations. L'anharmonicité des potentiels confinant les atomes sur la maille cristalline n'est pas pris en compte par la théorie de déformation élastique. Il est donc important de toujours considérer l'amplitude du mouvement mécanique de nos disques afin de voir si l'on sort du cadre simplifié linéaire. Typiquement la déformation ("strain" en anglais) doit rester inférieure à 10^{-3} . Dans nos disques de taille caractéristique de l'ordre de $10^{-5} - 10^{-7}$ m, il faut donc que les amplitudes de déformation ne dépassent pas $10^{-8} - 10^{-10}$ m (1 à 100 Angstrom).

Dans cette vision linéaire, le mouvement brownien du disque est considéré comme une somme de vibrations thermo-activées des différents modes propres de la structure. Chaque mode reçoit une énergie de vibration $k_B T$. La connaissance du profil de déformation normalisé de chaque mode nous permet alors de calculer l'amplitude de vibration dans ce régime. Les amplitudes

atteintes par nos modes ne dépassent pas 10^{-12} m, nous plaçant donc bien dans le cadre linéaire pour le mouvement Brownien thermo-mécanique.

1.2.1 Modes élastiques des disques

L'équation d'onde de l'élastodynamique décrivant la déformation s'écrit sous forme tensorielle :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ji} + F_i \quad (1.47)$$

où u_i est la composante i du déplacement (en m), ρ est la densité volumique du matériau (en kg.m^{-3}), σ est le tenseur des contraintes ("stress tensor" en anglais) et F représente l'ensemble des forces extérieures s'appliquant sur le système (dues à la pression, à la gravité...), données en N.m^{-3} .

u et σ sont reliés au tenseur des déformations S ("strain tensor" en anglais) par les relations :

$$\begin{cases} S_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} S_{kl} \end{cases} \quad (1.48)$$

où C est le tenseur des rigidités. Ceci permet d'obtenir l'équation :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{C_{jikl}}{2} (\partial_j \partial_k u_l + \partial_j \partial_l u_k) + F_i \quad (1.49)$$

La recherche des solutions de cette équation s'effectue en considérant une dépendance sinusoïdale dans le temps $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}) \cos(\omega t + \Phi)$. L'équation devient alors :

$$-\omega^2 \rho u_i = \frac{C_{jikl}}{2} (\partial_j \partial_k u_l + \partial_j \partial_l u_k) + F_i \quad (1.50)$$

Les solutions de cette équation sont discrètes, chacune d'entre elles représentant un mode mécanique avec une fréquence angulaire ω_m et un profil de déplacement $\vec{U}_m(\vec{r})$. Cependant cette équation n'est pas facilement soluble pour nos disques. Il faut considérer la géométrie cylindrique du disque et deux matériaux, GaAs pour le disque et AlGaAs pour le piédestal, chacun avec son propre tenseur des rigidités C . Une méthode efficace de résolution est la simulation numérique par la méthode des éléments finis. Nous implémentons la géométrie de nos disques dans un modèle de mécanique structurelle. Avec le logiciel Comsol, ce modèle s'applique à résoudre l'équation (1.50) sans forces extérieures ($F_i = 0$). Nous représentons le piédestal et le disque par deux cylindres. Le déplacement du bas du piédestal est fixé à 0 afin de représenter sa liaison au substrat. Nous traitons le GaAs et l'AlGaAs comme deux matériaux élastiques isotropes, ce qui est une approximation.

Il existe une grande zoologie de mode mécaniques normaux pour les disques. Nous distinguons les modes dits flexuraux dont le déplacement principal est hors du plan (figure 1.11)

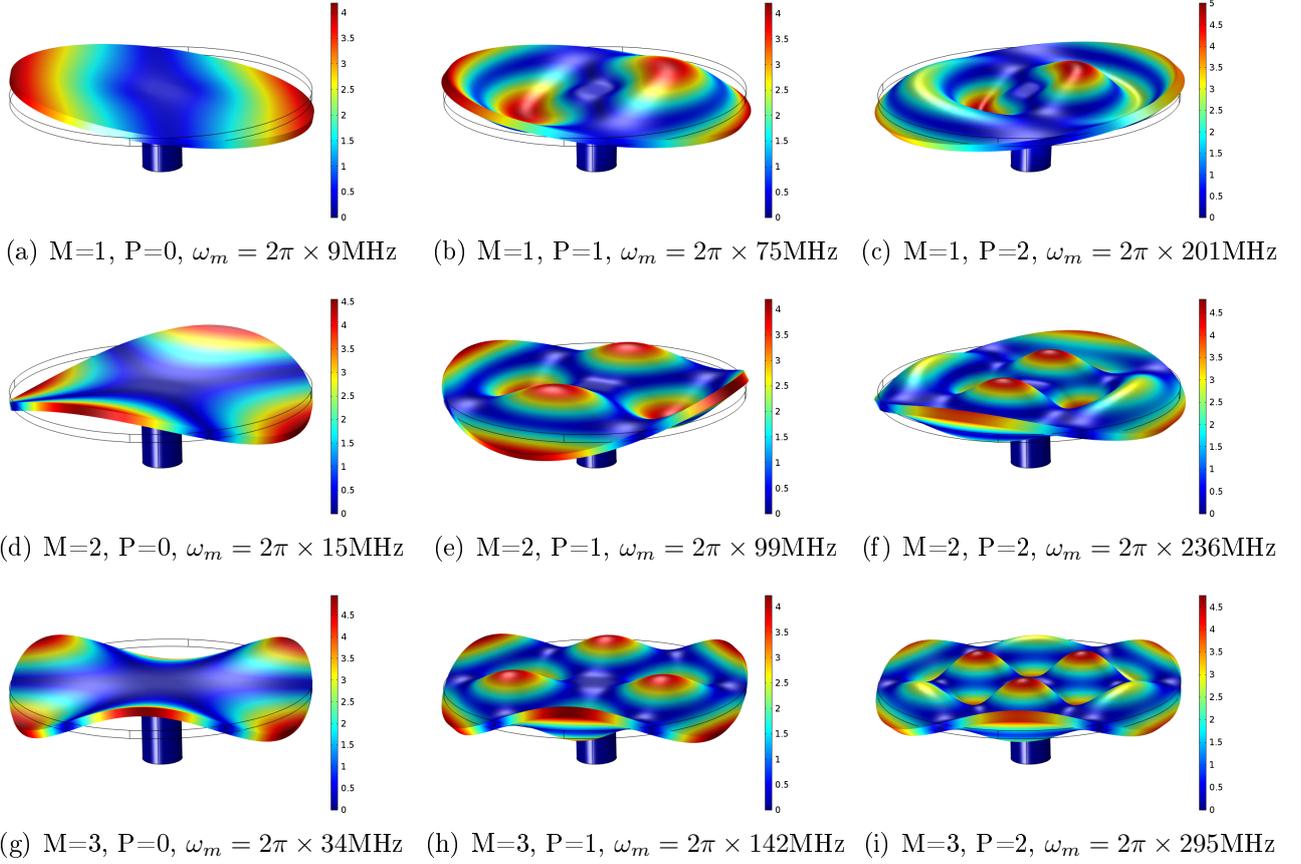


FIGURE 1.11: Déplacement $\vec{U}_m(\vec{r})$ de neuf modes flexuraux pour des nombres azimutaux M et radiaux P allant respectivement de 1 à 3 et de 0 à 2. Les simulations sont réalisées pour un disque de rayon $R = 3.75\mu\text{m}$ et d'épaisseur $t_d = 200\text{nm}$. Le piédestal est en AlGaAs à 80% et a un rayon $r = 500\text{nm}$.

et les modes dit de respiration dont le déplacement principal est radial dans le plan (figure 1.12(f)). Il existent d'autres modes dans le plan, de rotation ou de pincement ("pinch modes" ou "wineglass modes" [55]) mais leur couplage optomécanique étant faible, ils ne seront pas abordés dans ce manuscrit.

La symétrie azimutale du système (disque + piédestal) permet de séparer la dépendance azimutale (selon θ) des profils $\vec{U}_m(r, \theta, z)$. De manière similaire aux modes optiques, les solutions s'écrivent $\vec{U}_m(r, \theta, z) = \vec{U}_m(r, z) \cos(M\theta + \phi)$ avec $M \in \mathbb{Z}$. $\phi = 0$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$ représente une phase nécessaire pour distinguer 2 modes spatialement orthogonaux et dégénérés. Les modes présentant un profil invariant par rotation ($M = 0$) sont les plus susceptibles de se coupler aux modes optiques, nous verrons pourquoi dans la suite. Nous les étudierons donc de manière privilégiée. Comme pour les modes optiques, il existe également pour les modes mécaniques un nombre radial P qui traduit les oscillations radiales du profil de déplacement. Les figures 1.11 et 1.12 montrent une grande variété de modes mécaniques de nombre azimutal M et P variable.

La figure (1.13) présente les fréquences des modes mécaniques en fonction de la taille du piédestal pour un disque de taille donnée. Il est intéressant de noter l'anti-croisement de certains

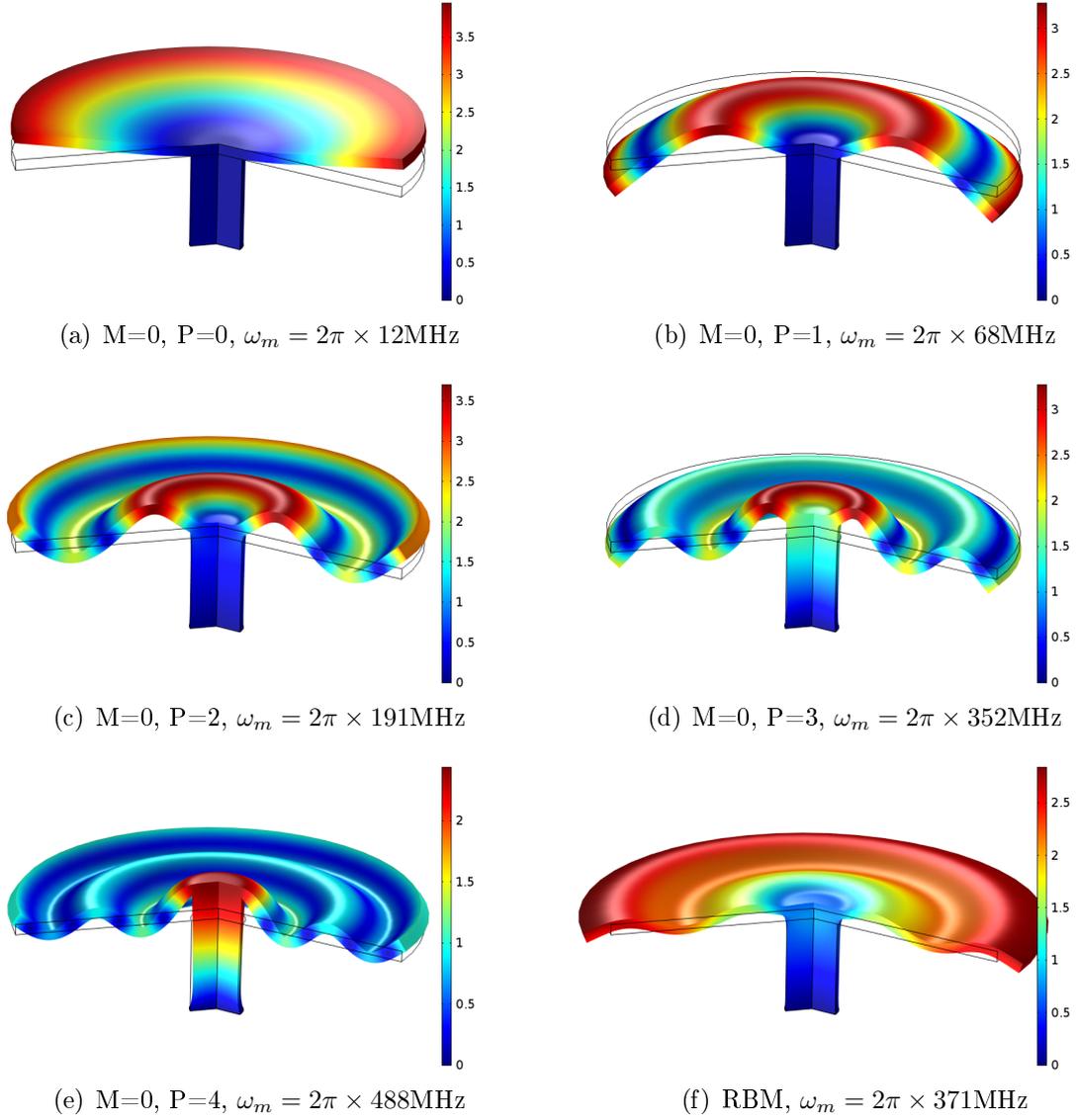


FIGURE 1.12: Déplacement $\vec{U}_m(\vec{r})$ des cinq premiers modes flexuraux (a), (b), (c), (d), (e) et du premier mode de respiration (f) pour le nombre azimutal $M=0$. Les simulations sont réalisées pour un disque en GaAs de rayon $R = 3.75\mu\text{m}$ et d'épaisseur $t_d = 200\text{nm}$. Le piédestal en $\text{Al}_{0.8}\text{Ga}_{0.2}\text{As}$ a un rayon $r = 500\text{nm}$.

modes mécaniques lorsque leurs fréquences propres se rapprochent qui traduit un couplage entre modes. Ce couplage est fort si l'échange d'énergie entre les deux modes est plus rapide que la dissipation de chacun des modes. Nous en reparlerons dans le dernier chapitre.

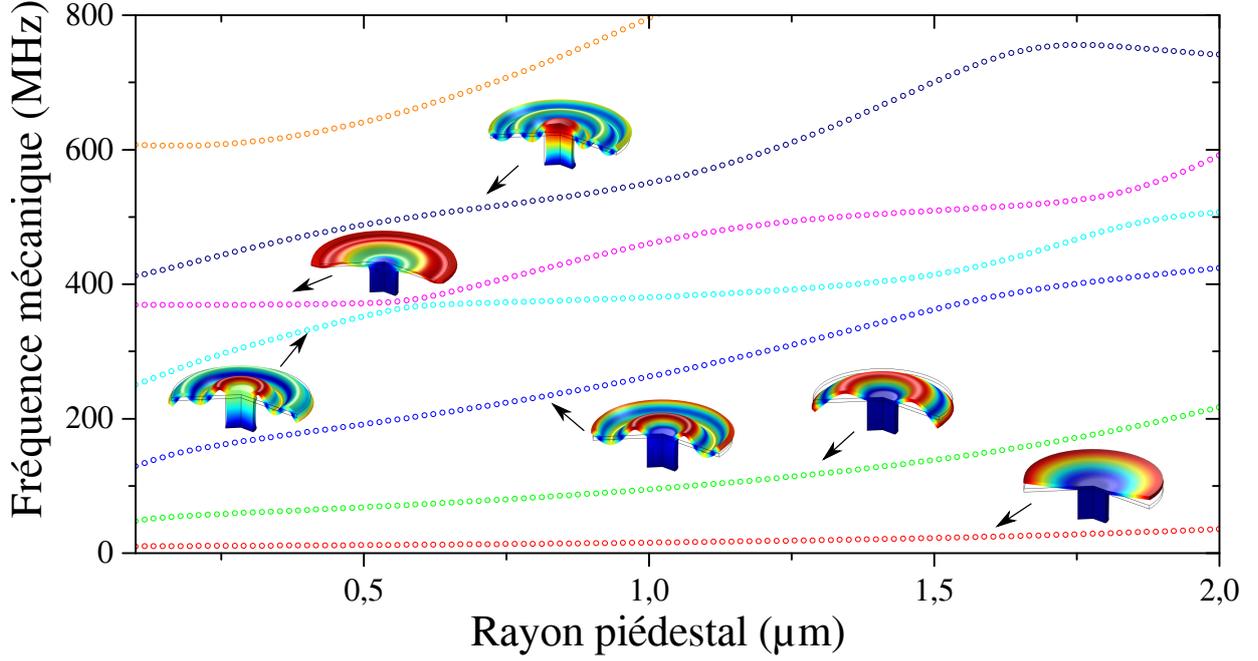


FIGURE 1.13: Évolution des fréquences propres mécaniques en fonction du rayon du piédestal de hauteur $1.8 \mu\text{m}$. Le disque a un rayon $R = 3.75 \mu\text{m}$ et une épaisseur $t_d = 200 \text{ nm}$.

Dynamique des modes

Nous nous intéressons à la dynamique d'un seul mode mécanique. Son profil spatial et sa fréquence sont d'abord calculés dans des conditions où le système est complètement découplé de son environnement. L'équation s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}_m(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \omega_m^2 \rho \vec{U}_m(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.51)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique. Lorsque l'on branche le couplage à l'environnement, le système subit des fluctuations représentées par la force volumique de Langevin $F_{th}(\vec{r}, t)$ et de la dissipation, qui se modélise par un terme d'amortissement $\rho \gamma_m \frac{\partial \vec{U}_m(\vec{r}, t)}{\partial t}$. γ_m est le taux d'amortissement du mode mécanique. D'autres forces volumiques $\vec{F}(\vec{r}, t)$ peuvent aussi s'appliquer sur le système. L'équation générale si on néglige les dissipations associées à ces forces additionnelles devient alors :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}_m(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \rho \gamma_m \frac{\partial \vec{U}_m(\vec{r}, t)}{\partial t} + \omega_m^2 \rho \vec{U}_m(\vec{r}, t) = \vec{F}_{th}(\vec{r}, t) + \vec{F}(\vec{r}, t) \quad (1.52)$$

Le terme d'amortissement γ_m nous permet d'introduire le facteur de qualité mécanique $Q_m = \frac{\omega_m}{\gamma_m}$. Le champ est décomposé en $\vec{U}_m(\vec{r}, t) = \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) u_m(t)$ où $u_m(t)$ (sans dimension) représente l'amplitude du mode évoluant dans le temps et où $\vec{U}_m^{1phn}(\vec{r})$ (en m) est normalisé par

rapport à l'énergie d'un phonon.

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \omega_m^2 \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV = \hbar \omega_m \quad (1.53)$$

Cette manière d'écrire le champ permet une correspondance aisée avec le traitement quantique des équations optomécaniques. On a :

$$\left(\frac{\partial^2 u_m(t)}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \omega_m^2 u_m(t) \right) \rho \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) = \vec{F}_{th}(\vec{r}, t) + \vec{F}(\vec{r}, t) \quad (1.54)$$

En prenant le produit scalaire avec $\vec{U}_m^{1phn}(\vec{r})$ et en intégrant sur tout le volume du disque.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_m(t)}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \omega_m^2 u_m(t) \right) \int_V \rho \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV &= \int_V \vec{F}_{th}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \\ &+ \int_V \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \quad (1.55) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (1.53), on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_m(t)}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \omega_m^2 u_m(t) = \frac{\omega_m}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{th}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV + \frac{\omega_m}{2\hbar} \int_V \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \quad (1.56)$$

1.2.2 Densité spectrale de mouvement

Dans cette partie nous abandonnons les forces extérieures pour nous concentrer sur la densité spectrale de mouvement du mode mécanique à l'équilibre thermodynamique. La force de Langevin représente les interactions avec l'environnement. Elle est stochastique et, à l'équilibre thermodynamique, fournit au système une énergie de fluctuation proportionnelle à la température T de l'environnement. Dans ce travail de thèse, la température est non nulle et supérieure à l'énergie d'un phonon $k_B T \gg \hbar \omega_m$ où k_B est la constante de Boltzmann. Le principe d'équipartition de l'énergie nous dit alors que chaque terme quadratique dans l'énergie du système acquiert une énergie $\frac{k_B T}{2}$. Chaque mode mécanique est alors peuplé en moyenne avec l'énergie $k_B T$. Le mouvement incohérent résultant alors de tous les modes mécaniques est appelé mouvement Brownien.

La force de Langevin stochastique agissant sur le mode U_m se réécrit :

$$\int_V \vec{F}_{th}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV = F_{th}(t) \quad (1.57)$$

où F_{th} reste stochastique mais a la dimension d'une énergie. L'équation se réécrit :

$$\frac{\partial^2 u_m(t)}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \omega_m^2 u_m(t) = \frac{\omega_m}{2\hbar} F_{th}(t) \quad (1.58)$$

Nous passons ensuite dans le domaine spectral en appliquant la transformée de Fourier.
 $u_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_m(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$

$$-\omega^2 \tilde{u}_m(\omega) - i\omega \gamma_m \tilde{u}_m(\omega) + \omega_m^2 \tilde{u}_m(\omega) = \frac{\omega_m}{2\hbar} \tilde{F}_{th}(\omega) \quad (1.59)$$

$$\tilde{u}_m(\omega) = \frac{\omega_m}{2\hbar} \frac{\tilde{F}_{th}(\omega)}{\omega_m^2 - \omega^2 - i\omega \gamma_m} = \mathcal{X}_{\tilde{u}_m}(\omega) \tilde{F}_{th}(\omega) \quad (1.60)$$

D'après le théorème de Wiener-Khintchine, la densité spectrale de la quantité $u_m(t)$ notée $S_{\tilde{u}_m}(\omega)$ est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Le théorème de fluctuation-dissipation lie pour sa part la densité spectrale à la partie imaginaire de la réponse linéaire $\mathcal{X}_{\tilde{u}_m}(\omega)$:

$$S_{\tilde{u}_m}(\omega) = \frac{2k_B T}{\omega} \Im(\mathcal{X}_{\tilde{u}_m}(\omega)) \quad (1.61)$$

$$= \frac{k_B T \omega_m \gamma_m}{\hbar} \frac{1}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma_m)^2} \quad (1.62)$$

Par ailleurs, la variance de la quantité $u_m(t)$ est en fait l'intégrale de la densité spectrale.

$$\begin{aligned} \langle u_m(t)^2 \rangle_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\tilde{u}_m}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{k_B T \omega_m \gamma_m}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + (\omega \gamma_m)^2} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\simeq \frac{k_B T \omega_m \gamma_m}{2\pi \hbar} 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\omega_m^2} \frac{1}{(\omega_m - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma_m}{2}\right)^2} d\omega \quad \text{pour } \omega_m \gg \gamma_m \\ &\simeq \frac{k_B T \gamma_m}{\pi \hbar} \frac{1}{4\omega_m} \frac{2\pi}{\gamma_m} = \frac{k_B T}{2\hbar \omega_m} \end{aligned}$$

Cette variance est bien consistante avec celle dérivant de considération énergétique.

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{2} \rho \omega_m^2 \langle \vec{U}(\vec{r}, t)^2 \rangle_t dV &= \frac{k_B T}{2} \\ \int_V \frac{1}{2} \rho \omega_m^2 \langle (u_m(t) \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}))^2 \rangle_t dV &= \frac{k_B T}{2} \\ \langle u_m(t)^2 \rangle_t \int_V \frac{1}{2} \rho \omega_m^2 \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r})^2 dV &= \frac{k_B T}{2} \\ \langle u_m(t)^2 \rangle_t &= \frac{k_B T}{2\hbar \omega_m} \end{aligned}$$

À présent armés d'une description formelle des modes mécaniques et optiques, ainsi que d'outils pour décrire leur dynamique (densités spectrales...), nous pouvons aborder leur couplage mutuel optique/mécanique.

1.3 Couplage optomécanique dans les disques

Le couplage optomécanique se traduit par deux effets, facettes réciproques de l'interaction mutuelle entre optique et mécanique :

- Les photons à l'intérieur de la cavité exercent des forces sur le résonateur mécanique.
- La déformation de la cavité décale les résonances optiques.

Nous détaillons dans cette section les mécanismes responsables de cette interaction.

1.3.1 Forces optiques agissant sur le résonateur mécanique

Trois forces optiques agissent sur le mode mécanique :

- Les forces liées à la pression de radiation \vec{F}_{rp} , qui découlent du transfert de moment cinétique par les successions de réflexion totale internes au sein des modes de galerie. Ces forces peuvent être calculées par le "Maxwell Stress Tensor" \vec{T} .
- Les forces électrostrictives \vec{F}_{es} , qui résultent des polarisations induites au sein du matériau même. Elles sont exprimées à l'aide du tenseur électrostrictif \vec{Q} .
- Les forces photothermiques \vec{F}_{pt} , issues de changements de température due à l'absorption de photons dans le disque.

L'équation dynamique régissant l'amplitude de déformation des différents modes mécaniques s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_m(t)}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \omega_m^2 u_m(t) = & \frac{\omega_m}{2\hbar} F_{th}(t) + \frac{\omega_m}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{rp}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \\ & + \frac{\omega_m}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{es}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV + \frac{\omega_m}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{pt}(\vec{r}, t) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (1.63)$$

Ces forces ne travaillent pas sur un seul mode mécanique, mais sur l'ensemble des modes du système. Ainsi la projection de la force sur l'enveloppe spatiale du mode décrit le travail fourni par la force optique sur ce mode particulier.

Ici, tous les phénomènes agissant sur le système mécanique sont mis sous forme de forces pour pouvoir les intégrer facilement dans l'équation dynamique. Le lien entre la force volumique $\vec{F}(\vec{r}, t)$ en N.m^{-3} et le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ est donné par :

$$F_i = -\partial_j \sigma_{ji} \quad (1.64)$$

Force liée à la pression de radiation

La force volumique liée à la pression de radiation est la dérivée spatiale du tenseur des contraintes de Maxwell $\vec{T} = -\bar{\sigma}^{(rp)}$, s'exprimant directement en fonction des champs :

$$F_i^{(rp)} = -\partial_j \sigma_{ji}^{(rp)} = \partial_j T_{ji} = \partial_j \left[\epsilon_0 \epsilon_r \left(E_j E_i - \frac{1}{2} \delta_{ji} |E|^2 \right) + \mu_0 \left(H_j H_i - \frac{1}{2} \delta_{ji} |H|^2 \right) \right] \quad (1.65)$$

La pression de radiation dépend directement du nombre de photons dans le système. Nous utilisons cette dépendance pour la normaliser.

$$\vec{F}_{rp}(\vec{r}, t) = N_{cav}(t) \vec{F}_{rp}^{1ph\bar{t}}(\vec{r}) \quad (1.66)$$

où $\vec{F}_{rp}^{1ph\bar{t}}(\vec{r})$ est la force exercée par un seul photon.

Force électrostrictive

La force électrostrictive dérive pour sa part du tenseur électrostrictif $\bar{\bar{Q}}$ et de la polarisation du matériau \vec{P} . La polarisation est elle-même reliée au champ électrique par $P_i = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0)E_j$.

$$\begin{aligned} F_i^{(es)} &= -\partial_j \sigma_{ji}^{(es)} = -\partial_j C_{jikl} S_{kl}^{es} \\ &= -\partial_j C_{jikl} Q_{klpq} P_p P_q \\ &= -\partial_j C_{jikl} Q_{klpq} (\varepsilon_{pr} - \varepsilon_0)(\varepsilon_{qs} - \varepsilon_0) E_r E_s \end{aligned} \quad (1.67)$$

La force électrostrictive volumique dépend elle aussi du nombre de photons dans le système. Nous lui appliquons la même normalisation que précédemment :

$$\vec{F}_{es}(\vec{r}, t) = N_{cav}(t) \vec{F}_{es}^{1ph\bar{t}}(\vec{r}) \quad (1.68)$$

où $\vec{F}_{es}^{1ph\bar{t}}(\vec{r})$ est la force exercée par un seul photon.

Force photothermique

L'augmentation de température dans le disque tend à dilater ou contracter le matériau à cause de l'anharmonicité du potentiel cristallin. Une déformation étant équivalent à une contrainte dans la théorie de l'élasticité, il apparait une force photothermique. Elle dépend du nombre de photons absorbés dans le disque, lui-même proportionnel au nombre de photons dans la cavité dans l'hypothèse d'une absorption linéaire résiduelle. On exprime cette force volumique comme la dérivée des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}^{pt}$ associées à cette déformation.

$$F_i^{(pt)}(\vec{r}, t) = -\partial_j \sigma_{ji}^{pt} = -\partial_j C_{jikl} S_{kl}^{pt} = -\partial_j C_{jikl} \alpha_{kl} \Delta T(\vec{r}, t) \quad (1.69)$$

où $\bar{\bar{\alpha}}$ est le tenseur de dilatation. Nous supposons la température uniforme dans le disque $T(\vec{r}, t) = T(t)$. L'élévation de température ΔT dans le disque suit la loi :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta T(t)}{dt} &= -\frac{\Delta T(t)}{\tau_{th}} + \frac{R_{th} \kappa_{i_{abs}} \hbar \omega_L N_{cav}(t)}{\tau_{th}} \\ &= \frac{-\Delta T(t) + \Gamma_{pt} N_{cav}(t)}{\tau_{th}} \end{aligned} \quad (1.70)$$

où R_{th} en $K.W^{-1}$ caractérise la transduction (puissance absorbée \rightarrow écart en température ΔT) et dépend des paramètres du disque. $\kappa_{i_{abs}}$ est le taux d'absorption linéaire dans la cavité. $\Gamma_{pt} = R_{th} \kappa_{i_{abs}} \hbar \omega_L$ représente l'élévation de température pour une cavité peuplée en moyenne par un seul photon. À l'équilibre, l'excès de température est proportionnel au nombre de photons en cavité, ce qui nous permet d'introduire la force photothermique exercée par un photon :

$$\vec{F}_{pt}(\vec{r}, t) = \vec{F}_{pt}^{1pht}(\vec{r}) \frac{\Delta T(t)}{\Gamma_{pt}} \quad \text{avec} \quad F_{pt,i}^{1pht}(\vec{r}) = -\Gamma_{pt} \partial_j C_{jikl} \alpha_{kl} \quad (1.71)$$

Ce traitement de la force photothermique ne permet pas de prendre en compte l'évolution des éléments du tenseur des rigidités C_{ijkl} en fonction de la température. Cette évolution se traduit par une variation des fréquences propres des modes mécaniques, que nous supposons dans la suite linéaire, en accord avec les comportements expérimentaux que nous observons :

$$\omega'_m = \omega_m + \frac{\partial \omega_m}{\partial T} \Delta T(t) \quad (1.72)$$

Facteurs de couplage optomécanique

Finalement, en écrivant les forces à l'œuvre de la manière précédente, et en tenant compte de l'effet thermique sur le tenseur C_{ijkl} , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_m(t)}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \omega_m'^2 u_m(t) &= \frac{\omega'_m}{2\hbar} F_{th}(t) + N_{cav}(t) \frac{\omega'_m}{2\hbar} \int_V \left(\vec{F}_{rp}^{1pht}(\vec{r}) + \vec{F}_{es}^{1pht}(\vec{r}) \right) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \\ &+ \frac{\Delta T(t)}{\Gamma_{pt}} \frac{\omega'_m}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{pt}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (1.73)$$

Nous définissons les couplages optomécaniques $g_{0(rp)}^{(m)}$, $g_{0(es)}^{(m)}$ et $g_{0(pt)}^{(m)}$ (en rad.s^{-1}) :

$$\left\{ \begin{aligned} g_{0(rp)}^{(m)} &= -\frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{rp}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{aligned} \right. \quad (1.74)$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_{0(es)}^{(m)} &= -\frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{es}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{aligned} \right. \quad (1.75)$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_{0(pt)}^{(m)} &= -\frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{pt}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{aligned} \right. \quad (1.76)$$

avec un signe $-$ qui permet de garder une certaine cohérence avec la plupart des travaux d'optomécanique. L'équation devient alors :

$$\frac{\partial^2 u_m(t)}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \omega_m'^2 u_m(t) = \frac{\omega'_m}{2\hbar} F_{th}(t) - \omega'_m \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) N_{cav}(t) - \omega'_m g_{0(pt)}^{(m)} \frac{\Delta T(t)}{\Gamma_{pt}} \quad (1.77)$$

Cette dernière équation souligne l'équivalence formelle entre les forces de type pression de radiation et "électrostrictives", et leur différence avec la force photothermique. (rappel : ici la force de Langevin F_{th} prend la dimension d'une énergie).

1.3.2 Décalage optomécanique des résonances optiques

Pour l'optique, nous normalisons l'amplitude du champ $A_c(t)$ à l'énergie électromagnétique stockée dans la cavité par $a(t) = \frac{A_c(t)}{\sqrt{\hbar\omega_L}}$ avec la propriété $|a(t)|^2 = N_{cav}(t)$.

$$\frac{da(t)}{dt} = -i(\omega_0 - \omega_L) a(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) a(t) - i\sqrt{\frac{\kappa_e \mathcal{P}_{in}}{\hbar\omega_L}} \quad (1.78)$$

Les fréquences angulaires de résonance optique ω_0 pour des modes de galerie dépendent uniquement de la géométrie des matériaux et de leur indice de réfraction. Ces deux paramètres se trouvent affectés par deux mécanismes dans notre système : déformation mécanique et variation thermique.

Décalage mécanique de la fréquence optique

Le décalage de la fréquence optique provoqué par le déplacement mécanique est causé par deux effets :

- Le déplacement des frontières, qui change la géométrie du mode de cavité.
- La variation locale d'indice de réfraction par l'effet photoélastique [18].

L'effet photoélastique est la traduction d'une variation d'indice de réfraction pour une déformation de matériau. Il s'exprime en notation tensorielle :

$$\Delta\epsilon_{ij}^{-1} = p_{ijkl} S_{kl} \quad (1.79)$$

où ϵ_{ij} est le tenseur de permittivité relative, S_{kl} le tenseur des déformations et p_{ijkl} le tenseur photoélastique de rang 4.

Le décalage en fréquence angulaire optique s'exprime donc de la façon suivante :

$$\delta\omega_0 = \sum_m \left(g_{0(geo)}^{(m)} + g_{0(pe)}^{(m)} \right) u_m(t) \quad (1.80)$$

où nous introduisons les facteurs de couplages optomécaniques $g_{0(geo)}^{(m)}$ et $g_{0(pe)}^{(m)}$ qui caractérisent le décalage de la résonance dû à la déformation de la géométrie et à l'effet photoélastique pour un seul phonon dans le mode mécanique.

Décalage thermique de la fréquence optique

Le décalage de la résonance optique en fonction de la température est nommé **décalage thermo-optique**. Il repose sur deux mécanismes.

- Le déplacement des frontières dû à la dilatation thermique.
- La variation locale d'indice de réfraction en fonction de la température (effet thermo-optique).

Dans le cas thermo-optique, la variation d'indice ne peut pas être expliquée simplement par l'effet photoélastique résultant de la dilatation thermique du cristal. Nous comparons la valeur de $\frac{dn}{dT} = 2,35 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ thermo-optique fourni par la littérature [56] avec celle fournie par la variation d'indice photoélastique due à la dilatation thermique du matériau. La dilatation thermique s'écrit : $S_{kl} = \alpha_{kl} \Delta T$. En considérant une dilatation isotrope, la déformation

résultante est donc isotrope $p_{ijkl}S_{kl} = (p_{11} + 2p_{12})\alpha$ où p_{11} et p_{12} sont les coefficients réduits du tenseur photoélastique d'ordre 4. La variation d'indice est alors isotrope. Avec la relation $\Delta\epsilon_{ij}^{-1} = \Delta\epsilon_r^{-1} = \Delta(1/n^2)$ l'équation (1.79) se réécrit :

$$\frac{\Delta n}{\Delta T} = -\frac{n^3}{2}(p_{11} + 2p_{12})\alpha = 4.9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} p_{11} = -0.165 & [57] \\ p_{12} = -0.140 & [57] \\ \alpha = 5.73 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} & [58] \\ n = 3.3742 & [59] \end{cases}$$

La valeur calculée ainsi ne représente que 20% de la valeur thermo-optique mesurée dans la littérature, preuve que l'effet photoélastique de la dilatation thermique n'explique pas à lui tout seul la variation d'indice de réfraction avec la température. Le mécanisme avancé par Zouboulis *et al.* [60] est que ces variations thermiques d'indice doivent provenir de changements induits thermiquement dans la structure de bande et la distribution électronique.

Les forces photothermiques décrites précédemment permettent de prendre en compte la dilatation thermique dans l'évolution des déformations mécanique (equation 1.73). Les effets thermiques ne doivent donc pas être comptés deux fois dans le décalage de la résonance optique. Ainsi seule la variation d'indice thermique à volume constant devra être prise en compte de manière séparée. Nous définissons un coefficient h_0 (en rad.Hz.K⁻¹) représentant le décalage de la résonance optique dû aux 80% de $\frac{dn}{dT}$ associés à l'effet thermo-optique à volume constant.

$$\delta\omega_0 = -h_0\Delta T(t) \quad (1.81)$$

Conclusion

Le décalage de la résonance optique s'écrit finalement :

$$\delta\omega_0 = \sum_m \left(g_{0(geo)}^{(m)} + g_{0(pe)}^{(m)} \right) u_m(t) - h_0\Delta T(t) \quad (1.82)$$

En posant $g_{0_{shift}}^{(m)} = g_{0(geo)}^{(m)} + g_{0(pe)}^{(m)}$, l'équation (1.78) sur le mode optique devient :

$$\frac{da(t)}{dt} = -i \left(\left(\omega_0 + \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} u_m(t) - h_0\Delta T(t) \right) - \omega_L \right) a(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) a(t) - i\sqrt{\frac{\kappa_e \mathcal{P}_{in}}{\hbar\omega_L}} \quad (1.83)$$

1.3.3 Equations couplées de l'optomécanique

Les trois équations couplées de l'optomécanique s'écrivent enfin :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da(t)}{dt} = -i \left(\left(\omega_0 + \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} u_m(t) - h_0 \Delta T(t) \right) - \omega_L \right) a(t) - \frac{\kappa}{2} a(t) - i \sqrt{\frac{\kappa_e P_{in}}{\hbar \omega_L}} \\ \frac{d\Delta T(t)}{dt} = -\frac{\Delta T(t)}{\tau_{th}} + \frac{\Gamma_{pt} N_{cav}(t)}{\tau_{th}} \\ \frac{d^2 u_m(t)}{dt^2} + \gamma_m \frac{du_m(t)}{dt} + \omega_m'^2 u_m(t) = \frac{\omega_m'}{2\hbar} F_{th}(t) - \omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) N_{cav}(t) - \omega_m' g_{0(pt)}^{(m)} \frac{\Delta T(t)}{\Gamma_{pt}} \end{array} \right.$$

où nous posons $\kappa = \kappa_e + \kappa_i$ afin de simplifier. Afin de résoudre ce système d'équations non-linéaires, nous allons le linéariser autour d'un champ moyen statique :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \langle a(t) \rangle + \delta a(t) = \alpha + \delta a(t) \quad (1.84) \\ N_{cav}(t) = |a(t)|^2 \simeq |\alpha|^2 + (\alpha^* \delta a(t) + \alpha \delta a(t)^*) \quad (1.85) \\ \Delta T(t) = \langle \Delta T(t) \rangle + \delta \Delta T(t) = \Delta T^{eq} + \delta \Delta T(t) \quad (1.86) \\ u_m(t) = \langle u_m(t) \rangle + \delta u_m(t) = \langle u_m \rangle + \delta u_m(t) \quad (1.87) \end{array} \right.$$

Équations des champs moyens

Les équations sur les champs moyens s'obtiennent en ne gardant que les termes statiques d'ordre 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -i \left(\left(\omega_0 + \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \langle u_m \rangle - h_0 \Delta T^{eq} \right) - \omega_L \right) \alpha - \frac{\kappa}{2} \alpha - i \sqrt{\frac{\kappa_e P_{in}}{\hbar \omega_L}} \quad (1.88) \\ 0 = -\frac{\Delta T^{eq}}{\tau_{th}} + \frac{\Gamma_{pt} N_{cav}^{eq}}{\tau_{th}} \quad (1.89) \\ \omega_m'^2 \langle u_m \rangle = -\omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) N_{cav}^{eq} - \omega_m' g_{0(pt)}^{(m)} \frac{\Delta T^{eq}}{\Gamma_{pt}} \quad (1.90) \end{array} \right.$$

où $\omega_m' = \omega_m + \frac{\partial \omega_m}{\partial T} \Delta T^{eq}$ est indépendant des fluctuations thermiques qui sont faibles par rapport à l'élévation de température statique. Les équations se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{-i\sqrt{\frac{\kappa_e \mathcal{P}_{in}}{\hbar\omega_L}}}{\frac{\kappa}{2} + i\left(\left(\omega_0 + \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \langle u_m \rangle - h_0 \Delta T^{eq}\right) - \omega_L\right)} \end{array} \right. \quad (1.91)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T^{eq} = \Gamma_{pt} |\alpha|^2 \end{array} \right. \quad (1.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u_m \rangle = -\frac{\left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} + g_{0(pt)}^{(m)}\right)}{\omega'_m} |\alpha|^2 \end{array} \right. \quad (1.93)$$

Ce trio d'équations décrit la façon dont les résonances optiques et mécaniques se déplacent à mesure que le nombre de photons dans la cavité augmente. Le système devient instable pour certains paramètres. L'équation sur le nombre de photons s'écrit :

$$|\alpha|^2 = \frac{\frac{\kappa_e \mathcal{P}_{in}}{\hbar\omega_L}}{\frac{\kappa^2}{4} + \left(\omega_0 - |\alpha|^2 \left[\sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \frac{\left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} + g_{0(pt)}^{(m)}\right)}{\omega'_m} + h_0 \Gamma_{pt} \right] - \omega_L\right)^2} \quad (1.94)$$

Par la suite nous poserons :

$$g_0^{(tot)} = \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \frac{\left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} + g_{0(pt)}^{(m)}\right)}{\omega'_m} + h_0 \Gamma_{pt} \quad (1.95)$$

où $g_0^{(tot)}$ donne le décalage statique des fréquences de résonance optiques pour une cavité peuplée en moyenne d'un seul photon. L'équation (1.94) se réécrit comme un polynôme de degré 3 pour le nombre moyen de photons :

$$g_0^{(tot)2} \langle N_{cav} \rangle^3 - 2g_0^{(tot)} (\omega_0 - \omega_L) \langle N_{cav} \rangle^2 + \left(\frac{\kappa^2}{4} + (\omega_0 - \omega_L)^2\right) \langle N_{cav} \rangle - \frac{\kappa_e \mathcal{P}_{in}}{\hbar\omega_L} = 0 \quad (1.96)$$

En fonction des paramètres, ce polynôme possède une, deux ou trois solutions réelles. La figure (1.14(a)) montre l'évolution du nombre de photons dans la cavité en fonction de la fréquence du laser. A partir d'un certain seuil de puissance laser la résonance optique présente une bistabilité. Cette bistabilité induit un comportement d'hystérésis lors du balayage fréquentiel de la longueur d'onde du laser autour de la résonance de cavité. Nous appelons ω'_0 la fréquence angulaire optique statique dépendant du nombre moyen de photons dans la cavité. Le désaccord en fréquence statique entre le laser et la cavité ($\omega_L - \omega'_0$) évolue lui aussi avec le nombre de photons dans la cavité.

$$\omega_L - \omega'_0 = \omega_L - \left(\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)}\right) \quad (1.97)$$

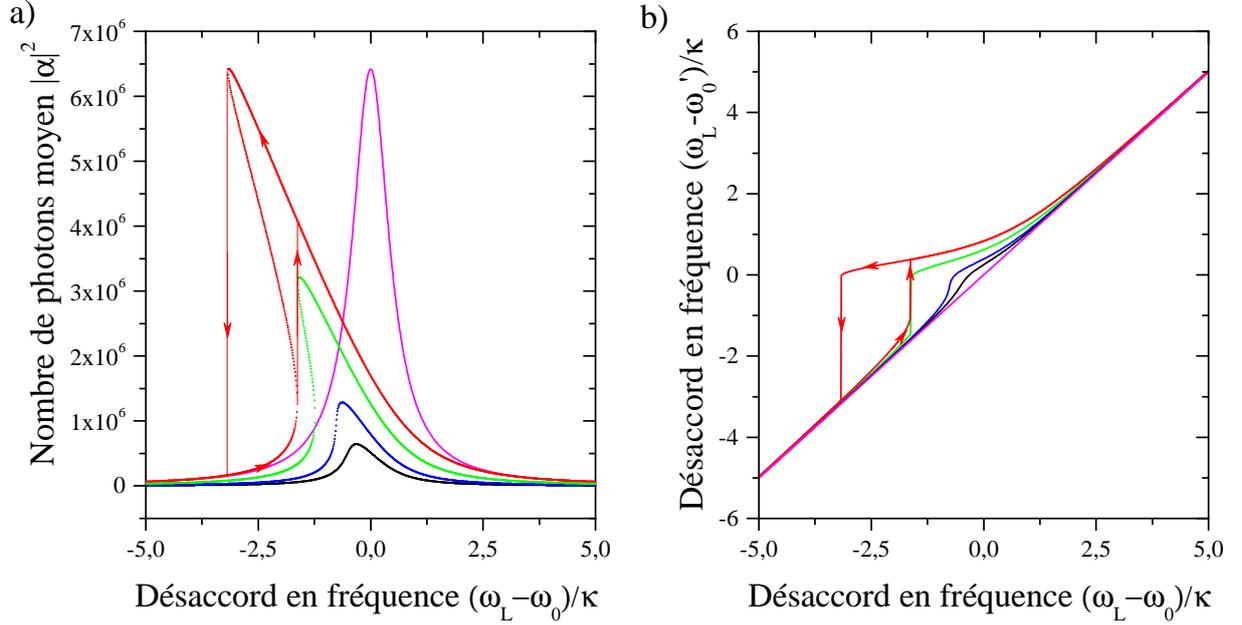


FIGURE 1.14: (a) Évolution du nombre de photons dans la cavité en fonction du désaccord en fréquence pour différentes puissances. (b) Evolution du désaccord en fréquence dynamique en fonction du désaccord statique. Les courbes noires, bleues, vertes et rouges sont calculées à partir du polynôme (1.96) pour des puissances de 0.1, 0.2, 0.5 et 1 mW. Les paramètres du mode optiques sont : $\lambda_0 = 1550$ nm, $Q_{opt} = 5 \cdot 10^5$, $\kappa_e = \kappa_i$ et $g_0^{(tot)} = 1.2 \cdot 10^3$. La courbe magenta sert de référence à la courbe rouge d'un mode qui ne subirait aucun effet de décalage de la fréquence de résonance ($g_0^{(tot)} = 0$).

Ce fonctionnement hystérétique rend une certaine gamme de désaccord inaccessible (instable) sur le flanc rouge ($\omega_L < \omega_0'$) de la résonance à partir d'une certaine puissance (courbes verte et rouge en figure 1.14(b)).

Équation des fluctuations

Regardons maintenant les équations au premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta a(t)}{dt} = -i(\omega_0' - \omega_L) \delta a(t) - \frac{\kappa}{2} \delta a(t) - i\alpha \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \delta u_m(t) + i\alpha h_0 \delta \Delta T(t) \\ \frac{d\delta \Delta T(t)}{dt} = -\frac{\delta \Delta T(t)}{\tau_{th}} + \frac{\Gamma_{pt} (\alpha^* \delta a(t) + \alpha \delta a(t)^*)}{\tau_{th}} \\ \frac{d^2 \delta u_m(t)}{dt^2} + \gamma_m \frac{d\delta u_m(t)}{dt} + \omega_m'^2 \delta u_m(t) = \frac{\omega_m'}{2\hbar} F_{th}(t) \\ \quad - \omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) (\alpha^* \delta a(t) + \alpha \delta a(t)^*) - \omega_m' g_{0(pt)}^{(m)} \frac{\delta \Delta T(t)}{\Gamma_{pt}} \end{array} \right.$$

où le terme $i\alpha h_0 \delta \Delta T(t)$ représentant le décalage de la résonance dû aux fluctuations thermique est négligeable dans notre système par rapport au terme $i\alpha \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \delta u_m(t)$ représentant le décalage de la résonance dû aux modes mécaniques.

On prend ensuite la transformée de Fourier de ces trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\Omega \delta \tilde{a}(\Omega) = -i(\omega'_0 - \omega_L) \delta \tilde{a}(\Omega) - \frac{\kappa}{2} \delta \tilde{a}(\Omega) - i\alpha \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \delta \tilde{u}_m(\Omega) \\ -i\Omega \delta \Delta \tilde{T}(\Omega) = -\frac{\delta \Delta \tilde{T}(\Omega)}{\tau_{th}} + \frac{\Gamma_{pt} (\alpha^* \delta \tilde{a}(\Omega) + \alpha \delta \tilde{a}(-\Omega)^*)}{\tau_{th}} \\ -\Omega^2 \delta \tilde{u}_m(\Omega) - i\Omega \gamma_m \delta \tilde{u}_m(\Omega) + \omega_m'^2 \delta \tilde{u}_m(\Omega) = \frac{\omega_m'}{2\hbar} \tilde{F}_{th}(\Omega) \\ \qquad \qquad \qquad - \omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) (\alpha^* \delta \tilde{a}(\Omega) + \alpha \delta \tilde{a}(-\Omega)^*) - \omega_m' g_{0(pt)}^{(m)} \frac{\delta \Delta \tilde{T}(\Omega)}{\Gamma_{pt}} \end{array} \right.$$

Le système d'équation se simplifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{a}(\Omega) = \frac{-i\alpha \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \delta \tilde{u}_m(\Omega)}{\frac{\kappa}{2} + i(\omega'_0 - \omega_L - \Omega)} \\ \delta \Delta \tilde{T}(\Omega) = \frac{\Gamma_{pt} (\alpha^* \delta \tilde{a}(\Omega) + \alpha \delta \tilde{a}(-\Omega)^*)}{1 - i\Omega \tau_{th}} \\ \left(\omega_m'^2 - \Omega^2 - i\Omega \gamma_m \right) \delta \tilde{u}_m(\Omega) = \frac{\omega_m'}{2\hbar} \tilde{F}_{th}(\Omega) \\ \qquad \qquad \qquad - \omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} + \frac{g_{0(pt)}^{(m)}}{1 - i\Omega \tau_{th}} \right) (\alpha^* \delta \tilde{a}(\Omega) + \alpha \delta \tilde{a}(-\Omega)^*) \end{array} \right.$$

Observables optomécaniques dynamiques

Jusqu'ici nous avons considéré tous les modes mécaniques du système. Nous allons nous concentrer à présent sur un seul de ces modes, celui qui se couple le mieux au mode optique. Le système d'équations linéarisées étant bien sûr linéaire, nous pouvons résoudre pour un seul mode mécanique.

$$\begin{aligned} \left(\omega_m'^2 - \Omega^2 - i\Omega \gamma_m \right) \delta \tilde{u}_m(\Omega) &= \frac{\omega_m'}{2\hbar} \tilde{F}_{th}(\Omega) \\ - \omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} + \frac{g_{0(pt)}^{(m)}}{1 - i\Omega \tau_{th}} \right) &\left(\frac{-i|\alpha|^2 \sum_{m'} g_0^{(m')} \delta \tilde{u}_{m'}(\Omega)}{\frac{\kappa}{2} + i(\Delta\omega - \Omega)} + \frac{i|\alpha|^2 \sum_{m'} g_0^{(m')} \delta \tilde{u}_{m'}(-\Omega)^*}{\frac{\kappa}{2} - i(\Delta\omega + \Omega)} \right) \end{aligned} \quad (1.98)$$

avec $\Delta\omega = \omega'_0 - \omega_L$. $\delta u_m(t)$ étant réel, la propriété $\delta u_m(\Omega) = \delta u_m(-\Omega)^*$ nous permet de simplifier l'équation.

$$\begin{aligned} (\omega_m'^2 - \Omega^2 - i\Omega\gamma_m) \delta \tilde{u}_m(\Omega) &= \frac{\omega_m'}{2\hbar} \tilde{F}_{th}(\Omega) \\ -\omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} + \frac{g_{0(pt)}^{(m)}}{1 - i\Omega\tau_{th}} \right) \left(|\alpha|^2 \sum_{m'} g_0^{(m')} \delta \tilde{u}_{m'}(\Omega) \right) &\left(\frac{-i\frac{\kappa}{2} - (\Delta\omega - \Omega)}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} - \frac{-i\frac{\kappa}{2} + (\Delta\omega + \Omega)}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right) \end{aligned}$$

La présence du terme $\sum_{m'} g_0^{(m')} \delta \tilde{u}_{m'}(\Omega)$ nous rappelle que le champ optique est modulé par un très grand nombre de modes mécaniques. Cependant seules les forces optiques oscillant à des fréquences très proches de la fréquence mécanique du mode considérés lui transfèrent de l'énergie. Nous pouvons souvent négliger la contribution des autres modes :

$$\begin{aligned} (\omega_m'^2 - \Omega^2 - i\Omega\gamma_m) \delta \tilde{u}_m(\Omega) &= \frac{\omega_m'}{2\hbar} \tilde{F}_{th}(\Omega) \\ + |\alpha|^2 g_{0_shift}^{(m)} \omega_m' \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} + \frac{g_{0(pt)}^{(m)}(1 + i\Omega\tau_{th})}{1 + (\Omega\tau_{th})^2} \right) &\left(\frac{(\Delta\omega - \Omega) + i\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} + \frac{(\Delta\omega + \Omega) - i\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right) \delta \tilde{u}_m(\Omega) \end{aligned}$$

L'expression finale est :

$$\boxed{\delta \tilde{u}_m(\Omega) = \frac{\omega_m'}{2\hbar} \frac{\tilde{F}_{th}(\Omega)}{(\omega_m''^2 - \Omega^2 - i\Omega\gamma_m')}} \quad (1.99)$$

Avec :

$$\boxed{\omega_m'' = \omega_m' \left[1 - \frac{|\alpha|^2 g_{0_shift}^{(m)}}{2\omega_m'} \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) \left\{ \frac{\Delta\omega - \Omega}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} + \frac{\Delta\omega + \Omega}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} - \frac{|\alpha|^2 g_{0_shift}^{(m)} g_{0(pt)}^{(m)}}{2\omega_m' (1 + (\Omega\tau_{th})^2)} \left\{ \frac{\Delta\omega - \Omega - \Omega\tau_{th}\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} + \frac{\Delta\omega + \Omega + \Omega\tau_{th}\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} \right]} \quad (1.100)$$

$$\boxed{\gamma_m' = \gamma_m \left[1 + \frac{|\alpha|^2 g_{0_shift}^{(m)} \omega_m'}{\gamma_m \Omega} \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) \left\{ \frac{\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} - \frac{\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} + \frac{|\alpha|^2 g_{0_shift}^{(m)} \omega_m' g_{0(pt)}^{(m)}}{\gamma_m \Omega (1 + (\Omega\tau_{th})^2)} \left\{ \frac{\frac{\kappa}{2} + (\Delta\omega - \Omega)\Omega\tau_{th}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} - \frac{\frac{\kappa}{2} - (\Delta\omega + \Omega)\Omega\tau_{th}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} \right]} \quad (1.101)$$

Effets optomécaniques

En régime stationnaire (flux de photons incidents constant), le mode mécanique voit sa fréquence propre ω_m'' se déplacer et son amortissement γ_m' changer. Ces deux phénomènes sont connus sous le nom d'effet de ressort optique ("optical spring effect") et d'effet de rétroaction optomécanique dynamique ("dynamical back action") ou amortissement optomécanique.

La rétro-action dynamique est un phénomène très utilisé en optomécanique, elle permet d'agir sur la population de phonon du mode mécanique. En effet, à l'équilibre thermodynamique, un fort amortissement optomécanique mène à une faible population de phonons, à l'inverse un faible amortissement implique une grande population de phonons. Le facteur d'amortissement γ_m' peut varier en fonction des paramètres du système.

- Lorsque $\gamma_m' > \gamma_m$, l'amortissement effectif mécanique est augmenté. On parle de "refroidissement" ("cooling" en anglais) du mode mécanique. Le nombre de phonons du mode est diminué par rapport à sa population à l'équilibre thermodynamique. Si les paramètres du systèmes sont assez bon, il est possible de descendre le nombre de phonons du mode jusqu'à 0. Une description quantique de l'optomécanique en cavité est alors nécessaire.
- Lorsque $\gamma_m' < \gamma_m$, l'amortissement effectif mécanique est atténué. On parle de "chauffage" ("heating" en anglais) et parfois d'amplification du mode mécanique. Le déplacement mécanique est amplifié et le nombre de phonons est augmenté par rapport à sa population à l'équilibre thermodynamique. Lorsque le système mécanique passe la valeur seuil d'un amortissement effectif nul, il entre dans un état d'auto-oscillation caractérisé par une grande amplitude de mouvement (régime de "laser mécanique").

Ces mécanismes peuvent être décrits à l'aide du formalisme des bandes latérales.

Bandes latérales

Dans la vision quantique de l'optomécanique, les photons du mode de cavité interagissent avec les phonons du mode mécanique. Deux interactions sont possibles :

- Un photon d'énergie $\hbar\omega_L$ absorbe un phonon d'énergie $\hbar\omega_m$ pour former un photon d'énergie $\hbar(\omega_L + \omega_m)$.
- Un photon d'énergie $\hbar\omega_L$ émet un phonon d'énergie $\hbar\omega_m$ pour former un photon d'énergie $\hbar(\omega_L - \omega_m)$.

La présence de la cavité permet alors au processus créant un photon de fréquence proche de la résonance de cavité d'être dominant. Cette domination crée un déséquilibre dans le nombre de phonons créés et absorbés optiquement par unité de temps. En fonction du processus favorisé, les photons injectés par le laser dans la cavité peuplent ou dépeuplent le mode mécanique de ses phonons.

Cette vision quantique est aussi adaptée à l'optomécanique classique. Le champ intracavité est modulé en amplitude par les oscillations mécaniques. Dans le domaine fréquentiel, on a l'apparition de bandes latérales autour de la porteuse ω_L aux fréquences $\omega_L - \omega_m$ et $\omega_L + \omega_m$ (bandes latérales Stokes et anti-Stokes (figure 1.15)). Les bandes latérales sont dites non résolues lorsque $\omega_m < \kappa$ (figure 1.15(a)) et résolues lorsque $\omega_m > \kappa$ (figure 1.15(b)). Ces deux régimes résolu et non résolu présentent des caractéristiques différentes et il est intéressant de pouvoir les comparer.

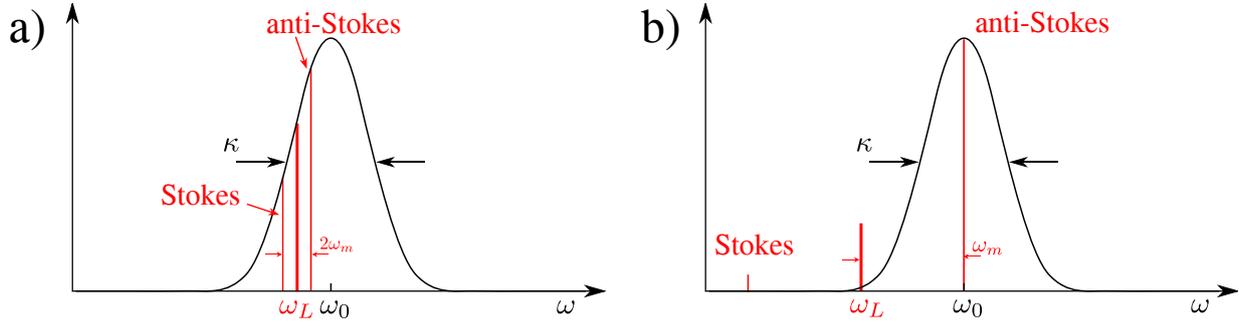


FIGURE 1.15: (a) Bandes latérales non résolues $\omega_m < \kappa$. (b) Bandes latérale résolues $\omega_m > \kappa$.

Chaque régime présente ses avantages et ses inconvénients :

- Le régime de bande latérales résolues présente un fort déséquilibre entre ses deux bandes latérales. En revanche le nombre moyen de photons dans la cavité est faible du fait de l'excitation laser très désaccordée du mode optique (figure 1.15(b)).
- Le régime de bande latérales non résolues possède un déséquilibre entre ses deux bandes plus faible par rapport à l'autre régime. Il bénéficie toutefois d'un nombre important de photons pouvant être injectés dans la cavité.

Dans les simulations qui suivront, nous fixerons en général tous les paramètres sauf le facteur de qualité optique Q_{opt} et le désaccord en fréquence $\omega_L - \omega_0$. Nous ferons varier les pertes optiques continument de $\kappa = 10 \cdot \omega_m$ pour le régime de bandes latérales non résolues à $\kappa = 0.1 \cdot \omega_m$ pour le régime de bandes latérales résolues.

Différences entre les forces optomécaniques

Sur les trois forces considérées, pression de radiation, électrostriction et force photothermique, représentée par les facteurs de couplage $g_{0(rp)}^{(m)}$, $g_{0(es)}^{(m)}$ et $g_{0(pt)}^{(m)}$, les deux premières se distinguent de la troisième dans les formules (1.100) et (1.101). Elles produisent des effets de ressort optique et de rétro-action dynamique différents. Analysons séparément les comportements de ω_m'' et γ_m' pour ces deux sortes de forces :

- La figure (1.16) représente le décalage en fréquence mécanique (a), le taux d'amortissement effectif mécanique (b) et le nombre de photons dans la cavité (c) en fonction du désaccord à la cavité optomécanique $(\omega_L - \omega_0')$ normalisé à la largeur optique κ pour la pression de radiation et l'électrostriction.
 - Le ressort optique (figure 1.16(a)) varie différemment pour les deux régimes de bandes latérales. Pour des bandes non résolues, la fréquence mécanique augmente sur le flanc "blue-detuned" de la résonance $(\omega_L - \omega_0' > 0)$ et diminue sur le flanc "red-detuned" $(\omega_L - \omega_0' < 0)$. Pour des bandes résolues, la fréquence mécanique oscille sur les deux flancs.
 - La rétroaction dynamique (figure 1.16(b)) provoque du refroidissement sur le flanc "red-detuned" et du chauffage sur le flanc "blue-detuned".
 - Le nombre de photons (figure 1.16(c)) sert de référence pour les deux autres figures (a) et (b).

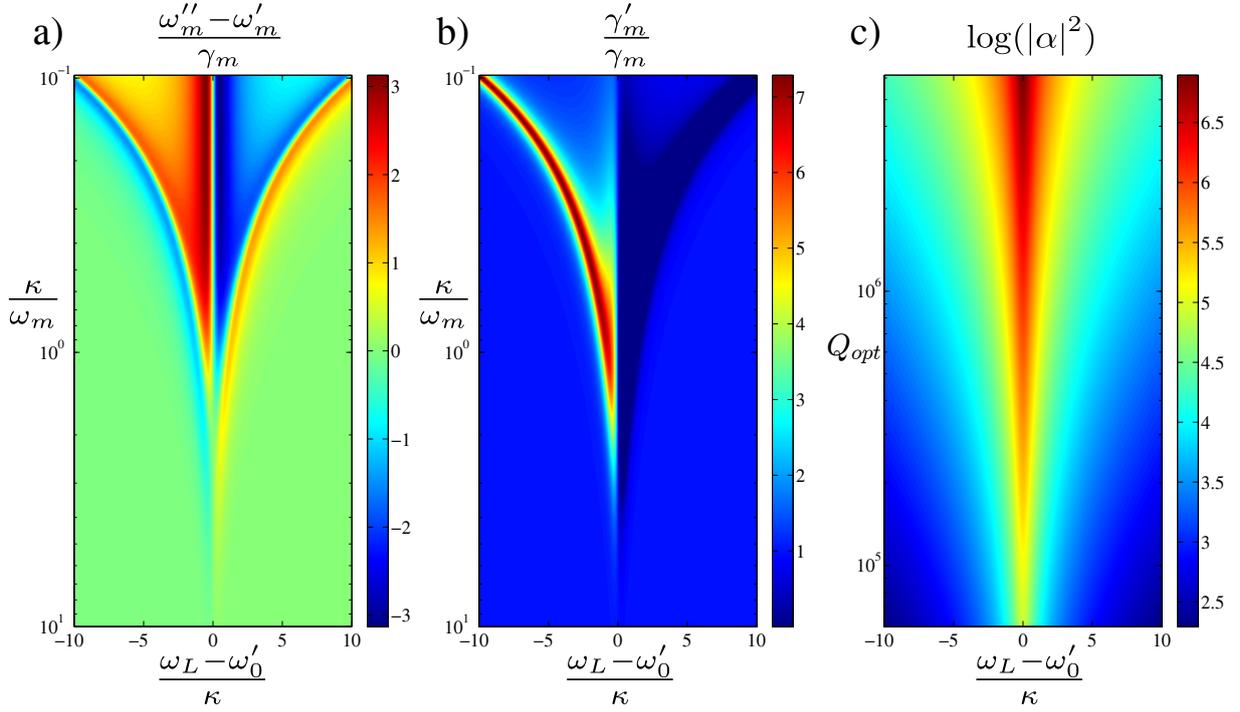


FIGURE 1.16: (a) Décalage en fréquence du mode mécanique, (b) variation de l'amortissement et (c) nombre de photons dans la cavité en fonction du désaccord en fréquence dynamique $(\omega - \omega'_0)/\kappa$ et du facteur de qualité optique $Q_{opt} = \frac{\omega_0}{\kappa}$ en échelle logarithmique. $\lambda_0 = 1550$ nm, $\omega_m = 2\pi \cdot 315$ MHz, $Q_m = 10^3$, $g_{0(shift)}^{(m)} = -2,5 \cdot 10^5$ Hz, $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} = -2,5 \cdot 10^5$ Hz, $g_{0(pt)}^{(m)} = 0$ Hz et $\tau_{th} = 1 \cdot 10^{-6}$ s.

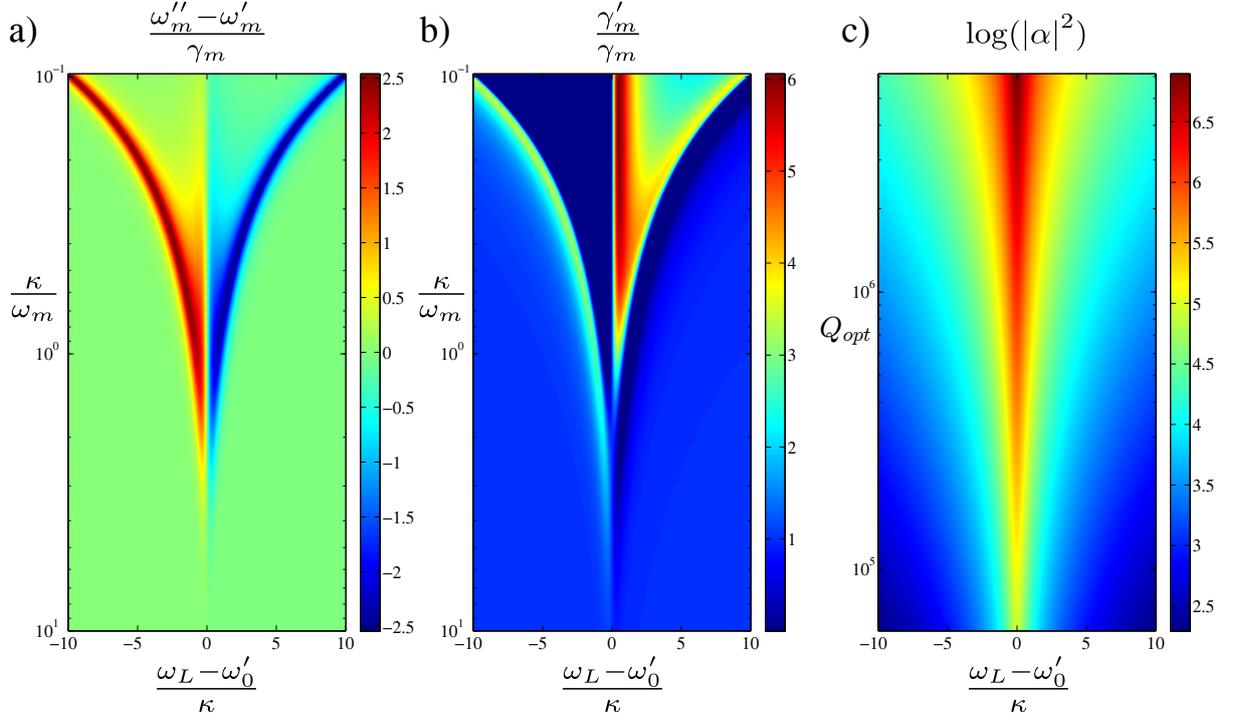


FIGURE 1.17: (a) Décalage en fréquence du mode mécanique, (b) variation de l'amortissement et (c) nombre de photons dans la cavité en fonction du désaccord en fréquence dynamique $(\omega - \omega'_0)/\kappa$ et du facteur de qualité optique $Q_{opt} = \frac{\omega_0}{\kappa}$. $\lambda_0 = 1550$ nm, $\omega_m = 2\pi \cdot 315$ MHz, $Q_m = 10^3$, $g_{0(shift)}^{(m)} = -1 \cdot 10^5$ Hz, $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} = 0$ Hz, $g_{0(pt)}^{(m)} = -1 \cdot 10^9$ Hz et $\tau_{th} = 1 \cdot 10^{-6}$ s.

- La figure (1.17) représente le décalage en fréquence mécanique (a), le taux d'amortissement effectif mécanique (b) et le nombre de photons dans la cavité (c) en fonction du désaccord à la cavité optomécanique $(\omega_L - \omega'_0)$ normalisé à la largeur optique κ pour la force photothermique.
 - La fréquence mécanique (figure 1.17(a)) augmente sur la flanc "red-detuned" de la résonance et diminue sur le flanc "blue-detuned". Pour des bandes non résolues, l'effet induit par la force photothermique est l'opposé de celui induit par la pression de radiation et l'électrostriction (cela est valable dans notre système pour un temps thermique τ_{th} de l'ordre de la microseconde).
 - La rétroaction dynamique (figure 1.17(b)) varie différemment pour les deux régimes de bandes latérales. Pour des bandes non résolues, elle provoque du refroidissement sur le flanc "red-detuned" et du chauffage sur le flanc "blue-detuned". Pour des bandes résolues, le laser refroidit et chauffe le mode mécanique sur chacun des flancs en fonction de son désaccord à la résonance.

Sur les deux figures (1.16(b)) et (1.17(b)), l'état d'auto-oscillation dans un régime de chauffage est atteint lorsque $\gamma'_m \simeq 0$ (zone bleu foncé). Notons par ailleurs que pour des bandes non résolues, les effets sont maximaux sur les pentes maximales du mode optique et que pour les bandes résolues, les effets deviennent maximaux lorsque le désaccord à la résonance optomécanique vérifie $|\omega_L - \omega'_0| = \omega_m$. Par ailleurs, nous avons choisi de prendre des paramètres $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} = -2,5 \cdot 10^5$ Hz et $g_{0(pt)}^{(m)} = -1 \cdot 10^9$ Hz qui donnent des effets de refroidissement et de chauffage similaires en amplitude. Les deux figures présentent ainsi un amortissement maximum γ'_m/γ_m autour de 6,5. Il est donc nécessaire, pour obtenir des effets optomécaniques de même amplitude, d'avoir un coefficient de couplage photothermique $g_{0(pt)}^{(m)}$ largement supérieur aux deux autres coefficients de couplage par pression de radiation et électrostriction $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)}$. Nous discuterons dans le chapitre 5 les grandeurs de ces différents coefficients.

Effet de la résonance thermo-optique

La figure (1.18), très proche de la figure (1.16), montre les mêmes quantités mais en fonction du désaccord à la cavité nue (sans interaction optomécanique ω_0). Elle met en exergue le fait que certains désaccords optiques ne sont pas accessibles à cause de la bistabilité statique de la résonance optique. Ils montrent que la mesure de certains effets optomécaniques est impossible dans cette situation. L'effet de décalage de la fréquence optique est choisi faible ici afin de montrer l'inaccessibilité progressive du flanc "red-detuned" de la résonance en fonction du nombre de photons dans la cavité. Par ailleurs, cet effet intervient aussi lorsque le coefficient photothermique $g_{0(pt)}^{(m)}$ est non nul.

Densité spectrale en optomécanique dynamique

Le mouvement mécanique, sous l'effet de l'optomécanique, acquiert donc de nouveaux paramètres à travers une réponse linéaire $\mathcal{X}_{um}(\Omega)$:

$$\mathcal{X}_{um}(\Omega) = \frac{\omega'_m}{2\hbar} \frac{1}{(\omega_m''^2 - \Omega^2 - i\Omega\gamma')} = \frac{\omega'_m}{2\hbar} \frac{(\omega_m''^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma')}{((\omega_m''^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega\gamma')^2)} \quad (1.102)$$

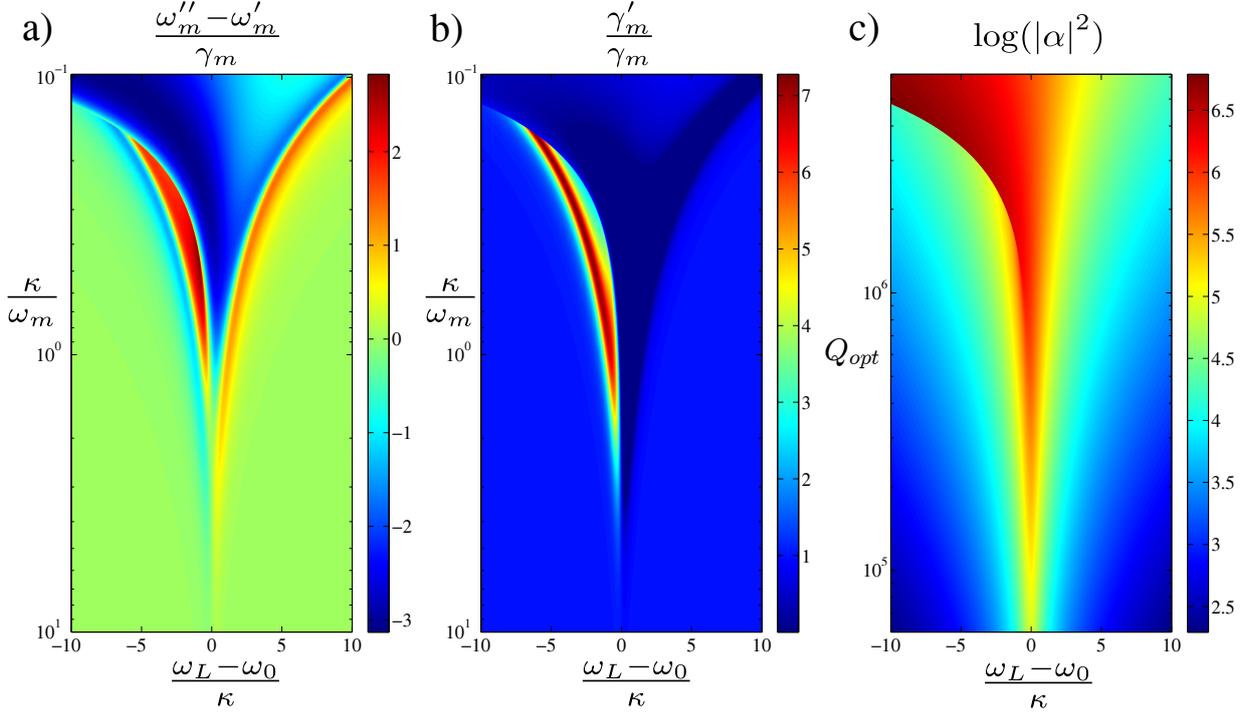


FIGURE 1.18: (a) Décalage en fréquence du mode mécanique, (b) variation de l'amortissement et (c) nombre de photons dans la cavité en fonction du désaccord en fréquence statique $(\omega - \omega'_0)/\kappa$ et du facteur de qualité optique $Q_{opt} = \frac{\omega_0}{\kappa}$ en échelle logarithmique. $\lambda_0 = 1550$ nm, $\omega_m = 2\pi \cdot 315$ MHz, $Q_m = 10^3$, $g_{0_shift}^{(m)} = -2,5 \cdot 10^5$ Hz, $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} = -2,5 \cdot 10^5$ Hz, $g_{0(pt)}^{(m)} = 0$ Hz et $\tau_{th} = 1 \cdot 10^{-6}$ s.

La densité spectrale de mouvement s'écrit :

$$\mathcal{S}_{u_m}(\Omega) = \frac{2k_B(T + \Delta T^{eq})}{\Omega} \Im(\mathcal{X}_{u_m}(\Omega)) \quad (1.103)$$

$$= \frac{2k_B(T + \Delta T^{eq})}{\Omega} \Im \left(\frac{\omega'_m}{2\hbar} \frac{(\omega_m''^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma')}{((\omega_m''^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega\gamma')^2)} \right) \quad (1.104)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \frac{k_B(T + \Delta T^{eq})\omega'_m\gamma'}{(\omega_m''^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega\gamma')^2} \quad (1.105)$$

où l'on a tenu compte d'une élévation de température moyenne ΔT^{eq}

1.3.4 Forces retardées

L'optomécanique dynamique tire ses effets du retard des forces optiques s'appliquant sur le résonateur mécanique. Dans notre modèle, nous avons à chaque fois extrait la partie travaillante des forces optiques. Il faut maintenant connaître le bilan total de ces échanges d'énergie. La mécanique fournit-elle de l'énergie aux photons ou est-ce l'inverse ? Pour trancher cette question, nous faisons l'intégrale du produit scalaire entre la vitesse de déplacement et la force appliquée.

En supposant que le mouvement mécanique est sinusoïdal, la vitesse du mouvement est donnée par :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{u}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{u}(\vec{r}) \cos(\omega_m t))}{\partial t} = -\omega_m \vec{u}(\vec{r}) \sin(\omega_m t) \quad (1.106)$$

si la réponse de la force au mouvement n'est pas linéaire, nous pouvons toujours décomposer la force périodique sur le fondamental et les harmoniques du mouvement mécanique :

$$\vec{F}(\vec{r},t) = \vec{F}(\vec{r}) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_m t + \phi_n) \quad (1.107)$$

où les coefficients a_n sont tous positifs par convention. La puissance fournie au système s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Puissance} &= \frac{1}{T_m} \int_{T_m} \int_V \vec{F}(\vec{r},t) \cdot \vec{v}(\vec{r},t) dV dt \\ &= -\frac{1}{T_m} \omega_m \int_V \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{u}(\vec{r}) dV \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{T_m} \sin(\omega_m t) \cos(n\omega_m t + \phi_n) dt \\ &= -\frac{1}{T_m} \omega_m \int_V \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{u}(\vec{r}) dV \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^{T_m} \frac{1}{2} (\sin((n+1)\omega_m t + \phi_n) - \sin((n-1)\omega_m t + \phi_n)) dt \\ &= -\frac{1}{T_m} \omega_m 2\hbar g_0 N_{cav} \sqrt{N_{phn}} a_1 \int_0^{T_m} \sin(\phi_1) dt \\ &= -\omega_m 2\hbar g_0 N_{cav} \sqrt{N_{phn}} a_1 \sin(\phi_1) \\ &\propto -g_0 \sin(\phi_1) \end{aligned}$$

où g_0 représente le couplage optomécanique qui est négatif dans notre système (la force optique exercée augmente la taille de la cavité). La phase $\phi_1 \in [-\pi; \pi]$ représente le déphasage entre l'oscillation mécanique et la force optique rétroactive. Analysons les différentes valeurs.

- $\phi_1 = 0$, aucun déphasage, la puissance transférée entre optique et mécanique est nulle.
- $\phi_1 \in]0; -\pi[$, déphasage produisant un transfert d'énergie positif, le système mécanique reçoit de l'énergie. Le maximum est atteint pour un déphasage de $\frac{\pi}{2}$.
- $\phi_1 \in]-\pi; 0[$, déphasage produisant un transfert d'énergie négatif, le système mécanique perd de l'énergie. Le maximum est atteint pour un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$.
- $\phi_1 = \pm\pi$, la force est en opposition de phase avec l'oscillation mécanique. La puissance transférée est nulle.

Le déphasage est lié au décalage de la fréquence du laser ω_L par rapport à la résonance optique et au retard de la force rétroactive, lié à κ et au temps de réaction thermique τ_{th} .

Fonction de transfert des forces de pression de radiation et électrostrictives

Nous pouvons maintenant analyser les fonctions de transfert donnant la réponse fréquentielle des forces à une excitation mécanique. La fonction de transfert régissant les forces de pression de radiation et d'électrostriction est donnée par :

$$\tilde{H}^{(rp,es)}(\Omega) = |\alpha|^2 g_{0_{shift}}^{(m)} \omega'_m \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) \left(\frac{(\Delta\omega - \Omega) + i\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} + \frac{(\Delta\omega + \Omega) - i\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right) \quad (1.108)$$

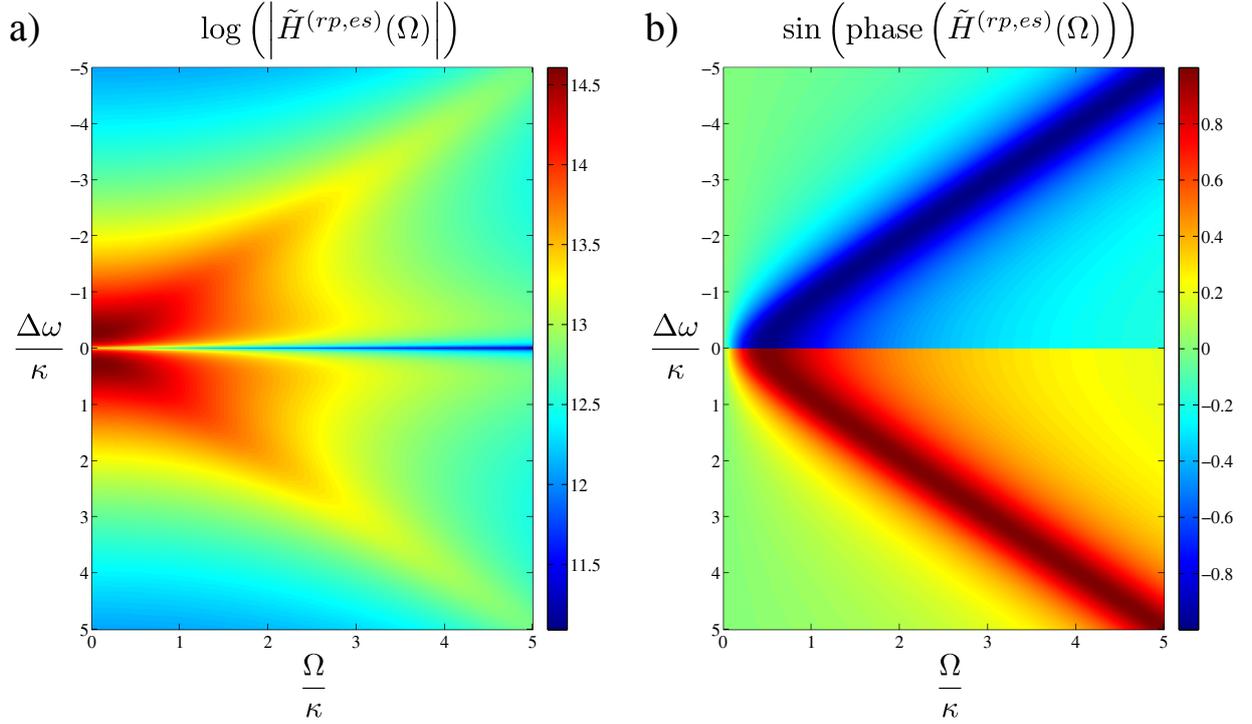


FIGURE 1.19: Fonction de transfert décrite par l'équation (1.108). Les paramètres sont : $\lambda_0 = 1550$ nm, $Q_{opt} = 1 \cdot 10^5$, $\kappa_e = \kappa_i$, $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} = -2.5 \cdot 10^5$ Hz, $g_{0_{shift}}^{(m)} = -2.5 \cdot 10^5$ Hz.

Comme en électronique, nous pouvons étudier la réponse en amplitude et en phase de cette fonction de transfert. La figure (1.19) montre pour différents désaccords de fréquences optiques la réponse en amplitude (a) et en phase (b) de la fonction de transfert $\tilde{H}^{(rp,es)}(\Omega)$. Il est apparent que les réponses maximales en amplitude et en phase pour le régime de bandes latérales résolues ($\Omega/\kappa > 1$) se situent pour des désaccords en fréquence optique $|\Delta\omega| = \Omega$. Dans le régime de bandes latérales non résolues ($\Omega/\kappa < 1$) les maxima d'amplitude et de phase ne correspondent pas. Pour l'amplitude le maximum est atteint pour $|\Delta\omega| < \Omega$. Pour la phase, il est atteint pour $|\Delta\omega| > \Omega$. Ainsi malgré la réponse maximale en amplitude, le régime de bandes latérales non résolues n'est pas forcément toujours le plus avantageux.

Fonction de transfert de la force photothermique

La fonction de transfert pour la force photothermique s'écrit :

$$\tilde{H}^{(pt)}(\Omega) = |\alpha|^2 g_{0_{shift}}^{(m)} \omega'_m g_{0(pt)}^{(m)} \left(\frac{1 + i\Omega\tau_{th}}{1 + (\Omega\tau_{th})^2} \right) \left(\frac{(\Delta\omega - \Omega) + i\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} + \frac{(\Delta\omega + \Omega) - i\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right) \quad (1.109)$$

Elle est très proche de la fonction de transfert $\tilde{H}^{(rp,es)}(\Omega)$. La différence vient du filtre passe-bas imposé par le temps de réaction thermique, typiquement long devant les temps de réponse optique et mécanique.

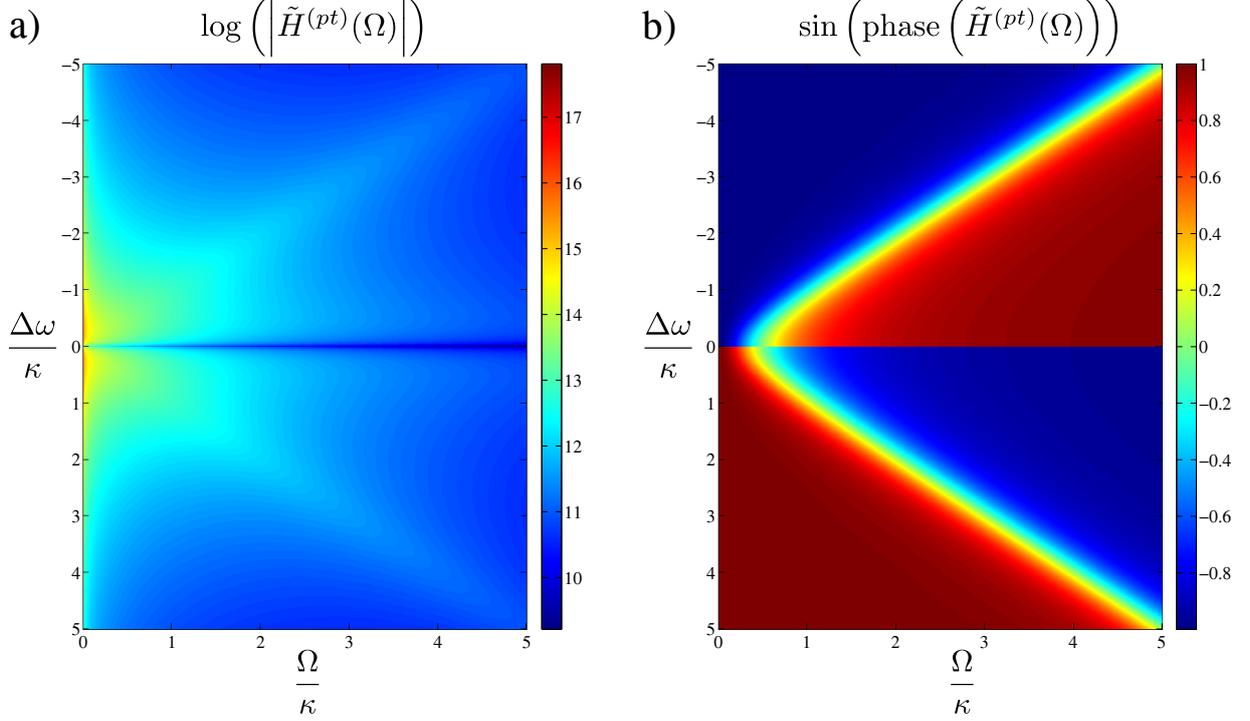


FIGURE 1.20: Fonction de transfert décrite par l'équation (1.109). Les paramètres sont : $\lambda_0 = 1550$ nm, $Q_{opt} = 1 \cdot 10^5$, $\kappa_e = \kappa_i$, $\tau_{th} = 1 \mu\text{s}$, $g_{0(pt)}^{(m)} = -1 \cdot 10^9$ Hz et $g_{0(shift)}^{(m)} = -1 \cdot 10^5$ Hz.

La figure (1.20) montre, pour différents désaccords de fréquences optiques, la réponse en amplitude (a) et en phase (b) de la fonction de transfert $\tilde{H}^{(rp,es)}(\Omega)$. Le filtre thermique additionnel impose un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la phase du filtre purement optique de la figure (1.19), permettant ainsi un déphasage de la force quasiment optimale pour tout les désaccords en fréquence optique sauf le long de $|\Delta\omega| = \Omega$. Il est intéressant de remarquer que, pour un désaccord donné, le signe du sinus change, passant ainsi d'un régime de refroidissement à un régime de chauffage ou inversement (en fonction du signe du désaccord). En revanche la réponse en amplitude du filtre est dominé par la fonction passe bas-thermique et possède une fréquence de coupure autour de $\frac{1}{\tau_{th}}$ (aux alentours du MégaHertz), faible par rapport aux fréquences mécaniques considérées sur les disques GaAs (100 MHz \rightarrow 2 GHz).

Conclusion

Les différents modes d'action optomécanique, pression de radiation et électrostriction, ou forces photothermiques ont chacun leur domaines de prédominance en amplitude et en comportement dynamique. Il faudra donc analyser avec beaucoup d'attention les différentes forces pour ne pas négliger certains effets.

Dans les autres chapitres de ce manuscrit, nous serons amenés à déployer tous le formalisme développé ici, pour interpréter finement nos résultats d'optomécanique sur les disques GaAs. Il est à noter que ce formalisme va plus loin que les travaux passés en optomécanique standard et en optomécanique photothermique. Il tente en effet d'unifier les deux, avec un degré d'auto-cohérence plus important que dans le passé, et en incluant les effets thermiques sur les modes optiques, mécaniques, et sur les fluctuations thermodynamiques du mouvement.

Techniques expérimentales pour l'optomécanique

De nombreuses techniques de laboratoire ont été mises au point et utilisées durant cette thèse, tant au niveau de la fabrication des échantillons, des montages expérimentaux que de l'acquisition de données. Ce chapitre en donne un panorama. Nous parlerons d'abord de la fabrication des disques GaAs effectuée en salle blanche. Nous présenterons ensuite la fabrication des fibres optique effilées. Nous détaillerons ensuite le montage expérimental sur lequel ont été effectuées les mesures optomécaniques. Nous finirons en présentant les différents types de mesures de base ainsi que leur traitement.

2.1 Fabrication des échantillons

Dans cette partie, la fabrication des disques est présentée dans sa globalité. Nous détaillons les différentes étapes, en identifiant à chaque fois les erreurs à éviter. La fabrication des échantillons a commencé au Laboratoire de Photonique et Nanostructures où j'ai réalisé mes premières générations de résonateurs, suite à une formation et une supervision de Pascale Senellart. Elle s'est poursuivie à l'Université Paris Diderot, dans la deuxième moitié de ma thèse lorsque la salle blanche a été opérationnelle à MPQ. Dans cette seconde tranche la lithographie électronique a été réalisée à l'École Normale Supérieure grâce à une formation et supervision par Michael Rosticher.

2.1.1 Principales étapes de fabrication

Nous décrivons brièvement les étapes de fabrications en nous appuyant sur la figure (2.1).

La plaque de semiconducteurs de départ est épitaxiée au Laboratoire de Photonique et Nanostructures par Aristide Lemaître. Une plaque commerciale de GaAs semi-isolant est utilisée comme matériau de départ, sur laquelle est épitaxiée une couche tampon de 500 nm de GaAs afin d'atténuer les défauts cristallins et produire un substrat de très bonne qualité pour une croissance ultérieure. La croissance sur ce substrat d'une couche de 1.8 μm d' $\text{Al}_{0.8}\text{Ga}_{0.2}\text{As}$ est réalisée, qui servira à la création des piédestaux de nos disques, et enfin une couche de 200 nm de GaAs est déposée, dans laquelle seront taillés nos disques (figure 2.1(a)).

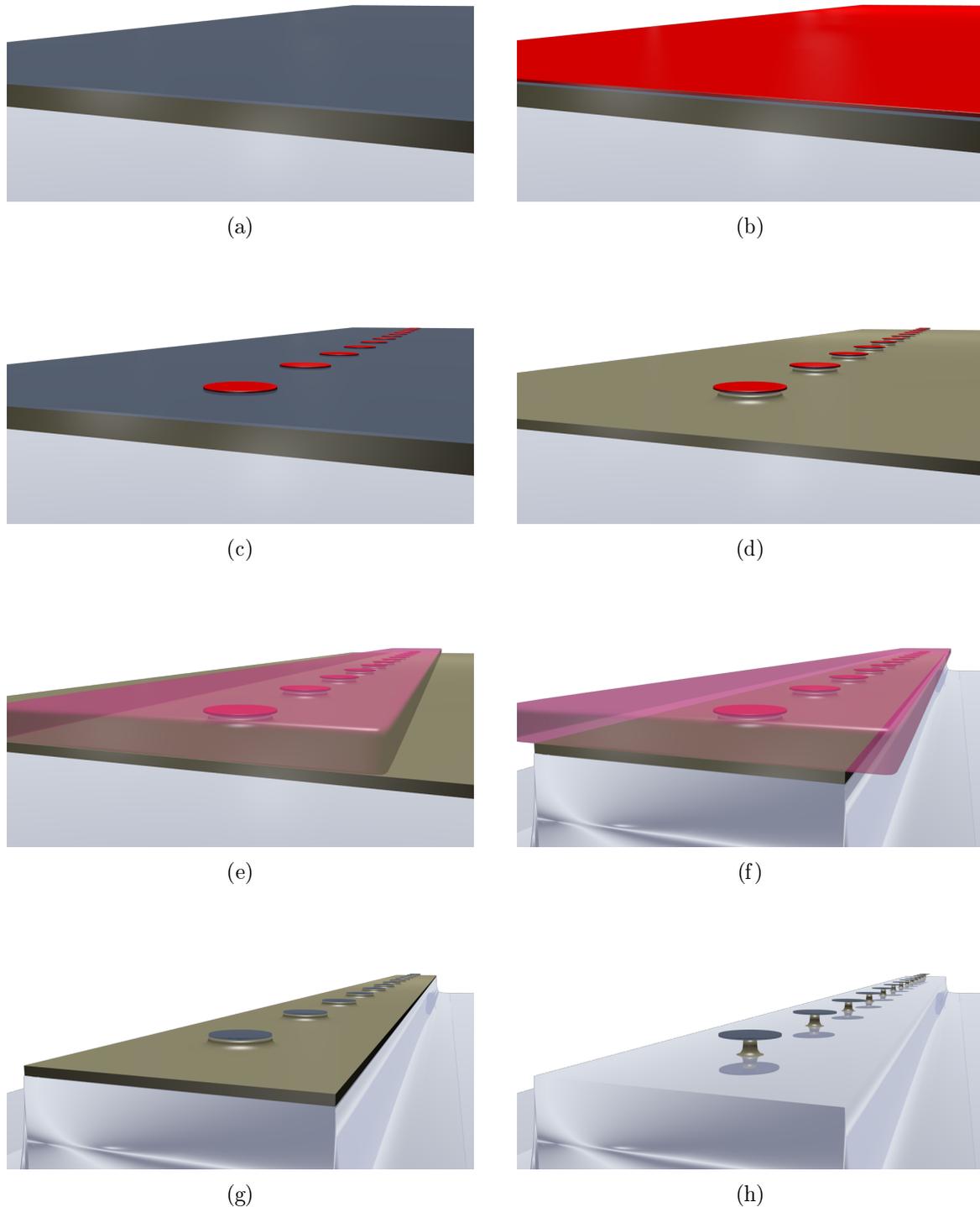


FIGURE 2.1: Étapes de fabrication des disques sur mesa. (a) Échantillon de plaque épitaxiée, (b) Enrésinement par résine électronique, (c) Développement, (d) Première gravure isotrope non sélective BCK, (e) Enrésinement par résine optique, photolithographie et développement, (f) Deuxième gravure isotrope et non sélective BCK, (g) dissolution des résines, (h) Sous-gravure isotrope sélective au HF. Le substrat (en blanc) et les disques (en bleu) tous deux en GaAs sont présentés ici avec des couleurs différentes uniquement pour la clarté de l'image.

La plaque ainsi fabriquée nous est livrée sous la forme d'une galette circulaire ("wafer" en anglais) d'un pouce. Ce "wafer" est clivé en plusieurs morceaux rectangulaires de petite taille ($\simeq 1\text{cm} \times 1\text{cm}$) que nous appelons "échantillons" par la suite. La fabrication des disques peut alors commencer, elle comprend plusieurs étapes :

- L'échantillon est enduit d'une résine électronique négative (figure 2.1(b)).
- La lithographie électronique permet de définir le contour des disques dans la résine.
- Le développement de la résine dans une solution chimique adaptée dissout la résine non exposée (figure 2.1(c)).
- La gravure dans une solution d'acide bromhydrique (HBr), d'acide acétique (CH_3COOH) et de dichromate de potassium ($\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$) dans les proportions (1:1:1), solution nommée BCK, permet de définir la forme finale de nos disques (figure 2.1(d)).
- La création d'une mesa (par gravure du substrat), qui comprend une photolithographie et une gravure chimique profonde non sélective par BCK, et permet de surélever les disques pour les rendre plus accessibles à la fibre optique effilée (figures 2.1(e) et 2.1(f)).
- La dissolution des résines dans l'acétone permet de libérer les disques (figure 2.1(g)).
- La sous-gravure sélective des piédestaux dans une solution d'acide fluorhydrique (HF) diluée (figure 2.1(h)) donne la forme définitive des disques.
- Une étape de nettoyage (si nécessaire) enlève les déchets des gravures de la surface de l'échantillon.

Un bon échantillon ne sera obtenu que si toutes les étapes décrites précédemment se sont bien déroulées. Nous allons détailler chacune de ces étapes en soulignant les risques d'échec pour chacune d'entre elles.

2.1.2 La lithographie électronique

Le choix de la lithographie électronique par rapport à la photolithographie se justifie par la faible taille des motifs à imprimer (de l'ordre du micron). Les électrons possèdent une longueur d'onde plus faible que les photons ultraviolets, et le motif est ainsi dessiné avec une plus grande précision. Nous verrons par la suite qu'il est critique dans nos expériences d'obtenir les disques les plus circulaires possibles, et donc avec un maximum de précision.

Préparation de l'échantillon

L'échantillon doit être correctement nettoyé. Il est immergé dans une solution d'acétone pendant 5 minutes sous ultrasons afin d'enlever toutes traces de résidus organiques, puis encore 5 minutes dans une solution d'isopropanol sous ultrasons pour supprimer l'acétone restant. Le séchage de l'échantillon est effectué à l'aide d'un pistolet à azote. L'échantillon est ensuite placé sur une plaque chauffante à $150\text{ }^\circ\text{C}$ pendant 5 minutes pour le déshydrater.

L'énrésinement s'effectue par la méthode d'enduction centrifuge ("spin coating" en anglais) sur une tournette ("spin coater" ou "spinner" en anglais) qui permet de déposer une couche de résine homogène sur la surface de l'échantillon. L'épaisseur de la couche de résine dépend des paramètres de viscosité de la résine, de la vitesse de rotation de la tournette (en tours par minute), de l'accélération au départ et à l'arrivée (en tours par minute par seconde) et du temps d'opération (en secondes). L'échantillon est placé sur le plateau tournant, deux gouttes

d'un promoteur d'adhérence (HMDS) y sont déposées. La tournette est mise en action (paramètres : vitesse 6000 tr/min, accélération 4000 tr/min/s, temps 30 s) pour former une couche de 100 nm d'épaisseur de promoteur. Deux gouttes de résine électrosensible (Ma-N 2403 de Micro-Chemicals) sont ensuite déposées et la tournette de nouveau actionnée (paramètres : vitesse 3000 tr/min, accélération 3000 tr/min/s, temps 30 s) pour former une épaisseur de 300 nm de résine.

Insolation

L'échantillon est prêt à être insolé. Nous devons être attentifs à ne pas exposer la résine à une lumière contenant des ultraviolets car la résine Ma-N 2403 est aussi photosensible. L'échantillon est placé dans le microscope électronique à balayage fonctionnant en mode écriture (modèle Raith e-line ebeam lithography). Une résine négative est un type de résine pour laquelle la partie exposée devient insoluble au révélateur, et la partie de résine non exposée reste soluble. En général, la résine polymérise sous l'exposition. Dans notre cas, le faisceau électronique doit donc balayer la surface qui définit les disques. Nous utilisons le mode d'écriture circulaire qui produit des disques plus lisses que le mode d'écriture en balayage cartésien produisant une "pixellisation" du motif.

Le "masque de lithographie" (fichier numérique) est dessiné grâce au logiciel "e-line" et est transmis au logiciel contrôlant le microscope. Il contient le motif représentant une succession de disques le long d'une ligne (figure 2.1(c)).

Le faisceau d'électrons doit être ajusté à chaque utilisation. Nous utilisons une ouverture de faisceau de 10 μm à 20 kV. Le pas d'écriture est réglé à 10 nm. La dose que doit recevoir la résine afin de polymériser efficacement doit être $\simeq 200 \mu\text{A.s.cm}^{-2}$. La dose est un des principaux paramètres déterminant le caractère lisse ("smoothness") du contour de la résine, contour qui sera extrudé lors de la gravure pour créer la surface périphérique du disque. Il est donc primordial d'obtenir un contour de résine le plus lisse et circulaire possible. Une trop forte dose risquerait de brûler la résine alors qu'une dose trop faible ne "réticulerait" pas assez la résine au niveau du contour et provoquerait une rugosité lors du développement. À la fin de l'étape d'inscription du masque dans la résine, l'échantillon est prêt à être développé.

Développement

Le développement se fait en trempant l'échantillon dans un révélateur (AZ 726 MIF dans notre cas). Le temps de développement dépend de l'agitation de l'échantillon dans la solution et peut varier entre 1 et 2 minutes. Il est conseillé à l'expérimentateur de vérifier au microscope optique (sans lumière U.V.), au bout d'une minute, l'état du développement et d'aviser ensuite de la poursuite ou non du développement. Après chaque passage dans le révélateur, l'échantillon doit être rincé dans l'eau déionisée (DI) pendant une trentaine de secondes.

Un recuit peut être effectué afin que la résine, en se ramollissant, se réorganise sous les effets de tension de surface. Ces derniers ont tendance à privilégier des formes lisses minimisant l'énergie (exemple : goutte d'eau). Ceci peut lisser le contour de la résine. Bien que nous ayons quelquefois employé cette technique, il est difficile de dire si elle produit un réel effet bénéfique dans le cas de notre fabrication par gravure chimique. Dans le cas d'une fabrication par gravure

sèche, un effet bénéfique a été remarqué dans notre équipe (voir thèse de Christophe Baker [61]).

À ce stade l'échantillon ressemble à celui présenté en figure (2.1)(c). Il est prêt à être gravé.

2.1.3 La première gravure BCK

La solution de gravure BCK, ainsi nommée par Adachi [62], a d'abord été utilisée sur InP et InGaAsP. Elle s'est révélée être aussi très efficace par la suite pour GaAs et AlGaAs [63]. Dans toute cette thèse nous parlerons de gravure BCK pour une solution dans les proportions (1:1:1). Le principe de gravure est simple :

- $K_2Cr_2O_7$ est un oxydant fort. Il vient oxyder des atomes de gallium et d'arsenic à la surface de l'échantillon.
- CH_3COOH et HBr sont deux acides qui viennent interagir avec les oxydes ainsi créés et les détachent de la surface.

Le processus se répète jusqu'à ce qu'un des réactifs devienne limitant ou que l'échantillon soit retiré de la solution. Le masque de résine Ma-N protège la surface supérieure du GaAs de la gravure. La solution s'attaque au matériau non protégé, permettant ainsi la libération des plots (figures 2.1(d) et 2.2).

La solution de gravure BCK possède certaines propriétés utiles pour notre fabrication :

- Elle est non sélective, c'est-à-dire qu'elle grave GaAs et AlGaAs à quasiment la même vitesse.
- Elle est isotrope, c'est-à-dire qu'elle grave à la même vitesse dans toute les directions. Cette propriété est primordiale pour la création de motifs circulaires, pour éviter que certains axes cristallographiques ne se révèlent pendant la gravure.
- Elle laisse les surfaces de GaAs lisses après son passage. Ce n'est par contre pas autant le cas lorsqu'elle grave AlGaAs.

Cette gravure BCK donne leur forme de base aux disques GaAs. Elle doit donc graver au delà des 200 nm de profondeur correspondant à la couche de GaAs. Par ailleurs les avantages d'une gravure BCK profonde sont la verticalité finale des flancs des disques, et le fort taux de gravure de l'AlGaAs qui, nous le verrons plus loin, est susceptible de produire des déchets s'il demeure trop présent dans les étapes postérieures. L'inconvénient est la gravure horizontale concomitante qui peut mener à des géométries non-circulaires si elle n'est pas bien maîtrisée. La gravure étant idéalement isotrope, cet effet est limité, mais dépend de l'agitation moyenne dans la solution.

Une solution saturée de dichromate de potassium est préparée en dissolvant le dichromate solide $K_2Cr_2O_7$ dans de l'eau DI (14.7 g pour 100 mL). La solution se dégrade peu et peut être préparée longtemps à l'avance. Pour la production de BCK, elle est légèrement réchauffée à 60 °C et agitée avant utilisation afin de dissoudre le dichromate recristallisé. BCK s'obtient en mélangeant ses trois composants en volume égal. Elle est plongée dans un bain thermostaté à 4 °C afin de diminuer la vitesse de réaction chimique et mieux contrôler la gravure. Cette vitesse est extrêmement dépendante de l'agitation régnant dans la solution (agitation manuelle, bulles, convection...). Un échantillon immobile sera gravé plus lentement qu'un échantillon subissant une agitation manuelle de l'opérateur par exemple.

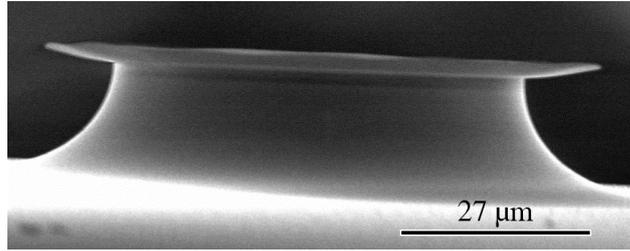


FIGURE 2.2: Gravure BCK de longue durée sur un gros disque. La gravure horizontale se produit sur une distance d'environ $1/3$ de la profondeur de gravure verticale. Notons la résine suspendue qui se rétracte vers le haut.

L'opérateur maintient l'échantillon immobile dans la solution à l'aide d'une pince pendant 45 secondes. Cela correspond à une gravure d'environ 1 micron. L'échantillon est ensuite rincé dans l'eau DI pendant 30 s puis séché au pistolet à azote.

2.1.4 Création de la mesa

Photolithographie

La mesa sert à surélever les disques à la surface de l'échantillon sur une bande de quelques dizaines de microns de large. Nous comprendrons précisément dans la section (2.2) la raison d'être de la mesa, obtenue par lithographie optique. Nous utilisons une résine photosensible positive (S1818), enduite sur l'échantillon à l'aide d'une tournette. La résine optique, épaisse de $1.8 \mu\text{m}$, recouvre complètement les plots formés par la première gravure BCK. Sa faible épaisseur nous permet de repérer la position des disques par transparence sous le microscope du masqueur et d'aligner le masque en chrome pour l'insolation (bande d'un centimètre de long sur 100 microns de large). La résine photosensible positive est insolée pendant 9 secondes puis révélée dans une solution MF 319 pendant 15 à 30 s en fonction des paramètres d'exposition, aboutissant à la situation de la figure (2.1(e)).

Gravure de la mesa

La gravure de la mesa s'effectue dans la même solution BCK, que nous avons sortie du bain thermostaté pour en augmenter la vitesse de gravure. Nous devons graver plus de 5 microns de profondeur, et 2 minutes dans BCK à température ambiante sont suffisantes. L'échantillon est rincé à l'eau DI et séché à l'azote (figure 2.1(f)). Le résultat est montré en figure (2.3). Les résines électroniques et optiques sont ensuite dissoutes dans un bain d'acétone pendant 5 min. L'échantillon est finalement rincé dans l'isopropanol pendant 5 min. Il présente maintenant une bande de plots surélevés sur une mesa (figure 2.1(g)).

2.1.5 La sous gravure

La sous gravure à l'acide fluorhydrique (HF) doit être exécutée avec précaution, d'une part parce que le produit en lui-même est très dangereux et d'autre part car c'est une étape critique dans la réalisation des piédestaux. Le HF grave sélectivement l'AlGaAs par rapport au GaAs.

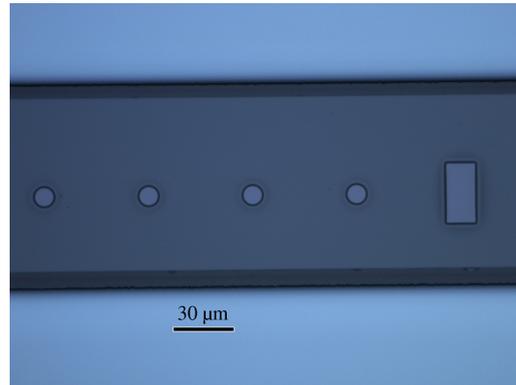


FIGURE 2.3: Cliché au microscope optique pris après la gravure de la mesa. Les bandes sombres extérieures montrent la gravure horizontale sous la résine optique. Le motif carré sert ici à protéger les disques plus petits en cas de retournement accidentel de l'échantillon.

La sélectivité augmente avec la teneur en aluminium de l'AlGaAs. Nous voulons que cette sélectivité soit la plus grande possible et avons choisi une haute teneur en aluminium (80 %) dans la fabrication de nos plaques notamment pour cette raison.

En parallèle, une solution d'hydroxyde de potassium (KOH) est préparée (12 g de KOH solide dans 800mL d'eau). Elle sert à ôter les copeaux d'AlGaAs nageant dans la solution de sous gravure, et s'étant redéposés sur l'échantillon.

La sous gravure se fait à 4 °C dans HF (50%) diluée 20 fois (typiquement 150 mL d'eau DI pour 7.5 mL de HF). Le temps de sous gravure est différent pour chaque diamètre de disque. L'avancement de la sous gravure doit être vérifié régulièrement, le diamètre du piédestal se distinguant par transparence au microscope optique (figure 2.4). Les périodes d'immersion dans le HF sont de l'ordre de 15 à 45s.

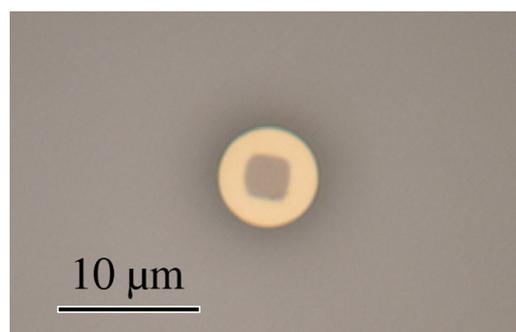


FIGURE 2.4: Transparence du piédestal (gris) à travers le disque (orange).

À chaque fois que l'échantillon sort de la solution HF, il est rincé pendant 30 secondes dans l'eau DI, puis plongé dans le KOH pendant 30 secondes et enfin rincé dans l'eau DI avant d'être séché au pistolet à azote.

Ce processus peut être répété un certain nombre de fois. Il est à noter qu'il vaut mieux minimiser le nombre de ces étapes pour obtenir un échantillon final plus propre.

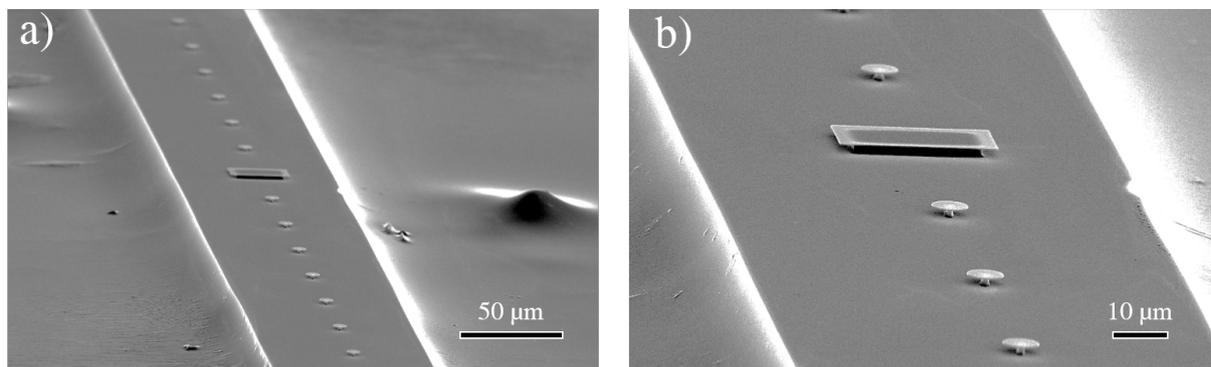


FIGURE 2.5: Échantillon en fin de la fabrication.

Les images MEB de la figure (2.5) présentent les échantillons à la fin du processus de fabrication. L'échantillon est prêt à être utilisé dans nos expériences. Notons sur l'image (2.5(a)) la présence en dehors de la zone de la mesa de déchets et de monticules qui sont apparus lors de la gravure de la mesa. Ils ne présenteront pas de problème pour la suite des expériences s'ils se situent bien en dessous du niveau de la mesa. La figure (2.6) montre deux disques sans défaut visible sur lequel nous allons pouvoir travailler sans difficulté expérimentale et qui produira les résultats présentés par la suite.

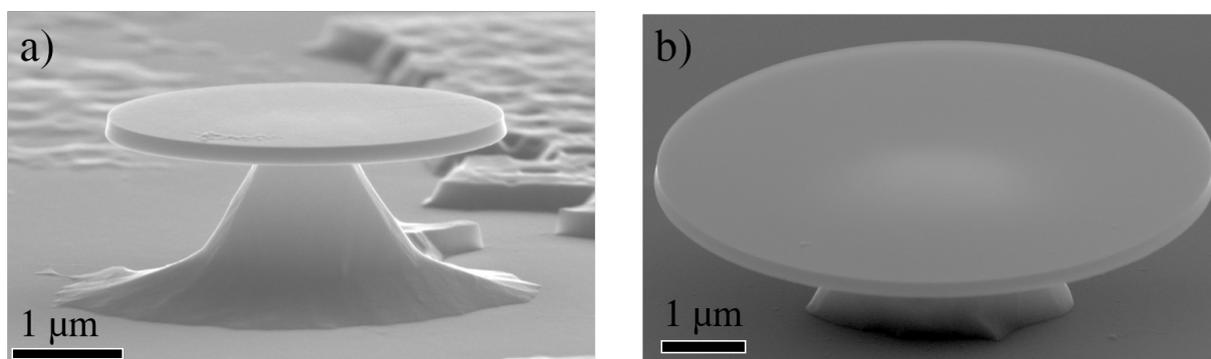


FIGURE 2.6: Zoom sur deux disques de rayon $\sim 2 \mu\text{m}$ (a) et sur un disque de rayon $\sim 3.5 \mu\text{m}$ (b).

2.2 Fabrication de la fibre optique effilée

2.2.1 Étirage de la fibre optique

La fibre optique monomode à saut d'indice (SMF-28) est formée d'un cœur et d'une gaine respectivement en silice et en silice dopée. La différence d'indices entre les deux matériaux est faible (0.4%) mais les grandes dimensions du cœur (10 μm de diamètre) et de la gaine (125 μm de diamètre) permettent de guider certaines longueurs d'onde avec de très faibles taux de pertes (0.19 dB.km^{-1} à 1550 nm).

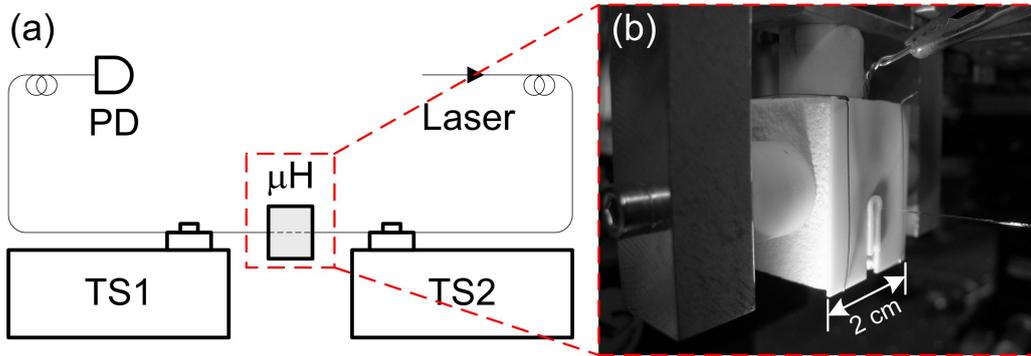


FIGURE 2.7: (a) Schéma du montage expérimental d'étirage de fibre. PD signifie photodétecteur, TS1 et TS2 les platines de translations et μH le micro four. (b) Photo du micro four. On distingue la fibre optique placée au centre du coeur.

La technique d'étirage est décrite en détails dans l'article [64]. La fibre est étirée dans un four céramique thermoélectrique.

La fibre est maintenue tendue entre deux pinces magnétiques montées sur deux platines de translation motorisées. Le four chauffe à $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$ au cœur de sa zone chaude. Il est positionné, à l'aide de platines mécaniques, au-dessus de la fibre puis est descendu jusqu'à ce que la partie centralement préalablement dénudée, de la fibre soit au centre de la zone chaude. Un temps d'attente de deux minutes est requis afin que la fibre se thermalise et commence à transiter vers un état vitreux mou. Les deux platines de translation sont alors actionnées par un contrôleur électronique. Elles se déplacent à la vitesse $0.04\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ en sens opposé. L'opérateur arrête

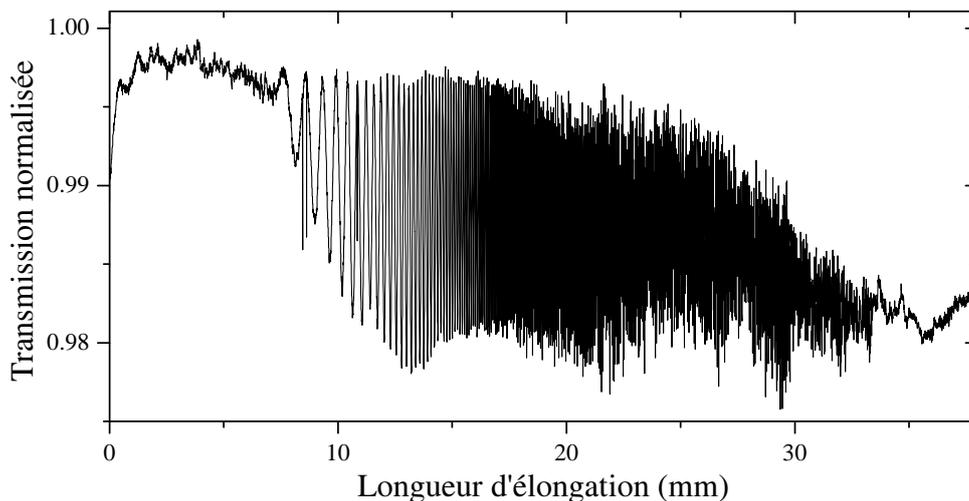


FIGURE 2.8: Transmission normalisée de la puissance transmise en fonction de la longueur d'élongation. La fibre devient monomode aux environs de 34 mm d'élongation.

l'élongation lorsqu'il le juge opportun en se basant sur l'analyse de la transmission optique. La puissance transmise est mesurée en temps réel afin de juger de la qualité de l'étirage, ainsi

que de l'épaisseur finale de la zone effilée. Lors de l'étirage le coeur et la gaine fusionnent et la fibre devient multimode. Cette information apparait dans le spectre de transmission à travers l'oscillation de la puissance en fonction du temps d'étirage. Cette oscillation est la signature d'un battement entre les différents modes guidés. Lorsque ces interférences disparaissent, la fibre est monomode. Ceci donne une bonne indication de son rayon qui, d'après la figure (A.1), est de 570 nm au moment de la transition monomode.

La fibre est laissée au repos pendant 10 minutes, le temps de refroidir. Il est recommandé de travailler dans une atmosphère sèche et un degré d'empoussièrement très faible. Ces deux facteurs dégradent la transmission de la fibre. L'eau dans l'atmosphère réagit avec la silice en surface et la détériore. Une poussière, se déposant sur la fibre effilée diffusera énormément de lumière et provoquera de lourdes pertes optiques. La fibre est ensuite collée, à l'aide d'une colle époxy (Araldite prise rapide), sur un support métallique permettant de régler la tension de la fibre étirée. Ce support à tension ajustable a été développé au cours de ma thèse. Une trop forte tension cassera la fibre étirée, une trop faible la laissera sujette aux forces électrostatiques tribo-électriques et autres perturbations mécaniques, dégradant la stabilité du couplage évanescent. La fibre sur son support est ensuite insérée dans le montage expérimental.

2.3 Montage d'optomécanique à fibre effilée

2.3.1 Historique

Au début de ce travail de thèse, une première version de montage expérimental de couplage par fibre optique aux disques GaAs existait déjà. Une boucle de fibre effilée couplée à un échantillon sans mesa était utilisée (figure 2.9(a) et (b)) [65, 26, 66]. Les échantillons étaient fabriqués de la même manière que celle décrite à la section précédente sans l'étape de la mesa, introduite pendant ma thèse. La boucle de fibre nous permettait d'accéder optiquement aux disques, cependant cette méthode présentait des inconvénients :

- La souplesse mécanique de la boucle. Il est difficile de contrôler parfaitement la position de la fibre dans le champ évanescent du disque, lorsque celle-ci est soumise à des forces électrostatiques (triboélectriques) et aux bruits du laboratoire.
- Le manque de contrôle de la polarisation de la lumière guidée. Une boucle, toute en contrainte, induit une biréfringence et donc un changement non contrôlé de polarisation de la lumière en son sein.
- La perte de puissance optique. La courbure importante de la boucle induit des pertes optiques conséquentes.
- Les interférences dans le spectre optique. La géométrie de la boucle induit un couplage entre le mode guidé entrant et le mode guidé sortant, au niveau du croisement. Ceci induit une interférence qui affecte le spectre optique et en dégrade la qualité et la lecture.

Abandonner le système de boucle de fibre nous a paru nécessaire lors de ma première année de thèse pour aboutir à une plus grande maîtrise de l'expérience. Nous avons donc envisagé d'utiliser une fibre droite (figure 2.9(c) et (d)), qui circonviendrait à tous les problèmes de la boucle. Cela nous a conduit à réinventer la fabrication de nos échantillons. En effet la fibre droite doit être positionnée parallèlement au plan de l'échantillon à une hauteur de 2 μm au dessus de celui-ci. Plus l'échantillon est grand, plus cette tâche se complique, l'alignement de la fibre devenant

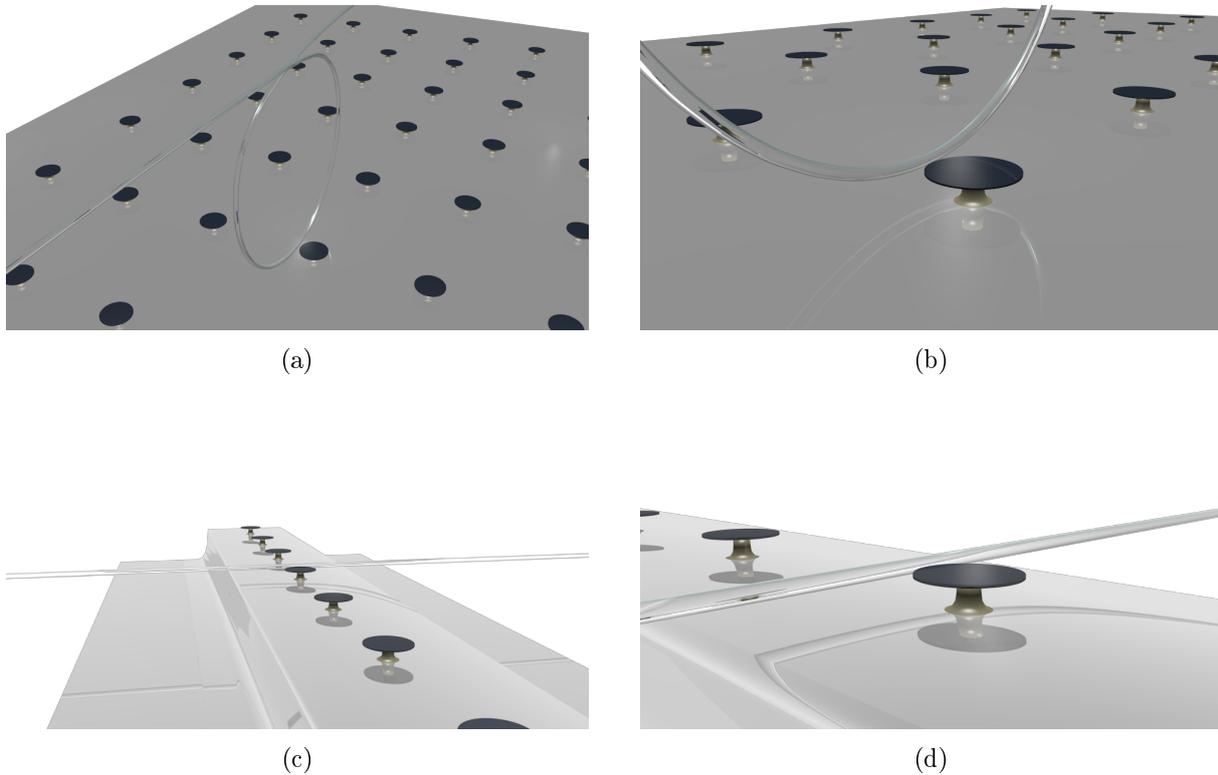


FIGURE 2.9: (a) et (b) Fibre optique étirée prenant la forme d'une boucle sur un échantillon sans mesa. (c) et (d) Fibre optique étirée droite sur un échantillon avec une mesa. Le substrat (en blanc) et les disques (en bleu) tout deux en GaAs sont présentés ici avec des couleurs différentes uniquement pour la clarté de l'image.

acrobatique et dépendant de la présence de poussières même loin du disque. La réduction de la taille effective de l'échantillon s'est opérée par la création d'une mesa de plusieurs microns de hauteur ($\sim 6 - 10 \mu\text{m}$), afin de surélever les disques et les rendre plus accessible à la fibre. C'est la géométrie présentée en figure (2.1) dans le paragraphe de fabrication.

Ce nouveau montage (fibre droite+mesa) a tenu toutes ses promesses très rapidement et nous a permis d'observer les effets optomécaniques décrits dans cette thèse.

2.3.2 Montage

Le montage optomécanique est schématisé sur la figure (2.10). Nous utilisons un laser accordable (Tunics)(LA) permettant de réaliser des balayages en longueur d'onde allant de 1500 nm à 1600 nm. Il délivre jusqu'à 10 mW de puissance en sortie fibrée. Un contrôleur de polarisation fibré (CPF) permet de faire varier la polarisation. Le faisceau passe ensuite en espace libre à l'aide d'un collimateur (Col). Il est envoyé vers un cube séparateur de polarisation ("Polarized Beam Splitter" en anglais \rightarrow PBS) qui ne transmet que la partie polarisée linéaire verticale et réfléchit la partie polarisée linéaire horizontale. La combinaison CPF-PBS permet donc de jouer sur la puissance transmise et réfléchi par le cube. La lame quart d'onde ($\lambda/4$) permet

de couvrir la gamme complète des polarisations linéaires. Le jeu des deux miroirs orientables permet de coupler le laser dans la fibre optique étirée.

La fibre optique pénètre ensuite dans une boîte en Plexiglas contenant un environnement pauvre en eau (présence de dessicant) et protégeant l'expérience des courants d'air. La partie étirée de la fibre optique est positionnée dans le champ évanescent d'un disque GaAs grâce à une platine de positionnement piezo tri-axe (Attocube ECS 3030). La platine tri-axe possède deux modes de fonctionnement. Le premier, grossier, permet des translations sur une course de 2 cm. Le second, fin, permet d'effectuer des pas d'un nanomètre. Le système est entièrement contrôlable à partir d'un ordinateur. Nous avons développé un programme sur le logiciel Labview permettant le contrôle ergonomique du tri-axe, qui nous permet de déplacer l'échantillon d'une main (les quatre flèches du clavier + les numéros 1, 2 et 3), tout en regardant dans l'oculaire du microscope optique qui donne l'accès visuel agrandi au disque et à la fibre. L'approche de la fibre auprès du disque est ainsi parfaitement maîtrisée, malgré la précision nanométrique requise.

La lumière transmise par la fibre sort de la boîte en plexiglas, de la fibre, et est focalisée sur un photodétecteur par un jeu de lentilles. La sortie électronique du photodétecteur sépare la composante continue de la composante alternative du photocourant. Le signal DC est envoyé vers la carte d'acquisition (National Instrument), elle-même reliée à l'ordinateur. Il est utilisé pour réaliser les spectres optiques des disques GaAs lorsque la longueur d'onde du laser est balayée. Le signal AC est envoyé vers l'analyseur de spectre électronique (Rhodes & Schwarz FSL 9 kHz - 3 GHz), il contient la signature des modes mécaniques du disque. La figure (2.11) contient des photographies de l'ensemble du montage.

Ce montage expérimental d'optomécanique à fibre effilée sur les disques GaAs est adapté pour la réalisation de spectres optiques et mécaniques. Nous discutons ces types de mesures dans les prochaines sections.

2.4 Spectroscopie optique

2.4.1 Acquisition

Jusqu'ici nous avons évoqué la fréquence angulaire du laser ω_L et la fréquence de résonance du mode optique ω_0 (en Hz). Expérimentalement, on utilise la longueur d'onde λ_L et λ_0 (en m) liée aux fréquences par $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Pareillement, les largeurs des modes optiques $\kappa = \kappa_e + \kappa_i$ exprimées en Hz trouvent leurs analogues en mètres avec $\delta\lambda = \delta\lambda_e + \delta\lambda_i$. Ils sont liés par les relations :

$$Q_{opt} = \frac{\omega_0}{\kappa} = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda} \quad \text{et donc} \quad \delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \kappa \quad (2.1)$$

En rapprochant la fibre du disque, le recouvrement des champs évanescents des deux objets augmente progressivement, induisant le couplage évanescent. Les modes optiques apparaissent alors comme des chutes dans la puissance transmise (figures 1.9 et 1.10). Ces chutes, dans le cas d'un mode singulet (équation 1.44), prennent une forme lorentzienne caractérisée par sa

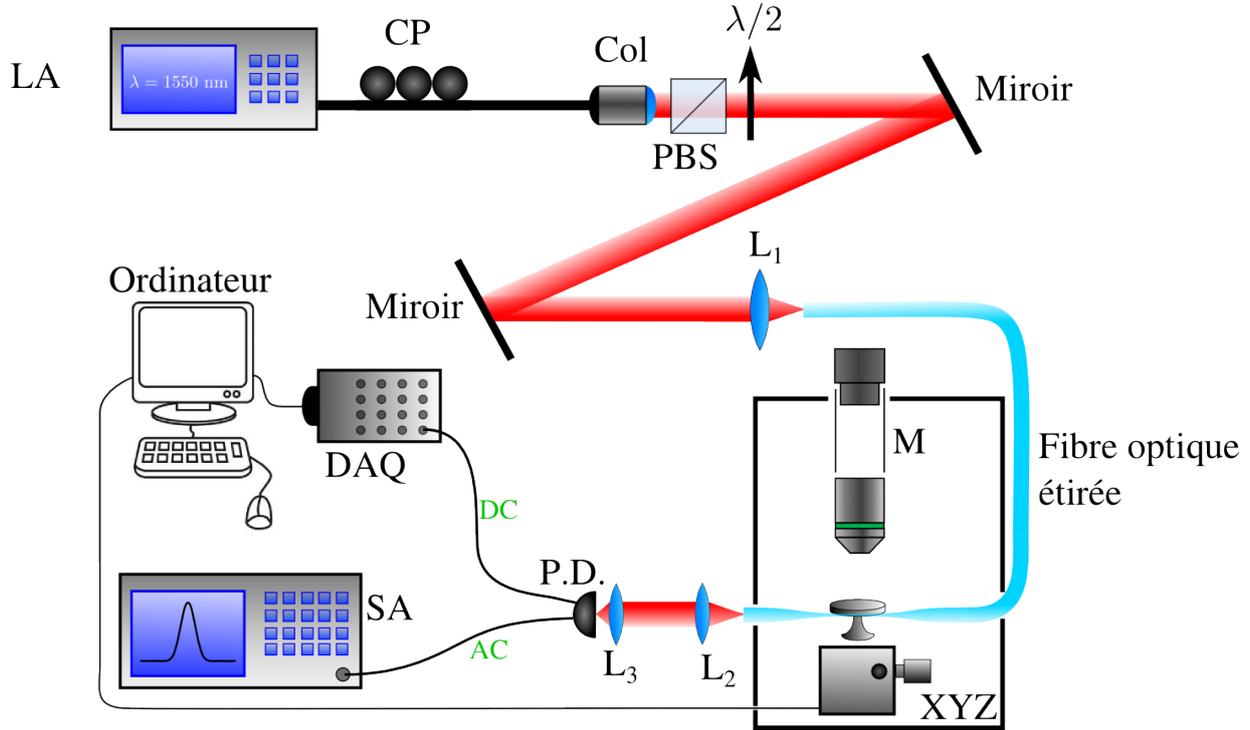


FIGURE 2.10: Schéma du montage expérimental d'optomécanique à fibre effilée. LA laser accordable, CP contrôleur de polarisation fibré, Col collimateur, PBS cube séparateur polarisé, $\lambda/4$ lame quart d'onde, L lentille, M microscope, XYZ platine de translation tri-axe, PD photodétecteur, SA analyseur de spectre électronique, DAQ carte d'acquisition ("Data Acquisition Card" en anglais), AC courant alternatif, DC courant continu.

largeur à mi-hauteur donné par $\delta\lambda = \delta\lambda_i + \delta\lambda_e$ et un contraste $C \in [0,1]$ donné par :

$$C = \frac{4\kappa_e\kappa_i}{(\kappa_e + \kappa_i)^2} = \frac{4\delta\lambda_e\delta\lambda_i}{(\delta\lambda_e + \delta\lambda_i)^2} \quad (2.2)$$

La spectroscopie des modes de galerie des disques s'opère en balayant la longueur d'onde du laser accordable, en situation de couplage évanescent disque-fibre. Un programme réalisé sous Labview permet de déclencher le balayage et l'acquisition du signal DC de puissance optique transmise simultanément. Le laser balaye les longueurs d'onde à 100 nm.s^{-1} . La carte d'acquisition permet d'enregistrer 500 000 échantillons en une seconde. La résolution spectrale est donc de 0,2 pm. Nous enregistrons un spectre dit de référence qui servira à normaliser les spectres suivant. Ce spectre est réalisé lorsque la fibre est éloignée du disque, le facteur de couplage $\delta\lambda_e$ est alors quasiment nul. Le programme permet ensuite l'affichage automatique du spectre normalisé en réalisant la division du spectre acquis par le spectre de référence.

La figure (2.12) montre deux spectres normalisés d'un disque de rayon $R = 4,5 \text{ }\mu\text{m}$ qui supporte de nombreux modes de galerie sur la plage 1500-1600 nm. Le contraste de ces modes dans le spectre dépend de leur couplage $\delta\lambda_e$ à la fibre, lui-même dépendant de la distance entre la fibre et le disque. Ainsi lorsque la fibre se colle au disque par exemple, le couplage change brusquement ainsi que le contraste des modes (figure 2.12(b)).

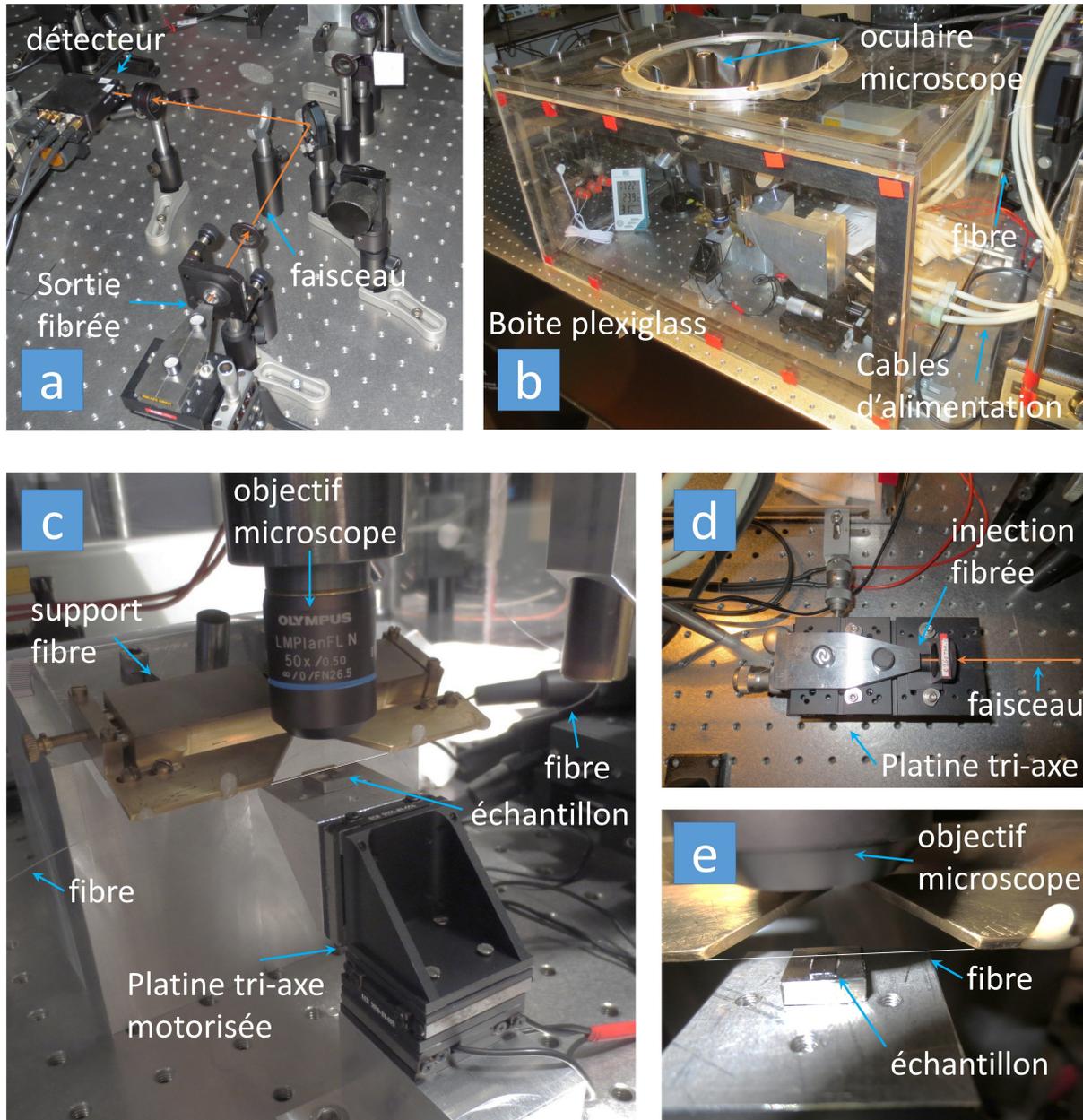


FIGURE 2.11: Photos du montage expérimental d'optomécanique à fibre effilée. (a) Collection du laser en sortie de fibre dans le détecteur par un jeu de lentille. (b) La boîte en plexiglas close permet le passage de la fibre optique et des câbles électriques pour la motorisation de la platine Attocube tri-axe ainsi que le passage du microscope à l'aide d'un joint flexible. (c) Le microscope permet de visualiser l'échantillon et la fibre tenu sur un support massif. (d) Injection du laser dans la fibre à l'aide d'une lentille et d'une platine tri-axe manuelle. (e) La fibre est juste au dessus de l'échantillon et immobile sur son support. L'échantillon se déplace vers la fibre grâce à la platine motorisée.

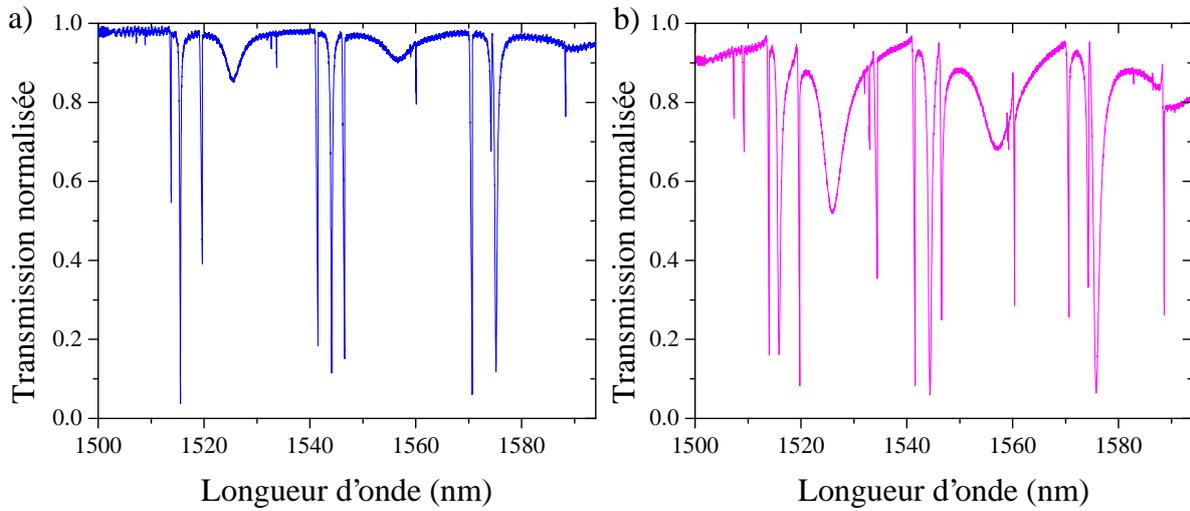


FIGURE 2.12: Spectres optiques d'un disque de rayon $R = 4.5 \mu\text{m}$ et d'épaisseur $t_d = 200 \text{ nm}$. Le graphe (a) est pris pour une faible distance fibre-disque juste avant qu'ils ne se collent l'un à l'autre. Le spectre (b) a été enregistré lorsqu'ils sont collés.

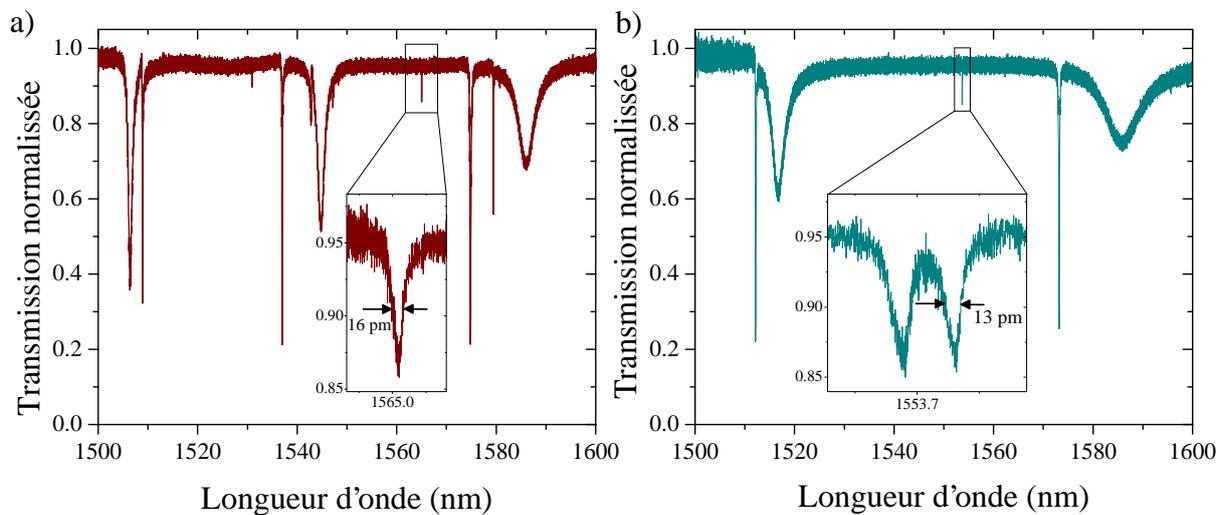


FIGURE 2.13: Spectres optiques de deux disques de taille respective $R = 3.3 \mu\text{m}$ en (a) et $R = 2.0 \mu\text{m}$ en (b).

La figure (2.13) montre, en complément de la figure (2.12), les spectres mesurés sur deux disques de rayons plus faible ($R = 3.3 \mu\text{m}$ en (a) et $R = 2 \mu\text{m}$ en (b)). Le nombre de modes de galerie diminue sur la plage 1500-1600nm avec la taille du disque. Ces spectres mettent en évidence de faibles largeurs à mi-hauteur : $\delta\lambda = 16 \text{ pm}$ pour un singulet sur la figure (a) et $\delta\lambda = 13 \text{ pm}$ pour un doublet sur la figure (b). Ces largeurs correspondent à des facteurs de

qualité optique supérieurs à 10^5 . Notons que ces largeurs sont observées sur des modes à faible contraste. Nous expliquerons ce phénomène par la suite.

2.4.2 Couplage évanescent disque-fibre

Une idée de départ peut être de penser que les différents modes de galerie possèdent grosso modo le même coefficient de couplage $\delta\lambda_e$ pour une distance donnée. Dans ce cas, les modes ayant les meilleurs facteurs de qualité (faible $\delta\lambda_i$) doivent être les plus contrastés en régime de sous-couplage du moins. Or ce n'est pas ce qui produit, comme l'attestent les figures 2.13(a) et (b). Les résonances les plus "fines" sont tendanciellemment moins contrastées. Il doit donc exister une grande différence dans les coefficients de couplage des différents modes. Nous avons analysé de plus près la dépendance des coefficients de couplage des différentes famille de modes.

Le coefficient de couplage $\delta\lambda_e$ s'écrit à partir de l'équation (1.28) :

$$\begin{aligned}\delta\lambda_e &= \frac{\lambda_0}{\omega_0} \kappa_e = \frac{\lambda_0}{\omega_0} \frac{k^2}{T_0} \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi m} \left| \frac{\omega}{4} \int_V (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dV \right|^2\end{aligned}\quad (2.3)$$

La figure (2.14) présente la simulation numérique du coefficient de couplage $\delta\lambda_e$ pour un disque de rayon $5 \mu\text{m}$. Ce disque supporte des familles de modes de galerie p variant de 1 à 9. En plus d'évaluer la dépendance du couplage avec la distance disque-fibre, nous regardons aussi sa dépendance avec le rayon de la fibre. En effet nous avons constaté expérimentalement que pour des fibres différentes, un même disque ne fournit pas exactement le même spectre optique. Les résonances des modes ont une fréquence fixe, mais leur contraste peut être très différent.

La figure (2.14) montre que les familles de petit p possèdent des coefficients de couplage plus faibles que ceux de grand p . Le maximum est $\delta\lambda_e = 10^{-12} \text{ m} = 1 \text{ pm}$ pour $p = 1$ alors qu'il est de plusieurs $10^{-10} \text{ m} = 100 \text{ pm}$ pour $p = 6, 7$ et 8 . Nous montrerons par la suite que les familles de petit p possèdent en général des pertes intrinsèques $\delta\lambda_i$ plus petites. Un mode $p = 1$ possédant $\delta\lambda_i = 15 \text{ pm}$ aura un contraste de 100% pour $\delta\lambda_e = 15 \text{ pm}$ (dans le modèle singulet). Cette simulation nous montre que cette situation expérimentale est impossible à obtenir. Au contraire un mode $p = 6$ possédant $\delta\lambda_i = 100 \text{ pm}$ pourra atteindre le couplage évanescent critique ($\delta\lambda_e = 100 \text{ pm}$) et même passer en sur-couplage. Ainsi nous expliquons pourquoi les modes possédant les meilleurs facteurs de qualité apparaissent avec des résonances peu contrastées dans notre expérience (fibre+disque), du moins pour la gamme de rayon de disque 3 à $6 \mu\text{m}$ considérée dans cette thèse. Par ailleurs, la figure (2.14) montre aussi des chutes de couplage pour certaines combinaisons spécifiques rayon-distance (zone fine bleues sur les cartes). Cet effet peut expliquer pourquoi certains modes semblent parfois disparaître des spectres de transmission, mais n'a pas été fouillé plus avant expérimentalement.

Évolution du couplage fibre-disque avec la distance

Pour un rayon de fibre donné, en évitant la zone fine de faible couplage mentionnée précédemment, le couplage $\delta\lambda_e$ évolue grossièrement comme une exponentielle avec la distance

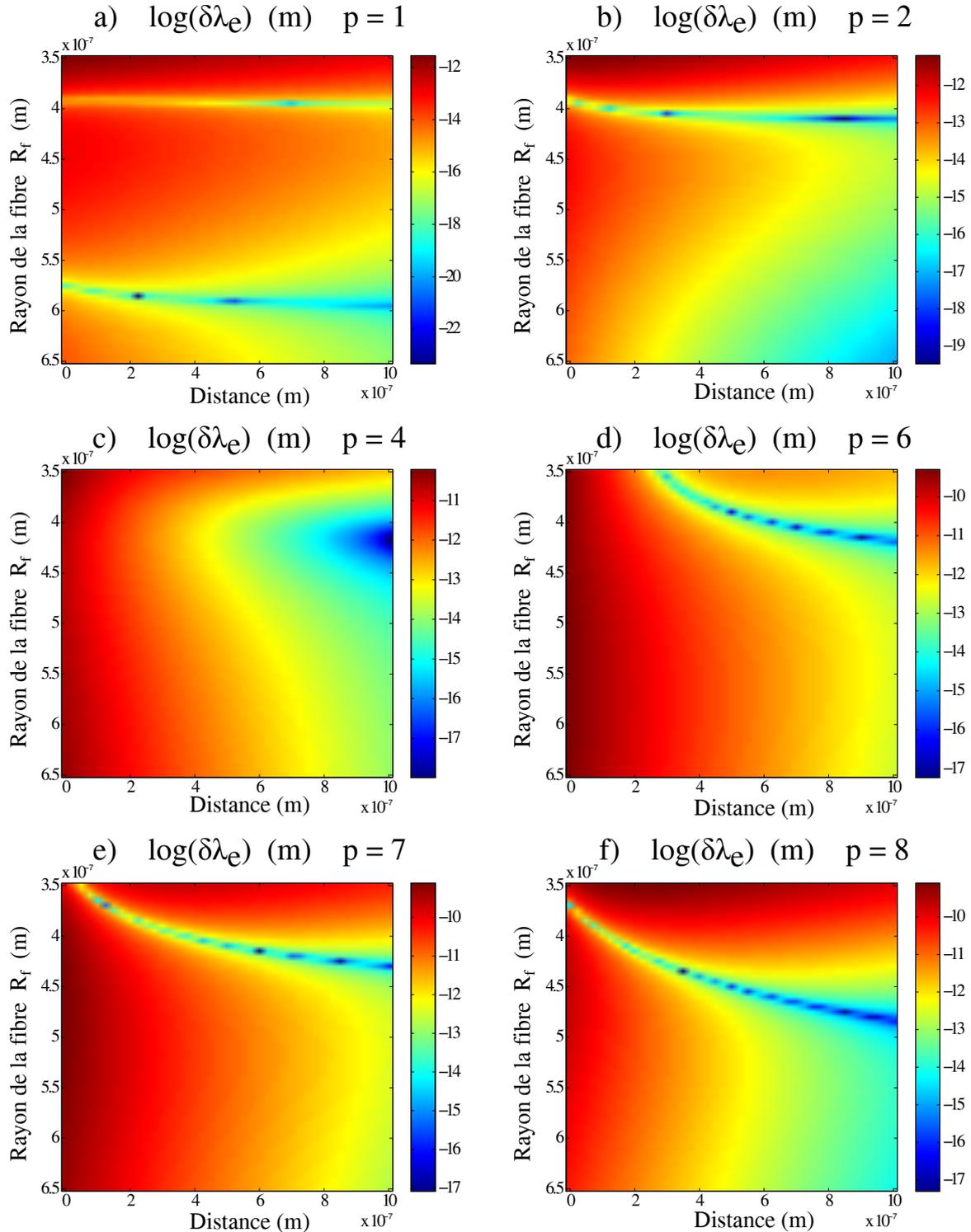


FIGURE 2.14: Simulation numérique du coefficient de couplage $\delta\lambda_e$ en fonction du rayon de la fibre optique R_f et de la distance fibre-disque (du bord extérieur du disque au bord extérieur de la fibre). Les simulations sont effectuées à l'aide de la formule (2.3) où le champ du mode de galerie \vec{E}_c est obtenu par la méthode des éléments finis et où le champ de la fibre \vec{E}_w est calculé analytiquement. Le disque possède un rayon de $5 \mu\text{m}$ et une épaisseur de 200 nm . $\delta\lambda_e$ est présenté en échelle logarithmique. Il est calculé pour chaque mode optique : (a) $p=1$ $m=46$, (b) $p=2$ $m=41$, (c) $p=4$ $m=34$, (d) $p=6$ $m=27$, (e) $p=7$ $m=24$, (f) $p=8$ $m=21$.

fibre/disque. La distance caractéristique de l'exponentielle x_0 est propre à chaque mode de galerie et à chaque rayon de la fibre.

$$\delta\lambda = \delta\lambda_e + \delta\lambda_i = A_0 e^{-\frac{x}{x_0}} + \delta\lambda_i \quad (2.4)$$

Le contraste est alors fourni par l'équation :

$$C = \frac{4A_0 e^{-\frac{x}{x_0}} \delta\lambda_i}{(A_0 e^{-\frac{x}{x_0}} + \delta\lambda_i)^2} \quad (2.5)$$

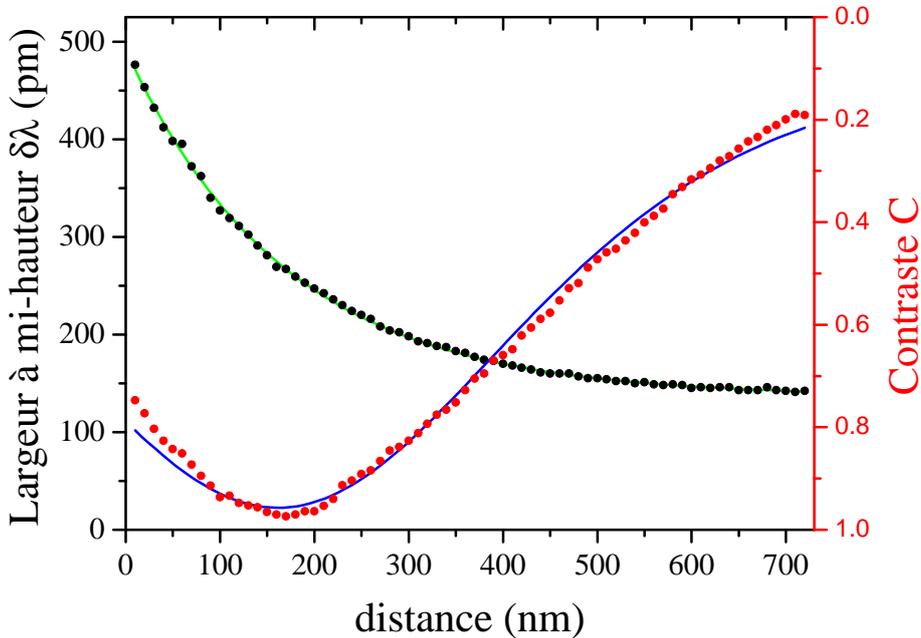


FIGURE 2.15: Évolution de la largeur à mi-hauteur $\delta\lambda$ (points noirs) et du contraste C (points rouges) en fonction de la distance fibre-disque. La courbe verte est un fit exponentiel (equation 2.4). La courbe bleue correspond à un ajustement de l'équation (2.2) en renormalisant à la puissance utile.

La figure (2.15) montre l'évolution expérimentale du contraste et de la largeur à mi-hauteur d'une résonance de mode de galerie en fonction de la distance entre la fibre et le disque. Une série de spectres a été accumulée en faisant varier la distance fibre-disque. Une résonance a été choisie et ajustée par une lorentzienne sur chaque spectre, fournissant pour chaque distance le contraste et la largeur à mi-hauteur.

L'ajustement de la largeur à mi-hauteur en fonction de la distance par une exponentielle est très bon. Il permet de déterminer $\delta\lambda_i$ (ici = 137 pm). Le second ajustement (courbe bleue) est un peu moins bon à cause d'une plus grande incertitude dans la mesure du contraste. En réalité, un mode singulet atteint une transmission de 0 uniquement si le mode guidé par la fibre possède une polarisation qui interfère parfaitement avec le mode de galerie. Expérimentalement, ce n'est pas parfaitement le cas et une partie du mode guidé ne se couple pas au mode de galerie. Il faut alors renormaliser le spectre sur un intervalle spectral réduit. De plus, la transmission,

normalisée à 1 hors résonance optique, diminue à l'approche fibre-disque à cause de pertes optiques supplémentaires¹. Ces deux effets rendent imparfaite la mesure du contraste dans les spectres optiques.

Malgré ces difficultés les mesures rendent bien compte de l'évolution du contraste et de la largeur à mi-hauteur. On vérifie par exemple, qu'au couplage critique (contraste du mode singulet minimal) la largeur à mi-hauteur est bien $\delta\lambda = 2\delta\lambda_i$ (~ 274 pm) et le contraste approche très près de 100%.

2.4.3 Identification des modes optiques

L'identification des modes optiques consiste à déterminer les nombres radiaux et azimutaux (p,m) associés à chaque résonance apparaissant dans le spectre optique. Elle repose sur les simulations numériques par éléments finis. Ces dernières diffèrent de la réalité de par la géométrie idéalisée cylindrique du disque, de par l'indice de réfraction, qui dépend notamment de la longueur d'onde. Ces deux paramètres créent une imprécision de simulation qui peut être importante dans certaines situations : plus un disque possède de modes, plus il sera difficile de réaliser l'identification sans ambiguïté.

Pour une famille de mode p , l'intervalle spectrale libre ("Free Spectral Range" en anglais) représente l'écart en longueur d'onde entre deux modes (p,m) et $(p,m+1)$. Il n'est pas constant dans une cavité circulaire, contrairement à une cavité Fabry Péro, et augmente légèrement avec m . Cependant, les modes d'une même famille p peuvent être identifiés grâce à leurs caractéristiques proches dans le spectre (contraste et largeur à mi-hauteur). En général, sur un intervalle restreint en longueur d'onde (1500-1600 nm), les résonances (p,m) , $(p,m+1)$, $(p,m+2)$... possèdent des contrastes et largeurs à mi-hauteur proches, nous permettant de les identifier comme une même famille. De plus, bien que les FSR soient croissants avec m et p , sur une gamme de longueur d'onde restreinte, les FSR d'une famille p sont relativement proches permettant à une famille p de générer une sorte de peigne régulier dans le spectre. La règle $\text{FSR}(p+1) > \text{FSR}(p) > \text{FSR}(p-1)$ est par ailleurs valable. Il est finalement possible d'identifier les modes d'une même famille et de classer les familles par p croissant.

La figure (2.16) est le résultat d'une simulation numérique à deux dimensions, dans le plan d'un disque. Les équations utilisées sont celles de l'indice effectif pour le mode TE ou TM (1.14). On s'intéresse aux modes TE. La simulation est de type différence finie dans le domaine fréquentiel ("Finite Difference Frequency Domain" \rightarrow FDFD) et repose sur un code développé par Alessio Andronico dans l'équipe. Pour chaque longueur d'onde on calcule la répartition de l'énergie dans le disque en régime permanent (figure 2.16(b),(c) et (d)). La transmission est enregistrée et permet de recréer le spectre de transmission (figure 2.16(a)).

Malgré ces simulations numériques complètes, l'identification est difficile. Il faut garder à l'esprit que le moindre écart de la géométrie du disque ou de l'indice de réfraction (qui possèdent des barres d'erreur expérimentales assez élevées) change rapidement le spectre de transmission. Par exemple pour un disque de 5 microns de rayon le mode TE ($p = 1, m = 46$) s'établit à la longueur d'onde $\lambda_0 = 1558.841$ nm pour une épaisseur de 200 nm. Regardons les erreurs dues à l'imprécision des mesures :

1. On commence alors à sortir du cadre de la théorie de perturbation

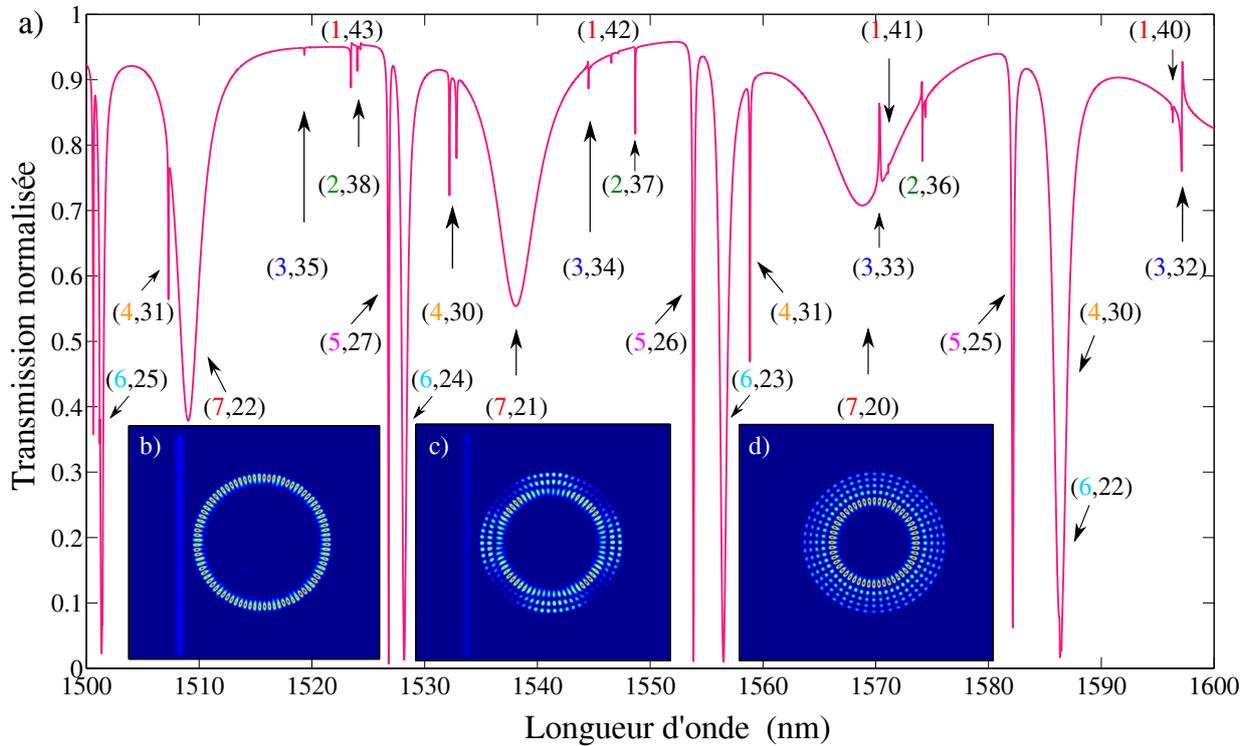


FIGURE 2.16: (a) Simulation numérique FDFD 2D du spectre optique de transmission normalisée. Le rayon du disque est de $4.5 \mu\text{m}$ et la distance fibre-disque de 500 nm . (b), (c) et (d) présente la répartition de l'énergie dans le disque pour le mode (1,42), (3,34) et (5,26).

- L'épaisseur du disque est donnée par l'épitaxie. La précision de l'épaisseur est donnée à $\pm 2\%$. Pour un écart de 2 nm dans l'épaisseur, le mode subit un décalage de $3,8 \text{ nm}$. Cela est valable si les différentes étapes de gravure n'ont pas modifié l'épaisseur.
- Le rayon du disque est mesuré au microscope optique. Nous évitons de mesurer le disque avec le MEB, certes plus précis, mais qui contamine l'échantillon par des dépôts carbonés. La précision est de l'ordre de la centaine de nanomètre. Pour un écart de 100 nm , le mode subit un décalage de $23,6 \text{ nm}$.
- l'indice de réfraction est tiré de la littérature $n = 3,3742$ [59] pour $\lambda = 1550 \text{ nm}$. L'écart statistique fournit par la littérature est de l'ordre de $0,01$. le mode subit un décalage de $4,5 \text{ nm}$ pour un tel écart. De plus il faut considérer l'évolution de l'indice entre 1500 et 1600 nm , qui n'est pas pris en compte dans la simulation des modes optiques montrée ci-dessus.

La réalité se complique encore si nous considérons qu'il existe une couche de GaAs oxydé à la surface du cristal qui a une épaisseur de quelques nanomètres et qui possède un indice de réfraction distinct. Finalement il apparaît que tous ces écarts à nos simulations idéalisées peuvent décaler les résonances optiques sur le spectre de quasiment un FSR. Chaque famille de mode subit un décalage qui lui est propre. Il est donc souvent difficile de faire se superposer un spectre simulé et un spectre mesuré.

L'identification est cependant possible parfois, où spectres simulés et mesurés se recouvrent avec un bon niveau de confiance. Souvent cela nécessite l'identification progressive des peignes

pour chaque famille p , en se laissant la liberté de décaler ces peignes de l'ordre d'un FSR. Par ailleurs il faut retenir que, expérimentalement parlant, l'identification n'est pas toujours primordiale, mais les paramètres optiques (largeur à mi-hauteur, contraste, puissance) eux le sont.

2.5 Spectroscopie mécanique

Nous avons passé en revue dans le chapitre 1 les effets optomécaniques induits par le pompage d'un mode optique du disque par un laser. Il nous faut désormais pouvoir mesurer ces effets. Dans notre cas, la lumière laser sortie du disque nous sert aussi d'instrument de mesure des signaux mécaniques. Nous voyons ici comment cette mesure optomécanique est réalisée avec une pompe laser faible servant uniquement de sonde du mouvement du disque.

2.5.1 Densité spectrale de bruit

L'analyseur de spectre (Rhodes&Schwarz FSL) affiche la densité spectrale de bruit électronique sur son écran. Cette densité est donnée en dBm.

$$x(\text{dBm}) = 10 \log \left(\frac{\mathcal{S}_V(\Omega) \times \text{RBW}}{R \times 10^{-3}} \right) \quad (2.6)$$

où x représente la donnée lue sur l'écran de l'analyseur de spectre. RBW est la bande passante du filtre en Hz ("Resolution BandWidth" en anglais), R la résistance d'entrée de 50Ω de l'analyseur et 10^{-3} représente une puissance de 1 mW pour la normalisation. Enfin $\mathcal{S}_V(\Omega)$ représente la densité spectrale de bruit de la tension aux bornes de l'analyseur de spectre en V^2/Hz . $\mathcal{S}_V(\Omega)$ est directement lié à la densité spectrale de bruit optique $\mathcal{S}_{P_{out}}(\Omega)$ (W^2/Hz) sortant de la fibre via le coefficient de transduction de notre photodétecteur (Newport 1617-AC) $A = 700 \text{ V/W}$ à notre longueur d'onde.

$$\mathcal{S}_V(\Omega) = A^2 \mathcal{S}_{P_{out}}(\Omega) \quad (2.7)$$

Voyons comment la densité spectrale de bruit de puissance optique du faisceau transmis est décrite à partir de nos équations. La puissance transmise s'écrit :

$$\mathcal{P}_{out} = \frac{\left(\frac{\kappa_i}{2} - \frac{\kappa_e}{2}\right)^2 + (\omega_L - \omega'_0)^2}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - \omega'_0)^2} \mathcal{P}_{in} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{P}_{out} = \left(1 - \frac{4 \frac{\kappa_i}{2} \frac{\kappa_e}{2}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - \omega'_0)^2} \right) \mathcal{P}_{in} \quad (2.9)$$

En réalité la résonance du laser ω'_0 évolue avec l'oscillation des modes mécaniques $\omega'_0 = \omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)} + \sum_m g_{0_{shift}}^{(m)} \delta u_m(t)$. On ne s'intéressera ici qu'à un seul mode mécanique, la somme peut alors se simplifier à un seul terme. Le décalage statique $-|\alpha|^2 g_0^{(tot)}$ dépend de ω_L et doit être recalculé à chaque pas de fréquence laser à l'aide du polynôme (1.96).

On pose $h(t)$ la modulation optomécanique que reçoit la lumière en passant par le disque :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{out}(t) &= h(t)\mathcal{P}_{in} \\
 &= (\langle h \rangle + \delta h(t)) \mathcal{P}_{in} \\
 &= \left(1 - \frac{\kappa_i \kappa_e}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)}))^2} + \delta h(t) \right) \mathcal{P}_{in} \\
 &= \left(1 - \frac{\kappa_i \kappa_e}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)}))^2} - \frac{2\kappa_i \kappa_e (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)})) g_{0_{shift}}^{(m)} u_m(t)}{\left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)}))^2\right)^2} \right) \mathcal{P}_{in}
 \end{aligned}$$

Cette équation est obtenue en faisant un développement limité de l'équation (2.9) en considérant $g_{0_{shift}}^{(m)} u_m(t)$ comme petit paramètre.

La fonction d'autocorrélation $R_{\mathcal{P}_{out}}(\tau)$ s'écrit :

$$R_{\mathcal{P}_{out}}(\tau) = \langle h \rangle^2 \mathcal{P}_{in}^2 + \langle \delta h(t + \tau) \delta h(t) \rangle \mathcal{P}_{in}^2 \quad (2.10)$$

La densité spectrale de bruit s'écrit comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{\mathcal{P}_{out}}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\mathcal{P}_{out}}(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau \\
 &= \langle h \rangle^2 \mathcal{P}_{in}^2 \delta(\Omega) + \langle \mathcal{P}_{in} \rangle^2 \mathcal{S}_h(\Omega)
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le premier terme est le signal DC à fréquence nulle et le second fait intervenir la contribution du mode mécanique à travers $\mathcal{S}_h(\Omega)$.

$$\mathcal{S}_h(\Omega) = \left(-\frac{2\kappa_i \kappa_e (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)})) g_{0_{shift}}^{(m)}}{\left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)}))^2\right)^2} \right)^2 \mathcal{S}_{u_m}(\Omega) \quad (2.12)$$

La densité spectrale du mode mécanique $\mathcal{S}_{u_m}(\Omega)$ est perturbée au premier ordre par l'augmentation de température dans le disque (ΔT et donc ω'_m dans le chapitre 1) puis au second ordre par les effets optomécaniques (ω''_m et γ'_m). En mode sonde optomécanique à faible puissance optique, seuls les effets du premiers ordres sont visibles :

$$\mathcal{S}_{u_m}(\Omega) = \frac{k_B(T + \Delta T) \omega'_m \gamma_m}{\hbar} \frac{1}{(\omega_m'^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \gamma_m)^2} \quad (2.13)$$

L'analyseur de spectre affiche autour de la fréquence mécanique :

$$x(\text{dBm}) = 10 \log \left(\left(A^2 \mathcal{P}_{in}^2 \left(\frac{2\kappa_i \kappa_e (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)})) g_{0_{shift}}^{(m)}}{\left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega_L - (\omega_0 - |\alpha|^2 g_0^{(tot)}))^2\right)^2} \right)^2 \mathcal{S}_{u_m}(\Omega) + \mathcal{S}_{noise}(\Omega) \right) \frac{\text{RBW}}{R \cdot 10^{-3}} \right) \quad (2.14)$$

où nous avons ajouté dans l'équation le terme $\mathcal{S}_{noise}(\Omega)$ qui représente la somme² des différentes composantes de bruit expérimental non-corrélées avec le signal mécanique.

2. Dans l'hypothèse, que nous croyons valide, où les bruits ne sont pas corrélés entre eux.

$\mathcal{S}_{noise}(\Omega)$ comprend :

- Le bruit du laser se répartissant entre bruit classique et bruit quantique.
- Le bruit du photodétecteur.
- Le bruit de l'analyseur de spectre.

Sur une faible bande spectrale (quelques MHz autour de la fréquence mécanique), La somme de ces bruits est considérée comme constante (bruit blanc). Pour être détecté correctement, il faut que le rapport signal sur bruit ("Signal to Noise Ratio" SNR) soit supérieur à quelques décibels (condition de visibilité du signal sur l'analyseur de spectre).

2.5.2 Mesure à faible puissance optique

La mesure à faible puissance optique nous permet d'obtenir les caractéristiques (fréquence et facteur de qualité) du mode mécanique non perturbé par la lumière. Expérimentalement, il s'agit de mettre juste assez de puissance optique dans le disque pour voir émerger le signal mécanique Brownien au dessus du niveau de bruit sur l'analyseur de spectre. Il est intéressant de regarder l'évolution de ce signal en fonction de la longueur d'onde du laser. J'ai développé un programme sur Labview permettant l'automatisation de ce type de mesure.

La figure (2.17) présente cette mesure automatisée. En descendant le flanc bleu de la résonance optique (i.e. en augmentant progressivement la longueur d'onde)(figure 2.17(a)), le signal mécanique augmente jusqu'à atteindre un maximum pour s'atténuer ensuite à l'approche de la résonance optique. La puissance transmise subit alors un saut d'intensité caractéristique du triangle thermo-optique (figure 1.14). La résonance saute vers les basses longueurs d'onde plaçant ainsi le laser du côté rouge de la résonance optique, mais trop éloigné de la résonance pour qu'un signal mécanique apparaisse.

Notons le léger décalage en fréquence du mode mécanique dû à l'échauffement du disque. Cet effet de décalage vers les basses fréquences a motivé l'intégration de la thermique dans les équations d'optomécanique du chapitre 1³. La figure (2.17(c)) montre le signal sous sa forme originelle fournit par l'analyseur de spectre. Ces courbes sont ajustées à des lorentziennes afin d'extraire les paramètres mécaniques (ici $\omega_m = 2\pi \cdot 315,1$ MHz et $\gamma_m = 2\pi \cdot 120$ kHz). Ce mode mécanique est identifié grâce aux simulations par éléments finis (Comsol) comme étant le mode de respiration d'ordre 1, montré sur la figure (1.11(f)). Ce mode possède le plus haut facteur de couplage optomécanique et apparaît de façon prédominante dans les spectres mécaniques. Dans toute cette thèse le couplage optomécanique est ensuite évalué pour ce mode.

La figure (2.18(a)) présente le spectre simulé à partir des équations (2.14) en utilisant les paramètres expérimentaux. La très grande ressemblance entre les spectres simulé et expérimental conforte notre approche théorique. La figure (2.18(b)) présente le même signal simulé dans le cas où le disque ne présente aucune absorption optique et donc aucun échauffement et aucun effet thermo-optique. Ce spectre montre bien que les deux flancs de la résonance optique (bleu et rouge) permettent de transduire le signal mécanique en signal optique. Notre système expérimental ne permet malheureusement pas de produire un tel spectre. A très basse puis-

3. Le décalage de la résonance mécanique, pour le mécanisme de pression de radiation sur le flanc optique bleu, se fait vers les hautes fréquences et non vers les basses.

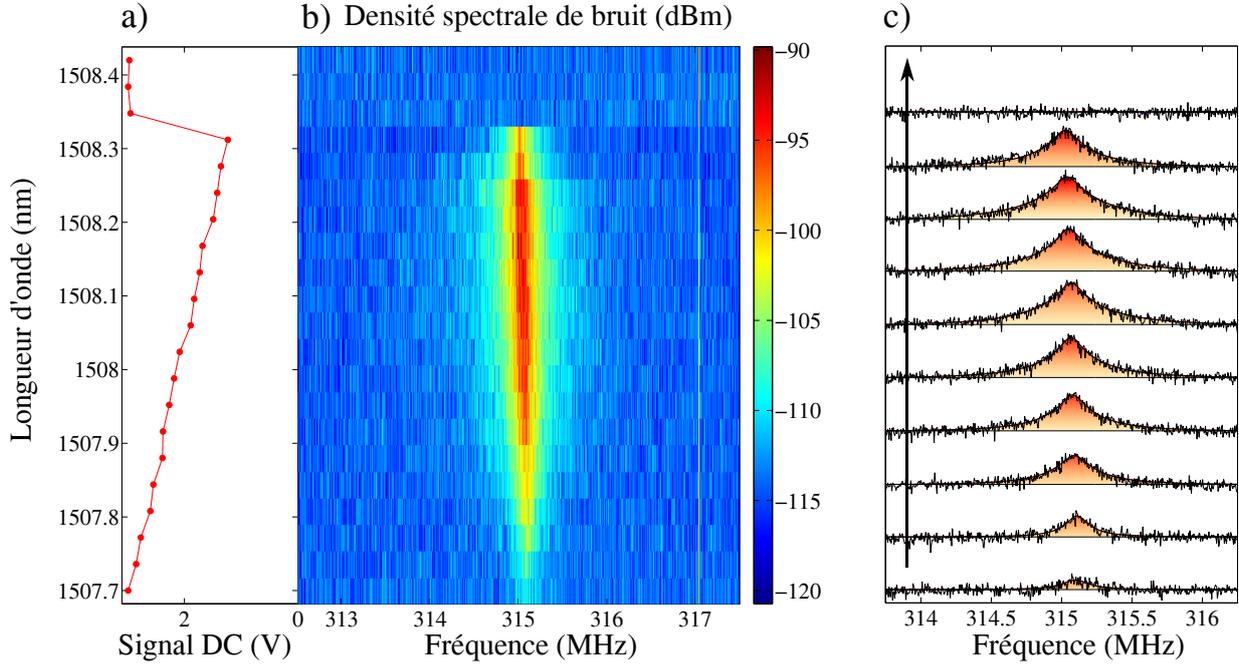


FIGURE 2.17: (a) Voltage DC du photodétecteur en fonction de la longueur d'onde du laser, représentant le spectre thermo-optique triangulaire standard. (b) Densité spectrale de bruit dde puissance optique mesurée, contenant le signal du mode mécanique. Le spectre est effectué autour de la fréquence du mode mécanique pour différentes longueurs d'onde sur le flanc bleu du mode optique. (c) Coupe de la figure (b) montrant le spectre fournit par l'analyseur de spectre. Les unités sont arbitraires et la longueur d'onde du laser de chaque coupe se lit sur le graphique (a). Les paramètres sont : $\lambda_0 = 1507,77$ nm, $Q_i = 2 \cdot 10^4$, $\mathcal{P}_{in} = 300$ μ W mesurée en sortie de fibre, $\omega_m = 2\pi \cdot 315,1$ MHz et $\gamma_m = 2\pi \cdot 120$ kHz.

sance, lorsque le mode optique n'est pas tordu en forme de triangle thermo-optique, le signal optomécanique n'est pas assez fort pour se démarquer du niveau de bruit.

Par ailleurs notons qu'un mode optique ayant un mauvais facteur de qualité est plus aisément accessible expérimentalement sur son flanc rouge (peu de photons circulant dans le disque, donc moins d'échauffement) mais transduit beaucoup moins bien le signal mécanique, qui ne dépassera donc généralement pas le niveau de bruit. Nous avons pendant un moment mis en place une détection balancée du signal afin de nous affranchir des bruits classiques techniques du laser. Il est apparu par la suite que le gain d'une telle technique, important pour une détection à faible puissance, n'était pas primordial au vu de la perte de puissance injectée dans le disque, qui était alors l'enjeu pour les effets optomécaniques dynamiques. Une méthode utilisée par de nombreuses équipes repose sur la détection homodyne du signal. Cette méthode est surtout utilisée pour des expériences de refroidissement optomécaniques nécessitant des seuils de détection très faibles. Nos travaux se portant sur l'auto-oscillation du disque (signal important), il n'a pas été utile d'implémenter cette technique.

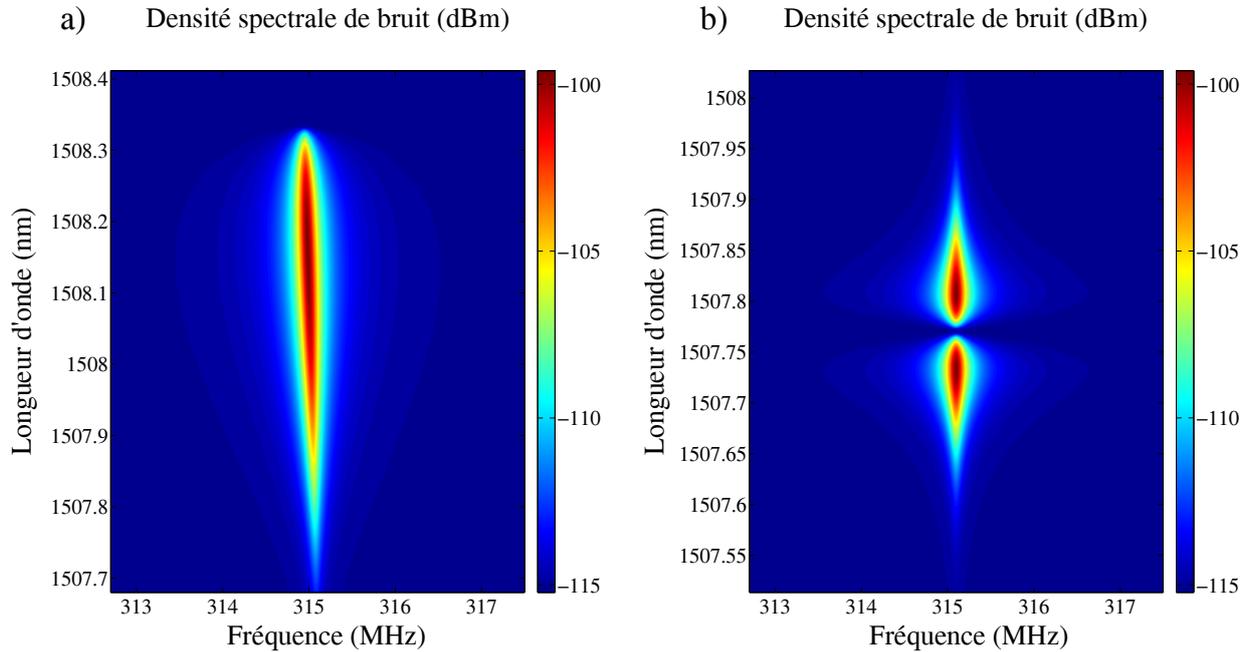


FIGURE 2.18: (a) Simulation de la densité spectrale de bruit du signal optique contenant le signal du mode mécanique. Le spectre simule la figure (2.17(a)). (b) Simulation utilisant les mêmes paramètres que (a) sans effet thermique : $g_0^{tot} = 0$. Le flanc rouge de la résonance optique est alors accessible, permettant la détection optomécanique sur les deux flancs.

2.5.3 Conclusion

Notre montage expérimental d'optomécanique à fibre effilée permet ainsi de mesurer optiquement les propriétés des modes mécaniques. Il est parfaitement adapté à la mesure des effets optomécaniques dynamiques qui modifient ces propriétés par voie lumineuse. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les effets optomécaniques sont significativement plus importants lorsque l'on augmente les facteurs de qualité optique et mécanique. Les deux prochains chapitres sont consacrés à l'étude des limitations de ces derniers.

Origine des pertes optiques dans les disques GaAs

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous décrivons les différents phénomènes induisant une limitation des facteurs de qualité optique. Au cours de ma thèse une grande attention a été portée à ces facteurs de pertes et plusieurs méthodes ont été implémentées pour les réduire. Les pertes optiques dans un résonateur optique en disque se classent en deux grandes catégories :

1. Les pertes radiatives
 - dues à la courbure du disque : Q_{courb}
 - par diffusion sur les rugosités surfaciques : Q_{rug}
2. Les pertes par absorption
 - linéaire : Q_{abs}
 - non linéaire via l'absorption à deux photons ("Two Photon Absorption", TPA, en anglais) : Q_{TPA}

Toute ces quantités sont regroupées en une seule valeur : le facteur de qualité optique de la cavité Q_{opt} qui correspond ici au facteur de qualité intrinsèque (non chargé).

$$\frac{1}{Q_{opt}} = \frac{1}{Q_{courb}} + \frac{1}{Q_{rug}} + \frac{1}{Q_{abs}} + \frac{1}{Q_{TPA}} \quad (3.1)$$

Une évaluation de chacun de ces facteurs de qualité permet d'estimer les pertes optiques totales de notre disque. Nous allons donc passer en revue et quantifier les différents mécanismes de pertes. Une fois le mécanisme dominant identifié, nous verrons quels moyens mettre en œuvre pour augmenter le facteur de qualité optique.

3.2 Les pertes par courbure

Les disques en GaAs, même idéalement circulaires, supportent des modes optiques qui possèdent des pertes radiatives intrinsèques. Elles viennent de la construction du mode qui consiste

en une succession de réflexions totales internes continues sur la bordure extérieure du disque. Le champ à l'extérieur du disque possède une partie évanescente ainsi qu'une partie radiative qui se propage vers l'extérieur. Les pertes par radiation de courbure varient avec le rayon du disque. Ainsi un petit disque subira plus de pertes par courbure qu'un grand. Ces pertes peuvent être simulées grâce aux simulations par éléments finis. La condition de "couche parfaitement absorbante" sur les bords du domaine d'étude permet de calculer la partie du champ radiatif "absorbé à l'infini" (voir figure 3.1). Les pertes se manifestent alors par la partie imaginaire de la fréquence complexe $\underline{\nu}$ associée au mode propre. Le facteur de qualité intrinsèque Q_{courb} (celui qu'aucun traitement technologique ultérieur ne peut améliorer) peut donc être calculé grâce à la formule suivante :

$$Q_{courb} = \frac{\Re(\underline{\nu})}{2\Im(\underline{\nu})} \quad (3.2)$$

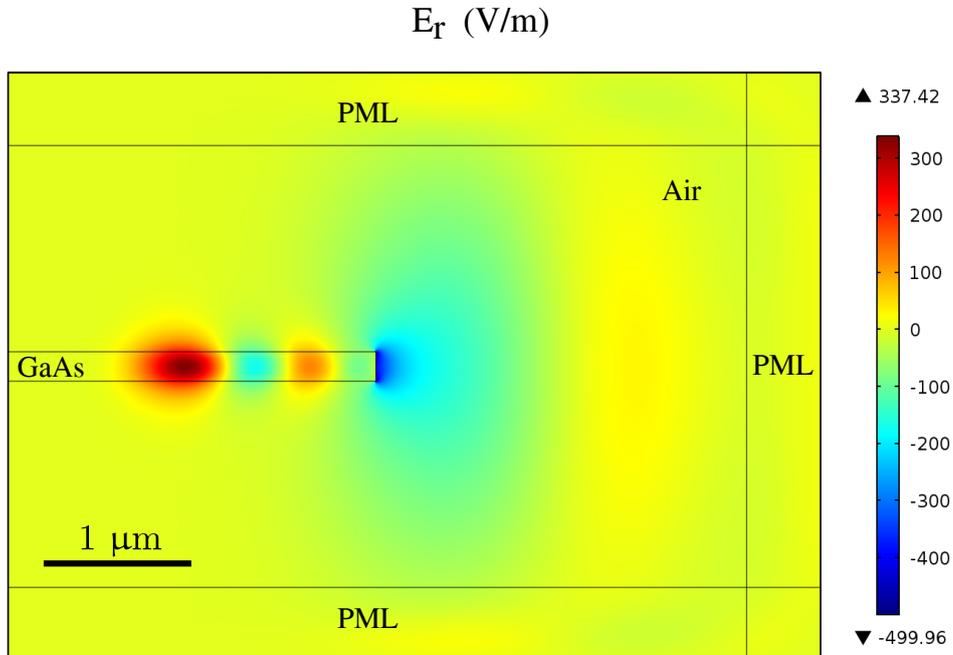


FIGURE 3.1: Simulation FEM 2D axisymétrique du champ E_r d'un mode de galerie (Comsol). Le mode représenté est TE, $p=4$, $m=11$. Le rayon du disque est de $2.5 \mu\text{m}$ et son épaisseur de 200 nm .

Pour certains modes, la partie imaginaire est tellement petite que le logiciel d'élément finis Comsol considère que la fréquence est purement réelle. Cela fixe une limite maximum au facteur de qualité Q_{courb} au delà de laquelle les pertes par courbure sont considérées négligeables. Par exemple, le mode TE $m = 40$, $p = 1$ d'un disque de rayon $R = 5 \mu\text{m}$ possède un facteur de qualité optique $Q_{courb} = 10^9$. Notons que les modes TM possèdent dans nos simulations des pertes par courbure plus importantes que leurs équivalents TE (pour un même nombre radial p). Ceci n'est vrai que sur des disques de faible épaisseur (ici 200 nm).

La figure (3.2) montre le facteur de qualité Q_{courb} des modes optiques de deux disques de rayon $2.5 \mu\text{m}$ et $5 \mu\text{m}$ et d'épaisseur 200 nm . Les familles de mode à bas nombre radial p subissent moins de pertes par courbure. Plus le mode possède un faible nombre radial p ,

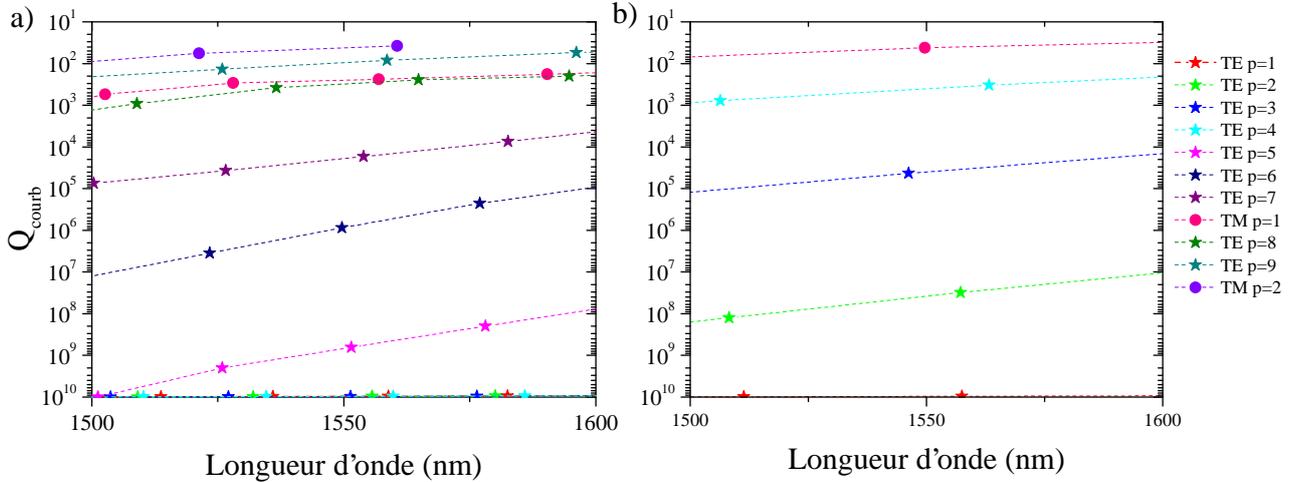


FIGURE 3.2: Facteur de qualité associés aux pertes par courbure sur un disque de 5 μm en (a) et de 2.5 μm en (b) et une épaisseur de 200 nm chacun. En (a), les facteurs de qualité Q_{courb} des modes TE $p=1, 2, 3$ et 4 ne peuvent être évalués, ils sont donc placés sur une limite haute correspondant à la limite de résolution du logiciel $Q_{courb} = 10^{10}$. En (b) seul le mode TE $p=1$ n'est pas évalué.

plus il est confiné vers la bordure extérieure et plus son rayon effectif est proche du rayon du disque. Dans une vision simpliste d'optique géométrique, un photon subissant une réflexion sur la bordure du disque est d'autant plus réfracté que son angle d'incidence (angle entre la direction de propagation du photon et le bord du disque) est grand. Les modes de galerie ayant un faible rayon effectif font un angle plus grand avec le bord et sont donc plus réfractés. Les photons réfractés fuient vers l'extérieur du disque et sont perdus. Cette vision simpliste permet d'expliquer les niveaux de pertes des modes ayant un nombre p élevé. D'autres part, la figure (3.2) montre que les pertes par courbure s'étalent sur de nombreux ordres de grandeur en fonction des familles p .

3.3 Les pertes par diffusion surfacique

La diffusion des photons dans une cavité optique intervient au niveau des réflexions sur les miroirs ou plus généralement aux interfaces de l'élément guidant la lumière. Dans le cas de notre disque c'est toute l'interface air-GaAs qui joue le rôle de surface guidante (ou d'élément réfléchissant). On distingue deux cas de réflexions : la réflexion spéculaire qui intervient sur des interfaces lisses et planes, et la réflexion diffuse intervenant sur des interfaces irrégulières (figure 3.3).

Les modes de galerie considérés précédemment sont construits sur la base d'une réflexion totale interne spéculaire, avec une interface Air-GaAs parfaitement lisse. Que se passe-t-il lorsque l'interface se dégrade ? Une partie des photons est diffusée vers d'autres modes propres du système, stationnaires ou propagatifs. Dans nos disques la probabilité que deux modes résonnent à la même fréquence est faible. Seul le mode contra-propageant "counterclockwise" résonne à la même fréquence que le mode "clockwise", autorisant parfois un couplage efficace des deux.

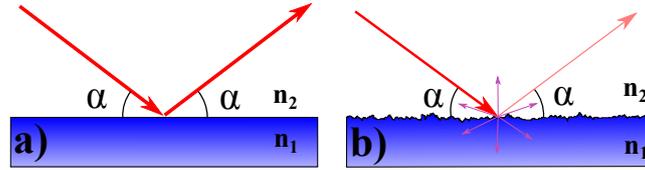


FIGURE 3.3: (a) Réflexion totale spéculaire (avec $n_1 > n_2$). (b) Réflexion diffuse.

Un couplage fort donne lieu à l'apparition d'un doublet dans les spectres. Cette situation peut être comprise comme une redéfinition des modes propres du système. Les modes de galerie, qui forment une base orthogonale lorsque le disque est parfait, sont alors altérés de manière non perturbative par l'irrégularité de surface. Cependant ils restent des combinaisons linéaires des modes de galerie de départ (cf chapitre 1), ce qui permet de comprendre leurs pertes par diffusion en utilisant les modes de galerie propageants et contra-propageants comme base de calcul. Pour ce qui est des photons diffusés qui ne se couplent pas avec des modes de galerie, ils rayonnent vers l'extérieur du disque et sont définitivement perdus.

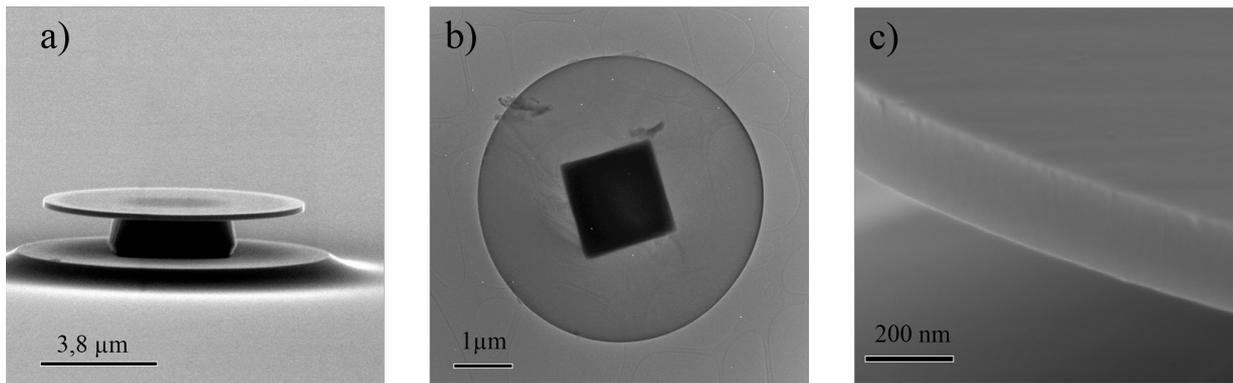


FIGURE 3.4: (a) Photo MEB d'un disque GaAs typique. (b) Cliché TEM d'un disque entier déposé sur une grille. (c) Cliché MEB à fort grossissement sur la bordure d'un disque.

Notre GaAs épitaxié possède peu d'impuretés en volume. Sa densité de dopant résiduel est extrêmement faible ($\sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$). Les pertes dues aux diffusions des photons sur des impuretés dans le volume ne sont donc pas considérées dans ce travail.

Les disques sont réalisés de manière à atteindre la forme d'un cylindre. Nos simulations électromagnétiques reposent sur cette symétrie azimutale. Les figures (3.4 (a) (b) et (c)) montrent la qualité de la géométrie obtenue. Bien que s'en approchant, la géométrie de nos "disques" n'est en réalité pas parfaitement cylindrique, avec un écart au cylindre de l'ordre du %. Cette déformation de la surface cylindrique parfaite entraîne une réorganisation du champ électromagnétique des modes de galerie. Une déformation respectant toujours la symétrie azimutale possède une solution encore implémentable sur Comsol. Lorsqu'elle s'en éloigne, la simulation axisymétrique devient impossible. La nouvelle densité spatiale du champ n'est plus calculable exactement. Cependant, pour de faibles déformations, des solutions proches des modes à symétrie de rotation existent encore et l'on peut traiter les mécanismes de diffusion surfacique en perturbation.

Toute déformation de la géométrie cylindrique n'entraîne pas forcément une augmentation des pertes du mode en question. Le champ électromagnétique a tendance à préférer les surfaces lisses. On imagine que les géométries présentant des coins, comme le cylindre, présentent plus de pertes radiatives que les géométries toroïdales. Par ailleurs, les cylindres elliptiques supportent aussi des modes de galerie, mais la perte de la symétrie azimutale entraîne une légère diminution du facteur de qualité optique par rapport au disque parfait [67, 68].

3.3.1 Expériences TEM sur les disques GaAs

Des clichés de nos échantillons pris à l'aide d'un microscope électronique en transmission (TEM) permettent l'analyse quantitative de l'écart d'un disque à la géométrie cylindrique parfaite. Cette analyse reste approchée cependant car l'information à trois dimensions est projetée sur les deux dimensions du plan du disque, orthogonal à la direction [001] de la maille GaAs (direction d'épitaxie).

La microscopie électronique

La microscopie électronique en transmission (TEM) est une technique de microscopie utilisant un faisceau d'électrons accélérés traversant un échantillon mince. L'interaction entre les électrons et la matière modifie le faisceau initial selon les règles de diffusion cohérente. Le faisceau d'électrons transmis passe alors par une série de lentilles magnétiques pour former une image sur un écran fluorescent. Une caméra CCD placée derrière l'écran permet ensuite l'obtention d'une image en niveaux de gris sur un réseau de pixels. Cette technique permet d'obtenir une résolution spatiale sub-nanométrique car liée à la limite de diffraction des électrons, bien plus faible que celles des photons. Le laboratoire MPQ, grâce aux récents développements expérimentaux de l'équipe MeAns, possède un TEM Haute Résolution (Jeol ARM 200 F Cold FEG voir photo ci-contre) de dernière génération, corrigé des aberrations sphériques, permettant une résolution approchant les 80pm. Cet appareil a servi à la prise des clichés présentés dans cette thèse, avec la participation active de Guillaume Wang de l'équipe MeAns.



Le microscope électronique à balayage (MEB) permet lui aussi de faire de l'imagerie à partir d'électrons accélérés. Il utilise les électrons rétro-diffusés par les surfaces. Il permet d'observer facilement des échantillons de taille nanométrique sous différents angles. Le cliché MEB de la figure (3.4)(c) nous permet par exemple d'apprécier la qualité de la surface en bordure d'un disque gravé chimiquement. La surface semble assez lisse même si elle laisse deviner quelques imperfections sur ce disque particulier. La plus faible résolution de l'appareil ainsi que son mode de fonctionnement en balayage ne permettent par contre pas une investigation aussi fine que le TEM.

La microscopie TEM ne fonctionne que sur des objets de faible épaisseur. L'optimal se situe autour de 50 nm pour un contraste maximal sur du GaAs. Nous avons donc fabriqué des disques d'épaisseur 50 nm. La technique de fabrication reste la même (figure 3.5(a)). Il faut cependant

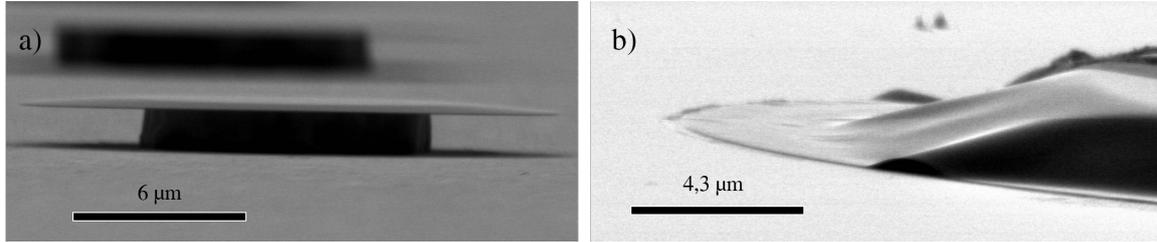


FIGURE 3.5: (a) disque de 50 nm d'épaisseur après sous gravure . (b) disque drapé autour du piédestal.

se contenter de disques à faible rayon ($< 5 \mu\text{m}$). Au delà, les forces de tension de surface exercées par la solution de sous gravure font ployer le disque qui prend une forme drapé autour du piédestal (figure 3.5(b)). Les premières images TEM présentaient de très bons contrastes dans la résolution des colonnes atomiques. Dans un second temps, par souci de décrire les déformations des disques utilisés dans notre expérience, nous avons réitéré l'expérience avec des disques d'épaisseur 200 nm. Ces derniers présentent l'avantage de se déposer sur la grille d'observation TEM sans trop se casser, contrairement aux disques de 50 nm dont nous n'avons pu analyser que des fragments.

Dépôt des disques sur grille TEM

Pour réaliser ces expériences TEM, des disques sont fabriqués en grand nombre sur un masque de lithographie carré comprenant $25 \times 25 = 625$ disques. L'échantillon est gravé chimiquement par la même méthode que celle décrite dans le chapitre 2. Il est ensuite retourné "comme une crêpe" sur la grille TEM. Un mouvement de va et vient horizontal ("frottement") est appliqué afin que les disques percutent le haut de la grille TEM et brisent leur piédestaux pour venir se déposer aléatoirement sur le film de carbone ou la grille en cuivre (figure 3.6). Cette méthode est simple et fonctionne, mais est peu efficace à deux points de vue : d'abord sur 625 disques, seul quelques uns se retrouvent sur la grille ($\simeq 4$) ; ensuite souvent le disque se casse lorsqu'il est arraché de son piédestal par la grille (figure 3.7(b)). Or pour notre étude nous verrons qu'il est préférable d'avoir le contour entier d'un disque. Dans certains cas, la bordure présente aussi quelques accrocs à l'endroit où le disque est rentré en contact avec la grille.

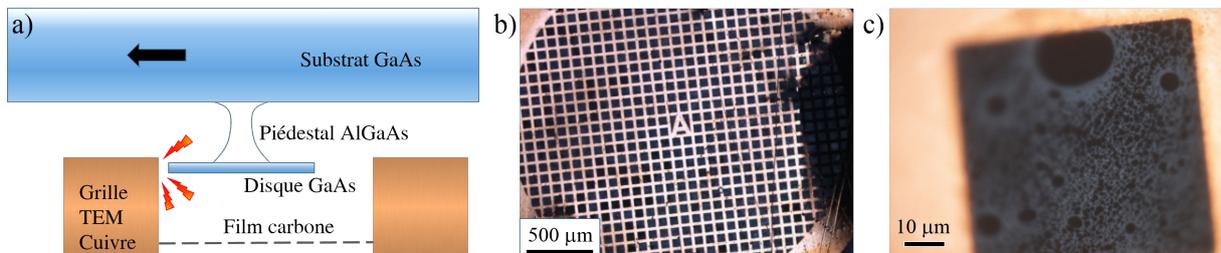


FIGURE 3.6: (a) Schéma du dépôt des disques sur une grille TEM. (b) Photo d'une grille TEM. La grille principale en cuivre est circulaire. Le tamis carré de grille est en cuivre. (c) Le film carbone repose dans les trous de la grille tamisée cuivrée.

D'autres expériences ont été tentées pour déposer les disques sur la grille de manière plus douce, mais sans succès. Nous citons l'essai d'utilisation d'ultrasons censés casser les piédestaux des disques afin que ces derniers tombent sur la grille. Ou encore l'idée de continuer la sous-gravure jusqu'à la disparition totale de l'AlGaAs en maintenant l'échantillon à l'envers. La plupart des disques se retrouvent alors collés au substrat, ce qui laisse présumer que les forces de tension de surface exercées par le milieu aqueux prennent largement le pas sur la gravité. Une fois collés au substrat, les forces de Van der Waals prennent le relais et les disques sont irrécupérables.

Prise des clichés TEM

La grille TEM est introduite dans le microscope électronique en transmission. L'orientation de l'échantillon selon la direction d'épitaxie est assurée par l'analyse de la diffraction des électrons traversant l'échantillon (voir figure 3.7(a)).

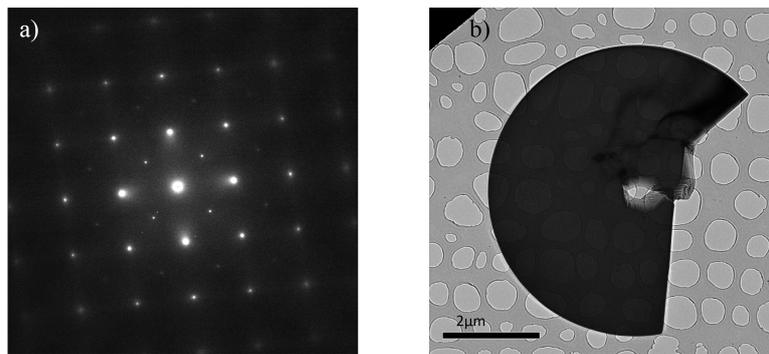


FIGURE 3.7: (a) Cliché de diffraction des électrons à travers le GaAs. (b) Cliché d'un disque typique déposé sur le film carbone

Des clichés à différentes échelles sont ensuite effectués, les plus bas grossissement étant ceux où le disque apparaît en entier, les plus forts correspondant à la résolution des colonnes atomiques. Ces photos TEM ont été réalisées au laboratoire MPQ par Guillaume Wang, spécialiste de l'appareil.

Sur la série de zooms successifs de la figure (3.8), on réalise la complexité d'une surface. L'apparence de la bordure, d'abord lisse à grande échelle, perd en régularité à petite échelle au point qu'il devient difficile de distinguer l'interface entre le matériau GaAs et le vide. Les photos à petite échelle (fort grossissement) montrent en effet la présence d'une couche amorphe entre l'arséniure de gallium cristallin et le vide. Le GaAs cristallin se reconnaît à ses colonnes atomiques ordonnées.

Une analyse de spectroscopie des pertes d'énergie (EELS) a été menée sur la couche amorphe, qui révèle bien la présence d'arsenic (As) et de gallium (Ga). L'absence d'oxygène dans cette couche, vérifiée avec soin par EELS, fut une surprise car une couche d'oxyde de gallium ou d'oxyde d'arsenic est imaginée se former à la surface du GaAs par oxydation dans l'air. Notre interprétation à ce stade est que la fabrication des disques au HF laisse une couche de reconstruction qui est au premier ordre du GaAs amorphe.

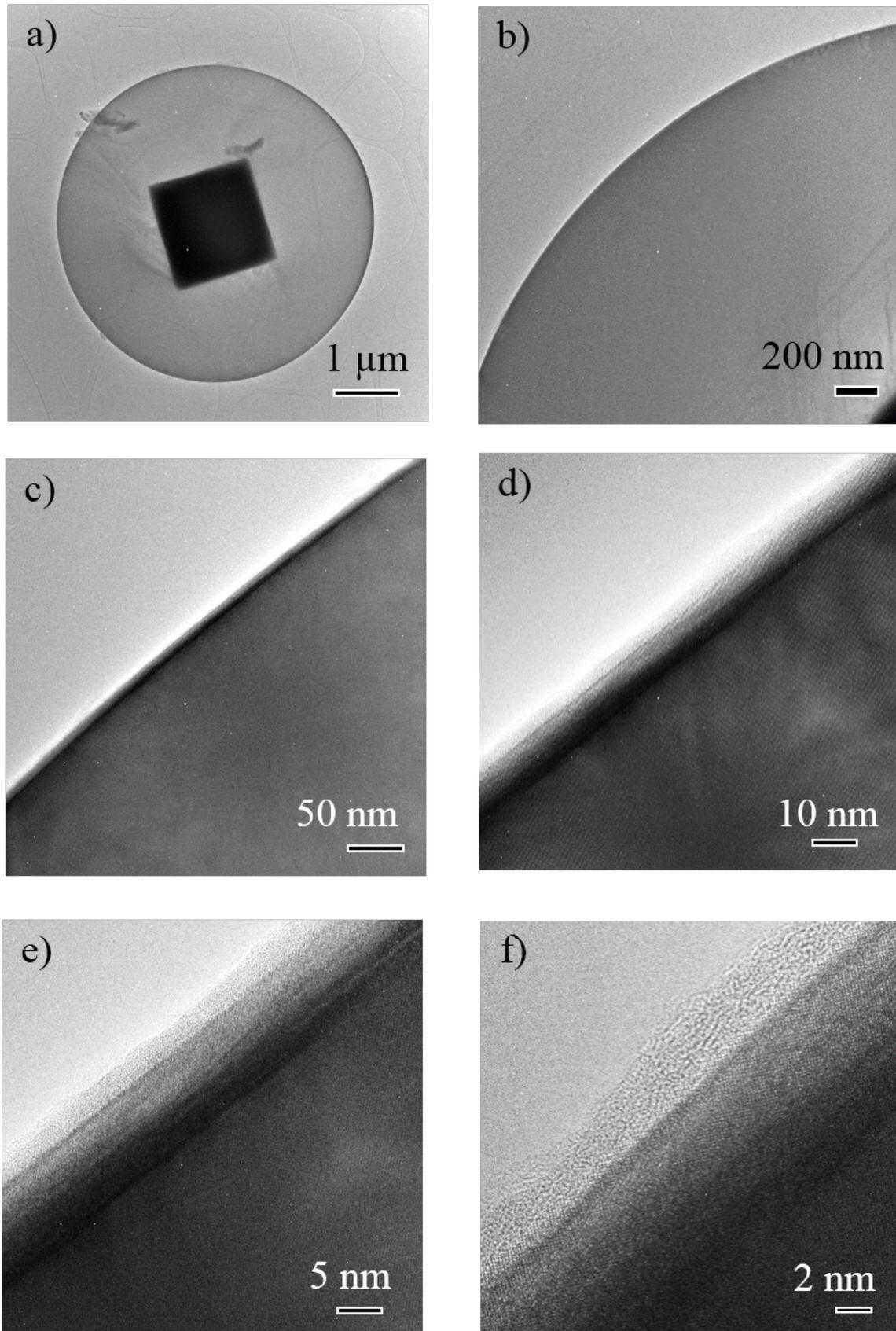


FIGURE 3.8: Zooms successifs sur la bordure d'un disque. (a) Grandissement $\times 3000$. (b) Grandissement $\times 10\,000$. (c) Grandissement $\times 50\,000$. (d) Grandissement $\times 200\,000$. (e) Grandissement $\times 400\,000$. (f) Grandissement $\times 800\,000$.

3.3.2 Analyse de la géométrie réelle

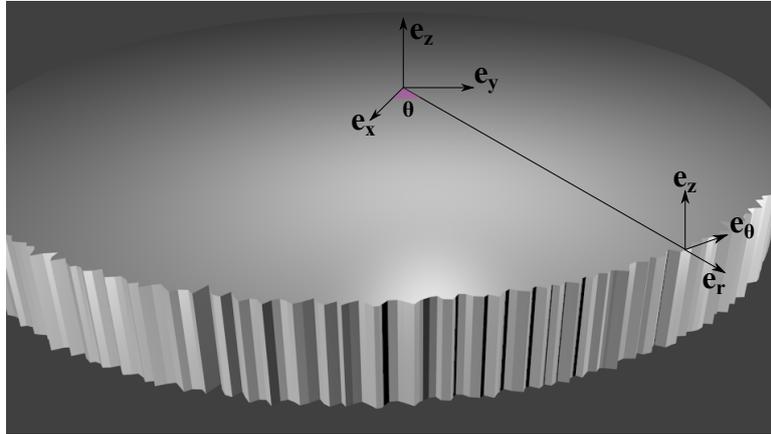


FIGURE 3.9: Image du disque dont la bordure rugueuse est invariante par translation dans la direction \vec{e}_z

Du fait de l'excellente qualité de l'épitaxie du GaAs, les déformations à la forme cylindrique parfaite ne se situent que sur la surface courbe du disque (que nous appelons "bordure" dans cette thèse). Cette surface se réduit à une courbe (un contour) lorsqu'elle est projetée sur un cliché plan TEM. Ceci nous invite à poser l'hypothèse que les déformations de la surface sont invariantes par translation selon l'axe d'épitaxie (figure 3.9). Le contour du disque est extrait sur chacune des photos prises avec le TEM (figure 3.10).

Nos clichés possédant un bruit expérimental, ils ne permettent pas la binarisation directe de l'image (situation représentée en figure 3.10(a)). Le contour est donc extrait grâce à l'algorithme "edge" de Matlab. Il utilise la méthode Canny¹. Un ajustement fin des paramètres est nécessaire pour chaque cas afin que l'algorithme renvoie un contour continu de l'interface. Le résultat est un contour continu à deux dimensions représentant bien l'interface entre les deux milieux (figure 3.10(b)).

Ce contour est ensuite ajusté ("fit" en anglais) à un cercle dont les deux paramètres d'ajustement sont son rayon et son centre. Le fit est assuré par un algorithme utilisant la méthode des moindres carrés (figure 3.10(c)). Le cercle parfait étant défini par un centre et un rayon, nous pouvons alors mesurer la distance, pour chaque angle, entre le cercle parfait et le contour extrait des images. Cette distance est appelée écart au cercle parfait et sera nommé $\delta r(\theta)$ dans ce manuscrit (figure 3.10(d)). Les données ainsi ramenées sur une seule dimension sont ensuite interpolées sur une échelle linéaire en θ et réajustées afin que la moyenne de la courbe soit nulle.

L'exercice d'extraction de contour devient hasardeux sur les petites échelles d'images, lorsque la couche amorphe se distingue du cristal. Il est difficile d'extraire le contour de l'amorphe du fait de sa structure non régulière. Notre approche de la déformation du contour

1. La méthode Canny trouve les contours en cherchant les maxima locaux du gradient de l'intensité. Le gradient est calculé en utilisant la dérivée d'un filtre gaussien. La méthode utilise deux seuils, pour détecter les contours forts et faibles, et n'incluent les contours faibles dans le résultat que s'ils sont connectés à des contours forts. Cette méthode présente donc moins de risques que d'autres d'être trompée par du bruit.

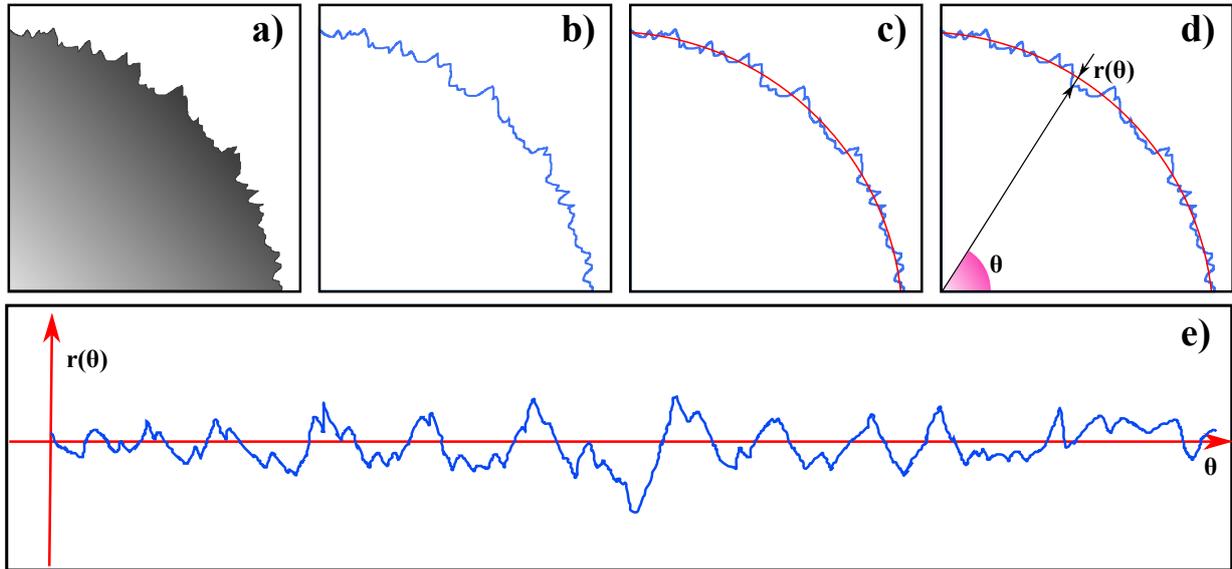


FIGURE 3.10: Représentation de l'extraction du profil de la bordure du disque. Les échelles ne sont pas respectées. (a) représentation du cliché TEM. (b) Extraction du profil grâce à un algorithme de détection de contour. (c) Ajustement du contour extrait par un cercle parfait. (d) Mesure de l'écart au cercle parfait dans un repère polaire, la distance entre le contour et le cercle est évalué en chaque angle (en nanomètre). (e) Tracé de l'écart au cercle $r(\theta)$ dans un repère 1D curviligne.

des disques ne prend pas en compte cette couche amorphe, négligée du fait de sa faible épaisseur. Son indice optique (réel et imaginaire) est par ailleurs inconnu. Cette couche ne sera donc pas traitée isolément pour la diffusion surfacique. Son existence invite par contre à se questionner sur les échelles pertinentes pour l'extraction de la déformation du disque.

3.3.3 L'analyse multi-échelles

La déformation du cylindre, exprimée par le contour du disque, se décompose en deux parties : la partie ondulatoire que nous appelons ondulation ("waviness" en anglais) et la partie rugueuse que nous appelons rugosité ("roughness"). L'ondulation correspond aux variations lentes et continues de la surface sur de grandes échelles, avec une notion d'ordre sous-jacente. La rugosité décrit à l'inverse les variations rapides et désordonnées de la surface sur de plus petites échelles. La limite entre ondulation et rugosité est relativement floue et dépend notamment de l'échelle à laquelle l'analyse est conduite (cf. l'ouvrage [69]). Il n'y a pas de façon unique de les séparer.

Les origines physiques de l'ondulation et de la rugosité observés sur la bordure du disque proviennent probablement de la gravure chimique. La gravure par la solution BCK est idéalement isotrope dans une solution immobile. Elle perd cette propriété lorsque la solution subit une agitation. L'échantillon est maintenu par une pince tenue par la main de l'expérimentateur lors de la gravure. Bien malgré lui, il ne peut pas rester parfaitement immobile. L'observation d'anisotropie révélée par agitation périodique de l'échantillon dans la solution de gravure nous amène à penser que ce phénomène est majoritairement responsable du caractère ondulatoire de

la déformation des disques. La rugosité dépendrait pour sa part de l'interaction chimique de la solution de gravure avec le cristal.

Le contour issu d'un cliché TEM peut être séparé en trois éléments : l'interface désirée (le patron), l'ondulation et la rugosité. De par sa formidable résolution, le microscope électronique en transmission peut produire des images à presque toutes les échelles. Chaque échelle d'image est caractérisée par la taille du pixel de l'image et la taille totale de l'image. Quelle est alors l'échelle pertinente à analyser pour la question de la diffusion surfacique ? Quelles informations peuvent être extraites de chacune d'entre elles ? Est on capable pour chaque échelle de différencier de manière unique patron, ondulation et rugosité ? Cette dernière question est épineuse. Sur une échelle d'image, on peut définir l'ondulation comme une partie du contour que l'on peut ajuster par une somme finie de fonctions trigonométriques simples (cosinus et sinus) et considérer que le résidu du contour est la partie rugueuse. Cela pose la question du "seuil de résidu", qui contient un arbitraire, mais que l'on peut définir. Par contre, les fonctions trigonométriques utilisées sur une image d'une zone de la bordure du disque sont locales, et ne peuvent pas facilement s'exporter à une autre zone sans problème de raccord spatial. Pour cette raison, l'ondulation du contour d'un disque ne peut être analysée proprement que sur une image montrant l'ensemble du contour (tour complet 2π ou presque).

Deux solutions sont possibles pour représenter le disque entier :

- une taille de pixel assez grande (faible résolution).
- un assemblage d'images collées les unes aux autres de manière à représenter la bordure complète du disque.

Cependant l'assemblage d'images pour reconstruire un contour circulaire complet est complexe de par le bruit expérimental de nos images. Par ailleurs, nous verrons que la résolution pixellique n'a pas besoin d'être maximale pour décrire la rugosité, si bien qu'une image à grande échelle peut bien décrire l'ondulation et la rugosité à la fois.

La fonction d'auto-corrélation

L'outil très majoritairement utilisé dans la littérature pour décrire la rugosité d'une surface est la fonction d'auto-corrélation qui représente la corrélation croisée d'un signal avec lui même. Cette fonction, lorsqu'elle est ajustée par une forme simple gaussienne ou exponentielle, fournit deux paramètres : la variance et la longueur de corrélation. La première renseigne sur l'amplitude des fluctuations de profil et se lit à l'abscisse nulle (origine) de la fonction d'auto-corrélation. La seconde renseigne sur les corrélations de fluctuations spatiales de profil et est donnée par la demi-largeur à mi-hauteur du pic central de la fonction d'auto-corrélation. A l'origine, cette fonction était utilisée pour décrire des processus stochastiques, dont la rugosité est censée faire partie. Sayles et Thomas [70] affirment que ce n'est pas une vision complète et montrent que les paramètres stochastiques dépendent de la longueur de l'échantillon considéré. Ceci nous conforte dans le choix de n'analyser que les images de contour entier de disque afin de ne pas sous-estimer variances et longueurs de corrélation par une analyse trop locale spatialement. La fonction d'auto-corrélation reste un des seuls moyens simples d'analyse de la rugosité. Elle est définie de la manière suivante :

$$R_f(\delta x_j) = \frac{1}{N-j+1} \sum_{i=0}^{N-j} f(x_i + \delta x_j) f(x_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_i = i\delta x \\ \delta x_j = j\delta x \end{cases} \quad (3.3)$$

où δx représente la distance entre deux points consécutifs de la coordonnée curviligne du profil discrétisé. Pour une distance δx_j donnée, $R_f(\delta x_j)$ analyse la corrélation entre tous les points du contour séparés de cette distance. Cette fonction est paire. Elle peut être tracée sur un axe d'abscisse partant de $\delta x_j = 0$ ou bien centré en $\delta x_j = 0$. Elle est présentée dans ce manuscrit dans la deuxième configuration. La fonction perd en fiabilité lorsque $N - j + 1$ devient petit. Il est donc inutile de s'attarder sur les corrélations pour des distances supérieures à la moitié de la taille de l'image TEM utilisée pour l'analyse.

Une fonction possédant des corrélations à faible distance et n'en possédant plus à grande distance présenterait un pic en $\delta x_j = 0$ et tendrait vers 0 à grande distance. Dans la réalité des expériences, une rugosité est une fonction qui oscille de manière irrégulière autour de 0, et qui porte une certaine corrélation résiduelle à grande distance. Sa fonction d'auto-corrélation est caractérisée par un pic central contenant l'information sur la variance et la longueur de corrélation et de légers rebonds pour des distances plus grandes. Généralement, les physiciens ajustent le centre de cette fonction avec une fonction exponentielle décroissante ou une gaussienne, dépendant du caractère plus ou moins piqué du pic central. Certains artifices peuvent modifier la fonction d'auto-corrélation. Nous nous proposons de les identifier et d'expliquer leur influence dans les analyses.

Influence de la taille du pixel de l'image

La simulation informatique de la procédure d'extraction de contour permet l'étude de l'influence de la taille du pixel sur la fonction d'auto-corrélation. L'objectif est ici de comparer plusieurs fonctions d'auto-corrélation en utilisant le même contour mais avec une taille de pixel différente pour l'image d'analyse.

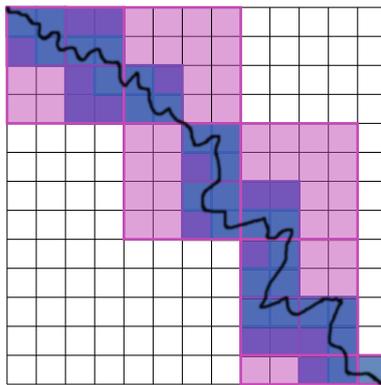


FIGURE 3.11: Pixellisation du contour pour différentes tailles de pixel. En bleu le pixel vaut une graduation, en violet deux et en rose quatre.

La discrétisation du contour sur une grille carrée fausse la variance analysée du profil, c'est à dire la valeur en zéro de la fonction d'auto-corrélation. Cet écart à la vraie valeur est lié à la taille du pixel par la formule :

$$\Delta V = 0,3^2 L_{pix}^2 \quad (3.4)$$

où ΔV (en nm^2) est l'écart entre la variance pixellisée et la variance réelle et L_{pix} est la taille du pixel (en nm). Le coefficient 0,3 est obtenu en faisant une régression linéaire sur plusieurs contours avec quatre tailles de pixel différentes. Ceci est une loi empirique que nous avons obtenue.

Considérons un contour quasi-circulaire contenant une rugosité simulé à partir d'une marche aléatoire modifiée. Ce contour est imprimé dans une matrice carré pour former un cercle pixelisé. L'image obtenue simule un cliché TEM avec sa résolution finie fixée par la taille du pixel (figure 3.11). Notre procédure d'extraction de contour est ensuite appliquée à cette image volontairement pixellisée (figure 3.12(b)). Le contour obtenu est logiquement proche du contour aléatoire de départ à l'exception de la pixellisation qui ne permet pas de rendre les détails fins de la courbe. Les fonctions d'auto-corrélation sont calculées et tracées sur la figure (3.12(a)).

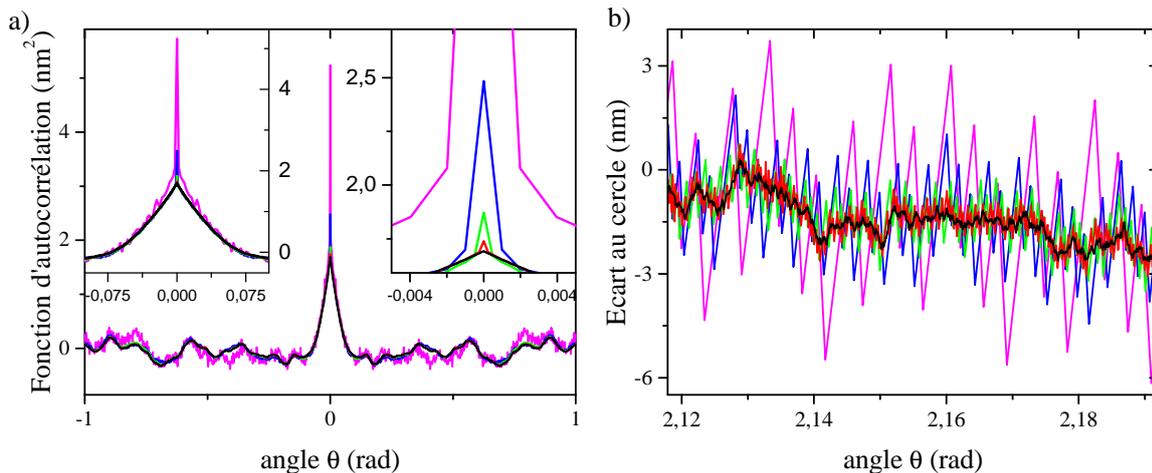


FIGURE 3.12: (a) Fonction d'auto-corrélation calculée pour le contour original simulé (noir) et pour les quatre contours extraits avec différentes tailles de pixel. Pour le même contour l'image comprend 1024×1024 pixels (magenta), 2048×2048 pixels (bleu), 4096×4096 pixels (vert) ou 8192×8192 pixels (rouge). (b) Écart au cercle parfait pour ces cinq courbes.

Quelle que soit la taille du pixel, la fonction d'auto-corrélation garde des caractéristiques proches. Seule la variance (point d'abscisse nulle) est surestimée. Ainsi, l'analyse de la fonction d'auto-corrélation peut se faire à grande échelle (taille de pixel grande) à condition de retirer le pic central parasite dans la fonction d'auto-corrélation. Bien sûr le pixel doit rester assez petit pour voir les détails tout de même. C'est l'approche que nous utilisons dans la suite.

Influence de la défocalisation et de la résolution d'appareil

Afin d'obtenir des images TEM possédant un contraste assez important, il est nécessaire de défocaliser légèrement le système de lentilles magnétiques. L'image est alors légèrement floutée. Nous pouvons là encore simuler cet effet en appliquant une convolution par un filtre 2D spatial

de forme gaussienne sur un contour simulé de disque et observer le résultat sur la fonction d'auto-corrélation. Ceci permet également de comprendre l'influence de la résolution finie de l'appareil, quand elle n'est pas fixée par la taille du pixel d'image.

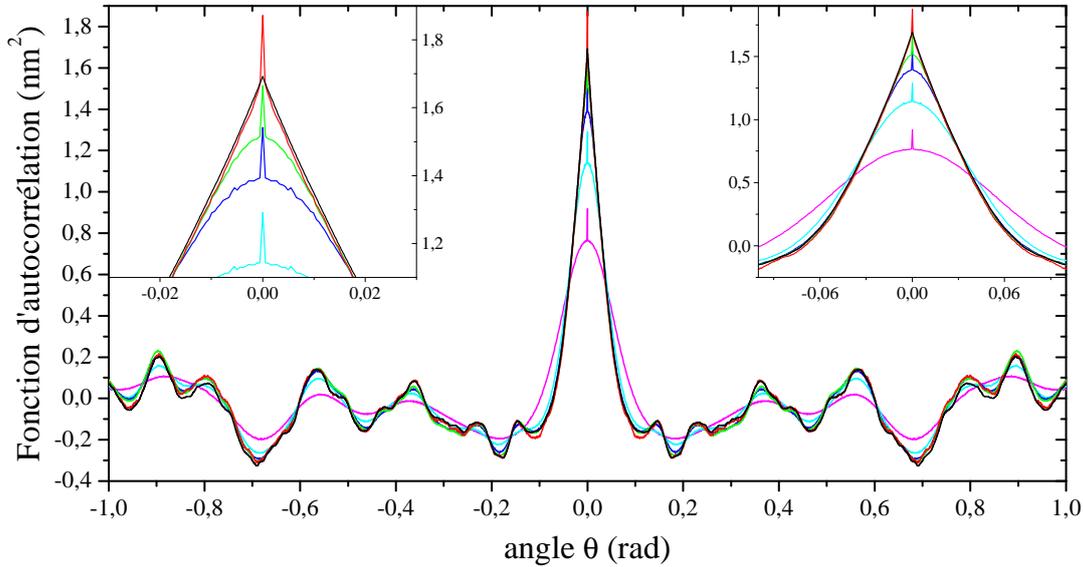


FIGURE 3.13: Fonction d'auto-corrélation calculée pour différents profils convolués spatialement. En noir le contour original, en rouge le contour pixellisé mais non filtré spatialement. Respectivement en vert, bleu, cyan et magenta les contours issus des images floutées (convolués spatialement) avec comme paramètre de largeur de la gaussienne 6, 12, 24 et 48 pixels. En panneaux intérieurs, deux zooms sur la partie proche de l'origine. Le pic central dû au pixel est toujours visible.

La convolution gaussienne a deux paramètres : la largeur de la gaussienne et la taille de l'échantillon sur laquelle on applique la convolution. La taille de l'échantillon est fixé à 10 fois plus grande que la largeur de la gaussienne. La largeur de la gaussienne est donné en pixel. En figure (3.13) nous montrons l'effet du filtre pour des largeurs de 6, 12, 24 et 48 pixels. Dans la réalité le filtre gaussien n'atteint pas des largeurs aussi élevées, cependant la simulation permet de mettre en évidence le phénomène d'arrondissement du pic central de la fonction d'auto-corrélation. Ainsi une fonction d'auto-corrélation issue d'un contour ayant subi un lissage adoptera le profil gaussien, souvent utilisé dans la littérature [71] [72]. Ceci intervient par exemple pour les surfaces analysées à l'aide d'un microscope à force atomique (AFM) ou d'un microscope électronique à balayage (MEB).

Dans nos expériences, la résolution effective dans l'analyse du contour fait intervenir la résolution du TEM (gaussienne) convoluée par la résolution de la procédure d'extraction de contour. Nous avons vérifié que même sur les images TEM de plus grande échelle, cette résolution effective ne "gaussianise" pas les données de rugosité.

Séparation de l'ondulation et de la rugosité

L'ondulation, en plus de la rugosité, modifie grandement le comportement de la fonction d'auto-corrélation en ajoutant des corrélations périodiques ou quasi-périodiques à grandes dis-

tances. La présence d'une ondulation empêche l'ajustement par une fonction d'auto-corrélation exponentielle ou gaussienne, dont on pourrait extraire la variance et la longueur de corrélation. Il est donc nécessaire de séparer ondulation et rugosité pour pouvoir utiliser correctement le traitement par fonction d'auto-corrélation.

L'ondulation est une fonction continue, dérivable par rapport à l'angle θ et 2π -périodique. Elle ne peut être extraite proprement que lorsque le contour représente tout le tour de l'objet (2π). En suivant le papier de Skorobogatiy *et al.* [73], nous développons notre contour $r(\theta)$ sur une base de cosinus :

$$r(\theta) = R_0 + \sum_{m=2}^N A_m \cos(m\theta + \phi_m) + \text{Res}(\theta) \quad (3.5)$$

où A_m est l'amplitude et ϕ_m est la phase associée à chaque fréquence spatiale. R_0 est le rayon du cercle. Le résidu $\text{Res}(\theta)$ représente la rugosité après le retrait de l'ondulation. N est pris suffisamment grand pour que la fonction d'auto-corrélation du résidu ne possède plus de corrélation quasi-périodique sur les grandes distances et suffisamment petit pour que l'information de variance et de longueur de corrélation comprise dans le résidu ne soit pas altérée. La somme sur m ne commence qu'à partir de $m = 2$ car le terme correspondant à $m = 1$ ne représente qu'une translation spatiale du centre du cercle déjà pris en compte dans la détermination de R_0 .

Dans nos expériences, la majorité des disques déposés sur une grille TEM sont cassés. Les contours ne rebouclent pas sur eux-mêmes. Cette condition est pourtant requise pour extraire proprement l'ondulation par une base de cosinus. Il n'est donc pas possible de séparer ondulation et rugosité par la méthode des cosinus pour ces contours. Afin de contourner ce problème, nous analysons des morceaux de contours de la manière suivante :

- Le contour incomplet est extrait de l'image, en ajustant par rapport à un arc de cercle. Ce contour n'est pas le même que celui qui aurait été extrait si le disque avait été entier et pas en morceaux. Néanmoins il en est proche, surtout en terme de rugosité.
- Sur ce contour incomplet, on repère les points correspondant à $\delta r(\theta) = 0$ (intersection avec l'arc de cercle).
- On découpe le morceau de contour entre deux points déterminés à l'étape précédente, de manière à obtenir un contour qui reboucle sur lui-même, même si ce n'est pas avec une période 2π contrairement au disque entier.
- L'extraction de l'ondulation de ce contour se rebouclant sur lui-même par la base de cosinus peut alors être effectuée.
- L'ordre N de la somme de cosinus dépend de chaque contour. Il est déterminé par l'analyse du résidu.
- La fonction d'auto-corrélation du résidu est calculée. Elle fournit une variance et une longueur de corrélation.

Cette méthode est testée sur le contour d'un disque entier afin de vérifier sa validité, en décomposant le contour entier en 4 morceaux distincts (environ 1/4 du contour chaque). Les longueurs de corrélations et variances ainsi extraites sont du même ordre de grandeur que celle du disque entier et sont résumées dans la table (3.1). On constate le fait connu que la réduction de la taille d'échantillon d'analyse tend à réduire légèrement la variance et la longueur de

corrélation. Pour cette raison, on veillera ensuite à utiliser des morceaux de disque aussi proches que possible d'un disque entier.

	morceau 1	morceau 2	morceau 3	morceau 4	disque entier
σ^2 (nm ²)	0,57	0,33	0,36	0,81	1,05
L_c (nm)	22	22	24	55	68

TABLE 3.1: Comparaison des variances et longueurs de corrélation du contour entier et des morceaux de contour issus du même disque.

Cette méthode d'analyse de la rugosité fournit un ordre de grandeur correct pour les deux paramètres que sont la variance et la longueur de corrélation. La table (3.1) montre un accord relatif raisonnable entre les morceaux de contour et le contour entier. Il valide notre approche.

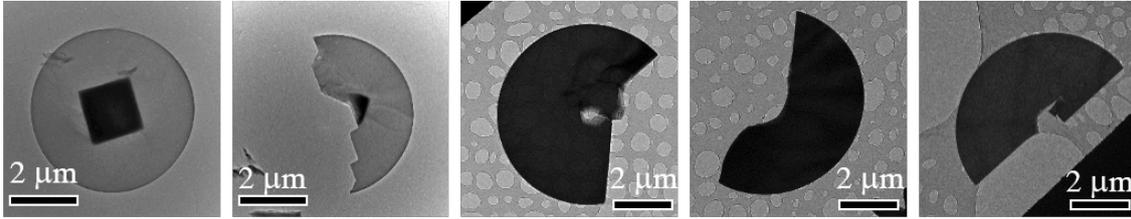


FIGURE 3.14: De gauche à droite, le disque entier puis les disques 2, 3, 4 et 5

Cette méthode est ensuite utilisée sur un ensemble de quatre disques cassés (figure 3.14). La table (3.2) présente un résumé de l'analyse. L'écart type classique due à la rugosité est de l'ordre du nanomètre. La longueur de corrélation est comprise entre 20 et 70 nm.

	disque entier	disque 2	disque 3	disque 4	disque 5
R (nm)	2457	2400	3014	3169	3188
σ^2 (nm ²)	1,05	0,57	1,41	0,57	1,33
σ (nm)	1,02	0,76	1,19	0,76	1,15
L_c (nm)	68	22	68	27	64

TABLE 3.2: Analyse de la rugosité de cinq disques presque entiers

Le contour entier d'un disque

Dans nos expériences, nous n'avons obtenu qu'une seule fois un disque entier déposé sur la grille TEM, permettant une analyse rigoureuse de l'ondulation. Pour ce seul contour entier le profil peut s'ajuster comme :

$$\begin{aligned}
 r(\theta)(\text{en nm}) = & 2457 - 1,35 \cos(\theta - 0,60) - 12,0 \cos(2\theta + 0,36) + 17,0 \cos(3\theta + 1,34) \\
 & + 3,99 \cos(4\theta + 0,25) - 0,9 \cos(5\theta + 0,03) + 1,4 \cos(6\theta + 0,23) \\
 & + 0,6 \cos(7\theta - 0,06) - 1,1 \cos(8\theta + 0,09) + \text{Res}(\theta)
 \end{aligned}$$

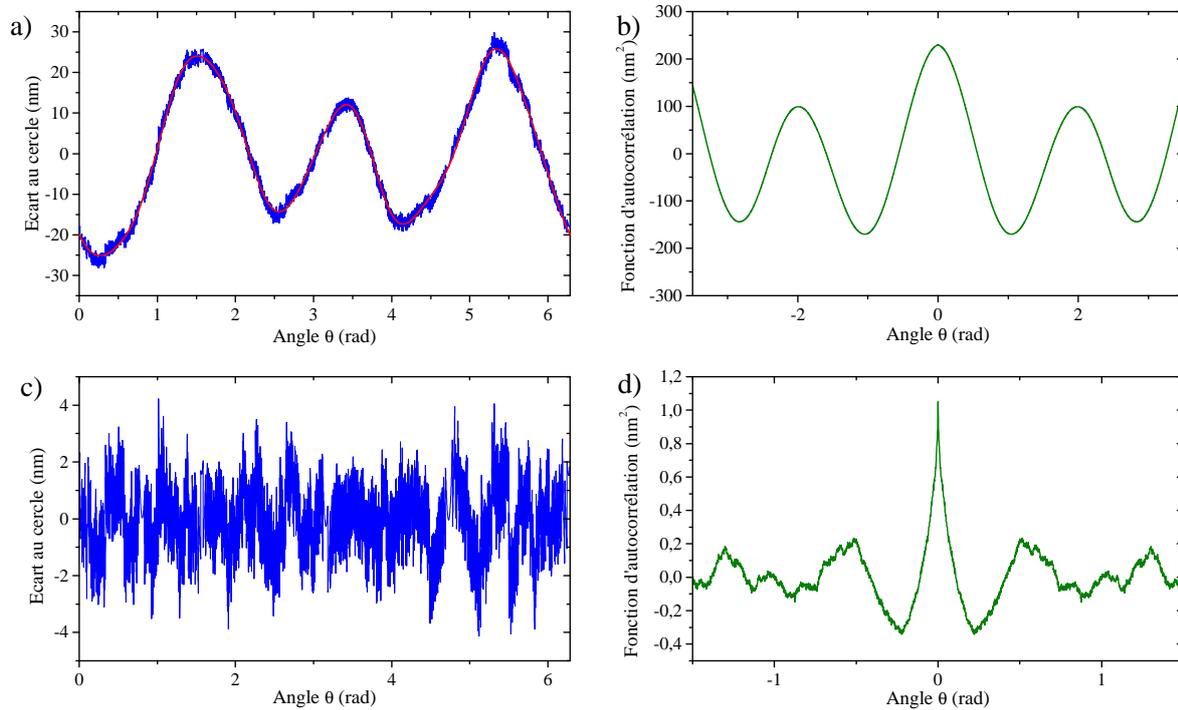


FIGURE 3.15: (a) En bleu, le contour issu du disque entier. En rouge, la somme de cosinus représentant l'ondulation. (b) Fonction d'auto-corrélation du contour (a). (c) Résidu de la soustraction des deux courbes présente en (a). (d) Fonction d'auto-corrélation de la courbe du résidu représentée en (c).

Il faut aller jusqu'à l'ordre 8 dans les cosinus pour que la fonction d'auto-corrélation du résidu devienne caractéristique d'une rugosité (figure 3.15). La fonction d'auto-corrélation résultante est piquée en son centre et décroît approximativement comme une exponentielle. Elle plonge toutefois vers les négatifs, avant de rebondir légèrement. La plupart des fonctions d'auto-corrélation que nous avons obtenues ont ce comportement caractéristique. Poulton *et al.* [74] ont ajusté ce genre de profil à une exponentielle décroissante et un cosinus, ce qui permet de réduire l'incertitude sur la longueur de corrélation effective.

Dans la suite, le profil d'ondulation et de rugosité du disque entier obtenu est utilisé pour calculer les pertes par diffusion des photons sur la surface de bordure du disque. Notre étude a en effet montré que la rugosité de ce disque entier est typique de nos autres disques, et l'étude partielle des ondulations semble indiquer le même chose. Ce sera donc notre "disque typique".

3.3.4 Calcul des pertes par diffusion surfacique

La méthode que nous utilisons pour caractériser les pertes par diffusion optique sur la rugosité à l'interface se nomme "Volume Current Method" (VCM) [71, 75, 76, 77]. C'est une méthode de perturbation qui consiste à écrire qu'un courant de polarisation est créé dans la partie géométriquement perturbée du disque par le champ optique non perturbé $E^0(\vec{r})$. Ce courant de polarisation rayonne ensuite un champ $\delta\vec{E}(\vec{r})$, de sorte que le nouveau champ total est approché par $E^0(\vec{r}) + \delta\vec{E}(\vec{r})$. Dans cette approche, deux modes optiques distincts d'un même

résonateur auront donc, pour une même rugosité, deux niveaux de pertes différents. Le champ total doit vérifier l'équation :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}}(\vec{r})) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\vec{r}) \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = 0 \quad (3.6)$$

avec $\epsilon_r(\vec{r})$ la permittivité diélectrique relative réelle du matériau. On écrira $\epsilon_r^0(\vec{r})$ la permittivité du disque sans défaut de géométrie (cercle parfait). On a alors $\epsilon_r(\vec{r}) = \epsilon_r^0(\vec{r}) + \delta\epsilon_r(\vec{r})$ où $\delta\epsilon_r(\vec{r})$ correspond à la perturbation géométrique. L'équation (3.6) se réécrit :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}}(\vec{r})) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r^0(\vec{r}) \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \delta\epsilon_r(\vec{r}) \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \quad (3.7)$$

Avec :

$$\delta\epsilon_r(\vec{r}) = (n_{GaAs}^2 - n_{air}^2) (\Theta(r - R_0) - \Theta(r - R_0 - \delta r(\theta))) \quad (3.8)$$

$$= (n_{GaAs}^2 - n_{air}^2) \delta(r - R_0) \delta r(\theta) \quad (3.9)$$

où $\delta r(\theta)$ est très petit devant le rayon R_0 du disque. On utilise abusivement le fait qu'au sens des distributions la fonction de Dirac $\delta(r)$ est la dérivée de la fonction de Heaviside $\Theta(r)$.

Le champ $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ s'écrit comme la somme du champ non perturbé et d'un champ plus faible issu de la perturbation : $\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \underline{\vec{E}}^0(\vec{r}) + \delta\underline{\vec{E}}(\vec{r})$. La partie de gauche de l'équation (3.7) a pour solution le mode de galerie non perturbé $\underline{\vec{E}}^0(\vec{r})$. Le champ faible est donc régi par une équation d'onde ayant pour source, au premier ordre, un courant de polarisation induit par le champ non perturbé $\underline{\vec{E}}^0(\vec{r})$ sur la rugosité.

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \delta\underline{\vec{E}}(\vec{r})) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r^0(\vec{r}) \delta\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \delta\epsilon_r(\vec{r}) \underline{\vec{E}}^0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \delta\epsilon_r(\vec{r}) \delta\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \quad (3.10)$$

En théorie classique des perturbations, le deuxième terme du membre de droite de l'équation (3.10) se néglige pour de faibles déformations, ce qui est fait dans l'immense majorité de la littérature sur la VCM en électromagnétisme. Dans le cas particulier des équations de Maxwell pourtant, la discontinuité du champ $\underline{\vec{E}}_{\perp}$ à l'interface entre deux milieux diélectriques empêche l'application de cette théorie sous cette forme standard. Le terme du second ordre prend des valeurs importantes au niveau de l'interface. Ce problème a été identifié et corrigé par Johnson *et al.* [78] [79] qui s'inspirent des travaux de Hill [80]. Nous utilisons une approche similaire développé par Heebner *et al.* [81]. Il convient de choisir un courant de polarisation qui soit continu à l'interface. Ce courant, formellement correct, est donné par :

$$\underline{\vec{J}}(\vec{r}) = -i\omega \left[\Delta \epsilon \underline{\vec{E}}_{\parallel}^0(\vec{r}) - \epsilon_0 \Delta(\epsilon^{-1}) \underline{\vec{D}}_{\perp}^0(\vec{r}) \right] \delta(r - R_0) \delta r(\theta) \quad (3.11)$$

$$= -i\omega \left[\epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{\vec{E}}_{\parallel}^0(\vec{r}) - \Delta(\epsilon_r^{-1}) \underline{\vec{D}}_{\perp}^0(\vec{r}) \right] \delta(r - R_0) \delta r(\theta) \quad (3.12)$$

Au lieu du courant majoritairement utilisé dans la littérature (mais dont l'expression est fautive, car ne respectant pas les conditions requise par une théorie de perturbations) :

$$\vec{J}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_0\delta\epsilon_r(\vec{r})\vec{E}^0(\vec{r}) \quad (3.13)$$

$$= -i\omega\epsilon_0\Delta\epsilon_r\vec{E}^0(\vec{r})\delta(r - R_0)\delta r(\theta) \quad (3.14)$$

avec $\Delta\epsilon_r = (n_{GaAs}^2 - n_{air}^2)$ et $\Delta(\epsilon_r^{-1}) = \frac{1}{n_{GaAs}^2} - \frac{1}{n_{air}^2}$

Le courant de polarisation $\vec{J}(\vec{r})$ issu de la perturbation de l'interface $\delta\epsilon_r(\vec{r})$ produit un champ électromagnétique dans tout l'espace. La fonction de Green issue des équations de Maxwell dans un milieu diélectrique isotrope uniforme (air) est donnée par :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (3.15)$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ s'écrit dans une base sphérique orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. En champ lointain, sous l'hypothèse $|\vec{r}-\vec{r}'| \gg R_0$, le champ peut être approximé :

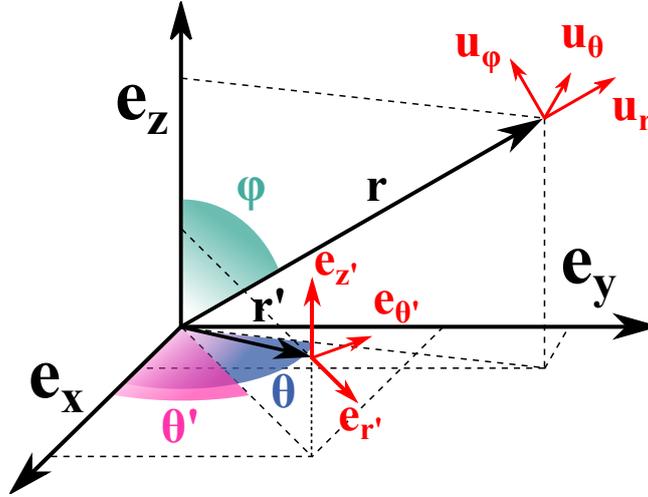


FIGURE 3.16: Représentation des bases cartésienne, cylindrique et sphérique

$$\vec{A}_{c.l.}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' \quad (3.16)$$

où $k = \frac{\omega}{c}$. Contrairement à $\vec{A}(\vec{r})$, notre courant de polarisation $\vec{J}(\vec{r})$ issu de l'analyse TEM s'exprime à partir du champ électromagnétique dans une base cylindrique $(\vec{e}_{r'}, \vec{e}_{\theta'}, \vec{e}_{z'})$ avec les coordonnées (r', θ', z') (figure 3.16) :

$$\vec{J}(\vec{r}') = -i\omega \begin{pmatrix} -\Delta(\epsilon_r^{-1})\underline{D}_r(r', z') \\ \epsilon_0\Delta\epsilon_r\underline{E}_\theta(r', z') \\ \epsilon_0\Delta\epsilon_r\underline{E}_z(r', z') \end{pmatrix} e^{im\theta'} \delta r(\theta')\delta(r' - R_0) \quad (3.17)$$

Il est donc nécessaire d'écrire \vec{J} sur la même base que \vec{A} afin que l'intégrale se fasse correctement. Dans la base sphérique associée à $\vec{A}_{c.l.}(\vec{r})$, $\vec{J}(\vec{r}')$ se réécrit :

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}') = & -i\omega e^{im\theta'} \delta r(\theta') \delta(r' - R_0) \\ & \times \begin{pmatrix} -\Delta(\epsilon_r^{-1}) \underline{D}_r \cos(\theta' - \theta) \sin(\varphi) - \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_\theta \sin(\theta' - \theta) \sin(\varphi) + \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_z \cos(\varphi) \\ -\Delta(\epsilon_r^{-1}) \underline{D}_r \sin(\theta' - \theta) + \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_\theta \cos(\theta' - \theta) \\ \Delta(\epsilon_r^{-1}) \underline{D}_r \cos(\theta' - \theta) \cos(\varphi) + \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_\theta \sin(\theta' - \theta) \cos(\varphi) + \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_z \sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

En champ lointain, le potentiel vecteur ressemble à une onde sphérique se propageant vers l'infini, nous pouvons utiliser la simplification " $\vec{\nabla} \wedge = i \frac{\omega}{c} \vec{u}_r \wedge$ ".

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega \vec{u}_r \wedge \left(\vec{u}_r \wedge \vec{A}_{c.l.}(\vec{r}) \right) \quad (3.19)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = i\omega \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\vec{u}_r \wedge \vec{A}_{c.l.}(\vec{r}) \right) \quad (3.20)$$

Et le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \left(\vec{E}(\vec{r}) \wedge \vec{H}^*(\vec{r}) + c.c. \right) \quad (3.21)$$

$$= \frac{\omega^2}{2\mu_0 c} \left| \vec{u}_r \wedge \vec{A}_{c.l.}(\vec{r}) \right|^2 \vec{u}_r \quad (3.22)$$

Le vecteur de Poynting, en champ lointain, ne possède de composante que dans la direction \vec{u}_r . La puissance totale rayonnée à travers la sphère lointaine englobant le disque est :

$$P_{ray} = \int \vec{\Pi}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_r r^2 d\Omega \quad (3.23)$$

$$= \int \frac{\omega^2}{2\mu_0 c} \left| \vec{u}_r \wedge \vec{A}_{c.l.}(\vec{r}) \right|^2 r^2 d\Omega \quad (3.24)$$

$$= \int \frac{\omega^2}{2\mu_0 c} \left| \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{V'} \vec{u}_r \wedge \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' \right|^2 r^2 \sin(\phi) d\theta d\phi \quad (3.25)$$

$$= \int \frac{\omega^2}{2\mu_0 c} \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \left| \int_{V'} \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{J}_\phi(\vec{r}') \\ \underline{J}_\theta(\vec{r}') \end{pmatrix} e^{ik\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' \right|^2 \sin(\phi) d\theta d\phi \quad (3.26)$$

$$= \frac{\omega^2 \mu_0}{32\pi^2 c} \int \left[\left| \int_{V'} \underline{J}_\phi(\vec{r}') e^{ik\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' \right|^2 + \left| \int_{V'} \underline{J}_\theta(\vec{r}') e^{ik\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' \right|^2 \right] \sin(\phi) d\theta d\phi \quad (3.27)$$

Les deux intégrales se réécrivent :

$$\begin{aligned} & -i\omega R_0 \left[\int \Delta(\epsilon_r^{-1}) \underline{D}_r(R_0, z') \cos(\theta' - \theta) \cos(\phi) e^{ik(R_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi) + z' \cos(\phi))} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' dz' \right. \\ & \quad + \int \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_\theta(R_0, z') \sin(\theta' - \theta) \cos(\phi) e^{ik(R_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi) + z' \cos(\phi))} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' dz' \\ & \quad \left. + \int \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_z(R_0, z') \sin(\phi) e^{ik(R_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi) + z' \cos(\phi))} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' dz' \right] \end{aligned}$$

et :

$$-i\omega R_0 \left[- \int \Delta(\epsilon_r^{-1}) \underline{D}_r(R_0, z') \sin(\theta' - \theta) e^{ik(R_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi) + z' \cos(\phi))} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' dz' \right. \\ \left. + \int \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \underline{E}_\theta(R_0, z') \cos(\theta' - \theta) e^{ik(R_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi) + z' \cos(\phi))} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' dz' \right]$$

Où l'intégration sur r' se calcule aisément grâce à la présence de $\delta(r' - R_0)$. On sépare ensuite les intégrales sur z' et θ' .

$$-i\omega R_0 \left[\Delta(\epsilon_r^{-1}) \cos(\phi) \int \underline{D}_r(R_0, z') e^{ikz' \cos(\phi)} dz' \int \cos(\theta' - \theta) e^{ikR_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi)} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' \right. \\ \left. + \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \cos(\phi) \int \underline{E}_\theta(R_0, z') e^{ikz' \cos(\phi)} dz' \int \sin(\theta' - \theta) e^{ikR_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi)} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' \right. \\ \left. + \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \sin(\phi) \int \underline{E}_z(R_0, z') e^{ikz' \cos(\phi)} dz' \int e^{ikR_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi)} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' \right]$$

et :

$$-i\omega R_0 \left[-\Delta(\epsilon_r^{-1}) \int \underline{D}_r(R_0, z') e^{ikz' \cos(\phi)} dz' \int \sin(\theta' - \theta) e^{ikR_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi)} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' \right. \\ \left. + \epsilon_0 \Delta \epsilon_r \int \underline{E}_\theta(R_0, z') e^{ikz' \cos(\phi)} dz' \int \cos(\theta' - \theta) e^{ikR_0 \cos(\theta' - \theta) \sin(\phi)} e^{im\theta'} \delta r(\theta') d\theta' \right]$$

On calcule toute ces intégrales numériquement à partir de deux données : la connaissance des champs électromagnétiques non perturbés $\underline{D}_r(R_0, z')$, $\underline{E}_\theta(R_0, z')$ et $\underline{E}_z(R_0, z')$ ainsi que le profil de rugosité du cercle complet $\delta r(\theta')$. Les champs non perturbés sont calculés numériquement à l'aide de Comsol puis exporté vers Matlab pour le calcul des intégrales. Le contour est extrait de l'image TEM du cercle entier.

Pour chaque direction de l'espace représentée par les coordonnées (θ, ϕ) de la sphère lointaine entourant le disque, nous calculons la somme des champs provenant du volume de perturbation de rugosité (réduit à une surface dans notre cas). La somme sur toute la sphère nous donne ensuite la puissance P_{ray} rayonnée issus des rugosités, i.e. la puissance diffusée par la surface rugueuse.

Le facteur de qualité du mode optique Q_{rug} s'exprime alors :

$$Q_{rug} = \frac{\omega U_c}{P_{ray}} = \frac{\omega \int_V \frac{1}{2} \epsilon(\vec{r}) \left| \underline{\vec{E}}^0(\vec{r}) \right|^2 dV}{P_{ray}} \quad (3.28)$$

U_c représente l'énergie stockée dans la cavité et se calcule numériquement par une intégration à partir du champ électrique du mode optique non perturbé.

Simulation numérique

L'évaluation de l'ensemble des pertes radiatives (courbure et diffusion) ne peut se faire qu'avec la connaissance complète de la géométrie du disque. Cette géométrie se décompose en

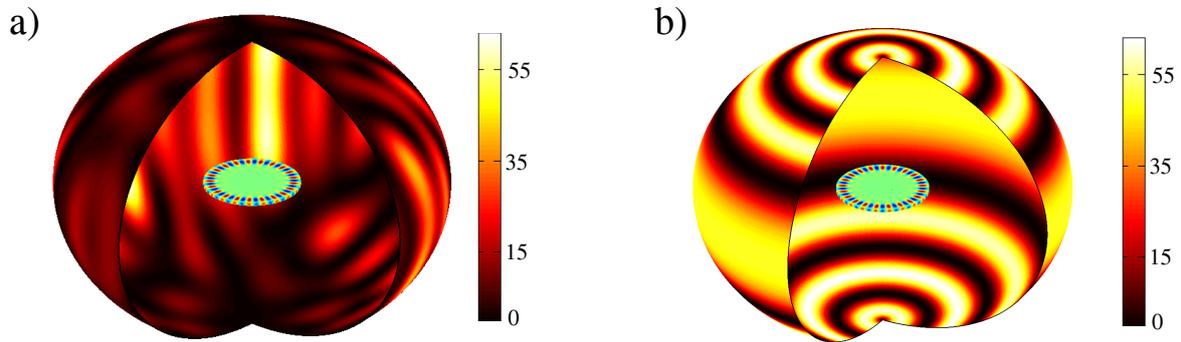


FIGURE 3.17: Module du vecteur de Poynting sur la sphère du champ lointain issu du mode TE $p=1$ $m=21$. En (a), la perturbation est donnée par la rugosité et l'ondulation du disque entier $R=2457$ nm. En (b) la perturbation est une ondulation simple prenant la forme $\delta r(\theta) = 50 \cdot \cos(21 \times \theta)$ nm. Le champ diffracte alors selon plusieurs ordres. Le disque est visible au centre de la sphère.

trois éléments : le disque cylindrique parfait, l'ondulation et la rugosité. Comme nous l'avons discuté avant, dans nos expériences un unique disque typique a pu être analysé entièrement grâce aux données TEM. Ce disque a pour rayon $R = 2457$ nm et épaisseur $t_d = 200$ nm. L'ondulation et la rugosité de son contour ont été extraites dans la section précédente. Ce disque possède 5 familles de modes de galerie optique dans la gamme 1500-1600 nm : TE $p=1$, TE $p=2$, TE $p=3$, TE $p=4$ et TM $p=1$. Nous nous intéressons ici uniquement aux modes TE. Le mode TM possède un facteur de qualité tellement bas qu'il n'est pas intéressant de le traiter. Nous choisissons 4 modes, un pour chaque famille p . Dans chaque famille p le nombre azimutal m est choisi de façon à ce que la résonance du mode soit la plus proche de 1550 nm. Nos quatre modes sont donc : TE $p = 1$ $m = 21$ $\lambda = 1537,240$ nm, TE $p = 2$ $m = 17$ $\lambda = 1537,003$ nm, TE $p = 3$ $m = 14$ $\lambda = 1525,972$ nm et TE $p = 4$ $m = 11$ $\lambda = 1546,996$ nm.

Nous nous proposons de faire un bilan quantitatif des pertes radiatives sur ces 4 modes. Il faut garder à l'esprit que la quantification parfaitement précise des pertes est impossible. Les calculs visent un ordre de grandeur des facteurs de qualité, à quelques unités près. Notons que dans toute l'étude les facteurs de qualité varient de quelques dizaines à quelques 10^{10} .

Le disque cylindrique parfait possède des pertes par courbure. Celles-ci sont évaluées de deux manières :

- La partie imaginaire de la fréquence complexe calculée par Comsol. Cependant, cette dernière dépend finement des paramètres des "Perfectly Matched Layers" (PML). L'ordre de grandeur est néanmoins correct, à un facteur 2 ou 3 près.
- La puissance rayonnée à travers la sphère en champ lointain. Ce calcul est effectué en utilisant le "Surface Equivalence Theorem" [82]. La surface équivalente est cylindrique et entoure le disque à 1 μm de distance. Le champ évalué sur cette surface est exporté d'une simulation Comsol.

Les deux méthodes donnent des résultats comparables. La deuxième méthode nous est utile pour la suite.

Q	$p=1 \ m=21$	$p=2 \ m=17$	$p=3 \ m=14$	$p=4 \ m=11$
Q_{courb}	$9,12 \cdot 10^9$	$4,06 \cdot 10^7$	$4,71 \cdot 10^4$	82
Q_{ond}	$1,34 \cdot 10^8$	$1,17 \cdot 10^6$	$3,84 \cdot 10^4$	$1,37 \cdot 10^4$
Q_{rug}	$1,96 \cdot 10^6$	$1,16 \cdot 10^6$	$1,10 \cdot 10^6$	$1,73 \cdot 10^6$
$(Q_{courb}^{-1} + Q_{ond}^{-1})^{-1}$	$1,32 \cdot 10^8$	$1,139 \cdot 10^6$	$2,12 \cdot 10^4$	82
$Q_{courb+ond}$	$1,30 \cdot 10^8$	$1,137 \cdot 10^6$	$2,09 \cdot 10^4$	82
$(Q_{ond}^{-1} + Q_{rug}^{-1})^{-1}$	$1,93 \cdot 10^6$	$5,82 \cdot 10^5$	$3,71 \cdot 10^4$	$1,36 \cdot 10^4$
$Q_{ond+rug}$	$1,93 \cdot 10^6$	$5,82 \cdot 10^5$	$3,71 \cdot 10^4$	$1,36 \cdot 10^4$

TABLE 3.3: Comparaison des différents facteurs de qualité dues à la courbure, à l'ondulation et à la rugosité. La courbure et l'ondulation sont faiblement corrélés. L'ondulation et la rugosité ne le sont pas du tout.

Les pertes dues à l'ondulation et la rugosité de surface sont calculées à l'aide de l'approche de "Volume Current Method" développée dans la section précédente. Nous avons validé quantitativement cette approche en comparant le facteur de qualité optique dû à une ondulation avec un calcul par méthode FDFD ("Finite Difference Frequency Domain") à deux dimensions.

La table (3.3) fait la synthèse des 4 modes.

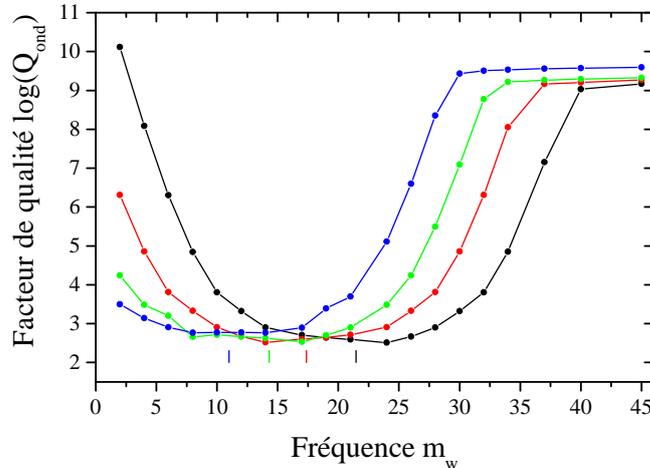


FIGURE 3.18: Facteur de qualité Q_{ond} lié aux pertes par ondulation. L'ondulation est décrite comme $\delta r(\theta) = 50 \cos(m_w \theta)$. Les courbes noire rouge verte et bleue correspondent respectivement aux modes $p=1, 2, 3$ et 4 ($m=21, 17, 14$ et 11 représenté par les tirets) du disque de rayon 2457 nm

Une ondulation de contour est décrite comme une somme de cosinus déphasés d'amplitude différentes. Les fréquences angulaires mises en jeu m_w (pour $\cos(m_w \theta)$) (m "waviness") sont entières et comprises généralement entre 1 et 10. De par l'orthogonalité des fonctions $\cos(m_w \theta)$, le vecteur de Poynting créé par chaque ondulation $\cos(m_w \theta)$ n'interfère pas avec les autres. Ainsi les pertes associées à une somme de cosinus sont égales à la somme des pertes de chaque cosinus pris individuellement. La figure (3.18) montre que chaque mode subit un maximum de perte pour $m \simeq m_w$. Ce cas correspond à la présence d'un réseau de diffraction parfaitement ajusté.

Par ailleurs le champ rayonné sur la sphère lointaine prend la forme caractéristique d'un champ diffracté avec plusieurs ordres (figure 3.17). Ainsi les modes à faible m (et donc à haut p si on fixe λ) subissent d'avantage de pertes à cause de l'ondulation que les modes à haut m (à faible p)(figure 3.19).

La rugosité, quand à elle, agit quasiment de la même façon pour les différentes familles de modes. Les pertes sont du même ordre de grandeur (figure 3.19). La différence entre les familles p vient principalement du rapport entre l'énergie du champ à la surface et l'énergie totale U_c stockée dans le mode.

Nous avons pour l'instant divisé notre déformation géométrique en trois parties et calculé les pertes associées à chacune séparément. Cela sous entend que les effets de chaque sont décorrélés. Il semble évident que les pertes associées à la rugosité sont indépendantes des pertes par courbure. Par contre, peut-on réellement décorréler les pertes par ondulation des pertes par courbure et des pertes par rugosité ? Afin de vérifier cela, nous calculons les champs électromagnétiques sur la sphère lointaine des trois sources de pertes. Ces différents champs sont sommés afin de les faire interférer. Le vecteur de Poynting résultant fournit ensuite le facteur de qualité par une intégration. Les résultat, listés dans le tableau (3.3), montrent que l'ondulation et la rugosité sont clairement deux phénomènes assez indépendant. Les champs issus de la courbure et de l'ondulation interfèrent un peu, cependant pas assez pour changer radicalement l'ordre de grandeur de Q_{rad} .

Finalement, les trois facteurs de pertes radiatives (courbure, ondulation, rugosité) peuvent être traités séparément et additionné. L'ordre de grandeur restera correct. Le facteur de qualité associé aux différentes pertes par radiation est donné sur la figure (3.19) pour le disque considéré.

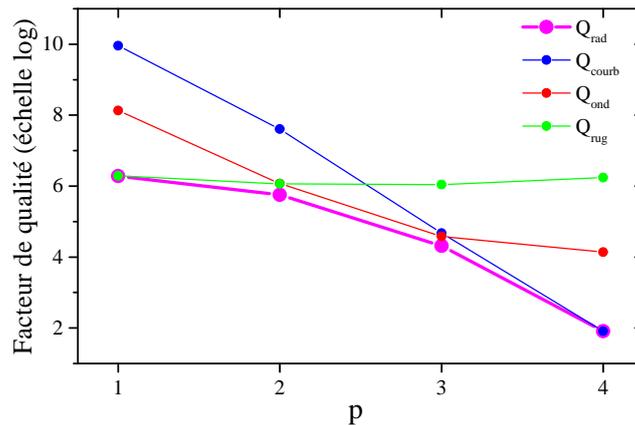


FIGURE 3.19: En bleu les facteurs de qualités associés à la courbure du disque. En rouge pour l'ondulation et en vert pour la rugosité. En violet, le facteur de qualité total Q_{rad} des pertes par rayonnement (radiatif).

3.4 Les pertes par absorption

Dans un matériau cristallin semi-conducteur non dopé, les électrons peuplant la bande de valence ne peuvent transiter vers la bande de conduction que grâce à un apport d'énergie supérieur ou égal au gap (énergie de bande interdite). Ce saut vers la bande de conduction peut être réalisé par l'absorption de photons. Ce processus d'absorption est linéaire lorsqu'un seul photon ayant une énergie supérieure au gap produit le saut. Il est non-linéaire lorsque deux photons ou plus, d'énergie inférieure au gap, sont absorbés en même temps. La paire électron-trou excitée peut se désexciter de manière radiative en réémettant un photon ou de manière non radiative en libérant son énergie aux phonons du cristal.

3.4.1 L'absorption linéaire

Un matériau semi-conducteur possède des caractéristiques électroniques différentes dans son volume et à sa surface. La structure de bande n'existe que dans le volume et repose sur la cristallinité. En surface, l'arrangement cristallin tronqué ne minimise plus l'énergie et les atomes se réorganisent différemment à la surface. La structure de bande et les états électroniques sont altérés.

L'absorption dans le volume

L'absorption linéaire dans le volume du GaAs peut apparaître lorsque l'énergie des photons est supérieure ou égale au gap intrinsèque du matériau. Dans le GaAs, l'énergie du gap est de 1,42 eV [83] à température ambiante (293 K). Cela correspond à une longueur d'onde de 873 nm. Nous travaillons à des longueurs d'onde comprises entre 1500 et 1600 nm. L'énergie de nos photons est donc largement inférieure au gap. Le GaAs parfait non dopé est censé être complètement transparent à cette fréquence. Bien sûr, bien qu'épitaxié, le cristal possède des défauts résiduels dus aux impuretés dans le volume. Ces derniers possèdent des états électroniques dans le gap et sont donc susceptibles d'absorber des photons de moindre énergie. Cependant leur densité est tellement faible ($\leq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) que le taux d'absorption ne peut être mesuré et est donc négligé dans les travaux présentés ici. Aux longueurs d'onde telecom ($\sim 1,5 \mu\text{m}$), nous n'avons obtenu aucune signature expérimentale d'absorption linéaire au cœur du GaAs même dans les disques.

L'absorption surfacique

L'absorption surfacique est un problème difficile à appréhender. Le réarrangement des atomes en surfaces crée de nouveaux états électroniques pouvant se situer dans le gap. Il est alors possible que les photons piégés dans un mode de galerie optique soient absorbés, même aux longueurs d'onde telecom où nous travaillons.

Christophe Baker, dans sa thèse [61], présente la figure (3.20) qui met en évidence le rôle de l'absorption de surface dans les disques GaAs. Il utilise la même approche guide d'onde-disque que dans cette thèse sauf que le guide d'onde est en GaAs et intégré sur l'échantillon au lieu d'être une fibre effilée. La figure (3.20(a)) montre l'évolution du spectre optique en balayant la longueur d'onde du laser autour d'un mode optique (il n'est pas possible dans son cas de

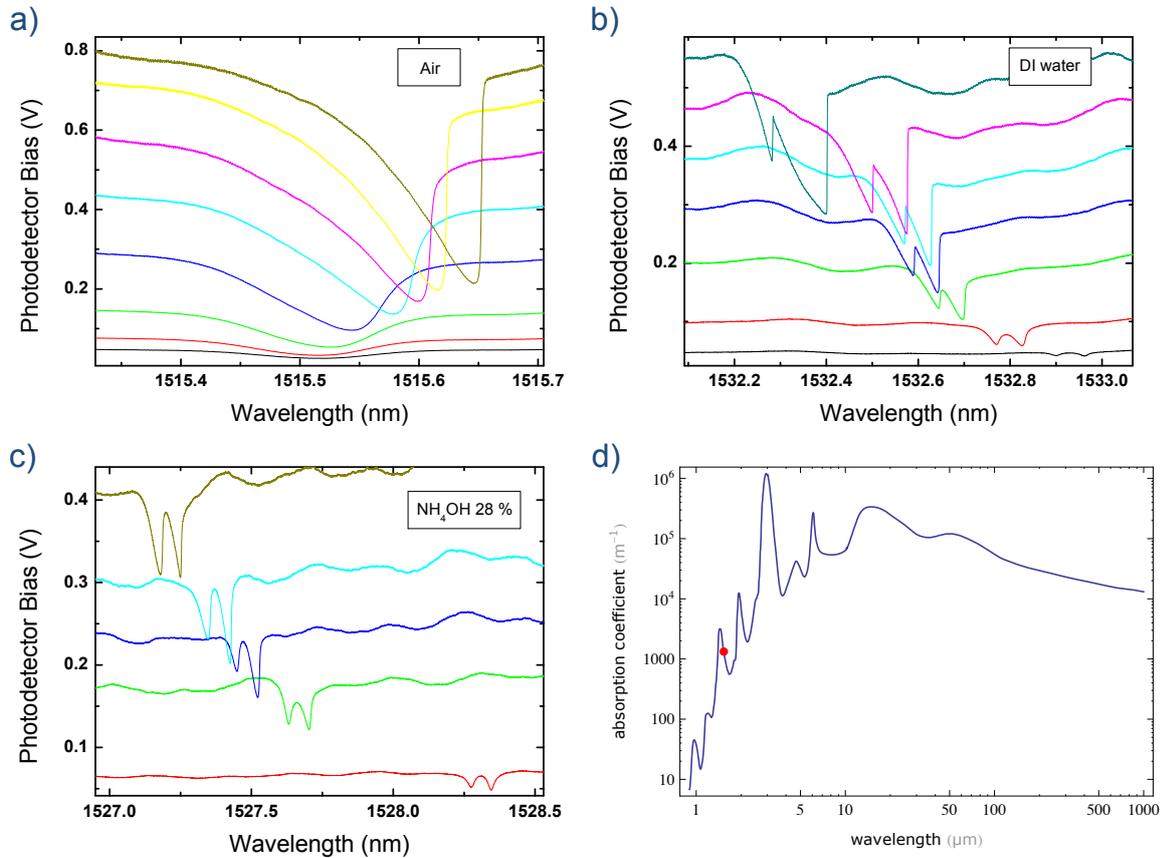


FIGURE 3.20: Spectre de transmission optique mesuré pour des puissances laser croissantes pour le même mode de galerie dans l'air (a) dans l'eau déionisé (b) et dans l'ammoniac (c). La puissance optique circulant dans le guide d'onde est proportionnelle au voltage ("bias" en anglais) du photodétecteur. (d) coefficient d'absorption optique de l'eau en fonction de la longueur d'onde. Le point rouge marque l'absorption $\sim 1330 \text{ nm}^{-1}$ à 1530 nm .

renormaliser le spectre). L'augmentation de la température révèle la distorsion thermo-optique (mentionnée au chapitre 1).

En plaçant le disque dans l'eau DI (figure 3.20(b)), la fréquence de résonance à basse puissance est décalée vers les basses longueur d'onde ($1532,8 \text{ nm}$) à cause du plus haut indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air. Les différentes courbes sont prises en partant des basses vers les hautes puissances. Nous remarquons que la distorsion thermo-optique est toujours présente et que la fréquence de résonance du mode se décale vers les basses longueurs d'onde à mesure que le balayage s'effectue à des puissances de plus en plus hautes. Ce phénomène a par la suite été compris dans l'équipe par Eduardo Gil-Santos. Il semble que le disque subisse une gravure photoélectrochimique [84].

Dans l'ammoniac (NH_4OH 28%) (figure 3.20(c)), nous observons toujours, pour la même gamme de puissance laser, le décalage de la résonance vers les basses longueur d'onde (gravure électrochimique). Par contre le mode optique doublet garde sa structure de double lorentzienne sur tous les spectres à mesure que la puissance du laser augmente. La disparition de la distorsion

thermo-optique, signature de la hausse de température dans le disque, nous permet de déduire que l'absorption dans le disque est grandement réduite. NH_4OH a par ailleurs la capacité de dissoudre l'"oxyde de surface" natif du GaAs. La figure (3.20(d)) montrant l'absorption de l'eau pour une large gamme de longueur d'onde, permet d'expliquer le fait qu'aucune amélioration de facteur de qualité optique n'est observée sur les spectres de 3.20(c) malgré la dissolution de l'"oxyde de surface" absorbant. Ceci est dû à l'absorption dominante de l'eau à cette longueur d'onde.

Cette étude expérimentale semble pointer vers une absorption résiduelle surfacique plutôt que volumique dans les disques GaAs.

Effet thermo-optique

D'après la théorie du couplage guide d'onde - résonateur développée dans le chapitre 1, les modes de galerie sont représentés par des chutes lorentziennes dans le spectre de transmission optique. Expérimentalement, ceci se vérifie pour des puissances d'injection faibles ($< 10 \mu\text{W}$ dans la fibre). Ce n'est plus le cas lorsque la puissance optique augmente. Les modes adoptent une forme triangulaire dans le spectre de transmission (figures 1.14 (simulée) et 3.21 (mesurée)) traduisant un déplacement des résonances optique vers les grandes longueur d'onde.

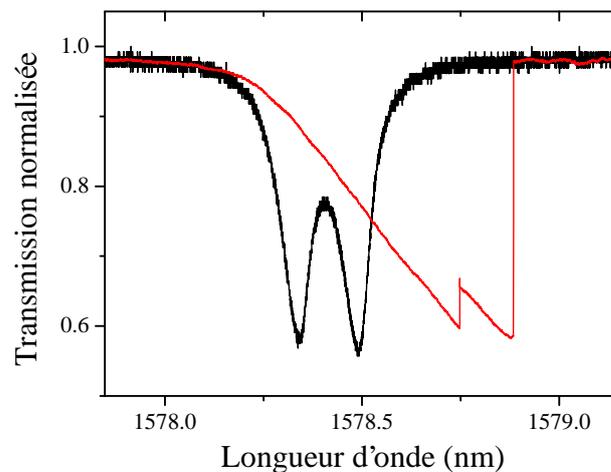


FIGURE 3.21: Spectre de transmission normalisée d'un doublet à haute (rouge) et basse puissance optique (noir). On remarque l'apparition d'une forme triangulaire lors du balayage lent en longueur d'onde du laser des petites vers les grandes longueurs d'onde.

Cet effet de distorsion de la résonance optique, nommé "distorsion thermo-optique", car principalement dû à la hausse de température dans le disque, a été observé et compris par plusieurs groupes sur d'autres plateformes [85, 86]. Cet effet nous interdit la lecture directe du facteur de qualité optique à haute puissance optique par la largeur à mi-hauteur de la lorentzienne. Le contraste de la résonance, lui, peut par contre toujours se lire au moment du saut brutal d'intensité (coté droit de la courbe rouge, figure 3.21) lorsque la longueur d'onde laser est balayée des petites vers les grandes valeurs.

Dans cette section, nous considérons que la distorsion de la résonance optique est complètement dominée par la hausse de température du disque et négligeons les effets dus aux forces de pression de radiation et électrostrictives. L'effet thermo-optique observé est donc la conséquence des pertes par absorption. Sa modélisation permet de mettre un chiffre sur ces pertes. Nous allons donc décrire ce phénomène plus en détail.

L'absorption de photons par le matériau provoque le transfert d'énergie du mode optique vers des degrés de liberté électroniques. Ce transfert est mono directionnel car on ne considère pas les désexcitations électroniques radiatives vers le mode optique (fluorescence, émission stimulée) mais seulement les désexcitations non-radiatives par couplage aux phonons du cristal. A l'échelle macroscopique, ce transfert induit une augmentation de la température du cristal, qui provoque une dilatation du cristal ainsi qu'un changement de son indice de réfraction. On observe en conséquence un déplacement vers le rouge des fréquences propres des modes optiques.

La hausse de la température du disque due à l'absorption

La hausse de la température du disque résulte d'un équilibre entre la puissance fournie par absorption des photons du mode optique et la puissance évacuée par diffusion thermique vers le substrat au travers du piédestal.

$$\mathcal{P}_{abs} = \mathcal{P}_{evac} \quad (3.29)$$

Nous faisons l'hypothèse que les photons, confinés à la périphérie du disque, sont absorbés à la surface et créent une augmentation locale de température qui diffuse ensuite vers le centre du disque puis le piédestal et enfin le substrat. En régime permanent un gradient de température se forme entre la périphérie du disque et le substrat. Il dépend des coefficients de diffusion des matériaux ainsi que de leur géométrie. Le flux thermique à travers les isosurfaces est donné par $\vec{\Phi} = -\lambda \vec{\nabla} T$ où λ est la conductivité thermique du matériau en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. La puissance thermique est donnée par l'intégrale du flux sur les isosurfaces. Elle est constante si la puissance optique absorbée est constante. Cela implique que les zones de fort gradient thermique se situent aux endroits de faible surface et de faible conductivité thermique.

La conductivité thermique du piédestal en $\text{Al}_{0.8}\text{Ga}_{0.2}\text{As}$ ($\lambda_{\text{AlGaAs}} = 42 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) est inférieure à celle du GaAs ($\lambda_{\text{GaAs}} = 55 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). Les surfaces de gradient thermique constant (isosurface) dans le disque s'approximent comme les surfaces périphériques de cylindres de rayon r et de hauteur t_d l'épaisseur du disque ($S_d = 2\pi r t_d$). A la proximité du piédestal de rayon r_p cette surface s'exprime $S_d = 2\pi r_p t_d$. Cette surface doit être comparée à celle du piédestal ($S_p = \pi r_p^2$). Les deux surfaces deviennent égales lorsque le rayon du piédestal est égal à deux fois l'épaisseur du disque ($r_p = 2t_d$). Deux régimes peuvent exister en fonction de la taille du piédestal :

- Le piédestal possède un rayon de taille similaire ou inférieur à deux fois l'épaisseur du disque (figure 3.22(b)). Un fort gradient de température apparaît alors dans le piédestal.
- Le piédestal possède un rayon supérieur à deux fois l'épaisseur du disque (figure 3.22(a)). La zone de fort gradient se situe dans le disque mais proche du piédestal (là où la surface est la plus faible).

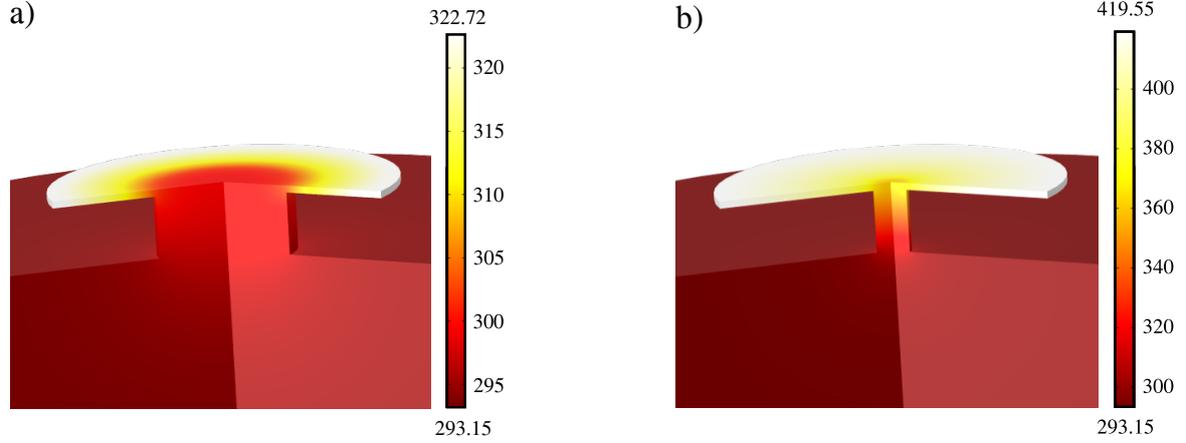


FIGURE 3.22: Profils de température T (en Kelvin) en régime permanent pour une puissance optique absorbée sur la bordure du disque ($\kappa_{i_{abs}} T_0 P_{circ} = 1$ mW). Le disque possède une épaisseur de 200 nm, un rayon de 5 μm . Le rayon du piédestal mesure 2 μm pour la figure (a) et 500 nm pour la figure (b).

Dans les deux cas, le fort gradient apparaît dans le piédestal ou dans la région limitrophe. Cela permet de poser l'hypothèse d'une température uniforme T dans le disque. Dans la réalité, la température est quasiment homogène vers la périphérie du disque, là où sont localisés les modes de galerie. La fuite de chaleur ne se produit que dans le piédestal. La capacité d'évacuation de la chaleur par le piédestal dépend de son coefficient de conductivité thermique et de sa géométrie. L'augmentation de température dans le disque est directement proportionnelle à la puissance optique absorbée et à la capacité à évacuer cette énergie. Dans le chapitre 1, nous avons défini l'augmentation de température moyenne en régime permanent (équation 1.70) :

$$\Delta T^{eq} = R_{th} \mathcal{P}_{abs} = R_{th} \kappa_{i_{abs}} T_0 \mathcal{P}_{circ} \quad (3.30)$$

où R_{th} , la résistance thermique, traduit la difficulté à évacuer l'énergie thermique du disque à travers le piédestal. Elle s'exprime en K.W^{-1} et dépend principalement des caractéristiques du piédestal [61] (hauteur h_p , rayon r_p et conductivité thermique λ_{AlGaAs}). En prenant un piédestal cylindrique la résistance thermique s'écrit :

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda_{AlGaAs}} \frac{h_p}{\pi r_p^2} \quad (3.31)$$

La connaissance de la hausse de température dans le disque ΔT^{eq} nous permet d'évaluer l'absorption $\kappa_{i_{abs}}$ uniquement si le rayon r_p et la hauteur du piédestal h_p sont connus. Le rayon du piédestal intervient à la puissance deux, il est donc primordial de bien le connaître.

Déplacement de la fréquence de résonance dû à la température

L'augmentation de température dilate le disque et change l'indice de réfraction. Il est nécessaire de poser des ordres de grandeurs sur ces deux mécanismes afin de les discriminer.

On considère au premier ordre en variation une dépendance linéaire de la fréquence de résonance optique ω_0 avec la température T :

$$\Delta\omega_0 = \frac{\partial\omega_0}{\partial T}\Delta T \quad (3.32)$$

$\frac{\partial\omega_0}{\partial T}$ est évalué pour une dilatation et pour un changement d'indice. Le coefficient de dilatation thermique du GaAs $\alpha = 5,73 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ et le coefficient thermo-optique $\frac{dn}{dT} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ permettent d'estimer ce déplacement de la fréquence. Le décalage de la résonance par la dilatation est majoritairement dû au changement de rayon R (plutôt qu'à l'épaisseur), qui varie comme $\Delta R = R\alpha\Delta T$ au premier ordre. L'indice de réfraction, pour sa part, varie suivant $\Delta n = \frac{dn}{dT}\Delta T$ au premier ordre. Les deux coefficients s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial\omega_0}{\partial T} \right|_{\text{indice}} = \frac{\Delta\omega_0}{\Delta T} = \frac{\Delta\omega_0}{\Delta n} \frac{dn}{dT} \\ \left. \frac{\partial\omega_0}{\partial T} \right|_{\text{dilatation}} = \frac{\Delta\omega_0}{\Delta T} = \frac{\Delta\omega_0}{\Delta R} R\alpha \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Ces deux coefficients sont comparés pour différents disques en table (3.4).

Rayon (μm)	ν_0 (Hz)	m	ΔR (nm)	$\frac{\partial\omega_0}{\partial T} _{\text{rayon}}$ (Hz.K $^{-1}$)	$\frac{\partial\omega_0}{\partial T} _{\text{indice}}$ (Hz.K $^{-1}$)
5	$1,923175 \cdot 10^{14}$	46	2,9	$-5,3 \cdot 10^9$	$-79,5 \cdot 10^9$
4	$1,926401 \cdot 10^{14}$	36	2,3	$-5,2 \cdot 10^9$	$-79,5 \cdot 10^9$
3	$1,927426 \cdot 10^{14}$	26	1,7	$-5,2 \cdot 10^9$	$-79,4 \cdot 10^9$
2	$1,91748 \cdot 10^{14}$	16	1,1	$-5,0 \cdot 10^9$	$-80,5 \cdot 10^9$
1	$1,990332 \cdot 10^{14}$	7	0,6	$-5,6 \cdot 10^9$	$-81,0 \cdot 10^9$

TABLE 3.4: Calcul des coefficients $\frac{\partial\omega_0}{\partial T}$ en utilisant le calcul des fréquences propres du mode TE, $p = 1$ via Comsol pour des disques de différents rayons. Le disque possède une épaisseur de 200 nm. Le changement d'indice et de rayon est considéré pour un échauffement de 100 K avec $\Delta n = 0.023$.

Le déplacement de la résonance optique dû à l'augmentation de la température est donc dominé par la variation d'indice de réfraction (table 3.4).

Expérimentalement, nous sommes capables de mesurer précisément le déplacement des résonances optiques. Sur un spectre optique présentant une distorsion triangulaire thermo-optique, le déplacement maximal de la résonance s'obtient par l'abscisse du saut en intensité (fin du triangle).

Le déplacement donne l'élévation de température, si on suppose que $\frac{dn}{dT}$ est bien connu. Nous pensons que c'est le cas dans nos disques à température ambiante.

Simulation de l'effet thermo-optique

Des simulations numériques ont été réalisées afin d'asseoir les mécanismes décrits ci-dessus. Un modèle dynamique dans le temps simule l'acquisition d'un spectre optique par balayage

de la longueur d'onde du laser. A chaque pas de longueur d'onde, température et indice du matériau sont recalculés. Le modèle diverge si les temps caractéristiques d'établissement des régimes permanents ne sont pas pris en compte.

Le temps optique représente le temps de vie des photons dans la cavité. Il est donné par l'inverse du taux de pertes optiques intrinsèques κ_i . Pour des facteurs de qualité de $10^4 - 10^5$, il est de l'ordre de $10^{-10} - 10^{-11}$ s. Le temps thermique représente lui la durée de l'établissement du régime stationnaire en température. Il peut être simulé numériquement à l'aide de Comsol ou estimé à l'aide des paramètres thermiques du système.

$$\tau_c = \frac{L_c^2}{\alpha_{th}} \quad (3.34)$$

avec L_c une longueur caractéristique du système. Le coefficient de diffusivité α_{th} en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ se calcule à l'aide des paramètres intrinsèque des matériaux :

$$\alpha_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_{th}} \quad (3.35)$$

avec la conductivité thermique $\lambda_{GaAs} = 55 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, la densité $\rho_{GaAs} = 5317 \text{ kg.m}^{-3}$, la chaleur spécifique $c_{th} = 327 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. Pour une longueur caractéristique de $L_c = 7 \text{ }\mu\text{m}$ (hauteur piedestal + rayon du disque), le temps caractéristique $\tau_c = 1,55 \text{ }\mu\text{s}$. Il est en bon accord avec les simulations thermiques par éléments finis en régime transitoire pour l'ordre de grandeur. La prise en compte plus précise de la dimension du piédestal permet d'affiner cette évaluation (voir figure 3.23).

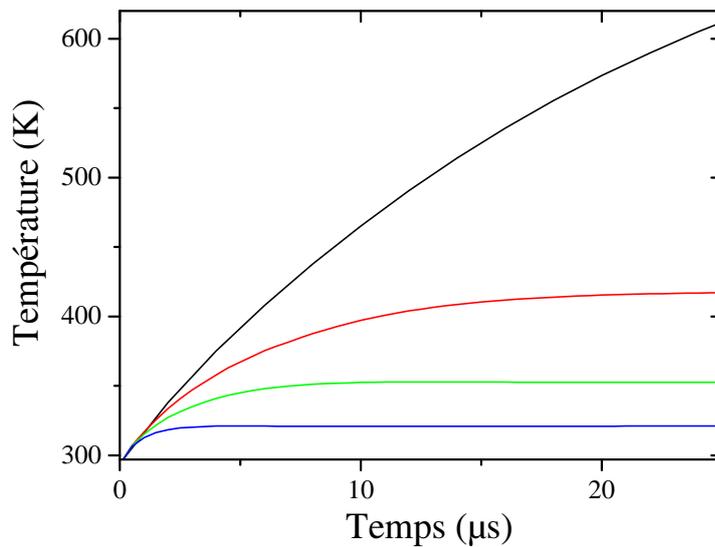


FIGURE 3.23: Température dans le disque près de la périphérie en fonction du temps, calculée à l'aide de Comsol. Le rayon du disque est de $5 \text{ }\mu\text{m}$. Les courbes noires, rouges, vertes et bleues sont calculées pour un piédestal respectivement de rayon 100 nm , 500 nm , $1 \text{ }\mu\text{m}$ et $2 \text{ }\mu\text{m}$. Les temps caractéristiques issus du fit exponentiel de ces courbes sont respectivement de $20 \text{ }\mu\text{s}$, $5 \text{ }\mu\text{s}$, $2,5 \text{ }\mu\text{s}$ et $0,8 \text{ }\mu\text{s}$.

Le temps thermique, beaucoup plus grand que le temps optique, pilote la dynamique de l'effet thermo-optique. La loi temporelle régissant l'écart en température du disque est une simple exponentielle décroissante (figure 3.23) :

$$\Delta T(t) = (\Delta T(0) - R_{th}P_{abs}(\Delta\omega_0))e^{-\frac{t}{\tau_c}} + R_{th}P_{abs}(\Delta\omega_0) \quad (3.36)$$

où R_{th} en $K.W^{-1}$ est le coefficient qui caractérise la transduction (puissance absorbée \rightarrow écart en température). La puissance absorbée dans un mode de galerie propagatif singulet (sans couplage avec le mode contrapropageant "ccw") est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{abs}(\Delta\omega_0) &= \kappa_{i_{abs}} \hbar\omega N_{cav} \\ &= \kappa_{i_{abs}} \frac{\kappa_e}{(\omega - (\omega_0 + \Delta\omega_0))^2 + (\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2})^2} P_{in} \end{aligned} \quad (3.37)$$

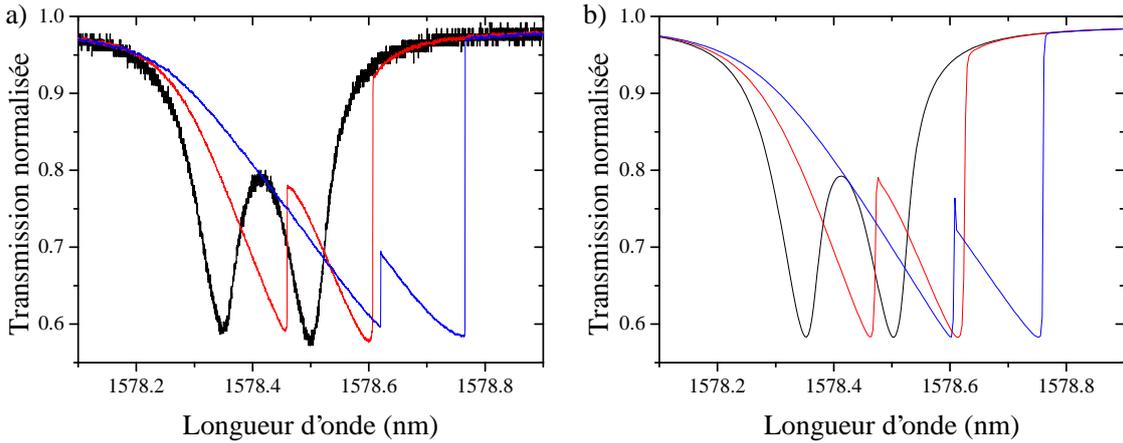


FIGURE 3.24: Courbes expérimentales (a) et simulées (b) d'un mode optique. Le rayon du disque vaut $2,5 \mu m$. Le facteur de qualité de chaque pic du doublet est $2,3 \cdot 10^4$. Les courbes noires, rouges et bleues sont prises à des puissances de $15 \mu W$, $75 \mu W$ et $150 \mu W$.

La figure (3.24) présente les courbe expérimentales (a) et les courbes simulées (b) pour un doublet, en s'appuyant sur les équations (3.36) et (3.37). La simulation prouve que le phénomène thermo-optique décrit précisément la distorsion du mode optique sous l'augmentation de la puissance injectée. La résonance optique, subit un déplacement proportionnel à la puissance injectée :

$$\Delta\omega_0 = \frac{\partial\omega_0}{\partial T} \Delta T \quad (3.38)$$

$$= \frac{\partial\omega_0}{\partial T} R_{th} \kappa_{i_{abs}} T_0 \mathcal{P}_{circ} \quad (3.39)$$

$$= \frac{\partial\omega_0}{\partial T} R_{th} \kappa_{i_{abs}} \frac{\kappa_e}{(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2})^2} P_{in} \quad (3.40)$$

Ce fait s'accorde aux expériences ainsi qu'aux simulations numériques. Les pertes optiques intrinsèques κ_i et extrinsèques κ_e restent constantes dans notre modèle lorsqu'on augmente la puissance injectée ce qui reproduit bien la réalité expérimentale. Le contraste de résonance reste donc inchangé. Seule la fréquence de résonance se déplace quand le nombre de photons augmente dans la cavité.

3.4.2 L'absorption à deux photons

L'absorption à deux photons ("TPA") est rendue possible par la réponse non-linéaire du cristal au champ électromagnétique. Elle est volumique et dépend directement des caractéristiques intrinsèques du matériau.

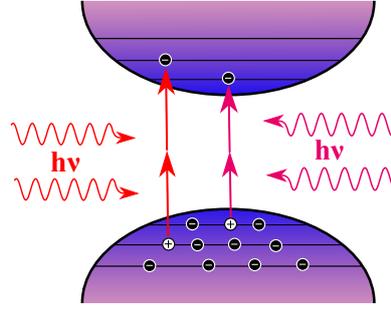


FIGURE 3.25: Représentation schématique de l'absorption à deux photons. La bande de valence est remplie d'électrons (en bas). La bande de conduction vide (en haut) reçoit des électrons par absorption de deux photons de même énergie. Dès que l'énergie des photons est supérieure à la moitié de l'énergie du gap, l'absorption à deux photons peut avoir lieu.

L'absorption à deux photons est proportionnelle au carré de l'intensité dans le disque. Pour un mode se propageant dans la direction \vec{e}_z :

$$\frac{dI(x,y,z)}{dz} = -\alpha I(x,y,z) - \beta I^2(x,y,z) \quad (3.41)$$

où $I(x,y,z)$ est l'intensité du champ en W.m^{-2} . α représente les pertes linéaires et β le coefficient de pertes par absorption à deux photons en m.W^{-1} . β dépend des caractéristiques du matériau et notamment de son coefficient $\chi^{(3)}$. La littérature donne $\beta \simeq 15 - 30 \text{ cm.GW}^{-1}$ pour GaAs autour de $1,5 \mu\text{m}$ à température ambiante [87, 88]. Ces coefficients sont définis dans une géométrie cartésienne. Dans notre géométrie cylindrique, il faut adapter ce facteur à notre mode propagatif circulaire :

$$\frac{dI(r,\theta,z)}{d\theta} = -\alpha_\theta I(r,\theta,z) - \beta_\theta I^2(r,\theta,z) \quad (3.42)$$

où α_θ est en rad^{-1} . et β_θ en $\text{m}^2.\text{W}^{-1}.\text{rad}^{-1}$. α_θ s'exprime en fonction de κ_i :

$$\alpha_\theta = \frac{\kappa_i T_0}{2\pi} \quad (3.43)$$

Par ailleurs la passage de cartésien à cylindrique nous donne :

$$\beta_\theta = \beta r_{moy} = \beta \frac{\int r I(r, \theta, z) dr dz}{\int I(r, \theta, z) dr dz} \quad (3.44)$$

On peut finalement écrire :

$$\frac{dI(r, \theta, z)}{d\theta} = -\frac{T_0}{2\pi} \left(\kappa_i + \frac{2\pi\beta r_{moy}}{T_0} I(r, \theta, z) \right) I(r, \theta, z) \quad (3.45)$$

$$= -\frac{T_0}{2\pi} (\kappa_i + \Delta\kappa_i) I(r, \theta, z) \quad (3.46)$$

Le second terme $\Delta\kappa_i = \frac{2\pi\beta r_{moy}}{T_0} I(r, \theta, z)$ s'additionne aux pertes linéaires intrinsèques κ_i de la cavité. Ainsi, un grand nombre de photons dans la cavité signifie des pertes intrinsèques exacerbées. Dans les simulations numériques $\Delta\kappa_i$ est calculé à partir de la puissance circulante divisée par une fraction de la section azimutale du disque. L'approximation est grossière mais permet de mener le calcul sans le complexifier outre mesure.

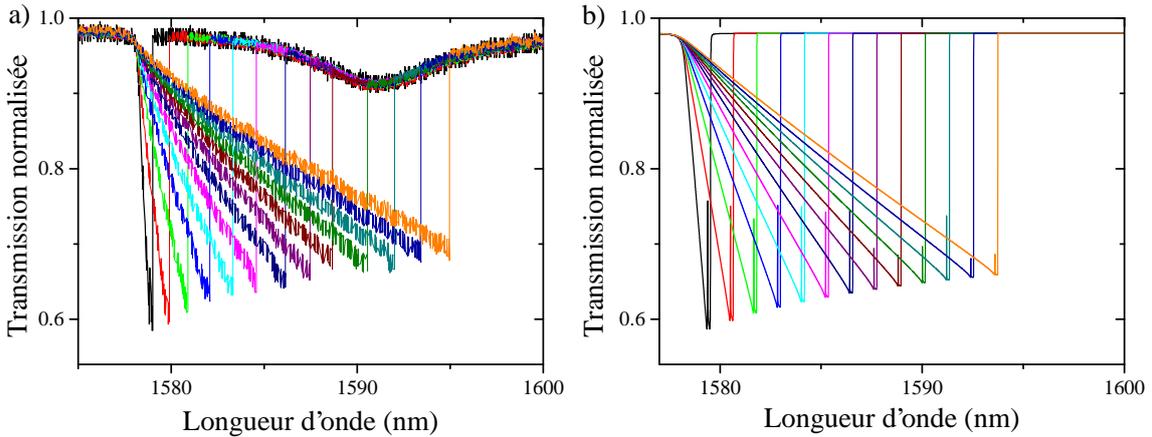


FIGURE 3.26: Courbes expérimentales (a) et simulées (b) d'un mode optique présentant une signature d'absorption à deux photons en plus de l'effet thermo-optique. Le rayon du disque est $R = 2,5 \mu\text{m}$. Le facteur de qualité du doublet est $2,3 \cdot 10^4$ à basse puissance optique. Pour 1 mW affiché sur le contrôleur du laser, 333 μW sont mesurés en sortie de fibre. Les 13 spectres ont été acquis pour des puissances affichées sur le contrôleur du laser de 1 à 13 mW.

Les pertes associées à l'absorption à deux photons $\Delta\kappa_i$ étant proportionnelles à la puissance circulante, le facteur de qualité Q_{TPA} n'est pas équivalent aux autres termes constants considérés précédemment. En effet les pertes par absorption à deux photons sont nulles hors résonance optique et augmentent lorsque la puissance grandit à l'intérieur de la cavité. A résonance $\Delta\kappa_i$ est maximum.

L'absorption à deux photons a des "effets" visibles sur le spectre optique. Par exemple, la puissance absorbée augmente de manière quadratique avec le nombre de photons. On s'attend donc naïvement à un décalage thermo-optique de fréquence des modes optiques non linéaire

avec la puissance incidente. Or la figure (3.26) nous apprend qu'il n'en est rien. Le phénomène s'explique en considérant que le taux de pertes optiques de la cavité ($\kappa_i + \Delta\kappa_i$) augmente lorsque le nombre de photons en cavité fait de même. La puissance circulante maximale est, quand à elle, abaissée par l'augmentation du taux de pertes par TPA. Les effets se compensent donc et l'évolution finale reste donc quasi linéaire pour la puissance circulante en fonction de la puissance incidente. L'absorption à deux photons ne peut donc pas être mis en évidence par le décalage thermo-optique de fréquence.

Pour des puissances injectées croissantes, le contraste à résonance (au point de saut brutal d'intensité dans le spectre) change par contre. Cet effet est du à l'augmentation des pertes intrinsèques. L'équilibre entre κ_e et κ_i change en fonction de la puissance optique. Un mode sur-couplé voit son contraste augmenter (figure 3.27), à l'inverse du mode sous-couplé dont le contraste diminue (figure 3.26). C'est la signature de l'absorption à deux photons qui apparaît lorsqu'un grand nombre de photons sont injectés dans les disques GaAs.

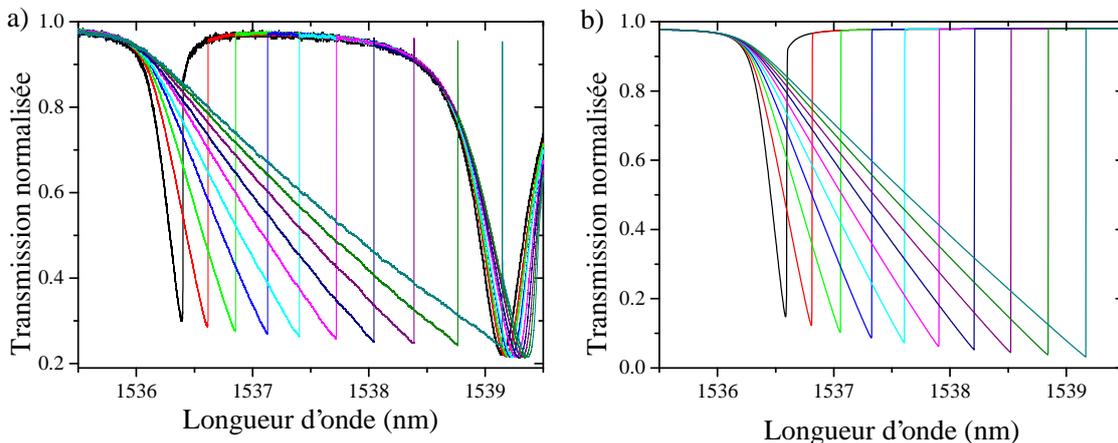


FIGURE 3.27: Courbes expérimentales (a) et simulées (b) d'un mode optique présentant une signature d'absorption à deux photons. Le mode est sur-couplé. En augmentant ses pertes intrinsèques il tend vers l'équilibre $\kappa_e = \kappa_i$ correspondant au couplage critique et donc au contraste maximum. Pour 1 mW affiché sur le contrôleur du laser, 333 μ W sont mesurés en sortie de fibre. Les 10 spectres ont été acquis pour des puissance affichés sur le contrôleur du laser de 1 à 10 mW. La seconde résonance optique de faible facteur de qualité apparaissant dans le spectre mesuré n'est pas pris en compte dans la simulation et n'apparaît donc pas dans le spectre (b).

Les effets d'absorption à deux photons se révèlent donc à plusieurs occasions à haute puissance optique. Si la simulation numérique rend compte de l'effet de diminution du contraste en fonction de la puissance absorbée, il est difficile d'être quantitatif sur ce phénomène. Le déplacement de la fréquence optique en fonction de la température n'est plus forcément linéaire à grand échauffement. L'effet des porteurs créés par absorption à deux photons sur l'indice de réfraction n'est pas pris en compte. Les figures (3.26) et (3.27) présentent les résultats expérimentaux et simulés rendant compte du comportement des résonances optiques à haute puissance. Les spectres sont qualitativement en bon accord mais quantitativement l'accord n'est pas encore parfait.

3.5 Améliorer le facteur de qualité optique

L'étude des différents types de pertes optiques a pour but de comprendre les mécanismes associés pour pouvoir les contrôler et augmenter les facteurs de qualité optique des disques GaAs.

Courbure

Les pertes par courbures sont intrinsèques aux dimensions et à l'indice de réfraction du disque. La seule façon d'agir est de changer de matériau (non envisagé dans cette thèse), ou de taille de disque. Le couplage opto-mécanique augmente avec une réduction du rayon. Il n'est pas dans notre intérêt d'augmenter trop la taille de nos disques.

Rugosité : le lissage

Les pertes par diffusion de surface sont de deux types : dues à la rugosité et à l'ondulation. La première fixe dans notre cas une limite haute et quasiment constante pour toutes les familles de mode (différents p) Q_{rug} de quelques 10^6 . La seconde source de pertes, l'ondulation, dépend fortement du nombre azimutal m mis en jeu. L'ondulation de nos disques est composée de fréquences spatiales azimutales proches de l'unité, généralement de 1 à 10. Elle produit des pertes plus importantes pour un mode ayant un nombre azimutal m proche de ces fréquences. Ainsi sur la gamme 1500 - 1600 nm, les modes les moins affectés sont ceux de la famille p la plus petite. Là encore, éviter l'ondulation revient à augmenter la taille du disque (non désiré). Technologiquement, l'ondulation provient essentiellement de la gravure chimique humide. L'autre technique utilisée au laboratoire est la gravure physique par RIE ICP. Nous n'avons pas pu étudier ce type de gravure par TEM pour des raisons techniques. Intuitivement, l'ondulation devrait être réduite grâce à l'attaque quasiment verticale de l'échantillon (à supposer que la résine ne possède pas d'ondulation). Par ailleurs les clichés MEB de tels échantillons présentent des stries sur les surfaces gravées, révélatrice d'une rugosité accrue par rapport à notre gravure chimique (figure 3.28). L'étude mériterait d'être approfondie.

Bien avant la compréhension fine des mécanismes de pertes de surface présentée ici, des tests empiriques de lissage de nos disques ont été entrepris. Diverses solutions censées polir les surfaces rugueuses de nos disques ont été testées, suivant la littérature. L'idée est d'utiliser une sauce de gravure isotrope du GaAs suffisamment lente pour lisser la surface. La gravure du GaAs est fonction des réactants, de leurs concentrations, de la température ainsi que de l'agitation de la solution. Ces différents paramètres doivent être ajustés pour obtenir l'effet désiré. La gravure doit être limitée par la vitesse de diffusion des produits et réactifs ("diffusion limited") et non pas par la cinématique de la réaction ("reaction limited") pour espérer obtenir un lissage. Les photos MEB après tentatives de lissage ont montré souvent des surfaces abimées par le processus. Les solutions de lissage expérimentées furent $H_2O:HCl:H_2O_2$ dans les proportions 40:1:4 et 80:1:4 en volume [89] ainsi que BCK [63] diluée. Les spectres optiques résultants n'ont pas montré d'amélioration des facteurs de qualité optique. Les résonances furent décalées vers les basses longueurs d'onde (~ 10 nm), preuve que les dimensions du disque sont légèrement réduites (de l'ordre du nanomètre), probablement par le retrait de la couche de reconstruction de surface.

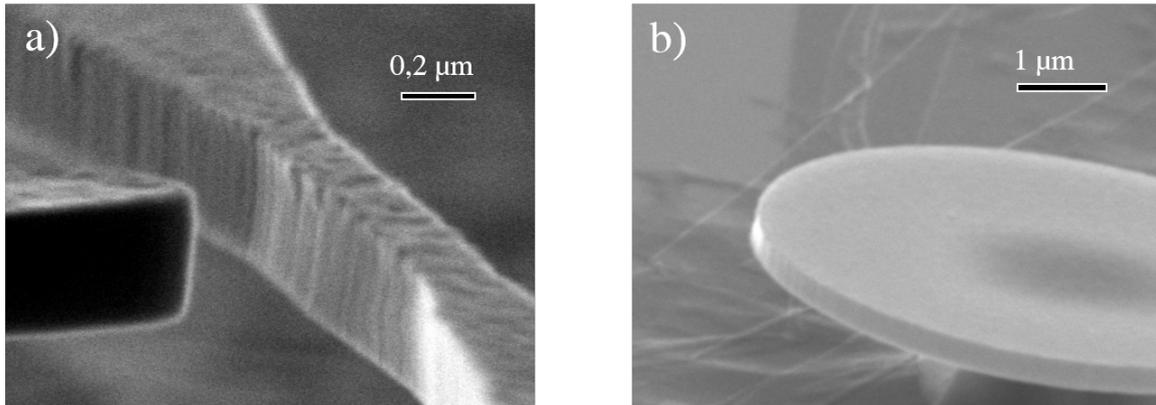


FIGURE 3.28: Clichés MEB de disque (b) et guide d'onde (a) produit par RIE ICP. La rugosité n'apparaît que sous un certain angle de vue. Elle est clairement visible sur un guide droit mais quasiment impossible à distinguer sur un disque.

La compréhension de l'ensemble des phénomènes de pertes était alors très incomplète. Il est maintenant clair que la rugosité peut être le phénomène de perte dominant sur des modes TE à faible p (dépendant de la taille des disques). Or le faible couplage entre la fibre et le disque pour ces familles n'en font pas les principaux protagonistes pour l'optomécanique présentée dans cette thèse (diamètre de disque typique entre 5 et 10 μm).

Absorption de surface : vers la passivation

Les pertes par absorption à la surface sont délicates à combattre. Il faut enlever les états optiquement absorbants de la surface. En d'autres termes, restructurer la surface afin qu'elle ne présente plus d'états électroniques dans le gap GaAs. Cette action se nomme passivation optique. Un grand effort de recherche a été mené pour passiver les surfaces du GaAs au niveau international. Un moyen usuel d'investigation d'un tel traitement est la photoluminescence (PL). Les états de surfaces mid-gap sont une alternative à la désexcitation des électrons de la bande de conduction à la bande de valence. En première lecture, une augmentation de la photoluminescence indique donc une réduction du nombre d'états mid-gap.

La littérature fait état de passivation de surfaces GaAs à l'aide de sulfure [90] [91] et d'azote [92] [93]. Nous avons démarré une collaboration avec Daniel Paget à l'École Polytechnique sur la passivation du GaAs par nitruration (Azote). L'objectif est de former une monocouche d'azote à la surface du GaAs. Cette terminaison ne posséderait que peu d'états dans la bande interdite et serait durable. J'ai mené au cours de ma thèse les premières tentatives de nitruration adaptée aux disques mais sans augmentation à ce jour des facteurs de qualité optiques mesurés. L'effort est poursuivi aujourd'hui dans l'équipe par Biswarup Guha.

L'absorption à deux photons

Enfin les pertes par absorption à deux photons sont intrinsèques au GaAs. Les moyens de les éviter sont les suivants :

- Travailler à suffisamment basse puissance optique.

- Travailler avec des longueurs d'onde supérieures à 1740 nm (énergie de milieu de gap).
- Changer de matériau. Exemple : l'AlGaAs à 80% d'Aluminium qui possède un gap plus grand que GaAs.

Dissipation mécanique des disques GaAs

Les oscillateurs mécaniques échangent en permanence de l'énergie avec leur environnement. Cela se traduit, dans l'étude de leur dynamique, par un terme de perte et un terme de pompe stochastique (dissipation-fluctuation). Dans l'étude des effets optomécaniques, il apparaît que les phénomènes d'amplification et de refroidissement sont plus efficaces lorsque le mode mécanique est isolé de son environnement (faibles pertes). Les pertes mécaniques des disques sont représentées par le coefficient d'amortissement γ_m . Le facteur de qualité mécanique est donné par $Q_{meca} = \frac{\omega_m}{\gamma_m}$.

Les pertes mécaniques des disques ont plusieurs origines :

- Les pertes par interaction avec un fluide environnant le disque, qui comprennent l'amortissement dans l'air ou un liquide et les effets dit de "squeezed-film", représentées par γ_{fluide} .
- Les pertes par ancrage représentées par γ_{anc} .
- Les pertes thermoélastiques représentées par γ_{te} .

Dans l'approximation où ces sources de pertes sont indépendantes les unes des autres : $\gamma_m = \gamma_{fluide} + \gamma_{anc} + \gamma_{te}$. Le facteur de qualité mécanique Q_{meca} s'obtient donc par la formule :

$$\frac{1}{Q_{meca}} = \frac{1}{Q_{fluide}} + \frac{1}{Q_{anc}} + \frac{1}{Q_{te}} \quad (4.1)$$

où $Q_{fluide} = \omega_m/\gamma_{fluide}$, $Q_{anc} = \omega_m/\gamma_{anc}$ et $Q_{te} = \omega_m/\gamma_{te}$. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux diverses sources de pertes mécaniques afin d'identifier les facteurs dominants. Cette connaissance pourra ensuite être exploitée pour orienter la conception des disques ou de l'expérience, dans le but d'obtenir de fort effets optomécaniques dynamiques.

4.1 Amortissement fluide

Un solide de masse m en mouvement dans un fluide subit une force d'amortissement, qui dans un grand nombre des cas est opposée à sa direction de mouvement et proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -m\gamma_{fluide}\vec{v}$. Chaque mode mécanique subit cette force dont le coefficient γ_{fluide} doit être déterminé.

A mon arrivé en thèse, nous nous sommes intéressés à l'amortissement du mouvement mécanique des disques GaAs dans l'air. La distinction entre modes flexuraux et radiaux est importante pour l'amortissement dans un fluide. Les modes radiaux de respiration subissent majoritairement (surface supérieure et inférieure du disque) une force de cisaillement vis-à-vis du fluide. À l'opposé, les modes flexuraux subissent une force normale sur la surface supérieure et inférieure. A priori, la force de frottement s'exerçant en cisaillement est plus faible que celle s'exerçant perpendiculairement à la surface (comme on peut s'en persuader en considérant par exemple les forces s'exerçant sur les rames d'un bateau). Sous cette hypothèse, les modes flexuraux subissent davantage d'amortissement fluide que les modes radiaux. Dans notre démarche d'étude de l'amortissement fluide, il apparaît donc plus indiqué d'utiliser les modes flexuraux que les modes radiaux. Une expérience utilisant l'interférométrie optique fibrée a été développée dans ce sens, avec pour objectif la mesure des facteurs de qualité de ces modes flexuraux des disques GaAs dans l'air. En parallèle de cette étude expérimentale, une étude théorique analytique a été menée afin de développer la base d'un modèle d'amortissement fluide dans le régime visqueux.

4.1.1 Mesure du mouvement flexural des disques dans l'air

Des échantillons comprenant des disques de large rayon (figure 4.1(a)), fabriqués avant mon arrivée, ont été utilisés pour cette étude (entre 10 et 50 microns de rayon). Ce grand rayon a été choisi de manière à obtenir des fréquences flexurales vers quelques MHz, ce qui permet d'utiliser des techniques d'excitation piézoélectrique pour conférer un mouvement au disque. Le disque en GaAs et le piédestal en AlGaAs sont modélisés par des cylindres de rayon respectivement a et b et d'épaisseur t_d et h (figure 4.1(b)).

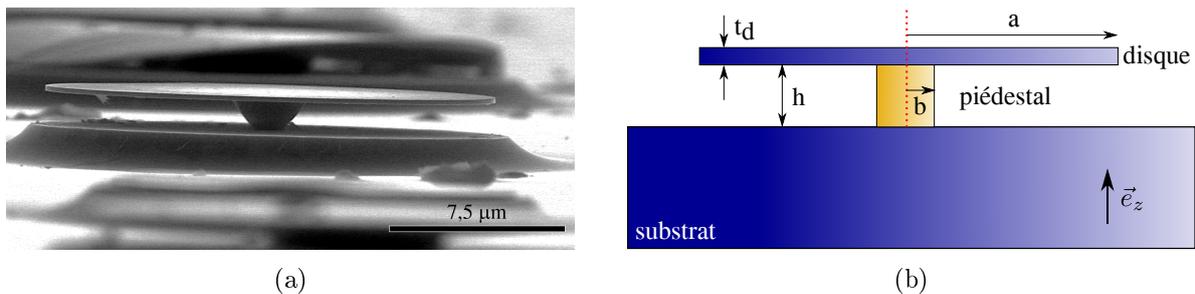


FIGURE 4.1: (a) Cliché MEB d'un grand disque. (b) Représentation schématique d'un disque. Le disque est défini par son rayon a et son épaisseur t_d et son piédestal par son rayon b et sa hauteur h .

Afin d'étudier les modes flexuraux de ces grands disques ainsi que leur amortissement fluide, nous avons monté deux expériences :

- l'analyse visuelle des modes mécaniques dans le microscope électronique à balayage, sous excitation piézoélectrique du mouvement.
- l'analyse spectrale des modes mécaniques flexuraux par interférométrie optique et détection optomécanique.

Nous détaillons dans cette partie les montages expérimentaux ainsi que les mesures obtenues.

Observation des profils de vibration des disques dans le MEB

L'imagerie du profil de vibration d'un mode est obtenu en provoquant l'excitation forcée du mouvement du disque grâce à une plaquette piézoélectrique collée sous l'échantillon. Une trappe du MEB a due être modifiée pour cette expérience (insertion d'un connecteur Fischer WDE 103 AZ 054) afin d'autoriser le passage d'un courant électrique tout en conservant les conditions d'étanchéité de l'appareil.

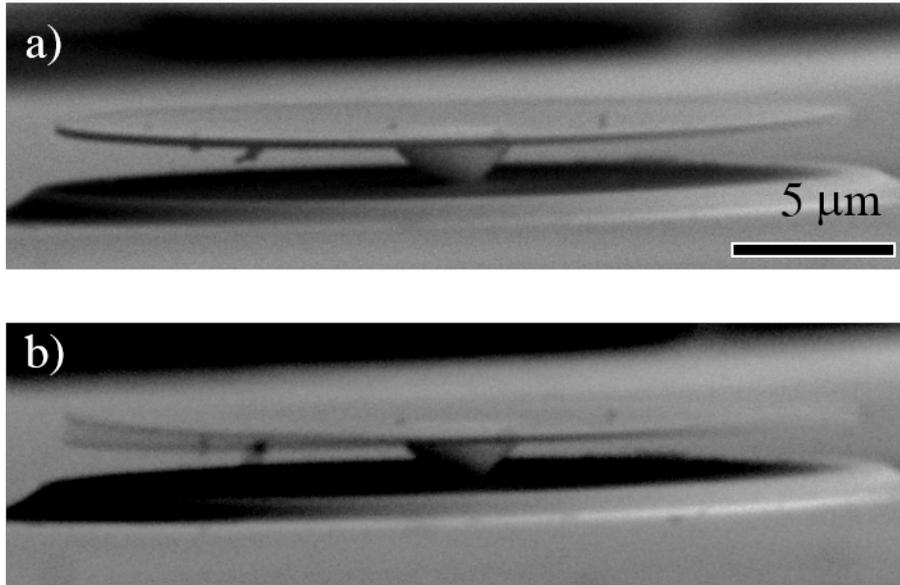


FIGURE 4.2: (a) Cliché MEB d'un disque sans excitation piézoélectrique. (b) Cliché MEB d'un disque oscillant selon le mode de vibration fléxural ($P=0$, $M=1$).

La plaquette piézoélectrique (Argillon Vibrit 420) est mise en mouvement oscillant par l'application d'une tension sinusoïdale grâce à un générateur basse fréquence (GBF) (Rhodes & Schwarz SMB100A3). Ce mouvement est transmis à l'échantillon semiconducteur contenant les disques collé sur la plaquette. Le disque subit alors une excitation forcée du mouvement, à la fréquence fournie par le GBF. Lorsque cette dernière correspond à la fréquence propre d'un mode mécanique, le déplacement mécanique du disque est amplifié et est alors visible par le système d'imagerie électronique du MEB (figure 4.2(b)).

Les fréquences des modes mécaniques (quelques MHz dans ces expériences) étant bien supérieures à la fréquence d'acquisition d'une image MEB (quelques secondes de temps d'acquisition), nous ne sommes capables d'imager qu'un profil moyenné du déplacement du disque faisant apparaître l'enveloppe du mouvement.

Cette technique de caractérisation visuelle dans le MEB présente cependant deux défauts majeurs :

- Pour observer aisément un profil de mode, il faut des amplitudes de vibration de quelques centaines de nanomètres. Or, à ces amplitudes, la mécanique du disque devient fortement non linéaire. Nous observons par exemple un effet hystérésis important lors d'un balayage en fréquence de la tension excitatrice. Ceci rend difficile l'analyse précise des fréquences propres et facteurs de qualité.

- Le MEB pollue l'échantillon en y déposant de la matière (résidus carbonés) lors d'une trop longue exposition. Ce dépôt de matière, lorsqu'il est trop important, modifie complètement les fréquences de résonance du disque.

Cette méthode MEB+piezo a l'avantage de permettre la visualisation du profil de vibration des modes mais ne permet donc pas de caractériser leur fréquence et leur facteur de qualité. Une seconde méthode, fondée sur l'interférométrie optique, rend possible la réalisation de ces mesures.

Interférométrie optique fibrée par le dessus

Nous avons mis au point une expérience permettant de caractériser plus finement les modes flexuraux des disques. Elle consiste en la réalisation d'une cavité Fabry-Pérot entre le disque et une fibre optique venant se positionner au dessus du disque, à sa verticale.

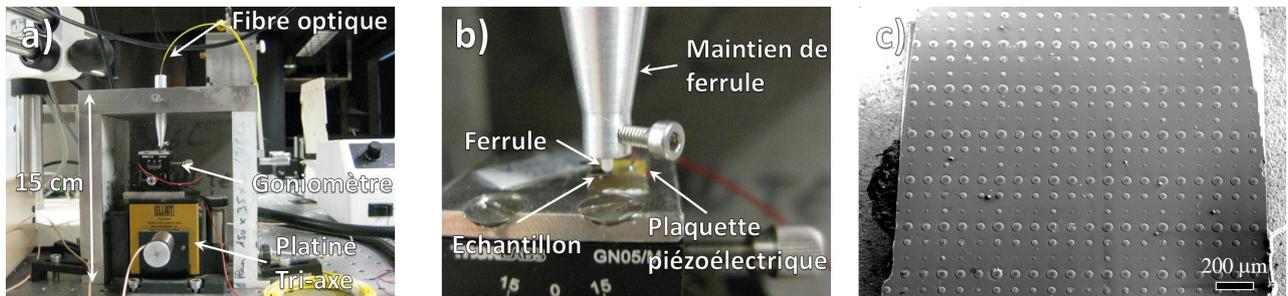


FIGURE 4.3: (a) Photo du montage expérimental. (b) zoom sur la ferrule et l'échantillon. (c) Cliché MEB de l'échantillon.

Le montage expérimental est présenté en photo en figure (4.3)(a) et (b) et est représenté schématiquement en figure (4.4)(a). Il comprend :

- Un laser accordable de longueur d'onde ~ 1550 nm, servant à pomper la cavité Fabry-Pérot.
- Un circulateur optique fibré (FOC) permettant de séparer la lumière entrant et sortant de la cavité.
- Une fibre optique dit "pig tail" faisant la liaison entre le FOC et la cavité. Le bout de la fibre optique clivé à angle droit est un miroir de la cavité Fabry Pérot, l'autre miroir étant le dessus du disque en GaAs.
- Un photodétecteur (PD) enregistrant la puissance optique réfléchiée par la cavité.
- Un analyseur de réseau ("network analyser") permettant d'exciter la plaquette piézoélectrique et d'analyser en retour le courant produit par le photodétecteur. Il fournit *in fine* l'amplitude et le déphasage de la réponse linéaire du système mécanique (car la réponse optique de la cavité est si rapide que l'on peut négliger son déphasage dans cette expérience).
- Une platine de translation tri-axe permettant de déplacer l'échantillon dans toutes les directions. Elle possède un déplacement grossier manuel et un positionnement piézoélectrique fin.
- Un goniomètre permettant de régler le parallélisme entre l'échantillon et la fibre.

- Une plaquette piézoélectrique collée à la laque d'argent entre l'échantillon et la platine tri-axe, permettant de faire vibrer l'échantillon par excitation piezo. La plaquette est câblée sur la sortie de l'analyseur de réseau.
- L'échantillon GaAs (figure 4.3(c)) comportant les disques. Un disque est positionné grâce à la platine tri-axe juste en dessous de la fibre optique clivée de manière à créer la cavité Fabry-Pérot la plus petite possible (moins de pertes optiques et sensibilité interférentielle plus élevée).

Les coefficients de réflexion optique de la silice et du GaAs étant faibles (0.04 pour la silice et 0.29 pour le GaAs), la cavité Fabry Pérot créée ne possède pas un très haut facteur de qualité . Il a été envisagé pendant un moment de coller un miroir diélectrique d'excellente qualité (haute réflectivité) au bout de la fibre clivée. Cependant une modélisation de la cavité a montré que le trop grand désaccord de réflectivité entre les deux miroirs obtenu dans ce cas ne permettait pas d'améliorer la sensibilité de la mesure.

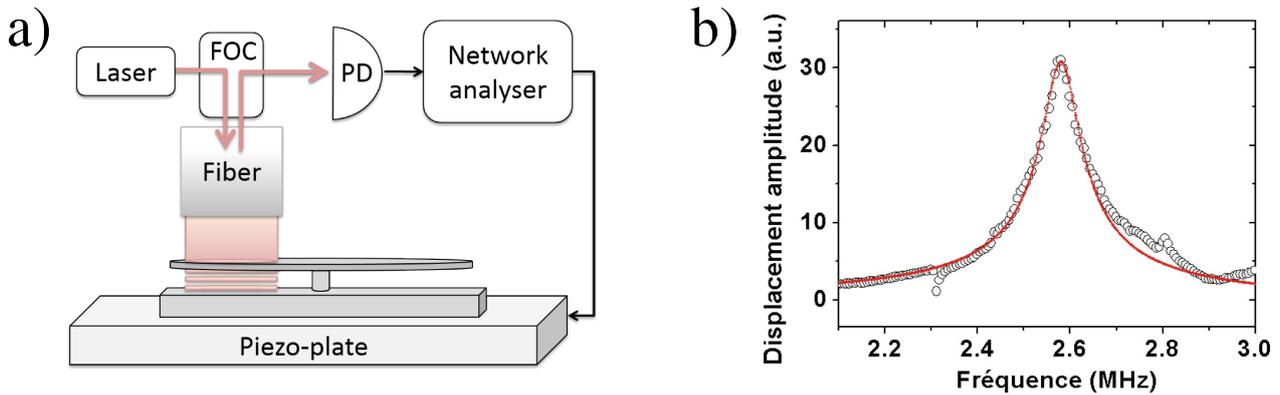


FIGURE 4.4: (a) Montage expérimental comprenant un laser, un circulateur optique fibré (FOC), une fibre optique clivée, un échantillon comprenant de larges disques, une plaquette piézoélectrique, un photodétecteur (PD) et un analyseur de réseau. (b) Spectre de l'amplitude de déplacement mesurée (cercles) et ajusté par une lorentzienne (ligne rouge).

Notons aussi que la cavité réalisée ici n'est en réalité pas une simple cavité Fabry-Pérot puisque la lumière laser est en partie transmise et en partie réfléchiée par les différentes interfaces air-GaAs rencontrées. Elle traverse ainsi le disque de GaAs d'épaisseur $t_d = 200$ nm et l'air d'épaisseur $h = 1,5$ μ m. Un formalisme de matrices de transfert permet de calculer le positionnement de l'échantillon sous la fibre offrant une sensibilité maximale.

Ce montage d'interférométrie optique fibrée permet de mesurer les spectres de déplacement mécanique des modes flexuraux des disques (figure 4.4(b)), qui dans la théorie de la réponse linéaire correspond à des pics lorentziens lorsque $Q_{meca} > 10$. Du fit lorentzien du spectre mécanique, nous extrayons la fréquence propre des modes flexuraux ainsi le coefficient d'amortissement γ_m (donné par la largeur à mi-hauteur de la lorentzienne).

En parallèle de ces mesures, nous nous sommes intéressé à décrire analytiquement les profils et les fréquences des modes flexuraux des disques GaAs ainsi que l'amortissement fluide s'exerçant sur ces derniers.

4.1.2 Théorie élastiques des plaques circulaires

La faible épaisseur du disque ($t_d = 200$ nm) par rapport au large rayon a permet de modéliser notre disque comme une plaque élastique annulaire. Ses modes mécanique peuvent alors être décrits par la théorie des plaques, présentée de manière très complète dans [94].

$$D\nabla^4 w(r,\theta,t) + \rho t_d \frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

où $w(r,\theta,t)$ (en m) représente le déplacement local de la plaque selon l'axe \vec{e}_z . t_d est l'épaisseur de la plaque (m) et ρ la densité volumique du disque (kg.m^{-3}). D est la rigidité en flexion (en $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$) :

$$D = \frac{Et_d^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.3)$$

où E est le module d'Young du matériau ($E_{\text{GaAs}} = 85,9$ GPa) considéré isotrope ici. ν le coefficient de poisson ($\nu_{\text{GaAs}} = 0,31$).

En cherchant les solutions sous la forme d'onde, $w(r,\theta,t) = \mathcal{W}(r,\theta) \cos(\omega t + \Phi)$, on obtient :

$$D\nabla^4 \mathcal{W}(r,\theta) - \rho t_d \omega^2 \mathcal{W}(r,\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^4 \mathcal{W}(r,\theta) - k^4 \mathcal{W}(r,\theta) = 0 \quad (4.4)$$

avec $k^4 = \frac{\rho t_d \omega^2}{D}$ la relation de dispersion. L'équation (4.4) se factorise sous la forme :

$$(\nabla^2 - k^2)(\nabla^2 + k^2)\mathcal{W}(r,\theta) = 0 \quad (4.5)$$

Les variables r et θ se séparent grâce à l'invariance par rotation du système. Pour la même raison, la dépendance azimutale du profil d'un mode s'écrit sous la forme $\cos(M\theta + \phi)$ avec $M \in \mathbb{N}$, le nombre nodal azimutal déjà utilisé au chapitre 1 et ϕ une phase quelconque permettant d'exprimer deux solutions dégénérées. Les solutions générales de l'équation sont de la forme :

$$\mathcal{W}_M(r,\theta) = [A_M J_M(kr) + B_M Y_M(kr) + C_M I_M(kr) + D_M K_M(kr)] \cos(M\theta + \phi) \quad (4.6)$$

avec J_n , Y_n , I_n et K_n les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce.

Les conditions aux limites servent alors à discriminer certaines solutions pertinentes pour nous.

— La bordure intérieure de la plaque ($r=b$) est fixée au piédestal. Lorsqu'elle est dite encastree, cela se traduit mathématiquement par les deux conditions $\mathcal{W}_M(r,\theta)|_b = 0$ et $\frac{\partial \mathcal{W}_M(r,\theta)}{\partial r}|_b = 0$.

— La bordure extérieure ($r=a$) ne subit aucune contrainte, elle est dite libre. Cela se traduit mathématiquement par les deux conditions $\frac{\partial^2 \mathcal{W}_M(r,\theta)}{\partial r^2}|_a = 0$ et $\frac{\partial^3 \mathcal{W}_M(r,\theta)}{\partial r^3}|_a = 0$.

Ces conditions se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} J_M(kb) & Y_M(kb) & I_M(kb) & K_M(kb) \\ \frac{\partial J_M(kr)}{\partial r}|_b & \frac{\partial Y_M(kr)}{\partial r}|_b & \frac{\partial I_M(kr)}{\partial r}|_b & \frac{\partial K_M(kr)}{\partial r}|_b \\ \frac{\partial^2 J_M(kr)}{\partial r^2}|_a & \frac{\partial^2 Y_M(kr)}{\partial r^2}|_a & \frac{\partial^2 I_M(kr)}{\partial r^2}|_a & \frac{\partial^2 K_M(kr)}{\partial r^2}|_a \\ \frac{\partial^3 J_M(kr)}{\partial r^3}|_a & \frac{\partial^3 Y_M(kr)}{\partial r^3}|_a & \frac{\partial^3 I_M(kr)}{\partial r^3}|_a & \frac{\partial^3 K_M(kr)}{\partial r^3}|_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_M \\ B_M \\ C_M \\ D_M \end{pmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

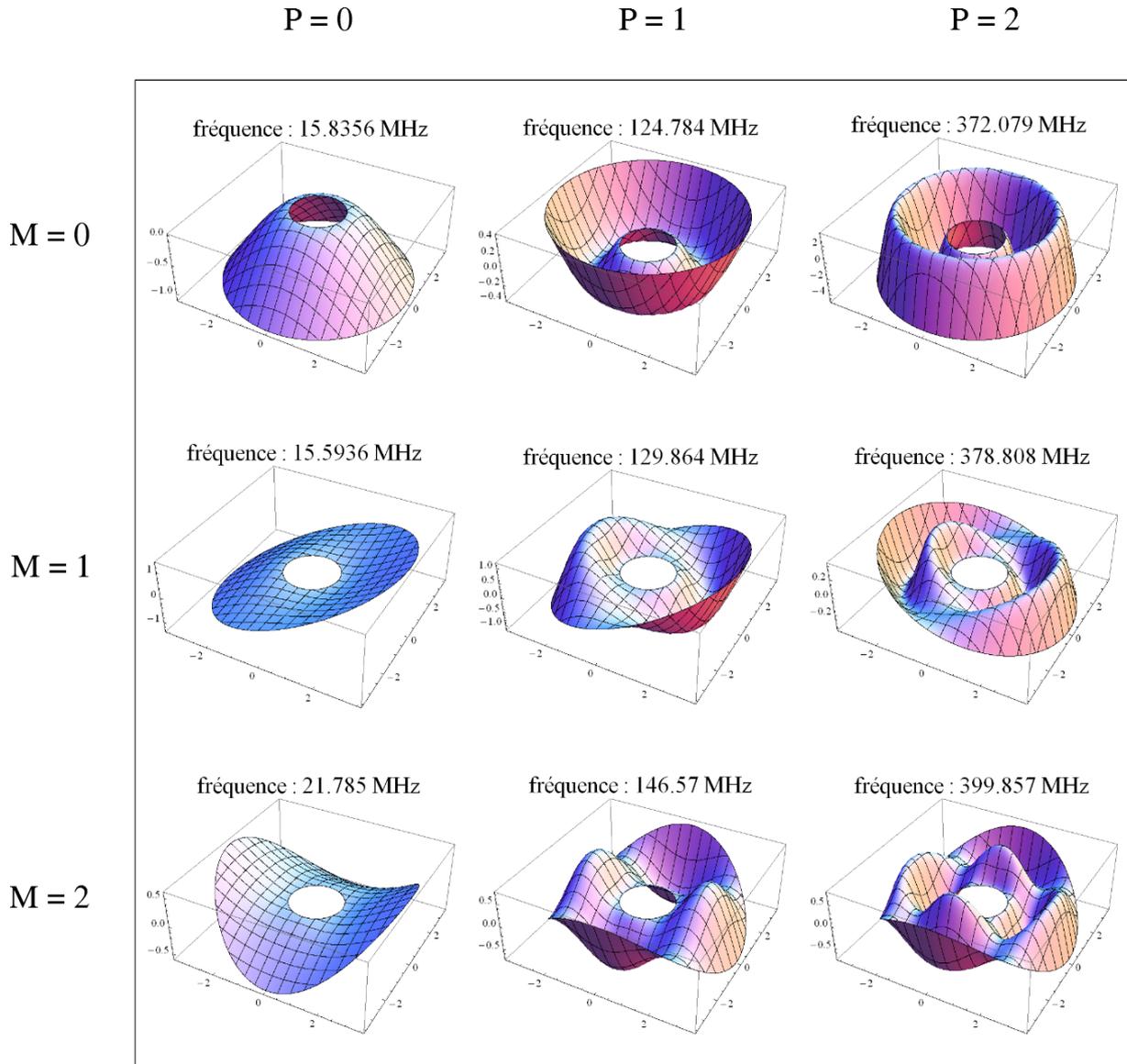


FIGURE 4.5: Calcul sous Mathematica des fréquences et profils spatiaux des neuf premiers modes fléxuraux d'un disque à partir de la théorie des plaques. Les paramètres sont $a = 3,5 \mu\text{m}$, $b = 1 \mu\text{m}$ et $t_d = 200 \text{ nm}$.

Cette équation, pour $(A_M, B_M, C_M, D_M) \neq 0$, implique la nullité du déterminant de la matrice 4×4 . Sa résolution impose des valeurs discrètes pour k . Pour un nombre azimutal M donné, il existe des solutions que l'on peut étiqueter avec un nombre entier P et un nombre d'onde $k_{(P,M)}$, P étant le nombre nodal radial aussi utilisé au chapitre 1. Les fréquences angulaires mécaniques $\omega_{(P,M)}$ sont liées à $k_{(P,M)}$ par la relation :

$$\omega_{(P,M)} = \sqrt{\frac{Dk_{(P,M)}^4}{\rho t_d}} = \lambda_{(P,M)}^2 \frac{t_d}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu)}} \quad (4.8)$$

avec $\lambda_{(P,M)}^2 = a^2 k_{(P,M)}^2$ qui ne dépend que du rapport b/a . Les fréquences des modes flexuraux calculées à l'aide de ce modèle de plaque sont en bon accord avec les simulations FEM réalisées à l'aide de Comsol. Ce modèle semble bien adapté pour décrire les modes flexuraux de disque dont le rayon a et la sous-gravure ($a - b$) sont grands par rapport à l'épaisseur t_d du disque. La figure (4.5) donne un exemple des modes obtenus par ce modèle pour un disque.

4.1.3 Modèle des sphères de Stokes

Le fluide présent autour du disque (air) dissipe une partie de l'énergie mécanique des différents modes de vibration. Il faut analyser les caractéristiques du fluide et du mouvement de l'objet afin de déterminer quelles équations régissent l'amortissement :

- Pour une pression du fluide environnant dite haute (pression ambiante), le parcours moyen des molécules (~ 70 nm pour l'air à température et pression ambiante) est plus petit que la taille de l'objet (rayon du disque ~ 10 à 50 μm et épaisseur 200 nm). Le fluide peut donc être considéré comme continu et l'amortissement doit être calculé à partir de la mécanique des fluides. A l'inverse, la théorie cinétique des gaz permet de calculer l'amortissement pour un fluide à basse pression (notamment un gaz) dont les molécules ont un libre parcours moyen plus grand que la taille de l'objet considéré.
- Le fluide est supposé incompressible car la vitesse maximum de déplacement de l'objet est bien plus faible que la vitesse du son dans le fluide (~ 340 m.s^{-1} pour l'air).
- L'écoulement du fluide autour du disque est considéré laminaire car le nombre de Reynolds est bas.

L'amortissement doit donc être calculé à partir des équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien visqueux incompressible. Malheureusement, les équations hydrodynamiques de Navier-Stokes ne permettent pas de calculer analytiquement en toute généralité l'amortissement fluide d'un mouvement mécanique. Plusieurs auteurs [95, 96, 97] utilisent un modèle d'amortissement visqueux à base de sphères de Stokes pour des micro-leviers AFM notamment. Il consiste à considérer que l'amortissement d'un solide oscillant est équivalent à l'amortissement s'exerçant sur un ensemble de sphères oscillantes pavant l'objet. La sphère, grâce à sa grande symétrie, est l'un des seuls objets en mouvement dont la dissipation est calculable analytiquement à partir des équations de Navier-Stokes dans la limite où le fluide est newtonien, visqueux, incompressible et à faible nombre de Reynolds. La force de trainée d'une sphère oscillante indéformable de rayon R_s dans un fluide avec la vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ (figure 4.6(a)) est donnée par exemple par Landau et Lifshitz [98] :

$$\vec{F} = 6\pi\eta R_s \left(1 + \frac{R_s}{\delta}\right) \vec{u} + 3\pi R_s^2 \sqrt{\frac{2\eta\rho_f}{\omega}} \left(1 + \frac{2R_s}{9\delta}\right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (4.9)$$

avec η la viscosité du fluide ($\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$), ω la fréquence angulaire (rad.Hz), ρ_f la densité du fluide (kg.m^{-3}) et $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho_f\omega}}$ l'épaisseur de la couche limite (m).

Blom, dans son article [95], rappelle que, d'après Lamb [99], la force de trainée d'un disque se déplaçant perpendiculairement à sa surface est très proche de celle d'une sphère en mouvement (figure 4.6(a)). Nous introduisons ainsi la force par unité de surface $\vec{F}_s = \frac{\vec{F}}{\pi R^2}$:

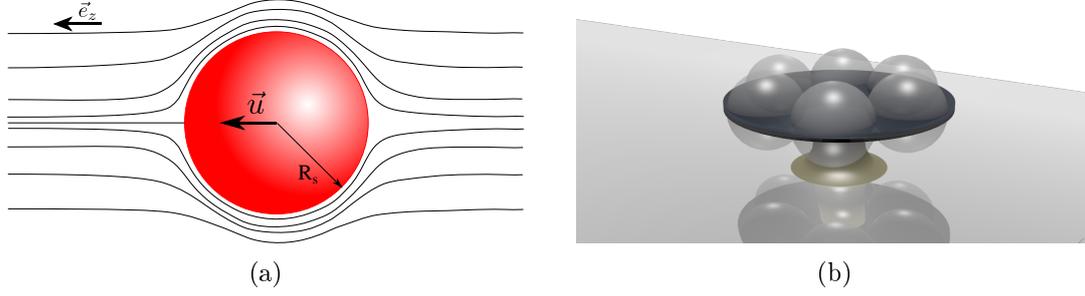


FIGURE 4.6: (a) Sphère de rayon R_s se déplaçant dans un fluïde avec une vitesse \vec{u} . Elle provoque un écoulement laminaire pour un faible nombre de Reynolds. (b) Disque pavé avec des sphères de Stokes.

$$\vec{F}_s = 6\eta \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{\delta} \right) \vec{u} + 3\sqrt{\frac{2\eta\rho_f}{\omega}} \left(1 + \frac{2R_s}{9\delta} \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (4.10)$$

Dans notre modèle de plaque annulaire, le déplacement selon l'axe \vec{e}_z est donné par $w(r, \theta)$. En écrivant la relation $\vec{u} = \frac{\partial w}{\partial t} \vec{e}_z$, la force de traînée selon z s'écrit alors :

$$F_s = 6\eta \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{\delta} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + 3\sqrt{\frac{2\eta\rho_f}{\omega}} \left(1 + \frac{2R_s}{9\delta} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

Le système isolé (décrit par l'équation 4.2) subit, lorsqu'il se couple à l'environnement fluïdique, une dissipation ainsi que des fluctuations. Il devient :

$$D\nabla^4 w(r, \theta, t) + F_s + \rho t_d \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = F_{l_{gv}} \quad (4.12)$$

où $F_{l_{gv}}$ est la force stochastique (de Langevin) due au couplage avec l'environnement.

$$D\nabla^4 w(r, \theta, t) + 6\eta \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{\delta} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\rho t_d + 3\sqrt{\frac{2\eta\rho_f}{\omega}} \left(1 + \frac{2R_s}{9\delta} \right) \right) \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = F_{l_{gv}} \quad (4.13)$$

Une excitation forcée à la fréquence angulaire Ω autour du mode propre ω_m isolé du reste des modes propres donne :

$$\rho t_d \omega_m^2 w(\Omega) + 6\eta \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{\delta} \right) (-i\Omega) w(\Omega) + \left(\rho t_d + 3\sqrt{\frac{2\eta\rho_f}{\omega_m}} \left(1 + \frac{2R_s}{9\delta} \right) \right) (-\Omega^2) w(\Omega) = F_{l_{gv}}(\Omega) \quad (4.14)$$

qui se réécrit :

$$w(\Omega) = \frac{F_{l_{gv}}(\Omega)}{\omega_m^2 - \Omega^2 \left(1 + 3\sqrt{\frac{2\eta\rho_f}{\rho t_d^2 \omega_m}} \left(1 + \frac{2R_s}{9\delta} \right) \right) - i\Omega \frac{6\eta}{\rho t_d} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{\delta} \right)} \quad (4.15)$$

Nous choisissons comme rayon de nos sphères de Stokes $R_s = \frac{a-b}{2}$ afin de rester fidèle au cas de la poutre tenue à une de ses extrémités ("cantilever" en anglais) [95], où le meilleur accord est obtenu pour un diamètre de sphère égal à la largeur du cantilever. Ce choix de rayon revient à paver la plaque annulaire avec des sphère (figure 4.6(b)).

Afin de simplifier le modèle il nous faut estimer les termes dominants de cette équation. La table (4.1) référence les grandeurs expérimentales que nous allons utiliser par la suite. En considérant les valeur de la table (4.1), la masse inertielle additionnelle normalisée vaut :

$$3\sqrt{\frac{2\eta\rho_f}{\rho t_d^2\omega_m}} \left(1 + \frac{2R_s}{9\delta}\right) = 7 \cdot 10^{-3} \ll 1 \quad (4.16)$$

elle peut alors être négligée par la suite.

Paramètres	symbole	valeur	unité
viscosité air	η	$1,85 \cdot 10^{-5}$	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
densité air	ρ_f	1,204	kg.m^{-3}
fréquence mécanique	ω_m	$2\pi \cdot 2,7 \cdot 10^6$	rad.Hz
épaisseur de la couche limite	δ	$1,35 \cdot 10^{-6}$	m
rayon de la sphère	R_s	3,25	μm
densité GaAs	ρ	5316	kg.m^{-3}
épaisseur du disque	t_d	200	nm
épaisseur du film	h	1,5	μm

TABLE 4.1: Paramètres utilisés pour l'air et le GaAs. Nous avons choisis dans ce tableau d'utiliser un disque dont la sous-gravure $a - b$ vaut $6.5 \mu\text{m}$ pour un rayon d'environ $18 \mu\text{m}$.

Le facteur de qualité modélisant cet amortissement Q_{sph} est alors donné, lorsqu'il est supérieur à 10, par :

$$Q_{sph} = \frac{\omega_m}{\frac{6\eta}{\rho t_d} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{\delta}\right)} \quad \text{avec} \quad \gamma_{sph} = \frac{6\eta}{\rho t_d} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{\delta}\right) \quad (4.17)$$

Ce modèle des sphères de Stokes seul ne rend pas compte de l'amortissement total du mouvement flexural des disques. Nous n'avons pas encore pris en compte les effets de "squeeze-film".

4.1.4 Squeeze-film (pincement du film d'air)

L'amortissement visqueux d'une plaque est considérablement amplifié lorsque le fluide entourant cette dernière se trouve à proximité d'une seconde surface fixe. Un disque de plusieurs microns de rayons placé à $1,5 \mu\text{m}$ du substrat subit donc un amortissement additionnel dit de "film pincé" ("squeeze-film" en anglais).

L'approche utilisée pour nos disques est celle d'un film mince d'air pincé par une plaque annulaire au dessus d'un substrat plan (figure 4.7), un cas recensé dans l'article de revue de Bao

[100]. En géométrie cylindrique, l'équation de Reynolds décrivant l'écart à la pression d'équilibre $p(r)$ pour les films minces dans le cas d'un fluide incompressible, isothermal et à bas nombre de Reynolds s'écrit [100] :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p(r)}{\partial r} \right) = \frac{12\eta}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.18)$$

où h est l'épaisseur du film, r la coordonnée radiale. La solution générale de cette équation s'écrit :

$$p(r) = \frac{3\eta \frac{dh}{dt}}{h^3} r^2 + K_1 \ln(r) + K_2 \quad (4.19)$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes d'intégrations. Les conditions initiales $p(a) = p(b) = 0$ donnent leur valeur aux constantes d'intégration :

$$\begin{cases} K_1 = \frac{3\eta \frac{dh}{dt}}{h^3} \frac{(a^2 - b^2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ K_2 = -\frac{3\eta \frac{dh}{dt}}{h^3} \frac{(a^2 \ln(b) - b^2 \ln(a))}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\quad (4.21)$$

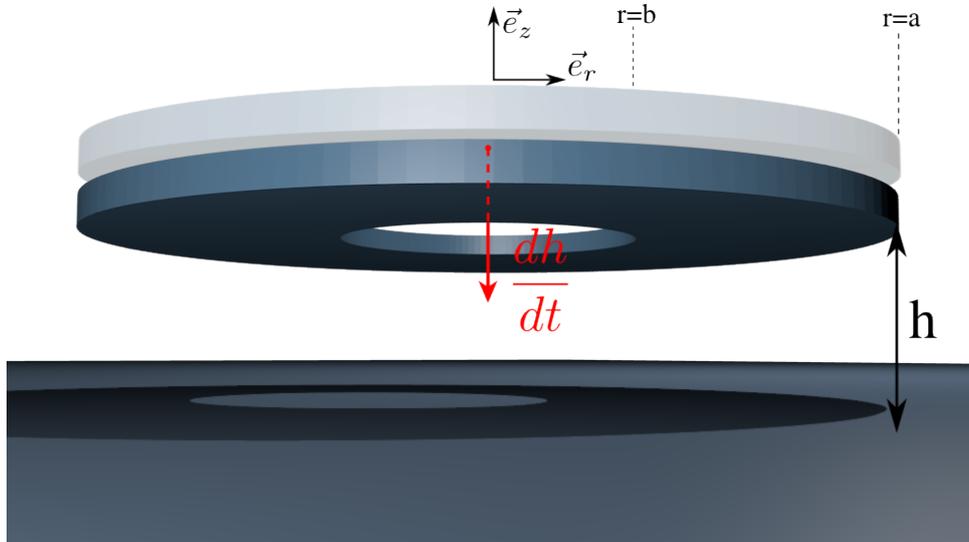


FIGURE 4.7: Représentation schématique de la plaque annulaire en mouvement dans un fluide proche d'une surface plane.

La force de friction que subit l'anneau est obtenue en intégrant la surpression sur sa surface :

$$\begin{aligned} F_{anneau} &= \int_b^a \int_0^{2\pi} p(r) r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \int_b^a \frac{3\eta \frac{dh}{dt}}{h^3} \left(r^2 + \frac{(a^2 - b^2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln(r) - \frac{(a^2 \ln(b) - b^2 \ln(a))}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right) r \, dr \end{aligned}$$

$$= -\frac{3\pi\eta a^4}{h^3} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right) \frac{dh}{dt} \quad (4.22)$$

La force F_{anneau} est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'épaisseur du film h , représentant aussi la vitesse de l'anneau. Le coefficient d'amortissement de l'anneau dû au squeeze-film est donc :

$$c_{anneau} = \frac{3\pi\eta a^4}{h^3} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right) \quad (4.23)$$

Le coefficient d'amortissement $\gamma_{squeeze}$ donnant le facteur de qualité $Q_{squeeze} = \frac{\omega_m}{\gamma_{squeeze}}$ s'obtient en divisant le coefficient c_{anneau} par la surface de la plaque annulaire $S = \pi a^2 \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$ et par la densité surfacique ρt_d .

$$\gamma_{squeeze} = \frac{c_{anneau}}{\rho t_d S} = \frac{3\eta a^2}{2t\rho h^3} \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right] \quad (4.24)$$

Ce modèle ne tient cependant pas compte des effets de bord hydrodynamiques à la périphérie de la plaque annulaire. Afin d'obtenir des résultats quantitatifs satisfaisants avec cette approche simplifiée de squeeze-film, il faut tenir compte de ces effets de bord. Dans leur article, Veijola *et al.* [101] expliquent que ces effets sont pris en compte en augmentant artificiellement la dimension latérale de l'anneau. Leurs calculs convergent vers une longueur supplémentaire effective $a_{eff} = a + \frac{8h}{3\pi}$ pour intégrer les effets de bord. L'amortissement dû au squeeze-film s'écrit alors :

$$\gamma_{squeeze} = \frac{c_{ann}}{\rho t_d S} = \frac{3\eta a_{eff}^2}{2t\rho h^3} \left[1 + \left(\frac{b}{a_{eff}}\right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{b}{a_{eff}}\right)^2}{\ln\left(\frac{b}{a_{eff}}\right)} \right] \quad (4.25)$$

Conclusion

Finalement, l'amortissement visqueux se décompose en deux parties.

- L'amortissement sur la partie inférieure du disque est donné par $\gamma_{squeeze}$.
- L'amortissement sur la partie supérieure du disque est donné par $\gamma_{sph}/2$.

Le facteur de qualité associé à l'amortissement visqueux global s'écrit alors :

$$\frac{1}{Q_{fluide}} = \frac{1}{Q_{squeeze}} + \frac{1}{2Q_{sph}} \quad (4.26)$$

Ce modèle ultra-simplifié doit maintenant être comparée aux mesures qui sont décrites ci-après.

4.1.5 Résultats obtenus par interférométrie optique

Une série de mesures a été menée sur des disques ayant des rayons a variant de 12 à 23 μm , pour des dimensions de sous-gravure ($a - b$) comprises entre 6 et 7 μm . Nous nous sommes focalisés pour chaque disque sur le mode ($P=0, M=0$) qui, de par sa haute symétrie, possède une amplitude de vibration hors du plan plus importante que les autres modes flexuraux, le rendant ainsi plus facile à détecter par notre système interférométrique.

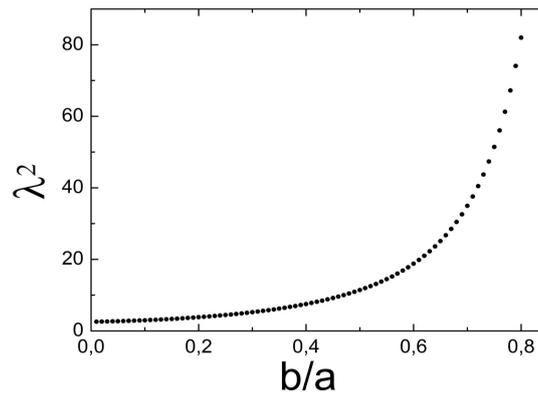


FIGURE 4.8: Évolution du paramètre $\lambda_{0,0}^2$ calculé à partir du modèle analytique en fonction du ratio b/a .

Dans notre théorie annulaire des plaques, la fréquence de ce mode ($P=0, M=0$) dépend à la fois de a et de b . Cependant, le paramètre $\lambda_{P,M}$ introduit à la section (4.1.2) et donné par la relation $\lambda_{P,M}^2 = k_{P,M}^2 a^2$, est adimensionné et dépend seulement du ratio b/a . Il représente la dépendance de la résonance (P, M) avec le rapport de sous-gravure. La figure (4.8) montre la dépendance de $\lambda_{0,0}^2$ avec (b/a) pour le mode ($P=0, M=0$). Chaque point est calculé en résolvant l'équation implicite (4.7) pour $M = 0$ et en choisissant la solution la plus petite (fréquence la plus faible).

La figure (4.9(a)) présente la fréquence mécanique mesurée du mode ($P=0, M=0$) en fonction de la sous-gravure ($a - b$) du disque mesuré (points gris), ainsi que les limites théoriques calculées avec le modèle de plaque annulaire développé précédemment, pour des ratios limites (b/a) = 0,44 et 0,72 (courbes pointillées) correspondant à nos expériences. Les fréquences mesurées varient entre 2.3 et 3.2 MHz et décroissent pour des valeurs de sous-gravure ($a - b$) croissantes.

La figure (4.9(b)) présente les mesures du facteur de qualité du mode mécanique ($P=0, M=0$) (points gris). Les valeurs sont encadrées par les limites théoriques de l'amortissement fluïdique (équation 4.26) pour les mêmes ratios limites de (b/a). Nous avons vérifié par simulation numérique que les autres sources de pertes, notamment pertes par ancrage (voir ci-dessous) sont négligeables pour ce mode flexural. Le facteur de qualité mesuré est de quelques dizaines et décroît pour des valeurs de sous-gravures croissantes.

Ainsi notre modèle analytique des modes mécaniques flexuraux des disques et de leur amortissement fluïdique dans l'air semble décrire de façon satisfaisante la réalité expérimentale que nous avons pu sonder [102]. Une confrontation du modèle dans une portion plus grande de l'espace des paramètres serait utile dans un travail ultérieur.

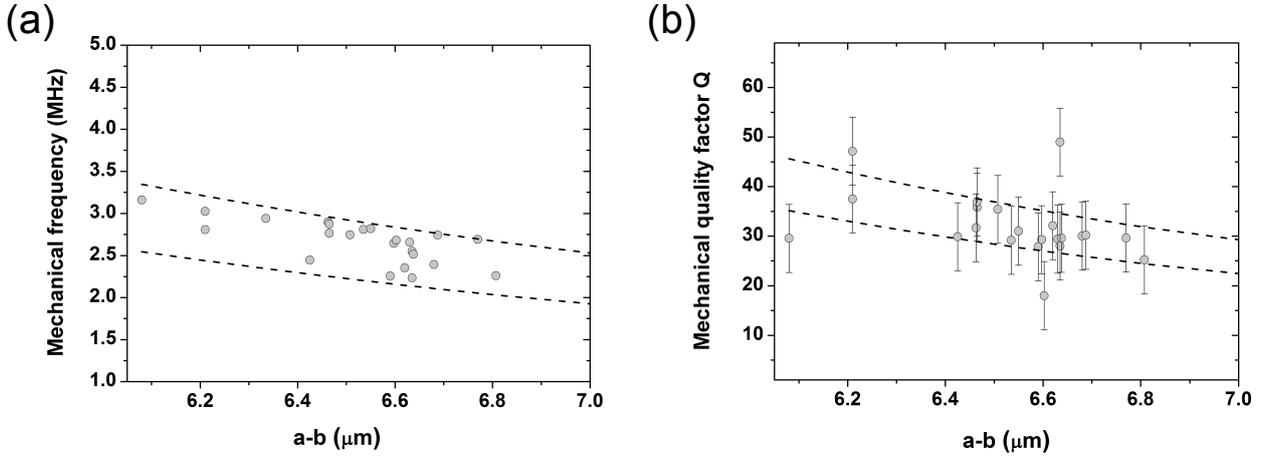


FIGURE 4.9: (a) Fréquence mécanique du mode ($P=0, M=0$) en fonction de la sous-gravure ($a - b$). Les cercles (gris) représentent les mesures expérimentales et les lignes en pointillés les prédictions théoriques, prenant en compte les variations expérimentales du ratio b/a . (b) Facteur de qualité mécanique dans l'air en fonction de la sous gravure ($a - b$). Les cercles (gris) représentent les mesures expérimentales avec leur barre d'erreur et les lignes en pointillés sont obtenues en combinant les modèles analytiques d'amortissement dans l'air pour des sphères de Stokes et d'amortissement par le squeeze-film. La variation expérimentale du paramètre b/a est encadrée par les deux lignes pointillées.

4.1.6 Amortissement fluide pour les modes radiaux

L'étude précédente a été réalisée lors de ma première année de thèse, elle a permis de mieux comprendre les facteurs de qualité des modes fléxuraux dans l'air. Par la suite nous nous sommes focalisés uniquement sur les modes radiaux de respiration, qui se couplent bien mieux aux modes de galerie. Nous n'avons pas mené d'étude systématique sur l'amortissement dans l'air des modes de respiration en fonction du rayon et de la sous-gravure. Ces modes de respiration ne sont pas (ou peu) sujets à l'amortissement par squeeze-film. Les meilleurs facteurs de qualité mécanique observés à température et pression ambiantes sur des mode de respiration de disques GaAs sont $3 \cdot 10^3$ à 315 MHz de fréquence. Les expériences menées en cryostat dans l'équipe par Christophe Baker, William Hease et Trung Nguyen ont mis en évidence une augmentation du facteur de qualité mécanique à basse pression [61]. Cela nous amène à penser que l'amortissement gazeux joue encore un rôle dans le facteur de qualité mécanique dans ce cas. Cependant les pertes par ancrages ont aussi un rôle important pour les modes radiaux comme nous allons le voir.

4.2 Pertes par ancrage

Les pertes par ancrage sont issues du couplage des modes mécaniques du disque au substrat. Le disque est ancré à l'environnement par son piédestal. Jusqu'à présent, nous avons considéré que l'interface piédestal-substrat était complètement rigide dans nos simulations numériques. Cela nous a permis de calculer les fréquences propres des modes mécaniques, pour un système parfaitement isolé où les ondes de déplacement se réfléchissent parfaitement sur l'interface rigide

du bas du piédestal. Dans la réalité, une partie des ondes se propage via le piédestal vers le substrat créant ainsi une fuite d'énergie vers l'environnement. Chaque mode mécanique possède ses propres pertes par ancrage. Il est compliqué de faire un modèle analytique des pertes par ancrage. Elles sont extrêmement dépendantes de la forme du piédestal et de l'enveloppe du mode considéré. Des tentatives mélangeant développements analytiques et inserts numériques, avec un niveau qualitatif satisfaisant, peuvent être trouvées dans [103, 104].

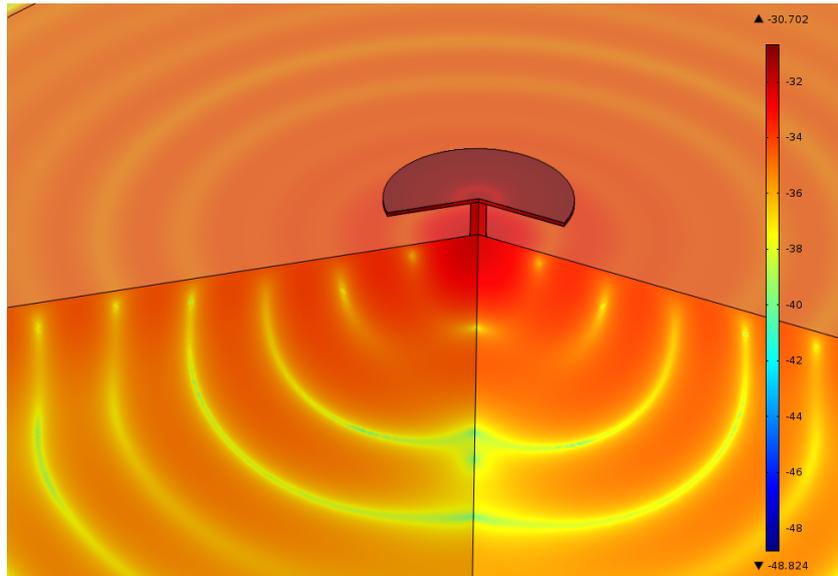


FIGURE 4.10: Norme du vecteur déplacement $\vec{u}(r, t)$ pris à un instant t . L'échelle est logarithmique et les unités arbitraires.

Ici, nous nous reposons encore une fois sur les simulations numériques par éléments finis. Un substrat est ajouté au système disque+piédestal. Il est entouré d'une "PML acoustique" (Perfectly Matched Layer) absorbant les ondes de déplacement ("acoustiques") provenant du disque. La contrainte de "non-déplacement" du bas du piédestal est déplacée vers les bordures du substrat. Le système est placé sous excitation forcée sur une gamme de fréquences autour de la fréquence de résonance $\omega_m = 2\pi \cdot \nu_m$. L'onde "acoustique" générée par le mode mécanique du disque se propage dans le piédestal où elle est fortement confinée puis dans le substrat où elle prend la forme d'une onde sphérique (figure 4.10). L'amplitude de vibration du disque est enregistrée (sur la bordure extérieure du disque) pour chaque fréquence (figure 4.11(a)). Le spectre obtenu est ajusté par une lorentzienne possédant une largeur à mi-hauteur $\gamma_{anc}/2\pi$ et une fréquence ν_m . Le facteur de qualité lié aux pertes par ancrage Q_{anc} est donné par :

$$Q_{anc} = \frac{2\pi\nu_m}{\gamma_{anc}} \quad (4.27)$$

Cette simulation est effectuée pour le mode mécanique fondamental de respiration pour trois disques de rayons $2 \mu\text{m}$ (courbe verte), $3,25 \mu\text{m}$ (courbe bleu) et $4,5 \mu\text{m}$ (courbe rouge) pour une gamme de sous-gravure allant de 70% à 98% (figure 4.11(b)). Il apparaît que les pertes par ancrage diminuent globalement à mesure que la sous-gravure augmente. En effet plus le disque

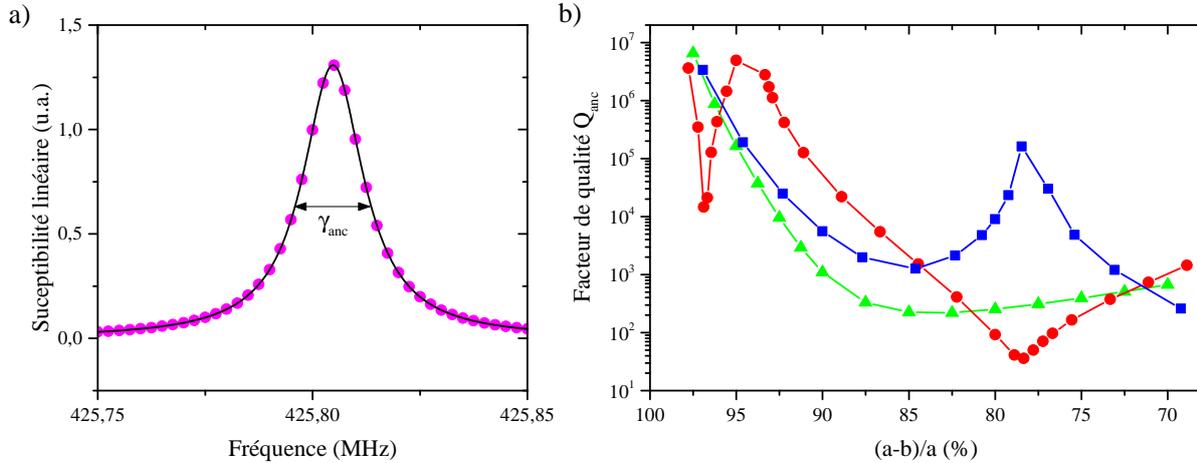


FIGURE 4.11: (a) Réponse linéaire du disque à une oscillation forcée (points magenta) et ajustement Lorentzien (courbe noire). (b) Évolution du facteur de qualité Q_{anc} du premier mode de respiration en fonction de la sous-gravure pour des disques d'épaisseur 200 nm et de rayons 2 μm (courbe verte), 3,25 μm (courbe bleu) et 4,5 μm (courbe rouge). Les fréquences mécaniques du premier mode de respiration pour ces disques sont respectivement 691 MHz (vert), 425 MHz (bleu) et 307 MHz (rouge).

est isolé de son environnement (majoritairement le substrat ici), meilleures sont ses caractéristiques mécaniques. Notons toutefois que les courbes ne sont pas complètement monotones. Pour certaines tailles de piédestal, les pertes par ancrage peuvent chuter ou augmenter brutalement.

- Les chutes brutales de Q_{anc} s'expliquent par le couplage avec un second mode mécanique de même fréquence. Si le second mode possède un amortissement plus fort que le mode de respiration, alors le couplage augmente les pertes du mode originellement à plus haut Q .
- Les augmentations brutales de Q_{anc} sont dues à des conditions géométriques qui créent une interférence destructive limitant l'émission de l'onde acoustique vers le substrat.

Afin d'augmenter les facteurs de qualité mécanique, deux solutions sont possibles : réduire la taille du piédestal au minimal, ou façonner le piédestal pour obtenir une condition d'interférence favorable. Des travaux ont été entrepris dans l'équipe afin d'obtenir ce genre phénomène implémenté sous la forme de boucliers acoustiques insérés dans le piédestal [105].

4.3 Amortissement thermoélastique

L'amortissement thermoélastique est une conséquence de la non-harmonicité du potentiel cristallin. Lors de la compression ou de la dilatation d'un matériau, les régions subissant de fortes déformations explorent la partie non-harmonique du potentiel. L'énergie n'est alors plus conservée localement. Cela se traduit par une augmentation de température dans les zones comprimées et une diminution dans les zones étirées. La température diffuse dans le matériau des zones chaudes vers les froides, augmentant ainsi l'entropie globale du système. L'énergie mécanique est transférée de manière irréversible en énergie thermique. Ces pertes d'énergie constituent un amortissement mécanique. C'est l'amortissement thermoélastique.

Christophe Baker dans sa thèse [61] montre que l'amortissement thermo-élastique produit sur le premier mode de respiration des facteurs de qualité $Q_{te} \geq 10^5$ à température ambiante pour des disques ayant des rayons supérieurs à $2\mu\text{m}$.

Expérimentalement, nos facteurs de qualité Q_{meca} maximaux ne dépassent pas $3 \cdot 10^3$ à température et pression ambiante. Sous cette hypothèse, le phénomène thermoélastique n'est pas limitant pour l'amortissement mécanique. Il deviendrait possiblement important à considérer pour un disque fortement sous gravé et placé dans un environnement basse pression (vide).

4.4 Conclusion

L'étude menée dans ce chapitre ne prétend pas être exhaustive sur les facteurs d'amortissement mécanique des disques GaAs, elle se contente de surligner les contributions majoritaires dans notre système. Il n'a par exemple pas été mentionné de mécanisme de pertes liés à la surface et aux défauts de volume du matériau [106, 107], dont nous n'avons pas observé pour l'instant de trace nette dans nos expériences. Probablement la haute qualité épitaxiale du matériau GaAs/AlGaAs limite les facteurs de pertes en volume au moins.

Nous retiendrons de cette étude l'influence dominante des pertes par ancrage et de l'amortissement fluide pour les disques sur piédestal. L'amélioration des pertes par ancrage passe par le contrôle du rayon du piédestal et donc par une maîtrise de la sous-gravure HF. Cette maîtrise s'est beaucoup développée dans l'équipe depuis mon début de thèse, avec la reproductibilité de la fabrication de piédestaux de 100 nm de rayon sur des rayons de disques de $1\mu\text{m}$. La dissipation fluide ne peut être évitée dans les conditions expérimentales actuelles de l'expérience d'optomécanique à fibre effilée. Les expériences en cryostat menées dans l'équipe permettent de s'en affranchir. Pour les modes de respiration GHz dans l'air ou dans un liquide, l'étude de la dissipation fluide pourrait révéler de nouveaux régimes originaux de l'interaction fluide-structure. C'est un des axes de recherche du post-doctorat de Eduardo Gil-Santos dans l'équipe.

Auto-oscillation et non linéarités optomécaniques

5.1 Régime d'auto-oscillation optomécanique

Un des objectifs de cette thèse était d'obtenir le régime d'auto-oscillation des disques GaAs de manière contrôlée et reproductible. Nous y sommes parvenus en implémentant les améliorations expérimentales décrites dans le chapitre 2 à savoir :

- Des disques propres sans défauts et bien sous gravés, présentant de bons facteurs de qualité optique et mécanique.
- Un bon contrôle nanométrique de la distance fibre-disque, obtenu grâce à une boîte d'expérience close, une fibre effilée droite rigide et des platines de translation ultra-stables et entièrement motorisées.
- Un bon contrôle de la polarisation de la lumière grâce à la fibre effilée droite.
- Une grande puissance optique injectée dans le disque grâce à la fibre droite et à l'amélioration de l'étage d'injection dans la fibre.

5.1.1 Observation de l'auto-oscillation optomécanique

La figure (5.1) présente l'évolution du spectre mécanique en fonction de la longueur d'onde du laser lorsque celle-ci parcourt une résonance optique, et lorsque la puissance optique est suffisamment grande pour produire la distorsion thermo-optique de la résonance optique décrite au chapitre 3 section 3.4.1. Le mode mécanique considéré ici est le premier mode de respiration qui est identifié grâce aux simulations par éléments finis (Comsol). Au cours de la "descente thermo-optique" le long du flanc bleu de la résonance optique, le laser produit une force optique d'intensité croissante sur le disque. Grâce au mécanisme de rétro-action dynamique décrit au chapitre 1, à cette force est associée une amplification paramétrique optomécanique du mouvement. Cette amplification est cohérente avec le mouvement. Lorsque la puissance est suffisante, l'amortissement mécanique du mode de respiration γ_m est complètement contrebalancé par l'amplification optomécanique induite par le pompage laser, amenant à une situation de mou-

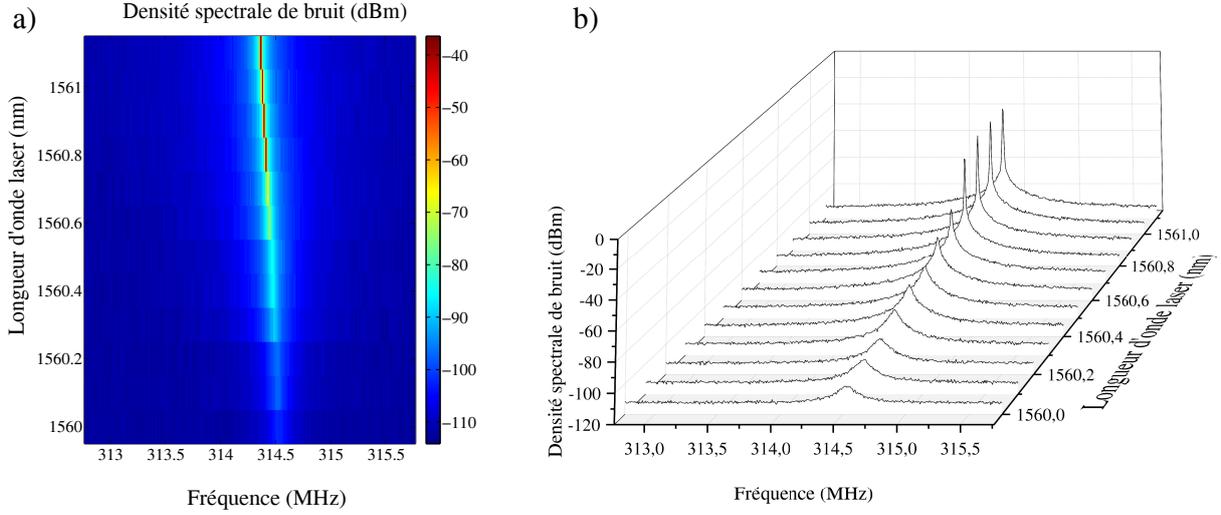


FIGURE 5.1: (a), (b) Évolution du spectre mécanique en fonction de la longueur d'onde du laser λ_L . (b) présente une vision complémentaire à celle du graphique (a). La RBW est de 1 kHz

vement effectif perpétuel ($\gamma'_m = 0$). Le disque oscille avec une amplitude de mouvement grande, contrairement au régime de mouvement Brownien évoqué au chapitre 2. En adoptant le formalisme développé au chapitre 1, cette situation d'oscillation auto-entretenu peut se traduire par l'équation suivante :

$$\frac{|\alpha|^2 g_0^{(m)} \omega'_m}{\Omega} \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) \left\{ \frac{\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} - \frac{\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} \\ \frac{|\alpha|^2 g_0^{(m)} \omega'_m}{\Omega} \frac{g_{0(pt)}^{(m)}}{1 + (\Omega\tau_{th})^2} \left\{ \frac{\frac{\kappa}{2} + (\Delta\omega - \Omega)\Omega\tau_{th}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} - \frac{\frac{\kappa}{2} - (\Delta\omega + \Omega)\Omega\tau_{th}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} = -\gamma_m$$

Lorsque le mode optique est fortement affecté par l'effet thermo-optique et que la résonance optique adopte le profil quasi-triangulaire de la figure (5.1), la dispersion de la fréquence propre de cavité est telle que le nombre de photons dans la cavité évolue linéairement avec la longueur d'onde. Dans le cas d'une absorption optique résiduelle linéaire, l'élévation de température du disque à l'équilibre est aussi directement proportionnelle au nombre de photons en cavité. Il existe alors une bonne relation de linéarité entre ces paramètres. La figure (5.1) montre que la dispersion du mode mécanique est quasi-linéaire en fonction de la longueur d'onde du laser (et donc du nombre de photons dans le disque). Cette dispersion mécanique est plutôt inhabituelle en optomécanique. Nous y reviendrons par la suite.

La figure (5.2) montre le spectre de bruit de la lumière laser en sortie de fibre lorsque le disque auto-oscille. La figure (5.2(a)) montre le spectre sur une large plage de fréquences (0 - 2,5 GHz). Les différents pics représentent le fondamental (314,5 MHz) et les harmoniques du

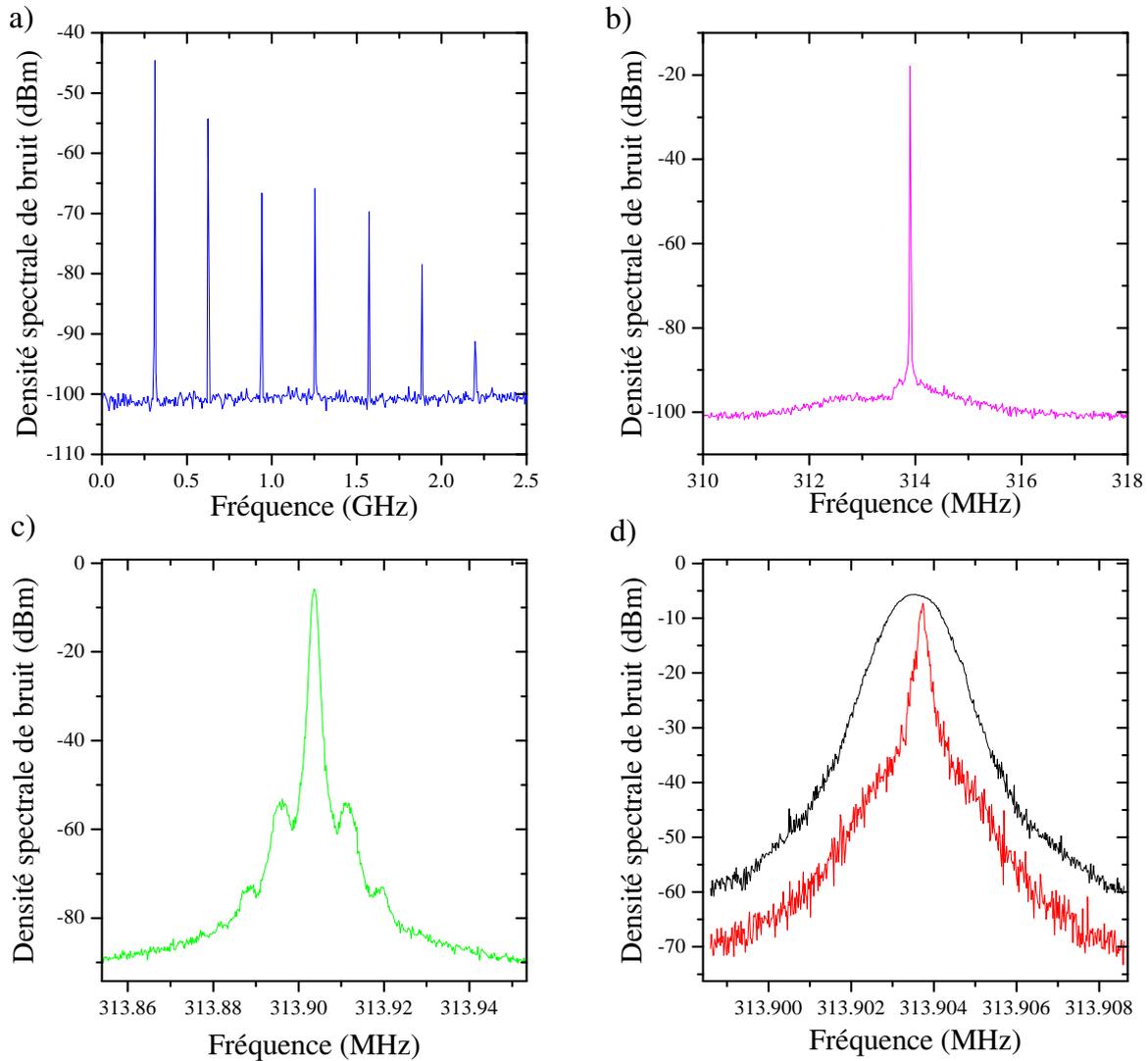


FIGURE 5.2: Spectres mécaniques d'un disque en auto-oscillation. Le disque possède les paramètres $R = 4.5 \mu\text{m}$, $h = 200 \text{ nm}$, $\lambda_0 = 1560 \text{ nm}$, $Q_{opt} = 4 \cdot 10^4$, $\omega_m = 2\pi \cdot 314.5 \text{ MHz}$, $Q_m = 2 \cdot 10^3$. Les spectres sont pris avec une RBW de 1 kHz sauf pour la courbe rouge de la figure (d) prise avec une RBW de 100 Hz.

signal périodique provenant du mode mécanique. Bien que la déformation du disque en auto-oscillation soit principalement sinusoïdale dans le temps (pic fondamental seul), la transduction mécanique-optique par l'intermédiaire de la lorentzienne du mode optique n'est plus linéaire pour des signaux de grande amplitude obtenus en régime d'auto-oscillation, expliquant ainsi la présence des harmoniques dans le spectre.

Les figures (5.2(b), (c) et (d)) montrent des mesures acquises sur différentes plages de fréquence ("span" en anglais). Elles nous permettent d'apprécier la forme du pic d'auto-oscillation à différentes échelles. La figure (5.2(b)) montre un pic unique sur une plage de 8 MHz. La réduction du span (figure 5.2(c)) dévoile des bandes latérales symétriques autour du pic principal,

caractéristique d'une oscillation (de fréquence $\simeq 8$ kHz) autour d'une porteuse. L'origine de ces bandes est un sujet qui n'a pas encore retenu l'attention ni trouvé d'explication satisfaisante, malgré leur observation sur plusieurs systèmes optomécaniques [40] et électromécaniques [108]. La figure (figure 5.2(d)) est obtenue pour un span de 10 kHz, et vise à quantifier la largeur du pic principal. Les courbes noire et rouge sont obtenues respectivement pour des RBW de 1 kHz et 100 Hz. Le pic d'auto-oscillation n'est résolu que pour une RBW assez petite. Sur ce spectre la largeur à mi hauteur (à -3 dBm en échelle log) est inférieure à 120 Hz (limité par la RBW de 100 Hz) donnant un pseudo facteur de qualité supérieur à $2 \cdot 10^6$ pour ce pic.

5.1.2 Bandes latérales

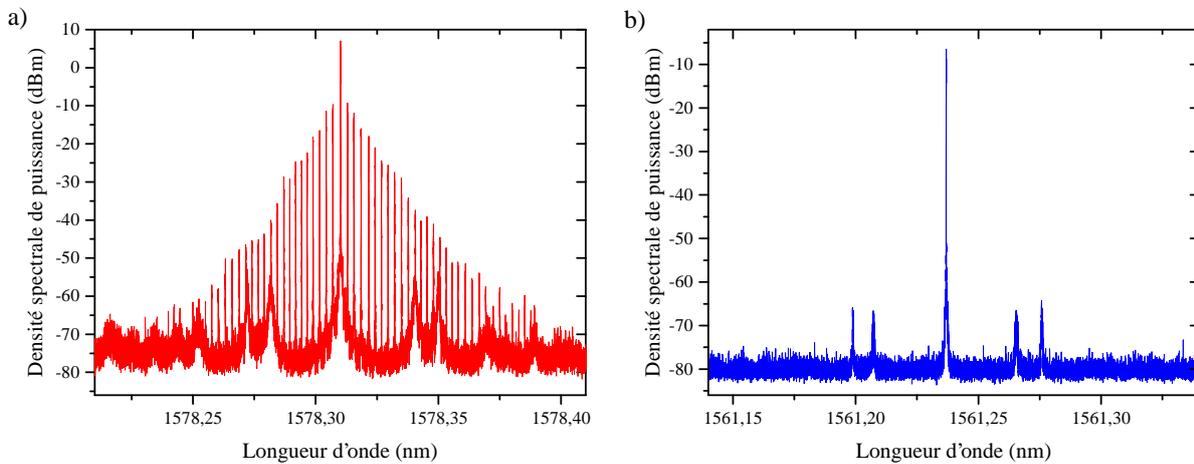


FIGURE 5.3: Densité spectrale de puissance d'un disque en auto-oscillation (a) et du laser seul pour référence (b).

Nous avons évoqué dans le chapitre 1 le rôle des bandes latérales dans les phénomènes optomécaniques. La puissance du laser à la sortie du disque est modulée à la fréquence du mode mécanique. Dans le spectre optique, cette modulation crée des bandes latérales autour de la fréquence du laser qui deviennent visibles lorsque le disque est en auto-oscillation. La figure (5.3) montre les composantes spectrales optiques en sortie de fibre, à la fin de la chaîne de mesure. L'analyseur de spectre optique utilisé lors de cette mesure (Ultra high resolution Optical Spectrum Analyzer AP2040) possède une résolution exceptionnellement bonne de 0,04 pm (5 MHz). La figure (5.3(b)) montre les composantes spectrales optiques du laser seul, mesurées en sortie du laser direct. Le spectre possède un pic principal à 1561,23 nm ainsi que deux séries de bandes latérales de très faible amplitude caractéristiques d'une faible modulation intrinsèque au laser. La figure (5.3(a)) montre le spectre optique mesuré en bout de chaîne optomécanique lorsque le disque est en auto-oscillation. Il comprend le pic principal du laser (pic de taille maximum) à 1578,31 nm et une série de bandes latérales disposées régulièrement autour du pic central. La différence de fréquences entre ces pics est constante et vaut 314 MHz, la fréquence d'oscillation du disque. Cette mesure permet de mieux appréhender la vision quantique énonçant qu'un photon d'une certaine énergie interagit avec un mode de phonon pour donner soit

un photon de plus basse énergie (longueur d'onde plus grande) et un phonon supplémentaire ("phonon mode heating"), soit un photon de plus haute énergie (longueur d'onde plus basse) en absorbant un phonon ("phonon mode cooling"). Nous n'avons présenté au chapitre 1 que les deux premières bandes latérales afin de simplifier la vision. Chaque photon latéral ainsi créé participe à son tour à l'interaction optomécanique dans la cavité, et peut créer un photon de plus haute ou basse énergie. Cette cascade d'interaction est responsable du peigne de fréquence observé en figure (5.3(a))

5.1.3 Modélisation de l'auto-oscillation

L'obtention expérimentale contrôlée de l'auto-oscillation optomécanique était une étape importante de cette thèse. Cependant les spectres expérimentaux montre une dispersion mécanique en fonction du désaccord laser-cavité ne correspondant pas avec l'optomécanique traditionnelle activée par pression de radiation [109, 110]. Cette non-conformité de nos spectres au cas standard nous a poussé à réviser notre jugement premier qui ne considérait que les effets de pression de radiation dans la dynamique. Nous avons en premier lieu considéré les forces électrostrictives qui ont longtemps été négligées en optomécanique mais deviennent importantes dans des dispositifs à l'état solide de petite taille [111] [61]. Il résulte que dans le GaAs les forces électrostrictives agissent de concert avec les forces de pression de radiation, provoquant les mêmes effets, avec un facteur de couplage accru [61]. Par ailleurs nous savions que la température du disque jouait un effet important sur les fréquences optiques de résonance des disques. Il a donc semblé naturel de regarder plus en détails les effets photo-thermiques (chapitre 1) optomécaniques, qui avaient été négligés dans les disques GaAs mais qui sont déterminant dans certains systèmes [112]. Il est particulièrement intéressant de remarquer que l'effet optomécanique photothermique induit un ressort optique qui peut être dans certain cas opposé à celui de la pression de radiation et de l'électrostriction (figures 1.16 et 1.17).

Un modèle théorique a été développé afin d'inclure les effets photothermiques de manière auto-cohérente dans les équations couplées d'optomécanique. Il a été présenté au chapitre 1. La dispersion de la fréquence mécanique s'exprime dans ce modèle comme :

$$\omega''_m = \omega'_m \left[1 - \frac{|\alpha|^2 g_0^{(m)}}{2\omega'_m} \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right) \left\{ \frac{\Delta\omega - \Omega}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} + \frac{\Delta\omega + \Omega}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} - \frac{|\alpha|^2 g_0^{(m)}}{2\omega'_m} \frac{g_{0(pt)}^{(m)}}{1 + (\Omega\tau_{th})^2} \left\{ \frac{\Delta\omega - \Omega - \Omega\tau_{th}\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega - \Omega)^2} + \frac{\Delta\omega + \Omega + \Omega\tau_{th}\frac{\kappa}{2}}{\frac{\kappa^2}{4} + (\Delta\omega + \Omega)^2} \right\} \right]$$

avec $\omega'_m = \omega_m + \frac{\partial\omega_m}{\partial T} \Delta T^{eq}$. L'équation comporte de nombreux paramètres et nous allons voir dans la prochaine section les méthodes utilisés pour les quantifier.

Estimation des facteurs de couplage optomécanique

Les équations donnant les différents facteurs de qualité optomécaniques issus des trois forces s'écrivent :

$$\begin{cases} g_{0(rp)}^{(m)} = -\frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{rp}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} g_{0(es)}^{(m)} = -\frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{es}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} g_{0(pt)}^{(m)} = -\frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{pt}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \end{cases} \quad (5.3)$$

Les intégrales représentent le travail qu'exercent les forces lors d'un déplacement normalisé du mode mécanique. Elles peuvent s'exprimer à partir des tenseurs des contraintes équivalents aux forces ($F_i = -\partial_j \sigma_{ji}$) et au tenseur des déformation du mode mécanique $S_{ij}^{(m)1phn}$.

$$\begin{cases} g_{0(rp)}^{(m)} = -\frac{1}{2\hbar} \int_V \sigma_{ij}^{(rp)1pht} S_{ij}^{(m)1phn} dV \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} g_{0(es)}^{(m)} = -\frac{1}{2\hbar} \int_V \sigma_{ij}^{(es)1pht} S_{ij}^{(m)1phn} dV \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} g_{0(pt)}^{(m)} = -\frac{1}{2\hbar} \int_V \sigma_{ij}^{(pt)1pht} S_{ij}^{(m)1phn} dV \end{cases} \quad (5.6)$$

où :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{(rp)1pht} = - \left[\epsilon_0 \epsilon_r \left(\langle E_j^{1pht} E_i^{1pht} \rangle - \frac{1}{2} \delta_{ji} \langle |E^{1pht}|^2 \rangle \right) + \mu_0 \left(\langle H_j^{1pht} H_i^{1pht} \rangle - \frac{1}{2} \delta_{ji} \langle |H^{1pht}|^2 \rangle \right) \right] \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{(es)1pht} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 n^4 p_{ijkl} \langle E_k^{1pht} E_l^{1pht} \rangle \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{(pt)1pht} = C_{ijkl} \alpha_{kl} \Gamma_{pt} \end{cases} \quad (5.9)$$

où il faut prendre les moyennes temporelle des champs électromagnétiques car le système mécanique ne peut répondre à des forces dont le temps caractéristique est celui du cycle optique. Par ailleurs, le stress électrostrictif $\langle \sigma_{ij}^{(es)1pht} \rangle$ s'exprime à l'aide du tenseur photo-élastique p_{ijkl} d'après Rakich *et al.* [18]. Ce tenseur d'ordre 4 se réduit pour des cristaux cubique comme le GaAs. Ainsi il s'exprime à l'aide de trois paramètres : $p_{11} = -0.65$, $p_{12} = -0.140$ et $p_{44} = -0.072$ pour le GaAs [20].

Les facteurs de couplage optomécanique sont alors évalués en réalisant l'intégration sur le volume du disque des champs optique et mécanique calculés à l'aide de simulations par éléments finis (Comsol). Les résultats sont listés dans la table (5.1).

Notons que pour p croissant le facteur de couplage dû aux forces de pression de radiation diminue, alors que celui des forces électrostrictives augmente. En revanche leur somme reste approximativement constante. Le signe des trois facteurs (négatif) montrent que tous les couplages optomécaniques dans les disques GaAs agissent de concert à la différence d'autre matériaux comme le silicium dans lesquels ils peuvent se contrebalancer. Rappelons aussi que même si le facteur de couplage photo-thermique est de plusieurs ordre de grandeur supérieur

	p=1, m=43	p=2, m=37	p=3, m=33	p=4, m=30	p=5, m=26
$g_{0(rp)}^{(m)}$ (rad.Hz)	$-1.24 \cdot 10^5$	$-1.24 \cdot 10^5$	$-0.97 \cdot 10^5$	$-0.91 \cdot 10^5$	$-0.80 \cdot 10^5$
$g_{0(es)}^{(m)}$ (rad.Hz)	$-0.92 \cdot 10^5$	$-1.22 \cdot 10^5$	$-1.46 \cdot 10^5$	$-1.62 \cdot 10^5$	$-1.80 \cdot 10^5$
$g_{0(pt)}^{(m)}$ (rad.Hz)	$-1.5 \cdot 10^{10}$				

TABLE 5.1: Simulation numérique des facteurs de couplage optomécanique pour différentes famille p pour un disque de rayon $4,5 \mu\text{m}$ et d'épaisseur 200 nm .

aux deux autres, son effet se trouve grandement atténué par la faible réactivité de la hausse de température ΔT dans le disque dont le temps caractéristique τ_{th} est de l'ordre de la microseconde (très faible par rapport à la fréquence mécanique).

Raisonnement énergétique

Les facteurs de couplage optomécanique donnant le décalage de la fréquence de résonance du mode optique dû au déplacement des frontières du disque et au changement d'indice de réfraction $g_{0(geo)}^{(m)}$ et $g_{0(pe)}^{(m)}$ sont déduits de $g_{0(rp)}^{(m)}$ et $g_{0(es)}^{(m)}$. Nous nous appuyons sur un raisonnement énergétique pour trouver ce lien [20].

Considérons une cavité dont la déformation est adiabatique. Oublions les forces photothermiques et la dynamique mécanique. Plaçons N_{cav} photons dans cette cavité résonant à la fréquence ω_0 . Les photons exercent des forces de pression de radiation et électrostrictives sur cette cavité dont la somme vaut $\vec{F}(\vec{r})$. La cavité se déforme adiabatiquement jusqu'à atteindre une déformation que nous notons $\vec{U}(\vec{r})$. À l'équilibre la force totale (constante) photonique s'oppose parfaitement à la force de rappel élastique de la cavité, qui tend à revenir à sa position de départ. Nous postulons que le nombre de photons est resté constant pendant la déformation mais que l'énergie des photons a changé en même temps que la fréquence de résonance de la cavité ($\omega_0 \rightarrow \omega'_0$). Donc une partie de l'énergie des photons s'est transférée à la déformation mécanique de la cavité. Le travail des forces sur cette déformation est $W = \int_V \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{U}(\vec{r}) dV$.

$$\Delta E = N_{cav} \hbar (\omega_0 - \omega'_0) = \int_V \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{U}(\vec{r}) dV \quad (5.10)$$

La déformation quelconque engendrée par les photons $\vec{U}(\vec{r})$ peut toujours se décomposer sur une base de modes propres. Si nous choisissons comme base les champs $\vec{U}_m^{1phn}(\vec{r})$ alors :

$$\vec{U}(\vec{r}) = \sum_m a_m \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) \quad (5.11)$$

En décomposant la force totale des photons vis à vis du nombre de photons dans la cavité $\vec{F}(\vec{r}) = N_{cav} \left(\vec{F}_{rp}^{1phn}(\vec{r}) + \vec{F}_{es}^{1phn}(\vec{r}) \right)$, nous obtenons :

$$N_{cav} \hbar (\omega_0 - \omega'_0) = \int_V N_{cav} \left(\vec{F}_{rp}^{1pht}(\vec{r}) + \vec{F}_{es}^{1pht}(\vec{r}) \right) \cdot \left(\sum_m a_m \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) \right) dV \quad (5.12)$$

$$= N_{cav} \sum_m a_m \int_V \left(\vec{F}_{rp}^{1pht}(\vec{r}) + \vec{F}_{es}^{1pht}(\vec{r}) \right) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV \quad (5.13)$$

Par définition $g_{0(geo)}^{(m)}$ et $g_{0(pe)}^{(m)}$ correspondent au décalage en fréquence de la résonance optique pour une déformation $\vec{U}_m^{1phn}(\vec{r})$. Nous pouvons donc écrire que le décalage de la fréquence de résonance optique est la somme de tout les petits décalages que fournit la base de mode $\vec{U}_m^{1phn}(\vec{r})$ avec chacun une amplitude a_m .

$$\omega'_0 = \omega_0 + \sum_m a_m \left(g_{0(geo)}^{(m)} + g_{0(pe)}^{(m)} \right) \quad (5.14)$$

Finalement, en injectant (5.14) dans (5.13), nous obtenons :

$$N_{cav} \hbar \left(\sum_m a_m \left(g_{0(geo)}^{(m)} + g_{0(pe)}^{(m)} \right) \right) = N_{cav} \sum_m a_m \int_V \left(\vec{F}_{rp}^{1pht}(\vec{r}) + \vec{F}_{es}^{1pht}(\vec{r}) \right) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV$$

Après simplification du nombre de photons, nous faisons apparaître les facteurs de couplage dus aux forces $g_{0(rp)}^{(m)} = \frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{rp}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV$ et $g_{0(es)}^{(m)} = \frac{1}{2\hbar} \int_V \vec{F}_{es}^{1pht}(\vec{r}) \cdot \vec{U}_m^{1phn}(\vec{r}) dV$:

$$\hbar \left(\sum_m a_m \left(g_{0(geo)}^{(m)} + g_{0(pe)}^{(m)} \right) \right) = 2 \sum_m a_m \left(\hbar g_{0(rp)}^{(m)} + \hbar g_{0(es)}^{(m)} \right) \quad (5.15)$$

Qui nous donne finalement la relation :

$$\boxed{g_{0(geo)}^{(m)} + g_{0(pe)}^{(m)} = 2 \left(g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} \right)} \quad (5.16)$$

Nous utiliserons cette hypothèse dans nos simulations des spectres d'auto-oscillation.

Comparaison

Le modèle théorique doit finalement souffrir la comparaison avec les spectres expérimentaux. Nous utilisons pour cela deux séries de spectres mesurés pour des puissances injectées (P_{in}) de 180 μW et 540 μW (mesurées en sortie de fibre). Elles sont présentées respectivement en figures (5.4)(a) et (b). Le disque utilisé pour ces mesures possède un rayon de 4,5 μm et une épaisseur de 200 nm. Son piédestal possède un rayon approximatif de 670 nm pour une hauteur de 1,8 μm . Sur ces deux figures, un spectre mécanique est mesuré pour chaque longueur d'onde du laser de pompe balayant le mode optique (qui présente une déformation triangulaire caractéristique de l'effet thermo-optique). Le mode mécanique entre en auto-oscillation à partir d'une certaine longueur d'onde (ici $\sim 1561,2$ nm, représenté par la flèche blanche). Il est intéressant de noter que pour deux puissances injectées différentes, le seuil d'auto-oscillation se produit à la même

5.1 Régime d'auto-oscillation optomécanique

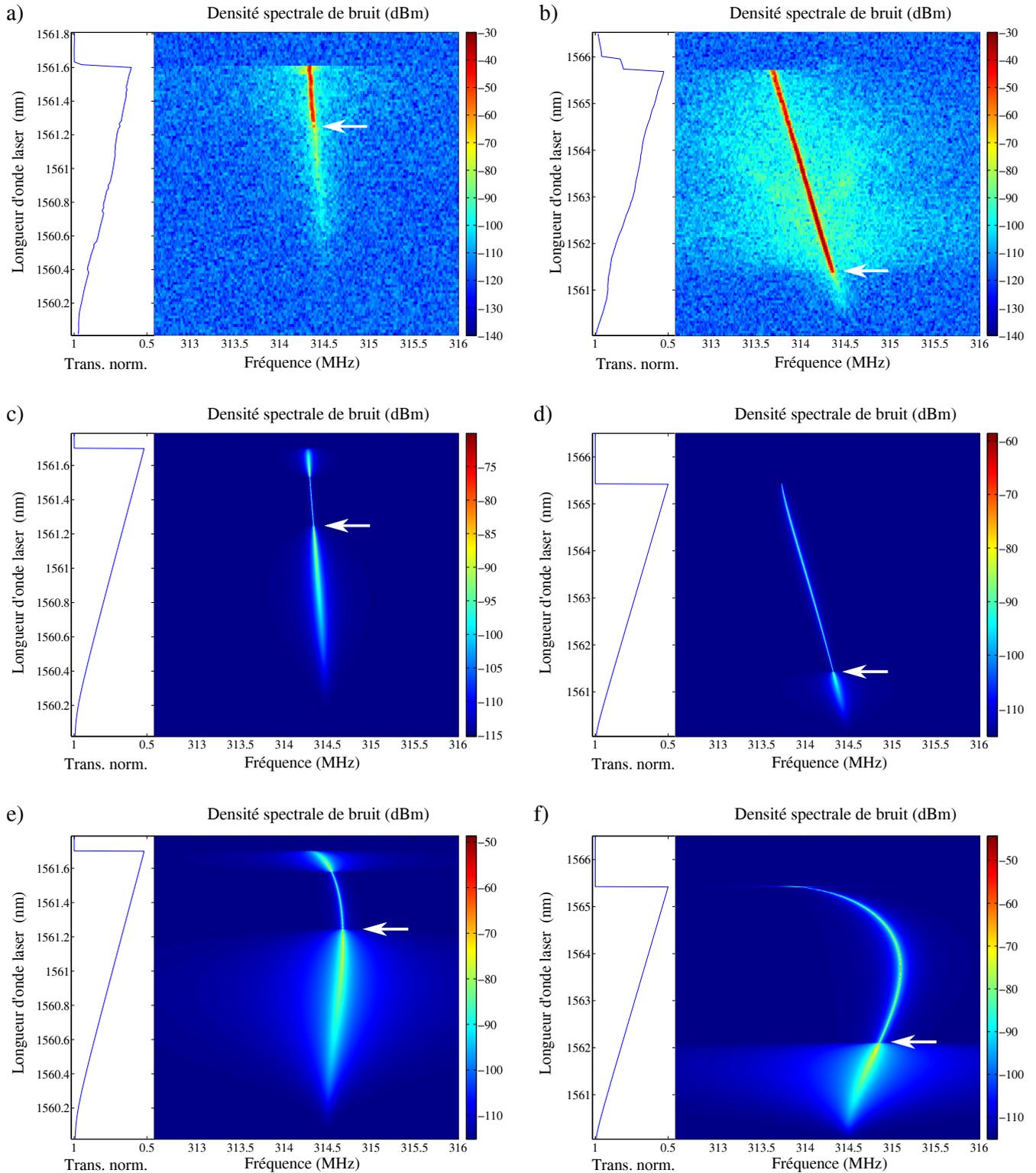


FIGURE 5.4: Évolution du spectre mécanique en fonction de la longueur d'onde du laser. (a) (c) et (e) pour une puissance de $180 \mu\text{W}$ et (b), (d) et (f) pour une puissance de $540 \mu\text{W}$ mesurée en sortie de fibre. (a) et (b) sont deux spectres expérimentaux. (c) et (d) sont des spectres simulés comprenant force photothermique, pression de radiation et électrostriction. (e) et (f) sont des spectres simulés comprenant uniquement pression de radiation et électrostriction. Les flèches blanches indiquent le seuil d'auto-oscillation.

longueur d'onde. Cela est dû au fait que l'effet thermo-optique induit une relation de linéarité entre le désaccord en longueur d'onde du laser vis à vis de la résonance optique ($\lambda_L - \lambda_0$), le nombre de photons moyen dans la cavité $\langle N_{cav} \rangle$ et la hausse de température moyenne du disque $\langle \Delta T \rangle$. Cette relation n'est valable que lorsque l'effet thermo-optique est grand (décalage en longueur d'onde supérieur à dix fois la largeur du mode optique).

Domaine	Paramètre	valeur	
optique	λ_0	1560,2 nm	mesuré
	Q_i	$4 \cdot 10^4$	mesuré
	C	50 %	mesuré
	P_{in}	180 μ W ou 540 μ W	mesuré
mécanique	ω_m	$2\pi \cdot 314,5$ MHz	mesuré
	Q_{meca}	$3 \cdot 10^3$	mesuré
thermique	τ_{th}	3 μ s	simulé
	Γ_{pt}	$6 \cdot 10^{-4}$ K	calculé
	$\partial\omega_0/\partial T$	$86 \cdot 10^9$ rad.Hz.K $^{-1}$	simulé
	$\partial\omega_m/\partial T$	$-2\pi \cdot 16,3 \cdot 10^3$ rad.Hz.K $^{-1}$	simulé
optomécanique	$g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)}$	$-2,6 \cdot 10^5$ rad.Hz	simulé
	$g_{0(pt)}^{(m)}$	$-1,6 \cdot 10^{10}$ rad.Hz	simulé

TABLE 5.2: Paramètres optique, mécanique, thermique et optomécanique du disque mentionné plus haut, utilisés pour les simulations de la figure (5.4).

L'ensemble des propriétés optique, mécanique et thermique du disque considéré en figure (5.4) est présenté dans la table (5.2). Les paramètres optiques et mécaniques sont mesurables directement sur le montage expérimental avec une grande précision. Il est en revanche plus difficile d'estimer les propriétés thermiques du disque.

- le temps thermique τ_{th} est estimé à l'aide de simulations par éléments finis (chapitre 3 section 3.4.1) en considérant le piédestal comme un cylindre. L'approximation est grossière et la mesure des dimensions du piédestal est imprécise. L'incertitude sur ce paramètre est de l'ordre de la microseconde pour une valeur estimée à 3 μ s.
- $\partial\omega_0/\partial T$ a déjà été estimé au chapitre 3. Il varie très peu en fonction du mode optique considéré et du rayon du disque (du moins pour un rayon entre 1 et 5 μ m).
- Γ_{pt} traduit la hausse de température moyenne pour un nombre de photons moyen dans la cavité. Il dépend de la résistance thermique du piédestal (donc de sa dimension) et de la fraction des pertes optiques globales représentant la puissance absorbée dans le disque. Il est calculé à l'aide de la formule $\langle \Delta T \rangle = \Gamma_{pt} \langle N_{cav} \rangle$ où le nombre de photons dans la cavité N_{cav} est estimé *via* les paramètres du mode optique et la hausse de température ΔT mesurée *via* le décalage de la résonance optique dû à l'effet thermo-optique.
- $\partial\omega_m/\partial T$ est calculé à partir de simulations numériques par élément finis (Comsol). Il peut aussi être déduit des mesures expérimentales du décalage de la fréquence mécanique en fonction de la température (connue grâce au mode optique). Les deux méthodes sont en très bon accord ($< 3\%$).

Cependant, la simulation numérique du modèle complet (développé dans le chapitre 1) utilisant ces paramètres ne reproduit pas exactement le même comportement, notamment vis à vis des seuils d'auto-oscillation. Au vu de l'imprécision de certains paramètres, notamment les paramètres de couplage optomécanique qui sont soumis à une erreur de l'ordre d'un facteur 2 au maximum, nous nous permettons d'ajuster les paramètres de couplage optomécanique afin de coller aux spectres présentés en figures (5.4) (a) et (b). En figures 5.4(c) et (d) sont présentés les résultats de ces simulations numériques. Les facteurs de couplage optomécanique dus aux forces de pression de radiation et d'électrostriction ont été légèrement modifiés afin que leur somme vaille $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} = -2,8 \cdot 10^5$ rad.Hz. Le facteur de couplage dû aux forces photothermiques a été un peu diminué $g_{0(pt)}^{(m)} = -1,5 \cdot 10^{10}$ rad.Hz. Ces nouveaux paramètres sont tous compris dans les barres d'erreur des estimations précédentes. Ils permettent de simuler assez correctement les données expérimentales en faisant apparaître le seuil d'auto-oscillation pour la même longueur d'onde. Par ailleurs, le décalage en fréquence du pic d'auto-oscillation semble s'ajuster assez bien avec les données mesurées. Tout ceci est visible en figures (5.4(c) et (d)).

A titre de comparaison, nous présentons en figures (5.4)(e) et (f) les spectres produits par un modèle ne tenant pas compte des effets photothermiques et dont les facteurs de couplage optomécanique sont augmentés à $g_{0(rp)}^{(m)} + g_{0(es)}^{(m)} = -1,6 \cdot 10^6$ rad.Hz (au delà de la barre d'erreur) afin d'obtenir le même seuil d'auto-oscillation qu'observé expérimentalement. Il est évident que le décalage en fréquence du pic d'auto-oscillation ne s'ajuste alors plus aux données expérimentales. Cette simulation factice souligne la nécessité des effets thermiques dans notre modèle.

Zoom sur la dispersion mécanique

Que dire alors de la dispersion de la fréquence mécanique dans cette situation ?

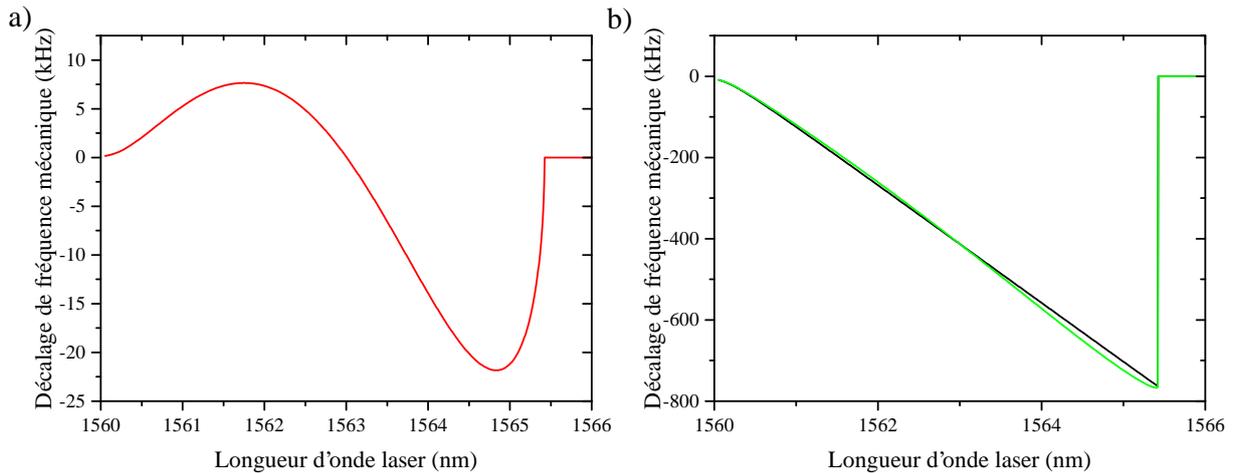


FIGURE 5.5: (a) Dispersion mécanique due au ressort optique (pression de radiation, électrostriction et forces photothermiques) $(\omega''_m - \omega'_m)/2\pi$ en fonction de la longueur d'onde du laser. (b) Dispersion du mode mécanique comprenant les effets thermiques $(\omega'_m - \omega_m)/2\pi$ (courbe noire) et l'ensemble des effets $(\omega''_m - \omega_m)/2\pi$ (courbe verte) en fonction de la longueur d'onde du laser. Les trois courbes sont issues de la simulation présentée en figure (5.4(d)) pour une puissance de 540 μ W.

Nous avons vu au chapitre 1 que la dispersion de la fréquence du mode mécanique due aux forces photothermiques peut être opposé à celle induite par les deux autres forces dans le cas de bandes latérales non résolues (comme c'est le cas ici) (figures (1.16) et (1.17)). Ainsi les dispersions de la fréquence mécanique induites par les deux types de forces s'exerçant dans nos disques s'équilibrent. La figure (5.5)(a) montre la dispersion de la fréquence mécanique en fonction de la longueur d'onde du laser. Cette courbe est extraite de la simulation (5.4)(d). La compensation n'est pas parfaite car la courbe oscille autour de zero. Cependant l'amplitude de cette oscillation est faible par rapport à la dispersion due à la hausse de température dans le disque ω'_m . Il est montré en figure (5.5)(b) la dispersion thermique (courbe noire) et la dispersion totale (thermique+optomécanique)(courbe verte). Ainsi l'extraction de la dispersion mécanique nécessite, de par sa faible amplitude dans cette situation, une mesure très précise de la fréquence du mode mécanique.

5.2 Anti-croisement dans le spectre mécanique mesuré optiquement

Sur certains disques, nous avons pu observer un phénomène d'anti-croisement dans le spectre mécanique mesuré optiquement, avec l'apparence d'un doublet mécanique au lieu d'une simple lorentzienne (figure 5.6). Cet anti-croisement évolue en fonction de la longueur d'onde laser et est notamment visible dans les régimes d'amplification menant à l'auto-oscillation.

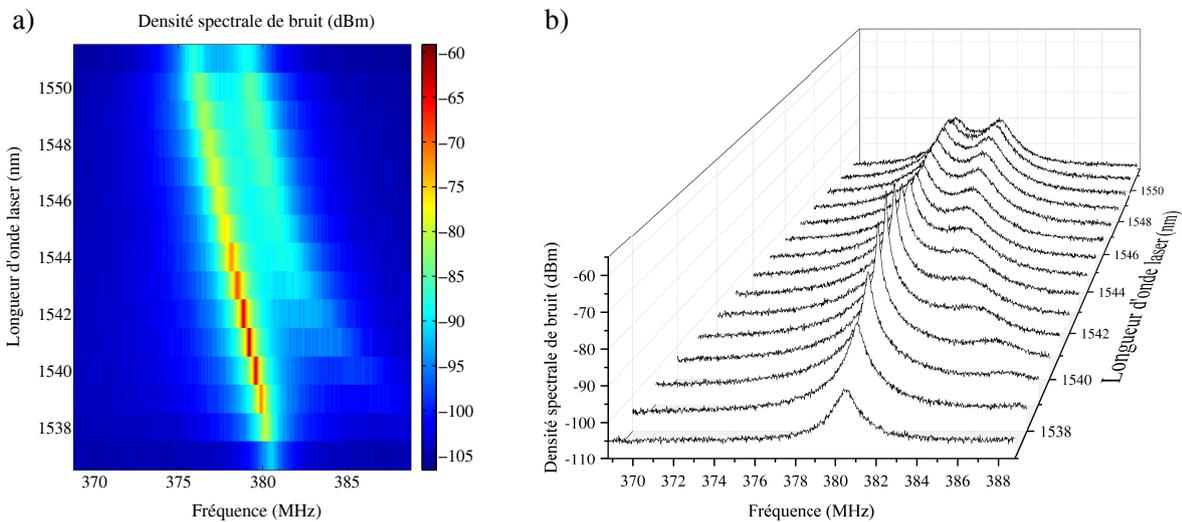


FIGURE 5.6: (a) Spectre de bruit en fonction de la longueur d'onde du laser. (b) présente un vision décomposée plus intuitive du spectre (a).

L'appartition de ce doublet peut avoir plusieurs origines mais nous n'avons retenu que deux scénarios :

- Un phénomène d'hybridation optique/mécanique.
- L'existence de deux modes mécaniques proches en fréquence et couplés physiquement.

L'hybridation optique/mécanique dans une cavité optomécanique a déjà été observée [113, 114, 10] et sa description théorique est relativement solide dans le régime de l'optomécanique linéarisée [110]. Ce régime d'hybridation (appelé parfois "couplage fort", bien que cette appellation ne corresponde pas à la situation conventionnelle de couplage fort entre deux oscillateurs physiques) se produit pour un décalage vers le rouge du laser par rapport à la cavité, contrairement à nos données montrées en figure (5.6). Nos disques GaAs présentent la particularité d'atteindre des couplages optomécaniques linéarisés $g_0\sqrt{N_{cav}}$ commensurables à leurs fréquence mécaniques. Pour cette raison, nous avons dans cette thèse tenté de développer un modèle quantique allant au delà du "couplage fort" linéarisé usuel. Dans l'esprit de la physique du "couplage ultra-fort" des polaritons de cavités semiconductrices, où le couplage atteint la fréquence des oscillateurs, nous avons établi une approche théorique où les termes anti-résonants sont conservés, et où la dépendance spectrale de la dissipation est incluse. Malgré l'intérêt théorique de ces modèles, ils n'ont pas permis d'expliquer le phénomène d'anti-croisement observé sur le flanc bleu de cavité. Pour cette raison, dans ce manuscrit, nous présentons ces modèles quantiques uniquement dans l'annexe D.

D'autre part, deux modes mécaniques couplés et de fréquence assez proche peuvent donner lieu à un doublet avec anti-croisement si le couplage surpasse la dissipation. Nous pouvons proposer un scénario de ce type pour expliquer nos données.

La figure (5.6) présente l'évolution du doublet observé lors de la "descente" le long du flanc bleu de la résonance. Le disque subit un changement de température pendant la descente. La dispersion thermique de chaque mode mécanique étant différente, les fréquences mécaniques des modes du disque sont amenées à se croiser pour une certaine longueur d'onde laser. Si un fort couplage mécanique entre modes existe, on assiste à un anti-croisement. Ce couplage entre modes idéalement orthogonaux peut résulter d'une imperfection géométrique du disque, ou d'un défaut externe par exemple.

Dans ce scénario, le mode principal en figure (5.6) est à la limite de l'auto-oscillation, mais son couplage avec le deuxième mode mécanique provoque une augmentation de son amortissement, empêchant ce faisant l'auto-oscillation.

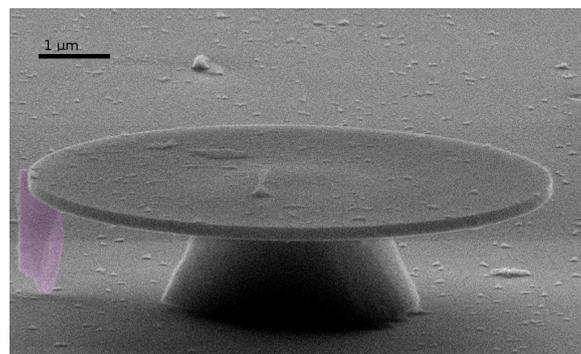


FIGURE 5.7: Cliché MEB du disque présentant un défaut sur la bordure du disque (violet).

Cet effet d'anti-croisement et apparition d'un doublet n'est cependant pas très reproductible dans nos expériences. Nous l'avons observé sur un premier disque qui a d'abord auto-oscillé. Quelques jours plus tard, l'effet d'anti-croisement est apparu et a empêché l'auto-oscillation. Quelques temps après, nous n'arrivions plus à voir de données correctes émanant de ce disque.

Nous avons décidé de l'observer à l'aide d'un microscope électronique à balayage. Le cliché est présenté à la figure (5.7). Un morceau de matière apparaît coincé entre le disque et le substrat. Il pourrait provenir du piédestal et avoir migré vers la bordure extérieure du disque, et provoquer le couplage entre modes mécaniques originellement orthogonaux. Un anti-croisement mécanique de ce type a par la suite pu être observé sur un autre disque de taille similaire et sur quelques-uns des disques possédant un bouclier acoustique (développés par Trung Nguyen dans l'équipe [105]), dont la géométrie légèrement parfois asymétrique favorise le couplage entre modes mécaniques. Un phénomène d'anti-croisement un peu similaire a été observé dans d'autres dispositifs optomécaniques où la dispersion d'un mode mécanique par ressort optique provoque le croisement de deux modes mécaniques. [115, 116].

5.3 Auto-modulation de l'auto-oscillation optomécanique

Le phénomène d'auto-oscillation en optomécanique est bien connu et nous cherchions spécifiquement à le contrôler dans les disques GaAs pour des applications futures. Sur cette voie, nous avons découvert un autre phénomène inattendu, que nous nommerons ici auto-modulation de l'auto-oscillation optomécanique.

Expérimentalement nous observons l'apparition de bandes latérales autour du pic d'auto-oscillation à partir d'une certaine puissance optique du laser (figure 5.8). Ces bandes latérales sont caractéristiques d'un signal périodique non sinusoïdal. Le modèle d'optomécanique linéarisé développé au chapitre 1, bien qu'étendant déjà l'optomécanique linéarisé standard en lui ajoutant les dispersions thermiques et les forces photothermiques, ne peut en aucun cas expliquer l'apparition de cette modulation, quel que soit le jeu de paramètres utilisés.

Quel phénomène physique est responsable d'une telle auto-modulation ?

Le signal de transmission optique retranscrit en "temps réel" les variations de la fréquence de résonance optique. Nous avons vu que les deux principaux phénomènes responsables d'un changement de fréquence optique sont la déformation du disque et la variation de l'indice de réfraction. Ces deux phénomènes sont déjà au cœur des équations couplées de l'optomécanique que nous avons développées. Pour aller au delà de ces équations, il doit donc y avoir un autre mécanisme susceptible de pouvoir changer l'indice et/ou déformer le disque. Nous avons parlé au chapitre 3 de l'absorption à deux photons (TPA). Nous avons montré comment elle affectait le facteur de qualité optique intrinsèque des modes des disques en fonction de la puissance circulante. L'effet des porteurs libres générés par TPA sur la fréquence de résonance optique a par contre été négligé. Il est double et comprend :

- La dispersion optique créée par les porteurs libres ("free carrier dispersion" FCD en anglais) qui provoque un décalage de la fréquence propre des modes optiques.
- L'absorption des porteurs libres ("free carrier absorption" FCA en anglais) qui provoque une augmentation de pertes optiques dans le disque.

La dynamique des porteurs libres pourrait alors être responsable d'une variation périodique de la fréquence propre des modes optiques des disques. Dans un contexte autre que l'optomécanique, cette hypothèse a été plébiscitée dans plusieurs articles [117, 86, 118] qui rapportent des instabilités optiques dans les cavités semiconductrices. Cela impliquerait que le phénomène

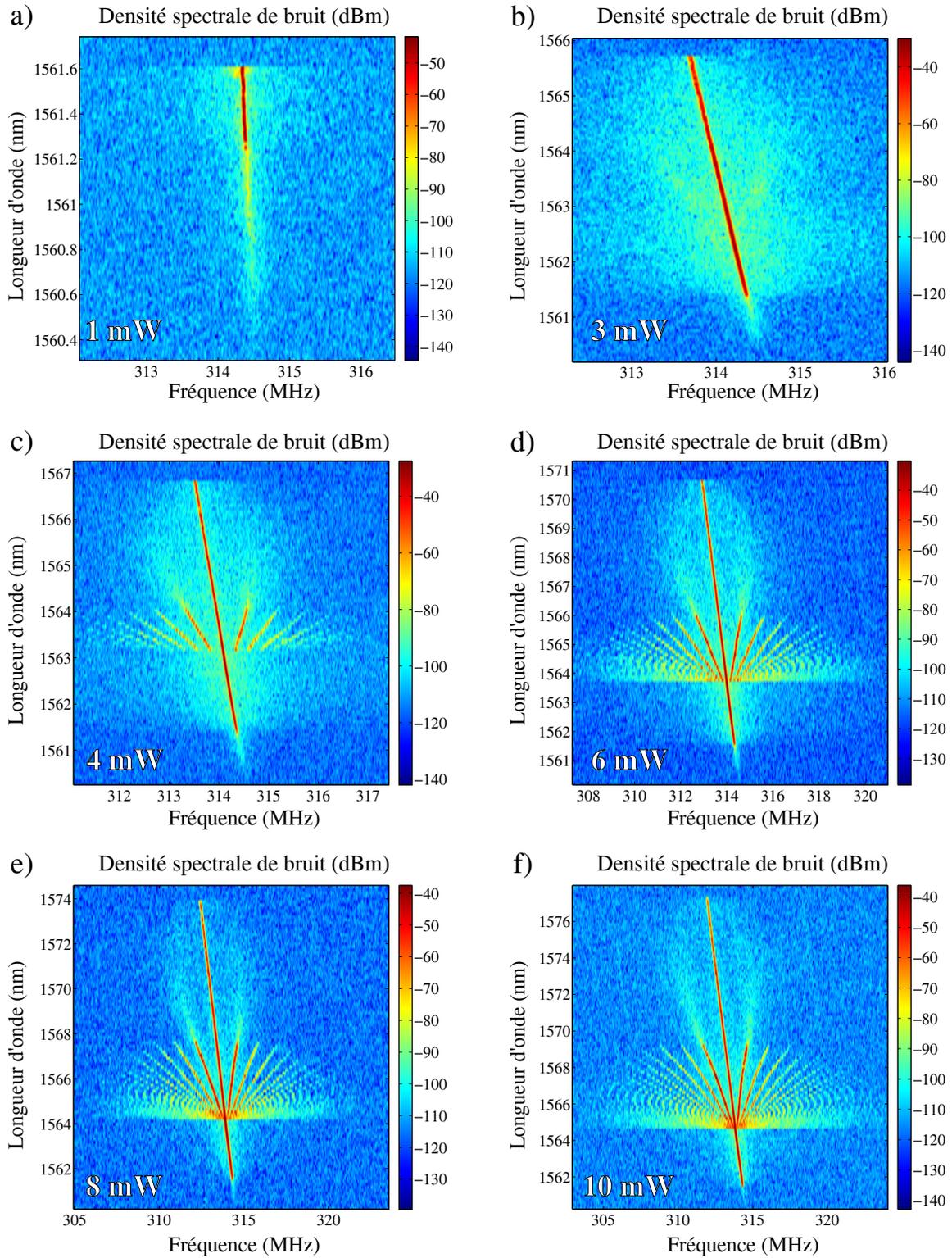


FIGURE 5.8: Évolution du spectre de bruit mécanique en fonction de la longueur d'onde du laser. La puissance affichée sur les figures est celle donnée par l'affichage du contrôleur laser. En réalité on collecte 18 % de cette puissance en sortie de fibre.

d'auto-modulation que nous observons n'est pas forcément intrinsèquement lié au couplage optomécanique. Cette hypothèse doit être confrontée. Le phénomène d'auto-modulation est reproductible et obtenu sur plusieurs disques de tailles différentes ($R = 4.5 \mu\text{m}$ et $R = 3.25 \mu\text{m}$). Dans nos expériences, il n'est apparu pour l'instant qu'en présence d'auto-oscillation optomécanique. Il n'est donc pas possible dans notre système d'affirmer que ce phénomène soit complètement indépendant de l'optomécanique.

5.3.1 Équations couplées pour l'auto-modulation

Nous allons d'abord tenter d'expliquer le phénomène en laissant de côté les degrés de liberté mécaniques en suivant les papiers [117] et [86] dans lesquels la mécanique et l'optomécanique sont absents. La relaxation de la population de porteur libre $N_p(t)$ suit une loi exponentielle décroissante avec un temps caractéristique τ_{port} . Les porteurs libres sont générés exclusivement via *via* l'absorption à deux photons (c'est une hypothèse de ce modèle). En régime permanent, la population de porteurs créée est proportionnelle au nombre de photons au carré $N_{pht}^2 = |a|^4$. L'augmentation de température est due à l'absorption linéaire ($\propto |a|^2$), à l'absorption à deux photons ($\propto |a|^4$) et à l'absorption des porteurs libres ($\propto |a|^2 N_p$).

$$\begin{cases} \frac{d\Delta T(t)}{dt} = -\frac{\Delta T(t)}{\tau_{th}} + \frac{\Gamma_{th} |a|^2(t)}{\tau_{th}} + B_1 N_p(t) |a|^2(t) + B_2 |a|^4(t) \\ \frac{dN_{port}}{dt} = -\frac{N_p(t)}{\tau_{port}} + C_1 |a|^4(t) \\ \frac{da(t)}{dt} = -i((\omega_0 + A_1 \Delta T(t) + A_2 N_p(t)) - \omega_L) a(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i + A_3 |a(t)|^2 + A_4 N_p(t)}{2} \right) a(t) - i\sqrt{\frac{\kappa_e P_{in}}{\hbar \omega_L}} \end{cases}$$

où on a choisi de ne pas développer les coefficients $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$ et C_1 en fonction des grandeurs physiques pour ne pas compliquer l'écriture. Dans la troisième équation, A_1 et A_2 , de signe opposé, représentent la dispersion optique produite par l'élévation de température ΔT (effet thermo-optique) et la présence de porteurs libres (FCD). A_4 correspond à l'absorption par porteurs libres (FCA) et A_3 à l'absorption à deux photons (TPA).

Les équations couplées présente une bifurcation de Hopf sur le flanc bleu de la résonance [117]. Le système possède alors deux positions d'équilibre instable et peut donc osciller entre ces deux positions.

5.3.2 Dynamique du système en auto-modulation

La dynamique du système est régie par le système d'équations différentielles, avec sa disparité de divers temps caractéristiques et les signes opposés des coefficients de dispersion optique. Discutons les temps caractéristiques du plus rapide au plus lent :

- Le temps que met un photon pour faire un tour de cavité $T_0 = \frac{m}{\nu_0}$ (50 à 250 fs en fonction du mode optique).
- Le temps caractéristique d'établissement du régime permanent de la cavité optique lié à κ (~ 30 ps).

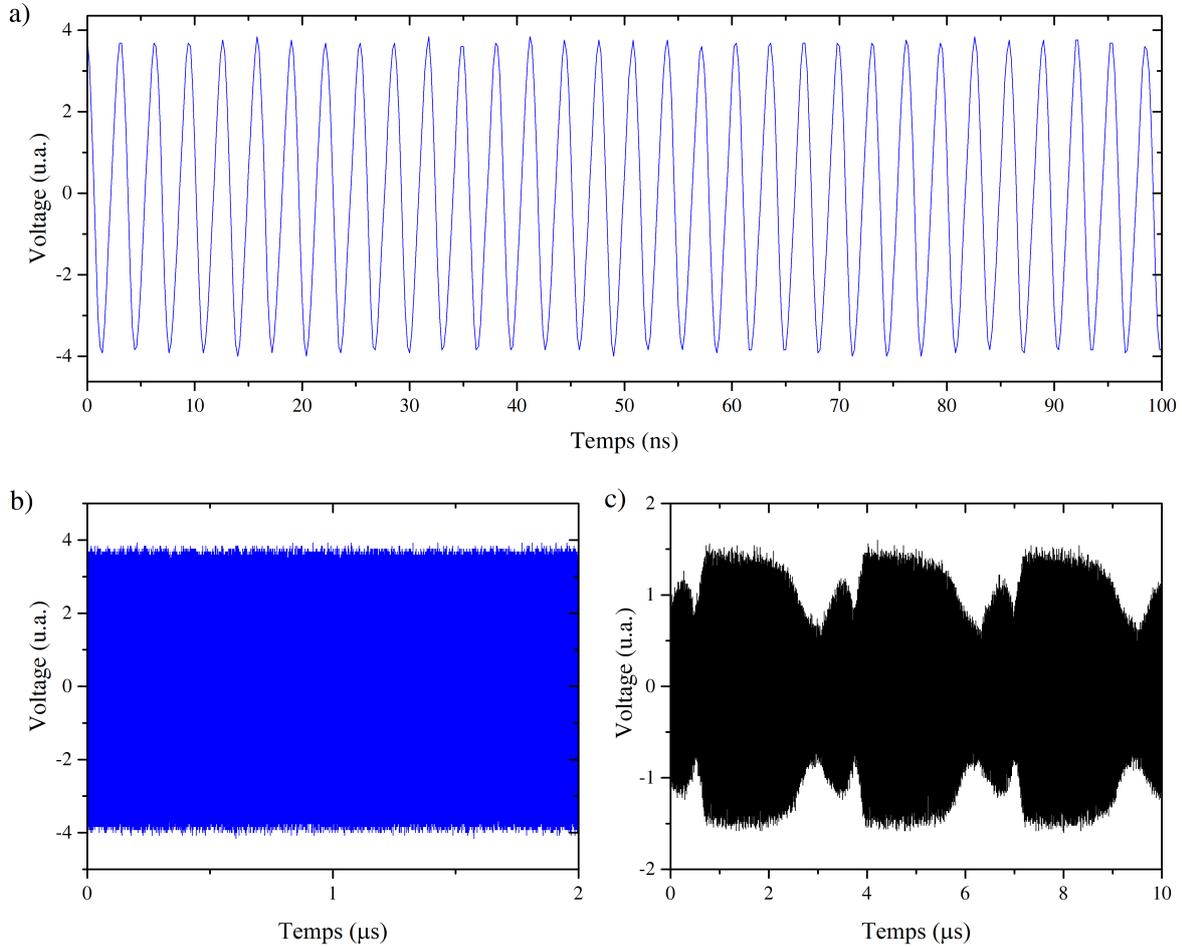


FIGURE 5.9: Traces temporelles de signaux optiques issus du photodétecteur acquis à l'aide d'un oscilloscope rapide. (a) et (b) Traces temporelles du signal d'auto-oscillation de référence prises à deux échelles de temps. (c) Trace temporelle du signal d'auto-oscillation modulé par l'oscillation auto-induite.

- Le temps de relaxation de la population de porteurs libres τ_{port} (~ 100 ps).
- Le temps de relaxation thermique τ_{th} ($\sim \mu s$).

La dispersion thermo-optique procède d'un décalage vers les grandes longueurs d'ondes optiques, on parle de "red-shift" thermo-optique. La dispersion optique issue de la création de porteurs libres (FCD) décale la résonance vers les basses longueurs d'ondes, on parle alors de "blue-shift". Ces deux dispersions intervenant en sens opposé avec des temps caractéristiques différents, permettent de créer une oscillation entre les deux état métastables au delà de la bifurcation de Hopf.

La figure (5.9(a) et (b)) montrent les traces temporelles expérimentales de la transmission optique lorsque le disque GaAs est en auto-oscillation standard. L'oscillation mécanique à 314.5 MHz possède une amplitude constante au cours du temps. La trace temporelle du signal lorsque l'auto-modulation est présente est donnée sur la figure (5.9(c)). Une oscillation plus lente s'imprime dans l'amplitude de l'auto-oscillation optomécanique à 314,5 MHz. Le phénomène de modulation périodique non sinusoïdal est ici apparent. L'enveloppe du signal présenté

en figure (5.9(c)) est extraite par démodulation et lissée. Elle est présentée en figure (5.10). Elle est qualitativement similaire aux observations des papiers [117, 86] qui ne présentent pas de degré de liberté mécanique.

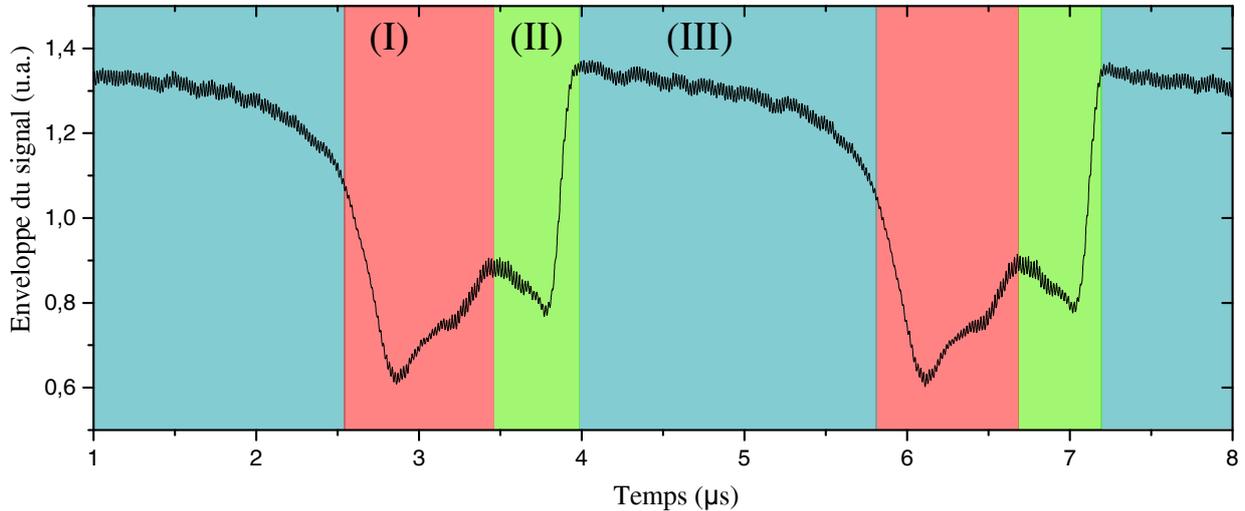


FIGURE 5.10: Enveloppe de la trace de la figure (5.9(c)) en fonction du temps. Elle représente le signal qu'aurait transmis le disque si il n'était pas superposé au signal mécanique.

Même si les modulations de signal observées en figure (5.10) peuvent être présentes dans une infinité de systèmes non-linéaires, on peut néanmoins à ce stade s'aventurer à proposer une explication de nos observations expérimentales en nous appuyant sur la figure (5.10) et sur les deux papiers [117, 86] :

- En début de zone rouge (I), le laser est sur le flanc bleu de la résonance. Il crée des porteurs libres par TPA.
- La dispersion des porteurs libres décale la résonance vers le bleu accentuant ainsi la TPA.
- Le laser "franchit la résonance de cavité" (minimum du signal de transmission) et se stabilise sur le flanc rouge (côté stable de la résonance optique grâce à la dispersion optique due aux porteurs) en fin de zone rouge (I).
- La dynamique rapide des porteurs est donc celle qui régit la zone (I). La température a commencé à grimper dans le disque mais avec une dynamique plus lente.
- Dans la zone verte (II), l'augmentation de température continue (inertie thermique). La dispersion thermique devient alors supérieure à la dispersion optique des porteurs libres. La résonance optique se décale vers les basses longueurs d'ondes.
- Au milieu de la zone verte (II), le laser franchit à nouveau la résonance (minimum local), cette fois dans l'autre sens. Notons que le signal de transmission à résonance est plus haut que précédemment à cause de la dégradation des pertes optiques dues aux porteurs libres.
- Jusqu'à la fin de la zone verte (II), la température du disque continue d'augmenter et la résonance optique de se décaler vers le rouge.

- Au début de la zone bleu (III), la hausse de température a achevé de s'établir. Le laser est loin de la résonance optique sur le flanc bleu et il ne chauffe pas le disque autant qu'avant (car moins de photons dans le disque).
- Dans la zone bleu (III), le disque refroidit alors lentement pour atteindre un nouvel équilibre thermique sur le flanc bleu. La dispersion thermique décale ainsi la résonance vers les basses longueurs d'onde.
- Ce faisant il retourne à son point de départ sur la résonance à l'endroit où la génération de porteurs libres commence à être suffisante pour outrepasser l'équilibre thermo-optique sur le flanc bleu. Le cycle reprend alors et se perpétue à l'infini.

Ce schéma permet d'expliquer l'oscillation périodique de la résonance optique, mettant en jeu les différents phénomènes d'absorption et de dispersion, impliquant effets thermiques et porteurs libres.

5.3.3 Évolution de la fréquence d'auto-modulation

Cette oscillation de la résonance optique menant à l'auto-modulation du signal de transmission possède une période propre qui dépend des paramètres du système étudié. L'auto-modulation n'étant pas sinusoïdale, son spectre se compose du fondamental et de ses harmoniques. Nous parlerons de la fréquence du fondamental pour signifier la fréquence de l'auto-modulation. Sur tous nos spectres expérimentaux, la fréquence fondamentale (écart entre deux bandes latérales) varie d'environ 100 kHz à 2,1 MHz. La période étant limitée par le temps thermique τ_{th} de l'ordre de la microseconde (le plus lent du système), il est logique que les fréquences soient proches du MHz.

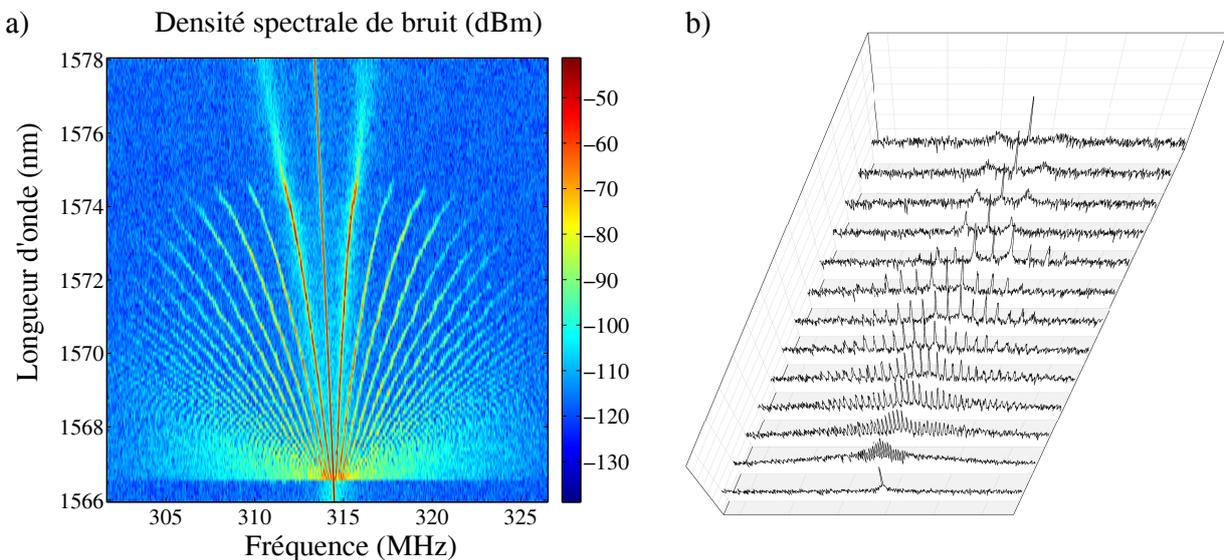


FIGURE 5.11: (a) Spectre de bruit en fonction de la longueur d'onde du laser à très haute puissance. (b) présente un vision décomposée plus intuitive du spectre (a).

Il est intéressant de noter que cette fréquence fondamentale augmente lorsque la longueur d'onde du laser est approchée de la résonance optique dans les expériences. Cette augmentation

semble linéaire à basse puissance (figure 5.8(c)), elle devient non linéaire à haute puissance comme en atteste la figure (5.11(a)).

La figure (5.11) montre l'état d'auto-modulation de l'auto-oscillation optomécanique le plus développé que nous ayons pu obtenir dans nos expériences. La puissance optique mesurée en sortie de fibre est de 5,2 mW.

Il est intéressant de noter le fonctionnement par seuil de cette auto-modulation. Elle apparaît très soudainement sur le spectre, d'abord avec un comportement de type chaotique (spectre large bande). Il semble que l'auto-modulation ne possède pas encore de fréquence bien définie. Puis le spectre de bandes latérales commence à se structurer et faire apparaître une fréquence fondamentale propre. Cette fréquence augmente progressivement jusqu'à ce que l'auto-modulation devienne quasi sinusoïdale et de faible amplitude. Au delà de ce régime, l'auto-modulation s'atténue progressivement pour disparaître au profit du seul pic d'auto-oscillation optomécanique.

5.3.4 Conclusions

Cet effet provoqué par l'absorption à deux photons ne semble pas détruire l'auto-oscillation optomécanique du disque, contrairement au phénomène de doublet mécanique et d'anti-croisement rencontré dans ce chapitre. Les échelles énergétiques mis en jeu par le système mécanique semblent trop importantes pour être perturbées par un phénomène, qui serait dans l'hypothèse avancée ici, opto-électronique.

Il apparaît très intéressant d'étudier la richesse de cette physique non linéaire qui possède un nombre de paramètres assez fabuleux et qui finit par coupler optique, mécanique et électronique.

À l'écriture de ce chapitre, le début de scénario qualitatif présenté ne permet pour autant pas d'être affirmatif et définitif sur l'interprétation de nos expériences d'auto-modulation de l'auto-oscillation. Étant donné le grand nombre de degrés de liberté impliqués (optique, mécanique, thermique, électronique), un grand nombre de combinaisons de ces degrés de liberté pourrait permettre de reproduire qualitativement observations d'auto-modulation et d'intermittences, qui sont l'apanage d'une grande variété de systèmes non-linéaires [119]. Nos résultats indiquent en tout cas une grande richesse potentielle pour l'optomécanique non-linéaire des micro et nano-résonateurs semiconducteurs. Ils indiquent également qu'une description fine des degrés de liberté électroniques est requise pour décrire complètement les plateformes nano-optomécaniques semi-conductrices, que ce soit dans le régime quantique ou classique.

Un effort est porté dans l'équipe par Christophe Baker qui simule les équations couplées décrivant les évolutions temporelles du nombre de photons dans la cavité, de l'amplitude du mode mécanique, de la hausse de température du disque et du nombre de porteurs libres. Ces équations couplées sont fortement non-linéaires et induisent des comportements très variés en fonction des paramètres du système. Au delà de l'auto-modulation, les premiers résultats semblent indiquer que les porteurs libres pourraient jouer un rôle important dans l'optomécanique des disques notamment en abaissant le seuil d'auto-oscillation.

Conclusion

Les travaux de cette thèse portent sur l'étude des interactions optomécaniques et l'obtention du phénomène d'auto-oscillation optomécanique dans les disques en arséniure de gallium. Ils visent à mieux comprendre les mécanismes régissant le couplage optomécanique entre le mode mécanique de respiration et les modes de galerie optique.

Une étude théorique reposant sur la linéarisation des équations couplées optomécaniques est menée. Elle considère les forces de pression de radiation, électrostrictives et photothermiques comme vecteurs de l'interaction optomécanique. Il est montré que les forces photothermiques induisent des effets optomécaniques différents de ceux induits par les deux autres forces, notamment à cause des divers temps de retard vis-à-vis de l'oscillation mécanique. Toutefois, dans le régime de bandes latérales non résolues, la friction optomécanique en fonction du désaccord en fréquence du laser varie de la même manière pour les trois forces, amplifiant l'effet.

Des disques en arséniure de gallium sont fabriqués et leurs caractéristiques optiques et mécaniques mesurées grâce à un montage expérimental permettant de pomper, par couplage évanescent, les modes de galerie optique du disque à l'aide d'une fibre optique effilée placée dans sa proximité. Le régime d'auto-oscillation est obtenu, contrôlé et étudié finement sur ce dispositif. Il est observé que les forces de pression de radiation, électrostrictives et photothermiques agissent bien de concert dans les disques GaAs.

En parallèle les pertes optiques et mécaniques intervenant dans les disques GaAs sont examinées et leurs principaux mécanismes discutés. Leur étude vise *in fine* à améliorer les facteurs de qualité optique et mécanique afin d'augmenter l'efficacité des forces optique et thermique s'exerçant sur le mouvement mécanique. L'effet recherché est l'abaissement du seuil d'auto-oscillation et la réduction du bruit de phase résultant. L'augmentation du facteur de qualité mécanique permettrait une meilleure sensibilité de mesure ainsi qu'une réduction de l'effort des forces optomécaniques.

La maîtrise de l'état d'auto-oscillation ouvre des possibilités dans le domaine de détection de faibles forces. Biswarup Guha, doctorant prenant la suite de mes travaux, travaille en ce moment à ce type de mesures.

Conclusion

Finalement, la plateforme GaAs/AlGaAs se prête à l'inclusion de boîte quantique ou de puits quantiques [120] dans les disques, ouvrant la perspective de dispositif hybride d'électrodynamique quantique et optomécanique en cavité [121]. L'équipe a commencé à étudier ces concepts théoriques en collaboration avec l'équipe théorie du laboratoire MPQ et expérimentalement en collaboration avec le LPN.

Appendices

Mode se propageant dans la fibre optique en silice

Dans cette section nous allons étudier les caractéristiques spatiales et temporelles des modes optiques guidés dans un cylindre en silice de faible rayon R_f (comparable à la longueur d'onde de la lumière) placé dans l'air.

On notera $\vec{E}_w^{(n)}(\vec{r}, t)$ et $\vec{H}_w^{(n)}(\vec{r}, t)$ les champs électrique et magnétique du $n^{\text{ième}}$ mode guidé. De même que pour les modes de galerie, les champs vérifient les équations de Maxwell dans la matière en l'absence de courants et de charge extérieures. Nos deux champs vérifient donc les équations de Helmholtz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

où on suppose que le champ électromagnétique est monochromatique. De plus on suppose aussi qu'il se propage selon la direction \vec{e}_y , direction dans laquelle la fibre est invariante par translation. La fibre étant un cylindre infini nous n'avons pas encore considéré l'invariance par rotation autour de son axe. On introduit un nouveau jeu de coordonnées cylindrique (ρ, ψ, y) . L'invariance par rotation nous pousse à supposer que la dépendance en ψ est harmonique. Cela nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_w(\vec{r}, t) = \vec{E}_w(\rho) e^{iN\psi} e^{-i(\omega t - \beta y)} \\ \vec{H}_w(\vec{r}, t) = \vec{H}_w(\rho) e^{iN\psi} e^{-i(\omega t - \beta y)} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_w(\vec{r}, t) = \vec{E}_w(\rho) e^{iN\psi} e^{-i(\omega t - \beta y)} \\ \vec{H}_w(\vec{r}, t) = \vec{H}_w(\rho) e^{iN\psi} e^{-i(\omega t - \beta y)} \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

où N appartient aux entiers relatifs. La technique classique utilisée est de résoudre ces équations dans chaque domaine d'indice de réfraction constant puis de raccorder les champs grâce aux conditions de continuité. Les deux équations précédentes se simplifient, dans un domaine donné :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}_w(\rho, \psi, y) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{E}_w(\rho, \psi, y) = 0 \\ \Delta \vec{H}_w(\rho, \psi, y) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{H}_w(\rho, \psi, y) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}_w(\rho, \psi, y) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{E}_w(\rho, \psi, y) = 0 \\ \Delta \vec{H}_w(\rho, \psi, y) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{H}_w(\rho, \psi, y) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

où $n^2 = \epsilon$. On introduit le laplacien cylindrique Δ .

$$\Delta \vec{E}(\rho, \psi, y) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_\rho + \frac{E_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\psi}{\partial \psi} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_\psi + \frac{E_\psi}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Seul les champs $\underline{E}_y(\rho, \psi, y)$ et $\underline{H}_y(\rho, \psi, y)$ sont découplés des autres champs :

$$\begin{cases} \left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \underline{E}_y(\rho) + \left(\left(\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \beta^2 \right) \rho^2 - N^2 \right) \underline{E}_y(\rho) = 0 \\ \left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \underline{H}_y(\rho) + \left(\left(\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \beta^2 \right) \rho^2 - N^2 \right) \underline{H}_y(\rho) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{cases} \left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \underline{E}_y(\rho) + \left(\left(\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \beta^2 \right) \rho^2 - N^2 \right) \underline{E}_y(\rho) = 0 \\ \left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \underline{H}_y(\rho) + \left(\left(\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \beta^2 \right) \rho^2 - N^2 \right) \underline{H}_y(\rho) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

La condition $n_{air} < n_{eff} < n_{SiO_2}$ doit être vérifiée pour que le mode soit guidé. Il nous faut alors différencier les domaines spatiaux ($\rho < R_f$ et $\rho > R_f$) car les équations précédentes proposent des solutions différentes en fonction du signe de $\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \beta^2 = k^2(n^2 - n_{eff}^2)$. Le signe est positif pour le cylindre en silice et négatif pour l'air.

Pour le cœur (cylindre en silice), en posant $s = \sqrt{\frac{\omega^2 n_{SiO_2}^2}{c^2} - \beta^2} \rho = \sqrt{k_{SiO_2}^2 - \beta^2} \rho = k_{co} \rho$, le système devient :

$$\left(s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + s \frac{\partial}{\partial s} \right) \underline{E}_y(s/u) + (s^2 - N^2) \underline{E}_y(s/u) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Les solutions de ces équations sont les fonctions de Bessel de première espèce $J_N(s)$ (les fonctions de Bessels de seconde espèce sont rejetées car elles divergent en $\rho = 0$). Les deux champs s'écrivent alors :

$$\underline{E}_y(\rho) = J_N(k_{co} \rho) \quad \text{et} \quad \underline{H}_y(\rho) = J_N(k_{co} \rho) \quad (\text{A.11})$$

Pour la gaine (l'air à l'extérieur de la fibre), en posant $s = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2 n_{air}^2}{c^2}} \rho = \sqrt{\beta^2 - k_{air}^2} \rho = k_{cl} \rho$, le système s'écrit :

$$\left(s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + s \frac{\partial}{\partial s} \right) \underline{E}_y(s/v) - (s^2 + N^2) \underline{E}_y(s/v) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce $K_N(s)$. Elles tendent vers 0 en $+\infty$ (contrairement aux fonctions de Bessel modifiées de première espèce).

Les deux champs s'écrivent alors :

$$\underline{E}_y(\rho) = K_N(k_{cl}\rho) \quad \text{et} \quad \underline{H}_y(\rho) = K_N(k_{cl}\rho) \quad (\text{A.13})$$

De plus les équations de Maxwell en cylindrique prennent cette forme :

$$\begin{cases} i\omega\mu_0\underline{H}_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\underline{E}_y}{\partial\psi} - \frac{\partial\underline{E}_\psi}{\partial y} \\ i\omega\mu_0\underline{H}_\psi = \frac{\partial\underline{E}_\rho}{\partial y} - \frac{\partial\underline{E}_y}{\partial\rho} \\ i\omega\mu_0\underline{H}_y = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\underline{E}_\psi)}{\partial\rho} - \frac{\partial\underline{E}_\rho}{\partial\psi}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} -i\omega\epsilon\underline{E}_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\underline{H}_y}{\partial\psi} - \frac{\partial\underline{H}_\psi}{\partial y} \\ -i\omega\epsilon\underline{E}_\psi = \frac{\partial\underline{H}_\rho}{\partial y} - \frac{\partial\underline{H}_y}{\partial\rho} \\ -i\omega\epsilon\underline{E}_y = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\underline{H}_\psi)}{\partial\rho} - \frac{\partial\underline{H}_\rho}{\partial\psi}\right) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

En utilisant les dépendances connues en y et ψ : $e^{iN\psi}e^{i\beta y}$. Ces dernières se réécrivent :

$$\begin{cases} i\omega\mu_0\underline{H}_\rho = \frac{iN}{\rho}\underline{E}_y - i\beta\underline{E}_\psi \\ i\omega\mu_0\underline{H}_\psi = i\beta\underline{E}_\rho - \frac{\partial\underline{E}_y}{\partial\rho} \\ i\omega\mu_0\underline{H}_y = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\underline{E}_\psi)}{\partial\rho} - iN\underline{E}_\rho\right) \end{cases} \quad \begin{cases} -i\omega\epsilon\underline{E}_\rho = \frac{iN}{\rho}\underline{H}_y - i\beta\underline{H}_\psi \\ -i\omega\epsilon\underline{E}_\psi = i\beta\underline{H}_\rho - \frac{\partial\underline{H}_y}{\partial\rho} \\ -i\omega\epsilon\underline{E}_y = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\underline{H}_\psi)}{\partial\rho} - iN\underline{H}_\rho\right) \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Pour calculer tout les liens entre les champs, nous partons des champs \underline{E}_y et \underline{H}_y et nous exprimons les quatre autres champs en fonction de ces derniers.

$$\underline{E}_\rho = \frac{i}{k^2 - \beta^2} \left(\frac{iN\omega\mu_0}{\rho} \underline{H}_y + \beta \frac{\partial\underline{E}_y}{\partial\rho} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\underline{E}_\psi = \frac{i}{k^2 - \beta^2} \left(\frac{iN\beta}{\rho} \underline{E}_y - \omega\mu_0 \frac{\partial\underline{H}_y}{\partial\rho} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\underline{H}_\rho = \frac{i}{k^2 - \beta^2} \left(-\frac{iN\omega\epsilon_0 n^2}{\rho} \underline{E}_y + \beta \frac{\partial\underline{H}_y}{\partial\rho} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\underline{H}_\psi = \frac{i}{k^2 - \beta^2} \left(\frac{i\beta N}{\rho} \underline{H}_y + \omega\epsilon_0 n^2 \frac{\partial\underline{E}_y}{\partial\rho} \right) \quad (\text{A.19})$$

Nous injectons dans ces équations les solutions de \underline{E}_y et \underline{H}_y .

$$\underline{E}_y(\rho, \psi, y) = \begin{cases} A J_N(k_{co}\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} & \text{pour } \rho < R_f \\ C K_N(k_{cl}\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} & \text{pour } \rho > R_f \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\underline{H}_y(\rho, \psi, y) = \begin{cases} B J_N(k_{co}\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} & \text{pour } \rho < R_f \\ D K_N(k_{cl}\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} & \text{pour } \rho > R_f \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

La continuité de ces champs à l'interface air-SiO₂ donne la condition suivante :

$$C = A \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \quad (\text{A.22})$$

$$D = B \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \quad (\text{A.23})$$

Les autres champs s'écrivent :

$$\underline{E}_\rho(\rho, \psi, y) = \begin{cases} \frac{i}{k_{co}^2} \left(\frac{iN\omega\mu_0}{\rho} J_N(k_{co}\rho) B + A\beta J'_N(k_{co}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \\ \frac{-i}{k_{cl}^2} \left(\frac{iN\omega\mu_0}{\rho} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} K_N(k_{cl}\rho) B + A \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \beta K'_N(k_{cl}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \end{cases} \quad (A.24)$$

$$\underline{E}_\psi(\rho, \psi, y) = \begin{cases} \frac{i}{k_{co}^2} \left(\frac{iN\beta}{\rho} J_N(k_{co}\rho) A - B\omega\mu_0 J'_N(k_{co}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \\ \frac{-i}{k_{cl}^2} \left(\frac{iN\beta}{\rho} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} K_N(k_{cl}\rho) A - B \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \omega\mu_0 K'_N(k_{cl}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \end{cases} \quad (A.25)$$

$$\underline{H}_\rho(\rho, \psi, y) = \begin{cases} \frac{i}{k_{co}^2} \left(\frac{-iN\omega\epsilon_0 n_{SiO_2}^2}{\rho} J_N(k_{co}\rho) A + B\beta J'_N(k_{co}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \\ \frac{-i}{k_{cl}^2} \left(\frac{-iN\omega\epsilon_0 n_{air}^2}{\rho} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} K_N(k_{cl}\rho) A + B \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \beta K'_N(k_{cl}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \end{cases} \quad (A.26)$$

$$\underline{H}_\psi(\rho, \psi, y) = \begin{cases} \frac{i}{k_{co}^2} \left(\frac{iN\beta}{\rho} J_N(k_{co}\rho) B + A\omega\epsilon_0 n_{SiO_2}^2 J'_N(k_{co}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \\ \frac{-i}{k_{cl}^2} \left(\frac{iN\beta}{\rho} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} K_N(k_{cl}\rho) B + A \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \omega\epsilon_0 n_{air}^2 K'_N(k_{cl}\rho) \right) e^{iN\psi} e^{i\beta y} \end{cases} \quad (A.27)$$

On utilise ensuite la continuité des champs à l'interface. Plusieurs choix possibles, on utilise les champs \underline{E}_ψ et \underline{H}_ψ qui sont tous deux continus à l'interface air-SiO₂. On aurait pu utiliser \underline{E}_ρ et \underline{H}_ρ qui donnent les mêmes résultats. On obtient B en fonction de A .

$$\begin{cases} B = \frac{i\beta N}{\omega\mu_0 R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2} \right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)} \right)} A \\ B = \frac{i\omega\epsilon_0 R_f}{\beta N} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2} \right)}{\left(\frac{n_{SiO_2}^2 J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{n_{air}^2 K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)} \right)} A \end{cases} \quad (A.28)$$

On égalise les deux équations :

$$\boxed{\left(\frac{\beta N}{R_f} \right)^2 \left\{ \frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2} \right\}^2 = \left(\frac{k_{SiO_2}^2 J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{k_{air}^2 K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)} \right) \left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)} \right)}$$

(A.29)

Cette équation permet de déterminer les différents coefficient β des modes se propageant dans la structure avec l'indice effectif n_{eff} ($\beta = kn_{eff}$).

Pour calculer les dérivées des fonctions de Bessel, on s'appuie sur les relations :

$$J'_N(kr) = \frac{N}{r} J_N(kr) - k J_{N+1}(kr) \quad (\text{A.30})$$

$$K'_N(kr) = \frac{N}{r} K_N(kr) - k K_{N+1}(kr) \quad (\text{A.31})$$

Il faut faire attention ici au signe de N , on a vu que N pouvait être négatif dans $e^{iN\psi}$. Par contre pour les fonctions de Bessel c'est son carré qui intervient et on utilisera toujours sa valeur absolue. Pour chaque champs on a donc deux solutions. Nous faisons le choix de lier le champ \underline{E}_y au cosinus, c'est à dire :

$$\underline{E}_y(\rho, \psi, y) = A J_N(k_{co}\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} + A J_N(k_{co}\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} \quad (\text{A.32})$$

$$= 2A J_N(k_{co}\rho) \cos(N\psi) e^{i\beta y} \quad (\text{A.33})$$

Le signe de B étant directement dépendant du signe de N , chacun des cinq autres champs possède une dépendance en ψ qui lui est propre. Notons aussi le fait que B est purement imaginaire et regardons le caractère complexe de chaque champ. Ainsi :

$$\underline{E}_y = \begin{cases} F_{E_y}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} + F_{E_y}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2F_{E_y}(\rho) \cos(N\psi) e^{i\beta y} \\ G_{E_y}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} + G_{E_y}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2G_{E_y}(\rho) \cos(N\psi) e^{i\beta y} \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

$$\underline{H}_y = \begin{cases} iF_{H_y}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} - iF_{H_y}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = -2iF_{H_y}(\rho) \sin(N\psi) e^{i\beta y} \\ iG_{H_y}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} - iG_{H_y}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = -2iG_{H_y}(\rho) \sin(N\psi) e^{i\beta y} \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

$$\underline{E}_\rho = \begin{cases} iF_{E_\rho}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} + iF_{E_\rho}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iF_{E_\rho}(\rho) \cos(N\psi) e^{i\beta y} \\ iG_{E_\rho}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} + iG_{E_\rho}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iG_{E_\rho}(\rho) \cos(N\psi) e^{i\beta y} \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

$$\underline{E}_\psi = \begin{cases} F_{E_\psi}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} - F_{E_\psi}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iF_{E_\psi}(\rho) \sin(N\psi) e^{i\beta y} \\ G_{E_\psi}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} - G_{E_\psi}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iG_{E_\psi}(\rho) \sin(N\psi) e^{i\beta y} \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

$$\underline{H}_\rho = \begin{cases} F_{H_\rho}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} - F_{H_\rho}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iF_{H_\rho}(\rho) \sin(N\psi) e^{i\beta y} \\ G_{H_\rho}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} - G_{H_\rho}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iG_{H_\rho}(\rho) \sin(N\psi) e^{i\beta y} \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

$$\underline{H}_\psi = \begin{cases} iG_{H_\psi}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} + iF_{H_\psi}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iF_{H_\psi}(\rho) \cos(N\psi) e^{i\beta y} \\ iG_{H_\psi}(\rho) e^{iN\psi} e^{i\beta y} + iG_{H_\psi}(\rho) e^{-iN\psi} e^{i\beta y} = 2iG_{H_\psi}(\rho) \cos(N\psi) e^{i\beta y} \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

où les fonctions F sont réelles. On notera le déphasage de $\frac{\pi}{2}$ pour les champs \underline{E}_y et \underline{H}_y par rapport aux autres champs. Ce qui est en parfait accord avec les simulations par éléments finis (COMSOL).

$$\begin{cases} F_{E_y}(\rho) = \underline{A} J_N(k_{co}\rho) \\ G_{E_y}(\rho) = \underline{A} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} K_N(k_{cl}\rho) \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{H_y}(\rho) = \underline{A} \frac{\beta N}{\omega \mu_0 R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} J_N(k_{co}\rho) \\ G_{H_y}(\rho) = \underline{A} \frac{\beta N}{\omega \mu_0 R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} K_N(k_{cl}\rho) \end{array} \right. \quad (\text{A.41})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{E_\rho}(\rho) = \underline{A} \frac{\beta}{k_{co}^2} \left(\frac{-N^2}{\rho R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} J_N(k_{co}\rho) + J'_N(k_{co}\rho) \right) \\ G_{E_\rho}(\rho) = \underline{A} \frac{-\beta}{k_{cl}^2} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \left(\frac{-N^2}{R_f \rho} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} K_N(k_{cl}\rho) + K'_N(k_{cl}\rho) \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.42})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{E_\psi}(\rho) = \underline{A} \frac{-\beta N}{k_{co}^2} \left(\frac{1}{\rho} J_N(k_{co}\rho) - \frac{1}{R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} J'_N(k_{co}\rho) \right) \\ G_{E_\psi}(\rho) = \underline{A} \frac{\beta N}{k_{cl}^2} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \left(\frac{1}{\rho} K_N(k_{cl}\rho) - \frac{1}{R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} K'_N(k_{cl}\rho) \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.43})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{H_\rho}(\rho) = \underline{A} \frac{N}{k_{co}^2} \left(\frac{\omega \epsilon_0 n_{SiO_2}^2}{\rho} J_N(k_{co}\rho) - \frac{\beta^2}{\omega \mu_0 R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} J'_N(k_{co}\rho) \right) \\ G_{H_\rho}(\rho) = \underline{A} \frac{-N}{k_{cl}^2} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \left(\frac{\omega \epsilon_0 n_{air}^2}{\rho} K_N(k_{cl}\rho) - \frac{\beta^2}{\omega \mu_0 R_f} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} K'_N(k_{cl}\rho) \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.44})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{H_\psi}(\rho) = \underline{A} \frac{1}{k_{co}^2} \left(\frac{-\beta^2 N^2}{\omega \mu_0 R_f \rho} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} J_N(k_{co}\rho) + \omega \epsilon_0 n_{SiO_2}^2 J'_N(k_{co}\rho) \right) \\ G_{H_\psi}(\rho) = \underline{A} \frac{-1}{k_{cl}^2} \frac{J_N(k_{co}R_f)}{K_N(k_{cl}R_f)} \left(\frac{-\beta^2 N^2}{\omega \mu_0 R_f \rho} \frac{\left(\frac{1}{k_{co}^2} + \frac{1}{k_{cl}^2}\right)}{\left(\frac{J'_N(k_{co}R_f)}{k_{co}^2 J_N(k_{co}R_f)} + \frac{K'_N(k_{cl}R_f)}{k_{cl}^2 K_N(k_{cl}R_f)}\right)} K_N(k_{cl}\rho) + \omega \epsilon_0 n_{air}^2 K'_N(k_{cl}\rho) \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.45})$$

Nous possédons donc les solutions analytiques exactes de la fibre en silice effilée. Nous nous servons de ces solutions pour calculer le rayon à partir duquel la fibre devient monomode. Le seul mode qui ne subit pas de cutoff est le mode HE_{11} .

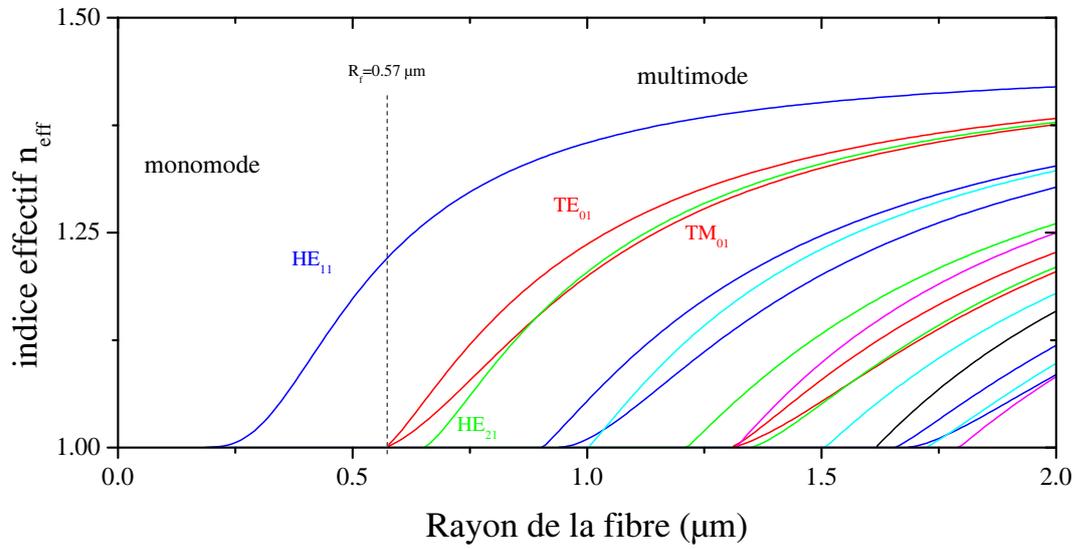


FIGURE A.1: Évolution de l'indice effectif des différents modes guidés en fonction du rayon de la fibre. En bleu les modes HE_{1x} , en rouge les modes TE_{0x} et TM_{0x} , en vert les modes HE_{2x} , en cyan les modes HE_{3x} , en magenta les modes HE_{4x} et , en noir le premier mode HE_{51}

La figure (A.1) présente les modes supportés par une telle fibre optique en fonction de son rayon pour une longueur d'onde de 1550 nm. La fréquence de coupure pour le second mode TE_{01} est donnée pour un rayon de $R_f = 0,57 \mu\text{m}$. Ainsi une fibre effilée avec un rayon inférieur à 570 nm sera monomode.

Couplage évanescent

Maintenant que l'on sait décrire correctement nos systèmes optiques il faut voir comment ils se couplent entre eux. La fibre est placée le long du disque. Le recouvrement des champs crée un couplage entre les deux modes optiques propagatifs. De la même manière qu'une particule peut passer d'un potentiel à l'autre par effet tunnel si le recouvrement des fonctions d'onde est non nul, nos photons peuvent naviguer d'un mode à l'autre. Ce couplage est décrit par la théorie dite "théorie des modes couplés" (TMC) que nous nous proposons de revisiter ici. Nous nous proposons ici de dériver le coefficient de couplage entre deux modes propagatifs lorsqu'ils sont suffisamment proches pour se coupler.

La première approximation consiste à dire que le champ électromagnétique global est donné par une superposition linéaire des deux modes. Il s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = a_w(z)\vec{E}_w(\vec{r},t) + a_c(z)\vec{E}_c(\vec{r},t) \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = a_w(z)\vec{H}_w(\vec{r},t) + a_c(z)\vec{H}_c(\vec{r},t) \quad (\text{B.2})$$

où $\vec{E}_w(\vec{r},t)$ ($\vec{H}_w(\vec{r},t)$) représente le champ propagatif électrique (magnétique) du guide d'onde (waveguide) normalisé pour une puissance de 1 W à travers une section infini et $\vec{E}_c(\vec{r},t)$ ($\vec{H}_c(\vec{r},t)$) représente le champ propagatif électrique (magnétique) de la cavité normalisé pour une puissance de 1 W à travers une section semi infini partant du centre du disque. z est la direction de propagation de la fibre. l'amplitude de ces deux champs est dépendante de z . Une onde passant dans ce système va distribuer son énergie entre les deux modes. On considère qu'avant le couplage ces deux quantités sont constantes et qu'elles le redeviennent après le couplage.

Kamalakis dans son papier [122] nous renseigne la formule :

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_S \vec{F}_{12} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{l} + i\mu(\omega_1 - \omega_2) \int_S \vec{H}_2^* \cdot \vec{H}_1 dS + i \int_S (\epsilon_1\omega_1 - \epsilon_2\omega_2) \vec{E}_2^* \cdot \vec{E}_1 dS$$

avec :

$$\vec{F}_{12} = \vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2^* + \vec{E}_2^* \wedge \vec{H}_1 \quad (\text{B.3})$$

évolution de l'amplitude du mode propagatif de cavité

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_S \vec{F}_c \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F}_c \cdot d\vec{l} + i\mu(\omega - \omega) \int_S \vec{H}_c^* \cdot \vec{H} dS + i\omega \int_S (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E} dS \quad (\text{B.4})$$

où le premier et le deuxième terme du membre de droite sont nuls, le premier dû au contour qui est très loin du système (les champs sont considérés nuls à l'infini), le second est évident ($\omega - \omega = 0$). \vec{F}_c se réécrit en fonction des paramètres du système :

$$\vec{F}_c = \vec{E} \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H} \quad (\text{B.5})$$

$$= a_c(z) \left(\vec{E}_c \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_c \right) + a_w(z) \left(\vec{E}_w \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_w \right) \quad (\text{B.6})$$

L'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_S a_c(z) \left(\vec{E}_c \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_c \right) \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial z} \int_S a_w(z) \left(\vec{E}_w \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_w \right) \cdot d\vec{S} \\ = i\omega \int_S (\epsilon_c - \epsilon) a_c(z) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_c dS + i\omega \int_S (\epsilon_c - \epsilon) a_w(z) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dS \\ \frac{\partial a_c(z)}{\partial z} \int_S \left(\vec{E}_c \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_c \right) \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_w(z) \int_S \left(\vec{E}_w \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_w \right) \cdot d\vec{S} \right) \\ = i\omega a_c(z) \int_S (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_c dS + i\omega a_w(z) \int_S (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dS \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{\frac{\partial a_c(z)}{\partial z} 4 + \frac{\partial}{\partial z} (a_w(z)g(z)) = i\omega a_c(z)K + i\omega a_w(z)f(z)} \quad (\text{B.7})$$

Avec :

$$\int_S \left(\vec{E}_c \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_c \right) \cdot d\vec{S} = 4 \quad (\text{B.8})$$

pour avoir une puissance circulante de 1 W.

$$\begin{cases} g(z) = \int_S \left(\vec{E}_w \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_w \right) \cdot d\vec{S} \\ f(z) = \int_S (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dS \\ K = \int_S (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_c dS \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ ne sont non nuls que sur la zone où les deux champs ont un recouvrement non nuls. K est une constante indépendante de z . Cette équation est ensuite intégrée sur z avec des bornes suffisamment lointaines pour que les champs ne se recouvrent plus ($f(-l) = f(+l) = g(-l) = g(+l) = 0$)

$$4 \int_{-l}^{+l} \frac{\partial a_c(z)}{\partial z} dz + \int_{-l}^{+l} \frac{\partial}{\partial z} (a_w(z)g(z)) dz = i\omega K \int_{-l}^{+l} a_c(z) dz + i\omega \int_{-l}^{+l} a_w(z)f(z) dz$$

$$4(a_c(+l) - a_c(-l)) + (a_w(+l)g(+l) - a_w(-l)g(-l)) = i\omega K \int_{-l}^{+l} a_c(z) dz + i\omega \int_{-l}^{+l} a_w(z)f(z) dz$$

$$4(a_c(+l) - a_c(-l)) = i\omega K \int_{-l}^{+l} a_c(z) dz + i\omega \int_{-l}^{+l} a_w(z)f(z) dz$$

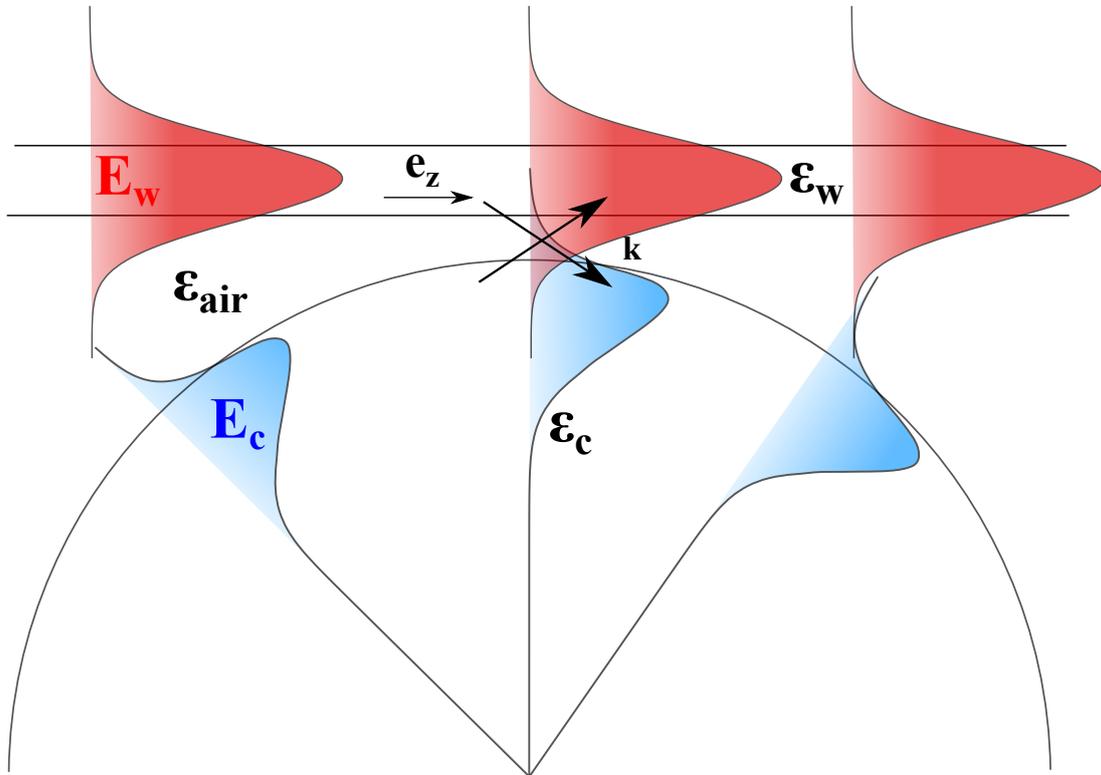


FIGURE B.1: tet

A ce stade, on pose deux hypothèses fortes :

- Les champs sont faiblement couplés et les amplitudes $a_w(z)$ et $a_c(z)$ sont lentement variables.
- K est petit devant les autres termes car il est composé d'une intégrale du champ de cavité, non nulle seulement dans le guide d'onde là où son amplitude est très faible (car faible couplage et donc faible recouvrement spatial des modes).

Cela nous permet de négliger le premier terme du membre de droite et de sortir de l'intégrale le terme $a_w(z)$ du second membre de droite.

Finalement l'équation devient :

$$a_c(+l) = a_c(-l) + a_w(-l) \frac{i\omega}{4} \int_{-l}^{+l} f(z) dz \quad (\text{B.10})$$

En appliquant le même raisonnement sur le guide d'onde, on obtient un résultat similaire. Les deux équations se résument ainsi :

$$\begin{cases} a_c(l) = a_c(-l) + a_w(-l) \frac{i\omega}{4} \int_V (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dV \\ a_w(l) = a_w(-l) + a_c(-l) \frac{i\omega}{4} \int_V (\epsilon_w - \epsilon) \vec{E}_w^* \cdot \vec{E}_c dV \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Que l'on peut réécrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_c(l) \\ a_w(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ik \\ ik & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_c(-l) \\ a_w(-l) \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Avec :

$$k = \frac{\omega}{4} \int_V (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dV \quad (\text{B.13})$$

Remarquons directement que le coefficient k est complexe car il résulte du produit scalaire de deux vecteurs complexes, cependant les simulations numériques montrent que le facteur k possède un **module** constant lorsque l'on change la phase du guide ou du résonateur. Cette phase entre le résonateur et le guide d'onde est arbitraire puisque dans la réalité la phase du résonateur va automatiquement se caler sur la phase du guide afin d'assurer les conservations d'énergie et de moment. k est ici adimensionné si on se rappelle que le facteur 4 au dénominateur provient de la normalisation du champ à une puissance circulante de 1 W. Les coefficients a_c et a_w ont la dimension de la racine carré d'une puissance

$$k = \omega \frac{\int_V (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dV}{\int_S (\vec{E}_c \wedge \vec{H}_c^* + \vec{E}_c^* \wedge \vec{H}_c) \cdot d\vec{S}} = 2\pi m \frac{\int_V (\epsilon_c - \epsilon) \vec{E}_c^* \cdot \vec{E}_w dV}{\int_V (\epsilon(\vec{r}) |\vec{E}_c|^2 + \mu_0 |\vec{H}_c|^2) dV} \quad (\text{B.14})$$

Notons toutefois que cette dernière égalité n'est vraie que dans le cas où $\omega = \omega_0$, c'est à dire à résonance. Hors résonance la relation entre la puissance et l'énergie dans le disque ne tient plus.

Couplage clockwise-counterclockwise

Le modèle du mode clockwise seul est simple et utile pour une compréhension généralisée des choses, il est cependant incomplet. En effet on sait que le mode de galerie supporte deux modes propagatifs résonnants se propageant en sens opposés. On dénote le mode tournant dans le sens des aiguilles d'une montre "clockwise" et "counterclockwise" le mode contra-propageant. Jusqu'à maintenant on a traité uniquement le cas où seul le mode clockwise est peuplé par le couplage à la fibre. Cependant la non-idéalité des surfaces de nos disques GaAs rétro-diffusent une partie des photons du mode cw vers ccw. Qui dit diffusion dit aussi rétro-diffusion. La rétro-diffusion va être le principal phénomène permettant le couplage du mode clockwise vers le mode counterclockwise.

C.1 Méthode des modes couplés dans le temps

On réutilise la même équation sur $A_{\mathcal{E}}$ que tout à l'heure en rajoutant un terme de couplage au mode c.c.w.. En parallèle on ajoute l'équation décrivant l'amplitude du mode ccw $B_{\mathcal{E}}$ dans le disque.

$$\frac{dA_{\mathcal{E}}(t)}{dt} = -i(\omega - \omega_0)A_{\mathcal{E}}(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)A_{\mathcal{E}}(t) + i\beta B_{\mathcal{E}}(t) + i\sqrt{\kappa_e}S_i \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{dB_{\mathcal{E}}(t)}{dt} = -i(\omega - \omega_0)B_{\mathcal{E}}(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)B_{\mathcal{E}}(t) + i\beta A_{\mathcal{E}}(t) \quad (\text{C.2})$$

Notons ici la très grande symétrie de ces deux équations couplées, où nous avons fait en sorte que les coefficients de couplage soient identique du mode cw vers le ccw et vice versa. En stationnaire, nous auront pour ces deux modes les solutions :

$$A_{\mathcal{E}} = \frac{i\sqrt{\kappa_e}\left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) + i(\omega - \omega_0)\right)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega - \omega_0)} S_i \quad (\text{C.3})$$

$$B_{\mathcal{E}} = \frac{-\beta\sqrt{\kappa_e}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega - \omega_0)} S_i \quad (\text{C.4})$$

C.2 Méthode des modes propagatifs

Nous utilisons le formalisme des matrices de diffusion.

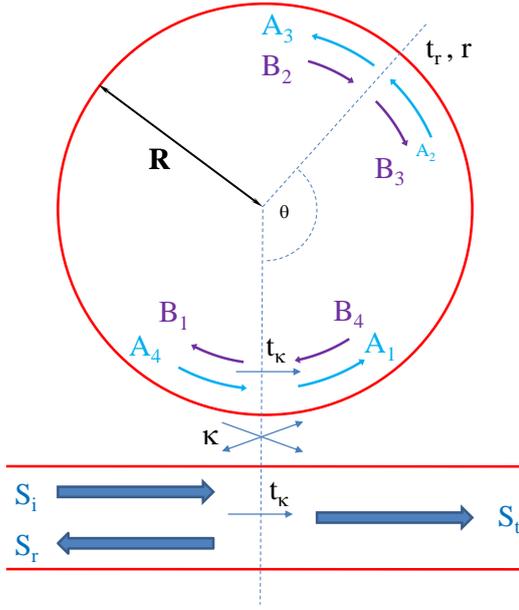


FIGURE C.1: Guide et disque

$$A_1 = -j\kappa S_i + t_\kappa A_4 \quad (\text{C.5})$$

$$A_2 = e^{-j\theta} A_1 \quad (\text{C.6})$$

$$A_3 = -jrB_2 + t_r A_2 \quad (\text{C.7})$$

$$A_4 = \alpha e^{-j(\Phi-\theta)} A_3 \quad (\text{C.8})$$

$$B_1 = t_\kappa B_4 \quad (\text{C.9})$$

$$B_2 = \alpha e^{-j(\Phi-\theta)} B_1 \quad (\text{C.10})$$

$$B_3 = t_r B_2 - jrA_2 \quad (\text{C.11})$$

$$B_4 = e^{-j\theta} B_3 \quad (\text{C.12})$$

$$S_t = t_\kappa S_i - j\kappa A_4 \quad (\text{C.13})$$

$$S_r = -j\kappa B_4 \quad (\text{C.14})$$

où α représente le pourcentage d'amplitude transmis sur un tour ($\alpha \simeq 1$). Les grandeurs observables dans notre expérience sont l'intensité des champs transmis S_t et réfléchis S_r . en développant, on obtient :

$$B_3 = \frac{-jre^{-j\theta}}{1 - \alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi}} A_1 \quad (\text{C.15})$$

Et donc :

$$B_1 = \frac{-jt_\kappa r e^{-2j\theta}}{1 - \alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi}} A_1 \quad (\text{C.16})$$

Puis :

$$A_3 = \left(\frac{t_r - \alpha t_\kappa e^{-j\Phi}}{1 - \alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi}} \right) e^{-j\theta} A_1 \quad (\text{C.17})$$

$$A_1 = \frac{-j\kappa(1 - \alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi})}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.18})$$

$$A_3 = \frac{-j\kappa e^{-j\theta}(t_r - \alpha t_\kappa e^{-j\Phi})}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.19})$$

$$A_4 = \frac{-j\kappa \alpha e^{-j\Phi}(t_r - \alpha t_\kappa e^{-j\Phi})}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.20})$$

$$A_2 = \frac{-j\kappa e^{-j\theta}(1 - \alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi})}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.21})$$

De la même façon :

$$B_1 = \frac{-r t_\kappa \kappa e^{-2j\theta}}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.22})$$

$$B_3 = \frac{-r \kappa e^{-j\theta}}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.23})$$

$$B_4 = \frac{-r \kappa e^{-2j\theta}}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.24})$$

$$B_2 = \frac{-\alpha r \kappa t_\kappa e^{-j(\Phi+\theta)}}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.25})$$

On obtiendra donc :

$$S_t = \frac{t_\kappa - \alpha t_r (t_\kappa^2 + 1) e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa e^{-2j\Phi}}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.26})$$

$$S_r = \frac{j r \kappa^2 e^{-2j\theta}}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-j\Phi} + \alpha^2 t_\kappa^2 e^{-2j\Phi}} S_i \quad (\text{C.27})$$

On s'intéressera à la grandeur mesurable, à savoir le module carré de l'amplitude transmise et l'amplitude réfléchie.

$$|S_t|^2 = \frac{t_\kappa^2(1 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 t_r^2(1 + t_\kappa^2)^2 - 2\alpha t_r t_\kappa(1 + t_\kappa^2)(1 + \alpha^2) \cos \Phi + 4\alpha^2 t_\kappa^2 \cos^2 \Phi}{1 + 2\alpha^2 t_\kappa^2(2t_r^2 - 1) + \alpha^4 t_\kappa^4 - 4\alpha t_\kappa t_r(1 + \alpha^2 t_\kappa^2) \cos \Phi + 4\alpha^2 t_\kappa^2 \cos^2 \Phi} |S_i|^2$$

$$|S_r|^2 = \frac{r^2 \kappa^2}{1 + 2\alpha^2 t_\kappa^2(2t_r^2 - 1) + \alpha^4 t_\kappa^4 - 4\alpha t_\kappa t_r(1 + \alpha^2 t_\kappa^2) \cos \Phi + 4\alpha^2 t_\kappa^2 \cos^2 \Phi} |S_i|^2$$

C.3 Unification des deux modèles

Maintenant que nous avons nos deux modèles, regardons comment les unifier. On part du modèle propagatif qui va subir quelques approximation pour le faire ressembler au modèle stationnaire qui est plus simple.

L'amplitude du mode cw dans le disque est donné par A_1 car en régime stationnaire nos quatre amplitudes seront très proches. On le note $A_{\mathcal{P}}$.

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{-i\kappa(1 - \alpha t_r t_\kappa e^{-i\Phi})}{1 - 2\alpha t_r t_\kappa e^{-i\Phi} + (\alpha t_\kappa e^{-i\Phi})^2} S_i \quad (\text{C.28})$$

On commence par l'approximation de base qui consiste à écrire :

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{1 - \gamma^2} \simeq 1 - \frac{\gamma^2}{2} \\ t_r = \sqrt{1 - r^2} \simeq 1 - \frac{r^2}{2} \\ t_\kappa = \sqrt{1 - \kappa^2} \simeq 1 - \frac{\kappa^2}{2} \\ e^{-i\Phi} \simeq 1 - iT_0(\omega - \omega_0) \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

$$A_{\mathcal{P}} = \frac{-i\kappa \left(1 - \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\kappa^2}{2}\right)\left(1 - iT_0(\omega - \omega_0)\right)\right)}{1 - 2\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\kappa^2}{2}\right)\left(1 - iT_0(\omega - \omega_0)\right) + \left(\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\kappa^2}{2}\right)\left(1 - iT_0(\omega - \omega_0)\right)\right)^2} S_i$$

On simplifie en négligeant les termes d'ordre 4 et supérieurs.

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{P}} &= \frac{-i\kappa \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2}\right) + iT_0(\omega - \omega_0)}{1 - 2\left(1 - \left[\frac{\gamma^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2}\right]\right)\left(1 - iT_0(\omega - \omega_0)\right) + \left(1 - \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2}\right)\right)^2 \left(1 - iT_0(\omega - \omega_0)\right)^2} S_i \\ &= \frac{-i\kappa \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2}\right) + iT_0(\omega - \omega_0)}{\left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2}\right)^2 - T_0^2(\omega - \omega_0)^2 + r^2 + 2iT_0\left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} - r^2\right)(\omega - \omega_0)} S_i \end{aligned}$$

En comparant ensuite nos deux amplitudes et en se rappelant la relation $|A_{\mathcal{P}}|^2 T_0 = |A_{\mathcal{E}}|^2$:

$$A_{\mathcal{P}} \sqrt{T_0} = A_{\mathcal{E}} \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned} \sqrt{T_0} \frac{-i\kappa \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2}\right) + iT_0(\omega - \omega_0)}{\left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2}\right)^2 - T_0^2(\omega - \omega_0)^2 + r^2 + 2iT_0\left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} - r^2\right)(\omega - \omega_0)} S_i &= \\ \frac{i\sqrt{\kappa_e} \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) + i(\omega - \omega_0)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega - \omega_0)} S_i & \quad (\text{C.31}) \end{aligned}$$

En comparant ces deux équations, on se rend compte que certains termes en r^2 sont en trop et on supposera ici qu'ils sont négligeables afin que nos équations coïncident :

$$\sqrt{T_0} \frac{-i\kappa \left(\left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} \right) + iT_0(\omega - \omega_0) \right)}{\left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} \right)^2 - T_0^2(\omega - \omega_0)^2 + r^2 + 2iT_0 \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} \right) (\omega - \omega_0)} = \frac{i\sqrt{\kappa_e} \left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) + i(\omega - \omega_0) \right)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) (\omega - \omega_0)} \quad (\text{C.32})$$

On factorise par T_0 :

$$\frac{T_0\sqrt{T_0}}{T_0^2} \frac{-i\kappa \left(\left(\frac{\gamma^2}{2T_0} + \frac{\kappa^2}{2T_0} \right) + i(\omega - \omega_0) \right)}{\left(\frac{\gamma^2}{2T_0} + \frac{\kappa^2}{2T_0} \right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \frac{r^2}{T_0^2} + 2i \left(\frac{\gamma^2}{2T_0} + \frac{\kappa^2}{2T_0} \right) (\omega - \omega_0)} = \frac{i\sqrt{\kappa_e} \left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) + i(\omega - \omega_0) \right)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) (\omega - \omega_0)} \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{-i\frac{\kappa}{\sqrt{T_0}} \left(\left(\frac{\gamma^2}{2T_0} + \frac{\kappa^2}{2T_0} \right) + i(\omega - \omega_0) \right)}{\left(\frac{\gamma^2}{2T_0} + \frac{\kappa^2}{2T_0} \right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \frac{r^2}{T_0^2} + 2i \left(\frac{\gamma^2}{2T_0} + \frac{\kappa^2}{2T_0} \right) (\omega - \omega_0)} = \frac{i\sqrt{\kappa_e} \left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) + i(\omega - \omega_0) \right)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) (\omega - \omega_0)} \quad (\text{C.34})$$

L'identification est immédiate et surtout cohérente avec le modèle plus simple du mode cw seul :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa}{\sqrt{T_0}} = \sqrt{\kappa_e} \\ \frac{\kappa^2}{2T_0} = \frac{\kappa_e}{2} \\ \frac{\gamma^2}{2T_0} = \frac{\kappa_i}{2} \\ \frac{r^2}{T_0^2} = \beta^2 \end{array} \right. \quad (\text{C.35})$$

C.4 Mode stationnaire

En réalité le couplage entre ces deux modes produit une levée de dégénérescence des deux modes. On sait de plus qu'un mode stationnaire est une somme de deux mode propagatifs se dirigeant en sens inverse. La présence des deux modes contra-propagatif dans le disque établit donc deux modes stationnaires. Ces deux modes sortent des calculs lorsqu'on écrit un nouveau mode à partir des deux premiers :

$$\begin{cases} \frac{dA_{\mathcal{E}}(t)}{dt} &= -i(\omega_0 - \omega)A_{\mathcal{E}}(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) A_{\mathcal{E}}(t) + i\beta B_{\mathcal{E}}(t) - i\sqrt{\kappa_e}S_i \\ \frac{dB_{\mathcal{E}}(t)}{dt} &= -i(\omega_0 - \omega)B_{\mathcal{E}}(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) B_{\mathcal{E}}(t) + i\beta A_{\mathcal{E}}(t) \end{cases} \quad (\text{C.36})$$

En changeant de base, on écrit deux nouveaux modes $C_{\mathcal{E}}(t) = \frac{A_{\mathcal{E}}(t) + B_{\mathcal{E}}(t)}{\sqrt{2}}$ et $D_{\mathcal{E}}(t) = \frac{A_{\mathcal{E}}(t) - B_{\mathcal{E}}(t)}{\sqrt{2}}$ les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dA_{\mathcal{E}}}{dt} + \frac{dB_{\mathcal{E}}}{dt} \right) &= -i(\omega - \omega_0) \left(\frac{A_{\mathcal{E}} + B_{\mathcal{E}}}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) \left(\frac{A_{\mathcal{E}} + B_{\mathcal{E}}}{\sqrt{2}} \right) + i\beta \left(\frac{A_{\mathcal{E}} + B_{\mathcal{E}}}{\sqrt{2}} \right) - i\sqrt{\kappa_e}S_i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dA_{\mathcal{E}}}{dt} - \frac{dB_{\mathcal{E}}}{dt} \right) &= -i(\omega - \omega_0) \left(\frac{A_{\mathcal{E}} - B_{\mathcal{E}}}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2} \right) \left(\frac{A_{\mathcal{E}} - B_{\mathcal{E}}}{\sqrt{2}} \right) - i\beta \left(\frac{A_{\mathcal{E}} - B_{\mathcal{E}}}{\sqrt{2}} \right) - i\sqrt{\kappa_e}S_i \end{aligned}$$

Ces deux nouveaux modes sont en fait les vrai modes stationnaires de la cavité, A et B représentent les modes propagatifs clockwise et counterclockwise (dépendance temporelle).

En remplaçant par $C_{\mathcal{E}}$ et $D_{\mathcal{E}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dC_{\mathcal{E}}(t)}{dt} &= -i(\omega - \omega_0)C_{\mathcal{E}}(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) C_{\mathcal{E}}(t) + i\beta C_{\mathcal{E}}(t) + i\frac{\sqrt{\kappa_e}}{\sqrt{2}}S_i \\ \frac{dD_{\mathcal{E}}(t)}{dt} &= -i(\omega - \omega_0)D_{\mathcal{E}}(t) - \left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) D_{\mathcal{E}}(t) - i\beta D_{\mathcal{E}}(t) + i\frac{\sqrt{\kappa_e}}{\sqrt{2}}S_i \end{aligned}$$

D'où, en stationnaire :

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{E}} &= \frac{i\frac{\sqrt{\kappa_e}}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) + i(\omega - (\omega_0 + \beta))} S_i \\ D_{\mathcal{E}} &= \frac{i\frac{\sqrt{\kappa_e}}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) + i(\omega - (\omega_0 - \beta))} S_i \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} |C_{\mathcal{E}}|^2 &= \frac{\frac{\kappa_e}{2}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega - (\omega_0 + \beta))^2} |S_i|^2 \\ |D_{\mathcal{E}}|^2 &= \frac{\frac{\kappa_e}{2}}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega - (\omega_0 - \beta))^2} |S_i|^2 \end{aligned}$$

où l'on reconnait très facilement deux lorentziennes qui sont décalées de la fréquence de résonance ω_0 par le facteur β (représentant le couplage entre les deux modes).

C.5 Nombre de photons dans le modèle de doublet

Il est intéressant de se poser la question pour ce modèle de doublet quel est le nombre de photons dans la cavité en fonction du couplage.

Pour calculer le nombre de photons dans la cavité, on écrit simplement :

$$\begin{aligned} N_{ph} &= \frac{|A_{\mathcal{E}}|^2 + |B_{\mathcal{E}}|^2}{\hbar\omega} = \frac{|C_{\mathcal{E}}|^2 + |D_{\mathcal{E}}|^2}{\hbar\omega} \\ &= \left(\frac{1}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega - (\omega_0 + \beta))^2} + \frac{1}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 + (\omega - (\omega_0 - \beta))^2} \right) \frac{\kappa_e}{2\hbar\omega} |S_i|^2 \end{aligned}$$

Il nous faut aussi savoir ce que l'on peut observer à la sortie de la fibre. En se basant sur l'équation trouvée sur le mode clockwise seul, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_t &= S_i + i\sqrt{\kappa_e}A_{\mathcal{E}} \\ &= \left(1 + i\sqrt{\kappa_e} \frac{i\sqrt{\kappa_e}\left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) + i(\omega - \omega_0)\right)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega - \omega_0)} \right) S_i \\ &= \frac{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega - \omega_0) - \kappa_e\left(\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right) + i(\omega - \omega_0)\right)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega - \omega_0)} S_i \\ &= \frac{\left(\frac{\kappa_i^2}{4} - \frac{\kappa_e^2}{4}\right) - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + i\kappa_i(\omega - \omega_0)}{\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 + \beta^2 + 2i\left(\frac{\kappa_e}{2} + \frac{\kappa_i}{2}\right)(\omega - \omega_0)} S_i \end{aligned}$$

Optomécanique quantique linéarisée

D.1 Description de l'Hamiltonien

Nous écrivons un hamiltonien optomécanique quantique à une dimension. La cavité optique, représentée par les opérateurs de créations et d'annihilation de photon \hat{a}^\dagger et \hat{a} , est couplée à un environnement optique composé d'un grand nombre de mode \hat{a}_k^\dagger et \hat{a}_k . Le résonateur mécanique représenté par sa position \hat{x} et son impulsion \hat{p} est couplé à son environnement représenté par une large nombre (éventuellement infini) de particules constituant un bain thermique (représenté par \hat{x}_j et \hat{p}_j) d'après l'Hamiltonien décrivant l'"Independent-Oscillator model" décrit dans [123]. La fréquence de résonance de la cavité optique ω'_0 dépend de la position \hat{x} du résonateur mécanique.

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega'_0(\hat{x})}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) + \sum_k \hbar \left(\frac{\omega_k}{2}(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger) + \kappa_k\hat{a}^\dagger\hat{a}_k + \kappa_k^*\hat{a}_k^\dagger\hat{a} \right) + \frac{m\omega_m^2\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \sum_j \left(\frac{m_j\omega_j^2(\hat{x}_j - \hat{x})^2}{2} + \frac{\hat{p}_j^2}{2m_j} \right) \quad (D.1)$$

On réécrit ce Hamiltonien en coordonnée normalisée \hat{X}_m et \hat{P}_m avec les relations :

$$\begin{cases} \hat{x} = X_{ZPF}\hat{X}_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}}\hat{X}_m \\ \hat{p} = P_{ZPF}\hat{P}_m = \sqrt{\hbar m\omega_m}\hat{P}_m \end{cases} \quad (D.2)$$

$$\quad (D.3)$$

où nous introduisons les grandeurs X_{ZPF} et P_{ZPF} qui représentent respectivement l'écart type du déplacement moyen et de l'impulsion moyenne du résonateur mécanique lorsque celui-ci ne contient aucun phonon ("Zero Point Fluctuation")(à un facteur $\sqrt{2}$ près). Un état à zero phonon possède l'énergie du vide $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ et $\langle \hat{x}^2 \rangle = X_{ZPF}^2\langle \hat{X}_m^2 \rangle = X_{ZPF}^2/2$.

Digression sur les opérateurs d'échelle de l'oscillateur harmonique quantique

L'Hamiltonien quantique de l'oscillateur harmonique avec les opérateurs de déplacement et d'impulsions adimensionnés \hat{X}_m et \hat{P}_m

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_m}{2}(\hat{P}_m^2 + \hat{X}_m^2) \quad (\text{D.4})$$

La relation de commutation devient $[\hat{X}_m, \hat{P}_m] = i\mathbb{1}$. En remarquant que :

$$\hat{X}_m^2 + \hat{P}_m^2 = (\hat{X}_m + i\hat{P}_m)(\hat{X}_m - i\hat{P}_m) + i(\hat{X}_m\hat{P}_m - \hat{P}_m\hat{X}_m) = (\hat{X}_m + i\hat{P}_m)(\hat{X}_m - i\hat{P}_m) - \mathbb{1} \quad (\text{D.5})$$

On introduira des opérateurs non-hermitiques, appelés "opérateurs d'échelle" ou encore opérateurs de création et d'annihilation du fait que l'action de ces opérateurs sur l'état du système crée ou détruit un phonon.

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\hat{X}_m + i\hat{P}_m}{\sqrt{2}} \\ \hat{b}^\dagger = \frac{\hat{X}_m - i\hat{P}_m}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{X}_m = \frac{\hat{b} + \hat{b}^\dagger}{\sqrt{2}} \\ \hat{P}_m = \frac{\hat{b} - \hat{b}^\dagger}{i\sqrt{2}} \end{cases}$$

où le commutateur devient $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \mathbb{1}$. L'Hamiltonien se réécrit :

$$\hat{H} = \hbar\omega_m \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{D.6})$$

La fréquence de la cavité optique s'écrit comme une linéarisation du déplacement :

$$\omega'_0(\hat{x}) = \omega_0 + \frac{d\omega_0}{d\hat{x}}\hat{x} = \omega_0 + \frac{d\omega_0}{d\hat{x}}X_{ZPF}\hat{X}_m \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_{om} = \frac{d\omega_0}{d\hat{x}} \\ g_0 = \frac{d\omega_0}{d\hat{x}}X_{ZPF} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

où ω_0 est la fréquence du résonateur optique pour $\langle \hat{x} \rangle = 0$. g_{om} est souvent appelé le couplage optomécanique et g_0 le couplage optomécanique du vide. Le Hamiltonien devient :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\hbar\omega_0}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) + \sum_k \hbar \left(\frac{\omega_k}{2}(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger) + \kappa_k\hat{a}^\dagger\hat{a}_k + \kappa_k^*\hat{a}_k^\dagger\hat{a} \right) \\ & + \frac{\hbar\omega_m}{2}(\hat{X}_m^2 + \hat{P}_m^2) + \sum_j \left(\frac{\hbar\omega_j}{2}(\hat{P}_j^2 + \hat{X}_j^2) - \hbar\lambda_j\hat{X}_j\hat{X}_m + \frac{\hbar\eta_j}{2}\hat{X}_m^2 \right) \\ & + \frac{\hbar g_0}{2}\hat{X}_m(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

où les opérateurs du bain thermique sont aussi normalisés. Nous avons posé aussi, pour simplifier l'expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j = \omega_j \sqrt{\frac{m_j \omega_j}{m \omega_m}} \\ \eta_j = \frac{m_j \omega_j^2}{m \omega_m} \end{array} \right. \quad (\text{D.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j = \omega_j \sqrt{\frac{m_j \omega_j}{m \omega_m}} \\ \eta_j = \frac{m_j \omega_j^2}{m \omega_m} \end{array} \right. \quad (\text{D.10})$$

D.2 Équations de Langevin Quantiques

Les Equations de Langevin Quantique (ELQ) obtenu à partir de cet Hamiltonien pour les opérateurs décrivant les résonateurs optique et mécanique du système principal sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{a}(t)}{dt} = [\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega_0 \hat{a}(t) + \sum_k \hbar\kappa_k \hat{a}_k(t) + \hbar g_0 \hat{X}_m(t) \hat{a}(t) \end{array} \right. \quad (\text{D.11})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt} = [\hat{a}^\dagger, \hat{H}] = -\hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger(t) - \sum_k \hbar\kappa_k^* \hat{a}_k^\dagger(t) - \hbar g_0 \hat{X}_m(t) \hat{a}^\dagger(t) \end{array} \right. \quad (\text{D.12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{X}_m(t)}{dt} = [\hat{X}_m, \hat{H}] = i\hbar\omega_m \hat{P}_m \end{array} \right. \quad (\text{D.13})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{P}_m(t)}{dt} = [\hat{P}_m, \hat{H}] = -i\hbar\omega_m \hat{X}_m - i\frac{\hbar g_0}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) + i\hbar \sum_j (\lambda_j \hat{X}_j - \eta_j \hat{X}_m) \end{array} \right. \quad (\text{D.14})$$

Avec bien sûr les relations de commutations :

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t')] = \delta(t - t') \quad (\text{D.15})$$

$$[\hat{a}_k(t), \hat{a}_{k'}^\dagger(t')] = \delta(t - t') \delta_{k, k'} \quad (\text{D.16})$$

$$[\hat{X}_m(t), \hat{P}_m(t')] = i\delta(t - t') \quad (\text{D.17})$$

$$[\hat{X}_j(t), \hat{P}_{j'}(t')] = i\delta(t - t') \delta_{j, j'} \quad (\text{D.18})$$

Les opérateurs des bains optique et mécanique vérifient le même genre d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{a}_k(t)}{dt} = [\hat{a}_k, \hat{H}] = \hbar\omega_k \hat{a}_k(t) + \hbar\kappa_k^* \hat{a}(t) \end{array} \right. \quad (\text{D.19})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{a}_k^\dagger(t)}{dt} = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}] = -\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger(t) - \hbar\kappa_k \hat{a}^\dagger(t) \end{array} \right. \quad (\text{D.20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{X}_j(t)}{dt} = [\hat{X}_j, \hat{H}] = i\hbar\omega_j \hat{P}_j \end{array} \right. \quad (\text{D.21})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d\hat{P}_j(t)}{dt} = [\hat{P}_j, \hat{H}] = -i\hbar\omega_j \hat{X}_j + i\hbar\lambda_j \hat{X}_m \end{array} \right. \quad (\text{D.22})$$

On réalise l'intégration sur les opérateurs des bains afin de désymétriser le problème et de ne s'intéresser qu'à notre système optomécanique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_k(t) = \hat{a}_k(t_0)e^{-i\omega_k(t-t_0)} - i\kappa_k^* \int_{t_0}^t \hat{a}(t')e^{-i\omega_k(t-t')} dt \end{array} \right. \quad (\text{D.23})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_k^\dagger(t) = \hat{a}_k^\dagger(t_0)e^{i\omega_k(t-t_0)} + i\kappa_k \int_{t_0}^t \hat{a}^\dagger(t')e^{i\omega_k(t-t')} dt \end{array} \right. \quad (\text{D.24})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_j(t) = \left(\cos(\omega_j t_0) \hat{X}_j(t_0) - \sin(\omega_j t_0) \hat{P}_j(t_0) \right) \cos(\omega_j t) \\ \quad + \left(\sin(\omega_j t_0) \hat{X}_j(t_0) + \cos(\omega_j t_0) \hat{P}_j(t_0) \right) \sin(\omega_j t) \\ \quad + \frac{\lambda_j}{\omega_j} \hat{X}_m(t) - \frac{\lambda_j}{\omega_j} \hat{X}_m(t_0) \cos(\omega_j(t-t_0)) - \frac{\lambda_j}{\omega_j} \int_{t_0}^t \cos(\omega_j(t-t')) \dot{\hat{X}}_m(t') dt' \end{array} \right. \quad (\text{D.25})$$

où t_0 est le temps initial considéré généralement en $-\infty$ auquel le système auparavant immobile est lâché dans les bains à l'équilibre thermodynamique. Cette étape est importante car en choisissant la solution retardée de l'équation inhomogène, nous brisons l'invariance par retournement temporel de l'équation originale. Les équations régissant l'évolution des grandeurs $\hat{P}_j(t)$ ne sont pas importantes ici car ces termes n'interviennent pas dans les équations de $\hat{X}_m(t)$ et $\hat{P}_m(t)$.

Le système d'équations couplées optomécaniques s'écrit alors.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega_0 \hat{a}(t) - ig_0 \hat{X}_m(t) \hat{a}(t) \\ \quad - i \sum_k \kappa_k \left(\hat{a}_k(t_0) e^{-i\omega_k(t-t_0)} - i\kappa_k^* \int_{t_0}^t \hat{a}(t') e^{-i\omega_k(t-t')} dt \right) \end{array} \right. \quad (\text{D.26})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt} = i\omega_0 \hat{a}^\dagger(t) + ig_0 \hat{X}_m(t) \hat{a}^\dagger(t) \\ \quad + i \sum_k \kappa_k^* \left(\hat{a}_k^\dagger(t_0) e^{i\omega_k(t-t_0)} + i\kappa_k \int_{t_0}^t \hat{a}^\dagger(t') e^{i\omega_k(t-t')} dt \right) \end{array} \right. \quad (\text{D.27})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{X}_m(t)}{dt} = \omega_m \hat{P}_m \end{array} \right. \quad (\text{D.28})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{P}_m(t)}{dt} = -\omega_m \hat{X}_m - \frac{g_0}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \\ \quad + \sum_j \lambda_j \left(\cos(\omega_j t_0) \hat{X}_j(t_0) - \sin(\omega_j t_0) \hat{P}_j(t_0) \right) \cos(\omega_j t) \\ \quad + \sum_j \lambda_j \left(\sin(\omega_j t_0) \hat{X}_j(t_0) + \cos(\omega_j t_0) \hat{P}_j(t_0) \right) \sin(\omega_j t) \\ \quad + \sum_j \lambda_j \left(-\frac{\lambda_j}{\omega_j} \hat{X}_m(t_0) \cos(\omega_j(t-t_0)) - \frac{\lambda_j}{\omega_j} \int_{t_0}^t \cos(\omega_j(t-t')) \dot{\hat{X}}_m(t') dt' \right) \end{array} \right. \quad (\text{D.29})$$

Ce set d'équations couplées se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega_0\hat{a}(t) - ig_0\hat{X}_m(t)\hat{a}(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t-t')\hat{a}(t') dt' - i\hat{F}_{opt}(t) \\ \frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt} = i\omega_0\hat{a}^\dagger(t) + ig_0\hat{X}_m(t)\hat{a}^\dagger(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^*(t-t')\hat{a}^\dagger(t') dt' + i\hat{F}_{opt}^\dagger(t) \\ \frac{d\hat{X}_m(t)}{dt} = \omega_m\hat{P}_m(t) \\ \frac{d\hat{P}_m(t)}{dt} = -\omega_m\hat{X}_m(t) - \frac{g_0}{2}(\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t)) + \frac{\hat{F}_m(t)}{\omega_m} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t-t')\hat{P}_m(t') dt' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(D.30)} \\ \text{(D.31)} \\ \text{(D.32)} \\ \text{(D.33)} \end{array}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(t) = \Theta(t) \sum_k |\kappa_k|^2 e^{-i\omega_k t} \\ \hat{F}_{opt}(t) = \sum_k \kappa_k \hat{a}_k(t_0) e^{-i\omega_k t} \\ \mu(t) = \Theta(t) \sum_j \frac{\omega_m \lambda_j^2}{\omega_j} \cos(\omega_j t) \\ \hat{F}_m(t) = \sum_j \omega_m \lambda_j \left(\hat{X}_j(t_0) \cos(\omega_j t) + \hat{P}_j(t_0) \sin(\omega_j t) \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(D.34)} \\ \text{(D.35)} \\ \text{(D.36)} \\ \text{(D.37)} \end{array}$$

Nous reconnaissons sous cette forme, pour chaque équation un terme d'amortissement ($\Gamma(t)$ pour l'optique et $\mu(t)$ pour la mécanique) et un terme de pompe ($\hat{F}_{opt}(t)$ pour l'optique et $\hat{F}_m(t)$ pour la mécanique). Ainsi ce modèle permet de décrire les fluctuations et dissipation d'un système lorsqu'il est couplé à un environnement. Généralement, il est fait l'hypothèse de stochasticité qui dit que la fonction d'amortissement ne contient pas de corrélation temporelle. L'amortissement est alors considéré comme constant. Cette hypothèse est assez forte et nous préférons garder la dépendance temporelle de l'amortissement.

Par la suite, les opérateurs initiaux sont renommés $\hat{a}_k(t_0) = \hat{a}_{in,k}$, $\hat{X}_j(t_0) = (\hat{b}_{in,j} + \hat{b}_{in,j}^\dagger)/\sqrt{2}$ et $\hat{P}_j(t_0) = (\hat{b}_{in,j} - \hat{b}_{in,j}^\dagger)/i\sqrt{2}$.

Le bain optique n'est pas peuplé thermiquement ($k_B T \ll \hbar\Omega$). Seule l'énergie du vide participe alors aux fluctuations en l'absence de pompage. Lorsqu'un des états du bain optique n'est pas vide en moyenne $\langle \hat{a}_k(t) \rangle > 0$, ce mode agit comme une pompe sur le système au préalable vide. Un laser possédant une statistique poissonnienne est en général représenté par un état cohérent $|\alpha\rangle$. Nous choisissons parmi les différents modes du bain $\hat{a}_{in,k}$ un mode jouant le rôle de pompe laser que nous notons $\hat{a}_{in,p}$ et dont l'état initial est cohérent et est noté $|\alpha_{in,p}\rangle$.

Le bain mécanique est thermique ($k_B T \gg \hbar\omega_m$). L'énergie d'un phonon étant inférieure à l'énergie thermique, tout les modes du bain mécanique possèdent une énergie moyenne $k_B T$ et sont représentés par un état thermique initial $|\beta_{in,j}^{th}\rangle$.

Ainsi l'état initial des bains optique et mécanique à l'instant t_0 peut être représenté par :

$$|\tilde{\alpha}_{in}\rangle = |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \otimes \dots \otimes |0_k\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{in,p}\rangle \otimes \dots \otimes |0_N\rangle \otimes |\beta_{in,1}^{th}\rangle \otimes |\beta_{in,2}^{th}\rangle \otimes \dots \otimes |\beta_{in,j}^{th}\rangle \quad \text{(D.38)}$$

D.3 Séparation Champs moyens - fluctuations

La linéarisation des champs s'effectue en posant l'hypothèse que le champ intracavité oscille à la fréquence de pompe et se décompose en une partie moyenne et des fluctuations $\hat{a}(t) = (\alpha + \hat{\delta}a(t)) e^{-i\Omega t}$ ainsi que $\hat{a}^\dagger(t) = (\alpha^* + \hat{\delta}a^\dagger(t)) e^{i\Omega t}$. De la même façon, on écrit le champ moyen pour la position et l'impulsion de l'oscillateur mécanique, $\hat{X}_m(t) = \chi + \delta\hat{X}_m(t)$ et $\hat{P}_m(t) = \delta\hat{P}_m(t)$. L'impulsion n'a pas de champ moyen car le centre de masse de notre objet est fixe.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\alpha + \hat{\delta}a(t)) e^{-i\Omega t}}{dt} = -i\omega_0 (\alpha + \hat{\delta}a(t)) e^{-i\Omega t} - ig_0 (\chi + \delta\hat{X}_m(t)) (\alpha + \hat{\delta}a(t)) e^{-i\Omega t} \\ \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t-t') (\alpha + \hat{\delta}a(t')) e^{-i\Omega t'} dt' - i \sum_k \kappa_k \hat{a}_{in,k} e^{-i\omega_k t} \end{array} \right. \quad (D.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\alpha^* + \hat{\delta}a^\dagger(t)) e^{i\Omega t}}{dt} = i\omega_0 (\alpha^* + \hat{\delta}a^\dagger(t)) e^{i\Omega t} + ig_0 (\chi + \delta\hat{X}_m(t)) (\alpha^* + \hat{\delta}a^\dagger(t)) e^{i\Omega t} \\ \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^*(t-t') (\alpha^* + \hat{\delta}a^\dagger(t')) e^{i\Omega t'} dt' + i \sum_k \kappa_k^* \hat{a}_{in,k}^\dagger e^{i\omega_k t} \end{array} \right. \quad (D.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\chi + \delta\hat{X}_m(t))}{dt} = \omega_m \delta\hat{P}_m(t) \end{array} \right. \quad (D.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta\hat{P}_m(t)}{dt} = -\omega_m (\chi + \delta\hat{X}_m(t)) - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t-t') \delta\hat{P}_m(t') dt' \\ \quad - \frac{g_0}{2} \left((\alpha^* + \hat{\delta}a^\dagger(t)) (\alpha + \hat{\delta}a(t)) + (\alpha + \hat{\delta}a(t)) (\alpha^* + \hat{\delta}a^\dagger(t)) \right) \\ \quad + \sum_j \lambda_j \left(\frac{(\hat{b}_{in,j} + \hat{b}_{in,j}^\dagger)}{\sqrt{2}} \cos(\omega_j t) + \frac{(\hat{b}_{in,j} - \hat{b}_{in,j}^\dagger)}{i\sqrt{2}} \sin(\omega_j t) \right) \end{array} \right. \quad (D.42)$$

D.3.1 Équations sur les champs moyens

En ne conservant que les termes d'ordre 0 dans les équations couplées, nous obtenons les équations régissant les champs moyens :

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\Omega e^{-i\Omega t} \alpha = -i\omega_0 \alpha e^{-i\Omega t} - ig_0 \chi \alpha e^{-i\Omega t} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t-t') \alpha e^{-i\Omega t'} dt' - i\kappa_p \langle \hat{a}_{in,p} \rangle e^{-i\Omega t} \end{array} \right. \quad (D.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\Omega e^{i\Omega t} \alpha^* = i\omega_0 \alpha^* e^{i\Omega t} - ig_0 \chi \alpha^* e^{i\Omega t} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^*(t-t') \alpha^* e^{i\Omega t'} dt' + i\kappa_p^* \langle \hat{a}_{in,p}^\dagger \rangle e^{i\Omega t} \end{array} \right. \quad (D.44)$$

$$0 = 0 \quad (D.45)$$

$$0 = -\omega_m \chi - g_0 |\alpha|^2 \quad (D.46)$$

On note que pour l'optique, le seul terme extracavité non nul est celui du laser de pompe. En effet lorsqu'on prend la moyenne sur l'état initial, ce dernier donne $\langle \alpha_{in} | \hat{a}_{in,p} | \alpha_{in} \rangle = \alpha_{in,p}$.

Les moyennes sur les états du bain optique non peuplés sont nulles $\langle 0_k | \hat{a}_{in,k} | 0_k \rangle = 0$. Il en va de même pour les moyennes sur les opérateurs du bain mécanique $\langle \beta_{in,j}^{th} | \hat{b}_{in,j} | \beta_{in,j}^{th} \rangle = 0$ et $\langle \beta_{in,j}^{th} | \hat{b}_{in,j}^\dagger | \beta_{in,j}^{th} \rangle = 0$. Dans les deux premières équations on va ensuite éliminer la fréquence de la porteuse et faire apparaître la Transformée de Fourier de la fonction $\Gamma(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{-i\kappa_p \alpha_{in,p}}{\tilde{\Gamma}(\Omega) - i(\Omega - (\omega_0 + g_0\chi))} \\ \alpha^* = \frac{i\kappa_p^* \alpha_{in,p}^*}{\tilde{\Gamma}^*(-\Omega) + i(\Omega - (\omega_0 + g_0\chi))} \\ \chi = \frac{-g_0}{\omega_m} |\alpha|^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(D.47)} \\ \text{(D.48)} \\ \text{(D.49)} \end{array}$$

Avec, par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}(\omega) = \text{TF} [\Gamma(t)] = \sum_k |\kappa_k|^2 \left(\pi \delta(\omega - \omega_k) + i \text{vp} \frac{1}{\omega - \omega_k} \right) \\ \tilde{\Gamma}^*(\omega) = \text{TF} [\Gamma^*(t)] = \sum_k |\kappa_k|^2 \left(\pi \delta(\omega + \omega_k) + i \text{vp} \frac{1}{\omega + \omega_k} \right) \\ \tilde{\Gamma}^*(\omega) = \tilde{\Gamma}(-\omega)^* \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(D.50)} \\ \text{(D.51)} \\ \text{(D.52)} \end{array}$$

Ici la valeur principale (vp) correspond au décalage de Lamb. Elle est très faible et nous aurons tendance à la négliger. On ne considèrera donc généralement que la partie réelle de $\tilde{\Gamma}(\omega)$.

D.3.2 Équations sur les fluctuations

Les termes à l'ordre 1 de l'équation (D.42) donnent les équations couplées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i(\omega_0 - \Omega)\hat{a}(t) - ig_0 \left(\alpha \delta\hat{X}_m(t) + \chi \hat{a}(t) \right) \\ \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t-t') \hat{a}(t') e^{-i\Omega(t'-t)} dt' - i \left(\sum_k \kappa_k \hat{a}_{in,k} e^{-i(\omega_k - \Omega)t} - \kappa_p \alpha_{in,p} \right) \end{array} \right. \quad \text{(D.53)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt} = i(\omega_0 - \Omega)\hat{a}^\dagger(t) + ig_0 \left(\alpha^* \delta\hat{X}_m(t) + \chi \hat{a}^\dagger(t) \right) \\ \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^*(t-t') \hat{a}^\dagger(t') e^{i\Omega(t'-t)} dt' + i \left(\sum_k \kappa_k^* \hat{a}_{in,k}^\dagger e^{i(\omega_k - \Omega)t} - \kappa_p^* \alpha_{in,p}^* \right) \end{array} \right. \quad \text{(D.54)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta\hat{X}_m(t)}{dt} = \omega_m \delta\hat{P}_m(t) \end{array} \right. \quad \text{(D.55)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta\hat{P}_m(t)}{dt} = -\omega_m \delta\hat{X}_m(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t-t') \delta\hat{P}_m(t') dt' \\ \quad - g_0 \left(\alpha^* \hat{a}(t) + \alpha \hat{a}^\dagger(t) \right) + \sum_j \frac{\lambda_j}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_{in,j} e^{-i\omega_j t} + \hat{b}_{in,j}^\dagger e^{i\omega_j t} \right) \end{array} \right. \quad \text{(D.56)}$$

D.3.3 Passage en transformée de Fourier

Rappel sur la Transformée de Fourier

On définit la Transformée de Fourier pour un opérateur quantique $\hat{A}(t)$ de la manière suivante :

$$\hat{A}(\omega) = TF[\hat{A}(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{D.57})$$

$$\hat{A}(t) = TF^{-1}[\hat{A}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{D.58})$$

$$\hat{A}^\dagger(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)^\dagger e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(-\omega)^\dagger e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{D.59})$$

$$\hat{A}(-\omega)^\dagger \equiv \hat{A}^\dagger(-\omega) \quad (\text{par définition}) \quad (\text{D.60})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \quad (\text{D.61})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (\text{D.62})$$

Voyons comment évolue les relations de commutations de ces opérateurs fréquentiels :

$$[\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t')] = \delta(t - t') \quad (\text{D.63})$$

$$[\hat{A}(\omega), \hat{A}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \quad (\text{D.64})$$

Écriture matricielle

On passe ces quatre équations dans le domaine spectral grâce à la Transformée de Fourier.

$$\begin{cases} \hat{a}(\omega) = TF[\hat{a}(t)] & (\text{D.65}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}(-\omega)^\dagger = TF[\hat{a}^\dagger(t)] & (\text{D.66}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\delta}a(\omega) = TF[\hat{\delta}a(t)] & (\text{D.67}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\delta}a(-\omega)^\dagger = TF[\hat{\delta}a^\dagger(t)] & (\text{D.68}) \end{cases}$$

On aura entre ces différents opérateurs les relations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{a}(\omega) = 2\pi\alpha\delta(\omega - \Omega) + \hat{\delta}a(\omega - \Omega) & (\text{D.69}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}(-\omega)^\dagger = 2\pi\alpha^*\delta(\omega + \Omega) + \hat{\delta}a(-\omega - \Omega)^\dagger & (\text{D.70}) \end{cases}$$

Les équations couplées des fluctuations s'écrivent dans le domaine fréquentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\delta}a(\omega) \left(\tilde{\Gamma}(\omega + \Omega) - i(\omega - (\omega_0 + g_0\chi - \Omega)) \right) + ig_0\alpha\delta\hat{X}_m(\omega) = -i \left(\sum_k \kappa_k \hat{a}_{in,k} 2\pi\delta(\omega - (\omega_k - \Omega)) - \kappa_p \alpha_{in,p} 2\pi\delta(\omega) \right) \\ \hat{\delta}a(-\omega)^\dagger \left(\tilde{\Gamma}^*(\omega - \Omega) - i(\omega + (\omega_0 + g_0\chi - \Omega)) \right) - ig_0\alpha^*\delta\hat{X}_m(\omega) = i \left(\sum_k \kappa_k^* \hat{a}_{in,k}^\dagger 2\pi\delta(\omega - (\Omega - \omega_k)) - \kappa_p^* \alpha_{in,p}^* 2\pi\delta(\omega) \right) \\ -i\omega\delta\hat{X}_m(\omega) - \omega_m\delta\hat{P}_m(\omega) = 0 \\ g_0 \left(\alpha^* \hat{\delta}a(\omega) + \alpha \hat{\delta}a(-\omega)^\dagger \right) + \omega_m\delta\hat{X}_m(\omega) + (\tilde{\mu}(\omega) - i\omega)\delta\hat{P}_m(\omega) = \sum_j \frac{\lambda_j}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_{in,j} 2\pi\delta(\omega - \omega_j) + \hat{b}_{in,j}^\dagger 2\pi\delta(\omega + \omega_j) \right) \end{array} \right.$$

Ou sous forme matricielle :

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \hat{\delta}a(\omega) \\ \hat{\delta}a(-\omega)^\dagger \\ \delta\hat{X}_m(\omega) \\ \delta\hat{P}_m(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \left(\sum_k \kappa_k \hat{a}_{in,k} 2\pi\delta(\omega - (\omega_k - \Omega)) - \kappa_p \alpha_{in,p} 2\pi\delta(\omega) \right) \\ i \left(\sum_k \kappa_k^* \hat{a}_{in,k}^\dagger 2\pi\delta(\omega - (\Omega - \omega_k)) - \kappa_p^* \alpha_{in,p}^* 2\pi\delta(\omega) \right) \\ 0 \\ \sum_j \frac{2\pi\lambda_j}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_{in,j} \delta(\omega - \omega_j) + \hat{b}_{in,j}^\dagger \delta(\omega + \omega_j) \right) \end{pmatrix} \quad (D.71)$$

où \mathcal{M} est une matrice 4×4 qui s'écrit :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}(\omega + \Omega) - i(\omega - (\omega_0 + g_0\chi - \Omega)) & 0 & ig_0\alpha & 0 \\ 0 & \tilde{\Gamma}(\Omega - \omega)^* - i(\omega + (\omega_0 + g_0\chi - \Omega)) & -ig_0\alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & -\omega_m \\ g_0\alpha^* & g_0\alpha & \omega_m & -i\omega + \tilde{\mu}(\omega) \end{pmatrix}$$

Nous appelons \mathcal{G} la matrice inverse de \mathcal{M} . Les composantes de la matrice inverse $\mathcal{G}(\omega)$ qui nous intéresseront par la suite sont :

$$\mathcal{G}_{1,1}(\omega) = \frac{-i(g_0^2 |\alpha|^2 \omega_m + (\omega + \Delta + i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega)^*)(\omega^2 - \omega_m^2 + i\omega\tilde{\mu}(\omega)))}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))} \quad (D.72)$$

$$\mathcal{G}_{1,2}(\omega) = \frac{-ig_0^2 \alpha^2 \omega_m}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))} \quad (D.73)$$

$$\mathcal{G}_{1,4}(\omega) = \frac{g_0\alpha\omega_m(\omega + \Delta + i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega)^*)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))} \quad (D.74)$$

$$\mathcal{G}_{2,1}(\omega) = \frac{ig_0^2 (\alpha^*)^2 \omega_m}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))} \quad (D.75)$$

$$\mathcal{G}_{2,2}(\omega) = \frac{i(g_0^2 |\alpha|^2 \omega_m + (-\omega + \Delta - i\tilde{\Gamma}(\omega + \Omega))(\omega^2 - \omega_m^2 + i\omega\tilde{\mu}(\omega)))}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))} \quad (D.76)$$

$$\mathcal{G}_{2,4}(\omega) = \frac{g_0\alpha^*\omega_m(-\omega + \Delta - i\tilde{\Gamma}(\omega + \Omega))}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))} \quad (D.77)$$

Avec $\Delta = \omega_0 + g_0\chi - \Omega$ et :

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathcal{M}(\omega)) &= -g_0^2 |\alpha|^2 \omega_m \left(\Delta + i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega)^* + \Delta - i\tilde{\Gamma}(\omega + \Omega) \right) \\ &\quad + (\omega + \Delta + i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega)^*)(\omega - \Delta + i\tilde{\Gamma}(\omega + \Omega))(\omega^2 - \omega_m^2 + i\omega\tilde{\mu}(\omega)) \end{aligned}$$

Seules 6 composantes sur les 16 que la matrice possède sont utilisées car nous mesurons uniquement la partie optique de la cavité. Notons par ailleurs les propriétés de certains des coefficients de la matrice :

$$\text{Det}(\mathcal{M}(-\omega))^* = \text{Det}(\mathcal{M}(\omega)) \quad (\text{D.78})$$

$$\mathcal{G}_{2,2}(-\omega)^* = \mathcal{G}_{1,1}(\omega) \quad (\text{D.79})$$

$$\mathcal{G}_{1,2}(-\omega)^* = \mathcal{G}_{2,1}(\omega) \quad (\text{D.80})$$

$$\mathcal{G}_{1,4}(-\omega)^* = \mathcal{G}_{2,4}(\omega) \quad (\text{D.81})$$

Ainsi que les deux propriétés suivantes :

$$\delta\hat{X}_m(-\omega)^\dagger = \delta\hat{X}_m(\omega) \quad (\text{D.82})$$

$$\tilde{\mu}(-\omega)^* = \tilde{\mu}(\omega) \quad (\text{D.83})$$

D.4 Spectre de l'énergie intracavité

Nous souhaitons obtenir la densité spectrale de l'énergie intracavité $S_{\mathcal{E}}(\omega)$ qui s'exprime comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation de l'énergie intracavité :

$$S_{\mathcal{E}}(\omega) = \text{TF}[F_{\mathcal{E}}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\mathcal{E}}(t) e^{i\omega t} dt$$

L'énergie pour un grand nombre de photons intracavité s'approxime $\mathcal{E} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$. Nous calculerons dans la suite la fonction d'auto-corrélation du nombre de photons intracavité $F(t)$ lié à celle de l'énergie intracavité par la relation $F(t) = F_{\mathcal{E}}(t)/(\hbar\omega)^2$.

$$F(t) = \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle - \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \quad (\text{D.84})$$

Le champ intra-cavité s'écrit de la manière suivante : $\hat{a}(t) = (\alpha + \delta\hat{a}(t))e^{-i\Omega t}$ et $\langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{a}(t) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle = \alpha e^{-i\Omega t}$. La fonction d'auto-corrélation se développe :

$$\begin{aligned} F(t) &= \langle \tilde{\alpha}_{in} | \left(\alpha^* + \delta\hat{a}^\dagger(t) \right) \left(\alpha + \delta\hat{a}(t) \right) \left(\alpha^* + \delta\hat{a}^\dagger(0) \right) \left(\alpha + \delta\hat{a}(0) \right) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \\ &\quad - \langle \tilde{\alpha}_{in} | \left(\alpha^* + \delta\hat{a}^\dagger(t) \right) \left(\alpha + \delta\hat{a}(t) \right) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \langle \tilde{\alpha}_{in} | \left(\alpha^* + \delta\hat{a}^\dagger(0) \right) \left(\alpha + \delta\hat{a}(0) \right) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \\ &= \langle \tilde{\alpha}_{in} | |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \alpha^* \delta\hat{a}(0) + |\alpha|^2 \alpha \delta\hat{a}^\dagger(0) + |\alpha|^2 \delta\hat{a}^\dagger(0) \delta\hat{a}(0) \\ &\quad + |\alpha|^2 \alpha^* \delta\hat{a}(t) + \alpha^* \alpha^* \delta\hat{a}(t) \delta\hat{a}(0) + |\alpha|^2 \delta\hat{a}(t) \delta\hat{a}^\dagger(0) + \alpha^* \delta\hat{a}(t) \delta\hat{a}^\dagger(0) \delta\hat{a}(0) \\ &\quad + \alpha |\alpha|^2 \delta\hat{a}^\dagger(t) + |\alpha|^2 \delta\hat{a}^\dagger(t) \delta\hat{a}(0) + \alpha \alpha \delta\hat{a}^\dagger(t) \delta\hat{a}^\dagger(0) + \alpha \delta\hat{a}^\dagger(t) \delta\hat{a}^\dagger(0) \delta\hat{a}(0) \\ &\quad + |\alpha|^2 \delta\hat{a}^\dagger(t) \delta\hat{a}(t) + \alpha^* \delta\hat{a}^\dagger(t) \delta\hat{a}(t) \delta\hat{a}(0) + \alpha \delta\hat{a}^\dagger(t) \delta\hat{a}(t) \delta\hat{a}^\dagger(0) \\ &\quad + \delta\hat{a}^\dagger(t) \delta\hat{a}(t) \delta\hat{a}^\dagger(0) \delta\hat{a}(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \\ &\quad - \left(\langle \tilde{\alpha}_{in} | |\alpha|^2 + \alpha^* \delta\hat{a} + \alpha \delta\hat{a}^\dagger + \delta\hat{a}^\dagger \delta\hat{a} | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \right) \left(\langle \tilde{\alpha}_{in} | |\alpha|^2 + \alpha^* \delta\hat{a} + \alpha \delta\hat{a}^\dagger + \delta\hat{a}^\dagger \delta\hat{a} | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \right) \end{aligned}$$

Les propriétés $\langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta}a(t) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle = 0$ et $\langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta}a^\dagger(t) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle = 0$ réduisent l'équation précédente à :

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \langle \tilde{\alpha}_{in} | \alpha^* \alpha^* \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a(0) + |\alpha|^2 \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) + \alpha^* \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) \hat{\delta}a(0) \\
 &\quad + |\alpha|^2 \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a(0) + \alpha \alpha \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) + \alpha \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) \hat{\delta}a(0) \\
 &\quad + \alpha^* \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a(0) + \alpha \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) \\
 &\quad + \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) \hat{\delta}a(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \\
 &\quad - \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a(t) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta}a^\dagger(0) \hat{\delta}a(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle
 \end{aligned}$$

Si nous nous cantonnons à étudier la fonction d'auto-corrélation avec les termes à l'ordre 2 seulement (tous les termes d'ordre 3 sont nuls) en négligeant le terme d'ordre 4, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \langle \tilde{\alpha}_{in} | \alpha^* \alpha^* \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a(0) + |\alpha|^2 \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) \\
 &\quad + |\alpha|^2 \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a(0) + \alpha \alpha \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle
 \end{aligned}$$

En exprimant les fluctuations en fonction des opérateurs des bains :

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle &= \sum_k |\kappa_k|^2 \mathcal{G}_{11}(\omega_k - \Omega) \mathcal{G}_{12}(\Omega - \omega_k) e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \\
 &\quad + \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} \left(\mathcal{G}_{14}(\omega_j) \mathcal{G}_{14}(-\omega_j) e^{-i\omega_j t} (n_j + 1) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{G}_{14}(-\omega_j) \mathcal{G}_{14}(\omega_j) e^{i\omega_j t} (n_j) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta}a(t) \hat{\delta}a^\dagger(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle &= \sum_k |\kappa_k|^2 \mathcal{G}_{11}(\omega_k - \Omega) \mathcal{G}_{22}(\Omega - \omega_k) e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \\
 &\quad + \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} \left(\mathcal{G}_{14}(\omega_j) \mathcal{G}_{24}(-\omega_j) e^{-i\omega_j t} (n_j + 1) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{G}_{14}(-\omega_j) \mathcal{G}_{24}(\omega_j) e^{i\omega_j t} (n_j) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta}a^\dagger(t) \hat{\delta}a(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle &= \sum_k |\kappa_k|^2 \mathcal{G}_{21}(\omega_k - \Omega) \mathcal{G}_{12}(\Omega - \omega_k) e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \\
 &\quad + \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} \left(\mathcal{G}_{24}(\omega_j) \mathcal{G}_{14}(-\omega_j) e^{-i\omega_j t} (n_j + 1) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{G}_{24}(-\omega_j) \mathcal{G}_{14}(\omega_j) e^{i\omega_j t} (n_j) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\alpha}_{in} | \hat{\delta a}^\dagger(t) \hat{\delta a}^\dagger(0) | \tilde{\alpha}_{in} \rangle &= \sum_k |\kappa_k|^2 \mathcal{G}_{21}(\omega_k - \Omega) \mathcal{G}_{22}(\Omega - \omega_k) e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \\
 &+ \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} \left(\mathcal{G}_{24}(\omega_j) \mathcal{G}_{24}(-\omega_j) e^{-i\omega_j t} (n_j + 1) \right. \\
 &\left. + \mathcal{G}_{24}(-\omega_j) \mathcal{G}_{24}(\omega_j) e^{i\omega_j t} (n_j) \right)
 \end{aligned}$$

La fonction d'auto-corrélation, après quelques simplifications s'écrit :

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \sum_k |\kappa_k|^2 e^{-i(\omega_k - \Omega)t} |\alpha \mathcal{G}_{11}(\omega_k - \Omega)^* + \alpha^* \mathcal{G}_{21}(\omega_k - \Omega)^*|^2 \\
 &+ \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} e^{-i\omega_j t} (n_j + 1) |\alpha \mathcal{G}_{24}(-\omega_j) + \alpha^* \mathcal{G}_{24}(\omega_j)^*|^2 \\
 &+ \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} e^{i\omega_j t} n_j |\alpha \mathcal{G}_{24}(\omega_j) + \alpha^* \mathcal{G}_{24}(-\omega_j)^*|^2
 \end{aligned}$$

La densité spectrale de bruit du nombre de photons $S(\omega) = \text{TF}[F(t)]$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \sum_k |\kappa_k|^2 |\alpha \mathcal{G}_{11}(\omega_k - \Omega)^* + \alpha^* \mathcal{G}_{21}(\omega_k - \Omega)^*|^2 2\pi \delta(\omega - (\omega_k - \Omega)) \\
 &+ \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} (n_j + 1) |\alpha \mathcal{G}_{24}(-\omega_j) + \alpha^* \mathcal{G}_{24}(\omega_j)^*|^2 2\pi \delta(\omega - \omega_j) \\
 &+ \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2} n_j |\alpha \mathcal{G}_{24}(\omega_j) + \alpha^* \mathcal{G}_{24}(-\omega_j)^*|^2 2\pi \delta(\omega + \omega_j)
 \end{aligned}$$

En remplaçant les composantes de la matrice par leurs expressions :

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \sum_k |\kappa_k|^2 \left| \frac{\alpha i(\omega_k + \omega_0 + g_0 \chi - 2\Omega - i\tilde{\Gamma}(2\Omega - \omega_k))((\omega_k - \Omega)^2 - \omega_m^2 - i(\omega_k - \Omega)\tilde{\mu}^*(\omega_k - \Omega))}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega_k - \Omega))^*} \right|^2 2\pi \delta(\omega - (\omega_k - \Omega)) \\
 &+ \sum_j \frac{\gamma_j \omega_j}{2m\omega_m} (n_j + 1) \left| \frac{g_0 |\alpha|^2 \omega_m (2(\omega_0 + g_0 \chi - \Omega) - i\tilde{\Gamma}(-\omega_j + \Omega) + i\tilde{\Gamma}(\omega_j + \Omega)^*)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(-\omega_j))} \right|^2 2\pi \delta(\omega - \omega_j) \\
 &+ \sum_j \frac{\gamma_j \omega_j}{2m\omega_m} (n_j) \left| \frac{g_0 |\alpha|^2 \omega_m (2(\omega_0 + g_0 \chi - \Omega) - i\tilde{\Gamma}(\omega_j + \Omega) + i\tilde{\Gamma}(-\omega_j + \Omega)^*)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega_j))} \right|^2 2\pi \delta(\omega + \omega_j)
 \end{aligned}$$

Nous remplaçons à ce stade les sommes discrètes par des intégrales dans l'expression des amortissements optique et mécanique. Rappelons les expressions des amortissements dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\omega) &= \sum_k |\kappa_k|^2 \left(\pi \delta(\omega - \omega_k) + i \text{vp} \frac{1}{\omega - \omega_k} \right) \\ \tilde{\mu}(\omega) &= \sum_j \frac{\omega_m \lambda_j^2 \pi}{2\omega_j} (\delta(\omega + \omega_j) + \delta(\omega - \omega_j)) + i \sum_j \frac{\omega_m \lambda_j^2}{2\omega_j} \text{vp} \left(\frac{1}{\omega + \omega_j} + \frac{1}{\omega - \omega_j} \right)\end{aligned}$$

Avec $\lambda_j = \omega_j \sqrt{\frac{m_j \omega_j}{m \omega_m}}$ donnant donc $\frac{\omega_m \lambda_j^2}{2\omega_j} = \frac{m_j \omega_j^2}{2m} = \frac{\gamma_j}{2m}$.

Nous ne nous intéressons qu'aux parties réelle de $\tilde{\Gamma}(\omega)$ et $\tilde{\mu}(\omega)$ qui correspondent respectivement aux pertes optique et mécanique. Les parties imaginaires correspondant au "décalage de Lamb" ont pour effet de décaler les fréquences propres, elles ne nous intéressent pas ici.

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\omega) &= \sum_k |\kappa_k|^2 \pi \delta(\omega - \omega_k) \\ \tilde{\mu}(\omega) &= \sum_j \frac{\gamma_j \pi}{2m} (\delta(\omega + \omega_j) + \delta(\omega - \omega_j))\end{aligned}$$

Les fréquences des bains optique et mécanique sont toutes positives ($\omega_k > 0$ et $\omega_j > 0$). Nous considérons le modèle le plus simple où l'amortissement est constant. Les sommes se transforment en intégrale suivant le schéma :

$$\sum_k |\kappa_k|^2 \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} \tilde{\kappa} \quad (\text{D.85})$$

$$\sum_j \gamma_j \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \tilde{\gamma} \quad (\text{D.86})$$

où $\tilde{\kappa}$ et $\tilde{\gamma}$ représentent les densités de couplage des bains optique et mécanique.

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} \tilde{\kappa} \pi \delta(\omega - \omega_k) = \begin{cases} \frac{\tilde{\kappa}}{2} \equiv \tilde{\Gamma} & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$$

A contrario l'amortissement mécanique est constant sur toute la gamme de fréquence.

$$\tilde{\mu}(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \frac{\tilde{\gamma} \pi}{2m} (\delta(\omega + \omega_j) + \delta(\omega - \omega_j)) = \frac{\tilde{\gamma}}{4m} \equiv \tilde{\mu} \quad (\text{D.87})$$

Nous réévaluons alors la densité spectrale :

$$\begin{aligned}S(\omega) &= \int_0^{+\infty} \tilde{\kappa} \left| \frac{\alpha i (\omega_k + \omega_0 + g_0 \chi - 2\Omega - i\tilde{\Gamma}(2\Omega - \omega_k)) ((\omega_k - \Omega)^2 - \omega_m^2 - i(\omega_k - \Omega)\tilde{\mu}^*(\omega_k - \Omega))}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega_k - \Omega))^*} \right|^2 \delta(\omega_k - (\omega + \Omega)) d\omega_k \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\gamma} \omega_j}{2m \omega_m} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}} \right) \left| \frac{g_0 |\alpha|^2 \omega_m (2(\omega_0 + g_0 \chi - \Omega) - i\tilde{\Gamma}(-\omega_j + \Omega) + i\tilde{\Gamma}(\omega_j + \Omega)^*)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(-\omega_j))} \right|^2 \delta(\omega_j - \omega) d\omega_j \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\gamma} \omega_j}{2m \omega_m} \left(\frac{e^{-\beta \hbar \omega_j}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}} \right) \left| \frac{g_0 |\alpha|^2 \omega_m (2(\omega_0 + g_0 \chi - \Omega) - i\tilde{\Gamma}(\omega_j + \Omega) + i\tilde{\Gamma}(-\omega_j + \Omega)^*)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega_j))} \right|^2 \delta(\omega_j + \omega) d\omega_j \quad (\text{D.88})\end{aligned}$$

On se rend compte à ce stade que pour les fréquences négatives et positives on aura pas la même expression. $S(\omega)$ qui représente la densité de bruit du nombre de photon est évalué pour des fréquences $-\Omega < \omega < \Omega$. Ainsi $\omega + \Omega > 0$ et la première ligne de l'équation (D.88) n'est jamais nulle.

Ainsi pour les fréquences positives ($\omega > 0$), la troisième ligne de l'équation (D.88) est nulle et $S(\omega)$ vaut :

$$S_{pos}(\omega > 0) = \tilde{\kappa} \left| \frac{\alpha i(\omega + \omega_0 + g_0\chi - \Omega - i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega))(\omega^2 - \omega_m^2 - i\omega\tilde{\mu}^*(\omega))}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))^*} \right|^2 + \frac{\tilde{\gamma}\omega}{2m\omega_m} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \right) \left| \frac{g_0 |\alpha|^2 \omega_m \left(2(\omega_0 + g_0\chi - \Omega) - i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega) + i\tilde{\Gamma}(\Omega + \omega)^* \right)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(-\omega))} \right|^2 2\pi$$

Et pour les fréquences négatives ($\omega < 0$), la deuxième ligne de l'équation (D.88) est nulle :

$$S_{neg}(\omega < 0) = \tilde{\kappa} \left| \frac{\alpha i(\omega + \omega_0 + g_0\chi - \Omega - i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega))(\omega^2 - \omega_m^2 - i\omega\tilde{\mu}^*(\omega))}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))^*} \right|^2 + \frac{\tilde{\gamma}(-\omega)}{2m\omega_m} \left(\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{1 - e^{\beta\hbar\omega}} \right) \left| \frac{g_0 |\alpha|^2 \omega_m \left(2(\omega_0 + g_0\chi - \Omega) - i\tilde{\Gamma}(\Omega - \omega) + i\tilde{\Gamma}(\Omega + \omega)^* \right)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(-\omega))} \right|^2 2\pi$$

On notera la forte symétrie entre ces deux formules qui n'est brisé que par la différence d'un phonon, dû à l'émission spontanée. Lorsque l'on repliera le spectre négatif sur le spectre positif pour modéliser nos résultats expérimentaux, on obtiendra pour des fréquences uniquement positives :

$$S_R(\omega > 0) = S_{pos}(\omega) + S_{neg}(-\omega) \quad (\text{D.89})$$

En utilisant maintenant le fait que les fonctions $\tilde{\Gamma}(\omega)$ et $\tilde{\mu}(\omega)$ ne dépendent plus de la fréquence, on obtient :

$$S(\omega) = 2\tilde{\Gamma} \left| \frac{\alpha i(\omega + \omega_0 + g_0\chi - \Omega - i\tilde{\Gamma})(\omega^2 - \omega_m^2 - i\omega\tilde{\mu})}{-\text{Det}(\mathcal{M}(\omega))^*} \right|^2 + 2\tilde{\Gamma} \left| \frac{\alpha i(-\omega + \omega_0 + g_0\chi - \Omega - i\tilde{\Gamma})(\omega^2 - \omega_m^2 + i\omega\tilde{\mu})}{-\text{Det}(\mathcal{M}(-\omega))^*} \right|^2 + \frac{2\tilde{\mu}\omega}{\omega_m} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} + \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \right) \left| \frac{g_0 |\alpha|^2 \omega_m 2(\omega_0 + g_0\chi - \Omega)}{-\text{Det}(\mathcal{M}(-\omega))} \right|^2 \quad (\text{D.90})$$

où on préfère garder dans nos calculs les termes $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\Gamma}$ qui représentent les dissipations optique et mécanique.

Bibliographie

- [1] J. KEPLER, « 1619 de cometis libelli tres ».
- [2] E. NICHOLS et G. HULL, « A preliminary communication on the pressure of light and heat radiation », *Science*, Vol. 14, p. 588, 1901.
- [3] P. LEBEDEW, « Untersuchungen über die druckkräfte des liches », *Annalen der Physik*, Vol. 311, n° 11, pp. 433–458, 1901.
- [4] V. BRAGINSKI et A. MANUKIN, « Ponderomotive effects of electromagnetic radiation », *Sov. Phys.—JETP*, Vol. 25, p. 653, 1967.
- [5] R. HARTLEY, « Oscillations in systems with non-linear reactance », *Bell System Technical Journal*, Vol. 15, n° 3, pp. 424–440, 1936.
- [6] V. BRAGINSKII, A. MANUKIN et M. Y. TIKHONOV, « Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation », *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, Vol. 31, p. 829, 1970.
- [7] A. DORSEL, J. MCCULLEN, P. MEYSTRE, E. VIGNES et H. WALTHER, « Optical bistability and mirror confinement induced by radiation pressure », *Physical Review Letters*, Vol. 51, n° 17, pp. 1550–1553, 1983.
- [8] P.-F. COHADON, A. HEIDMANN et M. PINARD, « Cooling of a mirror by radiation pressure », *Physical Review Letters*, Vol. 83, n° 16, p. 3174, 1999.
- [9] A. D. O’CONNELL, M. HOFHEINZ, M. ANSMANN, R. C. BIALCZAK, M. LENANDER, E. LUCERO, M. NEELEY, D. SANK, H. WANG, M. WEIDES *et al.*, « Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator », *Nature*, Vol. 464, n° 7289, pp. 697–703, 2010.
- [10] J. TEUFEL, T. DONNER, D. LI, J. HARLOW, M. ALLMAN, K. CİCAK, A. SIROIS, J. WHITTAKER, K. LEHNERT et R. SIMMONDS, « Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state », *Nature*, Vol. 475, n° 7356, pp. 359–363, 2011.

- [11] J. CHAN, T. M. ALEGRE, A. H. SAFAVI-NAEINI, J. T. HILL, A. KRAUSE, S. GRÖBLACHER, M. ASPELMEYER et O. PAINTER, « Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state », *Nature*, Vol. 478, n° 7367, pp. 89–92, 2011.
- [12] J. MERTZ, O. MARTI et J. MLYNEK, « Regulation of a microcantilever response by force feedback », *Applied Physics Letters*, Vol. 62, n° 19, pp. 2344–2346, 1993.
- [13] C. H. METZGER et K. KARRAI, « Cavity cooling of a microlever », *Nature*, Vol. 432, n° 7020, pp. 1002–1005, 2004.
- [14] J. RESTREPO, J. GABELLI, C. CIUTI et I. FAVERO, « Classical and quantum theory of photothermal cavity cooling of a mechanical oscillator », *Comptes Rendus Physique*, Vol. 12, n° 9, pp. 860–870, 2011.
- [15] S. DE LIBERATO, N. LAMBERT et F. NORI, « Quantum noise in photothermal cooling », *Physical Review A*, Vol. 83, n° 3, p. 033809, 2011.
- [16] A. XUEREB, K. USAMI, A. NAESBY, E. S. POLZIK et K. HAMMERER, « Exciton-mediated photothermal cooling in gas membranes », *New Journal of Physics*, Vol. 14, n° 8, p. 085024, 2012.
- [17] H. OSTERBERG et J. W. COOKSON, « The piezodielectric effect and electrostriction in anisotropic or isotropic media », *Physical Review*, Vol. 51, n° 12, p. 1096, 1937.
- [18] P. T. RAKICH, P. DAVIDS et Z. WANG, « Tailoring optical forces in waveguides through radiation pressure and electrostrictive forces », *Optics express*, Vol. 18, n° 14, pp. 14439–14453, 2010.
- [19] J. CHAN, A. H. SAFAVI-NAEINI, J. T. HILL, S. MEENEHAN et O. PAINTER, « Optimized optomechanical crystal cavity with acoustic radiation shield », *Applied Physics Letters*, Vol. 101, n° 8, p. 081115, 2012.
- [20] C. BAKER, W. HEASE, D.-T. NGUYEN, A. ANDRONICO, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « Photoelastic coupling in gallium arsenide optomechanical disk resonators », *Optics Express*, Vol. 22, n° 12, pp. 14072–14086, 2014.
- [21] E. VERHAGEN, S. DEL’EGLISE, S. WEIS, A. SCHLIESSER et T. J. KIPPENBERG, « Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode », *Nature*, Vol. 482, n° 7383, pp. 63–67, 2012.
- [22] D. ARMANI, T. KIPPENBERG, S. SPILLANE et K. VAHALA, « Ultra-high-q toroid microcavity on a chip », *Nature*, Vol. 421, n° 6926, pp. 925–928, 2003.
- [23] K. H. LEE, T. G. MCRAE, G. I. HARRIS, J. KNITTEL et W. P. BOWEN, « Cooling and control of a cavity optoelectromechanical system », *Physical review letters*, Vol. 104, n° 12, p. 123604, 2010.
- [24] T. CORBITT, Y. CHEN, E. INNERHOFER, H. MÜLLER-EBHARDT, D. OTTAWAY, H. REHBEIN, D. SIGG, S. WHITCOMB, C. WIPF et N. MAVALVALA, « An all-optical trap for a gram-scale mirror », *Physical review letters*, Vol. 98, n° 15, p. 150802, 2007.
- [25] A. KUHN, M. BHRIZ, O. DUCLOUX, C. CHARTIER, O. LE TRAON, T. BRIANT, P.-F. COHADON, A. HEIDMANN, C. MICHEL, L. PINARD *et al.*, « A micropillar for cavity optomechanics », *Applied Physics Letters*, Vol. 99, n° 12, p. 121103, 2011.

-
- [26] L. DING, C. BAKER, P. SENELLART, A. LEMAITRE, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « High frequency gaas nano-optomechanical disk resonator », *Physical review letters*, Vol. 105, n° 26, p. 263903, 2010.
- [27] C. BAKER, C. BELACEL, A. ANDRONICO, P. SENELLART, A. LEMAITRE, E. GALOPIN, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « Critical optical coupling between a gaas disk and a nanowaveguide suspended on the chip », *Applied Physics Letters*, Vol. 99, n° 15, pp. 151117–151117, 2011.
- [28] X. SUN, X. ZHANG et H. X. TANG, « High-q silicon optomechanical microdisk resonators at gigahertz frequencies », *Applied Physics Letters*, Vol. 100, n° 17, p. 173116, 2012.
- [29] W. C. JIANG, X. LU, J. ZHANG et Q. LIN, « High-frequency silicon optomechanical oscillator with an ultralow threshold », *Optics express*, Vol. 20, n° 14, pp. 15991–15996, 2012.
- [30] J. THOMPSON, B. ZWICKL, A. JAYICH, F. MARQUARDT, S. GIRVIN et J. HARRIS, « Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane », *Nature*, Vol. 452, n° 7183, pp. 72–75, 2008.
- [31] T. PURDY, R. PETERSON et C. REGAL, « Observation of radiation pressure shot noise on a macroscopic object », *Science*, Vol. 339, n° 6121, pp. 801–804, 2013.
- [32] K. USAMI, A. NAESBY, T. BAGCI, B. M. NIELSEN, J. LIU, S. STOBBE, P. LODAHL et E. S. POLZIK, « Optical cavity cooling of mechanical modes of a semiconductor nanomembrane », *Nature Physics*, Vol. 8, n° 2, pp. 168–172, 2012.
- [33] I. MAHBOOB et H. YAMAGUCHI, « Bit storage and bit flip operations in an electromechanical oscillator », *Nature nanotechnology*, Vol. 3, n° 5, pp. 275–279, 2008.
- [34] H. OKAMOTO, D. ITO, K. ONOMITSU, H. SANADA, H. GOTOH, T. SOGAWA et H. YAMAGUCHI, « Vibration amplification, damping, and self-oscillations in micromechanical resonators induced by optomechanical coupling through carrier excitation », *Physical review letters*, Vol. 106, n° 3, p. 036801, 2011.
- [35] I. FAVERO, S. STAPFNER, D. HUNGER, P. PAULITSCHKE, J. REICHEL, H. LORENZ, E. M. WEIG et K. KARRAI, « Fluctuating nanomechanical system in a high finesse optical microcavity », *Optics express*, Vol. 17, n° 15, pp. 12813–12820, 2009.
- [36] S. STAPFNER, L. OST, D. HUNGER, J. REICHEL, I. FAVERO et E. M. WEIG, « Cavity-enhanced optical detection of carbon nanotube brownian motion », *Applied Physics Letters*, Vol. 102, n° 15, p. 151910, 2013.
- [37] M. LI, W. H. PERNICE et H. X. TANG, « Reactive cavity optical force on microdisk-coupled nanomechanical beam waveguides », *Physical review letters*, Vol. 103, n° 22, p. 223901, 2009.
- [38] G. S. WIEDERHECKER, L. CHEN, A. GONDARENKO et M. LIPSON, « Controlling photonic structures using optical forces », *Nature*, Vol. 462, n° 7273, pp. 633–636, 2009.
- [39] S. GRÖBLACHER, J. B. HERTZBERG, M. R. VANNER, G. D. COLE, S. GIGAN, K. SCHWAB et M. ASPELMEYER, « Demonstration of an ultracold micro-optomechanical oscillator in a cryogenic cavity », *Nature Physics*, Vol. 5, n° 7, pp. 485–488, 2009.

- [40] O. ARCIZET, P.-F. COHADON, T. BRIANT, M. PINARD et A. HEIDMANN, « Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror », *Nature*, Vol. 444, n° 7115, pp. 71–74, 2006.
- [41] I. FAVERO, C. METZGER, S. CAMERER, D. KÖNIG, H. LORENZ, J. KOTTHAUS et K. KARRAI, « Optical cooling of a micromirror of wavelength size », *Applied Physics Letters*, Vol. 90, n° 10, p. 104101, 2007.
- [42] T. CARMON et K. J. VAHALA, « Modal spectroscopy of optoexcited vibrations of a micron-scale on-chip resonator at greater than 1 ghz frequency », *Physical review letters*, Vol. 98, n° 12, p. 123901, 2007.
- [43] Y.-S. PARK et H. WANG, « Resolved-sideband and cryogenic cooling of an optomechanical resonator », *Nature physics*, Vol. 5, n° 7, pp. 489–493, 2009.
- [44] T. PURDY, D. BROOKS, T. BOTTER, N. BRAHMS, Z.-Y. MA et D. STAMPER-KURN, « Tunable cavity optomechanics with ultracold atoms », *Physical review letters*, Vol. 105, n° 13, p. 133602, 2010.
- [45] S. CAMERER, M. KORPPI, A. JÖCKEL, D. HUNGER, T. W. HÄNSCH et P. TREUTLEIN, « Realization of an optomechanical interface between ultracold atoms and a membrane », *Physical review letters*, Vol. 107, n° 22, p. 223001, 2011.
- [46] M. NOTOMI, H. TANIYAMA, S. MITSUGI et E. KURAMOCHI, « Optomechanical wavelength and energy conversion in high-q double-layer cavities of photonic crystal slabs », *Physical review letters*, Vol. 97, n° 2, p. 023903, 2006.
- [47] E. GAVARTIN, R. BRAIVE, I. SAGNES, O. ARCIZET, A. BEVERATOS, T. J. KIPPENBERG et I. ROBERT-PHILIP, « Optomechanical coupling in a two-dimensional photonic crystal defect cavity », *Physical review letters*, Vol. 106, n° 20, p. 203902, 2011.
- [48] B. GAYRAL, J. GÉRARD, A. LEMAITRE, C. DUPUIS, L. MANIN et J. PELOUARD, « High-q wet-etched gaas microdisks containing inas quantum boxes », *Applied physics letters*, Vol. 75, n° 13, pp. 1908–1910, 1999.
- [49] L. RAYLEIGH, « Cxii. the problem of the whispering gallery », *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 20, n° 120, pp. 1001–1004, 1910.
- [50] M. OXBORROW, « How to simulate the whispering-gallery modes of dielectric microresonators in femlab/comsol », in *Lasers and Applications in Science and Engineering*, pp. 64520J–64520J, International Society for Optics and Photonics, 2007.
- [51] M. I. CHEEMA et A. G. KIRK, « Implementation of the perfectly matched layer to determine the quality factor of axisymmetric resonators in comsol », in *COMSOL conference, Boston*, 2010.
- [52] D. K. MYNBAEV et L. L. SCHEINER, *Fiber-optic communications technology*. Prentice Hall, 2001.
- [53] A. W. SNYDER et J. LOVE, *Optical waveguide theory*, Vol. 190. Springer, 1983.
- [54] H. A. HAUS, *Waves and fields in optoelectronics*, Vol. 1. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1984.

-
- [55] M. A. ABDELMONEUM, M. U. DEMIRCI et C.-C. NGUYEN, « Stemless wine-glass-mode disk micromechanical resonators », in *Micro Electro Mechanical Systems, 2003. MEMS-03 Kyoto. IEEE The Sixteenth Annual International Conference on*, pp. 698–701, IEEE, 2003.
- [56] F. G. DELLA CORTE, G. COCORULLO, M. IODICE et I. RENDINA, « Temperature dependence of the thermo-optic coefficient of inp, gaas, and sic from room temperature to 600 k at the wavelength of 1.5 μm », *Applied physics letters*, Vol. 77, n° 11, pp. 1614–1616, 2000.
- [57] W. M. HAYNES, *CRC handbook of chemistry and physics*. CRC press, 2012.
- [58] « Ioffe Institute ». <http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/GaAs/>. Accessed : 2014.
- [59] E. D. PALIK, *Handbook of Optical Constants of Solids : Index*, Vol. 3. Access Online via Elsevier, 1998.
- [60] E. ZOUBOULIS, M. GRIMSDITCH, A. RAMDAS et S. RODRIGUEZ, « Temperature dependence of the elastic moduli of diamond : A brillouin-scattering study », *Physical Review B*, Vol. 57, n° 5, p. 2889, 1998.
- [61] C. BAKER, *Résonateurs nano-optomécaniques à mode de galerie sur puce*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2013.
- [62] S. ADACHI, « Chemical etching of inp and ingaasp/inp », *Journal of The Electrochemical Society*, Vol. 129, n° 3, pp. 609–613, 1982.
- [63] S. ADACHI et K. OE, « Chemical etching characteristics of (001) gaas », *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 130, n° 12, pp. 2427–2435, 1983.
- [64] L. DING, C. BELACEL, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « Ultralow loss single-mode silica tapers manufactured by a microheater », *Applied Optics*, Vol. 49, n° 13, pp. 2441–2445, 2010.
- [65] L. DING, P. SENELLART, A. LEMAITRE, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « Gaas micro-nanodisks probed by a looped fiber taper for optomechanics applications », in *SPIE Photonics Europe*, pp. 771211–771211, International Society for Optics and Photonics, 2010.
- [66] L. DING, C. BAKER, P. SENELLART, A. LEMAITRE, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « Wavelength-sized gaas optomechanical resonators with gigahertz frequency », *Applied Physics Letters*, Vol. 98, n° 11, pp. 113108–113108, 2011.
- [67] J. U. NÖCKEL et A. D. STONE, « Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities », *arXiv preprint chao-dyn/9806017*, 1998.
- [68] S. ANCEY, A. FOLACCI et P. GABRIELLI, « Whispering-gallery modes and resonances of an elliptic cavity », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, Vol. 34, n° 7, p. 1341, 2001.
- [69] T. R. THOMAS, *Rough surfaces*, Vol. 6. Longman London, 1982.
- [70] R. S. SAYLES et T. R. THOMAS, « Surface topography as a nonstationary random process », 1978.

- [71] M. BORSELLI, K. SRINIVASAN, P. E. BARCLAY et O. PAINTER, « Rayleigh scattering, mode coupling, and optical loss in silicon microdisks », *Applied Physics Letters*, Vol. 85, n° 17, pp. 3693–3695, 2004.
- [72] B. E. LITTLE, J.-P. LAINE et S. T. CHU, « Surface-roughness-induced contradirectional coupling in ring and disk resonators », *Optics letters*, Vol. 22, n° 1, pp. 4–6, 1997.
- [73] M. SKOROBOGATIY, G. BÉGIN et A. TALNEAU, « Statistical analysis of geometrical imperfections from the images of 2d photonic crystals », *Opt. Express*, Vol. 13, n° 7, pp. 2487–2502, 2005.
- [74] C. G. POULTON, C. KOOS, M. FUJII, A. PFRANG, T. SCHIMMEL, J. LEUTHOLD et W. FREUDE, « Radiation modes and roughness loss in high index-contrast waveguides », *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, Vol. 12, n° 6, pp. 1306–1321, 2006.
- [75] M. KUZNETSOV et H. HAUS, « Radiation loss in dielectric waveguide structures by the volume current method », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, Vol. 19, n° 10, pp. 1505–1514, 1983.
- [76] T. BARWICZ et H. A. HAUS, « Three-dimensional analysis of scattering losses due to sidewall roughness in microphotonic waveguides », *Lightwave Technology, Journal of*, Vol. 23, n° 9, pp. 2719–2732, 2005.
- [77] Q. LI, A. A. EFTEKHAR, Z. XIA et A. ADIBI, « Unified approach to mode splitting and scattering loss in high-Q whispering-gallery-mode microresonators », *Phys. Rev. A*, Vol. 88, p. 033816, 2013.
- [78] S. G. JOHNSON, M. IBANESCU, M. SKOROBOGATIY, O. WEISBERG, J. JOANNOPOULOS et Y. FINK, « Perturbation theory for maxwell’s equations with shifting material boundaries », *Physical review E*, Vol. 65, n° 6, p. 066611, 2002.
- [79] S. G. JOHNSON, M. POVINELLI, M. SOLJAČIĆ, A. KARALIS, S. JACOBS et J. JOANNOPOULOS, « Roughness losses and volume-current methods in photonic-crystal waveguides », *Applied Physics B*, Vol. 81, n° 2-3, pp. 283–293, 2005.
- [80] N. HILL, « Integral-equation perturbative approach to optical scattering from rough surfaces », *Physical Review B*, Vol. 24, n° 12, p. 7112, 1981.
- [81] J. E. HEEBNER, T. C. BOND et J. S. KALLMAN, « Generalized formulation for performance degradations due to bending and edge scattering loss in microdisk resonators », *Optics Express*, Vol. 15, n° 8, pp. 4452–4473, 2007.
- [82] A. TAVLOVE et S. C. HAGNESS, « Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method », *Artech House, Norwood, MA*, Vol. 2062, 1995.
- [83] M. STURGE, « Optical absorption of gallium arsenide between 0.6 and 2.75 ev », *Physical Review*, Vol. 127, n° 3, p. 768, 1962.
- [84] P. A. KOHL, « Photoelectrochemical etching of semiconductors », *IBM journal of research and development*, Vol. 42, n° 5, pp. 629–638, 1998.
- [85] V. R. ALMEIDA et M. LIPSON, « Optical bistability on a silicon chip », *Optics letters*, Vol. 29, n° 20, pp. 2387–2389, 2004.

-
- [86] T. J. JOHNSON, M. BORSELLI et O. PAINTER, « Self-induced optical modulation of the transmission through a high-q silicon microdisk resonator », *Optics express*, Vol. 14, n° 2, pp. 817–831, 2006.
- [87] B. BOSACCHI, J. BESSEY et F. JAIN, « Two-photon absorption of neodymium laser radiation in gallium arsenide », *Journal of Applied Physics*, Vol. 49, n° 8, pp. 4609–4611, 1978.
- [88] D. KLEINMAN, R. C. MILLER et W. NORDLAND, « Two-photon absorption of nd laser radiation in gaas », *Applied Physics Letters*, Vol. 23, p. 243, 1973.
- [89] D. W. SHAW, « Localized gaas etching with acidic hydrogen peroxide solutions », *Journal of The Electrochemical Society*, Vol. 128, n° 4, pp. 874–880, 1981.
- [90] C. SANDROFF, M. HEGDE, L. FARROW, C. CHANG et J. HARBISON, « Electronic passivation of gaas surfaces through the formation of arsenic—sulfur bonds », *Applied Physics Letters*, Vol. 54, n° 4, pp. 362–364, 1989.
- [91] Y. WANG, Y. DARICI et P. H. HOLLOWAY, « Surface passivation of gaas with p 2 s 5-containing solutions », *Journal of applied physics*, Vol. 71, n° 6, pp. 2746–2756, 1992.
- [92] V. BERKOVITS, D. PAGET, A. KARPENKO, V. ULIN et O. TERESHCHENKO, « Soft nitridation of gaas (100) by hydrazine sulfide solutions : Effect on surface recombination and surface barrier », *Applied physics letters*, Vol. 90, n° 2, pp. 022104–022104, 2007.
- [93] V. BERKOVITS, V. ULIN, O. TERESHCHENKO, D. PAGET, A. ROWE, P. CHIARADIA, B. DOYLE et S. NANNARONE, « Chemistry of wet treatment of gaas (111) b and gaas (111) a in hydrazine-sulfide solutions », *Journal of The Electrochemical Society*, Vol. 158, n° 3, pp. D127–D135, 2011.
- [94] A. W. LEISSA, « Vibration of plates », rap. tech., DTIC Document, 1969.
- [95] F. BLOM, S. BOUWSTRA, M. ELWENSPÖEK et J. FLUITMAN, « Dependence of the quality factor of micromachined silicon beam resonators on pressure and geometry », *Journal of Vacuum Science & Technology B*, Vol. 10, n° 1, pp. 19–26, 1992.
- [96] H. HOSAKA, K. ITAO et S. KURODA, « Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators », *Sensors and Actuators A : Physical*, Vol. 49, n° 1, pp. 87–95, 1995.
- [97] K. KOKUBUN, M. HIRATA, H. MURAKAMI, Y. TODA et M. ONO, « A bending and stretching mode crystal oscillator as a friction vacuum gauge », *Vacuum*, Vol. 34, n° 8, pp. 731–735, 1984.
- [98] L. LANDAU, *Fluid mechanics : volume 6 (course of theoretical physics)* Author : LD Landau, EM Lifshitz, Publisher : Bu. Butterworth-Heinemann, 1987.
- [99] H. LAMB, *Hydrodynamics*. Cambridge university press, 1993.
- [100] M. BAO et H. YANG, « Squeeze film air damping in mems », *Sensors and Actuators A : Physical*, Vol. 136, n° 1, pp. 3–27, 2007.
- [101] T. VEIJOLA, « End effects of rare gas flow in short channels and in squeezed-film dampers », in *Proc. MSM*, Vol. 2, pp. 104–107, 2002.
- [102] D. PARRAIN, C. BAKER, T. VERDIER, P. SENELLART, A. LEMAITRE, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « Damping of optomechanical disks resonators vibrating in air », *Applied Physics Letters*, Vol. 100, n° 24, pp. 242105–242105, 2012.

- [103] I. WILSON-RAE, « Intrinsic dissipation in nanomechanical resonators due to phonon tunneling », *Physical Review B*, Vol. 77, n° 24, p. 245418, 2008.
- [104] Z. HAO et F. AYAZI, « Support loss in the radial bulk-mode vibrations of center-supported micromechanical disk resonators », *Sensors and Actuators A : Physical*, Vol. 134, n° 2, pp. 582–593, 2007.
- [105] D. T. NGUYEN, C. BAKER, W. HEASE, S. SEJIL, P. SENELLART, A. LEMAITRE, S. DUCCI, G. LEO et I. FAVERO, « Ultrahigh q-frequency product for optomechanical disk resonators with a mechanical shield », *Applied Physics Letters*, Vol. 103, n° 24, p. 241112, 2013.
- [106] J. YANG, T. ONO et M. ESASHI, « Energy dissipation in submicrometer thick single-crystal silicon cantilevers », *Microelectromechanical Systems, Journal of*, Vol. 11, n° 6, pp. 775–783, 2002.
- [107] Y. WANG, J. A. HENRY, A. T. ZEHNDER et M. A. HINES, « Surface chemical control of mechanical energy losses in micromachined silicon structures », *The Journal of Physical Chemistry B*, Vol. 107, n° 51, pp. 14270–14277, 2003.
- [108] P. STEENEKEN, K. LE PHAN, M. GOOSSENS, G. KOOPS, G. BROM, C. Van der AVOORT et J. VAN BEEK, « Piezoresistive heat engine and refrigerator », *Nature Physics*, Vol. 7, n° 4, pp. 354–359, 2011.
- [109] T. J. KIPPENBERG et K. J. VAHALA, « Cavity optomechanics : back-action at the mesoscale », *science*, Vol. 321, n° 5893, pp. 1172–1176, 2008.
- [110] M. ASPELMEYER, T. J. KIPPENBERG et F. MARQUARDT, « Cavity optomechanics », *arXiv preprint arXiv :1303.0733*, 2013.
- [111] P. T. RAKICH, C. REINKE, R. CAMACHO, P. DAVIDS et Z. WANG, « Giant enhancement of stimulated brillouin scattering in the subwavelength limit », *Physical Review X*, Vol. 2, n° 1, p. 011008, 2012.
- [112] C. METZGER, I. FAVERO, A. ORTLIEB et K. KARRAI, « Optical self cooling of a deformable fabry-perot cavity in the classical limit », *Physical Review B*, Vol. 78, n° 3, p. 035309, 2008.
- [113] S. GRÖBLACHER, K. HAMMERER, M. R. VANNER et M. ASPELMEYER, « Observation of strong coupling between a micromechanical resonator and an optical cavity field », *Nature*, Vol. 460, n° 7256, pp. 724–727, 2009.
- [114] J. DOBRINDT, I. WILSON-RAE et T. KIPPENBERG, « Parametric normal-mode splitting in cavity optomechanics », *Physical Review Letters*, Vol. 101, n° 26, p. 263602, 2008.
- [115] M. EICHENFIELD, R. CAMACHO, J. CHAN, K. J. VAHALA et O. PAINTER, « A picogram- and nanometre-scale photonic-crystal optomechanical cavity », *Nature*, Vol. 459, n° 7246, pp. 550–555, 2009.
- [116] Q. LIN, J. ROSENBERG, D. CHANG, R. CAMACHO, M. EICHENFIELD, K. J. VAHALA et O. PAINTER, « Coherent mixing of mechanical excitations in nano-optomechanical structures », *Nature Photonics*, Vol. 4, n° 4, pp. 236–242, 2010.
- [117] D. M. ABRAMS, A. SLAWIK et K. SRINIVASAN, « Nonlinear oscillations and bifurcations in silicon photonic microresonators », *arXiv preprint arXiv :1310.4133*, 2013.

-
- [118] D. NAVARRO-URRIOS, N. E. CAPUJ, J. GOMIS-BRESCO, F. ALZINA, A. GRIOL, A. MARTINEZ et C. M. S. TORRES, « Synchronization of an optomechanical oscillator and thermal/free-carrier self-pulsing using optical comb forces », *arXiv preprint arXiv :1403.6043*, 2014.
- [119] P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*. Hermann, 1998.
- [120] E. PETER, P. SENELLART, D. MARTROU, A. LEMAÎTRE, J. HOURS, J. GÉRARD et J. BLOCH, « Exciton-photon strong-coupling regime for a single quantum dot embedded in a microcavity », *Physical review letters*, Vol. 95, n° 6, p. 067401, 2005.
- [121] J. RESTREPO, C. CIUTI et I. FAVERO, « Single-polariton optomechanics », *Physical review letters*, Vol. 112, n° 1, p. 013601, 2014.
- [122] T. KAMALAKIS et T. SPHICOPOULOS, « Frequency dependence of the coupling coefficients and resonant frequency detuning in a nanophotonic waveguide-cavity system », *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, Vol. 42, n° 8, pp. 827–837, 2006.
- [123] G. FORD, J. LEWIS et R. O'CONNELL, « Quantum langevin equation », *Physical Review A*, Vol. 37, n° 11, p. 4419, 1988.