



Sur la turbulence bidimensionnelle : une approche par la magnétohydrodynamique

Joël Sommeria

► **To cite this version:**

Joël Sommeria. Sur la turbulence bidimensionnelle : une approche par la magnétohydrodynamique. Electromagnétisme. UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE; INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1985. Français. <tel-01340747>

HAL Id: tel-01340747

<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01340747>

Submitted on 1 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

Joël SOMMERIA

SUJET

SUR LA TURBULENCE BIDIMENSIONNELLE :
UNE APPROCHE PAR LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

Soutenu le 23 Septembre 1985 devant la Commission d'Examen

M. NOZIERES

Président

M. LESIEUR

Examineurs

M. LAVAL

M. FRISCH

Rapporteurs extérieurs

M. SADOURNY

M. MOREAU

Rapporteur

THESE de DOCTEUR-ès SCIENCES

Titre de l'ouvrage :

SUR LA TURBULENCE BIDIMENSIONNELLE :
UNE APPROCHE PAR LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

Nom de l'auteur : SOMMERIA Joël

Etablissement : Université Scientifique et Médicale de Grenoble

R E S U M E

Le but de ce travail est de réaliser et d'étudier une turbulence bidimensionnelle dans une couche de mercure, en présence d'un champ magnétique transverse uniforme. Une analyse théorique de l'amortissement des perturbations tridimensionnelles mettant en évidence l'effet stabilisant des parois est tout d'abord présentée. Une expérience de turbulence de grille en conduite rectangulaire avec champ transverse permet de mesurer des spectres d'énergie en $\tau^{-2} k^{-3}$ (au film chaud) et de mettre en évidence la forte anisotropie de la diffusion thermique. L'influence des perturbations tridimensionnelles est nettement moindre dans une boîte carrée où un réseau de 36 tourbillons est engendré par une force électrique. L'instabilité de ce réseau par un processus d'appariement de tourbillons de même signe conduit à une turbulence quasi homogène et isotrope. Une cascade inverse d'énergie avec un spectre en $k^{-5/3}$ est alors observée et la constante de Kolmogoroff correspondante à 2 dimensions mesurée. Lorsque le frottement sur le fond de la boîte est suffisamment faible, la cascade inverse est bloquée par les limites du domaine fluide. Une rotation moyenne apparaît alors spontanément, son sens pouvant se retourner de façon relativement rapide à des intervalles de temps devenant extrêmement longs lorsque le frottement de fond diminue. Une tentative de modélisation par une équation différentielle stochastique est proposée.

MOTS CLES

Turbulence magnétohydrodynamique, turbulence bidimensionnelle, instabilités, appariement, tourbillons, réseau de tourbillons, Hartmann, écoulements de mercure, diffusion anisotrope.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

Chapitre I : INTRODUCTION

1 - La turbulence des fluides	1
2 - La turbulence bidimensionnelle	8
3 - Eléments de magnétohydrodynamique	19

Chapitre II : DANS QUELLES CONDITIONS LA TURBULENCE M.H.D. DEVIENT-ELLE BIDIMENSIONNELLE ? (article publié au Journal of Fluid Mechanics).

1 - Introduction	31
2 - Some properties of MHD turbulence at large interaction parameter	33
3 - The influence of transverse insulating walls	35
4 - The behaviour of MHD turbulence between insulating walls	38
5 - Conclusions	40
Appendix : second order calculation of the Hartmann layer	41

Chapitre III : TURBULENCE DE GRILLE DANS UNE CONDUITE AVEC CHAMP MAGNETIQUE TRANSVERSE (article publié au J.M.T.A., n° spécial sur la turbulence bidimensionnelle)

1 - Introduction	44
2 - Theoretical Background	44
3 - M.H.D. channel flow	46
4 - The experimental device	47
5 - Investigation of the velocity field	49
6 - Heat diffusion experiments	54
7 - Conclusions	61

Chapitre IV : TOURBILLONS PRODUITS PAS DES COURANTS ELECTRIQUES

(article soumis au J. Fluid Mech.)

1 - Introduction	66
2 - The high Hartmann number behaviour	68
3 - The experimental device	77
4 - The experimental results	79
5 - Conclusions	90

Chapitre V : UN PROCESSUS ELEMENTAIRE DE LA CASCADE INVERSE D'ENERGIE

1 - Cas d'un domaine carré	95
2 - Un modèle spectral tronqué	107
3 - Cas d'un domaine circulaire	112

Chapitre VI : ETUDE EXPERIMENTALE DE LA CASCADE INVERSE D'ENERGIE DANS

UN DOMAINE CARRE (article en voie d'acceptation au
J. Fluid Mech.)

1 - Introduction	118
2 - The experiments	120
3 - The two-dimensional approximation	123
4 - The transition to turbulence	128
5 - The turbulent regimes, photographic observations	130
6 - The inverse energy cascade of homogeneous isotropic turbulence	133
7 - Interaction of the large scale with the boundaries	143
8 - Similarities with geophysical flows	151
9 - Conclusions	153
Appendix : Different definitions of the energy spectrum in 2-D homogeneous isotropic turbulence	155
Annexe : Fluctuations rapides et retournements	163

Chapitre VII : CONCLUSIONS

CONCLUSION

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I N T R O D U C T I O N

1. LA TURBULENCE DES FLUIDES

a) La turbulence dans la physique contemporaine

Les lois de la mécanique (classique et quantique) et celles des champs de forces semblent définitivement établies, si on excepte les processus à très haute énergie, qui n'interviennent pas dans notre environnement habituel. Cependant l'exploitation de ces principes à la compréhension du monde physique se heurte à la nécessité de prendre en compte un très grand nombre de particules en interaction. Le seul résultat vraiment général que l'on connaisse à ce sujet est le 2e principe de la thermodynamique. Celui-ci, bien compris physiquement (bien qu'il ne soit toujours pas démontré rigoureusement à partir des lois de la mécanique) ne s'applique que pour des situations proches de l'équilibre thermodynamique et n'est d'aucun secours pour les systèmes fortement hors d'équilibre. On peut citer par exemple les structures dissipatives obtenues dans certaines réactions chimiques (par exemple Prigogine, 1980), les instabilités de croissance cristalline qui conditionnent la forme d'un cristal de neige, voire l'organisation extrêmement complexe d'un être vivant.

Un champ physique continu peut être considéré comme une infinité de particules et son équation d'évolution locale comme la description d'une interaction élémentaire entre particules contiguës. Si cette équation est linéaire, comme dans le cas des ondes électromagnétiques, le champ s'exprime simplement comme superposition de solutions élémentaires. Cependant, dans les cas plus généraux d'équations fortement non linéaires, les structures obtenues peuvent être très complexes et variées, et sont très difficiles à prévoir à partir des équations d'évolution. Ce problème de compréhension des équations, évoqué par exemple par Feynman (1970), n'est pas limité à la turbulence hydrodynamique mais se rencontre dans d'autres théories de champ non linéaire, par

exemple pour décrire les interactions fortes entre nucléons. L'hydrodynamique des fluides incompressibles, dont les équations sont établies depuis plus de 150 ans, et qui bénéficie d'un support expérimental considérable est cependant un domaine privilégié. Elle donne lieu au phénomène de turbulence, observable directement par chaque être humain, et qui posent de nombreux problèmes à l'ingénieur.

Différentes définitions de la turbulence, qui ont pu faire l'objet de controverses, sont présentées dans des ouvrages élémentaires comme Hinze (1959), Monin et Yaglom (1971), Tennekes et Lumley (1972), Tritton (1977). Elles s'accordent en général sur les ingrédients suivants : comportement chaotique temporel associé à une certaine imprediscibilité, propriétés de diffusion très efficace, coexistence de différents ordres de grandeur d'échelles spatiales en interaction. Certaines de ces propriétés se retrouvent dans d'autres phénomènes physiques ou sur des modèles mathématiques, pour lesquels elles peuvent être étudiées isolément et donc beaucoup mieux comprises. Nous allons ainsi donner un bref aperçu sur les phénomènes de cascade, les fluctuations de type thermodynamique, le comportement chaotique des systèmes déterministes, les structures hydrodynamiques cohérentes.

b) Les phénomènes de cascade

Une propriété fondamentale de l'équation de Navier-Stokes est son invariance par dilation de l'espace lorsque les effets de viscosité sont négligeables, c'est-à-dire dans la limite des très grands nombres de Reynolds. Il existe cependant au moins une échelle fixée par les dimensions du domaine fluide, les conditions initiales ou une force motrice extérieure, et d'autre part une échelle limite beaucoup plus petite fixée par la viscosité. On peut alors supposer qu'il existe un domaine intermédiaire éloigné de ces deux extrêmes, pour lequel un comportement autosimilaire se produit. Les particularités de l'écoulement à grande échelle peuvent être éliminées grâce au schéma de la turbulence homogène isotrope (dont les propriétés statistiques sont indépendantes de la position et de l'orientation), qui peut être approchée expérimentalement en déplaçant une grille dans un fluide au repos (ou en envoyant le fluide à travers une grille fixe). L'hypothèse d'autosimilarité implique un spectre d'énergie en loi de puissance (voir par exemple Frisch, 1983). Si on suppose de plus qu'il existe une cascade d'énergie due à des transferts locaux dans l'espace des nombre d'onde à un taux constant ε , on obtient les fameux spectres d'énergie de Kolmogorov $\varepsilon^{2/3} K^{-5/3}$, qui sont bien vérifiés expérimentalement.

c) Le point de vue statistique :

L'idée qui a guidé de nombreux travaux sur la turbulence consiste à considérer l'écoulement comme formé d'un très grand nombre de particules fluides ($\sim Re^{9/4}$) en interaction, et qu'un comportement aléatoire doit en résulter. Une analogie est donc faite avec les fluctuations thermodynamiques (voir Landau et Lifchitz, 1971). On définit ainsi une viscosité turbulente $\nu_t = l u'$ due aux fluctuations de vitesse, où l et u' sont des échelles caractéristiques de longueur et de vitesse des structures turbulentes, de la même façon que la viscosité du fluide est obtenue à partir des échelles moléculaires par la théorie cinétique des gaz. Cette idée est à la base de toutes les modélisations de la turbulence utilisées dans des applications pratiques. Les valeurs de l et u' sont obtenues par des méthodes empiriques qui diffèrent selon les écoulements et par ajustement avec l'expérience. Le but recherché est de prévoir le champ de vitesse moyenne et les propriétés de dispersion de contaminants. Outre qu'elles ne permettent pas de répondre à un certain nombre de questions, par exemple sur les possibilités de fluctuations de grande amplitude, les prédictions ne sont pas du tout fiables. Les défauts de principe de ces méthodes sont bien connus. Ils résultent essentiellement de l'absence de séparation entre échelles de la turbulence et de l'écoulement moyen, ce qui interdit l'utilisation de la théorie de la marche au hasard. Les particules fluides ne sont pas indépendantes mais forment un ensemble hiérarchisé de structures hydrodynamiques. La notion de viscosité turbulente est aussi utilisée pour modéliser l'effet des échelles sous maille dans les simulations numériques des grandes structures. Ce type de modélisation conduira à des résultats pratiques très utiles grâce au progrès des calculateurs. On est cependant encore très loin des résolutions requises pour beaucoup de situations. Par ailleurs, ceci ne dispense pas d'une analyse théorique pour comprendre et dominer les résultats numériques, et pour traiter les cas asymptotiques, comme celui du comportement aux petites échelles spatiales, ou celui des longues durées.

Une catégorie de théories statistiques plus sophistiquées a été développée pour la turbulence homogène isotrope, et peut s'obtenir à partir de deux points de vue physiques différents qui conduisent aux mêmes résultats. La version des modèles stochastiques consiste à remplacer les interactions hydrodynamiques d'un mode de Fourier avec les autres modes par un couplage aléatoire (par exemple Herring et Kraichnan, 1972). Le point de vue des

fermetures à deux points consiste à supposer que les moments d'ordre 4 du champ de vitesse sont proches de ceux d'une distribution gaussienne (voir par exemple Sulem et al., 1975). On peut alors obtenir une équation d'évolution pour le spectre d'énergie en moyennant l'équation de Navier-Stokes. Une distribution de probabilité strictement gaussienne correspondrait à une situation d'équilibre statistique au sens de la thermodynamique, qui ne peut pas être réalisée à cause des processus de cascade. L'hypothèse consiste en un quasi-équilibre statistique local dans l'espace de Fourier, tel que les fluctuations d'amplitude d'un nombre d'ondes sont rapides par rapport au temps d'évolution du spectre. La version la plus complète de ces théories, le "test field model" de Kraichnan, ne nécessite qu'une seule constante arbitraire, calée sur les résultats expérimentaux. L'accord avec des simulations numériques directes à faible nombre de Reynolds et avec les expériences est alors assez satisfaisant. Il existe là encore des questions auxquelles ce type de théories ne peut pas répondre, par exemple en ce qui concerne les moments d'ordre élevés des distributions de probabilité ou l'existence de structures hydrodynamiques particulières. En effet des champs de vitesse organisés en structures cohérentes peuvent avoir le même spectre d'énergie qu'un champ obtenu par un processus purement aléatoire (mais évoluer ultérieurement de façon a priori très différente).

L'extension de ces théories à des situations qui ne sont pas homogènes isotropes se heurte à de très sérieuses difficultés, du fait de la complexité des calculs. La résolution numérique des équations obtenues devient aussi difficile que celle de l'équation de Navier-Stokes. On peut d'autre part se demander si le rôle important joué par les structures cohérentes dans la dynamique d'écoulements comme les couches de mélange ou la convection de Rayleigh Benard n'est pas un obstacle de principe à ces théories statistiques. Un travail récent de Dannevik (1984) et Herring (1984) montre les bons résultats donnés par une théorie statistique (DIA) en présence de rouleaux convectifs organisés. Cependant ces théories sont mises en échec en turbulence 2D en présence de tourbillons isolés (voir plus loin).

d) Le comportement chaotique déterministe :

Le caractère aléatoire de la turbulence a longtemps été associé à l'existence de particules fluides en si grand nombre que leur mouvement ne peut être décrit que de façon statistique. Bien que cette idée soit sans doute vraie pour beaucoup d'écoulements à nombre de Reynolds élevé, le comportement chaotique peut être obtenu avec des systèmes beaucoup plus simples, décrits par des équations d'évolution déterministes (c'est-à-dire que toute l'évolution ultérieure est fixée en principe par l'état initial). Il suffit en fait que le système soit décrit par trois variables dynamiques pour pouvoir a priori donner lieu à des comportements chaotiques, sauf contrainte particulière. Le paradoxe entre caractère déterministe et chaotique n'est qu'apparent. La propriété importante est qu'une erreur infinitésimale sur la condition initiale a tendance à croître exponentiellement avec le temps : c'est une instabilité permanente. Ainsi le temps de prédiscibilité, après lequel on ne peut plus faire de prévision déterministe, croît seulement comme le logarithme de l'erreur sur les données initiales, et reste donc toujours très limité. Ce comportement chaotique des systèmes déterministes était déjà connu par Poincaré au début du siècle, mais s'est beaucoup popularisé récemment grâce aux simulations sur ordinateurs qui permettent de visualiser leur évolution de façon spectaculaire. On rencontre ainsi de tels systèmes dans des domaines très variés en physique, chimie, biologie... (voir par exemple Bergé et al., 1984).

La différence de comportement par rapport aux fluctuations de type thermodynamique se manifeste en pratique de plusieurs façons. Tout d'abord le système est déterministe pour les durées assez courtes, c'est-à-dire que les variables dynamiques à l'instant $t + \tau$ sont une fonction donnée de celles de l'instant t . D'autre part, les systèmes dissipatifs (qui ne conservent pas l'énergie) qui nous intéressent en mécanique des fluides restent confinés sur un domaine très restreint de l'ensemble des variables dynamiques possibles (espace des phases) après un régime transitoire éventuel. Ce domaine, appelé attracteur, qui est réduit à un point pour un état stationnaire, possède une structure géométrique extrêmement complexe dans les régimes chaotiques. Un système dont le comportement irrégulier provient d'un bruit aléatoire extérieur couvre quant à lui la totalité de l'espace des phases accessible .

Un champ de vitesse correspond d'un point de vue mathématique à un système dynamique à nombre infini de variables. Ce nombre peut être réduit à une quantité finie ($\sim Re^{9/4}$) en considérant l'effet de rigidité apporté par la viscosité aux petites échelles. Il reste cependant très élevé à grand Re , et les résultats obtenus sur les systèmes dynamiques perdent alors de l'intérêt. Par contre des prédictions intéressantes ont été obtenues dans le cas très restrictif de la transition à la turbulence d'écoulement confinés dans une petite boîte, dont l'exemple standard est la convection de Rayleigh Bénard. On peut alors classifier les scénarios de transition à la turbulence à partir de résultats généraux sur les bifurcations dans les systèmes dynamiques (par exemple Libchaber, 1984). Le fait de se ramener à un petit nombre de variables se comprend intuitivement par l'effet de rigidité apporté par la viscosité. La restriction du système à une variété de faible dimension dans l'espace des phases près du seuil d'instabilité peut aussi se justifier mathématiquement par le théorème des variétés stables et instables (voir Lanford, 1981). On ne sait pas cependant trouver les modes et leur équation d'évolution, et on ne peut donc pas prévoir a priori le comportement près de la transition, sans une simulation numérique complète. D'autre part, ces méthodes n'ont pas apporté de résultats pour les systèmes étendus (par exemple convection en grande boîte) et a fortiori à nombre de Reynolds élevé.

e) Les structures cohérentes

Les idées générales rappelées ci-dessus ne doivent pas faire oublier que les mouvements turbulents sont des cas particuliers (ou plutôt généraux) d'écoulements hydrodynamiques. Ils présentent des structures spatiales à grandes échelles dépendant de la géométrie particulière étudiée. Ces structures peuvent éventuellement être détruites par interaction avec le champ turbulent. Malgré cela, elles jouent parfois un rôle prépondérant dans la dynamique générale de l'écoulement turbulent, comme c'est le cas par exemple dans les couches de mélange (Ho et Huerre, 1984). On peut alors interpréter certains aspects de l'écoulement par des schémas hydrodynamiques des structures organisées (Lin et Corcos, 1984). Ces modèles peuvent être des solutions analytiques des équations de Navier Stokes ou provenir de la théorie de la stabilité hydrodynamique. L'existence de

structures organisées n'a jamais été observée à des petites échelles, située dans la cascade d'énergie ; ceci pourrait éventuellement provenir de la difficulté que représente leur détection au sein du bruit turbulent. Cependant de telles structures ont été récemment obtenues dans des simulations numériques de turbulence 2-D (voir plus loin).

f) Comment concilier les différents points de vue

Ces quatre aspects de la turbulence sont plus ou moins importants selon les types d'écoulement, et selon les auteurs qui les étudient. Le point de vue purement statistique a été le 1er développé, avec notamment les fermetures à deux points dans les années 60. L'importance des structures cohérentes est apparue plus tardivement vers les années 70. Une théorie complète ne devrait pas faire de statistique a priori, mais seulement sur des structures hydrodynamiques clairement identifiées.

Les répercussions des nouvelles connaissances sur le chaos déterministe se sont pour le moment limitées aux problèmes de transition à la turbulence. Il faut ici distinguer les écoulements confinés dans un domaine limité, et les écoulements ouverts (couches de mélange, jets) ou semi-ouverts (couches limites). Dans ces 2 derniers cas les trajectoires dans l'espace des phases ne sont pas récurrentes et le formalisme habituel des systèmes dynamiques ne s'applique pas. Dans le 1er cas, les effets stabilisants dus à l'action aléatoire de type viscosité turbulente des petites échelles peut favoriser un comportement régulier, ou même stationnaire des grandes structures. Lorsque les grandes échelles sont bidimensionnelles, un effet stabilisant peut être également dû à l'advection (voir plus loin). Un comportement stable des grandes échelles se traduit par la possibilité de définir assez clairement un écoulement moyen superposé à des fluctuations turbulents à plus petite échelle. L'étude de l'évolution à longues périodes de temps d'écoulements confinés devrait permettre de mettre en évidence des comportements intrinsèquement chaotiques des grandes échelles, mais ceci ne semble pas avoir été fait.

2. LA TURBULENCE BIDIMENSIONNELLE (2-D)

a) Existence

Le fait de se restreindre à un espace de dimension 2 paraît à première vue une simplification intéressante par rapport au cas général 3-D. Les simulations numériques directes de l'équation de Navier-Stokes peuvent ainsi être réalisées avec une résolution bien meilleure et les résultats visualisés plus facilement. On peut d'autre part envisager des méthodes expérimentales donnant accès à la structure instantanée du champ de vitesse par exemple par traitement d'images, ce qui restera sans doute longtemps utopique à 3-D.

Cependant l'existence même de la turbulence 2-D a été parfois contestée. En effet tout écoulement à très grand nombre de Reynolds est en général instable et développe des fluctuations turbulentes 3-D. Ceci est vrai en particulier des écoulements 2-D, et il faut appliquer une contrainte particulière pour les maintenir tels, dont nous verrons des exemples plus loin. D'autre part, certains écoulements maintenus 2-D restent parfaitement laminaires, même à très grand nombre de Reynolds. On peut ainsi citer des exemples de structures tourbillonnaires isolées, tourbillons circulaires ou couples de tourbillons décrits par Batchelor (1967) p. 533. Il existe cependant des écoulements 2-D qui deviennent spontanément turbulents, comme le réseau de tourbillons étudié au Chapitre 6, sans qu'il soit nécessaire d'appliquer une force extérieure aléatoire. D'autre part, lorsque l'écoulement 2-D est spontanément chaotique, il ne possède pas la propriété de cascade d'énergie vers les petites échelles, qui est interdite à 2-D. Cette propriété étant considérée comme essentielle en turbulence ordinaire, les mécaniciens des fluides ont parfois tendance à refuser le label de "turbulence" au cas 2-D. Cependant d'autres phénomènes de cascade, décrits ci-dessous, y existent aussi. Par ailleurs, un modèle 2-D peut constituer une approche intéressante pour l'étude des grandes échelles et de l'aspect organisé de la turbulence ordinaire. Cette idée semble en particulier s'appliquer au cas des couches de mélange, où la persistance et l'appariement des structures cohérentes, qui conditionne les propriétés de transport, semble bien se comprendre par le point de vue de la turbulence 2-D (Staquet et al. 1985), mais d'autres exemples existent sans doute.

Dans certaines circonstances particulières, la turbulence est maintenue 2D avec une plus ou moins bonne approximation par une force extérieure stabilisante ou par des conditions aux limites. Le cas qui a suscité le plus de recherches est celui des mouvements atmosphériques à grande échelle, rendus 2-D (sur une sphère) par les effets conjugués de la faible épaisseur, de la stratification en densité et de la force de Coriolis. Les équations de Navier Stokes 2D doivent alors être généralisées pour constituer l'approximation quasi géostrophique (voir Mc Williams, 1983). Les notions de turbulence 2-D ne peuvent alors s'appliquer qu'aux méso-échelles, les petites structures (par exemple les mouvements dans les cumulus) étant 3D, et les très grandes se comportant comme une superposition d'ondes de Rossby, dues à la variation de la force de Coriolis avec la latitude (effet β). Ces idées sont également applicables aux océans. Au niveau du laboratoire, des écoulements 2-D peuvent être obtenus dans des films d'hélium superfluide, (Kraichnan, Montgomery, 1980) dans des films minces d'eau savonneuse (Couder, 1984), dans un récipient en rotation rapide (Colin de Verdière, 1980), en fluide stratifié en densité ou dans un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique uniforme. Le cas des métaux liquides est développé dans cette thèse. Dans les plasmas dilués, les ions sont animés d'un mouvement circulaire peu affecté par les collisions atomiques, dû à l'action du champ magnétique. L'équation du mouvement est alors une équation d'Euler à deux dimensions, où la fonction courant est remplacée par le potentiel électrique et la vorticité par la densité de charge (Kraichnan et Montgomery, 1980).

b) Equations et grandeurs conservées :

Nous nous intéressons à un champ de vitesse incompressible $v(x,y)$ satisfaisant à l'équation de Navier-Stokes à 2D.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = - \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{v}/t_H + f(x,y,t) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

Le terme $-\vec{v}/t_H$ correspond à un frottement linéaire, qui apparaît par exemple dans les expériences M.H.D. étudiées dans la suite, ou dans les expériences de fluides tournants. Le terme $f(x,y,t)$ correspond à une force extérieure imposée permettant de mettre en mouvement le fluide, souvent introduite à

des fins théoriques mais correspondant à une réalité physique dans les expériences présentées plus loin. Il est utile de s'affranchir de la condition d'incompressibilité en définissant la fonction courant ψ par :

$$(2) \quad \begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

et de définir la vorticité (qui n'a qu'une composante selon z)

$$(3) \quad \omega = (\text{rot } \vec{v})_z = -\nabla^2 \psi$$

L'énergie totale $E = \iint v^2 dS$ est conservée par les termes non linéaires comme à trois dimensions. Une particularité essentielle de la turbulence 2D est que la vorticité d'une particule fluide est conservée en suivant son mouvement, en l'absence de dissipation, (c'est-à-dire que $(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla})\omega = 0$). Cette propriété n'existe pas en turbulence 3-D, où la vorticité a tendance à croître sous l'effet de l'étirement des lignes d'isovorticit  convectées aléatoirement par l'écoulement. Comme conséquence, toute grandeur de la forme $\iint f(\omega) dS$ est conservée par les termes non linéaires, en particulier :

$$\text{La vorticité totale } \Omega = \iint \omega dS$$

$$\text{L'ensrophie } D = \iint \omega^2 dS$$

Notons que l'équation d'Euler (obtenue pour $v = 0$) possède une solution régulière pour tous les temps (Rose et Sulem, 1978), et conserve donc ces grandeurs. On a de fortes pr sompions (Morf et al., 1983), que l'équation d'Euler   3D possède quant à elle des singularités au bout d'un temps fini, qui correspondrait à une explosion de l'ensrophie et à un début de dissipation de l'énergie totale dans les singularités.

Un système dynamique dépendant d'un nombre fini de variables n a un comportement simple (non chaotique) lorsqu'au moins $n - 2$ grandeurs indépendantes sont conservées par les termes non linéaires. Un champ de vitesse à 2-D est défini par un nombre infini de variables et un nombre

également infini de grandeurs, obtenues pour différentes fonctions $f(\omega)$ sont conservées. On ne peut rien en déduire rigoureusement, mais on peut ainsi s'attendre à ce que certains écoulements 2-D restent réguliers et stables à très grand nombre de Reynolds.

c) Schémas standards de la turbulence homogène isotrope

On distingue la turbulence entretenue dans un état statistiquement stationnaire par une force aléatoire injectant l'énergie à une échelle donnée K_I^{-1} , et la turbulence évoluant librement à partir d'un état initial aléatoire. Le premier cas est approché dans les expériences du Chapitre VI (bien que la force y soit stationnaire), tandis que le deuxième cas est représenté par la turbulence de grille décrite au Chapitre III.

i) Turbulence entretenue

Une éventuelle cascade directe d'énergie vers les petites échelles est interdite par la conservation de l'ensrophie. En effet le spectre d'ensrophie $D(k)$ est lié au spectre d'énergie $E(k)$ par la relation $D(k) = k^2 E(k)$, et un transfert d'énergie vers les grands nombres d'onde k s'accompagnerait d'une croissance de l'ensrophie proportionnelle à k^2 , ce qui est impossible. Plus précisément, un transfert, même faible, d'énergie vers les grands nombres d'onde, doit s'accompagner d'un transfert inverse d'énergie beaucoup plus important vers les petits nombres d'onde, afin que l'ensrophie totale $\int_0^\infty D(k)$ ne croisse pas. L'énergie injectée au nombre d'onde k_I ne peut alors que produire une cascade vers les grandes échelles. L'ensrophie injectée, quant à elle cascade vers les petites échelles. Des raisonnements dimensionnels analogues à ceux de Kolmogoroff (1941), appuyés par les résultats des modèles statistiques, conduisent alors à un schéma classique représenté sur la Fig. 1, tirée de Lesieur (1983).

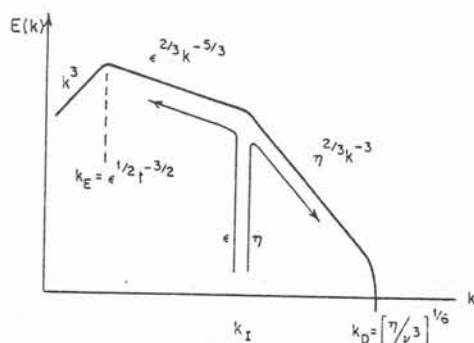


Fig. 1 : Spectre d'énergie schématique d'une turbulence 2D entretenue où l'énergie et l'ensrophie sont injectées à un nombre d'onde K_I aux taux ϵ et η .

ii) Turbulence en évolution libre

Des raisonnements dimensionnels dus à Batchelor (1969) permettent de prévoir des lois d'évolution autosimilaire pour le spectre d'énergie conduisant au schéma de la Fig. 2.

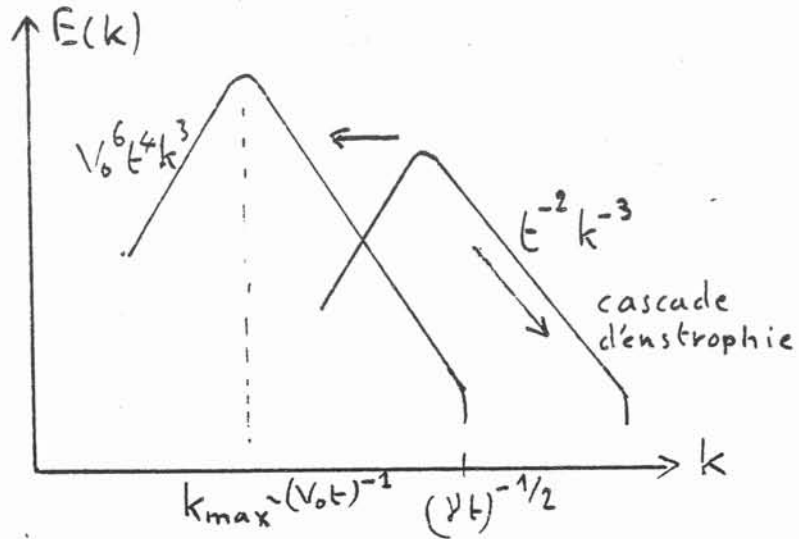


Fig. 2 : Evolution d'une Turbulence 2D

La cascade d'entrophie existe encore mais la cascade inverse d'énergie est ici remplacée par un transfert vers les grandes échelles du maximum du spectre K_{\max} . Les différentes grandeurs caractéristiques évoluent de la façon suivante en fonction du temps t

$$E \sim \text{cte}$$

$$D \sim t^{-2}$$

$$K_{\max} \sim t^{-1}$$

d) Mécanismes des processus de cascade

La justification des processus de cascade a été faite à partir des lois de conservation, mais on peut aussi en avoir une vision plus concrète par des mécanismes physiques.

i) Advection d'un contaminant :

Une tache de contaminant convectée passivement par l'écoulement turbulent (par exemple un colorant ou la température) a tendance à subir une déformation complexe faisant apparaître des structures de plus en plus fines. Notons bien que les échelles obtenues peuvent devenir beaucoup plus petites que les plus petites structures de l'écoulement. Ainsi un cisaillement uniforme représenté sur la Fig. 3 fait croître exponentiellement le nombre d'onde d'une distribution sinusoïdale de contaminant selon la direction de contraction. Simultanément la composante transverse du nombre d'onde décroît exponentiellement. Le traitement

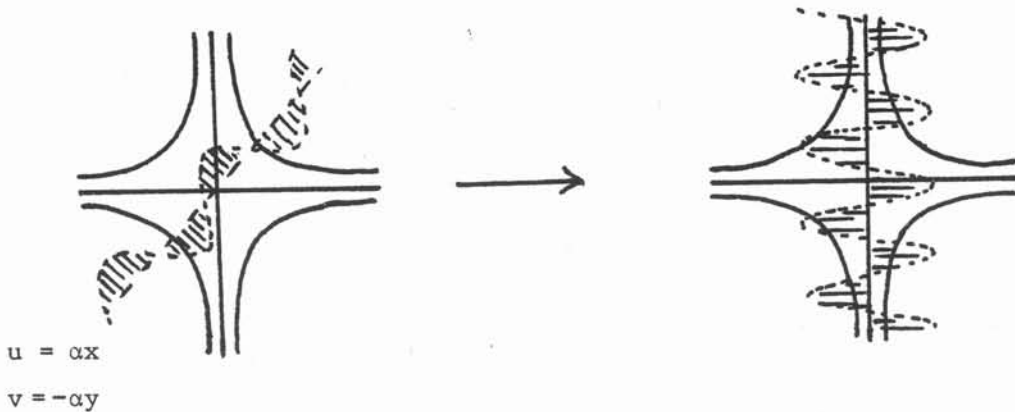


Fig. 3 : Contraction et étirement d'une distribution de contaminant par un cisaillement uniforme.

statistique d'un tel processus conduit à des spectres de contaminant en k^{-1} , (Leslie 1973 p. 167) en l'absence de diffusion moléculaire. Le cisaillement uniforme correspondant à une échelle de mouvement infinie, ce mécanisme représente l'effet de grandes échelles de vitesse sur une échelle de contaminant beaucoup plus petite, ce qu'on appelle une interaction non locale.

Cette approximation est valable lorsque le cisaillement local $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ provient surtout des grandes échelles. La contribution d'une échelle donnée étant proportionnelle à l'intégrale du spectre de cisaillement $k^2 E(k)$ autour du vecteur d'onde correspondant, elle est de l'ordre de $k^3 E(k)$ et les transferts non locaux deviennent prépondérants pour un spectre $E(k)$ décroissant au moins en k^{-3} .

La vorticité est advectée de la même façon qu'un contaminant (  2-D) ; on peut ainsi comprendre l'existence d'une cascade d'entrophie avec spectre d'énergie en k^{-3} (correspondant à un spectre d'entrophie en k^{-1}). Cependant, la vorticité étant reliée au champ de vitesse, elle n'est pas un contaminant passif et l'analogie n'a pas valeur de démonstration.

ii) Le mécanisme d'appariement :

Une paire de tourbillons ponctuels de même signe possède un mouvement de rotation uniforme. Si ceux-ci sont étendus, ils subissent de plus une déformation par effet de "marée", qui conduit à un appariement lorsqu'ils sont suffisamment rapprochés. Cet effet régit notamment la croissance de la couche de mélange (Winant et Browand, 1974). Il est observé expérimentalement au Chapitre V et c'est certainement un processus important de la cascade inverse d'énergie.



Fig. 4 : Appariement de deux tourbillons. L'échelle du mouvement double alors que les lignes d'isovorticit  sont étirées, ce qui contribue à la cascade d'entrophie.

e) L'apport des simulations numériques

i) Cascade d'enstrophie :

Le développement récent des supercalculateurs a permis de réaliser des simulations numériques des équations de Navier Stokes 2-D à haute résolution (256^2 ou 1024^2 avec symétries). Si l'existence de transferts d'enstrophie vers les petites échelles a été vérifiée, la pente du spectre d'énergie correspondant diffère selon les cas. Pour une turbulence évoluant librement, à partir d'une condition initiale aléatoire dont le spectre est centré autour de K_T , on peut distinguer trois phases successives. Tout d'abord les lignes d'isovorticité sont étirées entre les tourbillons sous l'effet du cisaillement, ce qui conduit à des quasi-discontinuités de vorticité. Un comportement semblable est obtenu au Chapitre V sur les parois. Ce type de comportement, envisagé par Saffman (1971) conduit à des spectres en k^{-4} . Ensuite ces lignes deviennent de plus en plus tourmentées et aboutit à une cascade d'enstrophie avec un spectre en k^{-3} . (Brachet et al., 1985). La forme en feuillettes des structures de vorticité obtenues dans ce régime reste encore à élucider. D'autre part les résultats obtenus demandent à être confirmés à des résolutions encore plus hautes, pour s'approcher des conditions asymptotiques des très grands nombres de Reynolds. Au bout d'un temps plus long il apparaît des tourbillons circulaires stables émergeant au milieu d'un champ de vorticité soumis à la cascade d'enstrophie (Basdevant et al., 1981, Mc Williams, 1984). Les tourbillons isolés de même signe ont tendance à s'apparier au hasard de leur rencontre et perdent alors une partie de leur enstrophie. Cependant l'enstrophie est dissipée plus rapidement par cascade dans le fluide ambiant et les tourbillons prennent de plus en plus d'importance au cours du temps. Cette importance dépend d'autre part des conditions initiales et l'universalité des petites échelles est ainsi mise en défaut. Les spectres d'énergie correspondants sont en k^{-4} ou même plus raides. L'influence des tourbillons isolés peut être mesurée par le kurtosis $\langle \omega^4 \rangle / \langle \omega^2 \rangle^2$ de la distribution de vorticité. Celui-ci, qui est initialement égal à 3, correspondant à une distribution gaussienne, prend des valeurs de plus en plus grandes au cours du temps. Les méthodes de fermeture à 2 points, qui supposent précisément une distribution quasi-gaussienne, sont alors mises en défaut (Herring et Mc Williams, 1985). Une description statistique correcte devrait prendre en compte l'existence d'un "gaz" de tourbillons isolés. Il est intéressant de remarquer qu'un contaminant passif

(décorrélé du champ de vorticité) présente une distribution qui reste gaussienne avec des spectres en k^{-1} , bien prédits par des théories statistiques (Basdevant et al. 1984).

ii) Cascade inverse d'énergie :

L'étude numérique de la cascade inverse nécessite de très hautes résolutions car il faut à la fois en décrire les différentes échelles et représenter correctement la cascade d'entrophie. Il faut de plus que les plus grandes échelles soient nettement plus petites que le domaine de calcul pour ne pas en être influencées. Malgré ces restrictions, une zone de spectre d'énergie en $k^{-5/3}$ est effectivement observée par Frisch et Sulem, 1984 et Herring et Mc Williams, 1985. La constante de Kolmogoroff associée (voir Chapitre VI) est comprise entre 5 et 10, tandis qu'elle est égale à 1,5 pour la cascade directe de la turbulence 3-D. Ceci signifie que les transferts inverses d'énergie à 2-D sont nettement moins efficaces que les transferts directs à 3-D.

L'évolution vers des échelles de plus en plus grandes de la turbulence non forcée a été vérifiée par Rhines (1975) qui trouve que le nombre d'onde moyen croît comme $\langle k \rangle^{-1} = 3 \cdot 10^{-2} V t$ où $\frac{1}{2} V^2$ est l'énergie totale (conservée pour $\nu \rightarrow 0$). Ceci signifie que la taille moyenne des structures doubles en 30 temps de retournement $1/U$, ce qui confirme que les transferts inverses ont une efficacité relativement faible.

La cascade inverse d'énergie est censée envahir des échelles toujours plus grandes au cours du temps (Fig. 1), sans qu'un état statistiquement stationnaire ne soit jamais obtenu (pour $\nu \rightarrow 0$). En pratique, elle est bloquée lorsqu'elle atteint la taille du domaine fluide : la turbulence n'est plus alors homogène isotrope, et un écoulement moyen peut même être engendré. Une étude détaillée de cet effet est présentée au Chapitre VI, mais il ne semble pas avoir suscité beaucoup d'intérêt jusqu'à présent. Ce blocage peut être évité par une force de frottement proportionnelle à la vitesse. L'énergie est alors dissipée progressivement au fur et à mesure qu'elle est transférée vers les grandes échelles, et le spectre d'énergie décroît rapidement (si on oriente l'axe vers les petits nombres d'onde) à partir d'un nombre d'onde d'autant plus petit que le frottement est faible. Un autre type de modification des grandes échelles important en géophysique

est l'effet β , dû à la variation de la force de Coriolis avec la latitude. Des ondes de Rossby existent alors et dominent la dynamique lorsque leur vitesse de propagation devient plus grande que les vitesses turbulentes, ce qui se produit pour des échelles supérieures à $k_{\beta}^{-1} = \sqrt{2U/\beta}$ (Rhines, 1975). Si la turbulence est forcée à plus petite échelle, les transferts inverses tendent alors à produire un écoulement en bandes zonales (dirigées selon les parallèles) d'épaisseur k_{β}^{-1} .

iii) Écoulements cisailés :

Les études numériques à haute résolution d'écoulement turbulents 2D dans des situations non homogènes isotropes sont comparativement assez rares. Des travaux sur les couches de mélange destinés à mieux connaître la dynamique des structures cohérentes ont été mentionnés plus haut. Citons également les études de sillages 2-D (numériques et expérimentales) par Basdevant et al., (1984), qui mettent en évidence une dynamique dominée par des couples de tourbillons de signes opposés. En règle générale, l'aspect cohérent est beaucoup plus marqué que lorsqu'on laisse se développer les perturbations 3-D. L'étude de cas 2D devrait ainsi permettre de révéler certaines structures cohérentes qu'on ne parvient pas à distinguer dans les écoulements turbulents ordinaires correspondants. D'autre part, la modélisation des effets de transport 2D, par une viscosité turbulente, même négative, est sans doute irréaliste.

f) Résultats expérimentaux

Les notions de turbulence 2-D permettent de comprendre certains aspects des écoulements atmosphériques à méso-échelle (voir Mc Williams, 1983). Les modes 2-D, appelés barotropes, sont alimentés par instabilité barocline due aux variations de température avec la latitude (Pedlovski, 1979). Les spectres d'énergie observés proches de k^{-3} sont une présomption pour une cascade d'entrophie. Il existe également des transferts inverses d'énergie, mais l'effet β et le frottement sur le sol sont trop importants pour qu'une cascade inverse soit réellement observée. La turbulence 2D joue sans doute un rôle important dans le maintien de la structure en bandes des mouvements de l'atmosphère de Jupiter.

Les expériences de turbulence en fluide tournant montrent une croissance de l'échelle intégrale associée à une faible dissipation d'énergie pour une turbulence évoluant librement (Colin et Verdière, 1980, Mory, 1984). Ces deux critères réunis sont caractéristiques d'une dynamique quasi 2-D. La valeur précise du taux de croissance dépend de la définition adoptée pour l'échelle intégrale, et celle-ci diffère selon les articles. Des résultats similaires sont obtenus dans un film de savon par Couder (1984) et dans un écoulement MHD par Kolesnikov et Tsinober (1974) et dans cette thèse (Voir Chapitre III). L'existence de spectres d'énergie en k^{-3} a été également mise en évidence dans ces expériences mais ceux-ci peuvent aussi être dus à des processus MHD 3-D (Voir Chapitre III).

La cascade inverse d'énergie n'est pas observée dans les expériences de Mory (1984) lorsque la turbulence est créée en permanence par une grille oscillante (production fortement 3D). La vorticité se concentre alors en tourbillons isolés très intenses, analogues aux tornades, (Hopfinger et al., 1982). Leur formation fait intervenir des processus de concentration de vorticité par des mouvements 3D et ces tourbillons semblent donc être très différents de ceux qui sont obtenus dans les simulations numériques 2D. D'autre part, des spectres d'énergie en $k^{-2,5}$, obtenus par des mesures au film chaud et à partir de diffusion de paire de traceurs lagrangiens, confirment que la dynamique est fortement influencée par les processus 3D. L'existence d'une cascade inverse d'énergie en $k^{-5/3}$ associée à une cascade d'entrophie avec spectre en k^{-3} ont été tirées de mesures de potentiel électrique faites dans la magnétosphère terrestre (Kelley et Kintner, 1978). Ce serait le phénomène naturel connu pour lequel les propriétés asymptotiques des 2 zones inertielles apparaissent le plus nettement. Les fluctuations correspondantes ne manifestent dans la structure des aurores boréales.

On voit donc que certaines caractéristiques fondamentales de la turbulence 2-D interviennent dans des phénomènes physiques très variés. Cependant l'influence des perturbations 3-D est souvent assez importante et dépend des cas étudiés. Beaucoup reste à faire dans la compréhension de ces effets. Une expérience assez "propre" comme celle présentée au Chapitre VI peut être un bon point de départ pour de telles études.

3. ELEMENTS DE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

a) L'effet dissipatif du champ magnétique

Les notions de M.H.D. utilisées dans cette thèse se rattachent à un domaine très limité de cette discipline. Nous supposons que le champ magnétique constant est créé par des bobinages extérieurs et n'est quasiment pas modifié par les courants induits dans l'écoulement. Ceci correspond au cas des très faibles nombres de Reynolds magnétiques $R_m = \mu_0 \sigma u l$ (σ est la conductivité, u et l des échelles caractéristiques de vitesse et dimensions), ce qui est la situation habituelle à l'échelle du laboratoire. D'un point de vue équivalent, le champ magnétique diffuse très rapidement, avant d'être convecté par l'écoulement, ou propagé sous forme d'ondes d'Alfvén (voir par exemple Schercliff 1965). Nous utilisons d'autre part la loi d'Ohm dans un repère lié au fluide (ce qui fait apparaître le champ électrique modifié $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ dans le repère du laboratoire). Puisque les variations de flux magnétique sont négligeables, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. L'équation de Navier Stokes doit être modifiée en ajoutant la force électromagnétique $\vec{j} \times \vec{B}/\rho$, ce qui conduit aux équations suivantes

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{\rho}$$

$$(5) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$(6) \quad \vec{j} = \sigma (-\nabla \phi + \vec{v} \times \vec{B})$$

Une propriété très importante est l'existence d'une dissipation d'énergie cinétique par effet joule, ce qui tend globalement à freiner les mouvements, de la même façon que dans un frein électromagnétique. On montre au Chapitre II que l'effet d'un champ magnétique fort peut être considéré comme une diffusion de la vitesse selon la direction du champ. On retrouve ainsi le caractère globalement dissipatif des effets électromagnétiques, bien que de l'énergie cinétique puisse être localement apportée par diffusion.

On peut déduire des équations 4 et 6 un temps caractéristique des effets électromagnétiques $\rho/\sigma B^2$ qui correspond à un champ de vitesse initial

quelconque. L'importance relative de ces effets est estimée en comparant ce temps caractéristique à celui de l'advection l/u et à celui de la viscosité l^2/ν . On obtient ainsi le paramètre d'interaction $N = \frac{\sigma B^2}{\rho} l/u$ dans le 1er cas, et le nombre de Hartmann $M = \left(\frac{\sigma B^2}{\rho} \cdot l^2/\nu\right)^{1/2}$ dans le 2ème. Nous nous intéresserons dans la suite aux situations où les effets électromagnétiques sont dominants, c'est-à-dire $M \gg 1$, $N \gg 1$. L'inertie du fluide est alors supprimée en général : le champ de vitesse résulte d'un équilibre entre force motrice (due à un gradient de pression, à un courant électrique...) et à la force électromagnétique. la viscosité a également son importance dans différents types de couches de faible épaisseur qui apparaissent nécessairement.

Dans cette situation asymptotique, l'équation (1) se réduit à

$$(7) \quad \vec{j} \times \vec{B} = \nabla P$$

et le problème est donc en général beaucoup plus simple que celui de mécanique des fluides ordinaires correspondant. Une solution analytique a même été obtenue pour un champ magnétique quelconque par Kulikovski (1968). \vec{j} , \vec{v} et ϕ s'expriment comme des intégrales calculées le long des lignes de champ magnétique. Les quantités intégrées s'expriment en fonction du champ magnétique et de quatre paramètres inconnus, dont la pression, constants le long des lignes de champ, mais pouvant varier, de façon éventuellement discontinue dans les directions transverses. Ces quatre quantités peuvent être obtenues pour chaque ligne de champ magnétique en utilisant les conditions électriques et mécaniques aux parois qu'elle intercepte. Il faut pour cela tenir compte de la présence de couches limites de Hartmann de très faible épaisseur de l'ordre de lM^{-1} près des parois qui coupent les lignes de champ. (Voir Chapitre IV). D'autre part les discontinuités électriques ou géométriques sur ces parois se prolongent, selon cette théorie asymptotique, le long de la ligne de champ magnétique qui en est émise. En fait ces discontinuités sont supprimées par la viscosité et remplacées par des couches parallèles d'épaisseur $lM^{-1/2}$, qui peuvent être de nature assez variée (voir Hunt et Shercliff, 1971). Ce sont aussi des régions où les effets d'inertie peuvent se manifester de façon privilégiée (Voir Chapitre IV).

Le cas usuel est que toute ligne de champ magnétique est interceptée par 2 parois qui limitent le fluide. Il existe également des situations où elles se rebouclent sur elles-mêmes, par exemple dans un tore. Si le champ magnétique ne possède aucune symétrie, la plupart des lignes de champ ne se referment jamais complètement et remplissent ainsi une région dense de l'espace. La théorie asymptotique précédente conduirait alors à un ensemble de discontinuités de structure très complexe, analogue aux sections de Poincaré de systèmes hamiltonien chaotiques (voir Helleman, 1980). Cette curiosité, qui ne semble jamais avoir été signalée, n'aurait de réalité que pour des nombres de Hartmann extrêmement grands, qu'on obtiendrait par exemple dans les circuits de refroidissement de sodium liquide des futurs réacteurs à fusion nucléaire.

b) Ecoulements inaffectés par le champ magnétique

Il existe des géométries particulières où les courants induits ne peuvent pas se reboucler et sont nuls. L'écoulement n'est alors pas influencé par le champ magnétique et les idées précédentes sont à revoir. La condition requise est qu'il existe une fonction $\phi(t)$ telle que

$$(8) \quad \vec{v}(t) \times \vec{B} = \nabla\phi(t)$$

le champ de vitesse $\vec{v}(t)$ satisfaisant l'équation de Navier-Stokes sans force extérieure.

Dans le cas particulier d'un champ magnétique uniforme, la condition (8) se réduit à

$$(9) \quad \begin{aligned} v_y B &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ -v_x B &= \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned}$$

en utilisant un système de coordonnées cartésiennes avec le champ magnétique selon z . Ces équations sont satisfaites pour tout champ de vitesse incompressible indépendant de la coordonnée z . Une composante selon z peut a priori exister bien qu'elle risque d'être incompatible avec les conditions aux limites.

Le potentiel ϕ est proportionnel à la fonction courant de l'écoulement, ce qui présente un grand intérêt expérimental exploité plus loin. L'absence de courant induit se comprend facilement à partir de la loi de l'induction. Considérons en effet une boucle fictive qui suit le fluide dans son mouvement en chaque point. Si l'écoulement est 2-D la surface intérieure à la boucle est constante ainsi que le flux magnétique. La force électromotrice induite est donc toujours nulle. Ceci ne serait plus du tout le cas si le fluide pouvait s'échapper de l'intérieur de la boucle par un écoulement 3-D. En pratique l'écoulement 2-D doit être limité par des parois perpendiculaires au champ magnétique. Si celles-ci sont conductrices les différences de potentiel créées dans le fluide produisent des courants électriques intenses qui amortissent l'écoulement en un temps $\sim \rho/\sigma B^2$. Si elles sont isolantes, les courants ne peuvent se refermer que dans la faible épaisseur des couches de Hartmann et le freinage se fait en un temps t_H beaucoup plus long calculé aux Chapitres II et IV par deux méthodes différentes.

Considérons maintenant le cas où les lignes de champ magnétique sont circulaires et suivent les courbes $r = \text{cte}$ dans un système de coordonnées cylindropolaires (r, θ, z) , la relation (8) s'écrit

$$(10) \quad -B(r) v_z = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$B(r) v_r = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

le champ de vitesse devant remplir la condition d'incompressibilité

$$(11) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) - \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

le 2ème terme s'exprime en fonction de $\phi(r, z)$ d'après (10), ce qui implique d'une part que v_θ est indépendant de θ , d'autre part que

$$(12) \quad \frac{d(rB^{-1}(r))}{dr} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

donc l'écoulement n'est pas affecté par les effets électromagnétiques seulement s'il est unidirectionnel selon z , et donc stationnaire, ou si $B(r) = \alpha r$. Dans ce dernier cas tout écoulement satisfaisant aux équations de Navier-Stokes en axisymétrie est solution. Le potentiel ϕ est alors proportionnel à la fonction courant ψ telle que

$$(13) \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Le champ magnétique considéré pourrait être obtenu dans un tube circulaire parcouru par un courant axial uniforme intense. La turbulence axisymétrique ne semble pas avoir fait l'objet d'études particulières. Elle présente une certaine analogie avec la turbulence 2D lorsque $V_\theta = 0$, puisque la quantité ω_θ/r est conservée de la même façon que la vorticité à 2D.

Remarquons que les résultats de ce paragraphe sont indépendants de l'hypothèse de faible nombre de Reynolds magnétique puisque de toute façon les courants induits et donc le champ magnétique induit est nul. D'autre part ils ne sont pas modifiés non plus si on tient compte de l'effet Hall en remplaçant la loi d'Ohm par

$$(14) \quad \vec{j} + K_H \vec{j} \times \vec{B} = \sigma(-\nabla\phi + \vec{v} \times \vec{B})$$

L'effet Hall est négligeable dans les métaux liquides mais peut devenir prédominant dans les plasmas dilués. Les ions ont alors un mouvement circulaire sous l'effet du champ magnétique, très peu affecté par les collisions atomiques (voir Ferraro et Plumpton, 1964) ; ce cas a été évoqué plus haut à propos de la magnétosphère terrestre. La partie rotationnelle de la force électromagnétique (qui ne peut pas être équilibrée par un gradient de pression) est proportionnelle alors à $\vec{v} \times \vec{B}$ et l'effet du champ est équivalent à une force de Coriolis, ce qui n'est pas étonnant puisque tous les ions sont en rotation.

c) Instabilités tridimensionnelles

Nous avons vu précédemment que les écoulements 2-D ne sont pas dissipés par le champ magnétique uniforme. On est donc amené à penser que ce type d'écoulement sera sélectionné, après dissipation rapide de toute perturbation 3-D, en champ fort. Le problème peut être abordé en posant deux types de questions :

i) Un écoulement turbulent initialement 2-D devient-il 3-D par suite de la croissance de petites perturbations ?

ii) Une turbulence initialement 3-D, par exemple homogène isotrope, devient-elle 2-D avant d'être complètement dissipée par effet joule.

Une réponse positive à la 2ème question implique certainement que la 1ère propriété est vérifiée mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Alemaný et al. (1979) ont montré par des arguments dimensionnels et des méthodes de fermeture à 2 points, que la turbulence homogène MHD doit avoir une dynamique particulière. La cascade d'énergie vers les petites échelles est remplacée par un équilibre quasi-stationnaire entre transferts angulaires d'énergie dans l'espace de Fourier et dissipation par effet joule. Ce mécanisme conduit à une décroissance autosimilaire du spectre d'énergie en $t^{-2}K^{-3}$, qui n'aboutit jamais à une situation 2-D. Ces idées ont été testées par des expériences de turbulence de grille dans ce même article et plus récemment par Caperan et Alemany (1985). Cependant il est montré au Chapitre II que ce mécanisme de transferts angulaires devait être inhibé lorsque l'écoulement est limité entre deux parois perpendiculaires au champ magnétique. On explique ainsi le comportement 2-D obtenu dans les conduites rectangulaires d'abord par les soviétiques puis ici (Chapitre III).

La 1ère question doit être abordée en écrivant l'équation d'évolution linéarisée pour une petite perturbation $\vec{U}(x,y,z,t)$ superposée à un écoulement de base 2-D $\vec{V}(x,y,t)$

$$(15) \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = - \nabla P / \rho + \vec{j} \times \vec{B} / \rho + \nu \nabla^2 \vec{U}$$

où \vec{j} est le courant associé à la petite perturbation. Dans cette approximation linéaire, l'effet d'advection se réduit à un problème purement 2-D. C'est-à-dire que la croissance d'une décorrélation entre différents plans correspond à l'imprédictibilité des écoulements 2-D, due à une petite erreur sur la condition initiale. Un ordre de grandeur des temps de croissance de ces perturbations est $1/U$. La détermination précise de ce temps correspondrait au plus grand coefficient de Lyapounov au sens des systèmes dynamiques. Si on considère que des échelles suffisamment grandes de l'écoulement, une source d'imprédictibilité provient aussi de l'influence aléatoire des plus petites échelles qui peuvent être complètement décorrélées. Cet effet, qui n'existe évidemment pas dans les systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté, conduit aussi à un temps de croissance de l'ordre de $1/U$. Ces effets déstabilisants dus au caractère chaotique des mouvements 2-D peuvent être compensés par le terme électromagnétique. La transformée de Fourier de celui-ci est égale à $-\frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{k_z^2}{k^2}$ (voir Chapitre II). On voit ainsi que l'effet stabilisant s'annule pour les faibles valeurs de k_z ce qui signifie que l'écoulement 2-D sera toujours instable dans un milieu illimité. Ceci n'est plus le cas si on impose une valeur minimale de k_z en limitant l'écoulement par des parois perpendiculaires au champ magnétique et on retrouve ainsi les ordres de grandeur du Chapitre II concernant une turbulence initialement 3-D. Cependant les coefficients précis pourraient très bien être différents dans les deux situations envisagées. Ceci signifierait qu'il est plus facile d'obtenir une turbulence 2-D lorsque la condition initiale ou la force motrice est déjà 2-D.

Cette discussion est limitée au cas des faibles nombres de Reynolds magnétiques. Si cette condition n'était pas vérifiée, les perturbations 3-D se traduiraient par la propagation d'ondes d'Alfvén le long des lignes de champ magnétique, mais cette situation n'a pas été envisagée ici.

d) Analogies avec les fluides en rotation

Il existe des analogies entre l'effet d'un champ magnétique et celui de la force de Coriolis qui apparait dans un référentiel en rotation à vitesse uniforme Ω . La correspondance est rigoureuse lorsque l'effet Hall est dominant comme il a été mentionné au paragraphe b, mais ce n'est pas le cas qui nous intéresse ici. L'importance de la force de Coriolis comparée à l'inertie et aux effets visqueux s'exprime par le nombre de Rossby $\varepsilon = U/2\Omega l$ et le nombre d'Ekman $E = \nu/2\Omega l^2$ qui sont l'équivalent de M^{-2} et N^{-1} respectivement. La tendance à obtenir des écoulements 2-D correspond au théorème de Proudman-Taylor qui s'obtient par le raisonnement du paragraphe c, la pression jouant le rôle du potentiel électrique. L'écoulement 2-D est limité par des couches d'Ekman d'épaisseur $\sim l E^{1/2}$ sur les parois transverses au vecteur rotation et par des couches d'épaisseur $l E^{1/4}$ sur les parois parallèles (Greenspan, 1968). De même que dans le cas MHD des couches parallèles peuvent également exister au sein du fluide, issues de discontinuités des parois. Il est intéressant de remarquer que la couche d'Ekman est généralement elle-même turbulente dans les expériences de turbulence en rotation alors qu'elle reste laminaire dans les expériences présentées dans cette thèse, pour des nombres de Reynolds équivalents. La production de vorticité par injection de courants électriques des Chapitres IV, V, VI, est analogue à l'effet de puits et sources de vitesse sur le fond du récipient, utilisé par exemple par Colin de Verdière (1979).

A côté de ces analogies concernant le comportement 2-D, l'action des perturbations 3-D est différente. Elle se traduit par la propagation d'ondes inertielles. Le problème de la stabilité d'un écoulement initialement 2D vis à vis des perturbations 3-D ressemble un peu au cas MHD, la dissipation par effet joule étant remplacée par une force de rappel élastique. De la même façon les vecteurs d'onde de composante k_z très petite sont peu stabilisés et doivent être supprimés en limitant l'écoulement par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation. Par contre, on ne voit pas de mécanisme simple qui puisse conduire à une turbulence 2-D à partir d'une situation initialement 3-D, puisque les fluctuations 3-D ne sont pas dissipées. Des simulations numériques directes faites par Roy et Dang (1984) avec conditions aux limites périodiques ne montrent pas d'évolution vers un   tat 2-D, tandis qu'une situation initialement quasi 2-D a tendance à

le rester. Notons qu'un comportement analogue semble exister en turbulence stratifiée (Métais , 1985) en présence d'ondes de gravité (sans rotation). La dissipation d'énergie des ondes au moment des réflexions sur les parois, phénomène qui n'existe pas avec des conditions aux limites périodiques, pourrait alors expliquer le caractère quasi 2-D des expériences de laboratoires. Il subsiste cependant des effets 3-D très différents (et sans doute nettement plus complexes) du cas MHD. Un exemple spectaculaire est l'apparition d'un écoulement moyen dans le repère tournant qu'on peut expliquer par la tendance à l'uniformisation du moment cinétique $r v$ par les mouvements turbulents dans un repère non tournant. Ce processus qui explique la rotation différentielle des planètes fluides et des étoiles est interdit dans un écoulement strictement 2-D. Un autre exemple d'effet propre à la rotation est l'apparition des tornades cycloniques où la vorticité est fortement concentrée (Hopfinger et al. 1982).

REFERENCES

- BASDEVANT C., LEGRAS B., SADOURNY R., BELAND M., 1981 : "A study of barotropic model flows : intermittency, waves and predictability", J. Atmos. Sci. Vol. 38, p. 2305
- BASDEVANT C., COUDER Y., SADOURNY R. : "Vortices and vortex-couples in two-dimensional turbulence" Atelier sur la turbulence" INRIA, Nice, Décembre 1984.
- BATCHELOR, G.K., 1967 : "An introduction to Fluid Mechanics" Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G.K., 1969 : "Computation of the energy spectrum in homogenous two-dimensional turbulence" Phys. Fluids Suppl. II, 12, p. 233
- BERGE P., POMEAU Y., VIDAL Ch., 1984 : "L'ordre dans le chaos" Editeur Hermann.
- BRACHET P.E., MENEGUZZI M., SULEM P.L. : "Numerical simulation of decaying two-dimensional turbulence" dans Macroscopic Modelling of Turbulent Flows, p. 347, Lecture Notes in Physics n° 230, Springer-Verlag
- BROWN G.L. & ROSHKO A.J., 1974 : "On density effects and large structures in mixing layers" J. Fluid Mech. Vol. 64, 4, p. 775.
- CAPERAN Ph. & ALEMANY A., 1985 : "Turbulence homogène MHD à faible nombre de Reynolds magnétique...", J.M.T.A., Vol. 4 n° 2, p. 175.
- COLIN DE VERDIERE A., 1979 : "Quasi geostrophic turbulence in a rotating homogeneous fluid" Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 15, p. 213.
- COUDER Y., 1984 : "Two-dimensional turbulence in a laboratory experiment" J. Phys. Lett., 45, p. 353.
- DANNEVIK, W.P. 1984 : "Two-point closure study of covariance budgets for turbulent Rayleigh Benard convection" Ph. D Thesis, St Louis University.
- FEYNMAN R., Cours de Physique électromagnétisme Tome 2
- FERRARO V.C.A. & PLUMPTON C., 1961 : "Magneto-Fluid Mechanics" Oxford University Press.
- FRISCH U., 1983 : "Turbulence and predictability of geophysical flows and climate dynamics" Varenna Summer School.
- FRISCH U. & SULEM P.L., 1984 : "Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence" Phys. Fluids, 27 (8), p. 1921.
- GREENSPAN, H.P., 1968 : "The theory of rotating fluids" Cambridge University Press.

- LIN S.J. & CORCOS C.M., 1984 : "The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow" J. Fluid Mech. Vol. 141, p. 139.
- Mc WILLIAMS J.C., 1983 : "On the relevance of two-dimensional turbulence to geophysical motions" J.M.T.A. N° Spécial p. 83.
- Mc WILLIAMS J.C., 1984 : "The emergence of isolated, coherent vortices in turbulent flow" J. Fluid Mech. 146, p. 21.
- METAIS O., 1985 : "Influence of stable stratification on three-dimensional isotropic turbulence" 5th Turbulent shear flow symposium, Cornell.
- MONIN A.S. & YAGLOM A.M., 1971 : "Statistical Fluid Mechanics" The MIT Press.
- MORF , ORZAG S.A., FRISCH U., 1982
- MORY M., 1984 : "Turbulence dans un fluide soumis à forte rotation" Thèse - GRENOBLE.
- PEDLOVSKI, J., 1979 : "Geophysical Fluid Dynamics" Springer-Verlag.
- PRIGOGINE I., 1980 : "Physique, Temps et Devenir", Masson
- RHINES P.B., 1975 : "Waves and turbulence on a beta-plane". J. Fluid Mech. Vol. 69, 3, p. 417.
- ROSE H.A. & SULEM P.L., 1978 : "Fully developed turbulence and statistical mechanics", J. Phys. Paris, Vol. 39, p. 441.
- ROY p. & DANG K., 1984 : "Numerical simulation of homogeneous turbulence submitted to strong rotation" 10th EGS Annual meeting, Louvain La Neuve, Belgique.
- SAFFMAN, p.G., 1971 : "On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number", Studies in Applied Math. Vol. L, n° 4, p. 377.
- SHERCLIFF J.A., 1965 : "A textbook of Magnetohydrodynamics" Pergamon Press.
- STAQUET C., METAIS O., LESIEUR M., 1985 : "Etude de la couche de mélange et de sa cohérence du point de vue de la turbulence bidimensionnelle" C.R. Acad. Sc., t 300, Série 2, n° 17, p. 833.
- SULEM P.L., LESIEUR M., FRISCH U., 1975 : "Le test Field Model interprété comme méthode de fermeture des équations de la turbulence". Ann. Geophys. t. 31, Fasc. 4, p. 487.
- TENNEKES H. & LUMLEY J.L., 1972, "A first course in turbulence" The MIT Press.
- TRITTON D.J., 1977 : "Physical Fluid Dynamics", Van Nostrand Reinhold.
- WINANT & BROWAND, 1974 : "Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing layer at moderate Reynolds number". J. Fluid Mech. Vol. 63, 2, p. 237.

- HELLEMAN R.H.G., 1980 : "Self-generated chaotic behavior in non-linear mechanics" Fundamental problems in statistical mechanics" Vol. 5, p. 165, North Holland.
- HERRING J.H., 1984 : "An introduction and overview of various theoretical approaches to turbulence" NASA workshop on theoretical approaches to turbulence, October 10-12.
- HERRING J.H. & KRAICHNAN R.H., 1972 : "Statistical models and turbulence" ed. M. Rosenblatt et C. Van Atta. Springer Verlag, p. 148.
- HERRING J.H. & Mc WILLIAMS J.C., 1984 : "Comparison of direct numerical simulation of two-dimensional turbulence with two-point closure : the effect of intermittency". J. Fluid Mech., 153, p. 229.
- HINZE, J.O., 1959 : "Turbulence" Mc Graw-Hill.
- HO C.M. & HUERRE P., 1984 : "Perturbed free shear layers" Ann. Rev. Fluid Mech., p. 365.
- HOPFINGER E.J., BROWAND F.K. & GAGNE Y., 1982 : "Turbulence and waves in a rotating tank". J. Fluid Mech., 125, p. 505.
- HUNT & SHERCLIFF, 1971 : "Magnetohydrodynamics at high Hartmann number" Ann. Review of Fluid Mech., p. 37.
- KELLEY M.C. & KINTNER P.M., 1978 : "Evidence for two-dimensional inertial turbulence in a cosmic-scale low- β plasma" The Astrophysical Journal, 220, p. 339.
- KOLESNIKOV, Y.B. & TSINOBER A.B., 1974 : "Experimental investigation of two-dimensional turbulence behind a grid" Izv. ANSSSR Mech. Zh. i Gaza Vol. 4, p. 146.
- KULIKOVSKII, A.C., 1968 : "Slow steady flows of a conducting fluid at large Hartmann numbers" Izv. AN. SSSR., Mekhanika Zhidkosti i Gaza, Vol. 3, n° 2, p. 3.
- KRAICHNAN R.H. & MONTGOMERY D., 1980 : "Two-dimensional turbulence" Reports on Progress in Physics, Vol. 43.
- LANDAU et LIFSCHITZ: "Hydrodynamique", Editions Mir.
- LANFORD O., 1981 : "Chaotic behaviour of deterministic systems" Cours de Physique Théorique, Les Houches, p. 3, North Holland
- LESIEUR M., 1983 : "Introduction à la turbulence bidimensionnelle" N° Spécial J.M.T.A., p. 5.
- LESLIE D.C., 1973 : "Developments in the theory of turbulence" Clarendon Press, Oxford.
- LIBCHABER A., 1984 : "From periodicity to chaos in hydrodynamic systems" Congrès I.U.T.A.M. de Lyngby, p. 233, North Holland

C H A P I T R E I I

DANS QUELLES CONDITIONS LA TURBULENCE
M.H.D. DEVIENT-ELLE BIDIMENSIONNELLE ?

Article publié au J. Fluid Mech.

Why, how, and when, MHD turbulence becomes two-dimensional

By JOËL SOMMERIA AND RENÉ MOREAU

Institut de Mécanique, Université de Grenoble, B.P. 53X, 38041 Grenoble Cedex, France

(Received 18 May 1981 and in revised form 25 October 1981)

A description of MHD turbulence at low magnetic Reynolds number and large interaction parameter is proposed, in which attention is focussed on the role of insulating walls perpendicular to a uniform applied magnetic field. The flow is divided in two regions: the thin Hartmann layers near the walls, and the bulk of the flow. In the latter region, a kind of electromagnetic diffusion along the magnetic field lines (a degenerate form of Alfvén waves) is displayed, which elongates the turbulent eddies in the field direction, but is not sufficient to generate a two-dimensional dynamics. However the normal derivative of velocity must be zero (to leading order) at the boundaries of the bulk region (as at a free surface), so that when the length scale l_{\perp} perpendicular to the magnetic field is large enough, the corresponding eddies are necessarily two-dimensional. Furthermore, if l_{\perp} is not larger than a second limit, the Hartmann braking effect is negligible and the dynamics of these eddies is described by the ordinary Navier-Stokes equations without electromagnetic forces. MHD then appears to offer a means of achieving experiments on two-dimensional turbulence, and of deducing velocity and vorticity from measurements of electric field.

1. Introduction

There is increasing interest in the study of two-dimensional turbulence. Indeed, it is thought to provide a good schema for large scale motions of geophysical fluids, and perhaps for coherent structures recently observed in mixing layers. Contradictory predictions have been made about the rather singular properties of two-dimensional homogeneous and isotropic turbulence, and direct numerical simulations are not sufficiently reliable to decide between them. It is therefore clear that laboratory observations are of crucial interest. But any attempt is confronted with the necessity of inhibiting the natural instability of two-dimensional structures which quickly spread out into three dimensions.

Body forces such as Coriolis forces in rotating fluids and electromagnetic forces in liquid metals moving under the influence of a uniform magnetic field have been recognized as good candidates for many years (Lehnert 1955). Indeed, both are strictly balanced by pressure gradients in any two dimensional flow (in a plane perpendicular to the magnetic field or the rotation vector) and have some stabilizing effect on three-dimensional instabilities. However, the Coriolis forces do not change the total energy but transfer it by inertial waves while the electromagnetic forces are purely dissipative in laboratory conditions where the magnetic Reynolds number is very small. So the effect of electromagnetic forces on the three-dimensional perturbations is easier to deal with. While two-dimensional turbulence is effectively observed in

rotating tanks of small depth (Colin de Verdiere 1980) important three-dimensional perturbations arise in deeper tanks (Hopfinger & Browand 1982). A similar behaviour occurs for turbulent flows in a strong uniform magnetic field, as becomes apparent from examining the two kinds of experiments which have been performed during the last ten years:

(a) In rectangular insulating duct flows placed in a strong enough transverse magnetic field, numerous characteristics of two-dimensional turbulence have been observed. The source of turbulence does not seem to have a preponderant influence; whether this is the M -profile instability, or the wake instability behind a grid or behind an array of cylinders parallel to the magnetic field, results such as summarized by Branover (1978) or by Lielausis (1975), seem to be quite general and show that

(i) Velocity correlations along the magnetic field direction are very good over the whole channel width (Votsish & Kolesnikov 1976);

(ii) The velocity component parallel to the magnetic field is much smaller than the other ones, as indirectly shown by turbulent diffusion of a contaminant (Kolesnikov & Tsinober 1974, Sommeria 1980);

(iii) The energy decay is very slow while the integral scale of the turbulence grows rather fast (for example Votsish & Kolesnikov 1976).

(b) On the other hand, in experiments reported by Alemany *et al.* (1979) where turbulence is studied behind a grid moving in an axial magnetic field (produced in a solenoid) the dynamics was shown to be quite different:

(i) The integral length scales in the field direction increases rather slowly when the field is increased; the increase of the perpendicular length scales seems limited by the square root of the interaction parameter;

(ii) The three velocity components are of the same order of magnitude;

(iii) Most noticeably, the energy decay is very fast, much faster than without magnetic field in the same facility ($t^{-1.7}$ instead of $t^{-1.2}$). This is a consequence of the Joule effect and reveals important departures from two-dimensionality.

The apparent discrepancy between these two kinds of results have led to controversial ideas about laboratory MHD turbulence and one of the purposes of this paper is to reconcile the two. Theories of homogeneous MHD turbulence in a uniform magnetic field, using dimensional analysis and two point closures (Alemany *et al.* 1979) predict a three-dimensional dynamics and agree with the latter kind of experimental results. We intend here to explain the two-dimensional dynamics observed in duct flows in terms of the effect of insulating walls. It is clear that the walls should have an important direct effect on turbulent structures, the length scale of which is equal to or larger than the channel width. The point is that turbulent structures are markedly elongated in the magnetic field direction, when the field is strong, so that the direct effect of the walls which are perpendicular to the field becomes important, even when the grid mesh is much smaller than the channel width. This direct effect is dramatic and rather trivial when the walls are highly conducting: in this case turbulence has been observed to be very quickly damped in a strong magnetic field (Platnieks & Freibergs 1972). So we are interested here in the case of insulating walls when turbulence persists over a large distance and exhibits some two-dimensionality. Note that the effect of walls *parallel* to the magnetic field, remains restricted to side layers which are passive in character and do not react back upon the bulk flow, we shall not consider the effect of such walls.

We intend then in this paper to analyse the direct effect of the walls which are perpendicular to the field on a turbulent structure as a function of its length and velocity scales. The analysis is limited to the asymptotic case of strong magnetic fields (large interaction parameter and Hartmann number) in which evidence of two-dimensional turbulence has been experimentally obtained. The final result is presented in § 4, where the appropriate conditions for getting a wide range of two-dimensional turbulent structures are discussed. For this investigation, the flow is divided into two very different parts: the Hartmann boundary layers and the bulk of the flow. In § 3, concerned with the bulk of the flow, we point out a diffusion mechanism along magnetic field lines, through which motions in planes perpendicular to the field are correlated. These considerations lend some physical insight to the turbulence dynamics and lead to conclusions closely related to those of Alemany *et al.* (1979). A study of the Hartmann layers is carried out in § 3, resulting in boundary conditions for the bulk of the turbulent flow, from which are deduced conditions for the existence of two-dimensional turbulence. The complete flow is in fact always three-dimensional because of the no slip condition at the walls; as a consequence, there is a Hartmann braking effect for the two dimensional bulk of the flow, which is also calculated in § 3.

2. Some properties of MHD turbulent flows at large interaction parameter

An incompressible and electrically conducting fluid (e.g. a liquid metal) is assumed to be in turbulent motion in a uniform magnetic field \mathbf{B} . Let us make l_{\perp} and U the typical length-scale and corresponding velocity for a turbulent eddy in the directions perpendicular to the field (the *transverse directions* for conciseness). The following conditions are assumed to be valid over a wide range of length scales including energy containing ones.

$$\begin{cases} Re = Ul_{\perp}/\nu \gg 1 \\ Rm = \mu\sigma l_{\perp}U \ll 1 \end{cases} \quad \begin{cases} N = \sigma B^2 l_{\perp}/\rho U \gg 1 \\ M = (N Re)^{\frac{1}{2}} \gg 1 \end{cases} \quad (1)$$

where μ , ρ , σ , ν stand for magnetic permeability, density, electrical conductivity and kinematic viscosity respectively. Quantities of interest such as velocity \mathbf{v} , current density \mathbf{j} , pressure \tilde{p} , and electric potential ϕ , then satisfy the following equations (where $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{p} + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \nabla\phi). \quad (4)$$

Notice that if the magnetic Reynolds number Rm is very small, a condition satisfied in most laboratory experiments, the fluctuating magnetic field created by eddy current density is negligible in comparison with \mathbf{B} . By eliminating current density, and including the irrotational part of the Lorentz force in the pressure p , the equation of motion becomes (Roberts 1967, p. 136).

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} - \frac{\sigma B^2}{\rho}\Delta^{-1}\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}, \quad (5)$$

where Δ^{-1} is an inverse of the Laplacian operator, and where the z -co-ordinate is taken along the direction of the magnetic field (*the parallel direction*).

Under the conditions (1), the energy-containing eddies are rapidly lengthened in the \mathbf{B} direction even if the turbulence was initially isotropic (Alemany *et al.* 1979) and the following approximations are valid.

$$\frac{\partial}{\partial z} \ll \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \quad v_z \approx v_x, v_y.$$

Using gradient ∇_{\perp} and Laplacian Δ_{\perp} operators in a transverse plane and substantive derivative associated with the motion in that plane ($D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}$), the equations of motion then become:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} p + \nu \Delta_{\perp} \mathbf{v} - \frac{\sigma B^2}{\rho} \Delta_{\perp}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}, \quad (6)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = 0. \quad (7)$$

The parallel component of vorticity ω_z (but not any other component) satisfies:

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \nu \Delta_{\perp} \omega_z - \frac{\sigma B^2}{\rho} \Delta_{\perp}^{-1} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Notice that in this kinematically quasi-two-dimensional situation, motions in different transverse planes interact only through electromagnetic forces and viscosity, but the latter is much weaker when the Reynolds number is large. If we refer to a given eddy for which the application of the Δ_{\perp}^{-1} operator reduces to multiplication by $(-l_{\perp}^2)$, the electromagnetic force looks like a unidirectional diffusion term. This diffusion in the field direction may be seen as a relic of Alfvén wave propagation when $Rm \ll 1$ (Roberts 1967, p. 137). It has the unusual property of being characterized by a diffusivity $\alpha = \sigma B^2 l_{\perp}^2 / \rho$ depending on the length scale l_{\perp} of the eddy considered. As a consequence, electromagnetic forces tend to suppress velocity differences between transverse planes and, if d denotes their spacing, the duration of this phenomenon is

$$t_d \approx (\rho / \sigma B^2) d^2 / l_{\perp}^2. \quad (9)$$

If the turbulence is homogeneous, the net effect of this mechanism is Joule dissipation of energy, as analysed by Alemany *et al.* (1979) in Fourier space. But it is remarkable that however globally dissipating, this diffusion mechanism may be *locally* a source of momentum, vorticity and kinetic energy, and this could explain how two-dimensional turbulent eddies build up from initially three-dimensional ones.

Figure 1 shows a plausible picture of the deformation of a turbulent structure of initial typical size l during its turnover time t_{tu} . Nonlinear transfer would by itself rotate the eddy and appreciably promote its disruption into smaller eddies (size $\approx \frac{1}{2}l$), but electromagnetic diffusion propagates this motion all along a cylinder of length $l_{\parallel} \sim l_{\perp} N^{\frac{1}{2}}$ during time t_{tu} . The main consequences of this are:

(i) inhibition of energy transfer towards small scales and some slight increase of the eddy transverse size which is quite different from the inverse cascade of energy in two-dimensional turbulence.

(ii) the attainment after some transitory phase of an anisotropic state in which, for each turbulent structure,

$$l_{\parallel} / l_{\perp} \sim N^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

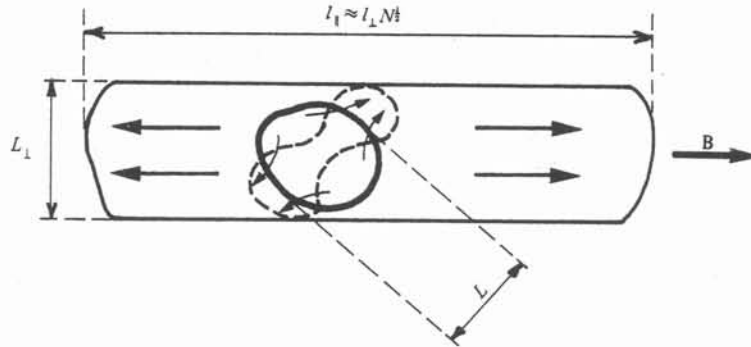


FIGURE 1. Plausible evolution of an eddy of initial size L in all directions during time t_{tu} for an observer moving with the core of the eddy (— initial eddy; - - - - final eddy when $B = 0$; — final eddy when $N \gg 1$).

(remember that N is the interaction parameter for a given eddy). Of course this last conclusion applies only to structures for which $l_{\perp} N^{\frac{1}{2}}$ is smaller than the spacing of the walls perpendicular to the magnetic field.

3. The influence of transverse insulating walls

The key point which elucidates the influence of the transverse walls on the turbulent bulk of the flow, when the interaction parameter N and the Hartmann number M are both very large, is the fact that inertia is small, compared to electromagnetic and viscous effects in the Hartmann layer. This essentially follows from the extremely small thickness of this layer

$$\delta_H = (\rho\nu/\sigma B^2)^{\frac{1}{2}} = l_{\perp}/M,$$

which depends only on the fluid properties and the strength of the magnetic field ($\delta_H = 30 \mu\text{m}$ in mercury for $B = 1 \text{ T}$). As a consequence the equations of motion in the Hartmann layer are linear to a good approximation, and the flow in this layer depends at a given time only on the instantaneous outer velocity (e.g. secondary flows and inertia effects are negligible in the layer). In other words, the Hartmann layer behaves as if the outer flow were locally steady and uniform in transverse directions.

To be more accurate, the small effects of unsteadiness and inhomogeneity of the outer flow can be taken into account by means of a second-order Hartmann theory, based on developments in powers of the two small parameters N^{-1} and M^{-2} . This straightforward but heavy calculation, which is summarized in the appendix, precisely justifies the linear approximation when N and M are both much larger than unity.

Numerous experimental results also support this linear approximation and confirm the stability of this thin Hartmann layer. For example the experimental skin friction in ducts is given by laminar laws, despite the presence of turbulence. More direct confirmation is achieved in the simple educational experiment of Heiser & Shercliff (1965) or in the annular flow of Gel'fgat *et al.* (1971).

The Hartmann layer along an insulating wall may be seen as a current sheet, the current content \mathbf{J} per unit length of which is given (Heiser & Shercliff 1965) by

$$\mathbf{J} = (\sigma\rho\nu)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{v}(x, y, 0, t), \quad (11)$$

where $\mathbf{v}(x, y, 0, t)$ is the velocity near the wall (but outside the Hartmann layer). The origin of the z axis is taken at the wall and its positive unit vector $\boldsymbol{\beta}$ is directed toward the fluid. The following important properties follow directly from the relation (11).

(a) *Orthogonality of the quasi two-dimensional eddies with the walls*

Because of current conservation, a current density j_z necessarily exists outside the Hartmann layer, such that (since the wall is insulating).

$$j_z(x, y, 0, t) = -\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{J} = (\sigma\rho\nu)^{\frac{1}{2}} \omega_z(x, y, 0, t) \quad (12)$$

where ω_z is the component of vorticity. Alternatively, taking the curl of Ohm's law twice yields

$$\Delta \mathbf{j} = \sigma B \partial \boldsymbol{\omega} / \partial z. \quad (13)$$

To be consistent with previous approximations leading to equations (6) and (7), we have to replace Δ by Δ_{\perp} . Now eliminating j_z between (12) and the z component of (13), the electrical boundary conditions at an insulating wall can be transformed into a single condition on transverse vorticity,

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z}(x, y, 0, t) = -\frac{l_{\perp}}{M} \Delta_{\perp} \omega_z(x, y, 0, t). \quad (14)$$

Since this relation is valid at any position (x, y) along the wall, it necessarily requires that

$$\frac{\partial v_{\perp}}{\partial z}(x, y, 0, t) = O\left(\frac{U}{Mt_{\perp}}\right) = O\left(\frac{U}{\sqrt{Re} l_{\perp}}\right), \quad (15)$$

where l_{\perp} is the natural parallel length scale introduced by relation (10). Since U/l_{\perp} would be a typical value of $\partial v_{\perp}/\partial z$ in the absence of wall effects, the order of magnitude (15) means that axes of quasi-two-dimensional eddies have their ends perpendicular to the walls to a good approximation, although they could bend in the bulk of the flow. This condition can be physically interpreted using the notion of electromagnetic diffusion introduced in § 2: there is a negligible flux of momentum through the insulating walls.

(b) *Hartmann braking of the outer turbulence*

The current sheet in the Hartmann layer, which gives rise to the current density $j_z(x, y, 0, t)$ (12), must necessarily be closed in the bulk of the flow, generating there some braking and thus transferring the influence of viscosity. More precisely, when the walls are everywhere insulating, current conservation requires that:

$$\nabla_{\perp} \cdot \int_0^a \mathbf{j}_{\perp} dz = 0, \quad (16)$$

where a is the spacing between the walls; this means that no external source of current exists, and reduces to the usual condition

$$\int_0^a \mathbf{j}_{\perp} dz = 0$$

if the outer flow is uniform. The integral in (16) is composed of two parts, the current sheets $\mathbf{J}(0)$ and $\mathbf{J}(a)$ in the Hartmann layers, and the current integrated in the bulk

of the flow. These are both related to velocity, the former by (11), and the latter by the equation of motion (2). After these substitutions, the relation (16) takes the form:

$$\frac{\rho a}{B} \left\langle \frac{d\omega_z}{dt} - \nu \nabla^2 \omega_z \right\rangle + (\sigma \rho \nu)^{\frac{1}{2}} (\omega_z(a) + \omega_z(0)) = 0, \quad (17)$$

where the brackets $\langle \rangle$ indicate the average between $z = 0$ and $z = a$.

Equation (17) clearly demonstrates the braking of the outer flow by the Hartmann effect: the last term on the left-hand-side is exactly the loss of vorticity due to the viscous stresses in the Hartmann layer, which is globally transferred into the outer turbulence by the return of electric currents. If two-dimensionality is well achieved the brackets in (17) can be omitted (§ 4 shows how and when this is realized) and the equation of motion for the two-dimensional velocity field $\mathbf{V}(x, y, t)$ can be derived:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{2B}{a} \left(\frac{\sigma \nu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}. \quad (18)$$

It is finally of interest to note that this braking does not depend on the turbulent scales, provided that M (constructed from these scales) is very large, its typical time-scale being

$$t_H = \frac{a}{2B} \left(\frac{\rho}{\sigma \nu} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

(c) Interpretation of electric field measurements

Measurements of electric field, including the fluctuating part, have often been used to get information on turbulent flows (Lielausis 1975, Rosant 1976, Moreau 1978). The main idea is that in the presence of a magnetic field B the turbulent structures of typical scales U and l_{\perp} are submitted to potential differences of which a representative value is $\phi \sim BUl_{\perp}$ and which generate parallel electric currents (essentially related to the defect of two-dimensionality):

$$j_z \simeq \sigma \phi / l_{\parallel} \simeq \sigma BU / N^{\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

and transverse electric currents, which follow from current conservation

$$j \simeq \sigma BU (l_{\perp} / l_{\parallel}) \simeq \sigma BU / N. \quad (21)$$

These orders of magnitude mean that the relation $\mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ is satisfied with an error of the order of N^{-1} , and then justify deduction of the turbulent velocity from the fluctuations of the electric field when the magnetic field is strong enough.

Now, in the turbulent core between two insulating transverse walls, the electric current can be calculated precisely by condition (16) together with relation (11). When two-dimensionality is well achieved, using Ohm's law yields the expression for the transverse electric field:

$$\mathbf{E}_{\perp} = -(1 - 2l_{\perp}/aM) (\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (22)$$

Since l_{\perp}/M does not depend on l_{\perp} , this expression establishes the required connection between \mathbf{E}_{\perp} and \mathbf{V} .

From relation (22) and the equation of continuity of electric current with the boundary conditions (12), an expression for E_z in terms of the vorticity Ω can be deduced, viz.

$$E_z = \left(\frac{\rho \nu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \Omega \left(1 - \frac{2z}{a} \right). \quad (23)$$

An original method of vorticity measurement for the two-dimensional flow is thus provided by this result. Nevertheless, the order of magnitude of the corresponding potential differences is generally very small. For example in mercury, if the two electrodes measuring the electric field are 1 cm distant, and the turbulent scales $U = 1$ cm/s and $l_{\perp} = 1$ cm, the potential difference is of order of $0.3 \mu\text{V}$, thus at the very limit of experimental detectability. But some expedients should be used to increase this value. One could artificially increase the Hartmann layer thickness by putting some controlled rugosity at the wall near the probe. One could also fix a conducting sheet on the wall to increase the current content. If σ' is the conductivity and d the thickness of the sheet, the electric field would then become

$$E_z = \left[\left(\frac{\rho\nu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sigma'}{\sigma} d \right] \Omega_z \left(1 - \frac{2z}{a} \right).$$

4. The behaviour of MHD turbulence between insulating walls

The purpose of this section is to deduce from the relations (15) and (18) the main rules governing the dynamics of a turbulent velocity field when the interaction parameter is large. Though the analysis is developed in the particular case of turbulence which is assumed to be homogeneous in a plane perpendicular to \mathbf{B} , it has nevertheless some relevance for other kinds of turbulent flows, such as duct flows with or without M-shaped mean velocity profiles.

It follows from Alemany *et al.* (1979) that the dynamics of MHD homogeneous turbulence is essentially governed by an equilibrium between two competing mechanisms: Joule effect which tends to dissipate energy of wave vectors not perpendicular to the applied magnetic field, and inertial transfers which tend to restore isotropy. This description is quite in agreement with precise calculations using a two-point closure technique, which show that angular energy transfer (from the energy-containing zone to the cones where Joule dissipation is predominant) is much larger than radial energy transfers, and is localized in a narrow fringe at the border of the Joule cones. Figure 2 (left-hand side) illustrates this description. The energy-containing zone is characterized by an angle ϕ such that the Joule time t_j and the eddy turnover time t_{tu} are equal ($\phi \approx N^{-\frac{1}{2}}$, if $N \gg 1$). Alemany *et al.* deduced from this quasi-steady equilibrium that, since the local transfer time $[k^3 E(k, t)]^{-\frac{1}{2}}$ must be independent of k , just as the Joule time is, the energy spectrum $E(k, t)$ must vary like k^{-3} in a self-similar range. Furthermore, the energy equation ($\partial E / \partial t \approx -E(k^3 E)^{\frac{1}{2}}$) demands that the energy spectrum decays as t^{-2} . The properties of this self-similar range with $E(k, t) \approx t^{-2} k^{-3}$ are fairly well confirmed by experiments and two-point closure calculations.

Now the influence of the insulating walls perpendicular to the magnetic field has to be introduced in this context. It is first expressed by the constraint (15) which means that the parallel half wavelength of the energy-containing eddies cannot vary continuously, but must be either infinite (for exactly two-dimensional eddies) or an integer fraction a/n of the duct width (n is an integer). In other words energy must be concentrated in wave vectors with their extremities on a set of planes such that $k_z = n\pi/a$ (figure 2). Otherwise, except possibly during an initial phase, energy-containing vectors can only lie on the part of this set of planes which is outside the Joule cone: $k_z < k_{\perp} N^{-\frac{1}{2}}$. Thus the first influence of the insulating walls consists in

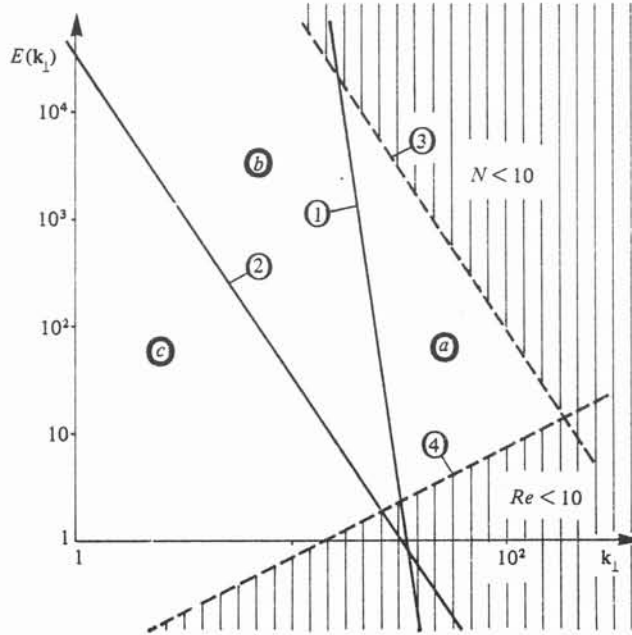


FIGURE 3. The three typical kinds of MHD turbulence between insulating walls perpendicular to a strong uniform magnetic field. ①: Condition (37) for kinematically two-dimensional turbulence; ②: condition (38) for Hartmann braking effect negligible; ③: $N = 10$; ④: $Re = 10$. (a): Equilibrium between angular transfer and Joule effect; (b): Dynamically two-dimensional eddies; (c): two-dimensional eddies with Hartmann effect predominant.

Batchelor 1969, Tatsumi & Yanase 1977). In most of the experiments mentioned in the Introduction, conditions were such that for the largest scales two-dimensionality without the Hartmann braking effect was fairly well achieved (suggesting the relevance of an enstrophy cascade) whereas for smaller scales angular transfer and Joule dissipation give the only reasonable explanation of the observed $t^{-2}k^{-3}$ law. It is noteworthy that no discontinuity between these two laws has been observed. This suggests that the coefficient of $t^{-2}k^{-3}$ could be unique and universal, like the Kolmogoroff and Batchelor constants.

5. Conclusions

MHD turbulence between insulating walls perpendicular to a strong magnetic field ($N \gg 1$) appears to be governed by essentially two mechanisms. One is the *electromagnetic diffusion* into which Alfvén waves degenerate at the scale of the laboratory. The other is the well known *Hartmann effect*, slightly modified by the presence of inertia and vorticity in the external velocity field. Neither of these is new, and their combined influence has been studied in textbooks (e.g. Shercliff 1965, pp. 160–6), but their relevance and importance in turbulence studies has not been recognized previously.

One of the most striking consequences of the relations (14) and (15) is the necessary orthogonality of energy-containing eddies and insulating walls, entailing some

quantization of the Fourier space and hence an explanation of the previously observed two-dimensionality. Several conclusions are also quantitative, e.g. equation (18) for the external velocity field, and relations (22) and (23) between electric field and velocity or vorticity.

In the context of the new possibilities offered by MHD for performing experiments on ordinary two-dimensional turbulence, our two main results are (a) the formulation of conditions (24) and (25) for the existence of this kind of disordered motion, and (b) the recognition that MHD offers interesting new diagnostic techniques. Indeed all the components of the electric field are now precisely related to the velocity field. Measuring the parallel component in the vicinity of the wall would directly give the parallel vorticity, a quantity of prime interest in the context of intermittency studies. And relation (22) shows that the perpendicular components of the electric field are proportional to the velocity.

The authors have benefitted from useful discussions with A. Alemany and M. Lesieur.

Appendix. Second-order calculation of the Hartmann layer

Let us introduce the following dimensionless variables:

$$\left. \begin{aligned} x &= l_{\perp} \chi, & v_x &= Uu, & \tilde{p} &= \rho U^2 P, \\ y &= l_{\perp} \eta, & v_y &= Uv, & \phi &= BU l_{\perp} \phi, \\ z &= \frac{l_{\perp}}{M} \zeta, & v_z &= \frac{U}{MN} w, & t &= \frac{l_{\perp}}{U} \tau. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

The length scales are suggested by the discussion of the beginning of §3 and the order of magnitude of v_z is obtained by considering it as resulting from secondary flows in the Hartmann layer. The basic equations (2)–(4) may now be written:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} &= -\frac{1}{N} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - u - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{1}{N} \left(\frac{du}{d\tau} + \frac{\partial P}{\partial \chi} \right) - \frac{1}{M^2} \Delta_{\perp} u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - v + \frac{\partial \phi}{\partial \chi} &= \frac{1}{N} \left(\frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{M^2} \Delta_{\perp} v, \\ \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \frac{1}{M^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{NM^2} \frac{dw}{d\tau} + \frac{1}{M^4} \Delta_{\perp} w, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} &= \frac{1}{M^2} (\omega - \Delta_{\perp} \phi), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

where, for the sake of conciseness, we denote:

$$\begin{aligned} d/d\tau &= \partial/\partial\tau + u\partial/\partial\chi + v\partial/\partial\eta + w\partial/\partial\zeta \\ \nabla_{\perp} &= (\partial/\partial\chi, \partial/\partial\eta, 0) & \Delta_{\perp} &= \partial^2/\partial\chi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 \\ \mathbf{u}_{\perp} &= (u, v, 0) & \omega &= \partial v/\partial\chi - \partial u/\partial\eta. \end{aligned}$$

Limiting attention to the case of insulating walls, the boundary conditions are

$$\begin{cases} u(\chi, \eta, 0, \tau) = v(\chi, \eta, 0, \tau) = w(\chi, \eta, 0, \tau) = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(\chi, \eta, 0, \tau) = 0. \end{cases}$$

In the range of strong magnetic fields in which we are interested, the smallness of the two independent parameters $1/N$ and $1/M^2$ permits a double perturbation technique to solve these equations. We therefore write each non-dimensional function q as

$$q = q^{(0)}(\chi, \eta, \zeta, \tau) + \frac{1}{N} q^{(1)}(\chi, \eta, \zeta, \tau) + \frac{1}{M^2} q^{(2)}(\chi, \eta, \zeta, \tau) + \dots$$

To first order the leading terms, all placed on the left-hand side of equations (27); give the classical Hartmann solution, the only difference being the possible variations of outer quantities with χ, η, τ .

$$u_{\perp}^{(0)} = \mathbf{V}(\chi, \eta, \tau) [1 - e^{-\zeta}], \quad P^{(0)} = P^{(0)}(\chi, \eta, \tau), \quad \phi^{(0)} = \phi^{(0)}(\chi, \eta, \tau),$$

with the constraints $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V} = 0$

$$\nabla_{\perp} \phi^{(0)} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}.$$

By introducing these expressions in the small terms of equations (27) we get the second order solution

$$\begin{aligned} u_{\perp}^{(1)} &= \frac{\zeta}{2} e^{-\zeta} \frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{d\tau} + \left(\frac{e^{-2\zeta}}{3} - \frac{e^{-\zeta}}{3} \right) (\mathbf{V} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{V} \\ u_{\perp}^{(2)} &= \left(\frac{\zeta e^{-\zeta}}{2} + e^{-\zeta} + \zeta - 1 \right) \nabla_{\perp} \times (\nabla_{\perp} \times \mathbf{V}). \end{aligned}$$

The velocity z component can then be deduced from the continuity equation in (27)

$$w^{(0)} = \left[-\frac{5}{24} + \frac{1}{8} e^{-\zeta} + \frac{1}{24} e^{-2\zeta} + \frac{1}{2} \zeta e^{-\zeta} - \frac{1}{4} \zeta e^{-2\zeta} \right] \nabla_{\perp} \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{V}].$$

REFERENCES

- ALEMANY, A., MOREAU, R., SULEM, P. L. & FRISCH, U. 1979 *J. de Mécanique*, **18**, 277.
 BATCHELOR, G. K. 1969 *Phys. Fluids Suppl.* **12**, II-233.
 BRANOVER, H. 1978 *Magnetohydrodynamic Flows in Ducts*. Halsted.
 COLIN DE VERDIERE, A. 1980 *Geophys. Astroph. Fluid Dyn.* **15**, 213.
 GEL'FGAT, YU. M., KIT, L. G., PETERSON, D. A. & TSINOBER, A. B. 1971 *Magn. Gidrodin.* **3**, 35.
 HEISER, W. H. & SHERCLIFF, J. A. 1965 *J. Fluid Mech.* **22**, 701.
 HOPFINGER, E. & BROWAND, F. 1982 *Nature* (To appear).
 KOLESNIKOV, YU. B. & TSINOBER, A. B. 1974 *Izv. A.N.S.S.S.R. Mekh. Zh. i Gaza* **4**, 176.
 LEHNERT, B. 1955 *Quart. Appl. Math.* **12**, 321.
 LIELAUSIS, O. 1975 *Atomic Energy Review* **13**, 527.
 MOREAU, R. 1978 In *Dynamic Measurements in Unsteady Flows*. Proceedings of Dynamic Flow Conference, pp. 65-79.
 PLATNIEKS, I. A. & FREIBERGS, YU. ZH. 1972 *Magn. Gidrodin.* **2**, 29.
 ROBERTS, P. H. 1967 *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Longmans.
 ROSANT, J. M. 1976 *Ecoulements hydromagnétiques turbulents en conduites rectangulaires*. Thèse 3^e cycle, Grenoble.
 SHERCLIFF, J. A. 1965 *A Textbook of Magnetohydrodynamics*. Pergamon.
 SOMMERIA, J. 1980 *Tendance à la bidimensionalité de la turbulence* M.H.D. Thèse 3^e cycle, Grenoble.
 TATSUMI, T. & YANASE, S. 1981 *J. Fluid Mech.* **110**, 475.
 VOTSISH, A. D. & KOLESNIKOV, YU. B. 1976 *Magn. Gidrodin.* **3**, 25 and **3**, 141.

C H A P I T R E I I I

TURBULENCE DE GRILLE DANS UNE CONDUITE
AVEC CHAMP MAGNETIQUE TRANSVERSE

Article publié au J.M.T.A., n° spécial sur la
turbulence bidimensionnelle

TWO-DIMENSIONAL BEHAVIOUR OF MHD FULLY DEVELOPPED TURBULENCE ($Rm \ll 1$)

J. SÖMMERIA
 Institut de Mécanique
 Université de Grenoble
 BP 53 X
 38041 GRENOBLE cedex

ABSTRACT

This paper is concerned with the two-dimensional properties of liquid metal channel flows under the influence of a strong uniform steady transverse magnetic field. After a short account of the theoretical background, experimental results on the subject are reviewed, emphasizing grid turbulence. Then, a new experimental study is set out, showing the relatively slow decay of the turbulent energy in a strong magnetic field, and a spectral evolution in $t^{-2} k^{-3}$. These spectra are partly indicative of an enstrophy cascade, the dynamics of the smaller scales being three-dimensional and involving a strong Joule dissipation. Finally, measurements of turbulent heat diffusion along two perpendicular directions illustrates the two-dimensionality of the large eddies, and allow interesting comparisons with theories of pairs dispersion in two-dimensional homogeneous turbulence.

RESUME

On s'intéresse aux propriétés bidimensionnelles des écoulements en conduites de métaux liquides soumis à un champ magnétique transversal uniforme et constant. Après quelques considérations théoriques, les résultats expérimentaux antérieurs sont passés en revue, en insistant sur la turbulence de grille. On présente ensuite notre propre étude expérimentale, qui montre une décroissance relativement lente de l'énergie turbulente dans un champ magnétique fort, ainsi que des spectres d'énergie évoluant en $t^{-2} k^{-3}$. Ces spectres semblent en partie associés à une cascade d'enstrophie, la dynamique des petites échelles étant caractérisée par une forte dissipation par effet Joule associée à des mécanismes tridimensionnels. Enfin, des mesures de diffusion turbulente de chaleur selon deux directions perpendiculaires constituent une bonne illustration de la bidimensionnalité des grands tourbillons, et permettent des comparaisons intéressantes avec des théories de dispersion de paires de traceurs lagrangiens en turbulence bidimensionnelle homogène.

1. INTRODUCTION

The study of channel flows in a uniform transverse magnetic field is a classical M.H.D. topic since the work of HARTMANN and LAGARUS [8]. These flows are encountered in several kinds of industrial devices such as M.H.D power generators or electromagnetic pumps, and a lot of experiments have been performed, reviewed by LIELAUSIS [13] and BRANOVER [3]. The dynamics is quite modified by the influence of the magnetic field and many of its mysteries are still well concealed behind the opacity of liquid metals. However, in the asymptotic case of strong magnetic fields, in which we are interested here, important simplifications occur, associated with a quasi-two-dimensional behaviour. In section 2., we discuss the general features of the dynamics in this asymptotic case, printing out how the initial conditions or the walls limiting the fluid can enhance the production of truly two-dimensional large eddies, which are little influenced by the magnetic field. In section 3., these ideas are used as a guide line to review experimental results on the properties of turbulence in rectangular channel flows. The main point is that turbulence is not generated steadily by an instability of the mean flow, but is a free-decaying turbulence which have close analogies with a grid turbulence in the same channel. Emphasis is therefore placed on this latter case, which is easier to study because the turbulence is more homogeneous. Section 4. is concerned with the description of an experimental device designed for investigating grid turbulence in a rectangular channel? Two kinds of results are obtained : turbulent velocity measurements are commented in section 5, and heat dispersion from a line source is studied in section 6.

2. THEORETICAL BACKGROUND

2.1. A tendency toward two-dimensionality

Under the influence of the eddy currents, the turbulent flow patterns are more and more elongated in the magnetic field direction as the latter gets stronger. This behaviour, noticed many times since LEHNERT [12] and MOFFATT[14], can be understood most easily by writing the equation of motion for the velocity \vec{U} in the form proposed by ROBERTS [17].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{U} + \frac{\sigma B^2}{\rho} \Delta^{-1} \left(\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

This equation is valid when the conducting fluid, of viscosity ν , conductivity σ , density ρ is placed in a uniform steady magnetic field \vec{B} , much larger than the one generated by the eddy currents. This condition of low magnetic Reynolds number ($R_m \ll 1$) is very well satisfied in usual laboratory experiments. The z coordinate is taken along the magnetic field direction and Δ^{-1} is an inverse of the Laplacian operator which must be chosen to satisfy the boundary conditions for the velocity and the electric potential. If the initial velocity field is truly two-dimensional ($\frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = 0$), the electromagnetic forces vanish (when there is no current source at the walls) and the dynamics of this turbulent flow is dominated by the specific properties of ordinary two-dimensional turbulence. In the general case, the electromagnetic term tends to homogenize the velocity field along the magnetic field direction, by a kind of diffusion process along this direction, as it is discussed in [17]. The originality of this diffusion is that its

intensity depends on the length scale of the eddy which is considered (by the Δ^{-1} operator).

An important problem is then to know whether the dynamics of a turbulent flow gets "close" to that of a strictly two-dimensional one in the limit of very strong magnetic fields. It seems impossible to give a unique general answer to this question. If the initial state is a fully developed three-dimensional turbulence, the electromagnetic diffusion smoothes out decorrelations between different planes perpendicular to the magnetic field, and these latter are fed by advection effects. By supposing a quasi steady equilibrium between these two effects, i.e. by equating the two corresponding typical times, two different length scales are obtained, for a turbulent eddy, the longitudinal scale ℓ_{\parallel} along the magnetic field direction and the transverse scale ℓ_{\perp} along the perpendicular directions. The ratio of these two scales is found to be proportional to the magnetic field,

$$\frac{\ell_{\parallel}}{\ell_{\perp}} \sim \sqrt{N}$$

where $N = \frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{\ell_{\perp}}{\ell_{\parallel}}$ is known as the interaction parameter of the eddy. This mechanism corresponds in Fourier space to a quasi steady equilibrium between angular transfers of energy and dissipation by Joule effect, as proposed by ALEMANY et AL. [1]. Self-similar energy spectra in $t^{-2} k^{-3}$, analogous to that of the enstrophy cascade in two-dimensional decaying turbulence, are produced by this mechanism. Nevertheless the global dynamics is quite different, since the energy of the eddies is dissipated by Joule effect instead of being transferred to larger scales. Therefore, the total energy decays very quickly (as $t^{-1.7}$ in their experiment [1]) and the integral scale remains nearly constant [6], while it should increase proportionally to the time in a two-dimensional turbulence. So these results, obtained by an order of magnitude analysis, by a grid turbulence experiment and supported by E.D.Q.N.M closure technique, show that the dynamics of the turbulence is very different from a two-dimensional one, even when the turbulent eddies are very elongated along the magnetic field direction.

2.2. The influence of insulating walls

When an eddy is so elongated along the magnetic field direction that its parallel length scale becomes of the same order as the corresponding channel width, its dynamics is much influenced by the direct effect of the walls. Near an electrically insulating wall which is perpendicular to the magnetic field, the derivative of the velocity along the magnetic field direction vanishes outside a very thin Hartmann layer. As a consequence SOMMERIA and MOREAU [18] showed that angular energy transfers of large eddies should be inhibited, so that the large scales are maintained two dimensional while smaller one are still subjected to the previously described three-dimensional dynamics. Self similar spectra in $t^{-2} k^{-3}$ still cover the two ranges of scales although two different mechanisms are present. The only direct effect of the magnetic field on large scales is the Hartmann friction which is often rather low in usual experimental conditions.

2.3. The influence of the initial conditions

The above behaviour might also be understood without the influence of insulating walls, by invoking an initial condition close to a two-dimensional one. The development of a small three-dimensional instability upon an initially two-dimensional turbulent flow can be regarded

as the growth of a small decorrelation between two planes perpendicular to the magnetic field. When the perturbation is small enough, the dynamics of these two planes may be considered as independant, and the predictability theory applies, as if the flows in the two planes were two different realisations of the same two-dimensional flow. Then, if the transverse decorrelation length scale is large, the decorrelation rate should grow slower than the energy at the same scale and should remain negligible, as proposed by LESIEUR (to appear in this issue). Therefore one could consider that the two-dimensionality of large scales is a rather general trend ; however, the influence of insulating walls in M.H.D. turbulence reinforces this tendency, giving still more credit to the relevance of two dimensional structures.

3. M.H.D CHANNEL FLOWS

3.1. The origin of the turbulence

The first quantity measured in rectangular channel flows inbeded in a transverse magnetic field has been skin friction ([8] , [15]). When the magnetic field is strong enough, the friction coefficient is measured to become equal or even smaller than that calculated for a laminar flow, while turbulent intensity is still important ([4], [9], [10], [16]). One must conclude that energy transfers from the mean flow toward the turbulent fluctuations become negligible. This is confirmed by direct measurements of the vanishing of the Reynolds stresses (REED and LYKODIS [16]). The observed velocity fluctuations thus constitute a decaying turbulence whose origin is located near the entrance into the uniform magnetic field. The turbulence is mainly created there by a strong instability of the well known M shaped velocity profile (BRANOVER and GERSHON [5]). Turbulent structures carried by the flow from outside the magnetic field, have little influence [5] . Notice that this M shaped velocity profile can also persist over long distances, since it is not damped by Reynolds stresses. So in most experiments, the mean flow is transitory and it is not surprising that the skin friction, when the Reynolds stresses vanish, can be smaller than the value calculated for a fully established laminar flow [16] .

3.2. Two-dimensional features

On the one hand, the elongation of the turbulent eddies is clearly exhibited by the good two-points correlations along the magnetic field direction [10] . On the other hand, the decay of the kinetic energy of the turbulence is very low in a strong enough magnetic field as observed in numerous experiments (for example [4] [10]). Therefore one must consider that energetic structures are two-dimensional since it is the only configuration in which both joulean dissipation and inertial transfers toward smaller scales are very weak. This statement is confirmed by spectra which are very steep at high frequency ($\sim k^{-3}$) and by a definite growth of the transverse length scale along the channel [10] .

Because of the electric current conservation and the elongation of the turbulent structures, the component j_{\parallel} of the current density parallel to the magnetic field should be much larger than the transverse component j_{\perp} and should scale as

$$\frac{j_{\parallel}}{j_{\perp}} \sim \frac{e_{\parallel}}{e_{\perp}}$$

Thus the measurement of j_{\parallel} , which can be deduced from the potential difference between two small electrodes, gives a good indication of the Joule dissipation rate $\frac{j_{\parallel}^2}{\sigma}$. Such measurements performed by KIT and PLATNIEKS [10] directly confirm that Joule dissipation becomes more and more negligible, and is located in smaller and smaller scales, as the magnetic field gets stronger.

3.3. Grid Turbulence

The situation is simpler in the same channels when the M shaped velocity profile is inhibited by an insulating honeycomb located at the entry into the magnetic field, and a quasi-homogeneous turbulence is generated by a grid. Two kinds of grids have been experimented. One is the array of cylinders parallel to the magnetic field, used by KOLESNIKOV and TSINOBER [11], generating a fairly two-dimensional initial wake. The other is an ordinary grid, used by VOTSISH and KOLESNIKOV [20] and in the present work, generating an approximately isotropic turbulence when the magnetic field is switched off. The initial flow is quasi-periodic behind the array of cylinders, while it is more disordered behind crossed bars, as revealed by autocorrelation curves. Nevertheless, the general trends of the dynamics are similar at some distance from the grid. This argument seems to support the idea that the two-dimensional behaviour is due to the wall conditions rather than to the initial state. However, the wakes behind a three-dimensional grid, which are parallel to the field could be dominant, since they are not dissipated by Joule effect; so the answer to this question is not clear and further experiments are needed.

The general properties exposed in the foregoing section are still observed in grid turbulence. The correlations along the magnetic field direction become significant in a strong enough magnetic field [19], the decay rate of the energy gets low, the electric currents get weak and are preponderant in small scales, as revealed by their autocorrelations in the transverse and longitudinal directions. Furthermore, k^{-3} spectra of good quality are observed, as k^{-4} spectra for vorticity [19]. Otherwise, an experiment using a chemical passive contaminant released from a source point shows that the turbulent dispersion is strongly reduced in the direction of the magnetic field [11]. This fact demonstrates that the corresponding velocity component is much smaller than the components in the plane perpendicular to the field, at least for large eddies. Our own experimental work, performed in a similar configuration confirms the generality of some of these results and brings out some additional information on the evolution of the energy spectra and on the turbulent diffusion of a passive contaminant.

4. THE EXPERIMENTAL DEVICE

The mercury loop, represented in fig. 1 and fig. 2 is of rather classical design. 800 kg of mercury are circulated by a centrifugal pump of 1 kW. The metal flows from a constant level tank into a stainless steel horizontal rectangular channel insulated from the fluid by a varnish. Its section is 5 X 7 cm² and the total length is 2 m with 1,30 m upstream the magnetic field. All measurements are made at a constant mean velocity of 19 cm/s which corresponds to Reynolds numbers, calculated from the turbulence scales near the grid, of about 500. The temperature is maintained

constant by a water cooling circuit. Hexadistilled mercury is used and much care is taken to keep it clean. A nitrogen pressure is permanently maintained in the whole device to prevent oxydation and a filter can be used in parallel with the channel to trap particules which are larger than $3 \mu\text{m}$ in size. The D.C. electromagnet produces a uniform magnetic field up to 0.7 Tesla in a gap 6 cm in depth and $56 \times 20 \text{ cm}^2$ in area. A honeycomb, made in moulded polyester, 43 cm in length, containing an hexagonal net of holes 2.5 mm in diameter (solidity 0,38), is used to prevent the formation of the M shaped velocity profile at the entrance into the magnetic field. The main effect of this honeycomb is to prevent the closing of eddy currents which are responsible for the formation of the M shaped velocity profile. The grid is a square net (mesh 5 mm) of holes 4 mm in diameter drilled in a sheet of varnished stainless steel (thickness 1,5 mm). Its solidity of 0,5 is too large for producing a good homogeneous turbulence without magnetic field (BAINES and PETERSON [2]) but it provides strong velocity fluctuations which are easier to measure and the production of turbulence should be less influenced by the magnetic field. The grid is located 8 cm downstream of the honeycomb and forms with it a movable part (fig. 3), this device permits to follow the evolution of the turbulence with a probe which can have any position in a fixed transverse section of the channel.

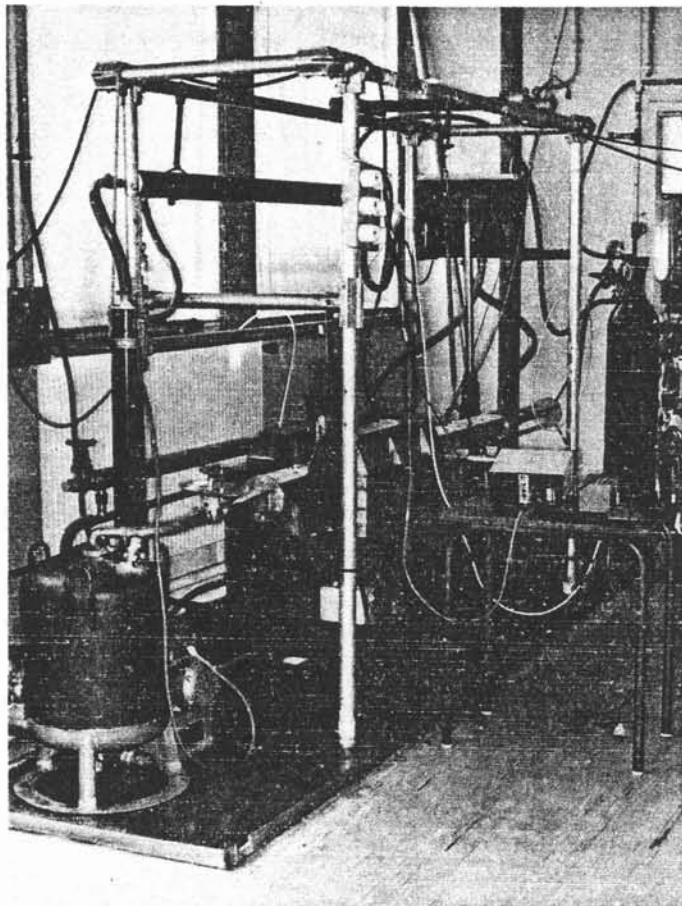


Figure 1. General view of the experimental device

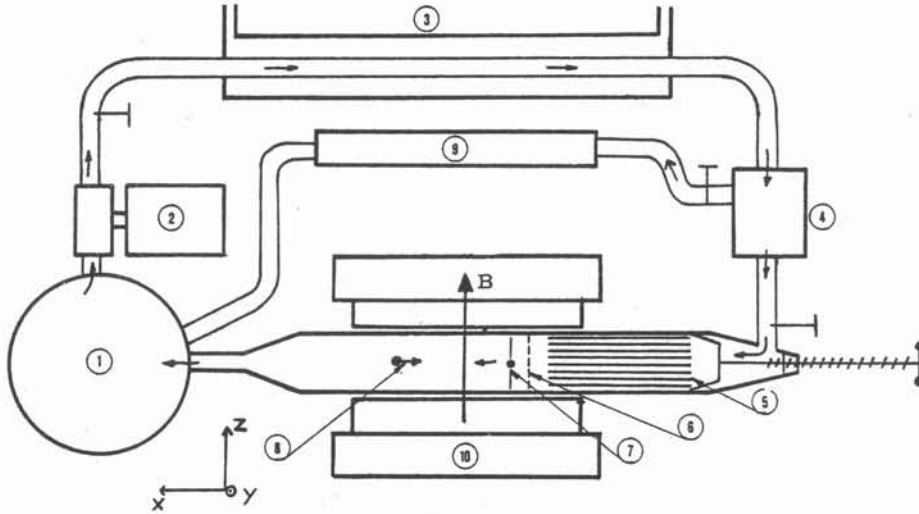


Figure 2. Diagram of the experimental device :
 1) Mercury tank, 2) Pump, 3) Heat exchanger,
 4) Constant level tank, 5) Honeycomb, 6) Grid,
 7) Heated wires, 8) Measurements probe, 9) Mercury
 filter, 10) Electromagnet.

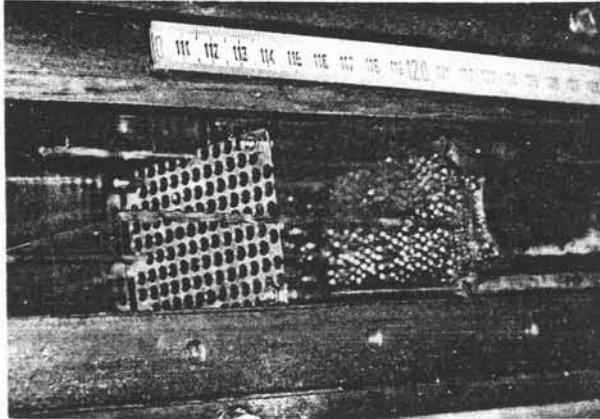


Figure 3. Honeycomb, grid and heated wires

5. INVESTIGATION OF THE VELOCITY FIELD

5.1. Measurement techniques

Local measurements of the longitudinal velocity component have been performed at the center of the channel, using a conical hot film probe, insulated from mercury by a quartz coating. The probe is manufactured by Termosystem Inc. and so is the constant temperature anemometer used. The size of the probe sensitive part is about 0.5 mm, which should correspond to the smallest scale which can be investigated.

Hot film probes in mercury are very sensitive to impurities and this for two main reasons : one, the quartz surface is not wetted by the fluid and all impurities which come into contact with it are retained by surface tension ; and two, because of the great thermal conductivity of mercury, convection effects are easily masked by conduction. In order to get good measurements, decantation must be favored by avoiding as much as possible mixing of the flow. Otherwise free surfaces of mercury must be in contact only with pure neutral gas to prevent oxydation. Unfortunately these conditions were not well satisfied in our experiments because of the strong mixing in the constant level tank as well as in the pump and because the loop was filled with ordinary R nitrogen. The filter does not seem to be very efficient because impurities, retained by the walls of the ducts, can be released at any time in the working section. In such conditions it was very difficult to maintain a constant probe sensitivity during more than one hour. So absolute velocity measurements were tedious and fairly crude, and it was very difficult to verify reliably the uniformity of the turbulence and mean velocity profile. But the relative decay of the turbulence was easier to investigate, and the shape of the spectra is little concerned by this drawback. Calibration was made by comparison with the transit time of a heat pulse released at the heated wire (see next section). No sensible influence of the magnetic field on the calibration was observed in our velocity range around 19 cm/s.

Samples of the velocity signal, 100 s. in duration, were recorded on a magnetic tape ; and from each of these samples, the mean velocity, the r.m.s. turbulent velocity, the autocorrelation function and the spectrum were computed. Frequencies above 400 Hz, perturbed by electric noise and frequencies below 0.7 Hz, perturbed by probe drifts, were filtered out. One dimensional spectra were calculated from the temporal autocorrelation functions, which are considered as spatial ones by invoking the Taylor hypothesis ($x = \tau V$)

$$F_{11}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \overline{U_1(x_0) U_1(x_0+x)} dx$$

One dimensional integral length scales are defined by

$$l_{\perp} = \frac{\int_0^{\tau_0} \overline{U_1(t) U_1(t+\tau)} d\tau}{\overline{U_1(t) U_1(t)}} V$$

The upper bound of integration should be infinity, but it is taken to be τ_0 , the first time where the autocorrelation vanishes, to avoid the spurious influence of drifts and filtering at large times.

5.2. Turbulence properties without magnetic field

Downstream of the grid, one can observe two regions. In the first one up to about 20 meshes from the grid, the results are in fairly good agreement with classical measurements performed in wind-tunnels ([2], [7]). The turbulence decay, plotted in figure 4.a, follows a $(X - X_0)^{-1.2}$ law, where $X_0 = 3$ meshes. The integral scale grows slowly (fig. 6) and energy spectrum in $k^{-5/3}$ sets up clearly on a 3/4 decade range (fig.7.a).

In the second region, the turbulence intensity increases and a hump of energy appears correlatively at the small frequencies of the spectrum. These large eddies, which are also

revealed by heat dispersion (see below), are probably produced by an instability of the mean flow related to the increase of the section filled by the fluid after the honeycomb or the grid. It must be noticed that this instability seems to disappear completely in a strong enough magnetic field, and therefore this problem is not too serious for our aim.

5.3. The effect of the magnetic field

- The formation of the turbulence :

The turbulent intensity near the grid is slightly weaker under the effect of the magnetic field (fig.4) and the integral scale is smaller (fig.6). This can be explained by the fact that large eddies are more strongly dissipated by Joule effect than smaller ones. The stabilizing effect on large structures, related to a two-dimensional dynamics, needs more time to be effective. Otherwise, a negative part of the autocorrelation function is observed in a strong magnetic field (fig. 5), indicating that some quasi-periodic coherent structures are present. Nevertheless, this effect, restricted here to the vicinity of the grid, is much less important than behind the array of parallel cylinder used in [11]. So it seems that truly two-dimensional processes can only generate fields of coherent structures and that the disorder of a two-dimensional homogeneous turbulence must be supplied by the effect of three-dimensional eddies. This conjecture should be tested by investigating transitions toward turbulence by truly two-dimensional processes.

- The integral properties of the turbulence :

The effect of an intermediate magnetic field of 0.48 Tesla is to increase the energy decay, which is related to Joule dissipation (fig.4.b). With a stronger magnetic field of 0.68 Tesla, the tendency is reversed and the decay in $t^{-0.6}$ is lower than without the field (fig. 4.c). This result, which is in qualitative agreement with earlier experiments reviewed in section 3 proves that the energetic eddies are subjected to a weak Joule dissipation and are then close to two-dimensional. However, since the Hartmann friction is negligible under these experimental conditions, the three-dimensional effects have a definite influence on the dynamics and should be mainly restricted to small scales. The evolution of the longitudinal integral scale in $t^{0.5}$ (fig. 6.c) is also intermediate between the evolution in t^4 in a truly two-dimensional turbulence and its quasi-stagnation in homogeneous M.H.D. turbulence [6].

- The spectra evolution

k^{-3} spectra are clearly observed at some distance downstream of the grid in a moderate magnetic field of 0.48 Tesla (fig. 7.b). Such spectra get established nearly as soon as the turbulence is generated in a stronger magnetic field of 0.68 Tesla (fig.7.c). The k^{-3} region extends over half a decade in frequency (i.e. more than two decades in energy) and the real range is probably larger since we are limited at high frequencies by the spatial resolution of the probe. So this result, which confirms that of [1] and [19] shows that the presence of k^{-3} spectra is the important general feature of M.H.D. turbulence in a uniform magnetic field. In this region of the spectrum, the evolution at a given wave number is in t^{-2} , as in homogeneous M.H.D. turbulence ([1], [6]). Here, this steep decay must be partly due to energy transfers towards large scales and partly to Joule dissipation, in order to get the moderate total kinetic energy decay in $t^{-0.6}$.

In order to test the theory of SOMMERIA and MOREAU [18] about the stabilization of two-dimensional eddies by the walls effect, the different regions of the Fourier space defined in [18] are represented in fig. 7 together with the spectra. It must be concluded from this figure that, according to this theory, a definite part of the energy is contained in two-dimensional eddies, and a possible explanation is thus provided. However, a more precise theory, taking into account the interaction between two-dimensional large scales and three-dimensional smaller ones, should be developed. From an experimental point of view, correlations between two probes should be calculated, and the electric field component parallel to the magnetic field, which is related to Joule dissipation, should be investigated.

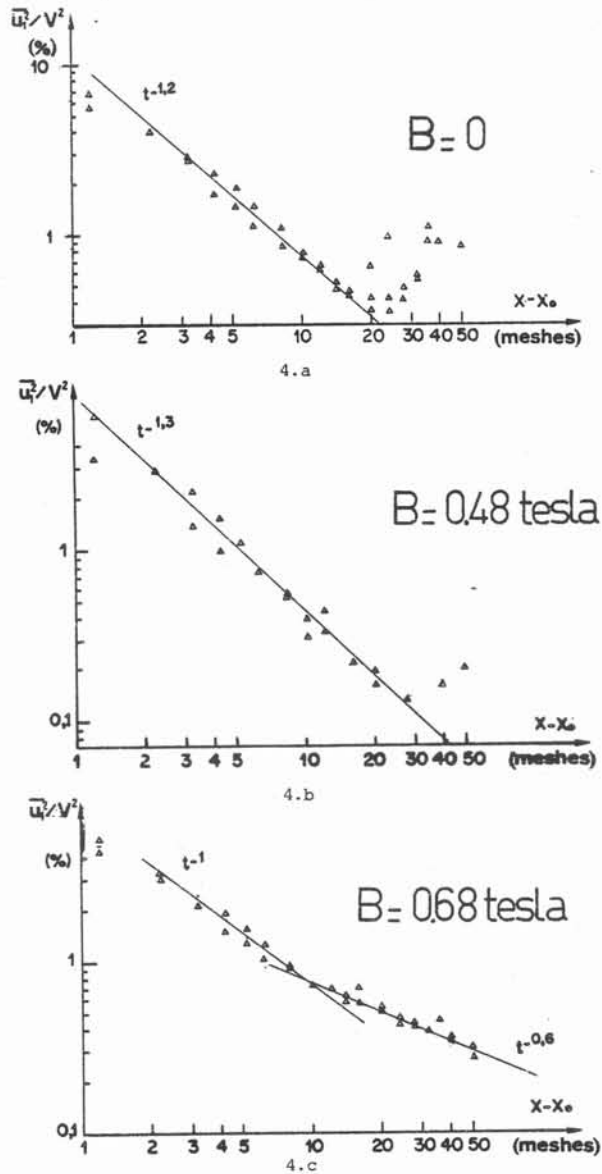


Figure 4. Evolution of the turbulent intensity : distance to the the grid X , effective origin $X_0 = 3$ meshes. a) $B=0$; b) $B=0.48$ Tesla ; c) $B= 0.68$ Tesla

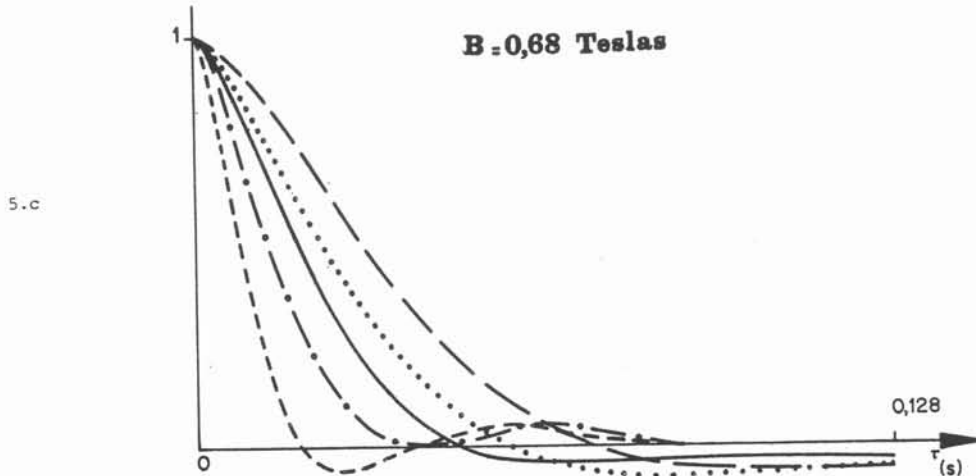
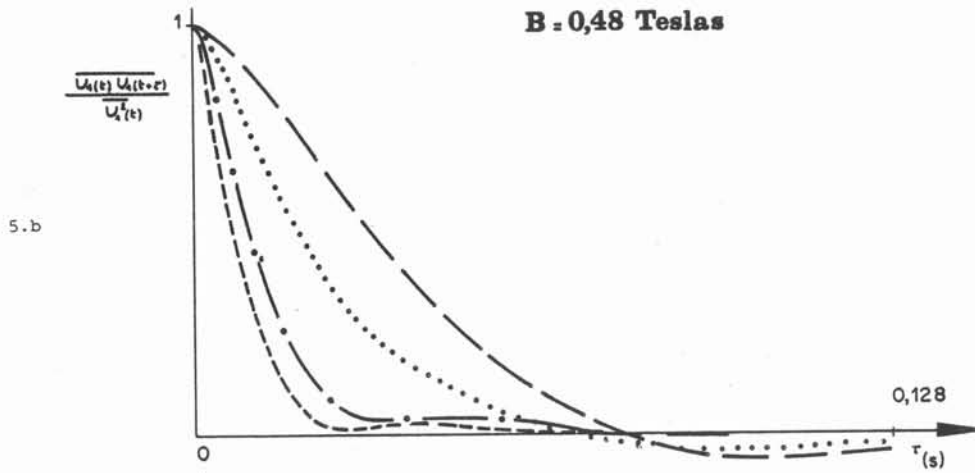
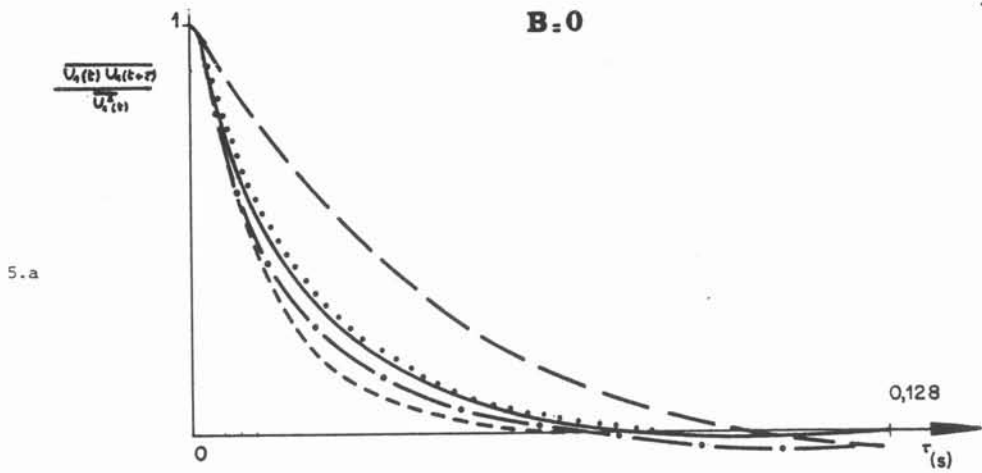


Figure 5. Autocorrelation functions. Distance to the grid

-----	5.2 meshes (1 mesh = 0,5 cm)
-----	11.2 "
-----	19.2 "
.....	31.2 "
-----	53.2 "

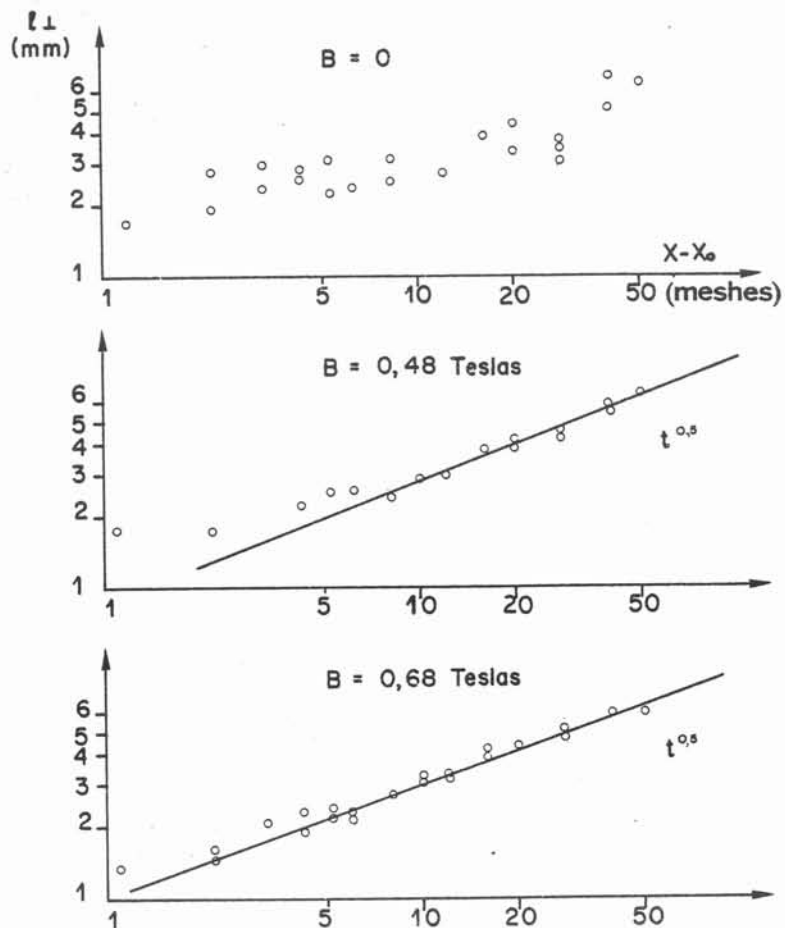


Figure 6. Evolution of the integral scale. distance to the grid X , effective origin $X_0 = 3$ meshes

6. HEAT DIFFUSION EXPERIMENTS

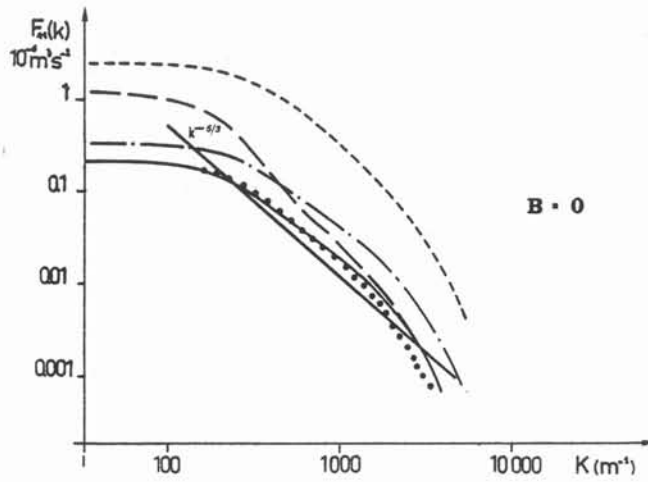
6.1. The experimental techniques

- Heat production :

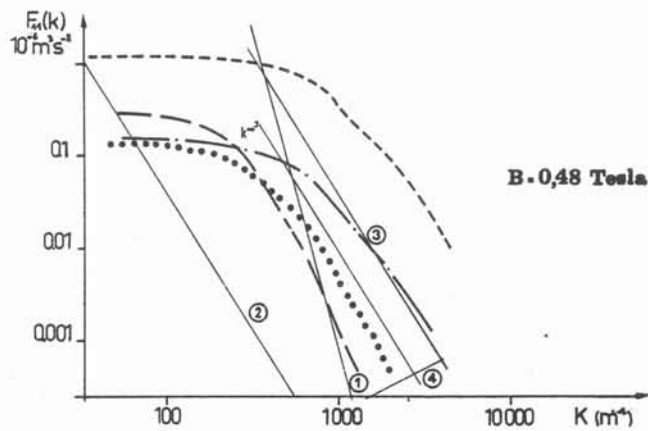
Electric heating is produced alternatively by two crossed wires (one parallel to the magnetic field i.e. horizontal, and the other one vertical), in order to allow comparison of the turbulent diffusions in the two perpendicular directions. Each of them is welded and stretched between two stainless steel rods ($\phi 2$ mm) which are supported by the honeycomb and the grid, at a distance of 10.5 meshes (5.2 cm). The wire is 0.2 mm in diameter, made of a Ni Cr alloy covered by a thin layer of epoxy resin. The power released per unit length is 5 Watts/cm, which is weak enough so that buoyancy effects are negligible.

- Temperature measurements

Temperature measurements are made by using the electric resistance of the conical probe, traversed by a weak constant electric current (20 mA), so that the overheating be negligible. Temporal mean temperature has to be computed during about one minute in order to get a reproducible result, but temperature drifts of mercury is sensible in such a time. In order to get rid of this problem, a special procedure is used. Heating is produced by a DC current (3 A) during 5 sec., the mean temperature being computed during the last 3.5 sec., in order to observe the steady behaviour. During the next 5 sec., the same operation is performed without heating, and the ambient temperature measured in this way is subtracted from the previously obtained mean value. All this procedure is repeated 10 times so that the effective integration time is 35 sec.



7.a



7.b

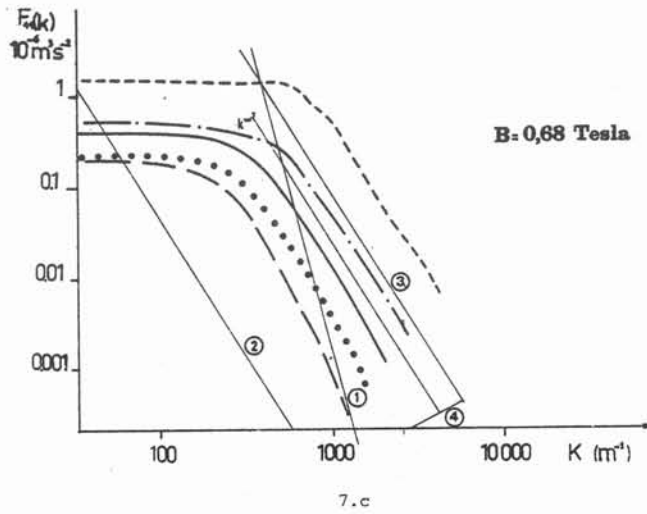
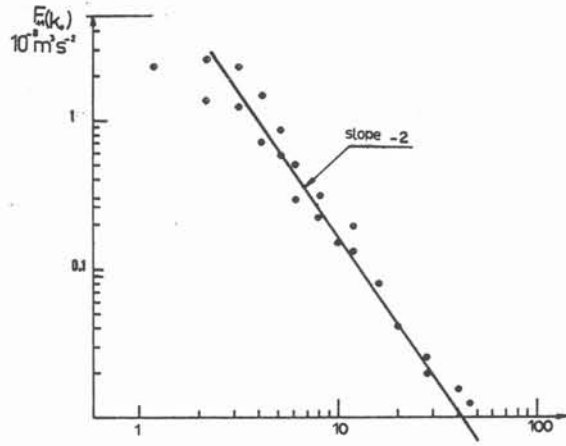
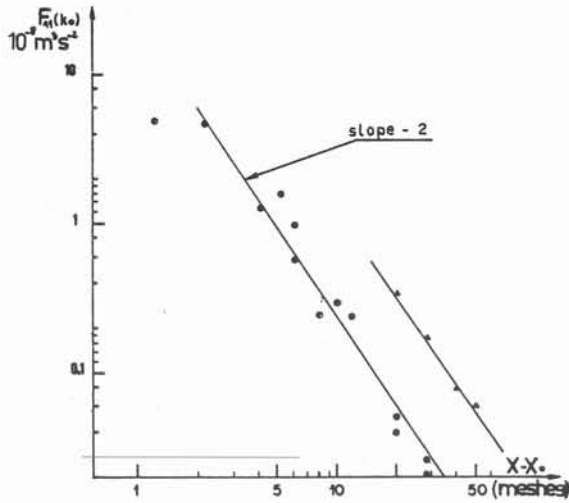


Figure 7. One dimensional spectra
 distance to the grid ----- 5.2 meshes a) $B = 0$
 ----- 11.2 " b) $B = 0.48$ Tesla
 ----- 19.2 " c) $B = 0.68$ Tesla
 31.2 "
 ----- 53.2 "

According to [18], the two-dimensional eddies are in the region between line 1 and 2. Below line 2, the eddies are still two-dimensional but the Hartmann friction typical time is shorter than the turnover time, so this effect is dominant. The quasi steady equilibrium between angular inertial transfers and Joule dissipation, proposed in [1], occurs between line 1, 3 and 4. Above line 3, the interaction parameter related to an eddy is smaller than 10, so the asymptotic case of strong magnetic fields is no more relevant. Below line 4, the Reynolds number of an eddy is less than 10; the intersection of the spectrum with line 4 defines a "Kolmogoroff scale" for this M.H.D. turbulence, above which viscous damping is important.



8.a



8.b

Figure 8. Spectrum evolution for a given wave number

- | | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------|
| ● | $k_0 = 2530 \text{ m}^{-1}$ | a) $B = 0.48 \text{ Tesla}$ |
| ▲ | $k_0 = 1240 \text{ m}^{-1}$ | b) $B = 0.68 \text{ Tesla}$ |

- Analysis of the signal

When the horizontal wire is heated, the vertical mean temperature profile $T(y)$ is obtained by locating the probe at different transverse positions in a plane containing the middle of the wire. From this profile, are computed the integral of T and of yT , which allows to determine the middle of the heated wake:

$$\bar{y} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y T(y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} T(y) dy}$$

The square of the heated wake width σ is then defined by

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{y})^2 T(y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} T(y) dy}$$

The same operations are performed in the perpendicular direction by heating the vertical wire.

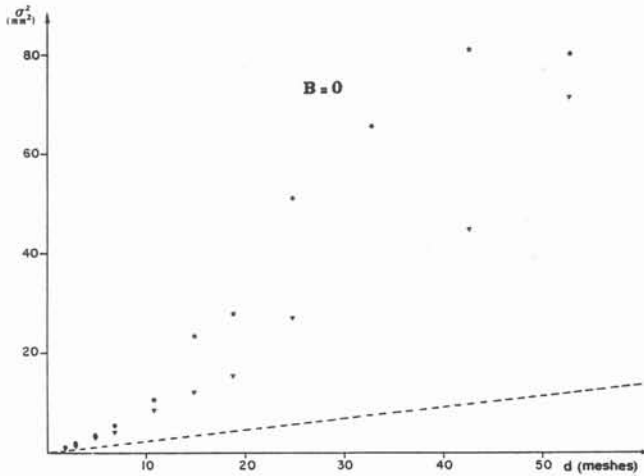
- Mean velocity measurements

The heating device is suitable to get very directly the mean velocity by measuring the transit time of a heat pulse from the wire to the temperature probe. This measure is used to calibrate the hot film probe.

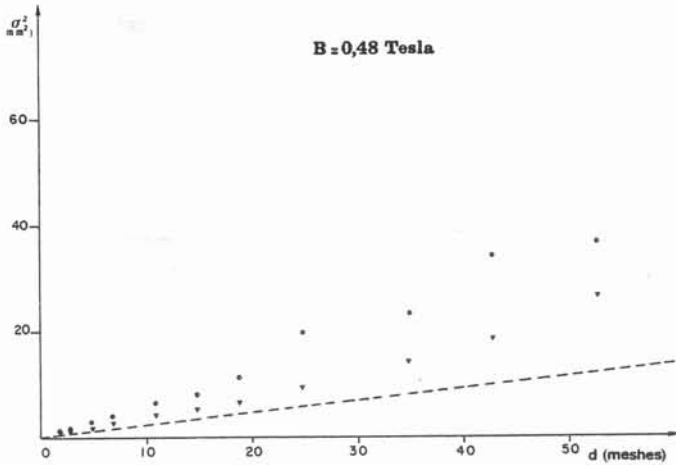
6.2. The results

Without the magnetic field, the temperature distributions are disymmetric and shifted from the channel center. These defects are a consequence of the already mentioned large scale instability. On the contrary the results obtained in the presence of a strong magnetic field are very reliable; they exhibit a good symmetry with the maximum mean temperature always closer than 1 mm to the mean position \bar{y} and to the channel center. Otherwise the spatial integral of T is constant at least with a precision of 10 %, which proves that the temperature profiles are uniform along the wire direction and that there are no sensible heat exchanges with the walls. A good homogeneity of the turbulence is thus suggested by these verifications, in spite of the unsatisfactory measurements with no magnetic field.

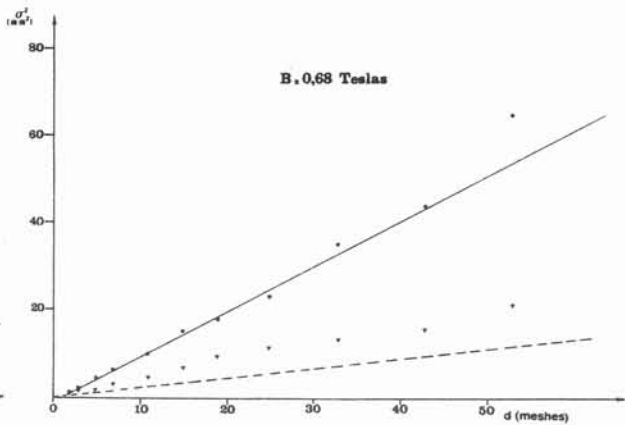
The evolution of the thermal wake squared width σ^2 downstream of the heated wire is plotted in fig. 9. The value which is calculated without any turbulent motion is indicated by a dotted line. This molecular diffusion appears to be relatively small but not negligible in the direction perpendicular to the magnetic field, while it can be preponderant in the other direction. The turbulent dispersion in the absence of molecular diffusion can be estimated by subtracting this calculated squared width to the measured one, although it is known to be a crude method. Anyhow it appears at the very first sight that the turbulent dispersion along the magnetic field direction is much weaker than along the perpendicular one, more especially far from the source and in a strong magnetic field. This is a further confirmation that the large eddies, which are the most efficient for dispersion, are two-dimensional.



9.a



9.b



9.c

Figure 9. Evolution of the squared width of the thermal wake

- Behind the wire parallel to the magnetic field.
- ▼ Behind the wire perpendicular to the magnetic field
- molecular diffusion (calculated).

Let us now discuss the results obtained for the dispersion in the plane perpendicular to the magnetic field of 0.68 Tesla. The evolution of σ^2 is in good agreement with the calculation of M. LARCHEVEQUE (to appear in this issue) using two-points closures in two-dimensions, and based upon the measured evolution of the turbulent energy and transverse integral scale. Otherwise the ratio σ/ℓ_{\perp} is observed to be constant at large distance from the source. This fact is characteristic of two-dimensional free-decaying turbulence and the value of the ratio is in good agreement with the theory of M. LARCHEVEQUE. Therefore, it can be conjectured that, even if the turbulence dynamics is not truly two-dimensional, the dispersion properties are well described

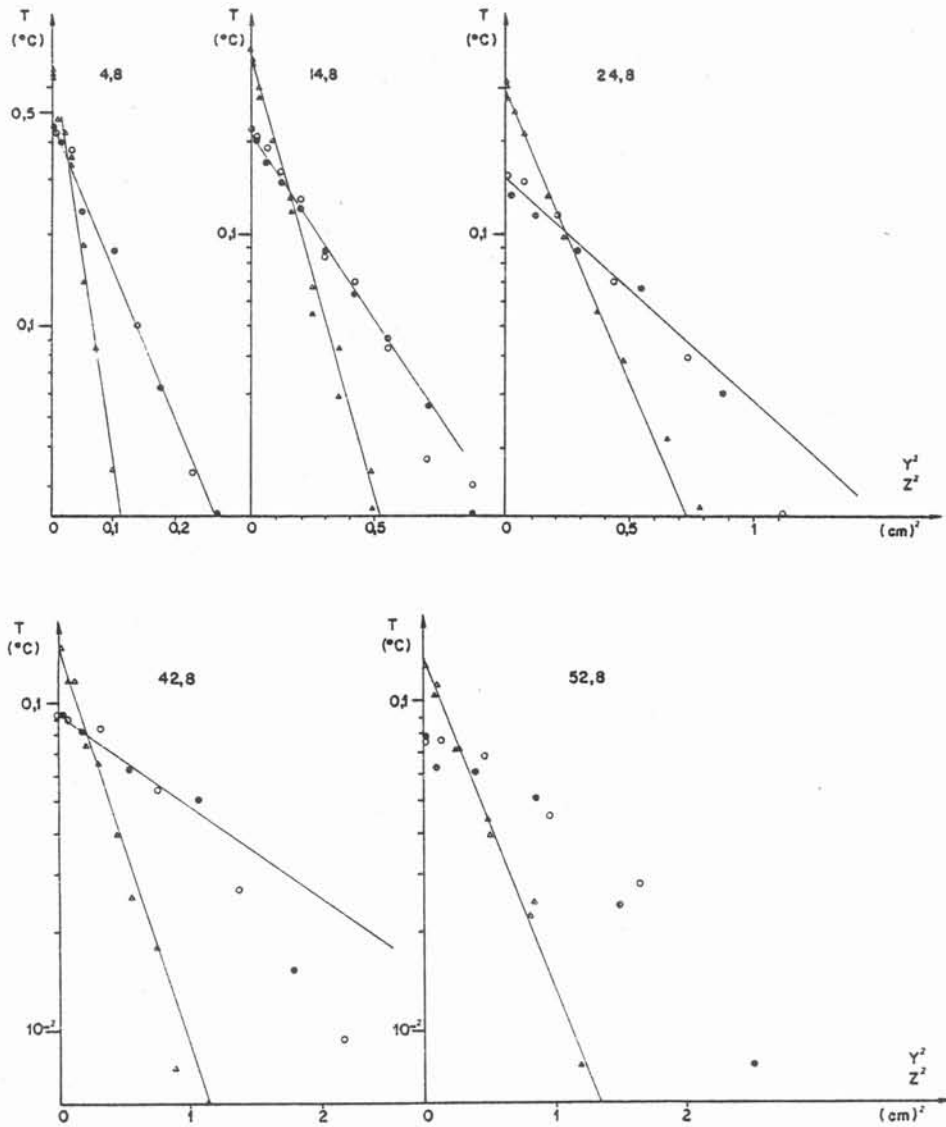


Figure 10. Shapes of the thermal wakes. $B = 0.68$ Tesla

The distance to the source is indicated above each diagram (in meshes)

- Wire parallel to the magnetic field $Y \geq 0$
- Wire parallel to the magnetic field $Y < 0$
- △ Wire perpendicular to the magnetic field $Z \geq 0$
- ▲ Wire perpendicular to the magnetic field $Z < 0$

by two-dimensional theories, provided the effective evolution of the turbulence characteristics (r.m.s velocity, transverse integral scale) are taken into account. The turbulence can be considered as kinematically two-dimensional.

The mean temperature profiles are plotted in fig. 10, where coordinates are chosen so that a gaussian distribution is represented by a straight line. Measurements have been reported for each side of the temperature profile, so the fact that the dispersion of the points around a single curve is weak shows that the symmetry is good. The shape of the temperature profiles is very close to a gaussian, except for $B = 0.68$ Tesla, far enough from the grid, where the maximum of the distribution gets more and more flattened. This behaviour at large distances is quite remarkable, since it could be argued that the position of a heated fluid particule is the result of many independant motions, so that the temperature distribution should be gaussian owing to the central limit theorem. An explanation must be found in the fact that the integral scale grows at the same rate as the heated wake and is always of a comparable size, and the above argument fails in these conditions. Nevertheless, a theory of the wake shape in a two-dimensional turbulence should allow a rich confrontation with experiments, and should be much welcome.

7. CONCLUSIONS

The effect of a strong magnetic field on the turbulence dynamics of channel flows with insulating walls is very drastic and observed phenomena are interesting. The decay rate of the kinetic energy is reduced and the growth of the integral scale is intermediate between that of a strictly two-dimensional flow and that of the homogeneous M.H.D. turbulence studied by ALEMANY and AL. [1]. The observed energy spectra in $t^{-2}k^{-3}$ indicate that the inertial transfers toward small scales are inhibited. The anisotropic turbulent heat diffusion shows that the component of the velocity fluctuations along the magnetic field direction is weak for the large scales.

These experimental results support the idea that this sort of turbulence should be described as a mixture of two kinds of eddies in interaction :

- large two-dimensional eddies only slightly influenced by the magnetic field according to the model of SOMMERIA and MOREAU [18] ;
- small three-dimensional eddies whose energy does support a significant Joule dissipation.

The very similar behaviour, of turbulence generated by an array of burs parallel to the magnetic field, and of turbulence generated by ordinary grids, suggests that a boundary conditions, at the insulating walls perpendicular to the field, play a predominant role in the maintenance of two-dimensionality. However the relative importance of the initial conditions appears difficult to estimate. More systematic experiments with different kinds of grids and with different channel widths would help to answer this question.

Anyhow this M.H.D turbulence appears to be a suitable tool for the experimental investigation of two-dimensional turbulence in the laboratory. The comparison of the present results of heat dispersion with the theory of M. LARCHEVEQUE (to appear in this issue) is a good example. The Hartmann braking have some analogy with the friction on bottom topography (Ekman friction) in ocean or atmosphere, but is linear and more simple to handle. The dynamics of three-dimensional fluctuations at small scales may be related to predictability problems in two-dimensional flows and is not complicated by wave propagation as in rotating fluids. So this M.H.D. turbulence is surely one of the most simple example of "real" two-dimensional turbulence and further investigations should be of great interest.

The author wishes to acknowledge with gratitude Professor R. MOREAU for having initiated this work, Mr. R. BOLCATO for constructing and maintaining the experimental facility, and Mrs M. LARCHEVEQUE and Professor M. LESIEUR for useful discussions.

REFERENCES

- [1] - ALEMANY A., MOREAU R., SULEM P.L., FRISCH U.
Influence of an external magnetic field on homogeneous turbulence,
J. de Mécanique, vol.18, n° 2, 1979
- [2] - BAINES W.D. and PETERSON E.G.
An investigation of flow through screens,
American Society of Mechanical Engineers, vol. 73, p. 467, 1951
- [3] - BRANOVER H.
Magnetohydrodynamic flows in Ducts,
Halsted , 1978
- [4] - BRANOVER H., GELF'GAT Y.M., KIT L.G., PLATNIEKS A.
Magn. Hidrod. , vol. 6, n° 3, pp. 41-49, 1970
- [5] - BRANOVER H. and GERSHON P.
Experimental Investigation of the origin of residual disturbances in turbulent M.H.D
flows after laminarization,
J. Fluid Mech., vol. 94, part 4, pp. 629-647, 1979
- [6] - CAPERAN P.
Contribution à l'étude de la turbulence homogène M.H.D. : lère caractérisation de son
anisotropie,
Thèse Docteur Ingénieur Grenoble, 1982
- [7] - COMTE-BELLOT G. and CORRISIN S.
The use of a contraction to improve the isotropy of grid generated turbulence,
J. Fluid Mech., vol. 25, part. 4, pp. 657-682, 1966
- [8] - HARTMANN J., LAZARUS F.
Experimental Investigations in the flow of mercury in homogeneous magnetic field,
Mat. Fys. Medd., vol. 15, p.7, 1937
- [9] - HUA H., LYKODIS P.
Turbulence Measurements in a Magneto-Fluid-Mechanic Channel,
Nuclear sc. and engin., vol. 54, p. 445, 1974
- [10] - KIT L.G, PLATNIEKS I.A
Variations of the intensity and spectra of the pulsations of the electric field along the
length of a rectangular channel in a constant transverse magnetic field,
Magn. Hidrod. n°3 pp. 43-47, 1971
- [11] - KOLESNIKOV Y.B., TSINOBER A.B.
Experimental investigation of two-dimensional turbulence behind a grid,
Izv. A.N.S.S.R, Mech. Zh. i . Gaza, vol. 4,p.146, 1974
- [12] - LEHNERT B.
The decay of magneto-turbulence in the presence of magnetic and Coriolis force,
Quart. App. Math., vol. 12, n° 4, p.321, 1955
- [13] - LIELAUSIS O.
Liquid Metal Magnetohydrodynamics,
Atomic Energy Review, vol. 13, n°3. 1975

- [14] - MOFFATT H.K.
On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field,
J. Fluid Mech., vol. 28, part. 3, pp. 571-592, 1967
- [15] - MURGATROYD W.V
Phil. Mag., vol. 44, p. 1348, 1953
- [16] - REED C.B., LYKOUUDIS P.S.
The effect of a transverse magnetic field on shear turbulence,
J. Fluid Mech., vol. 89, pp. 147-171, 1978
- [17] - ROBERTS P.H.
An introduction to Magnetohydrodynamics,
Lingmans, p. 137, 1967
- [18] - SOMMERIA J. and MOREAU
Why, How and When, M.H.D. becomes two-dimensional,
J. Fluid Mech. vol. 118, pp. 507-518, 1982
- [19] - VOTSISH A.D., KOLESNIKOV Y.B.
Spatial Correlations and Vorticity in two-dimensional Homogeneous Turbulence,
Magn. Gidrod., n° 3, pp. 25-28, 1976
- [20] - VOTSISH A.D., KOLESNIKOV Y.B
Transition from three-dimensional to two-dimensional turbulence in a magnetic field,
Magn. Gidrod. n° 3, p. 141, 1976

C H A P I T R E I V

TOURBILLONS PRODUITS PAR DES COURANTS ELECTRIQUES

Article soumis au J. Fluid Mech.

ELECTRICALLY DRIVEN VORTICES IN A STRONG MAGNETIC FIELD

Joel Sommeria MADYLAM, I.M.G., BP68 38402 St Martin d'Herès CEDEX

ABSTRACT:Electrically driven isolated vortices are produced in a horizontal layer of mercury submitted to a uniform vertical magnetic field. The flows are investigated from photographs of small particles following the free upper surface and from electric potential measurements. The purpose of this work is to discuss and test on simple examples the strong magnetic field approximation of the M.H.D. equations, which was used to interpret the experiences of two-dimensional (2-D) turbulence in Sommeria (1985). We are especially concerned by the mechanism of vorticity generation above the electrodes. The first example is a steady vortex generated around an electrode at the center of a circular tank, the current coming back through the lateral walls. The agreement with the high Hartmann number theory is excellent for moderate electric currents, when the parallel layer above the electrode is taken into account. The next examples are an isolated decaying vortex generated by a strong current pulse (coming back through the lateral frame), and a vortex couple of opposite sign produced by a current pulse running between two electrodes. Finally a vortex is produced near a straight wall and boundary layer detachment is observed, by which a second vortex of opposite sign is created.

1. INTRODUCTION

Electrically driven flows in a horizontal layer of mercury submitted to a uniform vertical magnetic field were recently investigated as examples of two-dimensional (2-D) turbulence (Sommeria 1985). The basic idea leading to such experiments is that the M.H.D. effects on the 2-D flow itself are unimportant, but the 3-D perturbations are strongly damped. The main direct influence of the magnetic field are a linear friction in the bottom Hartmann boundary layer and the forcing obtained by the interaction with the magnetic field of the electric current injected through electrodes. This 2-D approximation was directly tested by comparison with numerical calculations in a particular case by Sommeria & Verron (1984). It is also in good agreement with the observation that the results depend mainly on a non-dimensional number called R_h , which is the ratio between the time of Hartmann friction and a typical turnover time. If the 2-D approximation was not accurate, the experimental results could depend a priori on two non-dimensional parameters.

The situations investigated here are examples of M.H.D. flows with high values of the Hartmann number M (defined in next section), for which typical electromagnetic forces overcome viscous ones. The theory of such flows is well established, as far as non-linear effects are neglected, and is reviewed by Hunt & Shercliff (1971) and Shercliff (1975). Furthermore the conditions of application of this asymptotic theory are generally easily achieved in experiments with liquid metals. The key idea is that the fluid can be split into one or more quasi-inviscid core flows, separated or surrounded by thin boundary or shear layers of two kinds: Hartmann layers of thickness of order a/M on walls intersected by the magnetic field, and thicker layers of thickness of order $a/M^{1/2}$ parallel to the field (a is a typical length scale of the fluid domain). The later lie along the walls or

arise from geometrical or electrical discontinuities at the boundaries and follow the magnetic field lines. The linear theory is exact for unidirectional flows and is more generally a good approximation in extremely strong magnetic fields (very high interaction parameters). Non linear effects may be still important in a strong magnetic field in some circumstances. It is the case of the quasi 2-D flows which are investigated in the present paper. Some inertial effects can also be localized in parallel layers as it was studied by Hunt & Leibovich (1967), Kapila & Ludford (1977) and Tabeling & Chabrierie (1981).

While much attention was devoted to duct flows (Lielausis 1975, Branover 1978, Hua & Lykoudis 1974), relatively few experimental results were obtained in other configurations. Circular flows between 2 concentric cylinders, driven by a radial electric current were studied by Baylis (1971) and Tabeling & Chabrierie (1980). The circular jet obtained between two concentric annular electrodes in a axial magnetic field was investigated by Lehnert (1955) and Kalis (1978). A double chain of 2-D vortices was then observed as the result of an instability. Another kind of jet was obtained by Hunt & Malcolm (1968) and Malcolm (1970) around two circular electrodes set opposit to each other in a axial magnetic field. When the field is strong, the flow is limited to the parallel layer arising from the electrode edge and the current is confined to the cylinder of fluid joining the two electrodes.

The aim of this paper is to study simple flow configurations which are similar to the turbulent eddies of the above mentioned experiments of M.H.D turbulence (Sommeria 1985) in order to test the 2-D approximation. We are especially interested in the mechanism of vorticity generation at the electrodes by the interaction of the electric currents with the magnetic

field. Indeed, 3-D M.H.D. effects should first occur at that places. We first propose in section 2 a systematic derivation of the strong magnetic field approximation, taking into account the 2-D advection. The experimental facility is briefly described in section 3. The results for steady and decaying isolated vortices and for a couple of two opposite sign vortices are compared with theory in section 4. Finally the problem of the lateral boundary layer detachment is pointed out on the example of the interaction of a vortex with this wall.

2-THE BEHAVIOUR AT HIGH HARTMANN NUMBERS:

2-1 Equations and boundary conditions:

We consider an incompressible fluid, of conductivity σ , density ρ and kinematic viscosity ν in a tank with a flat horizontal bottom. We suppose that the lateral (vertical) boundaries are far enough so that their influence is negligible. We neglect the distortion of the free upper surface, so that the fluid is occupying the region between two horizontal parallel planes whose equations are $z=0$ and $z=a$, with respect to a set of cartesian coordinates (x, y, z) . Perfectly conducting electrodes are inset flush with the lower plane ($z=0$) and a uniform vertical magnetic field B_0 is applied. We suppose that the magnetic Reynolds number is small, which means that the magnetic field \vec{h} produced by the electric currents is negligible in front of \vec{E}_0 . Under these conditions the equations of magnetohydrodynamics write

$$(1) \quad d\vec{v}/dt = -1/\rho \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + 1/\rho \vec{j} \times \vec{B}_0$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$(3) \quad \vec{j} = \sigma (\vec{v} \times \vec{B}_0 - \nabla \phi)$$

where $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla$ and \vec{v}, P, \vec{j} and φ are velocity, pressure, current density and electric potential, respectively. It is often useful to take into account the condition of non-divergent electric current by introducing the induced magnetic field \vec{h}

$$(4) \quad \vec{j} = 1/\mu_0 \nabla \times \vec{h}$$

and to eliminate the potential φ by taking the curl of each term of the Ohm's law (3), which leads to

$$(5) \quad \nabla^2 \vec{h} = -\mu_0 \sigma B_0 \partial \vec{v} / \partial z$$

$$(6) \quad d\vec{v}/dt = B_0/\mu_0 \rho \partial \vec{h} / \partial z + \nabla^2 \vec{v} - \nabla P / \rho$$

The boundary conditions at the horizontal plane $z=a$ are (using rel. 4)

$$(7) \quad v_z = 0, \quad \partial v_x / \partial z = 0, \quad \partial h / \partial y - \partial h_y / \partial x = 0$$

and at the plane $z=0$, for a perfectly conducting electrode

$$(8) \quad \vec{v} = 0, \quad \partial h_x / \partial y - \partial h_y / \partial x = 0 \quad \text{outside the electrodes}$$

$$(9) \quad \vec{v} = 0, \quad \partial h_x / \partial z - \partial h_z / \partial x = 0, \quad \partial h_y / \partial z - \partial h_z / \partial y = 0 \quad \text{at the electrodes}$$

where \vec{v}_x is the horizontal projection of \vec{v} . We must also take into account that the total current I injected at an electrode is equal to the integral of the current density on this electrode

$$(10) \quad \iint j_z(z=0) = I$$

2-2 Asymptotic solutions for strong magnetic fields:

For large values of the Hartmann number $M = (\sigma/\rho)^{1/2} B_0 a$, the flow can be split into a core where vertical derivatives are weak and a thin Hartmann layer of thickness a/M near the bottom, as it was pointed out in the introduction.

a) The Hartmann layer

In this region the z derivative much exceeds the transverse ones, so one can drop out to a first approximation all the terms which do not involve z derivatives in equ. 5 and 6. The new equations can be integrated

easily with respect to the z variable, taking into account the boundary conditions for \vec{v} .

$$(11) \quad \vec{v}_z(x, y, z) = \vec{v}(x, y) (1 - e^{-zM/a})$$

$$(12) \quad \vec{h}_z(x, y, z) = \alpha \vec{v}(x, y) e^{-zM/a} + \vec{h}_s(x, y)$$

with $\alpha = \mu_0 (\rho \nu \sigma)^{1/2}$. Since \vec{v} and \vec{h} are non divergent

$$v_z = 0, \quad h_z = h_z(x, y)$$

As a consequence of rel.4 and the electric boundary conditions 9, in which the transverse derivatives must be neglected in front of the vertical ones

$$(13) \quad \vec{\nabla}_x (\alpha \vec{v} + \vec{h}_s) = \mu_0 \vec{j}_z(x, y)$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{at the electrodes}$$

where $\vec{j}(x, y)$ is the current density at the electrode surface.

When the outer velocity field $\vec{v}(x, y)$ is not unidirectional, some transverse secondary flows should appear in the Hartmann layer. These flows are calculated by Sommeria & Moreau (1982) as perturbations of the order of $1/M^2$ and $1/N$, where N is the interaction parameter defined from a typical velocity scale by

$$(14) \quad N = (\sigma B^2 / \rho) a / U$$

N is the ratio of a turnover time and a typical time of the electromagnetic effects. We shall not use such higher order calculations in the present paper and the analysis applies in the limit of large Hartmann numbers and large interaction parameters, the later condition being the most stringent one in liquid metals.

b) The outer flow

In the limit of very strong magnetic fields eq.5 is reduced to $\partial v / \partial z = 0$, so that the outer flow is 2-D. Its boundary conditions at the wall $z=0$ can be obtained by matching it with the asymptotic behavior of the Hartmann layer at large distances. So the outer velocity at the boundary

must be assimilated to $\vec{V}(x,y)$; its vertical component vanishes and it satisfies rel.13. At the free upper surface there is no Hartmann layer and the boundary conditions 7 are valid for the outer flow. A set of solutions corresponding to these boundary conditions is a 2-D velocity $\vec{V}(x,y)$ with no vertical component which satisfies.

$$(15) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \gamma \nabla^2 \vec{V} - \nabla P' / \rho + \vec{f}(x,y) - \vec{V}/t_w \text{ outside the electrodes}$$

$$\vec{V} = 0 \quad \text{at the electrodes}$$

$$(16) \quad \vec{h} = (\mu_0 \rho a / B_0) (f - V/t_w) (z/a - 1)$$

$$(17) \quad \nabla_{\perp} \times \vec{f} = (B_0 / \rho a) j_z(x,y)$$

So the resulting electromagnetic effects on the 2-D flow are a linear friction with a characteristic time $t = (\rho/\sigma)^{1/2} a/B$ and a vorticity source or sink proportional to the electric current j_z . If the upper surface is rigid the result is similar but the linear friction is twice larger and the source term should include currents which are eventually injected at the top. The solution is generally not continuous at the electrode edge and a special calculation of the corresponding parallel layer should be made to match the two regions. There is also a similar problem near the lateral boundaries. A more complete calculation, including the parallel layer, is made in next section in the simple case of an axisymmetric electrically driven vortex, in which velocity is small enough so that secondary flows are negligible.

The preceding asymptotic results for strong magnetic fields can be tested by substituting the result 16 in equ.5, which yields

$$(18) \quad (z-a) \nabla_{\perp}^2 (\vec{f} - \vec{V}/t_w) = -(\sigma B_0^2 / \rho) \partial \vec{V} / \partial z$$

which solution is

$$(19) \quad \vec{V} = \vec{V}(x,y) + (\rho/\sigma B_0^2) \nabla_{\perp}^2 (\vec{f} - \vec{V}/t_w) (az - z^2/2)$$

Outside the parallel layers, the horizontal viscosity effects are

negligible and $\vec{f} = \vec{v}/t_w \approx d\vec{v}/dt + \nabla P'/\rho$. This quantity is generally different from zero, when the flow is not steady and its order of magnitude is U^2/L . So the ratio of the 3-D component and the 2-D one is of the order of $N^{-1} (a/L)^3$. It is negligible in the limit of large interaction parameters, so the 2-D approximation is consistent with that of the unidirectional Hartmann layer.

c) Stability of the 2-D flow

We have just obtained a class of asymptotic solutions of the M.H.D. equ. 5 and 6, in the limit of large Hartmann numbers and large interaction parameters. To have a physical reality, these quasi 2-D flows should not be strongly modified by small perturbations. Two kinds of instabilities can be expected according as the Hartmann layer or the outer flow is concerned.

The linear stability problem for the unidirectional Hartmann layer was solved by Lock (1955). The direct effect of the magnetic field on the infinitesimal perturbations is negligible, because their typical lengthscale is small, of the order of the layer thickness a/M . So the stability problem is identical as for the ordinary exponential boundary layer, obtained for example with a suction at the wall. The important parameter is the Reynolds number calculated with the layer thickness Re/M . Lock finds that the critical value of this parameter is 50000, in fairly good agreement with earlier calculations for the suction profile. The experimental results in ducts are far smaller, about 250 (Gef'gat et al. 1971, Hua & Lykoudis 1974), and it should correspond to the effect of finite perturbations. This later value should be considered as the practical one in our experiments, all the more as the secondary flows associated with the curvature of the outer velocity streamlines could be an important source of finite perturbations. So in addition to the condition of large Hartmann number and large values of the interaction parameter $N = M^2/Re$, the number M/Re must be definitely

greater than $4 \cdot 10^{-3}$ for the 2-D equ.15 to be valid. If the later condition is not satisfied, the bottom friction could be greater than the theoretical one, due to the broadening of the Hartmann layer by small scale turbulent fluctuations.

The stability of the 2-D outer flow to 3-D perturbations is due to the growth of decorrelations in different horizontal planes. This growth can be related to the unpredictability of the 2-D motion (Sommeria & Moreau 1982). The stabilizing effect of the magnetic field over these advective effects is characterized by the interaction parameter. The 2-D flow should be stable to 3-D perturbations if this later is large enough, although it is difficult to give critical values for a definite velocity field. Since the interaction parameter is proportional to the lengthscale, 3-D perturbations should first appear in small structures, as for example in the neighborhood of the electrodes.

2-3 An electrically driven steady vortex

A steady current I flows from the central electrode to the frame through the fluid, stimulating it into a circular motion (fig.1,2). This situation can be first analysed by the 2-D equ. 15 and rel.17. If viscosity is neglected, a steady axisymmetric solution is immediately obtained for the tangential velocity component v_θ

$$(20) \quad v_\theta = \Gamma/r, \quad \Gamma = \frac{I}{2\pi(\sigma\mu\rho)^{1/2}}$$

and the magnetic field \vec{h} vanishes. Vorticity generated at the electrode is confined on it. The electric current vanishes in the bulk flow, and Ohm's law 3 is reduced there to $\nabla\phi = \vec{v} \times \vec{B}$, so that the electric resistance is

$$(21) \quad R = (\psi(L) - \psi(b))/I = \frac{B_0}{2\pi(\sigma\mu\rho)^{1/2}} \ln L/b$$

Let us now take into account the correction due to viscosity effects in the vortex core, but neglect radial and vertical velocity components. This

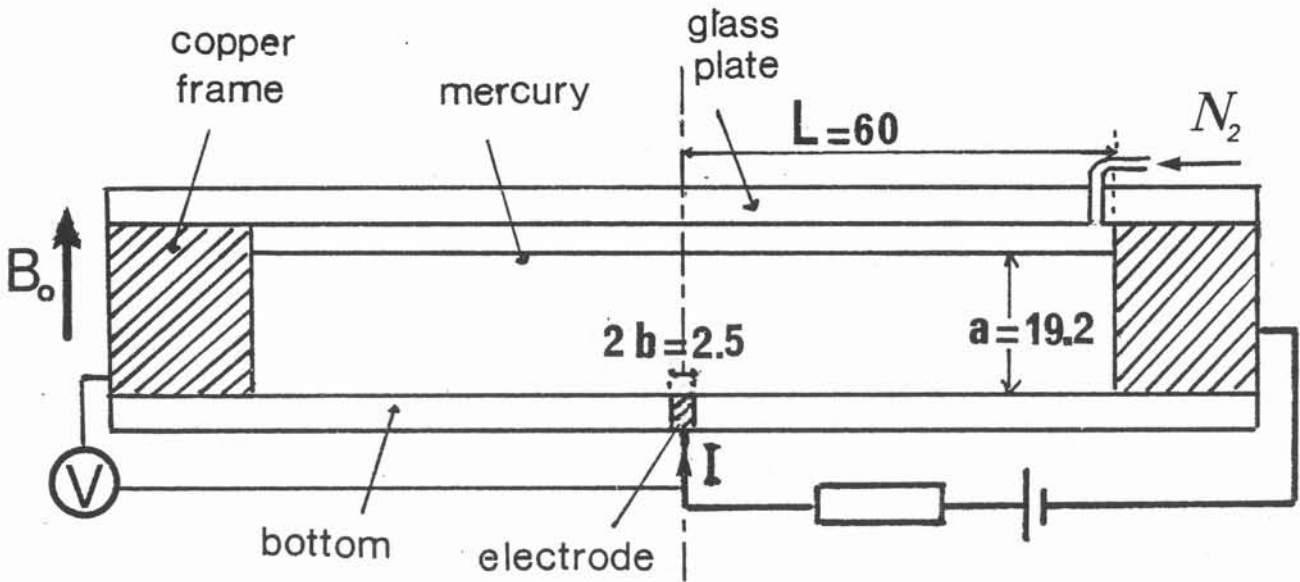


Fig.1 :Cross section of the circular tank with a schematic representation of the current supply and potential measurement device. Dimensions are indicated in mm.

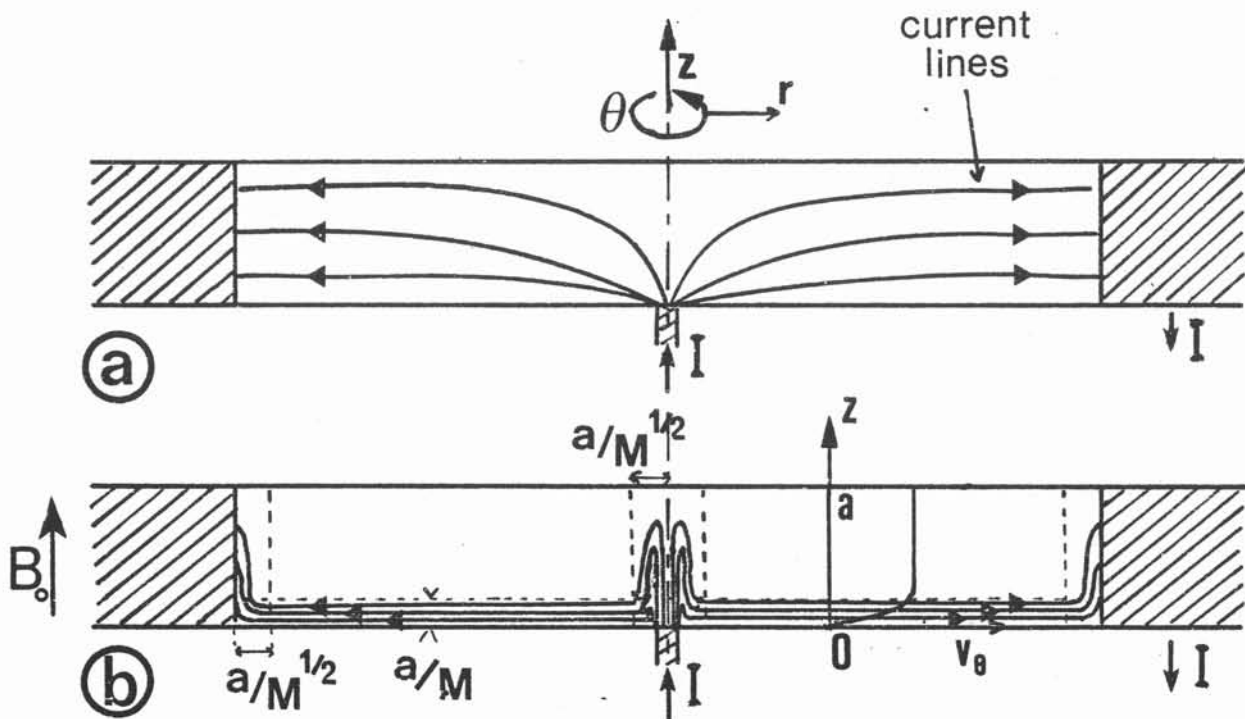


Fig.2 :The electric current streamlines (a) without magnetic field, (b) in a strong magnetic field. The Hartmann layer and the two kinds of parallel layers are represented, as well as a typical velocity profile.

approximation is valid for small electric currents. Then equ. 1 to 3 are identical to the ones of Hunt & Stewardson(1968) in a set of cylindrical coordinates (r, θ, z) .

$$(22) \quad 0 = M \partial h / \partial f + D_x (\chi v) + \partial^2 v / \partial f^2$$

$$(23) \quad 0 = M \partial v / \partial f + D_x (\chi h) + \partial^2 h / \partial f^2$$

$$(24) \quad -\partial h / \partial f = -\partial \bar{\phi} / \partial \chi + Mv, \quad \partial h / \partial \chi + h / \chi = -\partial \bar{\phi} / \partial f$$

$$(25) \quad D_x = \partial / \partial \chi (1 / \chi \partial / \partial \chi), \quad v = (2\pi \sqrt{\sigma \rho} a / I) v_0, \quad h = (2\pi a / I) h_0, \quad \bar{\phi} = (2\pi a \sigma / I) \phi$$

$$\chi = r/a, \quad f = z/a, \quad l = b/a$$

This problem was solved directly by means of Bessel functions of χ by Kalis et al. (1980). However the convergence of this method is very poor for large Hartmann numbers. Furthermore the authors suppose that the current distribution in the electrode is not influenced by the fluid motion, which is a wrong assumption in a strong magnetic field.

It is then necessary and anyhow much better for a physical understanding to consider separately the Hartmann layer and the outer flow. The boundary conditions 13 and 7 for the later become

$$(26) \quad (v+h)_{(f=0)} = 1/\chi \text{ for } \chi > 1, \quad \psi_{(f=0)} = 0 \text{ for } \chi < 1$$

$$(27) \quad \partial v / \partial f_{(f=1)} = 0, \quad h_{(f=1)} = 0$$

The problem for the outer flow is mathematically isomorphic to that of Hunt & Stewardson(1968), which is obtained from the present one by interchanging h and v and making a symmetry around the plane $f=1$. However the physical situation is quite different: the flow was restricted to a parallel layer around the electrode and the magnetic field decreased as $1/\chi$ in the former case, while the reverse situation occurs here. The problem can be solved by adding and substrating equ. 22 and 23, which leads to a set of two equations for the two independent variables $v+h$ and $v-h$, after dropping out the second order z derivatives which should be negligible in the outer flow.

$$(28) \quad -M \partial(v+h)/\partial \mathfrak{f} = D_X (\chi(v+h))$$

$$(29) \quad M \partial(v-h)/\partial \mathfrak{f} = D_X (\chi(v-h))$$

The boundary conditions for the new variables are

$$(30) \quad (v+h)_{(\mathfrak{f}=1)} = (v-h)_{(\mathfrak{f}=1)}$$

$$(31) \quad (v+h)_{(\mathfrak{f}=0)} = -(v-h)_{(\mathfrak{f}=0)} \text{ for } \chi < 1, \quad (v+h)_{(\mathfrak{f}=0)} = 1/\chi \text{ for } \chi > 1$$

each of equ. 28 and 29 is formally analogous to a time dependant diffusion equation, the "time" being either \mathfrak{f}/M or $-\mathfrak{f}/M$. Analytical solutions can be obtained for a point electrode as in Hunt & Williams (1968) and for $M^{1/2} \gg 1$ as in Hunt & Stewardson (1968). In this later case, the parallel layer arising from the edge of the electrode is much thinner than the radius of the electrode and can be considered as locally straight. In the former case, the "parallel layer" is reduced to a small circular region around the point electrode and the solution writes

$$(32) \quad v = -1/\chi + \{ \exp(-M \chi^2/4 \mathfrak{f}) + \exp(-M \chi^2/4(2-\mathfrak{f})) \} / 2\chi$$

$$(33) \quad h = \{ \exp(-M \chi^2/4(2-\mathfrak{f})) - \exp(-M \chi^2/4 \mathfrak{f}) \} / 2\chi$$

The potential difference between the electrode and a circular frame at a distance L (Fig.1) can then be calculated from rel. 22, by an integration along the radius, and the result writes for large L

$$(34) \quad \bar{\phi}(L,0) - \bar{\phi}(b,0) = -M \ln L/b + M/4 \int_{M^{1/2}}^{\infty} e^{-x} / x \, dx + 1/8 e^{-M^{1/2}/8}$$

An exact calculation taking into account the finite size of the electrode can be made by a simple numerical method, the principle of which is the following. Starting at $\mathfrak{f}=0$ with $v+h=1/\chi$, $\chi > 1$ and a guess for $\chi < 1$, for example $v+h=0$, equ. 28 is integrated to give the distribution of $v+h$ at $\mathfrak{f}=1$. This distribution can be considered as an initial condition for $v-h$ in equ. 29 by means of rel. 27. This equ. can be then integrated, which leads to a new value for $v+h$ at $\mathfrak{f}=0$, $\chi < 1$ (by rel. 26). This forward and backward process is repeated until the boundary conditions are no more modified, which happens fairly quickly (a precision of 10^{-3} is obtained after

3 iterations of this process). The numerical scheme for integrating the diffusion equation is the standard explicit finite difference method. The profile of χv at the free surface calculated by this method is represented in fig.4 and the variation of the electric resistance $\bar{\rho}/I$ with the magnetic field in fig.5. The difference with the results 32 and 34 is small, except for the velocity in the close neighborhood of the electrode.

3 THE EXPERIMENTAL DEVICE

The magnetic field is provided by an electromagnet which was initially conceived for investigating M.H.D. duct flows. With a DC power supply of 120A and 200V, a field of 1 tesla can be produced in a gap of thickness 6cm and section $20 \times 56 \text{ cm}^2$. The field uniformity is better than 1% in the fluid.

The main facility is a closed circular box containing an horizontal layer of mercury, made of an insulating bottom plate in which a circular central electrode is inset flush ($\varnothing 2.5 \text{ mm}$), a copper frame and a plexiglass cover (fig.1). Velocity is kept small enough ($< 10 \text{ cm/s}$), so that the upper surface is only gently distorted from an horizontal plane. Great care is necessary to avoid mercury pollution in order to keep a really free upper surface. For this purpose, hexadistilled mercury is decanted during one hour and the lower part is slowly poured directly in the tank in a argon atmosphere. Also the inside of the apparatus is permanently submitted to a slight pressure of pure nitrogen (U quality), the insulating part are covered with polypropylene and the copper parts (electrodes and frame) are protected by a nickel layer ($50 \mu\text{m}$ thick) followed by a very thin gold coating. Nickel is chemically deposited and gold is coated by an electrolytic process after an electrocleaning. Gold is dissolved at the first contact with mercury but the underlying nickel is then very clean and the electric contact is excellent

as long as the tank is not emptied (the contact resistance is less than $10^{-3} \Omega/\text{mm}^2$). The walls are highly polished to avoid perturbations of the boundary layers. Temperature is maintained constant at $14^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$ by the iron of the electromagnet and its cooling circuit. In these conditions, mercury viscosity is $\nu = (1.17 \pm 0.01) 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, density is $\rho = 1.355 \cdot 10^4 \text{ kgm}^{-3}$, and conductivity $\sigma = (1.05 \pm 0.002) 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

The flow investigation is performed by two methods. The first one is direct photography of the trajectories of small aluminized rilsan particles ($\emptyset 50\mu\text{m}$) following the free surface. These particles are sprinkled on mercury under argon atmosphere before fixing the cover and remain there during the full series of experiments. A lateral illumination is provided by two pole apart sets of optic fibres. The time of exposure is precisely controlled by an external electrically driven diaphragm shutter. The instantaneous velocity field can be then calculated from the small approximatively straight photographic traces. Because of the presence of the electromagnet iron above the free surface, a 45° mirror must be used, and a 2cm wide band can be visualized at a given time. The second method is the measurement of the total potential difference between the electrode and the frame. This low voltage ($\ll 1\text{mV}$) is amplified 5000 times by a stable low noise operational amplifier. Since the entry impedance is very small, the electronic noise is weak. Furthermore a low pass filter is used, so that voltages as small as $.5 \mu\text{V}$ can be measured. This potential is not a local quantity, like pressure drop in a duct flow, but it can be obtained very precisely.

Beside this circular box, a similar square tank (side 12cm), used by Sommeria (1985), with a bottom containing a regular network of 36 electrodes is used to generate one or two isolated vortices by current pulses and to study their evolution.

4-THE EXPERIMENTAL RESULTS

4-1 The steady vortex

A steady current is injected at the box center and comes back through the frame. Without magnetic field the electrical resistance of the experimental cell is equal to 0.56 mΩ. Since the copper conductivity is about 100 times greater than the mercury one, the potential distribution in mercury is analogous to the electrostatic potential near a conducting disk. It can be calculated analytically, if we assume that mercury is a semi-infinite medium, and the result is $R = 1/4\sigma b = 0.19 \text{ m}\Omega$. If we add to this theoretical value the resistance of the copper part 0.13 mΩ, an excess of 0.24 mΩ still exists, and it should be imputed to contact resistance. This value is weak and reproducible, even after mercury being renovated.

When the magnetic field is applied, a smooth vortex is obtained (fig. 3) and no fluctuations are observed on photographs or on time records of the electric potential. Relative velocity fluctuations are certainly smaller than 10^{-3} . So it appears that the flow is much stable under the joint effect of magnetic field and rotation. The current is limited at 400 mA to avoid an excessive hollowing of the free surface near the vortex center.

The velocity profile obtained from photographs is plotted in fig. 4. Vorticity $1/r \partial(rv_\theta)/\partial r$ is restricted to the neighborhood of the electrode as it should, and the momentum rv at large distances is equal to the theoretical one (rel. 20). Furthermore the profile near the center is in good agreement with the more complete calculation of section 2-3, when the electric current is small (< 50 mA). With larger values, for example 200 mA, the vortex core is broadened (fig. 4), which can be explained by the transport of vorticity by weak radial secondary flows, not taken into account by the theory. These secondary flows are also directly revealed by the fact that the particles used for visualizations are slightly pushed away from the

center.

The increase of the electric resistance with the magnetic field is very important (fig.5), which corresponds to a remarkable feature. Without magnetic field the resistance is mainly due to the neighborhood of the electrode where the current density is strong. In a large magnetic field the whole current flows in the thin Hartmann layer, where it is not opposed to the electromotive force $\vec{v} \times \vec{E}_0$ and the contribution to the resistance of regions far from the electrode decreased only logarithmically with the radius. For small currents, the agreement with rel.21 is already fairly good and it is excellent with the precise numerical calculation (fig.5). This result is a very direct verification of the Hartmann layer thickness by means of its electrical resistance. The theoretical curve of fig.5 is obtained after a correction is made to take into account the spurious resistances (of the copper part and its interface with mercury). For this correction, the contact resistance is supposed to be the same as without magnetic field. It is probably underestimated by this method, since the current lines are more confined near the electrode edge in a strong magnetic field, and the current density at the surface is greater. One could explain by this effect that the experimental results for a current of 6.5 mA are slightly (1%) above the theoretical one.

For larger values of the current, the resistance decreases, as a consequence of the core broadening. The difference with the linear theory, represented in fig.6, is proportional to the electric current near the coordinate origin of the graph. This result is surprising since it can be shown, from the physical symmetries of the problem, that a development of $\bar{\Omega}$ as a function of I must only include even powers of I . In other words, the electric resistance $\bar{\Omega}/I$ should not be modified when the sign of I is

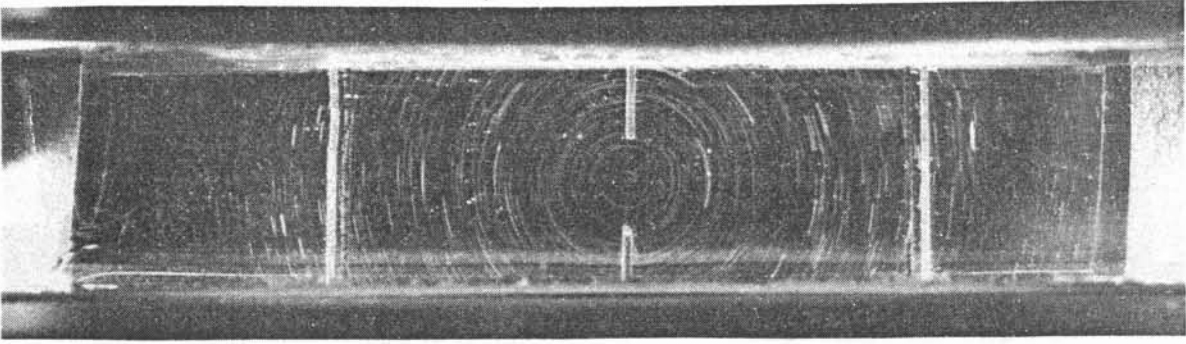


Fig.3 :Photograph of small particle trajectories in a steady vortex.The band of the free surface is observed by means of a 45° mirror. $B = 0.48$ T, $I = 50$ mA, exposure time 0.1 s.

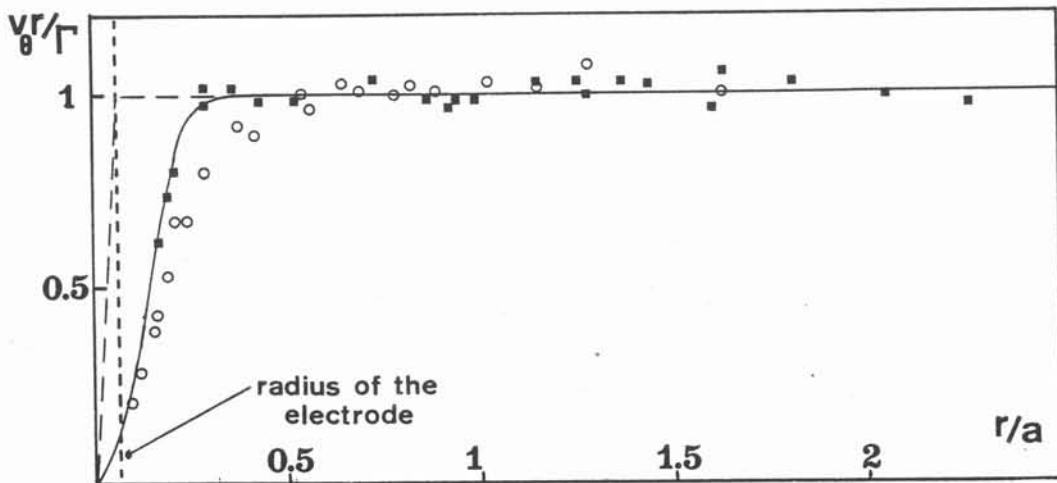


Fig.4 :Variations of the non-dimensional momentum $v_{\theta} r / \Gamma$ versus the non-dimensional radius r/a , obtained from photographs. \blacksquare $I = 50$ mA, \circ $I = 200$ mA. The full line is the numerical solution of equ.29 and 30.

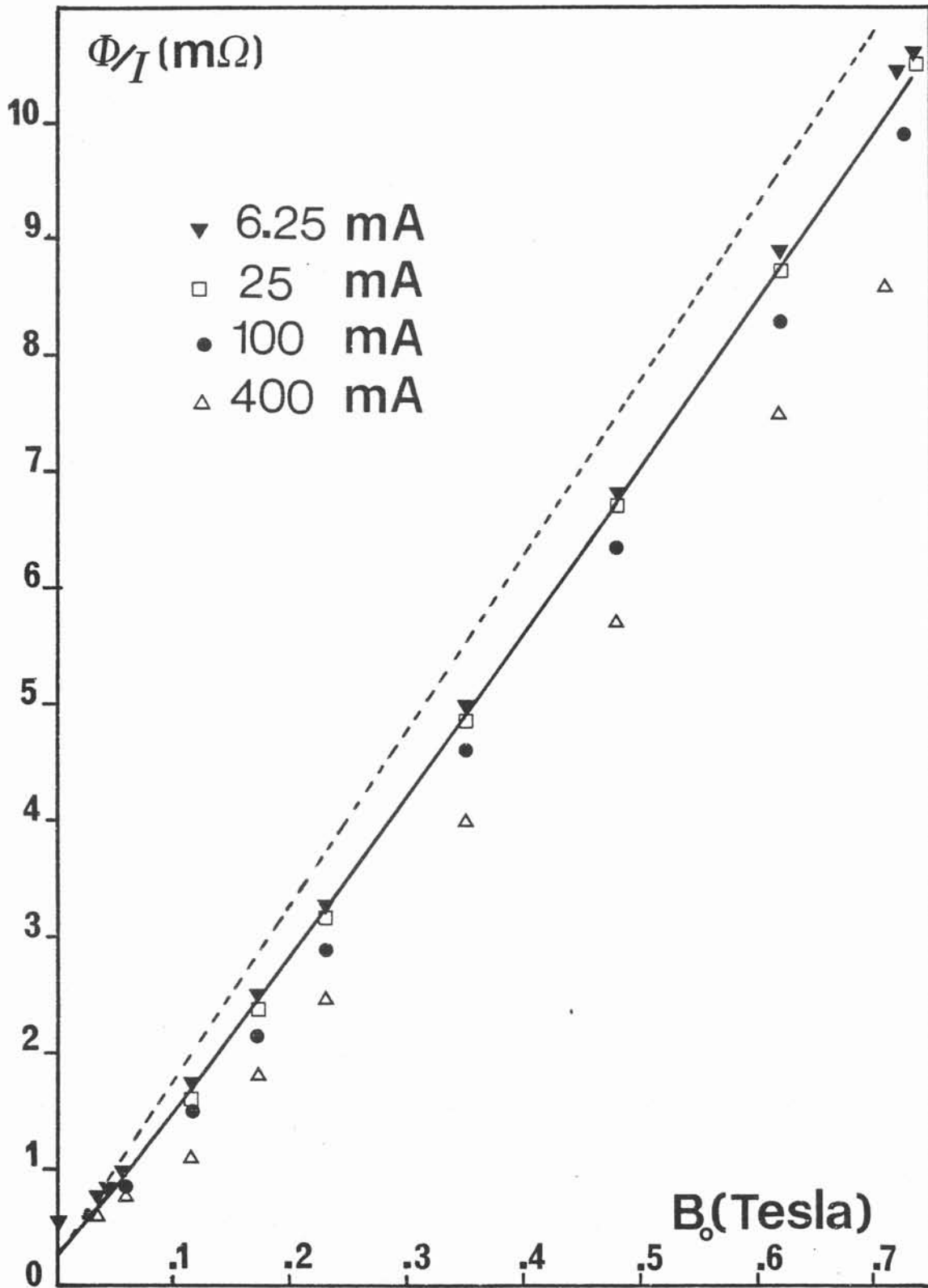


Fig.5 : Increase of the electrical resistance with the magnetic field B_0 for different values of the current I . The theoretical result (rel.22) for a 2-D vortex is represented by a dotted line and the result from the numerical resolution of equ.29 and 30 is represented by a full line.

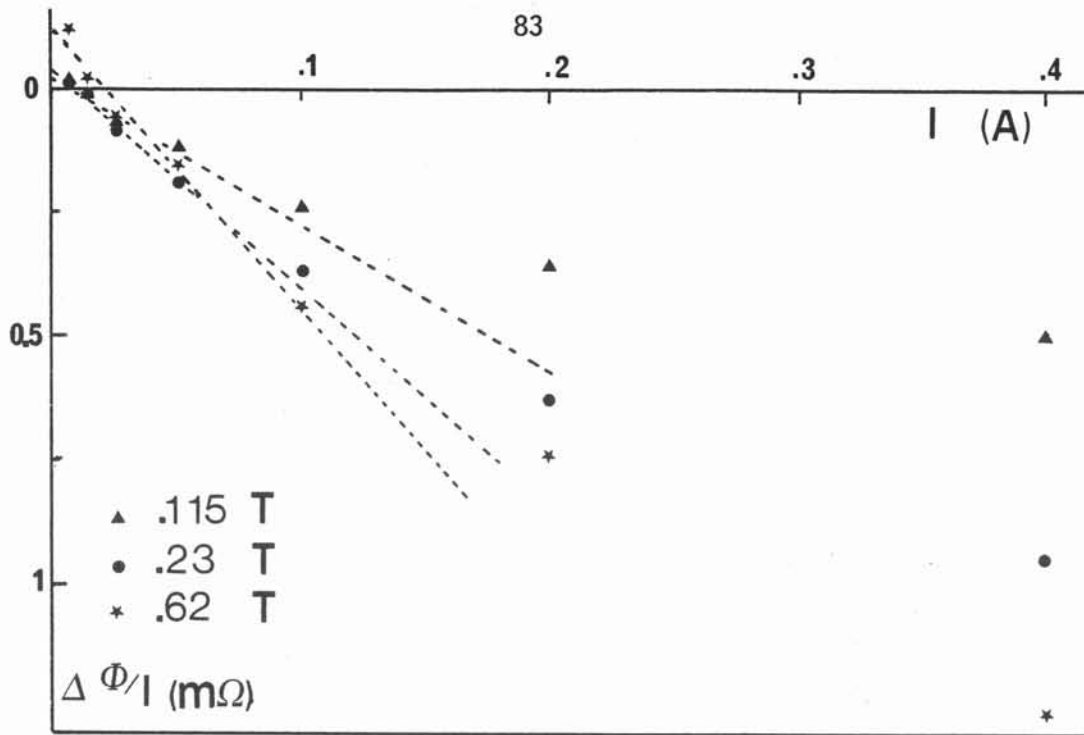


Fig.6 :Difference between the linear theory(full line of fig.5) and the experimental measurements versus the electric current,for different values of the magnetic field(indicated in teslas).The experimental tangents at the origin are represented by dotted lines

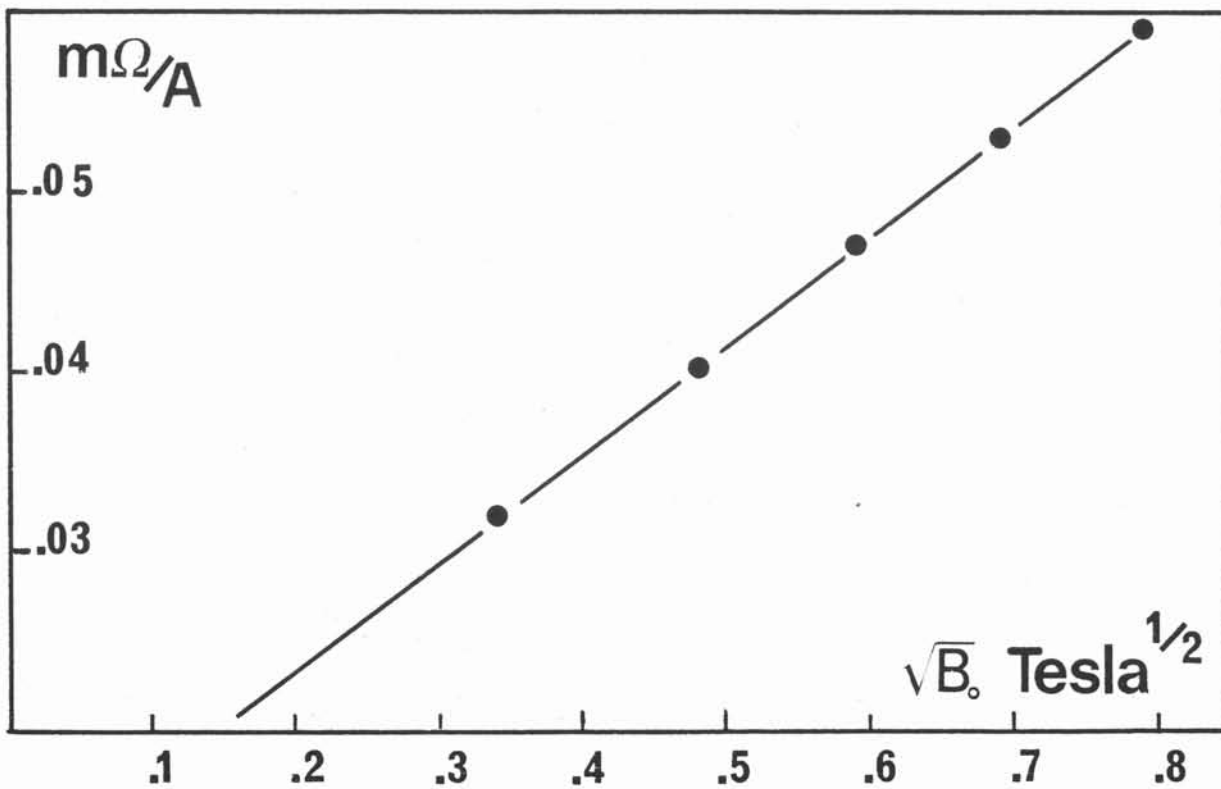


Fig.7 :The linear variations of the slope at the origin of fig.6 versus the magnetic field square root.

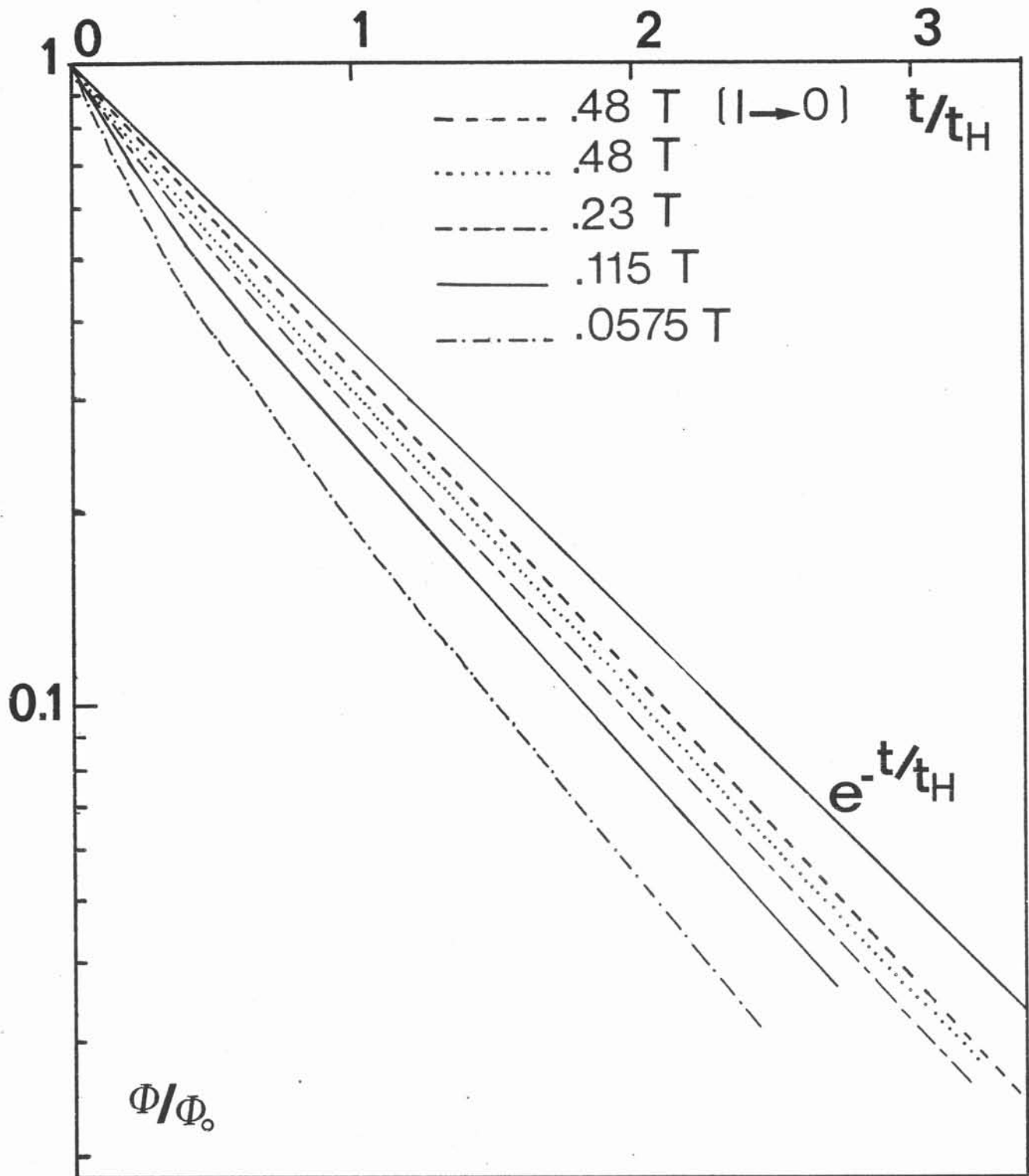


Fig.8 :Decay of the electric potential at the electrode versus the non-dimensional time t/t_H , for different values of the magnetic field. At time $t=0$, the steady electric current 50 mA is switched off. The theoretical decay $\exp(-t/t_H)$ is represented by a full line and the experimental result in the limit of small initial velocity by a dotted line.

changed (and indeed it does not in the experiments). So we are already beyond the small perturbations from the linear theory, for the smallest electric current which is applied (6.5 mA). However, the non linear effects, although they are strong, are limited to a neighborhood of the electrode, which is smaller as the current is decreased. The slopes at the origin in fig. 5 are a linear function of $B_0^{1/2}$ (fig. 6), which could be an indication that the variations of \bar{Q}/I are associated to the parallel layer arising from the electrode edge.

4-2 The decaying vortex:

When the current is switched off in the preceding experiments, the voltage decreases slowly, due to the vortex decay. In fig. 7, the evolution of the electric potential is compared to the decay e^{-t/t_H} of a 2-D flow, due to Hartmann friction. The observed rate of decay depends on the initial velocity, related itself to the driving current in the previous steady situation. In the case of strong magnetic fields and small initial currents, for which secondary flows should be negligible, the characteristic time of decay is $0.91 t_H$. The discrepancy with theory should be due to a progressive rearrangement of the vortex core during the decay. When the magnetic field is small or the electric current large, the rate of decay is faster at the beginning and reaches progressively a value close to 0.91, when velocity has become small enough. This behavior is represented in fig. 7 for a initial current 50 mA and different values of the magnetic field.

4-3 Isolated vortices generated by current pulses:

The case of a steady vortex is a very special one among the quasi 2-D flows described by equ. 15. In more complex situations in which electrodes are used to generate vorticity, one can consider in a schematic way that many short current pulses generate different vortices which are then

convected at different places by the 2-D velocity field. To have a simple approach of this situation, let us study the evolution of one isolated vortex generated by a short current pulse. At the very beginning, the flow is 3-D, under the influence of the 3-D driving force. However after a very short initial stage of duration $\approx \rho / \sigma B_0^2$, the current distribution is modified by the motion, and the flow should become 2-D by the electromagnetic diffusion process. The driving force of the 2-D approximation can be obtained from rel. 17, using axisymmetry

$$(35) \quad f = B_0 I / 2\pi \rho a$$

If we suppose that this force overcomes all other terms in equ. 15 during the current pulse of duration τ , the momentum of the generated vortex is

$$(36) \quad \Gamma_0 = (B_0 I \tau / 2\pi \rho a)$$

After this initial stage, an exponential decay, with a characteristic time t_m , should occur.

Electric pulses of 2A during $\tau=0.3s$ are injected in still mercury, and the magnetic field is 0.5 or 1 tesla. The time origin is taken at the middle of the pulse. Velocity profiles are obtained from successive photographs with a period of 0.5s. An excellent quality of the free surface is especially required. Indeed the fluid is initially at rest, so that the eventual thin film of impurities is not broken by the previous motion.

The momentum ρv_0 does not depend on the radius at large distances, but its value is about 10% smaller than Γ_0 , the theoretical one. The vorticity profile in the vortex core is very different than in the steady case since the central positive area is surrounded by a screen of negative vorticity. This structure should be the result of strong secondary flows occurring during the initial current pulse. Indeed the driving force at the beginning of the current pulse is associated to a 3-D current distribution. The further evolution is an exponential decay (fig.10) without

$v_{\theta} r / \Gamma_0$

87

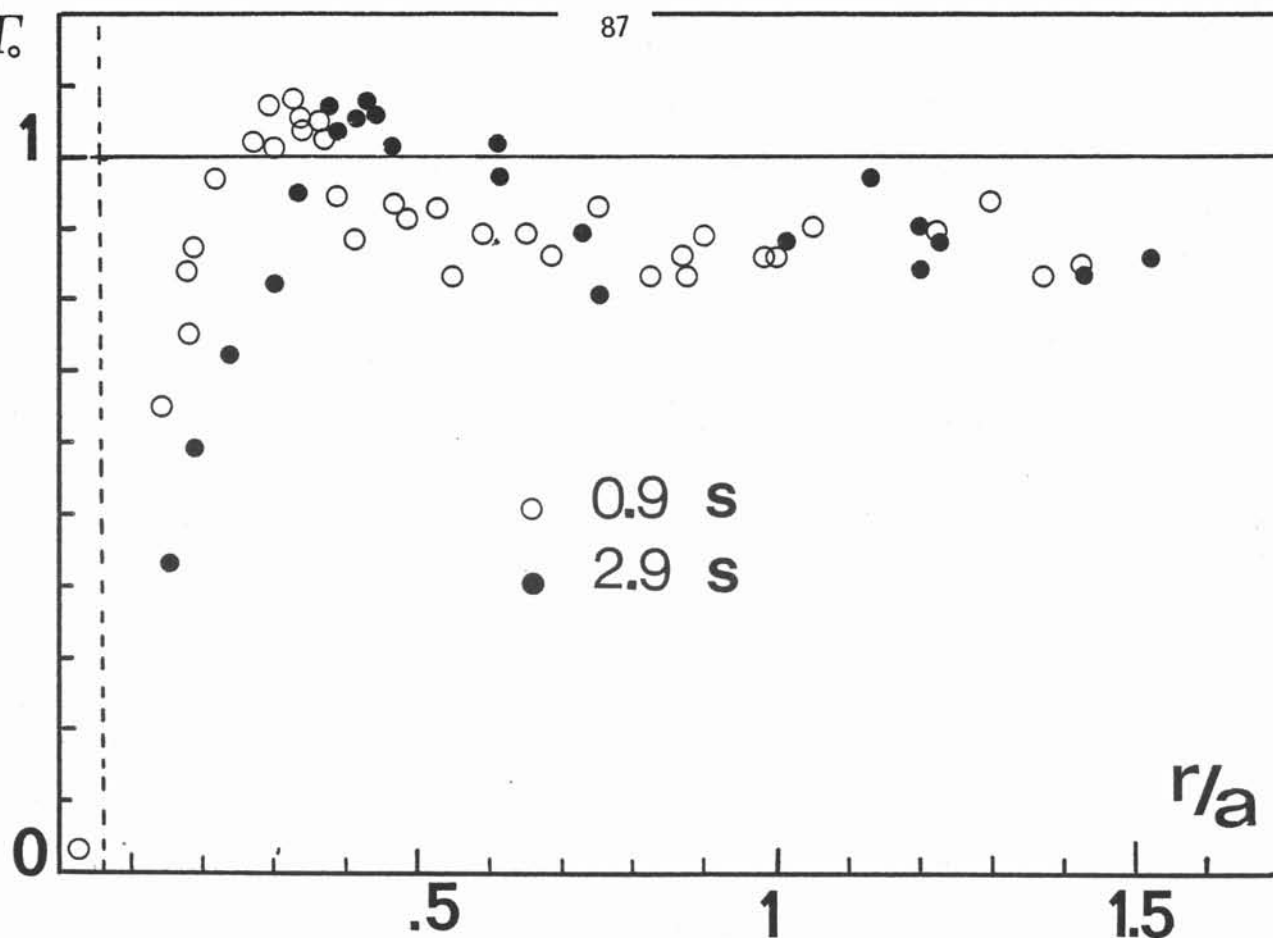


Fig.9 : Non-dimensional momentum $v_{\theta} r / \Gamma_0$ (where $\Gamma = \Gamma_0 \exp(-t/t_H)$) versus the non-dimensional radius r/a for a vortex generated by a current pulse. The results are plotted for the two times $t=0.9$ s and $t=2.9$ s. Magnetic field 1T, exposure time 0.1s.

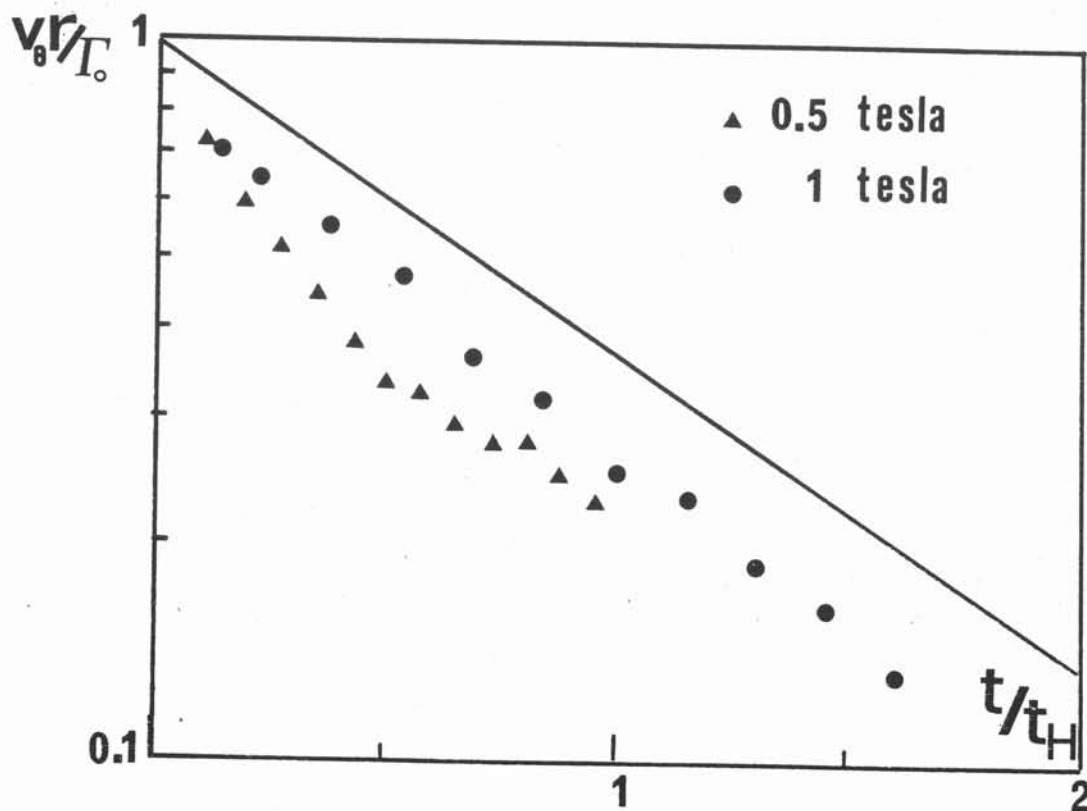


Fig.10 : Decay of the non-dimensional momentum $v_{\theta} r / \Gamma_0$ for $r/a \approx 1$, $B = 0.5$ and 1 tesla. The theoretical value (rel.37) is indicated by the full line.

much change of shape, except a slow increase of the core diameter (fig.9). The rate of decay is very close to t_H^{-1} for $B_0=1T$, but it is larger at the beginning for $B_0=0.5T$. So in this later case, a residual 3-D velocity component seems to persist after the short initial stage, but its nature is not clear.

4-4 A vortex couple:

In order to test the validity of the 2-D approximation in a case for which vorticity is advected away from the electrodes, we use a current pulse flowing between two electrodes. A vorticity dipole is then generated, with vorticity concentrated in 2 small areas, as visualized in fig.10. In the approximation of point vortices, each vortex is convected under the effect of the velocity field associated to the other, so that the couple moves without deformation at velocity

$$(37) \quad v = (\Gamma_0 / d) \exp(-t/t_H)$$

where d is the distance between the 2 electrodes and Γ is given by rel.36.

Experiments are made in a magnetic field of 0.5 and 1T with pulses of 2 A during 0.3s, and $d=2cm$ (2 nearby electrodes of the 36 electrode square box are used). The couple is created at 3cm of one wall and travels toward the opposite one. The observation time is limited by the collision of the couple at this later wall. The velocity of translation is obtained from successive photographs taken with a time period of 0.5s. Its initial value as well as the decay are always in good agreement with rel.37 for the 2 investigated magnetic fields (fig.12). The velocity at the middle of the couple, measured from the particle photographic traces, is equal to 4 times the translation velocity, as it should for point vortices. So the quality of the 2-D approximation seems definitely better when vorticity is advected away from the electrodes, for a typical velocity similar to the one vortex case.

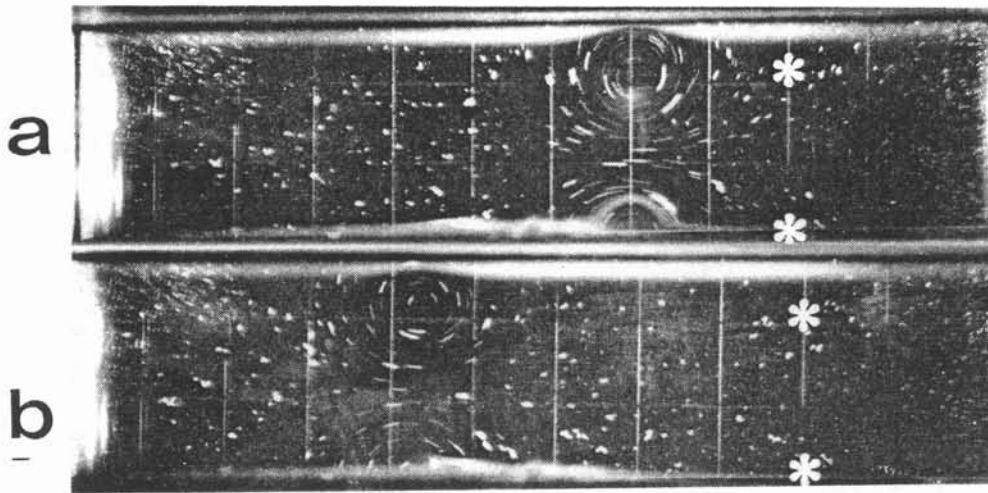


Fig.11 : Photograph of a vortex couple produced by a current pulse between two electrodes, 1.4s (a) and 3.9s (b) after its creation. The initial position is indicated. Magnetic field 1 tesla, exposure time 0.05s.

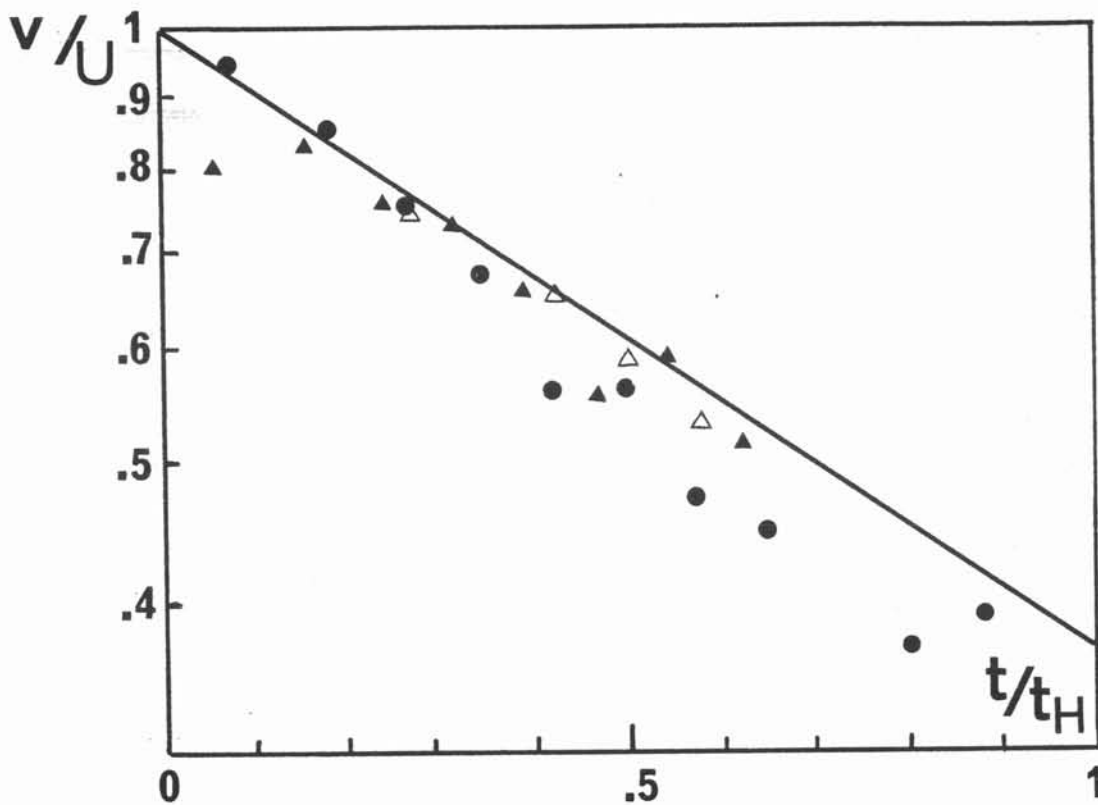


Fig.12 :The decay of the vortex couple. ● $B = 1T$, translation velocity; ▲ $B = 0.5 T$, translation velocity; △ $B = 0.5 T$, velocity at the couple center divided by 4 (obtained from photographic traces). The theoretical decay is represented by a full line.

4-5 A vortex near a wall:

The lateral boundary conditions which should be used with the 2-D equ.16 were not made clear. A more complete analysis should be performed in the corresponding parallel layers. However if lateral viscosity effects are neglected, a perfect slip condition could be proposed. In this case, a vortex created near a wall could be considered as interacting with its image of opposite sign obtained by a symmetry with respect to the boundary. The resulting motion should be a translation along the wall analogous to that of the couple of the preceding section. This behavior is effectively observed when the vortex is far enough from the wall. When it is close to it, for example at 1cm , a boundary layer detachment occurs, and a new vortex of opposite sign is generated (fig.13). The resulting couple of unequal vortices stays in the neighbourhood, with a rotating motion. out there with a rotating motion.

5-CONCLUSIONS:

The motion of a conducting liquid layer submitted to a strong enough transverse magnetic field can be approximated by a 2-D Navier-Stokes equation with a linear friction term due to Hartmann layers and an external forcing if electric currents are introduced. Of course the 2-D motion is restricted to the bulk, and the whole velocity field, including the Hartmann layer is generally 3-D. It is generally believed that when the interaction parameter N and the Hartmann number M are very large, the flow is laminar and a balance occurs between the driving force on one hand, and electromagnetic and viscous damping on the other hand. In the present cases, for which the flow is limited by two parallel planes, this asymptotic balance occurs only when $N/M \gg 1$, which is generally a very stringent condition. There is an important range of experimental parameters for which

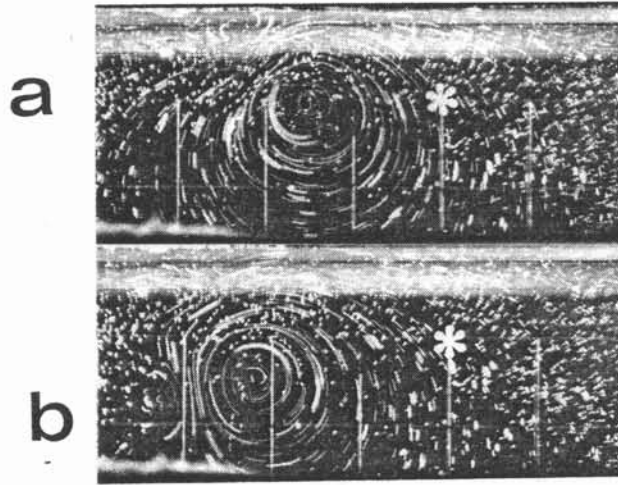


Fig.13 :Secondary vortex production by boundary layer detachment.The main vortex is generated by a pulse of 2A during 0.1s at the place represented by a star.Magnetic field 1 tesla,exposure time 0.2s.(a) time $t=1.4s$;
(b) time $t=2.4s$.

the 2-D advective effects are predominant although $N \gg 1$.

The steady electrically driven vortex is a relatively simple M.H.D. flow which seems not to have been realized previously. There is a close theoretical relation between this M.H.D. flow and the one of Hunt & Stewardson (1968), although the physical situation is different. An excellent agreement with the high Hartmann number asymptotic theory is obtained, and the small Hartmann layer thickness is measured nearly directly from the electric resistance.

The condition of high Hartmann number is satisfied in all the experimental runs. Velocity is relatively small (< 10 cm/s), so that Hartmann layer should be stable according to the practical condition $M/Re > 4 \cdot 10^{-3}$ obtained in ducts. The interaction parameter is large or of the order of unity, depending on the experimental conditions. The results are found in good agreement with the 2-D approximation as soon as $ND/a > 2$ or 3 (where D is a horizontal lengthscale). When the current is increased, this condition first fails in the vortex core where velocity is the greatest with a small scale. Otherwise, with a given maximum velocity, the 2-D approximation is better for a vortex couple than for isolated vortices.

The experimental conditions are very similar to the ones of Sommeria (1985) (geometry of the electrodes, layer depth, typical current per electrode). It can be concluded that the 2-D approximation is correct for a magnetic field greater than 0.5 tesla. For lower fields, the discrepancies appear first in the electrode neighborhood, especially when vorticity is not advected away by the horizontal motion. We have now a set of reference results from which it is possible to plan a wide class of experiments of 2-D turbulent flows.

REFERENCES:

- BAYLIS, J.A. 1971, *J. Fluid Mech.*, 48, 3, 417
- BAYLIS, J.A. & HUNT, J.C.R. 1971, *J. Fluid Mech.*, 48, 3, 423.
- BRANOVER, H. & GERSHON, P. 1979, *J. Fluid Mech.*, 94, 4, 629.
- GEL'FGAT, Yu.M., KIT, L.G., PETERSON, D.A. & TSINOBER, A.B. 1971, *Magnitnaya Gidrodinamica*, 3, 35.
- HUA, H.M. & LYKODIS, P.S. 1974, *Nuclear Science and Engineering*, 54, 445.
- HUNT, J.C.R. & LEIBOVICH, S. 1967, *J. Fluid Mech.*, 28, 241.
- HUNT, J.C.R. & MALCOLM, D.G. 1968, *J. Fluid Mech.*, 33, 4, 775.
- HUNT, J.C.R. & SHERCLIFF, J.A. 1971, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 3, 37
- HUNT, J.C.R. & STEWARDSON, K. 1969, *J. Fluid Mech.*, 38, 2, 225.
- HUNT, J.C.R. & WILLIAMS, W.E. 1968, *J. Fluid Mech.*, 31, 4, 705.
- KALIS Kh.E., KOLESNIKOV, Yu.B. 1980, *Magnitnaya Gidrodinamica*, 2, 57.
- KAPILA, A.K. & LUDFORD, G.S.S. 1977, *Int. J. Engng. Sci.*, 15, 465.
- LEHNERT, B. 1955, *Proc. Roy. Soc.*, A233, 299
- LOCK, R.G. 1955, *Proc. Roy. Soc.*, A233, 105
- MALCOLM, D.G. 1970, *J. Fluid Mech.*, 41, 3, 531.
- SHERCLIFF, J. A., 1965, "A textbook of Magnetohydrodynamics" Pergamon.
- SHERCLIFF, J.A. 1975, *J. of Applied Math. and Physics (ZAMP)* 26, 537.
- SOMMERIA, J. 1983, *J.M.T.A. (Paris)*, special issue on "Two-Dimensional Turbulence", 169.
- SOMMERIA, J. 1985, submitted to *J. Fluid Mech.*
- SOMMERIA, J. & MOREAU 1982, *J. Fluid Mech.*, 118, 507.
- SOMMERIA, J. & VERRON, J. 1984, *Phys. Fluids*, 27, 8, 1918.
- TABELING, P. & CHABRERIE, J.P. 1981, *J. Fluid Mech.*, 103, 225.
- TABELING, P. & CHABRERIE, J.P. 1980, *J.M.T.A.*



C H A P I T R E V

UN PROCESSUS ELEMENTAIRE DE LA CASCADE
INVERSE D'ENERGIE

UN PROCESSUS ELEMENTAIRE DE LA CASCADE INVERSE D'ENERGIE

Lorsque la cascade inverse d'énergie n'est pas trop perturbée par la dissipation, elle tend à alimenter les modes des plus grandes échelles. Par ailleurs, ces modes interagissent entre eux et avec les limites du domaine fluide, et c'est ce comportement à grande échelle que nous voulons examiner ici. Une manière simplifiée d'aborder le problème est d'exercer une force constante dans un mode simple. Un perfectionnement serait ensuite d'appliquer une force changeant de façon plus ou moins complexe, voire aléatoire. Le mode d'injection choisi est un mode à 4 tourbillons. Nous étudions tout d'abord le cas d'une boîte carrée grâce à des expériences comparées à des simulations numériques des équations de Navier-Stokes à 2-D et à un modèle spectral tronqué. A titre de comparaison, quelques résultats expérimentaux obtenus dans une boîte ronde sont présentés au paragraphe 3.

1. CAS D'UN DOMAINE CARRE :

a) Dispositif expérimental :

On utilise une boîte carrée de côté 12 cm, contenant un réseau carré de 36 électrodes, représentée sur la Fig. 1. Le dispositif est décrit en détail au chapitre suivant, la seule différence étant dans la distribution du courant électrique parmi les 36 électrodes. Pour les expériences décrites ici, le courant injecté à l'électrode de coordonnées (x,y) est proportionnel à $\sin 2\pi x/L \sin 2\pi y/L$, ce qui permet d'approcher une production de vorticités continue dans un mode à 4 tourbillons. Avec la position particulière des électrodes, ceci est réalisé en distribuant le courant total I fourni par le générateur, grâce à deux jeux de résistances $R_0, 2R_0, 4R_0$, où $R_0 = 1.50 \Omega$. (Chaque jeu correspond à une borne du générateur et à un signe de courant injecté). Les variations de potentiel (~ 1 mV) dues à l'écoulement étant très faibles devant la chute de tension dans les résistances ($\sim 1V$), on a ainsi un générateur de courant constant à chaque électrode.

b) Equations et variables adimensionnelles :

L'équation de Navier-Stokes à 2-D obtenue au chapitre IV peut s'écrire en termes de la fonction courant ψ et de vorticité ω sous forme adimensionnelle.

$$(1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = I(x, y) - \omega/Rh + \Delta\omega/Re$$

où $J(\psi, \omega)$ est le jacobien des fonctions ψ et ω .

L'échelle de longueur choisie est le côté de la boite L , et l'échelle de temps est telle que la force motrice adimensionnelle soit de l'ordre de 1, plus exactement

$$(2) \quad \int_0^1 \int_0^1 |I(x, y)| dx dy = 2$$

Les grandeurs réelles, représentées par un tilde, correspondant aux variables adimensionnelles, s'écrivent alors

$$(3) \quad \tilde{t} = (\rho a L^2 / BI)^{1/2} t \quad \tilde{r} = L \vec{r} \quad , \quad \tilde{j} = (I/L^2) \vec{j}$$

où I est le courant total produit par le générateur. D'autre part

$$(4) \quad \begin{cases} Re = L/v (BI/\rho a)^{1/2} \\ Rh = s(aI/B\sigma v)^{1/2} \end{cases} \quad L^{-1} = s(a/L)^2 Re/M$$

où s est égal à 1 pour une surface supérieure libre et 1/2 pour une surface rigide. Re est au moins de l'ordre de 10^4 dans toutes les expériences tandis que Rh est compris entre 0 et 40. Donc l'essentiel de la dissipation d'énergie est d e au frottement sur le fond et le comportement doit dépendre surtout du paramètre Rh . Inversement la vérification de l'indépendance des résultats expérimentaux adimensionnels vis à vis de Re est un bon test du comportement 2D. En particulier le fait que la force de frottement proportionnelle à la vitesse est doubl e pour une surface supérieure rigide est une vérification assez directe de l'égalité des vitesses inférieures et supérieures, qu'on attend pour un écoulement 2-D.

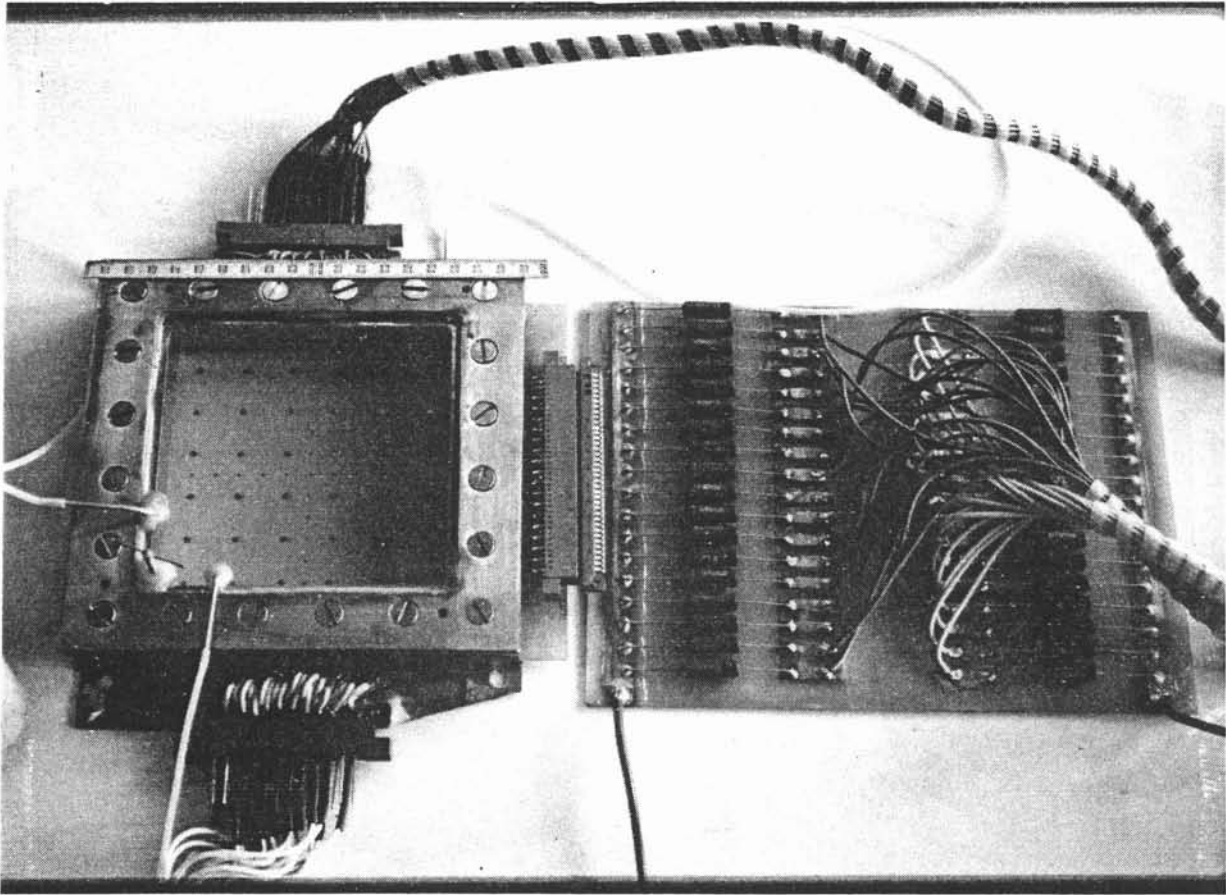


Fig. 1 : Photographie du dispositif expérimental

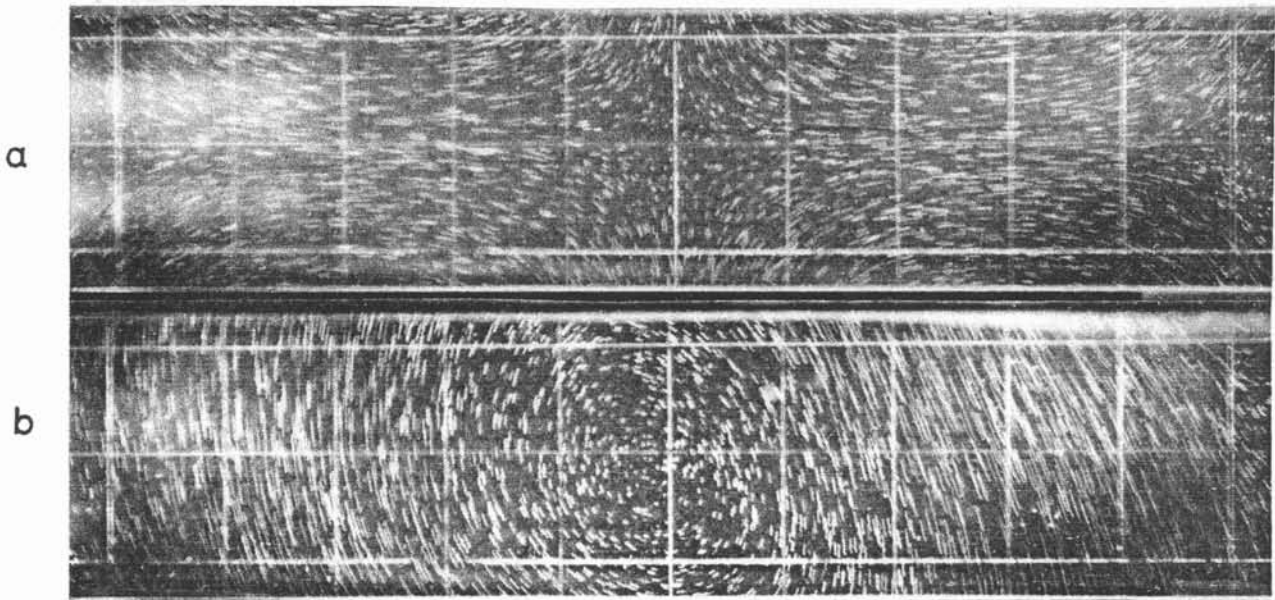


Fig. 2 : Photographie d'une bande de la surface libre située au milieu de la boîte, montrant le champ de vitesse (1 carreau représente 1 cm)
 a) $R_h = 1,4$, $B = 0,48$ T ($Re = 4,28 \times 10^4$), temps de pose 0,25 s
 b) $R_h = 19,4$, $B = 0,24$ T ($Re = 8,56 \times 10^4$), temps de pose 0,030 s.

Nous choisissons une force produisant 4 tourbillons de la forme

$$(5) \quad I(x,y) = \frac{\pi^2}{2} \phi_{22}(x,y)$$

le coefficient étant défini pour satisfaire la condition (2).

L'équation (1) a été résolue par un schéma numérique aux différences finies utilisé sur ordinateur vectoriel CRAY1. Ce modèle est décrit dans Sommeria & Verron, 1984 et Sommeria - Verron, 1985. La vorticité aux parois latérales est prise égale à 0, ce qui correspond à un champ de vitesse prolongé par symétrie par rapport à la paroi. Une condition de vitesse nulle a également été utilisée dans d'autres calculs à titre de comparaison. Cette dernière ne se justifie pas plus que la précédente, bien qu'elle corresponde à la situation physique, car le modèle n'a pas la résolution suffisante pour décrire les couches limites visqueuses.

c) Les différents régimes obtenus :

Pour les faibles valeurs de courant I (faible Rh), la force motrice est partout équilibrée par le frottement sur le fond. Comme celui-ci est proportionnel à la vitesse, on a un écoulement à 4 tourbillons visualisé sur le Fig. 2a. Pour $Rh > Rh_c = 1.52$, cet écoulement est instable et une rotation d'ensemble est observée (Fig. 2b). Les deux sens de rotation peuvent être obtenus avec a priori la même probabilité. Si le courant est brusquement introduit dans le fluide au repos, un écoulement à 4 tourbillons est observé pendant quelques dizaines de secondes, puis l'instabilité se produit par appariement de deux tourbillons de même signe, et étirement des deux autres près des parois, le choix des deux tourbillons et donc du sens final de rotation dépendant de petites perturbations. On peut aussi favoriser un sens particulier en créant une rotation initiale.

L'écoulement apparaît stationnaire pour les faibles valeurs de Rh . Une analyse plus fine par des mesures électriques montre des oscillations périodiques de très faible amplitude ($\sim 0,1\%$ de la vitesse moyenne). Lorsqu'on augmente Rh au delà de 5 environ, les fluctuations croissent progressivement mais restent modérées et n'affectent pas la rotation d'ensemble. Elles ne semblent pas en particulier provoquer des retournements

du sens de rotation. Les fluctuations sont difficiles à analyser : certaines sont dues au déplacement du tourbillon secondaire produit dans un coin le long du pourtour de la boîte. Des décollements de couche limite interviennent aussi, mais il est difficile d'estimer leur importance. L'écart type diminue très nettement pour $Rh > 30$ (Fig. 8) : la rotation d'ensemble a sans doute un effet stabilisant.

d) Comparaison avec les simulations numériques :

On pourrait mesurer le champ de vitesse à partir des photos et étudier sa statistique. Cependant ceci nécessiterait un traitement d'images automatisé, ce qui n'était pas disponible. C'est pourquoi les mesures quantitatives ont été obtenues à partir du potentiel électrique, qui est proportionnel à la fonction courant. Les mesures réalisées sur les 36 électrodes d'injection permettent d'avoir accès au champ de fonction courant par interpolation entre les électrodes (obtenue par des fonctions splines). Les lignes de courant du champ de vitesse moyenne ainsi obtenu sont représentées sur la Fig. 3, où elles sont comparées à des résultats numériques. L'utilisation des électrodes d'injection pour les mesures de potentiel est une solution pratique, mais une certaine erreur est commise à cause de la chute de potentiel lié au passage du courant. Il est donc préférable d'utiliser les deux rangées d'électrodes de mesures.

Le taux de rotation peut être caractérisé avec beaucoup de précision à partir de la fonction courant ψ_3 au centre de la boîte. Celui-ci est notamment égal à zéro dans la situation symétrique à 4 tourbillons. Les variations de la valeur moyenne $\bar{\psi}_3$, obtenue sur un enregistrement de 10 mn, après établissement d'un régime permanent, sont représentées sur la Fig. 4. La transition conduisant à une rotation globale est clairement visible. Les points expérimentaux sont obtenus avec différents champs magnétiques et une surface rigide ou libre. Ces différentes mesures sont en très bon accord entre elles, excepté pour un champ de 0,12 Tesla, où les résultats sont un peu trop faibles. Ceci montre que le comportement du système est principalement déterminé par le paramètre Rh , ce qui est tout à fait en accord avec l'approximation 2-D (équ. 1) à grand nombre de Reynolds. Cet accord est confirmé directement par les résultats des simulations numériques de

l'équation (1) représentés sur la même figure. Ceci est d'autant plus remarquable que deux hypothèses ont été faites : celle d'une injection de vorticité qui est spatialement continue plutôt que localisée sur les électrodes, et des conditions aux parois latérales assez arbitraires. Une assez bonne concordance entre ces différents résultats se retrouve au niveau de la forme des lignes de courant, qui dépend des rapports $\bar{\psi}/\bar{\psi}_3$ en différents endroits. A titre d'exemples significatifs, les rapports $\bar{\psi}_1/\bar{\psi}_3$ et $\bar{\psi}_5/\bar{\psi}_3$ sont représentés en fonction de Rh sur la Fig. 5 (où les positions correspondant aux indices sont également indiquées).

Le comportement au voisinage de la transition a fait l'objet d'une étude particulière schématisée sur la Fig. 6. Si on augmente progressivement le courant I   partir de zéro, il apparaît une transition brutale vers une rotation globale pour $Rh = 1,73$, celle-ci augmentant ensuite progressivement avec Rh . Si maintenant on diminue le courant, le régime à 4 tourbillons ne sera à nouveau observé que pour $Rh = 1,52$. Ce phénomène d'hystéresis n'est pas obtenu dans le modèle numérique, qui de plus prévoit un paramètre de friction critique plus faible (1,38). Cette différence doit sans doute être attribuée au caractère localisé de l'injection de vorticité. Pour les plus fortes valeurs de Rh la vorticité injectée est fortement dispersée par l'advection et on devrait être plus proche d'une injection spatialement continue. Par contre, en s'approchant de la transition, les résultats numériques semblent tendre exactement vers ceux du modèle spectral tronqué à 6 modes décrit au paragraphe suivant. Ceci indique que les modes utilisés suffisent à décrire le domaine de stabilité linéaire de l'écoulement à quatre tourbillons avec injection sinusoïdale. Pour les valeurs de Rh plus élevées, la rotation prévue par le modèle spectral sature beaucoup trop vite, et à un niveau trop faible (Fig. 4). D'autre part l'allongement des lignes de courant est un peu trop fort, comme on s'en aperçoit d'après les valeurs de $\bar{\psi}_1/\bar{\psi}_3$ et $\bar{\psi}_5/\bar{\psi}_3$ (Fig. 5). Certains défauts du modèle spectral se retrouvent d'ailleurs dans les simulations numériques de l' qu. 1 à trop faible résolution (maillage 25 x 25) faites par Sommeria & Verron (1984). La cause de ces difficultés est l'apparition de forts gradients de vorticité, localisés près des parois, et dus à l'étirement par advection. Ces structures à petite échelle n'ont pu être mis en évidence expérimentalement, étant donné que le champ de vitesse lui-même est tout à fait régulier, et qu'il faudrait en mesurer la seconde dérivée spatiale pour les observer.

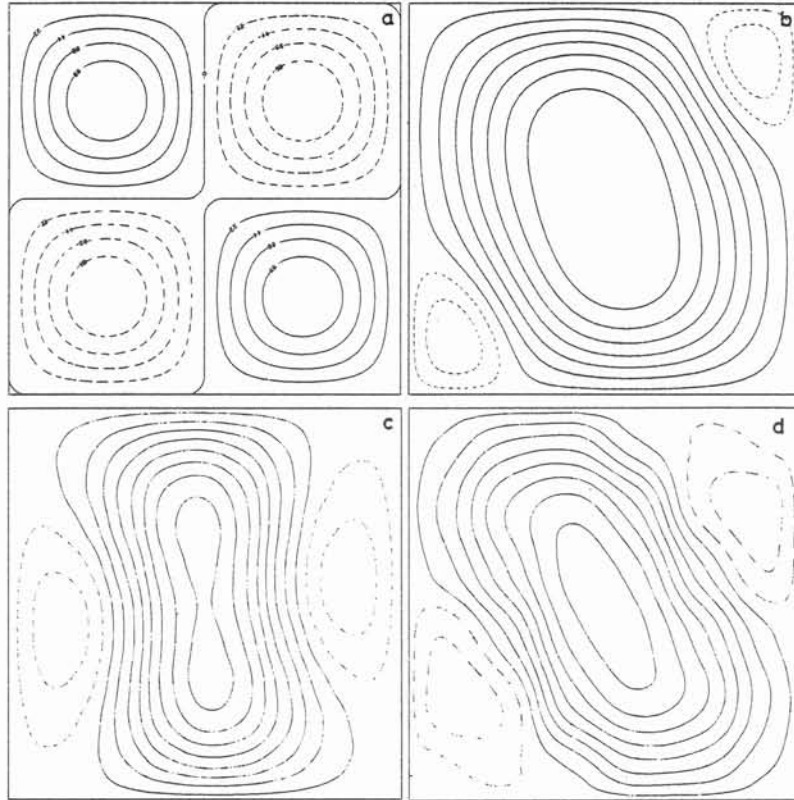


Fig. 3 : Lignes de courant a) simulation numérique $R_h = 1,27$,
 b) $R_h = 5,14$, c) modèle spectral, $R_h = 5,14$, d) $R_h = 5,14$, $B = 0,24 T$
 ($Re = 2,27 \times 10^4$), obtenu par des mesures de potentiel électrique
 aux électrodes d'injection.

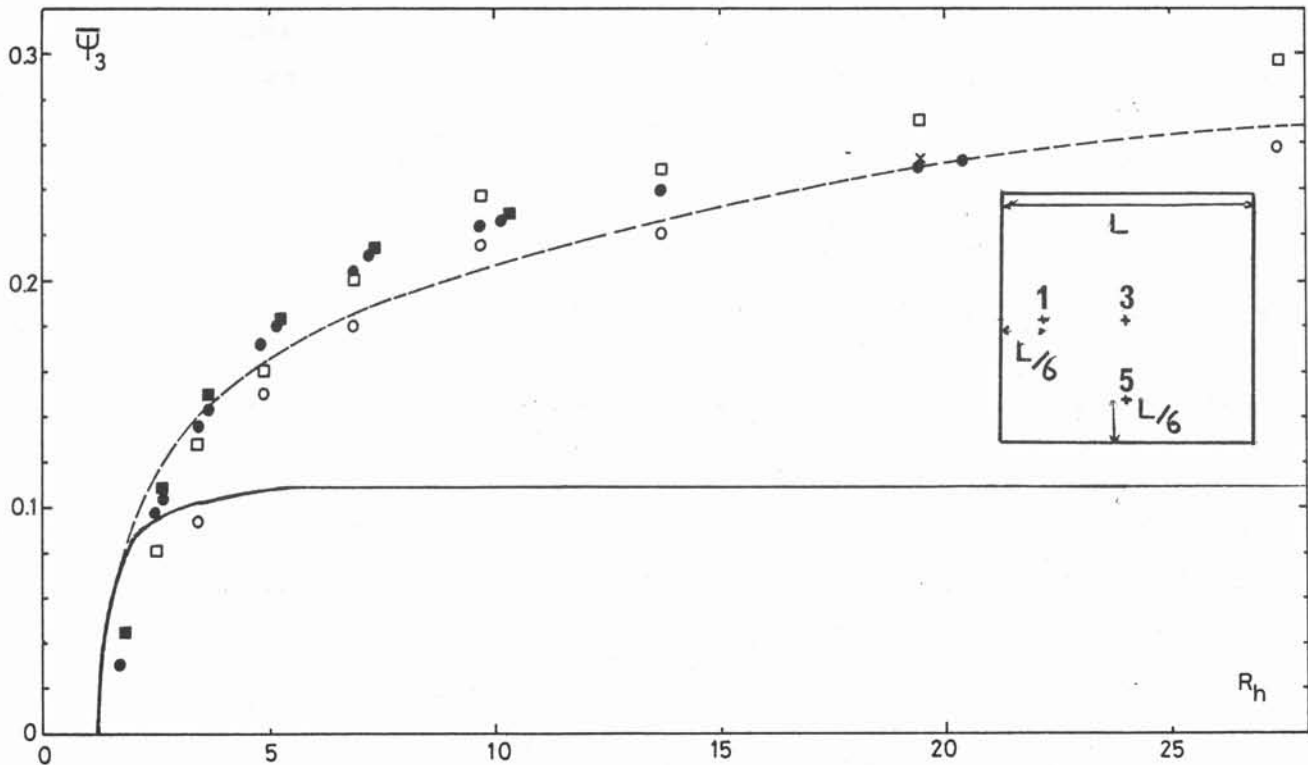


Fig. 4 : Fonction courant moyenne au centre comparée à la théorie

- Expériences avec surface libre, $B = 0,48 T$; □ idem, $B = 0,24 T$
- idem, $B = 0,12 T$; x valeur obtenue à partir de photographies, $B = 0,24 T$
- Surface supérieure rigide, $B = 0,48 T$; ---- simulation numérique ;
- modèle spectral.

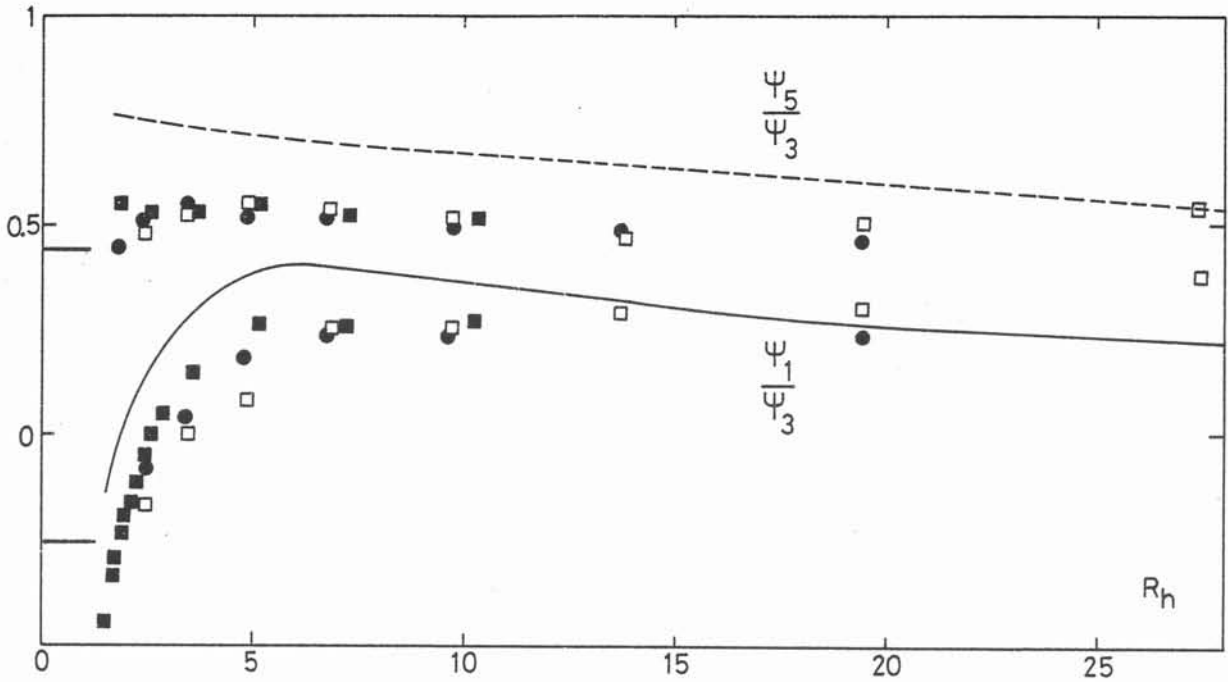


Fig. 5 : Fonction courant moyenne aux positions 1 et 5 (indiquées sur la fig. 4) normalisées par la fonction courant moyenne au centre $\bar{\Psi}_3$. Les résultats numériques sont représentés par une ligne pleine ($\bar{\Psi}_1/\bar{\Psi}_3$) et une ligne pointillée ($\bar{\Psi}_5/\bar{\Psi}_3$). Les niveaux donnés par le modèle spectral sont indiqués à gauche. ● surface libre, $B = 0,48$ T ; □ idem, $B = 0,24$ T ; ■ surface rigide $B = 0,48$ T

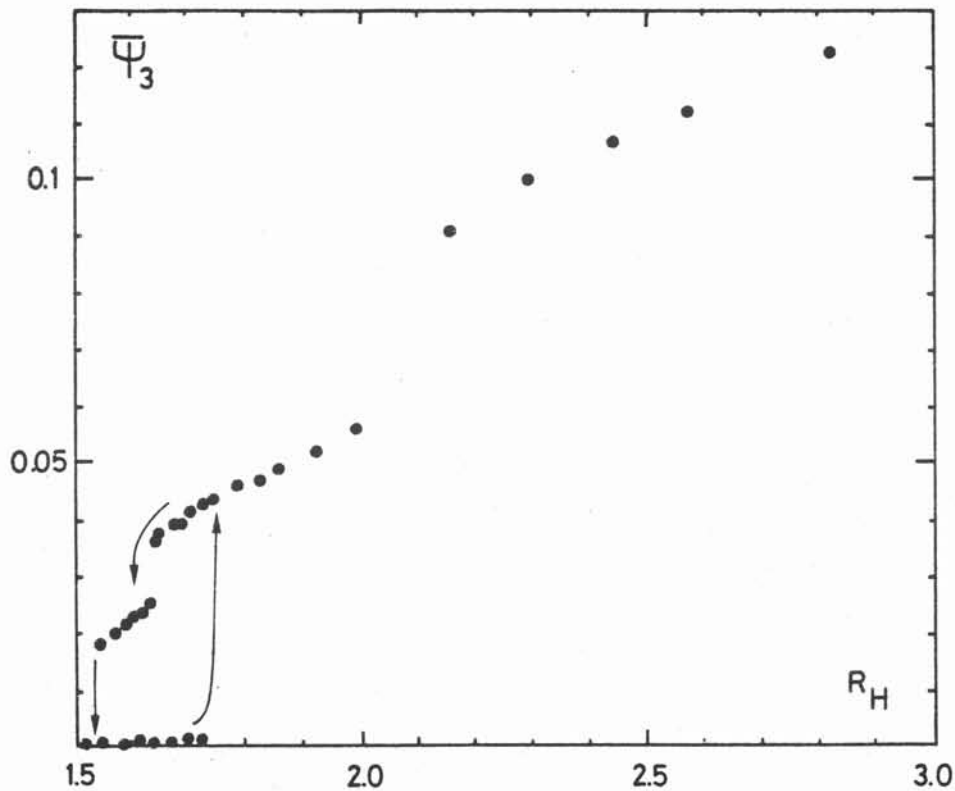


Fig. 6 : Fonction courant au centre près de la transition ; surface supérieure rigide, $B = 0,48$ T. Les flèches indiquent le chemin parcouru lorsqu'on change progressivement R_h .

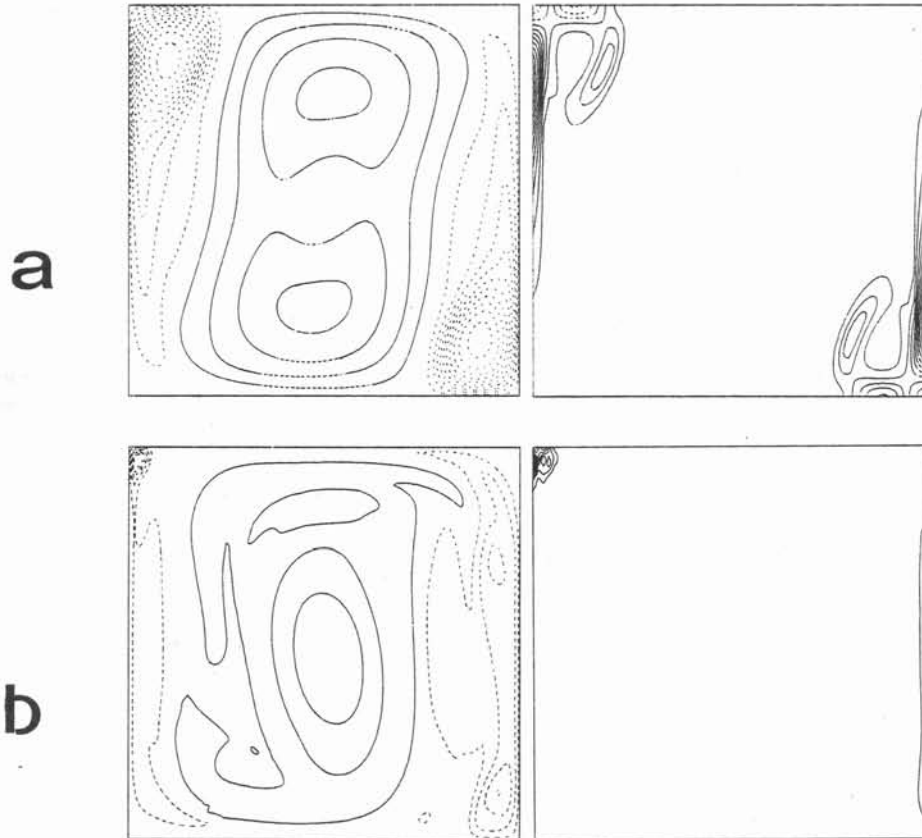


Fig. 7 : Isovaleurs de la vorticité ω (  gauche) et de la palinstrophie $(\nabla \times \omega)^2$, obtenues par le calcul numérique (résolution 73 x 73), montrant l'existence de structures d'autant plus fines que Rh est grand : l'équidistance des courbes pour la palinstrophie est 10^4 .

— Valeurs positives, - - - - - négatives , a) Rh = 7,27 équidistance 1,28
 b) Rh = 29,08  quidistance 2,73

L'existence de ces forts gradients s'explique bien si on considère que de la vorticité negative est convectée vers un point d'arrêt sur la paroi (Fig. 7). Les particules fluides transportant la vorticité sont alors étirées le long de la paroi et contractées selon la direction transverse, sous l'effet du cisaillement, ce qui provoque les forts gradients de vorticité observés.

On obtient un très bon accord entre calculs numériques et expérience en ce qui concerne le champ de vitesse moyen, il est donc intéressant de comparer les fluctuations turbulentes. Cependant leur étude statistique nécessite des temps d'intégration très longs, les enregistrements de 10 mn étant tout juste suffisant. Des temps beaucoup plus faibles, de l'ordre de 1 mn sont accessibles par le calcul, avec les moyens dont nous disposons. La Fig. 8 montre cependant que l'ordre de grandeur de l'écart type des fluctuations est comparable à celui des expériences avec une condition aux limites de symétrie. Il est environ deux fois plus fort pour les conditions aux limites de vitesse nulle. Les résultats expérimentaux sont en gros entre ces deux extrêmes mais ils dépendent assez fortement de la valeur du champ magnétique pour un même paramètre R_h . Le nombre de Reynolds joue donc un rôle non négligeable, ce qui est peut-être lié à des effets de décollement de couches limites latérales. L'ensemble des résultats s'accorde cependant sur une diminution importante des fluctuations pour les grandes valeurs de R_h , ce qui signifie que les effets d'advection ont ici un rôle stabilisant, peut-être dû au mouvement de rotation générale.

En conclusion, nous pouvons considérer qu'on observe ici un processus élémentaire de cascade inverse d'énergie, "apprivoisé" dans une boîte carrée, et stabilisé par le frottement sur le fond. En effet, le phénomène d'appariement de deux tourbillons de même signe conduit à une seule structure de taille double. L'étirement des lignes d'isovorticit  par le cisaillement produit par les grosses structures peut d'autre part être considéré comme un mécanisme de base de la cascade d'entrophie. Notons que ce processus, obtenu ici près d'une paroi, peut se produire de la même façon entre deux tourbillons au sein du fluide, puisque les conditions aux limites supposent une symétrie par rapport à la paroi. La particularité principale des résultats présents est l'apparition spontanée d'un sens de rotation privilégié. Ainsi la vorticité totale Ω ( gale à la circulation le long des parois) n'est pas nulle, comme le montre le calcul numérique (fig. 9)

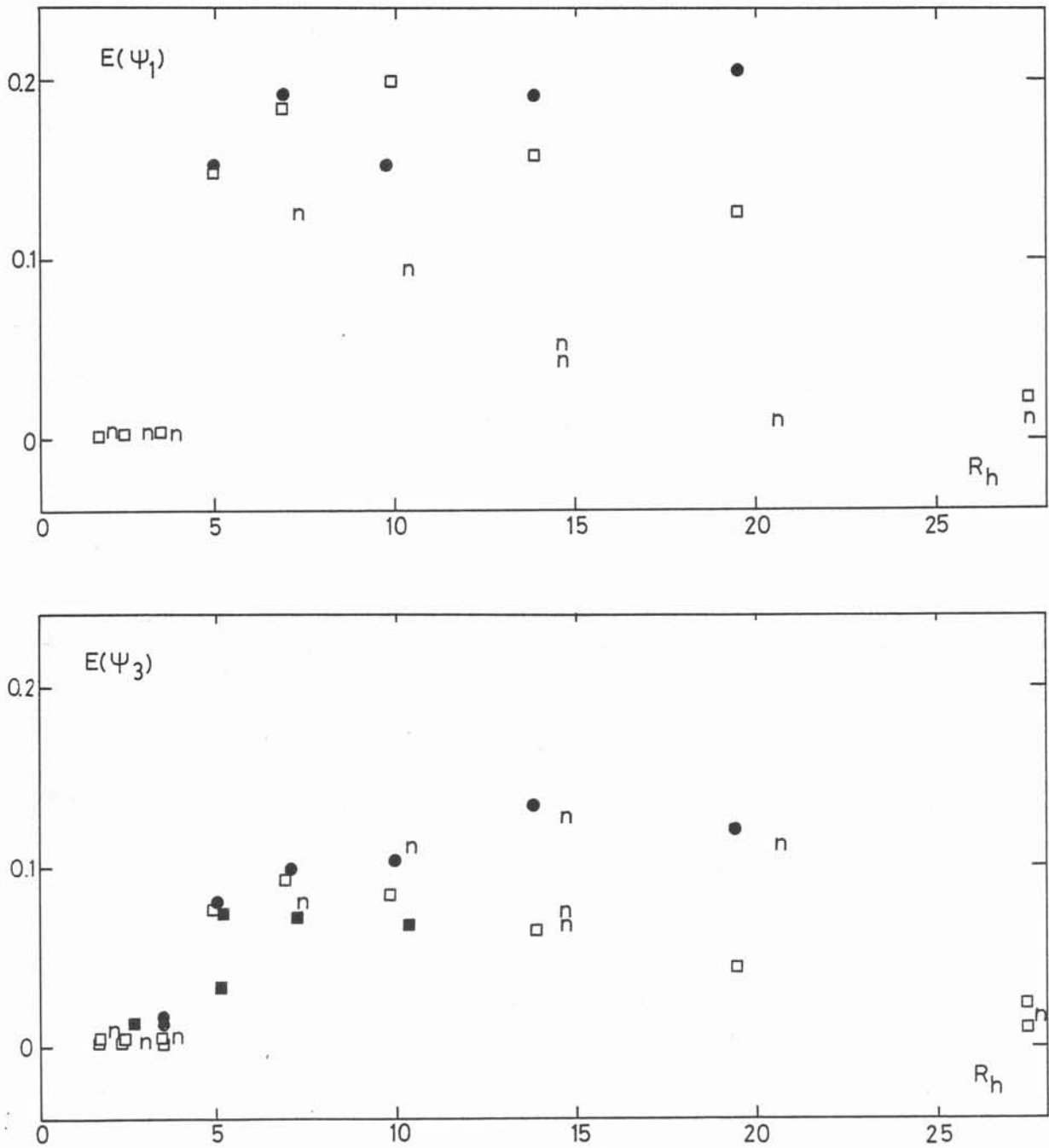


Fig. 8 : Ecart type des fluctuations de la fonction courant (divisée par $\bar{\Psi}_3$), en fonction de R_h . ■ $B = 0,48$ T, surface rigide.
 ● $B = 0,48$ T, surface libre ; □ $B = 0,24$ T, surface libre ; n modèle numérique, conditions aux limites de vorticité nulle.
 a) position 1 (voir figure 4), b) position 3 (centrale).

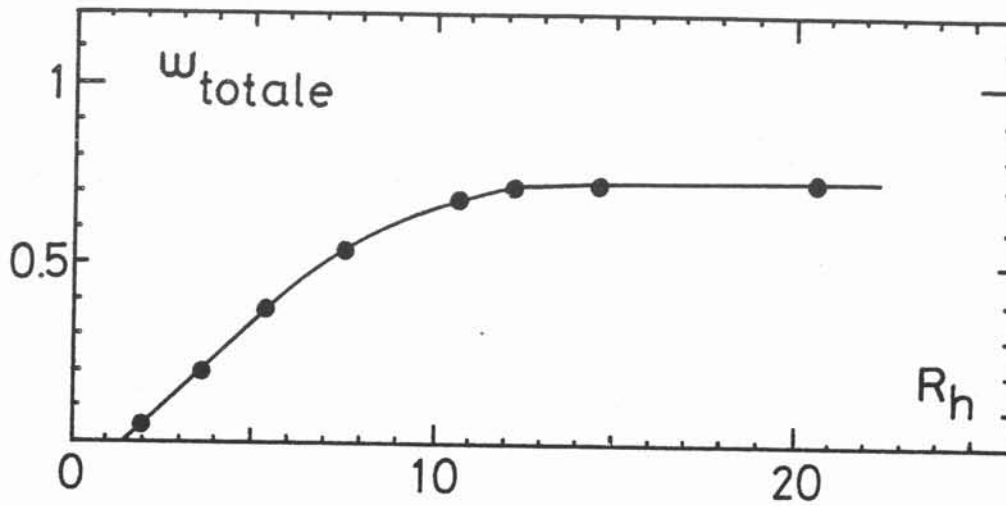


Fig. 9 : Vorticité totale Ω en fonction de R_h . Modèle numérique avec conditions aux limites de vorticité nulle.

Par exemple, une valeur adimensionnelle de 0,50 est obtenue pour $R_h = 7,27$, et celle-ci augmente légèrement avec R_h . Cette grandeur est dissipée par le frottement de Hartmann en un temps de l'ordre de R_h . La force motrice étant symétrique, la vorticité totale ne peut être entretenue que par les effets de viscosité aux parois latérales. Ceux-ci semblent avoir une influence finie dans la limite d'une viscosité tendant vers 0, grâce à l'existence de gradients de vorticité tendant vers l'infini. Notons cependant que la vorticité totale devrait avoir une valeur strictement nulle pour une viscosité égale à zéro. Une manière plus juste de mesurer la rotation est de considérer le moment cinétique total du fluide. Celui-ci est égal à $\Gamma = \iint \vec{r} \times \vec{v} \, dS = -\frac{1}{2} \iint \omega r^2 \, dS$ et ne doit pas être confondu avec Ω . Γ n'est pas nul, mais ce fait ne peut être expliqué par l'influence de la viscosité dans la limite où celle-ci tend vers 0. En effet, la vorticité aux parois $\frac{\partial \vec{v}}{\partial n}$ doit rester finie (à cause de la conservation de la vorticité), et s'annule même dans le modèle numérique ; le moment des forces de viscosité proportionnel à $v \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}$ doit donc tendre vers 0 quand $v \rightarrow 0$. L'entretien du moment cinétique provient en fait des forces de pression dues au cadre. Celui-ci devrait donc tourner en sens inverse du fluide, s'il était libre de le faire. Cet effet ne peut se produire dans une boîte ronde, car la force de pression est partout radiale, et ceci est effectivement observé (voir paragraphe 3).

2. UN MODELE SPECTRAL TRONQUE :

a) Obtention du modèle :

Afin d'obtenir une description schématique des grandes échelles, nous remplaçons les équations aux dérivées partielles de l'hydrodynamique par un système d'équations différentielles ordinaires pour l'évolution des composantes du champ de vitesse dans une base de fonctions. Pour obtenir un nombre restreint de composantes, il ne faut garder que les modes de plus grandes échelles. Ce procédé est bien connu depuis l'article célèbre de Lorenz (voir par exemple Lorenz, 1980 ou Kells & Orszag, 1978). Il permet des études théoriques fondamentales, mais ne conduit pas en général à des prédictions spécifiques au système ainsi modélisé. Ceci est dû aux transferts d'énergie vers les petites échelles par étirement des lignes de vorticité, qui ne sont pas pris en compte par ce type de modèle. La situation est certainement meilleure à 2-D puisque les lignes de vorticité ne sont pas étirées. Cependant l'influence des petites échelles se fait alors sentir par la cascade d'énstrophie.

Différentes bases de fonctions peuvent être envisagées pour définir les modes. Comme nous nous intéressons au cas limite des très faibles viscosités, nous prendrons des conditions aux limites de glissement sans frottement. L'influence de la viscosité se traduirait de toute façon par des effets de couches limites qu'on ne peut pas prendre en compte dans un modèle spectral à faible nombre de modes. D'autre part il est intéressant que chaque mode soit une solution stationnaire de l'équation d'Euler à 2-D. Le choix qui est de loin le plus simple dans une boîte carrée (de côté unité) est alors

$$(6) \quad \psi(x,y,t) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} a_{ij}(t) \phi_{ij}(x,y)$$

$$(7) \quad \phi_{ij}(x,y) = \sin i\pi x \sin j\pi y$$

La vorticité $\Delta\phi_{ij}$ associée à chaque mode est une fonction (linéaire) de la fonction courant, $\Delta\phi_{ij} = -(i^2+j^2)\pi^2 \phi_{ij}$, chaque mode est donc une solution stationnaire de l'équation d'Euler.

Nous voulons ensuite substituer un développement comprenant les 1ers termes de (6) dans l'équation de Navier Stokes, puis identifier les coefficients de chaque fonction de base . Cependant le terme d'advection fait apparaître les coefficients d'ordre plus élevé de type $i + j$, résultant du produit des sinus. L'approximation utilisée consiste alors à fixer un nombre d'onde de coupure K et à annuler tous les termes contenant des modes ϕ_{ij} tels que $i^2 + j^2 \leq K^2$. Ce type d'approximation est d'autant plus justifié que le spectre d'énergie décroît rapidement avec le nombre d'onde . On bloque cependant tout processus de cascade vers les petites échelles, ce qui peut avoir des conséquences catastrophiques. Nous choisissons la plus petite valeur de K , $K = \sqrt{10}$, qui donne lieu à des interactions non linéaires. On obtient alors les équations d'évolution suivantes pour les six amplitudes $a_{ij}(t)$, ~~o  la forme matricielle est omise pour le moment.~~

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{a}_{11} &= -a_{13}a_{22} + a_{31}a_{22} - a_{11}/Rh - 2a_{11}/Re \\ \dot{a}_{12} &= -\frac{9}{20} a_{11}a_{21} - \frac{5}{4} a_{21}a_{13} - \frac{5}{4} a_{21}a_{31} - a_{12}/Rh - 5a_{12}/Re \\ \dot{a}_{21} &= \frac{9}{20} a_{11}a_{12} + \frac{5}{4} a_{12}a_{13} + \frac{5}{4} a_{12}a_{31} - a_{21}/Rh - 5a_{21}/Re \end{aligned}$$

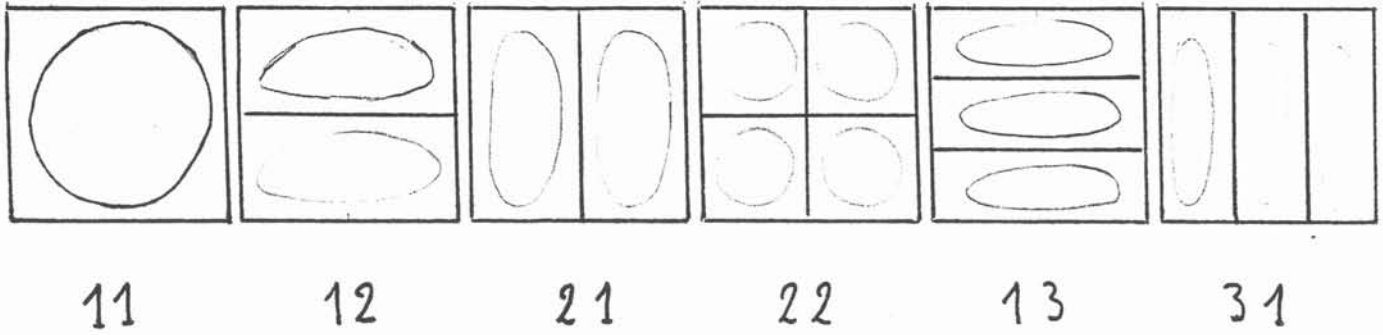


Fig. 10 : Les modes de base utilisés

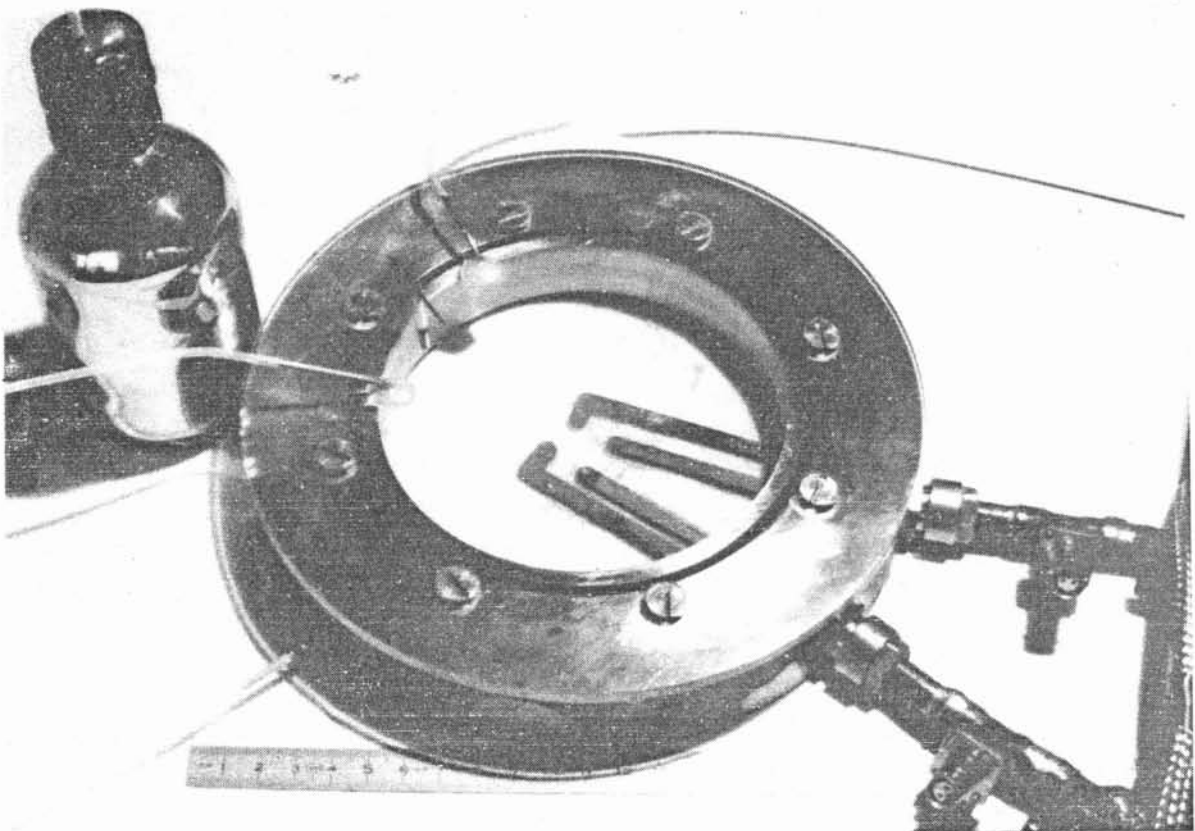


Fig. 11 : Photographie du dispositif expérimental en boîte ronde avec la réserve de mercure et les arrivées de courant.

$$\begin{aligned}\dot{a}_{22} &= a_{11}a_{23} - a_{11}a_{31} - a_{22}/Rh - 8a_{22}/Rh + \frac{\pi^2}{16} \\ \dot{a}_{13} &= -\frac{3}{5} a_{11}a_{22} - \frac{2}{5} a_{22}a_{31} - a_{13}/Rh - 10a_{13}/Re \\ \dot{a}_{31} &= \frac{3}{5} a_{11}a_{22} + \frac{2}{5} a_{22}a_{13} - a_{31}/Rh - 10a_{31}/Re\end{aligned}$$

L'allure des fonctions courant correspondant à chaque mode est schématisée sur la fig. 10.

b) Etude du modèle :

On vérifie tout d'abord que l'énergie $E = \sum (i^2 + j^2) a_{ij}^2$ et l'énstrophie $D = \sum (i^2 + j^2)^2 a_{ij}^2$ sont conservées par les termes non linéaires du modèle. Cependant la vorticité totale $\Omega = \sum (i^2 + j^2) a_{ij}$ ne l'est pas, contrairement à ce qui se produit dans l'équation initiale (1). D'autre part, deux grandeurs particulières sont conservées par les termes non linéaires du système (4), bien qu'elles n'aient pas de correspondance dans l'équation (1).

$$(9) \quad M = a_{11} + \frac{5}{2}(a_{13} + a_{31})$$

$$(10) \quad N = a_{12}^2 + a_{21}^2$$

et une autre grandeur déduite des précédentes

$$(11) \quad L = \frac{25}{26} (a_{13} - a_{31})^2 - a_{11}^2$$

N décroît exponentiellement au cours du temps, à un taux $2(1/Rh + 5/Re)$, et les modes à deux tourbillons ϕ_{12} et ϕ_{21} n'ont donc aucune influence s'ils ne sont pas alimentés par une force extérieure. Il reste alors les deux triades en interaction $\phi_{11}, \phi_{13}, \phi_{22}$ et $\phi_{11}, \phi_{31}, \phi_{22}$. Si le nombre de Reynolds Re est très grand devant le paramètre de frottement Rh , ce qui est le cas dans les expériences, alors M et L décroissent aussi exponentiellement et le système se réduit finalement à deux équations, si on élimine le régime transitoire. Deux situations peuvent se produire correspondant à $\varepsilon = \pm 1$.

$$(12) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon \sqrt{\frac{26}{25}} a_{22} a_{11} - a_{11}/Rh \\ a_{22} &= -\varepsilon \sqrt{\frac{26}{25}} a_{11}^2 + f_o - a_{22}/Rh \quad (f_o = \frac{\pi^2}{16}) \end{aligned}$$

avec

$$(13) \quad \begin{aligned} a_{13} + a_{31} &= -\frac{2}{5} a_{11} \\ a_{31} - a_{13} &= \varepsilon \sqrt{\frac{26}{25}} a_{11} \end{aligned}$$

On sait a priori qu'un système limité à deux équations ne peut pas avoir de solution chaotique, il doit tendre vers un état stationnaire ou vers un régime oscillant. Les solutions stationnaires s'obtiennent aisément

$$(14) \quad \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{22} = f_o Rh \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_{11} = \pm \left[\sqrt{\frac{25}{26}} f_o - \frac{25}{26} 1/Rh^2 \right]^{1/2} \\ a_{22} = \sqrt{\frac{25}{26}} / Rh \end{cases}$$

La 1ère solution correspond à un écoulement à quatre tourbillons d'amplitude proportionnelle à la force motrice. La 2ème solution est associée à une rupture de symétrie, et à un transfert de l'énergie injectée vers un mode de rotation globale. Alors que la 1ère solution existe toujours, la 2ème n'est obtenue que pour $\varepsilon = +1$ et pour $Rh > Rh_c$ où

$$(15) \quad Rh_c = \left(\frac{25}{26}\right)^{1/4} f_o^{-1/2} = 1,26$$

La fonction courant au centre, proportionnelle à a_{11} , est représentée sur la Fig. 4.

Le lecteur mathématicien pourra sans doute démontrer que le système tend toujours vers un état stationnaire, qui correspond à la 1ère solution pour $Rh < Rh_c$ et la 2ème pour $Rh > Rh_c$ (la 1ère est alors instable). Ceci a été vérifié par une résolution numérique du système (8) en utilisant différentes conditions initiales. Le schéma numérique d'intégration est celui de Runge Kutta.

c) Extensions du modèle :

Le modèle analytique précédent rend bien compte de l'instabilité qui conduit à la rotation globale, ce qui est déjà intéressant compte tenu de sa simplicité. Il présente cependant des insuffisances

- Il sous estime un peu le seuil de transition
- Le taux de rotation sature à une valeur trop faible
- Il ne possède aucune fluctuation turbulente.

Pour remédier à ces inconvénients une idée naturelle est d'augmenter le nombre d'onde de coupure K et donc le nombre de modes. Nous avons essayé en prenant $K = 13$, ce qui fait apparaître les modes ϕ_{23} , ϕ_{32} et permet d'alimenter les triades ϕ_{12} , ϕ_{23} , ϕ_{22} et ϕ_{21} , ϕ_{23} , ϕ_{22} . La résolution numérique conduit alors à des comportements chaotiques, mais les résultats reflètent très mal l'expérience. Les modes correspondant aux plus petites échelles prennent trop d'importance, ce qui conduit à des lignes de courant trop tourmentées. Ce comportement est la conséquence connue du blocage de la cascade d'enstrophie par la troncature. Il semble qu'un modèle spectral de ce type est valable soit avec un grand nombre de modes et une modélisation des échelles sous-mailles, soit éventuellement avec le minimum de modes de façon à ne pas pénétrer dans la cascade d'enstrophie. Dans ce dernier cas on ne peut s'attendre qu'à des résultats très approximatifs, mais qui pourraient être utiles pour classifier les comportements à grande échelle.

3. CAS D'UN DOMAINE CIRCULAIRE :

Pour connaître l'influence de la géométrie du domaine fluide, nous décrivons maintenant des expériences réalisées dans une boîte circulaire. Il aurait été intéressant d'injecter l'énergie dans un mode bien défini grâce à un courant convenablement distribué sur un réseau d'électrodes. Le mode sinusoïdal à quatre tourbillons de la boîte carrée serait ainsi remplacé par le produit d'une fonction de Bessel du rayon par une fonction sinusoïdale de l'angle à quatre extrema. Cependant, pour simplifier le dispositif, nous utilisons un fond comportant quatre électrodes (de \emptyset 2,5 mm) disposées sur un carré de côté 2 cm situé au centre de la boîte

(Fig. 11). Le courant stationnaire est réparti de façon égale entre deux électrodes situées sur une diagonale, et il se reboucle de la même manière par les deux autres électrodes. Le reste du dispositif est le même que pour les expériences à un seul tourbillon (chapitre précédent). Le diamètre intérieur du cadre en cuivre est de 12 cm et l'épaisseur de mercure 1,92 cm. Le champ magnétique est fixé à 0,48 Tesla. L'écoulement est encore visualisé grâce à de petites particules situées sur la surface libre. Les mesures de potentiel électrique se font sur les électrodes d'injection. La différence de potentiel entre deux électrodes d'une même diagonale est proportionnelle à la composante de vitesse transverse, moyennée sur la distance correspondante. Puisque les deux électrodes sont de même signe, les influences de l'injection de courant s'annulent à peu près, si les résistances de contact sont semblables. L'utilisation simultanée des deux couples d'électrodes permet d'avoir accès au vecteur vitesse, moyenné dans le voisinage du centre de la boîte.

Comme dans le cas d'une boîte carré, nous étudions le régime permanent obtenu par des valeurs croissantes du courant injecté. On définit le paramètre Rh par la rel. 4, le côté L étant remplacé par le diamètre de la boîte. Un régime à peu près stationnaire à quatre tourbillons est obtenu pour un courant total I inférieur à environ 0,7 A (correspondant à $Rh = 4$). On peut aussi considérer que deux jets se rencontrent au centre, puis s'évitent en s'étalant sur les côtés. Pour un courant supérieur à 0,7 A, deux tourbillons de signe opposé se développent au détriment des deux autres. Deux situations symétriques l'une de l'autre sont possibles et également probables (Fig. 12), cependant l'écoulement est toujours tel que l'un des deux jets qui se rencontrent prend le dessus. Le jet central qui en résulte est soumis d'autre part à des oscillations transversales de fréquence assez bien définie. Pour des courants encore plus élevés ($Rh \simeq 8$) la structure à deux tourbillons se déstabilise à son tour. Cela se manifeste tout d'abord par des retournements relativement brusques faisant basculer le système entre les deux situations anciennement stables. Le phénomène peut être suivi grâce à un enregistrement de la composante selon y de la vitesse au centre (Fig. 13). Les retournements se font à des intervalles de temps aléatoires de l'ordre du quart d'heure tandis que le temps caractéristique du système n'est que de quelques secondes. Lorsqu'on augmente encore le courant, les retournements deviennent de plus en plus fréquents, et un régime instationnaire plus complexe

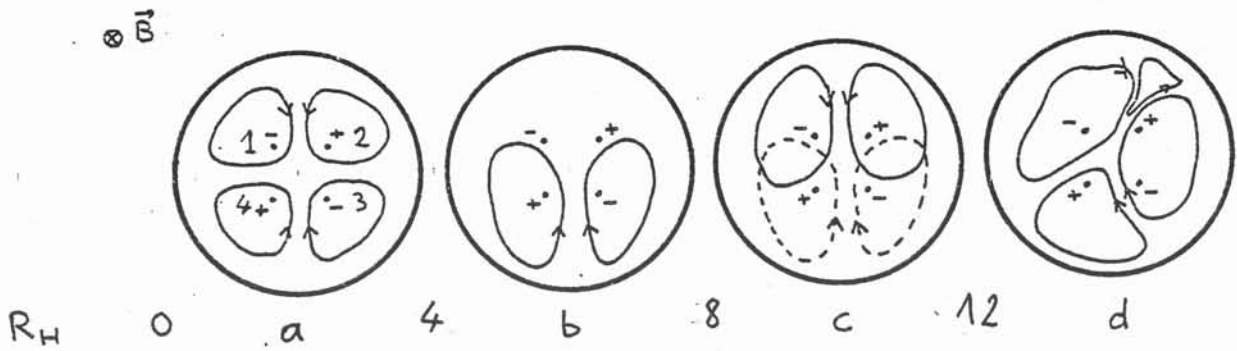


Fig.12 : Les différents régimes obtenus pour des valeurs croissantes de R_h .
Le signe du courant injecté à chaque électrode est indiqué

- a) Ecoulement à 4 tourbillons, b) Ecoulement à 2 tourbillons principaux
c) Retournements aléatoires des 2 tourbillons, d) Régimes complexes

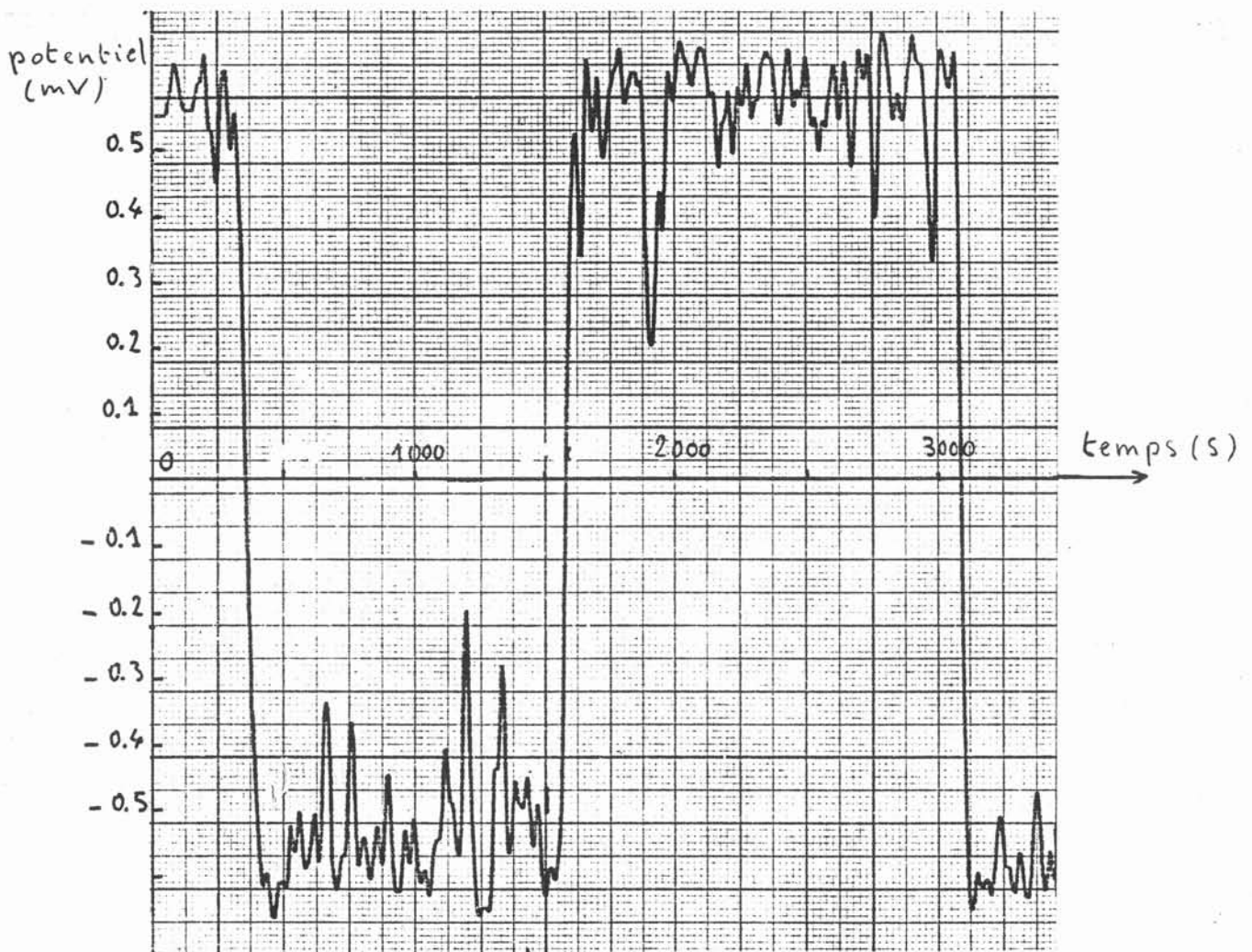


Fig. 13 : Enregistrement de l'évolution de la vitesse au centre pour $R_h = 8,5$
($I = 3 \text{ A}$).

Celle-ci est indiquée par le potentiel $(\phi_1 - \phi_3 + \phi_4 - \phi_2)/2$ où les électrodes 1, 2, 3, 4 sont indiquées sur la fig. 11 a.

s'installe pour $Rh > 12$. Les visualisations montrent des structures à grande échelle et les spectres temporels présentent des oscillations à longues périodes (quelques minutes).

Ces expériences confirment les considérations du paragraphe 2 qui montrent que la rotation globale ne peut pas être le résultat final de la cascade inverse d'énergie dans une boîte circulaire. On retrouve d'autre part, comme dans le cas de la boîte carrée, des fluctuations à longues périodes de temps. Cependant l'étude reste assez qualitative. Elle avait été en effet réalisée à titre préliminaire, afin de préparer les expériences en boîte carrée, plus faciles à comparer à la théorie et aux calculs numériques. Il serait intéressant de refaire des expériences en boîte ronde en injectant dans un mode continu en fonction de Bessel. On pourrait alors faire des comparaisons avec un modèle spectral tronqué, et acquérir ainsi une meilleure compréhension des possibilités d'appliquer de tels modèles aux grandes échelles d'une turbulence bidimensionnelle.

REFERENCES

- KELLS G.L., ORSZAG S.A., 1978 : "Randomness of low-order models of two-dimensional inviscid dynamics" Phys. Fluids 21 (2) p. 162.
- LORENZ : 1980 "Attractor sets and quasi geostrophic equilibrium" Ann. Met. Soc. Vol. 37, p. 1685.
- SOMMERIA J., VERRON J., 1984 : "An investigation of non linear interactions in a two-dimensional recirculating flow". Phys. Fluids 27 (8)
- SOMMERIA J., VERRON J., 1985 : "The two-dimensional inverse energy cascade in a confined domain : numerical and laboratory experiments" Turbulent Shear Flows Symposium, 7, 9 Août, Cornell University.

C H A P I T R E V I

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA CASCADE INVERSE
D'ENERGIE DANS UN DOMAINE CARRE

Contient un article en voie d'acceptation au J. Fluid Mech.

Submitted to J. Fluid Mech. March 85

EXPERIMENTAL STUDY OF THE TWO-DIMENSIONAL INVERSE ENERGY CASCADE

IN A SQUARE BOX

J. SOMMERIA

GIS MADYLAM - INSTITUT DE MECANIQUE DE GRENOBLE - BP 68 -
38402 - SAINT MARTIN D'HERES CEDEX

SUMMARY

The first quantitative experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade is presented. The flow is electrically driven in a horizontal layer of mercury and three-dimensional perturbations are suppressed by means of a uniform magnetic field, so that the flow can be well approximated by a two-dimensional Navier-Stokes equation with a steady forcing term and a linear friction due to Hartmann layers. Turbulence is produced by the instability of a periodic square network of 36 electrically driven alternating vortices. The inverse cascade is limited at large scales, either by the linear friction or by the finite size of the domain, depending on the experimental parameters. In the first case, $k^{-5/3}$ spectra are measured and the corresponding 2D Kolmogorov constant is compared to theoretical and numerical results. In the second case, a spontaneous mean large scale rotation is obtained. Near the transition between these two regimes, a global rotation occurs, lasting for very long periods of time, then followed by random relatively short reversals. It is shown that the chaotic large scales and the small turbulent eddies are separated by a gap of the spatial spectra and are statistically independent.

1. INTRODUCTION

Two-dimensional turbulence (2-D) is relevant in many situations where body forces or boundary conditions prevent the growth of three-dimensional (3-D) disturbances. This can be observed in rotating flows (Colin de Verdiere 1980), in soap films (Couder 1984), or in liquid metals moving under the influence of a strong uniform magnetic field. Generalizations of 2-D turbulence known as geostrophic turbulence, reviewed for example by Rhines 1979 and Mc Williams 1983, provide a first approach for understanding large scale motion of the atmosphere and oceans. While important properties of ordinary turbulence, such as the energy cascade, are essentially 3-D, the very different dynamics of 2-D turbulence could in some cases provide a schematic description of the large scales. This could be the case of 2-D coherent structures, for example in mixing layer (Lesieur 1984, Staquet et al. 1985), or for long time behaviour of flows in closed cavities.

A fundamental peculiarity of 2-D flows is, in the limit of small viscosities, the conservation of vorticity along the trajectories of fluid particles. The consequence of this property is the existence of an energy cascade toward large scales associated with an enstrophy (mean square vorticity) cascade toward small scales. General discussions of this behaviour are given in the review papers by Kraichnan Montgomery 1980 and Lesieur 1983. The existence of an inverse energy cascade toward large scales with a $k^{-5/3}$ energy spectrum, associated with an enstrophy cascade toward small scales with a k^{-3} energy spectrum was first conjectured by Kraichnan (1967). These ideas were confirmed in the framework of second order closures (Kraichnan 1971, Pouquet et al. 1975). New developments were brought recently by high resolution numerical simulations of the 2-D Navier Stokes equations. The problem of the universality of the enstrophy cascade has received much attention. In the calculation of Brachet Sulem (1984), a randomly chosen initial state produces a k^{-3} spectrum after some time. However other authors, as Mc Williams (1984), observe that the enstrophy transfers can be inhibited by the formation of isolated circular vortices, in a way depending on initial conditions, which leads to spectra steeper than k^{-3} . The existence of a $k^{-5/3}$ inverse energy cascade in a randomly forced turbulence was shown numerically by several authors (see § 6). The different estimations of the corresponding 2-D Kolmogorov constant are comprised between 6 and 13, against 1.5 for 3-D turbulence. This means that the inverse 2-D energy cascade is much less efficient than the direct cascade of 3-D turbulence. Beyond the case of homogeneous isotropic turbulence, an interesting question is the nature of the large scales of motion which are created when the inverse cascade reaches the size of a finite domain. This problem arises for example in experiments made in a rotating tank (Hopfinger et al. 1982) where a mean flow is observed, in which it is difficult

to know what are the respective influences of angular momentum transfers due to 3-D motions and of the 2-D inverse cascade.

Although important characteristics of 2-D turbulence are observed in several of the above-mentioned experimental examples, quantitative comparisons with theory or numerical computations are often difficult. This is due to the unknown effects of some residual 3-D perturbations, to uncertainties about the turbulent production, and also to the difficulty of measurements. In order to minimize these drawbacks, we use a thin horizontal layer of mercury subjected to a uniform vertical magnetic field. The suppression of 3-D perturbations in such a situation was first pointed out by a Russian team from Riga (Kolesnikov Tsinober 1974 , Lielausis 1975), and further theoretical and experimental development were brought out by Sommeria, Moreau 1982 and Sommeria 1983. . While these previous works were performed in rectangular channels, we use instead electrically driven flows in a closed box, in order to have a well controlled turbulent production and geometry. Flow visualizations are made from photographs of the free upper surface, and precise measurements of the local stream function, which is proportional to the electric potential, are possible. The experimental apparatus, which was already used in Sommeria, Verron 1984 with another distribution of the electric currents, is described in section 2 a). Electrical measurements can be realized simultaneously at 11 points in order to get space structures and spectra directly ; the data analysis methods are given in section 2b). The interpretation of the results is based on a 2-D approximation, which is developed in section 3, in which the important non-dimensional number R_h , based upon a typical bottom friction time, is defined. Experimental results concerning the transition to turbulence, the regime of quasi homogeneous isotropic 2-D turbulence, and the regime for which the flow is controlled by the finite size of the domain, are presented in section 4, 6 and 7 respectively. Finally a comparison with some aspects of quasi geostrophic flows is sketched in section 8.

2. THE EXPERIMENTS

a) The experimental device :

The experimental apparatus already described in Sommeria 1984 is a square box, length $l = 12$ cm, containing a horizontal layer of mercury whose thickness a is 2 cm (Fig. 1). It is located in the gap of an electromagnet producing a uniform vertical magnetic field < 1 Tesla. The upper surface is either free, and in contact with pure nitrogen to avoid oxydation, or rigid, after the formation of a mercury oxide skin. The flow velocity is kept small enough (< 10 cm/sec.) so that free surface waves are negligible. A periodic square network of 36 alternate sources and sinks of electric current is provided by a corresponding network of electrodes embedded in the bottom of the box. The electric current is provided by a well regulated DC power supply (0-20 Amp., max. relative drift 10^{-3}) and equally distributed within a precision of 10^{-3} by 2 sets of 18 equal electric resistances (3Ω each). Great care is taken to avoid any geometrical or electrical dissymmetry. Since the kinematic viscosity of mercury is $10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (ten times smaller than water), the typical Reynolds number are fairly high ($> 10^4$), even in a small box.

The investigation of the flow is performed in two ways. The first is to observe the displacement of small floating particles (\emptyset 50 to 100 μm) following the fluid motion. Of course this method is applied only in the case of the free surface, although a qualitative observation is still possible from the small vertical deformation of the oxyde skin due to pressure differences. The second method is to measure the electric potential on a straight line of 11 electrodes at the middle of the box. Two such perpendicular lines are available (Fig. 1). The small electric tensions (~ 1 mV) are amplified 10^3 times, using 11 low drift operational amplifiers. Digital processing is then performed by a micro computer with 12 bit resolution.

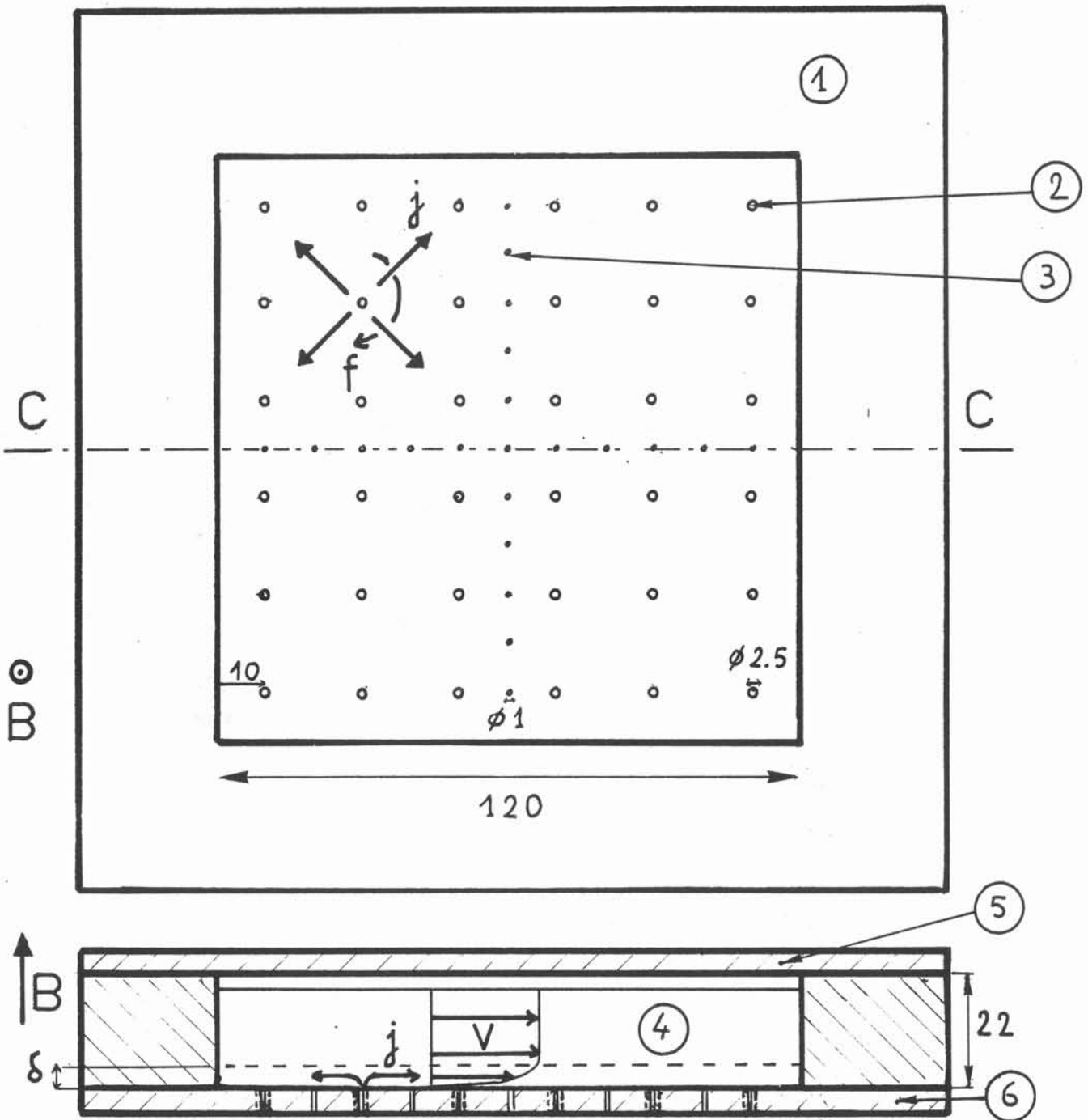


Fig. 1 : The apparatus ; the current distribution near one electrode and the velocity profile are schematized. The Hartmann layer depth is denote by δ

1. Copper frame
2. Electrodes for current injection and electric potential measurements
3. Electrodes for electric potential measurements only
4. Mercury
5. Glass cover
6. Electrically insulating bottom plate in which electrodes are embedded.

b) Data analysis :

The instantaneous flow could be measured with a fairly good precision (a few percents) from photographs, the length of each small trajectory being proportional to the corresponding velocity and to the time of exposure. In practice such visualizations were used only for rather qualitative global observations. Obtaining quantitative statistical informations, such as spatial energy spectra, require high resolution digital image processing which was not available.

So all the measurements are performed from records of the electric potential. This is a very direct method, the precision of which is limited only by the electronic noise and thermal drifts of the amplifier. A relative precision of 10^{-2} or 10^{-3} can be obtained, especially in a strong magnetic field. The long time behaviour of the largest scales is investigated from records of the electric potential at the box center. Time spectra are calculated from these data by Fast Fourier Transforms. Direct measurements of the spatial structure are obtained from simultaneous records on the line of 11 electrodes. In order to get a smooth profile, the electric potential measured at these 11 points is interpolated on the whole line by cubic spline functions. The first space derivative, which is proportional to the transverse velocity component is calculated analytically from this interpolation. Mean and r.m.s. velocity profiles and spatial auto-correlations are obtained from these results, by averaging over 800 velocity profiles one time every 5 seconds. Spatial one-dimensional spectra are calculated either from a direct Fourier transform of the instantaneous potential profile by rel. (39) and (41), or from the autocorrelation function of the velocity by relation (25). The correspondance between these two methods is given in the appendix.

3. THE TWO-DIMENSIONAL APPROXIMATION

a) The equation of motion :

Under the effect of a strong uniform vertical magnetic field \vec{B} , the flow can be divided in a 2-D core and thin Hartmann boundary layers near the horizontal walls. Their depth δ is constant and is calculated in textbooks of M.H.D. (Shercliff 1965).

$$(1) \quad \delta = (\rho\nu/\sigma B^2)^{1/2} = a/M$$

where a is the total thickness of the mercury layer, M is the Hartmann number, ρ , ν and σ are respectively the fluid density, viscosity and conductivity. Since we consider electrically driven flows, it is convenient to use non-dimensional coordinates chosen in such a way that the electrical forcing becomes of the order of unity. So, let us distinguish the non-dimensional time t , space coordinates $\vec{r} = (x,y)$ and current density \vec{j} , from the corresponding real quantities denoted by a tilde.

$$(2) \quad \tilde{t} = (\rho a L^2 / BI)^{1/2} t, \quad \vec{r} = L\vec{r}, \quad \vec{j} = (I/L^2)\vec{j}$$

where I is the total electric current supplied by the DC source. The corresponding non-dimensional equation of motion for the velocity field in the 2-D core $\vec{v}(x,y,t)$ is (taken from Sommeria, Verron 1984) :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \vec{\nabla} P + \nabla^2 \vec{v} / Re - \vec{v} / Rh + \vec{f}(x,y,t) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{where } Re &= L/\nu (BI/\rho a)^{1/2} \\ Rh &= s(aI/B\sigma\nu)^{1/2} L^{-1} = s(a/L)^2 Re/M \end{aligned}$$

s is a constant equal to 1 when the upper surface is free and to 1/2 when it is rigid. In this 2-D approximation, which is discussed in Sommeria, Moreau 1982, the effects of the magnetic field are restricted to a linear friction term due to the Hartmann layers and to the electrical forcing. Notice that the Hartmann layer is stable and does not break into a turbulent boundary layer, for which the friction term would be greater. This fact has been tested in several experiments, such as in Sommeria Verron (1984). The force \vec{f} is proportional and perpendicular to the horizontal component of the externally injected electric current. As a consequence of current conservation, the divergence of this horizontal component is proportional to the current density which is injected through the bottom. So the curl of the non-dimensional force is equal to the injected electric current $\vec{j}(x,y,t)$.

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{j}(x, y, t)$$

The electrical scheme is such that all the current which enters the bottom must exit the same way, so that

$$(5) \quad \int_0^1 \int_0^1 |j(x, y, t)| \, dx \, dy = 2$$

(normalization by relation (2) is used)

The experimental conditions are determined by the two non-dimensional parameters Re and Rh , which stand for the typical time of lateral viscosity effects and Hartmann friction respectively. Since the value of velocity is not directly controlled, these time scales are divided by a fictitious turnover time, which is chosen in order to get a non-dimensional electric force of the order of unity. For comparing the present results with other kinds of experiments, it could be useful to use new parameters based upon the effectively measured velocity and space scales. All the experimental results are obtained with large values of the Reynolds number Re , between 3×10^4 and 3×10^5 (However these numbers must be approximately divided by 10 to get the effective values). On the other hand, the parameter Rh is much smaller (between 1 and 40), which means that the Hartmann friction is the main cause of energy dissipation. So one could expect that the results depend mainly on this friction parameter and are nearly unsensible to Re . Reversely, the experimental verification that Rh is the main pertinent parameter is a good test of the validity of the 2-D approximation (3).

The stream function ψ and the vorticity ω are important quantities defined as

$$(6) \quad \left\langle \begin{array}{l} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right.$$

$$\omega = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \Delta \psi$$

An interesting feature of the electrically conducting fluid, is that the local stream function can be measured directly. Indeed, the electric currents are confined to the Hartmann layers, so that in the 2-D core of the flow, Ohm's law states

$$(7) \quad \vec{\nabla} \phi = \vec{v} \times \vec{B}$$

Consequently the electric potential ϕ , which can be directly measured, is constant along stream lines and is then proportional to the stream function ψ .

It will be useful to expand the stream function in Fourier series. For this purpose let us extend the domain of definition of the functions to the square $[-1,1] \times [-1,1]$ and define an antisymmetric function

$$\psi(x,-y) = \psi(-x,y) = -\psi(x,y)$$

and let us extend again to a 2 periodic function of x and y .

Because of the impermeability condition $\psi/\Gamma = 0$, this extended stream function is continuous and has continuous x and y first derivatives, while the second derivatives may have discontinuities on the boundaries. For example on the line $x = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \text{ is continuous}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^2} = \omega(o,y) \\ \frac{\partial^2 \psi^-}{\partial x^2} = -\omega(o,y) \end{array} \right.$$

The stream function which is extended in this way can be expanded in Fourier series

$$(8) \quad \psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\psi}_{nm} \sin n\pi x \sin m\pi y$$

and vorticity can be similarly expanded by term by term differentiation

$$\omega(x,y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi^2 (n^2 + m^2) \hat{\psi}_{nm} \sin n\pi x \sin m\pi y$$

This expansion is very suitable when vorticity vanishes at the walls. However it is not a necessary condition for its use : the series is convergent everywhere inside the square (but not on the boundaries themselves when vorticity does not vanish). In the general case the coefficient $\hat{\psi}_{nm}$ behaves as a power law at large wave numbers, and it can be shown from theorems about Fourier series that $\hat{\psi}_{nm}$ decays at least in $(n^2 + m^2)^{-2}$ (see for example Tolstov 1962). If vorticity vanishes at the walls it decreases at least in $(n^2 + m^2)^{-4}$, so that the expansion converges much faster.

b) The energy and enstrophy production :

The total production rates of energy and enstrophy by the force \vec{f} are written respectively

$$(10) \quad \varepsilon(t) = \iint \vec{f}_{(x,y)} \cdot \vec{v}_{(x,y,t)} = \iint j_{(x,y,t)} \psi_{(x,y,t)} dx dy$$

$$(11) \quad \eta(t) = \iint j_{(x,y,t)} \omega_{(x,y,t)} dx dy$$

In the present experiments $j_{(x,y,t)}$ is steady and can be represented by a network of N^2 alternating positive and negative peaks localized at the electrodes (here $N = 6$). This distribution can be developed in Fourier series.

$$(12) \quad j_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_{nm} \sin n\pi x \sin m\pi y$$

$$\text{where } J_{nm} = 4 \int_0^1 \int_0^1 j_{(x,y)} \sin n\pi x \sin m\pi y dx dy$$

The current density can be considered to a first approximation as a sum of Dirac functions δ , which Fourier transform is (using rel. 5) :

$$(13) \quad J_{nm} = 8 (-1)^{(n-N)/2N} (-1)^{(m-N)/2N} \text{ if } n \text{ and } m \text{ are even multiples of } N \\ = 0 \quad \text{in the other cases}$$

In fact, the electrodes have a finite diameter and some local 3-D flows can exist above them, so J_{nm} must decrease as an exponential for large wave numbers.

The energy and enstrophy production given by (10) and (11) can be expanded in a series made of terms of the type $\hat{\psi}_{nm} J_{n,m}$. Since the energy spectrum of 2-D turbulence decreases strongly at large wavenumbers (at least in k^{-3}), the first term of the series must be very dominant, especially for the energy production so that :

$$(14) \quad \epsilon_{x,y,t} \simeq 8 \hat{\psi}_{6,6}(t) \sin^2 6\pi x \sin^2 6\pi y \simeq \eta(t)/72\pi^2$$

$$(15) \quad \langle \epsilon \rangle \simeq 2 \langle \hat{\psi}_{6,6} \rangle \simeq \langle \eta \rangle / 72 \pi^2$$

where the spatial mean is represented by the bracket. More generally the whole dynamics should be well approximated by a steady forcing in the 6,6 sinusoidal mode. There is good experimental evidence that for moderate values of Rh , the flow behaves like a homogeneous isotropic turbulence driven by a random forcing with an energy production $\langle \epsilon \rangle$ and an enstrophy $\langle \eta \rangle$. The equivalent isotropic forcing should be at a wave number close to $6\sqrt{2}$, the modulus of the wave vector (6,6). In this context, the measurements of $\langle \epsilon \rangle$ and $\langle \eta \rangle$ is an important point. It could be obtained by relation (15) from a 2-D spectral analysis of the velocity field or equivalently from the mean velocity associated to the forcing which writes

$$(16) \quad \left\langle \begin{array}{l} \langle v_x \rangle = 3\pi \langle \epsilon \rangle \sin 6\pi x \cos 6\pi y \\ \langle v_y \rangle = -3\pi \langle \epsilon \rangle \cos 6\pi x \sin 6\pi y \end{array} \right.$$

Alternatively, the rate of energy production can be estimated from an energy balance. Considering that the main dissipation comes from the bottom friction, a simple relation is obtained.

$$(17) \quad \langle \epsilon \rangle = \frac{\langle \vec{v}^2 \rangle}{Rh} = 2 \langle v_z^2 \rangle / Rh$$

4. THE TRANSITION TO TURBULENCE

The stability properties of the periodic network of alternating vortices are not well understood. Sivashinski(1985) proposed a mechanism of large scale instability for a similar problem. However, the linear bottom friction is not included in his theory in which the only dissipative effect is the usual viscosity. In the present case the Reynolds number is high and the large scales are strongly damped by the bottom friction, so this theory cannot be used.

The experimental study of the transition is performed in a magnetic field of 1 Tesla with a rigid upper surface. The electric potential at the center is followed on an oscilloscope and a visual observation of the flow is also possible from the small vertical displacements associated with pressure variations. The electric current is slowly increased step by step and a direct transition to a turbulence state occurs at $I = 1.033$ A corresponding to $Rh = 1.78$. This transition is associated with pairings of equal sign vortices. If we consider that the box is made of 9 smaller boxes containing each 4 vortices, the instability mechanism described in Semmeria, Verron 1984 should occur : two vortices form a bigger one while the others are stretched at the periphery. The perfect slip boundary conditions used in that paper are compatible with this partition of the box. The corresponding transition threshold for the four vortices is experimentally 1.72 and numerically 1.37 with a spatially sinusoidal steady forcing (Sommeria, Verron 1984). So, the idea that the destabilization of the network is associated with the 4 vortex interaction is in good agreement with these results. The difference between the numerical value and the experimental one could be explained by the localization of the vorticity production near the electrodes in the latter.

The complete behaviour near the transition is in fact fairly complex (Fig. 2). First, when the electric current is decreased once the turbulent state has been reached, the periodic network is obtained again only for $Rh = 1.24$ in the general case. However in very rare circumstances a steady pattern represented in Fig. 3 a), can also be reached. Its stability domain extends from $Rh = 1.08$ to $Rh = 1.55$. This flow is the result of the interaction between the 9 vortices at each corner. A similar pattern, represented in Fig. 3 b) can also be obtained, but it is only metastable and goes back to the periodic network after about one minute.

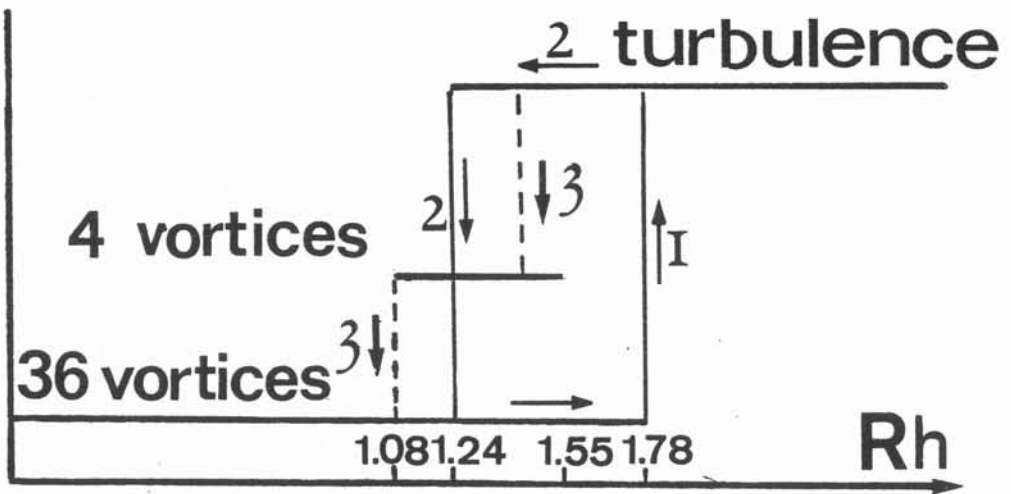


Fig. 2 : Diagram of the transition to turbulence. The three stable regimes are indicated by a full line in their range of stability (the vertical level is arbitrary). When Rh is progressively increased route 1 corresponding to a direct transition to turbulence is always followed. When Rh is decreased the alternative routes 2 and 3 can be followed.

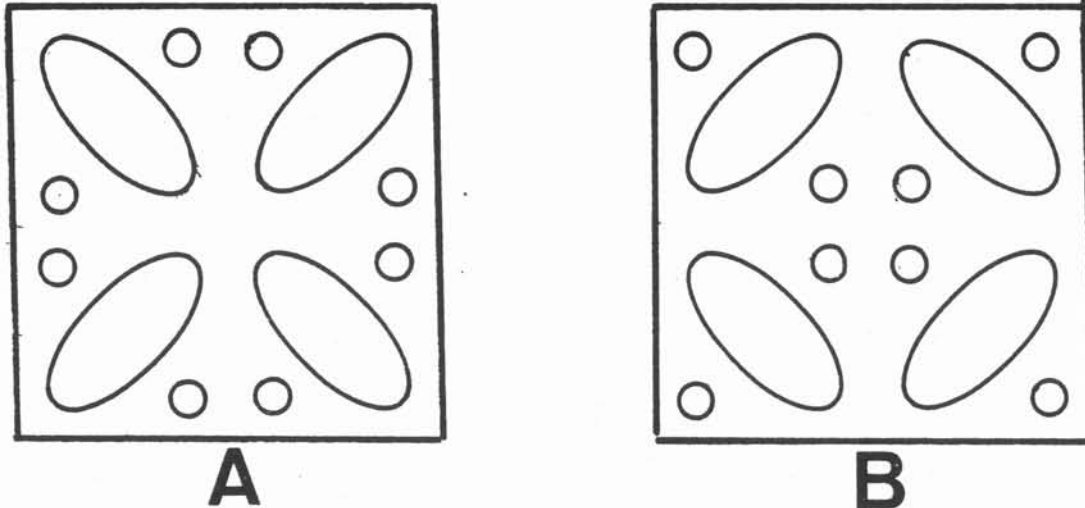


Fig. 3 : Schematic representations of stream lines in the 4 vortex configurations

- a) The stable one
- b) The metastable one

5. THE TURBULENT REGIMES, PHOTOGRAPHIC OBSERVATIONS

We are interested in the steady dynamical regimes which correspond to different values of the friction parameter R_h . We also check that the results are not sensitive to the Reynolds number Re , at least when it is large enough. In practice the magnetic field is chosen between 0.125 and 1 Tesla and the total electric current between 0.5 and 16 Amp. For each run the mercury is initially at rest and the electric current is suddenly switched on. A well ordered vortex network is then created over a period of a few tens of seconds (Fig. 4a). When $R_h > 1.78$, this network is afterwards fully destabilized by pairing processes and a turbulent regime occurs, which always behaves very much as if the forcing were random rather than steady and spatially periodic. We wait then about ten minutes in order to get a statistically permanent regime and begin photography or electric measurements.

The first point apparent in Fig. 4 b, c, d is that the turbulent structures are larger and larger for increasing values of R_h . As the final result of this evolution with R_h , a mean rotating flow is observed (Fig. 4d), in which small size vortices are superimposed. The apparition of this mean flow is expounded in section 7, however we shall first be concerned by the quasi-homogeneous isotropic regime which occurs for smaller values of R_h .

An easy way to quantify the turbulent scales from photographs like that of Fig. 4 is to count the mean number $\langle N \rangle$ of vortex cores in the box (Fig. 5). In practice, we need to add the results obtained for the different bands of the free surface which can be visualized at any one time. A typical turbulent integral scale can be estimated as $(L^2 / \langle N \rangle)^{1/2}$, from a hypothesis of equal size vortices. In fact this mean number is the result of some small scale vortices as well as the large vortices which contribute mostly to the turbulent energy. So the integral scale can be underestimated by this method. A better characterization of the inverse cascade is provided by energy spectra and correlation functions. Such calculations are possible from photographs, but they require digital image processing which has not been undertaken here. These quantities are more easily obtained from electrical measurements which are presented in the next section.

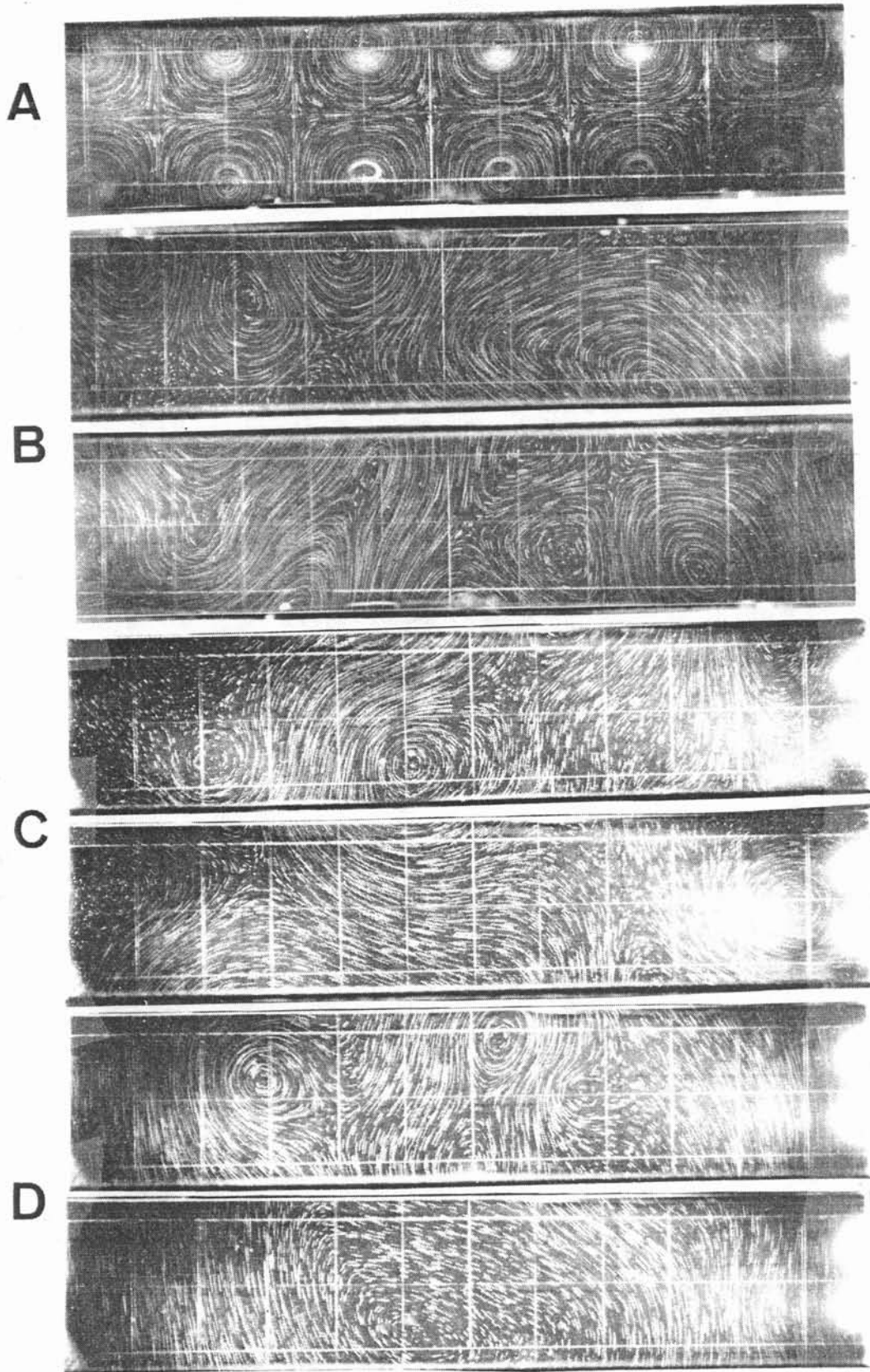


Fig. 4 : Photographs of a central band of the upper surface, using a 45° mirror.

The velocity field is represented by the traces of small particules (t is the time of exposure, the scale is 1 cm/division).

- a) The initial motion when the current is switched on
- b) $R_h = 7.27$, $B = 0.48$ Tesla , $t = 195$ ms (2 examples)
- c) $R_h = 20.5$, $B = 0.48$ Tesla , $t = 30$ ms (2 examples)
- d) $R_h = 41.1$, $B = 0.12$ Tesla , $t = 195$ ms (2 examples)

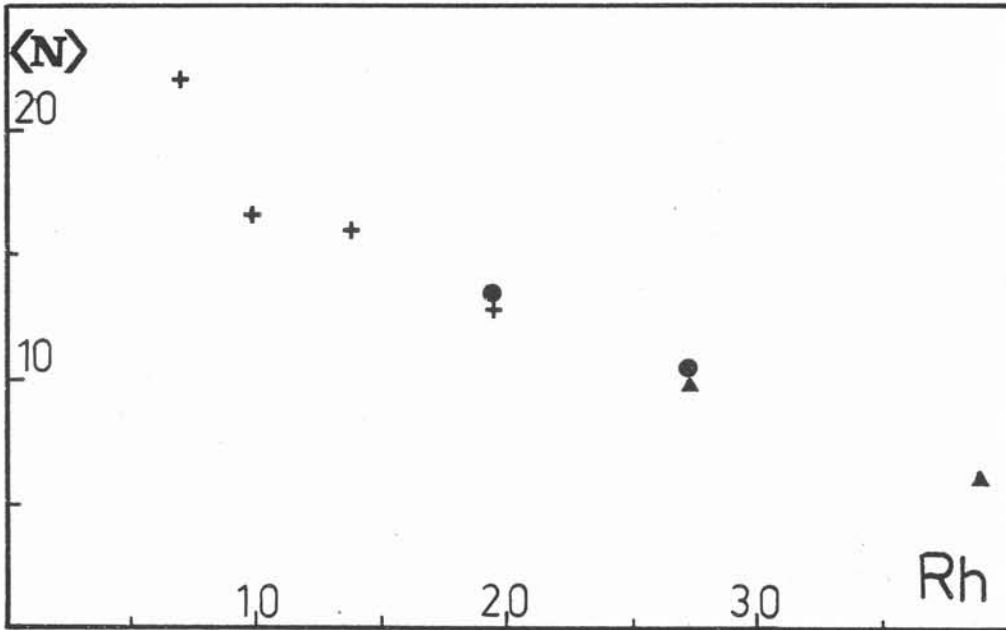


Fig. 5 : Mean number $\langle N \rangle$ of vortex cores in the whole flow versus Rh .
 + $B = 0.48$ T , • $B = 0.24$ T , ▲ $B = 0.12$ T

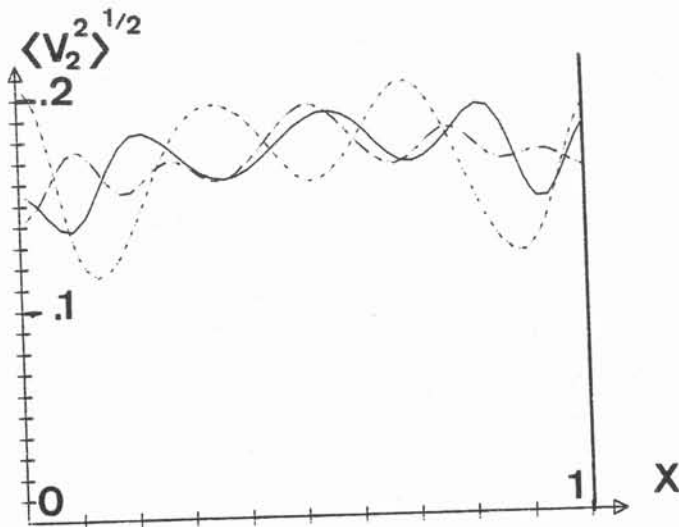


Fig. 6 : The r.m.s. transverse velocity profile along the line of measurements for different experimental conditions corresponding to the same value of $Rh = 10.07$ (non-dimensional position)

- free upper surface, $B = 0.5$ T, $I = 4$ A
- - - free upper surface, $B = 1$ T, $I = 8$ A
- rigid upper surface, $B = 0.5$ T, $I = 16$ A

6. THE INVERSE ENERGY CASCADE OF HOMOGENEOUS ISOTROPIC TURBULENCE

a) Mean velocity and r.m.s. fluctuations :

A zero mean value of the velocity is obtained along the line of electric measurements, when R_h is smaller than a threshold which will be specified in part d). A mean velocity field must exist, because of the steady forcing, but it vanishes on the measurement line. This mean flow can be calculated from the experimental r.m.s. velocity by relation (16) and (17). For example for $R_h = 3$, the maximum mean velocity is 0.025. It is definitely smaller than the corresponding r.m.s. 0.090 (non dimensional values), and the ratio becomes much smaller for large values of R_h . These results are in agreement with the general impression that the influence of the periodicity is small in the turbulent regime.

The variations of the r.m.s. velocity fluctuations along the line of measurements have a reproducible oscillating structure (Fig. 6). This structure is very similar for different experimental conditions with a free surface at a given value of R_h . However the agreement is not so good when we compare these results with those for the rigid surface. In this latter case the amplitude and period of the oscillations is larger. It is not clear whether these differences are due to defects of the 2-D approximation or to spurious effects at the boundary with the oxide skin. However these oscillations have a fairly small amplitude and the turbulent intensity can be considered as uniform to a first approximation. Let us define a r.m.s. velocity by averaging over the central third of the box and plot it versus R_h (Fig. 7). The non-dimensional results obtained at a given value of the friction parameter for very different experimental conditions are generally in good agreement. However the non-dimensional turbulent intensity has a tendency to be smaller when the magnetic field is too weak. This should be partly due to small scale 3-D flows produced near the electrodes, influencing the production rate of 2-D energy. The dynamics of the large scales themselves should be in better agreement with the 2-D theory than is indicated by these global results. The turbulent energy increases slowly for large values of R_h , so that the turbulent energy production $\langle \epsilon \rangle$, given by relation (17), decreases. Thus the flow is less and less correlated to the forcing as friction effects are smaller and the production mechanism is less and less efficient. In the limit of zero dissipation there would also be no

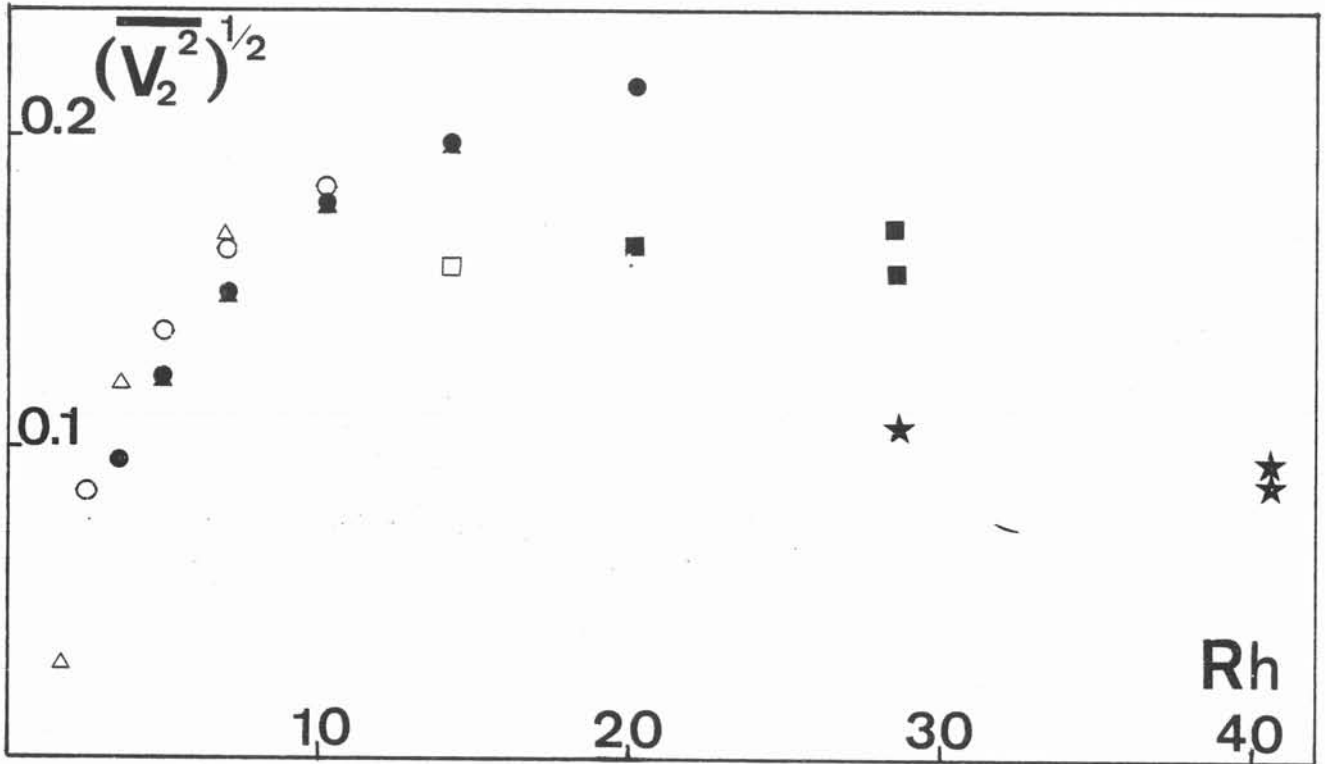


Fig. 7 : r.m.s. transverse velocity $(\langle v_2^2 \rangle)^{1/2}$ averaged on the central third of the box versus Rh

free surface : \blacktriangle $B = 1$ T , \bullet $B = 0.50$ T , \blacksquare $B = 0.25$ T

+ $B = 0.125$ T

rigid surface: \triangle $B = 1$ T , \circ $B = 0.50$ T , \square $B = 0.25$ T

production. This fact can be related to the increasing gap between the scales of the energy containing eddies and the production scale, that is to the inverse energy cascade.

b) Time spectra :

Time spectra of the central stream function are obtained from samples of 50 000 successive data. The average is calculated from 210 Fast Fourier Transforms realised on 512 points. Each sample overlaps the preceding by fifty percent and is multiplied by a Blackmann Harris window.* The spectra are always very smooth which is a proof that the flow is fully turbulent as soon as the periodic network is destabilized. Typical results are plotted in Fig. 8 with logarithmic coordinates. At large frequencies they exhibit a very steep power law which slope is nearly constant between 4.5 and 4.9. However it is difficult to distinguish such a steep slope from an exponential. For small values of R_h , the central stream function behaves like white noise for small frequencies. This is an indication that there is no specific dynamics of the large scales, except the random effect of small eddies. The behaviour is quite different for larger values of R_h as is shown in part 7. Notice that spectra obtained with very different experimental conditions corresponding to the same value of R_h are in good agreement, which is another validation of the 2-D equations (3).

* This window is suitable for investigating steep spectra with minimum perturbations of the sample edges (see Harris 1978).

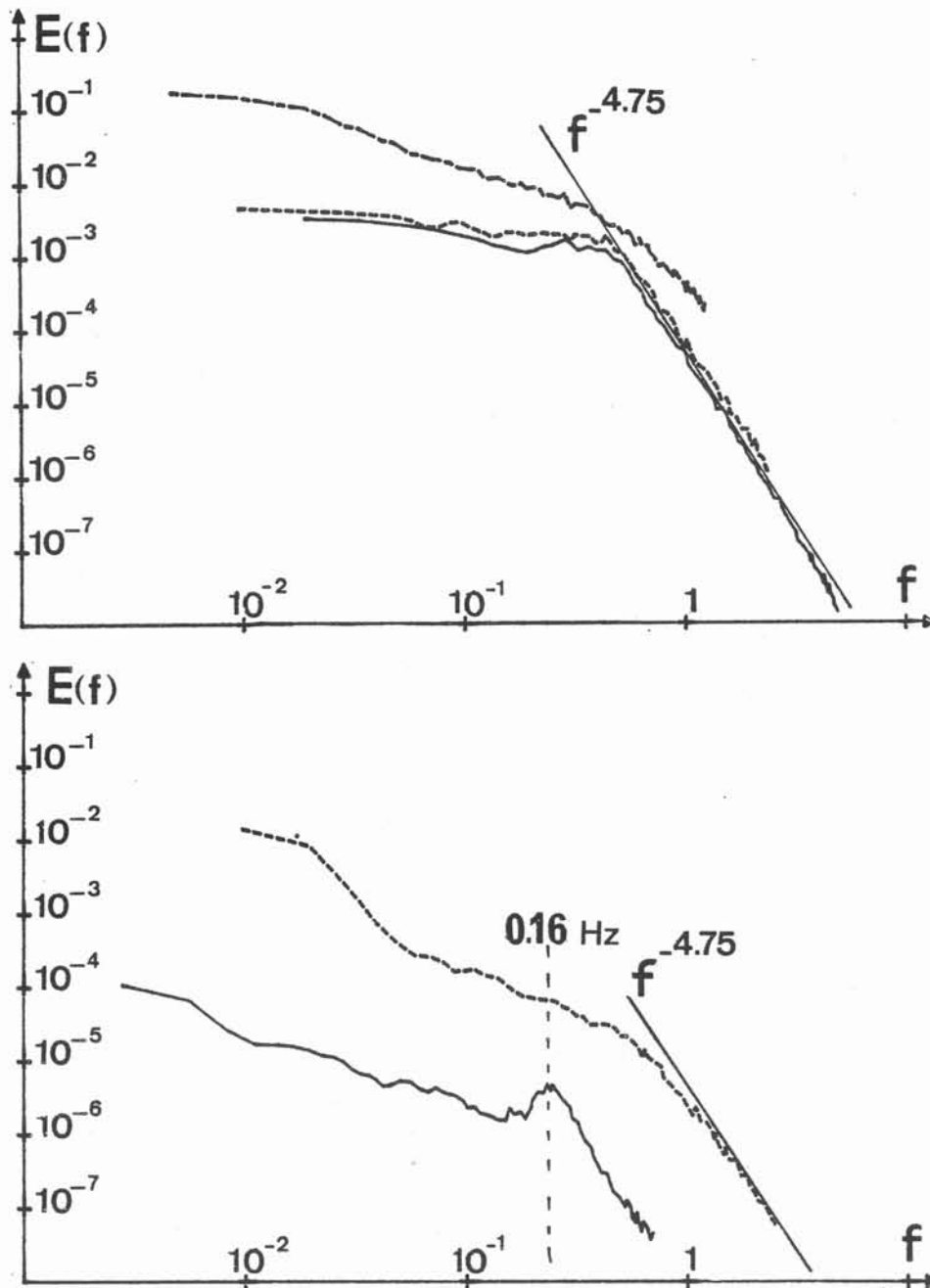


Fig. 8 : Time spectra of the central stream function ψ_1 in log-log coordinates, normalized in such a way that $\int_0^{\infty} E(f) df = \langle \psi_1^2 \rangle$.

The frequency is non-dimensional, the corresponding real frequency in Hz is given by $f = \alpha f$ where α is obtained from relation 2.

The upper surface is free except for one case

- a) — $B = 1\text{T}$, $I = 1\text{A}$ ($Rh = 3.56$) $\alpha = 0.50\text{ s}^{-1}$; ---- rigid surface, $B = 0.5\text{ T}$, $I = 2\text{A}$ ($Rh = 3.56$), $\alpha = 0.50\text{ s}^{-1}$; — . — . $B = 1\text{T}$, $I = 16\text{A}$ ($Rh = 14.2$), $\alpha = 2.0\text{ s}^{-1}$

- b) ---- $B = 0.25\text{ T}$, $I = 16\text{A}$ ($Rh = 28.5$), $\alpha = 1.0$;

— $B = 0.123\text{ T}$, $I = 16\text{ A}$ ($Rh = 40.6$), $\alpha = 1.40\text{ s}^{-1}$, the mean value $\langle \psi_1 \rangle$ is subtracted to ψ_1 before computing the spectrum.

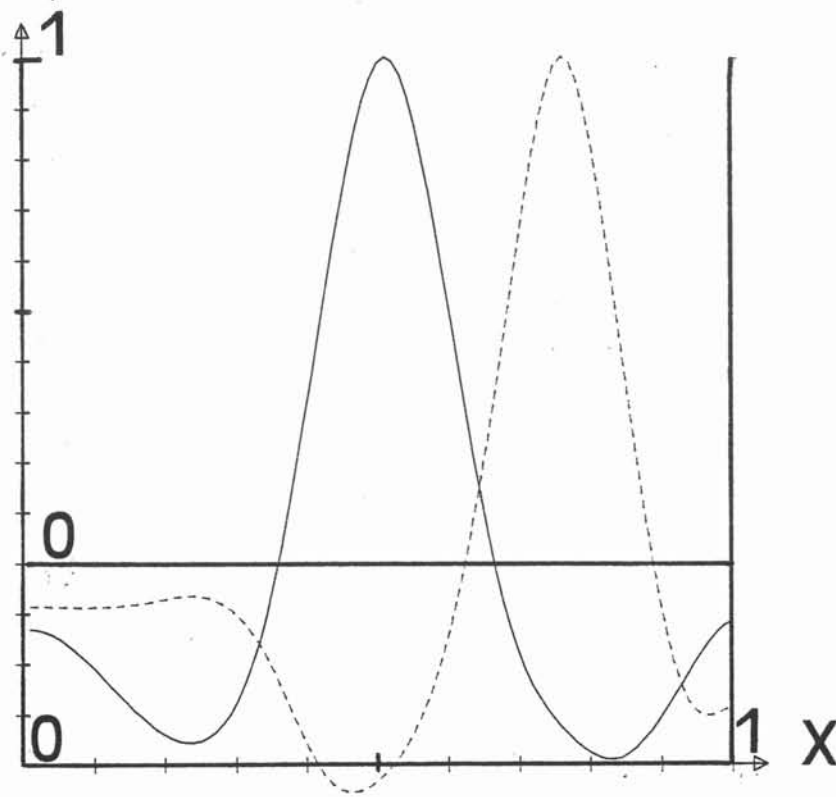


Fig. 9 : Autorrelation of the transverse velocity component $\langle v_2(x_0)v_2(x) \rangle$ along the line of electric measurements. $Rh = 20.1$,
 ($B = 0.5$ T, $I = 16$ A, free surface) — $x_0 = 0.5$, --- $x_0 = 0.75$

c) One dimensional spectra :

Some typical autocorrelation functions of the transverse velocity along the line of electric measurements are represented in Fig. 9. The similarity of the curves obtained with different origins x_0 for the autocorrelation $\langle v_2(x_0) v_2(x_0+x) \rangle$ is a good indication of the turbulence homogeneity. One dimensional spectra of the transverse velocity component can be obtained by a Fourier Transform of these autocorrelations. This method of calculating spectra is suitable for scales of motion which are definitely smaller than the size of the box, but not for the largest eddies. For example a global rotation is not taken into account by the correlation function with the origin at the center since the corresponding velocity is vanishing there. A more suitable method for this case is to expand the instantaneous velocity profile in Fourier series and to average the square of the coefficients. The relation between these two kinds of one-dimensional spectra are given at the end of the appendix.

Representative one-dimensional spectra are plotted in Fig. 10 together with the theoretical slopes $k^{-5/3}$ and k^{-3} and the injection wave number estimated in section 2. These results are obtained by an expansion in Fourier series, so that the wave number k is restricted to discrete values ($k = n\pi/L$). Energy is concentrated around the injection wave number for small values of the friction parameter. For $Rh > 4$, an inverse cascade begins to grow, which is in reasonable agreement with a $k^{-5/3}$ range. However this process is quickly limited by the size of the domain. Then the $k^{-5/3}$ extends no further, yet the fluctuations of the smallest wave number continue to increase progressively until most of the energy is condensed in the largest scale ($n = 1$), corresponding to a global rotation. So the main features observed by flow visualizations are confirmed by these measurements.

The extend of the $k^{-5/3}$ energy spectrum is about have a decade in the best cases, which correspond to values of Rh roughly between 14 and 30. Below these values, the Hartmann friction drains an important part of the energy along this cascade. Above them, sensible departures from homogeneity and isotropy are due to a global motion at the scale of the box. The 2-D Kolmogoroff constant can be estimated from these measurements. For this purpose, the first step is to fit the spectrum with a $k^{-5/3}$ law, closely below the wave number of energy injection. To get a systematic processing we determine the straight line of slope $-5/3$ (in log-log coordinates) which is the closest to the points corresponding to $n = 4$ to 8. The second step is to relate these one-dimensional

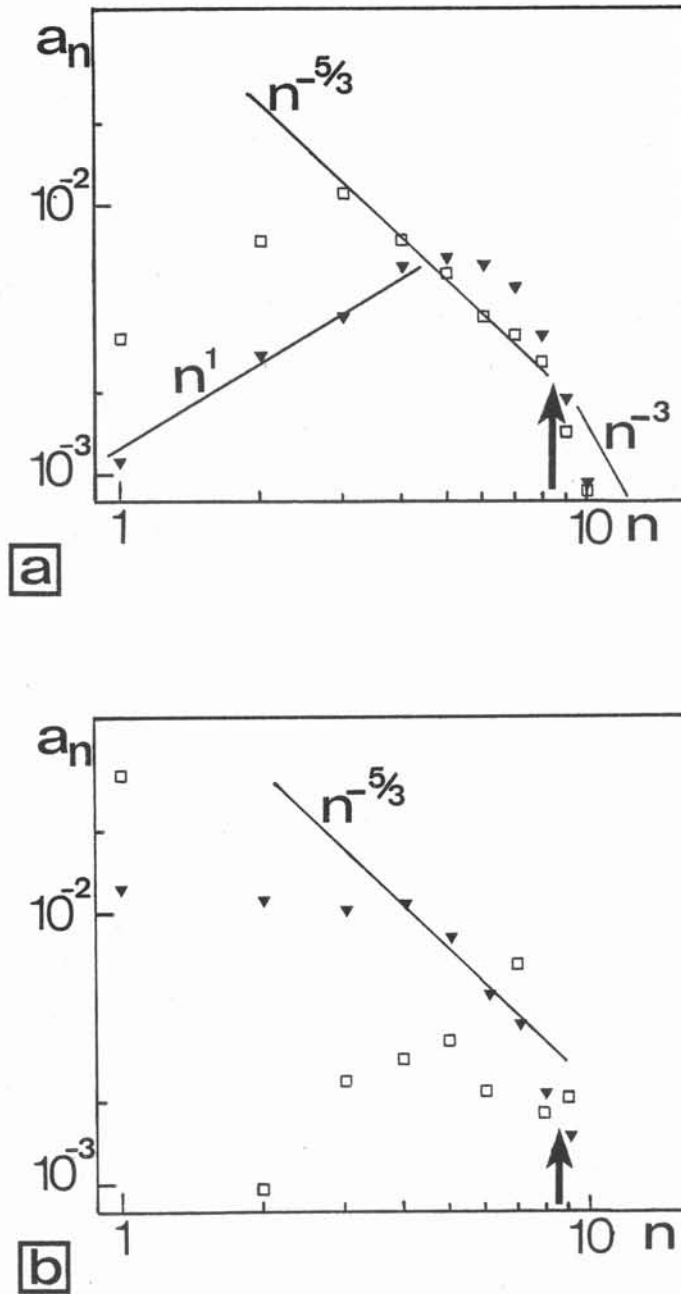


Fig. 10 : One dimensional spectra of transverse velocity component in log-log coordinates. The points correspond to the 12 first terms of the Fourier series computed from a periodic profile obtained after a symmetrisation (see part 2b). The normalization is such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n^2 \rangle = 2 \langle v_2^2 \rangle. \text{ The wave number is expressed in the unit } \pi/L$$

The slopes $k^{-5/3}$ and k^{-3} are indicated as well as the injection wave number.

a) \blacktriangledown , $Rh = 5.04$ (free upper surface, $B = 1T$, $I = 2A$) ;

\square $Rh = 14.24$ (rigid upper surface, $B = 0.25 T$, $I = 16A$)

b) \blacktriangledown $Rh = 27.4$ (free upper surface, $B = 0.25 T$, $I = 16A$)

\square $Rh = 40.3$ (free upper surface, $B = 0.125 T$, $I = 16 A$)

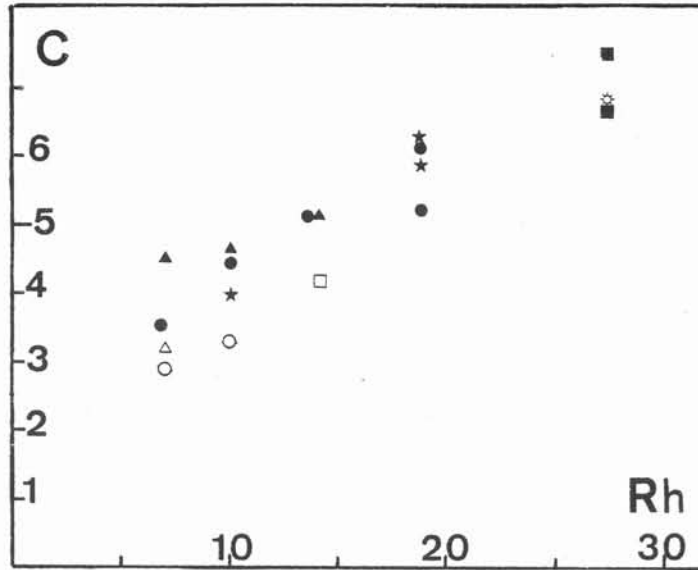


Fig. 11 : Two-dimensional "Kolmogorov constant" C versus Rh calculated from the spatial spectra. Larger values are an indication of less efficient inverse energy transfers

free surface : \blacktriangle $B = 1T$, \bullet $B = 0.50 T$, \blacksquare $B = 0.25 T$,
 \star $B = 0.50 T$ (spectra calculated directly from autocorrelations by rel.25)
 rigid surface : \triangle $B = 1T$, \circ $B = 0.50 T$, \square $B = 0.25 T$

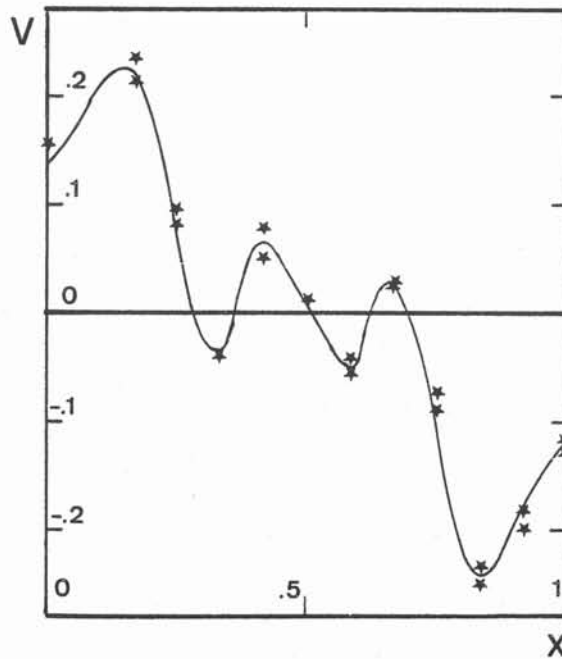


Fig. 12 : Mean transverse velocity profile when no reversal is observed (non-dimensional coordinates) $Rh = 41.1$ ($B = 0.12 T$)
 $I = 16A$, free surface).

spectra to the usual isotropic energy spectra, by using the properties of isotropy and homogeneity. This is done by relations (38) and (41) derived in the appendix. Finally, it is necessary to determine the mean production of energy $\langle \epsilon \rangle$ (written ϵ for short) by relation (17), obtained in section 2 by assuming that all the injected energy is dissipated only by Hartmann friction. The 2-D Kolmogorov constant C which is determined by this method is roughly independent of the experimental conditions for a given value of the friction parameter R_h (Fig. 11). This is a good test of the 2-D equation (3). The variations of C with R_h are sensible, which seems to be in contradiction with the idea of a universal inertial range. In fact these values of C are only reliable when the range of the $k^{-5/3}$ inverse cascade is large enough, say half a decade, and this is realized for values of R_h between 14 and 30. The corresponding 2-D Kolmogoroff constant is between 4 and 8. It is not surprising that for large R_h , when the interaction of the largest scales with the boundaries is strong, the inverse energy transfers are inhibited, which corresponds to a larger value of C . Furthermore, one can expect that the sink of energy at small wave numbers due to Hartmann friction should be partially balanced by supplementary turbulent transfers from larger wave numbers. This effect could be justified by the "diffusive" behaviour of these transfers, e.g. the tendency to smooth the energy spectrum. Of course, since the energy transfers are local in the cascade, this influence of dissipation on these transfers is limited to a small distance in the Fourier space and can reach the neighborhood of the injection wave number only for small values of R_h . This conjecture, which can be tested for example by second order closures, could provide an explanation of the small values of C for small R_h . This behaviour could also be due to an increased efficiency of the vortex pairing process in a periodic network compared to a random one, so that the inverse energy transfers should be more important near the injection wave number than for smaller ones. So these 3 possible effects can be invoked to explain the increase of C with R_h . In a larger box, a plateau should exist in this graph, corresponding to the actual value of the Kolmogorov constant obtained in a fully established inverse energy cascade, without "edge" effects. The estimation which is obtained here is compatible with the results of second order closures which is between 6 and 7 (Leith & Kraichnan 1972, Pouquet et al. 1975). It is slightly smaller than the value 9 obtained in the recent numerical simulation of the 2-D Navier Stokes equation by Frisch & Sulem (1984) using a pseudo spectral scheme. Otherwise, the numerical result 13 of Siggia & Aref (1981) obtained by a point vortex method is definitely too large, so that the inverse energy transfers are clearly underestimated by this method.

The other important feature of 2-D turbulence is the enstrophy cascade toward small scales. However the present data do not bring any information about it, since the spatial resolution of the measurements is not good enough : the size of the smallest eddies which can be resolved is about half the injection scale.

Finally, the behaviour of the spectra at small wave numbers for small values of R_h is noteworthy. Indeed they are proportional to the wave number k within a good approximation. It is shown in the appendix that the isotropic energy spectra should behave the same way. Spectra in k^1 correspond to an equipartition of energy in 2-D turbulence. The Hartmann friction is important in one turnover time for the corresponding eddies so that equipartition is hardly explainable as the result of thermodynamic equilibrium in a hamiltonian system. A phenomenological theory including friction effects as a drain in a local inverse energy cascade is not able to describe the small wavenumber behaviour (Lilly 1971). Statistical models taking into account friction and non local energy transfers calculated in a similar way as in Basdevant et al. (1978) predict a spectrum in k^3 . So this experimental result is quite surprising.

7. INTERACTION OF THE LARGE SCALES WITH THE BOUNDARIES

A simple characterization of the large scale behaviour is provided by measurements of the central stream function (i.e. the electric potential) which is proportional to the flow rate between the center and the walls. Indeed when there are no specific large scale phenomena, this flow rate is the result of a random superposition of a large number of small eddies, so that its probability distribution should be gaussian. Furthermore there is no correlation of this flow rate during times much larger than the turnover time, so that the spectrum should be a white noise at small frequencies. The results obtained for small values of Rh are indeed in good agreement with these ideas (Fig. 8 and 14). As Rh is increased, the inverse cascade brings some energy to the large scales. Then the probability distribution is flattened and the importance of small frequencies increases in the time spectra (Fig. 8) revealing a specific dynamics for large scales. At the final stage of this evolution, which is obtained for $Rh = 40$, the probability distribution is split into two distinct peaks and two opposite sign mean flows are possible.

a) Spontaneous apparition of a mean flow :

The mean flow corresponds to a global rotation, which is still turbulent, (visualized in Fig. 3). Either of the two rotation senses is possible, depending on initial conditions. A mean velocity profile obtained on the line of electrical measurement reveals a complex structure (Fig. 12). The velocity reaches a maximum near the walls and some spatial oscillations are superposed ; these are analogous to the oscillations of the r.m.s. velocity at smaller values of Rh (Fig. 6) but are organized in a coherent manner here.

The turbulent behaviour is quite different than in the quasi isotropic regime discussed in the previous paragraph. The space spectrum contains a peak at the injection scale (Fig. 10 b). There is a gap between this peak and the $n = 1$ mode in which most of the energy is concentrated. So the inverse cascade is inhibited and energy seems to be transferred directly to the mean flow (in the mode $n=1$) by some kind of negative turbulent viscosity effects. Time spectra at $Rh = 39.1$ reveal the existence of

a broad peak at the frequency 0. Hz, corresponding to the advection by the mean flow of the eddies generated by the forcing. Long time fluctuations are much less important than for lower values of R_h in the case for which the mean flow is not yet established.

The apparition of this mean rotating flow is similar to the one described by Sommeria Verron 1984. In that case, the forcing is steady in a four vortex mode, but the rotation rate is not changed when the forcing sense is suddenly reversed. A similar behaviour should be expected for a random forcing in a 4 vortex mode, and this forcing is provided here by inverse transfers from smaller scales. So the mechanism described in that paper seems to provide an understanding of the large scale behaviour in a wide class of 2-D flows in a square box.

b) Long time behaviour near the transition :

The transition which leads from the quasi isotropic regime to the mean rotation is noteworthy. Especially since unlike usual transitions from laminar to turbulent flows, the most ordered state is stabilized by non linear advective effects rather than by viscosity. Typical records of the central stream function (which is a measure of the rotation rate) are reported in Fig. 13 for 2 values of R_h . As this parameter is increased progressively, which is realised by decreasing the magnetic field for a given electric current of 16 amp., the rotation sense is constant during longer and longer periods of time interrupted by shorter reversals. Some isolated "events" can also disturb the mean flow but without changing its sense. The typical duration between two reversals increases very rapidly with the friction parameter. For $R_h = 41.1$, no reversal were observed during two 100 hours records, one for each sense (obtained by using suitable initial conditions). So we can consider that for practical purposes we are beyond the transition threshold. However, a plot of the mean frequency of the reversals versus R_h , using a logarithmic vertical scale, suggests that it decreases exponentially without any definite threshold. It is of course more and more difficult to avoid statistical fluctuations as R_h is increased. Since a lot of "events" bring a zero rotation but do not lead to a reversal, the transition can be more easily characterized by the value of the probability distribution of the central stream function near 0. The results reported on Fig. 15 are also in agreement with an exponential behaviour.

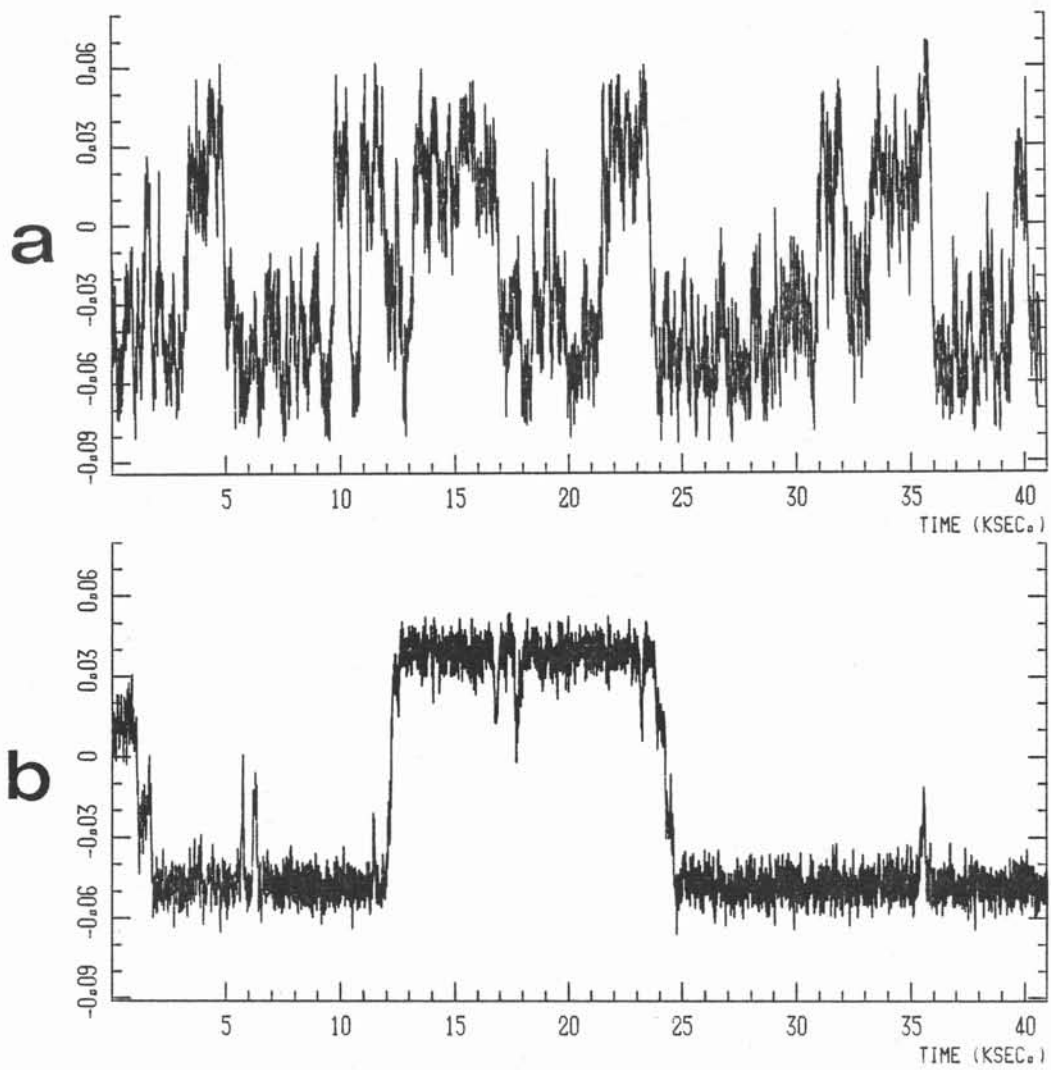


Fig. 13 : Typical time records of the non-dimensional central stream function (free surface, $I = 16$ A).

a) $Rh = 36,8$, b) $Rh = 39,5$

notice the very long time scales

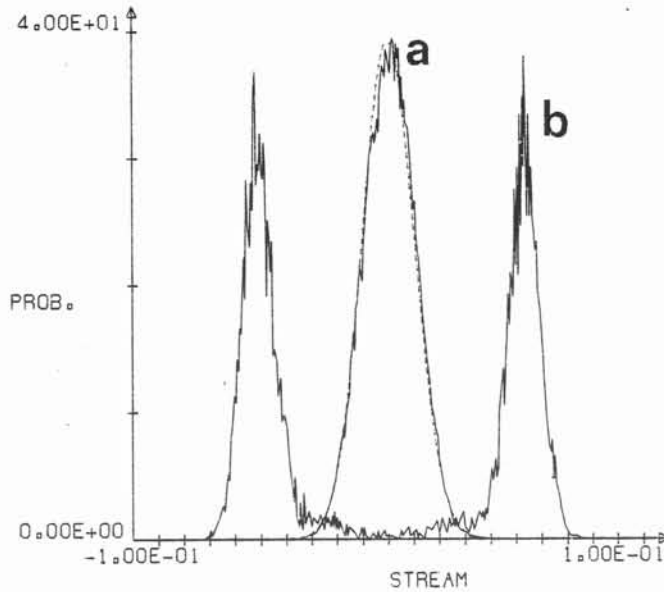


Fig. 14 : Probability density of the central non-dimensional stream function (in abscisse) a) $Rh = 3.56$ (free surface $B = 1T$, $I = 1A$) the distribution is very close to a gaussian. (represented by a dashed line)

b) $Rh = 40.3$ (free surface, $B = 0.125 T$, $I = 16 A$) two symmetric peaks are obtained, corresponding to the two senses of rotation.

The probability is integrated in the hatched area to plot one point of Fig. 15.

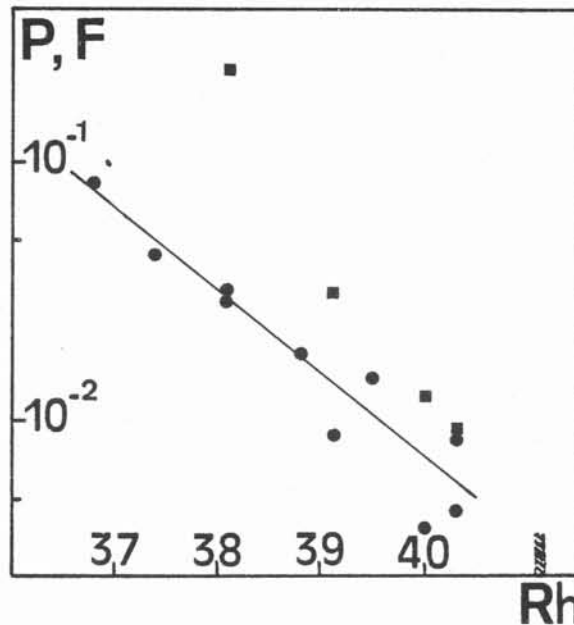


Fig. 15 : Behaviour near the transition between the quasi-isotropic regime and the mean flow. 2 characteristic quantities are plotted versus Rh (semi-logarithmic coordinates)

■ The mean frequency of reversals in units per 10^4 sec.

(The hatched area at $Rh = 41.1$ is an estimation of the reversal frequency based upon the fact that no reversal is observed during 100 hours)

● Probability of finding the central stream function between ± 0.01 (integral of the probability density in the hatched area of Fig. 15).

c) Interaction between the different spatial modes near the transition

Several ideas can be proposed to explain the long time behaviour near the transition. First of all, the reversals correspond to an important change of the total angular momentum of the fluid and cannot be due to external perturbations. Modeling by a deterministic system with chaotic behaviour should lead to a relation between the durations of two successive stages of constant rotation sense. In fact the reversals are random and two successive ones are independant, which is not surprising, as the durations are very long. So a convenient model should be provided by keeping the largest modes in the Navier-Stokes equations, as it is done in Sommeria-Verron 1984, and adding a convenient random forcing to represent the effect of small scales.

In order to be able to build such a model, it is usefull to study experimentally the simultaneous behaviour of the different modes of motion. For this purpose, the evolution of the wave numbers is obtained from a record of the electric potential at the 11 measurement points. Typical results for $n = 1, 2, 3$ and 8 are represented in Fig. 16 showing one reversal. The mode $n = 1$ is dominant and is well correlated with the stream function at the center. The mode $n = 3$ is a harmonic of $n = 1$ with the same symmetry and it is not surprising that they are correlated. The modes $n = 2$ and $n = 8$ seem to be uninfluenced by the reversals. These qualitative observations can be made more precice by the determination of the probability distribution of these modes (Fig. 17). First of all, a complexe structure for $n = 1$ is revealed, with two secondary peaks. They correspond to the relative stability of an intermediate state which can be observed during reversals (Fig. 13 and 16 a). The distribution for small scales ($n = 8$) is very close to a gaussian with a kurtosis^(*) of 2.8 (rather than 3 for a gaussian) so that they seem to be insensitive to the large scale behaviour. The kurtosis of $n = 2$, equal to 3.5, is an indication that the corresponding dynamics are more complicated. More precise information can be obtained by calculating the joint probability distribution for $n = 1, n = 2$ and $n = 1, n = 8$. To avoid excessive statistical fluctuations a partition into 5 sets for the $n = 1$ amplitude is used (represented in Fig. 17), and the results obtained from a total set of 6000 samples are summarized in Table 1. The fluctuations of the mode $n = 2$ are more important when the rotation associated to $n = 1$ is smaller,

(*) The kurtosis of the random variable a is defined as $\langle a^4 \rangle / a^2 \langle a^2 \rangle$

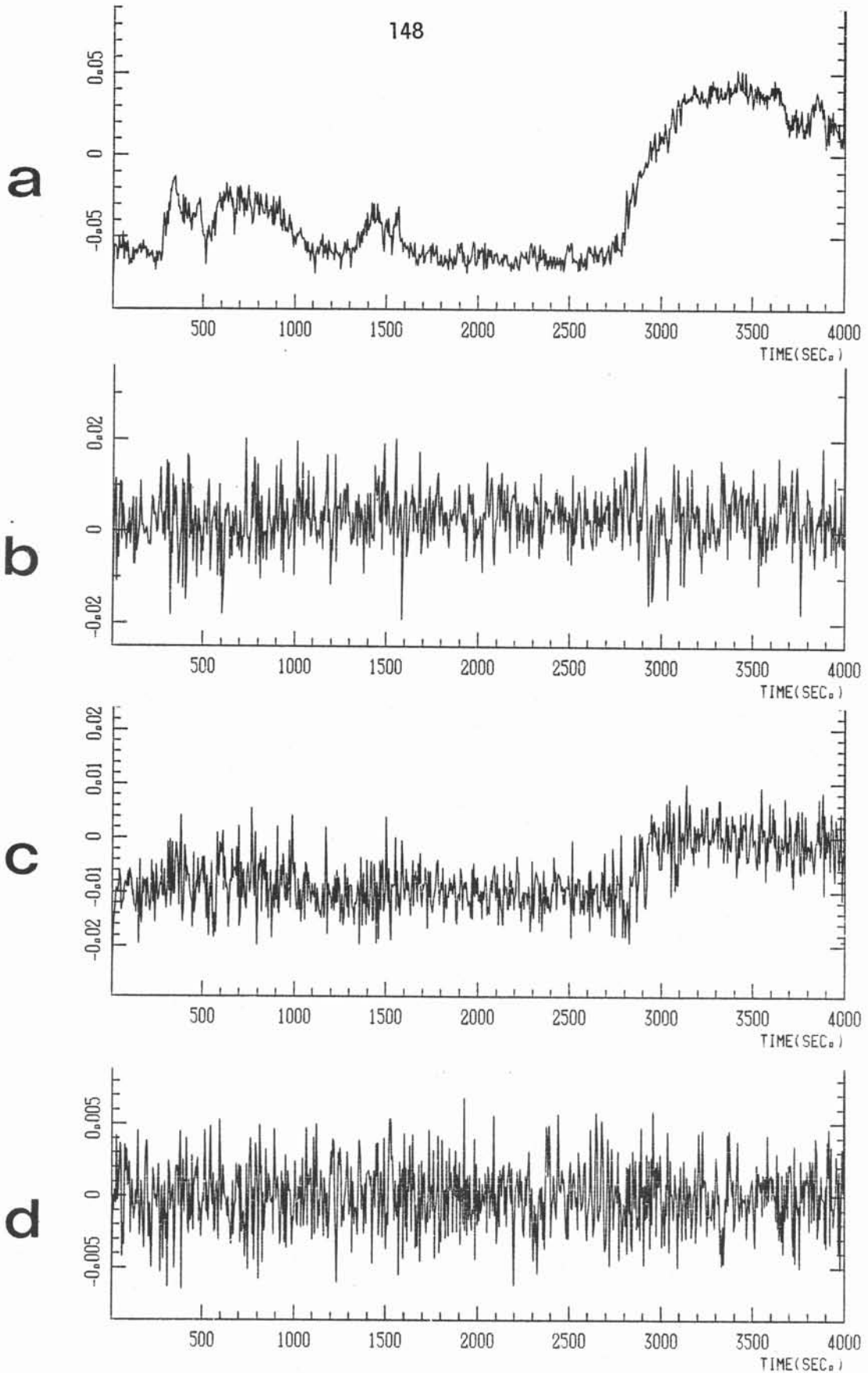


Fig. 16 : Simultaneous records of the time evolution of the non-dimensional amplitude of different wavenumbers (free surface, $I = 16A$, $B = 0.132 T$; $Rh = 39.2$) a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 8$.

The evolution of $n = 1$ is very well correlated to the central stream function.

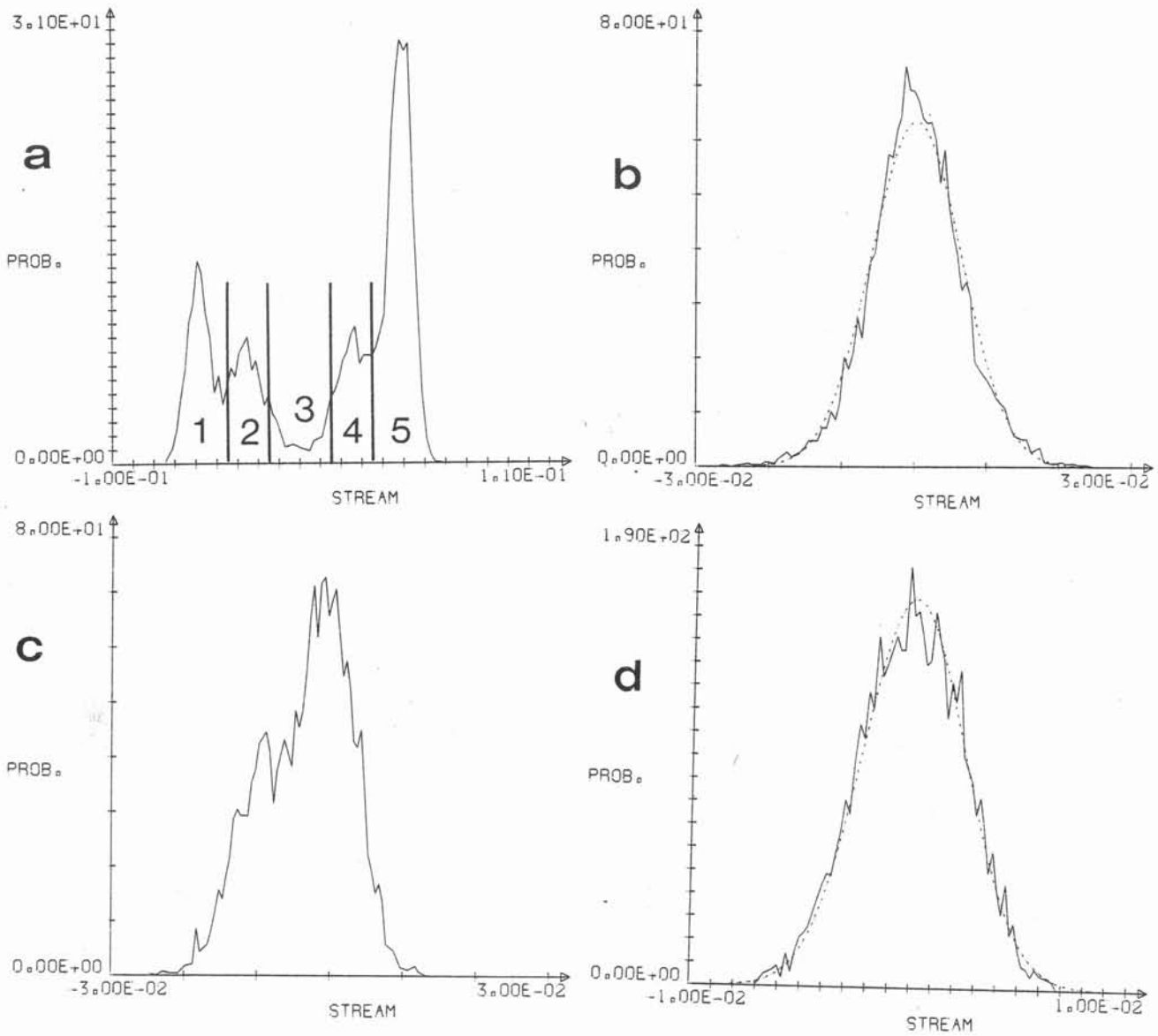


Fig. 17 : Probability distribution of the wave numbers

a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 8$. The ranges 1, 2, 3, 4, 5 in a) are used to calculate the conditional probabilities of table 1.

		1	2	3	4	5	GLOBAL
n = 2	$10^6 \times \langle a_2^2 \rangle$	27	57	72	50	26	39.5
	KU	3.3	3.2	2.8	3.0	3.1	3.55
n = 3	$10^6 \times \langle a_3^2 \rangle$	11.7	25.2	41.0	21.5	10.8	36.8
	KU	3.2	2.8	2.5	2.8	3.0	2.5
n = 8	$10^6 \times \langle a_8^2 \rangle$	5.7	5.6	6.0	5.2	5.6	5.6
	KU	2.7	2.8	2.7	2.5	2.7	2.7

Table 1 : r.m.s. and kurtosis ($\langle a^4 \rangle / \langle a^2 \rangle \langle a^2 \rangle$) of the conditional probability

distribution of the Three wave numbers $n : 2, 3, 8$. These distributions are calculated from samples for which the amplitude of the mode $n = 1$ is in the range labelled by the number 1 to 5. These numbers correspond to the ranges $]-\infty, -0.035]$, $[-0.035, -0.015]$, $[-0.015, 0.015]$, $[0.015, 0.035]$, $[0.035, \infty[$ respectively (see also Fig. 17). The global quantities obtained without any condition on the $n = 1$ mode, are indicated in the last column.

for example during reversals. So the $n = 2$ mode is clearly involved in the reversal process. The small scales represented by $n = 8$ are quite independent of the mean rotating flow, which is a remarkable result. As a consequence the occurrence of a reversal cannot be explained by a strong fluctuation of the energy production ε , which should be associated with a variation of the small scale turbulent energy. So the random reversals must be mainly due to the chaotic behaviour of the large scales themselves, only weak random perturbations being provided by the small scales. In other words, the flow should be described by a direct calculation of the large scales, with a statistical modelization of the interaction with small eddies. This idea is still supported by the existence of a gap in the energy spectrum (Fig. 10b) between the wave number $n = 1$ and the injection one.

8. SIMILARITIES WITH GEOPHYSICAL FLOWS

2-D equations similar to (3) are generally used to model large scale atmospheric motions in the quasi-geostrophic approximations. The transfers of barotropic energy from the scale L_I of production by the baroclinic instability to larger eddies and to the mean zonal flow is generally assimilated to a 2-D inverse energy cascade. This latter is limited at a scale L_β (Rhines 1979) by the variation of the horizontal component of the Coriolis force with latitude (β effect). There is also a limitation due to the surface friction in the planetary boundary layer.

This drag is usually modeled by a linear term $-v/t_E$ identical with the Hartmann friction. The coefficient $1/t_E$ can be estimated from the measured depth of the planetary boundary layer by taking into account the Ekman effect. The production mechanism by the baroclinic instability involves thermal phenomena and is much more complicated than the steady force of the present experiments. This latter is exactly analogous to the vorticity production by sources and sinks in the bottom of a rotating tank as used by Colin de Verdiere (1980). In such experiments, a β effect can be obtained by means of large scale topography. A similar method cannot be used in a M.H.D. device : energy would be dissipated rather than propagated as Rossby waves. However the limitation of the inverse energy cascade by β effect is roughly similar to the confinement between two parallel walls, East West oriented a distance L_β apart. There is no limitation in the perpendicular direction (Rhines 1979), so a better analogy would be provided by an experiment in a large aspect ratio rectangular box.

In spite of many shortcomings it is instructive to make a comparison between the experimental parameters and the atmospheric ones which are typically.

$$\begin{aligned} L_I &\sim 1000 \text{ km} \\ L_\beta &\sim 3000 \text{ km} \\ t_E &\sim 10^6 \text{ sec.} \\ \varepsilon &\sim 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \end{aligned}$$

The non-dimensional quantities which must be used in equation 3 can be obtained from the non-dimensional length l^* and time t^*

$$\begin{aligned} l^* &= l/L_\beta \\ t^* &= (t/T_E)Rh \end{aligned}$$

The experimental parameter Rh is such that the corresponding non-dimensional forcing is of the order of unity. However the ratio between the injection scale L_I and the largest available one L_β is half the experimental one, so that the comparison should be rather made on the injection of energy ε , which is independent of the scale to a first approximation.

$$Rh^3 \varepsilon^* = \varepsilon L_\beta^{-2} t_E^3 \sim 30$$

This value is obtained experimentally for $Rh \simeq 20$, ε^* being calculated from the turbulent energy by rel. (17). It corresponds to a regime for which the limitation of the inverse energy cascade is mainly due to friction effects, but for which a global rotation with random reversals begin to appear. There could be some analogies between this global rotation and persistent atmospheric anomalies such as blocking. By proceeding with this comparison one should expect that such anomalies are more persistent in atmospheric situations for which the product $\varepsilon L_\beta^{-3} t_E^3$ is especially large.

CONCLUSIONS :

First of all, an experimental example of a fully developed turbulent flow which can be precisely described by a 2-D Navier Stokes equation is presented. This fact is proven by the comparison of the results obtained with different magnetic fields and free and rigid upper surfaces. So this is surely a step in the understanding of M.H.D. turbulence. Beyond this scope, the method can be used to investigate different kinds of 2-D turbulent flows, with precise and complete measurements. Some questions could be raised about the utility of such experiments since high resolution direct numerical simulations of the 2-D Navier Stokes equations begin to be quite reliable. In fact, while these latter are suitable for investigating the enstrophy cascade at small scales, experiments cannot be replaced for the very long time behaviour of large scales. Otherwise, for applying the ideas of 2-D turbulence to realistic phenomena such as rotating flows, geophysical situations, or even the large coherent structures of ordinary turbulence, it is important to understand the influence of small scale 3-D eddies. It is quite possible to test this influence in the MHD experiments, for example by increasing the thickness a .

Concerning the results themselves, they can be divided into three parts :

- An instability of a square, periodic network of alternating vortices by pairing processes was clearly identified. This results is a demonstration that fully developed 2-D turbulence can be generated by a hydrodynamic instability without any random forcing.

- The first experimental measurement of the 2-D $k^{-5/3}$ inverse energy cascade and the corresponding Kolmogorov constant was obtained.

The range of wave number is still limited to half a decade, but it could be improved by using a larger box, which is not a major technical problem.

- Two kinds of limitation of the inverse cascade at large scales were studied. These latter are damped by the linear bottom friction, but, if it is small enough, the cascade is not much modified at smaller scales. The second limitation is due to the finite size of the box when the bottom friction is small enough. Then the dynamics are completely modified and a mean rotating flow spontaneously appears, maintained by direct transfers of energy from the scale of injection, without any cascade. Short reversals of the mean rotation sense can occur randomly separated by very long periods of time. Analogous long time behaviours are encountered in geophysical examples, such as the earth's magnetic field or climate. A better understanding of our experimental results should bring some insight in the mechanical aspects of these very complex natural phenomena. Indeed mesoscales of geophysical flows are quasi 2-D, and inverse energy transfers to large scales are limited by the finite size of the domain or by the effect of the earth's rotation (β effect). Some of our results are clearly dependent on the square shape of the box, as the existence of a non-zero total angular momentum (Sommeria, Verron 1984). However the apparition of very long time scales and the suppression of the inverse cascade are much more general as is suggested by some preliminary studies in a circular geometry. Finally, similar behaviour of 2-D large scales could also be present in ordinary fluids with a 3-D small scale forcing, and it would be interesting to test this idea in such a case.

Useful discussions with M. LESIEUR, R. MOREAU, and J. VERRON are gratefully acknowledged. Thanks are due to R. BOLCATO for the realization of the experimental facility and to A. TUPIN for the typewriting of the manuscript.

DIFFERENT DEFINITIONS OF THE ENERGY SPECTRUM IN 2-D HOMOGENEOUS ISOTROPIC TURBULENCE

Relations between the different definitions of the energy spectrum and the autocorrelation functions for 3-D homogeneous isotropic turbulence are given in textbooks (Hinze 1975). Some results concerning 2-D turbulence were published by Hutchings (1955), Lilly (1973), Mory (1984). However some complements are needed in order to calculate the 2-D Kolmogorov constant from the measurements.

The isotropic energy spectrum $E(k)$ is usually defined from the Fourier transform $\phi_{ij}(\vec{k})$ of the autorrelation tensor $R_{ij}(\vec{r})$ by the following relations (δ is the space dimension).

$$(18) \quad R_{ij}(\vec{r}) = \langle U_i(\vec{x}) U_j(\vec{x}+\vec{r}) \rangle$$

$$(19) \quad \phi_{ij}(\vec{k}) = 1/(2\pi)^\delta \int R_{ij}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^\delta\vec{r}$$

$$(20) \quad E(k) = 2\pi k^2 \phi_{ii}(k) \quad (3-D)$$

$$(21) \quad E(k) = \pi k \phi_{ii}(k) \quad (2-D)$$

Velocity measurements are often limited to a straight line, so that longitudinal spectra $E_1(k)$ and transverse one $E_2(k)$ are naturally obtained from the corresponding correlation functions $f(r)$ and $g(r)$.

$$(22) \quad f(r) = \langle v_1(x) v_1(x+r) \rangle$$

$$(23) \quad g(r) = \langle v_2(x) v_2(x+r) \rangle$$

$$(24) \quad E_1(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) e^{-ikr} dr$$

$$(25) \quad E_2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(r) e^{-ikr} dr$$

As a consequence of incompressibility these two correlation functions are related

$$(26) \quad g(r) = \frac{d(rf)}{dr}$$

and the corresponding relation between E_1 and E_2 can be obtained by a Fourier transform of each term of (26).

$$(27) \quad E_2(k) = -k \frac{dE_1}{dk}$$

It is now useful to get the isotropic correlations and spectra from the corresponding one-dimensional quantities. As a direct consequence of isotropy,

$$(28) \quad R_{ij}(r) = \frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r) \delta_{ij}$$

$$R_{ii}(r) = f(r) + g(r)$$

A relation between $E(k)$ and $R_{ii}(r)$ can be obtained by integrating in spherical shells in definition (19)

$$(29) \quad E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} kr \sin kr R(r) dr \quad (3-D)$$

$$(30) \quad E(k) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} kr J_0(r) R(r) dr \quad (2-D)$$

where J_0 is the zeroth order Bessel function. By comparing relation (29) with a suitable combination (24) and (25), a differential equation for $E_1(k)$ can be obtained. The solution of this equation leads to (Hinze 1975)

$$(31) \quad E_1(k) = \frac{1}{2} \int_k^{\infty} dp \frac{E(p)}{p} \left(1 - \frac{k^2}{p^2}\right) \quad (3-D)$$

$$(32) \quad E_2(k) = \frac{1}{4} \int_k^{\infty} dp \frac{E(p)}{p} \left(1 + \frac{k^2}{p^2}\right) \quad (3-D)$$

(The one dimensional spectra defined here are equal to half the spectra of Hinze) The similar relation is less easy to obtain for 2-D turbulence because of the Bessel function in (30). A useful intermediate step is to write the sum $E_1 + E_2$ in the following form, using rel. (24) (25) and (28)

$$(33) \quad E_1(k) + E_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(\vec{k} + \vec{l}) dl$$

$$\vec{k} \cdot \vec{l} = 0$$

Then, $E_1(k) + E_2(k)$ can be related to the isotropic spectrum by a simple change of variable

$$(34) \quad E_1(k) + E_2(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{E(p)}{\sqrt{p^2 - k^2}} dp$$

This relation was given in another context by Bahiano et al. (1985). By means of relation (27), a differential equation for E_1 is obtained, and its resolution leads to

$$(35) \quad E_1(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{p^2} E(p) dp \quad (2-D)$$

$$(36) \quad E_2(k) = \frac{2}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{k^2}{p^2 \sqrt{p^2 - k^2}} E(p) dp \quad (2-D)$$

- Behaviour of one-dimensional spectra in the inertial range :

If the isotropic energy spectrum is equal to $C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ above a wavenumber k_c , the one-dimensional spectra $E_1(k)$ and $E_2(k)$ have the same behaviour with the respective coefficients C_1 and C_2 . Relations (35) and (36) lead to

$$(37) \quad C_1 = 3/8 \times (2C/\pi) \int_0^{\infty} (\operatorname{ch}\theta)^{-5/3} d\theta \quad \simeq \quad 0.267 C$$

$$(38) \quad C_2 = 5/8 \times (2C/\pi) \int_0^{\infty} (\operatorname{ch}\theta)^{-5/3} d\theta \quad \simeq \quad 0.446 C$$

- Behaviour of the one-dimensional spectra for small wave numbers :

Let us suppose that the isotropic spectrum is equivalent to k^n , $n > 0$ as $k \rightarrow 0$. Then the longitudinal spectrum $E_1(k)$, calculated by (35), behaves as a constant

$$E_1(k) \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(p)}{p} dp \quad \text{as } k \rightarrow 0$$

So $E_1(k)$ is not suitable for an experimental determination of the behaviour of the isotropic spectrum at small wave numbers.

The behaviour of the transverse spectrum can be obtained by supposing that the isotropic spectrum is equal to αk^{-n} for $0 < k < k_c$, where k_c is a fixed cutoff. The integral of relation (36) can be splitted in two terms by integrating from k to k_c and then from k_c to ∞ . The first term can be rearranged by assuming

$k \ll k_c$, and we get

$$E_2(k) = \frac{2}{\pi} \left[\alpha k^n \int_0^\infty (\operatorname{ch}\theta)^{n-2} d\theta + k^2 \int_{k_c}^\infty \frac{E(p) dp}{p^2 \sqrt{p^2 - k^2}} \right]$$

if $n < 2$, the first term is the dominant one as $k \rightarrow 0$, and $E_2(k)$ behaves in the same way as the isotropic spectrum. If $n > 2$, the second term is dominant and

$$E_2(k) = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(p)}{p^3} dp \right) k^2$$

so that the slope of the one-dimensional spectrum is independent of the behaviour of the isotropic spectrum at small wave numbers.

- Calculation of the energy spectrum in a square box :

Concepts of homogeneous isotropic turbulence can be used in a square box for scales which are small enough. One dimensional energy spectra can be obtained from velocity measurements along the median straight line (described in section 2) in two different ways. The first one is to calculate the transverse correlation function $g(r)$ by relation (23) and its Fourier transform (25) do not depend on the origin x for a really homogeneous turbulence. In the present case, taking the origin at the box center is the most natural choice. The second method is to extend the instantaneous velocity profile to a periodic one with a symmetry as it is done in section 3. It is then possible to expand it in Fourier series

$$(39) \quad v_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

$$a_n = 2 \int_0^1 v_2(x) \cos n\pi x dx = -2n\pi \int_0^1 \psi(x) \sin n\pi x dx$$

and to consider $\langle a_n^2 \rangle$ as a one dimensional energy spectrum. These two definitions are equivalent in the limit of a large box. Indeed $\langle a_n^2 \rangle$ can be written as a double integral which can be splitted into two terms.

$$(40) \quad \langle a_n^2 \rangle = 2 \int_0^1 dx_0 \int_{-1}^1 dr \langle v_2(x_0) v_2(x_0+r) \rangle \cos n\pi r \\ + 2 \int_0^1 dx_0 \int_{-1}^1 dr \langle v_2(x_0) v_2(x_0+r) \rangle \cos n\pi(2x_0+r)$$

if we increase enough the size of the box, we can consider only the large values of n , so that the second term vanishes, and the first one can be rearranged by using homogeneity and the definition of $g(r)$

$$(41) \quad \langle a_n^2 \rangle = 4\pi E_2(n\pi) \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

R E F E R E N C E S

- BABIANO, A., BASDEVANT, C., SADOURNY, R., 1985, Submitted to J. of Atm. Sciences
- BATCHLELOR, G.K., 1969, Phys. Fluids Suppl. II, Vol. 12, p. 233.
- BRACHET, M.E., SULEM, P.L., 1984 - 4th Beer Sheva Seminars M.H.D. Flows and Turbulence Israël. Proceeding in A.I.A.A. Progress in Aeronautics and Astronautics.
- COLIN DE VERDIERE, A., 1980, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, Vol. 15 p. 213
- COUDER Y., 1984 J. Phys. Lett., 45, p. 353.
- FRISCH, U. & SULEM, P.L., 1984 Phys. Fluids 27 (8) p. 1921. Erratum : Phys. of Fluids 1985, Vol. 28, p. 438.
- HARRIS F.J., 1978, Proceedings of the I.E.E.E. Vol. 66, n° 1 p. 51.
- HINZE, 1975 "Turbulence" Mc Graw Hill
- HOPFINGER E.J., BROWAND F.K. & GAGNE Y. 1982 J. Fluid Mech. Vol. 125, p. 105
- HUTCHINGS, J.W., 1955 J. of Meteorology Vol. 12, p. 263.
- KOLESNIKOV, Yu. B. & TSINOBER, A.B., 1974, Izv. A.N.S.S.R. Mekh. Zh. i Gaza Vol. 4, p. 176.
- KRAICHNAN, R.H., 1967, Phys. Fluids Vol. 10 p. 1417
- KRAICHNAN, R.H., 1971, J. Fluid Mech. 47, p. 525
- KRAICHNAN, R.H. & MONTGOMERY D., 1980, Rep. Prog. Phys. 43, p. 541
- LEITH, C.E. & KRAICHNAN, R.H., 1972, J. Atm. Sci. 29, 1041
- LESIEUR, M., 1983, Special issue of J.M.T.A. "Two-dimensional turbulence", p. 5.
- LESIEUR, M., 1984, "Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids" Proceedings of the I.U.T.A.M. Congress in Kyoto, North Holland, p. 339
- LIELAUSIS O., 1975 Atomic Energy Review 13, p. 527.
- LILLY, D.K., 1973 "Dynamic Meteorology", Editor MOREL, P., Reidel Publishing Company, 353.
- Mc WILLIAMS J.C., 1983, Special issue of J.M.T.A. "Two-dimensional Turbulence" p. 83.
- Mc WILLIAMS, J.C., 1984, J. Fluid Mech., Vol. 146, p. 21.
- MORY, M., 1984, "Turbulence dans un fluide soumis à forte rotation" Thesis in Grenoble (France)

- POUQUET, A., LESIEUR, M., ANDRE, J.C. & BASDEVANT C. 1975, J. Fluid Mech., 72 p. 305
- RHINES, 1979, Ann. Rev. Rev. Fluid Mech., Vol. 11 p. 401.
- SCHERCLIFF J.A., 1965 "A textbook of Magnetohydrodynamics" Pergamon
- SIGGIA, E.D., & AREF, H., 1981, Phys. Fluids 24, p. 171.
- SIVASHINSKI, 1985, to appear in Physica D.
- SOMMERIA J., & MOREAU R., 1982, J. Fluid Mech., Vol. 118, p. 507.
- SOMMERIA, J., 1983, Special issue of J.M.T.A. "Two-dimensional Turbulence" p. 169.
- SOMMERIA, J., & VERRON J., 1984, Phys. Fluids, Vol. 27 (8) p. 1918.
- SOMMERIA J., 1984, 4th Beer Sheva Seminar M.h.D. Flows and Turbulence Israel Proceedings in AIAA. Progress in Aeronautics and Astronautics.
- STAQUET, C. & LESIEUR, M., 1985, To appear in Comptes Rendus Acad. Sciences (Paris).
- TOLSTOV, C.P., 1962, "Fourier Series" Gugglewood Cliffs, Prentice-Hall Int. series in applied math., translated from Russian.

ANNEXE : FLUCTUATIONS RAPIDES ET RETOURNEMENTS

Pour les grandes valeurs de R_h on observe une séparation d'échelles entre le mouvement de rotation globale et les petits tourbillons. Ceci est très net en ce qui concerne les échelles de temps, mais apparaît aussi pour les échelles spatiales, comme le montre le spectre de la fig. 10 b. On est donc conduit à modéliser l'influence des petites structures sur les grandes par un effet moyen et une force fluctuante aléatoire, qui produirait un "mouvement brownien" de la rotation d'ensemble. Il faut pour cela étudier le comportement des fluctuations sur des temps courts, en l'absence de retournement.

a) Ecart type et temps de corrélation des fluctuations rapides

Des enregistrements de la fonction courant au centre sont représentés sur la fig. 18. Le sens négatif de rotation semble plus fréquent que l'autre, ce qui doit être dû à une très légère dissymétrie du dispositif expérimental. Cependant les vitesses moyennes de rotation sont pratiquement les mêmes dans les 2 sens (le décalage apparent du zéro sur certaines courbes provenant uniquement de l'amplificateur de mesure, qui n'a pas été équilibré). La valeur moyenne $\bar{\psi}$, la variance $\delta\bar{\psi}^2$ et le temps de corrélation τ_c ont été calculés à partir des échantillons de la fig. 18, exemptes autant que possible de fluctuations de grande amplitude. Le temps de corrélation τ_c est égal à l'intégrale de la lère partie positive de la fonction d'autocorrélation. Quelques exemples de telles fonctions sont représentées sur la fig. 19. Malheureusement, l'acquisition de données avait été en général réalisée à un taux d'une toutes les 5 secondes, avec un filtrage analogique passe-bas à la fréquence de Shannon 0,1 Hz. L'amplitude des fluctuations rapides est ainsi fortement atténuée, à l'exception d'un enregistrement à $B = 0,123$ T où la fréquence de coupure est de 1 Hz. Enfin les mêmes calculs ont été faits à partir de l'évolution temporelle du mode $n=1$ pour $B = 0,132$ T, représentée sur la fig. 16 a (il n'y a alors pas de filtrage). Tous ces résultats sont représentés sur le tableau 2. On remarque que l'écart type des fluctuations diminue et que leur fréquence semble augmenter lorsqu'on augmente R_h , malgré le nivellement dû au filtrage. La valeur moyenne, quant à elle, varie peu, excepté une valeur nettement plus faible pour $R_h = 36,8$, mais il devient peut-être difficile de distinguer fluctuations rapides et retournements pour des valeurs aussi faibles de R_h .

b) Modèle de Landau avec bruit blanc

Si on exclut pour le moment les fluctuations turbulentes, on peut considérer que le système possède une bifurcation fourche quand le paramètre Rh est varié. Ceci nous fait passer d'une situation de repos vers un régime à 2 états stables de rotation, symétriques l'un par rapport à l'autre. Le seuil de transition serait un peu au-dessous de $Rh = 36$, mais reste difficile à préciser à cause du bruit turbulent. L'origine de cette bifurcation est sans doute similaire à celle du modèle spectral du ch. V. Le terme de force dans le mode à 4 tourbillons proviendrait ici des fluctuations turbulentes à petite échelle par des effets de type viscosité négative. Des termes sources peuvent d'ailleurs exister dans les autres modes.

Au voisinage de la bifurcation, l'équation du mouvement peut être développée sous forme d'un modèle de Landau. Pour tenir compte de l'action aléatoire de la turbulence à petite échelle, ajoutons y un bruit gaussien $\epsilon^{1/2} \eta(t)$

$$\dot{\psi} = \alpha\psi - \beta\psi^3 + \epsilon^{1/2} \eta(t) + O(\psi^5)$$

(l'absence des termes d'ordre pair provient de la symétrie $\psi \rightarrow -\psi$) α doit être proportionnel à $Rh - Rh_c$ près de la bifurcation. Pour $\alpha > 0$, le système possède 2 solutions stationnaires stables en l'absence de bruit. Celui-ci produit des fluctuations autour de ces points stables qui peuvent éventuellement faire basculer le système sur l'état stable opposé. On conçoit qu'il existe une relation entre les fluctuations autour d'un point fixe (définies par leur variance $\overline{\delta\psi^2}$ et leur temps de corrélation τ_c) et le temps moyen τ_t entre 2 retournements successifs. On peut en effet démontrer les relations suivantes (voir exemple Jona-Lasinio G., 1984)*

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \tau_c^{-1} \\ \beta &= \alpha / \overline{\psi^2} \\ \epsilon &= 2\alpha \overline{\delta\psi^2} \\ \tau_t &= (\pi / \alpha \sqrt{2}) \exp(\alpha^2 / 2 \epsilon \beta) = 4,44 \tau_c \exp(\overline{\psi^2} / 4 \overline{\delta\psi^2}) \end{aligned}$$

La dernière relation qui exprime la probabilité de franchir une barrière de potentiel de hauteur $\overline{\psi}$ en présence de fluctuations de variance $\overline{\delta\psi^2}$

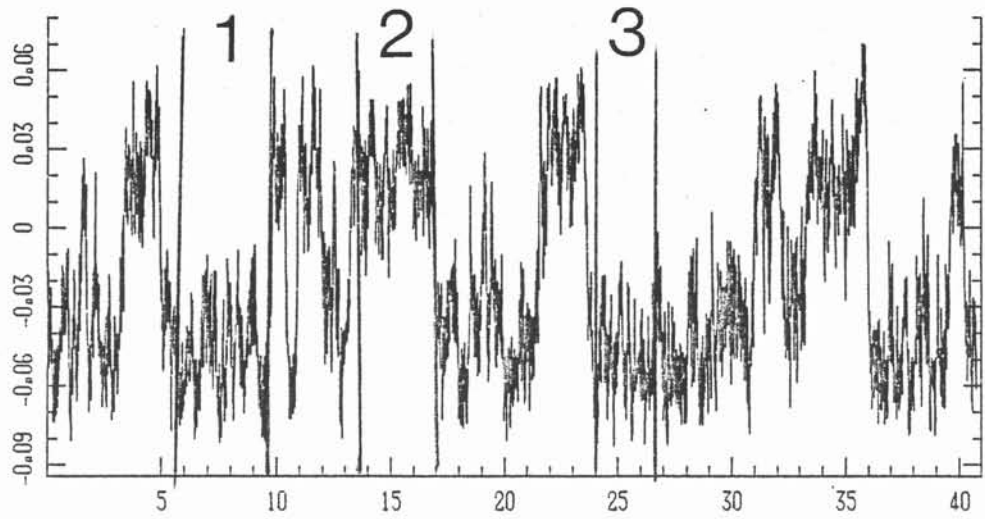
* Jona-Lasinio G., 1984 dans "Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics", Ed. M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi.

est bien connue en thermodynamique. Cette relation peut être testée dans nos expériences en comparant τ_t au temps moyen τ_0 séparant effectivement 2 retournements successifs (voir tableau 2). Le temps est surestimé pour les enregistrements filtrés, ce qui est normal puisqu'on sous-estime $\delta\psi^2$. L'accord n'est pas trop mauvais pour $Rh = 40,6$ (filtre à 1 Hz), compte tenu de la dépendance exponentielle qui amplifie considérablement les erreurs expérimentales, mais c'est peut-être un hasard et il faudrait des confirmations pour d'autres valeurs de Rh . En ce qui concerne le mode $n = 1$, le résultat est complètement faux. Ceci n'est en fait pas très étonnant si on remarque que la distribution de probabilité du mode en question présente 2 maxima secondaires symétriques par rapport à 0 (fig. 17 a). Leur observation est bien reproductible et ne fait pas de doute. Il faudrait ainsi utiliser un modèle plus complexe qui tienne compte de ce fait. En attendant on peut remarquer que, la séparation entre les 2 maxima secondaires étant nettement plus grande que celle qui existe entre ceux-ci et un des maxima principaux, c'est la passage d'un maximum secondaire à l'autre qui limitera les retournements. Si on utilise la séparation correspondante au lieu de $\bar{\psi}$ pour le calcul de τ_t , un résultat plus raisonnable est obtenu.

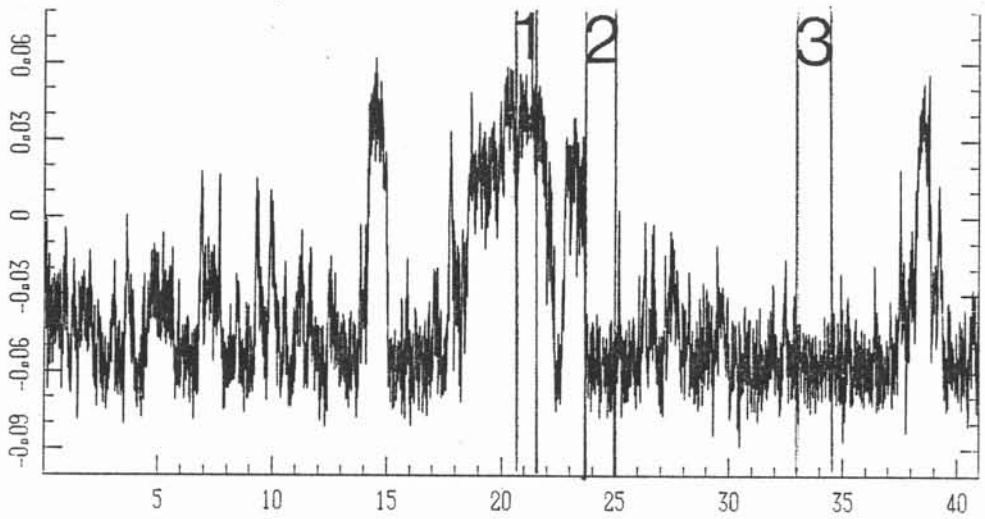
Il est clair qu'il faudra refaire des mesures plus systématiques, ainsi qu'améliorer le modèle. Ces quelques résultats préliminaires sont cependant encourageants quant à la possibilité de modéliser l'effet des petites échelles par un bruit blanc agissant sur un modèle déterministe des grandes échelles.

Cette annexe a été faite en collaboration avec Roberto Benzi.

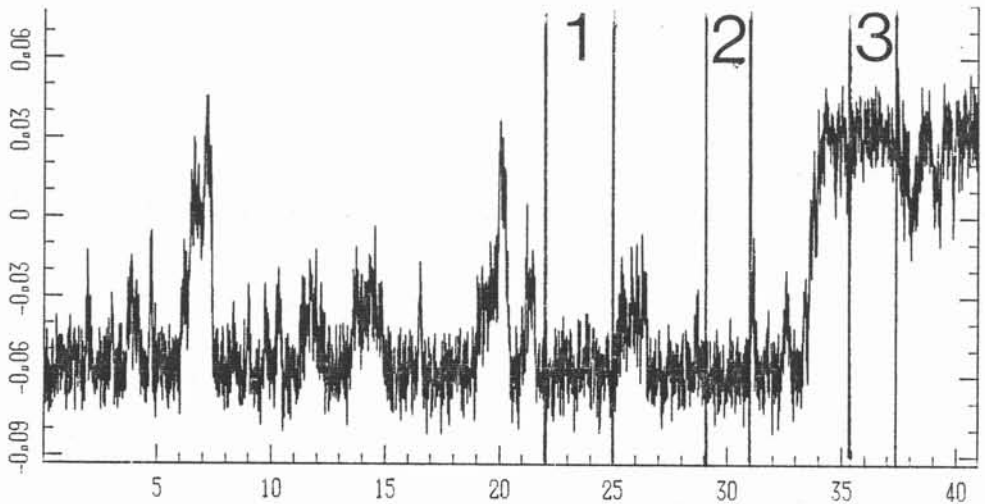
36,8



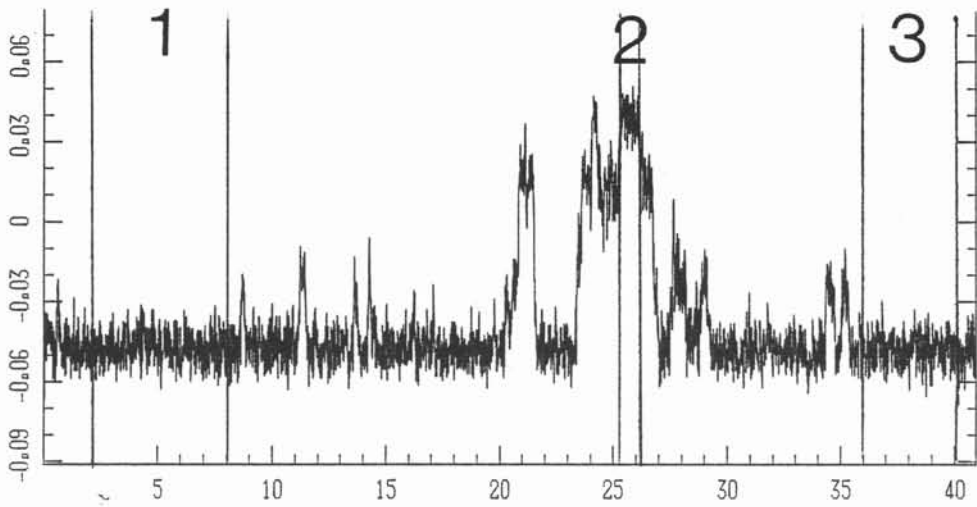
37,4



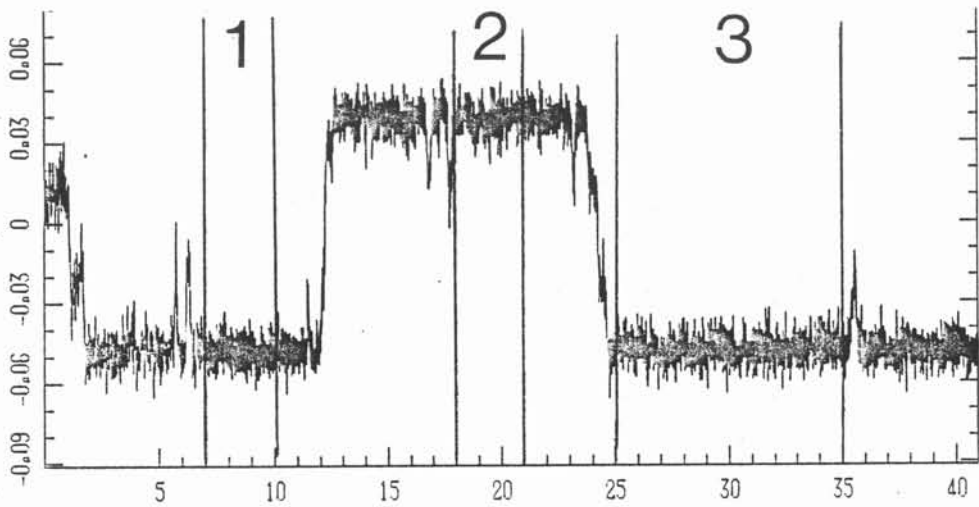
38,1



38,9



39,5



40,3

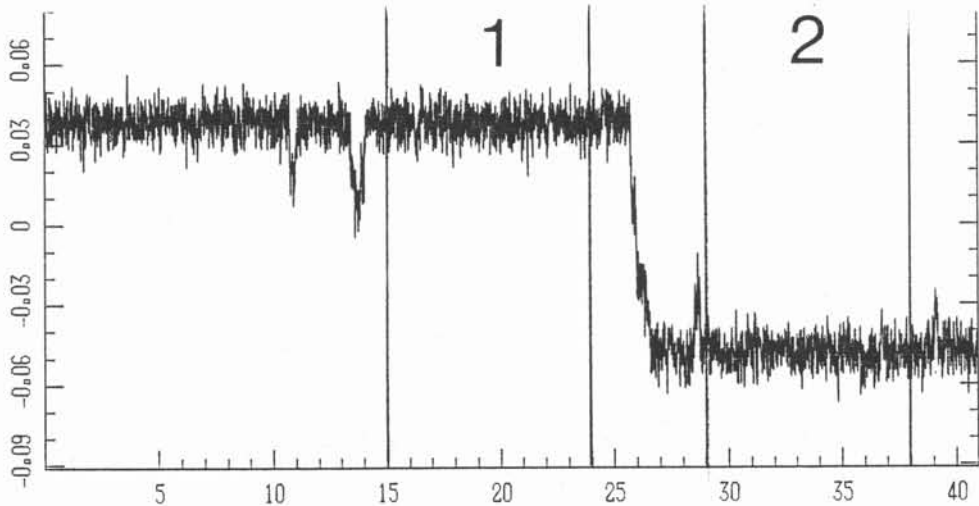


Fig. 18 : Enregistrements de la fonction courant au centre de la boîte. Le temps est exprimé en Ksec. et la fonction courant est adimensionnalisée. $I = 16$ A. Les résultats sont donnés à une constante additive près, due à la tension d'offset de l'amplificateur. La valeur de R_h est indiquée à gauche et les numéros repèrent les portions utilisées pour calculer les données statistiques du tableau 2.

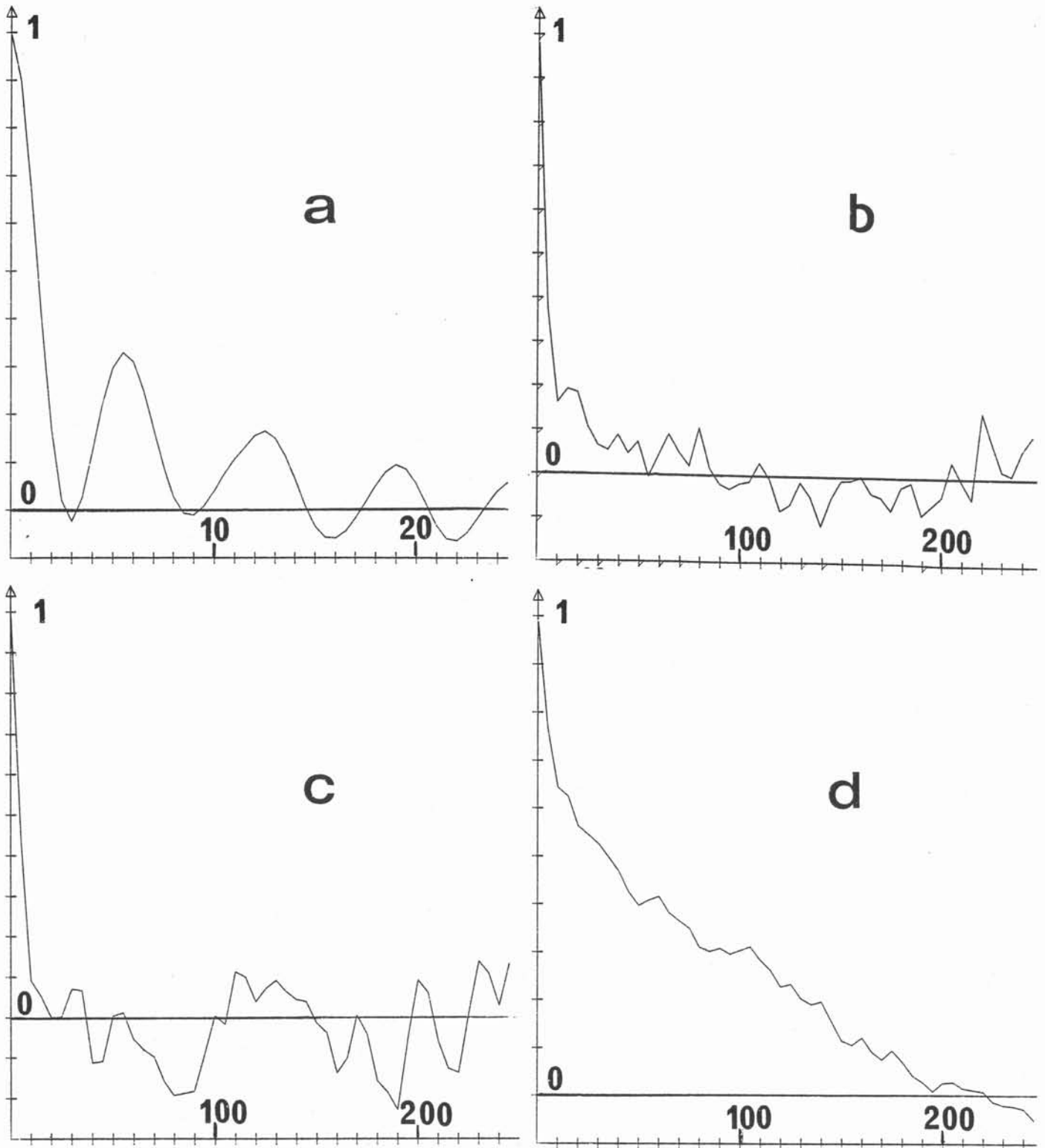


Fig. 19 : Autocorrélation aux temps courts de la fonction courant en centre (a,c,d) et du mode $n = 1$ (b). Les temps sont indiqués en secondes.

a) filtre à 1 Hz, $R_h = 40,6$, b) mode $n = 1$, $R_h = 39,2$, c) filtre à 0,1 Hz, $R_h = 37,4$, d) filtre à 0,1 Hz, $R_h = 36,8$.

B (Tesla)	Rh	$\bar{\psi}$ (10^{-2})	$\overline{\delta\psi^2}$ (10^{-5})	τ_c (sec.)	τ_t (Ksec.)	τ_o (Ksec.)	Remarques
0,123	40,6	4,3	5,8	2	26,5	100] filtre 1 Hz] filtre 0,1 Hz $\overline{\delta\psi^2}$ trop faible
0,125	40,3	4,29	2,8	11	10^6	70	
0,130	39,5	4,31	3,0	11	300×10^3	20	
0,135	38,9	4,31	3,3	10	50×10^3	13	
0,140	38,1	4,45	6,3	8	87	10	
0,145	37,4	4,70	10,4	45	9,3	5	
0,150	36,8	3,46	23,5	55	0,87	2	

mode n = 1

0,132	39,2	5,06	2,2	5,9	10^{11}	17	maximum principal
0,132	39,2	2,63	2,2	5,9	58	17	maximum secondaire

Tableau 2 : Propriétés statistiques des fluctuations rapides et temps moyens entre retournements calculés (τ_t) et mesurés (τ_o), pour la fonction courant au centre de la boîte et l'amplitude du mode n = 1 (I = 16 A).

C H A P I T R E V I I

CONCLUSIONS

C O N C L U S I O N S

On peut distinguer les résultats concernant la turbulence magnétohydrodynamique d'une part, les écoulements quasi 2-D en couche mince d'autre part, et enfin la turbulence 2-D elle-même.

1. LA TURBULENCE M.H.D.

Les mesures des fluctuations de vitesse du ch. III, faites derrière une grille dans un canal rectangulaire ont montré la généralité des spectres d'énergie en $t^{-2} k^{-3}$. Les expériences de diffusion de chaleur ont permis de préciser les propriétés de transport fortement anisotrope de cette turbulence. On a pu ainsi confirmer, après les travaux soviétiques, que les grandes échelles possèdent une dynamique 2-D, ce qui se manifeste notamment par une dissipation d'énergie turbulente assez faible. Ces résultats sembleraient en contradiction avec les expériences de ALEMANY et al. (1979) et CAPERAN & ALEMANY (1985) faites dans un champ axial, où la dynamique de toutes les échelles est fortement influencée par les effets 3-D et la dissipation d'énergie par effet Joule est importante. L'interprétation théorique donnée par ALEMANY et al. prévoit que, dans la limite des champs forts, la dynamique est donnée par un équilibre quasi-stationnaire entre transferts angulaires d'énergie dans l'espace de Fourier et dissipation par effet Joule. Le comportement prévu reste donc très différent de celui d'une turbulence 2-D, bien que l'anisotropie des structures turbulentes devienne de plus en plus importante quand on augmente le champ magnétique. L'extension de cette théorie au cas d'un écoulement limité selon la direction du champ magnétique par 2 parois isolantes, faite au ch. II, a permis d'expliquer la dynamique 2-D des grandes échelles observée dans les conduites rectangulaires. On a ainsi pu fournir une explication de cette différence de comportement et déterminer les conditions expérimentales des ch. V et VI, optimisées pour l'étude de la turbulence 2-D avec un minimum de perturbations 3-D.

L'étude théorique de ALEMANY et al. et celle du ch. II constituent quelques jalons pour explorer le problème très difficile et important des perturbations 3-D d'une turbulence 2-D. Ces idées pourraient sans doute être étendues à d'autres exemples d'écoulements quasi 2-D, comme les fluides tournants ou stratifiés en densité pour lesquels l'effet stabilisant des parois vis-à-vis des perturbations 3-D semble jouer aussi un rôle important (voir introduction). Il faudrait d'autre part dépasser ces estimations d'ordres de grandeurs en étudiant les instabilités 3-D d'écoulements 2-D bien contrôlés, ainsi que leur lien avec les problèmes de prédictibilité à 2-D. Une autre extension, tout à fait différente, serait l'étude de la turbulence en présence de champ magnétique non uniforme, où tout reste à faire.

2. ÉCOULEMENTS M.H.D. EN COUCHE MINCE

Les ch. IV à VI constituent une étude très complète d'une classe d'écoulements M.H.D., en couche assez mince en présence d'un champ magnétique transverse. Ils peuvent être considérés comme une généralisation 2-D (3-D si on inclut les couches limites) du profil de Hartmann. Leur description théorique exposée au ch. IV repose sur les développements asymptotiques classiques exposés par HUNT & SCHERCLIFF (1971). Cependant ce type d'écoulements où l'advection à 2-D joue un rôle important n'avait semble-t-il fait l'objet d'aucune attention particulière, tant théorique qu'expérimentale.

Outre son intérêt pour la réalisation de structures turbulentes 2-D, ce type d'écoulements intervient dans certains dispositifs industriels. Ainsi l'intégration numérique de l'équation (18) du ch. II pourrait permettre de modéliser l'évolution du profil en M dans les conduites rectangulaires (en ajoutant le terme source dû à la variation de flux magnétique dans la section d'entrée). D'autre part la possibilité de contrôler un écoulement sans inertie par une force extérieure (cas des faibles valeurs de R_h) est intéressante dans les procédés d'élaboration de matériaux à partir de bain de métal fondu. Notons enfin la perspective de mesurer viscosité et conductivité du liquide avec une très bonne précision sur le tourbillon isolé du ch. IV ; le contact avec l'électrode pourrait être évité grâce à la superposition d'un champ tournant produisant un courant par induction.

3. DYNAMIQUE DE LA TURBULENCE 2-D

a) Transition à la turbulence

On montre clairement qu'une turbulence pleinement développée peut être produite par des instabilités hydrodynamiques entièrement 2-D, sans intervention d'une force motrice aléatoire. Les effets 3-D qui existent près des électrodes peuvent certainement influencer ces instabilités, mais elles ne jouent pas un rôle essentiel, comme le montre la comparaison avec les simulations numériques du ch. V et de SOMMERIA & VERRON (1985). Cependant tout écoulement 2-D ne devient pas turbulent pour des très grands nombres de Reynolds. Il faut pour cela que les limites du domaine fluide soient suffisamment éloignées pour autoriser plusieurs appariements. Dans le cas d'une boîte carrée contenant 4 tourbillons, la turbulence existe mais son intensité reste limitée. Cette distinction n'apparaît pas à 3-D, où la turbulence se développe vers les petites échelles.

Les propriétés de stabilité du réseau de tourbillons n'ont été qu'effleurées. Une étude plus approfondie du comportement près de la transition pour un réseau comportant plus de tourbillons serait sans doute intéressante. On pourrait ainsi observer la propagation et l'amortissement (où l'amplification) d'ondes de perturbations. Les liens avec la théorie de SIVASHINSKI (1985) et avec la physique du solide pourraient être une motivation à ces études.

b) Turbulence homogène isotrope

On a obtenu les premières mesures expérimentales d'une cascade inverse d'énergie avec spectres en $k^{-5/3}$ et de la constante de Kolmogoroff correspondante. Le domaine de nombres d'onde correspondant est encore limité à 1/2 décade, mais ceci pourra être amélioré par l'utilisation d'une plus grande boîte. Notons que le même problème se pose dans les simulations numériques actuelles. Le sens des transferts d'énergie ne fait aucun doute puisque celle-ci est clairement injectée à l'échelle de la période du réseau de tourbillons. Cependant, une mesure directe du taux de transfert d'énergie (et de son sens) peut être effectuée par le calcul des bispectres $\langle \hat{v}_{(k)} \hat{v}_{(p)} \hat{v}_{(q)} \rangle$, à partir des données déjà recueillies ; ce qui sera fait prochainement. Une vérification de l'isotropie par une comparaison des 2 composantes de vitesse et de leur corrélation serait également utile et pourrait être obtenue grâce à une double rangée d'électrodes.

Enfin ces résultats devraient être indépendants du type d'injection d'énergie (pour une même valeur du taux de production ϵ). Ainsi il faudrait essayer d'autres réseaux, par exemple triangulaires, et des courants moteurs instationnaires.

Le domaine des petites échelles a été étudié dans l'expérience de turbulence de grille, mais les spectres en k^{-3} obtenus peuvent être attribués, au moins partiellement, à une dynamique 3-D très différente de la cascade d'entrophie. Les effets 3-D sont fortement inhibés dans les expériences du ch. VI, mais existent sans doute aux plus petites échelles, sans que cela n'affecte la cascade inverse d'énergie de façon appréciable. D'autre part les mesures dans ce domaine sont très difficiles, et une excellente précision est nécessaire pour mesurer des spectres très raides en k^{-3} ou k^{-4} . Ceci pourrait être tenté en laissant la turbulence évoluer après arrêt de la force motrice, de façon à obtenir une cascade d'entrophie à plus grande échelle.

c) Interaction avec les parois

Lorsque le frottement diminue, la cascade inverse d'énergie disparaît progressivement, au profit d'une sorte d'équilibre statistique. Celui-ci n'est que partiel, car la cascade d'énergie est bloquée par la taille finie du domaine, alors que la cascade d'entrophie vers les petites échelles ne l'est pas. L'apparition d'un écoulement moyen de rotation globale, alimenté par les structures turbulentes à petite échelle, illustre bien la tendance à l'auto-organisation de la turbulence 2-D. On pourrait sans doute tirer profit de la séparation assez nette entre ces 2 échelles d'écoulement pour la modélisation. Une première tentative dans ce sens est présentée dans l'annexe du ch. VI. L'existence de comportements à longues périodes de temps aussi bien dans une boîte ronde (ch. V) que dans une boîte carrée (ch. VI) apparaît être un caractère important de la turbulence 2-D, qui n'avait pas été mis en avant dans les simulations numériques, limitées par le temps de calcul. Cet aspect de la turbulence 2-D intervient sans doute pour une certaine part dans les fluctuations climatiques. D'autre part l'évolution du sens de rotation évoque les retournements du champ magnétique terrestre. Un tel type de comportement est observé dans d'autres systèmes non linéaires, par exemple dans le modèle de dynamo de Nozières (1978). Cependant le champ terrestre étant sans doute produit par les mouvements du noyau terrestre (qui est un métal liquide), et les petites échelles de ceux-ci étant fortement influencées par le champ magnétique et la force de Coriolis, donc quasi 2-D, cette analogie est peut-être à approfondir.

L'étude expérimentale devra être complétée en comparant différentes géométries du domaine fluide (par exemple carrée et circulaire), en changeant aussi le réseau d'injection, et en comparant ces résultats à des simulations numériques. Le traitement de données devra être aussi amélioré de façon à obtenir une carte 2-D de potentiel électrique sur un ensemble d'électrodes de mesure et de suivre ainsi l'évolution de chacun des modes spatiaux correspondants aux grandes échelles.

Le caractère 2-D des écoulements a été vérifié indirectement par la comparaison de différentes conditions expérimentales (par exemple surface supérieure libre ou rigide) et par la comparaison directe avec théorie et simulations numériques sur des cas particuliers. Une vérification expérimentale directe, par mesure du potentiel électrique à la surface libre, serait bien sûr intéressante. Ceci demande cependant une excellente précision, si on veut montrer que les structures turbulentes sont non seulement fortement anisotropes mais que leur dynamique est réellement 2-D. Une fois les propriétés 2-D dûment établies, on pourrait ainsi étudier l'influence de perturbations 3-D apportées progressivement par augmentation de l'épaisseur ou diminution du champ magnétique.

REFERENCES

- ALEMANY A., MOREAU R., SULEM P.L., FRISCH U., 1979, "Influence of an external magnetic fluid on homogeneous turbulence", *J. de Mécanique*, vol. 18, n° 2.
- CAPERAN Ph., ALEMANY A., 1985, "Turbulence homogène M.H.D. à faible nombre de Reynolds magnétique", *J.M.T.A.*, vol. 4, n° 2, p. 175.
- HUNT J.C.R., SHERCLIFF J.A., 1971, "Magnetohydrodynamics at high Hartmann number", *Ann. Review of Fluid Mech.*, p. 37
- NOZIERES Ph., 1978, "Reversals of the earth magnetic field: an attempt at a relaxation model",
- SIVASHINSKI C.I., 1985, "Weak turbulence in periodic flows", *Physica D*, à paraître.
- SOMMERIA J., VERRON J., 1985, "The two-dimensional inverse energy cascade in a confined domain : numerical and laboratory experiments", 5th Turbulent Shear Flow Symposium, 7-9 August, Cornell University, N.Y..

