



# Combinatoire Elliptique et Marches dans des Cônes

Kilian Raschel

► **To cite this version:**

| Kilian Raschel. Combinatoire Elliptique et Marches dans des Cônes. Probabilités [math.PR].  
| Université de Tours / Région Centre, 2016. <tel-01367986>

**HAL Id: tel-01367986**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01367986>**

Submitted on 18 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université François-Rabelais  
de Tours



Année Universitaire : 2016–2017

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : **Mathématiques**

« **Combinatoire Elliptique et Marches dans des Cônes** »

présentée et soutenue publiquement le 16 septembre 2016 par

Kilian RASCHEL

**COMPOSITION DU JURY :**

M. Philippe BIANE	Directeur de Recherche	CNRS, Université Paris-Est
M. Philippe BOUGEROL (rapporteur)	Professeur des Universités	Université Pierre et Marie Curie
M <sup>me</sup> Mireille BOUSQUET-MÉLOU	Directrice de Recherche	CNRS, Université de Bordeaux
M. Christian KRATTENTHALER (rapporteur)	Professeur	Université de Vienne, Autriche
M <sup>me</sup> Irina KURKOVA	Professeur des Universités	Université Pierre et Marie Curie
M. Emmanuel LESIGNE	Professeur des Universités	Université de Tours
M. Wolfgang WOESS (rapporteur)	Professeur	Université technique de Graz, Autriche



# REMERCIEMENTS

Mes remerciements les plus vifs s'adressent à MM. Bougerol, Krattenthaler et Woess d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit, de venir à ma soutenance, ainsi que pour leur accompagnement bienveillant depuis de nombreuses années et les moments d'échanges, à Paris, Vienne, Graz — ou en Sologne pendant la récente conférence MADACA! — j'en suis très touché.

Ma reconnaissance profonde à Philippe Biane, Mireille Bousquet-Mélou, Irina Kurkova et Emmanuel Lesigne d'avoir bien voulu faire partie du jury ; à Philippe Biane, en outre, pour son intérêt et son soutien, à Mireille Bousquet-Mélou pour la richesse de nos discussions et sa contribution essentielle à mon ouverture dans le domaine de la combinatoire, à Irina Kurkova pour son soutien constant depuis le début de mon doctorat (neuf années déjà!) et les nombreuses discussions et collaborations scientifiques, et last but not least, à Emmanuel Lesigne pour son accueil chaleureux et enthousiaste au LMPT ainsi que pour sa confiance.

Cette période estivale précédant la soutenance, pendant laquelle le temps (mathématique) est comme suspendu, est sans doute l'occasion de regarder en arrière et de réaliser à quel point une trajectoire mathématique (au sens d'une carrière) est le fruit de rencontres. Je pense ici aux collègues des laboratoires de Tours et d'Orléans, aux membres du groupe de travail ALEA, aux collègues et anciens doctorants du LPMA, et plus généralement à tous les collègues rencontrés lors de diverses missions.

Je voudrais d'abord exprimer ma gratitude à mes coauteurs ; de toute évidence ils ont eu une influence décisive sur le contenu — et sur l'existence-même — de ce manuscrit. Je commence par Gerold Alsmeyer, qu'il soit remercié pour son amitié franco-allemande, les riches échanges et les invitations répétées dans l'équipe de probabilités de Münster. Je suis reconnaissant à Olivier Bernardi et Mireille Bousquet-Mélou pour notre travail commun et l'expérience d'une collaboration sur trois fuseaux horaires — dont l'efficacité a déjà été vantée par Cédric Villani dans son livre *Théorème vivant*. Je sais gré également à Alin Bostan (et dans une continuité thématique, à Bruno Salvy) pour les moments intenses passés ensemble — en témoignent à l'été 2016 nos trois semaines en exil au CIRM pour une recherche en binôme. Je pense également à une collaboration récente, avec Cédric Boutillier et Béatrice de Tilière : je les remercie de m'avoir initié à cette thématique si riche des modèles exactement solubles en mécanique statistique. Je sais gré à mes collaborateurs au sein du laboratoire tourangeau : Rim Essifi, Cédric Lecouvey et Marc Peigné. Une pensée particulière à Cédric et Marc pour leur accueil à mon arrivée au laboratoire et pour leur volonté commune (transmise!) de fédérer autour d'un axe probabilités-algèbre. J'envoie aussi toutes mes amitiés à Guy Fayolle pour son soutien depuis mon doctorat, ses visites à Bielefeld et Tours et notre collaboration enrichissante. J'adresse tous mes remerciements à Rodolphe Garbit pour notre collaboration suivie et profonde sur les marches dans les cônes dans leur aspect probabiliste. Un salut amical à Johan van Leeuwen pour nos échanges scientifiques et

son accueil toujours sympathique à Eindhoven, et enfin à Chi Tran et Pauline Laffite-Godillon pour notre collaboration à cheval entre analyse et probabilités — historiquement la première.

Bien qu'ils ne soient pas formellement — encore! — coauteurs, je pense ici aussi, pour des discussions abondantes et variées, à Marie Albenque, Vincent Bansaye, Nils Berglund, Hermine Biermé, François Chapon, Julien Courtiel, Manon Defosseux, Éric Fusy, Herwig Hauser, Cécile Mailler, Steve Melczer, Marni Mishna, Sami Mustapha, Thomas Simon, Pierre Tarrago, Martin Traizet, Vitali Wachtel, Michael Wallner. J'inclus enfin à ces quelques lignes mes deux doctorants, Sandro Franceschi et Amélie Trotignon, dont le début de thèse a précédé cette habilitation.

Je ne saurais trop insister sur l'excellente ambiance qui règne à tous points de vue au LMPT. Je remercie d'abord, pour leur soutien sans faille, les directions passées et présentes du LMPT et de la FDP — en particulier Guy Barles, Ahmad El Soufi, Jérôme Le Rousseau et Emmanuel Lesigne. Merci aussi aux secrétaires, notamment Anouchka Lepine, pour leur aide précieuse. Je pense enfin à l'agrégat constitué des probabilistes, algébristes et assimilés, amateurs de football et de gastronomie tourangelle : Guy Barles, Vincent Beck, Ariela Briani, Emmanuel Chasseigne, Vivien Despax, Olivier Durieu (un merci spécial à mon co-bureau pour l'ambiance agréable et studieuse du bureau!), Jean Fabbri, Thomas Gerber, Jean-Baptiste Gouéré, Jérémie Guilhot, Cédric Lecouvey, Sten Madec, Florent Malrieu, Marc Peigné, Vincent Perroll(az), Irvin Raschel, Pierre Tarrago.

Ce document a été rédigé pendant une affectation de six mois dans l'UMI PIMS, à Vancouver, dans des conditions de travail extraordinaires. Je voudrais exprimer toute ma gratitude envers mon employeur, le CNRS, pour son soutien lors de cette affectation, et adresser également mes sincères remerciements à Marni Mishna et Cédric Chauve, pour leur accueil si chaleureux et les conditions parfaites dont j'ai pu bénéficier grâce à eux.

Je profite de ces lignes pour adresser un salut amical à mes collègues du lycée Descartes, spécialement à Christophe Devulder et Romuald Esman.

Une dernière pensée toute particulière à ma famille, en premier lieu pour Gaëlle et les nouveaux-venus entre la thèse et l'HDR, Anton et Leopold, pour leur soutien et leur patience, dans les moments consacrés aux mathématiques.

*Tours, le 18 septembre 2016*

# AVANT-PROPOS

J'expose dans ce document de synthèse mes travaux postérieurs au doctorat, dans l'ordre chronologique [R7, R8, R9, R13, R1, R15, R6, R4, R17, R11, R10, R14, R12, R3, R5, R16, R2].

Deux grands thèmes prédominent dans ces travaux. Le premier concerne les processus aléatoires (à la fois marches aléatoires et mouvement Brownien) dans des cônes, sous des aspects différents et complémentaires. Les processus dans des cônes forment en effet une classe singulière d'objets, de par leur large applicabilité en théorie des probabilités (marches aléatoires non collisionnantes, marches aléatoires dans des chambres de Weyl, valeurs propres de matrices aléatoires, processus de Galton-Watson multitype, etc.) et en dehors (combinatoire, théorie des représentations, finance, biologie des populations). On retrouvera d'ailleurs ce caractère transverse dans les méthodes utilisées.

Le deuxième grand thème est issu de la mécanique statistique 2-dimensionnelle, et concerne des modèles intégrables (modèles de dimères, modèle d'Ising ou encore arbres et forêts couvrants). Ils appartiennent à la classe des modèles dits exactement solubles, ouvrant ainsi la voie à des formules exactes remarquables. Les fonctions spéciales — en particulier les fonctions elliptiques — joueront tout au long du manuscrit un rôle de premier plan.

Le Chapitre 1 est préliminaire aux Chapitres 2–6. Nous y présentons les modèles combinatoire et probabiliste des marches à petits pas dans un quart de plan, et rappelons certaines des propriétés clé des fonctions elliptiques.

Dans le Chapitre 2 intitulé « Fonctions elliptiques et expressions explicites », nous formulons notre apport au modèle combinatoire des marches dans le quart de plan par le biais de la théorie des fonctions elliptiques. Nous obtenons une formule unifiée (c'est-à-dire, pour tous les ensembles de sauts) pour la série génératrice de comptage. Appliquée au modèle de Gessel, elle fournit la première preuve humaine de la conjecture de Gessel.

Dans le Chapitre 3 nous nous intéressons au problème de la nature des séries génératrices de comptage : peut-on classifier les modèles selon la classe de leur série génératrice, au regard des catégories (présentées Section 1.6) algébriques, D-finies, non D-finies, et dans ce dernier cas éventuellement différentiellement algébriques ?

Le Chapitre 4 se propose d'étudier deux extensions naturelles du modèle des marches à petits pas dans le quart de plan : les sauts d'amplitude arbitrairement grande et les marches spatialement inhomogènes.

Le Chapitre 5 porte sur les temps de sortie de cônes de processus aléatoires (marches aléatoires et mouvement Brownien). Nous les aborderons de multiples façons, par des approches analytique et probabiliste ; nous ferons aussi un détour par l'établissement d'estimées fines dans la théorie des fluctuations de marches aléatoires en dimension 1.

C'est le concept des fonctions discrètes harmoniques qui est abordé dans le Chapitre 6. Nous obtenons à la fois des résultats quantitatifs (unicité de la fonction harmonique si le drift est nul, à titre d'exemple) et qualitatifs (expressions explicites). Par ailleurs notre méthode permet de mettre en exergue des liens entre la série génératrice des fonctions harmoniques, certaines représentations conformes et la notion d'invariants de Tutte.

Le Chapitre 7 est indépendant des Chapitres 2–6, à cela près qu'on y utilise tout autant les fonctions elliptiques. Nous introduisons une famille à un paramètre (dépendant du module elliptique) de Laplaciens massiques  $Z$ -invariants définis sur les graphes isoradiaux. Nous démontrons une formule explicite pour leur inverse, la fonction de Green massique, qui a la propriété remarquable de ne dépendre que de la géométrie locale du graphe. Nous expliquons les conséquences de ce résultat pour le modèle de mécanique statistique des forêts couvrantes enracinées, en particulier la preuve d'une transition de phase d'ordre 2 avec le modèle des arbres couvrants critiques sur les graphes isoradiaux.

Nous commençons chaque chapitre par un encadré bleu présentant les publications qu'il résume, et parsemons le document d'encadrés verts, pour autant de projets futurs.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>PRÉLIMINAIRES</b>	<b>3</b>
1.1	Objectifs du chapitre . . . . .	3
1.2	Marches à petits pas dans le quart de plan . . . . .	3
1.3	Quelques aspects techniques de l'approche analytique . . . . .	7
1.4	Probabilités et modèles à poids . . . . .	9
1.5	Fonctions elliptiques . . . . .	10
1.6	Classes de fonctions . . . . .	12
<b>2</b>	<b>FONCTIONS ELLIPTIQUES ET EXPRESSIONS EXPLICITES</b>	<b>13</b>
2.1	Une preuve humaine de la conjecture de Gessel . . . . .	14
2.2	Approche systématique pour obtenir des expressions de la série de comptage en termes de fonctions elliptiques . . . . .	19
2.3	Un critère pratique pour la finitude du groupe . . . . .	24
<b>3</b>	<b>NATURE DES SÉRIES GÉNÉRATRICES DE COMPTAGE</b>	<b>27</b>
3.1	Nature des fonctions dans le cas d'un groupe fini . . . . .	28
3.2	Non D-finitude de la série trivariée . . . . .	32
3.3	Non D-finitude de la série des excursions . . . . .	36
3.4	Invariants de Tutte et algébricité différentielle . . . . .	39
3.5	Une approche par compensation . . . . .	46
<b>4</b>	<b>MARCHES AVEC DES GRANDS SAUTS ET MARCHES INHOMOGÈNES</b>	<b>49</b>
4.1	Marches avec des grands sauts dans le quart de plan . . . . .	50

---

4.2	Marches inhomogènes dans le quart de plan . . . . .	57
<b>5</b>	<b>TEMPS DE SORTIE DE CÔNES</b>	<b>63</b>
5.1	Constante exponentielle de croissance . . . . .	64
5.2	Mouvement Brownien dans des cônes : aspects exacts et asymptotiques . . . . .	69
5.3	Fluctuations des marches en dimension 1 et applications . . . . .	72
<b>6</b>	<b>FONCTIONS DISCRÈTES HARMONIQUES</b>	<b>75</b>
6.1	Énoncé des résultats principaux . . . . .	76
6.2	Conséquences et remarques autour des Théorèmes 6.1 et 6.2 . . . . .	78
6.3	Idées de preuves et expressions exactes . . . . .	80
<b>7</b>	<b>LE LAPLACIEN MASSIQUE <math>Z</math>-INVARIANT SUR DES GRAPHEs ISORADIAUX</b>	<b>83</b>
7.1	Introduction . . . . .	83
7.2	Laplacien massique et formules locales . . . . .	86
7.3	Modèles de forêts couvrantes sur des graphes isoradiaux . . . . .	88
7.4	Graphes isoradiaux périodiques et courbes de Harnack . . . . .	90





# CHAPITRE 1

## PRÉLIMINAIRES

### 1.1 OBJECTIFS DU CHAPITRE

Nous souhaitons écrire ici une introduction commune aux Chapitres 2–6, qui de près ou de plus loin concernent un même modèle mathématique, celui des marches à petits pas dans le quadrant. Nous introduirons spécifiquement le Chapitre 7.

Nous commençons (Section 1.2) par présenter le modèle combinatoire, en particulier les raisons de l'intérêt qu'il suscite. Nous introduisons ses principales caractéristiques : sa série génératrice vérifie une équation fonctionnelle à noyau (un polynôme), noyau que stabilise un certain groupe diédral de transformations birationnelles. Cela conduit à une classification des modèles, selon la finitude du groupe. Nous établissons alors (Section 1.3) la base d'une approche analytique, consistant à voir les zéros du noyau comme une surface de Riemann. Nous élargissons notre propos en Section 1.4, où nous présentons le modèle probabiliste, avec des poids. La Section 1.5 concerne les fonctions elliptiques et liste quelques propriétés importantes, sans cesse utilisées dans la suite. Nous introduisons enfin brièvement (Section 1.6) différentes classes de fonctions : algébriques, D-finies, puis différentiellement algébriques.

### 1.2 MARCHES À PETITS PAS DANS LE QUART DE PLAN

PRINCIPALES MOTIVATIONS ET QUESTIONS. De nombreux objets combinatoires (comme des cartes, permutations [3, 57], arbres, tableaux de Young [74], partitions [95], marches dans des chambres de Weyl [73], files d'attente [44, 64, 65, 100], etc.) sont codés par des marches sur des réseaux, en particulier par des marches sur un quadrant, de sorte qu'en comprenant ces dernières, on comprendra mieux les objets.

Les nombres de marches dans le quadrant satisfont en outre des récurrences linéaires (cela provient de leur construction pas à pas) et la théorie de la nature algébrique des séries génératrices associées à des récurrences multivariées est riche [35, 36, 77].

On peut aussi voir les marches dans le quadrant comme formant un laboratoire de taille parfaite : il y a suffisamment de modèles pour observer une grande variété, tant dans les traitements que dans les résultats, mais des modèles qui suivent une même construction, et qui de ce fait présentent une certaine rigidité commune.

La théorie des probabilités apporte de nombreuses motivations supplémentaires. Les marches (aléatoires, donc !) réfléchies au bord du quadrant ont été étudiées pour leur récurrence/transience [5, 6, 58, 61] ou parce qu'elles sont l'analogie discret de diffusions dans le quart de plan [8]. Elles entretiennent des liens avec la théorie des représentations [16, 17, 18, 19, 20, 50] et la théorie du potentiel [96, 84, 28]. La modélisation de certaines populations en biologie [23, 41], comme encore l'étude de carnets d'ordre Markoviens en finance [45], fait apparaître des marches dans le quadrant.

Les marches dans le quart de plan appartiennent à la famille plus vaste des processus aléatoires dans des cônes, très étudiée, qui plus est par des méthodes radicalement différentes, cf. [21, 31, 46, 47, 48, 49, 54, 56, 69, 70, 81, 82, 83, 129, 139, 140, 141].

Ces modèles sont enfin l'occasion de développer des outils remarquables en soi, provenant par exemple de l'analyse complexe [111, 112, 113, 60] et du calcul formel [25, 88].

Les raisons susmentionnées ont incontestablement encouragé l'étude systématique des marches dans un quart de plan. Sur le réseau

$$\mathbb{N}^2 = \{0, 1, 2, \dots\}^2,$$

chaque point possède huit voisins (nous incluons les voisins diagonaux, cf. Figure 1.5). On peut alors choisir un sous-ensemble  $\mathfrak{S}$  de ces huit voisins et le considérer comme les pas admissibles d'une marche sur le réseau. On obtient alors  $2^8 = 256$  modèles de marches dans  $\mathbb{N}^2$  (voir les Figures 1.1 et 1.2 pour des exemples). Sur les deux demi-axes qui en forment son bord, on ne conserve que les sauts qui font rester la marche dans le quart de plan.

Bousquet-Mélou et Mishna ont montré [34] qu'après l'élimination des cas triviaux et des cas équivalents à des modèles de marches dans le demi-plan (déjà traités [36]), il reste 79 modèles inhéremment différents, dont quatre exemples historiquement importants sont représentés sur la Figure 1.1.

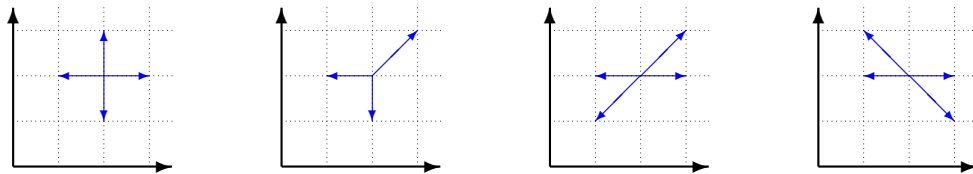


FIGURE 1.1 : De gauche à droite : les marches dites simple, de Kreweras, de Gessel et de Gouyou-Beauchamps

Les questions d'intérêt concernent alors les nombres

$$q_{\mathfrak{S}}(i, j; n) = \#\{\text{chemins de } \mathbb{N}^2 \text{ longs de } n \text{ pas de } \mathfrak{S}, \text{ joignant } (0, 0) \text{ à } (i, j)\}.$$

Elles sont les suivantes :

1. Que vaut  $q_{\mathfrak{S}}(i, j; n)$ ?<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Il serait bien sûr possible de compter ces nombres de trajectoires, mais le coût calculatoire serait énorme. Ici, nous posons la question de l'éventuelle existence d'une expression close pour ces nombres de marches ou pour leur série génératrice.

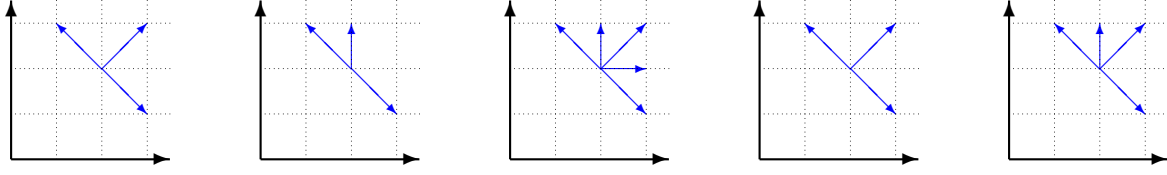


FIGURE 1.2 : Les 5 modèles singuliers étudiés dans [120, 116]

2. Quel est le comportement asymptotique du nombre de marches se terminant en un point donné ou dans une région fixée (un axe par exemple), lorsque leur longueur  $n$  tend vers l'infini ?
3. Quelle est la nature de la série génératrice du nombre de marches : est-elle par exemple différentiellement algébrique, D-finie, algébrique, ou même rationnelle ?<sup>2</sup>

Ces questions (de nature à la fois qualitative et quantitative) illustrent tant la variété des questions que celle des réponses que nous essaierons d'apporter.

ÉQUATION FONCTIONNELLE À NOYAU. Il est commode de coder les nombres  $q_{\mathfrak{S}}(i, j; n)$  dans leur série génératrice dite trivariée

$$Q(x, y; t) = \sum_{i, j, n \geq 0} q_{\mathfrak{S}}(i, j; n) x^i y^j t^n. \quad (1.1)$$

La première remarque fondamentale, faite par Bousquet-Mélou [29], est que la série génératrice (1.1) satisfait l'identité

$$K(x, y; t)Q(x, y; t) = K(x, 0; t)Q(x, 0; t) + K(0, y; t)Q(0, y; t) - K(0, 0; t)Q(0, 0; t) - xy, \quad (1.2)$$

une équation fonctionnelle à noyau avec deux variables catalytiques<sup>3</sup> ( $x$  et  $y$ ). Dans l'équation (1.2),  $K$  est le noyau en question, égal à

$$K(x, y; t) = xy \left( t \sum_{(i, j) \in \mathfrak{S}} x^i y^j - 1 \right). \quad (1.3)$$

La preuve de (1.2) est élémentaire, il suffit d'exprimer une marche de longueur  $n + 1$  comme une marche de longueur  $n$  à laquelle on ajoute un pas, tout en prenant garde au comportement au bord. L'interprétation combinatoire du noyau est claire : la quantité  $\sum_{(i, j) \in \mathfrak{S}} x^i y^j$  inventorie les sauts de l'ensemble  $\mathfrak{S}$ .

<sup>2</sup>A priori, cette question peut paraître moins naturelle que les deux précédentes. Elle est en fait motivée par (au moins) deux éléments : elle permet d'abord de classier les 79 modèles selon la nature de la série génératrice ; en outre, si la fonction s'avère algébrique ou D-finie, trouver l'asymptotique de ses coefficients est bien plus facile, voir [63]. Nous renvoyons à la Section 1.6 pour la définition précise de ces classes de fonctions.

<sup>3</sup>Le terme catalytique renvoie au fait que les variables  $x$  et  $y$  sont utilisées pour établir l'équation (1.2), qui typiquement sera par la suite évaluée en  $x, y \in \{0, 1\}$ .

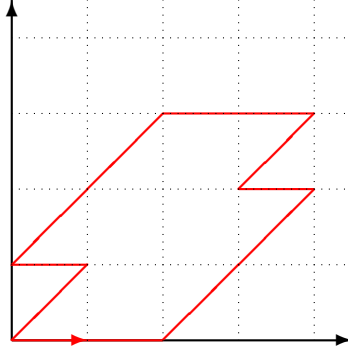


FIGURE 1.3 : L'une des 8004 excursions (marches partant et revenant en l'origine) de longueur 12 de la marche de Gessel, avec sauts possibles aux voisins  $\{(1, 0), (1, 1), (-1, 0), (-1, -1)\}$ , voir Figure 1.1

L'hypothèse des petits pas implique que  $K$  est un polynôme de degré 2 en  $x$  et  $y$ . On utilisera souvent l'expression développée du noyau, à savoir<sup>4</sup>

$$K(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = \tilde{a}(y)x^2 + \tilde{b}(y)x + \tilde{c}(y). \quad (1.4)$$

Adoptons la notation

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathfrak{S}, \\ 0 & \text{si } (i, j) \notin \mathfrak{S}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans (1.4) valent alors (et des identités similaires pourraient être écrites pour  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  et  $\tilde{c}$ )

$$\begin{cases} a(x)/t &= \delta_{1,1}x^2 + \delta_{0,1}x + \delta_{-1,1}, \\ b(x)/t &= \delta_{1,0}x^2 - x/t + \delta_{-1,0}, \\ c(x)/t &= \delta_{1,-1}x^2 + \delta_{0,-1}x + \delta_{-1,-1}. \end{cases}$$

**GROUPE DE LA MARCHÉ ET CLASSIFICATION.** Ce groupe est pour la première fois introduit par Malyshev dans l'article [111], à des fins probabilistes. Il s'agit d'un groupe de transformations birationnelles de  $\mathbb{C}^2$  qui laissent la fonction  $\sum_{-1 \leq i, j \leq 1} \delta_{i,j} x^i y^j$  invariante; ses générateurs sont

$$\Psi(x, y) = \left( x, \frac{c(x)}{a(x)} \frac{1}{y} \right), \quad \Phi(x, y) = \left( \frac{\tilde{c}(y)}{\tilde{a}(y)} \frac{1}{x}, y \right). \quad (1.6)$$

Clairement  $\Psi \circ \Psi = \Phi \circ \Phi = \text{id}$  et  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  est un groupe diédral, d'ordre pair supérieur ou égal à 4, possiblement infini. L'ordre est calculé dans [34] pour chacun des 79 cas : 23 marches admettent un groupe fini (alors d'ordre 4, 6 ou 8) et les 56 autres un groupe infini. Les marches de la Figure 1.1 admettent un groupe fini, à l'inverse de celles représentées Figures 1.2 et 3.6.

**EXPRESSIONS EXPLICITES POUR LES SÉRIES GÉNÉRATRICES.** Il existe plusieurs types d'approches pour répondre à la question 1 formulée plus haut. Bousquet-Mélou et Mishna dans [34] furent les premières à proposer une approche unifiée : elles obtiennent pour 22 des 79 modèles une expression pour la série génératrice trivariée (1.1).

<sup>4</sup>Nous prendrons une certaine liberté vis-à-vis de la variable  $t$ , n'hésitant pas à l'enlever des notations — à moins qu'il y ait ambiguïté ou que nous souhaitions insister.

Le nombre 22 peut paraître surprenant : il vient du fait que l'approche fonctionne dès lors que le groupe est fini (à l'exception de la marche de Gessel, représentée Figure 1.1, qui bien que disposant d'un groupe fini n'est pas résolue dans [34] — elle le sera néanmoins plus tard dans [33]). La marche de Gessel a été (d'abord) résolue par des méthodes radicalement différentes, grâce aux travaux [25] qui utilisent de façon cruciale des calculs sur ordinateur. Pour les 56 cas restants (et en fait pour tous les cas) on pourra consulter [132], où des expressions sous forme d'intégrales de Cauchy sont obtenues pour la série (1.1) (voir aussi [120, 116] pour une analyse fine des cinq cas dits singuliers représentés sur la Figure 1.2).

Les expressions pour (1.1) sont variées : elles sont des parties positives de séries de Laurent dans [34], des expressions par radicaux dans [25, 34], des expressions intégrales dans [132], des séries formelles dans [120, 116].

### 1.3 QUELQUES ASPECTS TECHNIQUES DE L'APPROCHE ANALYTIQUE

L'idée centrale est d'introduire

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y) = 0\} \quad (1.7)$$

et de s'intéresser à la structure complexe de  $\mathcal{K}$  (c'est-à-dire comme surface de Riemann). Par un jeu facile de réécriture, on a  $K(x, y) = 0$  si et seulement si  $(2a(x)y + b(x))^2 = d(x)$ , où

$$d(x) = b(x)^2 - 4a(x)c(x) \quad (1.8)$$

est le discriminant du noyau. Construire la surface de Riemann (1.7) revient donc à construire la surface de Riemann de la racine carrée de  $d(x)$ , qui pour les 74 modèles non singuliers est un polynôme du troisième ou quatrième degré, à racines distinctes (au moins pour  $t \in (0, 1/\#\mathfrak{S})$ ). Les racines de  $d$  sont notées  $x_1, \dots, x_4$ , avec<sup>5</sup>

$$|x_1| \leq |x_2| = x_2 \leq 1 \leq |x_3| = x_3 \leq |x_4|,$$

avec la convention que  $x_4 = \infty$  si le degré de  $d$  vaut 3.

La construction de la surface de Riemann de racines carrées de polynômes est standard [86]. Pour les degrés 3 et 4, on obtient une surface de Riemann de genre 1 (cela concerne les 74 modèles non singuliers — elle serait de genre 0 pour les cas singuliers) et les racines de  $d$  s'interprètent comme des points de branchement de la fonction algébrique  $Y(x)$  définie par  $K(x, Y(x)) = 0$ , dont l'expression est

$$Y(x) = \frac{-b(x) \pm \sqrt{d(x)}}{2a(x)}.$$

La fonction  $Y$  a deux branches,  $Y_0$  et  $Y_1$ , qui sont méromorphes sur le plan coupé<sup>6</sup>

$$\mathbb{C} \setminus ([x_1, x_2] \cup [x_3, x_4])$$

de la Figure 1.4. Il s'avère qu'on peut fixer les notations en imposant l'inégalité  $|Y_0| \leq |Y_1|$ . La fonction algébrique  $X(y)$  définie par  $K(X(y), y) = 0$  vérifie des énoncés symétriques. Nous renvoyons à [60, Chapitres 2 et 5] pour les preuves de ces différents résultats.

<sup>5</sup>De façon symétrique on introduit le polynôme  $\tilde{d}(y) = \tilde{b}(y)^2 - 4\tilde{a}(y)\tilde{c}(y)$  et ses racines  $y_1, \dots, y_4$ .

<sup>6</sup>Ci-dessous, dans le cas où  $x_4 < 0$ , l'ensemble  $[x_3, x_4]$  doit être compris comme  $[x_3, \infty) \cup \{\infty\} \cup (-\infty, x_4]$ .

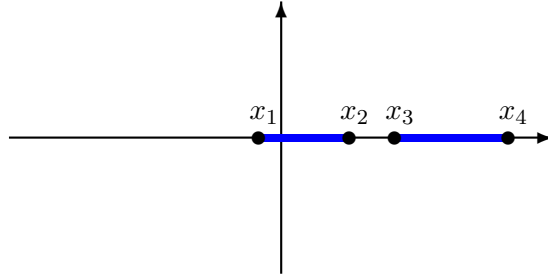


FIGURE 1.4 : Les fonctions  $Y_0$  et  $Y_1$  sont méromorphes sur le plan coupé  $\mathbb{C} \setminus ([x_1, x_2] \cup [x_3, x_4])$

En particulier,  $\mathcal{K}$  hérite de ce point de vue la structure d'un tore, que nous verrons comme un parallélogramme (on pourra se référer à la Figure 2.1 pour une représentation du parallélogramme, qui sera systématiquement un rectangle ici) dont les bords sont identifiés :

$$\mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}),$$

où les périodes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  admettent les expressions

$$\omega_1 = i \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{-d(x)}}, \quad \omega_2 = \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{d(x)}}. \quad (1.9)$$

On peut aller plus loin et uniformiser (ou paramétriser) la surface de Riemann  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\mathcal{K} = \{(x(\omega), y(\omega)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})\},$$

où  $x(\omega)$  et  $y(\omega)$  sont des fonctions de la variable uniformisante  $\omega$ . Si on utilise la paramétrisation standard de Weierstrass avec les fonctions elliptiques de Weierstrass, à savoir<sup>7</sup>

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\} = \{(\wp(\omega), \wp'(\omega)) : \omega \in \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})\}, \quad (1.10)$$

on aboutit à (avec  $d$  comme en (1.8))

$$x(\omega) = \begin{cases} x_4 + \frac{d'(x_4)}{\wp(\omega) - d''(x_4)/6} & \text{si } x_4 \neq \infty, \\ \frac{6\wp(\omega) - d''(0)}{d'''(0)} & \text{si } x_4 = \infty. \end{cases} \quad (1.11)$$

On a deux choix si l'on souhaite écrire une formule pour  $y(\omega)$ . On peut d'abord définir  $y$  à partir de  $x$  (première égalité dans (1.12)) ou préférer une définition symétrique à (1.11) (deuxième identité ci-dessous) :

$$y(\omega) = \frac{-x'(\omega)/2 - b(x(\omega))}{2a(x(\omega))} = \begin{cases} y_4 + \frac{\tilde{d}'(y_4)}{\wp(\omega - \omega_3/2) - \tilde{d}''(y_4)/6} & \text{si } y_4 \neq \infty, \\ \frac{6\wp(\omega - \omega_3/2) - \tilde{d}'''(0)}{\tilde{d}'''(0)} & \text{si } y_4 = \infty. \end{cases} \quad (1.12)$$

<sup>7</sup>Dans l'équation (1.10),  $g_2$  et  $g_3$  sont des invariants. Les périodes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans le terme de droite de (1.10) s'expriment à partir de ces invariants par des formules similaires à (1.9).

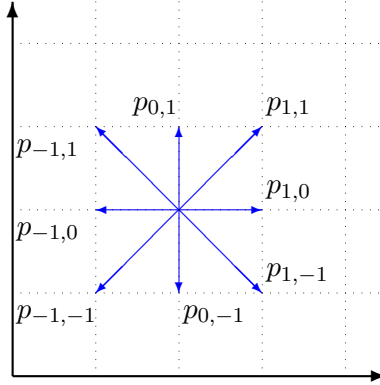


FIGURE 1.5 : Probabilités de transition à l'intérieur du quart de plan

Cette deuxième définition fait apparaître, après  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , une troisième période  $\omega_3$ , dont l'expression est<sup>8</sup>

$$\omega_3 = \int_{X(y_1)}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{d(x)}}. \quad (1.13)$$

#### 1.4 PROBABILITÉS ET MODÈLES À POIDS

En plus du modèle combinatoire sans poids présenté Section 1.2, on étudiera des modèles combinatoires avec poids ou encore des modèles probabilistes (c'est-à-dire des marches aléatoires), également avec poids. Nous ferons alors les hypothèses suivantes :

- (H1) La marche est homogène à l'intérieur du quart de plan, avec des probabilités de transition  $\{p_{i,j}\}_{-1 \leq i,j \leq 1}$  non nulles aux huit plus proches voisins seulement, voir la Figure 1.5.
- (H2) Dans la liste orientée  $p_{1,1}, p_{1,0}, p_{1,-1}, p_{0,-1}, p_{-1,-1}, p_{-1,0}, p_{-1,1}, p_{0,1}$  ne se trouvent pas trois zéros consécutifs.

L'hypothèse (H2) équivaut à exclure les marches singulières en combinatoire (et leurs rotations). Les conditions (H1) et (H2) ne spécifient pas le comportement au bord de la marche aléatoire : nous rencontrerons effectivement plusieurs modèles, certains réfléchis au bord, d'autres absorbés.

Pour ces modèles à poids, le noyau  $K$  dans (1.3) devient

$$K(x, y; t) = xy \left( t \sum_{-1 \leq i,j \leq 1} p_{i,j} x^i y^j - 1 \right),$$

et les différents faits énoncés en Section 1.3 se maintiennent dans ce contexte.

<sup>8</sup>Cette période  $\omega_3$  est absolument cruciale : elle exprime en effet la façon dont les variables  $x$  et  $y$  se mélangent, puisqu'elle mesure l'écart entre les parallélogrammes fondamentaux de  $x(\omega)$  et  $y(\omega)$ , cf. Figure 2.1. Nous verrons d'ailleurs dans le Chapitre 2 qu'elle est aussi liée au groupe, qui est fini si et seulement si  $\omega_3/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ .



À plusieurs reprises nos résultats feront appel au drift (ou dérive) de la marche aléatoire, fourni par

$$\vec{D} = \left( \sum_{-1 \leq i, j \leq 1} i \cdot p_{i,j}, \sum_{-1 \leq i, j \leq 1} j \cdot p_{i,j} \right). \quad (1.14)$$

## 1.5 FONCTIONS ELLIPTIQUES

FONCTIONS ELLIPTIQUES DE WEIERSTRASS. Cette courte section se veut la guide de ce document pour ce qui a trait aux fonctions elliptiques. Soient  $\wp$  et  $\zeta$  les fonctions de Weierstrass associées à un couple de périodes  $\omega_1, \omega_2$ . Par définition,

$$\wp(\omega) = \frac{1}{\omega^2} + \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left\{ \frac{1}{(\omega - n_1\omega_1 - n_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^2} \right\}, \quad (1.15)$$

$$\zeta(\omega) = \frac{1}{\omega} + \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left\{ \frac{1}{\omega - n_1\omega_1 - n_2\omega_2} + \frac{1}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2} + \frac{\omega}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^2} \right\}. \quad (1.16)$$

Voici les propriétés que nous utiliserons le plus. Nous renvoyons aux ouvrages [1, 86, 102] pour les démonstrations et d'autres énoncés.

(P1) La fonction  $\zeta$  (resp.  $\wp$ ) a un unique pôle dans le parallélogramme fondamental  $[0, \omega_1) + [0, \omega_2)$ . Il se situe en 0, est d'ordre 1 (resp. 2) et de résidu 1 (resp. partie principale<sup>9</sup>  $1/\omega^2$ ). La fonction  $\wp$  est  $(\omega_1, \omega_2)$ -périodique, tandis que  $\zeta$  est quasi-périodique, dans le sens où

$$\zeta(\omega + \omega_1) = \zeta(\omega) + 2\zeta(\omega_1/2), \quad \zeta(\omega + \omega_2) = \zeta(\omega) + 2\zeta(\omega_2/2).$$

(P2) Une fonction elliptique sans pôle dans un parallélogramme des périodes est constante.

(P3) La fonction  $\wp$  satisfait  $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - \wp(\frac{\omega_1}{2}))(\wp - \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}))(\wp - \wp(\frac{\omega_2}{2}))$ .

(P4) Les fonctions  $\zeta$  et  $\wp$  vérifient les formules d'addition

$$\begin{cases} \zeta(\omega + \tilde{\omega}) &= \zeta(\omega) + \zeta(\tilde{\omega}) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(\omega) - \wp'(\tilde{\omega})}{\wp(\omega) - \wp(\tilde{\omega})}, \\ \wp(\omega + \tilde{\omega}) &= -\wp(\omega) - \wp(\tilde{\omega}) + \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(\omega) - \wp'(\tilde{\omega})}{\wp(\omega) - \wp(\tilde{\omega})} \right)^2. \end{cases}$$

(P5) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions elliptiques de mêmes périodes et non constantes. Il existe un polynôme  $P$  non nul de deux variables tel que  $P(f, g) = 0$ .

(P6) Soient  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_p \in \mathbb{C}$ . Une fonction du type

$$f(\omega) = c + \sum_{\ell=1}^p r_\ell \zeta(\omega - \tilde{\omega}_\ell) \quad (1.17)$$

est elliptique si et seulement si  $\sum_{\ell=1}^p r_\ell = 0$ .

<sup>9</sup>Rappelons si  $h$  est méromorphe autour de  $\omega_0 \in \mathbb{C}$ , avec développement  $h(\omega) = \sum_{i=-p}^{\infty} h_i(\omega - \omega_0)^i$ , sa partie principale en  $\omega_0$  sera  $\sum_{i=-p}^{-1} h_i(\omega - \omega_0)^i$ .

(P7) Soit  $f$  une fonction elliptique avec (dans le parallélogramme fondamental) pôles aux points  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_p$ , de parties principales

$$F_i(\omega) = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{r_{i,k}}{(\omega - \tilde{\omega}_i)^k}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

À une constante additive près, on a l'égalité

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^p r_{i,1} \zeta(\omega - \tilde{\omega}_i) + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{n_i} r_{i,k} (-1)^{k-1} \wp^{(k-1)}(\omega - \tilde{\omega}_i).$$

(P8) L'identité de Frobenius-Stickelberger affirme que si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , alors

$$(\zeta(\alpha) + \zeta(\beta) + \zeta(\gamma))^2 = \wp(\alpha) + \wp(\beta) + \wp(\gamma).$$

(P9) La formule de dissection se lit

$$\begin{aligned} \wp(\omega/2) = \wp(\omega) &+ \sqrt{\left\{ \wp(\omega) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right\} \left\{ \wp(\omega) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \right\}} \\ &+ \sqrt{\left\{ \wp(\omega) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right\} \left\{ \wp(\omega) - \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right\}} \\ &+ \sqrt{\left\{ \wp(\omega) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \right\} \left\{ \wp(\omega) - \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right\}}. \end{aligned}$$

(P10) Soit  $p$  un entier strictement positif. La fonction elliptique de Weierstrass de périodes  $(\omega_1, \omega_2/p)$  peut s'écrire en termes de  $\wp$  (avec périodes  $(\omega_1, \omega_2)$ ) comme

$$\wp(\omega) + \sum_{\ell=1}^{p-1} \left\{ \wp\left(\omega + \ell\frac{\omega_2}{p}\right) - \wp\left(\ell\frac{\omega_2}{p}\right) \right\}.$$

FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI. Introduisons tout de suite les intégrales elliptiques complètes de la première et seconde espèce :

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}}, \quad E = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau} d\tau. \quad (1.18)$$

Soit aussi  $K' = K'(k) = K(k')$ , où  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  désigne le module elliptique complémentaire.

Il y a 12 fonctions elliptiques de Jacobi ; chacune d'elle correspond au tracé d'une flèche d'un des coins du rectangle de la Figure 1.6 vers un autre. Convenons que ces coins sont étiquetés par les lettres s, c, d et n. Ces points correspondent (dans l'ordre) à 0,  $K$  sur l'axe réel,  $K + iK'$  et  $iK'$  sur l'axe imaginaire. Les quantités  $K$  dans (1.18) et  $iK'$  sont appelées les quarts de périodes.

Les douze fonctions de Jacobi sont alors  $\text{pq}(\cdot|k)$ , où p et q sont tous deux une lettre (différente) parmi s, c, d et n. Elles sont caractérisées comme étant les uniques fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ , doublement périodiques et vérifiant les propriétés suivantes [1, Chapitre 16] :

- Il y a un zéro simple en p et un pôle simple en q.

- La flèche de  $p$  vers  $q$  est une demi-période de  $pq(\cdot|k)$ . La fonction  $pq(\cdot|k)$  est également périodique dans les deux autres directions (l'une possiblement est diagonale) et la distance de  $p$  à l'un des autres coins est un quart de période.
- Le coefficient dominant dans le développement de  $pq(u|k)$  au voisinage de  $u = 0$  est 1. De façon équivalente, le terme dominant est  $u$ ,  $1/u$  ou 1, selon que  $u = 0$  est zéro, pôle ou point ordinaire de  $pq(\cdot|k)$ .

Ainsi par exemple,  $sc(\cdot|k)$  (la fonction de Jacobi la plus importante ici) possède un zéro simple en 0 (de résidu 1), un pôle simple en  $K$  et est doublement périodique selon  $2K$  et  $4iK'$ .

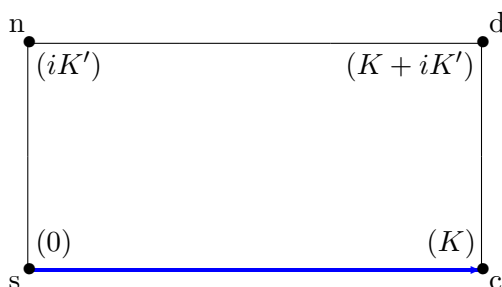


FIGURE 1.6 : Le rectangle  $[0, K] + [0, iK']$  et les points  $s, c, d, n$ . La flèche de couleur bleue de  $s$  vers  $c$  correspond à la fonction  $sc$

Les fonctions elliptiques contiennent comme limites les fonctions trigonométriques ( $k = 0$ ) et hyperboliques ( $k = 1$ ). Par exemple,  $sc$  dégénère pour  $k = 0$  en la fonction tangente, voir [102, Équations (2.1.18)–(2.1.20)] et pour  $k = 1$  en la fonction sinus hyperbolique, voir [102, (2.16.17)]. Dans ces cas l'une des périodes tend vers l'infini.

Nous aurons également besoin de la fonction

$$A(u|k) = -\frac{i}{k'} E(iu|k'), \quad \forall u \in \mathbb{C}, \quad (1.19)$$

définie partant de la fonction epsilon de Jacobi  $E(u|k) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(v|k) dv$ .

## 1.6 CLASSES DE FONCTIONS

Nous nous poserons beaucoup la question 3 de l'appartenance de certaines fonctions (le plus souvent, la série  $Q(x, y; t)$ ) à l'une des classes de fonctions suivantes : algébriques, D-finies ou différentiellement algébriques. Ces classes de fonctions se contiennent les unes les autres, la dernière étant la plus conséquente. Nous rappelons ici brièvement leur définition.

Une fonction  $f(x, y, t)$  est algébrique s'il existe une équation polynomiale  $P(x, y, t, f) = 0$ , où  $P$  est un polynôme non trivial avec des coefficients rationnels.

Une fonction  $f(x, y, t)$  est dite D-finie si l'espace vectoriel engendré par l'ensemble de ses dérivées partielles est de dimension finie sur le corps des fonctions rationnelles. Dans le cas d'une variable il est équivalent de dire que la fonction satisfait une équation différentielle linéaire, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles, voir [63].

$f(x, y, t)$  est différentiellement algébrique si pour chacune des variables  $x, y$  et  $t$ , elle satisfait une équation différentielle (*a priori* non linéaire) à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

## CHAPITRE 2

# FONCTIONS ELLIPTIQUES ET EXPRESSIONS EXPLICITES

Dans ce chapitre nous présentons les publications :

- [R3] A. Bostan, I. Kurkova et K. Raschel (2016). A human proof of Gessel’s lattice path conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1–29. DOI : <http://dx.doi.org/10.1090/tran/6804>
- [R14] I. Kurkova et K. Raschel (2015). New steps in walks with small steps in the quarter plane: series expressions for the generating functions. *Ann. Comb.* **19** 461–511
- [R8] G. Fayolle et K. Raschel (2011). Random walks in the quarter-plane with zero drift: an explicit criterion for the finiteness of the associated group. *Markov Process. Related Fields* **17** 619–636

La marche de Gessel est un serpent de mer<sup>10</sup>. D’abord au premier sens du terme, un monstre (légendaire) de la combinatoire des années 2000 : un modèle avec une formule conjecturée (par Gessel) pour les excursions, demeurant sans preuve malgré des efforts fournis et variés. Il a fallu attendre 2009 et des preuves par ordinateur [87, 25], basées sur des techniques de « guessing-proving », qu’il est absolument inimaginable de reproduire à la main (eu égard à leur complexité). C’est aussi un serpent de mer dans sa seconde acception, quelque chose auquel on pense et repense, un modèle pour lequel on voudrait trouver une démonstration naturelle, élémentaire. En témoignent les nouvelles preuves humaines données dans [33, R2]. On pourra consulter l’article de vulgarisation [27] pour davantage de détails sur ce modèle et ses tentatives (fructueuses ou non) de preuve.

Nous présentons d’abord, en Section 2.1, la première preuve humaine de la conjecture de Gessel, objet du travail [R3], qui s’énonce comme suit : lorsque  $\mathfrak{G} = \{(1, 0), (1, 1), (-1, 0), (-1, -1)\}$  est l’ensemble de sauts de Gessel (voir Figures 1.1 et 1.3), alors

$$q_{\mathfrak{G}}(0, 0; 2n) = 16^n \frac{(5/6)_n (1/2)_n}{(2)_n (5/3)_n}, \quad \forall n \geq 0, \quad (2.1)$$

où  $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$  désigne le symbole de Pochhammer. (Il est évident qu’il n’y a pas d’excursion possible lorsque le nombre de pas est impair.)

Bien que totalement spécifique *a priori*, nous expliquons dans la Section 2.2 comment notre approche peut s’étendre à tous les 74 modèles non singuliers. Nous verrons (et c’est sans doute

---

<sup>10</sup>Je me permets de reprendre ici une expression chère à Mireille Bousquet-Mélou.

une force du travail [R14]) que pour la première fois, la marche de Gessel n'apparaît pas comme une exception parmi les 23 modèles ayant un groupe fini. Concernant les modèles à groupe infini, nous montrons que plutôt que de considérer le groupe de la marche il convient d'en regarder un quotient. Ce nouveau groupe s'avère fini pour une infinité de valeurs de  $t$  (variable vue alors comme paramètre) et notre approche fonctionne alors pour ces  $t$ , ce qui permet *in fine* d'obtenir des expressions explicites de  $Q(x, y; t)$  en termes de fonctions elliptiques également pour ces modèles.

Finalement nous regardons dans la Section 2.3 un problème de nature différente, mais lui aussi lié aux expressions explicites en termes de fonctions elliptiques et au groupe (très présent dans [R14]). Nous donnons en effet un critère pour la finitude du groupe dans le cas d'ensembles de sauts ayant un drift nul. Cette section résume le travail [R8].

## 2.1 UNE PREUVE HUMAINE DE LA CONJECTURE DE GESSEL

Mieux que de démontrer la conjecture de Gessel (objet de la formule (2.1) pour les excursions) nous trouvons l'expression de la série trivariée  $Q(x, y; t)$ , partant de quoi nous sommes à même de formuler également la première preuve humaine de son algébricité, après [25].

Quitte à anticiper légèrement sur les notations, je voudrais donner tout de suite l'expression de  $Q(0, 0; t)$  que nous obtenons ici ; cela nous permettra de mieux appréhender le type d'objet que nous manipulerons constamment dans le Chapitre 2.

Introduisons les périodes  $\omega_1, \omega_2$  comme en (1.9) et  $\zeta_{1,3}$  la fonction zeta de Weierstrass associée au couple de périodes  $\omega_1, 3\omega_2$  (nous reportons à la Section 1.5 pour sa définition, en particulier (1.16)).

**Théorème 2.1** ([R3]). *Pour tout  $|t| < 1/4$ ,*

$$Q(0, 0; t) = \frac{\zeta_{1,3}(\omega_2/4) - 3\zeta_{1,3}(2\omega_2/4) + 2\zeta_{1,3}(3\omega_2/4) + 3\zeta_{1,3}(4\omega_2/4) - 5\zeta_{1,3}(5\omega_2/4) + 2\zeta_{1,3}(6\omega_2/4)}{2t^2}. \quad (2.2)$$

Faisons tout de suite quelques remarques autour du Théorème 2.1. Tout d'abord, le caractère algébrique de  $Q(0, 0; t)$  vient principalement de la nullité de la somme des coefficients devant les fonctions zeta multipliés par l'argument :

$$1 \cdot \frac{\omega_2}{4} - 3 \cdot \frac{2\omega_2}{4} + 2 \cdot \frac{3\omega_2}{4} + 3 \cdot \frac{4\omega_2}{4} - 5 \cdot \frac{5\omega_2}{4} + 2 \cdot \frac{6\omega_2}{4} = 0.$$

(La raison est donnée à la propriété (P6).) De plus, nous obtiendrons un énoncé analogue (au sens d'une somme de fonctions zeta) pour  $Q(x, 0; t)$  et  $Q(0, y; t)$ , voir le Théorème 2.3. Notons aussi que l'énoncé du Théorème 2.1 est *a priori* éloigné de la conjecture de Gessel (2.1), qui après passage à la série génératrice s'énonce<sup>11</sup>

$$Q(0, 0; t) = \frac{1}{2t^2} \left( {}_2F_1 \left( \left[ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} \right], \left[ \frac{2}{3} \right], 16t^2 \right) - 1 \right), \quad (2.3)$$

<sup>11</sup>Cette formulation constitue d'ailleurs l'énoncé original de la conjecture de Gessel.

où pour la fonction hypergéométrique de Gauss nous utilisons la notation

$${}_2F_1([a, b], [c], t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!}.$$

Nous mènerons un travail de transformation des fonctions elliptiques vers les fonctions hypergéométriques, utilisant notamment la théorie des transformations des fonctions elliptiques (qui consiste à lier des fonctions elliptiques associées à des couples de périodes différents mais dans un rapport rationnel, voir par exemple (P10)), de nombreuses identités sur les fonctions spéciales et des calculs de résultant (typiquement dans le but de démontrer que deux fonctions algébriques données par des expressions différentes sont en réalité égales).

### 2.1.1 MOTIVATIONS À RELEVER LES IDENTITÉS

Commençons par rappeler quatre leviers sur lesquels on peut agir d'un point de vue combinatoire. Avant tout il y a l'équation fonctionnelle (1.2), qui caractérise la série génératrice  $Q(x, y; t)$ . Un autre aspect important du modèle de Gessel est que son groupe  $G$  (introduit au Chapitre 1) est fini et d'ordre 8. On le vérifie en calculant les différentes composées des générateurs

$$\Psi(x, y) = \left(x, \frac{1}{x^2y}\right), \quad \Phi(x, y) = \left(\frac{1}{xy}, y\right). \quad (2.4)$$

La troisième caractéristique du modèle est une identité surprenante *a priori*, affirmant que la somme alternée de  $xy$  sur l'orbite de  $G$  est nulle, c'est-à-dire que

$$O(x, y) = \sum_{\chi \in G} (-1)^\chi \chi(xy) = 0. \quad (2.5)$$

Enfin on peut aussi spécifier l'équation fonctionnelle en des valeurs particulières de  $(x, y)$ , par exemple en des couples annulant le noyau. Faisons-le successivement pour  $(x, Y_0)$  et  $(x, Y_1)$  et formons la différence des deux identités ainsi obtenues ; on peut alors écrire

$$K(0, Y_0)Q(0, Y_0) - K(0, Y_1)Q(0, Y_1) = xY_0 - xY_1. \quad (2.6)$$

Le relèvement de ces quatre propriétés (particulières au modèle de Gessel) sur le revêtement universel présente deux avantages capitaux. En premier lieu, elles s'y expriment de façon franchement plus simple et moins spécifique : les générateurs  $\Psi$  et  $\Phi$  deviennent des fonctions affines ; la finitude du groupe s'exprime comme le fait qu'un quotient  $\omega_2/\omega_3$  est rationnel ; la nullité de la somme sur l'orbite de  $xy$  entraîne de façon immédiate l'algébricité ; enfin, l'équation (2.6) se traduit comme un prolongement méromorphe des séries génératrices, qui impliquera l'expression explicite du modèle de Gessel (notre Théorème 2.3).

Nous prendrons avantage de ce point de vue dans la Section 2.2, lorsque nous systématiserons notre approche à tous les modèles non singuliers.

### 2.1.2 RELÈVEMENT DES IDENTITÉS SUR LE REVÊTEMENT UNIVERSEL

Notre premier objectif est d'énoncer le Lemme 2.2, qui établit des propriétés utiles des fonctions génératrices. Ce résultat technique sera utilisé de façon cruciale à plusieurs endroits dans ce

manuscrit, notamment dans ce chapitre. On utilise les notations du Chapitre 1 ; en particulier,  $(x(\omega), y(\omega))$  désigne l'uniformisation (1.11)–(1.12) de la surface de Riemann  $\mathcal{K}$ , vue ici comme le parallélogramme  $\Pi_{0,0} = \omega_1[0, 1) + \omega_2[0, 1)$  dont on a identifié les bords opposés. Interprétant les générateurs (2.4) du groupe comme des automorphismes du tore, on trouve

$$\psi(\omega) = -\omega + \omega_1 + \omega_2, \quad \phi(\omega) = -\omega + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}. \quad (2.7)$$

En particulier, la finitude du groupe s'exprime par le fait que l'élément  $\phi \circ \psi$  est d'ordre 4, c'est-à-dire que  $4\omega_3 \in \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ . Comme  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont positifs, tandis que  $\omega_1$  est purement imaginaire, la condition est équivalente à  $4\omega_3 \in \omega_2\mathbb{N}$ .

Relevons d'abord les séries génératrices  $Q(x, 0)$  et  $Q(0, y)$  sur  $\Pi_{0,0}$  par les formules

$$\begin{cases} r(\omega) = K(x(\omega), 0)Q(x(\omega), 0), & \forall \omega \in \Delta_x, \\ s(\omega) = K(0, y(\omega))Q(0, y(\omega)), & \forall \omega \in \Delta_y, \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\Delta_x = \{\omega : |x(\omega)| < 1\}$  et  $\Delta_y = \{\omega : |y(\omega)| < 1\}$ , voir Figure 2.1. Introduisons les fonctions

$$f(\omega) = y(\omega) \cdot (x(-\omega + \omega_3) - x(\omega)), \quad g(\omega) = x(\omega) \cdot (y(-\omega) - y(\omega)). \quad (2.9)$$

On peut alors prolonger les séries génératrices à tout le plan complexe, vu comme le revêtement universel du tore  $\Pi_{0,0}$ .

**Lemme 2.2** ([R13]). *Les fonctions  $r(\omega)$  et  $s(\omega)$  peuvent se prolonger de façon méromorphe à tout le plan complexe  $\mathbb{C}$ . Les identités suivantes  $y$  sont vérifiées :*

$$r(\omega) + s(\omega) - K(0, 0)Q(0, 0) - x(\omega)y(\omega) = 0, \quad (2.10)$$

$$r(\omega - \omega_3) = r(\omega) + f(\omega), \quad (2.11)$$

$$s(\omega + \omega_3) = s(\omega) + g(\omega), \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} r(\psi(\omega)) = r(\omega), \\ s(\phi(\omega)) = s(\omega), \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} r(\omega + \omega_1) = r(\omega), \\ s(\omega + \omega_1) = s(\omega). \end{cases} \quad (2.14)$$

Faisons tout de suite quelques remarques autour du Lemme 2.2. Tout d'abord, (2.10) dit simplement que l'équation fonctionnelle est valable partout sur le revêtement universel. Les équations (2.11) et (2.12) correspondent exactement à (2.6) et permettent de prolonger pas à pas les fonctions relevées. L'équation (2.13) transfère l'invariance de  $x$  et  $y$  vis-à-vis de  $\psi$  et  $\phi$  vers celle de  $r$  et  $s$ . Enfin, (2.14) découle de la  $\omega_1$ -périodicité des coordonnées  $x$  et  $y$  de l'uniformisation.

### 2.1.3 EXPRESSION EXPLICITE POUR LA SÉRIE RELEVÉE

Cette section tourne autour du résultat principal ci-dessous (Théorème 2.3), qui propose une expression de  $s$  comme somme de fonctions zeta (un énoncé similaire pourrait être établi pour  $r$ ).

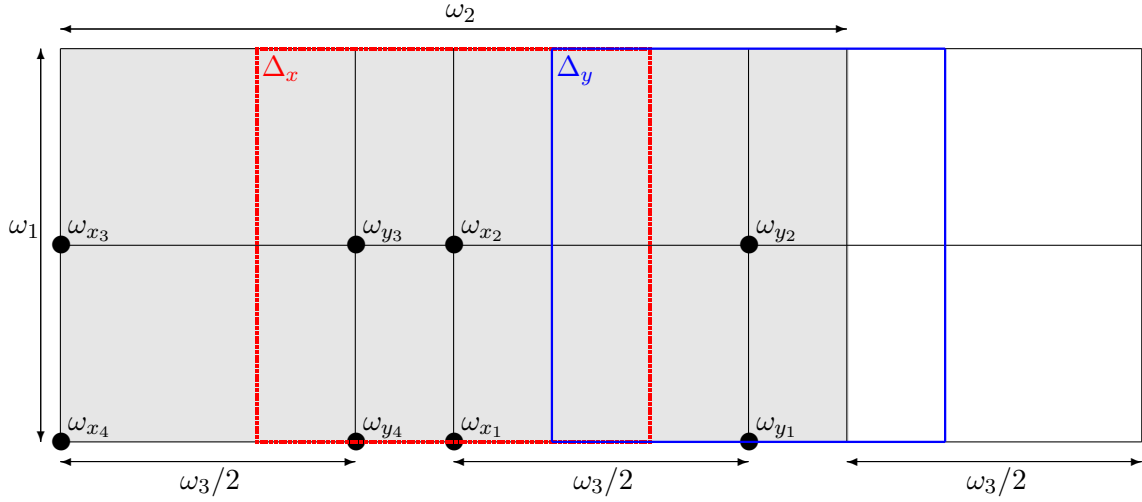


FIGURE 2.1 : Les parallélogrammes fondamentaux des fonctions  $r(\omega)$  and  $s(\omega)$ ,  $\Pi_{0,0} = \omega_1[0, 1) + \omega_2[0, 1)$  (grisé) et  $\Pi_{0,0} + \omega_3/2$ , sur lesquels on a représenté des points et caractéristiques importants

**Théorème 2.3** ([R3]). *Pour tout  $\omega \in \mathbb{C}$ ,*

$$\begin{aligned}
 s(\omega) = & c + \frac{1}{2t}\zeta_{1,3}(\omega - (1/8)\omega_2) - \frac{1}{2t}\zeta_{1,3}(\omega - (3/8)\omega_2) \\
 & + \frac{1}{2t}\zeta_{1,3}(\omega - (1 + 3/8)\omega_2) - \frac{1}{2t}\zeta_{1,3}(\omega - (1 + 5/8)\omega_2) \\
 & - \frac{1}{2t}\zeta_{1,3}(\omega - (1 + 7/8)\omega_2) + \frac{1}{t}\zeta_{1,3}(\omega - (2 + 1/8)\omega_2) \\
 & - \frac{1}{t}\zeta_{1,3}(\omega - (2 + 5/8)\omega_2) + \frac{1}{2t}\zeta_{1,3}(\omega - (2 + 7/8)\omega_2), \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

où  $c$  n'est fonction que de  $t$ .

Remarquons que le Théorème 2.1 sur les excursions est une conséquence du Théorème 2.3 (via la formule  $tQ(0, 0) = s(7\omega_2/8) - s(5\omega_2/8)$ , obtenue à partir de l'équation fonctionnelle (2.10), notant que  $x(5\omega_2/8) = 0$  et  $y(7\omega_2/8) = 0$ ). Mentionnons également que la constante  $c$  peut être trouvée : en effet, on a

$$s(7\omega_2/8) = K(0, y(7\omega_2/8))Q(0, y(7\omega_2/8)) = K(0, 0)Q(0, 0) = tQ(0, 0),$$

quantité explicitée par le Théorème 2.1. En conséquence  $c$  est égal à  $tQ(0, 0) - \widehat{\zeta}_{1,3}(7\omega_2/8)$ , où  $\widehat{\zeta}_{1,3}(\omega)$  est la somme des huit fonctions zeta dans (2.15).

Terminons cette section en donnant quelques idées de preuve du Théorème 2.3.

*Résumé de la démonstration.* Bien que cela ne soit pas nécessaire, il est commode de remarquer d'erechef que  $s$  est une fonction elliptique de périodes  $(\omega_1, 4\omega_3)$ . Pour le voir on peut itérer (2.12), ce qui conduit aussitôt à

$$s(\omega + 4\omega_3) - s(\omega) = g(\omega) + g(\omega + \omega_3) + g(\omega + 2\omega_3) + g(\omega + 3\omega_3).$$



Il s'avère que le membre de droite ci-dessus est rigoureusement nul puisque l'on reconnaît la somme alternée sur l'orbite (2.5), utilisant la définition (2.9) de  $g$ .

Tirons avantage de cette propriété : il suffit d'étudier  $s$  dans un parallélogramme des périodes, qui plus est seulement au travers de ses pôles. On peut faire cela une nouvelle fois avec (2.12), puisque les pôles de  $x$  et  $y$ , fonctions elliptiques explicites (voir (1.11)–(1.12)), sont connus. Une étude minutieuse donne alors un certain ensemble de pôles, qu'on « interpole » (grâce à la propriété (P7)) avec la formule (2.15) du Théorème 2.3.  $\square$

#### 2.1.4 ALGÈBRICITÉ DU MODÈLE DE GESSEL

ALGÈBRICITÉ EN LES VARIABLES CATALYTIQUES. Elle provient directement de l'expression donnée au Théorème 2.3 ci-dessus. En effet,  $s$  et  $y$  sont toutes deux elliptiques de périodes  $(\omega_1, 4\omega_3)$  : nous venons de le voir pour  $s$  ; quant à  $y$ , étant  $(\omega_1, \omega_2)$ -elliptique elle est *a fortiori*  $(\omega_1, 3\omega_2 = 4\omega_3)$ -périodique. On conclut avec le principe (P5) bien connu qu'il existe un lien algébrique non trivial entre tout couple de fonctions elliptiques partageant les mêmes périodes.

On prouverait de même que  $r(\omega)$  est algébrique en  $x(\omega)$  et, partant, que  $Q(x, 0)$  l'est vis-à-vis de  $x$ . L'algèbricité de  $Q(x, y)$  découle alors de l'équation fonctionnelle (1.2).

ALGÈBRICITÉ DE LA SÉRIE TRIVARIÉE. Il s'agit à présent de raffiner le résultat ci-dessus en  $y$  intégrant la variable  $t$ . Avant d'être spécifique, commençons par nous poser la question plus faible suivante : comment des nombres algébriques peuvent-ils surgir des fonctions (transcendantes) de Weierstrass ? La réponse vient de l'uniformisation (1.11)–(1.12). En effet, par construction on a (voir la Figure 2.1)

$$x(0) = x_4, \quad x\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = x_3, \quad x\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = x_2, \quad x\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = x_1,$$

de telle façon à ce que les quantités suivantes sont algébriques en  $t$  (rappelons en effet que les points de branchement le sont, voir aussi (1.11))

$$\wp_{1,2}\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \wp_{1,2}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad \wp_{1,2}\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

Par un jeu d'identités (notamment les formules d'addition (P4) et de dissection (P9), l'équation différentielle (P3)) on déduit qu'à moins d'être infini,  $\wp_{1,2}^{(\ell)}(k\omega_2/8)$  est algébrique quels que soient  $k$  et  $\ell$  (cet énoncé s'étend à tout multiple rationnel dyadique de  $\omega_2$ ). Le principe de transformation des fonctions elliptiques (P10) permet de transférer l'algèbricité à  $\wp_{1,3}^{(\ell)}(k\omega_2/8)$  pour tous  $k, \ell$ . Pour conclure on peut utiliser la formule addition (P4) pour la fonction zeta dans l'énoncé du Théorème 2.3.

UNE ALGÈBRICITÉ FRAGILE. Je voudrais anticiper ici les résultats présentés dans la Section 3.4 (résumant le travail [R2]), et remarquer à quel point l'algèbricité du modèle de Gessel est singulière. Si en effet la marche commence en  $(0, 1)$  plutôt qu'en  $(0, 0)$ , la série n'est plus algébrique ! (La même remarque s'applique d'ailleurs au modèle de Kreweras, non algébrique en partant de  $(0, 1)$ ). Précisément nous démontrerons que le modèle est algébrique en partant de l'état initial  $(i, j)$  si et seulement si

$$\sum_{\chi \in G} (-1)^\chi (x^{i+1} y^{j+1}) = 0. \quad (2.16)$$

Ainsi en un certain sens si l'on cherchait à résumer en une phrase l'algébricité de Gessel (et n'était-ce pas l'idée de Zeilberger qui dans [87] mit à prix l'existence d'une preuve compacte et élémentaire?) il faudrait simplement mentionner que  $O(x, y) = 0$ .

### 2.1.5 TRANSFORMATION ET OUVERTURE

EXPRESSION HYPERGÉOMÉTRIQUE. Comment passer de la somme des fonctions zeta du Théorème 2.1 à l'expression hypergéométrique (2.3)? D'un point de vue théorique la réponse est simple : on reprend (en les rendant effectifs) les calculs mentionnés dans le paragraphe « Algébricité de la série trivariée ». Mais si l'on veut donner un caractère humain à la preuve (et nous y prétendons) il y a là un travail d'optimisation. Nous le réalisons en choisissant dans (2.2) des regroupements particuliers de fonctions zeta, guidés par la formule de Frobenius-Stickelberger (P8). Nous ne rentrerons pas davantage ici dans les détails et renvoyons à [R3, Section 4] pour une lecture exhaustive.

NOUVELLES CONJECTURES DE GESSEL. Alors que nous avons terminé la rédaction de [R3] nous recevions un courriel de Ira Gessel, proposant les conjectures suivantes : définissons pour  $j \geq 0$

$$f_j(t) = (-1)^j (2j + 1)t^j + 2t^{j+1} \sum_{n \geq 0} q(0, j; 2n)t^n.$$

Alors pour tout  $j \geq 0$ , on aurait

$$f_j \left( t \frac{(1+t)^3}{(1+4t)^3} \right) = (-t)^j \frac{p_j(t)}{(1+4t)^{3/2+3j}}, \quad (2.17)$$

où  $p_j$  serait un polynôme de degré  $3j + 2$  avec coefficients entiers positifs. Il s'agit-là bien d'une généralisation de la conjecture historique, grâce à

$$f_0 \left( t \frac{(1+t)^3}{(1+4t)^3} \right) = \frac{1 + 8t + 4t^2}{(1+4t)^{3/2}}.$$

Notre approche pourrait probablement aussi les démontrer. En outre, nous expliquons dans [R3] le choix de la transformation algébrique universelle  $t \frac{(1+t)^3}{(1+4t)^3}$  en (2.17), par la notion de revêtement de Darboux d'équations hypergéométriques tétraédrales, découverte dans [143, Section 6.1].

## 2.2 APPROCHE SYSTÉMATIQUE POUR OBTENIR DES EXPRESSIONS DE LA SÉRIE DE COMPTAGE EN TERMES DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

D'un modèle riche mais unique, passons aux autres (presque) anonymes!

La première motivation du travail [99], en collaboration avec Irina Kurkova, est de « réhabiliter » les fonctions génératrices dans le cas des modèles disposant d'un groupe infini. En effet nous montrons que bien que non D-finies [R13] — et de ce fait difficilement analysables d'un point de vue combinatoire — les séries  $Q(x, y)$  le sont pratiquement, puisqu'elles sont D-finies en  $x, y$  pour une infinité de valeurs de  $t$ .

Nous obtenons une expression de la série génératrice  $Q(x, y)$  sous la forme d'une série de fonctions, chaque terme de la série étant une fraction rationnelle évaluée en une fonction elliptique

$\wp$  de Weierstrass réciproque. Ces expressions sous forme de séries peuvent paraître compliquées *a priori*, mais appliquées à des exemples concrets elles fournissent une information parfaitement exploitable; nous l'illustrerons en Section 2.2.3.

Notre approche dans [99] consiste à appliquer de façon constructive le célèbre théorème d'analyse complexe de Mittag-Leffler; en d'autres termes nous déduisons une expression de la série génératrice (1.1) partant de l'analyse de ses pôles. Plus précisément nous calculons d'abord les pôles des fonctions génératrices  $Q(x, 0)$  et  $Q(0, y)$  relevées sur le revêtement universel de la surface de Riemann (1.7), et nous démontrons ensuite que les séries  $Q(x, 0)$  et  $Q(0, y)$  sont simplement égales à la somme des parties principales en leurs pôles. Cela nous permet d'exprimer les fonctions génératrices comme des sommes infinies sur le revêtement universel de (1.7), où chaque terme utilise des points tels que  $x = \infty$  ou  $y = \infty$ .

### 2.2.1 GROUPE QUOTIENT

Jusqu'à présent nous avons considéré le groupe de la marche (cf. Chapitre 1) comme le groupe (diédral)  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  de transformations birationnelles (1.6) engendré par  $\Psi$  et  $\Phi$ . Puisque ces générateurs laissent la fonction  $\sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}} x^i y^j$  invariante, on peut aussi les voir comme des automorphismes de  $\mathcal{K}$  (voir (1.7)); on notera alors  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}}$  le nouveau groupe engendré. Puisque  $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}^2$  on a que  $\#\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}} \leq \#\langle \Psi, \Phi \rangle$  (une autre façon d'interpréter cette inégalité est de réaliser le premier groupe comme un quotient du second). On peut alors introduire

$$\mathcal{F} = \{t \in (0, 1/\#\mathfrak{S}) : \#\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}} < \infty\}. \quad (2.18)$$

**Théorème 2.4** ([R13]). *Pour les 51 modèles à groupe infini non singuliers, l'ensemble  $\mathcal{F}$  et son complémentaire  $(0, 1/\#\mathfrak{S}) \setminus \mathcal{F}$  sont tous deux denses dans  $(0, 1/\#\mathfrak{S})$ .*

À  $t$  fixé, la finitude de  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}}$  équivaut au fait que  $\omega_2/\omega_3 \in \mathbb{Q}$ , nous adopterons alors la notation générique (avec  $k$  et  $\ell$  premiers entre eux)

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{k}{\ell}. \quad (2.19)$$

Les ordres des deux groupes coïncident pour les 23 modèles à groupe fini. Transcrivons de plus l'exemple suivant, pris dans [131], qui illustre bien la richesse de ce groupe quotient. Si l'on prend pour support celui de la marche de Gouyou-Beauchamps (Figure 1.1) mais que l'on y met les poids (avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux)

$$p_{1,0} = p_{-1,0} = \frac{\sin^2(p\pi/q)}{2}, \quad p_{-1,1} = p_{1,-1} = \frac{\cos^2(p\pi/q)}{2},$$

alors le groupe quotient est d'ordre  $2q$ , tandis que le premier groupe devient infini (sauf pour  $p/q = 1/3$  ou  $1/4$ , dans ces cas l'ordre est le même).

### 2.2.2 ÉNONCÉ DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Soient  $g$  la fonction définie en (2.9),  $\omega_{x_1} = \frac{\omega_2}{2}$  et  $\omega_{y_2} = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{2}$ , cf. Figure 2.1.

**Théorème 2.5** ([R14]). *Pour les 74 modèles non singuliers de marches dans le quart de plan et tout  $t \in \mathcal{F}$ , soient  $g_i$  les pôles de  $g$  et  $F_{g_i,y}$  leur partie principale<sup>12</sup>. On a*

$$K(0, y(\omega))Q(0, y(\omega)) - K(0, y(\omega_{y_2}))Q(0, y(\omega_{y_2})) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{g_i \in \Pi_{0,0}-\omega_{x_1}} A_{s,p,n}^{g_i}(\omega),$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} A_{s,p,n}^{g_i}(\omega) = & -(\lfloor n/\ell \rfloor + 1)F_{g_i,y}(\omega + s\omega_2 + n\omega_3 + p\omega_1) \\ & -(\lfloor n/\ell \rfloor + 1)F_{g_i,y}(-\omega + 2\omega_{y_2} + s\omega_2 + n\omega_3 + p\omega_1) \\ & + 2(\lfloor n/\ell \rfloor + 1)F_{g_i,y}(\omega_{y_2} + s\omega_2 + n\omega_3 + p\omega_1). \end{aligned} \quad (2.20)$$

En outre, la série de termes  $(\sum_{g_i \in \Pi_{0,0}-\omega_{x_1}} A_{s,p,n}^{g_i}(\omega))$  est absolument convergente.

Dans le reste de cette section, nous précisons le Théorème 2.5 en formulant plusieurs remarques. Tout d'abord, un énoncé similaire pour  $Q(x, 0)$  pourrait être obtenu.

Le Théorème 2.5 ne fournit pas seulement une expression à des constantes additives près, mais détermine en fait complètement les séries génératrices. Soient en effet  $\omega_0^x \in \Pi_{0,0}$  et  $\omega_0^y \in \Pi_{0,0} + \omega_3/2$  tels que  $x(\omega_0^x) = 0$  et  $y(\omega_0^y) = 0$ . Les fonctions  $r$  et  $s$  sont alors égales à

$$\begin{cases} s(\omega) = (r(\omega_0^x) - r(\omega_{x_2})) - (r(\omega) - r(\omega_{x_2})) + x(\omega)y(\omega), \\ r(\omega) = (s(\omega_0^y) - s(\omega_{y_2})) - (s(\omega) - s(\omega_{y_2})) + x(\omega)y(\omega). \end{cases}$$

Le champ d'application du Théorème 2.5 est indépendant de la finitude du groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  et fournit des expressions sous forme de séries de fonctions pour les fonctions de comptage. Ces expressions sont différentes et alternatives à celles données dans [132] en termes de solutions de problèmes frontière. Cela nous semble plus explicite et dans ce sens plus satisfaisant.

Dans certains cas on peut retravailler l'expression énoncée dans le Théorème 2.5 jusqu'à obtenir une expression de  $Q(x, 0)$  avec  $x$ . Nous commenterons ceci dans la Section 2.2.3.

*Prima facie*, l'énoncé du Théorème 2.5 peut paraître technique, aussi voici une « todo list » si l'on a en main un modèle :

- D'abord, calculer  $x(\omega) \rightarrow$  (1.11)–(1.12)
- Après,  $g(\omega) \rightarrow$  (2.9)
- Ensuite les pôles et les parties principales  $F_{g_i,y}(\omega) \rightarrow$  Il n'y a ici pas de formule systématique, mais une analyse au cas par cas. Il n'y a pas de difficulté théorique dans la mesure où les zéros et pôles des fonctions elliptiques sont parfaitement compris. Notons que les pôles peuvent avoir pour ordre 1, 2 ou 3.
- Calculer  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3 \rightarrow$  (1.9) et (1.13)
- Dédire  $k$  et  $\ell \rightarrow$  (2.19)
- Calculer  $A_{s,p,n}^{g_i}(\omega) \rightarrow$  (2.20)
- Sommer comme dans l'énoncé du Théorème 2.5

---

<sup>12</sup>La notion de partie principale est introduite dans la note de bas de page numérotée 9.

### 2.2.3 EXPRESSIONS DES SÉRIES EN TERMES DES VARIABLES $x$ ET $y$

NULLITÉ ÉVENTUELLE DE LA SOMME SUR L'ORBITE. Le Théorème 2.5 fournit une expression explicite pour les fonctions  $r$  et  $s$  ; je voudrais expliquer ici comment tourner ces expressions en des fonctions des variables  $x$  et  $y$ . Il s'avère qu'il est commode de coupler l'énoncé du théorème avec l'identité suivante (qui résulte de  $k$  itérations de (2.12))

$$s(\omega + k\omega_2) = s(\omega) + O(\omega), \quad (2.21)$$

où l'on a noté pour la somme sur l'orbite

$$O(\omega) = g(\omega) + g(\omega + \omega_3) + \cdots + g(\omega + (\ell - 1)\omega_3).$$

L'équation (2.21) révèle donc, selon la nullité de  $O(\omega)$ , un comportement périodique ou quasi-périodique de  $s$ , qu'on va analyser successivement.

CAS ALGÈBRE. Si  $O(\omega) = 0$  alors (2.21) implique que  $s$  est  $(\omega_1, k\omega_2)$ -elliptique et donc algébrique en  $y(\omega)$  d'après (P5). Pour trouver l'équation algébrique en question on peut revenir au Théorème 2.5, qui fournit les pôles de  $s$  dans tout domaine souhaité.

On pourra (re)consulter la Section 2.1 pour un exemple détaillé (Gessel), où l'on rend explicite cette relation algébrique, ou encore se reporter à [R14, Sections 10–12] pour un second exemple, celui du fameux modèle de Kreweras (Figure 1.1).

CAS D-FINI NON ALGÈBRE. Si la somme  $O(\omega)$  n'est pas nulle il est avantageux d'introduire une fonction  $\varphi$  disposant des propriétés suivantes :

- $\varphi$  est globalement méromorphe sur  $\mathbb{C}$  ;
- $\varphi$  est  $\omega_1$ -périodique ;
- $\varphi(\omega + k\omega_2) = \varphi(\omega) + 1$ .

On vérifie facilement que la fonction suivante convient, construite partant de la fonction  $\zeta$  quasi-périodique :

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega_1}{2i\pi} \zeta(\omega; \omega_1, k\omega_2) - \frac{\omega}{i\pi} \zeta(\omega_1/2; \omega_1, k\omega_2). \quad (2.22)$$

La quasi-périodicité de  $\varphi$  et la relation (2.21) entraînent que  $s(\omega + k\omega_2) - \varphi(\omega)O(\omega)$  est  $k\omega_2$ -périodique et donc elliptique de périodes  $(\omega_1, k\omega_2)$ . On fait alors face au même problème que plus haut : on entend calculer une fonction elliptique caractérisée par ses pôles ; on étudie ces derniers via le Théorème 2.5.

Le titre de ce paragraphe évoque la D-finitude : observons en effet que la dérivée de  $\varphi(\omega)$  n'est autre que la fonction  $\wp(\omega; \omega_1, k\omega_2)$  (à des constantes près), qui est D-finie en  $x(\omega)$  ; des propriétés de clôture des fonctions D-finies permettent de conclure.

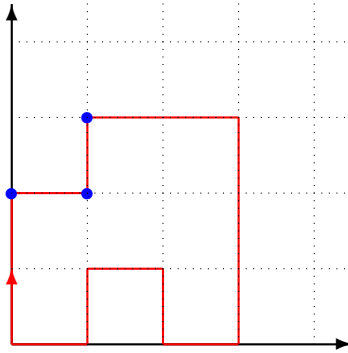


FIGURE 2.2 : Le chemin représenté ci-dessus a pour poids  $a^3t^{14}$  puisqu'il est de longueur 14 et qu'il possède 3 coins Nord-Est ou Est-Nord (marqués en bleu)

CAS NON D-FINI. Dans le cas du groupe infini, il devient franchement difficile de trouver une expression pour la série génératrice en termes de  $x$  et  $y$ . Cependant nous pouvons identifier une sous-classe de 9 modèles pour lesquels nous sommes aptes à énoncer un tel résultat. Ces 9 cas sont ceux de la Figure 3.6.

La raison en est la suivante. De façon générique, la dynamique des pôles (2.12) — que capture de façon compacte le Théorème 2.5 — est complexe et ne révèle pas de structure notable. Il s'avère que pour les 9 modèles dessinés sur la Figure 3.6, l'ensemble des pôles se représente comme une union d'un ensemble  $(\omega_1, \omega_2)$ -périodique et d'un autre  $(\omega_1, \omega_3)$ -périodique. En d'autres termes, la fonction  $s$  peut s'écrire comme la somme de deux fonctions, respectivement  $(\omega_1, \omega_2)$  et  $(\omega_1, \omega_3)$ -elliptique, et toutes deux explicitables en termes de  $x$ . Nous renvoyons à la Section 3.4 pour les détails.

PROJETS. Terminons la Section 2.2 en évoquant deux projets liés aux considérations ci-dessus.

[P1] *Étude de modèles de marches dans le quart de plan avec coins marqués*

Il s'agit-là d'une variation du modèle des chemins dans le quart de plan, dont l'étude pourrait bénéficier du Théorème 2.5. Cette variation consiste à ajouter au modèle une variable (disons  $a$ ) qui marque dans les chemins le nombre de coins Nord-Est ou Est-Nord (voir la Figure 2.2). L'objectif est alors d'étudier la série génératrice  $Q(x, y; t, a)$ . Ce modèle apparaît dans des problèmes de tris de permutations [3].

Des conjectures récentes ont été proposées, notamment dans [3, 57], présageant d'un comportement combinatoire intéressant. La première propriété conjecturale concerne une  $(a+1)$ -positivité des excursions, c'est-à-dire qu'on aurait

$$Q(0, 0; t, a) = \sum_{n \geq 0} t^{2n} P_n(a+1),$$

avec  $P_n(x) \in \mathbb{N}[x]$ . La deuxième prédiction de [3] est relative au rayon de convergence de  $Q(0, 0; t, a)$ , qui serait

$$\rho_Q(a) = \begin{cases} \frac{1}{(2 + \sqrt{2 + 2a})} & \text{si } a \geq -1/2, \\ \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{2}(1-a)} & \text{si } a \in [-1, -1/2]. \end{cases}$$

[P2] *Généralisation de la loi de l'arcsinus*

Un problème de temps d'occupation consiste à déterminer la loi de la proportion du temps passé par un processus aléatoire dans un domaine donné. Un exemple fameux est le temps d'occupation dans  $\mathbb{R}_+$  par un mouvement Brownien de dimension 1 : il suit la loi bien connue de l'arcsinus, comme l'a découvert Lévy.

Dans des cas pourtant simples comme les marches aléatoires ou le mouvement Brownien dans le quart de plan (et *a fortiori* dans des cônes plus généraux), la loi du temps d'occupation  $\tau$  est toujours inconnue ! Des résultats partiels ont été obtenus par Doney, Werner, etc., qui (essentiellement) ont étudié le comportement de la probabilité  $\mathbb{P}[\tau < t]$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Il s'avère que ce problème (au moins lorsque les cônes sont simples) a un parfum similaire à celui de l'énumération des marches dans un orthant  $\mathbb{N}^d$ . Pour ce qui concerne le quart de plan, le problème peut être réduit à un système de quatre équations fonctionnelles. Nous voudrions explorer ce problème important de la théorie des probabilités. C'est un projet partagé avec M. Bousquet-Mélou.

## 2.3 UN CRITÈRE PRATIQUE POUR LA FINITUDE DU GROUPE

### 2.3.1 LE GROUPE DE LA MARCHE EN TANT QUE FILTRE POUR LES MODÈLES

La théorie combinatoire des marches à petits pas dans des orthants  $\mathbb{N}^d$  a ceci de particulier qu'elle concerne un nombre fini mais conséquent de modèles (79 en dimension  $d = 2$ , plus de 11 millions en dimension 3, cf. [26], etc.). Nous sommes donc à la recherche de filtres, au sens de caractéristiques communes, permettant la classification de tous ces modèles.

On a déjà pu voir dans ce chapitre que la finitude du groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  — et peut-être davantage celle de son quotient  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}}$  — était déterminante, et cela apparaîtra de façon plus spectaculaire encore au Chapitre 3. Pour résumer, voici les contextes dans lesquels il est utile d'avoir un groupe fini :

- Trouver des formules closes pour les séries génératrices, typiquement par des méthodes algébriques généralisant le principe de réflexion [73] des marches dans des chambres de Weyl, voir [60, 34], ou via des calculs menés sur le revêtement universel de  $\mathcal{K}$  comme en Section 2.2 (qui reprend [R14]).
- Comprendre la nature algébrique de la série génératrice de comptage et ce faisant classifier les différents modèles de marches. Dans cette direction voir [34, R7, R13] ainsi que notre Chapitre 3, qui tout entier sera consacré à cette question.
- Obtenir le comportement asymptotique des coefficients des séries génératrices, voir notamment [98, 131, R9].

### 2.3.2 ÉNONCÉ ET REMARQUES AUTOUR DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Forts de ces constatations, nous nous proposons d'établir un critère permettant de décider de la finitude de ce groupe (résultat qui en outre fournit aussi l'ordre si ce dernier s'avère fini). Nous nous plaçons dans la situation probabiliste (plus générale) de la Section 1.4 et faisons l'hypothèse que le drift est nul, c'est-à-dire que  $\vec{D} = 0$ , voir (1.14). Notre critère requiert d'introduire l'angle

$$\theta = \arccos(-R), \quad \text{avec } R = \frac{\sum_{-1 \leq i, j \leq 1} ij p_{i,j}}{\sqrt{\sum_{-1 \leq i, j \leq 1} i^2 p_{i,j}} \cdot \sqrt{\sum_{-1 \leq i, j \leq 1} j^2 p_{i,j}}}. \quad (2.23)$$

Le nombre  $R$  n'est autre que le coefficient de corrélation des accroissements de la marche aléatoire.

**Théorème 2.6** ([R8]). *Lorsque  $\vec{D} = 0$ , le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}}$  est fini si et seulement si  $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ . Dans ce cas l'ordre du groupe est donné par  $2 \cdot \inf\{\ell \geq 1 : \ell \frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Z}\}$ .*

Arrêtons-nous maintenant sur la littérature liée au Théorème 2.6. Les premières tentatives d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la finitude du groupe sont l'œuvre de [60], où des critères (pour l'ordre 4 et 6 du groupe quotient) sous forme de déterminant sont établis. À titre d'exemple, le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}}$  est d'ordre 4 si et seulement si (cf. [60, Lemme 4.1.1])

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,0} & p_{1,-1} \\ p_{0,1} & p_{0,0} - 1 & p_{0,-1} \\ p_{-1,1} & p_{-1,0} & p_{-1,-1} \end{vmatrix} = 0.$$

L'existence d'un critère déterminantal (toutefois peu explicite en termes des paramètres  $\{p_{i,j}\}$ ) a été récemment généralisée dans l'article [59]. Il existe également dans [60] un critère général impliquant les intégrales elliptiques  $\omega_2$  et  $\omega_3$  introduites en (1.9) et (1.13) : le groupe quotient est fini dès lors que  $\frac{\omega_3}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$  et le cas échéant, l'ordre est donné par  $2 \cdot \inf\{\ell \geq 1 : \ell \frac{\omega_3}{\omega_2} \in \mathbb{Z}\}$ . Mais il ne concerne que le cas d'une surface  $\mathcal{K}$  de genre 1, alors paramétrable par les fonctions elliptiques, tandis que si le drift est nul le genre de  $\mathcal{K}$  est nul [60, Théorème 6.1.1].

C'est le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  qui est l'objet d'un critère pour les ordres 4, 6 et 8 dans [88]. En outre, trois « nouveaux » modèles avec un groupe d'ordre 10 y sont présentés (nous les reproduisons en Figure 3.5) et il est conjecturé qu'il n'existe pas de modèle avec un groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  d'ordre supérieur. Notons que ce sont des méthodes provenant du calcul formel qui sont employées dans [88].

Le Théorème 2.6 admet une interprétation probabiliste simple. On peut faire une transformation linéaire du réseau  $\mathbb{N}^2$  de telle façon à ce que le nouveau processus admette une matrice de covariance égale à l'identité<sup>13</sup>, voir [6, Section 5] et notre Figure 3.4 pour un exemple. Il s'avère que l'angle  $\theta$  en (2.23) est précisément l'angle d'ouverture du cône transformé. Notre critère affirme que le groupe est fini si l'angle du cône intrinsèquement relié à la marche aléatoire est multiple rationnel de  $\pi$ , ce qui est satisfaisant intuitivement.

Ajoutons une interprétation géométrique de notre critère. Dans l'approche analytique des marches dans un quadrant une certaine courbe du plan joue un rôle crucial, en cela qu'on peut y établir des problèmes frontière ; c'est l'origine des formulations intégrales de [132] pour les séries génératrices. Nous utiliserons d'ailleurs cette courbe à la Section 3.4 et en offrirons une vision plus conceptuelle au Chapitre 4. Il s'avère qu'en son point droit d'intersection avec l'axe réel cette courbe a un point anguleux (voir la Figure 2.3), avec demi-tangente formant un angle  $\theta$  avec l'axe horizontal.

Notons enfin qu'avec le Théorème 2.6 il devient évident que la marche avec sauts

$$p_{1,0} = p_{-1,0} = \frac{\sin^2(\pi/\ell)}{2}, \quad p_{0,1} = p_{0,-1} = \frac{\cos^2(\pi/\ell)}{2} \quad (2.24)$$

évoquée dans la Section 2.2 a un groupe d'ordre  $2\ell$ . Cet exemple souligne d'ailleurs le caractère effectif (au sens d'aisément vérifiable) de notre critère.

---

<sup>13</sup>Avec  $\theta$  comme en (2.23),  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sin(\theta) \sum j^2 p_{i,j}}}$  et  $\beta = \sqrt{\frac{\sum j^2 p_{i,j}}{\sum i^2 p_{i,j}}}$ , on prend  $(x, y) \mapsto \alpha(\beta x + \cos(\theta)y, \sin(\theta)y)$ .



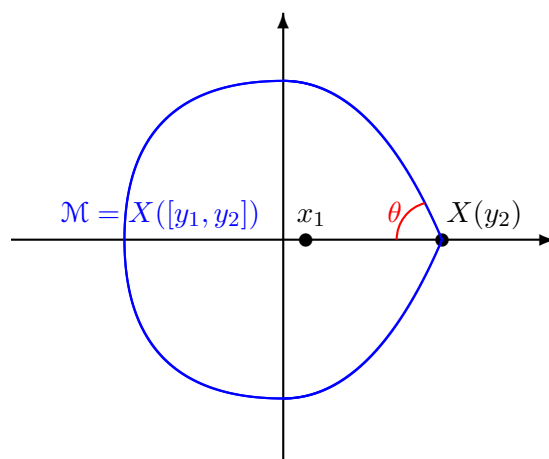


FIGURE 2.3 : La courbe  $\mathcal{M} = X([y_1, y_2])$  est symétrique par rapport à l'axe réel. Elle est lisse, sauf éventuellement au point  $X(y_2)$ , où elle peut admettre un point anguleux

### 2.3.3 CONVERGENCE DE SURFACES DE RIEMANN

Nous souhaitons exposer ici de façon assez brève les idées et enjeux principaux de la preuve du Théorème 2.6.

Rappelons avant tout que l'hypothèse  $\vec{D} = 0$  implique qu'en tant que surface de Riemann  $\mathcal{K}$  a genre 0. L'idée majeure est d'exploiter le critère

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \quad (2.25)$$

démontré dans [60], valable seulement lorsque  $\mathcal{K}$  est de genre 1, et de le faire « converger » quand les paramètres  $\{p_{i,j}\}$  tendent vers d'autres ayant un drift nul ; ce faisant, nous trouvons

$$\lim_{\vec{D} \rightarrow 0} \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\theta}{\pi}.$$

Cela n'est bien sûr pas suffisant *a priori*, puisque l'on se pose ici la question de la rationalité d'une limite de nombres rationnels. Pour rendre cette discussion rigoureuse nous avons recours dans [R8] à une interprétation géométrique des automorphismes  $\Psi$  et  $\Phi$  et devons calculer la limite de l'uniformisation (1.11)–(1.12) lorsque la dérive devient nulle, faisant ainsi apparaître des fonctions trigonométriques comme limites de fonctions elliptiques.

Un sous-produit de notre démonstration est l'obtention d'une formule intrinsèque pour l'uniformisation de  $\mathcal{K}$  en genre 0 ; nous renvoyons à [R8, Section 2.3] pour les détails.

Terminons cette partie — et ce chapitre — en exprimant notre volonté d'arriver à un critère général et exploitable (en termes des probabilités de transition  $\{p_{i,j}\}$ ) :

[P3] *Obtention d'un critère pour la finitude du groupe sans l'hypothèse sur la nullité du drift*

On a pu le voir dans la Section 2.3.1, le groupe du modèle capture une information extrêmement importante, tant sur les méthodes que sa finitude rend utilisables que sur les résultats, eux aussi liés à sa finitude. Un critère effectif (qui plus est à la saveur géométrique) n'existe pourtant que dans le cas d'une dérive  $\vec{D}$  nulle, cf. Théorème 2.6.

## CHAPITRE 3

# NATURE DES SÉRIES GÉNÉRATRICES DE COMP- TAGE

Dans ce chapitre nous présentons les publications :

- [R7] G. Fayolle et K. Raschel (2010). On the holonomy or algebraicity of generating functions counting lattice walks in the quarter-plane. *Markov Process. Related Fields* **16** 485–496
- [R13] I. Kurkova et K. Raschel (2012). On the functions counting walks with small steps in the quarter plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **116** 69–114
- [R4] A. Bostan, K. Raschel et B. Salvy (2014). Non-D-finite excursions in the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A* **121** 45–63
- [R2] O. Bernardi, M. Bousquet-Mélou et K. Raschel (2016). Counting quadrant walks via Tutte’s invariant method. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AN*. In : 28th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2016) 203–214
- [R1] I. Adan, J. van Leeuwen et K. Raschel (2013). The compensation approach for walks with small steps in the quarter plane. *Combin. Probab. Comput.* **22** 161–183

La question centrale de ce chapitre concerne la nature de la série  $Q(x, y; t)$  définie en (1.1), c’est-à-dire la classe (rationnelle, algébrique, D-finie, non D-finie et dans ce dernier cas éventuellement différentiellement algébrique, voir la Section 1.6) de fonctions à laquelle elle appartient.

Les motivations sont plurielles et d’abord pratiques : si l’on sait qu’une fonction est D-finie (ou *a fortiori* algébrique) on pourra facilement calculer l’asymptotique de ses coefficients et plus globalement la manipuler (on peut noter ici que de façon non usuelle c’est le comportement asymptotique des coefficients qui dans [R4] permet de conclure au caractère non D-fini de la fonction). Elles répondent aussi à une volonté de classification, omniprésente en combinatoire : idéalement on voudrait dire pour chaque ensemble de pas si la série associée est D-finie ou non. Enfin, trouver des modèles de marches à petits pas non D-finis permet d’exhiber des modèles combinatoires simples *a priori* pour lesquels la série génératrice est difficilement analysable.

Résumé à l’extrême, ce chapitre démontre que la série  $Q(x, y; t)$  est D-finie si et seulement si un certain groupe diédral (le groupe de la marche  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  défini au Chapitre 1) est d’ordre fini.

Dans la Section 3.1 on s’intéresse d’abord au cas du groupe fini (qui concerne 23 des 79 modèles). Le fait que la finitude du groupe implique le caractère D-fini de  $Q(x, y; t)$  était déjà démontré dans [34] pour 22 modèles et dans [25] pour le modèle restant, Gessel. On explique ici comment retrouver ces résultats de façon unifiée, en utilisant essentiellement deux ingrédients : le théorème

des zéros de Hilbert et la théorie des fonctions elliptiques. Le matériel de cette partie est basé sur les travaux [R7, 60].

Dans la Section 3.2 nous regardons de près l'implication inverse, c'est-à-dire pourquoi la non finitude du groupe conduit à la non D-finitude de la série génératrice, énoncé conjecturé dans [34] par Bousquet-Mélou et Mishna. Nous expliquons comment l'article [R13] résout cette conjecture, en analysant les pôles (en  $x$  et  $y$ ) de  $Q(x, y; t)$  sur le revêtement universel de la surface de Riemann  $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y; t) = 0\}$ .

Dans la Section 3.3 nous nous intéressons à la série des excursions  $Q(0, 0; t)$  et démontrons qu'elle est non D-finie. Cela fournit une seconde preuve de la conjecture mentionnée plus haut, au parfum peut-être davantage combinatoire dans la mesure où la variable  $t$  énumère la longueur des chemins, en opposition aux variables  $x$  et  $y$  dites catalytiques. Les méthodes sont radicalement différentes et transcrivent dans ce contexte combinatoire des résultats récents de probabilités [49], d'arithmétique [71] et d'algorithmique. Cette section repose sur le travail [R4].

Dans la Section 3.4 nous raffinons les résultats de non D-finitude en nous posant la question de l'appartenance éventuelle à la classe large et chaotique des fonctions différentiellement algébriques. Dans le travail en cours [R2] nous donnons une réponse positive partielle pour 9 modèles, en développant la notion d'invariants de Tutte [137, 138] proposée alors pour compter les triangulations planaires.

Enfin on évoque dans la Section 3.5 une approche par compensation [R1] permettant d'obtenir des expressions en série non D-finies (avec un nombre infini de pôles), pour des modèles proches des marches singulières de la Figure 1.2, voir Figure 3.8.

### 3.1 NATURE DES FONCTIONS DANS LE CAS D'UN GROUPE FINI

Cette section est complémentaire aux discussions du Chapitre 2. Nous établissons ici des résultats sur la nature et la structure (en opposition à des résultats explicites) des solutions (d'une généralisation) de l'équation fonctionnelle (1.2). Le matériel de cette section s'appuie sur le travail [R7], dont le but était de présenter une preuve unifiée des résultats de [34, 25] sur la nature algébrique ou transcendante D-finie des séries de comptage dans le cas d'un groupe fini (incluant le modèle de Gessel). Remarquons néanmoins que nos résultats concernent les séries en les variables  $x$  et  $y$  et sont en ce sens plus faibles que ceux établis dans [34, 25], qui incluent la variable  $t$ .

#### 3.1.1 UN THÉORÈME DE STRUCTURE DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE GÉNÉRALE

Regardons l'équation fonctionnelle

$$K(x, y)Q(x, y) = k(x, y)q(x) + \tilde{k}(x, y)\tilde{q}(y) + k_0(x, y)q_0. \quad (3.1)$$

Je voudrais ici raisonner sur cette équation de façon abstraite, sans y attacher de modèle combinatoire ou probabiliste particulier. Notons tout de même, avec [60, Section 1.3], qu'il s'agit-là de l'équation type pour les marches réfléchies au bord d'un quart de plan. Dans ce cas  $k(x, y)$ ,  $\tilde{k}(x, y)$  et  $k_0(x, y)$  représentent les séries génératrices des sauts sur les bords horizontaux, verticaux et en l'origine.

Nous disions l'équation (3.1) plus générale que (1.2). En effet les fonctions inconnues  $q(x)$ ,  $\tilde{q}(y)$  et  $q_0$  ne sont pas nécessairement les sections  $Q(x, 0)$ ,  $Q(0, y)$  et  $Q(0, 0)$  d'une même fonction  $Q(x, y)$ , et d'autre part les polynômes  $k(x, y)$  et  $\tilde{k}(x, y)$  préfacteurs des inconnues peuvent dépendre des deux variables  $x$  et  $y$ . En outre, nous avons toute latitude sur le choix du polynôme  $k_0(x, y)$  et rien n'empêche non plus de faire dépendre les différentes quantités de variables supplémentaires, comme  $t$ .

On se place dans cette section exclusivement dans le cas d'un groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{X}}$  fini, au sens de la Section 2.2. Les générateurs  $\Psi$  et  $\Phi$  du groupe sont introduits en (1.6). Présentons maintenant le résultat principal sous une forme résumée, que nous renforcerons plus loin.

**Théorème 3.1** ([R7]). *Supposons le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{X}}$  fini. Alors toute solution de (3.1) peut s'écrire comme  $q = w_1 + w_2 + w_3/c$ , où*

- $w_1$  et  $c$  sont des fonctions rationnelles,
- $w_2$  est le produit d'une fonction transcendante  $D$ -finie et d'une fonction  $\tilde{O}$  généralisant la somme (2.5) sur l'orbite,
- $w_3$  est algébrique.

S'il m'est permis d'anticiper un peu, remarquons que nous retrouvons immédiatement que la finitude du groupe implique la  $D$ -finitude des solutions de l'équation fonctionnelle ; nous obtenons aussi que l'algébricité des solutions est équivalente à la nullité d'une quantité du type somme sur l'orbite (2.5).

Bien sûr un théorème similaire peut être établi pour  $\tilde{q}$  et l'équation fonctionnelle (3.1) permet *in fine* de déduire la structure des solutions bivariées  $Q(x, y)$ .

### 3.1.2 ÉLÉMENTS DE PREUVE

L'énoncé du Théorème 3.1 ne présage pas des méthodes utilisées dans sa preuve, inspirée de [60, Chapitre 4], que nous présentons maintenant.

- La première idée consiste à remarquer qu'une solution de l'équation fonctionnelle (3.1) est classiquement la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène (c'est-à-dire de (3.1) avec  $k_0 = 0$ ). On étudie alors successivement les deux solutions.
- Les solutions homogènes s'étudient de façon systématique et s'avèrent toujours algébriques.
- C'est donc bien lors de la recherche de la solution particulière que différents cas vont apparaître. Nous obtenons pour l'existence d'une solution particulière rationnelle une condition nécessaire et suffisante de la forme  $\tilde{O} = 0$ , où  $\tilde{O}$  s'interprète comme une somme sur l'orbite du groupe. Cette équivalence, ainsi qu'une construction de la solution rationnelle, reposent sur des manipulations algébriques élémentaires dans le corps  $\mathbb{C}(x, y)/K(x, y)$ , comme le Théorème 90 de Hilbert.

Lorsque  $\tilde{O}$  n'est pas nulle la nature de la solution particulière change drastiquement : elle devient  $D$ -finie non algébrique. La construction se révèle plus élaborée et il est commode de travailler alors sur le revêtement universel de  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire de manipuler des fonctions elliptiques.

UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DE NORME 1. Rappelons et prenons quelques notations. Pour un élément générique  $\chi$  du groupe on note  $q_\chi$  la fonction  $q(\chi(x, y))$  dans le quotient  $\mathbb{C}(x, y)/K(x, y)$ . En outre,  $\Theta = \Phi \circ \Psi$  vaut pour la composition des générateurs.

La première étape de notre analyse consiste à déduire de l'équation fonctionnelle (3.1) le système

$$\begin{cases} q = q_\Psi, \\ q_\Theta - fq = g, \end{cases} \quad (3.2)$$

où l'on a noté

$$f = \frac{k \cdot \tilde{k}_\Phi}{\tilde{k} \cdot k_\Phi}, \quad g = \frac{k_0 \cdot \tilde{k}_\Phi}{\tilde{k} \cdot k_\Phi} - \frac{(k_0)_\Phi}{k_\Phi}.$$

La première équation du système (3.2) traduit simplement le fait que l'inconnue  $q$  n'est fonction que de  $x$ . Quant à la deuxième nous l'avons déjà rencontrée en (2.6), elle provenait alors d'une manipulation formelle des branches du noyau. Dans le Chapitre 4 cette même équation sera vue comme un problème frontière, voir (4.6).

Désignons par  $2\ell$  l'ordre du groupe (on a alors  $\Theta^\ell = 1$ ). L'itération du système (3.2) conduit à

$$\begin{cases} q_\Theta - fq = g, \\ \dots \\ q_{\Theta^\ell} - f_{\Theta^{\ell-1}}q_{\Theta^{\ell-1}} = g_{\Theta^{\ell-1}}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Il est instructif d'injecter chaque équation de (3.3) dans la suivante, de telle façon à obtenir

$$q \left( 1 - \prod_{i=0}^{\ell-1} f_{\Theta^i} \right) = \sum_{i=0}^{\ell-1} g_{\Theta^i} \prod_{k=i+1}^{\ell-1} f_{\Theta^k} = \tilde{O}, \quad (3.4)$$

où la dernière égalité est la définition de  $\tilde{O}$ . On comprend alors qu'il faut séparer l'étude selon que la « norme »

$$N(f) = \prod_{i=0}^{\ell-1} f_{\Theta^i}$$

soit, ou non, égale à 1. Il s'avère cependant que dans notre contexte combinatoire nous aurons systématiquement  $N(f) = 1$ , hypothèse que nous imposons donc dans la suite<sup>14</sup>.

SOLUTIONS RATIONNELLES. Si  $N(f) = 1$  l'équation (3.4) semble impliquer que nécessairement la somme sur l'orbite  $\tilde{O}$  est nulle. Il n'en est rien : cela indique simplement que si  $\tilde{O} \neq 0$  il n'y a pas de solution dans  $\mathbb{C}(x, y)/K(x, y)$ , en particulier pas de solution rationnelle. Par conséquent l'égalité  $\tilde{O} = 0$  est nécessaire pour l'existence de solutions rationnelles. Il est moins direct de démontrer le caractère suffisant de cette assertion ; cela repose essentiellement sur le Théorème 90 de Hilbert (qui caractérise les éléments de norme 1 dans une extension de Galois). La forme multiplicative de ce théorème permet d'écrire  $f = c/c_\Theta$ , et ce faisant de reformuler la première équation de (3.2) comme

$$(cq)_\Theta - cq = c_{\Theta g}.$$

<sup>14</sup>Si l'on fait correspondre les équations fonctionnelles (3.1) et (1.2), on obtient que  $f = 1$  (puisque l'on peut incorporer le coefficient  $K(x, 0)$  à l'inconnue  $q(x)$ ) et donc trivialement  $N(f) = 1$ . Des techniques de résolution sont cependant présentées dans [60, Chapitre 4] également dans le cas  $N(f) \neq 1$ .

C'est maintenant la forme additive (!) du Théorème 90 qui permet de conclure à l'existence d'une solution de l'équation ci-dessus, si et seulement si la trace de  $c_{\Theta}g$  est nulle, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} (c_{\Theta}g)_{\Theta^i} = 0.$$

On vérifie facilement que cette condition est pleinement équivalente à  $\tilde{O} = 0$ . On obtient donc l'existence d'une solution particulière  $p \in \mathbb{C}(x, y)/K(x, y)$  satisfaisant  $p_{\Theta} - p = c_{\Theta}g$ . Notons qu'avec [60, Théorème 4.2.10] on peut choisir

$$p = \frac{1}{2\ell} \sum_{i=1}^{\ell-1} (i - \ell) \prod_{k=i}^{\ell-1} c_{\Theta^k} g_{\Theta^{k-1}}. \quad (3.5)$$

Remarquons pour terminer qu'on peut transformer  $p$  en une fonction rationnelle de  $x$ , quitte à considérer plutôt  $(p + p_{\Psi})/2$ . Le Théorème 90 ne fournit en revanche pas de formule pour  $c$ .

CAS D'UNE SOMME SUR L'ORBITE NON NULLE. Nous l'avons vu, il n'y a alors pas de solution rationnelle. Pour créer une solution particulière on exploite des techniques présentées dans la Section 2.2.3. Sur le revêtement universel, le composition  $\Theta$  des générateurs du groupe prend la forme simple  $\Theta(\omega) = \omega + \omega_3$ , voir (2.7). On reformule alors (3.4) sur le revêtement universel :

$$(cq)(\omega + \ell\omega_3) - (cq)(\omega) = \tilde{O}(\omega).$$

Il s'agit-là de l'exact analogue de l'équation (2.21). La fonction  $\varphi \cdot \tilde{O}$ , avec  $\varphi$  introduite en (2.22), fournit alors une solution particulière. Rappelons que  $\varphi$  est construite partant de la fonction  $\zeta$  de Weierstrass ; elle est D-finie en  $x(\omega)$ , puisque  $\zeta' = -\varphi$ .

SOLUTIONS HOMOGENES ALGEBRIQUES. L'existence d'une solution particulière permet de réduire (3.2) à un système homogène. Les solutions homogènes satisfont

$$(cq)_{\Theta} - cq = 0,$$

identité qui sur le revêtement universel devient

$$(cq)(\omega + \omega_3) - (cq)(\omega) = 0.$$

La fonction  $cq$  est donc  $(\omega_1, \omega_3)$ -elliptique et *a fortiori*  $(\omega_1, \ell\omega_3)$ -elliptique, comme l'est d'ailleurs  $x(\omega)$  puisque  $\ell\omega_3 = k\omega_2$ . Par le principe (P5) de la Section 1.5 on conclut qu'il existe un lien algébrique entre les fonctions  $cq$  et  $x$ .

ÉNONCÉ COMPLET DU THÉORÈME 3.1. Les éléments ci-dessus nous permettent de préciser ce résultat. La fonction  $w_1$  est donc l'éventuelle solution particulière rationnelle tandis que  $c$  apparaît dans la factorisation de  $f = c/c_{\Theta}$ . Quant à  $w_3$ , elle est une solution algébrique homogène comme dans le paragraphe ci-dessus. Enfin sur le revêtement universel  $w_2 = \varphi \cdot \tilde{O}$ , avec  $\varphi$  définie en (2.22) et  $\tilde{O}$  en (3.4).

### 3.1.3 APPLICATION EN COMBINATOIRE

UN THÉORÈME DE CLASSIFICATION. Le Théorème 3.1 s'applique tout de suite dans le cadre de l'équation fonctionnelle (1.2) comptant les marches dans le quart de plan. En effet nous avons déjà remarqué (cf. note de bas de page numérotée 14) que l'on peut choisir  $f = 1$  si l'on accepte d'incorporer le coefficient  $K(x, 0)$  à l'inconnue  $Q(x, 0)$ . On obtient alors le théorème général de classification :

**Théorème 3.2** ([R7]). *Soit  $\mathfrak{S}$  l'un des 23 modèles non singuliers de marches dans le quart de plan à groupe fini et soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  le point de départ de la marche. La série  $Q(x, y)$  est toujours  $D$ -finie sur  $\mathbb{R}(x, y)$ . En outre, elle est algébrique sur  $\mathbb{R}(x, y)$  si et seulement si*

$$\tilde{O} = \sum_{\chi \in G} (-1)^\chi \chi(x^{i+1}y^{j+1}) = 0.$$

PRÉMISSSES D'UNE APPROCHE PAR INVARIANTS. Nous développerons dans la Section 3.4 une approche par invariants (le nom évoque une méthode issue d'un travail fondateur de Tutte [137] sur les triangulations proprement coloriées). Cette approche par invariants peut se voir comme un raffinement des résultats de cette section, et ceci à plusieurs égards : d'abord les résultats sur la nature de  $Q(x, y)$  seront établis sur  $\mathbb{Q}(x, y, t)$  et non sur  $\mathbb{R}(x, y)$ ; en outre, plus que des résultats de structure, des résultats explicites seront obtenus; enfin, des cas de groupe infini seront résolus (ces cas, représentés Figure 3.6, sont ceux pour lesquels une solution particulière rationnelle existe — dont cependant la construction, plus mystérieuse, échappe à celle ci-dessus).

## 3.2 NON D-FINITUDE DE LA SÉRIE TRIVARIÉE

Jusqu'à présent nous avons considéré uniquement des cas de groupe fini  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{X}}$  : nous avons résolu la marche de Gessel (Section 2.1); nous avons ensuite systématisé cette approche *ad hoc* à tous les cas, dont ceux de groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  infini (Section 2.2); nous avons poursuivi en donnant un critère pour la finitude du groupe (Section 2.3); nous avons enfin étudié la structure des solutions d'une généralisation de l'équation fonctionnelle (Section 3.1).

Quelles idées, quelles méthodes proposer pour le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{X}}$  infini? C'est ce que je voudrais exposer maintenant, à travers le travail [R13], que j'estime central dans ce document d'habilitation. Le résultat principal peut s'énoncer de la façon compacte suivante :

**Théorème 3.3** ([R13]). *Pour les 51 modèles non singuliers à groupe infini de marches dans le quart de plan, la série  $Q(x, y)$  n'est pas  $D$ -finie sur  $\mathbb{R}(x, y)$ .*

Augmenté de [34, 25, 120, 116], ce résultat (qui sera précisé plus bas) permet d'établir le résultat d'équivalence :

**Théorème 3.4** ([R13]). *Pour les 79 modèles de marches, la série génératrice  $Q(x, y)$  est  $D$ -finie sur  $\mathbb{Q}(x, y, t)$  si et seulement si le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  est fini.*

Le Théorème 3.3 démontre une conjecture de Bousquet-Mélou et Mishna énoncée dans [34] et permet de clore la classification des marches dans le quart de plan.

### 3.2.1 UNE NON D-FINITUDE MESURÉE

ÉNONCÉ COMPLET. Afin d'énoncer précisément le Théorème 3.3, rappelons quelques faits issus de la Section 2.2. Soit  $\mathcal{F} = \{t \in (0, 1/\#\mathfrak{S}) : \#\langle \Psi, \Phi \rangle_{|\mathcal{K}} < \infty\}$  l'ensemble défini en (2.18). Le Théorème 2.4 exprime que  $\mathcal{F}$  et son complémentaire  $(0, 1/\#\mathfrak{S}) \setminus \mathcal{F}$  sont tous deux denses dans  $(0, 1/\#\mathfrak{S})$  pour les 51 modèles à groupe infini non singuliers.

**Théorème 3.3** (version complète, [R13]). *Pour les 51 modèles non singuliers à groupe infini, la fonction  $Q(x, 0)$  vue comme une fonction de  $x$  est*

- *D-finie pour tout  $t \in \mathcal{F}$  ;*
- *non D-finie pour tout  $t \notin \mathcal{F}$ .*

Ce résultat implique le caractère non D-fini de  $Q(x, y)$  puisque la propriété de D-finitude est stable par spécialisation, voir [63, Appendice B.4] ou [107].

Cependant le fait que  $Q(x, 0)$  soit D-finie (et donc en un certain sens analysable d'un point de vue combinatoire) pour une infinité de valeurs de  $t$  mesure cette propriété de non D-finitude. La volonté d'analyser ces séries génératrices pour les valeurs de  $t \in \mathcal{F}$  fut d'ailleurs la source des résultats présentés dans la Section 2.2.

PROUVER UN RÉSULTAT DE NON D-FINITUDE. Nous l'avons rappelé en Section 1.6, une fonction est D-finie si elle satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Cette propriété a des implications fortes sur le nombre (qui doit être fini) et le type de singularités. Ce sont les contraintes sur le type de singularités que nous exploiterons dans la Section 3.3 : nous déduirons en effet de l'analyse de la première singularité que la série des excursions  $Q(0, 0)$  ne peut pas être D-finie, fournissant ainsi une seconde preuve de la conjecture de Bousquet-Mélou et Mishna.

C'est ici leur nombre qui nous intéresse : notre angle d'attaque est de démontrer que  $Q(x, 0)$  (ou  $Q(0, y)$ ) possède un nombre infini de singularités. *Stricto sensu* cet énoncé est malheureusement incorrect :  $Q(x, 0)$  possède un nombre fini de singularités (à savoir 2, en les points de branchement  $x_3$  et  $x_4$ ), voir Figure 3.1. Pour faire apparaître de nouvelles singularités l'idée centrale est de créer de nouvelles branches de  $Q(x, 0)$  en tournant autour des singularités initiales.

Pour illustrer cette idée on peut prendre l'exemple élémentaire de la fonction  $\sqrt{x}$ , analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  (par exemple). Si l'on tourne autour de la singularité 0 on fera alors apparaître l'autre branche de la racine carrée (c'est-à-dire  $-\sqrt{x}$ ), puis de nouveau  $\sqrt{x}$ , etc.

Dans notre cas, tourner autour de  $x_3$  ou  $x_4$  fait apparaître une seconde branche (voir une nouvelle fois la Figure 3.1). La deuxième branche s'avère posséder 4 singularités algébriques (en les points de branchement) ainsi qu'un certain nombre de pôles. On continue ce processus consistant à tourner autour des singularités, faisant ainsi apparaître les branches successives de la fonction génératrice  $Q(x, 0)$ , avec à chaque fois quelques pôles supplémentaires. Remarquons maintenant deux faits majeurs :

1. Une éventuelle équation différentielle pour  $Q(x, 0)$  serait satisfaite par toutes les branches. Pour s'en convaincre on utilise un prolongement analytique de  $Q(x, 0)$  le long des trajectoires tournant autour des singularités.



2. Si  $t \notin \mathcal{F}$ , les pôles qu'on fait apparaître en tournant autour des singularités forment un ensemble infini, ce qui n'est pas compatible avec l'existence d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.

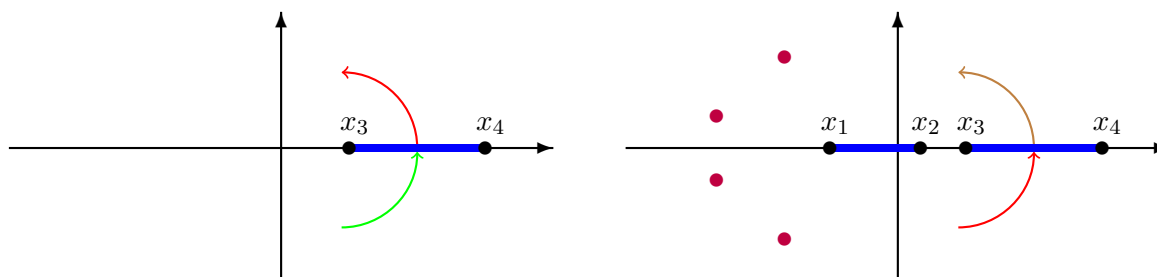


FIGURE 3.1 : À gauche, la fonction  $Q(x, 0)$  possède deux singularités algébriques, en  $x_3$  et  $x_4$ . À droite, la deuxième branche de  $Q(x, 0)$  possède quatre singularités algébriques, ainsi que des pôles, en nombre dépendant du modèle (moins de six en tout cas), voir la Section 3.2.2 pour plus de détails

### 3.2.2 ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION

Je voudrais maintenant détailler successivement les points 1 et 2 ci-dessus.

BRANCHES DE  $Q(x, 0)$ . Si la Figure 3.1 décrit clairement la méthode pour obtenir de nouvelles branches de  $Q(x, 0)$  dans le plan complexe (il s'agit simplement de tourner autour des singularités non polaires) elle n'explique pas comment trouver l'expression analytique de ces branches. Pour ce faire nous allons utiliser de façon cruciale certains faits énoncés dans le Chapitre 2, et tout particulièrement le Lemme 2.2. L'idée principale est que comprendre l'ensemble des branches de  $Q(x, 0)$  équivaut à prolonger la fonction relevée  $Q(x(\omega), 0)$  à tout le revêtement universel  $\mathbb{C}$ .

Rappelons d'abord que la fonction  $Q(x, 0)$  peut être relevée sur le domaine du parallélogramme

$$\Pi_{0,0} = \omega_1[0, 1) + \omega_2[0, 1)$$

où  $|x(\omega)| \leq 1$  (c'est le domaine  $\Delta_x$  de la Figure 2.1), en écrivant  $r(\omega) = K(x(\omega), 0)Q(x(\omega), 0)$ , voir (2.8). De la même façon on peut poser  $s(\omega) = K(0, y(\omega))Q(0, y(\omega))$  sur  $\Delta_y$ , et en utilisant l'identité (2.10) on définit  $r$  et  $s$  sur  $\Delta_x \cup \Delta_y$ .

Notons que la relation  $x(\omega) = x(\omega_1 + \omega_2 - \omega)$ , qui implique la même propriété d'invariance au niveau des séries génératrices  $r(\omega) = r(\omega_1 + \omega_2 - \omega)$ , voir (2.13), montre que le parallélogramme fondamental  $\Pi_{0,0}$  contient deux copies de  $\mathbb{C}$ , chacune correspondant à  $Q(x, 0)$  par la formule  $K(x, 0)Q(x, 0) = r(\omega)$  si  $x(\omega) = x$ .

Il convient alors de voir le revêtement universel  $\mathbb{C}$  comme une union de parallélogrammes (des rectangles ici), comme illustré sur la Figure 3.2. Traverser une coupure (i.e., tourner autour d'une singularité) dans le plan complexe est équivalent à changer de demi-rectangle sur le revêtement universel (en effet les bords des demi-rectangles correspondent à des coupures, dont les extrémités sont les points de branchement, voir la Figure 2.1).

Le prolongement de  $r$  à tout le plan complexe résulte alors des deux points suivants :

- Soit  $f(\omega) = y(\omega) \cdot (x(-\omega + \omega_3) - x(\omega))$  la fonction définie en (2.9). La formule (2.11), que j'énonce de nouveau ici par convenance

$$r(\omega + \omega_3) = r(\omega) - f(\omega + \omega_3), \quad (3.6)$$

permet de prolonger  $r$  à tout  $\mathbb{C}$ , pourvu que l'on puisse définir  $r$  sur un domaine contenant une bande verticale de largeur supérieure à  $\omega_3$ .

- La largeur de  $\Delta_x \cup \Delta_y$  est supérieure à  $\omega_3$ , voir [R13, Lemme 5].

La dynamique du prolongement est très simple, il suffit d'itérer (3.6) autant de fois que souhaité. Cela évoque d'ailleurs le prolongement classique de la fonction  $\Gamma$  d'Euler, au moyen de la formule  $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ .

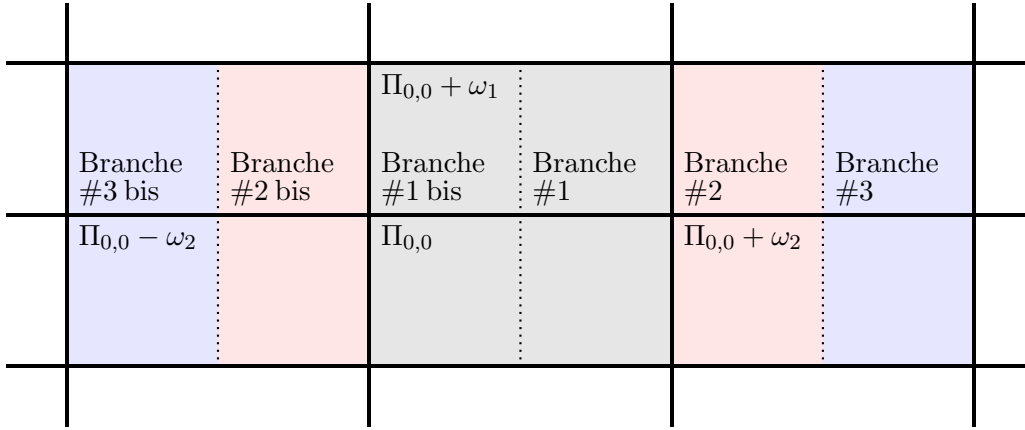


FIGURE 3.2 : Chaque rectangle est une copie du parallélogramme fondamental  $\Pi_{0,0}$  et se compose de deux demi-rectangles (séparés par des lignes en pointillé). Chaque demi-rectangle définit une branche de  $Q(x, 0)$  et la relation  $r(\omega) = r(\omega_1 + \omega_2 - \omega)$  implique que les deux demi-rectangles obtenus l'un l'autre par la transformation  $\omega \mapsto \omega_1 + \omega_2 - \omega$  (de même couleur sur la figure) définissent la même branche. Des demi-rectangles obtenus l'un l'autre d'une translation verticale  $\omega \mapsto \omega + \omega_1$  définissent également la même branche

**PÔLES DES BRANCHES DE  $Q(x, 0)$ .** Le prolongement (3.6) semble donc particulièrement simple à première vue. Constatons tout de même son caractère intrinsèquement irrationnel : puisque le groupe est infini on a  $\omega_3/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ , voir (2.25). Ici  $\omega_2$  s'interprète comme la longueur horizontale du parallélogramme fondamental, tandis que  $\omega_3$  apparaît dans la formule (3.6) décrivant le prolongement.

Toute l'étude des pôles de  $r$  repose sur ceux de  $f$ , qu'on doit donc étudier d'abord. L'expression de  $f$  rappelée plus haut montre qu'elle aura au plus 6 pôles par parallélogramme. En effet, les deux coordonnées de l'uniformisation  $x(\omega)$  et  $y(\omega)$  sont des fonctions elliptiques d'ordre 2 : elles ont deux pôles simples ou un pôle double dans un parallélogramme fondamental (on déduit cela de (1.11)–(1.12)). Cependant certains des 6 pôles peuvent se compenser et l'analyse fait apparaître plusieurs grandes familles. C'est surtout le signe des points de branchement qui est discriminant, puisqu'en fonction de ces signes les pôles de  $f$  peuvent se situer sur les bords

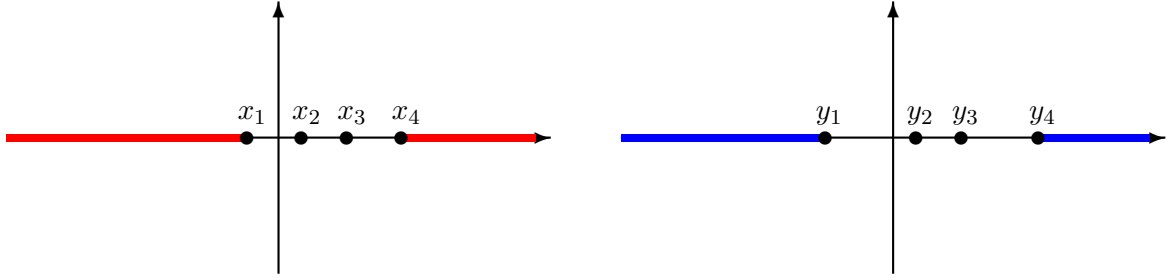


FIGURE 3.3 : En couleur, les courbes sur lesquelles les pôles des branches de  $Q(x, 0)$  et  $Q(0, y)$  sont denses, dans les cas où  $y_4 = \infty$ , ou  $y_4 > 0$ ,  $x_4 = \infty$  et  $Y(x_4) = \infty$

horizontaux ou verticaux du parallélogramme de la Figure 2.1 et éventuellement se compenser. On pourra consulter [R13, Figures 12–16] pour la localisation des pôles pour chacune des familles de modèles.

Évoquons maintenant les pôles de  $r$ . Nous ne ferons certes pas leur étude exhaustive ici (elle constitue l'une des difficultés majeures du travail [R13], voir la Section 7 en particulier), mais disons tout de même quelques mots. Par (3.6) ce sont les pôles de  $f$  translatés de multiples de  $\omega_3$ . Il s'agit alors de démontrer qu'il y en a une infinité, la principale obstruction étant les compensations — tout à fait possibles. Un des moyens de surmonter cette difficulté est d'introduire un ordre sur les pôles et de considérer l'orbite de pôles minimaux pour cet ordre. Plus que de démontrer leur nombre infini on peut même prouver que les pôles des séries génératrices sont denses sur certaines courbes, voir [R13, Théorème 17]. Par exemple, dans les cas où  $y_4 = \infty$ , on a la Figure 3.3 : les courbes sont alors des demi-droites, ce qui n'est pas un fait général.

### 3.3 NON D-FINITUDE DE LA SÉRIE DES EXCURSIONS

Cette section est proche de la précédente en ce sens que le contexte est le même (des marches à petits pas dans le quart de plan, comme introduites dans la Section 1.2) et qu'un résultat de non D-finitude y est démontré.

Plus spécifiquement nous nous intéressons à la suite des excursions  $(e_n^{\mathfrak{S}})_{n \geq 0}$ . Rappelons qu'une fois l'ensemble  $\mathfrak{S}$  fixé,  $e_n^{\mathfrak{S}} = q_{\mathfrak{S}}(0, 0; n)$  désigne le nombre de trajectoires partant et revenant en l'origine, construites à partir de  $n$  pas de  $\mathfrak{S}$  et restant dans le quadrant. Leur série génératrice est

$$Q(0, 0) = \sum_{n \geq 0} e_n^{\mathfrak{S}} t^n \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Le théorème principal de cette section, qui reprend celui de [R4], s'énonce comme suit :

**Théorème 3.5** ([R4]). *Pour tous les 51 ensembles de sauts  $\mathfrak{S} \subseteq \{0, \pm 1\}^2$  non singuliers et avec un groupe infini, la série génératrice  $Q(0, 0)$  n'est pas D-finie. De façon équivalente la suite des excursions  $(e_n^{\mathfrak{S}})_{n \geq 0}$  ne satisfait aucune équation de récurrence à coefficients polynomiaux. En conséquence la série trivariée  $Q(x, y)$  n'est pas non plus D-finie.*

Le corollaire sur la nature non D-finie de la série trivariée  $Q(x, y)$  s'obtient par spécialisation des variables  $(x, y)$  en  $(0, 0)$ . Ce résultat avait déjà été obtenu dans [R13] par une tout autre approche, voir notre Section 3.2.

Si l'on exclut les modèles singuliers (ces cas exceptionnels sont représentés sur la Figure 1.2) pour lesquels  $Q(0,0) = 1$  est manifestement D-finie, il y a donc équivalence entre la non D-finitude des excursions, la non D-finitude de la série trivariée et la non finitude du groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$ .

Je voudrais ici décrire synthétiquement les méthodes employées pour démontrer le Théorème 3.5, avant d'y revenir en détail ci-après. Disons que nous utilisons conjointement des résultats profonds de probabilités (Section 3.3.1) et d'arithmétique (Section 3.3.2), et nous montrons que cette combinaison permet la certification algorithmique (Section 3.3.3) de la nature non D-finie de la série des excursions. D'une manière quelque peu inhabituelle nous utilisons seulement de l'information asymptotique sur les coefficients de  $Q(0,0)$  pour démontrer la non D-finitude, ainsi que des restrictions sur les comportements asymptotiques possibles des coefficients d'une fonction D-finie. (Le caractère non usuel provient de ce que c'est souvent l'asymptotique qui découle de la D-finitude, dans la mesure où la classe des fonctions D-finies se prête particulièrement bien à l'analyse asymptotique.)

### 3.3.1 UN RÉSULTAT IMPORTANT DE PROBABILITÉS

Notre première pierre angulaire est un résultat obtenu dans l'article [49] par Denisov et Wachtel, qui décrit le comportement asymptotique du nombre d'excursions. Ce résultat, *a priori* valide pour une large classe de cônes et d'ensembles de pas, aboutit à l'énoncé suivant une fois spécifié à notre cadre. Désignons par  $\chi = \chi_{\mathfrak{S}}$  le polynôme caractéristique  $\sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}} x^i y^j \in \mathbb{Q}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$  de l'ensemble de pas.

**Théorème 3.6** ([49]). *Soit  $\mathfrak{S} \subseteq \{0, \pm 1\}^2$  un ensemble de sauts non contenu dans un demi-plan. Le système  $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0$  admet alors une unique solution  $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$ . Définissons*

$$\rho = \chi(x_0, y_0), \quad c = \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}}}(x_0, y_0), \quad \alpha = -1 - \frac{\pi}{\arccos(-c)}. \quad (3.7)$$

Il existe une constante  $\kappa > 0$  ne dépendant que de  $\mathfrak{S}$  et telle que

- si la marche est apériodique,

$$e_n = \kappa \cdot \rho^n \cdot n^\alpha \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

- si la marche est périodique (alors de période 2),  $e_{2n+1} = 0$  et

$$e_{2n} = \kappa \cdot \rho^{2n} \cdot (2n)^\alpha \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Le Théorème 3.6 repose sur un théorème limite local pour les marches aléatoires dans des cônes, c'est-à-dire sur l'asymptotique de la probabilité  $\mathbb{P}[\tau > n, x + S_n = y]$  qu'une marche aléatoire  $(S_n)$  passe de  $x$  à  $y$  en  $n$  pas tout en restant dans le cône ( $\tau$  désigne le premier temps de sortie du cône).

Bien que naturelle, la preuve de ce résultat se révèle d'une grande technicité. Donnons quelques brèves idées : le point  $(x_0, y_0)$  permet, par le biais d'un changement de poids exponentiel, de transformer la marche aléatoire en une nouvelle, disposant d'un drift nul. Il s'agit alors d'envoyer (linéairement) le quadrant dans un nouveau cône, dans lequel la matrice de covariance de la

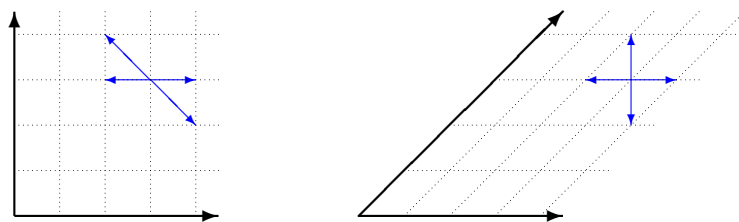


FIGURE 3.4 : La marche de Gouyou-Beauchamps (avec un coefficient de corrélation non nul dans le quart de plan) devient la marche simple (coefficient de corrélation nul) dans le huitième de plan. Dans l'équation (3.7) on a  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ,  $c = -\sqrt{2}/2$  et  $\alpha = 5$ . L'exposant des excursions est donc 5, ce qui est en accord avec [34, Proposition 11]

nouvelle marche aléatoire vaut l'identité ; c'est ce qu'exprime le coefficient de corrélation  $c$  dans (3.7), puisque l'angle du nouveau cône est  $\arccos(-c)$ . Cf. Figure 3.4 pour l'exemple simple de la marche dite de Gouyou-Beauchamps.

L'exposant  $\alpha$  dans (3.7) est alors naturel puisque c'est le même que celui du mouvement Brownien, voir [9, 46, 47]. C'est à cet endroit que survient l'essentiel de la technicité : on voudrait classiquement coupler marche aléatoire et mouvement Brownien et affirmer que les probabilités de rester dans le cône en temps long sont asymptotiquement les mêmes. Ce couplage ne s'avère toutefois efficace que dans le régime où la marche aléatoire est éloignée du bord. Denisov et Wachtel utilisent alors des estimées fines (qualité de l'approximation Brownienne, construction d'une fonction discrète harmonique, etc.) pour franchir ces difficultés.

### 3.3.2 UN RÉSULTAT ARITHMÉTIQUE

La transcendance d'une fonction complexe peut souvent être observée de son comportement local au voisinage de ses singularités, ou de façon équivalente de l'asymptotique de ses coefficients de Taylor, cf. [63, Chapitre VII.7]. Par exemple si  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite équivalente à  $\kappa \cdot \rho^n \cdot n^\alpha$  et si la constante de croissance  $\rho$  est transcendante ou l'exposant  $\alpha$  est irrationnel ou entier négatif, la fonction génératrice  $A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  ne peut pas être algébrique.

Des résultats similaires utilisant l'asymptotique des coefficients (plus forts et pourtant moins connus), originaires de la théorie arithmétique des équations différentielles linéaires, permettent de détecter des comportements non D-finis. C'est une conséquence de la théorie des G-fonctions [4, 71], introduites il y a bientôt un siècle par Siegel dans un travail sur les approximations diophantiennes. Il s'agit de notre deuxième résultat clé :

**Théorème 3.7** ([4, 71]). *Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite à valeurs entières dont le  $n$ -ième terme se comporte asymptotiquement comme  $\kappa \cdot \rho^n \cdot n^\alpha$  pour une certaine constante  $\kappa > 0$ . Si la constante de croissance  $\rho$  est transcendante ou si l'exposant  $\alpha$  est irrationnel, alors la fonction génératrice  $A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  n'est pas D-finie.*

La partie difficile du Théorème 3.7 est que l'irrationalité de l'exposant implique la non D-finitude, sous l'hypothèse que les coefficients sont entiers. La seule preuve que nous connaissons utilise le fait que toute fonction D-finie avec des coefficients entiers et bornés exponentiellement est une G-fonction ; elle repose sur une combinaison de plusieurs résultats arithmétiques profonds. Notons que le Théorème 3.7 est particulièrement bien adapté pour les applications en combinatoire.

### 3.3.3 POLYNÔMES CYCLOTOMIQUES

Partant des Sections 3.3.1 et 3.3.2 il devient clair que la question maintenant est de démontrer que lorsque le groupe est infini le coefficient  $\arccos(c)/\pi$  n'est pas rationnel, avec  $c$  donné dans le Théorème 3.6.

VALEURS DE  $\arccos$  EN DES NOMBRES ALGÈBRIQUES. Le coefficient de corrélation  $c$  dans (3.7) est un nombre algébrique : on peut le démontrer modèle par modèle, de façon algorithmique. On pourra d'ailleurs consulter la liste des polynômes minimaux  $\mu_c$  dans [R4, Table 2]. Il existe certes des résultats de classification des valeurs irrationnelles de fonctions trigonométriques réciproques, mais nous n'en avons pas trouvé de suffisants pour notre propos.

POLYNÔMES CYCLOTOMIQUES. Par l'absurde, si  $\arccos(c)/\pi$  était rationnel,  $c$  serait de la forme  $(x + 1/x)/2 = (x^2 + 1)/(2x)$ , où  $x$  est une racine de l'unité. Le numérateur de la fonction rationnelle  $\mu_c(\frac{x^2+1}{2x})$  ( $\mu_c$  le polynôme minimal de  $c$ ) posséderait alors pour racine une racine de l'unité. En d'autres termes le polynôme  $R(x) = x^{\deg \mu_c} \mu_c(\frac{x^2+1}{2x})$  devrait être divisible par un polynôme cyclotomique.

Puisqu'on a accès aux polynômes  $\mu_c$  et comme d'autre part les polynômes cyclotomiques sont bien connus (au travers notamment des valeurs possibles de leurs coefficients, qui sont entiers et croissent faiblement), on peut écarter cette possibilité, une nouvelle fois par une analyse exhaustive des modèles (proposée par un algorithme dans [R4]).

EXEMPLE. Prenons le cas de la marche  $\mathfrak{S} = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1)\}$ . On trouve le polynôme minimal  $\mu_\rho = x^3 + x^2 - 18x - 43$  pour la constante de croissance  $\rho$  dans (3.7). De même, le polynôme minimal de  $c$  est  $\mu_c = 8x^3 + 8x^2 + 6x + 1$ , tandis que  $R(x) = x^3 \mu_c(\frac{x^2+1}{2x}) = x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1$  n'est, clairement, pas divisible par un polynôme cyclotomique. L'exposant  $\alpha$  est donc irrationnel et par les Théorèmes 3.6 et 3.7 la série  $Q(0, 0)$  n'est pas D-finie.

## 3.4 INVARIANTS DE TUTTE ET ALGÈBRICITÉ DIFFÉRENTIELLE

L'équation fonctionnelle principale (1.2) comptant les marches dans un quadrant est réminiscente de l'équation

$$G(x, y) = xq(q-1)t^2 + \frac{xy}{qt}G(1, y)G(x, y) - x^2yt \frac{G(x, y) - G(1, y)}{x-1} + x \frac{G(x, y) - G(x, 0)}{y}$$

écrite par Tutte dans les années 70 pour étudier les triangulations  $q$ -coloriées. (Le terme quadratique rend cependant l'équation ci-dessus structurellement plus complexe que (1.2).) Tutte a travaillé dix ans sur cette équation et l'a finalement résolue, en prouvant que la série  $G(1, 0)$  est différentiellement algébrique, c'est-à-dire qu'elle satisfait une équation différentielle *a priori* non linéaire en  $t$  (voir Section 1.6). Un point crucial de l'analyse de Tutte est de montrer que pour une infinité de valeurs du paramètre  $q$  la série  $G(x, y)$  est en fait algébrique, utilisant pour cela une intrigante notion d'invariants, voir [137, 138].

Ces invariants de Tutte peuvent-ils apporter quelque chose de neuf à la classification des marches dans le quart de plan ? Cette section, fondée sur le travail [R2], répond par la positive !

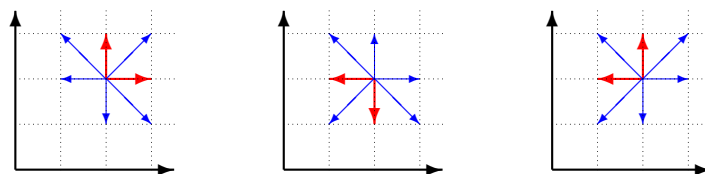


FIGURE 3.5 : Trois modèles à poids avec un groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  d'ordre 10 : les flèches bleues (resp. rouges et en traits épais) correspondent à des poids 1 (resp. 2)

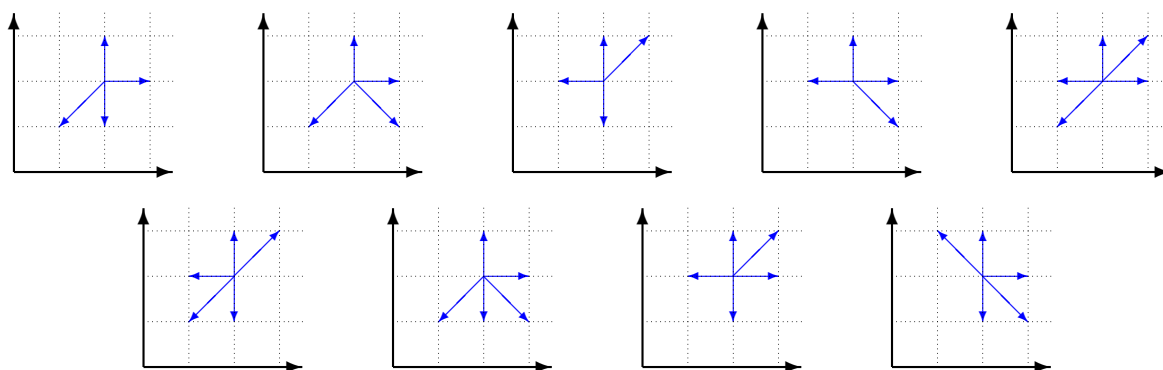


FIGURE 3.6 : Neuf modèles de marches à groupe infini analysables par la théorie des invariants de Tutte

- Dans un premier temps, nous introduisons des invariants de Tutte pour le cas du groupe fini (Section 3.4.2). Nous obtenons alors des preuves courtes et uniformes de l'algébricité de tous les modèles... algébriques (en particulier, la plus courte preuve de l'algébricité de Gessel, ainsi que des démonstrations inédites de l'algébricité de modèles à poids introduits dans [88] et repris ici Figure 3.5). Dans notre cadre un modèle à groupe fini est algébrique si et seulement s'il admet une fonction de découplage (au sens de la Définition 3.1).
- On définit alors une notion plus faible d'invariants pour couvrir des modèles à groupe infini (Section 3.4.3). Pour les modèles (de groupe infini) disposant d'une fonction de découplage (nous en avons identifié 9, cf. Figure 3.6) nous obtenons des expressions inédites et simples de  $Q(x, y)$ , voir le Théorème 3.10. Nous en déduisons que bien que non D-finie,  $Q(x, y)$  est différentiellement algébrique en  $x, y$  et  $t$ , voir notre Théorème 3.11.

Mais avant toute chose (Section 3.4.1), présentons la méthode.

### 3.4.1 PRINCIPE DE LA MÉTHODE DES INVARIANTS DE TUTTE

Qu'est-ce qu'un invariant de Tutte ? Il s'agit simplement d'une fonction  $I$  prenant la même valeur sur les racines du noyau, c'est-à-dire  $I(Y_0) = I(Y_1)$ . (Nous utilisons les notations du Chapitre 1, notamment celles de la Section 1.2.) L'approche de Tutte se résume alors facilement, à l'aide des trois étapes suivantes.

1. *Construire un invariant (explicite) issu du noyau.* Dans le cas d'un groupe fini cet invariant sera rationnel et plutôt simple, tandis que pour les modèles à groupe infini il sera exprimé au moyen d'une représentation conforme, voir (3.11). Ce point est systématique (nous disposons d'une formule qui fonctionne pour tous les modèles).
2. *Construire un invariant incluant la fonction génératrice inconnue.* C'est véritablement la clé de voûte de l'approche. On utilise pour cela une fonction de découplage (Définition 3.1), dont l'existence et la construction ne sont pas systématiques et restent mystérieuses.
3. *Utiliser un lemme des invariants.* Pour faire court un tel lemme exprime qu'il y a peu d'invariants par des énoncés du type : un invariant sans pôle est constant (cf. Lemme 3.9 pour une formule précise). Nous l'avons compris, un tel lemme permet de relier les invariants trouvés aux points 1 et 2 ci-dessus et *de facto* de trouver une formule pour la série génératrice inconnue.

**Définition 3.1.** Un modèle de marches dans le quart de plan est découplé s'il existe des fractions rationnelles  $F(x) \in \mathbb{Q}(x, t)$  et  $G(y) \in \mathbb{Q}(y, t)$  telles que si  $K(x, y) = 0$  alors  $xy = F(x) + G(y)$ .

Cet énoncé est en fait équivalent à l'écriture

$$x(Y_0 - Y_1) = G(Y_0) - G(Y_1), \quad y(X_0 - X_1) = F(X_0) - F(X_1). \quad (3.8)$$

On nomme les fonctions  $F$  et  $G$  dans (3.8) des fonctions de découplage.

### 3.4.2 CAS DU GROUPE FINI

LE MODÈLE DE GESSEL REVISITÉ. Nous illustrons l'approche par invariants de Tutte sur le modèle de Gessel, espérant ainsi convaincre de sa puissance et de sa concision. On vérifie qu'un invariant du noyau (point 1) est donné par la formule

$$I(y) = \frac{1}{t(1+y)(1+1/y)} + t(1+y)(1+1/y).$$

On constate tout aussi facilement que  $G(y) = -\frac{1}{t(1+y)}$  est une fonction de découplage, au sens de (3.8). En utilisant l'équation (2.6), on déduit que  $S(y) = G(y)$  et  $S(y) = K(0, y)Q(0, y)$  sont toutes deux solutions de  $S(Y_0) - S(Y_1) = x(Y_0 - Y_1)$ . Leur différence est donc un invariant (celui du point 2) :

$$J(y) = t(y+1)Q(0, y) + \frac{1}{t(1+y)}.$$

Un lemme des invariants<sup>15</sup> affirme l'existence de quatre constantes telles que

$$(J(y) - J(0))I(y) = aJ(y)^3 + bJ(y)^2 + cJ(y) + d. \quad (3.9)$$

(Ajuster les valeurs des constantes permet en effet d'avoir les mêmes pôles des deux côtés de l'identité (3.9).) Si dans (3.9) on remplace  $I$  et  $J$  par leur expression on obtient une équation cubique en  $Q(0, y)$ , qui dans la terminologie de [30] est une « équation cubique en une variable catalytique ». Les solutions s'avèrent toujours algébriques et peuvent être trouvées explicitement par une procédure décrite dans [30]. On pourra parcourir [R2, Section 2] pour la preuve complète du modèle de Gessel par cette technique.

---

<sup>15</sup>Voir [R2, Lemme 1] pour un énoncé précis du lemme des invariants dans le cadre du modèle de Gessel.



$I_1$	$\frac{t}{x^2} - \frac{1}{x} - tx$	$\frac{t}{x^2} - \frac{1}{x} - tx$	$tx^2 - x - \frac{t}{x}$	$tx - \frac{t}{x} + \frac{1+2t}{1+\frac{1}{x}}$	$\frac{t}{x} - tx - \frac{1+2t}{1+x}$	$x + \frac{1}{x} - tx^2 - \frac{t}{x^2}$
$I_2$	$ty^2 - y - \frac{t}{y}$	$\frac{t}{y^2} - \frac{1}{y} - ty$	$ty^2 - y - \frac{t}{y}$	$ty - \frac{t}{y} + \frac{1+2t}{1+\frac{1}{y}}$	$\frac{t}{y} - ty - \frac{1+2t}{1+y}$	$y + \frac{1}{y} - ty^2 - \frac{t}{y^2}$

TABLE 3.1 : Invariants rationnels pour les modèles avec groupe fini sans symétrie verticale

$I_1$	$\frac{t}{x^2} - \frac{1}{x} - x(1 + \lambda t)$	$\frac{t^2}{x^2} - \frac{(1+2t)t}{x} - (3t + 1)tx - \frac{(1+3t)(4t+1)}{x+1} + \frac{(3t+1)^2}{(x+1)^2}$	Utiliser symétrie du carré
$I_2$	$t^2y + \frac{1+\lambda t}{y+1} - \left(\frac{1+\lambda t}{y+1}\right)^2$	$\frac{t^2}{y^2} - \frac{(1+2t)t}{y} - (3t + 1)ty - \frac{(1+3t)(4t+1)}{y+1} + \frac{(3t+1)^2}{(y+1)^2}$	

TABLE 3.2 : Invariants rationnels pour les modèles à poids (notamment ceux de la Figure 3.5)

FAITS GÉNÉRAUX. Le résultat ci-dessous provient de considérations élémentaires (une fonction rationnelle ne peut prendre la même valeur qu'en un nombre fini de points et d'autre part un invariant est stable sur l'orbite du groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$ ).

**Lemme 3.8** ([R2]). *Un modèle admet un invariant rationnel si et seulement si le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  est fini.*

En outre, un invariant  $I_2(y)$  en  $y$  (i.e.,  $I_2(Y_0) = I_2(Y_1)$ ) permet de définir un invariant  $I_1(x)$  en  $x$  (c'est-à-dire vérifiant  $I_1(X_0) = I_1(X_1)$ ) au moyen de  $I_1 = I_2(Y_0)$ , et réciproquement. On peut également relier les invariants de modèles dont les ensembles de pas  $\mathfrak{S}$  diffèrent d'une symétrie du carré.

Pour les modèles avec une symétrie verticale (comme la marche simple, Figure 1.1),  $x + \frac{1}{x}$  fournit un invariant. Pour les autres modèles à groupe fini, on pourra consulter la liste exhaustive donnée Tables 3.1 et 3.2. On pourrait aussi appliquer la formule (3.11) issue de la Section 3.4.3, qui fonctionne indépendamment de la finitude du groupe.

Passons maintenant aux fonctions de découplage (3.8). Examinant le cas de la marche simple, on se convainc d'abord que l'existence n'est pas systématique<sup>16</sup>. En fait, on peut prouver qu'une telle fonction existe si et seulement si la somme (2.16) sur l'orbite est nulle et nous disposons alors d'une formule pour la calculer (cf. équation (3.5)).

Restreinte aux modèles à groupe fini l'approche de Tutte fonctionne donc uniquement pour les modèles algébriques, puisque l'on sait par ailleurs (voir le Théorème 3.1) que l'algébricité de la série génératrice équivaut à la nullité de la somme sur l'orbite. La Table 3.3 liste les fonctions de découplage pour les modèles qui en disposent. Cette table a été devinée et prouvée et concorde bien sûr avec la formule générale (3.5).

<sup>16</sup>Pour la marche simple les branches  $Y_0$  et  $Y_1$  sont des fonctions symétriques de  $x$  et  $1/x$ . Il n'y a donc aucune chance de trouver  $G$  dans (3.8), puisque la quantité  $\frac{G(Y_0) - G(Y_1)}{Y_0 - Y_1}$  est elle-même une fonction symétrique de  $Y_0$  et  $Y_1$ , donc aussi de  $x$  et  $1/x$ .

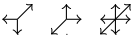













Model							
$F$	$-\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$-x - \frac{1}{x}$	$-x + \frac{1}{x} - \frac{1+3t}{t(1+x)}$	$-x^2 + x(1 + \frac{1}{t}) + \frac{3+\frac{1}{t}}{x}$	$-x - \frac{1+3t}{t(1+x)}$	
$G$	$-\frac{1}{y}$	$-\frac{1}{t(1+y)}$	$-\frac{1+\lambda t}{t(1+y)}$	$-y + \frac{1}{y} - \frac{1+3t}{t(1+y)}$	$-y^2 + y(1 + \frac{1}{t}) + \frac{3+\frac{1}{t}}{y}$	$-y - \frac{1}{y}$	

TABLE 3.3 : Fonctions de découplage pour les modèles algébriques

Model							
$F$	$-x^2 + \frac{x}{t}$	$-x^2 + \frac{x}{t}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xt} - x$	$-\frac{1}{x}$	$-\frac{1+t}{t(x+1)}$	$-x^2 + \frac{x}{t}$
$G$	$-\frac{1}{y}$	$-y - \frac{1}{y}$	$-y - \frac{1}{y}$	$-y^2 + \frac{y}{t} + \frac{1}{y}$	$-\frac{1+t}{t(y+1)} - y$	$-\frac{1}{y}$	$-y - \frac{1}{y}$



	
$-\frac{1}{x} - x$	$\frac{(t+1)^2}{(x+1)^2 t^2} - \frac{2t^2 + 3t + 1}{(x+1)t^2} - \frac{1}{x} - x$
$-\frac{1}{y} - y$	$-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{ty} + \frac{(t+1)y}{t} - y^2$

TABLE 3.4 : Fonctions de découplage pour les 9 modèles à groupe infini de la Figure 3.6

### 3.4.3 CAS DU GROUPE INFINI

FONCTIONS DE DÉCOUPLAGE. Présentons cette partie en miroir de la précédente, en commençant par les fonctions de découplage. Nous n'avons ici aucun résultat automatique, ni d'existence ni de construction. Nous avons en revanche trouvé des fonctions de découplage pour neuf modèles (ceux de la Figure 3.6), voir la Table 3.4. On la vérifie aisément, directement sur l'équation (3.8). Quid des 47 = 56 - 9 autres modèles à groupe infini ? À l'heure où j'écris ces lignes l'exacte applicabilité de l'approche de Tutte est un problème ouvert !

INVARIANTS FAIBLES. Le Lemme 3.8 sonne le glas de l'existence d'invariants rationnels et à la place nous allons introduire des invariants « faibles ». Introduisons pour cela la courbe<sup>17</sup>

$$\mathcal{L} = Y_0([x_1, x_2]) \cup Y_1([x_1, x_2]) = \{y \in \mathbb{C} : K(x, y) = 0 \text{ et } x \in [x_1, x_2]\}, \quad (3.10)$$

dont on peut voir des exemples sur la Figure 3.7. Notons  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  le domaine de  $\mathbb{C}$  borné par  $\mathcal{L}$  et contenant 0.

**Définition 3.2.** Une fonction  $I(y) = I(y; t)$  est un invariant faible d'un modèle  $\mathfrak{S}$  de marches dans le quadrant si pour  $t \in (0, 1/\#\mathfrak{S})$ ,

- $I$  est méromorphe dans le domaine  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  et admet des limites finies sur la courbe  $\mathcal{L}$  ;
- Pour tout  $y \in \mathcal{L}$ , on a  $I(y) = I(\bar{y})$ , où  $\bar{y}$  désigne la conjugaison complexe.

<sup>17</sup>On a déjà pu en voir une représentation (ou plutôt une de sa symétrique  $X([y_1, y_2])$ ) sur la Figure 2.3. Nous en reparlerons au Chapitre 4, voir la Figure 4.3.

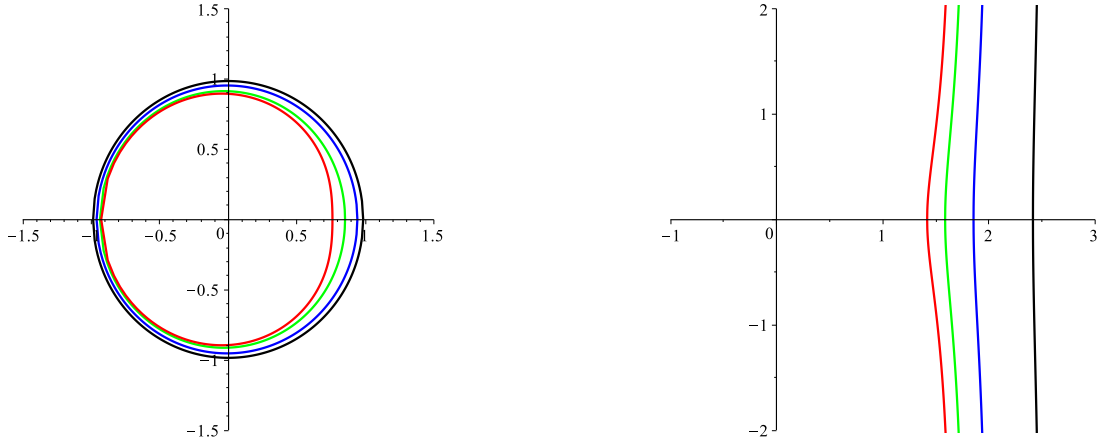


FIGURE 3.7 : Des courbes  $\mathcal{L}$  pour le troisième modèle sur la Figure 3.6 (pour  $t = 0.03, 0.1, 0.2$  et  $0.25$ , quand on se rapproche de l'origine) et pour Kreweras renversé, c'est-à-dire le modèle dont les sauts s'obtiennent par une symétrie centrale de ceux de Kreweras, cf. Figure 1.1 (pour  $t = 0.2, 0.25, 0.28$  et  $0.33$ , de la droite vers la gauche)

Pourquoi cette courbe  $\mathcal{L}$ ? Pourquoi ces conditions sur  $I$ ? *Prima facie*, la Définition 3.2 paraît arbitraire. Nos motivations sont doubles. Avant toute chose, l'équation (11) de [132] démontre que<sup>18</sup>

$$K(0, y)Q(0, y) - K(0, \bar{y})Q(0, \bar{y}) = X_0(y)(y - \bar{y}), \quad \forall y \in \mathcal{L},$$

et [132, Théorème 5] implique que  $K(0, y)Q(0, y)$  est analytique dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ . Par ailleurs la théorie des problèmes frontière avec shift (notre référence est le livre [109], qui y est entièrement dévolu) fournit avec le résultat suivant un « lemme des invariants » sur mesure :

**Lemme 3.9** ([109]). *Soit  $\mathfrak{S}$  un modèle non singulier et soit  $I(y)$  un invariant faible. Si  $I$  n'a pas de pôle dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  (et dans le cas d'une courbe  $\mathcal{L}$  non bornée, si  $I$  est bornée à l'infini) alors  $I$  est indépendant de  $y$ .*

Il apparaît qu'un tel invariant faible est connu : avec les notations du Chapitre 1 il s'agit de<sup>19</sup>

$$w(y) = \wp_{1,3} \left( -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \wp_{1,2}^{-1}(f(y)) \right), \quad \text{avec } f(y) = \begin{cases} \frac{\tilde{d}''(y_4)}{6} + \frac{\tilde{d}'(y_4)}{y - y_4} & \text{si } y_4 \neq \infty, \\ \frac{\tilde{d}''(0)}{6} + \frac{\tilde{d}'''(0)y}{6} & \text{si } y_4 = \infty. \end{cases} \quad (3.11)$$

(Ce n'est pas pour sa qualité d'invariant faible que la fonction  $w$  est étudiée dans [60, 132] mais plutôt parce qu'elle fournit l'une des briques élémentaires des expressions intégrales pour les séries génératrices. En outre,  $w$  s'interprète dans [60, 132] comme une représentation conforme du domaine  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  vers le plan complexe coupé le long d'un segment.)

L'injectivité confère à  $w$  une propriété de minimalité, qui sera exploitée pour appliquer de façon constructive le Lemme 3.9 des invariants.

<sup>18</sup>Il ne s'agit-là que de l'équation (2.6) spécifiée en  $x \in [x_1, x_2]$ . Voir aussi (4.6) dans le Chapitre 4.

<sup>19</sup>Avec l'expression (1.12) de l'uniformisation, on a  $y(\omega) = f^{-1}(\wp(\omega))$  dans (3.11).

EXEMPLE. Examinons le troisième modèle sur la Figure 3.6. C'est un modèle découplé, avec  $G(y) = -y - 1/y$ . La quantité  $I(y) = tyQ(0, y) + y + 1/y$  est un invariant faible, avec dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  un unique pôle, simple, en 0 et de résidu 1 (la courbe  $\mathcal{L}$  est tracée sur la Figure 3.7, gauche). Ainsi par le Lemme 3.9  $I(y)$  diffère de  $\frac{w'(0)}{w(y)-w(0)}$  d'une constante, fournie par un développement en série en 0 :

$$Q(0, y) = \frac{1}{ty} \left( \frac{w''(0)}{2w'(0)} + \frac{w'(0)}{w(y) - w(0)} - y - \frac{1}{y} \right).$$

RÉSULTATS GÉNÉRAUX. Par un raisonnement mimant celui du cas particulier ci-dessus, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 3.10** ([R2]). *Pour les modèles de la Figure 3.6, la série  $Q(0, y)$  admet une expression rationnelle en termes de  $y, w(y), w(0), w'(0), w''(0), w(-1), w'(-1), w''(-1), w(\pm i), w(\pm j)$ , où  $j = e^{2i\pi/3}$ .*

Outre ce résultat fournissant des expressions explicites particulièrement simples pour les fonctions génératrices nous prouvons également le suivant :

**Théorème 3.11** ([R2]). *Pour les modèles de la Figure 3.6, la fonction  $Q(x, y)$  est différentiellement algébrique en  $x, y$  et  $t$ . En d'autres termes elle satisfait trois équations différentielles (pour chacune des variables) non linéaires et à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .*

Le Théorème 3.11 est une conséquence immédiate du Théorème 3.10 et du résultat suivant :

**Théorème 3.12** ([R2]). *La fonction  $w$  donnée par (3.11) est différentiellement algébrique en  $y$  et  $t$ .*

Ce résultat découle de propriétés de clôture des fonctions différentiellement algébriques et de l'algébricité différentielle de formes modulaires (pour obtenir l'algébricité différentielle des fonctions de Weierstrass).

CONCLUSION. Il reste de nombreuses questions ouvertes en lien avec les invariants de Tutte.

[P4] *Développer l'approche par invariants de Tutte*

L'exacte applicabilité de l'approche reste par exemple à déterminer. En particulier, les modèles singuliers ont-ils une série différentiellement algébrique? Peut-on trouver des équations différentielles explicites? Quelle est la nature des fonctions génératrices dans le cas de non existence de la fonction découplage? Sort-on de la classe des fonctions différentiellement algébriques (cf. tableau ci-dessous)?

	Existence d'une fonction de découplage	Non existence
Groupe fini	Algébrique	D-finie
Groupe infini	Différentiellement algébrique	?

De notre point de vue ces enjeux sont parmi les dernières grandes questions ayant trait au modèle des marches à petits pas dans le quadrant.



de taille  $p$ , qui en plus de (3.12) satisfont la condition au bord (3.13) (disons pour  $p$  pair) et (3.14) (pour  $p$  impair) ;

- Étudier la convergence de ces combinaisons linéaires lorsque  $p \rightarrow \infty$ , comparer ces solutions à la fonction génératrice cherchée (par des arguments d'unicité, par exemple).

Le cœur de la construction est incontestablement le second point ci-dessus, puisque si à l'étape  $p$  la somme (3.15) satisfait (3.12) et (3.13), on compense par un terme pour rétablir la condition sur le bord vertical (3.14), ce qui ajoute maintenant une erreur sur le bord horizontal (3.13), etc. L'approche tient d'ailleurs son nom de cette suite (infinie) de compensations.

Le champ d'application correspond aux constructions telles que la suite (3.15) converge. Il est finalement assez vaste si l'on en juge par l'exemple à droite sur la Figure 3.8, bien différent de celui représenté à gauche.

L'expression obtenue pour  $q(i, j)$  est donc la limite de (3.15) quand  $p \rightarrow \infty$ . Pour trouver la série génératrice trivariée il suffit de sommer des sommes géométriques :

$$Q(x, y; t) = \sum_{i, j \geq 0} q(i, j) x^i y^j = \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r \frac{1}{1 - \alpha_r x} \frac{1}{1 - \beta_r y}.$$

On peut alors aisément déduire que  $Q(x, y; t)$  possède une infinité de pôles en  $x$  et  $y$ , en étudiant les suites  $\{\alpha_r\}$  et  $\{\beta_r\}$ . L'expression ci-dessus est également adaptée pour calculer l'asymptotique des coefficients, puisqu'on peut facilement trouver la première singularité en  $t$  des fonctions (algébriques)  $\gamma_r$ ,  $\alpha_r$  et  $\beta_r$ .

#### PROJETS SUR LES MARCHES DANS TROIS QUARTS DE PLAN.

[P5] *Marches dans trois quarts de plan*

Récemment dans [33] Bousquet-Mélou a initié l'étude des marches évitant un quart de plan. Il s'avère que l'analyse est proche du cas du quadrant (si l'on en juge par le type de détails techniques) mais bien plus élaborée : ainsi résoudre le modèle *a priori* simple de la marche simple est aussi difficile que de résoudre la marche Gessel dans le quart de plan ! Pourtant et remarquablement, l'approche analytique est peu sensible à ce changement de complexité et nous voudrions développer une approche systématique pour les marches à petits sauts évitant un quart de plan.



## CHAPITRE 4

# MARCHES AVEC DES GRANDS SAUTS ET MARCHES INHOMOGÈNES

Dans ce chapitre nous présentons les publications :

- [R10] G. Fayolle et K. Raschel (2015). About a possible analytic approach for walks in the quarter plane with arbitrary big jumps. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **353** 89–94
- [R15] P. Lafitte-Godillon, K. Raschel et V. Tran (2013). Extinction probabilities for a distylous plant population modeled by an inhomogeneous random walk on the positive quadrant. *SIAM J. Appl. Math.* **73** 700–722

Les marches dans le quart de plan se révèlent être un objet important de la théorie des probabilités. En effet, au delà de leur aspect combinatoire — dont on a pu lire une présentation détaillée dans les Chapitres 2 et 3 — elles apparaissent dans de nombreuses situations probabilistes. Cela tient au fait que le quart de plan positif est l'espace naturel pour modéliser l'évolution de toute population 2-dimensionnelle (à titre d'exemples, citons des modèles de biologie des populations [41] ou en finance des carnets d'ordres Markoviens [45]). Il est donc crucial d'avoir des méthodes permettant de calculer des quantités caractéristiques de ces processus, comme des probabilités d'extinction ou des durées entre changement de prix, pour reprendre les exemples précédents.

Dans un souci de généralité, mais surtout parce que de tels processus apparaissent concrètement, on voudrait pouvoir relâcher les deux hypothèses restrictives des Chapitres 2 et 3 que sont la petitesse des sauts (aux huit plus proches voisins) et l'homogénéité spatiale (à l'intérieur du quadrant), voir (H1).

Dans la Section 4.1 on s'intéresse au problème des grands sauts. Il s'agit-là des prémisses [R10] d'un plus vaste projet, avec en point de mire le développement d'une théorie analytique permettant de résoudre (au sens de trouver des expressions, de caractériser) des modèles de marches à sauts arbitrairement grands dans le quart de plan.

La Section 4.2 est consacrée aux marches inhomogènes. Le principe général est que si les probabilités de transition sont des fonctions rationnelles de l'état du processus, on est à même d'établir une EDP pour la série génératrice (c'est l'exact analogue de l'équation fonctionnelle (1.2) non dérivée, lorsque les sauts sont homogènes). On peut alors utiliser des méthodes spécifiques aux EDP pour résoudre le modèle — ou tout au moins pour en obtenir des informations partielles. Nous illustrons ce principe sur un modèle de biologie des populations, sujet de l'article [R15].



#### 4.1 MARCHES AVEC DES GRANDS SAUTS DANS LE QUART DE PLAN

Dans la grande majorité des études analytiques (voir les travaux [58, 60, 110, 111, 112, 113, 114, 115] mentionnés en bibliographie) les marches aléatoires sont supposées avoir des petits pas, comme à gauche sur la Figure 4.1. Il y a plusieurs raisons de faire cette hypothèse ; disons que leur point commun fondamental est de simplifier les aspects techniques et d'aboutir (au moins dans certains cas) à l'existence d'expressions closes.

Il est utile de rappeler les trois grandes étapes (pour autant d'idées) de l'approche analytique dans le cas des petits pas :

1. Trouver une équation fonctionnelle pour les séries génératrices d'intérêt.
2. Transformer cette équation fonctionnelle en un problème frontière.
3. Résoudre le problème frontière.

Le point 1 reflète le plus souvent la construction du modèle et ne verra pas sa complexité accrue si l'on augmente la taille des sauts. Nous allons le voir, c'est tout le contraire pour les points 2 et 3!

Nous commençons cette étude en présentant le modèle (on a choisi ici d'illustrer cette généralisation aux grands sauts par le cas des marches aléatoires ergodiques réfléchies dans un quadrant<sup>21</sup>) et la nouvelle équation fonctionnelle (Section 4.1.1), généralisant celle (1.2) du Chapitre 1. On fait alors un détour (Section 4.1.2) en décortiquant le cas des petits sauts, pour mieux isoler et dessiner (Section 4.1.3) les grandes lignes de l'extension de l'approche analytique aux grands sauts.

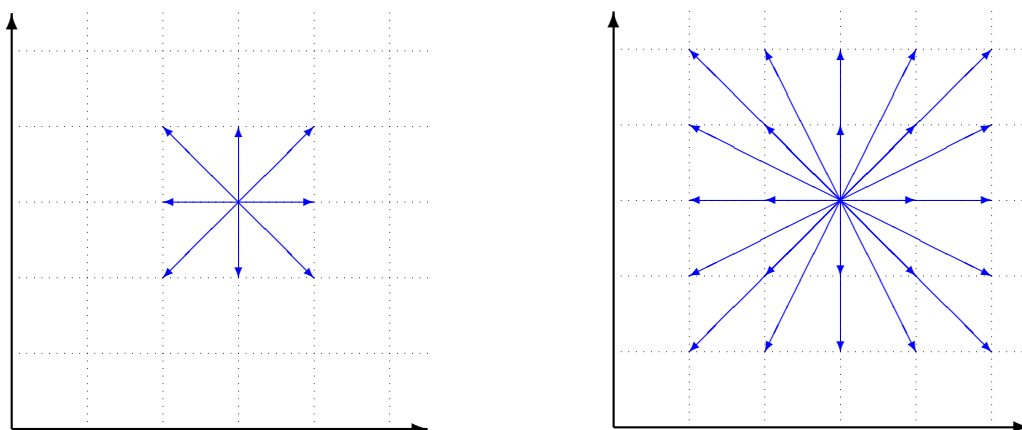


FIGURE 4.1 : À gauche : marches à petits sauts dans le quart de plan ; à droite : marches avec sauts arbitrairement grands dans le quart de plan (d'amplitude maximale égale à 2 sur la figure)

<sup>21</sup>On aurait pu le faire, à la place, pour les fonctions de Green de marches aléatoires tuées [131], des nombres de marches [34], des caractéristiques fines de files d'attente [58], des fonctions discrètes harmoniques [R17], etc.

#### 4.1.1 PRÉSENTATION DÉTAILLÉE DU MODÈLE, ÉQUATION FONCTIONNELLE ET PRINCIPE DE L'APPROCHE

MODÈLE. Afin d'être le plus précis possible dans cette partie, technique par nature, nous devons introduire quelques notations. Considérons ici un processus 2-dimensionnel disposant des propriétés :

(P1) L'espace d'état est le quadrant  $\mathbb{N}^2$ .

(P2) L'espace d'état se représente comme l'union disjointe

$$\mathbb{N}^2 = S \cup \{\cup_{\ell} S'_{\ell}\} \cup \{\cup_k S''_k\} \cup \{\cup_{k,\ell} \{(k, \ell)\}\}. \quad (4.1)$$

Afin de mieux décrire la décomposition (4.1) il est pratique d'introduire quatre paramètres, à savoir  $(I^-, J^-)$  (resp.  $(I^0, J^0)$ ), qui par définition sont les amplitudes maximales négatives (horizontale et verticale) des probabilités de transition à l'intérieur (resp. sur le bord) du quadrant. Le domaine intérieur du quart de plan est quant à lui

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i \geq I^-, j \geq J^-\}.$$

De plus,

$$S'_{\ell} = \{(i, \ell) \in \mathbb{N}^2 : i \geq I^-\}, \quad S''_k = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 : j \geq J^-\}$$

sont les domaines horizontaux et verticaux situés juste à côté des axes de coordonnées (i.e.,  $\ell \in \{1, \dots, J^- - 1\}$ ,  $k \in \{1, \dots, I^- - 1\}$ ) et

$$S'_0 = \{(i, 0) \in \mathbb{N}^2 : i \geq I^0\}, \quad S''_0 = \{(0, j) \in \mathbb{N}^2 : j \geq J^0\}$$

sont les axes de coordonnées (privés de quelques points). Enfin, les  $\{(k, \ell)\}$  désignent les points isolés restants. Voir la Figure 4.2 pour un exemple, où  $I^- = J^- = 2$  et  $I^0 = J^0 = 3$ .

Alors, dans chaque classe, la marche a des probabilités de transition homogènes, que l'on désigne par  $p_{i,j}$ ,  $p_{i,j}^{S'_{\ell}}$ ,  $p_{i,j}^{S''_k}$  et  $p_{i,j}^{(k,\ell)}$ , respectivement.

(P3) On suppose que  $p_{i,j} = 0$  si  $\{i < -I^- \text{ ou } j < -J^-\}$  et si  $\{i > I^+ \text{ ou } j > J^+\}$ , où  $I^+$  et  $J^+$  désignent donc les amplitudes maximales positives des transitions à l'intérieur du quadrant. Avec cette notation l'hypothèse des petits sauts (H1) se lit  $I^- = I^+ = J^- = J^+ = 1$ .

ÉNONCÉ DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE. Introduisons la série génératrice des probabilités de transition de la classe  $S$  par

$$R(x, y) = -1 + \sum_{i,j} p_{i,j} x^i y^j \quad (4.2)$$

avec la convention que lorsque rien n'est spécifié, la somme porte sur tous les couples d'indices  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ . Définissons également la série génératrice des probabilités stationnaires par

$$\pi(x, y) = \sum_{i \geq I^-, j \geq J^-} \pi_{i,j} x^i y^j. \quad (4.3)$$

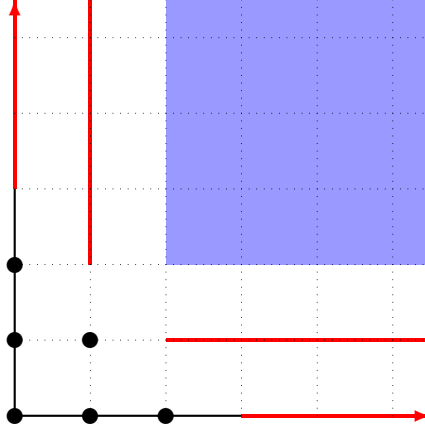


FIGURE 4.2 : Lorsque  $I^- = J^- = 2$  et  $I^0 = J^0 = 3$ , il y a 11 domaines d'homogénéité spatiale : les points isolés  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  et  $(1, 1)$ , les axes horizontaux  $\{(i, 0) : i \geq 3\}$  et  $\{(i, 1) : i \geq 2\}$ , les axes verticaux  $\{(0, j) : j \geq 3\}$  et  $\{(1, j) : j \geq 2\}$ , et enfin le domaine intérieur  $\{(i, j) : i, j \geq 2\}$

Pour les autres classes on adopte la même notation avec le symbole associé en exposant (par exemple,  $R^{S'_\ell}(x, y)$  et  $\pi^{S'_\ell}(x, y)$  pour la classe  $S'_\ell$ ).

L'équation fonctionnelle que nous cherchons à résoudre prend la forme (voir [60, Équation (1.3.4)] pour l'énoncé original)

$$-R(x, y)\pi(x, y) = \sum_{\{(k, \ell)\}} R^{(k, \ell)}(x, y)\pi^{(k, \ell)}(x, y) + \sum_{\ell=0}^{J^- - 1} R^{S'_\ell}(x, y)\pi^{S'_\ell}(x, y) + \sum_{k=0}^{I^- - 1} R^{S''_k}(x, y)\pi^{S''_k}(x, y). \quad (4.4)$$

Elle est valide au moins dans le bi-disque

$$\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\} \times \{y \in \mathbb{C} : |y| \leq 1\}.$$

La fonction génératrice  $\pi^{S'_\ell}(x, y)$  (resp.  $\pi^{S''_k}(x, y)$ ) est en fait essentiellement une fonction de la variable  $x$  (resp.  $y$ ), puisque  $\pi^{S'_\ell}(x, y) = y^\ell \sum_{i \geq I^-} \pi_{i, \ell} x^i$  (resp.  $\pi^{S''_k}(x, y) = x^k \sum_{j \geq J^-} \pi_{k, j} y^j$ ). En outre, on a  $\pi^{(k, \ell)}(x, y) = \pi_{k, \ell} x^k y^\ell$ .

**PRINCIPES DE LA MÉTHODE.** Dans le membre de droite de l'équation (4.4) il y a  $I^- + J^-$  fonctions inconnues (incidemment, on note que les amplitudes maximales positives  $I^+$  et  $J^+$  n'influent pas ici) ainsi qu'un nombre fini de coefficients inconnus  $\pi_{k, \ell}$ . Concentrons-nous sur ces  $I^- + J^-$  fonctions inconnues, toutes analytiques dans le disque unité.

L'idée est de déterminer ces fonctions par la résolution de  $I^- + J^-$  équations indépendantes, qui dans notre cas prennent la forme de problèmes frontière posés sur des courbes fermées (voir l'équation (4.6) et la Figure 4.3 pour un exemple générique). Chacun de ces problèmes frontière peut être obtenu partant de deux (ou plus) points de branchement<sup>22</sup> intérieurs au disque unité

<sup>22</sup>Rappelons que  $x$  est un point de branchement du polynôme  $K(x, y)$  si l'équation (en  $y$ )  $K(x, y) = 0$  possède une racine multiple.

du polynôme des sauts

$$K(x, y) = x^{I^-} y^{J^-} R(x, y), \quad (4.5)$$

de degré  $I = I^- + I^+$  en  $x$  et  $J = J^- + J^+$  en  $y$ . La condition de circonscrire les points de branchement au disque unité correspond, dans notre contexte probabiliste, au domaine de définition naturel des séries génératrices.

D'un point de vue technique une grande partie de l'analyse a un parfum combinatoire et consiste à sélectionner des « bons » points de branchement, c'est-à-dire à trouver des regroupements de points de branchement qui vont conduire à des conditions sur des courbes fermées. Cela passe par l'étude de la surface de Riemann  $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : K(x, y) = 0\}$ , déjà introduite en (1.7).

#### 4.1.2 APPROCHE ANALYTIQUE POUR LES MARCHES AVEC PETITS PAS : POINTS DE BRANCHEMENT ET RÉDUCTION À UN PROBLÈME FRONTIÈRE

On a déjà eu un aperçu de l'approche analytique dans le Chapitre 3, mais peu sous son aspect problème frontière, que l'on détaille maintenant.

Repartons de l'équation fonctionnelle (4.4), dans laquelle ne se trouvent alors que deux fonctions inconnues ainsi que (pour simplifier) un coefficient inconnu  $\pi^{(k,\ell)}(x, y) = \pi_{0,0}$  (mais ici,  $\pi_{0,0}$  se déduit des autres quantités puisqu'on a la condition de normalisation  $\sum_{i,j \geq 0} \pi_{i,j} = 1$ ). Dans ce qui suit nous simplifions la notation et écrivons  $\pi^{S'_\ell}(x, y) = y\pi(x)$  ainsi que  $\pi^{S''_k}(x, y) = x\tilde{\pi}(y)$ .

Il est démontré dans [60] que les fonctions  $\pi(x)$  et  $\tilde{\pi}(y)$  peuvent être obtenues de la résolution d'un problème frontière sur une courbe. Cela signifie concrètement qu'il existe une courbe  $\mathcal{M}$ , ici symétrique par rapport à l'axe horizontal (voir Figure 4.3, droite), sur laquelle la série génératrice  $\pi$  vérifie (ci-dessous,  $\alpha(t) = \bar{t}$  désigne la conjugaison complexe)

$$A(t)\pi(t) - A(\alpha(t))\pi(\alpha(t)) = g(t), \quad \forall t \in \mathcal{M}. \quad (4.6)$$

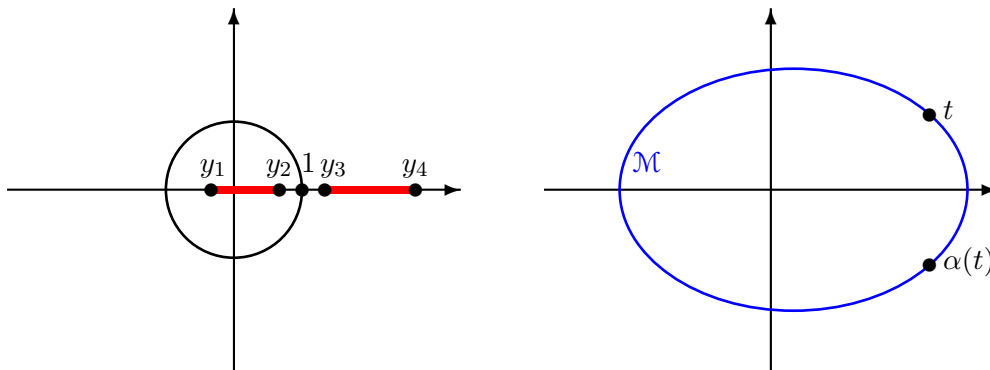


FIGURE 4.3 : Dans le cas des petits sauts il y a deux segments  $S$  possibles joignant des couples de points de branchement,  $[y_1, y_2]$  et  $[y_3, y_4]$ , mais seul l'un d'eux est inclus dans le disque unité (gauche). Une courbe typique  $\mathcal{M}$  pour la condition frontière (4.6) (droite)

Dans (4.6) les fonctions  $A(t)$  et  $g(t)$  sont connues et s'expriment simplement avec les paramètres du modèle, voir [60, Équations (5.1.5)–(5.1.6)]. Quant à la courbe  $\mathcal{M}$  elle est obtenue de l'étude des points de branchement de  $K(x, y) = 0$  de la façon suivante : dans le cas des petits sauts,

on peut bien sûr écrire  $K(x, y) = \tilde{a}(y)x^2 + \tilde{b}(y)x + \tilde{c}(y)$  (voir (1.4) dans le Chapitre 1), dont le discriminant vaut

$$\tilde{d}(y) = \tilde{b}(y)^2 - 4\tilde{a}(y)\tilde{c}(y).$$

On prouve facilement que (sous l'hypothèse (H2) de non dégénérescence) le discriminant a 3 ou 4 racines, qu'on note  $y_\ell$  (on rajoute le point de branchement  $\infty$  si  $\tilde{d}$  a degré 3), elles sont représentées sur la Figure 4.3. Soit  $S$  un segment entre deux points de branchement consécutifs. Pour un point  $p$  de  $S$ , les deux solutions de  $K(x, p) = 0$  sont réelles ou complexes conjuguées, puisque  $K$  est à coefficients réels. Si on choisit  $S$  de telle façon à être dans le deuxième cas, on peut tout de suite affirmer que l'ensemble

$$\bigcup_{p \in S} \{x \in \mathbb{C} : K(x, p) = 0\} \quad (4.7)$$

est symétrique par rapport à l'axe horizontal et dessine les deux composantes connexes d'une courbe quartique (sans intersection), pour autant de coupures que sont  $[y_1, y_2]$  et  $[y_3, y_4]$ . Sur la Figure 4.3,  $\mathcal{M}$  correspond au choix  $S = [y_1, y_2]$  dans (4.7).

#### 4.1.3 APPROCHE ANALYTIQUE DANS LE CAS DE GRANDS SAUTS

Nous exposons maintenant un ensemble de résultats montrant dans quelle mesure les méthodes analytiques (du Chapitre 3 et de [60]) peuvent être étendues à des modèles avec sauts arbitrairement grands. On présente nos résultats par étapes, l'un des points clé étant, comme nous l'avons annoncé en Section 4.1.1, de démontrer l'existence de  $I^-$  (resp.  $J^-$ ) « bons » groupes de points de branchement  $x_\ell$  (resp.  $y_\ell$ ) intérieurs au disque unité.

Avec ce formalisme chaque groupement de points de branchement pourra être utilisé, une fois associé à des feuilletés adéquats de la surface de Riemann (1.7), pour énoncer un problème frontière pour les  $I^-$  (resp.  $J^-$ ) fonctions inconnues  $\pi^{S_k''}(x, y)$  (resp.  $\pi^{S_\ell'}(x, y)$ ), après prolongement analytique éventuel. Les problèmes frontière seront de type (4.6) mais nous verrons que  $\alpha$  pourra être un automorphisme de  $\mathcal{M}$  différent de la conjugaison complexe.

TROUVER ET CLASSIFIER LES POINTS DE BRANCHEMENT. Les points de branchement en  $x$  sont obtenus grâce au discriminant en  $y$  du polynôme

$$K(x, y) = b_I(y)x^I + \dots + b_0(y) = a_J(x)y^J + \dots + a_0(x).$$

**Lemme 4.1** ([R10]). *Il y a au plus  $2J(I - 1)$  points de branchement  $y_\ell$  et  $2I(J - 1)$  points  $x_\ell$ .*

La preuve du Lemme 4.1 est simple et repose sur l'expression du résultant de  $K(x, y)$  et  $\frac{\partial K}{\partial x}(x, y)$  (resp.  $\frac{\partial K}{\partial y}(x, y)$ ). Ces points de branchement peuvent être séparés en deux : les extérieurs et les intérieurs au disque unité. Nous allons prouver qu'au sein de cette dernière catégorie tous ne sont pas pertinents pour notre problème, au sens où certains sont accidentels et n'interviennent pas dans la construction des problèmes frontière. Nous formalisons cette idée dans l'énoncé suivant.

**Théorème 4.2** ([R10]). *Il y a  $I^-$  (resp.  $J^-$ ) groupements de points de branchement  $x_\ell$  (resp.  $y_\ell$ ) conduisant à des conditions frontière sur des courbes fermées.*

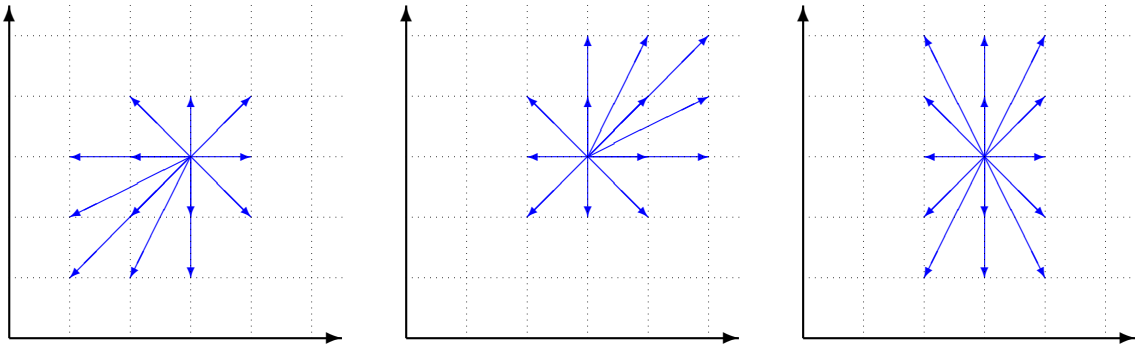


FIGURE 4.4 : Marches avec des grands sauts uniquement négatifs, uniquement positifs, puis marches hyperelliptiques

Ce problème de conduire ou non à des conditions du type (4.6) sur des courbes fermées est intimement lié au comportement des branches des fonctions algébriques définies par  $K(x, Y(x)) = K(X(y), y) = 0$ . La démonstration du Théorème 4.2, plutôt combinatoire, est liée au genre et à des propriétés plus fines de la surface de Riemann (1.7). Bien que difficile en toute généralité, le Théorème 4.2 devient pleinement accessible dans des cas particuliers, comme ceux de la Figure 4.4 ou encore pour les marches à petits pas.

GROUPEMENTS DE POINTS DE BRANCHEMENT ET PROBLÈMES FRONTIÈRE. Dans certains cas les groupes de points de branchement sont en fait des paires, formant des segments, comme sur la Figure 4.3. Il peut arriver que ces segments ne soient pas réels (ce phénomène est nouveau et propre au cas des grands sauts). Pour de tels segments non réels la condition (4.6) change :  $\alpha$  n'est plus la conjugaison complexe mais un automorphisme plus général satisfaisant  $\alpha^2(t) = t$  — parfois appelé automorphisme de Carleman.

**Théorème 4.3** ([R10]). *L'équation fonctionnelle fondamentale (4.4) peut être transformée en un problème frontière généralisé pour un vecteur de  $J^-$  fonctions inconnues de la variable  $x$ . Ce problème frontière, caractérisé par  $J^-$  conditions frontière sur des courbes fermées (a priori différentes), possède une unique solution. Mutatis mutandis, il y a un énoncé équivalent pour les  $I^-$  fonctions inconnues en  $y$ .*

Il est malheureusement sans espoir de s'attendre à l'existence d'une forme close pour les fonctions inconnues de (4.4). On s'en convainc facilement, simplement en regardant la complexité des calculs dans le cas des petits sauts [60].

EXEMPLES ET UNIFORMISATION. Il existe néanmoins des modèles pour lesquels des formules explicites sont atteignables. Deux telles classes de modèles sont représentées sur la Figure 4.4. Il s'agit d'abord des marches dites hyperelliptiques, c'est-à-dire celles ayant des petits sauts dans une direction et des grands sauts dans l'autre (voir à droite sur la Figure 4.4, où l'on a  $I^- = I^+ = 1$  et  $J^-, J^+$  quelconques). Nous n'évoquerons pas ce cas davantage ici.

Il y a d'autre part des modèles avec des petits sauts négatifs ( $I^- = J^- = 1$ ). Dans la littérature on parle parfois de marches de Łukasiewicz, voir [63, Section I.5.3]. Ces marches sont l'objet du livre [44]. Pour cette classe l'équation fonctionnelle (4.4) prend exactement la même forme que celle des petits sauts. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 4.4** ([R10]). *Pour les marches de Łukasiewicz, la fonction inconnue  $\pi(x)$  est donnée par une formule intégrale du type*

$$\int_{\mathcal{M}} f(u) \frac{w'(u)}{w(u) - w(x)} du.$$

*Ci-dessus  $f$  est une fonction algébrique explicite et  $w$  s'exprime directement en termes d'une représentation conforme du domaine borné par  $\mathcal{M}$  sur le disque unité.*

Dans le cas des petits sauts l'étude de  $w$  menée dans [60, 98, 132] s'appuie sur la théorie des fonctions elliptiques, puisque la surface de Riemann (1.7) a alors genre 1. Nous avons donné l'expression de  $w$  en (3.11). Cela n'est bien sûr plus le cas pour les grands sauts mais  $w$  peut encore être obtenue au moyen de l'uniformisation de la surface de Riemann (1.7), dont le genre est arbitraire. Il n'y a d'ailleurs pour le genre pas de formule simple en termes des paramètres  $I^\pm$  et  $J^\pm$  — mentionnons tout de même la formule de Riemann-Hurwitz, qui utilise l'ordre des points de branchement.

PROJETS EN LIEN AVEC LES MARCHES À GRANDS PAS.

[P6] *Développement et applications de l'approche analytique pour les marches avec des grands sauts dans le quadrant*

Malgré le grand nombre d'applications potentielles en théorie des probabilités et en combinatoire le cas des grands sauts reste peu traité. C'est là en effet un objectif ambitieux et un vaste projet, avec en point de mire le développement d'une théorie permettant de résoudre des modèles de marches à sauts arbitrairement grands dans le quart de plan.

Un premier aspect de ce projet concerne les modèles liés à la théorie des représentations. Dans les années 90, Biane proposa une approche pionnière, permettant de construire et d'obtenir des résultats sur des marches aléatoires à partir de la théorie des représentations. Pour résumer, décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles d'une algèbre de Lie en composantes irréductibles aboutit naturellement à un noyau de Markov sur l'ensemble des représentations irréductibles. Cette décomposition permet en outre de construire des processus conditionnés à rester dans des cônes (chambres de Weyl). En retour l'introduction de ces outils algébriques débouche sur de nouvelles interprétations pour des quantités probabilistes (par exemple, des fonctions discrètes harmoniques comme dimension des représentations, etc.). Plusieurs exemples de marches à petits ou grands sauts ont été étudiés par ce biais, notamment par Chapon et Lecouvey. Nous voudrions ici systématiser cette construction et idéalement pouvoir adresser à la communauté combinatoire une liste quasi exhaustive de modèles émergeant par cette approche et également fournir des méthodes pour les résoudre.

Une deuxième perspective porte sur les marches hyperelliptiques (il s'agit de la classe de marches représentée à droite sur la Figure 4.4). D'un point de vue de l'approche analytique ces marches sont particulières car au lieu des fonctions elliptiques (omniprésentes dans la théorie des marches à petits sauts) ce sont maintenant les fonctions hyperelliptiques qui les remplacent. Par l'étude précise des surfaces de Riemann sous-jacentes (en particulier de leur uniformisation) nous voudrions résoudre complètement cette classe de modèles.

[P7] *Orientations bipolaires*

Un modèle intéressant de chemins dans le quadrant découvert tout récemment (collaboration en cours avec M. Bousquet-Mélou et É. Fusy) est celui à  $p + 2$  pas, dont les pas sont

$$\{(1, -1)\} \cup \{(-p + i, i), 0 \leq i \leq p\}.$$

Il a été démontré bijectivement par Kenyon, Miller, Sheffield et Wilson [90] que ces chemins dans le quadrant commençant et finissant en l'origine sont en bijection avec les  $(p + 2)$ -angulations munies d'une orientation bipolaire (le nombre de faces correspondant à la longueur du chemin divisée par  $p + 1$ ). Comme il est connu que le nombre d'orientations bipolaires à  $n$  arêtes a une asymptotique en  $\kappa \cdot \gamma^n \cdot n^{-4}$  (elles sont données par les nombres de Baxter) cela suggère que de telles excursions ont aussi une asymptotique avec un facteur sous-exponentiel en  $n^{-4}$ , et effectivement c'est bien le comportement asymptotique que l'on trouve en appliquant une formule générale due à Denisov et Wachtel [49] (rappelée ici en Section 3.3.1). Le modèle est connu pour être D-fini pour  $p = 1$  (triangulations bipolairement orientées) et nous avons observé qu'il semble l'être aussi des valeurs générales de  $p$ .

## 4.2 MARCHES INHOMOGÈNES DANS LE QUART DE PLAN

Cette section illustre la possible extension de l'approche analytique au cas des marches aléatoires non homogènes (spatialement). S'il me paraît illusoire d'espérer traiter n'importe quelle marche inhomogène par cette approche nous verrons que lorsque l'inhomogénéité est relativement simple (disons rationnelle), certaines méthodes continuent de fonctionner.

### 4.2.1 CONTEXTE GÉNÉRAL ET PRÉSENTATION DU MODÈLE

Les modèles et résultats ci-dessous proviennent de l'article [R15]. On s'intéresse à une population de plantes dont l'évolution découle des règles suivantes :

- Chaque plante est diploïde et caractérisée par les deux allèles (disons  $a$  et  $A$ ) qu'elle porte à son locus de l'auto-incompatibilité.
- L'allèle  $A$  est dominant sur  $a$ . Par suite, les plantes ont pour génotype  $aa$ ,  $aA$  ou  $AA$ . Le phénotype (c'est-à-dire le type de protéines transportées par le pollen et les stigmates) est alors  $a$ ,  $A$  et  $A$ , respectivement.
- La reproduction est supposée (sexuelle et) auto-incompatible. Cela empêche la fécondation de l'ovule de la plante par son propre pollen : seuls du pollen et des stigmates associés à des protéines différentes peuvent donner une semence viable (autrement dit, du pollen d'une plante de phénotype  $A$  peut féconder des stigmates de phénotype  $a$  et *vice-versa*).

Une conséquence immédiate de cette modélisation biologique est que des graines  $AA$  ne peuvent pas être créées. On peut donc considérer sans restriction une population composée d'individus de deux types, de génotypes  $aa$  et  $aA$ .

Chaque graine est nécessairement de génotype  $aa$  ou  $aA$ , avec probabilité  $1/2$ . On fait l'hypothèse que les ovules sont produits en temps continu à un taux  $r > 0$  et que chaque ovule est fécondé pour donner naissance à une graine, pourvu qu'il existe dans la population du pollen compatible. Le temps de vie de chaque individu suit une loi exponentielle de moyenne  $1/d$ , où  $d > 0$ . On désigne par  $X_t^a$  et  $X_t^A$  le nombre d'individus ayant pour génotype  $aa$  et  $aA$  au temps  $t \in \mathbb{R}_+$ . Le



processus  $(X_t^a, X_t^A)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus Markovien de sauts, avec des transitions comme sur la Figure 4.5. On notera  $(X(n), Y(n))_{n \geq 0}$  le processus pris aux instants de saut. Nous renvoyons à la lecture de [R15] pour plus de détails sur le modèle.

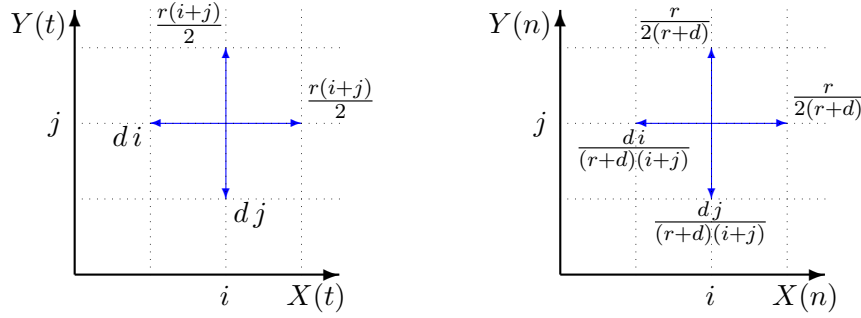


FIGURE 4.5 : Taux de transition (pour le modèle  $(X(t), Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  à temps continu) et probabilités de transition (pour le modèle  $(X(n), Y(n))_{n \geq 0}$  à temps discret). Les paramètres  $r$  et  $d$  sont, respectivement, les taux de production et de mort des individus

Lorsqu'un des phénotypes disparaît, la reproduction devient impossible et la population s'éteint. C'est ce processus d'extinction que nous étudions ici. À cette fin, introduisons le premier temps auquel l'un des deux types s'éteint :

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ou } Y_n = 0\}.$$

Pour  $i, j \geq 0$ , désignons par

$$a_{i,j} = \mathbb{P}_{(i,j)}[\tau_0 < \infty], \quad P(x, y) = \sum_{i,j \geq 1} a_{i,j} x^i y^j \quad (4.8)$$

les probabilités d'absorption et leur fonction génératrice. Par des arguments de symétrie on a  $a_{i,j} = a_{j,i}$ . De plus, pour tout  $i, j \geq 0$  tel que  $i = 0$  ou  $j = 0$ , on a  $a_{i,j} = 1$ .

#### 4.2.2 CONTRIBUTIONS DE [R15]

Dans cette section nous présentons nos contributions [R15] au modèle de biologie des populations précédemment introduit. Comme un écho à la Section 4.1, gardons ici la structuration en trois étapes : équation fonctionnelle (point 1) ; énoncé d'un problème frontière (point 2) ; résolution dudit problème frontière (point 3).

*Étape 1.* On établit d'abord une équation fonctionnelle pour la fonction génératrice des probabilités d'absorption (4.8). Il n'y pas de difficulté ici : une application de la propriété de Markov combinée à la forme spéciale des probabilités de transition (voir Figure 4.5) conduit à, pour tout  $i, j \geq 1$ ,

$$a_{i,j} = \frac{r}{2(r+d)} a_{i+1,j} + \frac{r}{2(r+d)} a_{i,j+1} + \frac{d j}{(r+d)(i+j)} a_{i,j-1} + \frac{d i}{(r+d)(i+j)} a_{i-1,j}. \quad (4.9)$$

Les probabilités d'absorption sont donc harmoniques, avec le vocabulaire du Chapitre 6. Multiplions classiquement (4.9) par  $x^i y^j$  et sommions relativement à  $i, j \geq 1$ . Après reformulation (voir [23, Section 3] pour plus de détails) on obtient que la fonction génératrice  $P(x, y)$  satisfait

$$AP(x, y) = h(x, y, P), \quad (4.10)$$

où l'on a noté

$$\left\{ \begin{array}{l} AP(x, y) = Q(x, y) \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + Q(y, x) \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + R(x, y)P(x, y), \\ Q(x, y) = (r + d)x - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \frac{x}{y} - dx^2, \\ R(x, y) = \frac{r}{2x} + \frac{r}{2y} - dx - dy, \\ h(x, y, P) = -\frac{r}{2} \sum_{i \geq 1} a_{i,1} i x^i - \frac{r}{2} \sum_{j \geq 1} a_{1,j} j y^j + d \sum_{i \geq 1} x^i y + d \sum_{j \geq 1} y^j x. \end{array} \right.$$

La seule — mais cruciale — différence entre l'équation fonctionnelle (4.10) et son pendant homogène (4.4) est qu'il y a maintenant dans (4.10) des dérivées partielles de  $P(x, y)$ .

Remarquons tout de suite que l'ordre de l'EDP (4.10) (tout comme le fait-même que (4.10) soit une EDP) est lié à la forme particulière des probabilités de transition du modèle. En effet si au lieu d'être rationnelles d'ordre 1 en  $i, j$  les transitions de la Figure 4.5 étaient rationnelles d'ordre 2, l'équation fonctionnelle comporterait également des dérivées secondes de  $P(x, y)$ . Si elles quittaient le monde rationnel il n'y aurait alors tout simplement plus d'EDP.

Incidemment, on note ici une autre difficulté intrinsèque à la résolution de l'équation (4.10) : il n'y a plus unicité des solutions de (4.9) — on le remarque facilement puisque la suite constante égale à 1 est solution. Pourtant, dans le cas pertinent  $r > d$ , on a  $a_{i,j} < 1$  pour tout  $i, j \geq 1$ , voir [23]. En d'autres termes la population a une probabilité positive de non extinction pour toute population initiale comportant des individus des deux types.

D'un point de vue théorique les probabilités d'absorption sont caractérisées comme étant les plus petites solutions positives (il s'agit-là d'un résultat classique en théorie des chaînes de Markov).

*Étape 2.* C'est un problème ouvert ! On ne peut pas utiliser la même idée que pour les marches homogènes, à savoir évaluer l'équation fonctionnelle en une infinité de points  $(x, y)$  où le membre de gauche de (4.10) est bien défini et s'annule. La raison est simple : en général (c'est-à-dire pour des valeurs typiques de  $r$  et  $d$ ) il n'y a pas de  $(x, y)$  où simultanément  $R(x, y) = Q(x, y) = Q(y, x) = 0$ .

*Étape 3.* À défaut de résoudre un problème frontière qui n'existe donc pas, voici tout de même quelques méthodes alternatives pour le calcul des fonctions génératrices inconnues (ou directement des probabilités d'extinction).

- On peut simuler la marche aléatoire et appliquer des méthodes de type Monte-Carlo et ce faisant obtenir des approximations (avec intervalles de confiance) pour les probabilités d'extinction, voir [R15, Section 4.1].
- On peut utiliser des méthodes déterministes qui, partant d'une équation de récurrence, donnent les  $(a_{i,j})_{0 \leq i, j \leq N}$  en termes des  $(a_{N,j})_{0 \leq j \leq N}$  et  $(a_{i,N})_{0 \leq i \leq N}$ , cf. [R15, Section 4.2].

- Finalement, pour des couples  $(i, j)$  tels que  $i$  est très grand mais  $j$  est borné (ou *vice-versa*) on peut calculer les probabilités  $a_{i,j}$  en faisant des approximations avec des marches aléatoires 1-dimensionnelles, voir [R15, Section 2.2]. En effet avec de grandes chances si la marche aléatoire partant d'un tel  $(i, j)$  atteint l'un des axes ce sera l'axe vertical. On peut alors obtenir le comportement asymptotique

$$a_{i,j} = \left(\frac{2d}{r}\right)^i \frac{i!}{j^i} \cdot (1 + o(1)), \quad j \rightarrow \infty.$$

### 4.2.3 PROBLÈMES OUVERTS

ANALOGUE DU PROBLÈME FRONTIÈRE DANS LE CAS INHOMOGÈNE. Dans ce chapitre, le premier problème ouvert qui vient à l'esprit est bien sûr de trouver l'analogue du problème frontière (point 2). Comment déterminer les fonctions génératrices inconnues? Existe-t'il un concept similaire au problème frontière?

APPROCHES POTENTIALISTE ET PROBABILISTE.

[P8] *Développer une approche axée sur la théorie du potentiel pour les marches inhomogènes*

On l'a facilement constaté en (4.9) : les probabilités d'absorption forment une fonction discrète harmonique. Ce n'est certes pas suffisant *a priori* pour les déterminer mais cela ouvre la voie à d'autres techniques, issues de la théorie du potentiel.

Par exemple, on peut remarquer que la fonction

$$f(i, j) = 1 - \left(1 - \left(\frac{d}{r}\right)^i\right) \left(1 - \left(\frac{d}{r}\right)^j\right),$$

qui d'un point de vue probabiliste est la probabilité d'extinction de la marche homogénéisée (c'est-à-dire la marche simple avec sauts  $p_{1,0} = p_{0,1} = \frac{r}{2(r+d)}$  et  $p_{-1,0} = p_{0,-1} = \frac{d}{2(r+d)}$ ) de celle de la Figure 4.5, est une fonction sur-harmonique. La fonction  $f(X_n, Y_n)$  est alors une sur-martingale bornée qui converge vers  $a_{i,j}$ . Peut-on utiliser la fonction  $f$  pour approcher efficacement les probabilités d'absorption? Existe-t'il de meilleures fonctions sur- ou sous-harmoniques? Quel est le comportement asymptotique de  $a_{i,j}$  pour de grandes valeurs de  $i$  et  $j$ ? Il s'agit-là de travaux en cours avec G. Alsmeyer.

On peut aussi signaler l'article [28], qui utilise des techniques de la théorie du potentiel (fonctions caloriques, inégalités de Harnack au bord, principes du maximum, etc.) et qui sera évoqué au Chapitre 6. Il permet l'étude de marches non homogènes, mais *a priori* avec un autre type d'homogénéité que celle de la Figure 4.5.

PROJET D'APPROCHE ANALYTIQUE POUR LES URNES DE PÓLYA.

[P9] *Développer une méthode analytique pour les urnes de Pólya*

Une urne de Pólya est un processus aléatoire décrit comme suit : une urne contient des boules noires et des boules rouges ; à chaque étape, nous piochons au hasard une de ces boules, regardons sa couleur, la remettons dans l'urne et rajoutons un certain nombre de boules noires et rouges déterminé par une règle pré-établie et par la couleur de la boule piochée. Quelle est la composition de l'urne après  $n$  étapes ? À l'infini ?

Il existe de nombreuses approches (probabiliste [42], issue de la combinatoire analytique [63], etc.) pour ce problème classique. De notre point de vue de marches dans des cônes on se convainc rapidement qu'on a affaire à un processus non homogène dans le quart de plan. L'évolution peut donc être décrite par une équation fonctionnelle ressemblante à (4.10), avec toutefois des spécificités techniques.



## CHAPITRE 5

# TEMPS DE SORTIE DE CÔNES

Dans ce chapitre nous présentons les publications :

- [R9] G. Fayolle et K. Raschel (2012). Some exact asymptotics in the counting of walks in the quarter plane. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AQ*. In 23rd Intern. Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms (AofA 2012) 109–124
- [R12] R. Garbit et K. Raschel (2016). On the exit time from a cone for random walks with drift. *Rev. Mat. Iberoam.* **32** 511–532
- [R11] R. Garbit et K. Raschel (2014). On the exit time from a cone for Brownian motion with drift. *Electron. J. Probab.* **19** 1–27
- [R6] R. Essifi, M. Peigné et K. Raschel (2013). Some aspects of fluctuations of random walks on  $\mathbb{R}$  and applications to random walks on  $\mathbb{R}_+$  with non-elastic reflection at 0. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **10** 591–607

Les chapitres précédents fournissent de l'information exacte (expression des séries génératrices dans les Chapitres 2 et 4, nature algébrique de ces mêmes fonctions dans le Chapitre 3) pour le modèle des marches dans le quadrant, principalement avec petits sauts. Nous voudrions ici nous concentrer sur des aspects asymptotiques, tout en élargissant notre cadre d'étude à des modèles de marches avec grands sauts, en toute dimension et dans des cônes quelconques. Nous couvrons aussi le cas du mouvement Brownien.

La Section 5.1 est focalisée sur le modèle probabiliste général des marches dans des cônes. Si  $\tau_C$  désigne le premier temps de sortie d'un cône  $C$  fixé pour une marche aléatoire, nous obtenons la constante de décroissance exponentielle de la probabilité  $\mathbb{P}_x[\tau_C > n]$ . Transférée au contexte combinatoire cette estimée procure la constante de croissance du nombre total de marches confinées au cône  $C$ .

Dans la Section 5.2, pour le modèle classique du mouvement Brownien dans des cônes (là encore généraux) nous obtenons l'asymptotique exacte de  $\mathbb{P}_x[\tau_C > n]$ . Les techniques sont ici radicalement différentes et utilisent des expressions du noyau de la chaleur de cônes vu comme solution d'une EDP.

Enfin on considère dans la Section 5.3 le modèle discret en dimension 1 (l'unique cône possible est alors la demi-droite  $\mathbb{R}_+$  — ou symétriquement  $\mathbb{R}_-$ ) et nous prouvons des estimées fines s'inscrivant dans la théorie des fluctuations des marches aléatoires.

## 5.1 CONSTANTE EXPONENTIELLE DE CROISSANCE

### 5.1.1 CAS DES MARCHES À PETITS SAUTS

Dans le travail [R9] qui tourne autour de la problématique 2 du Chapitre 1 nous nous intéressons aux quatre fonctions génératrices suivantes (des spécialisations de la série trivariée (1.1))

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(0, 0; t) = \sum_{n \geq 0} q_{\mathfrak{S}}(0, 0; n) t^n, \\ Q(1, 0; t) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i \geq 0} q_{\mathfrak{S}}(i, 0; n) \right) t^n, \\ Q(0, 1; t) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j \geq 0} q_{\mathfrak{S}}(0, j; n) \right) t^n, \\ Q(1, 1; t) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i, j \geq 0} q_{\mathfrak{S}}(i, j; n) \right) t^n, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

ou plutôt à leurs coefficients, dont nous cherchons l'asymptotique ( $n \rightarrow \infty$ ). La première (resp. deuxième, troisième, quatrième) série ci-dessus compte les excursions (resp. les marches se terminant sur l'axe horizontal, sur l'axe vertical, en tout point du quart de plan). Le comportement asymptotique des excursions a déjà été obtenu dans [49]. Pour les autres nombres de marches en revanche, seuls quelques cas sporadiques ont été étudiés, notamment par Bousquet-Mélou et Mishna [34].

Le point de départ de notre analyse est l'expression intégrale obtenue dans [132] pour la fonction  $Q(x, 0)$ , que nous avons rappelée ici dans le Théorème 4.4 :

$$Q(x, 0) = \frac{1}{K(x, 0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{M}} u Y_0(u) \frac{w'(u)}{w(u) - w(x)} du, \quad (5.2)$$

avec  $w$  définie en (3.11) et la courbe  $\mathcal{M} = X([y_1, y_2])$  représentée sur la Figure 2.3.

UNE FORMULE POUR LA CONSTANTE DE CROISSANCE DES EXCURSIONS. Denisov et Wachtel [49] affirment que cette constante de croissance peut être calculée par  $\rho = \chi(x_0, y_0)$ , où  $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$  est l'unique solution du système  $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0$ . Nous avons reproduit ce résultat ici dans le Théorème 3.6.

Très bien ! Mais comment voyons-nous cette singularité<sup>23</sup>  $t_g = 1/\rho$  sur l'expression analytique (5.2) des séries génératrices ? Très clairement en fait : elle est pour nous une singularité infranchissable, car c'est la plus petite valeur de  $t > 0$  telle que le genre<sup>24</sup>  $g$  de la surface de Riemann (1.7) passe de 1 à 0. Tout devient donc singulier au delà de  $t_g$  : la courbe  $\mathcal{M}$  n'est plus lisse, la fonction  $w$  ne peut pas être prolongée (en  $t$ ), certains points de branchement se confondent, etc.

<sup>23</sup>Par un argument classique de transfert des singularités, la constante de croissance est l'inverse de la première singularité de la série génératrice associée.

<sup>24</sup>C'est le genre  $g$  qui inspire la notation  $t_g$ .

AUTRES SÉRIES GÉNÉRATRICES. En particulier,  $t_g$  est aussi singularité des autres fonctions génératrices (5.1). Nous démontrons qu'il y a en outre trois sources de singularités potentielles, à savoir  $1/\#\mathfrak{S}$  et (le symbole  $\delta_{i,j}$  étant introduit en (1.5))

$$\begin{cases} t_Y = \frac{1}{\delta_{1,0} + \delta_{-1,0} + 2\sqrt{(\delta_{-1,1} + \delta_{0,1} + \delta_{1,1})(\delta_{-1,-1} + \delta_{0,-1} + \delta_{1,-1})}}, \\ t_X = \frac{1}{\delta_{0,1} + \delta_{0,-1} + 2\sqrt{(\delta_{1,-1} + \delta_{1,0} + \delta_{1,1})(\delta_{-1,-1} + \delta_{-1,0} + \delta_{-1,1})}}. \end{cases}$$

Nous commenterons la définition de  $t_X$  et  $t_Y$  dans le prochain paragraphe. Les inégalités suivantes sont élémentaires :

$$0 < \frac{1}{\#\mathfrak{S}} \leq \min\{t_X, t_Y\} \leq \max\{t_X, t_Y\} \leq t_g.$$

Notre résultat peut se résumer dans le tableau suivant, qui donne en fonction du drift  $\vec{D}$  (cf. (1.14)) et de la covariance

$$\text{cov} = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}} ij - \left( \sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}} i \right) \left( \sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}} j \right)$$

la première singularité des séries génératrices (5.1).

Drift	Singularité de $Q(1,0)$			Singularité de $Q(0,1)$			Singularité de $Q(1,1)$			
	$t_g$	$t_Y$	$1/\#\mathfrak{S}$	$t_g$	$t_X$	$1/\#\mathfrak{S}$	$t_g$	$t_X$	$t_Y$	$1/\#\mathfrak{S}$
(+, +)		×			×					×
(+, 0)		×		cov $\geq 0$	cov $\leq 0$					×
(0, +)	cov $\geq 0$	cov $\leq 0$			×					×
(0, 0)	×			×			×			
(+, -)		×		×					×	
(-, +)	×				×			×		
(0, -)	cov $\leq 0$	cov $\geq 0$		×			cov $\leq 0$	cov $\geq 0$		
(-, 0)	×			cov $\leq 0$	cov $\geq 0$		cov $\leq 0$	cov $\geq 0$		
(-, -)	×			×			×			

QUELQUES IDÉES DE DÉMONSTRATION. Nous avons compris pourquoi  $t_g$  apparaissait ; il est aussi facile de saisir le caractère potentiellement singulier de  $1/\#\mathfrak{S}$  en observant le membre de gauche de l'équation fonctionnelle (1.2) évaluée en  $(1, 1)$  :

$$(t\#\mathfrak{S} - 1)Q(1,1) = K(1,0)Q(1,0) + K(0,1)Q(0,1) - K(0,0)Q(0,0) - 1.$$

Il reste à comprendre comment survient  $t_Y$  (et par symétrie  $t_X$ ). C'est la première valeur de  $t$  telle que l'un des points de branchement  $x_\ell^{25}$  vaut 1 (pour le voir on calcule  $d(1)$ ). Ainsi dans l'intégrande de (5.2) le point 1 devient doublement singulier : il est singularité polaire (à cause du terme  $w(u) - w(1)$ ) mais aussi singularité algébrique (puisque point de branchement de  $Y_0$ ).

<sup>25</sup>Cela explique la notation  $t_Y$ , puisque 1 est alors un point de branchement de la fonction algébrique  $Y$  définie par  $K(x, Y(x)) = 0$ , cf. Section 1.3.



Une interprétation combinatoire intéressante de nos résultats (eux-mêmes plutôt analytiques) a été conjecturée dans [85], nous la prouverons dans le Théorème 5.3. Par ailleurs le calcul de la première singularité de  $Q(1,1)$  a été étendu très largement dans [R12], c'est ce que nous présentons ci-dessous.

### 5.1.2 CAS GÉNÉRAL

CÔNE DUAL ET TRANSFORMÉE DE LAPLACE. Nous supposons ici que  $C$  est un cône convexe d'intérieur non vide dans  $\mathbb{R}^d$ . Son (cône) dual est par définition (avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^d$ )

$$C^* := \{z \in \mathbb{R}^d : \langle x, z \rangle \geq 0, \forall x \in C\}. \quad (5.3)$$

C'est l'opposé du cône polaire  $C^\#$  dessiné sur la Figure 5.2. Si  $C$  est l'orthant  $\mathbb{N}^d$ , alors  $C = C^*$ .

Nous considérons des marches aléatoires  $d$ -dimensionnelles  $(S_n)$  dont la loi  $\mu$  des accroissements dispose de tous les moments exponentiels (c'est évidemment le cas des marches à support borné qui apparaissent en combinatoire) ; nous pouvons alors définir la transformée de Laplace

$$L_\mu(x) = \mathbb{E}^\mu[e^{\langle x, S_{n+1} - S_n \rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle x, y \rangle} \mu(dy). \quad (5.4)$$

Nous faisons en outre les hypothèses (faibles) suivantes :

- (H1) Le support de  $\mu$  n'est pas contenu dans un hyperplan linéaire<sup>26</sup> ;
- (H2) Le support de  $\mu$  n'est pas contenu dans un demi-espace  $u^- = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle \leq 0\}$  avec  $u \in C^* \setminus \{0\}$ <sup>27</sup>.

RÉSULTAT PRINCIPAL. Pourvu que (H2) soit vérifiée,  $L_\mu$  atteint son minimum dans le cône dual  $C^*$  (c'est là un argument de convexité) en un point que nous noterons  $x^*$ . Notre résultat principal identifie la décroissance exponentielle<sup>28</sup> de la probabilité  $\mathbb{P}_x[\tau_C > n]$  de rester dans le cône  $C$  jusqu'au temps  $n$ , partant de  $x \in C$ . Notons  $v$  un vecteur arbitraire intérieur à  $C$ .

**Théorème 5.1** ([R12]). *Si la loi  $\mu$  satisfait (H1) et (H2), alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x[\tau_C > n]^{1/n} = \min_{z \in C^*} L_\mu(z) = L_\mu(x^*),$$

pour tout  $x \in C + \delta v$ , pour un certain  $\delta \geq 0$ .

Les hypothèses (H1) et (H2) sont nécessaires : nous construisons dans [R12] une marche aléatoire ne satisfaisant pas à (H2) et telle que le taux de décroissance dépend de  $x$ , ce qui n'est pas le cas dans les conclusions du Théorème 5.1.

<sup>26</sup>Cette hypothèse n'est pas restrictive : il suffit simplement de se placer dans la bonne dimension  $d$ .

<sup>27</sup>À titre d'exemple, dans le quart de plan l'hypothèse (H2) exclut la marche représentée à gauche sur la Figure 3.8, elle est en revanche compatible avec les marches singulières de la Figure 1.2.

<sup>28</sup>Nous appelons décroissance exponentielle d'une suite de nombres positifs  $(a_n)$  la quantité  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$ .

IDÉE DE PREUVE : TRANSFORMATION DE CRAMÉR. Cette transformation est synonyme d'un changement exponentiel de mesure<sup>29</sup>, selon la formule

$$\mu_z(dy) = \frac{e^{\langle z, y \rangle}}{L_\mu(z)} \mu(dy).$$

Elle respecte particulièrement bien la structure de marche aléatoire (essentiellement car l'exponentielle est un caractère), comme l'illustre l'identité

$$\mathbb{P}_x^\mu[S_n = y, \tau_C > n] = L_\mu(z)^n e^{\langle z, x-y \rangle} \mathbb{P}_x^{\mu_z}[S_n = y, \tau_C > n].$$

En particulier, si  $z \in C^*$  l'exponentielle ci-dessus est bornée (puisque  $y \in C$ ) et on obtient sur-le-champ que  $L_\mu(x^*)$  majore la constante de croissance. La subtilité du Théorème 5.1 réside dans le fait qu'il s'agit-là aussi d'une borne inférieure. Indiquons deux ingrédients clé pour l'argument de la borne inférieure : d'abord sous la nouvelle loi  $\mu_{x^*}$  le drift de la marche aléatoire appartient au cône fermé  $C$  et n'a donc pas tendance à éloigner le processus hors du cône. Par ailleurs, inspirés par [68] nous prouvons un principe de non décroissance exponentielle de la probabilité de non sortie pour ces processus avec drift appartenant au cône fermé.

APPLICATION EN COMBINATOIRE. Nos résultats s'appliquent en combinatoire, dans le domaine de l'énumération des marches dans l'orthant  $Q = \mathbb{N}^d$ . Nous notons ici  $e_{\mathfrak{S}}(x, y; n)$ <sup>30</sup> le nombre de marches joignant  $x$  à  $y$  en  $n$  pas exactement tout en restant dans  $Q$ , et par

$$e_{\mathfrak{S}}(x; n) = \sum_{y \in Q} e_{\mathfrak{S}}(x, y; n) \tag{5.5}$$

le nombre total de marches. Dans la suite nous dirons que l'ensemble de sauts  $\mathfrak{S}$  est « propre » s'il satisfait aux propriétés (H1), (H2) et qui plus est à

(H3) L'ensemble de sauts  $\mathfrak{S}$  autorise une trajectoire restant dans  $Q$  de l'origine jusqu'à un point intérieur à  $Q$ .

Notons que les 79 modèles bien connus de marches dans le quart de plan (comprenant les cinq marches singulières de la Figure 1.2) sont tous propres. Notre théorème en combinatoire peut s'énoncer comme suit :

**Théorème 5.2** ([R12]). *Soit  $\mathfrak{S}$  un ensemble de sauts propre. La transformée de Laplace de  $\mathfrak{S}$*

$$L_{\mathfrak{S}}(x) = \sum_{s \in \mathfrak{S}} e^{\langle x, s \rangle}$$

*atteint un minimum global sur  $Q$  en un unique point  $x_0$ , et pour tout  $x$  dans  $Q$  suffisamment loin du bord,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_{\mathfrak{S}}(x; n)^{1/n} = L_{\mathfrak{S}}(x_0).$$

---

<sup>29</sup>En substance nous avons déjà rencontré la transformation de Cramér dans la Section 3.3.1.

<sup>30</sup>Cette notation généralise celle des nombres  $q_{\mathfrak{S}}(i, j; n)$  par la formule  $q_{\mathfrak{S}}(i, j; n) = e_{\mathfrak{S}}((0, 0), (i, j); n)$ .

Le Théorème 5.2 découle directement du Théorème 5.1 appliqué au cône  $C = Q$ . Le même résultat appliqué à des demi-plans fournit l'énoncé suivant, qui est l'interprétation combinatoire conjecturée dans [85] et qui affirme que le taux de croissance est le même dans l'orthant  $Q$  que dans un demi-espace bien choisi, cf. Figure 5.1.

**Théorème 5.3** ([R12]). *Soit  $\mathfrak{S} \subset \mathbb{Z}^d$  un ensemble de sauts propre et soit  $K_{\mathfrak{S}}$  la constante exponentielle de croissance du nombre total de marches (5.5) fournie par le Théorème 5.2. Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des hyperplans passant par l'origine de  $\mathbb{R}^d$  et ne rencontrant pas l'intérieur du premier orthant  $Q$ . Pour  $p \in \mathcal{P}$ , soit  $K_{\mathfrak{S}}(p)$  le taux de croissance des marches de  $\mathfrak{S}$  qui sont contraintes au côté de  $p$  qui inclut le premier orthant. Alors  $K_{\mathfrak{S}} = \min_{p \in \mathcal{P}} K_{\mathfrak{S}}(p)$ .*

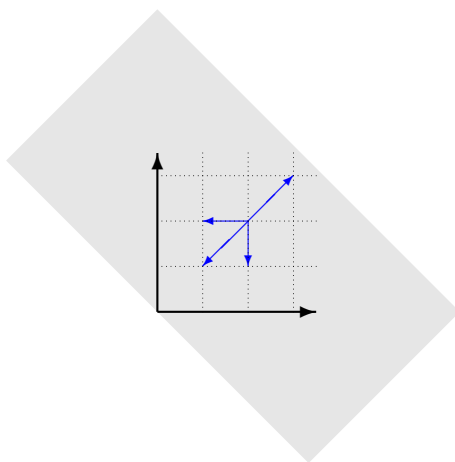


FIGURE 5.1 : Le Théorème 5.3 affirme que le taux de croissance du nombre total de marches est le même dans l'orthant que dans un demi-espace bien choisi. Si  $\mathfrak{S}$  est symétrique avec un drift pointant vers l'origine du cône, le bon demi-plan (grisé ci-dessus) forme un angle de  $\pi/4$  avec le quart de plan  $\mathbb{N}^2$

CONCLUSIONS. Au delà de la constante exponentielle de croissance on voudrait voir un développement asymptotique complet du nombre total de marches (5.5). C'est ce qu'a fait Duraj [54] dans le cas particulier où est  $x^*$  est intérieur au cône dual<sup>31</sup>. Il s'agit de projets qu'on peut aborder de plusieurs façons.

[P10] *Utilisation de la combinatoire analytique à plusieurs variables pour calculer le développement asymptotique complet de la probabilité  $\mathbb{P}_x[\tau_C > n]$  pour des marches avec poids dans des chambres de Weyl*

Pour des modèles ayant une structure assez forte, des outils algébriques et la combinatoire analytique à plusieurs variables [126] semblent prometteurs. Nous voudrions parvenir à l'estimée asymptotique

$$\mathbb{P}_x[\tau_C > t] = \kappa \cdot h(x) \cdot n^{-\alpha} \cdot L_\mu(x^*)^n \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.6)$$

et identifier les différents régimes possibles (impliquant notamment le drift, mais pas uniquement) de la fonction harmonique  $h(x)$  et du paramètre  $\alpha$ .

<sup>31</sup>S'il n'est pas possible de transcrire cette hypothèse en fonction du drift uniquement, notons tout de même qu'elle couvre la situation d'un drift négatif, c'est-à-dire intérieur au cône polaire  $C^\sharp = -C^*$ .

[P11] *Utilisation de méthodes probabilistes (couplage avec le mouvement Brownien), de type [49], pour couvrir le cas général*

Nous voudrions aussi étendre les méthodes probabilistes tout à fait générales de [49] au cas d'un drift quelconque. La cible est la même que ci-dessus (développement asymptotique (5.6)) mais le cadre absolument général : cônes et accroissements quelconques.

## 5.2 MOUVEMENT BROWNIEN DANS DES CÔNES : ASPECTS EXACTS ET ASYMPTOTIQUES

### 5.2.1 TEMPS DE SORTIE DE CÔNES POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN AVEC DRIFT

RÉSULTAT PRINCIPAL. Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel avec drift  $a \in \mathbb{R}^d$ . Pour tout cône  $C \subset \mathbb{R}^d$ , définissons le premier temps de sortie

$$\tau_C = \inf\{t > 0 : B_t \notin C\}.$$

Dans l'article [R11] nous étudions la probabilité pour le mouvement Brownien parti de  $x$  de ne pas quitter  $C$  avant le temps  $t$ , à savoir  $\mathbb{P}_x[\tau_C > t]$ , ainsi que son comportement asymptotique

$$\mathbb{P}_x[\tau_C > t] = \kappa \cdot h(x) \cdot t^{-\alpha} \cdot e^{-\gamma t} \cdot (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Bien qu'il s'agisse-là d'une question fondamentale, une telle estimée n'était connue<sup>32</sup> avant [R11] que dans des cas bien spécifiques. On pourra consulter les travaux de DeBlassie [46, 47] et Bañuelos et Smits [9] pour le cas d'un drift nul. Dans le cas d'un drift positif dans une chambre de Weyl, Biane, Bougerol et O'Connell calculent (en passant) la probabilité de non sortie [22]. Puchała et Rolski traitent dans [129] le cas d'un drift quelconque dans des chambres de Weyl de type  $A$ .

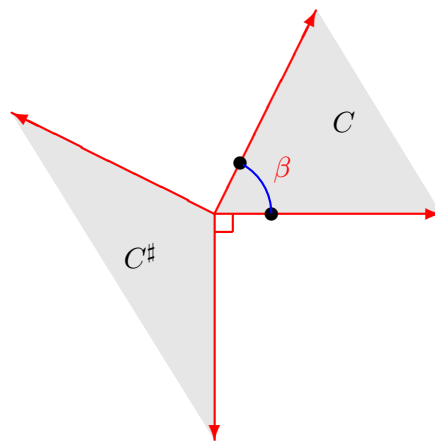


FIGURE 5.2 : Les cônes  $C$  en dimension 2 sont caractérisés par leur angle d'ouverture  $\beta$ . L'ensemble  $\Theta$  (l'arc de cercle) et son bord jouent un rôle très important dans notre analyse

<sup>32</sup>D'une façon finalement quelque peu surprenante.

Afin d'énoncer notre résultat principal nous avons besoin d'introduire la notion de cône polaire, noté  $C^\sharp$  (cf. Figure 5.2 pour un exemple), qui n'est rien d'autre que l'opposé du cône dual (5.3) :

$$C^\sharp = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 0, \forall y \in C\} = -C^*.$$

Nous avons également besoin de définir deux quantités,  $\alpha_1$  et  $p_1$ , nous le ferons en (5.9), juste en dessous de l'énoncé. Pour résumer nous démontrons que la décroissance exponentielle  $\gamma$  dans (5.7) est simplement fonction de la distance entre le drift et le cône, tandis que la correction polynomiale  $\alpha$  dépend de la position du drift relativement au cône et au cône polaire et reflète la géométrie locale du cône en les points qui minimisent la distance au drift.

**Théorème 5.4** ([R11]). *Soit  $C$  un cône infiniment différentiable par morceaux. Pour le mouvement Brownien de drift  $a \in \mathbb{R}^d$ , le comportement asymptotique (5.7) a lieu, avec*

$$\gamma = \frac{1}{2}d(a, C)^2 = \frac{1}{2} \min_{y \in C} |y - a|^2$$

et<sup>33</sup>

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 + 1 & \text{si } a \text{ est polaire intérieur } (a \in (C^\sharp)^\circ), \\ p_1/2 & \text{si } a \text{ est nul } (a = 0), \\ 0 & \text{si } a \text{ est intérieur } (a \in C^\circ), \\ 1/2 & \text{si } a \text{ est frontière } (a \in \partial C \setminus \{0\}) \text{ et } \Theta \text{ réel-analytique,} \\ 3/2 & \text{si } a \text{ est extérieur et non polaire } (a \in \mathbb{R}^d \setminus (\overline{C} \cup C^\sharp)) \text{ et } \Theta \text{ réel-analytique,} \\ p_1/2 + 1 & \text{si } a \text{ est frontière polaire } (a \in \partial C^\sharp \setminus \{0\}) \text{ et } C \text{ est 2-dimensionnel.} \end{cases}$$

Il reste à définir  $\alpha_1$  et  $p_1$ . Pour cela notons que lorsque le cône est supposé infiniment différentiable par morceaux, il existe (voir [43, page 169]) un ensemble complet de fonctions propres  $(m_j)_{j \geq 1}$  orthonormales relativement à la mesure surface sur  $\Theta$  avec des valeurs propres correspondantes  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , telles que pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\begin{cases} L_{\mathbb{S}^{d-1}} m_j = -\lambda_j m_j & \text{sur } \Theta, \\ m_j = 0 & \text{sur } \partial\Theta, \end{cases} \quad (5.8)$$

où  $L_{\mathbb{S}^{d-1}}$  désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Pour tout  $j \geq 1$  on pose alors

$$\alpha_j = \sqrt{\lambda_j + (d/2 - 1)^2}, \quad p_j = \alpha_j - (d/2 - 1). \quad (5.9)$$

La constante  $\kappa$  et la fonction  $h(x)$  dans le théorème ci-dessus sont également explicites mais leurs expressions peuvent être relativement compliquées selon les cas. Nous donnons ici seulement un exemple, celui du premier cas (lorsque  $a$  est polaire intérieur) :

$$\kappa = \frac{1}{2^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1 + 1)} \int_C e^{\langle a, y \rangle} |y|^{p_1} m_1(\vec{y}) dy, \quad h(x) = e^{\langle -a, x \rangle} |x|^{p_1} m_1(\vec{x}),$$

où la fonction  $m_1$  est définie en (5.8) et  $\alpha_1$  en (5.9), et où pour  $y \neq 0$  nous écrivons  $\vec{y} = y/|y|$  pour la projection de  $y$  sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

Dans l'énoncé du théorème le dernier cas est présenté en dimension 2 seulement, car la valeur de  $\alpha$  en dimension 3 est compliquée (nous n'avons pas abordé la dimension  $d \geq 4$  pour ce dernier cas), nous renvoyons à l'article [R11] pour tous les détails.

<sup>33</sup>Dans l'énoncé du théorème, nous notons  $D^\circ$  (resp.  $\overline{D}$ ) l'intérieur (resp. l'adhérence) d'un ensemble  $D \subset \mathbb{R}^d$ .

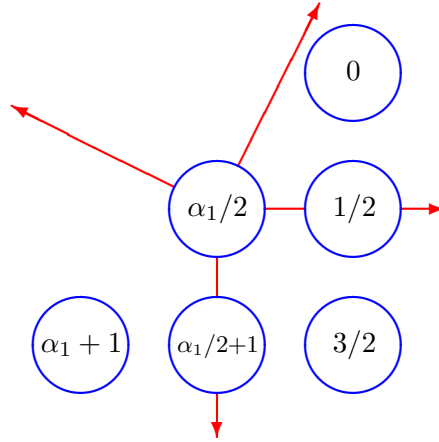


FIGURE 5.3 : En dimension 2, valeur de  $\alpha$  dans (5.7) selon la position du drift relativement au cône et au cône polaire (cas d'un cône d'ouverture  $\beta$  pour lequel  $\alpha_1 = \pi/\beta$ , voir Figure 5.2)

IDÉES DE PREUVE : EXPRESSION ANALYTIQUE DU NOYAU DE LA CHALEUR. L'idée principale est d'utiliser l'identité

$$\mathbb{P}_x[\tau_C > t] = e^{\langle -a, x \rangle - |x|^2/(2t) + |x|^2/2t^{d/2}} \int_C e^{|y|^2/2} p^C(1, x, y) e^{-t|a-y|^2/2} dy, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.10)$$

qui classiquement relie la probabilité de rester dans un domaine au noyau de la chaleur de ce même domaine<sup>34</sup>. Il s'avère par ailleurs que l'on dispose d'une expression explicite pour le noyau de la chaleur de cônes  $C$ , à savoir

$$p^C(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2t}}}{t(|x||y|)^{d/2-1}} \sum_{j=1}^{\infty} I_{\alpha_j} \left( \frac{|x||y|}{t} \right) m_j(\vec{x}) m_j(\vec{y}),$$

où les fonctions  $m_j$  sont définies en (5.8) et  $I_\nu$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $\nu$  :

$$I_\nu(x) = \frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2\nu} \cosh(x \cos t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

Grâce à (5.10), calculer l'asymptotique de  $\mathbb{P}_x[\tau_C > t]$  revient à calculer le comportement asymptotique d'une intégrale par une méthode de type Laplace. Cette analyse fait apparaître différents cas, car la position du drift gouverne la localisation des points où  $|a - y|^2$  (dans l'exponentielle présente dans l'intégrande de (5.10)) va atteindre son minimum.

[P12] *Raffiner les résultats de [R11] en obtenant également des théorèmes limites locaux*

Nous souhaitons ici trouver le comportement asymptotique de

$$\mathbb{P}_x[\tau_C > t, B_t \in K],$$

où  $K$  est un compact fixé. Cela permettrait notamment d'obtenir l'analogie continu du théorème limite local de Denisov et Wachtel [49].

<sup>34</sup>Si l'identité (5.10) paraît compliquée au premier abord, c'est surtout dû au changement exponentiel que l'on a fait, afin d'utiliser la formule reliant probabilité de sortie et noyau de la chaleur, valable *a priori* en drift nul.

### 5.2.2 APPROCHE ANALYTIQUE POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

On a pu le constater dans ce document, l'approche analytique est particulièrement féconde pour le cadre discret des marches aléatoires. Dans cette Section 5.2 réservée au mouvement Brownien je voudrais évoquer rapidement la possibilité de développer une pareille approche pour les processus continus, comme le mouvement Brownien dans le quadrant avec réflexion oblique au bord.

[P13] *Développement d'une approche analytique pour le mouvement Brownien dans des cônes*

On peut en effet souvent traduire de tels problèmes au moyen d'une équation fonctionnelle à noyau de type (1.2), où l'on a remplacé les séries génératrices par des transformées de Laplace. On pourra consulter [8, 66, 67], où sont jetées les bases d'une telle approche. Il y a beaucoup à faire dans ce domaine, qui constitue le sujet de doctorat de Sandro Franceschi.

D'un point de vue technique l'analogue de la surface de Riemann  $\mathcal{K}$  en (1.7) est de genre nul, ce qui permet de se détourner des fonctions elliptiques. Par ailleurs, par des transformations linéaires l'étude du seul quart de plan permet celle de tous les cônes (convexes). En ce sens et aussi parce que les détails techniques sont peu sensibles au comportement au bord, l'approche analytique paraît encore plus adaptée au cadre continu qu'à celui discret.

### 5.3 FLUCTUATIONS DES MARCHES EN DIMENSION 1 ET APPLICATIONS

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS. Un aspect essentiel de la théorie des fluctuations des marches aléatoires se trouve dans l'étude du processus de renouvellement (2-dimensionnel) formé par les maxima (ou minima) successifs de la marche aléatoire  $(S_n)_{n \geq 0}$  et des temps correspondants. Ce processus est appelé le processus d'échelle ascendant (ou descendant). Il a été étudié par de nombreux auteurs, avec des contributions majeures de Baxter [10] et Spitzer [135]. Ces derniers ont introduit des techniques de factorisation de Wiener-Hopf et ont établi plusieurs identités fondamentales, qui lient les distributions des processus d'échelle à la loi de la marche aléatoire.

Soit  $(S_n)_{n \geq 0}$  une marche aléatoire partant de 0, c'est-à-dire  $S_0 = 0$  et  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$  pour  $n \geq 1$ , où  $(Y_i)_{i \geq 1}$  est une suite indépendante et identiquement distribuée de variables aléatoires. Le processus d'échelle ascendant strict  $(T_n^{*+}, H_n)_{n \geq 0}$  est défini comme suit :

$$T_0^{*+} = 0, \quad T_{n+1}^{*+} = \inf\{k > T_n^{*+} : S_k > S_{T_n^{*+}}\}, \quad \forall n \geq 0, \quad (5.11)$$

et

$$H_n = S_{T_n^{*+}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Il existe une vaste littérature sur ce processus, qui souvent se concentre sur la preuve d'un théorème limite local et en particulier sur le comportement asymptotique des probabilités  $\mathbb{P}[T_1^{*+} > n]$  et  $\mathbb{P}[T_1^{*+} > n, H_1 \in K]$ , où  $K \subset \mathbb{R}$  est un ensemble compact. Pour résumer, lorsque les  $Y_i$  disposent de moments d'ordre 2 et sont centrées on a le comportement suivant quand  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}[T_1^{*+} > n] = \frac{a}{\sqrt{n}}(1 + o(1)), \quad \mathbb{P}[T_1^{*+} > n, H_1 \in K] = \frac{b}{n^{3/2}}(1 + o(1)),$$

pour certaines constantes  $a, b > 0$  (nous renvoyons par exemple à [106] et aux références internes à ce travail pour les énoncés précis de ces résultats).

Ces estimations sont d'un grand intérêt dans de nombreux domaines : on peut par exemple penser aux processus de branchement en environnement aléatoire ou encore aux marches aléatoires sur

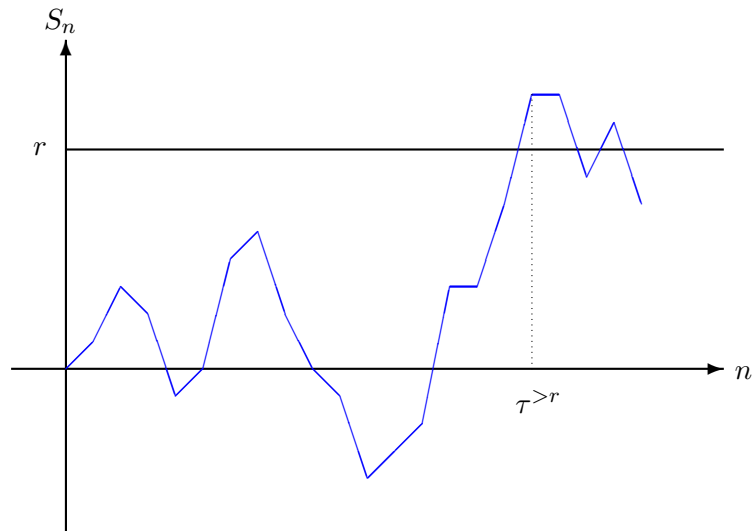


FIGURE 5.4 : Définition du temps d'arrêt  $\tau^{>r}$

des groupes non unimodulaires (voir [106]); elles jouent aussi un rôle crucial dans d'autres contextes, comme dans l'étude des probabilités de retour des marches aléatoires avec zone de réflexion sur une demi-droite (voir [101]).

Dans [101] justement, Lalley introduit pour  $r > 0$  le temps d'arrêt (voir Figure 5.4)

$$\tau^{>r} = \inf\{n > 0 : S_n > r\}$$

et s'intéresse à l'asymptotique quand  $n \rightarrow \infty$  de la probabilité  $\mathbb{P}[\tau^{>r} = n, S_n \in K]$ , où  $K$  est un ensemble compact. Sous des hypothèses assez fortes (à savoir, que les variables  $Y_i$  prennent leurs valeurs sur un réseau, sont bornées supérieurement et centrées), Lalley démontre que

$$\mathbb{P}[\tau^{>r} = n, S_n \in K] = \frac{c}{n^{3/2}}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.12)$$

pour une constante non explicite  $c > 0$ , et écrit qu'il ne connaît pas la condition minimale sur les moments pour avoir une telle estimée (voir l'équation (3.18) et en dessous de cette équation dans [101, page 590]).

**THÉORÈME LIMITE LOCAL.** Dans le travail [R6] nous obtenons le comportement asymptotique de (5.12) avec en outre une formule explicite pour la constante  $c$ , sous des hypothèses tout à fait générales. Cela répond en particulier à la question de Lalley. Nous obtenons également le comportement asymptotique de

$$\mathbb{P}[\tau^{>r} > n, S_n \in K], \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.13)$$

Pour trouver ces résultats nous adoptons une stratégie alternative à celle de [101], inspirée par les travaux de Iglehart [79] et de Le Page et Peigné [106].

Dans l'article [R6] nous obtenons aussi des résultats concernant la marche aléatoire sur  $\mathbb{R}_+$  avec réflexion non élastique en 0. Cette chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{R}^+$  est définie par récurrence au moyen d'une suite  $(Y_i)_{i \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de la façon suivante :

$$X_{n+1} = \max(X_n + Y_{n+1}, 0), \quad \forall n \geq 0,$$



où  $X_0$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Ce type de processus a déjà été étudié, notamment par Peigné et Woess dans [124, 125], qui se sont intéressés à leur transience ou récurrence. Notre résultat est d'obtenir le comportement asymptotique exact de la probabilité

$$\mathbb{P}[X_n \in K], \quad n \rightarrow \infty,$$

où  $K$  est un ensemble compact, en fonction de la loi de  $(Y_i)_{i \geq 1}$ . Nous obtenons plusieurs régimes possibles, en fonction essentiellement de l'espérance de  $(Y_i)_{i \geq 1}$  (à travers son signe).

## CHAPITRE 6

### FONCTIONS DISCRÈTES HARMONIQUES

Dans ce chapitre je présente les articles ci-dessous traitant des fonctions discrètes harmoniques dans le quart de plan :

[R17] K. Raschel (2014). Random walks in the quarter plane, discrete harmonic functions and conformal mappings. Avec un appendice de S. Franceschi. *Stochastic Process. Appl.* **124** 3147–3178

[R16] C. Lecouvey et K. Raschel (2015).  $t$ -Martin boundary of killed random walks in the quadrant. Preprint *arXiv:1509.04193* 1–12. *Séminaire de Probabilités* (to appear)

S’il existe une vaste et ancienne littérature sur les fonctions harmoniques au sens classique (c’est-à-dire au sens du Laplacien continu) dans des domaines de  $\mathbb{R}^d$ , c’est loin d’être le cas pour les fonctions discrètes harmoniques (i.e., pour des opérateurs de Laplace discrets, comme en (6.1)). On peut cependant citer les travaux précurseurs de Ferrand [62] et Duffin [52, 53]. Récemment la théorie des fonctions discrètes harmoniques (et plus largement l’analyse complexe discrète) a connu un regain d’intérêt spectaculaire, notamment dans la communauté probabiliste, avec les travaux de Smirnov [133], Beffara et Duminil-Copin [13], etc.

Les motivations à mêler cônes et fonctions discrètes harmoniques sont multiples. En utilisant la notion classique du conditionnement de Doob celles-ci permettent de construire des processus aléatoires conditionnés à ne jamais quitter le cône. Ces processus sont intéressants pour eux-mêmes et apparaissent dans la théorie des marches aléatoires quantiques [17], des matrices aléatoires [55] ou encore des marches aléatoires non collisionnantes [48, 56]. Un autre enjeu notable réside dans la description de l’ensemble des fonctions harmoniques (la frontière de Martin) d’un processus donné, ce qui pour des processus spatialement inhomogènes (comme le sont les marches aléatoires tuées au bord de cônes) est un problème génériquement difficile.

C’est dans les travaux de Biane [16, 17, 18, 19, 20] qu’est apparue une première construction systématique des fonctions discrètes harmoniques, pour des chaînes de Markov dont (pour faire court) il est nécessaire de pouvoir interpréter l’opérateur de transition comme une décomposition en composantes irréductibles d’un produit tensoriel de représentations (dans le contexte de la théorie des représentations des algèbres de Lie, donc). Les expressions explicites obtenues pour les fonctions harmoniques sont alors typiquement des dimensions de représentation. Également en présence d’une forte structure, Picardello et Woess s’intéressent dans [127] à la frontière de Martin de produits cartésiens de chaînes de Markov.

On doit ensuite à Ignatiouk-Robert [80, 81, 82, 83] ainsi qu'à Ignatiouk-Robert et Loree [84] une étude complète de la frontière de Martin des marches aléatoires avec drift réfléchies ou tuées au bord du demi-espace  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  et du quart de plan  $\mathbb{N}^2$ , par des techniques issues de la théorie des grandes déviations.

Mentionnons pour terminer de récentes avancées traitant de marches à drift nul pour lesquelles les sauts satisfont certaines conditions de symétrie : Bouaziz, Mustapha et Sifi démontrent dans [28] que la frontière de Martin se réduit alors à un point. Leurs techniques proviennent de la théorie du potentiel (principe du maximum, inégalité de Harnack, etc.) et développent des idées de Mustapha dans [122, 123].

## 6.1 ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Nous nous plaçons ici dans le contexte probabiliste de la Section 1.4 et nous intéressons aux fonctions  $h = \{h(i, j)\}_{(i, j) \in \mathbb{N}^2}$  qui sont discrètes  $t$ -harmoniques (nous utiliserons parfois, avec Ferrand [62] et Mercat [118], les synonymes préharmoniques et monodriffiques), au sens où pour tout  $i, j \geq 1$ ,

$$t \cdot h(i, j) = \sum_{-1 \leq k, \ell \leq 1} p_{k, \ell} h(i + k, j + \ell). \quad (6.1)$$

Nous cherchons en outre les fonctions nulles au bord (si  $i = 0$  ou  $j = 0$  alors  $h(i, j) = 0$ ) et positives à l'intérieur (si  $i, j > 0$  alors  $h(i, j) > 0$ ), et cela afin de pouvoir réaliser le conditionnement de Doob précédemment mentionné. Le fait de s'intéresser aux fonctions  $t$ -harmoniques pour différentes valeurs de  $t$  ne répond pas seulement à un besoin de généralisation : cela permet en retour de déterminer la frontière de Martin de produits cartésiens, comme dans [127] ; cela autorise également l'étude du phénomène de stabilité de la frontière de Martin, nous en reparlerons.

Nous énonçons ici des résultats de plusieurs types : certains (Théorème 6.1) sont structurels et déterminent l'ensemble des fonctions  $t$ -harmoniques, d'autres (Théorème 6.2) concernent l'expression explicite des fonctions harmoniques via leur série génératrice

$$H(x, y) = \sum_{i, j \geq 1} h(i, j) x^{i-1} y^{j-1}. \quad (6.2)$$

Définissons  $t_0 = \min_{x, y > 0} \{\sum_{k, \ell} p_{k, \ell} x^k y^\ell\} \in (0, 1]$  et notons que  $t_0 = 1$  si et seulement si le drift  $\vec{D}$  défini en (1.14) est nul, voir [78, Proposition 4.3]. Le théorème suivant est illustré Figure 6.1.

**Théorème 6.1** ([R16, R17]). *Pour toute marche aléatoire satisfaisant aux hypothèses (H1) et (H2), la  $t$ -frontière de Martin est*

1. pour  $t > t_0$ , homéomorphe à un segment  $S_t$  (d'intérieur non vide) ;
2. pour  $t = t_0$ , réduite à un point ;
3. pour  $t < t_0$ , vide.

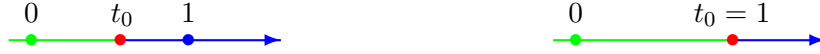


FIGURE 6.1 : Localisation de  $t_0$  dans le cas d'un drift non nul (gauche) et d'un drift nul (droite). Le Théorème 6.1 affirme qu'il y a 3 régimes pour la frontière de Martin : vide (en vert), réduite à un point (en rouge), homéomorphe à un segment non trivial (en bleu)

Notre second théorème produit une expression explicite de la fonction génératrice (6.2) pour toute fonction  $t$ -harmonique minimale<sup>35</sup>. Notons d'abord que

$$H(x, 0) = \sum_{i \geq 1} h(i, 1)x^{i-1}, \quad H(0, y) = \sum_{j \geq 1} h(1, j)y^{j-1} \quad (6.3)$$

sont les fonctions génératrices des valeurs de la fonction harmonique sur les axes jouxtant les axes de coordonnées. Introduisons enfin le polynôme (appelé noyau) du second ordre<sup>36</sup>

$$L(x, y) = xy \left( \sum_{-1 \leq k, \ell \leq 1} p_{k, \ell} x^{-k} y^{-\ell} - t \right). \quad (6.4)$$

Celui-ci est complètement caractérisé par la donnée des sauts  $\{p_{k, \ell}\}$ .

**Théorème 6.2** ([R16]). *Soient  $\{p_{k, \ell}\}$  des poids vérifiant (H1) et (H2) et soit  $S_t$  le segment du Théorème 6.1.*

*Dans le cas 1 ( $t > t_0$ ), il existe une fonction universelle<sup>37</sup>  $W$  telle que pour toute fonction minimale  $t$ -harmonique  $\{h(i, j)\}$  il existe un point  $p \in S_t$  et deux constantes  $\alpha, \beta$  (voir (6.9)) tels que*

$$H(x, 0) = \frac{1}{L(x, 0)} \left( \frac{\alpha}{W(x) - W(p)} + \beta \right).$$

*Dans le cas 2 ( $t = t_0$ ), il existe une unique fonction  $t$ -harmonique aux facteurs multiplicatifs près. Son expression peut indifféremment être obtenue en passant à la limite lorsque  $t \rightarrow t_0$  dans l'équation ci-dessus, ou directement avec les équations (6.8) et (6.10).*

On pourrait symétriquement écrire un énoncé pour  $H(0, y)$  et finalement l'équation fonctionnelle<sup>38</sup>

$$L(x, y)H(x, y) = L(x, 0)H(x, 0) + L(0, y)H(0, y) - L(0, 0)H(0, 0) \quad (6.5)$$

fournit bien l'expression annoncée pour  $H(x, y)$  — notons que  $H(0, 0) = h(1, 1)$  n'est pas une inconnue dans (6.5), puisque les fonctions harmoniques ne peuvent être déterminées qu'à un multiple près.

<sup>35</sup>Rappelons qu'une fonction  $t$ -harmonique  $f > 0$  est dite minimale si pour toute fonction  $t$ -harmonique  $g > 0$ , l'inégalité  $g \leq f$  implique l'égalité  $g = c \cdot f$  pour une certaine constante  $c > 0$ .

<sup>36</sup>Avec la notation (1.3) du Chapitre 1,  $L$  et  $K$  sont reliés via la formule  $L(x, y; t) = x^2 y^2 t \cdot K(1/x, 1/y; 1/t)$ .

<sup>37</sup>Nous écrivons ici universelle pour la raison que la fonction  $W$  ne dépend que du noyau  $L$  (donc aussi de  $t$ ).

<sup>38</sup>Celle-ci est aisément obtenue et reflète juste la propriété d'harmonicité (6.1).

## 6.2 CONSÉQUENCES ET REMARQUES AUTOUR DES THÉORÈMES 6.1 ET 6.2

SÉRIES GÉNÉRATRICES DES FONCTIONS HARMONIQUES EN TANT QU'INVARIANTS. Je voudrais insister tout de suite sur le caractère universel du Théorème 6.2 : il existe donc une fonction  $W$  qui « code » l'ensemble des fonctions harmoniques, au travers de leur série génératrice (6.2).

La nature intrinsèque de  $W$  se trouve encore renforcée si l'on constate que  $H(x, 0)$  et  $H(0, y)$  sont, avec le vocabulaire de la Section 3.4, des invariants de Tutte [137], et de ce fait apparaissent dans d'autres contextes que celui des fonctions préharmoniques. Rappelons en effet que les expressions connues pour les séries génératrices de comptage utilisent cette même fonction  $W$ , voir les formules intégrales de [132] (dans lesquelles  $W$  apparaît dans l'intégrande) ou nos résultats de la Section 3.4 (où  $W$  est utilisée de façon plus directe encore).

De plus, le Théorème 6.2 met en exergue un lien entre deux notions *a priori* éloignées (fonctions harmoniques et représentations conformes) mais laisse en suspens la question de la généralité de cette relation.

FRONTIÈRE DE MARTIN. Mentionnons ici une conjecture, énoncée dans [R17] :

[P14] *Poursuivre le parallèle entre les fonctions harmoniques et les représentations conformes, démontrer des résultats d'unicité en toute généralité du drift nul*

Nous pensons que le point 2 du Théorème 6.1 (essentiellement, l'unicité de la fonction harmonique si le drift est nul) s'étend à toute marche aléatoire dont les accroissements sont de carré intégrable.

En outre, le Théorème 6.2 autorise l'étude du phénomène de stabilité de la frontière de Martin introduit dans [127]. Rappelons que par définition la frontière de Martin est stable si la compaction de Martin ne dépend pas de la valeur propre  $t$  (exception possible à la valeur critique  $t_0$ ) et si le noyau de Martin est continu à la fois en la valeur propre et en la variable d'espace. Le premier item est ici clairement vérifié d'après le Théorème 6.1. Le deuxième n'en découle certes pas directement, mais est certainement vrai. En effet, la fonction  $W$  est régulière vis-à-vis de la variable  $t$ . En outre pour  $t = 1$  le noyau de Martin est continu en la variable d'espace, voir [98, Remarque 29].

APPLICATION AUX TEMPS D'ATTEINTE DU BORD. Ce paragraphe vise à appliquer nos résultats en calculant des constantes dans plusieurs développements asymptotiques concernant le nombre d'excursions ou encore la probabilité de rester dans un cône donné.

On peut avoir sur les Laplaciens discrets un point de vue émanant de la théorie du potentiel ou adopter plutôt une interprétation probabiliste. D'après cette dernière, une fonction harmonique comme en (6.1) et nulle au bord satisfait l'identité

$$t \cdot h(i, j) = \mathbb{E}_{(i, j)}[h(X(1), Y(1)), \tau > 1], \quad \forall i, j > 0,$$

où  $\tau$  désigne le premier temps de sortie de l'intérieur du quadrant :

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : X(n) \leq 0 \text{ ou } Y(n) \leq 0\}.$$

Rappelons maintenant les résultats récents de Denisov et Wachtel qui dans [49] obtiennent pour une large classe de cônes et de marches à drift nul l'asymptotique exacte

$$\mathbb{P}_x[\tau > n] = \varkappa \cdot V(x) \cdot F(n) \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.6)$$

où  $\varkappa > 0$  est une constante universelle,  $V$  est 1-harmonique et  $F$  décroît de façon polynomiale. Seule  $V$  n'est pas trouvée de façon explicite<sup>39</sup> dans [49], ce que nous complons ici : la nullité du drift conduit à l'unicité de la fonction harmonique (Théorème 6.1), qu'on calcule alors sans ambiguïté avec le Théorème 6.2. L'asymptotique (6.6) a été étendue par Duraj [54] à un ensemble de marches englobant notamment celles ayant un drift négatif<sup>40</sup> (on a décrit l'hypothèse exacte faite par Duraj dans la Section 5.1). La fonction  $V$  est alors  $t_0$ -harmonique et peut de nouveau être obtenue.

Dans le même travail [49], Denisov et Wachtel calculent l'asymptotique du nombre d'excursions  $N_n(x, y)$  (c'est-à-dire, le nombre de marches joignant en  $n$  pas  $x$  à  $y$  tout en restant dans le cône)

$$N_n(x, y) = \varkappa' \cdot V(x) \cdot V'(y) \cdot \rho^n \cdot n^\alpha \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

L'ingrédient principal est maintenant plutôt un théorème limite local, à savoir un développement asymptotique de  $\mathbb{P}_x[\tau > n, (X(n), Y(n)) = y]$ . Ci-dessus,  $V$  et  $V'$  sont respectivement harmoniques pour la marche aléatoire  $(X, Y)$  et son opposée  $-(X, Y)$ . Une nouvelle fois, ces fonctions deviennent accessibles par l'application des Théorèmes 6.1 et 6.2.

FONCTIONS HARMONIQUES POLYNOMIALES. Bien que nous obtenions une expression pour la série génératrice  $H(x, y)$  il est difficile d'en déduire une formule close pour ses coefficients  $h(i, j)$ . Échappant à cette règle, la classe des fonctions harmoniques polynomiales en devient tout à fait intéressante. Elle est caractérisée par la condition  $\frac{\omega_2}{\omega_3} \in \mathbb{Z}$  ou  $\frac{\pi}{\theta} \in \mathbb{Z}$  (puisque la fonction  $W$  n'est rationnelle que dans ce cas-là).

Glanons d'abord quelques exemples : pour la marche simple de la Figure 1.1 nous avons  $h(i, j) = ij$ , qui respecte la structure produit ; pour la file en tandem (sauts dans  $\{(-1, 1), (1, 0), (0, -1)\}$ ),  $h(i, j) = ij(i + j)$ . Tournons-nous maintenant vers la marche avec les sauts (2.24), impliquant un paramètre  $n \geq 3$ . Pour  $n = 3$  ou 4 nous arrivons aux formules (cf. [131])

$$\begin{aligned} h(i, j) &= ij(i + 2j), \\ h(i, j) &= ij(i + 2j)(i + j). \end{aligned}$$

À partir de  $n = 5$  les polynômes harmoniques ne sont plus homogènes. Ainsi par exemple pour  $n = 6$

$$h(i, j) = ij(i + 2j)(i + j)((i + 2j/3)(i + 4j/3) + 10/9).$$

(En revanche comme on s'y attend la partie homogène correspond bien à la fonction harmonique du mouvement Brownien.) Nous posons ici deux questions :

- Quand a-t-on égalité entre fonctions préharmoniques et harmoniques ? Nous conjecturons la condition nécessaire et suffisante suivante : le groupe  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  (voir (1.6)) doit être fini. (Asymptotiquement il y a toujours égalité.)

---

<sup>39</sup>Certaines des propriétés de  $V$  sont néanmoins étudiées — en particulier une construction partant de la fonction harmonique du mouvement Brownien.

<sup>40</sup>La quantité  $F$  possède cette fois une décroissance exponentielle.

- Existe-t-il une construction combinatoire (évoquant une factorisation) des fonctions harmoniques polynomiales ?

FONCTIONS CONTINUES AU SENS CLASSIQUE. Même si ces dernières sont bien connues, il est intéressant de noter qu’une approche similaire à la nôtre (nous donnerons quelques détails Section 6.3), basée sur une équation fonctionnelle pour la série génératrice  $H(x, y)$ , fonctionne dans le cas continu. Il s’agit alors de remplacer la série génératrice par une transformée de Laplace. Pour cette étude nous référons à l’appendice de l’article [R17], écrit par Sandro Franceschi.

### 6.3 IDÉES DE PREUVES ET EXPRESSIONS EXACTES

UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE HOMOGENÈNE. Les Théorèmes 6.1 et 6.2 reposent sur l’équation fonctionnelle (6.5), qu’il est instructif de comparer à celle (1.2) énumérant les marches. À première vue l’équation harmonique paraît plus simple, du fait de l’absence de terme inhomogène (le  $-xy$  dans (1.2)). Ainsi les sections  $H(x, 0)$  et  $H(0, y)$  sont directement des invariants (voir (2.6) pour un calcul similaire) et on échappe ainsi au problème difficile de déterminer des « solutions particulières » de l’équation fonctionnelle, comme nous avons dû faire en Section 3.4.

Interpréter  $H(x, 0)$  et  $H(0, y)$  comme des invariants de Tutte permet d’utiliser un lemme des invariants (Lemme 3.9) et ce faisant de les exprimer comme des fractions rationnelles d’un objet universel, la fonction de collage conforme  $W$  (dont nous donnerons l’expression dans le paragraphe suivant). Tout l’enjeu est alors de démontrer que cette fraction rationnelle est d’ordre 1 et admet la forme si particulière donnée dans l’énoncé du Théorème 6.2. Il s’agit-là essentiellement d’un argument de positivité (on montre que si la fraction rationnelle était d’ordre supérieur, la série génératrice associée comporterait des nombres négatifs dans son développement). Le fait que  $p$  ne puisse appartenir qu’à un certain segment  $S_t$  (celui du Théorème 6.1) provient d’estimées sur la croissance des fonctions harmoniques utilisant des techniques de grandes déviations, cf. [R16, Section 2]. Rappelons en effet que les singularités sont liées, par des théorèmes de transfert (voir le livre [63]), à la croissance des fonctions harmoniques.

Pour terminer attardons-nous quelques instants sur le cas  $t = t_0$ , tout à fait singulier du point de vue de la théorie des problèmes frontière, et qui rend l’équation fonctionnelle (6.5) complexe. En effet, les singularités des fonctions qu’on cherche à déterminer se retrouvent alors sur la courbe où l’on énonce la condition frontière, ce qui conduit à la nécessité d’estimer au préalable le type et l’ordre de la singularité. Un autre point de vue sur la difficulté du cas  $t = t_0$  est que  $X([y_1, y_2])$  n’est pas lisse, cf. Figure 2.3. Nous renvoyons à [R17, Section 3] pour les détails.

Pour être complet, remarquons que le point 3 du Théorème 6.1 (aucune fonction harmonique non triviale si  $t$  est inférieur au rayon spectral  $t_0$ ) provient de résultats généraux sur les noyaux de Markov, voir par exemple [128].

EXPRESSIONS EXACTES. Dans ce paragraphe nous complétons l’énoncé du Théorème 6.2 en écrivant des formules pour les constantes  $\alpha, \beta$  et avant tout pour la fonction universelle  $W$ .

Notons  $w$  la fonction obtenue de (3.11) en opérant le changement de paramètres<sup>41</sup>

$$\{p_{k,\ell}\} \rightarrow \{p_{-k,-\ell}\} \tag{6.7}$$

<sup>41</sup>Ceci est pour tenir compte du fait que les noyaux  $K$  et  $L$  sont réciproques l’un de l’autre, voir la note de bas de page numérotée 36.

et soit  $x_0$  un point référence réel mais extérieur à  $S_t$ . La fonction universelle  $W$  est alors donnée par<sup>42</sup>

$$W(x) = \frac{w'(x_0)}{w(x) - w(x_0)} - \frac{w'(x_0)}{w(0) - w(x_0)}. \quad (6.8)$$

Tournons-nous maintenant vers les constantes  $\alpha, \beta$ . Si on calcule un développement limité au voisinage de 0 de l'identité démontrée dans le Théorème 6.2, on arrive facilement à la conclusion

$$\beta = p_{1,1}h(1,1) + \frac{\alpha}{W(p)}, \quad \alpha = -h(1,1) \times \begin{cases} \frac{p_{0,1}W(p)^2}{W'(0)} & \text{si } p_{1,1} = 0 \text{ et } p_{0,1} \neq 0, \\ \frac{2p_{-1,1}W(p)^2}{W''(0)} & \text{si } p_{1,1} = 0 \text{ et } p_{0,1} = 0, \\ \frac{(W(X_0(0)) - W(p))W(p)}{W(X_0(0))} & \text{si } p_{1,1} \neq 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Lorsque  $t \rightarrow t_0$ , les fonctions de Weierstrass convergent classiquement vers des fonctions trigonométriques et on obtient (par des calculs reminiscents de ceux effectués pour obtenir le critère de finitude du groupe dans la Section 2.3)

$$w(x) = \left(\frac{\pi}{\omega_3}\right)^2 \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{\theta} \left[ \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2f(x)}{d'(1)}}}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \right)^{-2} - \frac{1}{3} \right\}, \quad (6.10)$$

avec (après inversion (6.7) des sauts)  $\omega_3$  comme en (1.13),  $f$  en (3.11),  $d$  en (1.8) et

$$\theta = \arccos \left( -\frac{\sum_{-1 \leq i, j \leq 1} ij p_{i,j} x_2^i y_2^j}{2\sqrt{a(x_2)\tilde{a}(y_2)}} \right).$$

La fonction  $w$  en (6.10) est en fait une représentation conforme du domaine non lisse borné par la courbe  $X([y_1, y_2])$  dessinée Figure 2.3. L'angle  $\theta$  généralise au cas  $t_0 \neq 1$  celui introduit en (2.23).

CHANGEMENT DE MESURES. L'approche analytique est peu sensible à l'ajout du paramètre  $t$ , ce qu'illustre bien le Théorème 6.2. Il est tout de même intéressant et nécessaire de remarquer qu'on peut fournir une tout autre preuve de ce résultat, au sens où l'on peut déduire du cas  $t = 1$  le cas d'autres valeurs de  $t$  par un changement exponentiel de mesure.

Définissons pour commencer la série génératrice des sauts (ou transformée de Laplace)

$$\phi(a) = \phi(a_1, a_2) = \sum_{k, \ell} p_{k, \ell} e^{ka_1} e^{\ell a_2}.$$

Il sera pratique de noter  $\{h[p_{k, \ell}]\}$  l'ensemble des fonctions 1-harmoniques, une fois les  $\{p_{k, \ell}\}$  fixés. Pour tout  $a$  vérifiant  $\phi(a) = t$  on définit des nouveaux poids comme suit

$$p_{k, \ell}^a = p_{k, \ell} e^{\langle a, (k, \ell) \rangle} t^{-1}. \quad (6.11)$$

L'identité  $\phi(a) = t$  implique  $\sum_{k, \ell} p_{k, \ell}^a = 1$ , et par suite les poids  $\{p_{k, \ell}^a\}$  peuvent également être interprétés comme des probabilités de transition. On a le résultat suivant :

<sup>42</sup>Remarquons que  $W(0) = 0$ . Quant à  $x_0$  il permet de faire en sorte que  $W$  n'ait pas de pôles dans  $S_t$  et donc d'énoncer le Théorème 6.2 d'une façon uniforme.



**Proposition 6.3** ([R16]). *Supposons que les  $\{p_{k,\ell}\}$  admettent des moments exponentiels. Alors pour tout  $a_t$  tel que  $\phi(a_t) = t$  l'ensemble des fonctions  $t$ -harmoniques est égal à*

$$\{(i, j) \mapsto e^{\langle a_t, (i, j) \rangle} h[p_{k,\ell}^{a_t}](i, j)\}.$$

Ce résultat est conséquence d'une correspondance simple entre les fonctions  $t$ - et 1-harmoniques, que nous énonçons maintenant. Pour  $a \in \mathbb{R}^2$  désignons par  $h^a$  la fonction

$$h^a(i, j) = h(i, j)e^{-\langle a, (i, j) \rangle}. \quad (6.12)$$

**Lemme 6.4** ([R16]). *Pour tout  $a_t$  tel que  $\phi(a_t) = t$  et toute fonction  $t$ -harmonique  $h$ , la fonction  $h^{a_t}$  est 1-harmonique relativement aux poids  $\{p_{k,\ell}^{a_t}\}$ .*

Une conséquence de la Proposition 6.3 et du Lemme 6.4 est qu'on peut étendre le Théorème 6.1 à des espaces de sauts plus généraux, en transférant la littérature traitant du cas  $t = 1$  à tous les  $t$  ([28, Théorème 1] et [84, Corollaire 1.1], respectivement).

**Corollaire 6.5** ([R16]). *Le Théorème 6.1, valide initialement pour les marches à petits sauts, peut être étendu comme suit :*

- *Le point 1, aux marches aléatoires ayant des moments exponentiels ;*
- *Le point 2, aux marches aléatoires avec sauts symétriques.*

LAPLACIENS AVEC DES GRANDS SAUTS.

[P15] *Fonctions harmoniques pour des opérateurs de Laplace arbitraires*

On voudrait pouvoir déterminer les fonctions harmoniques pour des Laplaciens (6.1) dont le support dépasse les plus proches voisins, voir la Figure 4.4. Aussi, considérons brièvement les marches dans le quart de plan avec grands sauts, donc sans l'hypothèse (H1), faisant écho au Chapitre 4. Supposons que les sauts sont bornés, c'est-à-dire qu'il existe  $I^\pm$  et  $J^\pm$  tels que  $p_{i,j} = 0$  si  $i > I^+$ ,  $i < I^-$ ,  $j > J^+$  ou  $j < J^-$ .

Il s'agit alors d'étudier les fonctions harmoniques (6.1) positives à l'intérieur de  $\mathbb{N}^2$ , et nulles sur le bord et à l'extérieur (on doit rajouter ça pour les sauts qui franchissent les axes). Une façon d'y parvenir serait de résoudre (par les méthodes à développer du Chapitre 4) l'équation suivante

$$\begin{aligned} L(x, y)H(x, y) &= \sum_{1 \leq j \leq J^+} F^j(x)y^{j-1} \sum_{\substack{I^- \leq k \leq I^+ \\ j \leq \ell \leq J^+}} p_{k,\ell} x^{-(k-1)} y^{-(\ell-1)} \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq I^+} G^i(y)x^{i-1} \sum_{\substack{i \leq k \leq I^+ \\ J^- \leq \ell \leq J^+}} p_{k,\ell} x^{-(k-1)} y^{-(\ell-1)} \\ &- \sum_{\substack{1 \leq i \leq I^+ \\ 1 \leq j \leq J^+}} h(i, j)x^{i-1}y^{j-1} \sum_{\substack{i \leq j \leq I^+ \\ j \leq \ell \leq J^+}} p_{k,\ell} x^{-(k-1)} y^{-(\ell-1)}, \end{aligned}$$

où ici  $L(x, y) = xy(\sum_{k=-I^-}^{I^+} \sum_{\ell=-J^-}^{J^+} p_{k,\ell} x^{-k} y^{-\ell} - t)$  et où on a utilisé les sections

$$F^j(x) = \sum_{i \geq 1} h(i, j)x^{i-1}, \quad G^i(y) = \sum_{j \geq 1} h(i, j)y^{j-1}.$$

# CHAPITRE 7

## LE LAPLACIEN MASSIQUE $Z$ -INVARIANT SUR DES GRAPHES ISORADIAUX

Dans ce chapitre nous présentons la publication :

[R5] C. Boutillier, B. de Tilière et K. Raschel (2015). The  $Z$ -invariant massive Laplacian on isoradial graphs. *Preprint arXiv:1504.00792* 1–85. *Invent. Math.* (to appear)

Nous introduisons une famille à un paramètre (dépendant d’un module elliptique) de Laplaciens massiques  $Z$ -invariants définis sur des graphes isoradiaux — notamment introduite par Baxter [11], la notion de  $Z$ -invariance pour des modèles de mécanique statistique est un concept important de ce domaine. Nous démontrons une formule explicite pour son inverse, la fonction de Green massique, qui a la propriété remarquable de ne dépendre que de la géométrie locale du graphe. Nous expliquons les conséquences de ce résultat pour le modèle de mécanique statistique des forêts couvrantes enracinées, en particulier la preuve d’une transition de phase d’ordre 2 avec le modèle des arbres couvrants critiques sur les graphes isoradiaux, introduit par Kenyon [89]. Finalement nous considérons la courbe spectrale de ce Laplacien massique et montrons qu’il s’agit d’une courbe de Harnack de genre 1.

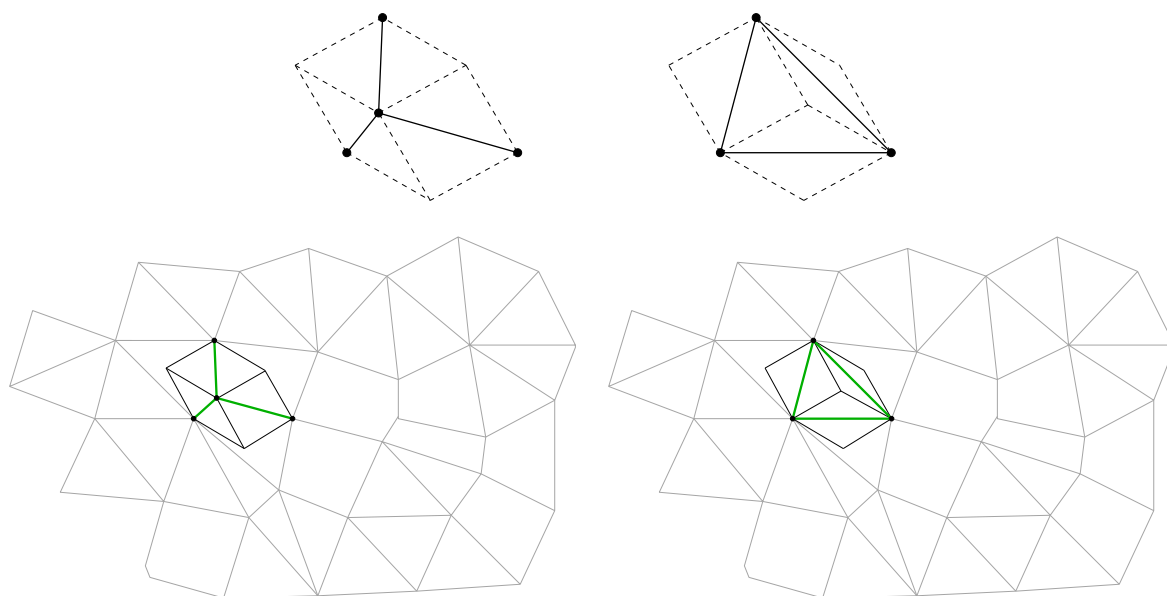
### 7.1 INTRODUCTION

CONTEXTE. De nombreux modèles de mécanique statistique sur des graphes 2-dimensionnels exhibent une forme forte d’intégrabilité discrète : si les paramètres sont choisis de telle façon à satisfaire des relations algébriques dites équations de Yang-Baxter, les probabilités de configurations locales sont invariantes par les transformations triangle-étoile du graphe sous-jacent, cf. Figure 7.1. Cette propriété suggère l’existence, pour des quantités clé, de formules explicites qui ne dépendent que de la géométrie locale du graphe ; on parle alors d’expressions « locales ». Les modèles de dimères, les forêts et arbres couvrants (Figure 7.6) ou encore le modèle d’Ising fournissent des exemples de tels modèles intégrables.

La famille des graphes  $G = (V, E)$ <sup>43</sup> isoradiaux offre un contexte naturel pour définir ces modèles de mécanique statistique. Nous introduirons ces graphes en détail plus bas ; rapportons simplement ici qu’ils peuvent se plonger dans le plan de façon à ce que chaque face soit inscrite dans

---

<sup>43</sup>Classiquement,  $V$  et  $E$  désignent respectivement l’ensemble des sommets et des arêtes du graphe  $G$ .


 FIGURE 7.1 : Transformation triangle-étoile dans un graphe isoradial  $G$ 

un cercle de rayon 1 (Figure 7.2). Les paramètres des modèles sont alors fonction des angles de losange naturellement associés à ces graphes, voir Figures 7.3 et 7.4.

Historiquement les premières expressions locales sont proposées dans l'article fondamental [89], dans lequel Kenyon étudie le Laplacien avec conductances  $\{\tan \bar{\theta}_e\}$  (cet opérateur est lié au modèle de mécanique statistique des arbres couvrants, nous le verrons dans la Section 7.3), ainsi que l'opérateur de Kasteleyn avec poids  $\{2 \sin \bar{\theta}_e\}$  sur les arêtes (provenant d'un modèle de dimères biparti). L'angle  $\bar{\theta}_e$  est le demi-angle de losange représenté Figure 7.3. Plus récemment encore, Boutillier et de Tilière [37] démontrent pour un modèle de dimères non biparti (correspondant au modèle d'Ising sur des graphes isoradiaux) une formule locale pour l'opérateur inverse de Kasteleyn. Dans [89] comme dans [37] les paramètres sont des fonctions trigonométriques de  $\bar{\theta}_e$ .

Les travaux [89, 37] ont ceci de commun qu'ils considèrent des modèles critiques. La décroissance polynomiale de l'inverse de l'opérateur de Kasteleyn démontre en effet que le modèle de dimères biparti de [89] est critique, les conductances du Laplacien sont également qualifiées de critiques dans [89]. Enfin le caractère critique des poids d'Ising de [37] est prouvé dans [108].

Mis bout à bout cela suggère que l'existence d'une formule locale pour ces opérateurs inverses est liée à la fois à des propriétés géométriques du graphe plongé et à la criticalité du modèle de mécanique statistique sous-jacent. Nous allons plus loin ici et prouvons une formule locale pour une famille à un paramètre de modèles non critiques, celle des forêts couvrantes enracinées (l'opérateur associé sera un Laplacien massique).

**GRAPHES ISORADIAUX.** Nous souhaitons donner ici quelques caractéristiques essentielles des graphes isoradiaux, dont le nom provient de l'article [89] (voir également [53, 117]). Chaque face de ces graphes  $G$  (plongés dans  $\mathbb{C}$ ) doit donc pouvoir s'inscrire dans un cercle de rayon 1, dont le centre est intérieur à la face en question (Figure 7.2, gauche). On obtient facilement un plongement (isoradial et de rayon 1) du graphe dual  $G^*$  en choisissant pour sommets duaux les centres des faces (Figure 7.2, droite).

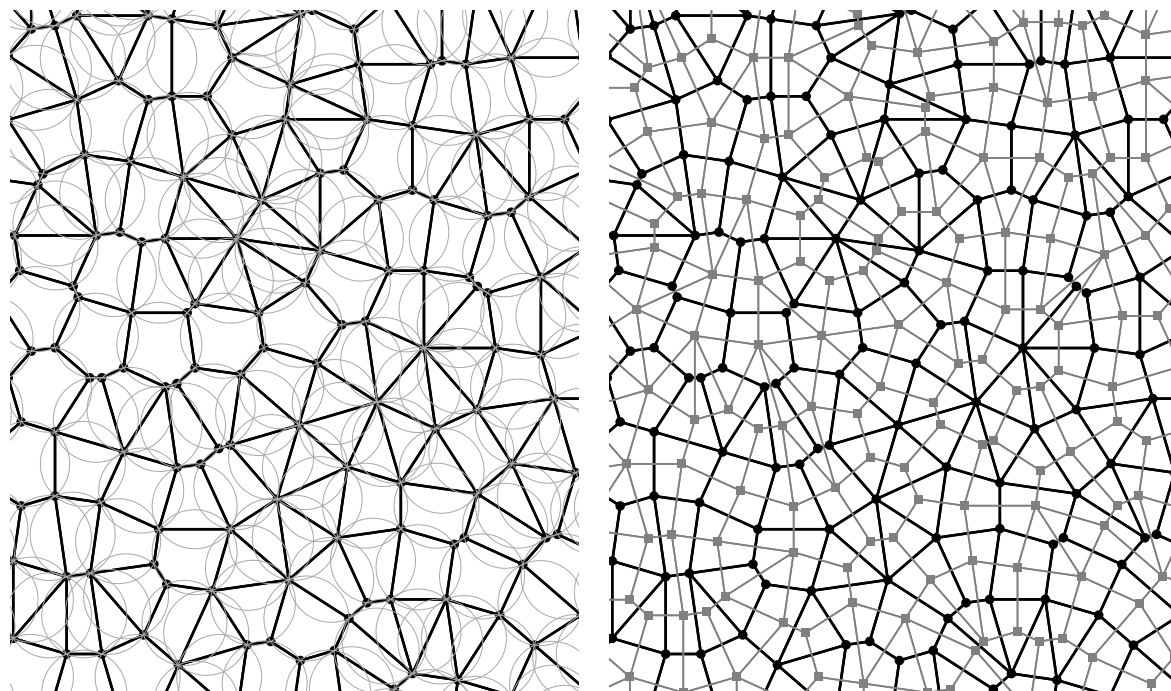


FIGURE 7.2 : À gauche, une partie d'un graphe isoradial infini  $G$  avec les cercles circonscrits des faces. À droite, le même graphe  $G$  (en noir) et son dual  $G^*$  (en gris)

Noté  $G^\diamond$ , le graphe diamant se construit à partir de  $G$  et  $G^*$  de la façon suivante : les sommets de  $G^\diamond$  sont ceux de  $G$  et de  $G^*$ , et chaque sommet dual est connecté à tous les sommets primaux de la face correspondante (Figure 7.4). Les arêtes du graphe diamant sont donc des rayons de longueur 1 et on peut leur associer une direction  $\pm e^{i\bar{\alpha}}$ .

Les faces de  $G^\diamond$  sont des losanges (Figure 7.4), ce qui permet de leur associer des angles (et *in fine* des poids). Précisément, chaque arête  $e \in G$  est la diagonale d'un unique losange de  $G^\diamond$  et on définit  $\bar{\theta}_e$  comme le demi-angle de ce losange (Figure 7.3). On a toujours  $\bar{\theta}_e \in (0, \pi/2)$ , puisque les centres des cercles sont intérieurs aux faces<sup>44</sup>. On définit aussi deux angles de losange  $e^{i\bar{\alpha}_e}$  et  $e^{i\bar{\beta}_e}$  pour chaque arête  $e$  (Figure 7.3) et on fait l'hypothèse qu'ils satisfont  $(\bar{\beta}_e - \bar{\alpha}_e)/2 = \bar{\theta}_e$ .

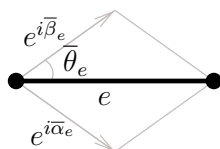
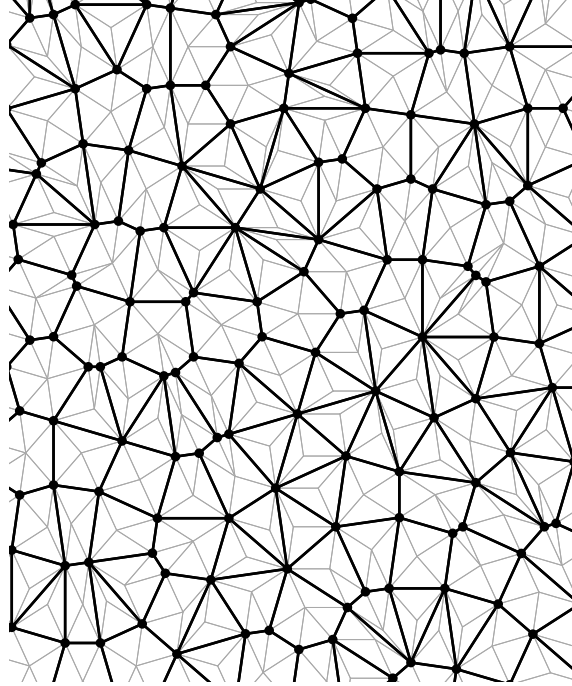


FIGURE 7.3 : Chaque arête  $e \in G$  est la diagonale d'un unique losange de  $G^\diamond$ , ce qui permet de définir l'angle  $\bar{\theta}_e$  ainsi que les angles de losange  $e^{i\bar{\alpha}_e}$  et  $e^{i\bar{\beta}_e}$

<sup>44</sup>On demandera en fait un peu plus, à savoir qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\bar{\theta}_e \in (\varepsilon, \pi/2 - \varepsilon)$ .


 FIGURE 7.4 : La même portion du graphe  $G$  que sur la Figure 7.2, avec son graphe diamant  $G^\diamond$ 

## 7.2 LAPLACIEN MASSIQUE ET FORMULES LOCALES

ÉNONCÉ DU RÉSULTAT PRINCIPAL. Dans [R5] nous introduisons un Laplacien massique  $\Delta^{m(k)} : \mathbb{C}^V \rightarrow \mathbb{C}^V$  par

$$(\Delta^{m(k)} f)(x) = \sum_{y \sim x} \rho(\theta_{xy}|k)[f(y) - f(x)] - m^2(x|k) \quad (7.1)$$

et nous étudions ses propriétés remarquables. Dans (7.1),  $k \in [0, 1)$  désigne le module elliptique,  $\theta_{xy} = \bar{\theta}_{xy} \frac{2K}{\pi}$ ,  $K$  est l'intégrale elliptique complète du premier ordre (1.18) et l'angle  $\bar{\theta}_{xy}$  est celui naturellement associé à l'arête  $xy$  dans le plongement isoradial de  $G$ . L'expression (7.1) du Laplacien implique également des fonctions elliptiques de Jacobi (introduites Section 1.5), qui apparaissent dans les formules de la conductance  $\rho(\theta_{xy}|k)$  et de la masse (au carré)  $m^2(x|k)$  :

$$\rho(\theta_{xy}|k) = \text{sc}(\theta_{xy}|k), \quad (7.2)$$

$$m^2(x|k) = \sum_{y \sim x} [A(\theta_{xy}|k) - \rho(\theta_{xy}|k)] - \frac{2}{k'}(K - E), \quad (7.3)$$

où  $\text{sc}$  est donc l'une des douze fonctions elliptiques de Jacobi,  $E$  est définie en (1.18),  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  est le module complémentaire et la fonction  $A$  — essentiellement la fonction epsilon de Jacobi — est présentée dans l'équation (1.19).

Faisons tout de suite la remarque que le Laplacien massique (7.1) est bien une généralisation de celui dans [89] : il suffit pour cela de faire tendre  $k$  vers 0 et d'utiliser différentes propriétés de dégénérescence des fonctions elliptiques<sup>45</sup>.

<sup>45</sup>Lorsque  $k \rightarrow 0$  la masse devient alors nulle et la fonction  $\text{sc}$  converge vers la fonction tangente.

Notre premier résultat est une formule explicite pour (l'opposé de) l'inverse du Laplacien massique (7.1), à savoir la fonction de Green massique  $G^{m(k)}$ .

**Théorème 7.1** ([R5]). *Soit  $G$  un graphe isoradial infini et soit  $k \in (0, 1)$ . Pour tout couple de sommets  $x, y \in G$ , la fonction de Green massique  $G^{m(k)}(x, y)$  admet l'expression*

$$G^{m(k)}(x, y) = \frac{k'}{4i\pi} \int_{C_{x,y}} e_{(x,y)}(u|k) du, \quad (7.4)$$

où  $e_{(x,y)}(\cdot|k)$  est la fonction exponentielle discrète (cf. (7.5)),  $C_{x,y}$  est un contour vertical sur le tore  $\mathbb{T}(k) = \mathbb{C}/(4K(k)\mathbb{Z} + 4iK(k')\mathbb{Z})$ , dont la direction est celle de la droite orientée  $\mathbb{R}\vec{x}\vec{y}$ .

Remarquons que nous ne faisons pas d'hypothèse de périodicité sur  $G$ . En outre, l'expression (7.4) s'avère tout à fait adaptée pour une analyse asymptotique : en utilisant la méthode du point col, nous prouvons (voir [R5, Théorème 14]) la décroissance exponentielle de la fonction de Green massique.

**FONCTION EXPONENTIELLE DISCRÈTE.** La fonction exponentielle massique  $e_{(\cdot,\cdot)}(\cdot|k)$  est une fonction de  $V^\diamond \times V^\diamond \times \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . Considérons un couple de sommets  $x, y \in G^\diamond$  et une trajectoire  $x = x_1, \dots, x_n = y$  du graphe diamant  $G^\diamond$  joignant  $x$  à  $y$ . Désignons par  $e^{i\bar{\alpha}_j}$  l'angle correspondant à  $x_j x_{j+1}$ , cf. Figure 7.5. Alors  $e_{(x,y)}(\cdot|k)$  est définie par récurrence, comme suit :

$$\begin{cases} e_{(x_j, x_{j+1})}(u|k) &= i\sqrt{k'} \operatorname{sc}(u_{\alpha_j}|k), \\ e_{(x,y)}(u|k) &= \prod_{j=1}^{n-1} e_{(x_j, x_{j+1})}(u|k), \end{cases} \quad (7.5)$$

où  $u_\alpha = \frac{u-\alpha}{2}$  et  $\alpha_j = \bar{\alpha}_j \frac{2K}{\pi}$ .

La fonction exponentielle discrète  $e_{(x,y)}(\cdot|k)$  possède donc une structure produit. En outre ses pôles sont explicites, ce qui permet notamment de mener des calculs de résidus.

Puisque la fonction exponentielle est définie par le biais d'une trajectoire joignant  $x$  à  $y$  dans le graphe plongé, l'expression (7.4) pour  $G^{m(k)}(x, y)$  est locale, c'est-à-dire qu'elle reste inchangée si l'on modifie le graphe  $G$  loin de  $x$  et  $y$ . Cette propriété est remarquable, puisqu'en général on s'attend à ce que la géométrie du graphe dans son ensemble influence le calcul de l'inverse d'un opérateur.

Si le module elliptique  $k$  tend vers 0, la masse (7.3) devient nulle,  $\operatorname{sc}$  devient  $\tan$  et le Laplacien celui de [89]. La fonction exponentielle est alors celle introduite par Mercat dans [118] et utilisée dans la formule de Green de [89].

**REMARQUES SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.1.** Pour prouver une formule locale de l'inverse du Laplacien, l'idée principale de Kenyon [89] consiste à trouver une famille à un paramètre de fonctions dans le noyau du Laplacien (ce sont les fonctions exponentielles), à définir l'inverse  $-G$  comme une intégrale de contour de cette famille contre une fonction singulière et enfin à choisir le contour d'intégration de telle façon à avoir  $\Delta G = -\operatorname{id}$ . (L'idée est identique pour l'opérateur de Kasteleyn.) Pour autant cette démonstration ne fournit pas de formule pour les poids (7.2) et (7.3), elle ne fournit pas non plus de critère pour l'existence d'une famille de fonctions locales dans le noyau du Laplacien et encore moins de façon de la trouver. De ce point de vue, l'un des mérites de nos résultats réside précisément dans le fait de définir une famille de poids pour le Laplacien massique et de trouver des fonctions locales dans le noyau.

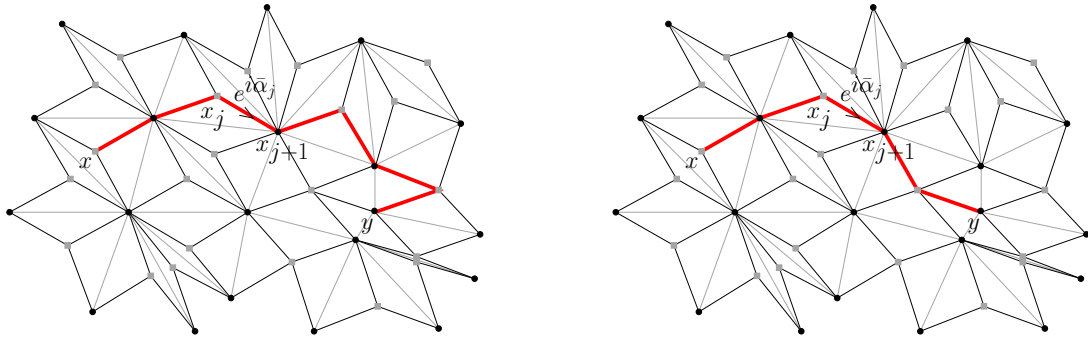


FIGURE 7.5 : Exemples de trajectoires de  $G^\circ$  joignant  $x$  à  $y$  que l'on peut utiliser pour le calcul de la fonction exponentielle discrète (7.5). Bien que celle de gauche ne soit pas minimale, les deux trajectoires fournissent le même résultat pour  $e_{(x,y)}(\cdot|k)$

### 7.3 MODÈLES DE FORÊTS COUVRANTES SUR DES GRAPHES ISORADIAUX

Les résultats de la section précédente peuvent être appréciés du seul point de vue de la théorie des opérateurs. Cependant, comme d'ailleurs le nom de l'inverse du Laplacien le suggère (les fonctions de Green), nous pouvons aussi interpréter ces résultats dans la perspective de la mécanique statistique.

ARBRES COUVRANTS ET FORÊTS COUVRANTES. Plus spécifiquement, le Laplacien massique est naturellement lié au modèle des forêts couvrantes enracinées.

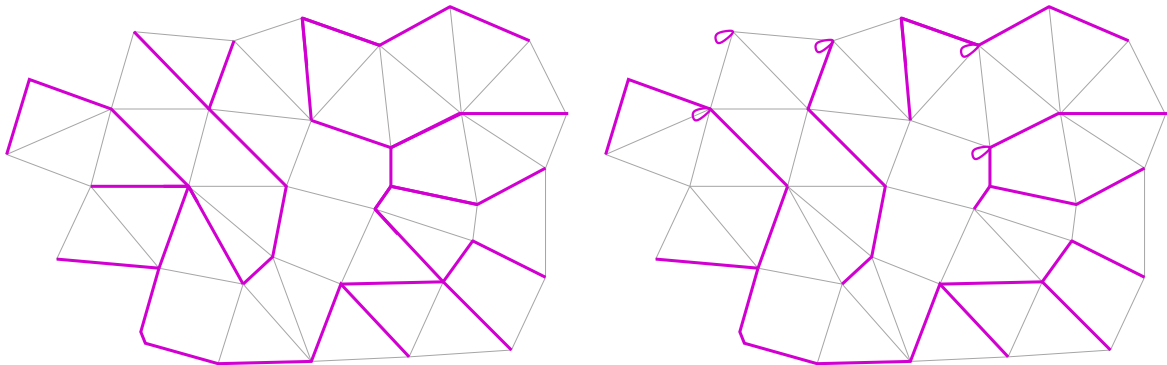


FIGURE 7.6 : Gauche : un arbre couvrant de  $G$  (supposé fini) est un sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, connexe et ne contenant pas de cycle. Droite : une forêt couvrante de  $G$  est un sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, tel que chaque composante connexe est un arbre enraciné

Rappelons en effet que lorsque le graphe  $G$  est fini, le fameux théorème de Kirchhoff (Kirchhoff matrix-tree theorem en anglais) affirme que le déterminant du Laplacien (non massique) est égal à la fonction de partition  $Z_{\text{arbre}}(G)$ , elle-même étant la somme pondérée des arbres couvrants du graphe  $G$ , dont les poids dépendent des conductances  $\{\tan \theta_e\}$ <sup>46</sup>. Un énoncé similaire associe le

<sup>46</sup>Plus en détail, si  $\mathcal{T}(G)$  désigne l'ensemble des arbres couvrants de  $G$ , la probabilité  $\mathbb{P}_{\text{arbre}}$  et la fonction de

déterminant du Laplacien massique et la fonction de partition des forêts couvrantes. Évoquons aussi le théorème de Burton et Pemantle [40], qui affirme que pour tout sous-ensemble d'arêtes  $\{e_1, \dots, e_k\}$  de  $G$ ,

$$\mathbb{P}_{\text{arbre}}[e_1, \dots, e_k] = \det[(H(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq k}], \quad (7.6)$$

où  $H$  est une matrice dite d'impédance de transfert, dont les coefficients sont des différences de fonctions de Green.

MESURE VOLUME. Nous démontrons dans [R5] une extension de la formule (7.6) au modèle des forêts couvrantes enracinées. Précisément nous obtenons l'expression (déterminantale) de

$$\mathbb{P}_{\text{forêt}}[e_1, \dots, e_k; x_1, \dots, x_j],$$

la probabilité que les arêtes  $e_1, \dots, e_k$  appartiennent à une forêt couvrante enracinée aléatoire et que les sommets  $x_1, \dots, x_j$  en soient des racines. Notre mesure hérite de la propriété de localité du Théorème 7.1. Nous renvoyons à [R5, Théorème 34] pour un énoncé détaillé.

ÉNERGIE LIBRE. Supposons à présent que le graphe isoradial  $G$  soit  $\mathbb{Z}^2$ -périodique et considérons l'exhaustion naturelle  $G_n = G/n\mathbb{Z}^2$  de  $G$  par graphes toroïdaux. L'énergie libre du modèle des forêts couvrantes, notée  $F_{\text{forêt}}^k$ , est l'opposée de la constante de croissance exponentielle de la fonction de partition  $Z_{\text{forêt}}^k(G_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Dans l'énoncé du Théorème 7.2 plus bas, nous parvenons à une formule explicite pour l'énergie libre. Elle a la propriété notable de ne pas dépendre de la combinatoire du graphe : elle est en effet la somme sur les arêtes de  $G_1$  de quantités qui ne dépendent que des angles  $\theta_e$  associés aux arêtes  $e$ .

**Théorème 7.2** ([R5]). *Pour tout  $k \in (0, 1)$ , l'énergie libre  $F_{\text{forêt}}^k$  du modèle des forêts couvrantes sur le graphe isoradial  $G$ , infini et  $\mathbb{Z}^2$ -périodique, est égale à*

$$F_{\text{forêt}}^k = |\mathbf{V}_1| \int_0^K 4H'(2\theta) \log \text{sc}(\theta) d\theta + \sum_{e \in \mathbf{E}_1} \int_0^{\theta_e} \frac{2H(2\theta) \text{sc}'(\theta)}{\text{sc}(\theta)} d\theta, \quad (7.7)$$

où la fonction  $H$  vaut (avec  $E$  comme dans la Section 1.5, liée à la fonction epsilon de Jacobi)

$$H(u|k) = \frac{u}{4K} (1 - 2EK') + \frac{K'}{\pi} E\left(\frac{u}{2} \middle| k\right).$$

Si  $k = 0$ , l'énergie libre  $F_{\text{forêt}}^0$  est égale à celle du modèle des arbres couvrants. Un développement de (7.7) autour de  $k = 0$  montre alors que le modèle des forêts couvrantes enracinées possède une transition de phase du second ordre en  $k = 0$ , c'est l'objet du Théorème 7.3 ci-dessous. Cela prouve en particulier que le modèle des arbres couvrants correspondant au Laplacien de [89] est en effet critique.

**Théorème 7.3** ([R5]). *Soit  $F_{\text{forêt}}^0$  l'énergie libre du modèle des arbres couvrants avec conductances critiques  $\{\tan \theta_e\}_{e \in \mathbf{E}}$ . Au voisinage de  $k = 0$ , l'énergie libre  $F_{\text{forêt}}^k$  admet le développement*

$$F_{\text{forêt}}^k = F_{\text{forêt}}^0 + k^2 \log k^{-1} |\mathbf{V}_1| + O(k^2).$$

---

partition  $Z_{\text{arbre}}(G)$  sont définies par  $\mathbb{P}_{\text{arbre}}[\mathbf{T}] = \frac{\prod_{e \in \mathbf{T}} \tan \theta_e}{Z_{\text{arbre}}(G)}$ , pour tout  $\mathbf{T} \in \mathcal{T}(G)$ .



PROPRIÉTÉ DE  $Z$ -INVARIANCE. Rappelons que la mesure volume introduite plus haut satisfait une propriété de localité — acquise du Théorème 7.1. Du point de vue de la mécanique statistique cette propriété spéciale suggère que le modèle (celui des forêts couvrantes) est  $Z$ -invariant.

Le travail [11] de Baxter sur le modèle des 8-vertex constitue l'une des premières apparitions de la notion de  $Z$ -invariance ; elle fut ensuite étendue à d'autres modèles célèbres comme le modèle d'Ising ou encore le modèle de Potts. Voici sa définition, en quelques mots. Une éventuelle étoile (c'est-à-dire un sommet de degré 3) d'un graphe isoradial peut se transformer en un triangle tout en préservant l'isoradialité, cf. Figure 7.1. Si l'on décompose la fonction de partition du modèle relativement aux configurations délimitant l'étoile (ou le triangle), le modèle est dit  $Z$ -invariant si les différentes contributions changent seulement d'une constante multiplicative après transformation triangle-étoile.

**Théorème 7.4** ([R5]). *Pour  $k \in [0, 1)$ , le modèle de mécanique statistique des forêts couvrantes enracinées sur des graphes isoradiaux avec conductances (7.2) et masses (7.3) est  $Z$ -invariant.*

Cette condition forte implique que les poids du modèle satisfont un ensemble d'équations, dites de Yang-Baxter. Une propriété de  $Z$ -invariance suggère la localité, mais ne fournit pas de formule pour les probabilités locales. Nous conjecturons que notre famille à un paramètre de poids paramétrise complètement les équations de Yang-Baxter pour les forêts couvrantes enracinées.

## 7.4 GRAPHES ISORADIAUX PÉRIODIQUES ET COURBES DE HARNACK

Terminons notre présentation de [R5] par le cas des graphes  $G$  isoradiaux et  $\mathbb{Z}^2$ -périodiques. Dans cette situation d'autres outils émergent, comme la transformée de Fourier.

COURBES DE HARNACK. Dans le cas d'un graphe périodique, on introduit le polynôme caractéristique  $P_{\Delta^{m(k)}}(z, w)$  du Laplacien massique, qui est le déterminant de la matrice  $\Delta^{m(k)}(z, w)$ , elle-même transformée de Fourier de la matrice représentant le Laplacien  $\Delta^{m(k)}$ . La courbe

$$\mathcal{C}^k = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P_{\Delta^{m(k)}}(z, w) = 0\}, \quad (7.8)$$

appelée courbe spectrale du Laplacien et dont on pourra voir sur la Figure 7.7 une représentation de son amibe, possède un intérêt tout particulier. On démontre d'abord que  $\mathcal{C}^k$  possède une structure très spéciale, celle d'une courbe de Harnack<sup>47</sup>.

**Théorème 7.5** ([R5]). *Pour tout  $k \in (0, 1)$ , la courbe spectrale  $\mathcal{C}^k$  du Laplacien massique  $\Delta^{m(k)}$  est une courbe de Harnack de genre 1.*

Ce résultat est étonnant *a priori* : il établit une bijection entre un objet provenant de la géométrie algébrique et un modèle de mécanique statistique. Il est réminiscent d'une paramétrisation rationnelle (correspondant au genre 0, donc) des courbes spectrales des modèles de dimères bipartis, périodiques et critiques sur des graphes isoradiaux, voir [91].

<sup>47</sup>La définition précise d'une courbe de Harnack (cf. [119, Définition 2]) est plutôt technique. Résumons ici : une courbe définie comme les zéros d'un polynôme complexe à deux variables (comme en (7.8)) est dite de Harnack si elle est maximale et si les ovals du lieu de ses points réels respectent certaines conditions de position.

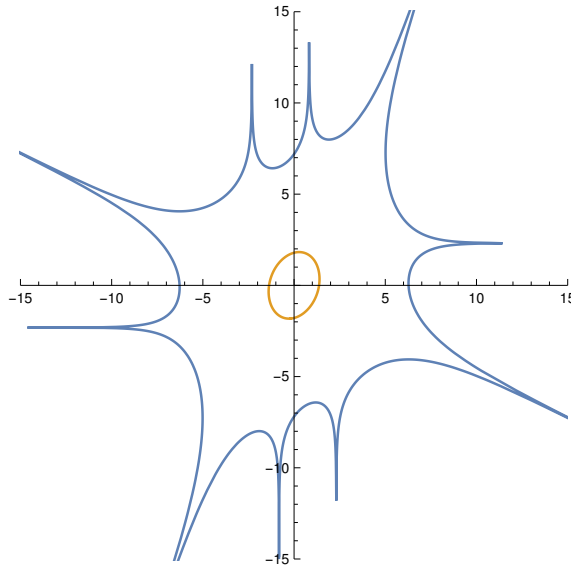


FIGURE 7.7 : Représentation de l’amibe d’une courbe spectrale  $\mathcal{C}^k$ , c’est-à-dire l’image de  $\mathcal{C}^k$  par l’application  $(z, w) \mapsto (\log |z|, \log |w|)$

**Théorème 7.6** ([R5]). *Toute courbe de Harnack avec une symétrie  $(z, w) \leftrightarrow (z^{-1}, w^{-1})$  s’interprète comme la courbe spectrale du polynôme caractéristique d’un Laplacien massique  $\Delta^{m(k)}$  sur un certain graphe isoradial périodique, pour une certaine valeur de  $k \in (0, 1)$ .*

Cet énoncé peut être comparé à celui de [91] affirmant que toute courbe de Harnack de genre nul dont l’amibe contient l’origine est la courbe spectrale d’un modèle de dimères critique sur un graphe isoradial biparti.

EXPRESSION ALTERNATIVE POUR LES FONCTIONS DE GREEN. En utilisant des arguments de transformation de Fourier, la fonction de Green massique peut s’exprimer au moyen du polynôme caractéristique (cf. [R5, Équation (39)]). Si cette approche fonctionne pour des choix de poids plutôt généraux, notre choix particulier des conductances (7.2) et masses (7.3) permet un changement de variable étonnant et conduit à relier cette nouvelle expression des fonctions de Green à celle du Théorème 7.1. Cette relation n’était pas comprise dans les articles [89, 38].

PROJETS. Cédric Boutillier, Béatrice de Tilière et moi-même voudrions continuer à explorer l’utilisation des fonctions elliptiques dans des modèles de mécanique statistique, au travers notamment des projets suivants :

[P16] *Trouver des formules locales pour le modèle d’Ising non critique avec poids donnés par des fonctions elliptiques*

En utilisant une correspondance classique de Fisher (ou plus récemment de Dubédat [51]) le modèle d’Ising sur un graphe peut s’interpréter comme un modèle de dimères sur une version décorée de ce même graphe. Grâce à cette correspondance et à l’étude du modèle de dimères associé nous souhaitons arriver à des formules locales pour le modèle d’Ising non critique.

[P17] *Phénomènes de bord dans le cas de graphes finis*

Les résultats présentés dans le Chapitre 7 concernent le cas d'un graphe  $G$  infini. Des phénomènes intéressants — liés notamment à la présence d'un bord — devraient toutefois se produire dans le cas de graphes finis.

# BIBLIOGRAPHIE

## PUBLICATIONS PRÉSENTÉES DANS LE DOCUMENT D'HABILITATION

- [R1] I. Adan, J. van Leeuwen and K. Raschel (2013). The compensation approach for walks with small steps in the quarter plane. *Combin. Probab. Comput.* **22** 161–183
- [R2] O. Bernardi, M. Bousquet-Mélou and K. Raschel (2016). Counting quadrant walks via Tutte's invariant method. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AN*. In: 28th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2016) 203–214
- [R3] A. Bostan, I. Kurkova and K. Raschel (2016). A human proof of Gessel's lattice path conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1–29. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/tran/6804>
- [R4] A. Bostan, K. Raschel and B. Salvy (2014). Non-D-finite excursions in the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A* **121** 45–63
- [R5] C. Boutillier, B. de Tilière and K. Raschel (2015). The  $Z$ -invariant massive Laplacian on isoradial graphs. *Preprint arXiv:1504.00792* 1–85. *Invent. Math.* (to appear)
- [R6] R. Essifi, M. Peigné and K. Raschel (2013). Some aspects of fluctuations of random walks on  $\mathbb{R}$  and applications to random walks on  $\mathbb{R}_+$  with non-elastic reflection at 0. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **10** 591–607
- [R7] G. Fayolle and K. Raschel (2010). On the holonomy or algebraicity of generating functions counting lattice walks in the quarter-plane. *Markov Process. Related Fields* **16** 485–496
- [R8] G. Fayolle and K. Raschel (2011). Random walks in the quarter-plane with zero drift: an explicit criterion for the finiteness of the associated group. *Markov Process. Related Fields* **17** 619–636
- [R9] G. Fayolle and K. Raschel (2012). Some exact asymptotics in the counting of walks in the quarter plane. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AQ*. In: 23rd Intern. Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms (AofA 2012)109–124
- [R10] G. Fayolle and K. Raschel (2015). About a possible analytic approach for walks in the quarter plane with arbitrary big jumps. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **353** 89–94
- [R11] R. Garbit and K. Raschel (2014). On the exit time from a cone for Brownian motion with drift. *Electron. J. Probab.* **19** 1–27
- [R12] R. Garbit and K. Raschel (2016). On the exit time from a cone for random walks with drift. *Rev. Mat. Iberoam.* **32** 511–532
- [R13] I. Kurkova and K. Raschel (2012). On the functions counting walks with small steps in the quarter plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **116** 69–114
- [R14] I. Kurkova and K. Raschel (2015). New steps in walks with small steps in the quarter plane: series expressions for the generating functions. *Ann. Comb.* **19** 461–511

- [R15] P. Lafitte-Godillon, K. Raschel and V. Tran (2013). Extinction probabilities for a distylous plant population modeled by an inhomogeneous random walk on the positive quadrant. *SIAM J. Appl. Math.* **73** 700–722
- [R16] C. Lecouvey and K. Raschel (2015).  $t$ -Martin boundary of killed random walks in the quadrant. *Preprint arXiv:1509.04193* 1–12. *Séminaire de Probabilités* (to appear)
- [R17] K. Raschel (2014). Random walks in the quarter plane, discrete harmonic functions and conformal mappings. With an appendix by S. Franceschi. *Stochastic Process. Appl.* **124** 3147–3178

## PUBLICATIONS EXTERNES

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, Washington
- [2] I. Adan, J. Wessels and W. Zijm (1993). A compensation approach for two-dimensional Markov processes. *Adv. in Appl. Probab.* **25** 783–817
- [3] M. Albert and M. Bousquet-Mélou (2015). Permutations sortable by two stacks in parallel and quarter plane walks. *European J. Combin.* **43** 131–164
- [4] Y. André (2000). Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité. *Ann. of Math.* **151** 705–740
- [5] S. Aspandiiarov and R. Iasnogorodski (1997). Tails of passage-times and an application to stochastic processes with boundary reflection in wedges. *Stochastic Process. Appl.* **66** 115–145
- [6] S. Aspandiiarov, R. Iasnogorodski and M. Menshikov (1997). Passage-time moments for nonnegative stochastic processes and an application to reflected random walks in a quadrant. *Ann. Probab.* **24** 932–960
- [7] A. Ayer (2009). Towards a human proof of Gessel’s conjecture. *J. Integer Seq.* **12** Article 09.4.2, 15 pp
- [8] F. Baccelli and G. Fayolle (1987). Analysis of models reducible to a class of diffusion processes in the positive quarter plane. *SIAM J. Appl. Math.* **47** 1367–1385
- [9] R. Bañuelos and R. Smits (1997). Brownian motion in cones. *Probab. Theory Related Fields* **108** 299–319
- [10] G. Baxter (1962). Combinatorial methods in fluctuation theory. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **1** 263–270
- [11] R. Baxter (1978). Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **289** 315–346
- [12] R. Baxter (1989). *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press Inc., London
- [13] V. Beffara and H. Duminil-Copin (2012). Smirnov’s fermionic observable away from criticality. *Ann. Probab.* **40** 2667–2689
- [14] O. Bernardi and M. Bousquet-Mélou (2011). Counting colored planar maps: algebraicity results. *J. Combin. Theory Ser. B* **101** 315–377
- [15] O. Bernardi and M. Bousquet-Mélou (2015). Counting coloured planar maps: differential equations. *Preprint arXiv:1507.02391* 1–43
- [16] P. Biane (1991). Some properties of quantum Bernoulli random walks. In: *Quantum probability & related topics* 193–203, QP-PQ, VI, World Sci. Publ., River Edge, NJ
- [17] P. Biane (1991). Quantum random walk on the dual of  $SU(n)$ . *Probab. Theory Related Fields* **89** 117–129
- [18] P. Biane (1992). Frontière de Martin du dual de  $SU(2)$ . In: *Séminaire de Probabilités XXVI* 225–233, Lecture Notes in Math., 1526, Springer, Berlin
- [19] P. Biane (1992). Équation de Choquet-Deny sur le dual d’un groupe compact. *Probab. Theory Related Fields* **94** 39–51
- [20] P. Biane (1992). Minuscule weights and random walks on lattices. In: *Quantum probability & related topics* 51–65, QP-PQ, VII, World Sci. Publ., River Edge, NJ
- [21] P. Biane (1994). Quelques propriétés du mouvement brownien dans un cône. *Stochastic Process. Appl.* **53** 233–240
- [22] P. Biane, P. Bougerol and N. O’Connell (2005). Littelmann paths and Brownian paths. *Duke Math. J.* **130** 127–167

- [23] S. Billiard and C. Tran (2012). A general stochastic model for sporophytic self-incompatibility. *J. Math. Biol.* **64** 163–210
- [24] A. Bobenko, C. Mercat and Y. Suris (2005). Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green’s function. *J. Reine Angew. Math.* **583** 117–161
- [25] A. Bostan and M. Kauers (2010). The complete generating function for Gessel walks is algebraic. With an appendix by Mark van Hoeij. *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** 3063–3078
- [26] A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. Kauers and S. Melczer (2016). On 3-dimensional lattice walks confined to the positive octant. *Preprint arXiv:1409.3669* 1–36. *Ann. Comb.* (to appear)
- [27] A. Bostan and K. Raschel (2015). Compter les excursions sur un échiquier. *Pour la Science* **449** 40–46
- [28] A. Bouaziz, S. Mustapha and M. Sifi (2015). Discrete harmonic functions on an orthant in  $\mathbb{Z}^d$ . *Electron. Commun. Probab.* **20** Article 52, 13 pp
- [29] M. Bousquet-Mélou (2002). Counting walks in the quarter plane. In: *Mathematics and computer science, II*, 49–67, Trends Math., Birkhäuser, Basel
- [30] M. Bousquet-Mélou and A. Jehanne (2006). Polynomial equations with one catalytic variable, algebraic series and map enumeration. *J. Combin. Theory Ser. B* **96** 623–672
- [31] M. Bousquet-Mélou and G. Schaeffer (2002). Walks on the slit plane. *Probab. Theory Related Fields* **124** 305–344
- [32] M. Bousquet-Mélou (2005). Walks in the quarter plane: Kreweras’ algebraic model. *Ann. Appl. Probab.* **15** 1451–1491
- [33] M. Bousquet-Mélou (2015). An elementary solution of Gessel’s walks in the quadrant. *Preprint arXiv:1503.08573* 1–14
- [34] M. Bousquet-Mélou and M. Mishna (2010). Walks with small steps in the quarter plane. In: *Algorithmic probability and combinatorics* 1–39, Contemp. Math., 520, Amer. Math. Soc., Providence, RI
- [35] M. Bousquet-Mélou and M. Petkovšek (2000). Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. *Discrete Math.* **225** 51–75
- [36] M. Bousquet-Mélou and M. Petkovšek (2003). Walks confined in a quadrant are not always D-finite. *Theoret. Comput. Sci.* **307** 257–276
- [37] C. Boutillier and B. de Tilière (2010). The critical  $Z$ -invariant Ising model via dimers: the periodic case. *Probab. Theory Related Fields* **147** 379–413
- [38] C. Boutillier and B. de Tilière (2011). The critical  $Z$ -invariant Ising model via dimers: locality property. *Comm. Math. Phys.* **301** 473–516
- [39] D. Burkholder (1977). Exit times of Brownian motion, harmonic majorization, and Hardy spaces. *Adv. in Math.* **26** 182–205
- [40] R. Burton and R. Pemantle (1993). Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances. *Ann. Probab.* **21** 1329–1371
- [41] N. Champagnat, P. Diaconis and L. Miclo (2012). On Dirichlet eigenvectors for neutral two-dimensional Markov chains. *Electron. J. Probab.* **17** Article 63, 41 pp
- [42] B. Chauvin, C. Mailler and N. Pouyanne (2015). Smoothing Equations for Large Pólya Urns. *J. Theoret. Probab.* **28** 923–957
- [43] I. Chavel (1984). *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic Press, Inc., Orlando, FL
- [44] J. Cohen and O. Boxma (1983). *Boundary value problems in queueing system analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam
- [45] E. Cont and A. de Larrard (2013). Price dynamics in a Markovian limit order market. *SIAM J. Financial Math.* **4** 1–25
- [46] R. DeBlassie (1987). Exit times from cones in  $\mathbb{R}^n$  of Brownian motion. *Probab. Theory Related Fields* **74** 1–29
- [47] R. DeBlassie (1988). Remark on: “Exit times from cones in  $\mathbb{R}^n$  of Brownian motion”. *Probab. Theory Related Fields* **79** 95–97
- [48] D. Denisov and V. Wachtel (2010). Conditional limit theorems for ordered random walks. *Electron. J. Probab.* **15** no. 11 292–322
- [49] D. Denisov and V. Wachtel (2015). Random walks in cones. *Ann. Probab.* **43** 992–1044

- [50] Y. Doumerc and N. O’Connell (2005). Exit problems associated with finite reflection groups. *Probab. Theory Related Fields* **132** 501–538
- [51] J. Dubédat (2011). Exact bosonization of the Ising model *Preprint arXiv:1112.4399* 1–35
- [52] R. Duffin (1956). Basic properties of discrete analytic functions. *Duke Math. J.* **23** 335–363
- [53] R. Duffin (1968). Potential theory on a rhombic lattice. *J. Combinatorial Theory* **5** 258–272
- [54] J. Duraj (2014). Random walks in cones: the case of nonzero drift. *Stochastic Process. Appl.* **124** 1503–1518
- [55] D. Dyson (1962). A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix. *J. Mathematical Phys.* **3** 1191–1198
- [56] P. Eichelsbacher and W. König (2008). Ordered random walks. *Electron. J. Probab.* **13** no. 46 1307–1336
- [57] A. Elvey-Price and A. Guttmann (2015). Permutations sortable by deque and by two stacks in parallel. *Preprint arXiv:1508.02273* 1–27
- [58] G. Fayolle and R. Iasnogorodski (1979). Two coupled processors: the reduction to a Riemann-Hilbert problem. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **47** 325–351
- [59] G. Fayolle and R. Iasnogorodski (2015). Random Walks in the Quarter-Plane: Advances in Explicit Criteria for the Finiteness of the Associated Group in the Genus 1 Case. *Markov Process. Related Fields* **21** 1005–1033
- [60] G. Fayolle, R. Iasnogorodski and V. Malyshev (1999). *Random walks in the quarter-plane*. Springer-Verlag, Berlin
- [61] G. Fayolle, V. Malyshev and M. Menshikov (1995). *Topics in the constructive theory of countable Markov chains*. Cambridge University Press, Cambridge
- [62] J. Ferrand (1944). Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes. *Bull. Sci. Math.* **68** 152–180
- [63] P. Flajolet and R. Sedgewick (2009). *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge
- [64] L. Flatto and S. Hahn (1984). Two parallel queues created by arrivals with two demands. I. *SIAM J. Appl. Math.* **44** 1041–1053
- [65] L. Flatto (1985). Two parallel queues created by arrivals with two demands. II. *SIAM J. Appl. Math.* **45** 861–878
- [66] S. Franceschi and I. Kurkova (2016). Asymptotic expansion of stationary distribution for reflected brownian motion in the quarter plane via analytic approach. *Preprint arXiv:1604.02918* 1–45
- [67] S. Franceschi and K. Raschel (2016). Tutte’s invariant approach for Brownian motion reflected in the quadrant. *Preprint arXiv:1602.03054* 1–14
- [68] R. Garbit (2007). Temps de sortie d’un cône pour une marche aléatoire centrée. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **345** 587–591
- [69] R. Garbit (2009). Brownian motion conditioned to stay in a cone. *J. Math. Kyoto Univ.* **49** 573–592
- [70] R. Garbit (2011). A central limit theorem for two-dimensional random walks in a cone. *Bull. Soc. Math. France* **139** 271–286
- [71] S. Garoufalidis (2009). G-functions and multisum versus holonomic sequences. *Adv. Math.* **220** 1945–1955
- [72] S. Garrabrant and I. Pak (2015). Words in Linear Groups, Random Walks, Automata and P-Recursiveness. *Preprint arXiv:1502.06565* 1–10
- [73] I. Gessel and D. Zeilberger (1992). Random walk in a Weyl chamber. *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** 27–31
- [74] D. Gouyou-Beauchamps (1986). Chemins sous-diagonaux et tableaux de Young. In: *Combinatoire énumérative* 112–125, Lecture Notes in Math. 1234, Springer, Berlin
- [75] D. Grabiner (1999). Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **35** 177–204
- [76] R. Guy, C. Krattenthaler and B. Sagan (1992). Lattice paths, reflections, & dimension-changing bijections. *Ars Combin.* **34** 3–15
- [77] H. Hauser and C. Koutschan (2012). Multivariate linear recurrences and power series division. *Discrete Math.* **312** 3553–3560
- [78] P.-L. Hennequin (1963). Processus de Markoff en cascade. *Ann. Inst. H. Poincaré* **18** 109–195
- [79] D. Iglehart (1974). Random walks with negative drift conditioned to stay positive. *J. Appl. Probability* **11** 742–751

- [80] I. Ignatiouk-Robert (2008). Martin boundary of a killed random walk on a half-space. *J. Theoret. Probab.* **21** 35–68
- [81] I. Ignatiouk-Robert (2009). Martin boundary of a killed random walk on  $\mathbb{Z}^d$ . *Preprint arXiv:0909.3921* 1–49
- [82] I. Ignatiouk-Robert (2010). Martin boundary of a reflected random walk on a half-space. *Probab. Theory Related Fields* **148** 197–245
- [83] I. Ignatiouk-Robert (2010).  $t$ -Martin boundary of reflected random walks on a half-space. *Electron. Commun. Probab.* **15** 149–161
- [84] I. Ignatiouk-Robert and C. Loree (2010). Martin boundary of a killed random walk on a quadrant. *Ann. Probab.* **38** 1106–1142
- [85] S. Johnson, M. Mishna and K. Yeats (2013). Towards a Combinatorial Understanding of Lattice Path Asymptotics. *Preprint arXiv:1305.7418* 1–14
- [86] G. Jones and D. Singerman (1987). *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, Cambridge
- [87] M. Kauers, C. Koutschan and D. Zeilberger (2009). Proof of Ira Gessel’s lattice path conjecture. *P. Natl. Acad. Sci. USA* **106** 11502–11505
- [88] M. Kauers and R. Yatchak (2015). Walks in the Quarter Plane with Multiple Steps. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AN*. In: 27th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2015) 25–36
- [89] R. Kenyon (2002). The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs. *Invent. Math.* **150** 409–439
- [90] R. Kenyon, J. Miller, S. Sheffield and D. Wilson. Bipolar orientations on planar maps and  $\text{SLE}_{12}$ . *Preprint arXiv:1511.04068* 1–27
- [91] R. Kenyon and A. Okounkov (2006). Planar dimers and Harnack curves. *Duke Math. J.* **131** 499–524
- [92] R. Kenyon, A. Okounkov and S. Sheffield (2006). Dimers and amoebae. *Ann. of Math.* **163** 1019–1056
- [93] C. Krattenthaler (2007). Asymptotics for random walks in alcoves of affine Weyl groups. *Sém. Lothar. Combin.* **52**
- [94] C. Krattenthaler (2015). Lattice Path Enumeration. In: *Handbook of Enumerative Combinatorics* 589–678, CRC Press, Boca Raton-London-New York
- [95] G. Kreweras (1965). Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers. *Cahiers du B.U.R.O.* **6** 5–105
- [96] I. Kurkova and V. Malyshev (1998). Martin boundary and elliptic curves. *Markov Process. Related Fields* **4** 203–272
- [97] I. Kurkova and K. Raschel (2011). Explicit expression for the generating function counting Gessel’s walks. *Adv. in Appl. Math.* **47** 414–433
- [98] I. Kurkova and K. Raschel (2011). Random walks in  $\mathbb{Z}_+^2$  with non-zero drift absorbed at the axes. *Bull. Soc. Math. France* **139** 341–387
- [99] I. Kurkova and K. Raschel (2013). Passage time from four to two blocks of opinions in the voter model and walks in the quarter plane. *Queueing Syst.* **74** 219–234
- [100] I. Kurkova and Y. Suhov (2003). Malyshev’s theory and JS-queues. Asymptotics of stationary probabilities. *Ann. Appl. Probab.* **13** 1313–1354
- [101] S. Lalley (1995). Return probabilities for random walk on a half-line. *J. Theoret. Probab.* **8** 571–599
- [102] D. Lawden (1989). *Elliptic functions and applications*. Springer-Verlag, New York
- [103] C. Lecouvey, E. Lesigne and M. Peigné (2012). Random walks in Weyl chambers and crystals. *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** 323–358
- [104] C. Lecouvey, E. Lesigne and M. Peigné (2013). Conditioned one-way simple random walk and combinatorial representation theory. *Sém. Lothar. Combin.* **70** Article B70b, 27 pp
- [105] J. van Leeuwen and K. Raschel (2013). Random walks reaching against all odds the other side of the quarter plane. *J. Appl. Probab.* **50** 85–102
- [106] É. Le Page and M. Peigné (1997). A local limit theorem on the semi-direct product of  $\mathbb{R}_+^*$  and  $\mathbb{R}^d$ . *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **33** 223–252



- [107] L. Lipshitz (1989).  $D$ -finite power series. *J. Algebra* **122** 353–373
- [108] Z. Li (2012). Critical temperature of periodic Ising models. *Comm. Math. Phys.* **315** 337–381
- [109] G. Litvinchuk (2000). *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [110] V. Malyshev (1969). The solution of the discrete Wiener-Hopf equations in a quarter-plane. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **187** 1243–1246
- [111] V. Malyshev (1971). Wiener-Hopf equations in the quarter-plane, discrete groups and automorphic functions. *Mat. Sb.* **84** 499–525
- [112] V. Malyshev (1971). Positive random walks and Galois theory. *Uspehi Mat. Nauk* **26** 227–228
- [113] V. Malyshev (1971). Positive random walks and generalized elliptic integrals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **196** 516–519
- [114] V. Malyshev (1972). An analytic method in the theory of two-dimensional positive random walks. *Sibirsk. Mat. Ž.* **13** 1314–1329
- [115] V. Malyshev (1973). Asymptotic behavior of the stationary probabilities for two-dimensional positive random walks. *Sibirsk. Mat. Ž.* **14** 156–169
- [116] S. Melczer and M. Mishna (2014). Singularity analysis via the iterated kernel method. *Combin. Probab. Comput.* **23** 861–888
- [117] C. Mercat (2001). Discrete Riemann surfaces and the Ising model. *Comm. Math. Phys.* **218** 177–216
- [118] C. Mercat (2004). Exponentials form a basis of discrete holomorphic functions on a compact. *Bull. Soc. Math. France* **132** 305–326
- [119] G. Mikhalkin and H. Rullgård (2001). Amoebas of maximal area. *Internat. Math. Res. Notices* 441–451
- [120] M. Mishna and A. Rechnitzer (2009). Two non-holonomic lattice walks in the quarter plane. *Theoret. Comput. Sci.* **410** 3616–3630
- [121] M. Mishna (2009). Classifying lattice walks restricted to the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A* **116** 460–477
- [122] S. Mustapha (2006). Gaussian estimates for spatially inhomogeneous random walks on  $\mathbb{Z}^d$ . *Ann. Probab.* **34** 264–283
- [123] S. Mustapha (2007). Gambler’s ruin estimates for random walks with symmetric spatially inhomogeneous increments. *Bernoulli* **13** 131–147
- [124] M. Peigné and W. Woess (2011). Stochastic dynamical systems with weak contractivity properties I. Strong and local contractivity. *Colloq. Math.* **125** 31–54
- [125] M. Peigné and W. Woess (2011). Stochastic dynamical systems with weak contractivity properties II. Iteration of Lipschitz mappings. *Colloq. Math.* **125** 55–81
- [126] R. Pemantle and M. Wilson (2013). *Analytic combinatorics in several variables*. Cambridge University Press, Cambridge
- [127] M. Picardello and W. Woess (1992). Martin boundaries of Cartesian products of Markov chains. *Nagoya Math. J.* **128** 153–169
- [128] W. Pruitt (1964). Eigenvalues of nonnegative matrices. *Annals of Math. Statistics* **35** 1797–1800
- [129] Z. Puchała and T. Rolski (2008). The exact asymptotic of the collision time tail distribution for independent Brownian particles with different drifts. *Probab. Theory Related Fields* **142** 595–617
- [130] K. Raschel (2010). Green functions and Martin compactification for killed random walks related to  $SU(3)$ . *Electron. Commun. Probab.* **15** 176–190
- [131] K. Raschel (2011). Green functions for killed random walks in the Weyl chamber of  $Sp(4)$ . *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **47** 1001–1019
- [132] K. Raschel (2012). Counting walks in a quadrant: a unified approach via boundary value problems. *J. Eur. Math. Soc.* **14** 749–777
- [133] S. Smirnov (2010). Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model. *Ann. of Math.* **172** 1435–1467
- [134] F. Spitzer (1958). Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** 187–197

- [135] F. Spitzer (1976). *Principles of random walk*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg
- [136] P. Sun (2012). Proof of two conjectures of Petkovšek and Wilf on Gessel walks. *Discrete Math.* **312** 3649–3655
- [137] W. Tutte (1974). Chromatic sums for rooted planar triangulations. V. Special equations. *Canad. J. Math.* **26** 893–907
- [138] W. Tutte (1995). Chromatic sums revisited. *Aequationes Math.* **50** 95–134
- [139] N. Varopoulos (1999). Potential theory in conical domains I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **125** 335–384
- [140] N. Varopoulos (2000). Potential theory in conical domains II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **129** 301–319
- [141] N. Varopoulos (2001). Potential theory in conical domains III. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **131** 327–361
- [142] N. Varopoulos (2009). The discrete and classical Dirichlet problem. *Milan J. Math.* **77** 397–436
- [143] R. Vidunas (2008). Transformations of algebraic Gauss hypergeometric functions. *Preprint arXiv:0807.4808* 1–25
- [144] M. Picardello and W. Woess (editors) (1999). *Random Walks and Discrete Potential Theory*. Proceedings of the conference held in Cortona, June 1997. Symposia Mathematica, XXXIX. Cambridge University Press, Cambridge
- [145] T. Tate and S. Zelditch (2004). Lattice path combinatorics and asymptotics of multiplicities of weights in tensor powers. *J. Funct. Anal.* **217** 402–447
- [146] W. Woess (2000). *Random walks on infinite graphs and groups*. Cambridge University Press, Cambridge
- [147] W. Woess (2009). *Denumerable Markov chains. Generating functions, boundary theory, random walks on trees*. European Mathematical Society, Zürich