Propriétés algébriques des structures menues ou minces, rang de Cantor Bendixson, espaces topologiques généralisés

Cédric Milliet

Propriétés algébriques des structures menues ou minces, rang de Cantor Bendixson, espaces topologiques généralisés

Cédric Milliet

Université Claude Bernard - Lyon 1
Doctorat de Mathématiques

Propriétés algébriques des structures menues ou minces, rang de Cantor Bendixson, espaces topologiques généralisés

Cédric MILLIET

Thèse soutenue le 10 décembre 2009

Directeur :
Frank O. WAGNER

Rapporteurs :
Enrique CASANOVAS
Françoise POINT

Jury :
Elisabeth BOUSCAREN
Enrique CASANOVAS
Abderezak OULD HOUCINE
Françoise POINT
Frank O. WAGNER

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES STRUCTURES MENUES OU MINCES, RANG DE CANTOR BENDIXSON, ESPACES TOPOLOGIQUES GÉNÉRALISÉS

RÉSUMÉ. Les structures menues apparaissent dans les années 60 en lien avec la conjecture de Vaught. Les structures minces englobent à la fois les structures minimales et menues. Les ensembles définissables d'une structure mince sont rangés par le rang de Cantor-Bendixson. Nous présentons des propriétés de calcul de ce rang, une condition de chaîne descendante locale sur les groupes acl(0)-définissables ainsi qu'une notion de presque stabilisateur local, et en déduisons des propriétés algébriques des structures minces : un corps mince de caractéristique positive est localement de dimension finie sur son centre, et un groupe mince infini a un sous-groupe abélien infini. Nous nous intéressons ensuite aux structures menues infiniment définissables, et montrons que les groupes d'arité finie infiniment 0-définissable sont l'intersection de groupes définissables. Nous étendons le résultat aux demi-groupes, anneaux, corps, catégories et groupoïdes infiniment 0-définissables, et donnons des résultats de définissabilité locale pour les groupes et corps simples et menus, infiniment définissables sur des paramètres quelconques. Enfin, nous réintroduisons le rang de Cantor dans son contexte topologique et montrons que la dérivée de Cantor peut être vue comme un opérateur de dérivation dans un semi-anneau d'espaces topologiques. Dans l'idée de trouver un rang de Cantor global pour les théories stables, nous essayons de nous débarrasser du mot dénombrable omniprésent lorsque l'on fait de la topologie, en le remplaçant par un cardinal régulier k. Nous développons une notion d'espace k-métrique, de k-topologie, de k-compacité etc. et montrons un k-analogue du lemme de métrisabilité d'Urysohn, et du théorème de Cantor-Bendixson.

MOTS CLEFS

Théorie des modèles, structure menue, mince, stable, simple, infiniment définissable, groupe, abélien, nilpotent, corps, rang de Cantor-Bendixson, topologie.

INSTITUT CAMILLE JORDAN, UMR 5208
Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne

Algebraic properties of small and weakly small structures, Cantor-Bendixson rank and generalised topological spaces

Abstract. Small structures appear in the '60s together with Vaught's conjecture. Weakly small structures include both minimal and small structures. Definable sets in a weakly small structure are ranked by Cantor-Bendixson rank. We show computational properties of this rank, which imply a local descending chain condition on acl(0)-definable subgroups, and introduce a notion of local almost stabiliser. We deduce algebraic properties of weakly small structures. Among them, a weakly small field of positive characteristic is locally finite dimensional over its centre, and an infinite weakly small group has an infinite abelian subgroup. We then turn to small type-definable structures, showing that finitary small type 0-definable groups are the intersection of definable groups. We extend the result to finitary small type 0-definable monoids, rings, fields, categories and groupoids. We give local definability results concerning groups and fields type definable over an arbitrary set of parameters in small and simple theories. Finally, we reintroduce the Cantor Bendixson rank in its topological context, and show that the Cantor derivative can be seen as a derivation in a semi-ring of topological spaces. In an attempt to find a global Cantor rank for stable structures, we try to eliminate the word denumerable, omnipresent when one does topology, by replacing it by a regular cardinal k. We develop the notions of k-metrisable space, k-topology, k-compactness etc. and show an analogue of Urysohn's metrisability lemma and Cantor-Bendixson theorem.

Key words

Model theory, small, weakly small, stable, simple, type-definable, group, field, abelian, nilpotent, Cantor-Bendixson rank, topology.

C'est mon professeur de Mathématiques Spéciales, Monsieur Marc Audran, qui m'a fait découvrir les mathématiques. Ses enseignements sont gravés dans ma mémoire, et je n'exagèrerais pas beaucoup en disant que chaque jour qui passe leur donne un sens nouveau. Puissent les pages qui vont suivre ne pas trop démériter. A Thomas Blossier, merci de m'avoir attiré dans l'univers étrange et fascinant de la Théorie des Modèles, et d'y avoir guidé mes premiers pas. Le professeur Wagner m'a fait l'honneur d'encadrer et mon mémoire de DEA, et cette thèse. Je lui suis reconnaissant de ses conseils, de la latitude qu'il m'a laissée dans le choix des problèmes abordés, ainsi que de sa disponibilité toujours constante malgré des responsabilités strictement croissantes. Merci au professeur Poizat d'avoir attentivement lu une grande partie de ce travail. Ses corrections, recommandations et éclaircissements, ainsi que l'intérêt qu'il a porté à ces pages m'ont grandement encouragé.

Cette thèse a été réalisée au sein de l'équipe des logiciens de Lyon. Ces années ont été marquées par des personnalités aussi diverses qu'agréables. Merci à tous ses membres, permanents ou passagers, qui n'ont jamais laissé une de mes questions sans réponse. Merci à Juan d'avoir partagé son savoir cyclopéen, et ses réponses intarissables, ainsi qu'à Alexey. Merci à Immanuel pour ses yeux pétillants et sa bonne humeur communicative, à Juan et Ricardo pour ces intermèdes musclés sous les paniers de basket, à Christophe pour l'accès au café et les parties de billard partagées, à Claudel et Jean pour leurs conversations passionnantes.

J'ai de nombreuses fois eu affaire au service de prêt entre bibliothèques de l'université. Merci à Laure-Hélène Davoine et Jean-Jacques Flahaut pour leur bonne volonté. Leur diligence m'a stupéfié plus d'une fois.

Merci aux membres du jury de m'honorer de leur présence à cette soutenance, et à Françoise Point et Enrique Casanovas d'avoir bien voulu faire un long déplacement en dépit de leur emploi du temps chargé.

A mes Parents, à mes amis

Sommaire

Introduction **10**

I Propriétés algébriques des structures minces, menues et même stables 18

1 Généralités sur les structures menues ou presque **20**
1.1 Structures menues, structures minces 20
1.2 Rang de Cantor 22
1.3 Généralités à propos des groupes minces 26

2 Corps menus **30**
2.1 Corps commutatifs 30
2.2 Corps gauches 35
2.3 Corps aux différences finies 38
2.4 Corps différentiels 39

3 Anneaux menus **40**
3.1 Généralités sur les anneaux minces 40
3.2 Le radical de Jacobson 42
3.3 Anneaux commutatifs sans radical 43
3.4 Anneaux non commutatifs 43

4 Groupes menus **46**
4.1 Groupes abéliens 46
4.2 Groupes nilpotents 47
4.3 Une propriété des groupes menus 48

5 Groupes et corps stables ou simples **52**
5.1 Corps stables 52
5.2 Généralités sur les structures simples 53
5.3 Corps simples 54
5.4 Groupes simples 55

II Groupes, corps et choses infiniment définissables dans les structures menues 58

6 Groupes, corps et relations d'équivalence **60**
6.1 Ensembles et relations 60

6.2 Groupes . . . 61
6.3 Corps . . . 63

7 Demi-groupes, anneaux et préordres **66**
7.1 Demi-groupes . . . 66
7.2 Anneaux . . . 67
7.3 Structures algébriques . . . 68
7.4 Catégories et groupoïdes . . . 68

8 Groupes et corps simples et menus **72**
8.1 Groupes . . . 72
8.2 Corps . . . 74

III Topologie **76**

9 Généralités sur les compacts dénombrables **78**
9.1 Rang d'un polonais dénombrable . . . 78
9.2 Degré d'un compact dénombrable . . . 81
9.3 Préordre fermé . . . 84
9.4 A propos de la dérivée de Cantor . . . 84
9.5 Application aux structures menues . . . 86

10 Un peu plus de topologie **88**
10.1 κ-Mètre, κ-distance . . . 88
10.2 Espace κ-topologique . . . 91
10.3 κ-Suites, espaces κ-complets . . . 94
10.4 Espace fortement κ-complet . . . 96
10.5 κ-Compacité . . . 96
10.6 Applications κ-continues . . . 98
10.7 Espace κ-Baire, espace κ-polonais . . . 100
10.8 Un peu plus sur le théorème de compacité de Gödel . . . 102

Post scriptum : omega-chirurgie **106**

Références **112**

Index **116**

Introduction

Considérons un langage dénombrable L, et supposons que l'on veuille compter le nombre de L-structures dénombrables deux à deux non isomorphes. On peut commencer par remarquer qu'il n'y en a pas plus de $2^{\aleph_0}$. Cela vient du fait qu'il y a $\aleph_0$ formules, et donc au plus $2^{\aleph_0}$ types d'uplets de longueur $\aleph_0$. Si l'on choisit une énumération de chaque structure dénombrable, les différents types des énumérations obtenues sont en nombre majoré par $2^{\aleph_0}$. Et si les énumérations de deux structures ont même type alors ces deux structures sont isomorphes par la bijection qui envoie l'énumération de la première sur celle de la seconde. En particulier une théorie complète dans le langage L n'a pas plus de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables à isomorphisme près. La conjecture de Vaught, issue d'une question posée par Robert Lawson Vaught en 1961, dit précisément :

Conjecture. (Vaught [67]) *Indépendamment de l'hypothèse du continu, une théorie complète dans un langage dénombrable ayant plus de $\aleph_0$ modèles dénombrables deux à deux non isomorphes en a $2^{\aleph_0}$.*

Nous allons étudier une classe de théories, les théories dites menues, susceptibles d'avoir peu de modèles dénombrables à isomorphisme près. Rappelons qu'une théorie qui a peu de modèles dénombrables a nécessairement peu de types :

Fait. [1] *Soit T une théorie dans un langage dénombrable. Si T a strictement moins de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables à isomorphisme près, alors ses n-types sans paramètres sont dénombrables pour tout entier n.*

On comprend alors l'intérêt de la définition suivante :

Définition. Une théorie T est dite *menue* si ses n-types sans paramètres sont dénombrables pour tout entier n.

On trouvera dans [62] un historique de la conjecture de Vaught et une référence aux travaux la concernant. Depuis leur introduction dans les années 1960, les structures menues ont été peu étudiées en tant que telles. Les avancées principales sont dues à Annand Pillay, Bruno Poizat, et Frank Wagner ; ce sont d'ailleurs ces deux derniers qui ont introduit le mot "menu" dans [61], je cite, *comme une traduction infidèle, mais bien moins pâle que l'original, du mot anglais "small".* On rencontre aussi "with few types" comme synonyme de "small" dans la littérature anglo-saxonne. Leurs résultats concernent les relations d'équivalence infiniment définissables [51] (aussi étudiées par Byunghan Kim [35], Ludomir Newelski et Krzysztof Krupiński [37]), les groupes abéliens [69], les corps commutatifs [71], et certaines classes de modules (Vera Puninskaya [62]).

[1] Fait 9.2. Démonstration aux premières lignes du chapitre neuf.

Certaines structures menues ont été étudiées sous des hypothèses modèle-théoriques plus fortes : les groupes stables et menus, et plus généralement les $\mathfrak{R}$-groupes introduits par F. Wagner [70, chapitre 5], les groupes supersimples et $\aleph_0$-catégoriques par David Evans et F. Wagner [18], les structures menues et monobasées par A. Pillay [50].

Le but des pages qui vont suivre n'est pas de s'attaquer à la conjecture de Vaught, mais d'étudier les propriétés algébriques particulières de certaines structures menues. Nous nous intéresserons plus précisément aux corps, aux anneaux, et aux groupes, peut-être dans un langage enrichi, avec un automorphisme ou une dérivation, définissables dans un premier temps, puis définis par une infinité de formules. Et il s'avère que, parfois, de certains résultats obtenus, on peut déduire que la conjecture de Vaught est vraie dans des cas très particuliers.

Première partie : propriétés algébriques des structures menues, minces ou stables

Après avoir introduit la notion de dimension dont sont dotées les structures menues, nous nous livrons à l'exploration des corps, des anneaux puis des groupes, dans cet ordre : du langage le plus riche au plus pauvre, c'est-à-dire du plus facile au plus compliqué, un langage riche offrant plus de prise, et étant plus contraint par le manque de place imposé par la dimension.

Au premier chapitre, nous introduisons le rang de Cantor-Bendixson, le principal, pour ne pas dire l'unique outil dont on dispose pour l'étude des structures menues, et minces, ces dernières ayant été introduites par Oleg Belegradek à la lecture de [71] pour englober à la fois les structures menues et minimales. Les structures d-minimales introduites par B. Poizat dans [59] sont minces. A la différence du caractère menu, la minceur n'est pas une propriété de la théorie. Nous y présentons des propriétés de calcul du rang de Cantor :

Lemme fondamental. *Soient A et B deux ensembles a-définissables, et f une application a-définissable de A dans B, surjective, à fibres de taille bornée par un entier n. Alors A et B ont même rang de Cantor sur a et*

$$dCB_a(B) \leq dCB_a(A) \leq n \cdot dCB_a(B)$$

Lemme fondamental. *Soit X un ensemble définissable sans paramètres, et a un élément algébrique sur le vide de degré n, alors*

1) $CB_a(X) = CB_\emptyset(X)$

2) $dCB_\emptyset(X) \leq dCB_a(X) \leq n \cdot dCB_\emptyset(X)$

Deux applications du résultat précédent aux groupes minces. Primo, ces derniers sont soumis à des conditions de chaîne locales :

Théorème. *Dans un groupe mince, la trace sur une clôture algébrique finiment engendrée d'une suite décroissante de sous-groupes $acl(\emptyset)$-définissables stationne.*

Secundo, pour toute partie définissable X d'un groupe menu, on peut définir une notion de stabilisateur local $Stab_\gamma(X)$ de X dans une clôture algébrique finiment engendrée γ. Si δ est une clôture définissable finiment engendrée et si X est de rang de Cantor maximal, on peut borner l'indice de $Stab_\delta(X)$ dans δ en fonction du degré de Cantor local de X. Rappelons que si X est une partie définissable générique d'un groupe omega-stable, l'indice du stabilisateur de X est borné en fonction du degré de Morley de X.

Le chapitre 2 traite des corps. Frank Wagner a démontré qu'un corps menu commutatif infini est algébriquement clos, et en a déduit la conjecture de Vaught pour la théorie d'un pur corps [71]. Nous en donnons une autre preuve, en démontrant que les groupes additifs et multiplicatifs d'un corps mince infini sont connexes ; on en déduit :

Théorème. *Aucune extension algébrique d'un corps mince infini n'a d'extension pseudo-radicale.*

Rappelons aussi qu'un corps minimal de caractéristique positif est fini ou algébriquement clos [72], de même qu'un corps d-minimal [59], et que la question de savoir si un corps minimal de caractéristique positive est algébriquement clos est toujours ouverte. Nous nous intéressons ensuite aux corps non commutatifs. Le résultat suivant est celui de mon mémoire de DEA [45], dont la preuve est simplifiée.

Théorème. *Un corps menu de caractéristique positive est commutatif.*

Ceci répond en partie au problème 6.1.15 de [73]. Comme application immédiate, la conjecture de Vaught est vraie pour un pur corps de caractéristique positive. Pour un corps mince :

Théorème. *Un corps mince de caractéristique positive est localement de dimension finie sur son centre.*

Se pose alors la question de la validité de la conjecture de Vaught pour la théorie d'un corps dans un langage plus riche. La question semble être hors de portée puisqu'elle est équivalente à la conjecture de Vaught[2]. Au moins pouvons-nous dire quelque chose dans le cas d'un corps aux différences finies. Rappelons que pour un corps superstable K muni d'un morphisme de corps définissable f, soit f est l'identité, soit le fixateur de f est fini [27].

Théorème. *Soit un corps K de caractéristique positive muni d'un morphisme définissable de corps f. Si K est menu, alors soit f est l'identité, soit le fixateur de f est fini.*

Le chapitre 3 concerne les anneaux. Rappelons que le radical de Jacobson d'un anneau stable est nilpotent [14], de même que celui d'un anneau $\aleph_0$-catégorique [11, 12]. Un anneau commutatif stable sans radical est un produit fini de corps définissables, tandis qu'un anneau non commutatif sans radical est un produit d'anneaux de matrices carrées à coefficients dans des corps définissables [14].

Propositions.

[2]Pour tout corps algébriquement clos K, et toute structure donnée M, on peut considérer un ensemble infini P d'éléments algébriquement indépendants de K, en faire un prédicat, et y faire vivre la structure M. On obtient une nouvelle théorie de corps T^*. Fixer une classe d'isomorphisme de modèles de T^*, c'est fixer une classe de modèles de $Th(M)$, et le degré de transcendance du corps.

– *Le radical de Jacobson d'un anneau menu est nil, localement nilpotent.*
– *Un anneau commutatif menu sans radical est localement un produit fini de corps.*
– *Un anneau menu est localement un produit fini d'anneaux de matrices carrées à coefficients dans des corps modulo le radical.*

Le chapitre 4 s'intéresse aux groupes. Angus Macintyre a montré qu'un groupe omega-stable abélien était la somme directe d'un groupe divisible définissable et d'un groupe d'exposant borné [40] ; Frank Wagner l'a généralisé aux groupes menus abéliens [69]. En combinant ce dernier résultat à ce que l'on sait de la structure des groupes abéliens divisibles et de ceux d'exposant fini, on remarque que la conjecture de Vaught est vraie pour la théorie d'un pur groupe abélien. Plus généralement, la conjecture de Vaught est vraie pour toute théorie complète de module sur un anneau dénombrable de Dedekind (et donc en particulier pour un module sur $\mathbf{Z}$), et sur diverses classes de modules sur des anneaux dénombrables [62]. Plus dur qu'abélien, nilpotent. On sait d'un groupe nilpotent omega-stable qu'il est la somme centrale d'un groupe divisible définissable et d'un groupe d'exposant borné [47]. Nous montrons la chose suivante :

Proposition. *Un groupe menu nilpotent est la somme centrale d'un groupe divisible définissable et d'un groupe d'exposant borné.*

Se pose alors la question de savoir ce que l'on peut déduire de ce résultat concernant le nombre de modèles dénombrables d'un pur groupe nilpotent. Que dire d'un groupe menu résoluble ? Enfin, que peut-on dire d'un groupe menu tout court ? Rappelons qu'un groupe connexe de rang de Morley un est abélien [63]. Mieux, un groupe connexe omega-stable de rang de Morley minimal est abélien ; en conséquence tout groupe omega-stable contient un sous-groupe définissable abélien infini [10]. Ce résultat a été étendu aux groupes superstables [5]. Quelques années plus tard, Frank Wagner montre dans sa thèse qu'un groupe stable et menu possède un sous-groupe abélien infini définissable [68]. Récemment, Bruno Poizat introduit une notion de structures de dimension un, les structures d-minimales, et montre qu'un groupe d-minimal est abélien-par-fini [59]. Résultat qu'il généralise, en montrant qu'un groupe infini de rang de Cantor fini contient un sous-groupe abélien définissable infini [60]. Nous montrons :

Théorème. *Un groupe mince infini a un sous-groupe abélien infini.*

Au chapitre 5, nous appliquons les méthodes et résultats précédents aux groupes stables ou simples. Rappelons qu'un corps superstable [9], et même supersimple [53] est commutatif. Montrer qu'un corps est commutatif procède généralement en deux étapes, la première étant de montrer que le corps, vu comme espace vectoriel sur son centre est de dimension finie ; la deuxième, que le corps ne peut avoir d'extension algébrique gauche. On sait qu'un corps superstable est algébriquement clos [13], qu'un corps stable n'a pas d'extension d'Artin-Schreier [64], et qu'un corps simple n'en a qu'un nombre fini [32]. Un beau jour de septembre, Monsieur Wagner m'a demandé si un corps stable était commutatif. Je ne connais toujours pas la réponse, mais on peut montrer qu'un corps stable de caractéristique positive n'est pas loin d'être commutatif. Plus généralement,

Théorème. *Un corps simple de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre.*

Dans un groupe stable, toute partie infinie dont les éléments commutent deux à deux est évidemment contenue dans un groupe définissable puisqu'un groupe stable est soumis aux conditions de chaînes sur les centralisateurs. Shelah a montré que dans un goupe dépendant, le même résultat est encore valable [66]. Pour un groupe simple nous montrons :

Proposition. *Soit A un ensemble infini d'un groupe dont la théorie est simple, tel que les éléments de A commutent deux à deux. Alors, A est contenu dans un sous-groupe définissable fini-par-abélien.*

Corollaire. *Un groupe dont la théorie est simple et menue contient un sous-groupe fini-par-abélien définissable infini.*

Rappelons à ce sujet qu'un groupe superstable et omega-catégorique est abélien-par-fini [4], qu'un groupe infini dont la théorie est stable et menue possède un sous-groupe abélien définissable infini [68]. De plus, un groupe omega-catégorique et supersimple est fini-par-abélien-par-fini et a un rang SU fini [18]. Mais on ne sait toujours pas si un groupe stable infini a un sous-groupe abélien infini, ni si un groupe supersimple infini a un sous-groupe fini-par-abélien définissable infini.

Deuxième partie : groupes, corps et choses infiniment définissables dans une théorie menue

Un ensemble *infiniment A-définissable* dans un modèle, au lieu d'y être défini par une formule, l'est par une conjonction d'une infinité de formules à paramètres dans un ensemble A. Les groupes infiniment définissables, par exemple, apparaissent dans des contextes où a priori aucune structure de groupe n'était donnée. Ils ne sont pas en général intersection de groupes définissables, sauf dans une théorie stable par exemple comme l'a démontré E. Hrushovski [26]. Dans [73, problème 6.1.14], F. Wagner pose le problème suivant : un groupe infiniment $\emptyset$-définissable H dans une structure menue est-il l'intersection de groupes définissables ? Il y répond favorablement dans le cas particulier où le groupe H est inclus dans un groupe définissable.
Au chapitre 6, en nous appuyant sur un résultat de Pillay et Poizat [51] disant qu'une relation d'équivalence menue infiniment $\emptyset$-définissable est l'intersection de relations d'équivalence définissables (nous dirons qu'elle est *enveloppée*), nous répondons au problème 6.1.14 de [73].

Proposition. *Dans une structure menue, un groupe d'arité fini, infiniment définissable sans paramètres est l'intersection de groupes définissables.*

Au chapitre 7, en prenant appui sur la démonstration que donne Kim [35] de [51], nous étendons les résultats précédents aux monoïdes et anneaux infiniment définissables d'arité fini, sans paramètres, puis à certaines structures algébriques, et aux catégories et groupoïdes. Plus généralement :

Théorème. *Soit une structure quelconque M.*
1) Si M enveloppe toutes les relations d'équivalence infiniment définissables, alors elle enveloppe tous les groupes infiniment définissables.
2) Si M enveloppe tous les groupes infiniment définissables, elle enveloppe tous les corps infiniment définissables.

3) Si M enveloppe tout demi-groupe infiniment définissable, elle enveloppe tout anneau infiniment définissable.
4) M enveloppe tout préordre infiniment définissable si et seulement si M enveloppe tout demi-groupe infiniment définissable, si et seulement si M enveloppe toute catégorie infiniment définissable.
5) Si M enveloppe toute relation d'équivalence infiniment définissable, alors M enveloppe tout groupoïde infiniment définissable.

Au chapitre 8, nous nous attaquons aux groupes A-définissables où A est un ensemble quelconque, en rajoutant l'hypothèse que la théorie ambiante est simple (et, ce faisant nous nous rapprochons du but initial de la thèse, qui était d'éliminer les hyperimaginaires dans une théorie simple et menue). Dans [35], Kim montre que dans une théorie simple et menue, les notions de types forts et de type Lascar fort coïncident, une condition nécessaire pour éliminer les hyperimaginaires. Sa preuve comporte deux étapes. Dans la première il considère des relations d'équivalence bornées. Nous montrons un analogue de la première étape pour les groupes :

Proposition. *Soit un groupe G_A infiniment A-définissable dans une théorie simple et menue, et X un ensemble définissable contenant G, et dans lequel G_A est d'indice borné. Alors le groupe G_A est intersection de groupes définissables.*

Nous ne savons toujours pas si ce résultat est vrai pour un groupe G_A infiniment définissable dans une théorie simple et menue en général, mais au moins sommes-nous capables de parler de définissabilité locale :

Proposition. *Soit un groupe G_A infiniment A-définissable dans une théorie simple, et soit g un uplet fini dans G_A. Soit X définissable contenant G_A. Il existe un groupe N infiniment définissable avec un nombre fini de paramètres, inclus dans X et contenant $dcl(g) \cap G_A$.*

Appliqués aux corps, ces groupes définissables locaux nous permettent de trouver des corps définissables "locaux", et de parler de la structure de ces corps :

Proposition. *Soit un corps K_A infiniment définissable avec paramètres A dans une théorie simple, et soit g un uplet fini dans K_A. Soit X définissable contenant K_A. Il existe un corps L infiniment définissable avec un nombre fini de paramètres, inclus dans X et contenant $dcl(g) \cap K_A$.*

Corollaire. *Dans une théorie simple et menue, un corps commutatif infiniment définissable avec des paramètres quelconques est algébriquement clos, ou fini.*

Corollaire. *Un corps de caractéristique positive, infiniment définissable avec des paramètres quelconques dans une théorie simple et menue est commutatif.*

Troisième partie : un peu de topologie

Au chapitre 9, nous remontons le temps et replaçons le rang de Cantor-Bendixson dans son contexte topologique. Ce faisant, nous remarquons que les deux premiers lemmes énoncés concernant les propriétés de calcul du rang de Cantor, n'en cachent en fait qu'un seul :

Proposition. *Soient X et Y deux espaces compacts. Si f est une application de X dans Y, continue, ouverte, et surjective à fibres finies, alors X et Y ont même rang de Cantor. De plus, si le cardinal des fibres est au plus n,*

$$dCB(Y) \leq dCB(X) \leq n \cdot dCB(Y)$$

Corollaire. *Soit X un espace compact et R une relation d'équivalence continue sur X dont toutes les classes sont finies. Alors X et X/R ont même rang de Cantor. De plus, si les classes de R ont au plus n éléments,*

$$dCB(X) \leq dCB(X/R) \leq n \cdot dCB(X)$$

En conséquence, s'il est une "bonne" catégorie à considérer pour manier cette notion de dimension, c'est certainement une catégorie d'espaces topologiques dont les flèches sont des applications continues à fibres finies (ceci est à rapprocher de la dimension chirurgicale introduite dans [52]). Dans une telle catégorie $\mathcal{C}$, quotientée par la relation d'équivalence $\equiv$, la symétrisée du préordre $\leq$ provenant de la notion de flèche, il est amusant de constater que la dérivée de Cantor D porte bien son nom puisque :

Proposition. *Les lois $\oplus$ et $\times$ munissent l'ensemble $\mathcal{C}/\equiv$ d'une structure de semi-anneau commutatif intègre, sur lequel D est un opérateur de dérivation. L'application CB de $(\mathcal{C}/\equiv, \leq, \oplus, \times)$ dans $(Ord, \leq, sup, \oplus)$ est un morphisme préservant la structure de semi-anneau commutatif partiellement ordonné.*

Rappelons que Georg Cantor a introduit la dérivée qui porte son nom en 1872 pour dériver les ensembles de convergence de séries trigonométriques, ce qui lui a permis dix ans après d'introduire l'induction transfinie, quelque trois ans avant sa théorie des ensembles. Il appelait *Abgeleitete Punktmenge* l'ensemble dérivé d'un espace de points, et à notre connaissance, nulle part dans ses écrits n'apparaît une formule de Leibniz pour D.

Citons enfin la proposition qui est à l'origine du chapitre 7, et qui est une version topologique de [51] généralisée aux préordres :

Proposition. *Soit X un compact dénombrable, et R un préordre fermé sur X. Alors R est une intersection de préordres ouverts fermés.*

Chapitre 10. Les théories menues évoquées dans les pages précédentes ont ceci de particulier qu'elles sont, comme les théories omega-stables, dotées d'une notion de rang purement topologique à valeurs ordinales. Ce chapitre est né de la question suivante : pourquoi diable les théories omega-stables sont-elles dotées d'un rang global, le rang de Cantor, et pas les théories kappa-stables ? Refaisons la genèse du rang de Cantor : soit S l'espace des types d'une théorie T dans un langage dénombrable. C'est un espace topologique à base dénombrable de voisinage, compact, donc métrisable. Si T est omega-stable, S est dénombrable. Mais son noyau parfait est soit vide, soit de taille $2^{\aleph_0}$; il est donc vide, c'est-à-dire que S est rangé par le rang de Cantor.

En essayant d'adapter la définition du rang de Morley d'une théorie omega-stable, pour l'appliquer à une théorie kappa-stable, j'ai voulu me débarrasser du mot "dénombrable" omniprésent lorsque l'on fait de la topologie : c'est évident lorsqu'on considère la notion de distance où apparaît le corps des réels, corps à base dénombrable de voisinages, ou encore la notion de complétude qui fait intervenir celle de suite, mais, même dans les notions plus abstraites de topologie, et de compacité, le mot "fini" intervient, et qu'est-ce qu'un ensemble fini sinon un ensemble plus petit que $\aleph_0$? En cherchant quelles étaient les propriétés du corps $\mathbf{R}$ utiles pour faire de la topologie métrique, je suis arrivé la définition suivante :

Définition. On appelle κ-*mètre*, un groupe abélien totalement ordonné muni d'une famille strictement décroissante $(\epsilon_i)_{i<\kappa}$ d'éléments positifs vérifiant les propriétés suivantes :
(i) Tout élément positif est minoré par un ϵ_i.
(ii) $\epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+1}$ est égal à ϵ_i, pour tout i.

En imitant la construction de $\mathbf{R}$ à partir d'omega, en se servant de la multiplication ordinale de Hessenberg [25] redécouverte par Conway dans [17] et de corps de séries formelles généralisées introduits par Hans Hahn [21], on peut construire un gros surcorps $\mathbf{R}(\kappa)$ de $\mathbf{R}$ à partir d'un cardinal régulier κ, et développer une notion d'espace κ-métrique, munie d'une application "distance" à valeurs dans ce corps $\mathbf{R}(\kappa)$. En remplaçant "dénombrable" par "de taille kappa", et "fini" par "petit devant kappa", il est facile de définir les notions de κ-topologie, κ-suite, κ-complétude, κ-compacité, d'espace κ-normal, de κ-continuité et homéomorphisme etc. On peut par exemple montrer un kappa analogue du lemme de métrisabilité d'Urysohn :

Théorème. *Un espace κ-topologique κ-normal à base de κ-ouverts de cardinal κ est κ-métrisable.*

On essaye ensuite de développer une notion d'espace κ-polonais qui soit satisfaisante, c'est-à-dire telle que :
1) Un sous-espace κ-fermé ou une intersection de κ κ-ouverts d'un κ-polonais soit encore un κ-polonais.
2) Un κ-polonais κ-parfait soit vide ou bien de taille 2^κ. De taille strictement plus grande que κ nous suffirait.
3) Un espace κ-topologique κ-compact à base de voisinages de cardinal κ engendré par une topologie compacte soit κ-polonais.

La notion de κ-polonais que nous introduisons nous permet d'affirmer les points 2) et 3), toutefois pas le point 1). Nous finissons en montrant qu'on peut espérer appliquer ces résultats à l'espace des types d'une théorie κ-stable. Nous rappelons un résultat de [31], dont nous donnons une autre démonstration, et qui, avec notre terminologie s'énonce ainsi :

Fait. *L'espace des théories complètes dans un langage de taille κ est κ-compact pour tout cardinal faiblement compact κ.*

Corollaire. *L'espace des théories complètes dans un langage de taille κ est un κ-polonais pour tout cardinal faiblement compact κ.*

Première partie

Propriétés algébriques des structures minces, menues et même stables

Chapitre 1

Généralités sur les structures menues ou presque

1.1 Structures menues, structures minces

Définition 1.1. Une théorie T est dite *menue* si ses n-types sans paramètres sont dénombrables pour tout entier n.

Définition 1.2. On dira d'une structure qu'elle est *menue* si sa théorie l'est.

Proposition 1.3. *Soit M une structure menue, a un uplet fini, D une partie définissable de M^n, et E une relation d'équivalence définissable sur D.*

1) (produit cartésien fini) *M^n est menue.*
2) (adjonction finie de paramètres) *La théorie $Th(M, a)$ est menue.*
3) (définissabilité) *D est menue.*
4) (interprétation) *Le quotient D/E est menu.*
5) *La structure M est menue dans le langage augmenté de $dcl(a)$.*

Démonstration. 1) Un m-type de M^n n'étant rien d'autre qu'un mn-type de M, si les types de M sont dénombrables, ceux de M^n le sont aussi. 2) Soit n la longueur de l'uplet a, et considérons l'application de $S_m(a)$ dans $S_{m+n}(\emptyset)$ qui à un type $p(x, a)$ sur a associe le type $p(x, y)$: elle est injective donc $S_m(a)$ est dénombrable. 3) Les types de D sont des types de M : ils sont dénombrables. 4) On peut supposer n égal à un et E définissable sans paramètres. Soit l'application qui à un type $p(x)$ de D associe le type $p(x/E)$ de D/E défini par $\exists\, y\; p(y) \wedge E(x, y)$. C'est une surjection. 5) Soit f l'application de $S_n(dcl(a))$ dans $S_n(a)$ qui à un type $p(x)$ associe sa restriction aux seuls paramètres dans a. Si α et β ont même type sur a, ils se correspondent par un va-et-vient fixant a point par point ; ce va-et-vient fixe également $dcl(a)$ point par point, et α et β ont même type sur $dcl(a)$: l'application f est injective. □

Définition 1.4. Une théorie est $\aleph_0$-*catégorique* si elle n'a qu'un seul modèle dénombrable à isomorphisme près.

Définition 1.5. Une théorie est ω-*stable* si ses 1-types sur A sont dénombrables pour tout ensemble dénombrable A de paramètres.

Exemple 1.6. Les théories $\aleph_0$-catégoriques ou ω-stables sont menues.

Exemple 1.7. *(Graphe aléatoire)* Considérons la théorie T_1 du graphe aléatoire dans le langage réduit à un prédicat binaire R. La théorie dit que R est une relation symétrique et réflexive, et que pour tous ensembles finis A et B disjoints, il existe un z en relation avec tout élément de A, mais avec aucun élément de B. T_1 n'est pas ω-stable, car si A est un ensemble dénombrable de paramètres, pour toute partie B de A, on peut trouver par compacité un élément z_B en relation avec B mais avec aucun élément de $A \setminus B$, ce qui produit $2^{\aleph_0}$ types distincts sur A. On peut montrer que cette théorie élimine les quanteurs, de sorte que les n-types sont déterminés par les relations entre les variables. $S_n(T_1)$ est donc fini pour tout n, et T_1 est $\aleph_0$-catégorique.

Exemple 1.8. Prenons pour exemple suivant une théorie T_2 dans le langage $(E_i)_{i\in\omega}$, où les E_i sont des prédicats binaires. La théorie T_2 précise que les E_i sont des relations d'équivalence à 2^i classes, toutes infinies, E_{i+1} raffinant chaque classe de E_i en deux classes infinies, et ce, pour tout i. T_2 n'est pas ω-stable. En effet, si A est un ensemble de paramètres qui contient un représentant de chaque classe de E_i pour tout i, A est dénombrable, et il y a $2^{\aleph_0}$ types sur A. On peut montrer que deux modèles ω-saturés de T_2 se correspondent par va-et-vient, donc T_2 élimine les quanteurs, de sorte que les n-types sur un ensemble de paramètres A sont déterminés par les relations entre les variables et les paramètres pour chaque relation E_i. Montrons que T_2 est menue. Il n'y a qu'un seul 1-type. Il n'y a qu'un seul 2-types non isolé :

$$p(x, y) = \{xE_iy : i \in \omega\}$$

On remarque au passage qu'il y a une infinité de 2-types, donc T_2 n'est pas $\aleph_0$-catégorique. Comme le nombre de types isolés est borné par le nombre de formules, les 2-types sont dénombrables. De même, un n-type $p(x_1, \ldots, x_n)$ est un point d'accumulation, si et seulement si pour un i différent de j, on a

$$p \vdash \bigwedge_{n\in\omega} x_iE_nx_j$$

On a donc une application f des $(n + 1)$-types non isolés sur les n-types, qui à un type $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_{n+1})$ associe $p(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_j, \ldots, x_{n+1})$ où i est le plus petit entier tel qu'il existe un j avec i, j vérifiant l'équation ci-dessus. f est surjective, à fibres finies de cardinal au plus C^2_{n+1}. Par induction sur n, les n-types non isolés sont dénombrables, et la théorie T_2 est menue.

Nous introduisons les structures minces[1] définies par Oleg Belegradek à la lecture de [71] pour englober à la fois les structures menues et minimales.

Définition 1.9. Une structure M est *mince* si pour tout uplet fini a extrait de M, les 1-types sur a sont dénombrables.

Une structure menue est mince. Mais en général, à la différence du caractère menu, la minceur n'est pas conservée par extension élémentaire et ne permet donc pas l'usage de la compacité, comme elle ne garantit pas que les 2-types soient dénombrables. Elle n'autorise que des raisonnements sur les formules en une variable. Elle est préservée par interprétation avec paramètres dans la structure.

[1] Le mot est suggéré par B. Poizat. L'anglais dit "weakly small".

Définition 1.10. Une structure M est *globalement mince* si $S_1(M)$ est rangée par le rang de Cantor. Elle est *globalement menue* si $S_n(M)$ est rangé par le rang de Cantor pour chaque entier n.

Définition 1.11. Une structure M dans un langage dénombrable est *minimale* si tout ensemble définissable est fini ou cofini. Une structure est *fortement minimale* si tous les modèles de sa théorie le sont.

Définition 1.12. *(Poizat [59])* Une structure M dans un langage dénombrable est *d-minimale* si elle est infinie et ne se divise pas en plus de d parties infinies définissables ; ou encore : M est union d'au plus d ensembles définissables minimaux ; ou encore : les parties définissables de M, considérées à un ensemble fini près, forment un ensemble de cardinal 2^d. Une théorie T est *d-minimale* si tous ses modèles le sont.

Exemple 1.13. Une structure d-minimale est mince : elle n'a pas plus de d types non-algébriques, et au plus $\aleph_0$ types algébriques si le langage est dénombrable. Les structures d-minimales sont les structures globalement minces de rang de Cantor un et de degré d.

1.2 Rang de Cantor

Pour une structure M, un ensemble de paramètres a, et un ensemble X de M définissable avec des paramètres de a, on définit le *rang de Cantor de X sur a* de manière inductive, en posant $CB(\emptyset)$ égal à $-\infty$, et

> $CB_a(X) \geq 0$ si X n'est pas vide,
>
> $CB_a(X) \geq \alpha + 1$ si on peut trouver une infinité de sous-ensembles X_i a-définissables deux à deux disjoints et de rang supérieur ou égal à α.
>
> $CB_a(X) \geq \lambda$ pour un ordinal limite λ, si $CB_a(X)$ est au moins α pour tout α strictement plus petit que λ.

Si le processus de s'arrête jamais, on dit que X est de rang infini sur a. Lorsqu'il existe, on appelle *degré de Cantor de X sur a* la borne supérieure des cardinaux d tels qu'il existe une partition de X en d ensembles a-définissables de rang maximal. On note $dCB_a(X)$ ce cardinal. On pourra écrire CB et dCB si les paramètres de calcul du rang ne sont pas ambigus. Le rang et le degré de Cantor caractérisent les structures menues :

Proposition 1.14. *Soit a un uplet fini et X un ensemble a-définissable d'une structure menue. Le rang $CB_a(X)$ est un ordinal, et $dCB_a(X)$ est un entier.*

Démonstration. Supposons au contraire que X soit de rang infini. L'ensemble des formules à paramètres dans a étant bien un ensemble, il existe un ordinal α tel que "être de rang supérieur à α" implique "être de rang infini". Il est alors facile de construire un arbre binaire de parties a-définissables, et donc $2^{\aleph_0}$ types sur a, une contradiction. Supposons maintenant que le degré de Cantor de X sur a soit infini. Il existe une partition de X en deux ensembles a-définissables de rang maximal, dont l'un au moins est de degré infini. On peut itérer ce processus puisque qu'à chaque fois, au moins une partie parmi la partition finie de X obtenue est de degré infini. On obtient un arbre infini, qui d'après un lemme de Kőnig, a une branche infinie, ce qui nous donne une suite infinie décroissante $(X_i)_{i\geq 1}$ de parties de X de rang maximaux, telle que $CB(X_i \setminus X_{i+1}) \geq CB(X)$. Une contradiction avec la définition du rang. $\square$

Définition 1.15. Le *rang de Cantor d'un type* sur a est le plus petit rang des formules sur a impliquées par ce type.

On note $CB_a(p)$ le rang d'un type p sur a. Pour une formule ϕ dans une structure menue, on a

$$CB(\phi) = max\{CB(p) : p \in [\phi]\}$$

Remarquons que parce que l'espace des types est séparé, le rang d'un type p est supérieur à $\alpha + 1$ si et seulement s'il est point d'accumulation de types de rang au moins α. Le rang de Cantor correspond donc au rang de dérivation dans l'espace des types (à un près !). Il caractérise les structures minces :

Proposition 1.16. *Si une structure M dans un langage dénombrable L a ses types purs rangés par le rang de Cantor, $S_1(\emptyset)$ est dénombrable.*

Démonstration. Si L est dénombrable, il n'y a qu'un nombre dénombrable d'ouverts, donc le rang de M est dénombrable puisque $\aleph_1$ est régulier. Puisque $S_1(\emptyset)$ est à base dénombrable d'ouverts, il n'y a qu'un nombre dénombrable de types ayant le même rang de Cantor. $S_1(T)$ est donc dénombrable. $\square$

Rappelons que tout ordinal α s'écrit de manière unique sous la forme $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ est une chaîne strictement décroissante d'ordinaux, et $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers. On appelle cette écriture la *forme normale de Cantor* de α. Si α et β sont deux ordinaux de formes normales respectives $\omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot m_k$ et $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$, où certains entiers n_i et m_j peuvent être nuls, leur *somme naturelle*, ou*somme de Cantor* est définie par :

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\alpha_1} \cdot (m_1 + n_1) + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot (m_k + n_k)$$

Voir [31] pour de plus amples détails. Cette somme est commutative. Le *produit naturel* ou *produit de Hessenberg* de deux ordinaux est alors défini sur les monômes par :

$$\omega^{\alpha} \otimes \omega^{\beta} = \omega^{\alpha \oplus \beta}$$

et prolongé sur la classe des ordinaux de manière à être distributif sur $\oplus$.

Remarque 1.17. Rappelons que, par définition, la somme ordinale $+$ est continue à droite. Contrairement à ce qui est dit dans beaucoup de preuves des inégalités de Lascar, la somme de Cantor elle n'est pas continue, ni à droite ni à gauche ($sup\{n\} \oplus 1$ est strictement plus grand que $sup\{n \oplus 1\}$). Cependant, elle est semi-continue supérieurement. En particulier, puisque l'exponentiation ordinale est continue en l'exposant, le produit de Hessenberg est aussi semi-continu supérieurement.

Proposition 1.18. *Soient X et Y a-définissables dans une structure menue.*

1) Si $X \subset Y$, alors $CB_a(X) \leq CB_a(Y)$

2) $CB_a(X \cup Y) = max\{CB_a(X), CB_a(Y)\}$

3) Si X et Y ont même rang de Cantor et sont disjoints,

$$dCB_a(X \cup Y) = dCB_a(X) + dCB_a(Y)$$

4) $CB_a(X \times Y) \geq CB_a(X) \oplus CB_a(Y)$

5) Si $\varphi(x,y)$ *est une formule sur* a *telle que pour tout* (b,c) *qui la satisfait,* $CB_{a,b}(c/b) \leq \delta$. *Alors*

$$CB_a(b,c) \leq CB_a(b) \oplus CB_{a,b}(c/b) \oplus \gamma \otimes CB_a(b)$$

Démonstration. 4) Par induction sur l'ordinal $CB_a(X) \oplus CB_a(Y)$. Soit $\omega^\beta \cdot n$ le plus petit monôme non nul apparaissant dans les formes normales de Cantor des rangs de X et Y. Mettons que $\alpha + \omega^\beta \cdot n$ soit la forme normale du rang de Y. Soit γ le rang de X. Par hypothèse d'induction, le rang du produit est au moins $\alpha + \gamma \oplus \gamma$ pour tout $\lambda < \omega^\beta \cdot n$. Mais ce dernier, est égal à

$$\alpha + \lambda \oplus \gamma = \alpha \oplus \lambda \oplus \gamma = \alpha \oplus \gamma + \lambda$$

On conclut par continuité de l'application qui à un y associe $x + y$.
5) On ne perd rien à rajouter a au langage. Soit une suite (b_n, c_n) telle que $tp(b,c)$ soit limite et point d'accumulation des types $tp(b_n, c_n)$; posons β égal à $CB_a(b)$, et γ à $CB_b(c/b)$; c'est clair si β et γ sont nuls. Si $tp(b)$ est point d'accumulation des $tp(b_n)$, on fait une récurrence sur β : si $CB(b)$ est égal à $\alpha+1$, alors $CB(b_n)$ est égal à α, et

$$CB(b_n, c_n) \leq \beta \oplus \delta \oplus \beta \otimes \delta < (\beta+1) \oplus (\beta+1) \otimes \delta \leq CB(b) \oplus CB_b(c/b) \oplus CB(b) \otimes \delta$$

Si $CB(b)$ est un ordinal limite, l'inégalité est encore vraie par semi-continuité supérieure de la somme et du produit naturels. Sinon, on peut supposer la suite b_n constante égale à b, si bien que les $tp(c_n/b)$ s'accumulent sur $tp(c/b)$, et on procède alors par récurrence sur γ. $\square$

Remarque 1.19. Le *rang de Morley* $RM(X)$ d'un ensemble définissable X est égal à $max_A CB_A(X)$. Si X et Y sont deux structures omega-stables, il résulte de 5) l'inégalité $RM(X \times Y) \leq RM(X) \oplus RM(Y) \oplus RM(X) \otimes RM(Y)$. Le rang de Cantor diffère toujours de un du rang de Cantor-Bendixson, le rang de dérivation de l'espace des types. Si l'on pose $CB^* = CB + 1$, l'inégalité 5) devient $RM^*(A \times B) \leq RM^*(A) \otimes RM^*(B)$. Cette inégalité apparaît dans la thèse de L. Blum [6] dans le contexte des groupes de rang de Morley fini.

Les applications définissables à fibres finies préservent le rang, et les variations du degré sont maîtrisées :

Lemme fondamental 1.20. *Soit X et Y deux ensembles a-définissables, et f une application a-définissable de X dans Y. Alors,*

1) *Si f est surjective,* $CB_a(X) \geq CB_a(Y)$.
2) *Si f est à fibres bornées,* $CB_a(Y) \geq CB_a(X)$.
3) *Si f est surjective à fibres finies de cardinal au plus un entier n, alors X et Y ont même rang de Cantor sur a, et*

$$dCB_a(Y) \leq dCB_a(X) \leq n \cdot dCB_a(Y)$$

4) *En particulier si f est bijective, X et Y ont même rang et degré sur a.*

Remarque 1.21. Les points 1) et 2) apparaissent sous une forme similaire dès l'introduction par Morley du rang qui porte son nom [46, théorème 2.3]. Le résultat concernant le degré est à ma connaissance nouveau.

Démonstration. On ne perd rien à rajouter les paramètres a au langage.
1) Montrons par induction sur le rang de Y que $CB(X)$ majore $CB(Y)$. Si Y est non vide, X est non vide également puisque f est surjective. Si $CB(Y) \geq \alpha + 1$, il existe des ensembles définissables deux à deux disjoints Y_i de rang supérieur à α et inclus dans Y. Les images réciproques des Y_i sont deux à deux disjointes et f induit une surjection de $f^{-1}(Y_i)$ sur Y_i. Par hypothèse de récurrence, le rang de $f^{-1}(Y_i)$ est au moins α, et $CB(X) \geq \alpha + 1$.
2) Montrons par induction sur le rang de X que $CB(Y)$ majore $CB(X)$. Si X est non vide, Y est non vide également. Si $CB(X) \geq \alpha + 1$, il existe dans X des ensembles définissables deux à deux disjoints X_i de rang au moins α. Comme $f(X_1)$ ne peut couper qu'un nombre fini de $f(X_i)$, quitte à enlever ces X_i et réindexer la suite (X_i), on peut supposer qu'il n'en coupe aucun. Et ainsi de suite, on peut supposer que les $f(X_i)$ sont deux à deux disjoints. Par hypothèse de récurrence, ils sont tous de rang au moins α, donc $CB(Y) \geq \alpha + 1$.
3) Si $Y_1, \ldots, Y_d$ sont d ensembles définissables deux à deux disjoints inclus dans Y et de même rang que Y, alors leurs images réciproques sont deux à deux disjointes, de même rang que X, donc $dCB(X)$ majore $dCB(Y)$.
Réciproquement, si le degré de Y est d, soit Y_1 un sous-ensemble de Y de degré un. Il suffit de montrer que le degré de $f^{-1}(Y_1)$ est au plus n. Supposons au contraire qu'il existe $n+1$ ensembles $X_0, \ldots, X_n$ définissables deux à deux disjoints inclus dans $f^{-1}(Y_1)$, et de même rang que X. L'intersection $\bigcap_{i=0}^{n} f(X_i)$ est vide donc il existe une plus petite intersection $\bigcap_{i \in I} f(X_i)$ qui soit de même rang de Cantor que Y. En particulier, $\bigcap_{i \in I} f(X_i)$ et $f(X_i)$ s'intersectent en un ensemble de rang strictement plus petit que celui de Y pour tout i hors de I, donc $dCB(Y_1)$ vaut au moins deux, ce qui est absurde. Chaque $f^{-1}(Y_1)$ est de degré au plus n : le degré de X est au plus $d.n$. □

Remarque 1.22. Pour le point 3), pour en déduire que les rangs de Cantor de X et de Y sont égaux, il faut que les fibres soient bornées, et pas seulement finies. Considérer par exemple pour Y l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre, et pour X l'ensemble des couples d'entiers (x, y) tels que $y \leq x$. Quand on projette sur l'axe des y, chaque fibre est infinie, donc $CB_{\mathbf{N}}(X) = 2$; quand on projette sur l'axe des x, les fibres sont finies et pourtant $CB_{\mathbf{N}}(Y) = 1$.

Remarquons que si X est a-définissable, il a même rang de Cantor et même degré de Cantor sur a et sur la clôture définissable de a. Le rang ne change pas non plus lorsque l'on rajoute des paramètres algébriques :

Lemme fondamental 1.23. *Soit X un ensemble définissable sans paramètres, et a un élément algébrique sur le vide de degré n, alors*

1) $CB_a(X) = CB_\emptyset(X)$
2) $dCB_\emptyset(X) \leq dCB_a(X) \leq n \cdot dCB_\emptyset(X)$

Démonstration. 1) Il suffit de montrer que $CB_\emptyset(X)$ majore $CB_a(X)$. Faisons-le par induction sur $CB_a(X)$. C'est évident si $CB_a(X)$ est nul. Si $CB_a(X) \geq \alpha + 1$, alors

X se décompose en une infinité de X_i deux à deux disjoints définissable sur a et de rang sur a au moins α. Par hypothèse d'induction, un conjugué de X_1 et X_i ont le même rang (calculé sur l'ensemble de tous les conjugués de a) ; X_1 n'intersecte donc qu'un nombre fini de X_i en un ensemble de rang maximal. Quitte à enlever ce nombre fini de X_i, et amputer les X_i restants d'une partie définissable de petit rang, on peut supposer que les conjugués de X_1 n'intersectent pas les X_i. Et ainsi de suite, on peut supposer qu'aucun conjugué de X_i n'intersecte X_j pour i différent de j. Soit $\overline{X_i}$ l'union (finie) des conjugués de X_i sous l'action du groupe d'automorphisme de la structure. Les $\overline{X_i}$ sont deux à deux disjoints. On a $CB_a(\overline{X_i}) = CB_a(X_i)$, et par hypothèse de récurrence, $CB_\emptyset(\overline{X_i}) \geq \alpha$. L'ensemble X étant définissable sans paramètres, il est stable par l'action du groupe d'automorphisme et les $\overline{X_i}$ sont dans X.

2) Supposons le degré de X sur le vide égal à d. Quitte à prendre un sous-ensemble de X de degré 1 sur le vide, on peut supposer X de degré 1. Il suffit de montrer que le degré de X sur a est au plus n. Supposons au contraire qu'il soit supérieur à $n+1$, et soit X_1 définissable sur a inclus dans X, et de même rang que X et de degré 1 sur a. L'union $\overline{X_1}$ des n conjugués de X_1 est de degré sur a au plus n, donc le complémentaire de $\overline{X_1}$ dans X est de rang maximal : $dCB_\emptyset(X)$ est supérieur ou égal à 2, une contradiction. □

Remarque 1.24. Comme le degré peut augmenter, il n'est pas sûr que X ait un rang de Cantor ordinal sur la clôture algébrique de a. Nous appellerons *rang de Cantor local de X sur $acl(a)$* son rang de Cantor sur n'importe quel b qui permet de le définir et qui a même clôture algébrique que a.

Remarque 1.25. Nous verrons au chapitre 9 que les deux lemmes 1.20 et 1.23 n'en cachent en fait qu'un seul.

Remarque 1.26. Le rang de Cantor a un gros inconvénient par rapport au rang de Morley : on ne sait pas maîtriser sa croissance lorsque l'on ajoute des paramètres non algébriques. Soit X une structure menue de rang de Cantor zéro sur le vide, et de rang de Cantor 2 sur un paramètre a. Soit Y une structure menue de rang de Cantor constant égal à un quels que soient les paramètres ajoutés. Soit maintenant Z l'union disjointe de X et Y (on rajoute un prédicat pour X). Z est encore menue, et de rang de Cantor 1 sur le vide, et 2 sur a. Alors $\neg X$ est de rang maximal sur le vide, mais non maximal sur a. Le rang peut donc monter brutalement, et réciproquement, il peut baisser inconsidérément, c'est-à-dire être maximal sur A, et ne plus l'être sur $B \supset A$.

1.3 Généralités à propos des groupes minces

Soit G un groupe, dans un langage contenant le langage des groupes. On dira que G est un *pur groupe* si le langage est exactement celui des groupes. Avec le lemme 1.20, on retrouve immédiatement un résultat de Wagner :

Corollaire 1.27. (Wagner [68]) *Si f est un homomorphisme définissable du groupe mince G dans lui-même, dont le noyau a n éléments, alors $f(G)$ est d'indice au plus n dans G.*

Démonstration. Sinon, on peut trouver un uplet fini a sur lequel sont définissables au moins $n+1$ classes modulo $f(G)$, si bien que le degré de G vaut au moins $(n+1) \cdot dCB_a(f(G))$, ce qui contredit le lemme 1.20. $\square$

Corollaire 1.28. *Dans un groupe mince, il y a au plus n classes de conjugaison d'éléments dont le centralisateur est d'ordre au plus n.*

Démonstration. Sinon, on peut trouver un a sur lequel sont définissables au moins $n+1$ classes de conjugaison de centralisateur d'ordre au plus n. Soit un b dans une de ces classes. L'application qui à g associe b^g est à fibres de taille au plus n, donc la classe de conjugaison de b est de rang maximal sur a et de degré au moins $dCB_a(G)/n$, ce qui est absurde. $\square$

Pour toute partie X définissable sans paramètres dans un groupe mince G, et toute clôture algébrique Γ finiment engendrée par un uplet $\bar{g}$ dans G, on peut définir le *presque stabilisateur* de X dans Γ en posant

$$Stab_\Gamma(X) = \{x \in \Gamma : CB_{x,\bar{g}}(x \cdot X \Delta X) < CB_{\bar{g}}(X)\}$$

Corollaire 1.29. *$Stab_\Gamma(X)$ est un sous-groupe de Γ. Si X est invariant par conjugaison par Γ, alors $Stab_\Gamma(X)$ est distingué dans Γ.*

Démonstration. Si a et b sont dans $Stab_\Gamma(X)$, alors X, aX et bX ont les mêmes types de rang maximal calculés avec les paramètres g, a, b, donc

$$CB_{g,a,b}(a \cdot X \Delta bX) < CB_g(X)$$

Le rang étant préservé par bijection définissable, et par adjonction de paramètres algébriques, on a

$$CB_{g,a,b}(a \cdot X \Delta bX) = CB_{g,a,b}(b^{-1}a \cdot X \Delta X) = CB_{g,b^{-1}a}(b^{-1}a \cdot X \Delta X)$$

donc $b^{-1}a$ est dans $Stab_\Gamma(X)$. $\square$

Proposition 1.30. *Si δ est un sous-groupe de $dcl(g)$ et si X est de rang de Cantor maximal sur g, alors $Stab_\delta(X)$ est d'indice fini dans δ.*

Démonstration. Soit m le degré de G, et l celui de X. Il y a m types de rang maximal dans G, donc pour un translaté de X par un élément de δ, il y a C_m^l choix pour ses types génériques : en prenant $C_m^l + 1$ représentants de classes de X, on s'assure que deux au moins auront les mêmes types de rang maximal. $\square$

Les groupes dotés d'un rang à valeurs ordinales satisfont des conditions de chaînes descendantes héritées des ordinaux, du fait que ces derniers sont des bons ordres. Les groupes minces ne dérogent pas à la règle :

Lemme 1.31. *Soit G un groupe mince, et $H_2 \leq H_1$ deux sous-groupes de G définissables sans paramètres. Si $H_2 \cap acl(\emptyset)$ est un sous-groupe propre de $H_1 \cap acl(\emptyset)$, alors, soit $CB(H_2) < CB(H_1)$, soit $dCB(H_2) < dCB(H_1)$.*

Démonstration. Si b est un élément de $acl(\emptyset)$ dans $H_1 \setminus H_2$, la réunion finie $\overline{b.H_2}$ des conjugués de $b.H_2$ sous l'action de $Aut(\emptyset)$ forme un ensemble définissable sans paramètres, de rang de Cantor maximal dans H_1, et disjoint de H_2. $\square$

Lemme 1.32. *Soit G un groupe mince, et $H_2 \leq H_1$ deux sous-groupes de G définissables sans paramètres ayant même rang de Cantor. Alors, $H_2 \cap acl(\emptyset)$ est d'indice fini dans $H_1 \cap acl(\emptyset)$.*

Démonstration. Si b est un élément de $acl(\emptyset)$ dans $H_1 \setminus H_2$, la réunion finie $\overline{b.H_2}$ des conjugués de $b.H_2$ sous l'action du groupe d'automorphismes de la structure forme un ensemble définissable sans paramètres, de rang de Cantor maximal dans H_1. Il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilités pour $\overline{b.H_2}$, et donc pour $b.H_2$. □

Théorème 1.33. *Dans un groupe mince, la trace sur une clôture algébrique finiment engendrée d'une suite décroissante de sous-groupes $acl(\emptyset)$-définissables est stationnaire.*

Démonstration. Soit $G_1 \geq G_2 \geq \dots$ une chaîne décroissante de sous-groupes $acl(\emptyset)$-définissables. Quitte à réindexer, on peut supposer que le rang de Cantor local est constant d'après le lemme 1.23, si bien que $G_i \cap acl(\emptyset)$ est d'indice fini dans $G_1 \cap acl(\emptyset)$ pour tout i d'après le lemme 1.32. Quitte à rajouter un nombre fini de paramètres algébriques au langage, on peut toujours supposer que G_1 est $\emptyset$-définissable. Soit $\mathring{G}_i \cap acl(\emptyset)$ l'intersection des conjugués de $G_i \cap acl(\emptyset)$ sous l'action du groupe d'automorphismes de la structure. L'intersection des $\mathring{G}_i \cap acl(\emptyset)$ est l'intersection d'un nombre fini d'entre eux d'après le lemme 1.31 : c'est un sous-groupe de $G_0 \cap acl(\emptyset)$ d'indice fini, lequel sous-groupe est contenu dans chacun des G_i. La chaîne des indices $[G_0 \cap acl(\emptyset) : G_i \cap acl(\emptyset)]$ est donc bornée, et la suite stationne. □

Remarque 1.34. Nous appellerons ce théorème *condition de chaîne mince*. Le théorème est trivial si l'on remplace la clôture algébrique par la clôture définissable. Il s'agit d'une condition locale, réduite à néant dans le cas $\aleph_0$-catégorique. Un groupe globalement mince satisfait de manière évidente la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables.

Remarque 1.35. Pour deux relations d'équivalence E, F sur un ensemble X, on dira que F est *plus fine que* E, ou que E est *plus grossière que* F si toute classe de F est incluse dans une classe de E. Une famille $(E_i)_{i\in I}$ de relations d'équivalence est décroissante si E_j est plus fine que E_i pour tout $j \geq i$. Avec la même preuve qu'au précédent théorème, on montre que si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille décroissante de relations d'équivalence $acl(\emptyset)$-définissables dans une structure mince, de telle sorte que pour tout i, deux classes de E_i soient en bijection définissable, il n'y a pas de chaîne strictement descendante infinie du type

$$E_0|_{acl(\emptyset)} > E_1|_{acl(\emptyset)} > E_2|_{acl(\emptyset)} > \dots$$

En particulier, la trace de $\bigwedge_{i\in I} E_i$ sur $acl(\emptyset)$ est la trace d'une intersection finie de relations E_i.

Corollaire 1.36. *Soit G un groupe mince, et $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G $acl(\emptyset)$-définissables. Il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que*

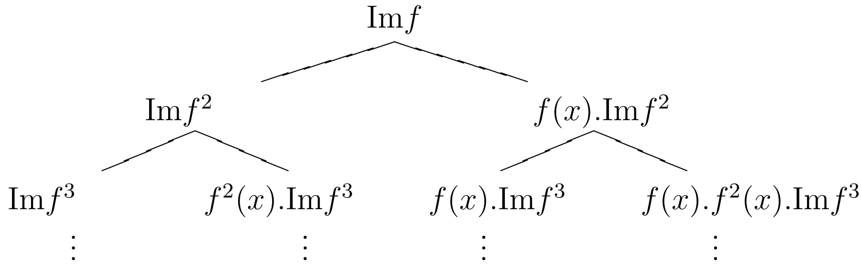
$$\bigcap_{i\in I} G_i \cap acl(\emptyset) = \bigcap_{i\in J} G_i \cap acl(\emptyset)$$

Définition 1.37. Soit M une structure et P une propriété. On dira que M est *localement* P si toute clôture algébrique finiment engendrée par un uple fini extrait de M est P.

Proposition 1.38. *Si f est un homomorphisme définissable du groupe menu G dans lui-même, la chaîne des images itérées de f stationne.*

Remarque 1.39. C'est un cas particulier du théorème 1 de [69].

Démonstration. Supposons au contraire que la chaîne $(\mathrm{Im} f^n)_{n\geq 1}$ décroisse strictement. Considérons alors l'arbre binaire $A(x)$



Soit $\Phi(x)$ le type partiel défini par $\{x \notin f^{-n}\mathrm{Im} f^{n+1},\ n \geq 1\}$. La suite $(f^{-n}\mathrm{Im} f^{n+1})_{n\geq 1}$ est croissante, et chaque ensemble $G \setminus f^{-n}\mathrm{Im} f^{n+1}$ est non vide, donc Φ est finiment consistant, et consistant par compacité. Soit b une réalisation de Φ dans un modèle saturé. L'arbre binaire $A(b)$ a 2^ω branches consistantes, donc $S_1(b)$ est de cardinal 2^ω, une contradiction. □

Corollaire 1.40. *Soit G un groupe menu et f un homomorphisme définissable du groupe G dans lui-même. Il existe un entier n tel que l'on ait $G = \mathrm{Ker} f^n \cdot \mathrm{Im} f^n$.*

Démonstration. Soit n comme dans la proposition précédente. Appelons F l'homomorphisme f^n. Les applications F et F^2 ont même image, et pour tout g de G il existe un h tel que $F(g)$ soit égal à $F^2(h)$. Alors $F(gF(h)^{-1})$ est égal à un, et g appartient à $\mathrm{Ker} F \cdot \mathrm{Im} F$. □

Remarque 1.41. C'est faux dans un groupe mince G : considérer la somme sur n des groupes cycliques d'ordre p^n, et l'application puissance p. On a seulement la décomposition $G = \bigcup_{i\geq 1} \mathrm{Ker} f^i \cdot \mathrm{Im} f$.

Chapitre 2

Corps menus

Notations. Sauf mention explicite du contraire, les corps considérés ne sont pas supposés commutatifs. Pour deux parties A et B d'un groupe G, on écrira $C_B(A)$ ou simplement $C(A)$ pour désigner le centralisateur de A dans B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de B commutant avec A, et $Z(G)$ sera le centre de G, i.e. l'ensemble $C_G(G)$. On notera $K^\times$ le groupe multiplicatif d'un corps K, K^+ son groupe additif. Pour deux éléments x et a d'un groupe G, on notera x^a le conjugué de x par a, c'est-à-dire l'élément $a^{-1}xa$.

Nous aurons besoin de quelques résultats algébriques concernant les corps :

Lemme 2.1. *Soient $L \leq K$ deux corps et f un endomorphisme du L-espace vectoriel à gauche K dont le noyau est de dimension n. Alors, le noyau de f^m est de dimension au plus mn.*

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_p$ une L-base de $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ que l'on complète en une base du noyau de f. Soient $d_1, \ldots, d_p$ des antécédents de $e_1, \ldots, e_p$. La famille $d_1, \ldots, d_p, e_1, \ldots, e_n$ engendre le noyau de f^2 etc. □

Fait 2.2. (Herstein [23, lemme 3.1.1]) *Dans un corps gauche de caractéristique positive, pour tout élément a hors du centre, il existe un élément x et un entier i tel que $x^{-1}ax = a^i \neq a$.*

Fait 2.3. (Cohn [15, corollaire 2 p.49]) *Soit un corps D de centre Z et A une Z-sous-algèbre de D. On a l'égalité $[D : C_D(A)]_g = [A : Z]$*

Remarque 2.4. Si K est un sous-corps commutatif d'un corps D tel que l'extension K/D soit de degré fini à gauche. Alors $[K : Z] \leq [D : K]_g$ d'après le fait 2.3, donc D est de dimension finie sur son centre, majorée par $[D : K]_g^2$.

2.1 Corps commutatifs

Nous dirons qu'un groupe est *connexe* s'il n'a pas de sous-groupe définissable propre d'indice fini. Voici un allègement d'un théorème de [71] :

Théorème 2.5. *Un corps menu, même gauche, est multiplicativement et additivement connexe.*

Démonstration. Un corps infini possède des éléments d'ordre aussi grand que l'on veut. Quitte à en prendre une extension ω-saturée, on peut supposer qu'il possède des éléments d'ordre infini. En particulier, il n'est pas localement fini. Soit K ce corps. Pour le cas additif, nous considérons H un sous-groupe additif d'indice fini dans K, qui soit k-définissable, où k est un sous-corps infini finiment engendré de K. L'intersection des $\lambda H \cap k$, où λ parcourt k, est celle d'un nombre fini d'entre eux : c'est un idéal à gauche d'indice fini dans k, qui est égal à k. En conclusion, k est inclus dans H. Ceci est valable pour tout corps k finiment engendré infini, si bien que H est égal à K.

Pour le cas multiplicatif, supposons que $K^\times$ ait un sous-groupe multiplicatif M définissable d'indice n. Soit k un sous-corps infini finiment engendré tel que chaque classe modulo M soit k-définissable. M étant de rang maximal, d'après la proposition 1.30, son presque stabilisateur additif dans k est d'indice fini dans k^+, et il en va de même pour chacune des classes de M, si bien que le presque stabilisateur de toutes ces classes est un idéal à gauche d'indice fini dans k^+, qui est donc égal à k tout entier. Nous finissons ensuite comme B. Poizat dans [59] : nous venons de montrer que $1 + a.M \simeq a.M$ pour toute classe $a.M$ de M, où $\simeq$ désigne l'égalité à petit rang de Cantor sur k près. Pour toute classe $a.M$, et tout x dans $a.M$ sauf un ensemble de petit rang, $1 + x$ appartient à aM, donc $x^{-1} + 1 \in M$, et le complémentaire de M est de petit rang de Cantor : M est exactement $K^\times$. □

Remarque 2.6. C'est aussi valable pour un corps mince : il suffit pour s'en convaincre de traiter le cas où K est un corps localement fini. Il est alors commutatif et égal à $acl(\emptyset)$ et satisfait à la condition de chaîne sur les sous-groupes définissables d'après le théorème 1.33. Il a donc un plus petit sous-groupe additif définissable d'indice fini, qui est un idéal, et ne peut être que K tout entier. Pour le cas multiplicatif, nous ne sommes pas en mesure de donner un argument plus élémentaire que celui de Duret repris par Wagner dans [71].

Remarque 2.7. L'application puissance p est à fibres finies, donc un corps commutatif mince infini est parfait d'après le lemme 1.20.

Fait 2.8. (Artin-Schreier, Kummer) [39, théorèmes 6.2 et 6.4] *Soit K un corps commutatif de caractéristique p et L une extension cyclique de K de degré n.*

(i) Si p ne divise pas n, et si K contient n racines de l'unité deux à deux distinctes, L/K est une extension dite radicale*, ou* de Kummer*, engendrée par K et une racine nième d'un élément de K.*

(ii) Si la caractéristique p est égale à n, L/K est une extension dite pseudo-radicale*, ou* d'Artin-Schreier*, engendrée par K et une racine d'une équation $a = x^p - x$, où a est dans K.*

Corollaire 2.9. (Wagner [71]) *Un corps commutatif menu infini est algébriquement clos.*

Démonstration. Pour tout entier n, l'application puissance n est à fibres bornées : son image est un sous-groupe d'indice fini. Il en va de même pour l'application qui à x associe $x^p - x$. Un corps mince n'a donc pas d'extension radicale ni pseudo-radicale. Nous finissons comme Macintyre dans [41] : montrons d'abord que le corps K contient toutes les racines de l'unité. Soit a une racine énième qui ne soit pas dans le corps, et d'ordre minimal. L'extension $K(a)$ est de degré m strictement plus petit que n. Par minimalité de n, le corps K contient toutes les racines $m$ièmes de l'unité, donc si m est premier à la caractéristique de K, $K(a)$ est de la forme $K(b)$ avec $b^m \in K$ d'après le fait 2.8. Puisque $K^\times$ est divisible et que K contient toutes les racines $m$ièmes de l'unité, b est dans K, une contradiction. Si K est de caractéristique p, alors p divise m. Donc $K(a)$ contient une extension de degré p de K qui est pseudo-radicale d'après le fait 2.8, une contradiction.

Si le corps n'est pas algébriquement clos, il a une extension normale algébrique L de degré n qui est séparable puisque le corps est parfait d'après la remarque 2.7 ; son groupe de Galois contient un sous-groupe cyclique d'ordre q premier dont on note K le corps des invariants. Si q n'est pas la caractéristique, comme K contient les racines $q$ièmes de l'unité, L/K est une extension radicale ; si q est la caractéristique, L/K est pseudo-radicale ; dans les deux cas, on a une contradiction. □

Rappelons qu'un corps mince n'a pas d'extension pseudo-radicale d'après [71, proposition 9] ou bien la remarque 2.6, et qu'il est divisible d'après [71, proposition 9]. La première partie de la démonstration précédente est donc toujours valable :

Corollaire 2.10. *Un corps commutatif mince infini contient toutes les racines de l'unité. Il n'a donc pas d'extension résoluble par radicaux.*

Démonstration. Rappelons qu'une extension L d'un corps K est résoluble s'il existe une chaîne de corps $L = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = K$ telle que chaque extension L_{i+1}/L_i soit engendrée par L_i et une racine, ou une pseudo racine d'un élément de L_i. □

Une extension algébrique d'un corps mince n'a a priori aucune raison d'être mince. Nous ne pouvons donc pas appliquer l'argument de Macintyre et en déduire qu'un corps mince est fini ou algébriquement clos. Toutefois, en s'appuyant sur la structure additive du corps, on peut montrer qu'aucune extension algébrique d'un corps mince n'a d'extension pseudo-radicale.

Définition 2.11. On appelle *structure abélienne* tout groupe abélien muni de prédicats interprétant des sous-groupes de ses puissances cartésiennes finies.

Dans une structure stable, on appelle *chaîne dense de déviations* toute chaîne de types p_q indicée par $\mathbf{Q}$ telle que pour tous rationnels $q < r$, le type p_r soit une extension déviante de p_q. Les structures n'ayant pas de chaîne dense de déviations sont munies d'une dimension et, pour chaque dimension α, d'un α-rang de Lascar U_α qui range les types [24]. Ces α-rangs satisfont aux inégalités de Lascar [24, P proposition 11]. A un groupe stable (infiniment) définissable, on peut associer le U_α-rang et la dimension d'un de ses types génériques. Dans une structure stable, on notera $R_\varphi(\psi)$ le φ-rang d'une formule ψ ; dans un groupe stable, on note $R^*_\varphi(\psi)$ le φ-rang stratifié.

Théorème 2.12. *Une structure abélienne d'univers mince n'a pas de chaîne dense de déviations.*

Remarque 2.13. On sait qu'une structure menue et monobasée n'a pas de chaîne dense de déviations [50, lemme 2.1]. Rappelons qu'une structure abélienne est stable, et monobasée. La difficulté du théorème 2.12 par rapport à [50, lemme 2.1] provient du fait que l'hypothèse de minceur n'impose pas aux n-types d'être dénombrables si $n \geq 2$, chose nécessaire pour reproduire la preuve de [50, lemme 2.1].

Démonstration. D'après [24, lemme 7], il suffit de montrer que pour tout uplet $\bar{b}$ et tout ensemble B, il existe un ordinal α tel que $U_\alpha(\bar{b}/B)$ soit ordinal. Si l'on sait qu'il existe un ordinal α tel que $U_\alpha(b_i/B)$ soit fini pour tout b_i dans $\bar{b}$ et tout B, alors $U_\alpha(\bar{b}/B)$ est fini d'après les U_α-inégalités de Lascar [24, proposition 11]. En procédant par récurrence sur l'arité de b, il suffit donc de considérer les 1-types. Supposons au contraire qu'il y ait une chaîne dense de déviations d'arité un.

(1) Il y a une chaîne dense de sous-groupes infiniment $acl(\emptyset)$-définissables deux à deux non commensurables : soit $tp(b/A_i)$ une chaîne dense de déviations, c'est-à-dire que A_i est contenu dans A_j pour tout $i < j$, et $b \not\downarrow_{A_i} A_j$ si $i < j$. D'après [29], chaque formule apparaissant dans $tp(b/A_i)$ est une combinaison booléenne de groupes $acl(\emptyset)$-définissables. Il existe donc un plus petit groupe infiniment $acl(\emptyset)$-définissable H_i tel que bH_i contienne le type $tp(b/A_i)$, lequel type est nécessairement générique dans bH_i. De plus, bH_i est infiniment A_i-définissable. Puisque $b \not\downarrow_{A_i} A_j$ pour tout $i < j$, l'indice $[bH_j : bH_i]$ est infini, de même que celui $[H_j : H_i]$.

(2) Construisons $2^{\aleph_0}$ types purs : chaque H_i est l'intersection de groupes définissables H_{ij}. Soit $\overline{H_{ij}}$ la réunion des conjugués de H_{ij} sous l'action du groupe des automorphismes fixant le vide. Appelons $\widehat{H_i}$ l'intersection des $\overline{H_{ij}}$. Pour tout réel r, appelons p_r le type partiel

$$\{x \in \bigcap_{i \geq r} \widehat{H_i}\} \wedge \{\neg\psi : R^*_\varphi(\psi) < R^*_\varphi(\bigcap_{i \geq r} \widehat{H_i}), \varphi, \psi \text{ formules}\}$$

Remarquer que pour un groupe stable infiniment définissable qui est l'intersection de groupes définissables décroissants $(G_i)_{i\geq 1}$ disons, pour toute formule φ, il existe un indice i_φ tel que $R^*_\varphi(\bigcap_{i\geq 1} G_i) = R^*_\varphi(G_j)$ pour tout $j > i_\varphi$. Il existe donc deux indices i et j tels que

$$R^*_\varphi(\bigcap_{i \geq r} \widehat{H_i}) = R^*_\varphi(\widehat{H_i}) = R^*_\varphi(\overline{H_{ij}})$$

$$R^*_\varphi(\bigcap_{i \geq r} H_i) = R^*_\varphi(H_i) = R^*_\varphi(H_{ij})$$

Puisque les φ-rangs stratifiés sont préservés par automorphisme de la structure ambiante, et que le rang d'une union finie est égal au maximum des rangs, on a

$$R^*_\varphi(\bigcap_{i \geq r} \widehat{H_i}) = R^*_\varphi(\bigcap_{i \geq r} H_i)$$

Tout couple d'éléments de la chaîne $(\widehat{H_i})_{i\in\mathbf{Q}}$ a au moins un R^*_φ-rang qui les distingue. Il en résulte que les types $(p_r)_{r\in\mathbf{R}}$ sont deux à deux inconsistants. □

Proposition 2.14. *Soit G un groupe stable sans chaîne dense de déviations, et f un homomorphisme A-définissable du groupe G dans lui-même. Si le noyau de f est fini, son image est d'indice fini dans G.*

Démonstration. Montrons le résultat par induction sur la dimension de G. Soit α la dimension de G, et G_α l'intersection de tous les groupes A-définissables ayant le même U_α-rang que G. Le groupe G_α est normal dans G, infiniment définissable et de même rang que G. Remarquons que si H est un sous-groupe A-définissable propre de G_α, alors $U_\alpha(H) < U_\alpha(G_\alpha)$. De plus, $f(G_\alpha)$ et G_α ont même U_α-rang, donc

$f(G_\alpha)$ contient G_α. De même, $f^{-1}(G_\alpha)$ et G_α ont même U_α-rang, donc $f^{-1}(G_\alpha)$ contient G_α et G_α contient $f(G_\alpha)$. Les groupes G_α et $f(G_\alpha)$ sont donc égaux, et l'homomorphisme f induit un homomorphisme $\hat{f}$ de G/G_α, dont les fibres sont encore finies puisque bornées par celles de f ; de plus, $dim(G/G_\alpha) < \alpha$ d'après les U_α-inégalités de Lascar. L'image de $\hat{f}$ est générique par hypothèse d'induction, et celle de f l'est aussi. $\square$

On en déduit le théorème suivant sur les corps commutatifs minces. Rappelons à ce sujet qu'un corps commutatif minimal de caractéristique positive est fini ou algébriquement clos [72], de même qu'un corps commutatif d-minimal [59]. On ne sait toujours pas si un corps commutatif minimal de caractéristique nulle est algébriquement clos.

Théorème 2.15. *Aucune extension algébrique d'un corps commutatif mince infini n'a d'extension pseudo-radicale.*

Démonstration. Soit K un corps mince infini de caractéristique positive p, L une extension algébrique de K, et f l'application de L dans L qui à x associe $x^p - x$. On considère la structure additive de L, munie de f : c'est une structure abélienne mince. Elle n'a pas de chaîne dense de déviations d'après le théorème 2.12. Les fibres de f sont finies donc $f(L)$ est d'indice additif fini dans K. Mais K est additivement connexe d'après la remarque 2.6, donc K^n l'est aussi, et f est surjective. $\square$

Corollaire 2.16. *Le degré d'une extension algébrique d'un corps commutatif mince infini de caractéristique positive p n'est pas divisible par p.*

Démonstration. Soit K ce corps mince ; il est parfait d'après la remarque 2.7. S'il a une extension algébrique de degré divisible par p, il a une extension normale séparable de degré divisible par p. Son groupe de Galois a un sous-groupe d'ordre p dont on note K_1 le corps des invariants. L/K_1 est donc une extension pseudo-radicale d'après le fait 2.8, une contradiction. $\square$

Corollaire 2.17. *Un corps commutatif mince de caractéristique deux est fini ou algébriquement clos.*

Démonstration. S'il n'est pas algébriquement clos, il a une extension algébrique normale séparable. D'après le corollaire 2.10, cette extension n'est pas résoluble par radicaux. Son groupe de Galois n'est donc pas résoluble d'après [39, théorème 7.2], ni d'ordre pair d'après le corollaire 2.16, ce qui contredit Feit-Thomson. $\square$

Proposition 2.18. *Soit K un corps commutatif menu infini dont F soit un sous-corps définissable, et f un endomorphisme F-linéaire non trivial de K, définissable, dont le noyau soit de dimension finie. Alors f est surjectif.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe un t hors de l'image de f. On a $K = \mathrm{Ker} f^m + \mathrm{Im} f^m$. Soit H l'image de f^m et L son noyau. L est de F-dimension finie d'après le lemme 2.1. Quitte à remplacer L par un supplémentaire définissable de H, on peut supposer L et H disjoints. Si F est fini, alors L l'est aussi, et H est égal à K. Supposons donc F infini. Soit k une clôture algébrique finiment engendrée contenant t et la F-base de L. On a

$$k = L \cap k \oplus H \cap k$$

où $L \cap k$ est un $F \cap k$-espace vectoriel de dimension finie. L'intersection I des $\lambda H \cap k$, où λ parcourt k est celle d'un nombre fini d'entre eux : c'est un idéal de k qui ne contient pas t. Il est donc réduit à zéro. Mais $H \cap k$ est de $F \cap k$-codimension finie, donc I également : k est une extension algébrique de $k \cap F$. Mais $k \cap F$ est algébriquement clos puisque k et F le sont. Donc F contient k, et ce pour tout k : F est K tout entier. □

2.2 Corps gauches

On considère dans cette section un corps mince D infini. Si K est un sous-corps de D, on peut voir D comme un K-espace vectoriel à gauche ou à droite. On note $[D : K]_g$ et $[D : K]_d$ les dimensions correspondantes. Cette convention n'est que provisoire puisque :

Lemme 2.19. *Si K est un sous-corps définissable de D, et si D est de dimension finie sur K à gauche ou à droite, alors D est de dimension finie sur K à gauche et à droite, et ces deux dimensions coïncident. De plus, il existe une famille de D libre et génératrice à gauche et à droite.*

Démonstration. On peut supposer les corps infinis. Soit $f_1, \ldots, f_n$ une famille de vecteurs de D, libre à gauche et à droite avec n maximal. Soient F_d et F_g les combinaisons linéaires respectivement à droite et à gauche des f_i à coefficients dans K. Si $F_d < D$ et $F_g < D$, alors $F_d \cup F_g < D$, ce qui contredit le caractère maximal de n. Supposons par exemple D égal à F_d. Le morphisme de D^+ qui à une décomposition à droite $\sum_{i=1}^n f_i k_i$ associe $\sum_{i=1}^n k_i f_i$ est définissable, et injectif donc surjectif d'après le corollaire 1.27, donc F_g, F_d et D sont égaux. □

Corollaire 2.20. *Le centre d'un corps mince infini est infini.*

Démonstration. C'est évident en caractéristique nulle. Supposons donc la caractéristique positive. Remarquer qu'il existe un élément b d'ordre infini, et que $Z(C(b))$ contient toutes les racines de l'unité d'après le corollaire 2.10. Soit a une racine primitive de l'unité d'ordre premier q. Supposons que a ne soit pas dans le centre. D'après le fait 2.2, il existe un x tel que xax^{-1} soit égal à a^i et différent de a. Si x est d'ordre fini, le corps engendré par x et a est fini donc commutatif, une contradiction. L'ordre de x est donc infini. En conjuguant $q-1$ fois par x, on obtient $x^{q-1}ax^{-q+1} = a^{i^{q-1}}$. Comme i^{q-1} est congru à 1 modulo q les éléments x^{q-1} et a commutent. Mais $Z(C(x^{q-1}))$ contient toutes les racines de l'unité ; il contient x aussi d'après le corollaire 2.10, donc a et x commutent, ce qui est absurde. Le centre contient toutes les racines de l'unité. Il est donc infini. □

Corollaire 2.21. *Un élément et une de ses puissances ont même centralisateur.*

Démonstration. Soit un élément a d'un corps mince. On a bien sûr $C(a) \leq C(a^n)$. Réciproquement, le corps $Z(C(a^n))$ est infini et contient toutes les racines de l'unité d'après le corollaire 2.20 ; il n'a donc pas d'extension radicale, et contient a. □

Remarque 2.22. En particulier, tout élément d'ordre fini est dans le centre. De même, pour tout polynôme P non constant à coefficients dans le centre induisant un groupe de Galois résoluble, $P(a)$ et a ont le même centralisateur dans D. Si D est menu, c'est vrai pour tout polynôme non constant à coefficients dans le centre.

Corollaire 2.23. *Un élément de D a une racine énième pour tout entier n.*

Démonstration. Soit a dans D. S'il est d'ordre infini, $Z(C(a))$ n'a pas d'extension radicale, donc a a une racine énième. Si a est d'ordre fini, il est dans le centre. On considère alors le corps $Z(C(a,x))$, où x est d'ordre infini. $\square$

Remarque 2.24. Soit a un uple fini. $acl(a)$ et $dcl(a)$ ont même centralisateur : si x commute avec $dcl(a)$, soit y dans $acl(a)$; tous les éléments y^{x^m} sont conjugués à y sous l'action du groupe d'automorphisme fixant a. Il existe donc deux entiers n et m distincts tels que y^{x^n} et y^{x^m} soient égaux : y commute avec x en vertu du corollaire précédent. Ainsi,

$$Z(acl(a)) = Z(C(acl(a))) \cap acl(a) = Z(C(dcl(a))) \cap acl(a)$$

En particulier, puisque $Z(C(dcl(a)))$ est divisible, deux racines énièmes d'un b dans $Z(C(dcl(a)))$ commutent ; elles sont donc algébriques sur b. Le centre d'une clôture algébrique finiment engendrée est donc divisible.

Lemme 2.25. *Soit a dans D, et γ la conjugaison par a. Pour tout λ de D, le noyau de $\gamma - \lambda.id$ est un $C(a)$-espace vectoriel de dimension au plus un.*

Démonstration. Soient x et y non nuls dans le noyau. On a les égalités $x^a = \lambda x$ et $y^a = \lambda y$ donc $(y^{-1}x)^a = y^{-1}x$. $\square$

Proposition 2.26. *Dans un corps mince de caractéristique positive, pour tout a, et toute clôture algébrique finiment engendrée k contenant a, k est un $C_k(a)$-espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Considérons le morphisme f qui à x associe $x^a - x$. Soient K et H le noyau et l'image de f. Remarquons que f n'est pas surjective, car si elle l'était, il y aurait un x tel que $x^a = x + 1$, d'où $x^{a^p} = x + p = x$, une contradiction avec le lemme 2.21. Considérons la restriction $\tilde{f}$ de f allant de D^+/K dans D^+/K. H est un K-espace vectoriel. $H \cap K$ est donc un idéal de K, trivial puisqu'il ne contient pas un. $\tilde{f}$ est injective, donc surjective, d'où $D = H \oplus K$. On a

$$k = H \cap k \oplus K \cap k$$

L'intersection I des $\lambda H \cap k$, où λ parcourt k est celle d'un nombre fini n d'entre eux : c'est un idéal à gauche de $\bar{k}$, réduit à zéro. Mais $H \cap k$ est un $K \cap k$-espace vectoriel de codimension 1, donc I est de codimension au plus n. $\square$

Théorème 2.27. *Un corps mince de caractéristique positive est localement de dimension finie sur son centre.*

Démonstration. Soit k une clôture algébrique finiment engendrée, et D_i une chaîne maximale de centralisateurs d'éléments de k

$$k > D_1 \cap k > \cdots > D_n \cap k > D_{n+1} \cap k$$

où $D_n \cap k$ est non commutatif minimal. Cette chaîne existe bien d'après le théorème 1.33. Les extensions $D_i \cap k / D_{i+1} \cap k$ sont finies ; $D_{n+1} \cap k$ est commutatif : la dimension de k sur son centre et finie, bornée par $[k : D_{n+1} \cap k]^2$ d'après le fait 2.3 et la remarque 2.4. $\square$

Corollaire 2.28. *Un corps menu de caractéristique positive est commutatif.*

Démonstration. $acl(\emptyset)$ est infinie, ainsi que son centre d'après le corollaire 2.20. D'après la remarque 2.24, et le corollaire 2.9, le centre de $acl(\emptyset)$ est relativement algébriquement clos dans $acl(\emptyset)$, et donc égal à $acl(\emptyset)$ par le théorème précédent. Ceci est valable pour toute clôture algébrique finiment engendrée. □

Corollaire 2.29. *Un corps mince de caractéristique deux est commutatif.*

Démonstration. De même, d'après le corollaire 2.17, toute clôture algébrique finiment engendrée est commutative. □

Corollaire 2.30. *La conjecture de Vaught est valide pour la théorie des purs corps de caractéristique positive.*

Démonstration. Si la théorie d'un pur corps infini de caractéristique positive a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles, elle est menue : c'est la théorie d'un corps commutatif algébriquement clos, qui n'a qu'un nombre dénombrable de modèles dénombrables comme il est remarqué dans [71]. □

Proposition 2.31. *Supposons le corps D menu. Soit a hors du centre, et γ la conjugaison par a. Pour tout polynôme P à coefficients dans $Z(D)$, le morphisme $P(\gamma)$ est surjectif.*

Démonstration. Appelons K le corps $C(a)$. Comme $Z(D)$ est algébriquement clos, P est scindé sur $Z(D)$. Un produit de morphismes surjectifs étant surjectif, il suffit de prouver le résultat pour P irréductible. Soit λ dans le centre, f le morphisme $\gamma - \lambda.id$, et t qui ne soit pas dans l'image de f. L'application f est K-linéaire ; son noyau est une droite ou un point. D'après le corollaire 1.40, on a $D = \mathrm{Ker} f^m + \mathrm{Im} f^m$. Posons H l'image de f^m, et L son noyau. Remarquons que L est de K-dimension finie. Quitte à remplacer L par un supplémentaire définissable de H, on peut toujours supposer L et H disjoints. Soit k une clôture définissable infinie finiment engendrée contenant t, a, un élément b ne commutant pas avec a, et la K-base de L. On a

$$k = L \cap k \oplus H \cap k$$

L'intersection I des $\lambda H \cap k$, où λ parcourt k est celle d'un nombre fini d'entre eux : c'est un idéal à gauche de k qui ne contient pas t. Il est donc réduit à zéro. Mais $H \cap k$ est de $K \cap k$-codimension finie, donc I également. D'après le fait 2.3, on a

$$[k : K \cap k] = [k : C_k(a)] = [Z(k)(a) : Z(k)] < \infty$$

Mais $Z(k)$ n'est rien d'autre que $Z(C_D(k)) \cap k$. Comme $Z(C_D(k))$ est algébriquement clos, a appartient à $Z(k)$, ce qui est absurde. □

Corollaire 2.32. *Dans un corps menu, la conjugaison par un élément engendre une algèbre centrale intègre.*

2.3 Corps aux différences finies

Ici, les corps sont commutatifs. Soit K un *corps aux différences finies*, c'est-à-dire un corps infini muni d'un morphisme définissable de corps σ. Appelons F le sous-corps de K constitué des éléments fixés par σ. On suppose K menu. F est soit fini, soit algébriquement clos. Le noyau de σ étant un idéal de K, si σ n'est pas nul, il est injectif, donc surjectif.

Lemme 2.33. *Pour tout polynôme P de degré n à coefficients dans K, le noyau de $P(\sigma)$ est un F-espace vectoriel de dimension au plus n.*

Démonstration. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des solutions de l'équation

$$\sigma^n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sigma^i(x) = 0$$

et soit $C(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ leur déterminant de Casorati, défini par

$$\begin{aligned} C(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \sigma(x_0) & \sigma(x_1) & \cdots & \sigma(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^n(x_0) & \sigma^n(x_1) & \cdots & \sigma^n(x_n) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \sigma(x_0) & \sigma(x_1) & \cdots & \sigma(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\sigma^i(x_0) & -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\sigma^i(x_1) & \cdots & -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\sigma^i(x_n) \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le déterminant de Casorati est nul donc les solutions $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont liées dans F d'après le lemme II p. 271 de [16]. □

Lemme 2.34. *Si le fixateur de σ est infini, σ et σ^n ont même fixateur pour tout entier n.*

Démonstration. F est algébriquement clos. Si σ^n fixe x, σ fixe les fonctions symétriques des racines $x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{n-1}(x)$. Il fixe donc les racines. □

Théorème 2.35. *Dans un corps menu de caractéristique positive, le seul morphisme définissable de corps de fixateur infini est l'identité.*

Démonstration. Sinon, $\sigma - Id$ est surjectif d'après la proposition 2.18 et il y a un x vérifiant $\sigma(x) = x + 1$ donc $\sigma^p(x) = x + p = x$, ce qui contredit le lemme 2.34. □

Corollaire 2.36. *La conjecture de Vaught est valide pour la théorie d'un corps de caractéristique positive dans le langage $\{+, \cdot, 0, 1, \sigma_i : i < \omega\}$, où les σ_i sont des morphismes de corps dont le fixateur est infini.*

2.4 Corps différentiels

Soit K un *corps différentiel*, c'est-à-dire un corps commutatif infini muni d'une application K-linéaire D satisfaisant la formule de Leibniz

$$D(xy) = D(x).y + x.D(y)$$

On suppose la théorie de K menue, donc K est algébriquement clos. Remarquons que si K est de caractéristique positive p, tout élément x a une racine $p^{ième}$ que l'on note y et $D(x) = D(y^p) = py^{p-1}D(y) = 0$: la dérivation D est triviale. On supposera donc que la caractéristique de K est zéro, et on note C son corps de constantes, qui est algébriquement clos.

Lemme 2.37. *Pour tout polynôme P de degré n à coefficients dans K, le noyau de $P(D)$ est un C-espace vectoriel de dimension au plus n.*

Démonstration. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des solutions de l'équation $P(D) = 0$. Leur wronskien est nul donc les solutions $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont liées dans C d'après le lemme 7 de [55]. □

Corollaire 2.38. *Pour tout polynôme P à coefficients dans K, le morphisme $P(D)$ est surjectif.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, et la proposition 2.18. □

Question 2.39. Un corps différentiel ω-stable n'est pas toujours différentiellement clos [28]. Toutefois, il n'a pas d'extension de Liouville ni même de Kolchin [44]. D'après la dernière proposition, un corps menu est clos par adjonction d'intégrales. Peut-il avoir des extensions de Liouville ? De Picard-Vessiot ? De Kolchin ?

Chapitre 3

Anneaux menus

Notations. On appelle *anneau* un groupe abélien A muni d'une deuxième loi associative et distributive sur la première. Un élément a est *nilpotent* d'ordre n si a^n est nul. L'anneau est *nil* si ses éléments sont nilpotents. Il est *nilpotent* de classe n si l'ensemble A^n des produits de n éléments est nul. On note $Ann_A(B)$ et $Ann^A(B)$ les annulateurs à gauche et à droite d'une partie B. Remarquer que $Ann_A Ann^A Ann_A(B)$ est égal à $Ann_A(B)$.

Commençons par les anneaux minces de "dimension un". Rappelons :

Fait 3.1. (Poizat [59]) *Un groupe d-minimal a un plus petit sous-groupe d'indice fini, qui est abélien.*

D'autre part, un corps d-minimal de caractéristique p est algébriquement clos [59].

Proposition 3.2. *Un anneau infini sans sous-groupe définissable propre infini est un anneau trivial, ou un corps.*

Démonstration. Soit A un anneau non-trivial sans sous-groupe définissable propre infini. Un morphisme définissable du groupe A est surjectif ou nul d'après le corollaire 1.27. Il existe un a tel que aA soit égal à A. Il y a donc un e tel que ae soit égal à a : eA est A tout entier. S'il existe un x tel que $ex - x = a$, alors a^2 est nul et A aussi : $ex - x$ est nul pour tout x, et e est une unité à gauche. Par symétrie, l'anneau a une unité à droite ; par unicité c'est e. Si aA est nul, a est nul. La multiplication par un élément non nul est donc surjective : A est un corps. □

Corollaire 3.3. *Un anneau d-minimal a un idéal d'indice fini qui est un corps commutatif ou un anneau trivial.*

Démonstration. L'anneau a un plus petit sous-groupe définissable I d'indice fini, qui est un idéal, sans sous-groupe définissable propre infini. Si la multiplication n'est pas triviale, I est donc un corps, d-minimal ; en particulier I n'a pas de sous-corps définissable propre infini. I a un plus petit sous-groupe multiplicatif G d'indice fini, qui est abélien d'après le fait 3.1. Le centralisateur $C_I(G)$ est donc un corps infini, égal à I : le centre de I est infini, égal à I. □

3.1 Généralités sur les anneaux minces

Lemme 3.4. *Soit A un anneau mince.*

1) Si un élément ne divise pas zéro à gauche, A a une unité à gauche.

2) Si l'anneau est unifère, un élément est inversible à droite si et seulement s'il est inversible à gauche, et l'inverse à gauche et à droite ne fait qu'un.

3) Un élément divise zéro à gauche si et seulement s'il n'est pas inversible à gauche.

Démonstration. 1) Soit a cet élément. La multiplication à gauche par a est injective, donc surjective, et il existe un e vérifiant $ae = a$. Pour tout b, $a(eb - b)$ est nul donc $eb = b$, et e est une unité à gauche. 2) Si $ab = e$, alors la multiplication à droite par a est injective, donc surjective ; il existe un c tel que $ca = e$. Alors $ce = cab = eb$. 3) Si a ne divise pas zéro à gauche, A est une unité à gauche, et la multiplication à gauche par a est surjective puisqu'elle est injective : l'antécédent du neutre à gauche est l'inverse à droite de a. □

Corollaire 3.5. *Un anneau mince intègre est un corps.*

Proposition 3.6. *Dans un anneau mince, il n'y a pas de chaîne infinie strictement croissante d'annulateurs à gauche $Ann(k_1) \leq Ann(k_2) \leq \cdots \leq Ann(k_i) \leq \cdots$, où les k_i sont dans une clôture définissable k finiment engendrée.*

Démonstration. La suite $Ann^A Ann_A(k_1) \geq \cdots \geq Ann^A Ann_A(k_i)$ est décroissante. Prenons un entier n tel que les rang et degré de Cantor sur k de $Ann^A Ann_A(k_n)$ soient minimaux. Puisque $k_n + Ann^A Ann_A(k_{n+1})$ est inclus dans $Ann^A Ann_A(k_n)$, l'anneau k_n est dans $Ann^A Ann_A(k_{n+1})$, et $Ann_A(k_{n+1}) \leq Ann_A(k_n)$. □

Remarque 3.7. La chaîne $Ann_A(a) \leq Ann_A(a^2) \leq \cdots \leq Ann_A(a^i) \leq \cdots$ stationne quel que soit a. Si l'anneau est menu, la compacité borne uniformément la longueur de cette chaîne. En particulier l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau menu est définissable.

Proposition 3.8. *Dans un anneau mince, il n'y a pas de chaîne infinie strictement croissante d'annulateurs $Ann_k(k_1) \leq Ann_k(k_2) \leq \cdots \leq Ann_k(k_i) \leq \cdots$, où les k_i sont dans une clôture algébrique k finiment engendrée.*

Démonstration. Pour tout ensemble X, $AnnX$ est infiniment définissable à paramètres dans X. Donc $Ann^k Ann_k(k_i)$ est infiniment k-définissable. La chaîne $Ann^k Ann_k(k_i)$ décroît, donc il existe un entier n tel que $Ann^k Ann_k(k_n)$ soit égal à $Ann^k Ann_k(k_{n+1})$ d'après la condition de chaîne mince 1.33. □

Remarque 3.9. Les propositions 3.6 et 3.8 sont incomparables puisque la première est globale, à paramètres dans une clôture définissable, tandis que la deuxième n'est que locale, mais à paramètres dans une clôture algébrique. Elles sont aussi valables pour des chaînes d'annulateurs à droite.

Corollaire 3.10. *Dans un anneau mince A, pour tout a, il existe un entier n tel que*

$$A = a^n.A \oplus Ann_A(a^n)$$

Démonstration. Les suites $a^i.A$ et $Ann_A(a^i)$ stationnent. □

3.2 Le radical de Jacobson

Tout groupe abélien peut être vu comme un anneau dont la multiplication est nulle. Partant d'un anneau, il est donc souhaitable d'en isoler la partie "triviale". On introduit à cet effet le radical de Jacobson. Il existe d'autres notions de radical : voir les pages 1 à 6 de [34] pour une introduction au radical de Baer, [74] pour un survol des différentes notions ; celle introduite par Jacobson semble être la plus propice à établir la structure sur des anneaux de radical nul. Qui plus est, la plupart des radicaux sont définissables dans la logique du second ordre. Le radical de Jacobson est lui définissable au premier ordre. Un anneau est *artinien* à droite si toute chaîne décroissante d'idéaux à droite stationne.

Fait 3.11. (Wedderburn-Artin [23, théorème 2.1.7]) *Un anneau artinien à droite de radical de Jacobson nul est isomorphe à un produit cartésien fini d'anneaux de matrices carrées à coefficients dans des corps.*

Un élément a est *quasi-régulier à droite* s'il existe un b tel que $a + b + ab$ soit nul. On note $J(A)$ ce radical, que pour nos besoins, nous définirons ainsi :

Fait 3.12. (Jacobson [23, théorème 1.2.3]) *Le* radical de Jacobson *d'un anneau est l'unique idéal à droite maximal dont tous les éléments sont quasi-réguliers à droite.*

$J(A)$ est donc défini par la formule $\forall y \exists z(xy + z + xyz = 0)$.

Remarque 3.13. Si a appartient à $a.J(A)$, disons $a = ab$ avec b dans le radical, $-b$ est aussi dans le radical, et il existe un c tel que $c - b - bc$ soit nul. On a alors $ac = abc = a(c - b)$, ce qui implique que a est nul.

G. Cherlin a montré que le radical d'un anneau $\aleph_0$-catégorique, commutatif ou non, est nilpotent [11, 12], ainsi que celui d'un anneau stable [14].

Proposition 3.14. *Dans un anneau mince, toute clôture algébrique finiment engendrée du radical est nilpotente.*

Démonstration. Appelons k cette clôture. La chaîne des $Ann_k(k^i)$ stationne à partir d'un rang n. Parmi les a dans $k \setminus Ann(k^n)$, choisissons-en un tel que $aJ \cap k$ soit minimal. Ni ak^n, ni ak^{n+1} ne sont nuls ; il existe donc un b dans k tel que abk^n ne soit pas nul. D'après la remarque 3.13, ab est hors de abJ. On a donc $abJ \cap k < aJ \cap k$, une contradiction. □

Remarque 3.15. Le groupe additif du radical J d'un anneau menu est menu. D'après [69, voir le fait 4.1], il se décompose en une somme directe de deux sous-groupes J_0 et J_m, où J_0 est additivement divisible et J_m d'exposant additif m. En fait, J_0 et J_m sont des idéaux. D'après le théorème de Nagata-Higman, puisque J est nil d'exposant borné n, J_0 est nilpotent, et J_m l'est aussi pour peu que m soit un entier premier supérieur à n.

Fait 3.16. (Nagata-Higman [30, appendice C]) *Une algèbre nile d'exposant n et de caractéristique zéro ou un entier premier supérieur à n est nilpotente de classe au plus $2^n - 1$.*

Question 3.17. Le radical d'un anneau menu est-il nilpotent ?

3.3 Anneaux commutatifs sans radical

Soit A un anneau commutatif mince de radical nul. En particulier, puisqu'un élément nilpotent est quasi-régulier, A n'a pas d'éléments nilpotents à part zéro. On appelle *idempotent* tout élément qui est son propre carré.

Lemme 3.18. *Si A n'est pas nul, il contient au moins un idempotent non nul. S'il n'en a qu'un seul, disons e, chaque élément non nul est inversible dans eA.*

Démonstration. On sait que A s'écrit $a^n A \oplus Ann(a^n)$. Il existe donc un c dans $Ann(a^n)$ et un b tels que $a^n = a^{3n}b + c$. Alors, $a^{2n} = a^{4n}b$, et $a^{2n}b$ est un idempotent, non nul puisque a^{2n} est non nul. □

Remarque 3.19. De la même manière, tout élément d'une clôture algébrique qui n'a qu'un seul idempotent est soit nilpotent, soit inversible.

Remarque 3.20. Pour tout idempotent e d'un sous-anneau k de A, la trace sur k de eA est ek.

Proposition 3.21. *Pour toute clôture algébrique finiment engendrée k, il existe n idempotents $e_1, \ldots, e_n$ deux à deux orthogonaux tels que chaque $e_i k$ soit un corps, et*

$$k = e_1 k \oplus \cdots \oplus e_n k$$

Démonstration. Si $e_1, e_2, \ldots$ est une suite infinie d'idempotents deux à deux orthogonaux, la chaîne $(Ann_k(e_1 + \cdots + e_n))_{n \geq 1}$ décroît strictement, ce qui contredit la condition de chaîne mince 1.33. Il n'y a donc que n idempotents $e_1, \ldots, e_n$ deux à deux orthogonaux et

$$A = (e_1 + e_2 + \cdots + e_n)A \oplus Ann(e_1 + \cdots + e_n)$$

$$A = e_1 A \oplus e_2 A \oplus \cdots \oplus e_n A \oplus Ann(e_1 + \cdots + e_n)$$

$$k = e_1 k \oplus e_2 k \oplus \cdots \oplus e_n k \oplus Ann_k(e_1 + \cdots + e_n)$$

et $Ann_k(e_1 + \cdots + e_n)$ ne contient aucun idempotent non nul : il est nul. □

3.4 Anneaux non commutatifs

Lemme 3.22. *Si A n'est pas nil, il contient au moins un élément idempotent non nul. Si A n'a qu'un seul idempotent, chacun de ses éléments est soit nilpotent, soit inversible.*

Démonstration. Comme dans la preuve du lemme 3.18, on trouve un a non nilpotent et b tels que $a^{2n} = a^{4n}b$. Puisque $A = Aa^n \oplus Ann^A(a^n)$, il existe (d, f) dans $A \times Ann^A(a^n)$ avec $b = da^n + f$. Donc $a^{4n} = a^{4n}da^{4n}$, et $a^{4n}d$ est idempotent, non nul puisque a n'est pas nilpotent. □

Proposition 3.23. *Pour toute clôture algébrique k finiment engendrée, l'anneau $k/J(k)$ est artinien à gauche et à droite.*

Démonstration. Montrons qu'il existe dans k un nombre fini d'idempotents e_i tel que e_ie_j soit nul pour $i < j$. Sinon, soit $e_1, e_2, \dots$ une suite infinie ; la suite $(Ann_k(e_1 + \dots + e_n))_{n \geq 1}$ décroît strictement, ce qui contredit la condition de chaîne 1.33. A s'écrit donc $Ae_1 \oplus Ann^A(e_1)$ et en itérant,

$$A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ann^A(e_1, \dots, e_{n-1})e_n \oplus Ann^A(e_1, \dots, e_n)$$

$$k = ke_1 \oplus \cdots \oplus Ann^k(e_1, \dots, e_{n-1})e_n \oplus Ann^k(e_1, \dots, e_n)$$

Mais $Ann^k(e_1, \dots, e_n)$ n'a pas d'idempotent. Il est nil, inclus dans le radical d'après [23, lemme 1.2.2], et

$$k/J(k) = (k/J(k))e_1 \oplus \cdots \oplus (k/J(k))e_n$$

Soit I un idéal à gauche de ke_1. Si I contient un idempotent non nul ae_1, alors on peut supposer que $e_1ae_1 \neq e_1$, sinon $I = ke_1$. Alors $e_1 - e_1ae_1$ et e_1ae_1 sont deux idempotents non nuls orthogonaux de Ae_1, ce qui contredit le caractère maximal de n. L'idéal I est donc nil, et $k/J(k)$ est artinien à gauche. Par symétrie, il est artinien à droite. □

Corollaire 3.24. *Pour toute clôture algébrique k finiment engendrée, $k/J(k)$ est isomorphe à un produit cartésien fini d'anneaux de matrices carrées à coefficients dans des corps.*

Chapitre 4

Groupes menus

4.1 Groupes abéliens

Fait 4.1. (Wagner [69]) *Un groupe abélien menu est la somme directe d'un groupe divisible définissable et d'un groupe d'exposant fini.*

Remarque 4.2. Le résultat n'est pas valable dans le cas mince : considérer la somme des groupes cycliques d'ordre p ; on a seulement, pour chaque entier n, tout élément est la somme d'un élément divisible par n et d'un autre d'ordre fini.

Remarque 4.3. Depuis H. Prüfer et R. Baer, on connaît la structure d'un groupe abélien divisible ou d'exposant fini : les premiers sont isomorphes à des sommes directes de copies de $\mathbf{Q}$ et de p-groupes de Prüfer où p est un entier premier. Les seconds sont des sommes directes de groupes cycliques. Voir les théorèmes 17.2 et 23.1 de [20]. Rappelons que le *p-groupe de Prüfer* est le groupe multiplicatif des nombres complexes constitué des éléments dont l'ordre est une puissance de p. On le note $\mathbf{Z}_{p^\infty}$.

Corollaire 4.4. *La conjecture de Vaught vaut pour un pur groupe abélien.*

Démonstration. Si la théorie d'un pur groupe abélien a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables, elle est menue, et chacun de ses modèles est isomorphe à

$$\Big(\bigoplus_{p \text{ premier}} \bigoplus_{n_p} \mathbf{Z}_{p^\infty} \oplus \bigoplus_{n_0} \mathbf{Q}_{n_0}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{q/n} \bigoplus_{m_q} \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}\Big)$$

Remarquons que chaque n_p est fixé par la théorie : c'est un p-ième du nombre de racines p-ièmes d'un élément de la partie divisible D. La partie d'exposant fini est isomorphe à G/D, donc n et les m_q sont fixés par la théorie. Une classe d'isomorphisme se réduit au choix de n_0, qui peut prendre toutes les valeurs de zéro à $\aleph_0$ (sauf si D est réduit à zéro). $\square$

Remarque 4.5. Plus généralement, la conjecture de Vaught est vraie pour toute théorie complète de module sur un anneau dénombrable de Dedekind (et donc en particulier pour un module sur $\mathbf{Z}$), et sur diverses classes d'anneau dénombrables [62].

4.2 Groupes nilpotents

Dans un groupe G, on définit par récurrence la suite décroissante de sous-groupes $\gamma_n G$ en posant $\gamma_0 G$ égal à G, et en définissant $\gamma_{n+1}G$ comme le sous groupe engendré par les produits $ghg^{-1}h^{-1}$, où g et h parcourent G et $\gamma_n G$. On notera $[a,b]$ le produit $ghg^{-1}h^{-1}$, et $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ celui $[a_0, [a_1, [\ldots, a_n]]]$. Le groupe G est *nilpotent* si la suite des $\gamma_n G$ est finie et aboutit au neutre. La *classe de nilpotence* de G est le plus petit n tel que $\gamma_{n+1}G$ soit le neutre. On écrira G' pour $\gamma_1 G$. On notera au contraire G^n l'ensemble des puissances énièmes de G. Suivent trois résultats sur les groupes nilpotents que l'on pourra trouver au premier chapitre de [7].

Fait 4.6. *Dans un groupe nilpotent, tout sous-groupe divisible commute avec les éléments de torsion du groupe.*

Fait 4.7. *Un groupe nilpotent G est divisible si et seulement si G/G' l'est.*

Fait 4.8. *Soit un groupe G nilpotent de classe c. Si G/G' est d'exposant n, alors G est d'exposant un entier divisant n^c.*

Dans un groupe abélien, tout groupe divisible a un supplémentaire ; voir le théorème 1 de [2]. Ça n'est pas le cas en général pour un sous-groupe divisible dans le centre d'un groupe quelconque, même si le groupe ambiant est nilpotent. Considérer par exemple le sous-groupe de $GL_3(\mathbf{C})$ constitué des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. C'est un groupe nilpotent dont le centre est divisible isomorphe à $\mathbf{C}^{\times}$. On peut toutefois affirmer :

Proposition 4.9. *Soit G un groupe, et D un sous-groupe divisible du centre. Il existe une partie A de G, distinguée, contenant toutes les puissances de ses éléments, et qui vérifie*

$$G = D \cdot A \quad \textit{et} \quad D \cap A = 1$$

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme de Zorn. Si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ est une chaîne croissante d'ensembles contenant chacun toutes les puissances de ses éléments et tels que $A_i \cap D$ soit réduit au neutre, alors $\bigcup A_i \cap D$ est encore réduit au neutre, et $\bigcup A_i$ aussi contient toutes les puissances de ses éléments. G contient donc un ensemble maximal A pour les propriétés "$D \cap A$ est réduit au neutre" et "A contient toutes ses puissances". Montrons que le produit $D \cdot A$ est G tout entier. Supposons au contraire qu'il existe un x hors du produit $D \cdot A$. Par maximalité de A, l'ensemble des puissances de x coupe D de manière non triviale : il existe un entier n supérieur à un, et un d dans D tels que x^n soit égal à d. Choisissons n minimal. D étant divisible, soit e une racine énième de d^{-1}. Posons x_1 égal à xe. On a $x_1^n = 1$, avec x_1 en dehors de $D \cdot A$. Par maximalité de A, l'ensemble des puissances de x_1 coupe D : il existe un entier $n_1 < n$, et un d_1 dans D tel que $x_1^{n_1}$ soit égal à d_1, ce qui contredit le caractère minimal de n. □

Proposition 4.10. *Soit G un groupe menu nilpotent, et D un sous-groupe divisible contenant G^n. Alors G est égal au produit $D \cdot F$ où F est un groupe d'exposant fini.*

Démonstration. Par récurrence sur la classe de nilpotence du groupe. S'il est abélien, c'est le théorème de Baer. Si c'est vrai pour tout groupe menu nilpotent de classe c, et que G est nilpotent de classe $c+1$, appelons Z le centre de G. Le quotient G/Z

est nilpotent de classe c. Le quotient $D \cdot Z/Z$ est un sous-groupe divisible de G/Z contenant $(G/Z)^n$: par hypothèse, G/Z est égal au produit $(D \cdot Z/Z) \cdot (C/Z)$ avec C/Z d'exposant fini m. Mais le centre est somme directe d'une partie divisible D_0 et d'une partie F_0 d'exposant fini l, donc C^{lm} est dans D_0. D'après la proposition précédente, D_0 a une partie supplémentaire A dans C ; mais A^{lm} est dans $D_0 \cap A$: A est d'exposant fini, et

$$G = D \cdot Z \cdot D_0 \cdot A = (D \cdot D_0) \cdot (F_0 \cdot A)$$

Remarquons que D contient D_0. Alors G s'écrit $D \cdot B$ où B est une partie d'exposant fini. Soit F le sous-groupe engendré par B. Le groupe abélien F/F' engendré par $B \cdot F'/F'$ est d'exposant fini : d'après le fait 4.8, F est aussi d'exposant fini. □

Notations. On dit d'un groupe G qu'il est la *somme centrale* de deux sous-groupes A et B, si G est égal au produit $A \cdot B$, et si l'intersection de A et B est dans le centre de G. On note alors $A * B$ ce produit.

Proposition 4.11. *Un groupe menu nilpotent est la somme centrale d'un groupe divisible définissable et d'un groupe d'exposant fini.*

Démonstration. Si le groupe est abélien, c'est [69]. Si c'est vrai pour tout groupe menu nilpotent de classe c, et si G est nilpotent de classe $c+1$, alors G/Z est la somme centrale d'un groupe divisible A/Z et d'un groupe B/Z d'exposant n. D'autre part, Z s'écrit $D_0 \oplus F_0$ où F_0 est d'exposant m. A/Z est divisible, donc $A^m \cdot D_0$ est une partie divisible ; appelons-la X. Soit D le sous-groupe engendré par X. Le groupe abélien D/D' engendré par $X \cdot D'/D'$, est divisible, donc, d'après le fait 4.7, D est divisible, égal à X. De plus, G^{mn} est dans D. La proposition précédente conclut. □

4.3 Une propriété des groupes menus

Proposition 4.12. *Un groupe infini ayant une seule classe de conjugaison non centrale, et dont le centre est d'indice infini, n'est pas mince.*

Démonstration. Remarquer que le groupe n'a pas de deuxième centre. Quitte à quotienter le groupe par son centre, on peut supposer le centre réduit au neutre. Si cette classe contient une involution, tous les éléments du groupe sont des involutions, et le groupe est abélien, une contradiction. Il y a donc un élément g non trivial qui n'est pas son propre inverse. g et g^{-1} sont dans la même classe de conjugaison, donc g^{-1} s'écrit g^h pour un certain h. Remarquer que h^2 n'est pas trivial, sinon le groupe serait d'exposant deux. Alors h^2 est un conjugué de h, disons h^k. Le groupe $C(h^k)$ contient g, donc $C(h^{k^n})$ contient $g^{k^{n-1}}$, mais pas g^{k^n}. Donc $C(C(h^{k^n}))$ contient h^{k^n}, mais pas $h^{k^{n-1}}$. Soit Γ la clôture définissable de h et k. On a

$$C(C(h)) \cap \Gamma > C(C(h^k)) \cap \Gamma > C(C(h^{k^2})) \cap \Gamma > \cdots$$

ce qui contredit la condition de chaîne mince 1.33. □

Remarque 4.13. La proposition précédente s'inspire de son analogue stable [70, théorème 1.0.3] : *"Un groupe infini ayant une seule classe de conjugaison non triviale est instable"*, qui lui même provient du cas minimal [63].

Proposition 4.14. *Un groupe mince infini non abélien possède des centralisateurs propres de taille arbitrairement grande.*

Démonstration. Supposons au contraire que tous les centralisateurs soient de taille finie et bornée. Remarquer que le groupe est d'exposant fini, sinon il aurait un centralisateur propre infini.
(1) G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison : puisque la taille des centralisateurs est bornée, on applique le corollaire 1.28. On ne perd rien à rajouter un représentant a_i de chaque classe au langage.
(2) On peut supposer les sous-groupes distingués de G triviaux : un sous-groupe distingué, c'est une réunion de classes de conjugaison ; en particulier il est d'indice fini. Il suffit de remplacer G par $H \cup \{1\}$, où H est une réunion minimale de classes de conjugaison stable par multiplication. Car si H a un sous-groupe distingué K non trivial, K est d'indice fini dans G, donc K a un sous-groupe distingué dans G d'indice fini, qui ne peut être que H.
(3) G n'est pas localement fini : un groupe d'exposant fini dont les centralisateurs sont bornés ne peut pas avoir de groupes finis de taille arbitrairement grande, parce que la taille des Sylow de ses groupes finis est bornée : un Sylow a un centre non trivial dont le centralisateur de chacun des éléments contient tout le Sylow. Qui plus est, comme le groupe est d'exposant fini, le nombre des Sylow d'un de ses sous-groupe fini est borné. Soit Γ une clôture algébrique finiment engendrée.
(4) Γ *a un nombre fini de classes de conjugaison :* tout élément x dans Γ s'écrit a_i^y, avec y algébrique sur a_i et x puisque les centralisateurs sont finis.
(5) On peut supposer les sous-groupes distingués de Γ *triviaux :* aucune sous-réunion de classes de conjugaison de G n'est stable par multiplication, donc pour toute sous-réunion X de classes de conjugaison de G (il en existe un nombre fini), il existe x, y dans X tels que $x \cdot y$ ne soit pas dans X. En rajoutant ces paramètres au langage, on s'assure qu'aucune sous-réunion de classes de conjugaison de Γ n'est stable par multiplication.
(6) Pour toute classe a^G, $Stab_\Gamma(a^G)$ est égal à Γ *:* c'est un sous-groupe distingué dont la trace sur une clôture définissable est d'indice fini.
(7) G n'a qu'une classe de conjugaison non centrale : on utilise ici un argument de Poizat [59], que l'on appellera *argument de symétrie de Poizat*. Soient a et b hors du centre. Pour tout conjugué xbx^{-1} de b sauf un ensemble de rang de Cantor sur a, b non maximal, $axbx^{-1}$ est conjugué à b. Comme une surjection à fibres finies préserve le rang de Cantor, pour tout x sauf un ensemble de petit rang, $axbx^{-1}$ est conjugué à b. De même, par symétrie, pour tout x sauf un ensemble de petit rang, $x^{-1}axb$ est conjugué à a. On peut donc trouver un x tel que $axbx^{-1}$ et $x^{-1}axb$ soient conjugués respectivement à b et a. Donc b et a sont conjugués.
(8) Contradiction finale : G est donc un groupe d'exposant fini ayant une seule classe de conjugaison non triviale : un tel groupe n'existe pas [63, 59]. En effet, comme un groupe d'exposant 2 est commutatif, il devrait être d'exposant p premier différent de 2 ; soit $x \neq 1$, x et x^{-1} seraient conjugués par un élément y d'ordre 2 modulo le centralisateur de x, ce qui lui interdit d'être d'exposant p. □

Remarque 4.15. La preuve initiale du point (3) de la proposition 4.14 utilisait le théorème de Hall-Kulatilaka-Kargopolov [22]. M. Poizat m'a fait remarquer qu'un argument de Sylow permettait de s'en passer, et que le résultat valait pour un groupe mince G.

Théorème 4.16. *Un groupe menu omega-saturé, s'il est infini, possède un sous-groupe abélien infini.*

Démonstration. S'il n'est pas abélien, il a un centralisateur propre infini. En itérant, soit on finit par tomber sur un centralisateur infini abélien, soit on obtient une chaîne infinie d'éléments commutant deux à deux. □

En invoquant Hall-Kulatilaka-Kargopolov, qui utilise Feit-Thomson, on peut dire bien plus :

Fait 4.17. (Hall-Kulatilaka-Kargopolov [22]) *Si l'on s'autorise l'axiome du choix, tout groupe infini localement fini contient un sous-groupe abélien infini.*

Théorème 4.18. *Un groupe mince infini possède un sous-groupe abélien infini.*

Démonstration. Si tous les centralisateurs sont finis, d'après Hall-Kulatilaka-Kargopolov, le groupe G n'est pas localement fini. Un sous-groupe infini finiment engendré γ se répartit en un nombre fini de classes de conjugaison (au sens de G) ; le presque stabilisateur de toutes ses classes est un sous-groupe distingué d'indice fini dans γ ; d'après l'argument de symétrie de Poizat, il est composé du neutre et d'éléments d'une seule classe C, qui est la même pour tout γ. Soit g un élément de la clôture algébrique Γ de γ ; le presque stabilisateur local de g^G est un sous-groupe normal de Γ qui contient un point de la classe C ; comme deux éléments de $C \cap \Gamma$ sont conjugués dans Γ, il contient $C \cap \Gamma$. On en déduit que le groupe de presque stabilisation de toutes les classes de conjugaison de Γ est formé de $C \cap \Gamma$ augmenté du neutre. Comme cela se produit pour tout Γ, $C \cup \{1\}$ forme un sous-groupe de G : en remplaçant G par ce dernier, on est ramené au cas où les centralisateurs sont bornés, une contradiction avec la proposition 4.14. □

Remarque 4.19. J.M. Plotkin a trouvé des groupes $\aleph_0$-catégoriques infinis sans sous-groupe définissable abélien infini [54]. On ne peut donc pas espérer trouver un sous-groupe abélien infini qui soit définissable, ni même infiniment $\emptyset$-définissable d'après la partie suivante.

Chapitre 5

Groupes et corps stables ou simples

5.1 Corps stables

Dans une théorie T, une formule $f(x, y)$ a la *propriété de l'ordre* si elle ordonne totalement un ensemble infini, i.e. s'il existe une suite $a_1, a_2, \ldots$ infinie dans un modèle de T telle que

$$f(a_i, a_j) \text{ si et seulement si } i < j$$

La formule f a la *propriété de l'ordre strict* si elle définit un ordre partiel ayant des chaînes infinies, c'est-à-dire s'il existe une suite $a_1, a_2, \ldots$ infinie dans un modèle de T telle que

$$\bigwedge_{i<j} f(a_i, a_j) \wedge a_i \neq a_j$$

Si une formule a la propriété de l'ordre strict, elle a la propriété de l'ordre.

Définition 5.1. Une théorie est *stable* si aucune formule n'y a la propriété de l'ordre. Une structure est *stable* si sa théorie l'est.

Voir [57] et [70] pour plus de détails sur les groupes stables. Rappelons seulement qu'à toute formule $f(x, y)$ d'un groupe sans propriété de l'ordre strict est associé un entier n, tel que toute chaîne strictement décroissante de sous-groupes définis respectivement par les formules $f(x, a_1), \ldots, f(x, a_m)$, ait au plus n éléments. De plus :

Fait 5.2. (Baldwin-Saxl [3, 57]) *Dans un groupe stable, à toute formule $f(x, y)$ est associé un entier n, tel que l'intersection de sous-groupes définis par les formules $f(x, a_i)$ soit l'intersection d'au plus n d'entre eux.*

Une chaîne monotone de centralisateurs d'un groupe stable est donc finie.

Proposition 5.3. *Soit G un groupe sans propriété de l'ordre strict et f un homomorphisme du groupe G dans lui-même. Si les images itérées de f sont uniformément définissables, G est égal au produit $\mathrm{Ker} f^n \cdot \mathrm{Im} f^n$ pour un certain entier n. En particulier, si f est injectif, il est surjectif.*

Démonstration. Si la chaîne des images itérées de f est uniformément définissable, elle stationne à partir d'un certain rang. □

Théorème 5.4. *Un corps stable de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre.*

Démonstration. Soit D ce corps, p sa caractéristique, et a un élément hors du centre. Appelons f_a l'application qui à un élément x du corps associe $x^a - x$.
(1) Les chaînes des images et noyaux itérés de f stationnent : dans l'anneau des morphismes additifs de D, le binôme de Newton nous donne

$$f_a^{p^n}(x) = \sum_{k=0}^{p^n} (-1)^{p^n-k} C_{p^n}^k x^{a^k} = x^{a^{p^n}} - x = f_{a^{p^n}}(x)$$

une sous-chaîne de la chaîne des images itérées est uniformément définissable : la chaîne des images itérées stationne donc par stabilité. Le même argument vaut pour la chaîne des noyaux.
(2) L'application f n'est pas surjective : sinon, posons x_0 égal à un, et choisissons inductivement un antécédent x_{n+1} de x_n. Pour tout n, x_n est dans $\mathrm{Ker}\varphi^{n+1}$ mais pas dans $\mathrm{Ker}\varphi^n$, ce qui contredit le point précédent.
(3) D est un $C(a)$-espace vectoriel de dimension finie : d'après la proposition 5.3, pour un certain entier m,

$$D = \mathrm{Ker} f^m + \mathrm{Im} f^m$$

Appelons H l'image de f^m ; quitte à augmenter m, on peut supposer le noyau de f^m égal à $C(a^m)$. Soit I une intersection minimale de translatés à gauche de H par des éléments de D, de taille n disons. Par minimalité, c'est un idéal de D. Il ne peut être D tout entier sans quoi f serait surjective. Il est donc réduit à zéro. D'après le fait [16], la dimension de $C(a^m)$ sur $C(a)$ est celle de $Z(C(a^m))(a)$ sur $Z(C(a^m))$, donc H est un $C(a)$-espace vectoriel de codimension au plus m, et I est de codimension sur $C(a)$ au plus $m.n$.
(4) En conclusion : soit une chaîne $D < D_1 < \cdots < D_n < D_{n+1}$ de centralisateurs où D_n est non commutatif minimal. D est de dimension finie, disons m, sur le corps commutatif D_{n+1}. D'après le fait [16] et la remarque 2.4, la dimension de D sur son centre est au plus m^2. □

Remarque 5.5. Le centre d'un corps stable infini de caractéristique positive est infini. D'après [64], il contient la clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$; en particulier, tout élément d'ordre fini est dans le centre.

Remarque 5.6. Un corps superstable [9], ou même supersimple [53] est commutatif.

5.2 Généralités sur les structures simples

Les résultats énoncés ci-dessous se trouvent dans le livre de F. Wagner [73]. Un type partiel $\pi(x, a)$ se *divise* au-dessus d'un ensemble B s'il existe une suite B-indiscernable $(a_i)_{i\in I}$ ayant le type de a sur B telle que la conjonction des $\pi(x, a_i)$ soit inconsistante. Puisque la suite $(a_i)_{i\in I}$ est indiscernable, par compacité, si la conjonction des $\pi(x, a_i)$ est inconsistante, elle est k-inconsistante pour un certain entier k. On dit alors que $\pi(x, a)$ se *k-divise* au-dessus de B. Pour toute formule φ, tout entier k, et tout type partiel π, on définit le *rang local* de π, noté $D(\pi, \varphi, k)$, par l'induction suivante :

> $D(\pi, \varphi, k)$ est au moins zéro si π est consistant.
>
> $D(\pi, \varphi, k)$ est au moins $n+1$ s'il existe un b tel que $D(\pi \wedge \varphi(x, b), \varphi, k)$ vaille au moins n et $\varphi(x, b)$ se k-divise au-dessus du domaine de π.

Définition 5.7. *(Shelah) Une structure est* simple *si ses rangs locaux $D(., \varphi, k)$ sont finis pour toute formule φ et tout entier k.*

On note $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_C B$ si pour tout uplet a de A, toute formule φ et tout entier k, le rang $D(a/BC, \varphi, k)$ est égal à $D(a/C, \varphi, k)$. Dans une théorie simple, la relation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ est symétrique et transitive, c'est-à-dire que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_C BD$ si et seulement si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_C B$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{CB} D$.

Fait 5.8. *Dans une théorie simple, aucune formule n'a la propriété de l'ordre strict.*

Si G est un groupe dont la théorie est simple, on définit le *rang stratifié* $D_G(\pi, \varphi, k)$ du type partiel π en posant $D_G(\pi, \varphi, k)$ égal à $D(\pi, \varphi(y_1 x, y_2), k)$. On dit d'un élément g de G qu'il est *générique* sur A si pour tout $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A g$ dans G, on a $hg \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} A, h$. On peut montrer que G possède des types génériques, qui sont précisément les types dont tous les rangs stratifiés sont maximaux. Deux sous-groupes d'un groupe donné sont *commensurables* si leur intersection est d'indice fini dans chacun d'entre eux.

Fait 5.9. (Schlichting [65, 73]) *Soit G un groupe et $\mathcal{H}$ une famille de sous-groupes uniformément commensurables. Il existe un sous-groupe N de G commensurable à des membres de $\mathcal{H}$, et invariant sous l'action du groupe des automorphismes de G laissant la famille $\mathcal{H}$ globalement invariante. Si les membres de $\mathcal{H}$ sont définissables, N l'est aussi.*

Fait 5.10. (Wagner [73]) *Dans un groupe simple, une chaîne décroissante d'intersections de sous-groupes uniformément définissables stationne à indice fini près.*

Remarque 5.11. Si $D_1 < D_2$ sont deux corps infinis, l'indice de D_1^+ dans D_2^+ est infini. En particulier, dans un corps simple, toute chaîne décroissante de centralisateurs stationne. Qui plus est, pour toute partie A de D, $C(C(C(A)))$ est égal à $C(A)$; toute chaîne croissante de centralisateurs stationne également.

5.3 Corps simples

Théorème 5.12. *Un corps simple de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre.*

Démonstration. Soit D ce corps, p sa caractéristique, et a un élément hors du centre. Appelons f l'application qui à un élément x du corps associe $x^a - x$.
(1) Les chaînes des itérés des noyaux et images de f stationnent, et f n'est pas surjective : comme dans le cas stable.
(2) Le centralisateur de a est infini : on peut supposer l'ordre de a fini, et même premier égal à q. D'après le fait 2.2, il existe un x d'ordre infini tel que xax^{-1} soit égal à a^i et différent de a. Mais a et a^i ont même ordre q. Le petit théorème de

Fermat affirme que i^{q-1} est congru à un modulo q, donc x^{q-1} et a commutent : $C(a)$ contient x^{q-1}.
(3) D est un $C(a)$-espace vectoriel de dimension finie : d'après la proposition 5.3, on a

$$D = \mathrm{Ker} f^m + \mathrm{Im} f^m$$

Appelons H l'image de f^m, et supposons son noyau égal à $C(a^m)$. Soit N une intersection minimale à indice fini près de translatés à gauche de H par des éléments de D, de taille n disons. Appelons $\mathcal{H}$ l'ensemble des translatés à gauche de N par des éléments de $D^\times$. D'après le fait 5.9, il existe un sous-groupe I de K^+, commensurable à N, et invariant par multiplication à gauche. I est donc un idéal à gauche de D. Si I est D tout entier, alors l'image de f est d'indice fini dans D ; or c'est un $C(a)$-espace vectoriel. Puisque $C(a)$ est infini, f est surjective. I est donc réduit à zéro, et N est fini. Etant un $C(a)$-espace vectoriel à droite, N est nul. On en déduit comme pour le cas stable que D est de dimension finie sur $C(a)$, puis sur son centre. □

Proposition 5.13. *Soit K un corps commutatif dont f soit un morphisme de corps. Soit F le fixateur de f et P un polynôme scindé à coefficients dans F dont les itérés $P(f)^n$ soient uniformément définissables. Si K est simple, soit K est une extension algébrique de F, soit l'image de $P(f)$ est d'indice fini dans K^+.*

Démonstration. On peut supposer le corps K infini. Puisque P est scindé sur K, il s'écrit $\prod(X - a_i)^i$. Remarquons que $\mathrm{Ker} P(f)$ est égal à la somme $\bigoplus_i \mathrm{Ker}(f - a_i id)^i$ et que chacun des $\mathrm{Ker}(f - a_i id)^i$ est de dimension au plus i sur F. On pose g égal à $P(f)$ et on note N son noyau : N est de F-dimension finie. D'après la proposition 5.3, K est la somme $\mathrm{Ker} g^m + \mathrm{Im} g^m$. On appelle H' l'image de g^m. Soit H une intersection minimale à indice fini près de n translatés à gauche de H' par des éléments de K. Remarquons que si H est fini, il existe une intersection minimale tout court, qui est un idéal de K, donc H est nul. Appelons $\mathcal{H}$ l'ensemble des translatés à gauche de H par des éléments de $K^\times$. D'après le fait 5.9, il existe un sous-groupe I de K^+, commensurable à H, et invariant par multiplication à gauche : I est un idéal de K. Si I est K tout entier, l'image de g est d'indice fini dans K^+ ; pour peu que F soit infini, g est surjective. Si au contraire I est réduit à zéro, H est fini, et nul. Mais N est un F-espace vectoriel de dimension finie r, H' est de F-codimension r et H de F-codimension au plus $r.n$. □

5.4 Groupes simples

Dans une théorie T, une formule $f(x, y)$ a la *propriété d'indépendance* s'il existe des suites $(b_i)_{i<\omega}$ et $(a_I)_{I\subset\omega}$ dans un modèle de T telles que la formule $f(a_I, a_i)$ soit satisfaite si et seulement si l'indice i appartient à l'ensemble I.

Définition 5.14. *(Shelah)* Une théorie est dite *dépendante* si aucune formule n'y a la propriété d'indépendance. Une structure est *dépendante* si sa théorie l'est.

Dans un groupe dépendant, toute partie dont les éléments commutent deux à deux est contenue dans un groupe définissable [66], par conséquent :

Corollaire 5.15. *Un groupe infini dont la théorie est dépendante et menue contient un sous-groupe définissable abélien infini.*

Proposition 5.16. *Dans un groupe simple, une partie dont les éléments commutent deux à deux est contenu dans un groupe définissable fini-par-abélien.*

Démonstration. Soit G ce groupe simple, et A cette partie abélienne. On ne perd rien à supposer que A est un groupe infini. Soit H une intersection minimale à indice fini près de centralisateurs d'éléments de A. Dans H, tout élément de A a un centralisateur d'indice fini, et H contient A. Considérons $Z^*(H)$ l'ensemble des éléments de H dont le centralisateur dans H est d'indice fini dans H : c'est un sous-groupe de G qui contient A. Remarquons que d'après [73, lemme 4.1.15], un sous-groupe définissable B de G est d'indice fini dans G si et seulement si $D_G(B, \varphi, k) = D_G(G, \varphi, k)$ pour toute formule φ et tout entier k. On a donc l'égalité

$$Z^*(H) = \{h \in H : D_G(C_H(h), \varphi, k) \geq D_G(H, \varphi, k), \varphi \text{ formule}, k \text{ entier}\}$$

D'autre part, pour tout type partiel $\pi(x, A)$, la phrase "$D_G(\pi(x, A), \varphi, k) \geq n$" est une condition infiniment définissable en A d'après [73, remarque 4.1.5], donc $Z^*(H)$ est infiniment définissable. Puisque tous ses centralisateurs sont d'indice fini, le groupe $Z^*(H)$ est un groupe dont toutes les classes de conjugaison sont finies. Par compacité, les indices des centralisateurs dans H de tout élément de $Z^*(H)$ sont uniformément finis. En particulier, $Z^*(H)$ est définissable. Rappelons

Fait 5.17. (Neumann [48, théorème 3.1]) *Les classes de conjugaison d'un groupe G sont de taille bornée par un entier si et seulement si le groupe dérivé G' est fini.*

Le groupe dérivé de $Z^*(H)$ est donc fini. □

Corollaire 5.18. *Un groupe infini dont la théorie est simple et menue contient un sous-groupe fini-par-abélien définissable infini.*

Remarque 5.19. Le résultat est optimal puisqu'il existe des groupes dont la théorie est simple et omega-catégorique, sans sous-groupes abéliens définissables infinis. Par exemple les groupes infinis extraspéciaux d'exposant p sont omega-catégoriques [19], supersimples de rang SU égal à un, puisqu'ils sont interprétables dans un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension infinie, muni d'une forme bilinéaire dégénérée antisymétrique. Ils n'ont pas de sous-groupes abéliens infinis définissables d'après [54].

Comme le fait remarquer R. de Aldama dans sa thèse [1] à propos d'un groupe dépendant, ce qui est vrai pour une partie abélienne l'est aussi pour une partie nilpotente. Dans le cas simple, on a le résultat suivant :

Définition 5.20. Un groupe G est *presque résoluble de classe n* s'il existe une suite décroissante de sous-groupes G_i telle que $G_0 = G \trianglerighteq G' \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G'_1 \cdots \trianglerighteq G'_n \trianglerighteq G_{n+1} = \{1\}$ et tel que les indices $[G'_i : G_{i+1}]$ soient finis pour tout i.

Un groupe presque résoluble de classe zéro est un groupe fini-par-abélien.

Corollaire 5.21. *Dans un groupe dont la théorie est simple, soit n un entier, et A un groupe résoluble de classe n. Alors, A est contenu dans un groupe définissable presque résoluble de classe n.*

Démonstration. Par récurrence sur l'entier n, montrons qu'il existe un groupe définissable N contenant A, et presque résoluble de classe n. Nous l'avons montré si n est égal à zéro. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Par hypothèse de récurrence,

A' est contenu dans un groupe définissable H presque résoluble de classe $n-1$. Soit I une intersection de conjugués de H par des éléments de A, minimale à indice fini près. Appelons $\mathfrak{H}$ l'ensemble des conjugués de I par des éléments de A. D'après le fait 5.9, il existe un groupe N commensurable à I qui soit invariant par conjugaison par des éléments de A. Le groupe N est une extension finie d'une intersection finie M d'éléments de $\mathfrak{H}$. Le groupe N contient donc A' ; c'est une extension finie d'un groupe presque résoluble de classe $n-1$. Le groupe NA/N est abélien, donc d'après la proposition précédente, il existe un groupe définissable M tel que

$$NA/N \leq M/N \leq N_G(N)/N$$

où M'/N est fini. Le groupe M est donc presque résoluble de classe n. □

Question 5.22. On peut dire d'un groupe G qu'il est *presque nilpotent de classe* n s'il existe une suite décroissante de sous-groupes G_i telle que $G_0 = G \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \cdots \trianglerighteq G_{n+1} = \{1\}$ et tel que les indices $[[G, G_i] : G_{i+1}]$ soient finis pour tout i. Une partie nilpotente d'un groupe dont la théorie est simple est-elle contenue dans un groupe définissable presque nilpotent ?

Deuxième partie

Groupes, corps et choses infiniment définissables dans les structures menues

Chapitre 6

Groupes, corps et relations d'équivalence

6.1 Ensembles et relations

Définition 6.1. Soient une structure M et un ordinal α. Un sous-ensemble X de M^α est *infiniment A-définissable* s'il est défini par un type partiel à paramètres dans A. On appelle α l'*arité* de X.

Une relation n-aire R est *infiniment A-définissable* si les n-uplets en relation via R forment un ensemble infiniment A-définissable. Une fonction est *infiniment A-définissable* si son graphe l'est. Un groupe est *infiniment A-définissable* si son domaine et sa loi le sont. Plus généralement, une structure est *infiniment A-définissable* si son domaine ainsi que ses relations et fonctions le sont.

Proposition 6.2. *Un groupe infiniment définissable G est l'intersection de groupes infiniment définissables G_i d'arité dénombrable, dont les lois sont l'intersection dénombrable de lois définissables, et telle que le graphe de la loi de G soit l'intersection des graphes des lois des G_i.*

Démonstration. Comme le fait remarquer B. Poizat à la page 170 de [57], si $F(x, y)$ est le graphe d'une application f infiniment définissable entre deux ensembles infiniment définissables A et B, alors $F(x, y) \wedge F(x, y') \vdash y = y'$. Si on note y_n le n-uplet formé des n premières coordonnées de y, alors le type $F(x, y) \wedge F(x, y') \wedge y_n \neq y'_n$ est inconsistant ; pour tout n, il existe donc une fonction f_n définissable telle que le graphe de f soit l'intersection des graphes des f_n. En particulier, si B est d'arité finie, f est la trace sur A d'une fonction définissable. Soit G un groupe infiniment définissable, de type partiel $\bigwedge \varphi_i$ que l'on ne perd rien à supposer clos par conjonctions finies. Soit α l'arité de G. Le graphe de la loi de groupe qui a deux éléments x et y associe leur produit z est définie par un type partiel $f(x, y, z)$.
Par compacité, pour toute partie finie I_0 de α, et toute formule φ_{i_0} dont les variables libres comprennent x_{I_0}, il existe une partie finie I_1 de α dont on peut supposer qu'elle contient I_0, et une fonction f_0 définissable et associative de $\varphi_{i_1}^2$ dans φ_{i_0}. Quitte à rajouter des variables superflues, on peut supposer l'arité des trois variables identiques ; par compacité, tout élément de φ_{i_1} a un inverse pour la restriction du neutre aux variables utilisées dans φ_{i_0}, et on peut supposer que cet inverse reste dans φ_{i_1} quitte à considérer $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_1}^{-1}$. En itérant, on voit que G est l'intersection

de groupes G_n de la forme $\bigwedge_i \varphi_{n,i}(x)$ et de loi de groupe f_n (intersection de lois définissables $f_{n,i}$), où pour tout i, n, la loi $f_{n,i}$ est associative sur $\varphi_{n,i+1}$, $\varphi_{n,i+1}$ est stable par passage à l'inverse pour $f_{n,i}$, et $\varphi_{n,i+1}(x) \wedge \varphi_{n,i+1}(y) \vdash \varphi_i(f_{n,i}(x,y))$. □

Remarque 6.3. En suivant la terminologie de [49], on appellera une telle conjonction un groupe sous *forme normale*.

Remarque 6.4. Si l'arité de G est finie, on peut supposer la loi de groupe définissable.

Définition 6.5. Une structure (un groupe, un anneau un préordre etc.) infiniment définissable est *enveloppée*, si elle est la conjonction d'ensembles définissables ayant la même structure (de groupe, anneau, préordre etc.)

6.2 Groupes

A ce jour, le résultat principal concernant les structures menues infiniment définissables est dû à Pillay et Poizat [51] et porte sur les relations d'équivalences. Il est redémontré élégamment et complété par Kim [35].

Fait 6.6. (Kim-Pillay-Poizat [51, 35]) *Dans une structure menue M, toute relation d'équivalence infiniment définissable sans paramètres sur M est équivalente à une conjonction de relations d'équivalence définissables.*

Remarque 6.7. C'est faux pour une relation d'équivalence infiniment définissable sur une puissance cartésienne infinie de M, même dans une théorie $\aleph_0$-catégorique : prendre dans la théorie des ordres denses la relation E en omega variables indicées par $\mathbf{Q}$ disant que x et y sont en relation si $x_i < y_j$ et $y_i < x_j$ pour $i < j$.

Dans [73], Wagner déduit du fait 6.6 qu'un groupe infiniment $\emptyset$-définissable contenu dans un groupe menu définissable est l'intersection de groupes définissables [73, corollaire 6.1.12], et pose le problème de savoir si un groupe infiniment $\emptyset$-définissable dans une structure menue satisfait à la même conclusion [73, problème 6.1.14].

Proposition 6.8. *Soit un groupe G infiniment définissable sans paramètres d'arité finie dans une structure menue, et Y un ensemble définissable le contenant. G est contenu dans un groupe définissable inclus dans Y.*

Démonstration. Soit X_i une suite d'ensembles définissables dont l'intersection est une forme normale de G. On ne perd rien à supposer X_0 inclus dans Y. On considère la relation d'équivalence infiniment définissable E sur X_0 disant que x et y sont en relation si et seulement si xy^{-1} appartient à G. D'après le fait 6.6, E est la conjonction de relations définissables E_i. Un élément g appartient à G si et seulement si $1Eg$; par compacité, il existe un j tel que l'ensemble $\{x \in X_0 : xE_j1\}$ soit inclus dans X_1. Appelons J l'ensemble $\{x \in X_1 : xE_j1\}$: il est stabilisé à gauche par G. En effet, si g est dans G et si yE_j1, g est égal à gyy^{-1} et gy appartient à X_0, donc $gyEy$, et gyE_j1. Le stabilisateur à gauche H de J dans J est stable par multiplication : le groupe $H \cap H^{-1}$ contient G. □

Nous sommes maintenant en mesure de répondre au problème 6.1.14 de [73].

Corollaire 6.9. *Un groupe G infiniment définissable sans paramètres d'arité finie dans une structure menue est une intersection de groupes définissables.*

Démonstration. Mettons que G soit l'intersection des ensembles Y_i. D'après la proposition précédente, chaque Y_i contient un groupe définissable H_i enveloppant le groupe G, lequel est donc l'intersection des H_i. $\square$

Remarque 6.10. Une structure qui enveloppe toutes les relations d'équivalence enveloppe tous les groupes. La réciproque est fausse puisqu'en général, une théorie superstable n'élimine pas globalement les hyperimaginaires : voir l'exemple 2 p. 401 de [51]. Toutefois, elle est presque vraie, à la notion d'inverse près, comme nous le verrons au théorème 7.19.

On dira qu'un groupe G *agit sur un ensemble* $\mathcal{X}$ *de manière infiniment* A*-définissable* si G et $\mathcal{X}$ sont tous deux infiniment A-définissables, et s'il existe une action du groupe G sur $\mathcal{X}$ qui soit infiniment A-définissable.

Proposition 6.11. *Dans une structure menue, soit G un groupe agissant sur un ensemble $\mathcal{X}$ de manière infiniment définissable sans paramètres. Soit $\mathcal{Y}$ un ensemble définissable contenant $\mathcal{X}$. Si l'arité de $\mathcal{X}$ est finie, l'ensemble $\mathcal{X}$ est contenu dans un ensemble définissable inclus dans $\mathcal{Y}$, sur lequel agit G.*

Démonstration. D'après la proposition 6.2, on peut supposer le graphe de l'action définissable. Par compacité, il existe un ensemble définissable $\mathcal{X}_0$ contenant $\mathcal{X}$ tel que pour tout (g, g', x) dans $G \times G \times \mathcal{X}_0$, le produit $(gg') \cdot x$ soit égal à $g \cdot (g' \cdot x)$ et $1_G \cdot x$ à x. Quitte à considérer $\mathcal{X}_0 \cap \mathcal{Y}$ à la place de $\mathcal{Y}$, on peut supposer $\mathcal{X}_0$ dans $\mathcal{Y}$. Toujours par compacité, il existe un ensemble définissable $\mathcal{X}_1$ dans $\mathcal{X}_0$, contenant $\mathcal{X}$, tel que $G \cdot \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_0$. Soit $\mathcal{X}_i$ la suite d'ensembles dont $\mathcal{X}$ est l'intersection. On définit la relation d'équivalence infiniment définissable E sur $\mathcal{X}_0$ par

$$xEy \iff \exists g \in G \ (g \cdot x = y)$$

D'après le fait 6.6, E est l'intersection de relations d'équivalence E_i. Remarquons que x appartient à $\mathcal{X}$ si et seulement s'il existe un a de $\mathcal{X}$ tel que aEx. Par compacité, il existe un indice i tel que $\{x : \exists a \in \mathcal{X}_i,\ aE_ix\} \subset \mathcal{X}_1$. Montrons que G agit sur $\{x : \exists a \in \mathcal{X}_i,\ aE_ix\}$: soient g dans G et x dans $\{x : \exists a \in \mathcal{X}_i,\ aE_ix\}$; le produit $g \cdot x$ est dans $\mathcal{X}_0$ donc $xEg \cdot x$, d'où $xE_ig \cdot x$ et $aE_ig \cdot x$ par transitivité. $\square$

Remarque 6.12. L'intérêt de cette proposition est que l'arité du groupe G est infinie.

Corollaire 6.13. *Dans une structure menue, soit G un groupe agissant sur un ensemble $\mathcal{X}$ de manière infiniment définissable sans paramètres. Si l'arité de $\mathcal{X}$ est finie, il existe une famille d'ensembles définissables dont $\mathcal{X}$ soit l'intersection, et sur chacun desquels agisse G.*

Démonstration. Soit $\mathcal{Y}_i$ la suite d'ensembles dont $\mathcal{X}$ est l'intersection. D'après la proposition précédente, chaque $\mathcal{Y}_i$ contient un ensemble définissable $\mathcal{X}_i$ enveloppant $\mathcal{X}$, sur lequel G agit. $\mathcal{X}$ est donc l'intersection des $\mathcal{X}_i$. $\square$

Remarque 6.14. Le résultat demeure si l'ensemble $\mathcal{X}$ est définissable avec paramètre dans un ensemble A quelconque puisque la relation E utilisée ne fait intervenir que les paramètres définissant le groupe G. Ainsi, si G_A est infiniment définissable avec paramètres dans A, et si H est un sous-groupe de G_A infiniment définissable sans paramètres, il existe un sur-ensemble définissable X de G_A stable par multiplication par H.

Théorème 6.15. *Dans une structure menue, un groupe infiniment définissable est l'intersection de demi-groupes définissables dont l'intersection des lois donne la loi du groupe.*

Démonstration. Soit M la structure menue ambiante et G ce groupe. On ne perd rien à supposer que sa forme normale est l'intersection d'ensembles dénombrables X_i. Soit E_n la relation d'équivalence définissable "avoir les mêmes n premières coordonnées". Sur X_0, on pose

$$xR_ny \iff \exists g, h \in G \ (g \cdot xE_nh \cdot y)$$

Remarquez que x appartient à G si et seulement si xR_n1 pour tout n : par compacité il existe un entier n tel que $R_n1 \subset X_1$. Alors R_n1 est stable par multiplication par G à gauche. Comme il est défini par un type qui ne contraint qu'un nombre fini de variables, d'après la remarque 6.4, une restriction d'arité finie du type R_n1 est stable par multiplication à gauche par G. D'après la proposition précédente, il existe un ensemble définissable S_0 inclus dans X_1 stable par multiplication par G. Soit S l'ensemble $S_0 \times M^\omega$; l'ensemble $\{x \in X_1 : x \cdot S \subset S\}$ est un groupe définissable contenant G. □

6.3 Corps

Dorénavant, les structures infiniment définissables considérées seront d'arité finie. Un corps *infiniment A-définissable*, c'est un corps dont le domaine et les deux lois sont infiniment A-définissables. Puisque les arités sont finies, on ne perd rien à supposer les lois définissables. Les corps infiniment définissables n'ont rien à envier aux groupes :

Proposition 6.16. *Dans une structure menue, soit K un corps commutatif infiniment définissable sans paramètres, et Y un ensemble définissable contenant K. Le corps K est contenu dans un corps définissable inclus dans Y.*

Démonstration. Par compacité, il existe un ensemble définissable X contenant le corps K tel que l'addition et la multiplication y soient associatives et tel que la multiplication soit distributive sur l'addition. Quitte à remplacer X par $X \cap Y$, on peut supposer X inclus dans Y. Posons 0^{-1} égal à 0. Quitte à considérer $X \cap -X \cap X^{-1} \cap -X^{-1}$ à la place de X, on peut supposer X égal à $-X$ et X^{-1}. En particulier, X est une partie intègre. D'après la proposition précédente, il existe un groupe additif H dans X enveloppant K^+. De même, H contient un groupe multiplicatif G enveloppant $K^\times$. Définissons $\mathcal{H}$ l'ensemble $\{h \in H : Gh \leq H\}$. C'est un sous-groupe additif de H stable par multiplication par G à gauche. Soit L l'ensemble $\{h \in H : h\mathcal{H} \leq \mathcal{H}\}$. C'est un anneau intègre contenant G. Si la multiplication est commutative, le produit $L \cdot L^{-1}$ est un corps, contenant G, et donc K. □

Remarque 6.17. Dans une structure qui enveloppe tous les groupes infiniment définissables, un corps, même gauche, infiniment définissable est contenu dans un anneau définissable intègre.

Corollaire 6.18. *Dans une structure menue, un corps infiniment définissable sans paramètres est l'intersection de corps définissables.*

Démonstration. Ce corps K est l'intersection d'ensembles Y_i. D'après la proposition précédente, chaque Y_i contient un anneau intègre K_i définissable, qui est un corps enveloppant K, donc K est l'intersection des K_i. □

Des corollaires 2.9 et 2.28, on déduit :

Corollaire 6.19. *Dans une structure menue, un corps infiniment définissable sans paramètres est fini ou algébriquement clos.*

Corollaire 6.20. *Dans une structure menue, un corps de caractéristique positive, infiniment définissable sans paramètres est commutatif.*

Chapitre 7

Demi-groupes, anneaux et préordres

7.1 Demi-groupes

On appelle *préordre* une relation binaire sur un ensemble qui est réflexive et transitive.

Proposition 7.1. *Soit M une structure menue et $\leq$ un préordre sur M infiniment définissable sans paramètres. S'il est plus grossier que l'égalité entre types, $\leq$ est l'intersection de préordres définissables.*

Démonstration. $\leq$ induit un préordre fermé $\lesssim$ sur les 1-types, défini par

$$tp(a) \lesssim tp(b) \iff a \leq b$$

D'après la proposition 9.20 $\lesssim$ est l'intersection de préordres ouverts fermés. $\square$

Remarque 7.2. En suivant la preuve de [35] pour les relations d'équivalence, on en déduit que, restreint à un type complet p, un préordre infiniment $\emptyset$-définissable sur une structure menue est la trace sur p d'une intersection de préordres définissables. Le corollaire 7.16 est plus fort.

On appelle *demi-groupe*[1] un ensemble muni d'une loi de composition interne associative. Un demi-groupe n'est donc pas nécessairement unifère. Un demi-groupe est *infiniment A-définissable* si son domaine et sa loi de composition interne le sont.

Proposition 7.3. *Dans une structure menue, soit un demi-groupe M infiniment définissable sans paramètres, et Y un ensemble définissable le contenant. M est contenu dans un demi-groupe définissable N inclus dans Y.*

Démonstration. Quitte à rajouter une constante notée 1 au demi-groupe M et l'ensemble $\{(1, x, x) : x \in M \cup 1\} \cup \{(x, 1, x) : x \in M \cup 1\}$ au graphe de la loi de composition interne, ce qui ne modifie pas le fait que M soit infiniment définissable, on peut supposer M unifère. On peut également rajouter 1 au langage, ce qui ne modifie pas le caractère menu de la théorie. Par compacité, il existe un ensemble

[1] Nous choisissons d'adopter la terminologie qui semble la plus communément admise aujourd'hui, bien que Bourbaki utilise le terme monoïde.

définissable X contenant M, tel que la loi de M soit associative sur X. On peut supposer X inclus dans Y. On définit le préordre infiniment définissable R sur X par

$$xRy \iff \exists z \models tp(y)\ (x \in Mz)$$

Remarquons que si x et y ont même type, x et y sont en relation par R, donc d'après la proposition précédente, il existe des préordres R_i dont R soit l'intersection. On peut vérifier que $m \in M$ si et seulement si $mR1$: par compacité, il existe un j tel que $R_j 1 \subset X$. L'ensemble $\{x \in X : xR_j 1\}$ est stabilisé à gauche par M : appelons-le J ; si m est dans M et $yR_j 1$, alors $my \in My$, donc $myRy$, et $myR_j 1$ par transitivité. Appelons N le stabilisateur à gauche de J dans X et montrons qu'il est stable par multiplication. Soient a et b dans N ; pour tout y vérifiant $yR_j 1$, on a $byR_j 1$ et donc $abyR_j 1$. En particulier pour y égal à un, $abR_j 1$ donc ab appartient à X. Alors N est un demi-groupe contenant M. $\square$

Corollaire 7.4. *Dans une structure menue, un demi-groupe infiniment définissable sans paramètres est l'intersection de demi-groupes définissables.*

Remarque 7.5. Comme pour les groupes, on peut définir l'action d'un demi-groupe sur un ensemble, se dispenser de l'hypothèse d'arité finie, et avoir un analogue du théorème 6.15.

Remarque 7.6. Dans une structure ω-stable, un demi-groupe infiniment définissable avec paramètres dans un ensemble A quelconque est l'intersection de demi-groupes définissables.

7.2 Anneaux

Proposition 7.7. *Dans une structure menue, soit un anneau R infiniment définissable sans paramètres, et Y définissable contenant R. L'anneau R est enveloppé par un anneau définissable inclus dans Y.*

Démonstration. Par compacité, il existe un ensemble définissable X contenant l'anneau tel que les deux lois y soient associatives et tel que la multiplication soit distributive sur l'addition. Quitte à remplacer X par $X \cap Y$, on peut supposer X dans Y. Quitte à considérer $X \cap -X$, on peut supposer que X égal à $-X$. D'après la proposition précédente, il existe un groupe additif H dans X enveloppant R^+. De même, H contient un demi-groupe multiplicatif M enveloppant $R^\times$. Définissons $\mathcal{H}$ l'ensemble $\{h \in H : Mh \subset H\}$: c'est un sous-groupe additif stable par multiplication par M à gauche. L'ensemble $\{h \in H : h\mathcal{H} \leq \mathcal{H}\}$ est un anneau contenant M et donc R. $\square$

Corollaire 7.8. *Dans une structure menue, un anneau infiniment définissable sans paramètres est l'intersection d'anneaux définissables.*

Remarque 7.9. Si une structure enveloppe les demi-groupes, elle enveloppe aussi les anneaux.

7.3 Structures algébriques

Définition 7.10. On appelle *structure algébrique* un ensemble muni de n lois de composition interne vérifiant un ensemble de formules dans un langage contenant ces lois.

Une structure algébrique est *infiniment A-définissable* si son domaine et ses lois le sont.

Proposition 7.11. *Soit $(A, \cdot_1, ..., \cdot_n, \Phi)$ une structure algébrique infiniment définissable dans une théorie menue, et Y un ensemble définissable contenant A. Si Φ est fini et contient les énoncés "$\cdot_i$ est associative" et "$\cdot_i$ est distributive sur $\cdot_j$" pour tout $j < i$, alors il existe une structure algébrique $(B, \cdot_1, ..., \cdot_n, \Phi)$ définissable, avec $A \subset B \subset Y$.*

Démonstration. Par compacité, il existe un ensemble définissable X défini par une formule φ contenant A tel que $\varphi \vdash \Phi$. Quitte à remplacer X par $X \cap Y$, on peut supposer $X \subset Y$, et Φ égal aux seuls énoncés mentionnés ci-dessus. Procédons par récurrence sur le nombre n de lois. Pour n égal à un, $(A, \cdot_1, \Phi)$ est un demi-groupe ; c'est la proposition 7.3. Supposons démontrées les étapes 1 à $n-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une structure algébrique $(C, \cdot_1, ..., \cdot_{n-1}, \Phi)$ définissable avec $A \subset C \subset Y$; il existe une structure algébrique $(D, \cdot_n, \Phi)$ avec $A \subset D \subset C$. Posons H égal à $\{c \in C : D \cdot_n c \subset C\}$. La structure $(H, \cdot_1, ..., \cdot_{n-1}, \Phi)$ est algébrique, et $D \cdot_n H \subset H$. Soit B l'ensemble $\{h \in H : h \cdot_n H \subset H\}$. La structure définissable $(B, \cdot_1, ..., \cdot_n, \Phi)$ est algébrique, et contient A. □

Remarque 7.12. On ne risque pas de pouvoir se priver totalement de l'associativité des lois, qui assure la transitivité de la relation R dans la proposition 7.3. On peut cependant l'affaiblir, et se satisfaire de l'énoncé $(x_1 \cdot (x_2 \cdot (...(x_{n-1} \cdot x_n)...))) = f(x_1, ..., x_{n-1}) \cdot x_n$ pour un certain n, où f est une fonction surjective (pour assurer que $m \in M$ si et seulement si $mR1$) de M^{n-1} sur M. Au lieu de la relation $x \in M \cdot z$ de la proposition 7.3, on considèrera plutôt son itérée n fois, qui est bien transitive. On peut également remplacer l'hypothèse de distributivité par $x \cdot_{i+1} (y \cdot_i z) = f(x \cdot_{i+1} y, x \cdot_{i+1} z)$ où f est une composée des lois $(\cdot_j)_{j \le i}$.

Corollaire 7.13. *Un treillis distributif infiniment définissable dans une théorie menue est intersection de treillis définissables.*

Démonstration. Un treillis est une structure algébrique $(E, \wedge, \vee, \Phi)$ dans le langage $\{\vee, \wedge, =\}$ avec

$$\Phi = \Phi' \cup \{x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x, x \vee x = x, x \wedge x = x, x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y)\}$$

$$\Phi' = \{x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z\}$$

□

7.4 Catégories et groupoïdes

A la lumière des analogies que l'on a mises en évidence entre demi-groupe et préorde d'une part, groupe et relation d'équivalence d'autre part, il semble judicieux d'introduire les notions de catégorie et de groupoïde.

Définition 7.14. Une *catégorie* est une structure à deux sortes, les objets O, et les morphismes M, munie d'applications i_0 et i_1 allant de M dans O (le morphisme m de M allant de $i_0(m)$ vers $i_1(m)$), d'une loi de composition partielle associative $\circ$ de $M \times_{i_0,i_1} M$ dans M ($m \circ n$ est définie si $i_0(m)$ est égal à $i_1(n)$), et d'une application identité Id de O dans M (telle que $Id(x)$ soit le morphisme identité de x dans x).

Sur les objets d'une catégorie $\mathcal{C}$, on peut définir un préordre en posant $a \leq_{\mathcal{C}} b$ s'il y a un morphisme de a dans b, ainsi que des demi-groupes M_a formés des morphismes de a dans a pour tout objet a. Réciproquement, un préordre $\leq$ est une catégorie dont les demi-groupes sont triviaux, dont chaque morphisme est donné par un couple $a \leq b$; un demi-groupe est une catégorie ayant un seul objet et des morphismes donnés par les multiplications à gauche par un élément donné. Ainsi la notion de catégorie généralise à la fois celles de préordre et de demi-groupe.
Une catégorie est *infiniment A-définissable* si l'ensemble de ses objets, celui de ses morphismes, de même que les applications $\circ$, i_1, i_2, et Id le sont. Remarquons que si une catégorie $\mathcal{C}$ est infiniment définissable, le préordre associé $\leq_{\mathcal{C}}$ et les demi-groupes M_a le sont également.

Proposition 7.15. *Dans une structure menue, une catégorie infiniment définissable sans paramètres est l'intersection de catégories définissables si l'ensemble de ses objets est d'arité finie.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ cette catégorie, O ses objets et M ses morphismes. M a une structure de demi-groupe partiel, que l'on peut étendre à M tout entier : soit o un nouvel objet et 0 un nouveau morphisme de o dans o ; on pose $\overline{O}$ égal à O augmenté de o, et $\overline{M}$ égal à M augmenté de 0. On prolonge i_0, i_1 et $\circ$ en $\bar{i}_0$, $\bar{i}_1$ et $\bar{\circ}$ en posant $\bar{i}_0(0) = \bar{i}_1(0) = o$ et $0 \bar{\circ} m = m \bar{\circ} 0 = m \bar{\circ} n = 0$ pour tous morphismes m, n avec $i_0(m) \neq i_1(n)$; $\bar{\circ}$ demeure infiniment définissable puisque l'arité de O est finie, et associative sur $\overline{M}$. D'après ce qu'on sait sur les demi-groupes, $\overline{M}$ est intersection de demi-groupes définissables $\overline{M}_i$. Par compacité, i_0 et i_1 sont définies sur $\overline{M}_i$ pour i suffisamment grand. On pose M_i égal à $\overline{M}_i$ privé de 0 et O_i égal à $i_0(M_i) \cup i_1(M_i)$. (O_i, M_i) n'est pas encore une catégorie car Id n'est pas définie sur O_i. On a $Id(i_1(m)) \circ m = m$ et $n \circ Id(i_0(n)) = n$ pour tout m, n dans M, donc par compacité également pour tout m, n dans M_i pour un certain i. On peut supposer i égal à zéro quitte à réindexer : $\mathcal{C}$ est l'intersection des catégories (O_i, M_i). □

Corollaire 7.16. *Dans une structure menue, un préordre infiniment définissable sans paramètres et d'arité finie est l'intersection de préordres définissables.*

Démonstration. Un préordre $\leq$ est une catégorie $\mathcal{C}$ avec pour objet $\{x : \exists y\ x \leq y \vee y \leq x\}$, pour morphismes $\{(x, y) : x \leq y\}$ et des applications définies par $i_0(x, y) = x$, $i_1(x, y) = y$, $(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$, et $Id(x) = (x, x)$. D'après la proposition précédente, $\leq$ est intersection de catégories définissables $\mathcal{C}_i$. Reste à vérifier que les $\mathcal{C}_i$ sont aussi des préordres, c'est-à-dire qu'il y a au plus un morphisme entre chaque couple d'objets. On sait que pour tout couple d'objets a, b, il existe au plus un morphisme de a dans b. Si jamais pour tout i, il existe a_i, b_i des objets de $\mathcal{C}_i$ avec au moins deux morphismes de a_i dans b_i, alors, par compacité, il existe deux objets a et b de $\mathcal{C}$ avec au moins deux morphismes distincts de a dans b, une contradiction. □

Définition 7.17. Un groupoïde est une catégorie dont chaque morphisme possède un inverse à gauche et à droite.

Un groupoïde est *infiniment définissable* si sa structure de catégorie l'est.

Corollaire 7.18. *Dans une structure menue, un groupoïde infiniment définissable sans paramètres est l'intersection de groupoïdes définissables si l'arité de ses objets est finie.*

Démonstration. Un groupoïde est l'intersection de catégories définissables (O_i, N_i). Soit N_i^{-1} l'ensemble $\{m \in N_i : \exists n \in N_i \ n \circ m = Id(i_0(m)) \wedge m \circ n = Id(i_1(n))\}$. L'intersection des $(O_i, N_i \cap N_i^{-1})$ convient. □

Théorème 7.19. *Dans une structure il y a équivalence entre*

1) *Tout préordre infiniment définissable sur A, d'arité finie, plus grossier que l'égalité des types sur A est intersection de préordres définissables.*
2) *Tout préordre infiniment définissable sur A, d'arité finie, est intersection de préordres définissables.*
3) *Tout demi-groupe infiniment définissable sur A, est intersection de demi-groupes définissables.*
4) *Toute catégorie (O, M) infiniment définissable sur A, où l'arité de O est finie, est intersection de catégories définissables.*

Démonstration. On a montré successivement 1) $\implies$ 3) $\implies$ 4) $\implies$ 2) et l'implication 2) $\implies$ 1) est évidente. □

Enfin, on montre qu'une théorie qui enveloppe les relations d'équivalence enveloppe également les groupoïdes infiniment définissables.

Proposition 7.20. *Dans une structure qui enveloppe les relations d'équivalence, soit un groupoïde $\mathcal{G}$ infiniment définissable sans paramètres et d'arité finie. Si Y_O et Y_M sont des ensembles définissables contenant respectivement les objets et les morphismes de $\mathcal{G}$, ce dernier est enveloppé par un groupoïde définissable inclus dans $Y_O \times Y_M$.*

Démonstration. Soit O et M les objets et morphismes de $\mathcal{G}$. Par compacité, il existe des ensembles X_O et X_M définissables contenant O et M, tels que i_0 et i_1 soient définis sur X_M, Id soit définie sur X_O, et $\circ$ définie sur X_M, associative, et telle que $Id(i_1(m)) \circ m = m \circ Id(i_0(m)) = m$ pour tout m de X_M. Quitte à remplacer X_O et X_M par $X_O \cap Y_O$ et $X_M \cap Y_M$, on peut supposer (X_O, X_M) inclus dans (Y_O, Y_M). On peut supposer X_M égal à X_M^{-1}. Par compacité, il existe Z_M définissable contenant G avec $Z_M \circ Z_M$ inclus dans X_M. On définit la relation d'équivalence infiniment définissable E sur X_M par

$$xEy \iff i_0(x) = i_0(y) \wedge x \circ y^{-1} \in M$$

E est l'intersection de relations d'équivalence définissables E_i. On peut vérifier que x appartient à M si et seulement si $xE\ Id(i_0(x))$; par compacité, il existe un j tel que l'ensemble $\{x \in X_M : xE_j Id(i_0(x))\}$ soit inclus dans Z_M. Posons J égal à

$\{x \in Z_M : xE_jId(i_0(x))\}$: il est stabilisé à gauche par M. En effet, si g est dans M et $yE_jId(i_0(y))$, et si $i_0(g)$ est égal à $i_1(y)$ alors

$$g = g \circ Id(i_0(g)) = g \circ y \circ y^{-1}$$

et $g \circ y$ est dans X donc $g \circ yEy$, et $g \circ yE_jId(i_0(y))$. Posons H l'ensemble $\{x \in J : x \circ J \subset J\}$: il est stable par composition, et $(X_O, H \cap H^{-1} \cup Id(X_O))$ est un groupoïde contenant $\mathcal{G}$. $\square$

Corollaire 7.21. *Dans une structure qui enveloppe les relations d'équivalence, un groupoïde infiniment définissable d'arité finie est l'intersection de groupoïdes définissables.*

Chapitre 8

Groupes et corps simples et menus

8.1 Groupes

Soit $\mathfrak{C}$ un modèle monstrueux, κ-saturé d'une théorie T. Pour un ensemble, *borné* voudra dire de taille strictement plus petite que κ. On appelle *hyperimaginaire* toute classe a/E d'un élément a de $\mathfrak{C}^\alpha$ modulo une relation d'équivalence E sur $\mathfrak{C}^\alpha$ infiniment définissable, où α est un ordinal borné. Remarquons que l'action de $Aut(\mathfrak{C}/A)$ sur $\mathfrak{C}$ se prolonge naturellement aux hyperimaginaires. On appelle *clôture bornée* d'un ensemble A, notée $bdd(A)$, l'ensemble des hyperimaginaires dont l'orbite sous l'action de $Aut(\mathfrak{C}/A)$ est bornée. Dans une théorie simple, deux éléments a et b ont le même *type Lascar fort* sur A, noté "$Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$" si et seulement s'ils ont le même type sur $bdd(A)$: c'est le lemme 3.2.13 p.61 de [73]. Rappelons le *théorème d'indépendance* pour les types Lascar fort.

Fait 8.1. (Kim-Pillay [36] *Dans une théorie simple, soient A, B, C, b et c satisfaisant*
1) $A \subset B$, $A \subset C$ et $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A C$
2) Ni $tp(b/B)$, ni $tp(c/C)$ ne dévient sur A.
3) $Lstp(b/A) = Lstp(c/A)$
Alors il existe un a tel que $tp(a/BC)$ prolonge $tp(b/B)$ et $tp(c/C)$, tel que $tp(a/BC)$ ne dévie pas sur A, et tel que a, b et c aient le même type Lascar fort sur A.

On a vu qu'une théorie menue enveloppe les groupes infiniment définissables sans paramètres. Que dire d'un groupe infiniment définissable avec paramètres dans un ensemble A ? Si A est fini, on peut le rajouter au langage, ce qui ne change pas le caractère menu de la théorie. S'il est infini, on ne perd rien à le supposer dénombrable. Deux sous-groupes G, H d'un groupe F sont *commensurables* si les indices $[G : G \cap H]$ et $[H : G \cap H]$ sont bornés. Une famille $\mathcal{H}$ d'ensembles infiniment définissables d'une structure M est *uniformément infiniment définissable* s'il existe deux types partiels $p(x, y)$ et q tels que

$$\mathcal{H} = \{\{x \in M : x \models p(x, a)\} : a \models q\}$$

Si q et p sont à paramètres dans A, on dit que $\mathcal{H}$ est *uniformément infiniment A-définissable.* Citons une version faible d'un théorème de [73].

Fait 8.2. (Wagner [73, 4.5.13]) *Dans une structure simple, soit un groupe infiniment A-définissable G, et $\mathcal{H}$ une famille de sous-groupes de G uniformément infiniment A-définissable. Il existe un sous-groupe de G, infiniment A-définissable, contenu dans* *le groupe engendré par $\mathcal{H}$, contenant une intersection bornée L de groupes dans $\mathcal{H}$, et commensurable à chaque $L \cap H$ pour H dans $\mathcal{H}$.*

Sans modifier la preuve du précédent théorème dans le livre de F. Wagner, on peut affiner le résutat précédent et affirmer :

Fait 8.3. *Dans une structure simple, soit X un ensemble infiniment A-définissable muni d'une loi de composition (pas nécessairement interne) infiniment A-définissable. Soit $\mathcal{H}$ une famille de groupes inclus dans X, uniformément infiniment A-définissable. Si X contient $\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}$, il existe un groupe N, infiniment A-définissable, contenu dans $\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}$ et contenant une intersection bornée L de groupes de $\mathcal{H}$ telle que N et $L \cap H$ soient commensurables pour tout H de $\mathcal{H}$.*

Proposition 8.4. *Plaçons-nous dans un ensemble définissable X d'une structure simple, muni d'une loi de composition (pas nécessairement interne) infiniment définissable telle que le produit de six éléments de X soit défini et associatif. Soit G_A un groupe infiniment définissable dans X. Si sa composante connexe est enveloppée par un groupe définissable H, alors G_A est enveloppé par un groupe définissable inclus dans $H \cdot G_A$.*

Démonstration. $G_A \cap H$ est d'indice fini dans G_A, donc $H \cdot G_A$ est définissable, étant une réunion finie de classes de H ; le groupe $\bigcap_{h \in H \cdot G_A} H^h$ l'est donc aussi. Appelons le N : c'est un groupe invariant par conjugaison par G_A. C'est aussi une intersection de conjugués de H par des éléments de G_A : il contient donc la composante connexe de G_A, puique cette dernière est distinguée dans G_A. Le produit $N \cdot G_A$ est un groupe définissable. □

Pour un groupe G dans un ensemble X muni d'une loi de composition prolongeant la loi de groupe, on appelle *indice de G dans X* le nombre minimal de translatés de G nécessaires pour recouvrir X.

Proposition 8.5. *Dans une structure simple et menue, soit un groupe infiniment A-définissable G_A contenu dans un ensemble définissable Z dans lequel il est d'indice borné. Dans Z, il y a un groupe définissable contenant G_A.*

Démonstration. Quitte à restreindre Z, on peut supposer la loi de groupe définie et associative sur Z. Par compacité, il existe un Y définissable contenant G_A tel que le produit $Y \cdot Y$ soit dans Z. On peut supposer Z et Y définissables sans paramètres, ainsi que la loi de groupe. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble $\{G_B : B \models tp(A/\emptyset)\}$. Les éléments de $\mathcal{H}$ sont deux à deux commensurables : d'après le fait 8.3, il existe un groupe N infiniment définissable sans paramètres contenant une intersection bornée d'éléments de H tel que N et G_A soient commensurables ; alors N est enveloppé par un groupe définissable inclus dans Y d'après la proposition 6.8 ; mais N contient la composante connexe de G_A, donc d'après la proposition précédente, il y a un sur-groupe définissable de G_A inclus dans $N \cdot G_A$, et donc dans Z. □

Corollaire 8.6. *Dans une structure simple et menue, soit un groupe G_A infiniment A-définissable contenu dans un ensemble définissable Z dans lequel il est d'indice borné. Le groupe G_A est l'intersection de groupes définissables.*

Si nous ne sommes pas parvenus à faire mieux, au moins pouvons-nous énoncer des résultats locaux. Rappelons le lemme 4.1.19 p.102 de [73], qui cumulé à la remarque 4.1.20 donne :

Fait 8.7. (Wagner [73]) *Dans une structure simple, soit G un ensemble définissable muni d'une loi et d'un élément neutre tels que le produit de trois éléments de G soit défini et associatif, et tel que tous ses éléments aient un inverse à gauche et à droite dans G. Dans G, soit X un ensemble infiniment définissable tel que pour tout x et y dans X, indépendants, $x^{-1}y$ soit dans X. Alors $X \cdot X$ est un groupe infiniment définissable et X est générique dans $X \cdot X$. En fait, X contient tous les types génériques de $X \cdot X$.*

Proposition 8.8. *Dans une structure simple, soit un groupe infiniment A-définissable G_A dont g soit un uplet fini. Soit X définissable contenant G_A. Dans X, il y a un groupe infiniment définissable avec un nombre fini de paramètres, contenant $dcl(g) \cap G_A$.*

Démonstration. Quitte à restreindre X, on peut supposer la loi de groupe définie et associative sur X. Par compacité, il existe un ensemble définissable Y dans X tel que $Y \cdot Y$ soit dans X. On peut supposer X et Y définissables sans paramètres. Soit B la clôture bornée de g. Posons

$$N_B = \{x \in Y : \exists b \models tp(a/B)\ (b \underset{B}{\perp} x \wedge x \in G_b)\}$$

C'est un ensemble infiniment B-définissable contenant $acl(g)$. Soient $x \perp_B y$ dans N_B ; montrons que $x^{-1}y$ est dans N_B. Il existe b et b' dans $tp(a/B)$ tels que $b \perp_B x$, $b' \perp_B y$, x appartienne à G_b et y à $G_{b'}$. D'après le théorème d'indépendance, il existe b'' dans $tp(b/xB) \cup tp(b'/yB)$ avec $b'' \perp_B x, y$. Alors $b'' \perp_B x^{-1}y$; mais x et y sont dans $G_{b''}$ donc $x^{-1}y$ aussi ; a fortiori, $x^{-1}y$ est dans Y. D'après le fait 8.7, $N_B \cdot N_B$ est un groupe, infiniment définissable avec paramètre dans B. Considérons le groupe

$$\bigcap_{\sigma \in Aut(\mathfrak{C}/g)} \sigma(N_B \cdot N_B)$$

C'est une intersection bornée, invariante sous l'action de $Aut(\mathfrak{C}/g)$, donc infiniment g-définissable. □

Corollaire 8.9. *Dans une structure simple et menue, soit un groupe infiniment A-définissable G_A dont g soit un uplet fini. Il existe un groupe définissable contenant $dcl(g) \cap G_A$.*

8.2 Corps

Lemme 8.10. *Dans une structure simple, soit un ensemble définissable K muni de deux lois de composition (pas nécessairement internes) et de leurs éléments neutres tels que l'addition et la multiplication de trois éléments de K soient définies et associatives. Supposons la multiplication distributive sur l'addition, et mettons que tous les éléments de K aient un inverse à gauche et à droite dans K pour chacune des lois. Dans K, soit X un ensemble infiniment définissable contenant les deux élément neutres tel que pour tout x et y dans X, indépendants, $x^{-1}y$ et $x - y$ soient dans X. Alors $X + X$ est un corps infiniment définissable.*

Démonstration. Commençons par remarquer que X est égal à $-X$ puisque zéro est dans X. D'après le fait 8.7, $X + X$ est un groupe additif ; il suffit donc de montrer que $X + X$ est stable par multiplication, et même que $X \cdot X$ est dans $X + X$ auquel cas on aura

$$(X + X) \cdot (X + X) \subset X \cdot X + X \cdot X + X \cdot X + X \cdot X \subset X + X$$

Soit p un générique additif de $X + X$; p est dans X. Soient g et g' dans X, et soit h dans p avec $h \downarrow g, g'$. Alors $h \downarrow_{g'} g$ et $h + g' \downarrow_{g'} g$. D'autre part, on a $g' + h \downarrow g'$, donc $g' + h \downarrow g$ par transitivité. Alors $gg' + gh$ est dans X ; puisque h^{-1} appartient à X et que $g \downarrow h^{-1}$, le produit gh appartient à X et gg' dans $X + X$. □

Proposition 8.11. *Dans une structure simple, soit un corps infiniment A-définissable K_A dont g soit un uplet fini. Soit X définissable contenant K_A. Dans X, il existe un corps infiniment définissable avec un nombre fini de paramètres, qui contient $dcl(g) \cap K_A$.*

Démonstration. Quitte à restreindre X, on peut supposer l'addition et la multiplication définies et associatives sur X, et la multiplication distributive sur l'addition. Par compacité, il existe Y dans X tel que $Y \cdot Y$ et $Y + Y$ soient tous deux dans X. Soit B la clôture bornée de g. Posons

$$L_B = \{x \in Y : \exists C \models tp(A/B)\ (C \underset{B}{\downarrow} x \wedge x \in K_C)\}$$

C'est un ensemble infiniment définissable sur B contenant $acl(g)$. Soient x et y dans L_B indépendants au-dessus de B ; pour les mêmes raisons que précédemment, $x^{-1}y$ et $x - y$ sont dans L_B. D'après le lemme 8.10, $L_B + L_B$ est un corps infiniment B-définissable. On considère alors le corps $\bigcap_{\sigma \in Aut(\mathfrak{C}/g)} \sigma(L_B + L_B)$. □

Corollaire 8.12. *Dans une structure simple et menue, un corps infiniment A-définissable est fini ou algébriquement clos.*

Démonstration. Appelons K_A ce corps. S'il est infini, par compacité, il existe un élément x d'ordre infini dans K_A. Soit P un polynôme à coefficients dans K_A. D'après la proposition 8.11, pour tout ensemble X enveloppant K_A, il existe un corps L_{a_X} infiniment définissable sur un nombre fini de paramètres a_X, contenant x et les coefficients de P, et inclus dans X : il est algébriquement clos. Le corps $\bigcap_{X \supset K_A} L_{a_X}$ est un sous-corps algébriquement clos de K_A qui contient tous les coefficients de P. □

Corollaire 8.13. *Dans une structure simple et menue, un corps de caractéristique positive infiniment A-définissable est commutatif.*

Démonstration. Soient x et y dans ce corps. D'après la proposision 8.11, il existe un corps contenant x et y, infiniment définissable sur un nombre fini de paramètres. Ce corps est donc commutatif, et x et y commutent. □

Troisième partie

Topologie

Chapitre 9

Généralités sur les compacts dénombrables

Commençons par démontrer la proposition qui a introduit la définition de structure menue.

Fait 9.1. *Soit X un espace toplogique compact ayant une base dénombrable d'ouverts fermés. Si X n'a pas la puissance du continu, il est dénombrable.*

Démonstration. On s'inspire de la preuve du théorème 4.2.1 p.132 de [43]. Soit $(O_i)_{i\in\omega}$ la base d'ouverts fermés. Montrons que si O_1 n'est pas dénombrable, il existe un O_j tel que ni $O_1 \cap O_j$ ni $O_1 \cap O_j^c$ ne soient dénombrables. Sinon, considérons l'ensemble

$$p = \bigcap\{O_j : |O_1 \cap O_j| > \aleph_0\}$$

Pour chaque ouvert O_j, soit O_j, soit O_j^c contient p, mais pas les deux. Comme X est séparé, p est soit vide, soit un singleton. L'ouvert O_1 est donc la réunion de p et de $\bigcup_{O_i \notin p}(O_1 \cap O_i)$: il est dénombrable, une contradiction. Si X n'est pas dénombrable, on peut donc construire un arbre binaire d'ouverts fermés de longueur $\aleph_0$, arbre dont chaque branche sera non vide par compacité. □

Fait 9.2. *Dans un langage dénombrable, une théorie qui a strictement moins de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables à isomorphisme près, a un nombre dénombrable de n-types pour tout entier n.*

Démonstration. Supposons au contraire que pour un entier n, les n-types aient la puissance du continu. On construit une application f qui à un n-type p associe une classe d'isomorphisme de modèles dénombrables le réalisant ; c'est possible d'après le théorème de Löwenheim-Skolem. Un modèle dénombrable ne pouvant réaliser que $\aleph_0$ types, les fibres de f sont dénombrables. □

9.1 Rang d'un polonais dénombrable

Soit un espace topologique séparé X. On note A^c le complémentaire d'un ensemble A de X. Un point est *isolé* si c'est un ouvert de X. Dans le cas contraire, c'est un *point d'accumulation*. L'espace X est *parfait* s'il n'a pas de points isolés. Nous noterons X'

l'*espace dérivé de* X, c'est-à-dire l'ensemble de ses points d'accumulation. Muni de sa topologie induite, c'est un fermé de X. On note X^{n+1} l'espace dérivé de X^n, puis X^ω l'intersection des X^n pour tout entier n, $X^{\omega+1}$ le dérivé de X^ω, et ainsi de suite. On définit ainsi une suite décroissante de fermés X^α par induction sur l'ordinal α :

$X^0 = X$

$X^{\alpha+1} = (X^\alpha)'$ pour un ordinal successeur

$X^\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} X^\alpha$ pour un ordinal limite λ

On appelle *noyau parfait de* X l'intersection de tous les X^α quand α décrit les ordinaux. On le note X^∞.

Définition 9.3. On appelle *espace polonais* tout espace topologique ayant une base dénombrable d'ouverts, et admettant une distance compatible complète.

Nous renvoyons à [33] pour plus de détails sur les polonais. Un espace polonais peut être coupé en un noyau parfait et un reste dénombrable, d'après le théorème de Cantor-Bendixson :

Fait 9.4. (Cantor-Bendixson) *Un espace polonais se décompose de manière unique en une union disjointe d'un sous-ensemble parfait et d'un ouvert dénombrable.*

Par conséquent, le noyau parfait d'un polonais dénombrable X est vide. On dit que X est *rangé par le rang de Cantor-Bendixson*, et on appelle *rang de Cantor-Bendixson de* X le plus petit ordinal tel que X^β soit vide. Si T désigne la topologie de X, on notera $CB(X,T)$ ce rang, ou simplement $CB(X)$ si la topologie sous-jacente n'est pas d'ambiguë. Pour tout x dans X, on définit le rang de Cantor de x, noté $CB(x,X)$ ou $CB(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté par l'ordinal maximal α tel que X^α contienne x. On a donc

$$CB(X) = sup\{CB(x)+1 : x \in X\}$$

On remarque que le rang de x vaut au moins $\alpha+1$ si et seulement si x est point d'accumulation d'éléments de rang au moins α. D'autre part, x est isolé des points de rang supérieur. On définit le rang de Cantor $CB(O)$ de tout ouvert O de X comme le rang de Cantor de l'espace topologique O muni de la topologie induite. On a alors

$$CB(x) = min\{CB(O) : x \in O,\ O \text{ ouvert}\}$$

Démonstration. Soit α le rang de x. Un ouvert O isole x des points de rang supérieur, donc $O^{\alpha+1}$ est vide. Réciproquement, on montre par induction sur α que si X^α contient x, alors, si O est un ouvert contenant x, O^α contient x également. Si $X^{\alpha+1}$ contient x, ce dernier est point d'accumulation de points de X^α. Si x n'est pas point d'accumulation de points de O^α, il est point d'accumulation de points de $O^{c\alpha}$, qui est un fermé de X, donc x est dans O^c, absurde. □

Le rang d'un point x ne dépend donc pas du voisinage de x dans lequel on le calcule. On le note désormais $CB(x)$. Remarquez que plus la topologie est fine, plus le rang diminue :

Proposition 9.5. *Soit un espace topologique X muni de deux topologies T_1 et T_2, T_2 étant plus fine que T_1. Alors $CB(X,T_2)$ est plus petit que $CB(X,T_2)$.*

Démonstration. Un point isolé par un ouvert de T_1 l'est par un ouvert de T_2 ; par induction sur α, on montre que $(X, T_2)^\alpha$ est inclus dans $(X, T_1)^\alpha$. □

Etant donnée une famille d'espaces topologiques A_i indexée par I, on note $\bigoplus_I A_i$ leur *somme directe*, c'est-à-dire leur union disjointe munie de la topologie définie comme suit : un ensemble est un ouvert de $\bigoplus_I A_i$ si sa trace sur chaque A_i est ouverte dans A_i. Calculons maintenant la dérivée et le rang d'une union, d'une somme directe et d'un produit cartésien d'espaces topologiques :

Proposition 9.6. *Soient A et B des parties d'un espace topologique X.*

1) *Si $A \subset B$, $A' \subset B'$, et $CB(A) \leq CB(B)$.*
2) $\big(A \cup B\big)^\alpha = A^\alpha \cup B^\alpha$ *pour tout ordinal α.*
3) $CB(A \cup B) = max\{CB(A), CB(B)\}$

Démonstration. 1) Si x est isolé dans B, il l'est dans A par le même ouvert. 2) D'après 1), $A' \cup B'$ est inclus dans $(A \cup B)'$. Réciproquement, si U et V isolent x dans A et B respectivement, $U \cap V$ isole x dans $A \cup B$. On termine par induction sur α. □

Proposition 9.7. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.*

1) $\big(\bigoplus\limits_{i\in I} A_i\big)^\alpha = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i^\alpha$ *pour tout ordinal α.*
2) $CB\big(\bigoplus\limits_{i\in I} A_i\big) = sup\{CB(A_i) : i \in I\}$

Démonstration. 1) D'après la proposition précédente, $\bigoplus_{i\in I} A_i'$ est inclus dans $(\bigoplus A_i)'$. Réciproquement, si x est un point d'accumulation dans $\bigoplus_{i\in I} A_i$, il appartient à un unique A_i dans lequel il ne peut être isolé. On finit par induction sur α. 2) Découle de 1). □

Proposition 9.8. *Soient A et B deux espaces topologiques non vides.*

1) $(A \times B)' = A' \times B \cup A \times B'$
2) $(A \times B)^\alpha = \bigcup\limits_{\beta\oplus\gamma=\alpha} A^\beta \times B^\gamma$ *pour tout ordinal α.*
3) *Pour tout $\alpha < CB(A)$ et $\beta < CB(B)$, $\alpha\oplus\beta < CB(A\times B) \leq CB(A)\oplus CB(B)$*

Démonstration. 1) Si a est isolé dans A, et b dans B, alors (a, b) est isolé dans $A\times B$, donc $(A \times B)'^c \supset A'^c \times B'^c$. Réciproquement, si (a, b) est isolé dans $A \times B$, il existe un couple d'ouverts U et V de A et B respectivement tel que $U \times V$ isole (a, b). En particulier, U isole a et V isole b, donc $(A \times B)'^c \subset A'^c \times B'^c$. 2) Par induction, supposons que, pour tout ordinal α, on ait

$$\big(A \times B\big)^\alpha = \bigcup_{\beta\oplus\gamma=\alpha} A^\beta \times B^\gamma$$

Remarquons que l'union est une union finie. On a alors

$$\big(A \times B\big)^{\alpha+1} = \Big(\bigcup_{\beta\oplus\gamma=\alpha} A^\beta \times B^\gamma\Big)' = \bigcup_{\beta\oplus\gamma=\alpha} \big(A^\beta \times B^\gamma\big)'$$

$$\bigcup_{\beta\oplus\gamma=\alpha} \big(A^{\beta+1} \times B^\gamma \cup A^\beta \times B^{\gamma+1}\big) = \bigcup_{\beta\oplus\gamma=\alpha+1} A^\beta \times B^\gamma$$

3) Si $CB(A) = \alpha$ et $CB(B) = \beta$, alors $\bigcup_{\delta \oplus \gamma = \alpha \oplus \beta} A^\delta \times B^\gamma = \emptyset$, donc $(A \times B)^{\alpha \oplus \beta}$ est vide et $CB(A \times B) \leq \alpha \oplus \beta$. Réciproquement, si A^α et B^β ne sont pas vides, alors $A^\alpha \times B^\beta$ ne l'est pas, et $(A \times B)^{\alpha \oplus \beta}$ non plus. □

Les surjections continues et ouvertes dont les fibres sont finies préservent le rang de Cantor :

Proposition 9.9. *Soit X et Y deux espaces topologiques, et f une application de X dans Y. Alors,*

1) Si f est ouverte et surjective, $CB(X) \geq CB(Y)$.

2) Si f est continue à fibres finies, $CB(X) \leq CB(Y)$.

3) En particulier si f est bijective et bicontinue, X et Y ont même rang.

Démonstration. 1) Montrons que $f^{-1}(Y') \subset f^{-1}(Y)'$. Soit y un point d'accumulation dans Y et x un antécédent de y. Pour tout voisinage O de x, l'image de O est un voisinage de y, donc infini, O est infini. Par induction, on a donc $f^{-1}(Y^\alpha) \subset f^{-1}(Y)^\alpha$. Puisque f est surjective, on a $Y^\alpha \subset f(X^\alpha)$.
Soit x un point d'accumulation dans X et O un voisinage de $f(x)$. Le voisinage $f^{-1}(O)$ de x est infini, donc O est infini. Par induction sur α, on a $f(X^\alpha) \subset f(X)^\alpha$. □

9.2 Degré d'un compact dénombrable

Si X est un compact dénombrable, on peut raffiner cette analyse topologique : son noyau parfait est toujours vide, et par compacité, son rang est un ordinal successeur $\alpha + 1$. On note $CB^*(X)$ pour α. De plus, l'ensemble X^α est fini, sans quoi il aurait un point d'accumulation. On appelle *degré de Cantor-Bendixson* de X son cardinal, noté $dCB(X)$. Parmi les polonais dénombrables, le degré de Cantor caractérise les compacts :

Proposition 9.10. *Soit X un espace topologique séparé rangé par le rang de Cantor. Si tout fermé de X a un degré de Cantor fini, X est compact.*

Démonstration. Soit $(F_j)_{j \in J}$ une famille de fermés d'intersection vide. Parmi toutes les intersections finies de F_j, on en choisit une, notée I, de rang et de degré minimaux. Si I n'est pas vide, il existe dans I un x de rang maximal. Puisque $\bigcap_{j \in J} F_j$ est vide, il existe un F_j ne contenant pas x, et le rang ou le degré de $I \cap F_j$ baisse. □

Corollaire 9.11. *Soit X un espace topologique séparé à base dénombrable d'ouverts. X est rangé par le rang de Cantor et tous ses fermés ont un degré de Cantor fini si et seulement si X est un compact dénombrable.*

Démonstration. Si tous les fermés de X ont un degré de Cantor, X est compact. Puisque X est rangé par le rang de Cantor, X s'injecte dans l'ensemble de ses ouverts de base. □

Corollaire 9.12. *Si A et B sont deux compacts, alors*

$$CB^*(A \times B) = CB^*(A) \oplus CB^*(B)$$

Remarque 9.13. Il est facile de fabriquer un espace topologique X_α de CB^*-rang α pour tout ordinal α : Soit X_1 le sous-ensemble de $\mathbf{Q}$ constitué des fractions $1/n$ et de zéro. X_1 n'a qu'un point d'accumulation : il est de rang CB^* un. Supposons X_α de rang α construit. Si α est le successeur d'un successeur, on pose $X_{\alpha+1}$ le produit $X_\alpha \times X_1$. Pour un ordinal limite λ, on pose X_λ la somme $\bigoplus_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, qui est localement compacte, et $X_{\lambda+1}$ le compactifié d'Alexandroff de X_λ. Remarquons que X_α a le cardinal de α.

Calculons les degrés d'une union disjointe et d'un produit cartésien :

Proposition 9.14. *Soient X et Y deux espaces topologiques, A et B deux ensembles disjoints dans X de même rang de Cantor. Alors,*

1) $dCB(A \cup B) = dCB(A) + dCB(B)$
2) $dCB(X \times Y) = dCB(X) \cdot dCB(Y)$

Démonstration. 1) Soit α ce rang. A^α et B^α sont disjoints, donc

$$dCB(A \cup B) = |A^\alpha \cup B^\alpha| = |A^\alpha| + |B^\alpha|$$

2) Soit α le rang de Cantor de X, et β celui de Y. On a

$$dCB(X \times Y) = \Big| \bigcup_{\gamma \oplus \delta = \alpha \oplus \beta} X^\gamma \times X^\delta \Big| = |X^\alpha \times Y^\beta| = |X^\alpha| \cdot |Y^\beta|$$

□

Dans un espace compact, le rang et le degré de Cantor se caractérisent de la manière suivante, bien connue des logiciens :

Proposition 9.15. *Soit X un compact dénombrable.*

1) *$CB(X) \geq \alpha + 1$ si et seulement s'il existe une suite d'ouverts $(O_i)_{i\geq 1}$ de rang au moins α avec $CB(O_i \cap O_j) < \alpha$ pour tout $i \neq j$.*
2) *Le degré de X est le plus grand nombre d d'ouverts $O_1, \ldots, O_d$ de rang $CB(X)$ avec $CB(O_i \cap O_j) < CB(X)$ pour tout $i \neq j$.*

Démonstration. 1) Soit $(O_i)_{i\geq 1}$ une suite d'ouverts de rang au moins α avec $CB(O_i \cap O_j) < \alpha$ pour tout i différent de j. Les O_i^α sont non vides et deux à deux disjoints, donc X^α est infini, et contient un point d'accumulation. Réciproquement, si $X^{\alpha+1}$ n'est pas vide, X^α a une infinité de points x_i isolés par un ouvert O_i respectivement. Chaque O_i est de rang au moins α, et deux ouverts O_i et O_j distincts ont une intersection de rang inférieur α.

2) Soient $O_1, \ldots, O_d$ des ouverts de X de rang α et d'intersections deux à deux petites. Les O_i^α sont deux à deux disjoints et non vides donc le degré de X est plus grand que d. Réciproquement, soit $x_1, \ldots, x_d$ une énumération de X^α. On peut trouver des ouverts O_i contenant respectivement x_i mais aucun des x_j pour j différent de i. En particulier, deux ouverts O_i et O_j distincts ont une petite intersection. L'ensemble O_i^α contient x_i, donc O_i est de rang au moins α. □

Remarque 9.16. Si X est un compact dénombrable, X est métrisable et possède une base d'ouverts constituée de fermés. Quitte à remplacer chaque O_i de la proposition précédente par un ouvert de base inclus dans O_i, ce qui ne change pas le rang de Cantor des O_i, on peut supposer les O_i ouverts et fermés. Quitte à remplacer inductivement chaque O_i par l'ouvert fermé $O_i \setminus (O_i \cap \bigcup_{j<i} O_j)$, ce qui ne change pas le rang des O_i, on peut supposer que les O_i sont deux à deux disjoints.

Nous avons vu qu'une surjection ouverte et continue à fibres finies préserve le rang. Mieux : on peut borner les variations du degré.

Proposition 9.17. *Soient X et Y deux espaces compacts. Si f est une application de X dans Y, continue, ouverte, et surjective à fibres finies de cardinal au plus un entier n, alors X et Y ont même rang et*

$$dCB(Y) \leq dCB(X) \leq n \cdot dCB(Y)$$

Démonstration. Si $O_1, \ldots O_d$ sont d ouverts de Y de rang maximal et d'intersections deux à deux petites, les ouverts $f^{-1}(O_1), \ldots, f^{-1}(O_d)$ de X ont même rang que X et leurs intersections sont deux à deux petites, donc $dCB(X) \geq dCB(Y)$. Réciproquement, soit d le degré de Y, et $O_0, \ldots, O_{d \cdot n}$ une suite de $d \cdot n + 1$ ouverts de X de rang maximum et d'intersections deux à deux petites. Pour tout ensemble I de $[0, d \cdot n]$ de cardinal au moins $n + 1$, l'intersection $\bigcap_{i \in I} f(O_i^\alpha)$ est vide, donc il existe $d + 1$ sous-ensembles deux à deux disjoints $I_0, \ldots, I_d$ de $[0, d \cdot n]$ tels que $\bigcap_{i \in I_j} f(O_i^\alpha)$ ne soit vide pour aucun j, et I_j soit maximal vérifiant cette propriété. Ecrivons V_j pour $\bigcap_{i \in I_j} f(O_i)$. Mais alors, pour tout j dans $[0, d]$, chaque V_j est un ouvert de Y, de même rang de Cantor que Y, et $V_j \cap V_k$ est de petit rang pour $k \neq j$, ce qui contredit le fait que Y soit de degré d. □

Soit X un espace topologique et R une relation d'équivalence sur X. Pour toute partie A de X, on note $R^{-1}(A)$ la réunion des classes de R qui coupent A. On dit que R est *continue* si pour tout ouvert O de X, l'ensemble $R^{-1}(O)$ est un ouvert de X. On notera X/R l'*espace topologique quotient*, c'est-à-dire l'ensemble des classes de R muni de la topologie la plus grossière rendant la surjection π_R de X dans le quotient X/R continue. Plus précisément, O est un ouvert de X/R si $\pi_R^{-1}(O)$ est un ouvert de X. Rappelons que R est continue si et seulement si la surjection π_R est ouverte.

Corollaire 9.18. *Soit X un espace compact et R une relation d'équivalence continue sur X dont toutes les classes sont finies. Alors,*

1) $CB(X) = CB(X/R)$
2) *Si les classes de R ont au plus n éléments,*

$$dCB(X) \leq dCB(X/R) \leq n \cdot dCB(X)$$

Démonstration. L'application quotient est continue, ouverte à fibres finies de taille au plus n. □

Proposition 9.19. *Soit X et Y deux espaces compacts, et f une application de X dans Y. Alors,*

1) Si f est ouverte, surjective, à fibres de rang CB^* au moins α,

$$CB(X) \geq \alpha + CB(Y)$$

2) Si f est continue à fibres de rang CB^* au plus α,

$$\alpha + CB(Y) \geq CB(X)$$

Démonstration. 1) On montre que $f(X)^\beta \subset f(X^{\alpha+\beta})$ pour tout β. L'espace X est la réunion des fibres F_i, et $\bigcup F_i^\alpha$ est dans X^α, donc $f(X)$ est égal à $f(X^\alpha)$. On a montré dans la proposition 9.9 que $f(X)^\beta \subset f(X^\beta)$ pour tout β. On a donc

$$f(X)^\beta = f(X^\alpha)^\beta \subset f((X^\alpha)^\beta) = f(X^{\alpha+\beta})$$

2) On montre que $f(X^{\alpha+\beta}) \subset f(X)^\beta$ pour tout β. La restriction à X^α de f est continue à fibres finies, et

$$f(X^{\alpha+\beta}) = f((X^\alpha)^\beta) \subset f(X^\alpha)^\beta$$

□

9.3 Préordre fermé

Soit un espace topologique X et une relation binaire R sur X. On dit que R est *fermée*, respectivement *ouverte*, *ouverte fermée* si l'ensemble des couples en relation par R est un fermé, respectivement un ouvert, un ouvert fermé de $X \times X$ muni de la topologie produit. Remarquez qu'une relation d'équivalence ouverte est continue. Un *préordre* sur X est une relation binaire réflexive et transitive. La proposition suivante s'inspire de [51] et [35].

Proposition 9.20. *Un préordre fermé sur un compact dénombrable est l'intersection de préordres ouverts fermés.*

Démonstration. Soit X ce compact, et R le préordre sur X. L'espace X a une base d'ouverts fermés. On pose F l'ensemble fermé des couples de $X \times X$ en relation par R. Si x et y ne sont pas en relation, il existe un ouvert fermé de base $O_1 \times O_2$ de $X \times X$ contenant (x, y) et inclus dans F^c ; l'intersection $O_1 \cap O_2$ est vide puisque R est réflexive. On choisit O_1 et O_2 de sorte que $(O_1 \cup O_2)^c$ soit de rang et degré de Cantor minimaux, et on pose Y l'ensemble $(O_1 \cup O_2)^c$. Montrons que Y est vide ; sinon, prenons un y dans Y de rang maximal. Si $(O_1 \times \{y\}) \cap F$ et $(\{y\} \times O_2) \cap F$ sont tous deux non vides, comme R est transitive, $(O_1 \times O_2) \cap F$ est non vide, ce qui est absurde. On peut donc supposer $(O_1 \times \{y\}) \cap F$ vide. L'ensemble $O_1 \times \{y\}$ est dans l'ouvert F^c. On peut trouver un ouvert de base Q_2 contenant y avec $O_1 \times Q_2 \subset F$. Mais $O_1 \times (Q_2 \cup O_2)$ est inclus dans F^c. L'ensemble $(O_1 \cup O_2 \cup Q_2)^c$ est égal à $X^c \cap Q_2^c$ et ne contient pas y, ce qui contredit le caractère minimal du degré de Cantor de Y. Donc Y est vide et $O_1 \cup O_2$ est X tout entier. Alors $O_1 \times O_1^c \subset F^c$, donc $F \subset (X \times O_1) \cup (O_1^c \times X)$, et aRb implique $aR_{x,y}b$ où $R_{x,y}$ est un préordre défini par

$$aR_{x,y}b \iff \big(a \in O_1 \Rightarrow b \in O_1\big)$$

On a montré que aRb était équivalent à la conjonction $\bigwedge_{x,y \in F^c} aR_{x,y}b$. □

9.4 A propos de la dérivée de Cantor

Soit X un espace topologique séparé et 2^X l'ensemble de ses parties. Muni de l'union, 2^X est un demi-groupe. D'après la proposition 9.6, l'application qui à un sous-ensemble de X associe son espace dérivé est linéaire. Si 2^X était stable par produit cartésien, la proposition 9.8 serait une formule de Leibniz. Rappelons que les notions de point d'accumulation et d'espace dérivé ont été introduites par Cantor en 1872 dans [8] pour dériver les ensembles de convergence de séries trigonométriques ; il y montre l'unicité de la décompostion en série trigonométrique sur un intervalle privé d'un ensemble de rang de Cantor fini. C'est en considérant les systèmes de point de rang infini qu'il introduit en 1880 l'induction transfinie, avant même la théorie des ensembles. Cantor appelait un point d'accumulation *Grenzpunkt* (mot à mot "point frontière"), et l'espace dérivé, *abgeleitete Punktmenge* (*ableiten* est le mot qu'employait Leibniz pour dériver) ; il utilisait les notations P' ou $P^{(1)}$ pour la première dérivée d'un ensemble de points. A notre connaissance, nulle part dans ses écrits n'apparaît une formule de Leibniz. Toujours est-il que la dérivée de Cantor porte bien son nom puisque, quotientée par une certaine relation d'équivalence, la classe des espaces topologiques est un semi-anneau dans lequel la dérivée de Cantor est un opérateur de dérivation.

On appelle *ω-plongement* une application ouverte et continue à fibres finies entre deux espaces topologiques. Nous notons $\mathcal{T}op_\omega$ la catégorie des espaces topologiques dont les flèches sont les ω-plongements. Elle est partiellement ordonnée par la relation

$$A \leq B \text{ s'il existe un } \omega\text{-plongement de } A \text{ dans } B$$

On note $A \equiv B$ pour dire que $A \leq B$ et $B \geq A$. C'est une relation d'équivalence.

Proposition 9.21. *Soient A et B deux espaces topologiques. A équivalence modulo $\equiv$ près, $A \oplus B$ est l'unique plus petit C tel que $A \leq C$ et $B \leq C$.*

Démonstration. Si A et B se plongent dans C via f et g, alors $A \oplus B$ se plonge dans C via l'application qui à $a \in A$ associe $f(a)$ et à $b \in B$ associe $g(b)$. Réciproquement, A et B se plongent dans $A \oplus B$. □

On appelle *union topologique* de A et B la classe modulo $\equiv$ de $A \oplus B$, que l'on notera $A \vee B$. On a donc $A \vee B \equiv B \vee A$, et $A \times B \equiv B \times A$. Les opérations $\oplus$ et $\times$ passent au quotient modulo $\equiv$:

Proposition 9.22. *Soient A, B et C trois espaces topologiques.*
1) Si $A \leq B$, alors $A \vee C \leq B \vee C$.
2) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
3) Si $A \leq B$, alors $A \times C \leq B \times C$.
4) $A \times (B \vee C) \equiv (A \times B) \vee (A \times C)$

Remarque 9.23. Si $A, B \subset X$, alors $A \cup B \equiv A \oplus B$, et $A \oplus A \equiv A$.

Démonstration. 1) B et C se plongent dans $B \vee C$, donc A et C aussi, et $A \vee C$ se plonge dans $B \vee C$. 2) Par définition de $\vee$. 4) D'après les points précédents,
$A \times (B \vee C) \equiv A \times (B \oplus C) \equiv (A \times B) \oplus (A \times C) \equiv (A \times B) \vee (A \times C)$ □

Pour tout espace A, on pose $D(A)$ le sous-espace de A privé de ses ouverts finis. Puisque A est séparé, $D(A)$ est égal à A'. L'application D et ses propriétés passent au quotient modulo $\equiv$.

Proposition 9.24. *Soient A et B deux espaces topologiques.*
1) Si $A \leq B$, alors $D(A) \leq D(B)$

2) $D(A \vee B) \equiv D(A) \vee D(B)$
3) $D(A \times B) \equiv (D(A) \times B) \vee (A \times D(B)))$

Démonstration. 1) Si A se plonge dans B via f, la restriction de f a A' est un ω-plongement de A' dans B'.
2) $(A \vee B)' \equiv (A \oplus B)' \equiv A' \oplus B' \equiv A' \vee B'$
3) $(A \times B)' \equiv (A' \times B) \cup (A \times B') \equiv (A' \times B) \vee (A \times B')$ $\square$

Théorème 9.25. *Pour toute sous-classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{T}op_\omega$ close par union disjointe et produits cartésiens finis, la classe $(\mathcal{C}/\equiv, \vee, \times, D, \emptyset)$ est un semi-anneau commutatif, différentiel intègre.*

Si $\mathcal{C}$ contient un ensemble fini, sa classe modulo $\equiv$ est une unité.

Remarque 9.26. On appelle *point de condensation* un point dont tout voisinage est indénombrable. L'application qui à un espace topologique associe le sous-espace constitué de ses points de condensation passe au quotient modulo $\equiv$, et définit une dérivée sur $\mathcal{T}op_\omega/\equiv$.

On considère à présent les classes $\mathcal{P}ol_0$ des polonais dénombrables et celle $\mathcal{K}_0$ des compacts dénombrables.

Corollaire 9.27. $(\mathcal{P}ol_0/\equiv, \vee, \times, D)$ *est un semi-anneau commutatif différentiel intègre.*

Corollaire 9.28. *Le rang CB^* de $(\mathcal{K}_0/\equiv, \leq, \vee, \times)$ dans $(\omega_1, \leq, sup, \oplus)$ est un homomorphisme de semi-anneaux ordonnés.*

9.5 Application aux structures menues

Pour finir, nous appliquons les résultats à l'espace des types d'une théorie menue, qui est un compact dénombrable. Des pages précédentes, il ressort que le rang de Cantor d'une formule φ est le rang de dérivation CB^* de l'ouvert $[\varphi]$, que nous avons noté simplement $CB(\varphi)$ au chapitre premier.

Proposition 9.29. *Soient A et B deux ensembles définissables et f une application définissable de A dans B. Alors f induit une application $\tilde{f}$ de $[A]$ dans $[B]$ et*
1) $\tilde{f}$ est continue et ouverte.
2) Si les fibres de f sont de taille au plus n, celles de $\tilde{f}$ aussi.
3) Si f est surjective, $\tilde{f}$ l'est aussi.
4) Si g est une application définissable de C dans A, $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$.
5) Si $h = id_A$, alors $\tilde{h} = id_{[A]}$.

Démonstration. Pour tout type p, et une réalisation a, on pose $\tilde{f}(p)$ égal à $tp(f(a))$. Remarquer que $\tilde{f}(p)$ ne dépend pas de a. 1) Si $[D]$ est un ouvert de base de $[B]$,

$$\tilde{f}^{-1}([D]) = \{tp(a) \in [A] : f(a) \in D\} = [f^{-1}(D)]$$

$\tilde{f}$ est donc continue, et ouverte puisque l'espace est compact à base d'ouverts fermés.
2) Si f est à fibres de taille n et si $f(a)$ et $f(b)$ ont même type, il existe un automorphisme σ tel que $f(\sigma(a))$ soit égal à $f(b)$, donc $\sigma(a)$ est dans la fibre de $f(b)$. $\square$

Il existe donc un *foncteur covariant* $\sim$ de la catégorie des ensembles définissables d'une structure M, avec les applications définissables pour flèches, dans la catégorie des espaces de types, une sous-catégorie des espaces topologiques, munie des applications bicontinues. Le foncteur $\sim$ préserve les notions d'applications à fibres finies : il induit un foncteur de la catégorie des ensembles définissables avec les applications définissables à fibres finies pour flèches, dans $\mathcal{T}op_\omega$. On en déduit immédiatement une nouvelle démonstration des lemmes 1.20 et 1.23 énoncés au premier chapitre :

Corollaire 9.30. *Soient C et D deux ensembles a-définissables, et f une application a-définissable de C dans D. Alors,*

1) *Si f est surjective, $CB_a(C) \geq CB_a(D)$.*
2) *Si f est à fibres bornées, $CB_a(D) \geq CB_a(C)$.*
3) *Si f est surjective à fibres finies de cardinal au plus un entier n, alors C et D ont même rang de Cantor sur a, et*

$$dCB_a(D) \leq dCB_a(C) \leq n \cdot dCB_a(D)$$

Corollaire 9.31. *Soit X un ensemble définissable sans paramètres, et a un élément algébrique sur le vide de degré n, alors*

1) $CB_a(X) = CB_\emptyset(X)$
2) $dCB_\emptyset(X) \leq dCB_a(X) \leq n \cdot dCB_\emptyset(X)$

Démonstration. Sur $S(X, a)$, la relation "être conjugué sous l'action du groupe d'automorphismes fixant a", notée R_a, est continue. Toutes ses classes sont de cardinal au plus n. D'autre part, $S(X, \emptyset)$ et $S(X, a)/R_a$ sont homéomorphes. On applique alors le corollaire 9.18. □

Chapitre 10

Un peu plus de topologie

10.1 κ-Mètre, κ-distance

Un cardinal κ est *régulier* si le plus petit cardinal λ tel qu'il existe une λ-suite dans κ de limite κ est κ lui-même. On se fixe un cardinal κ infini régulier. On qualifiera de *petit* tout ensemble de cardinal strictement inférieur à κ.

Définition 10.1. On appelle *κ-mètre*, un groupe abélien totalement ordonné muni d'une famille strictement décroissante $(\epsilon_i)_{i<\kappa}$ d'éléments positifs vérifiant les propriétés suivantes :
(i) Tout élément positif est minoré par un ϵ_i.
(ii) $\epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+1}$ est égal à ϵ_i, pour tout i.

On appellera la famille $(\epsilon_i)_{i<\kappa}$ l' *anti bon ordre associé*, ou encore le *squelette* du κ-mètre. On posera ϵ_κ égal à zéro. On qualifiera de *κ-archimédien* un groupe abélien totalement ordonné vérifiant (i).

Remarque 10.2. Si le mètre est muni d'une structure de corps ordonné, l'axiome (i) est équivalent à l'énoncé suivant :

$$(\forall x, y)\ (x > 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow \exists i < \kappa,\ x \geq \epsilon_i \cdot y)$$

Remarque 10.3. De (i) et (ii) il résulte que pour tout x positif, il existe un y tel que $y + y$ soit plus petit ou égal à x : l'axiome (ii) permettra simplement de découper une boule en deux. Considérons l'énoncé suivant, noté (iii) : "tout petit ensemble d'éléments strictement positifs possède un minorant strictement positif." Remarquons que puisque κ est régulier, (iii) découle de (i). Les énoncés (i), (ii) et (iii) sont tous définissables dans la logique du premier ordre infinitaire $L_{\kappa^+,\kappa}$.

***Exemples* 10.4.**

- Le corps des nombres réels $\mathbf{R}$ est un $\aleph_0$-mètre, dont un anti bon ordre associé est la suite $(1/2^i)_{i<\aleph_0}$.
- Une extension κ-saturée du corps $\mathbf{R}$ vérifie l'axiome (iii).
- Tout ordinal se décompose en base ω de manière unique en une somme

$$\omega^{\alpha_1}.n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}.n_k$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des ordinaux strictement décroissants et $n_1, \ldots, n_k$ des entiers non nuls. Rappelons que l'addition commutative de Cantor est définie par

$$\sum \omega^{\alpha_i}.n_i \oplus \sum \omega^{\alpha_j}.m_j = \sum \sum \omega^{\alpha_i}.(n_i + m_i)$$

Muni de la somme de Cantor, un cardinal κ régulier est un semi-groupe commutatif simplifiable totalement ordonné. On peut définir une loi de composition interne commutative sur les monômes en posant

$$(\omega^\alpha.n) \otimes (\omega^\beta.m) = \omega^{\alpha \oplus \beta} \cdot (nm)$$

On prolonge cette multiplication sur la classe des ordinaux par distributivité. Posons $\mathbf{Z}(\kappa)$ égal à $\kappa \times \kappa / E$ où E est la relation d'équivalence sur $\kappa \times \kappa$ définie par

$$(a, b)E(c, d) \iff a \oplus d = b \oplus c$$

On appelle zéro la classe $(0, 0)/E$, on identifie tout élément x de κ à la classe $(x, 0)/E$ dans $\mathbf{Z}(\kappa)$ et on prolonge l'addition sur $\mathbf{Z}(\kappa)$ en posant

$$(a, b)/E + (x, y)/E = (a \oplus x, b \oplus y)/E$$

On peut vérifier que l'addition est bien définie : si $(a, b)E(c, d)$ et $(x, y)E(z, t)$, alors $a \oplus d = b \oplus c$ et $x \oplus t = y \oplus z$, alors $a \oplus d \oplus x \oplus t = b \oplus c \oplus y \oplus z$, donc $(a \oplus x, b \oplus y)E(c \oplus z, t \oplus d)$. Tout élément $(a, b)/E$ de $\mathbf{Z}(\kappa)$ a un inverse $(b, a)/E$ que l'on notera $-(a, b)/E$. L'ensemble $\mathbf{Z}(\kappa)$ est un groupe. Il est totalement ordonné : on pose

$$(a, b)/E \leq (x, y)/E \iff a \oplus y \leq b \oplus x$$

qui est bien défini car κ est simplifiable. Remarquer que la forme normale de Cantor d'un cardinal est nécessairement monômiale, du type ω^α où α est un ordinal limite. En particulier, κ est stable par multiplication. On étend la multiplication à $\mathbf{Z}(\kappa)$ en posant

$$(a, 0)/E \cdot (b, 0)/E = (a \otimes b, 0)/E$$

$$(a, 0)/E \cdot (0, b)/E = (0, a \otimes b)/E$$

et on la prolonge de telle sorte qu'elle soit commutative et distributive sur l'addition. Reste à vérifier que cette multiplication est compatible avec l'ordre. L'ensemble $\mathbf{Z}(\kappa)$ est donc un anneau totalement ordonné dont on peut montrer qu'il est intègre. On note $\mathbf{Q}(\kappa)$ son corps de fraction. Puisque κ est régulier, toute petite partie d'éléments strictement positifs de $\mathbf{Q}(\kappa)$ a un minorant strictement positif, donc $\mathbf{Q}(\kappa)$ est un κ-mètre. On peut prendre par exemple l'anti bon ordre $(\epsilon_i)_{i<\kappa}$ où ϵ_1 est égal à un, ϵ_{i+1} à $\epsilon_i/2$ et ϵ_λ à $1/\lambda$ pour tout ordinal limite λ de κ.

- Considérons le groupe $\mathbf{R}((\mathbf{Z}(\kappa)))$ des séries formelles généralisées

$$\sum_{i \in I} a_i X^i$$

à coefficients dans le corps $\mathbf{R}$, où I est un bon ordre de $\mathbf{Z}(\kappa)$. On appelle *degré* d'une série S indicée par un bon ordre I, le plus petit élément i de

I tel que a_i soit non nul. On appelle cet a_i le *coefficient dominant* de S, noté $coef(S)$. On définit un ordre total sur $\mathbf{R}((\mathbf{Z}(\kappa)))$ en affectant à une série formelle le signe de son coefficient dominant. Par convention une série est nulle si ses coefficients sont tous nuls. Remarquons que puisque $\mathbf{R}$ est additivement divisible, $\mathbf{R}((\mathbf{Z}(\kappa)))$ l'est aussi. $\mathbf{R}((\mathbf{Z}(\kappa)))$ est un κ-mètre, qui peut être muni d'une structure de corps respectant l'ordre, comme il est expliqué dans [21] par Hans Hahn (celui du théorème de Hahn-Banach, qui était aussi le directeur de thèse de K. Gödel), à qui l'on doit d'avoir introduit ces corps de séries formelles. On peut prendre par exemple l'anti bon ordre $(\epsilon_i)_{i<\kappa}$ où ϵ_1 est égal à un, ϵ_{i+1} à $\epsilon_i/2$ et ϵ_λ à X^λ. On notera dorénavant $\mathbf{R}(\kappa)$ le corps de séries formelles $\mathbf{R}((\mathbf{Z}(\kappa)))$.

Définition 10.5. Soit X un ensemble, et M un κ-mètre. On appelle *κ-norme* sur X toute application $\|.\|$ de X dans M vérifiant
(o) $\|x\|$ est positif.
(i) $\|x\|$ est nul si et seulement si x l'est.
(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 10.6. Soit X un ensemble, et M un κ-mètre. On appelle *κ-distance* sur X toute application d de $X \times X$ dans M vérifiant
(o) $d(x,y)$ est positive.
(i) $d(x,y)$ est nulle si et seulement si x égale y.
(ii) $d(x,y)$ et $d(y,x)$ sont égaux.
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Pour une κ-norme $\|.\|$, on appellera *κ-distance associée* à $\|.\|$ la κ-distance d définie en posant $d(x,y)$ égal à $\|x-y\|$. Un κ-mètre est toujours muni d'une κ-norme $|.|$, celle qui à un élément x associe $sup\{x,-x\}$.

Définition 10.7. On appelle *espace κ-métrique*, tout triplet (X,M,d) où X est un ensemble, M un κ-mètre et d une κ-distance de X dans M.

Définition 10.8. Soit (X,d) un espace κ-métrique, r un élément positif de M, et x dans X. On appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r l'ensemble $\{y \in X : d(x,y) < r\}$, et *boule fermée* de centre x et de rayon r l'ensemble $\{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.

On notera $B_r(x)$ et $B'_r(x)$ respectivement une boule ouverte et une boule fermée de rayon r centrée en x.

Définition 10.9. Soit X un espace κ-métrique, d_1 et d_2 deux κ-distances à valeurs respectives dans deux κ-mètres M_1 et M_2. La distance d_2 est plus *fine* que d_1 si pour toute boule ouverte $B^{d_1}(x)$ pour d_1, il existe une boule ouverte $B^{d_2}(x)$ de même centre qui contienne $B^{d_1}(x)$. Les distances d_1 et d_2 sont *équivalentes*, si d_1 est plus fine que d_2 et réciproquement. Deux κ-normes sont *équivalentes* si les κ-distances associées sont équivalentes.

κ-Norme canonique associée à un κ-mètre

Soit un κ-mètre M. On peut définir l'application $|.|_M$ de M dans κ qui à un x associe $max\{\epsilon_i : \epsilon_i \leq |x|\}$: c'est une κ-norme sur M, équivalente à $|.|$. Comme cette norme est à valeur dans un bon ordre, pour toute partie Y de M, on peut définir l'application "distance d'un point à Y" en posant

$$d_M(x, Y) = inf\{|x - y|_M : y \in Y\}$$

Remarquons l'inégalité $|d_M(x, Y) - d_M(y, Y)| \leq |x - y|_M$.

Démonstration. 1) Si x est nul, alors $|x|_M$ l'est aussi. Réciproquement, si x n'est pas nul, il existe un ϵ_i qui minore $|x|$, donc $|x|_M$ n'est pas nul.
2) Soient x et y positifs. Supposons $x \geq y$ et $|x|_M$ égal à ϵ_i, alors $|x+y|_M$ est compris entre ϵ_i et $2\epsilon_j$ pour tout $j < i$. Si i est un ordinal limite, alors $|x + y|_M$ est égal à ϵ_i ; si i est le successeur de i', alors $|x + y|_M$ est égal soit à ϵ_i (si $|x|_M > |y|_M$), soit à $\epsilon_{i'}$ (sinon). Pour tout x et y, on a donc $||x| + |y||_M \leq |x|_M + |y|_M$. Mais $||x + y||_M \leq ||x| + |y||_M$, donc $|x + y|_M \leq |x|_M + |y|_M$.
3) $|\epsilon_i|$ et $|\epsilon_i|_M$ sont égaux : les normes $|.|$ et $|.|_M$ sont équivalentes. □

κ-Distance canonique associée à un espace κ-métrique

Un espace κ-métrique (X, d) est muni d'une κ-distance d_X à valeur dans un bon ordre, et équivalente à d, définie par

$$d_X(x, y) = |d(x, y)|_M$$

Pour toute partie Y de X, on peut donc définir l'application "distance d'un point à Y" en posant

$$d_X(x, Y) = inf\{d_X(x, y) : y \in Y\}$$

Et l'on a encore l'inégalité $|d_X(x, Y) - d_X(y, Y)| \leq d_X(x, y)$.

Corollaire 10.10. *Soit (X, d) un espace κ-métrique. d_X est une κ-distance sur X équivalente à d et à valeurs dans l'anti bon ordre associé à $\mathbf{R}(\kappa)$.*

On supposera dorénavant toutes les κ-distances à valeurs dans $\mathbf{R}(\kappa)$.

Proposition 10.11. *Soit (X, d) un espace κ-métrique, et $(d^i)_{i<\kappa}$ une famille de κ-distances équivalentes à d. Alors $sup\{min\{d^i_X, \epsilon_i\} : i < \kappa\}$ est une κ-distance équivalente à d.*

Démonstration. Ecrivons $d'(x, y)$ pour $sup\{min\{d^i_X, \epsilon_i\} : i < \kappa\}$. Si $d'(x, y)$ est nul, $min\{d^i_X, \epsilon_i\}$ est nul pour tout i, donc x et y sont égaux : d' est une κ-distance. Si $d'(x, y) \leq \epsilon_{i+1}$, alors $d^i_X(x, y) \leq \epsilon_i$, donc d' est plus fine que d. Réciproquement, soit b une boule pour d' de rayon ϵ_i et de centre x ; l'intersection $\bigcap_{j<i} b^j_{\epsilon_i}(x)$ est dans b. Appelons la B. Comme chaque b_j contient une boule ouverte non vide pour d de centre x, B, et donc b, contiennent une boule ouverte non vide pour d centrée en x. □

10.2 Espace κ-topologique

Définition 10.12. On appelle espace *κ-topologique* tout ensemble X muni d'un ensemble O de parties de X tel que

(*i*) O contienne l'ensemble X et l'ensemble vide,
(*ii*) O soit stable par réunion quelconque,
(*iii*) O soit stable par petites intersections.

On appellera *κ-ouvert* tout élément de O, et *κ-fermé* le complémentaire d'un κ-ouvert. Un ensemble $(O_i)_{i\in I}$ de parties de X est une *base de κ-ouverts* si tout κ-ouvert est réunion d'ensembles O_i. Remarquons qu'un espace topologique n'est rien d'autre qu'un espace $\aleph_0$-topologique, et que pour tous cardinaux κ et λ où $\kappa \geq \lambda$, un espace κ-topologique est un espace λ-topologique.

Soit X un ensemble et $(O_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X recouvrant X telle que toute petite intersection de O_i soit réunion de O_j. Alors il existe une unique κ-topologie O sur X dont $(O_i)_{i\in I}$ est une base de κ-ouverts. On appelle O la κ-topologie *engendrée* par la famille $(O_i)_{i\in I}$.

Proposition 10.13. *Un espace κ-métrique est un espace κ-topologique pour la topologie engendrée par les boules ouvertes. Les boules ouvertes en forment une base de κ-ouverts.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une petite intersection de boules ouvertes est une réunion de boules ouvertes. Soit $B_{r_1}(x_1), B_{r_2}(x_2), \ldots$ une petite famille de boules ouvertes indexées par I. Pour tout x dans l'intersection de ces boules, x et x_i sont à distance $r_i - d_i$, avec d_i strictement positif. Il existe un nombre positif d minorant chacun des d_i. D'après l'inégalité triangulaire, la boule $B_d(x)$ est dans l'intersection des $B_{r_i}(x_i)$ □

Un espace κ-topologique X est dit *κ-métrisable* s'il peut être muni d'un κ-mètre et d'une κ-distance sur X qui préserve la κ-topologie de X. Remarquons que pour un espace κ-métrique, parler de la κ-topologie ou de la $\aleph_0$-topologie engendrée par les boules ouvertes revient au même.

Proposition 10.14. *Une boule fermée est un κ-fermé pour la κ-topologie engendrée par les boules ouvertes.*

Démonstration. Soit $B'_r(x)$ une boule fermée de rayon r et de centre x. Si y n'est pas dans $B'_r(x)$, alors x et y sont à distance $r + a$ avec a positif. Il existe un nombre positif b tel que $2b$ minore a. Les boules $B_b(y)$ et $B'_r(x)$ sont disjointes, puisque si z est dans $B_b(y)$,

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(z,y) \geq r + a - b > r$$

La boule $B'_r(x)$ est donc bien un κ-fermé. □

Soit X un espace κ-topologique, et x un point de X. On appelle *κ-voisinage* de x toute partie de X contenant un κ-ouvert autour de x. Un ensemble (V_i) de parties de X est une *base de κ-voisinages de x* si tout κ-ouvert contenant x contient un V_i. Soit A une partie de X, on appelle *κ-intérieur* de A, noté $\mathring{A}$, l'union des κ-ouverts que contient A. On appelle *κ-adhérence* de A, notée $\overline{A}$ l'intersection de tous les κ-fermés contenant A. Le point x est *κ-intérieur* à A s'il appartient à $\mathring{A}$; il est *κ-adhérent* à A s'il appartient à $\overline{A}$. On dit que A est *κ-dense* dans X si l'adhérence de A est X tout entier.

Remarque 10.15. Un point a est κ-adhérent à A si et seulement si toute boule ouverte de centre a rencontre A.

Définition 10.16. On dit que X est *κ-séparable* s'il existe un sous-ensemble κ-dense de X de cardinal κ.

Remarquons que pour un espace κ-métrisable, être κ-séparable ou à base de κ-ouverts de cardinal κ sont deux propriétés équivalentes. En particulier, tout espace κ-métrisable κ-séparable est de cardinal au plus 2^κ.

Remarque 10.17. Si κ est un cardinal non dénombrable *inaccessible* (ie $2^\lambda < \kappa$ pour tout $\lambda < \kappa$), ou simplement si $2^\lambda \leq \kappa$ pour tout $\lambda < \kappa$, le corps $\mathbf{R}(\kappa)$ est κ-séparable : considérons le sous-ensemble du corps $\mathbf{R}(\kappa)$ constitué des séries dont les coefficients sont tous nuls sauf un petit nombre : il est κ-dense dans $\mathbf{R}(\kappa)$, et de cardinal $\left(2^{\aleph_0}\right)^{<\kappa}$, c'est-à-dire $2^{<\kappa}$.

κ-Topologie induite

Soit un espace κ-topologique X, et un sous-ensemble A de X. On appelle *κ-topologie induite sur A*, l'ensemble constitué des traces sur A des κ-ouverts de X ; c'est une κ-topologie sur A.

κ-Topologie produit

Soit une famille d'espaces topologiques X_i. On appelle *κ-topologie produit* sur $\prod_{i\in I} X_i$ la κ-topologie engendrée par les petites intersections d'ouverts de $\prod_{i\in I} X_i$ pour la topologie produit usuelle. Une base de cette κ-topologie est formée des ensembles $\prod_{i\in I} U_i$ où chaque U_i est une petite intersection d'ouverts de X_i, et tous les U_i sont égaux à X_i sauf un petit nombre. C'est la κ-topologie la plus grossière contenant la topologie produit.

Proposition 10.18. $\mathbf{R}(\kappa)^\kappa$ *muni de sa κ-topologie produit est κ-métrisable.*

Démonstration. Prenons comme κ-mètre le corps $\mathbf{R}(\kappa)$. On définit l'application qui à un x de $\mathbf{R}(\kappa)^\kappa$ associe

$$\|x\| = \sup_{i<\kappa}\{min\{|x_i|_{\mathbf{R}(\kappa)}, \epsilon_i\}\}$$

L'application $\|.\|$ est bien une κ-norme. Pour vérifier qu'elle préserve la topologie produit, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \|x\| < \epsilon_i &\iff \forall j < \kappa,\ min\{\epsilon_j, |x_j|\} < \epsilon_i \\ &\iff \forall j \leq i,\ |x_i| < \epsilon_i \\ &\iff x \in \prod_{j\leq i} b_{\epsilon_i}(0) \times \prod_{j>i} \mathbf{R}(\kappa) \end{aligned}$$

□

Remarque 10.19. Plus généralement que si $(X_i, d_i)_{i<\kappa}$, est une famille d'espaces κ-métriques, alors le produit $\prod_{i\in I} X_i$ est κ-métrisable par la κ-distance d à valeurs dans $\mathbf{R}(\kappa)$ définie par

$$d(x, y) = \sup_{i<\kappa}\{min\{d_{X_i}(x_i, y_i), \epsilon_i\}\}$$

10.3 κ-Suites, espaces κ-complets

Soit (X, d) un espace κ-métrique. Une *κ-suite* de X est une application de κ dans X. Soit l un point de X. On dit que la κ-suite u *converge* vers l si

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N < \kappa)\ (n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) \leq \epsilon)$$

On appelle l la limite de la κ-suite u. Si elle existe, la limite d'une κ-suite est unique. La notion de convergence est invariante par changement de κ-distance équivalente. On appelle *κ-suite extraite* de u toute κ-suite $(u_{\phi(n)})_{n<\kappa}$ où ϕ est une application strictement croissante de κ dans κ. On dit que a est *κ-valeur d'adhérence* de u s'il existe une κ-suite extraite de u qui converge vers a.

Proposition 10.20. *Soit (X, d) un espace κ-métrique, il y a équivalence entre*
1) *a est κ-valeur d'adhérence de u.*
2) *Pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{n < \kappa : u_n \in B(a, r)\}$ est de cardinal κ.*
3) $(\forall r > 0)\ (\forall n < \kappa)\ (\exists N \geq n)\ u_N \in B(a, r)$
4) $a \in \bigcap_{n<\kappa} \overline{\{u_p : p \geq n\}}$.

Démonstration. Si a est limite d'une κ-suite extraite $(u_{\phi(n)})$, alors pour tout rayon r, l'ensemble $\{\phi(n) : u_{\phi(n)} \in B(a, r)\}$ est de cardinal κ. Supposons 2), fixons un rayon positif r et un petit ordinal N : il existe un ordinal $n \geq N$ dans l'ensemble $\{n : u_n \in B(a, r)\}$. Supposons 3). Pour tout ordinal n, une boule ouverte de centre a coupe l'ensemble $\{u_p : p \geq n\}$, donc a est dans $\overline{\{u_p : p \geq n\}}$. Supposons 4). On construit par induction sur i une κ-suite d'ordinaux (n_i) telle que pour tout ϵ_i, le point u_{n_i} soit dans la boule $B(a, \epsilon_i)$. Si les n_i sont construits pour tout i plus petit qu'un j fixé, alors il existe un n_j majorant l'ordinal $sup\{n_i : i < j\}$ tel que u_{n_j} soit dans la boule $B(a, \epsilon_i)$. La suite construite est cofinale dans κ. Comme κ est régulier, c'est bien une κ-suite. □

Proposition 10.21. *Soit A une partie de (X, d), alors*
1) *Un point est dans $\overline{A}$ si et seulement s'il est limite d'une κ-suite de A.*
2) *Un point a appartient à $\overline{A}$ si et seulement si $d_X(a, A)$ est nulle.*
3) *A est un κ-fermé si et seulement si toute κ-suite d'éléments de A convergente (dans X) a sa limite dans A.*

Définition 10.22. Une κ-suite u est dite *de Cauchy* si

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N < \kappa)(\forall n, p \geq N)\ d(u_n, u_p) \leq \epsilon$$

Proposition 10.23. 1) *Toute κ-suite de Cauchy est bornée.*
2) *Toute κ-suite convergente est de Cauchy.*
3) *Toute κ-suite de Cauchy ayant une κ-valeur d'adhérence converge.*

Démonstration. 1) et 2) sont immédiats. Pour 3), soit une κ-suite de Cauchy u ayant une κ-valeur d'adhérence a. Soit ϵ positif fixé, et η positif avec $2 \cdot \eta \leq \epsilon$. Il existe un N tel que pour tous ordinaux n et p majorant N, le nombre η majore $d(x_n, x_p)$. Il existe aussi un $M > N$ tel que η majore $d(x_M, a)$. Pour tout $n \geq N$, on a donc

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_M) + d(x_M, a) \leq 2 \cdot \eta \leq \epsilon$$

□

Définition 10.24. On dit d'un espace κ-métrique X qu'il est *κ-complet* si toute κ-suite de Cauchy de X est convergente dans X.

Proposition 10.25. 1) *Un κ-complet est un κ-fermé.*
2) *Tout κ-fermé d'un κ-complet est κ-complet.*
3) *Un produit de κ espaces κ-complets est κ-complet.*

Proposition 10.26. *Dans un espace κ-métrique κ-complet, toute intersection décroissante de κ boules κ-fermées non vides dont la suite des rayons tend vers zéro est un singleton.*

Démonstration. Notons $(B_n)_{n<\kappa}$ cette famille de boules, et r_n le rayon de B_n et choisissons un u_n dans chaque B_n. La distance $d(u_n, u_p)$ est plus petite que r_m pour tout n et p plus grand que m, donc la κ-suite (u_n) est de Cauchy. Elle converge, et sa limite est dans chacune des boules. □

Définition 10.27. On appelle *κ-isométrie* toute application entre deux espaces κ-métriques qui préserve les κ-distances.

Proposition 10.28. *Pour tout espace κ-métrique X, il existe un espace κ-métrique Y κ-complet, et une κ-isométrie de X dans Y d'image κ-dense.*

Démonstration. On considère pour $\widehat{X}$ l'ensemble des κ-suites de Cauchy de X modulo la relation d'équivalence E définie par

$$(u_n)_{n<\kappa} E (v_n)_{n<\kappa} \iff \left(d(u_n, v_n) \underset{n\to\kappa}{\longrightarrow} 0\right)$$

On note $\widehat{u}$ la classe d'équivalence d'une κ-suite $(u_n)_{n<\kappa}$ modulo E, et on prend sur $\widehat{X}$ la distance $\widehat{d}$ définie par

$$\widehat{d}\big(\widehat{u}, \widehat{v}\big) = \lim_{n\to\kappa} d(u_n, v_n)$$

Le fait que la limite existe et ne dépend pas du représentant de la classe choisie, découle de la κ-complétude du mètre et de l'inégalité triangulaire. Pour tout x de X, on définit par $i(x)$ la classe de la κ-suite constante égale à x. C'est une isométrie. De plus, si $(u_n)_{n<\kappa}$ est une κ-suite de Cauchy, la κ-suite $(i(u_n))_{n<\kappa}$ converge vers $\widehat{u}$ dans $(\widehat{X}, \widehat{d})$, donc $i(X)$ est κ-dense dans $\widehat{X}$. Montrons que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est κ-complet. Soit $(\widehat{u_n})_{n<\kappa}$ une κ-suite de Cauchy de $\widehat{X}$. Puisque i est d'image κ-dense, pour tout $n < \kappa$, on peut trouver x_n dans X avec $\widehat{d}(i(x_n), \widehat{u_n}) < \epsilon_n$. Par inégalité triangulaire, la suite $(i(x_n))_{n<\kappa}$ est une κ-suite de Cauchy. i étant une isométrie, la κ-suite $(x_n)_{n<\alpha}$ est de Cauchy dans X. Enfin, comme $i(x_n)$ converge vers $\widehat{x}$ et $\widehat{d}(i(x_n), \widehat{u_n})$ vers zéro, la suite $(\widehat{u_n})$ converge vers $\widehat{x}$. □

Question 10.29. Considérons le corps $\mathbf{Q}(\kappa)$ construit précédemment. D'après la proposition précédente, il se plonge dans un espace $\widehat{\mathbf{Q}(\kappa)}$ qui est κ-complet. $\widehat{\mathbf{Q}(\kappa)}$ hérite de la structure de corps provenant de $\mathbf{Q}(\kappa)$: deux κ-suites peuvent être ajoutées et multipliées terme à terme ; ces addition et multiplication sont compatibles avec la relation d'equivalence E, et munissent $\widehat{\mathbf{Q}(\kappa)}$ d'une structure de corps commutatif ordonné κ-complet. Quels liens entretient $\widehat{\mathbf{Q}(\kappa)}$ avec le corps des nombres de Conway introduit dans [17] ?

10.4 Espace fortement κ-complet

Définition 10.30. Soient α et β deux ordinaux limites dans $\kappa+1$. On dit d'une β-suite u qu'elle *converge vers* l *à* ϵ_α *près* si

$$(\forall i < \alpha)(\exists N < \beta)(n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) \leq \epsilon_i)$$

La limite à ϵ_α près d'une β-suite est unique à ϵ_α près, c'est-à-dire que pour tout $i < \alpha$, la différence de deux limites à ϵ_α près est majorée par ϵ_i.

Définition 10.31. On dit qu'une β-suite u est *de Cauchy à* ϵ_α *près* si

$$(\forall i < \alpha)\ (\exists N < \beta),\ (\forall n, p \geq N)\ d(u_n, u_p) \leq \epsilon_i$$

On dit d'un espace κ-métrique qu'il est *fortement* κ*-complet* si pour tout ordinal α limite dans κ, toute α-suite de Cauchy à ϵ_α près converge à ϵ_α près. Remarquons qu'un espace fortement κ-complet est κ-complet.

Proposition 10.32. $\mathbf{R}(\kappa)$ *est fortement* κ*-complet.*

Démonstration. Soit un ordinal limite α, et (S_i) une α-suite de Cauchy à ϵ_α près. Il suffit de remarquer que pour tout $\beta < \alpha$, les coefficients de degré inférieur à β de chaque S_i sont constants égaux à, disons s_β à partir d'un certain rang. Appelons S la série $\sum_{\beta<\alpha} s_\beta \cdot X^\beta$. La suite S_i converge vers S à ϵ_α près. $\square$

Proposition 10.33. *Un espace* κ*-métrique est fortement* κ*-complet si pour tous petits ordinaux limites* α *et* β*, toute intersection décroissante de* α *boules fermées dont les rayons soient non nuls à* ϵ_β *près et telle que la suite des rayons tende vers zéro à* ϵ_β *près, est non vide.*

Démonstration. Si X est fortement κ-complet, soit $(B_i)_{i<\alpha}$ une suite décroissante de boules fermées de rayon ϵ_i et de centre b_i, telle que r_i tende vers zéro à ϵ_β près. La suite b_i est de Cauchy à ϵ_β près : elle converge vers un point b à ϵ_β près. Puisque les rayons sont tous non nuls à ϵ_β près, b appartient à l'intersection des boules B_i. $\square$

10.5 κ-Compacité

Définition 10.34. Un espace κ-topologique est κ*-compact* s'il est κ-séparé, et si de tout recouvrement de X par des κ-ouverts de X, on peut extraire un petit sous-recouvrement. Ou de manière équivalente, si de toute intersection vide de κ-fermés de X, on peut extraire une petite sous-intersection vide.

Proposition 10.35.
1) *Une partie* κ*-compacte d'un espace* κ*-séparé est* κ*-fermée.*
2) *Une partie* κ*-compacte d'un espace* κ*-métrique est* κ*-complète.*
3) *Un* κ*-fermé d'une partie* κ*-compacte est* κ*-compact.*
4) *Une intersection quelconque de parties* κ*-compactes est* κ*-compacte.*
5) *Une petite réunion de* κ*-compacts est* κ*-compacte.*
6) *Un produit quelconque de parties* κ*-compactes muni de la* κ*-toplogie produit est* κ*-compact.*

Démonstration. 1) Soit K un κ-compact d'un espace κ-séparé X. Fixons un point x hors de K. Pour tout y dans K, il existe deux κ-voisinages disjoints U_y et V_y de y et x respectivement. Par κ-compacité, il existe un petit sous-recouvrement de K par des U_{y_i}. Alors l'intersection des V_{y_i} correspondants est un κ-voisinage de x hors de K.

2) Soit u une κ-suite de Cauchy d'un κ-compact K. Soit V l'ensemble des κ-valeurs d'adhérence. On a vu que V était égal à $\bigcap_{n<\kappa} \overline{\{u_p : p \geq n\}}$. Pour chaque petit ordinal n, l'ensemble $\overline{\{u_p : p \geq n\}}$ est non vide : V est non vide par κ-compacité. La suite u a donc une κ-valeur d'adhérence a, qui est aussi sa limite d'après la proposition 10.23.

3) est immédiat. 4) et 5) découlent de 3) et 1).

6) Un produit d'espaces κ-séparés est κ-séparé. Nous suivons la preuve de [75]. Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de κ-compacts, X leur produit, et $\mathcal{F}$ une famille de κ-ouverts de X dont aucune petite réunion d'éléments ne recouvre X. Montrons que la réunion des membres de $\mathcal{F}$ ne recouvre pas X non plus. Construisons par induction une suite x_i dont aucun κ-voisinage n'est petitement recouvert par $\mathcal{F}$. On construit x_α de telle sorte que aucun κ-ouvert de base du type

$$\prod_{\beta\leq\alpha} U_\beta \times \prod_{\beta>\alpha} X_\beta$$

où x_β est dans U_β, ne soit petitement recouvert. Supposons que x_β soit construit pour tout $\beta < \alpha$, et supposons au contraire que x_α n'existe pas. Appelons Z le produit $\prod_{\beta>\alpha} X_\beta$. Pour tout x de X_α, il y a un κ-ouvert $U_y \times V_y \times Z$ petitement recouvert tel que U_y et V_y contiennent $(x_i)_{i<\alpha}$ et x_α respectivement. Puisque X_α est κ-compact, il y a un petit sous-ensemble P de X_α tel que Y soit égal à $\cup_{y\in F} V_y$. Appelons U l'intersection $\bigcap_{y\in F} U_y$: c'est un κ-voisinage de $(x_i)_{i<\alpha}$ et l'ensemble

$$U \times X_\alpha \times Z = \bigcup_{y\in F} U \times V_y \times Z \subset \bigcup_{y\in F} U_y \times V_y \times Z$$

est petitement recouvert, une contradiction. La suite x_α est donc construite, et n'appartient à aucun membre de $\mathcal{F}$. □

Proposition 10.36. *Soit X un espace κ-métrique. Il y a équivalence entre*
1) *X est un espace κ-compact.*
2) *Toute κ-suite de X a une κ-valeur d'adhérence.*

Démonstration. 1) implique 2) : on a vu au 2) de la proposition précédente que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une κ-suite n'était pas vide. Pour la réciproque, on suit la preuve du cas où κ est $\aleph_0$. □

Un espace κ-topologique est *localement κ-compact* s'il a une base de voisinages κ-compacts.

Proposition 10.37. *Si κ est un cardinal inaccessible, le corps $\mathbf{R}(\kappa)$ est localement κ-compact.*

Démonstration. Soit I un segment fermé de longueur l majorée par un petit ordinal. Soit u une κ-suite dans I. Pour tout ϵ de l'anti bon ordre associé à $\mathbf{R}(\kappa)$, on peut partitionner I en un petit nombre de segments de longueurs plus petites que ϵ

puisque $\mathbf{R}(\kappa)$ est κ-archimédien. Comme κ est régulier, au moins un de ces segments contient κ points de la suite u. On itère la division. A une étape limite λ, on obtient une partition de cardinal 2^λ, qui est petit puisque κ est inaccessible. On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont le diamètre tend vers zéro. D'après la proposition 10.26, l'intersection de ces segments est non vide, et adhérente à la suite. On vient de montrer que tout κ-mètre κ-complet est localement κ-compact. □

Question 10.38. A-t-on vraiment besoin que κ soit inaccessible ?

10.6 Applications κ-continues

Définition 10.39. Une application entre deux espaces topologiques X et Y est *κ-continue* si l'image réciproque de tout κ-ouvert de Y est un κ-ouvert de X. Elle est *κ-ouverte* si l'image de tout κ-ouvert de X est un κ-ouvert de Y. Elle est *κ-bicontinue* si elle est κ-ouverte et κ-continue. C'est un *κ-homéomorphisme* entre X et son image si elle est bijective et κ-bicontinue.

Proposition 10.40. *Si X et Y sont κ-métriques, une application f de X dans Y est κ-continue si et seulement si pour toute κ-suite u de X de limite a, la κ-suite $f(u)$ converge vers $f(a)$.*

Proposition 10.41. *Soient X et Y deux espaces κ-topologiques et f une application κ-continue de X dans Y. Si X est κ-compact, son image est une partie κ-compacte de Y.*

Démonstration. Soit O_i un recouvrement de $f(X)$ par des κ-ouverts de Y. Alors $f^{-1}(O_i)$ est un recouvrement de X par des κ-ouverts de X, donc il existe un petit sous-recouvrement $f^{-1}(O_{i_j})$. Mais alors O_{i_j} recouvre $f(X)$. □

Fait 10.42. (Urysohn) *Soit A et B deux fermés disjoints d'un espace $\aleph_0$-topologique X. Il existe une fonction continue f de X dans* $[0,1]$ *valant* 0 *sur A et* 1 *sur B.*

Remarque 10.43. Avec une légère modification de la preuve, on obtient que pour tout ordinal α muni de sa topologie de l'ordre, il existe une fonction continue f de X dans $\alpha+1$ valant 0 sur A et α sur B.

Définition 10.44. Un espace κ-topologique est *κ-normal* s'il est séparé, et si tout couple de κ-fermés disjoints peut être séparé par des κ-ouverts disjoints.

Exemple 10.45. Un espace localement κ-compact est κ-normal.

Proposition 10.46. *Soit X un espace κ-topologique κ-normal à base de κ-ouverts de cardinal κ. Alors X est κ-homéomorphe à un sous-espace de $\mathbf{R}^\kappa$ muni de la κ-topologie produit.*

Démonstration. On s'inspire de [38]. Soit $(V_i)_{i\leq\kappa}$ une base de κ-voisinages de X. On peut toujours supposer cette base close par petites intersections. Considérons toutes les paires (V_{i_n}, V_{j_n}) telles que $\overline{V_{i_n}} \subset V_{j_n}$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe une fonction $\aleph_0$-continue f_n de X dans $[0,1]$ valant zéro sur V_{i_n} et un sur $V_{j_n}^c$. On a donc une application $(f_n)_{n\leq\kappa}$ de X dans $\mathbf{R}^\kappa$. Appelons la f. Chaque composante f_i de f est $\aleph_0$-continue : f est $\aleph_0$-continue pour la $\aleph_0$-topologie produit. L'image réciproque d'une intersection étant l'intersection des images réciproques, f est également κ-continue pour la κ-topologie produit.

1) L'application f est injective : si x et y sont deux points distincts de X, il existe deux κ-voisinages de base disjoints V_x et V_y de x et y respectivement. Le point x et le κ-fermé V_x^c sont disjoints : il existe un κ-voisinage de base U_x et un ouvert U séparant respectivement x et V_x^c. En particulier, $\overline{U_x}$ et V_x^c sont disjoints, et on a $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset V_x$. Alors l'application correspondant à cette paire (U_x, V_x) d'ouverts vaut 0 en x, et 1 en y : f prend des valeurs différentes en x et en y.

2) L'application f est κ-ouverte : soit O un ouvert de X et $f(x)$ dans $f(O)$; on peut séparer O^c et x par des ouverts disjoints U' et U_x respectivement, où U_x est un κ-voisinage de base. On peut à nouveau séparer U_x^c et x, et trouver un κ-voisinage de base V_x avec $x \in \overline{V}_x \subset U \subset O$. Donc si z est dans O^c, la distance $d(f(z), f(x))$ est plus grande qu'une quantité positive a, et la boule de centre $f(x)$ et de rayon $a/2$ est dans $f(O)$. □

Remarque 10.47. Si X est un espace $\aleph_0$-topologique compact à base d'ouverts de cardinal κ, la preuve ci-dessus nous donne une application injective et $\aleph_0$-continue de X dans $\mathbf{R}^\kappa$ muni de sa $\aleph_0$-topologie produit usuelle. Comme X est compact, f est de plus ouverte, donc X est homéomorphe à un compact de $\mathbf{R}^\kappa$.

Corollaire 10.48. *Soit X un espace κ-topologique κ-normal à base de κ-ouverts de cardinal κ. Alors X est κ-métrisable.*

Remarque 10.49. Un espace κ-métrique κ-compact a une base de κ-ouverts de cardinal κ, donc pour un espace κ-compact, être à base de κ-ouverts de cardinal κ ou être κ-métrisable sont équivalents.

Cas des espaces κ-compacts à base d'ouverts fermés

Définition 10.50. On dira d'une κ-norme $\|.\|$ qu'elle est *ultramétrique* si pour tout x, y, on a $\|x + y\| \leq max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Définition 10.51. On dira d'une κ-distance d qu'elle est *ultramétrique* si pour tout x, y, z, on a $d(x, y) \leq max\{d(x, z), d(z, y)\}$. Un espace κ-métrique est κ-*ultramétrique* si sa κ-distance l'est.

Remarquons que si (X, d) est un espace ultramétrique, alors (X, d_X) est encore ultramétrique.

Proposition 10.52. *Soit $(X_i)_{i<\kappa}$ une famille d'espaces κ-ultramétriques en nombre κ. Alors le produit $\prod X_i$ est κ-ultramétrique.*

Démonstration. On a vu que le produit est κ-métrisable par la κ-distance $d(x, y) = sup\{min\{d_X^i(x_i, y_i), \epsilon_i\} : i < \kappa\}$, qui est ultramétrique puisque les d_X^i le sont. □

Définition 10.53. Un espace κ-topologique X est κ-ultranormal si pour tout couple de fermés disjoints A, B, il existe un ouvert fermé F vérifiant $A \subset F \subset X \setminus B$.

Les espaces κ-ultramétriques et les espaces localement κ-compacts à base d'ouverts fermés sont κ-ultranormaux.

Lemme 10.54. *Soit X un espace κ-ultranormal, A et B deux κ-fermés disjoints de X. Alors il existe une fonction κ-continue f de X dans $\{0,1\}$ valant zéro sur A et un sur B.*

Démonstration. Soit F un κ-ouvert fermé de X vérifiant $A \subset F \subset X \setminus B$. On pose f nulle sur F, et f égale à un hors de F. □

Proposition 10.55. *Soit X un espace κ-topologique κ-ultranormal à base de κ-ouverts fermés de cardinal κ. Alors X est κ-homéomorphe à un sous-espace de 2^κ muni de la κ-topologie produit.*

Corollaire 10.56. *Soit X un espace κ-topologique κ-ultranormal à base de κ-ouverts fermés de cardinal κ. Alors X est κ-métrisable par une κ-distance ultramétrique.*

10.7 Espace κ-Baire, espace κ-polonais

On dit d'une famille de parties non vides de X qu'elle est *κ-stationnaire* si toute petite sous-intersection décroissante est non vide. On dira d'un espace κ-topologique qu'il est *κ-stationnaire* s'il est à base de κ-voisinages κ-stationnaire.

Proposition 10.57. *Soit $(X_i)_{i<\kappa}$ des espaces κ-complets κ-stationnaires.*
1) Un κ-ouvert de X_1 est κ-stationnaire.
2) $\prod_{i<\kappa} X_i$ est κ-stationnaire.

Démonstration. 1) Les κ-ouverts de base de O sont des κ-ouverts de base de X. 2) est clair. □

Définition 10.58. On dit d'un espace κ-topologique qu'il a la *propriété de Baire d'ordre κ*, ou qu'il est *κ-Baire*, si toute intersection d'un nombre κ de κ-ouverts κ-denses est κ-dense, ou de manière équivalente si toute réunion d'un nombre κ de κ-fermés de κ-intérieur vide est de κ-intérieur vide.

Proposition 10.59. *Soit un espace κ-métrique κ-stationnaire. Une petite intersection de κ-ouverts κ-denses de X est κ-dense.*

Démonstration. Soit α un petit ordinal, $(O_n)_{n<\alpha}$ une suite d'ouverts κ-denses dans X, et O leur intersection. Il suffit de montrer que chaque boule ouverte B coupe O. On construit à cet effet par induction sur α une suite décroissante de κ-ouverts de base V_n vérifiant
1) $V_n \subset V_p$ pour tout $n \geq p$
2) $V_n \subset B \cap O_n$
On pose V_1 un κ-ouvert de base $O_1 \cap B$. Supposons V_i construit pour tout $i < j$. La base de voisinage étant κ-stationnaire, $\bigcap_{i<j} V_i$ est un ouvert non vide. Par κ-densité de O_j, $O_j \cap \bigcap_{i<j} V_i$ contient un κ-ouvert de base V_j. $\bigcap_{i<\alpha} V_i$ est non vide, et inclus dans $O \cap B$ par construction. □

Proposition 10.60. *Un espace κ-métrique κ-complet à base de κ-ouverts κ-stationnaire est κ-Baire.*

Démonstration. Soit $(O_n)_{n<\kappa}$ une suite de κ-ouverts κ-denses dans X. Quitte à remplacer chaque ouvert O_n par l'ouvert $\bigcap_{i<n} O_i$ qui est κ-dense d'après la proposition précédente, on peut supposer la suite de κ-ouverts décroissante. Soit O leur intersection. Il suffit de montrer que chaque boule fermée $B' = B'(a,r)$ coupe O. On construit à cet effet par induction une suite décroissante de boules fermées B'_n de rayon r_n et de centre b_n vérifiant
1) $B'_n \subset B'_p$ pour tout $n \geq p$
2) $r_i \leq \epsilon_i$
3) $B'_n \subset B' \cap O_n$
Pour tout n, l'ouvert O_n est κ-dense, donc $B' \cap O_n$ est non vide. On prend pour B'_n une petite boule fermée incluse dans $B' \cap O_n$. D'après la proposition 10.26, $\bigcap_{n<\kappa} B'_n$ est un singleton, inclus dans $O \cap B'$ par construction. □

Définition 10.61. Un point d'un espace κ-topologique X est *κ-isolé* si c'est un κ-ouvert de X. Dans le cas contraire, on dit que c'est un *κ-point d'accumulation.* Un espace κ-topologique est qualifié de *κ-parfait* s'il n'a pas de points κ-isolés.

Proposition 10.62. *Soit X un espace κ-métrique κ-complet κ-parfait à base de κ-ouverts κ-stationnaire. X est soit vide, soit de cardinal au moins 2^κ.*

Démonstration. On va construire un arbre binaire $(O_s)_{s\in 2^{<\kappa}}$ de hauteur κ, où chaque O_s est un κ-ouvert de base non vide de sorte que
1) O_s soit inclus dans une boule ouverte de rayon r_s pour tout s
2) $r_s \leq \epsilon_{l(s)}$ où $l(s)$ est la longueur de s
3) $O_{s\frown 0}$ et $O_{s\frown 1}$ soient disjoints pour tout s
4) pour tout u prolongeant strictement s (noté $s \sqsubset u$), on ait $\overline{O_u} \subset O_s$
Si l'on dispose d'un tel arbre, d'après la proposition 10.26, pour chaque s dans 2^κ, $\bigcap_{t\sqsubset s} O_t$ est un singleton, donc $|X| \geq 2^\kappa$.
Construisons O_s par induction sur la longueur de s. On pose $O_\emptyset = X$. Supposons O_s construit pour tout s tel que $l(s) < n$. Soit s dans $2^{<n}$. $\bigcap_{t\sqsubset s} V_t$ est un ouvert non vide, puisque c'est une intersection décroissante et petite de κ-ouverts de base. X étant κ-parfait, $\bigcap_{s\sqsubset n} V_s$ contient au moins deux points distincts x et y. On définit alors $O_{s\frown 0}$ et $O_{s\frown 1}$ deux κ-ouverts de base disjoints suffisamment petits autour de x et y respectivement de telle sorte que $\overline{U_{s\frown i}} \subset U_s$ pour $i = 0$ et $i = 1$. □

Définition 10.63. On appelle espace *κ-polonais* un espace κ-topologique κ-métrisable et κ-complet ayant une base de κ-ouverts κ-stationnaire de cardinal κ (ou de manière équivalente κ-séparable).

Proposition 10.64. *Soit X un espace κ-polonais*
1) Un κ-ouvert de X est un κ-polonais.
2) Une intersection κ-stationnaire de κ κ-ouverts de X est un espace κ-polonais.
3) Si $2^{<\kappa} \leq \kappa$, un produit de κ κ-polonais est κ-polonais.

Démonstration. 1) Soit O un κ-ouvert de X. O est à base de κ-ouverts κ-stationnaire de cardinal κ. Il reste à montrer que O peut être muni d'une κ-métrique κ-complète. Soit f l'application $d(., O^c)$. On a $x \in O$ si et seulement si $f(x) \neq 0$. Soit g l'application κ-continue $g : \mathbf{R}(\kappa) \times X \to \mathbf{R}(\kappa)$, $(x,y) \mapsto x.f(y)$. Soit P l'ensemble des couples (x,y) tels que $g(x,y) = 1$. P est un κ-fermé de $\mathbf{R}(\kappa) \times X$. O est l'image de P par la projection sur la deuxième coordonnée. La projection $(x,y) \mapsto y$ est bijective

et κ-continue, d'inverse $x \mapsto (1/f(x), x)$ κ-continue, donc O est κ-homéomorphe à un κ-fermé d'un espace κ-complet.
2) Soit O_i une famille de κ-ouverts, que l'on peut supposer décroissants, et O leur intersection. O est κ-stationnaire. Montrons que O peut être muni d'une κ-distance équivalente complète. D'après 1), chaque O_i peut être muni d'une κ-distance d_i équivalente à d telle que (O_i, d_i) soit κ-complet. Quitte à remplacer chaque d_i par la κ-distance canonique associée, on peut supposer toutes les d_i à valeur dans l'anti bon ordre associé à $\mathbf{R}(\kappa)$. On considère alors $d'(x,y) = sup\{min\{d_i(x,y), \epsilon_i\} : i < \kappa\}$ qui est encore une κ-distance équivalente à d d'après la proposition 10.11

.

3) Soit Y ce produit. Un produit d'espaces complets est complet. Un produit d'espaces κ-stationnaires est κ-stationnaire. Y est à base de κ-ouverts de cardinal $\sum_{\lambda<\kappa} \kappa^\lambda$.
Puisque $2^{<\kappa} \leq \kappa$, on a

$$\sum_{\lambda<\kappa} \kappa^\lambda = \sum_{\lambda<\kappa} \kappa = \kappa^2 = \kappa$$

□

Proposition 10.65. *Un κ-polonais parfait non vide est de cardinal 2^κ.*

Proposition 10.66. *Soit X un κ polonais. X se décompose de manière unique en l'union disjointe $X = P \cup C$ où P est un sous-ensemble parfait de X, et C un ouvert de cardinal au plus κ.*

On appelle *κ-point de condensation* tout point dont chacun des voisinages est de cardinal strictement plus grand que κ.

Démonstration. Soit P l'ensemble des points de condensation de X, et $C = X \setminus P$. Si O_i est une base d'ouverts, C est la réunion des O_i qui sont de cardinal κ, donc C est de cardinal κ et ouvert. Montrons que P est parfait. Soit x dans P, et O un voisinage ouvert de x. $|O| > \kappa$, donc O contient strictement plus de κ points de condensation, donc $|U \cap O| > \kappa$, et $U \cap O$ est non vide. □

Question 10.67. Une intersection de κ κ-ouverts κ-stationnaires est-elle κ-stationnaire ?

10.8 Un peu plus sur le théorème de compacité de Gödel

On fixe un cardinal κ. On écrira petit pour dire de cardinal strictement inférieur à κ. On dit de κ qu'il a la *propriété de l'arbre* si tout arbre de hauteur κ a soit un noeud ayant κ fils, soit une branche de longueur κ. Un lemme de D. Kőnig datant de 1936 affirme que $\aleph_0$ a la propriété de l'arbre. Le cardinal κ est *faiblement compact* s'il est inaccessible et a la propriété de l'arbre. Un cardinal faiblement compact fait partie des grands cardinaux.
Soit Ω un ensemble non vide. Un ensemble F de parties de Ω est un *filtre* si

1) $\emptyset$ n'appartient pas à F.
2) F est clos par intersection finie.

3) Si $A \subset B$ et $A \in F$, alors $B \in F$.

Un filtre F sur Ω est un *ultrafiltre* s'il est maximal pour l'inclusion. Un filtre F est un *κ-filtre* sur Ω s'il est clos par petites intersections. Soit S un ensemble de parties de Ω. On dit que F *décide* de S si pour tout s dans S, soit s, soit s^c est dans F.

Proposition 10.68. *Si κ est faiblement compact, pour tout ensemble S de cardinal κ de parties de κ, tout κ-filtre de cardinal κ sur κ peut être prolongé en un κ-filtre qui décide de S.*

Démonstration. Soit F un κ-filtre sur κ. Si s est dans S et si $s \cap f$ est vide ainsi que $s^c \cap f'$ pour deux éléments f et f' de F, alors $f \cap f'$ est vide, ce qui est absurde, donc pour tout s de S, on peut prolonger F en un filtre F' qui décide de s. On peut supposer S clos par petites combinaisons booléennes, ce qui ne change pas le cardinal de S puisque κ est inaccessible. Soit $(s_i)_{i<\kappa}$ une énumération de S. Définissons un arbre binaire $(A_i)_{i \in 2^{<\kappa}}$ en posant $A_\emptyset$ égal à F, et, inductivement, pour tout i de $2^{<\kappa}$, si i est de longueur α

$$A_{i^\frown 0} = A_i \cup s_{\alpha+1} \text{ si } A_i \cup \{s_{\alpha+1}\} \text{ engendre un filtre, ou } \emptyset \text{ sinon}$$

$$A_{i^\frown 1} = A_i \cup s^c_{\alpha+1} \text{ si } A_i \cup \{s^c_{\alpha+1}\} \text{ engendre un filtre, ou } \emptyset \text{ sinon}$$

si j est de longueur un ordinal limite λ

$$A_j = \bigcup_{i \sqsubset j} A_i \text{ si } \bigcup_{i \sqsubset j} A_i \text{ engendre un filtre, ou } \emptyset \text{ sinon}$$

Ceci donne un arbre binaire de hauteur κ car à une étape limite λ, s'il n'y a aucun noeud, alors il existe un petit nombre (2^λ est petit puisque κ est inaccessible) de f_i dans F et une partition de κ en combinaisons booléennes S_i des $(s_j)_{j<i}$ tels que $S_i \cap f_i$ est vide pour tout j alors que $\bigcap_{j<i} f_j$ est non vide. Le filtre obtenu par la propriété de l'arbre est un κ-filtre puisqu'on a supposé S close par petites combinaisons boolénnes. $\square$

Soit L un langage de cardinal au plus κ. On appelle *κ-énoncé* de L une disjonction d'un petit nombre d'énoncés. Soit n un entier et $x_1, \ldots, x_n$ un n-uplet de variables. On appelle *κ-formule* de L un κ-énoncé dans le langage $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. Remarquons que si κ est inaccessible, le nombre de κ-formules dans L est au plus κ.

Fait 10.69. *Supposons κ faiblement compact. Soit Σ un ensemble de κ-énoncés tel que tout petit sous-ensemble de Σ ait un modèle. Alors Σ a un modèle.*

Cette proposition est un corollaire du théorème de compacité de la logique infinitaire $L_{\kappa,\kappa}$ que l'on peut trouver dans [31]. On en donne une autre démonstration utilisant les κ-filtres.

Proposition 10.70. *Soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille de L structures et U un ultrafiltre sur I. Soit $\phi(x) = \vee \phi_j(x)$ une κ-formule. Soit m un élément de l'ultraproduit $M = \prod M_i/U$. Soit s_j l'ensemble $\{i \in I : M_i \models \phi_j(m_i)\}$, et S l'ensemble des s_j. Si le filtre U restreint à S est un κ-filtre, alors*

$$M \models \phi(m) \textit{ si et seulement si } \{i \in I : M_i \models \phi(m_i)\} \in U$$

Démonstration. Appelons ϕ_j les formules dont ϕ est la disjonction. Si on a $M \models \phi(m)$, alors il existe un j tel que l'on ait $M \models \phi_j(m)$. D'après le critère de Łos, U contient $\{i \in I : M_i \models \phi_j(m_i)\}$, or

$$\{i \in I : M_i \models \phi_j(m_i)\} \subset \{i \in I : M_i \models \vee\phi_j(m_i)\}$$

et comme U est un filtre, on a

$$\{i \in I : M_i \models \vee\phi_j(m_i)\} \in U$$

Réciproquement, si U contient l'ensemble $\{i \in I : M_i \models \phi(m_i)\}$, montrons qu'il existe un j tel que $\{i \in I : M_i \models \phi_j(m_i)\}$ soit dans U. Sinon, pour tout j, $\{i \in I : M_i \models \neg\phi_j(m_i)\}$ est dans U, donc $\{i \in I : M_i \models \wedge\neg\phi_j(m_i)\}$ également, ce qui est absurde. D'après le critère de Łos, il existe un j tel que l'on ait $M \models \phi_j(m)$, donc

$$M \models \phi(m)$$

□

Démonstration. (théorème de compacité) Soit Σ un ensemble de κ-énoncés dont toute petite partie est consistante. Pour toute petite partie i de Σ, soit M_i un modèle de i. Soit I l'ensemble des petites parties de Σ et pour tout $i \in I$, soit I_i l'ensemble $\{j \in I : j \supset i\}$. Alors l'ensemble $F = \{X \subset I : X \supset I_i \text{ pour un i} \in I\}$ est un κ-filtre sur I. En effet, $I_\emptyset = I$ est dans F, et F ne contient pas l'ensemble vide ; si $X_j \supset I_{i_j}$ pour un petit ensemble de $j \in J$ avec $i_j \in I$, alors $\bigcap X_j \supset I_{\cup i_j}$. Soit S l'ensemble des $s_\phi = \{i \in I : M_i \models \phi\}$ pour tout $\aleph_0$-énoncé ϕ apparaissant dans Σ. κ étant inaccessible, S est de cardinal κ. Soit G un κ-filtre contenant F et décidant de S, U un ultrafiltre contenant G, et M l'ultraproduit $\prod_{i \in I} M_i/U$. Alors M est un modèle de Σ. En effet, pour θ dans Σ, $M_i \models \theta$ pour tout $i \in I_\theta$, donc d'après la proposition ci-dessus, $M \models \theta$. □

Corollaire 10.71. *L'espace des théories complètes dans un langage de taille κ est κ-compact pour tout cardinal faiblement compact κ.*

Corollaire 10.72. *L'espace des théories complètes dans un langage de taille κ est un κ-polonais pour tout cardinal faiblement compact κ.*

Problème 10.73. Etudier les théories dont le noyau κ-parfait est vide, c'est-à-dire les théories rangées par un rang de Cantor-Bendixson d'ordre κ.

Post scriptum : omega-chirurgie

Nous reprenons la dimension chirurgicale introduite par Messieurs Pillay et Poizat dans [52], et lui ajoutons une notion de degré comme dans [59]. Forts de la croyance que les applications définissables à fibres finies sont aux théoriciens des modèles ce que les bijections sont aux combinatoritiens, nous qualifierons de *omega-chirurgicale* toute structure M infinie munie d'une notion de dimension sur les ensembles définissables compatible avec la chirurgie, c'est-à-dire d'une relation réflexive et transitive sur les ensembles définissables d'arité égale à un que l'on notera "$dim(X) \leq dim(Y)$" vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) Si f est une correspondance finie définissable entre A et un sous-ensemble de B, alors $dim(A) \leq dim(B)$.

(ii) Si $dim(A) < dim(C)$ et $dim(B) < dim(C)$, alors $dim(A \cup B) < dim(C)$.

(iii) A tout ensemble définissable A est associé une multiplicité finie, i.e. un entier m tel que A se partitionne en au plus m parties définissables de mêmes dimensions.

Notations. On notera "$dim(X) = dim(Y)$" pour dire "$dim(X) \leq dim(Y)$ et $dim(Y) \leq dim(X)$". De même, "$dim(X) < dim(Y)$" signifie "$dim(X) \leq dim(Y)$ et $\neg dim(Y) \leq dim(X)$".

On appelle *degré chirurgical* d'une formule la plus petite multiplicité m vérifiant la condition (iii)). On dira d'une structure qu'elle est *E-chirurgicale* si elle vérifie les axiomes (i), (ii) et l'axiome (iv) suivant :

(iv) Si E est une relation d'équivalence définissable entre éléments de l'ensemble définissable A, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence modulo E ayant même dimension que A.

Remarquons que la condition (iii) implique la condition (iv). La condition (ii) entraîne que la relation $dim(X) \leq dim(Y)$ soit une relation d'ordre totale : en effet, si A et B sont deux ensembles définissables, $dim(A)$ et $dim(B)$ sont majorés par $dim(A \cup B)$, et (ii) implique que soit A soit B ait même dimension que $A \cup B$. En considérant les classes d'équivalence modulo la relation "avoir la même dimension", on peut considérer une application *dim* et la supposer à valeur dans un ensemble D totalement ordonné, et considérer le cas particulier où D est un bon ordre, c'est-à-dire rajouter la condition dite de *super-chirurgicalité* :

(v) Il n'y a pas de chaîne infinie d'ensembles définissables $(A_i)_{i \in \omega}$ avec

$$dim(A_0) > dim(A_1) > \cdots > dim(A_i) > \cdots$$

Un sous-ensemble définissable d'une structure omega-chirurgicale est bien sûr omega-chirurgical.

Remarque 11.1. Les conditions ne portent que sur les ensembles d'arité un, et n'imposent rien a priori sur les puissances cartésiennes de la structure.

***Exemples* 11.2.** - Ainsi définies, les structures omega-chirurgicales englobent les structures minimales, d-minimales et ω-stables : prendre $dim(X) \leq dim(Y)$ si et seulement si X est fini ou Y infini pour les structures d-minimales, et le rang de Morley pour les structures ω-stables.

- Plus généralement, les structures globalement minces, munies du rang de Cantor, sont omega-chirurgicales.
- Les structures o-minimales sont E-chirurgicales : la dimension cellulaire vérifie les axiomes (i), (ii) et (iv).
- Si on demande seulement à ce que la multiplicité soit un cardinal (plus petit que le cardinal de la structure), on peut définir la notion de structure ∞-chirurgicale. Les structures superstables assez saturées sont ∞-chirurgicales : prendre comme dimension le rang U de Lascar.
- Le rang SU vérifie les conditions (i) et (ii). Un groupe supersimple G est E-chirurgical : en effet, dans un groupe supersimple, les ensembles génériques sont exactement les ensembles de rang SU maximal, ou encore les ensembles dont tous les rangs stratifiés sont maximaux. En particulier, la condition "$\psi(x, a)$ est de rang SU maximal" est infiniment définissable par le type $\bigwedge_{\varphi,k} D^*(\psi(., a), \varphi, k) \geq D^*(G, \varphi, k)$. Maintenant, prenons le rang SU comme dimension, et supposons qu'il existe une relation d'équivalence E dans G ayant un nombre infini de classes de rang maximal ; par compacité, E aura autant de classes de rang maximal que possible, une contradiction.

Lien avec les structures minces :

Proposition 11.3. *Une structure omega-chirurgicale dont les dimensions sont bien ordonnées est globalement mince.*

Démonstration. Remarquons que les ensembles de plus petite dimension chirurgicale sont les points, et que deux points ont bien sûr même dimension. On ne perd donc rien à noter zéro cette dimension. Montrons que pour tout φ, $CB\varphi \leq dim\varphi$. Par induction sur α, montrons que si $CB\varphi \geq \alpha$, alors $dim\varphi \geq \alpha$. Si $CB\varphi \geq 0$, alors φ est non vide et contient un point x, donc $dim_M\varphi \geq dim_M x \geq 0$. Si $CB\varphi \geq \alpha + 1$, φ contient une infinité de parties définissables dans M par des formules φ_i deux à deux contradictoires de rang au moins α. Par hypothèse d'induction, les φ_i sont de dimension au moins α. D'après (iii), φ est de dimension strictement plus grande que α. □

Groupes omega-chirurgicaux

Dans un groupe omega-chirurgical, il n'y a pas de chaîne infinie strictement décroissante de sous-groupes, tous d'indice fini les uns dans leur prédécesseur. En conséquence, un groupe omega-chirurgical G a une composante connexe G^0. Pour toute partie définissable X de G, on note

$$Stab(X) = \{g \in G : dim(gX\Delta X) < dim(X)\}$$

ensemble que l'on appellera *presque stabilisateur de* X. Si la dimension est préservée par automorphisme, $Stab(X)$ est invariant sur les paramètres de définition de X.

Proposition 11.4. *Si X est non vide, $Stab(X)$ est un groupe. De plus, si X est stable par conjugaison, alors $Stab(X)$ est un groupe distingué. Si X est de dimension maximale, alors $Stab(X)$ est d'indice fini dans G.*

Démonstration. Si X est non vide, $Stab(X)$ est un groupe : si g et h sont dans $Stab(X)$, alors $dim(gX\Delta X \cup hX\Delta X) < dim(X)$ d'après (ii), et en particulier, $dim(gX\Delta hX) < dim(X)$, et donc $dim(h^{-1}gX\Delta X) < dim(X)$. Le groupe G agit sur l'ensemble fini constitué des ensembles définissables de dimension maximale à ensemble de petite dimension près. Etant le stabilisateur de cette action, $Stab(X)$ est d'indice fini. □

Proposition 11.5. *Un groupe omega-chirurgical a un sous-groupe abélien infini.*

Démonstration. On peut supposer G connexe, quitte à prendre sa composante connexe. Il suffit de montrer qu'il existe un centralisateur propre infini. Supposons que G est un groupe omega-chirurgical dont tous les centralisateurs sont finis. Pour tout a de G, la conjugaison par a est à fibres finies, donc les classes de conjugaison sont toutes de dimension maximale ; elles sont donc en nombre fini d'après (iii). Un sous-groupe distingué de G, c'est une union de classes de conjugaison. Un sous-groupe distingué de G est donc définissable, et de même dimension que G, donc d'indice fini d'après (iii). Les seuls groupes distingués de G sont donc triviaux. Fixons c^G une classe de conjugaison non triviale. D'après (iii), $Stab(c^G)$ est d'indice fini dans G, donc $Stab(c^G) = G$. Montrons enfin que G n'a qu'une seule classe de conjugaison. Soient a et b non centraux dans G. pour tout conjugué xbx^{-1} de b sauf un ensemble de petite dimension, $axbx^{-1}$ est conjugué a b. Comme une surjection à fibres finies préserve la dimension, pour tout x sauf un ensemble de petite dimension, $axbx^{-1}$ est conjugué à b. De même, par symétrie, pour tout x sauf un ensemble de petite dimension, $x^{-1}axb$ est conjugué à a. Par la condition (ii), on peut donc trouver un x tel que $axbx^{-1}$ et $x^{-1}axb$ soient conjugués respectivement à b et a. Donc b et a sont conjugués. Il n'y a donc qu'une seule classe de conjugaison dans G, une chose réfutée depuis longtemps par Reineke pour un groupe infini dont les éléments sont d'ordres finis. □

Remarque 11.6. La même démonstration montre qu'un groupe à la fois ∞- et E-chirurgical a un sous-groupe abélien infini.

Question 11.7. On sait d'un groupe superstable qu'il a un nombre infini de classes de conjugaisons [58]. Qu'en est il plus généralement d'un groupe à la fois ∞- et E-chirurgical ?

Corps omega-chirurgicaux

Proposition 11.8. *Un corps omega-chirurgical est additivement et multiplicativement connexe.*

Démonstration. Soit K ce corps et K^0 sa composante connexe additive. D'après la condition de chaîne à indices infinis près, $\bigcap_{a\in K^\times} aK^0$ est un idéal à gauche d'indice fini dans K^+. Pour le cas multiplicatif, on utilise les mêmes arguments que [59]. Soit K^0 sa composante connexe multiplicative, et S le presque stabilisateur additif des classes de K^0. C'est un idéal de K d'indice fini dans K^+. Donc $1+aK^0 \simeq aK^0$ pour tout a, où $\simeq$ désigne l'égalité à petite dimension près (la condition (ii) assure que $\simeq$ est bien une relation d'équivalence). Alors, pour tout a sauf un ensemble de petite dimension, $1+a \in aK^0$, donc K^0 est de codimension petite, et vide. □

Remarque 11.9. L'image d'un morphisme définissable d'un groupe omega-chirurgical dont le noyau est fini est d'indice fini.

Corollaire 11.10. *Un corps commutatif omega-chirurgical infini n'a pas d'extension radicale ni pseudo-radicale.*

Remarque 11.11. En particulier, un corps omega-chirurgical est parfait.

Proposition 11.12. *Un corps super-omega-chirurgical de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre.*

Démonstration. Soit D ce corps. Soit a dans D. Commençons par montrer que pour tout entier n, les éléments a et a^n ont même centralisateur. Nous avons vu que $C_D(a)$ est infini pour tout corps infini d'après un lemme de Herstein. La condition (v) entraîne que le centre de D soit le centralisateur d'une partie finie. $Z(D)$ est donc infini. En particulier, $Z(C_D(a^n)$ est infini et n'a pas d'extension radicale, donc il contient a, c'est-à-dire que $C_D(a^n) = C_D(a)$. Nous en déduisons que l'application $x \mapsto x^a - x$ n'est pas surjective. Si elle l'était, 1 aurait un antécédent y, qui serait dans $C_D(a^p) \setminus C_D(a)$, une contradiction. On finit alors la preuve comme dans le cas stable. □

Pour tout ensemble A de paramètres, on définit la *petite clôture* de A notée $pcl(A)$ comme étant le lieu des formules à paramètres dans A de dimension non maximale. Une partie est petitement close si $pcl(A) = A$. Remarquons tout d'abord qu'une petite clôture est close par toute application préservant la dimension (peut-être est-il alors judicieux de supposer la dimension préservée par automorphisme de la structure ?). Puis, dans une structure omega-chirurgicale M κ-saturée, pour un petit ensemble de paramètres, on ne peut avoir $pcl(A) = M$, car sinon, M serait recouverte par un nombre fini de formules de petites dimensions, une contradiction avec (ii).

Lemme 11.13. *Dans une structure omega-chirurgicale de degré* 1*, toute partie petitement close A est soit définissable, soit une restriction élémentaire de M.*

Démonstration. Soit $\varphi(x,a)$ une formule non contradictoire à paramètres dans A. Si $\varphi(x,a)$ est de petite dimension, alors $\varphi(x,a)$ est dans A. Si $\varphi(x,a)$ est de dimension maximale, alors son complémentaire est de petite dimension, et inclus dans A. A moins que A soit exactement ce complémentaire, et par conséquent définissable, $\varphi(x,a)$ est vérifiée par un point de A, et satisfait au test de Tarski. □

Proposition 11.14. *Dans un groupe omega-chirurgical G, soit A une partie petitement close A qui possède une partie infinie d'éléments dont les produits deux à deux restent dans A. Alors A est soit définissable, soit une restriction élémentaire de G.*

Démonstration. Encore une fois, on recopie la preuve de [59]. Sinon, on trouverait une partie X de G définie par une formule à paramètres dans A, qui ne serait satisfaite par aucun point de A. En particulier, X est de dimension maximale, et $Stab_{G^0}(X)$ est d'indice fini dans G^0. C'est-à-dire que $aX \simeq X$ pour tout a de $Stab(X)$. Si a est dans $A \cap Stab(X)$, alors $X \subset aX$, et même $aX = X$ puisque la même chose vaut pour a^{-1}. Le sous-groupe S de G^0 constitué des a tels que $aX = X$ est donc définissable. Remarquons qu'un nombre fini de translatés de S recouvre A, donc soit S est de petite dimension, et A est définissable, soit S est de dimension maximale, et égal à G^0. Alors $X = G^0$, mais alors, tout ensemble infini de A a au moins deux éléments a et b avec $a.b^{-1}$ dans G_0, c'est-à-dire dans X ! Une chose impossible. □

Puissances cartésiennes

Si l'on veut parler de la dimension des puissances cartésiennes d'une structure M munie d'une dimension vérifiant (i) et (ii), il est utile que la dimension se comporte bien vis-à-vis du produit. On demandera que

(vi) Pour toute formule $\varphi(x, y)$, on a l'inégalité suivante : il existe une fonction $f(x, y)$ continue pour la topologie de l'ordre, telle que,

$$dim(\varphi(x, y)) \leq f(\sup_{b \in M}\{dim(\varphi(x, b)\}, \sup_{a \in M}\{dim(\varphi(a, y)\})$$

Remarque 11.15. Le rang SU vérifie l'axiome (vi), avec la fonction $\oplus$, qui correspond à une des inégalités de Lascar. La dimension cellulaire également. Le rang de Morley vérifie cette égalité pour la fonction $(. + 1) \otimes (. + 1)$ (voir la remarque 1.19).

Une dimension d est *régulière* si pour toutes dimensions $a, b < d$, $f(a, b) < d$. Par exemple, dans une structure supersimple, les ordinaux dont la décomposition en base ω est un monôme sont des dimensions régulières. Dans une structure ω-stable, les ordinaux du type ω^α où α est un monôme sont des dimensions régulières. Rajoutons une condition sur les fibres, vérifiées par le rang de Morley, le rang de Lascar et la dimension cellulaire :

(vii) Pour toute application définissable surjective $f : A \to B$ dont les fibres sont de rang au moins α, on a

$$dim(A) \geq \alpha + \mathrm{dim}(B)$$

Proposition 11.16. *Soit M une structure super-omega-chirurgicale vérifiant les conditions (vi) et (vii). Si M est de dimension régulière, pour toute partie A de M, $pcl(pcl(A)) = pcl(A)$.*

Démonstration. Si c est dans $pcl(pcl(A))$, il existe un b dans $pcl(a)$ (ie tel que b vérifie une formule $\varphi(x, a)$ de petite dimension) et une formule $\psi(x, b)$ de petite dimension vérifiée par c. On peut supposer $\varphi(x, a)$ de dimension minimale et de degré 1, de sorte que $\varphi(x, a)$ isole b des points de rangs supérieurs. Montrons que la formule $\exists y\ \psi(x, y) \wedge \varphi(y, a)$ est de petite dimension. Montrons par induction sur la dimension de $\varphi(x, a)$ que pour tout b', $dim(\psi(x, b') \wedge \varphi(b', a) \leq dim \psi(x, b)$. C'est clair si $\varphi(x, a)$ est algébrique sur A. Si $\varphi(b', a)$ est de petite dimension, devant $\varphi(x, a)$, on applique l'hypothèse d'induction. Sinon, b' a le même type que b sur a, et on ne perd rien à supposer $b' = b$ si la dimension est invariante par automorphisme. Dans tous les cas, $dim(\psi(x, b') \wedge \varphi(b', a)) \leq dim\psi(x, b)$. Alors, d'après (vi), on a

$$dim(\psi(x, y) \wedge \varphi(y, a)) \leq f(dim\psi(x, b), dim\varphi(x, a))$$

On conclut par (vii). □

Dimension et mesure

Remarquons qu'une notion de dimension vérifiant les conditions (i) et (ii) n'est rien d'autre qu'une norme ultramétrique sur $\mathcal{D}ef_\omega / \equiv_{\mathcal{D}ef_\omega}$ à valeur dans un ensemble totalement ordonné. (i) assure que la norme d'une classe soit bien définie, et (ii) est l'inégalité triangulaire ultramétrique. La multiplicité de (iii) correspond à une notion de mesure discrète. Dans une structure M munie d'une notion de dimension vérifiant (i) et (ii), nous appellerons omega-*mesure* elle est, ainsi que d'une fonction μ qui à tout ensemble définissable associe un réel strictement positif, de sorte que :

- $(viii)$ μ soit préservée par bijection définissable.
- (ix) Si X_1, X_2 est une partition de X en deux parties définissables de même dimension que X, alors $\mu(X) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$.
- (x) Si $f : A \to B$ est une application définissable à fibres finies de taille au plus n, alors $\mu(B) \leq \mu(A) \leq n.\mu(B)$.

Nous dirons qu'une structure M est omega-*mesurable* si $\mu(X) < \infty$ pour tout X. Remarquons que les points ont tous pour mesure un même réel strictement positif, et quitte à normaliser μ, on peut supposer que cette mesure vaut 1. Les structures mesurables au sens de [42] sont omega-mesurables.

Proposition 11.17. *Dans un groupe omega-mesurable ayant un type de mesure non nulle, la taille des centralisateurs ne peut être bornée.*

Démonstration. Si les centralisateurs sont de taille majorée par n, alors les classes de conjugaison sont de même dimension, et de mesure minorée par $\mu(G)/n$. Comme $\mathbf{R}$ est archimédien, il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison. Soit A un ensemble infini. Puisqu'il y a au moins un type sur A de mesure un entier p nul, il n'y a un nombre fini de mesure supérieure, et la relation être égal à un ensemble de mesure petite devant p près est une relation d'équivalence qui a un nombre fini de classes. Donc le stabilisateur est d'indice fini. □

Bibliographie

[1] Ricardo de Aldama, *Chaînes et Dépendances*, Thèse de doctorat, Lyon, 2009.

[2] Reinhold Baer, *The subgroup of the Elements of Finite Order of an Abelian Group*, The Annals of Mathematics, Second Series **37**, 4, 766–781, 1936.

[3] John Baldwin et Jan Saxl, *Logical stability in group theory*, Journal of the Australian Mathematical Society **21**, 3, 267–276, 1976.

[4] Walter Baur, Gregory Cherlin et Angus Macintyre, *Totally categorical groups and rings*, Journal of Algebra **57**, 2, 407–440, 1979.

[5] Chantal Berline et Daniel Lascar, *Superstable groups*, Annals of Pure and Applied Logic **30**, 1–43, 1986.

[6] Leonore Blum, Generalized Algebraic Structures : a model-theoretic approach, thèse, MIT, 1968.

[7] Alexandre Borovik et Ali Nesin, Groups of finite Morley rank, Oxford university press, 1994.

[8] Georg Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen **5**, 1, 123–132, 1872.

[9] Gregory Cherlin, *Super stable division rings*, Logic Colloquium '77, North Holland, 99–111, 1978.

[10] Gregory Cherlin, *Groups of small Morley rank*, Annals of Mathematical Logic **17**, 1–28, 1979.

[11] Gregory Cherlin, *On* $\aleph_0$*-categorical nilrings*, Algebra Universalis **10**, 27–30, 1980.

[12] Gregory Cherlin, *On* $\aleph_0$*-categorical nilrings II*, The Journal of Symbolic Logic **45**, 2, 291–301, 1980.

[13] Gregory Cherlin et Saharon Shelah, *Superstable fields and groups*, Annals of Mathematical Logic **18**, 3, 227–270, 1980.

[14] Gregory Cherlin et Joachim Reineke, *Categoricity and stability of commutative rings*, Annals of Mathematical Logic **10**, 376–399, 1976.

[15] Paul M. Cohn, Skew fields constructions, Cambridge University Press, 1977.

[16] Richard M. Cohn, Difference Algebra, Interscience Publishers, 1965.

[17] John H. Conway, On Numbers and Games, Academic press, 1976.

[18] David M. Evans et Frank O. Wagner, *Supersimple* ω*-categorical groups and theories*, The Journal of Symbolic Logic **65**, 2, 767–776, 2000.

[19] Ulrich Felgner, *On* $\aleph_0$*-categorical extra-special* p*-groups*. Logique et Analyse **71-72**, 407–428, 1975.

[20] László Fuchs, Infinite abelian groups, Academic press, 1970.

[21] Hans Hahn, *Über die nichtarchimedischen Grössensysteme*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, Mathematisch - Naturwissenschaftliche Klasse **116**, 601–655, 1907.

[22] Philip Hall et C. R. Kulatilaka, *A Property of Locally Finite Groups*, Journal of the London Mathematical Society **39**, 235–239, 1964.

[23] Israel N. Herstein, Noncommutative Rings, The Mathematical Association of America, quatrième édition, 1996.

[24] Bernhard Herwig, James G. Loveys, Anand Pillay, Predag Tanović et Frank O. Wagner, *Stable theories without dense forking chains*, Archive for Mathematical Logic **31**, 297–303, 1992.

[25] Gerhard Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre. Zweiter Bericht über das Unendliche in der Mathematik*, Abhandlungen der Fries'schen Schule **1**, 4, 1906.

[26] Ehud Hrushovski, Contributions to stable model theory, PhD, Berkeley, 1986.

[27] Ehud Hrushovski, *On Superstable Fields with Automorphisms*, The model theory of groups, Notre Dame Math. Lectures **11**, 186–191, 1989.

[28] Ehud Hrushovski et Masanori Itai, *On model complete differential fields*, Transactions of the American Mathematical Society **355**, 11, 4267–4296, 2003.

[29] Ehud Hrushovski et Anand Pillay, *Weakly Normal Groups*, Logic Colloquium 85, North Holland, 233–244, 1987.

[30] Nathan Jacobson, Structure of rings, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[31] Thomas Jech, Set theory, the third Millennium Edition, Springer, 2003.

[32] Itay Kaplan, Thomas Scanlon et Frank O. Wagner *Artin-Schreier extensions in dependent and simple fields*, à paraître.

[33] Alexander S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Springer-Verlag, 1995

[34] Vladislav K. Kharchenko, Automorphisms and Derivations of associative Rings, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[35] Byunghan Kim, *A Note on Lascar Strong Types in Simple Theories*, The Journal of Symbolic Logic **63**, 3, 926–936, 1998.

[36] Byunghan Kim et Anand Pillay, *Simple theories*, Annals of Pure and Applied Logic **88**, 149–164, 1997.

[37] Krysztof Krupiński et Ludomir Newelski, *On bounded type-definable equivalence relations*, Notre Dame Journal of Formal Logic 43, 4, 231–242, 2002.

[38] Kazimierz Kuratowski, Topology, Academic Press, New York-London, 1968.

[39] Serge Lang, Algebra, Springer, 2002.

[40] Angus Macintyre, *On ω_1-categorical theories of abelian groups*, Fundamenta Mathematicae **70**, 253–270, 1971.

[41] Angus Macintyre, *On ω_1-categorical theories of fields*, Fundamenta Mathematicae **71**, 1, 1–25, 1971.

[42] H. Dugald Macpherson et Charles Steinhorn, *One-dimensional asymptotic classes of finite structures*, Transactions of the American Mathematical Society **360**, 411–448, 1, janvier 2008.

[43] David Marker, Model theory : an introduction, Springer-Verlag, New-York, 2002.

[44] David Marker, Margit Messmer et Anand Pillay, Model Theory of Fields, Lecture Notes in Logic **5**, Springer, 1996.

[45] Cédric Milliet, *Small Skew fields*, Mathematical Logic Quarterly **53**, 86–90, 1, 2007.

[46] Michael Morley, *Categoricity in power*, Transactions of the American Mathematical Society **114**, 2, 514–538, 1965.

[47] Ali Nesin, *Poly-separated and ω-stable nilpotent groups*, The Journal of Symbolic Logic **56**, 2, 694–699, 1991.

[48] Bernhard H. Neumann, *Groups covered by permutable subsets*, Journal of the London Mathematical Society **29**, 236–248, 1954.

[49] Ludomir Newelski, *The diameter of Lascar strong-types*, Fundamenta Mathematicae **176**, 2, 157–170, 2003.

[50] Anand Pillay, *Countable models of* 1*-based theories*, Archive for Mathematical Logic **31**, 163–169, 1992.

[51] Anand Pillay et Bruno Poizat, *Pas d'imaginaires dans l'infini*, The Journal of Symbolic Logic **52**, 2, 400–403, 1987.

[52] Anand Pillay et Bruno Poizat, *Corps et Chirurgie*, The Journal of Symbolic Logic **60**, 2, 528–533, 1995.

[53] Anand Pillay, Thomas Scanlon et Frank O. Wagner, *Supersimple fields and division rings*, Mathematical Research Letters **5**, 473–483, 1998.

[54] Jacob M. Plotkin, *ZF and locally finite groups*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **27**, 375–379, 1981.

[55] Bruno Poizat, *Rang des types dans les corps différentiels*, Groupe d'étude de Théories Stables, Paris, 1977.

[56] Bruno Poizat, Cours de théorie des modèles, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985.

[57] Bruno Poizat, *Groupes Stables*, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1987.

[58] Bruno Poizat, *An infinite superstable group has infinitely many conjugacy classes*, The Journal of Symbolic Logic **56**, 2, 618–623, 1991.

[59] Bruno Poizat, *Quelques tentatives de définir une notion générale de groupes de et corps de dimension un et de déterminer leurs propriétés algébriques*, Confluentes Mathematici **1**, 1, 111–122, à paraître, 2009.

[60] Bruno Poizat, *Groupes de petit rang de Cantor*, The Journal of Symbolic Logic, à paraître.

[61] Bruno Poizat et Frank Wagner, *Liftez les sylows ! Une suite à "sous-groupes périodiques d'un groupe stable"*, The Journal of Symbolic Logic **65**, 2, 703–704, 2000.

[62] Vera Puninskaya, *Vaught's conjecture*, Journal of Mathematical Sciences **109**, 3, 1649–1668, 2002.

[63] Joachim Reineke, *Minimale Gruppen*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **21**, 357–359, 1975.

[64] Thomas Scanlon, *Infinite stable fields are Artin-Schreier closed*, non-publié, 1999.

[65] Günter Schlichting, *Operationen mit periodischen Stabilisatoren*, Archiv der Matematik **34**, 97–99, Basel, 1980.

[66] Saharon Shelah, *Dependent first order theories, continued*, (Shelah 783), à paraître dans Israel Journal of Mathematics.

[67] Robert L. Vaught, *Denumerable models of complete theories*, Proceedings of symposium on foundations of mathematics, Infinistic methods, Pergamon Press, 301–321, 1961.

[68] Frank O. Wagner, *Small stable groups and generics*, The Journal of Symbolic Logic **56**, 1026–1037, 1991.

[69] Frank O. Wagner, *Quasi-endomorphisms in small stable groups*, The Journal of Symbolic Logic **58**, 1044–1051, 1993.

[70] Frank O. Wagner, Stable groups, Cambridge University Press, 1997.

[71] Frank O. Wagner, *Small fields*, The Journal of Symbolic Logic **63**, 3, 995–1002, 1998.

[72] Frank O. Wagner, *Minimal fields*, The Journal of Symbolic Logic **65**, 4, 1833–1835, 2000.

[73] Frank O. Wagner, Simple Theories, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 2000.

[74] Richard Wiegandt, *Some aspects of Radical Theory*, XV Escola de Álgebra, Canela, Brasil 1998, Matemática Contemporânea *16*, 291–305, 1999.

[75] David G. Wright, *Tychonoff's Theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society **120**, 3, 985–987, 1994.

Index

Symboles

$A * B$ ... 48
$[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ ... 47
$\alpha \oplus \beta$ ... 23
$\alpha \otimes \beta$ ... 23
$Ann_A(B)$ ... 40
$Ann^A(B)$ ... 40
$bdd(A)$ ... 72
$\mathfrak{C}$ ... 72
CB ... 79
$C_G(A)$, $C(A)$ ... 30
CB^* ... 24
$\gamma_n G$ ... 47
dCB ... 81
$D_G(\pi, \varphi, k)$ ... 54
$dim(X)$ ... 106
$D(\pi, \varphi, k)$ ... 54
$\equiv$, $\equiv_{\mathcal{C}}$ ... 85
G' ... 47
G^n ... 47
$\downfree$ ... 54
$J(A)$ ... 42
$Lstp(a/A)$ ... 72
$pcl(A)$ ... 109
$\leq$, $\leq_{\mathcal{C}}$ ... 85
$\mathbf{Q}(\kappa)$ ... 89
$\mathbf{R}(\kappa)$ ... 90
R^*_φ ... 32
R_φ ... 32
$Stab_\Gamma(X)$ ... 27
U_α ... 32
x^a ... 30
X^α ... 79
X^∞ ... 79
$Z(G)$ ... 30
$\mathbf{Z}(\kappa)$ ... 89
$\mathbf{Z}_{p^\infty}$ ... 46

A

κ-adhérence ... 92
anneau ... 40
    d-minimal ... 40
    menu ... 40
    nil ... 40
    nilpotent ... 40
annulateur ... 40
anti bon ordre associé ... 88
κ-archimédien ... 88
argument de symétrie de Poizat ... 49
arité ... 60
Artin-Schreier, extension d' ... 31
artinien, anneau ... 42

B

κ-Baire, espace ... 100
base de κ-ouverts ... 92
base de κ-voisinage ... 92
κ-bicontinue ... 98
borné ... 72

C

Cantor
    degré de ... 22
    forme normale de ... 23
    rang de ... 22
    somme ordinale de ... 23
Cantor-Bendixson
    degré de ... 81
    rang de ... 79
cardinal
    faiblement compact ... 102
    inaccessible ... 93
    régulier ... 88
catégorie ... 69
catégorie infinim[t] définissable ... 69
$\aleph_0$-catégorique
    théorie ... 20
κ-suite de Cauchy ... 94
chaîne dense de déviations ... 32
κ-chirurgical
    structure ... 106

omega-chirurgical
  corps . . . 108
  groupe . . . 107
E-chirurgicale
  structure . . . 106
clôture bornée . . . 72
classe de nilpotence . . . 47
commensurable . . . 54, 72
κ-compact . . . 96
κ-complet, espace . . . 95
condit° de ch. de Baldwin-Saxl . . . 52
condition de chaîne mince . . . 28
connexe, groupe . . . 30
κ-continu . . . 98
continue, relation . . . 83
converger, κ-suite . . . 94
corps
  d-minimal . . . 40
  infiniment définissable . . . 63
  menu . . . 30
  omega-chirurgical . . . 108
  simple . . . 54
  stable . . . 52
corps aux différences finies
  menu . . . 38
corps différentiel . . . 39

D

décider, pour un filtre . . . 103
dépendant
  groupe . . . 55
  théorie . . . 55
dérivé, espace . . . 79
degré chirurgical . . . 106
degré de Cantor . . . 22
degré de Cantor-Bendixson
  d'un espace topologique . . . 81
demi-groupe . . . 66
demi-groupe infiniment déf. . . . 66
κ-dense . . . 92
κ-distance . . . 90
diviser . . . 53

E

engendrée, κ-topologie . . . 92
κ-énoncé . . . 103
envelopper . . . 61
équivalente, κ-distance . . . 90
équivalente, κ-norme . . . 90
espace κ-métrique . . . 90
espace κ-topologique . . . 91
espace topologique
  dérivé . . . 79
  parfait . . . 78
  quotient . . . 83

F

faiblement compact, cardinal . . . 102
Feit-Thomson . . . 34, 50
fermée, relation . . . 84
κ-fermé . . . 92
filtre . . . 102
κ-filtre . . . 103
fine, distance . . . 90
fine, relation d'équivalence . . . 28
fonction infinim^t définissable . . . 60
forme normale d'un groupe . . . 61
forme normale de Cantor . . . 23
κ-formule . . . 103
fortement κ-complet . . . 96

G

générique . . . 54
grossière, relat° d'équivalence . . . 28
groupe
  d-minimal . . . 40
  connexe . . . 30
  infiniment définissable . . . 60
  menu . . . 46
  nilpotent . . . 47
  omega-chirurgical . . . 107
  pur . . . 26
  simple . . . 72
groupoïde . . . 70
groupoïde infinim^t définissable . . . 70

H

Hall-Kulatilaka-Kargopolov . . . 49
hyperimaginaire . . . 72

I

idempotent . . . 43
inaccessible, cardinal . . . 93
indice . . . 73
infiniment définissable
  catégorie . . . 69
  corps . . . 63
  demi-groupe . . . 66
  ensemble . . . 60

fonction . . . 60
groupe . . . 60
groupoïde . . . 70
relation . . . 60
structure algébrique . . . 68
κ-intérieur . . . 92
κ-isolé . . . 101
κ-isométrie . . . 95

J

Jacobson, radical de . . . 42

K

Kummer, extension de . . . 31

L

localement κ-compact . . . 97
localement P . . . 28

M

menu
anneau . . . 40
corps . . . 30
corps aux différences finies . . . 38
groupe . . . 46
structure . . . 20
théorie . . . 10, 20
κ-mètre . . . 17, 88
κ-métrisable . . . 92
mince
structure . . . 21
minimal
structure . . . 22
d-minimal
anneau . . . 40
corps . . . 40
groupe . . . 40
structure . . . 22
théorie . . . 22

N

Nagata-Higman . . . 42
nil, anneau . . . 40
nilpotent
élément . . . 40
anneau . . . 40
groupe . . . 47
κ-normal . . . 98
κ-norme . . . 90
noyau d'un espace topologique . . . 79

O

κ-ouvert . . . 92
κ-ouverte, application . . . 98

P

κ-parfait . . . 101
parfait, espace . . . 78
petit ensemble . . . 88
petite clôture . . . 109
point d'accumulation . . . 78
κ-point d'accumulation . . . 101
κ-point de condensation . . . 102
point isolé . . . 78
κ-polonais . . . 101
polonais, espace . . . 79
préordre . . . 66, 84
presque nilpotent, groupe . . . 57
presque résoluble, groupe . . . 56
presque stabilisateur local . . . 27
produit ordinal de Hessenberg . . . 23
produit ordinal naturel . . . 23
propriété d'indépendance . . . 55
propriété de l'arbre . . . 102
propriété de l'ordre . . . 52
propriété de l'ordre strict . . . 52
p-groupe de Prüfer . . . 46
pseudo-radicale, extension . . . 31

Q

quasi-régulier . . . 42

R

régulière, dimension . . . 110
régulier, cardinal . . . 88
radical de Jacobson . . . 42
radicale, extension . . . 31
rang de Cantor . . . 22, 23
rang de Cantor local . . . 26
rang de Cantor-Bendixson . . . 79
d'un ouvert . . . 79
rang de Morley . . . 24
rangs stratifiés . . . 54
relation
infiniment définissable . . . 60
relation d'équivalence
fine . . . 28
grossière . . . 28

S

Schlichting . . . 54

κ-séparable 93
simple
corps 54
groupe 72
théorie 54
somme directe 80
somme ordinale de Cantor 23
somme ordinale naturelle 23
squelette 88
stable
corps 52
structure 52
théorie 52
ω-stable
théorie 20
κ-stationnaire 100
structure
E-chirurgicale 106
d-minimale 22
abélienne 32
fortement minimale 22
globalement menue 22
globalement mince 22
menue 20
mince 21
minimale 22
omega-chirurgicale 106
stable 52
structure algébrique 68
structure algébrique inf. déf. 68
κ-suite 94
κ-suite extraite 94
super-chirurgical 106

T

théorème d'indépendance 72
théorie
$\aleph_0$-catégorique 20
ω-stable 20
d-minimale 22
menue 10, 20
simple 54
stable 52
κ-topologie induite 93
κ-topologie produit 93
type Lascar fort 72

U

ultrafiltre 103
κ-ultramétrique 99
uniform. infiniment définissable 72

V

κ-valeur d'adhérence 94
Vaught, conjecture de 10
κ-voisinage 92

W

Wedderburn-Artin, théorème 42