



# Autour de l'entropie des difféomorphismes de variétés non compactes

Felipe Riquelme

## ► To cite this version:

Felipe Riquelme. Autour de l'entropie des difféomorphismes de variétés non compactes. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Rennes 1, 2016. Français. <NNT : 2016REN1S021>. <tel-01386691>

**HAL Id: tel-01386691**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01386691>**

Submitted on 24 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par

**Felipe Riquelme**

Préparée à l'unité de recherche UMR CNRS 6625  
Institut de Recherche Mathématique de Rennes  
U.F.R. Mathématiques

---

**Autour de l'entropie  
des  
difféomorphismes de  
variétés non  
compactes**

Thèse rapportée par :

**François LEDRAPPIER**

DR CNRS à l'Université Pierre et Marie Curie /  
*rapporteur*

**Amie WILKINSON**

Professeur à l'Université de Chicago / *rapporteur*

**et soutenue à Rennes  
le 23 juin 2016**

devant le jury composé de :

**Pierre ARNOUX**

Professeur à l'Université Aix-Marseille / *examineur*

**Jérôme BUZZI**

DR CNRS à l'Université Paris Sud / *examineur*

**Christophe DUPONT**

Professeur à l'Université de Rennes 1 / *examineur*

**Sébastien GOUÉZEL**

DR CNRS à l'Université de Nantes / *examineur*

**François LEDRAPPIER**

DR CNRS à l'Université Pierre et Marie Curie /  
*rapporteur*

**Barbara SCHAPIRA**

Maîtresse de Conférences à l'Université de Rennes  
1 / *directrice de thèse*



A Noemí y Alejandro, mis padres.



“The ideal scientist thinks like a poet and only later works like a bookkeeper. Keep in mind that innovators in both literature and science are basically dreamers and storytellers. In the early stages of the creation of both literature and science, everything in the mind is a story. There is an imagined ending, and usually an imagined beginning, and a selection of bits and pieces that might fit in between. In works of literature and science alike, any part can be changed, causing a ripple among the other parts, some of which are discarded and new ones added. The surviving fragments are variously joined and separated, and moved about as the story forms. One scenario emerges, then another. The scenarios, whether literary or scientific in nature, compete with one another. Some overlap. Words and sentences (or equations or experiments) are tried to make sense of the whole thing. Early on, an end to all the imagining is conceived. It arrives at a wondrous denouement (or scientific breakthrough). But is it the best, is it true? To bring the end safely home is the goal of the creative mind. Whatever that might be, wherever located, however expressed, it begins as a phantom that rises, gains detail, then at the last moment either fades to be replaced, or, like the mythical giant Antaeus touching Mother Earth, gains strength. Inexpressible thoughts throughout flit along the edges. As the best fragments solidify, they are put in place and moved about, and the story grows until it reaches an inspired end.”

Fragment of “*Letters to a Young Scientist*”, by Edward O. Wilson.

“... you may not have as much talent as you think you have, but if you have the desire,  
your talent will find you.”

Al Pacino.

# Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à ma directrice de thèse Barbara Schapira. J'ai eu le plaisir (et la chance) d'avoir appris de son expérience, de sa sagesse, et surtout de son amour par les mathématiques. Je lui suis infiniment reconnaissante de sa patience, du temps dédié à mon travail, d'être toujours disponible à répondre des questions, même ceux d'aucun intérêt mathématique. Je le remercie aussi d'avoir lu et corrigé en détail toutes les démonstrations, les énoncés, les paragraphes et les accents de toutes les versions préliminaires de cette thèse, d'avoir recommandé effacer les phrases vagues et d'améliorer celles qui étaient potentiellement non vagues. Merci beaucoup Barbara d'avoir cru en moi même si je ne le faisais pas.

Je remercie chaleureusement François Ledrappier et Amie Wilkinson d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je tiens à remercier vivement Pierre Arnoux, Jérôme Buzzi, Christophe Dupont et Sébastien Gouëzel de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury.

Merci beaucoup à tous les professeurs qui ont pris le temps de discuter de maths avec moi, particulièrement Françoise Dal'bo, Ludovic Marquis, François Maucourant, Juan Souto et Samuel Tapie.

Un grand merci à tout l'équipe de théorie ergodique et aux participants du séminaire PAM-PERS pour la bonne disposition pour partager des connaissances. Mes remerciements s'adressent également à tous les membres de l'IRMAR. Les thésards, les professeurs et les membres administratifs ont été une partie très importante de mon développement professionnel et académique.

Mon développement mathématique en France n'aurait pas été possible sans l'appui initial pour réaliser mon Master 2 à Paris de l'Ambassade de France au Chili et la Fondation de Sciences Mathématiques de Paris. Merci beaucoup pour cela.

Un merci spécial à Pierre pour l'incroyable amitié de ces trois dernières années. J'espère te voir au Chili dans un moment futur de nos vies. Je remercie également à Alexandre, Adrien, Kamel et Olivier d'avoir l'initiative et la disposition de faire un super groupe de travail entre doctorants.

Merci aux joueurs de foot de (presque) tout vendredi.

Una parte fundamental de mi crecimiento como investigador se lo debo a Godofredo Iommi y Anibal Velozo, quienes siendo respectivamente profesor y amigo, se convirtieron en colaboradores y personas indispensables en mi vida matemática.

Quiero agradecer también a CONICYT por otorgarme la Beca-Chile, por permitir haber podido desarrollarme profesionalmente fuera de mi país natal. Gracias al programa de colaboración científica CNRS-CONICYT por financiar un productivo viaje de investigación a Chile. Muchísimas gracias también a la Pontificia Universidad Católica de Chile por otorgarme un espacio de trabajo cada vez que estuve de visita en sus dependencias. Gracias a Isabel Ramírez por todas las gestiones realizadas durante mi estadía en la Facultad de Matemáticas. Gracias a los equipos de Sistemas Dinámicos en Santiago y Valparaíso por invitarme a hablar sobre mis resultados cada vez que estuve en aquellas ciudades.

Muchas gracias a todos aquellos quienes formaron parte de mi vida cotidiana en Francia. Gracias Néstor, Andrés, Jesus David, Maycol y Carolina por las noches de FIFA, por las cervezas y la comida, por todas las conversaciones amenas que tuvimos. Gracias José Andrés por tu cordialidad, disposición y simpatía al momento de hablar de matemáticas. Gracias María por tus excelentes imitaciones de acentos latinos. Gracias también a Türkü por sus vibras positivas para mi defensa.

Como olvidar a Carolina Canales, quien se convirtió en una gran amiga y confidente. Gracias por darte el tiempo de conversar incluso cuando tenías mucho trabajo pendiente, por cada « crêpe » y



cada café en la Gare de Rennes. Gracias a ti y a Luco por la increíble hospitalidad en mis viajes a Paris.

Gracias Franco, Gabriel, Camila, Valeska, Erik, Mane, Rodrigo, Dani, José, Nico, Sebastián, Catalina y Nicolás, y Dealer\$ por estar siempre pendientes de mi futuro, por las despedidas y bienvenidas, en fin... por estar. Gracias Fabián y Nelda por la buena disposición y buena onda, espero que nuestros proyectos matemáticos lleguen a buen puerto.

I want to thank Neal Morse and Mike Portnoy. Both were a very important part of my research life since I spent almost every moment of my work listening their music.

Fernanda, nuestro amor surgió antes de viajar al otro lado del atlántico, pero fue necesaria la distancia para convertirnos en pareja. Es por ti que estoy donde estoy ahora, pudiendo defender luego de tres años, pues fuiste la motivación que necesitaba en los momentos más bajos y desesperanzadores de mi trabajo. Gran parte de esta tesis fue inspirada inesperadamente por nuestro amor. Te lo agradeceré por siempre.

Familia, ustedes mas que nadie saben lo difícil que fue dejar el hogar, dejar su compañía, dejar de estar presentes en los momentos claves de cada uno de nosotros. Pero estar lejos valió la pena, y estaría ciego si no creyera que estoy donde estoy gracias a ustedes. Ustedes han creído siempre en mí... esto es por ustedes.

# Table des matières

|  |            |
|--|------------|
| Table de matières  | I          |
| <b>0 Introduction</b>  | <b>III</b> |
| <b>1 Entropies</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 Concepts basiques  | 1          |
| 1.2 Entropie mesurée et entropie topologique   | 2          |
| 1.2.1 Entropie mesurée   | 2          |
| 1.2.2 Entropie topologique   | 4          |
| 1.3 Entropies de Katok   | 4          |
| 1.4 Entropies locales  | 8          |
| 1.5 Entropie riemannienne  | 16         |
| <b>2 Inégalité de Ruelle</b>   | <b>19</b>  |
| 2.1 Cadre général  | 19         |
| 2.2 Contre-exemples à l'inégalité de Ruelle  | 20         |
| 2.2.1 Préliminaires : flots de suspension et transformations d'échange d'intervalles dénombrable | 21         |
| 2.2.2 Constructions  | 24         |
| 2.2.3 Preuve du théorème 2.5   | 30         |
| 2.3 Inégalité de Ruelle pour difféomorphismes linéarisables                                      | 34         |
| 2.3.1 Limites asymptotiques  | 34         |
| 2.3.2 Une condition suffisante   | 39         |
| <b>3 Inégalité de Ruelle pour le flot géodésique</b>   | <b>41</b>  |
| 3.1 L'inégalité de Ruelle  | 41         |
| 3.2 La formule de Pesin  | 43         |
| 3.3 Conséquences   | 57         |
| <b>4 Perte de masse</b>  | <b>59</b>  |
| 4.1 Perte de masse : dynamique symbolique  | 59         |
| 4.1.1 Décalages de Markov  | 59         |
| 4.1.2 Flots de suspension  | 61         |
| 4.1.3 Perte de masse   | 62         |
| 4.2 Perte de masse : dynamique du flot géodésique  | 65         |
| 4.2.1 Préliminaires en géométrie et dynamique  | 65         |
| 4.2.2 Codage du flot géodésique  | 69         |
| 4.2.3 Un outil symbolique  | 75         |
| 4.2.4 Perte de masse   | 77         |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|  |           |
|--|-----------|
| 4.3 Conséquences . . . . .                     | 80        |
| <b>Annexe A Géométrie en courbure négative</b> | <b>81</b> |
| Concepts basiques . . . . .                    | 81        |
| Isométries . . . . .                           | 83        |
| <b>Références</b>                              | <b>84</b> |

# Chapitre 0

## Introduction

L'objet principal de cette thèse est l'étude de l'entropie des systèmes dynamiques différentiables définis sur des variétés riemanniennes non compactes. Nous abordons cette étude de plusieurs points de vue. D'abord, nous éclaircissons les liens entre différentes définitions possibles d'entropie dans ce cadre non compact. Ensuite, nous utilisons ces premiers résultats pour y étudier la validité de l'inégalité de Ruelle. Rappelons ici que cette inégalité, pour des difféomorphismes de variétés riemanniennes **compactes**, nous dit que l'entropie est majorée par la somme des exposants de Lyapounov positifs. Pour finir, nous montrons que dans certains cas l'entropie permet de contrôler le défaut de compacité. Plus précisément, nous montrons que l'entropie permet de contrôler la masse d'une limite de mesures de probabilité invariantes.

Rentrons un peu dans les détails. Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne et  $\mu$  une mesure de probabilité  $f$ -invariante sur  $M$ . L'entropie de  $f$  mesure « grosso modo » le taux de croissance exponentielle de la complexité de  $f$ . Introduite par Kolmogorov-Sinaï, l'entropie mesurée  $h_\mu(f)$  est définie par

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \int \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) d\mu(x),$$

où le supremum est pris parmi toutes les partitions mesurables finies  $\mathcal{P}$  de  $M$  et  $\mathcal{P}^n(x)$  est l'ensemble mesurable défini par

$$\mathcal{P}^n(x) = \{y \in M : f^i(x) \text{ et } f^i(y) \text{ sont dans le même atome de } \mathcal{P} \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Pour tout réel  $r > 0$  et tout entier  $n \geq 1$ , la  $(n, r)$ -boule dynamique autour de  $x \in M$  est l'ensemble  $B_n(x, r) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} B(f^i x, r)$ , où  $B(y, r)$  est une boule centrée en  $y \in M$  de rayon  $r$  pour la distance riemannienne sur  $M$ . Un  $(n, r)$ -recouvrement d'un ensemble  $A \subset M$  est un recouvrement de  $A$  par des  $(n, r)$ -boules dynamiques.

Si  $M$  est une variété riemannienne compacte, alors il existe plusieurs définitions d'entropie d'une mesure ergodique qui coïncident.

- (★) Katok [Kat80] a montré que pour tout  $0 < \delta < 1$ , l'entropie mesurée coïncide avec le taux de croissance exponentielle du cardinal minimal  $N_\mu(n, r, \delta)$  d'un  $(n, r)$ -recouvrement d'un ensemble de  $\mu$ -mesure plus grande que  $1 - \delta$ , c'est-à-dire

$$h_\mu^\delta(f) := \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, r, \delta) = h_\mu(f).$$

- (★) Brin et Katok [BK83] ont montré que l'entropie mesurée coïncide aussi  $\mu$ -presque partout avec le taux de décroissance exponentielle de la  $\mu$ -mesure d'une boule dynamique, c'est-à-dire

$$\underline{h}_\mu^{\text{loc}}(f) := \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)) = h_\mu(f).$$

---

Une partie de ce travail concerne l'étude des relations entre  $h_\mu(f)$ ,  $h_\mu^\delta(f)$  et  $h_\mu^{loc}(f)$ . Nous donnons en particulier des conditions sur  $f$  pour que l'égalité entre ces trois entropies soit toujours valable lorsque la variété n'est plus compacte.

Le point de départ de notre travail a été d'essayer de comprendre dans quelle mesure l'inégalité de Ruelle reste vraie dans le cas non compact. Rappelons que si  $\mu$  satisfait  $\log \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ , alors le théorème de Oseledets [Ose68] nous assure que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$  il existe une décomposition finie de  $T_x M$  en  $T_x M = \bigoplus_{i=1}^{l(x)} E_i(x)$ , et des nombres  $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^{l(x)}$  (appelés *exposants de Lyapounov*), tels que pour tout vecteur  $v \in E_i(x) \setminus \{0\}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_x f^n(v)\| = \lambda_i(x).$$

Ainsi, la dynamique de  $df : TM \rightarrow TM$  se décompose  $\mu$ -presque partout en directions exponentiellement dilatantes ou contractantes. Observons en particulier que si  $\|df^{\pm 1}\|$  est bornée, alors toute mesure de probabilité invariante admet une telle décomposition. Étant donné un difféomorphisme  $C^1$  d'une variété compacte, Ruelle [Rue78] a montré que l'entropie mesurée du difféomorphisme est majorée par le taux de croissance exponentielle sa différentielle. Plus précisément, pour toute mesure de probabilité  $f$ -invariante  $\mu$ , l'entropie mesurée de  $f$  est majorée par la somme des exposants de Lyapounov positifs, c'est-à-dire

$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)) d\mu(x).$$

Si  $M$  est une variété non compacte et  $f : M \rightarrow M$  est un difféomorphisme pour lequel toutes ces quantités sont bien définies, la question de la validité de cette inégalité se pose donc naturellement. À notre connaissance, cette approche n'a été considérée que dans le cadre d'un difféomorphisme  $g : N \rightarrow N$  de classe  $C^2$  d'une variété riemannienne compacte qui admet des singularités. Plus précisément, si  $M \subset N$  est une sous-variété ouverte dense et  $S = N \setminus M$  est l'ensemble de singularités de  $g$ , alors l'application  $f = g|_M$  est un  $C^2$ -difféomorphisme d'une variété riemannienne (pas forcément compacte) sur son image. Dans [KSLP] les auteurs montrent que sous certaines hypothèses techniques<sup>1</sup>, l'inégalité de Ruelle par rapport à  $f$  est satisfaite.

Nous démontrons trois résultats principaux. Le premier est l'existence de contre-exemples à l'inégalité de Ruelle. Le deuxième établit que l'entropie vérifie cette inégalité dans le cas particulier du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne à courbure négative pincée. Le dernier résultat donne des conditions sur un difféomorphisme abstrait pour que l'inégalité de Ruelle soit satisfaite.

La dernière partie de cette thèse est consacrée au problème de *perte de masse* d'une suite de mesures de probabilité, c'est-à-dire à l'étude de la masse d'une limite vague d'une telle suite. Ce problème a déjà été étudié récemment par Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh [ELMV12] dans le cadre du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la surface modulaire (nous renvoyons à [EK12],[Kad12] et [EKP15] pour d'autres résultats liés à la perte de masse). Ils montrent « grosso modo » qu'une suite de mesures de grande entropie ne peut pas perdre trop de masse. De plus, la perte de masse se quantifie précisément en termes de la géométrie de la partie non compacte de la surface modulaire.

Dans le même esprit, nous étudions le problème de perte de masse dans le cadre du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété de Schottky généralisée (au sens de Dal'bo-Peigné [DP98]). Nous retrouvons le phénomène qui apparaît dans la surface modulaire; la perte de masse est liée précisément à la géométrie de la partie non compacte de la variété.

**Énoncé des résultats.** Nous donnons ici les énoncés précis de nos principaux résultats dans un

---

<sup>1</sup>. Toutes ces hypothèses sont vérifiées dans le cas où  $S$  est un ensemble vide. Dans ce cas la variété  $M$  est compacte.

cadre relativement simple : difféomorphismes de classe  $C^1$  de variétés non compactes. Nous renvoyons au corps du texte pour des énoncés plus généraux. Nous donnons aussi les grandes lignes de leurs démonstrations<sup>2</sup>.

En ce qui concerne les différentes notions d'entropie, nous généralisons les résultats de Katok [Kat80] et Brin-Katok [BK83] dans le cadre des difféomorphismes définis sur de variétés non compactes (voir aussi théorèmes 1.32 et 1.42).

**Théorème A.** *Soit  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme  $C^1$  d'une variété riemannienne complète tel que  $\|df\|$  est bornée. Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante ergodique sur  $M$ . Alors pour tout  $0 < \delta < 1$ , on a*

$$h_\mu(T) = \underline{h}_\mu^\delta(T) = \underline{h}_\mu^{\text{loc}}(T).$$

*Idée de la preuve.*

- (i) Les inégalités  $h_\mu(T) \leq \underline{h}_\mu^\delta(T)$  et  $h_\mu(T) \leq \underline{h}_\mu^{\text{loc}}(T)$  découlent respectivement de [Kat80] et [BK83].
- (ii) L'inégalité  $h_\mu(T) \geq \underline{h}_\mu^{\text{loc}}(T)$  s'obtient en suivant la méthode de [Led13].
- (iii) L'inégalité  $h_\mu(T) \geq \underline{h}_\mu^\delta(T)$  s'obtient en montrant l'inégalité suivante (voir théorème 1.41)

$$\underline{h}_\mu^\delta(T) \leq \text{ess sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)),$$

où  $K \subset M$  est un compact de mesure strictement positive et  $1 - \mu(K)^2 < \delta < 1$ , plus le fait que le terme de droite est majoré par  $h_\mu(T)$ . □

Nous proposons encore une autre définition d'entropie qui nous sera très utile plus tard (voir définition 1.37 et théorème 1.40). Notons « *vol* » le volume riemannien sur  $M$ . L'entropie riemannienne  $h_\mu^{\text{vol}}(f)$  est définie par

$$h_\mu^{\text{vol}}(f) = \sup_K \text{ess sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ f^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(B_n(x, r)),$$

où le supremum est pris sur tous les sous-ensembles compacts de  $M$  de  $\mu$ -mesure strictement positive. Observons que l'unique endroit dont la mesure  $\mu$  apparaît dans la définition de  $h_\mu^{\text{vol}}(f)$  est dans le supremum essentiel.

**Théorème B.** *Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme  $C^1$  d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante ergodique. Alors*

$$h_\mu(f) \leq h_\mu^{\text{vol}}(f).$$

*Idée de la preuve.* L'inégalité désirée découle du théorème A et d'une estimation astucieuse, à partir des volumes des boules dynamiques, du cardinal minimal  $N_\mu(n, r, \delta)$  d'un  $(n, r)$ -recouvrement d'un ensemble de mesure plus grande que  $1 - \delta$ . □

La non-compactité d'une variété riemannienne se traduit par l'existence de systèmes dynamiques lisses qui ne satisfont pas l'inégalité de Ruelle (voir aussi théorème 2.5).

**Théorème C.** *Soit  $h \in ]0, \infty]$ . Alors il existe une variété riemannienne non compacte  $(M, g)$ , un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  et une mesure borélienne  $\mu$  de probabilité  $f$ -invariante, tels que :*

---

2. Certains résultats sont énoncés de manière plus simple pour éviter les détails techniques dans cette introduction.

- 
- (1) l'entropie mesurée  $h_\mu(f)$  satisfait  $h_\mu(f) = h$ ,
  - (2) les applications  $x \mapsto \log^+ \|d_x f\|$  et  $x \mapsto \log^+ \|d_x f^{-1}\|$  sont  $\mu$ -intégrables, et
  - (3) les exposants de Lyapounov sont tous  $\mu$ -presque partout nuls.

En particulier, on a

$$0 = \int \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)) d\mu(x) < h_\mu(f) \leq \infty.$$

*Idée de la preuve.*

- (i) D'après [AOW85, Theorem 2] il existe une transformation d'échange d'intervalles dénombrable  $T : I \rightarrow I$  d'entropie mesurée  $h_m(T) = h$ , où  $I = [0, 1[$  et  $m$  est la mesure de Lebesgue sur  $I$ .
- (ii) On construit un espace topologique  $M$  à partir d'un flot de suspension au-dessus de  $(I, T)$ . La mesure de probabilité invariante considérée sur  $M$  est la mesure de Lebesgue normalisée restreinte à  $M$ .
- (iii) La fonction plafond de la suspension  $\tau : I \rightarrow [1, \infty]$  est lisse par morceaux, infinie aux discontinuités de  $T$ , avec singularités logarithmiques. Elle satisfait

$$\frac{1}{n} \log \left( \sum_{i=0}^{n-1} |\tau'(T^i x)| \right) \rightarrow 0$$

$m$ -presque partout lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Cela signifie que la croissance de la distorsion du flot de suspension est sous-exponentielle.

- (iv) L'espace topologique  $M$  admet une structure de variété lisse et une « bonne »<sup>3</sup> métrique riemannienne.
- (v) Le temps 1 du flot de suspension satisfait l'hypothèse du théorème d'Oseledecs pour la métrique construite. De plus, la propriété du plafond ci-dessus permet de montrer que les exposants de Lyapounov associés à cette métrique sont tous nuls presque partout.
- (vi) D'après la formule d'Abramov il existe un temps du flot de suspension d'entropie mesurée égale à  $h$  alors que les exposants de Lyapounov de cette application sont presque partout nuls.

□

Nous définissons des boules dynamiques pour la dynamique de  $df : TM \rightarrow TM$  de manière analogue aux boules dynamiques pour la dynamique de  $f$ . Pour tout réel  $r > 0$  suffisamment petit et tout entier  $n \geq 1$ , la  $(n, r)$ -boule dynamique linéarisée centrée en  $x \in M$  est l'ensemble  $\mathcal{C}_n(x, r)$  défini par

$$\mathcal{C}_n(x, r) = \exp_x \left( \bigcap_{i=0}^{n-1} (d_x f^i)^{-1} (B_{f^i x}(0, r)) \right),$$

où  $B_x(0, r) \subset T_x M$  est une boule centrée en  $0 \in T_x M$  de rayon  $r$  par rapport à la métrique riemannienne. Le théorème A dit que l'entropie mesurée peut être interprétée comme le taux de décroissance exponentielle de la mesure d'une boule dynamique générique. Par ailleurs, le théorème D ci-dessous permet de retrouver la somme des exposants de Lyapounov positifs comme le taux de décroissance exponentielle des volumes des boules dynamiques linéarisées. Autrement dit, la somme des exposants de Lyapounov positifs peut être interprétée comme une notion d'entropie pour la dynamique de  $df$  (voir théorème 2.31).

---

3. L'adjectif « bonne » vient du fait que la métrique riemannienne construite est localement comparable avec une métrique euclidienne. Ainsi, la norme de la différentielle du temps unité du flot de suspension est plus simple à estimer. En effet, elle est comparable avec la distorsion  $|\tau'|$  du plafond (voir proposition 2.18).

---

**Théorème D.** Soit  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme  $C^1$  d'une variété riemannienne complète tel que  $\|df^{\pm 1}\|$  est bornée. Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante sur  $M$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(\mathcal{C}_n(x, r)) = \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(\mathcal{C}_n(x, r)) = \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)).$$

*Idée de la preuve.* Le volume d'une boule dynamique linéarisée est estimé à partir du volume des parallélépipèdes dans  $T_x M$  et du fait qu'il existe des directions dilatantes et contractantes pour la dynamique de  $df$  (voir lemme 2.33).  $\square$

Le théorème D donne envie de comparer les limites asymptotiques avec l'entropie riemannienne puisque elles sont similaires à  $h_\mu^{\text{vol}}$  pour  $df$  au lieu de  $f$ . En fait, lorsque les boules dynamiques « classiques » sont uniformément comparables avec les boules dynamiques linéarisées, on obtient l'inégalité de Ruelle (voir aussi théorème 2.37) :

**Théorème E.** Soit  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme  $C^1$  d'une variété riemannienne complète tel que  $\|df\|$  est bornée. Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante sur  $M$ . S'il existe une constante  $0 < \rho < 1$  tel que  $\mathcal{C}_n(x, \rho r) \subset B_n(x, r)$  pour tout  $x \in M$ , alors

$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)) d\mu(x).$$

*Idée de la preuve.* La conclusion découle des théorèmes B et D.  $\square$

La condition  $\mathcal{C}_n(x, \rho r) \subset B_n(x, r)$  dans l'énoncé du théorème E est très difficile à vérifier, même pour un difféomorphisme Anosov d'une variété riemannienne compacte. Dans un cadre plus particulier, celui du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne à courbure négative pincée, nous avons obtenu l'inégalité de Ruelle par une autre méthode (voir aussi théorème 3.4).

**Théorème F.** Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Alors pour toute mesure de probabilité  $(g_t)$ -invariante  $\mu$  sur  $T^1 X$ , on a

$$h_\mu(g) \leq \int \sum_{\lambda_j(v) > 0} \lambda_j(v) \dim(E_j(v)) d\mu(v).$$

*Idée de la preuve.*

- (i) D'abord, nous utilisons le théorème A pour majorer l'entropie mesurée à travers le volume de boules dynamiques  $\mu$ -typiques.
- (ii) Ensuite, la propriété de Gibbs de la mesure de Liouville permet d'estimer le volume d'une boule dynamique en termes des moyennes ergodiques du jacobien du flot géodésique dans les directions instables (voir proposition 3.3).
- (iii) Finalement, les moyennes ergodiques du jacobien convergent vers la somme des exposants de Lyapounov positifs (voir proposition 3.2).

$\square$

Une fois que l'inégalité de Ruelle est obtenue, il est intéressant d'étudier le cas d'égalité. Dans le cas d'un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^{1+\alpha}$  d'une variété riemannienne compacte, qui laisse invariante une mesure de probabilité  $\mu$ , nous rappelons les résultats suivants.

- (\*) Y. Pesin [Pes77] a montré que lorsque  $\mu$  est une mesure absolument continue par rapport à la mesure riemannienne sur  $M$ , alors l'entropie de  $\mu$  coïncide avec la somme des exposants de Lyapounov positifs. Cette formule est connue comme « formule de Pesin ».



- (★) F. Ledrappier et J.-M. Strelcyn [LS82] ont généralisé le cas d'égalité aux mesures absolument continues sur les variétés instables.
- (★) F. Ledrappier [Led84a] a montré qu'une mesure de probabilité  $f$ -invariante **hyperbolique**  $\mu$  vérifie la formule de Pesin si et seulement si elle a des mesures absolument continues sur les variétés instables.
- (★) F. Ledrappier et L.-S. Young [LY85a] ont étendu l'équivalence précédente à n'importe quelle mesure de probabilité  $f$ -invariante.

Nous prenons inspiration des démonstrations des résultats ci-dessus pour obtenir un résultat analogue pour le flot géodésique (voir aussi théorème 3.10).

**Théorème G.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $T^1X$ . Alors  $\mu$  a des mesures conditionnelles absolument continues sur les variétés instables, si et seulement si, on a*

$$h_\mu(g) = \int \sum_{\lambda_j(v) > 0} \lambda_j(v) \dim(E_j(v)) d\mu(v).$$

*Idée de la preuve.* Nous utilisons les méthodes de Ledrappier-Strelcyn [LS82], Ledrappier [Led84a] et Ledrappier-Young [LY85a] adaptées au cadre du flot géodésique en suivant les idées de Otal-Peigné [OP04] et Paulin-Pollicott-Schapira [PPS12].  $\square$

Avant de décrire nos derniers résultats, rappelons en quoi consiste le problème de perte de masse. Soit  $X$  un espace topologique séparé localement compact. Une suite de mesures  $(\nu_n)$  sur  $X$  converge vaguement vers une mesure  $\nu$ , noté  $\nu_n \rightarrow \nu$ , si pour toute fonction continue à support compact  $f \in C_c^0(X)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\nu_n \rightarrow \int f d\nu.$$

Observons que si  $X$  est compact, alors la topologie de la convergence vague coïncide avec celle de la convergence étroite<sup>4</sup>. En particulier, toute limite vague d'une suite de mesures de probabilité sur  $X$  est une mesure de probabilité (donc la masse de toute limite vague est égale à 1). En revanche, si  $X$  n'est plus compact, alors la masse d'une telle limite vague est dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

Nous parlons du problème de *perte de masse* lorsque nous essayons d'estimer ou calculer la masse d'une limite vague d'une suite de mesures de probabilité. La dernière partie de notre travail consiste précisément à estimer la masse d'une limite vague d'une suite de mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne à courbure négative pincée.

Considérons d'abord le flot géodésique sur  $T^1S = PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ , où  $S$  est la surface modulaire. D'après [ELMV12, Theorem 5.1], si  $(\nu_n)$  est une suite de mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes sur  $T^1S$  telle que  $h_{\nu_n}(g) \geq c > 1/2$ , alors toute limite vague  $\nu$  de  $(\nu_n)$  satisfait  $\nu(T^1S) \geq 2c - 1$ . En particulier, le nombre  $1/2$  est une sorte de valeur critique du point de vue de la non-perte de masse. Nous montrons ce même type de phénomène dans le cadre de variétés riemanniennes dites de type  $(\star)$ -Schottky (voir définition 4.37). Tout d'abord, introduisons quelques notations.

Soient  $\tilde{X}$  une variété riemannienne complète simplement connexe à courbures sectionnelles négatives pincées et  $\Gamma < \text{Isom}(\tilde{X})$  un sous-groupe Kleinien d'isométries de  $\tilde{X}$ . Notons  $X = \tilde{X}/\Gamma$  la variété riemannienne quotient. D'après Otal-Peigné [OP04], lorsque les dérivées partielles des courbures sectionnelles sont uniformément bornées, l'entropie topologique du flot géodésique sur  $T^1X$  coïncide avec l'exposant critique  $\delta_\Gamma$  de  $\Gamma$ , c'est-à-dire

$$h_{top}(g) = \delta_\Gamma := \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \#\{\gamma \in \Gamma : d(o, \gamma o) \leq R\},$$

où  $o \in \tilde{X}$  est n'importe quel point de  $\tilde{X}$ .

4. La topologie de la convergence étroite consiste à considérer les fonctions continues bornées au lieu des fonctions continues à support compact.

---

Dans le cadre de la surface modulaire, la valeur  $1/2$  représente l'exposant critique de n'importe quel sous-groupe parabolique de  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . Par ailleurs, les sous-groupes paraboliques sont liés à la géométrie autour de l'infini. En effet, le cusp de  $S$  est isométrique au quotient d'une horoboule centrée en un point fixe parabolique, par l'action d'un sous-groupe parabolique fixant ce point.

Notons  $\delta_{\mathcal{P}, max}$  le plus grand exposant critique parmi les sous-groupes paraboliques de  $\Gamma$ , c'est-à-dire

$$\delta_{\mathcal{P}, max} = \max\{\delta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ sous-groupe parabolique de } \Gamma\}.$$

**Théorème H.** *Soit  $X = \tilde{X}/\Gamma$  une variété riemannienne de type  $(\star)$ -Schottky. Alors pour tout  $h > \delta_{\mathcal{P}, max}$  il existe une constante  $m = m(h) > 0$  avec la propriété suivante : Si  $(\nu_n)$  est une suite de mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes ergodiques sur  $T^1X$  satisfaisant  $h_{\nu_n}(g) \geq h$ , alors pour toute limite vague  $\nu$  de  $(\nu_n)$ , on a*

$$\nu(T^1X) \geq m.$$

*De plus, la valeur  $\delta_{\mathcal{P}, max}$  est optimale dans le sens suivant : il existe une suite  $(\nu_n)$  de mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes sur  $T^1X$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(g) = \delta_{\mathcal{P}, max} \quad \text{et} \quad \nu_n \rightarrow 0.$$

*Idée de la preuve.*

- (i) Nous montrons un résultat sur la non-perte de masse pour le cas d'un flot de suspension au-dessus d'un décalage de Markov dénombrable.
- (ii) Le flot géodésique est codé comme un flot de suspension au-dessus d'un décalage de Markov d'après Dal'bo-Peigné [DP98].
- (iii) La non-perte de masse pour le flot géodésique est une conséquence des deux points précédents.
- (iv) L'optimalité de  $\delta_{\mathcal{P}, max}$  suit de la construction géométrique d'une suite de groupes Kleiniens dont les exposants critiques convergent vers  $\delta_{\mathcal{P}, max}$ . Les mesures d'entropie maximal du flot géodésique associées projetées sur  $T^1X$  conservent l'entropie alors que elles convergent vaguement vers la mesure 0.

□

Le théorème H (voir aussi théorème 4.40) est donc analogue au cas de la surface modulaire au sens que l'exposant critique parabolique maximal représente aussi la valeur critique de la non-perte de masse.

**Plan de la thèse.** Le corps de cette thèse se décompose en 4 chapitres.

- ( $\star$ ) Dans le chapitre 1 nous décrivons les principales notions d'entropie et ses respectives relations. Nous démontrons les théorèmes A et B.
- ( $\star$ ) Dans le chapitre 2 nous nous consacrons à l'inégalité de Ruelle pour un difféomorphisme  $C^1$  abstrait d'une variété non compacte. Nous démontrons les théorèmes C, D et E.
- ( $\star$ ) Dans le chapitre 3 nous étudions le cas du flot géodésique et la validité de l'inégalité de Ruelle et la formule de Pesin pour ce système dynamique. Nous démontrons les théorèmes F et G.
- ( $\star$ ) Dans le chapitre 4 nous travaillons sur le problème de la perte de masse dans le cadre d'un flot de suspension au-dessus d'un décalage de Markov dénombrable et du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété de type  $(\star)$ -Schottky. Nous démontrons le théorème H.

Finalement, à la fin du texte nous mettons une annexe qui contient une brève introduction sur quelques concepts basiques de la géométrie en courbure négative.

---

**Remarques.** La plupart des résultats de cette thèse sont rédigés dans 3 articles soumis par publication [Riq15], [Riq16] et [IRV15].

Le théorème C est démontré dans [Riq15]. Les théorèmes A, B, D, E, F et G sont démontrés dans [Riq16]. Finalement, le chapitre 4 (donc le théorème H) se trouve dans [IRV15], en collaboration avec Godofredo Iommi et Anibal Velozo .



# Chapitre 1

## Entropies

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la complexité des systèmes dynamiques. Du point de vue de la mesure, nous étudierons l'entropie au sens de Kolmogorov-Sinai, aussi appelée *entropie mesurée*. Du point de vue topologique, nous étudierons la complexité d'une transformation continue au sens de Bowen sur un espace topologique métrisable. En nous inspirant par des résultats de Katok et Brin-Katok, nous verrons que ces notions sont étroitement liées les unes aux autres.

### 1.1 Concepts basiques

Commençons par rappeler plusieurs concepts basiques en théorie ergodique. Un système dynamique mesuré est un 4-uplet  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , où  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace de Lebesgue et  $T : X \rightarrow X$  est une transformation mesurable qui préserve la mesure  $\mu$ . Pour étudier la dynamique de  $T$ , il est toujours intéressant de travailler sur le concept d'ergodicité.

**Définition 1.1.** *Un système dynamique mesuré  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  est dit ergodique si tout ensemble  $T$ -invariant  $A \in \mathcal{B}$  satisfait  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ .*

L'avantage des systèmes dynamiques ergodiques est le fait que tout système dynamique mesuré se décompose en systèmes dynamiques ergodiques grâce au théorème de décomposition ergodique (voir par exemple [EW11, Theorem 6.2]).

**Théorème 1.2** (Théorème de décomposition ergodique). *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. Alors il existe une famille  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  de mesures de probabilité  $T$ -invariantes ergodiques sur  $X$ , telle que*

$$\mu = \int \mu_x d\mu(x).$$

Le long de cette thèse nous utiliserons plusieurs propriétés équivalentes à l'ergodicité. Nous renvoyons à [Wal82, Section 1.5] pour des démonstrations.

**Proposition 1.3** (Ergodicité). *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes*

- (1) *Le système dynamique  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  est ergodique.*
- (2) *Toute fonction  $f \in L^p(\mu)$ , avec  $p \geq 1$ , qui est  $T$ -invariante, est constante  $\mu$ -presque partout.*
- (3) *Pour tout  $A, B \in \mathcal{B}$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-i}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

- (4) *Pour tout  $f, g \in L^2(\mu)$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int f(g \circ T^i) d\mu = \left( \int f d\mu \right) \left( \int g d\mu \right).$$

L'une des pierre fondamentales dans la théorie ergodique est le théorème ergodique de Birkhoff (voir [Wal82, Theorem 1.14]). Ses conséquences seront désormais largement utilisées.

**Théorème 1.4** (Théorème ergodique de Birkhoff). *Soient  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré et  $f \in L^1(\mu)$ . Alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \xrightarrow{a.e.} f^*,$$

avec  $f^* \in L^1(\mu)$ . De plus, la fonction  $f^*$  est  $T$ -invariante et

$$\int f^* d\mu = \int f d\mu.$$

En particulier, le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que si  $\mu$  est une mesure ergodique, alors les moyennes ergodiques  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$  convergent vers une constante  $\mu$ -presque partout. Cette constante est égale à  $\int f d\mu$  d'après la dernière conclusion du théorème.

## 1.2 Entropie mesurée et entropie topologique

Dans cette section nous rappelons rapidement les notions d'entropie mesurée et d'entropie topologique. La première est l'objet par excellence à considérer pour quantifier la complexité d'un système dynamique mesuré. Toutes les autres notions d'entropie au sens de la mesure, qui seront plus tard définies, lui seront comparées. La deuxième est indépendante de la première (ne dépend que de la topologie) et on ne l'utilisera que dans le Chapitre 4. Par contre, on va tirer parti de sa définition pour introduire les autres notions d'entropie en mesure, particulièrement les  $\delta$ -entropies de Katok (voir Section 1.3).

### 1.2.1 Entropie mesurée

Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espace de Lebesgue. Une collection finie ou dénombrable  $\mathcal{P}$  d'ensembles mesurables est une *partition mesurable* si les éléments de  $\mathcal{P}$  sont deux à deux disjoints et leur réunion est un ensemble de  $\mu$ -mesure pleine. On note  $\mathcal{P}(x)$  l'élément de  $\mathcal{P}$  contenant un point  $x \in X$ .

**Définition 1.5.** *Soit  $\mathcal{P}$  une partition mesurable finie ou dénombrable de  $X$ . L'entropie de  $\mathcal{P}$ , notée  $H_\mu(\mathcal{P})$ , est définie par*

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P).$$

De manière analogue, on peut définir l'entropie d'une partition relativement à une autre partition. Soit  $\mathcal{Q}$  une partition mesurable de  $X$ . Si  $x \in X$  satisfait  $\mu(\mathcal{Q}(x)) > 0$ , on note  $\mu_{\mathcal{Q}(x)}$  la *mesure conditionnelle* de  $\mu$  sur l'atome  $\mathcal{Q}(x)$ , définie par

$$\mu_{\mathcal{Q}(x)} = \frac{1}{\mu(\mathcal{Q}(x))} \mu|_{\mathcal{Q}(x)}.$$

**Définition 1.6.** *Soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux partitions mesurables. L'entropie de  $\mathcal{P}$  relativement à  $\mathcal{Q}$ , notée  $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$ , est définie par*

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(Q) H_{\mu_Q}(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(P \cap Q) \log \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)}.$$

Sur l'ensemble de partitions on peut mettre un ordre partiel. On dit que  $\mathcal{P}$  est plus fine que  $\mathcal{Q}$ , notée  $\mathcal{Q} \leq \mathcal{P}$ , si pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , on a  $\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{Q}(x)$ . À partir de deux partitions mesurables arbitraires on peut toujours trouver une partition plus fine. Soit  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  la partition mesurable de  $X$  définie comme étant la partition dont les éléments sont toutes les intersections

possibles entre les éléments de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Par construction, on a bien que  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \leq \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ . Si l'on a une collection finie de partitions de  $X$ , disons  $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\}$ , alors on note  $\bigvee_{i=1}^n \mathcal{P}_i$  la partition

$$\bigvee_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \dots \vee \mathcal{P}_n.$$

Soit  $T : X \rightarrow X$  une transformation mesurable. Si  $\mathcal{P}$  est une partition mesurable finie ou dénombrable, alors la partition  $T^{-i}\mathcal{P} = \{T^{-i}P : P \in \mathcal{P}\}$  l'est aussi. Pour simplifier, on note  $\mathcal{P}^n$  la partition  $\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P}$ .

**Proposition 1.7.** *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. Alors pour toute partition mesurable  $\mathcal{P}$  d'entropie finie, la limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n)$$

*existe.*

La proposition ci-dessus permet de définir l'entropie d'une transformation relativement à une partition (voir [Wal82, Corollary 4.9.1]).

**Définition 1.8.** *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. Alors pour toute partition mesurable  $\mathcal{P}$  d'entropie finie, on définit l'entropie de  $T$  relativement à  $\mathcal{P}$ , notée  $h_\mu(T, \mathcal{P})$ , par*

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

Parfois il est préférable de manipuler l'entropie en l'interprétant comme la limite d'entropies conditionnelles (voir [Wal82, Theorem 4.14]).

**Proposition 1.9.** *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. Alors pour toute partition mesurable  $\mathcal{P}$  d'entropie finie, on a*

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_\mu \left( \mathcal{P} \middle| \bigvee_{i=1}^n T^{-i}\mathcal{P} \right).$$

Pour les systèmes dynamiques ergodiques il est plus facile de voir l'entropie comme une valeur qui permet de mesurer la complexité d'un système dynamique. L'intuition nous dit que les atomes d'une partition  $\mathcal{P}^n$  sont « très petits » en mesure s'il y a plus de chaos. Cette intuition est confirmée par le théorème de Shannon-McMillan-Breiman.

**Théorème 1.10** (Shannon-McMillan-Breiman). *Soient  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré ergodique et  $\mathcal{P}$  une partition mesurable de  $X$  d'entropie finie. Alors, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , on a*

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)).$$

Maintenant qu'on comprend mieux d'où vient la notion d'entropie d'une transformation relativement à une partition, on peut définir l'entropie d'une transformation.

**Définition 1.11.** *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. L'entropie mesurée de  $T$ , notée  $h_\mu(T)$ , est définie par*

$$h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(T, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition finie}\}.$$

Calculer l'entropie à partir de la définition est en général assez compliqué. Le résultat suivant nous sera très utile dans la suite. Nous renvoyons à [Wal82, Théorème 4.22] pour une démonstration. Notons  $\sigma(\mathcal{P})$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par la partition  $\mathcal{P}$ .

**Théorème 1.12.** *Soient  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré et  $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$  une suite de partitions finies telle que  $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2 \leq \dots \leq \mathcal{P}_n \leq \dots$  et  $\sigma(\bigcup_n \mathcal{P}_n) = \mathcal{B} \pmod{0}$ . Alors*

$$h_\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_\mu(T, \mathcal{P}_n).$$

Nous finissons cette section par un résultat de Jacobs [Wal82, Théorème 8.4]. Il nous dit que pour mesurer la complexité d'un système dynamique, il suffit de travailler sur les composantes ergodiques. Plus précisément, on a

**Théorème 1.13** (Jacobs). *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. Si  $\mu = \int \mu_x d\mu(x)$  est la décomposition ergodique de  $\mu$ , alors*

$$h_\mu(T) = \int h_{\mu_x} d\mu(x).$$

### 1.2.2 Entropie topologique

Considérons maintenant un espace topologique métrisable<sup>1</sup>  $X$  et  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue. Soit  $d$  une distance sur  $X$  qui induit la topologie de  $X$ . On va étudier la dynamique de  $T$  relativement à  $d$  en étudiant la « taille » des ensembles de points qui restent proche le long du temps. Pour tout  $n \geq 0$  on note  $d_n$  la distance dynamique de Bowen définie par

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i x, T^i y),$$

pour tous  $x, y \in X$ . Pour tout  $x \in X$  on notera  $B_n(x, r)$  la boule de rayon  $r$  centrée en  $x$  pour la distance  $d_n$ . Une telle boule s'appelle  $(n, r)$ -boule dynamique (ou  $(n, r)$ -boule de Bowen).

Soit  $A \subset X$  un ensemble mesurable. Un  $(n, r)$ -recouvrement de  $A$  est un recouvrement de  $A$  par des  $(n, r)$ -boules dynamiques. Soit  $K \subset X$  un ensemble compact. On note  $N(n, r, K)$  le plus petit cardinal d'un  $(n, r)$ -recouvrement de  $K$ . La continuité de  $T$  implique que les boules dynamiques sont des ensembles ouverts. En particulier, puisque  $K$  est compact, le cardinal  $N(n, r, K)$  est fini.

**Définition 1.14.** *Soit  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace topologique. Pour toute distance  $d$  qui induit la topologie de  $X$ , on définit l'entropie de  $T$  relativement à la distance  $d$ , notée  $h^d(T)$ , par*

$$h^d(T) = \sup_K \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, r, K),$$

où le supremum est pris sur tous les sous-ensembles compacts de  $X$ . L'entropie topologique de  $T$ , notée  $h_{top}(T)$ , est définie par

$$h_{top}(T) = \inf_d h^d(T),$$

où l'infimum est pris sur toutes les distances  $d$  qui induisent la topologie de  $X$ .

Si  $T : X \rightarrow X$  est une transformation continue d'un espace compact, alors la valeur  $h^d(T)$  est indépendante de la distance et le supremum dans la définition est atteint pour le compact  $K = X$ . Si  $X$  n'est plus compact, alors le supremum des entropies  $h^d(T)$  est en général infini, ce qui motive considérer tout simplement l'infimum (voir [HK95]).

**Théorème 1.15** (Principe variationnel). *Soit  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace topologique localement compact. Alors*

$$h_{top}(T) = \sup_\mu h_\mu(T),$$

où le supremum est pris parmi toutes les mesures de probabilité  $T$ -invariantes sur  $X$ .

## 1.3 Entropies de Katok

Le principe variationnel nous dit que l'entropie mesurée est inférieure ou égale à l'entropie topologique. Dans cette section on se base sur la définition d'entropie topologique pour définir une nouvelle notion d'entropie, qui dépend de la mesure et la distance, et qui est aussi un majorant de l'entropie mesurée. Nous remarquons que cette nouvelle entropie a été définie par Katok dans

---

1. Dans ce manuscrit nous supposons toujours que cet espace est polonais.



[Kat80] dans le cas où  $X$  est un espace métrique compact.

Soient  $X$  un espace topologique métrisable,  $d$  une distance qui définit la topologie sur  $X$ ,  $T : X \rightarrow X$  une application continue et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante sur  $X$ .

**Définition 1.16.** *Si  $K$  est un sous-ensemble compact de  $X$ , on note*

- (i)  $N(n, r, K)$  le cardinal minimal d'un recouvrement de  $K$  par des  $(n, r)$ -boules dynamiques centrées en  $K$ , et
- (ii)  $S(n, r, K)$  le cardinal maximal d'un ensemble  $(n, r)$ -séparé dans  $K$ , c'est-à-dire un sous-ensemble de  $K$  dont deux éléments distincts quelconques sont à  $d_n$ -distance plus grande que  $r$ .

**Lemme 1.17.** *Pour tout  $K \subset X$  compact, on a*

$$N(n, r, K) \leq S(n, r, K) \leq N(n, r/2, K).$$

*Démonstration.* Soit  $E$  un ensemble  $(n, r)$ -séparé maximal dans  $K$  et  $\mathcal{F}$  un recouvrement minimal de  $K$  par des  $(n, r/2)$ -boules centrées dans  $K$ . Remarquons d'abord que  $\{B_n(x, r), x \in E\}$  est un recouvrement de  $K$ , ce qui entraîne la première inégalité. En effet, s'il existe  $y \in K$  tel que  $d_n(x, y) \geq r$  pour tout  $x \in E$ , alors l'ensemble  $E \cup \{y\}$  est un ensemble  $(n, r)$ -séparé dans  $K$ , ce qui contredit la maximalité de  $E$ . La deuxième inégalité découle du fait que tout élément dans  $E$  appartient au plus à une seule boule de  $\mathcal{F}$ . Autrement dit, on a  $\#E \leq \#\mathcal{F}$ .  $\square$

Pour  $\delta > 0$  on note  $N_\mu(n, r, \delta)$  le nombre minimal de  $(n, r)$ -boules qui recouvrent un ensemble de  $\mu$ -mesure plus grande que  $1 - \delta$ . Remarquons que ce nombre est fini puisque pour tout compact  $K$  tel que  $\mu(K) > 1 - \delta$ , le cardinal minimal  $N(n, r, K)$  d'un  $(n, r)$ -recouvrement fini de  $K$  est un majorant de  $N(n, r, \delta)$ .

**Définition 1.18.** *Soit  $\delta > 0$ . Les  $\delta$ -entropies inférieure et supérieure de Katok, notées respectivement  $\underline{h}_\mu^\delta(T)$  et  $\overline{h}_\mu^\delta(T)$ , sont définies par*

$$\underline{h}_\mu^\delta(T) = \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, r, \delta)$$

et

$$\overline{h}_\mu^\delta(T) = \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, r, \delta).$$

Nous décrivons brièvement les relations entre les  $\delta$ -entropies de Katok pour différentes valeurs de  $\delta \in ]0, 1[$ .

**Proposition 1.19.** *Soient  $0 < \delta_2 \leq \delta_1 < 1$ . Alors*

$$\underline{h}_\mu^{\delta_1}(T) \leq \underline{h}_\mu^{\delta_2}(T) \quad \text{et} \quad \overline{h}_\mu^{\delta_1}(T) \leq \overline{h}_\mu^{\delta_2}(T).$$

*Démonstration.* Posons  $\mathcal{B}_i = \{B \in \mathcal{B} : \mu(B) > 1 - \delta_i\}$ , pour  $i = 1, 2$ . D'après la définition de  $\mathcal{B}_i$ , on a  $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ . En particulier,

$$\begin{aligned} \underline{h}_\mu^{\delta_1}(T) &= \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \min\{N(n, r, B) : B \in \mathcal{B}_1\} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \min\{N(n, r, B) : B \in \mathcal{B}_2\} \\ &= \underline{h}_\mu^{\delta_2}(T) \end{aligned}$$

L'autre inégalité est démontrée de manière analogue.  $\square$

Dans [Kat80] A. Katok montrait que, lorsque  $X$  est un espace topologique compact, les  $\delta$ -entropies coïncident avec l'entropie mesurée. L'unique endroit de la preuve qui nécessite la compacité de  $X$  est la preuve de l'inégalité  $\bar{h}_\mu^\delta(T) \leq h_\mu(T)$ . Ce fait a été aussi remarqué par B. Gurevich et S. Katok dans [GK01] pour le calcul de l'entropie topologique du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la surface modulaire.

**Théorème 1.20** (Katok). *Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique complet et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors, pour tout  $0 < \delta < 1$ , on a*

$$h_\mu(T) \leq \underline{h}_\mu^\delta(T).$$

**Remarque 1.21.** *Une preuve combinatoire analogue est faite dans [HK95] pour montrer l'inégalité  $h_\mu(T) \leq h^d(T)$  sur un espace métrique complet.*

Avant de donner la preuve de Katok du théorème 1.20 nous avons besoin de quelques résultats techniques. Soit  $\mathcal{A}$  un alphabet à  $N$  symboles. Pour  $n \geq 1$  considérons l'ensemble de mots de longueur  $n$  dans l'alphabet  $\mathcal{A}$  défini par

$$\Omega_{N,n} = \{\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) : \omega_i \in \mathcal{A}, i = 0, \dots, n-1\}$$

La métrique de Hamming  $\rho_{N,n}^H$  sur l'espace  $\Omega_{N,n}$  est définie par

$$\rho_{N,n}^H(\omega, \bar{\omega}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \delta_{\omega_i, \bar{\omega}_i})$$

où  $\delta_{k,l}$  est le symbole de Kronecker  $\delta_{k,l}$ ,

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq l \\ 1, & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Pour  $\omega \in \Omega_{N,n}$  et  $r > 0$ , on note  $B^H(\omega, r)$  la  $r$ -boule fermée centrée en  $\omega$  pour la métrique  $\rho_{N,n}^H$ . Un argument combinatoire montre que le nombre  $B(r, N, n)$  de points dans  $B^H(\omega, r)$  ne dépend que de  $r, N, n$ , et sa valeur est égale à

$$B(r, N, n) = \sum_{j=0}^{[nr]} (N-1)^j \binom{n}{j}$$

si  $0 < r < \frac{N-1}{N}$ . De plus, il satisfait

**Proposition 1.22.** *Si  $0 < r < \min\{\frac{N-1}{N}, \frac{1}{2}\}$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln B(r, N, n)}{n} = r \ln(N-1) - r \ln r - (1-r) \ln(1-r).$$

Soit  $\mathcal{P}$  une partition de  $X$ . Le bord  $\partial\mathcal{P}$  de  $\mathcal{P}$  est la réunion des bords des éléments de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire

$$\partial\mathcal{P} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \partial P.$$

L'une des propriétés clés dans la preuve du théorème 1.20 est l'approximation de l'entropie mesurée à partir de partitions finies dont les bords sont de mesure nulle.

**Proposition 1.23.** *Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une partition  $\mathcal{P}_\varepsilon$  telle que  $\mu(\partial\mathcal{P}_\varepsilon) = 0$  et*

$$h_\mu(T) < h_\mu(T, \mathcal{P}_\varepsilon) + \varepsilon.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, puisque la mesure  $\mu$  est finie on peut trouver une suite croissante d'ensembles compacts  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  telle que  $\bigcup_n K_n = X$  et  $\mu(\partial K_n) = 0$ , pour tout  $n \geq 1$ . De plus, pour tout  $x \in X$  il existe une boule centrée en  $x$ , de rayon arbitrairement petit, dont le bord a  $\mu$ -mesure nulle. Pour chaque  $n \geq 1$  on choisit un recouvrement fini de  $K_n$  par des boules  $\{B_i^n\}$ , de rayons compris entre  $1/n$  et  $1/(n+1)$ , dont le bord a  $\mu$ -mesure nulle. Ensuite, on définit la partition  $\mathcal{P}_n$  dont les atomes sont d'une part les intersections des éléments de la forme  $B_i^n \cap K_n$  et d'autre part le complémentaire  $K_n^c$  du compact  $K_n$ . Cette partition est par construction finie et satisfait  $\mu(\partial \mathcal{P}_n) = 0$ . Finalement, on définit la partition  $\mathcal{P}'_n$  comme étant la partition  $\mathcal{P}'_n = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ . La suite  $\{\mathcal{P}'_n\}_{n \geq 1}$  est une suite croissante de partitions qui engendre la tribu borélienne. En effet, cela est une conséquence du fait que pour tout  $x \in X$ , le diamètre  $\text{diam}(\mathcal{P}'_n)(x)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. En utilisant le théorème 1.12, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \geq 1$  tel que  $h_\mu(T) < h_\mu(T, \mathcal{P}'_N) + \varepsilon$ . On pose finalement  $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}'_N$ .  $\square$

Maintenant nous sommes prêts à montrer le théorème 1.20. Nous remarquons que cette preuve est la même que celle de Katok, mais nous préférons vérifier que tout marche bien sans hypothèse de compacité.

*Démonstration du théorème 1.20.* Supposons sans perte de généralité que la mesure de tout ouvert non-vide de  $X$  est positive. Dans le cas général il suffit de remplacer  $X$  par le support de la mesure.

Soit  $\mathcal{P}$  une partition finie de  $X$  et  $N = \#\mathcal{P}$ . On construit l'espace  $\Omega_{N,n}$  en considérant comme alphabet les éléments de la partition  $\mathcal{P}$ . Définissons l'application  $\phi_{\mathcal{P}}^n : X \rightarrow \Omega_{N,n}$  en posant

$$\phi_{\mathcal{P}}^n(x) = W_{\mathcal{P}}^n(x) = (\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(Tx), \dots, \mathcal{P}(T^{n-1}x)).$$

Le tiré en arrière par  $\phi_{\mathcal{P}}^n$  de la distance de Hamming sur  $\Omega_{N,n}$  définit une pseudo-distance sur  $X$ , notée  $d_n^{\mathcal{P}}$ . En effet, pour  $x, y \in X$ , on a  $d_n^{\mathcal{P}}(x, y) = 0$  si et seulement si  $y \in \mathcal{P}^n(x)$ . La symétrie et l'inégalité triangulaire découlent de celles de la distance de Hamming. Fixons une fois pour toutes une partition  $\mathcal{P}$  dont le bord  $\partial \mathcal{P}$  a  $\mu$ -mesure nulle. Définissons  $U_r(\mathcal{P})$  comme étant le  $r$ -voisinage du bord de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire  $U_r(\mathcal{P}) = \{x \in \mathcal{P} : B(x, r) \not\subset \mathcal{P}(x)\}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\mu$  est une mesure borélienne et la mesure du bord de  $\mathcal{P}$  est nulle, il existe  $r \in ]0, \varepsilon[$  tel que

$$\mu(U_r(\mathcal{P})) < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Posons  $B_{n,\varepsilon} = \{x \in X : \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{U_r(\mathcal{P})}(T^i x) < \frac{n\varepsilon}{2}\}$ . Comme  $T$  est une transformation qui préserve la mesure  $\mu$ , et  $\int \mathbb{1}_{U_r(\mathcal{P})} d\mu < \varepsilon^2/4$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{n\varepsilon^2}{4} &\geq \int \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{U_r(\mathcal{P})}(T^i x) d\mu(x) \\ &\geq \int_{X \setminus B_{n,\varepsilon}} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{U_r(\mathcal{P})}(T^i x) d\mu(x) \\ &\geq \frac{n\varepsilon}{2} \mu(X \setminus B_{n,\varepsilon}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que  $\mu(X \setminus B_{n,\varepsilon}) < \varepsilon/2$ .

Par ailleurs, d'après la définition de  $B_{n,\varepsilon}$ , si  $x \in B_{n,\varepsilon}$  et  $d_n(x, y) < r$ , alors  $d_n^{\mathcal{P}}(x, y) < \varepsilon/2$ . Autrement dit, l'intersection de toute  $(n, r)$ -boule avec  $B_{n,\varepsilon}$  est contenue dans une certaine  $\varepsilon/2$ -boule pour la pseudo-distance  $d_n^{\mathcal{P}}$ .

Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement d'un compact  $K$  par des  $(n, r)$ -boules, dont  $\#\mathcal{U} = N_\mu(n, r, \delta)$  avec la mesure de  $K$  qui satisfait  $\mu(K) > 1 - \delta$ . Alors la mesure de  $K \cap B_{n,\varepsilon}$  satisfait

$$\mu(K \cap B_{n,\varepsilon}) > 1 - \delta - \varepsilon/2.$$

Si  $\varepsilon < \frac{1-\delta}{2}$  alors  $\mu(K \cap B_{n,\varepsilon}) > \frac{1-\delta}{2}$ . Comme l'intersection de toute boule dans  $\mathcal{U}$  avec  $B_{n,\varepsilon}$  est contenue dans une certaine  $\varepsilon/2$ -boule pour la distance  $d_n^{\mathcal{P}}$ , il existe un recouvrement de  $K \cap B_{n,\varepsilon}$  de cardinal  $N_\mu(n, r, \delta)$  constitué par des  $\varepsilon/2$ -boules pour la distance  $d_n^{\mathcal{P}}$ .

Maintenant on va minorer  $N_\mu(n, r, \delta)$  en utilisant des arguments combinatoires. Rappelons qu'un point dans l'espace  $\Omega_{N,n}$  est un mot dans l'alphabet dont les lettres sont les atomes de la partition  $\mathcal{P}$ . Comme on a réduit le problème de comptage de boules dynamiques au comptage de boules pour la distance  $d_n^{\mathcal{P}}$ , il suffit de majorer la mesure des atomes de  $\mathcal{P}^n$ . Soit  $X_{m,\varepsilon}$  l'ensemble défini par

$$X_{m,\varepsilon} = \{x \in X : \forall n \geq m, \mu(\mathcal{P}^n(x)) \leq \exp(-n(h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon))\}. \quad (1.1)$$

Grâce au théorème de Shannon-McMillan-Breiman, il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu(X_{m_0,\varepsilon}) \geq \frac{3+\delta}{4}$ . Pour tout  $n \geq m_0$  on définit l'ensemble  $A_{n,\varepsilon}$  comme  $A_{n,\varepsilon} = K \cap B_{n,\varepsilon} \cap X_{m_0,\varepsilon}$ . Ainsi  $\mu(A_{n,\varepsilon}) > \frac{1-\delta}{4}$ . De plus, la partition  $\mathcal{P}^n$  induit une partition  $\mathcal{P}_{n,\varepsilon}$  de  $A_{n,\varepsilon}$  en posant  $\mathcal{P}_{n,\varepsilon} = \{\mathcal{P}^n(x) \cap A_{n,\varepsilon}, x \in A_{n,\varepsilon}\}$ . Vue l'estimation dans (1.1), on a

$$\begin{aligned} \mu(A_{n,\varepsilon}) &\leq \sum_{P \in \mathcal{P}_{n,\varepsilon}} \mu(P) \\ &\leq \exp(-n(h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon)) \#\mathcal{P}_{n,\varepsilon}, \end{aligned}$$

et donc

$$\#\mathcal{P}_{n,\varepsilon} \geq \frac{1-\delta}{4} \exp(n(h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon)).$$

Une  $(n, r)$ -boule qui intersect  $B_{n,\varepsilon}$  est contenue par construction dans une  $\varepsilon/2$ -boule pour la distance  $d_n^{\mathcal{P}}$ . Par ailleurs, les  $\varepsilon/2$ -boules pour la distance  $d_n^{\mathcal{P}}$  sont par définition une réunion finie d'éléments de la partition  $\mathcal{P}^n$ . Le cardinal de cette réunion ne dépasse pas le cardinal  $B(\varepsilon/2, N, n)$ , où  $B(\varepsilon/2, N, n)$  est le nombre de points dans une  $\varepsilon/2$ -boule dans l'espace métrique  $(\Omega_{N,n}, \rho_{N,n}^H)$ . Il s'ensuit ainsi que

$$\begin{aligned} N_\mu(n, r, \delta) B(\varepsilon/2, N, n) &\geq \#\mathcal{P}_{n,\varepsilon} \\ &\geq \frac{1-\delta}{4} \exp(n(h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Cela se réécrit comme

$$N_\mu(n, r, \delta) \geq \frac{1-\delta}{4} \frac{\exp(n(h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon))}{B(\varepsilon/2, N, n)}.$$

Finalement, grâce à la proposition 1.22, on déduit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, r, \delta) \geq h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon(1 + \log(N-1)) + \varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon) \log(1-\varepsilon).$$

En particulier

$$h_\mu^\delta(T) \geq h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon(1 + \log(N-1)) + \varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon) \log(1-\varepsilon).$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on conclut que  $h_\mu^\delta(T) \geq h_\mu(T, \mathcal{P})$ . Puisque la partition  $\mathcal{P}$  a été choisie de façon arbitraire, la proposition 1.23 permet de finir la preuve du théorème 1.20.  $\square$

## 1.4 Entropies locales

L'objet d'étude dans cette section est la notion d'entropie au sens de Brin-Katok (voir [BK83]). On s'intéresse notamment au taux de décroissance exponentielle des mesures des boules dynamiques et sa relation avec l'entropie mesurée.

**Définition 1.24.** Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique et  $\mu$  une mesure de probabilité  $T$ -invariante. Les entropies locales inférieure et supérieure de  $T$  en  $x$ , notées respectivement  $h_\mu^{loc}(T, x)$  et  $\bar{h}_\mu^{loc}(T, x)$ , sont définies par

$$h_\mu^{loc}(T, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r))$$

et

$$\bar{h}_\mu^{loc}(T, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)).$$

**Définition 1.25.** Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique et  $\mu$  une mesure de probabilité  $T$ -invariante. Les entropies locales inférieure et supérieure de  $T$ , notées  $\underline{h}_\mu^{loc}(T)$  et  $\overline{h}_\mu^{loc}(T)$  respectivement, sont définies par

$$\underline{h}_\mu^{loc}(T) = \operatorname{ess\,inf}_\mu \inf_{n \geq 0} \underline{h}_\mu^{loc}(T, T^n x)$$

et

$$\overline{h}_\mu^{loc}(T) = \operatorname{ess\,sup}_\mu \sup_{n \geq 0} \overline{h}_\mu^{loc}(T, T^{-n} x).$$

Les entropies locales permettent d'estimer le taux de décroissance exponentielle de la mesure d'une boule dynamique en tout point de l'espace. La proposition ci-dessous nous donne la régularité des entropies de Brin-Katok vues comme des applications qui dépendent en  $x \in X$ .

**Lemme 1.26.** Les applications  $x \mapsto \underline{h}_\mu^{loc}(T, x)$  et  $x \mapsto \overline{h}_\mu^{loc}(T, x)$  sont  $\mu$ -mesurables et décroissantes le long des orbites.

*Démonstration.* Les applications  $x \mapsto \mu(B_n(x, r))$  sont  $\mu$ -mesurables, donc  $x \mapsto \underline{h}_\mu^{loc}(T, x)$  et  $x \mapsto \overline{h}_\mu^{loc}(T, x)$  le sont aussi. De plus, on a  $T(B_n(x, r)) \subset B_{n-1}(Tx, r)$ , donc la  $T$ -invariance de  $\mu$  entraîne la monotonie.  $\square$

Une manière plus naturelle de penser à l'entropie locale est de considérer la moyenne des taux de décroissance des mesures des boules dynamiques.

**Lemme 1.27.** Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors

$$\underline{h}_\mu^{loc}(T) = \int \underline{h}_\mu^{loc}(T, x) d\mu(x)$$

et

$$\overline{h}_\mu^{loc}(T) = \int \overline{h}_\mu^{loc}(T, x) d\mu(x).$$

*Démonstration.* Les deux égalités sont des conséquences directes de la monotonie des entropies locales ponctuelles et le théorème ergodique de Birkhoff.  $\square$

Brin et Katok ont montré que lorsque  $X$  est un espace topologique compact et  $\mu$  une mesure de probabilité ergodique, les entropies locales coïncident avec l'entropie mesurée (voir [BK83]). Comme dans le cas des  $\delta$ -entropies, seule la preuve d'une inégalité utilise la compacité de  $X$ , et l'autre reste vraie. C'est le théorème suivant.

**Théorème 1.28.** Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique complet et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors

$$h_\mu(T) \leq \underline{h}_\mu^{loc}(T).$$

Comme pour le théorème 1.20, nous reprenons la preuve de Brin-Katok pour vérifier qu'elle n'utilise pas la compacité. Cette preuve est basée d'une part sur la proposition 1.23 et d'autre part sur la proposition 1.29 ci-dessous.

**Proposition 1.29.** Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors pour toute partition finie  $\mathcal{P}$  de  $X$  telle que  $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$ , on a

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq \underline{h}_\mu^{loc}(T, x)$$

pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ .

*Démonstration.* La démonstration de cette proposition ressemble beaucoup à celle du Théorème 1.20. Soit  $\mathcal{P}$  une partition finie de  $X$  telle que  $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$ . Pour tout  $r > 0$  on considère le  $r$ -voisinage  $U_r(\mathcal{P})$  du bord de  $\mathcal{P}$ . Puisque  $\mu$  est borélienne, et  $\bigcap_{r>0} U_r(\mathcal{P}) = \partial\mathcal{P}$ , on a  $\mu(U_r(\mathcal{P})) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$ . En particulier, pour tout  $\eta > 0$  il existe  $r_0 > 0$ ,  $r_0 = r_0(\eta)$ , tel que  $\mu(U_r(\mathcal{P})) < \eta$  si  $0 < r < r_0$ . Le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que si  $0 < r < r_0$ , pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{U_r(\mathcal{P})}(T^i x) = \mu(U_r(\mathcal{P})) < \eta.$$

Notons  $A_n$  le sous-ensemble de  $X$  défini par

$$A_n = \left\{ x \in X : \forall n' \geq n, \frac{1}{n'} \sum_{i=0}^{n'-1} \mathbb{1}_{U_r(\mathcal{P})}(T^i x) < 2\eta \right\}. \quad (1.2)$$

D'après la définition, la suite  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  est une suite croissante d'ensembles mesurables qui satisfait  $\mu(\bigcup_n A_n) = 1$ . Ainsi, il existe  $N_1 = N_1(\eta) \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N_1$  la mesure de  $A_n$  est plus grande que  $1 - 2\eta$ .

Par ailleurs, en utilisant le théorème de Shannon-McMillan-Breiman, pour tout  $\gamma > 0$  il existe  $N_2 = N_2(\gamma) \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N_2$ , on a

$$\mu(\{x \in X : \forall n' \geq n, -\log \mu(\mathcal{P}^{n'}(x)) \geq n(h(T, \mathcal{P}) - \gamma)\}) \geq 1 - \gamma. \quad (1.3)$$

On considère maintenant l'ensemble  $E = E(\gamma, \eta)$  des points dans  $X$  qui satisfont

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{U_r(\mathcal{P})}(T^i x) < 2\eta$$

et

$$-\log \mu(\mathcal{P}^n(x)) \geq n(h(T, \mathcal{P}) - \gamma)$$

pour tout  $n \geq N_3 = \max\{N_1, N_2\}$  et  $0 < r \leq r_0$ . Remarquons que, grâce à (1.2) et (1.3), cet ensemble est de  $\mu$ -mesure grande lorsque  $\eta$  et  $\gamma$  sont petits.

Le point clé dans cette preuve est le fait suivant, qui permettra de trouver des estimations de la mesure des boules dynamiques en utilisant des arguments combinatoires. Soient  $x \in X$  et  $y \in B_n(x, r)$ . Alors, pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ , soit  $T^i x$  et  $T^i y$  appartiennent au même atome de la partition  $\mathcal{P}$ , soit  $T^i x$  appartient au voisinage  $U_r(\mathcal{P})$ .

Ainsi, pour mesurer une  $(n, r)$ -boule dynamique, on doit comprendre quand est-ce que les images par  $T^i$  de deux points de la boule restent dans un même atome de  $\mathcal{P}$ .

Rappelons que, en utilisant la même notation que dans la preuve du théorème 1.20, le mot  $W_{\mathcal{P}}^n(x)$  est défini à partir des atomes de  $\mathcal{P}$  comme étant

$$W_{\mathcal{P}}^n(x) = (\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(Tx), \dots, \mathcal{P}(T^{n-1}x)).$$

Ce mot est associé de manière bijective à l'atome  $\mathcal{P}^n(x)$  de la partition  $\mathcal{P}^n$ .

L'estimation (1.2) nous dit que si  $x \in E$  et  $y \in B_n(x, r)$ , alors la distance de Hamming entre les  $(\mathcal{P}, n)$ -mots  $W_{\mathcal{P}}^n(x)$  et  $W_{\mathcal{P}}^n(y)$  satisfait

$$\rho_{N,n}^H(W_{\mathcal{P}}^n(x), W_{\mathcal{P}}^n(y)) \leq 2\eta.$$

L'inégalité ci-dessus entraîne que pour tout  $x \in E$ , on a

$$\mu(B_n(x, r)) \leq \mu(\{y \in X : \rho_{N,n}^H(W_{\mathcal{P}}^n(x), W_{\mathcal{P}}^n(y)) \leq 2\eta\}). \quad (1.4)$$

Soit  $L_n$  le cardinal de la boule  $B^H(W_{\mathcal{P}}^n(x), 2\eta)$ . D'après la proposition 1.22, lorsque  $n \rightarrow \infty$  le terme  $\frac{1}{n} \log L_n$  vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log L_n}{n} = 2\eta \log(N-1) - 2\eta \log(2\eta) - (1-2\eta) \log(1-2\eta).$$

Soit  $\epsilon(N, \eta) := 2\eta \log(N-1) - 2\eta \log(2\eta) - (1-2\eta) \log(1-2\eta) + \eta$ . Par définition de la limite, il existe  $N_4 \geq N_3$  tel que pour tout  $n \geq N_4$ , on a  $L_n \leq \exp(\epsilon(N, \eta)n)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\eta$  est choisi après  $N$ , on peut supposer qu'il existe  $\eta_0 = \eta_0(N, \varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $0 < \eta < \eta_0$  on ait

$$\epsilon(N, \eta) < \frac{\varepsilon}{100}. \quad (1.5)$$

Par la suite, on va estimer la mesure de l'ensemble des points dans  $E$  dont la  $(n, r)$ -boule est de  $\mu$ -mesure « suffisamment » grande. Plus précisément, on s'intéresse à la mesure des points  $x \in E$  qui vérifient

$$\mu(B_n(x, r)) > \exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon/10)).$$

**Lemme 1.30.** *Avec les notations précédentes, si  $\gamma \ll \varepsilon$  et  $\eta < \eta_0$ , alors*

$$\mu(\{x \in E : \mu(B_n(x, r)) > \exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon/10))\}) \leq \exp(-n(\varepsilon/20)).$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que pour tout  $\varepsilon > 0$ , le cardinal de l'ensemble des atomes de  $\mathcal{P}^n$  qui ont une mesure plus grande que

$$\exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon/10))$$

satisfait

$$\#\{P \in \mathcal{P}^n : \mu(P) \geq \exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon/10))\} \leq \exp(n(h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon/10)). \quad (1.6)$$

Soit  $Q_n$  l'ensemble d'éléments de la partition  $\mathcal{P}^n$  défini par

$$Q_n = \{Q \in \mathcal{P}^n : \exists P \in \mathcal{P}^n, P \cap E \neq \emptyset, \mu(P) \geq \exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon/10)), \rho_{N,n}^H(P, Q) \leq 2\eta\}.$$

Grâce à (1.4), pour tout  $\eta$  suffisamment petit on a

$$\{x \in E : \mu(B_n(x, r)) > \exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon/10))\} \subset \bigcup_{Q \in Q_n} Q, \quad (1.7)$$

Les inégalités (1.5) et (1.6) permettent de trouver une borne supérieure pour le cardinal de  $Q_n$ . En effet

$$\begin{aligned} \#Q_n &\leq \exp(n(h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon/10)) \exp(n\varepsilon/100) \\ &= \exp(n(h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon/10 + \varepsilon/100)). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Si  $S_n$  est la mesure de la réunion des  $Q \in Q_n$  qui satisfont  $Q \cap E \neq \emptyset$ , il découle de (1.3) et (1.8) que

$$\begin{aligned} S_n &\leq \exp(n(h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon/10 + \varepsilon/100)) \exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \gamma)) \\ &= \exp(n(\gamma - \varepsilon/10 + \varepsilon/100)). \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\gamma < \varepsilon/25$  on conclut

$$S_n < \exp(-n(\varepsilon/20)). \quad (1.9)$$

La preuve du lemme 1.30 découle de façon immédiate des points (1.7) et (1.9) puisque

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in E : \mu(B_n(x, r)) > \exp(n(-h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon/10))\}) &\leq \mu\left(\bigcup_{Q_n \cap E \neq \emptyset} Q_n\right) \\ &= \mu(S_n) \\ &\leq \exp(-n(\varepsilon/20)). \end{aligned}$$

□

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)) \geq h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon/10.$$

et donc

$$\underline{h}_\mu^{loc}(T, x) \geq h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon/10.$$

Comme  $X = \bigcup_{\gamma, \eta > 0} E(\gamma, \eta)$ , on conclut en faisant tendre  $\eta$  et  $\gamma$  vers 0 que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , on a

$$\underline{h}_\mu^{loc}(T, x) \geq h_\mu(T, \mathcal{P}) - \varepsilon/10.$$

On déduit ainsi que  $h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq \underline{h}_\mu^{loc}(T, x)$  puisque  $\varepsilon > 0$  est arbitrairement petit.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.28.* L'inégalité désirée découle directement des propositions 1.23 et 1.29.  $\square$

Comme conséquence du théorème de décomposition ergodique (théorème 1.2), du théorème de Jacobs (théorème 1.13) et du théorème 1.28, on déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 1.31.** *Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique complet et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante. Si  $\mu = \int \mu_x d\mu(x)$  est la décomposition ergodique de  $\mu$ , alors*

$$h_\mu(T) \leq \int \underline{h}_{\mu_x}^{loc}(T) d\mu(x).$$

*Démonstration.*

$$h_\mu(T) = \int h_{\mu_x} d\mu(x) \leq \int \underline{h}_{\mu_x}^{loc}(T, \mu) d\mu(x).$$

$\square$

En suivant la stratégie de la preuve de [Led13, Proposition 6.3] nous donnons des conditions suffisantes pour obtenir égalité dans l'inégalité du théorème 1.28 pour une classe de transformations définies sur des variétés Riemanniennes.

**Théorème 1.32.** *Soit  $T : M \rightarrow M$  une transformation lipschitzienne d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors*

$$h_\mu(T) = \underline{h}_\mu^{loc}(T).$$

*Démonstration.* D'après le théorème 1.28 il suffit de montrer que  $h_\mu(T) \geq \underline{h}_\mu^{loc}(T)$ . Supposons pour l'instant qu'il existe une partition  $\mathcal{P}$  d'entropie finie satisfaisant

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)), \quad (1.10)$$

$\mu$ -presque partout. D'après le lemme 1.27, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < r < r_0$ , on a

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)) d\mu(x) \geq \underline{h}_\mu^{loc}(T) - \varepsilon.$$

En utilisant le théorème de Shannon-McMillan-Breiman et l'inégalité (1.10), on déduit

$$\begin{aligned} h_\mu(T) &\geq h_\mu(T, \mathcal{P}) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) d\mu(x) \\ &\geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)) d\mu(x) \geq \underline{h}_\mu^{loc}(T) - \varepsilon. \end{aligned}$$

En particulier, comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on déduit l'inégalité désirée. L'existence d'une partition  $\mathcal{P}$  comme ci-dessus est une conséquence de la proposition suivante. On remarque que l'existence d'une telle partition est due à Mañé (voir [Mañ81]).



**Proposition 1.33.** *Soit  $T : M \rightarrow M$  une transformation lipschitzienne d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors, pour tout compact  $K \subset M$  de mesure  $\mu(K) > 0$  et tout  $0 < r < 1$ , il existe une partition  $\widehat{\mathcal{P}}$  de  $K$  d'entropie finie telle que, si  $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}} \cup \{M \setminus K\}$ , alors pour  $\mu$ -presque tout  $x \in K$  la suite  $(n_k)$  de temps de retour positifs de  $x$  sur  $K$  satisfait*

$$\mathcal{P}^{n_k}(x) \subset B_{n_k}(x, r),$$

pour tout  $k \geq 1$ . En particulier, l'inégalité (1.10) est satisfaite  $\mu$ -presque partout.

Avant de donner une preuve de la proposition 1.33, on utilisera la proposition 1.34 suivante.

**Proposition 1.34.** *Pour tout compact  $K \subset M$  de mesure  $\mu(K) > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $0 < r < 1$  il existe une partition  $\mathcal{P}_r$  de  $K$  satisfaisant*

- (1) pour tout  $x \in K$ , on a  $\text{diam}(\mathcal{P}_r(x)) \leq r$ ,
- (2) le bord de la partition est de  $\mu$ -mesure nulle, et
- (3) si  $d$  est la dimension de  $M$ , alors  $\#\mathcal{P}_r \leq Cr^{-d}$ .

*Démonstration.* Soit  $K \subset M$  un ensemble compact de mesure strictement positive et  $0 < r < 1$ . Considérons la collection de boules  $\mathfrak{B} = \{B(x, r/20) : x \in K\}$ . D'après le lemme de recouvrement de Vitali (nous renvoyons à [Mat95, Theorem 2.1] pour une démonstration), il existe une sous-collection  $\mathfrak{B}'$  de  $\mathfrak{B}$  de boules deux à deux disjointes, telles que

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}'} (5B).$$

Soit  $F$  l'ensemble des centres des boules de  $\mathfrak{B}'$ . Alors

$$\bigcup_{x \in F} B(x, r/20) \subset V_1(K),$$

où  $V_1(K)$  est le 1-voisinage de  $K$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{vol}(V_1(K)) &\geq \sum_{x \in F} \text{vol}(B(x, r/20)) \geq \inf_{x \in K} \text{vol}(B(x, r/20)) \#F \\ &\geq C_1 r^d \#F, \end{aligned}$$

où  $C_1 > 0$  est une constante ne dépendant que de  $K$ . On conclut que  $\#F \leq Cr^{-d}$ , avec  $C = C_1^{-1} \text{vol}(V_1(K))$ . Soit  $\mathcal{P}_r$  la collection de sous-ensembles de  $K$  définie comme étant la réunion des ensembles de la forme

$$\mathcal{P}_r(x) = \{y \in K : d(x, y) \leq d(y, z), \forall z \in F \setminus \{x\}\}, \quad x \in F.$$

Remarquons que  $\text{diam}(\mathcal{P}_r) \leq r/2$  pour tout  $x \in K$ . Puisque  $\mu$  est une mesure finie, suite à une petite déformation du bord des éléments de la collection, on peut supposer que  $\mathcal{P}_r$  est une partition qui satisfait donc (1) et (2). La condition (3) découle de l'estimation du cardinal de  $F$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.33.* Soit  $K \subset M$  un ensemble compact de  $\mu$ -mesure strictement positive. Pour tout entier  $k \geq 1$ , on pose

$$A_k = \{x \in K : T^k x \in K, T^i x \notin K, 1 \leq i < k\}.$$

L'ensemble  $A_k$  est l'ensemble des points de  $K$  dont le temps de premier retour dans  $K$  est égal à  $k$ . Grâce au lemme de Kac on sait que  $\sum_{k \geq 1} km(A_k) = 1$ . Fixons  $r > 0$ . La proposition 1.34 implique qu'il existe une partition  $\widehat{\mathcal{P}}_k$  de  $K$  qui a au plus  $C(L^{k-1}/r)^d$  éléments, où  $L$  est la constante lipschitzienne de  $T$ . La partition  $\widehat{\mathcal{P}}_k$  induit une partition  $\widehat{\mathcal{P}}_{A_k}$  de  $A_k$  par restriction à l'ensemble  $A_k$ . Finalement on définit la partition  $\widehat{\mathcal{P}}$  de  $K$  comme la réunion des éléments des partitions  $\widehat{\mathcal{P}}_{A_k}$ .

Nous allons montrer maintenant que  $\hat{\mathcal{P}}$  satisfait les propriétés qu'on veut. Nous montrons d'abord que l'entropie de  $\hat{\mathcal{P}}$  est finie. Par définition, on a

$$\begin{aligned} H_\mu(\hat{\mathcal{P}}) &= \sum_{k \geq 1} \sum_{P \in \hat{\mathcal{P}}_{A_k}} -\mu(P) \log \mu(P) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mu(A_k) \left( \sum_{P \in \hat{\mathcal{P}}_{A_k}} -\frac{\mu(P)}{\mu(A_k)} \log \frac{\mu(P)}{\mu(A_k)} - \log \mu(A_k) \right) \\ &\leq H_\mu(\{A_k\}) + \sum_{k \geq 1} \mu(A_k) \log(C(L^k/r)^d) \\ &\leq H_\mu(\{A_k\}) + d \log L \sum_{k \geq 1} k \mu(A_k) + \log C - d \log r. \end{aligned}$$

Rappelons que le lemme de Kac nous dit que la somme  $\sum_{k \geq 1} k \mu(A_k)$  est finie. Il nous reste donc montrer que l'entropie de la partition induite par les ensembles  $A_k$ , avec  $k \geq 1$ , est finie. On utilisera le lemme classique suivant.

**Lemme 1.35.** *Soient  $(p_k)$  et  $(q_k)$  deux vecteurs en probabilité. Alors*

$$-\sum_k p_k \log p_k \leq -\sum_k p_k \log q_k,$$

avec égalité si et seulement si  $p_k = q_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Soient  $p_k = \mu(A_k)/\mu(A)$  et  $q_k = (e-1)e^{-k}$ . Par construction, les vecteurs  $(p_k)$  et  $(q_k)$  sont deux vecteurs en probabilité. D'après le lemme 1.35 on conclut que

$$H_\mu(\{A_k\}) \leq \sum_{k \geq 1} k \mu(A_k),$$

ce qui entraîne la finitude de l'entropie de  $\hat{\mathcal{P}}$ .

Considérons maintenant la suite croissante  $(n_j(x))_{j \geq 0}$  définie par les conditions

$$T^{n_j} x \in K \quad \text{et} \quad T^{n_j+1} x \notin K \quad \forall n_j \in \{n_j\}.$$

Par définition, pour  $j \geq 0$  on a  $T^{n_j} x \in A_{n_{j+1}-n_j}$ . Puisque  $T$  est  $L$ -lipschitzienne, et par construction de la partition,  $y \in A_k$  implique  $\mathcal{P}(y) \subset B_k(y, r)$ . En effet, tout élément de la partition  $\hat{\mathcal{P}}_{A_k}$  est de diamètre plus petit que  $rL^{-(k-1)}$ . Ainsi, pour tout  $y_1, y_2 \in \mathcal{P}(y)$  et  $0 \leq i \leq k-1$ , on a

$$d(T^i y_1, T^i y_2) \leq L^i d(y_1, y_2) < r.$$

En particulier,

$$\mathcal{P}(T^{n_j} x) \subset B_{n_{j+1}-n_j}(T^{n_j} x, r).$$

L'inclusion ci-dessus implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{n_j}(x) &= \bigcap_{i=0}^{n_j} T^{-i} \mathcal{P}(T^i x) \subset \bigcap_{i=0}^j T^{-n_i} \mathcal{P}(T^{n_i} x) \\ &\subset \bigcap_{i=0}^j T^{-n_i} B_{n_{i+1}-n_i}(T^{n_i} x, r) \subset B_{n_j}(x, r). \end{aligned}$$

En conséquence, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in K$ , on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)).$$

D'après l'ergodicité de la mesure, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$  il existe un entier  $k < 0$  tel que  $T^k x \in K$ . L'inclusion  $\mathcal{P}^n(T^k x) \subset B_n(T^k x, r)$  est valide pour un nombre infini d'entiers  $n$ . En particulier, l'inclusion  $\mathcal{P}^{n+k}(x) \subset T^{-k}B_n(T^k x, r)$  est aussi valide pour un nombre infini d'entiers  $n$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(T^{-k}B_n(T^k x, r)) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(T^k x, r)) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)). \end{aligned}$$

□

La fin de la démonstration de la proposition 1.33 conclut donc la preuve du théorème 1.32.

□

Pour finir cette section, nous donnons une relation entre la  $\delta$ -entropie supérieure et l'entropie locale supérieure.

**Théorème 1.36.** *Soient  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique complet et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors, pour tout  $0 < \delta < 1$ , on a*

$$\bar{h}_\mu^\delta(T) \leq \bar{h}_\mu^{\text{loc}}(T).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit l'ensemble  $X(\varepsilon, r, n') \subset X$ , pour  $0 < r < 1$  et  $n' \geq 1$ , par

$$X(\varepsilon, r, n') = \left\{ x \in X : -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)) < \bar{h}_\mu^{\text{loc}}(T) + \varepsilon, \forall n \geq n' \right\}.$$

Remarquons que  $\mu(X(\varepsilon, r, n'))$  tend vers 1 quand  $n' \rightarrow \infty$  et puis  $r \rightarrow 0$ . En particulier, pour tout  $r > 0$  suffisamment petit, il existe  $n'_0$  tel que  $\mu(X(\varepsilon, r, n')) > 1 - \delta$  pour tout  $n' \geq n'_0$ . Soit  $K \subset X(\varepsilon, r, n'_0)$  un ensemble compact de mesure  $\mu(K) > 1 - \delta$ . On va trouver une majoration de  $S(n, r, K)$ , pour tout  $n \geq n'_0$ . Soit  $E$  un ensemble  $(n, r)$ -séparé dans  $K$ . Comme les  $(n, r/2)$ -boules centrées en les points de  $E$  sont deux à deux disjointes, on a

$$\sum_{x \in E} \mu(B_n(x, r)) = \mu \left( \bigcup_{x \in E} B_n(x, r/2) \right) \leq 1.$$

De plus, les  $(n, r)$ -boules centrées en  $K$  satisfont

$$\mu(B_n(x, r)) \geq \exp \left( -n \left( \bar{h}_\mu^{\text{loc}}(T) + \varepsilon \right) \right),$$

donc

$$S(n, r, K) \leq \exp \left( n \left( \bar{h}_\mu^{\text{loc}}(T) + \varepsilon \right) \right).$$

Ainsi, grâce au lemme 1.17, on a

$$\begin{aligned} \bar{h}_\mu^\delta(T) &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, r, K) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S(n, r, K) \\ &\leq \bar{h}_\mu^{\text{loc}}(T) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, on a bien démontré le théorème 1.36.

□

## 1.5 Entropie riemannienne

Considérons maintenant une transformation continue  $T : M \rightarrow M$  d'une variété riemannienne complète. La mesure de Lebesgue (ou volume riemannien) donne mesure strictement positive aux ouverts non-vides. Ainsi, on peut se demander quel est le taux de décroissance exponentielle du volume d'une boule dynamique. Malheureusement, de manière générale le volume riemannien n'est pas fini ni invariant. Cela motive la définition suivante.

**Définition 1.37.** Soient  $T : M \rightarrow M$  une transformation continue d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Pour tout ensemble compact  $K \subset M$  de mesure  $\mu(K) > 0$ , on définit l'entropie riemannienne de  $T$  par rapport à  $\mu$  sur  $K$ , notée  $h_\mu^{\text{vol}}(T, K)$ , comme étant

$$h_\mu^{\text{vol}}(T, K) = \text{ess sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(B_n(x, r)),$$

où le supremum essentiel est pris par rapport à la mesure  $\mu$ . On définit l'entropie riemannienne de  $T$  par rapport à  $\mu$ , notée  $h_\mu^{\text{vol}}(T)$ , comme étant

$$h_\mu^{\text{vol}}(T) = \sup_K h_\mu^{\text{vol}}(T, K),$$

où le supremum est pris sur tous les sous-ensembles compacts de  $M$  de mesure strictement positive.

L'intérêt de cette nouvelle notion d'entropie naît de sa relation avec les  $\delta$ -entropies inférieures de Katok.

**Théorème 1.38.** Soient  $T : M \rightarrow M$  une transformation continue d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Si  $K \subset M$  est un ensemble compact de  $\mu$ -mesure strictement positive, alors pour tout  $1 - \mu(K)^2 < \delta < 1$ , on a

$$\underline{h}_\mu^\delta(T) \leq h_\mu^{\text{vol}}(T, K).$$

*Démonstration.* Si  $h_\mu^{\text{vol}}(T, K) = \infty$  il n'y a rien à montrer. Supposons donc que  $h_\mu^{\text{vol}}(T, K) < \infty$ . Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  et  $m \geq 1$ , on définit l'ensemble  $K_{\varepsilon, r, m}$  par

$$K_{\varepsilon, r, m} = \{x \in K : \text{vol}(B_n(x, r)) \geq \exp(-n(h_\mu^{\text{vol}}(T, K) + \varepsilon)), \forall n \geq m \text{ tel que } T^n x \in K\}.$$

Remarquons que la mesure  $\mu(K_{\varepsilon, r, m})$  tend vers  $\mu(K)$  lorsque  $m \rightarrow \infty$  et puis  $r \rightarrow 0$ . Ainsi, pour tout  $0 < \eta < \mu(K)/2$  et  $r > 0$  suffisamment petit, il existe  $m_0 \geq 1$  tel que  $\mu(K_{\varepsilon, r, m_0}) > \mu(K) - \eta/2$ . Soit  $K_0 \subset K_{\varepsilon, r, m_0}$  un ensemble compact de mesure  $\mu(K_0) > \mu(K) - \eta$ . Nous allons estimer le cardinal d'un  $(n, r)$ -recouvrement minimal de  $K_0$  à partir des estimations pour le volume des  $(n, r)$ -boules dynamiques. Pour  $x \in K_0$  on connaît ces estimations pour tout temps  $n$  tel que  $T^n x \in K$ . Le problème de cette approche est que, typiquement, deux points différents de  $K_0$  n'ont pas le même temps de premier retour. On utilisera l'ergodicité de  $\mu$  pour surmonter cette difficulté.

L'ergodicité de la mesure implique que les moyennes ergodiques  $(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \mu(K_0 \cap T^{-i} K_0)$  convergent vers  $\mu(K_0)^2$ . Par ailleurs, si tout point d'accumulation  $L$  de la suite  $(\mu(K_0 \cap T^{-n} K_0))_n$  satisfait  $0 < L \leq c < \mu(K_0)^2$ , alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(K_0 \cap T^{-i} K_0) \leq c,$$

ce qui contredit la convergence des moyennes ergodiques. En particulier, il existe une suite strictement croissante  $(\phi(n))_n$  d'entiers positifs telle que  $\mu(K_0 \cap T^{-\phi(n)} K_0)$  converge vers  $L(K_0) \geq \mu(K_0)^2$ . Soit  $0 < \lambda < L(K_0)/2$ . Alors il existe un entier  $n_1 \geq m_0$  tel que  $\mu(K_0 \cap T^{-\phi(n)} K_0) > L(K_0) - \lambda$  pour tout  $n \geq n_1$ . Soit  $\delta(K_0, \lambda) = 1 - (\mu(K_0)^2 - \lambda)$ . Pour  $K_n = K_0 \cap T^{-\phi(n)} K_0$ , la  $\mu$ -mesure de  $K_n$  satisfait

$$\mu(K_n) > L(K_0) - \lambda \geq \mu(K_0)^2 - \lambda = 1 - \delta(K_0, \lambda).$$

Pour tout  $n \geq n_1$ , prenons  $E$  un ensemble maximal  $(\phi(n), r)$ -séparé dans  $K_n$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{vol}(V_r(K)) &\geq \text{vol}\left(\bigcup_{x \in E} B_{\phi(n)}(x, r/2)\right) \\ &\geq \sum_{x \in E} \text{vol}(B_{\phi(n)}(x, r/2)) \\ &\geq \#E \exp(-\phi(n)(h_\mu^{\text{vol}}(T, K) + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Ainsi, le cardinal de  $E$  est majoré par

$$\#E \leq \text{vol}(V_r(K)) \exp(\phi(n)(h_\mu^{\text{vol}}(T, K) + \varepsilon)). \quad (1.11)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \underline{h}_\mu^{\delta(K_0, \lambda)}(T) &= \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, r, \delta(K_0, \lambda)) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(n)} \log N(\phi(n), r, \delta(K_0, \lambda)) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(n)} \log N(\phi(n), r, K_n) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(n)} \log S(\phi(n), r, K_n) \\ &\leq h_\mu^{\text{vol}}(T, K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Grâce à la proposition 1.19, on a  $\underline{h}_\mu^\delta(T) \leq h_\mu^{\text{vol}}(T, K) + \varepsilon$  pour tout  $1 - \mu(K_0)^2 < \delta < 1$ . Comme  $\eta > 0$  est arbitraire, on obtient que  $\underline{h}_\mu^\delta(T) \leq h_\mu^{\text{vol}}(T, K) + \varepsilon$ , pour tout  $1 - \mu(K)^2 < \delta < 1$ . Finalement, puisque  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, la conclusion du théorème 1.38 en découle.  $\square$

En considérant des compacts  $K$  de plus en plus grands, on déduit

**Corollaire 1.39.** *Soient  $T : M \rightarrow M$  une transformation continue d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors, pour tout  $0 < \delta < 1$ , on a*

$$\underline{h}_\mu^\delta(T) \leq h_\mu^{\text{vol}}(T).$$

Finalement, nous pouvons énoncer le théorème principal de ce chapitre. Ce théorème sera crucial pour montrer l'inégalité de Ruelle pour le flot géodésique sur une variété riemannienne à courbure négative pincée.

**Théorème 1.40.** *Soient  $T : M \rightarrow M$  une transformation continue d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors, on a*

$$h_\mu(T) \leq h_\mu^{\text{vol}}(T).$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer directement le théorème 1.20 et le corollaire 1.39.  $\square$

L'inégalité (1.11) a été démontré en utilisant le fait que  $\text{vol}(V_r(K)) > 0$ . En fait, c'est l'unique endroit dont on utilise de manière cruciale le volume riemannien. Si l'on pense à la mesure  $\mu$ , alors elle satisfait aussi  $\mu(V_r(K)) > 0$  d'après le choix de  $K$ . Si l'on remplace « vol » par «  $\mu$  » dans la démonstration du théorème 1.38, on déduit le résultat suivant.

**Théorème 1.41.** *Soient  $T : M \rightarrow M$  une transformation continue d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Si  $K \subset M$  est un ensemble compact de  $\mu$ -mesure strictement positive, alors pour tout  $1 - \mu(K)^2 < \delta < 1$ , on a*

$$\underline{h}_\mu^\delta(T) \leq \text{ess sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)).$$

Une conséquence du théorème 1.41 pour des application Lipschitziennes est l'égalité entre l'entropie inférieure de Katok et l'entropie mesurée.

**Théorème 1.42.** *Soit  $T : M \rightarrow M$  une transformation lipschitzienne d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $T$ -invariante ergodique. Alors, pour tout  $0 < \delta < 1$ , on a*

$$h_\mu(T) = \underline{h}_\mu^\delta(T).$$

*Démonstration.* D'après le théorème 1.20, il suffit de montrer que  $h_\mu(T) \geq \underline{h}_\mu^\delta(T)$ . Soit  $K \subset M$  un compact de mesure  $\mu(K) > 0$ . Grâce à la proposition 1.33 il existe une partition  $\mathcal{P}$  de  $M$ , d'entropie finie, telle que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in K$  la suite  $(n_k)$  de temps de retour positifs de  $x$  sur  $K$  satisfait

$$\mathcal{P}^{n_k}(x) \subset B_{n_k}(x, r),$$

pour tout  $k \geq 1$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{n_k} \log \mu(B_{n_k}(x, r)) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{n_k} \log \mu(\mathcal{P}^{n_k}(x)) \\ &\leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)). \end{aligned}$$

Or le théorème de Shannon-McMillan-Breiman nous dit que

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)),$$

donc

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, r)) &\leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq h_\mu(T). \end{aligned}$$

Ainsi, le théorème 1.41 entraîne l'inégalité

$$\underline{h}_\mu^\delta(T) \leq h_\mu(T),$$

pour tout  $1 - \mu(K)^2 < \delta < 1$ . Comme le compact  $K$  est arbitraire (donc de mesure arbitraire), on a bien fini la preuve du théorème.  $\square$

## Chapitre 2

# Inégalité de Ruelle

L'objet de ce chapitre est l'étude approfondie des relations entre l'entropie mesurée d'un difféomorphisme défini sur une variété riemannienne et la dynamique induite par sa différentielle. Deux résultats seront particulièrement intéressants. Le premier nous dit que, lorsque la variété n'est pas compacte, l'entropie n'est pas liée forcément à la dynamique linéarisée. Plus précisément, il existe des contre-exemples à l'inégalité de Ruelle. Le deuxième nous donne des conditions suffisantes sur le difféomorphisme pour retrouver cette inégalité.

### 2.1 Cadre général

Considérons un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$ . Pour chaque  $x \in M$  on note  $\|\cdot\|_x$  la norme sur  $T_x M$  induite par la métrique  $g$ .

**Définition 2.1.** *Un point  $x \in M$  est dit (Lyapounov-Perron)-régulier si*

(1) *il existe une décomposition de  $T_x M$  en sous-espaces  $df$ -invariants  $\{E_j(x)\}_{j=1}^{l(x)}$ , telle que*

$$T_x M = \bigoplus_{j=0}^{l(x)} E_j(x), \quad \text{et}$$

(2) *il existe des nombres  $\lambda_1(x) < \dots < \lambda_{l(x)}(x)$ , tels que pour tout  $j = 1, \dots, l(x)$  et tout vecteur  $v \in E_j(x) \setminus \{0\}$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|d_x f^n(v)\|_{f^n x} = \lambda_j(x).$$

(3) *les angles des sous-espaces  $E_j(x)$  ne décroissent pas exponentiellement le long des trajectoires, c'est-à-dire*

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log |\angle(E_{j_1}(f^n x), E_{j_2}(f^n x))| = 0,$$

*pour tout  $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq l(x)$ .*

Par la suite, l'ensemble de points réguliers sera noté par  $\Lambda$ . Pour  $x \in \Lambda$ , les nombres  $\{\lambda_j(x)\}$  sont appelés *exposants de Lyapounov* alors que les espaces  $\{E_j(x)\}$  sont appelés *espaces caractéristiques*. Les exposants de Lyapounov permettent de mesurer le taux de croissance exponentielle d'un vecteur par l'action de la différentielle. En effet, si  $x \in \Lambda$  et  $v \in T_x M \setminus \{0\}$  s'écrit comme  $v = \sum_j v_j$ , où  $v_j \in E_j(x)$ , alors

$$\lambda(x, v) := \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|d_x f^n(v)\|_{f^n x} = \max\{\lambda_j(x) : v_j \neq 0\}.$$

Le théorème d'existence qui permet de développer toute la théorie liée aux exposants de Lyapounov est le théorème d'Oseledets (voir [Ose68],[Led84b]).

**Théorème 2.2** (Oseledets). *Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante. Si  $\log^+ \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ , alors  $\mu(\Lambda) = 1$ . De plus, les applications  $x \mapsto \lambda_j(x)$ ,  $x \mapsto l(x)$  et  $x \mapsto \dim(E_j(x))$  sont mesurables et  $f$ -invariantes.*

Supposons que  $\mu$  est une mesure ergodique telle que  $\log^+ \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ . D'après le théorème d'Oseledets, les exposants de Lyapounov et la dimension des espaces caractéristiques sont constantes  $\mu$ -presque partout. Dans ce cas on les note  $\lambda_j(x) = \lambda_j$  et  $\dim(E_j(x)) = d_j$  pour tout  $j = 1, \dots, l(x) = l$ .

En ce qui concerne l'entropie, Ruelle [Rue78] a montré que, lorsque  $M$  est une variété riemannienne compacte, on peut majorer l'entropie mesurée de  $f$  par la somme des exposants de Lyapounov positifs (avec multiplicité).

**Théorème 2.3** (Inégalité de Ruelle). *Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne compacte et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante. Alors*

$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)) d\mu(x).$$

D'une manière intuitive, le fait que la variété soit compacte implique qu'on peut linéariser le système dynamique de façon uniforme. Ensuite, il faut tout simplement remarquer que le chaos d'un système vient de la dilatation des vecteurs et pas de la contraction. Autrement dit, pour contrôler l'entropie il faut connaître les taux de dilatation exponentielle au niveau de la dynamique linéarisée : ce sont les exposants de Lyapounov positifs.

Nous allons utiliser les notations suivantes dans la suite du texte. Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme d'une variété riemannienne et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante telle que  $\log^+ \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ . Définissons l'application  $f$ -invariante  $\chi^+ : M \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\chi^+(x) = \begin{cases} \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) \dim(E_j(x)), & \text{si } x \in \Lambda; \\ 0, & \text{si } x \notin \Lambda. \end{cases}$$

Si  $\mu$  est ergodique, on note  $\chi^+$  la valeur essentielle de  $\chi^+(x)$ . Considérons  $x \in \Lambda$  et notons  $E^{su}(x)$  le sous-espace fortement instable de  $T_x M$  déterminé par la somme des espaces caractéristiques associés aux exposants de Lyapounov strictement positifs, c'est-à-dire

$$E^{su}(x) = \bigoplus_{\lambda_j(x) > 0} E_j(x).$$

Le jacobien fortement instable est défini par

$$J^{su}(x) = \det((d_x f)|_{E^{su}(x)}).$$

Une conséquence du théorème ergodique de Birkhoff est le résultat classique suivant qui relie aux exposants de Lyapounov positifs avec le jacobien fortement instable.

**Proposition 2.4.** *Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme d'une variété riemannienne et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante ergodique. Si  $\log^+ \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ , alors*

$$\int \log |J^{su}| d\mu = \chi^+.$$

## 2.2 Contre-exemples à l'inégalité de Ruelle

Le but de cette section est de montrer que l'inégalité de Ruelle n'est pas toujours vérifiée lorsque la variété n'est plus compacte. Plus précisément, on va construire une famille de contre-exemples à cette inégalité.



**Théorème 2.5.** *Soit  $h \in ]0, \infty]$ . Alors il existe une variété riemannienne non compacte  $(M, g)$ , un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  et une mesure borélienne  $\mu$  de probabilité  $f$ -invariante, tels que*

- (1) *L'entropie mesurée  $h_\mu(f)$  satisfait  $h_\mu(f) = h$ ,*
- (2) *Les applications  $x \mapsto \log^+ \|d_x f\|$  et  $x \mapsto \log^+ \|d_x f^{-1}\|$  sont  $\mu$ -intégrables, et*
- (3) *Les exposants de Lyapounov sont  $\mu$ -presque partout nuls.*

En particulier, on a

$$0 = \int \chi^+ d\mu < h_\mu(f) \leq \infty.$$

L'idée principale derrière la démonstration du théorème 2.5 est le fait que l'infini contribue chaos. En effet, on va construire des systèmes dynamiques qui ressemblent à flots de suspension sur des transformations d'échange d'intervalles dénombrable. Le comportement local dans ces systèmes sera celui d'une translation alors que la complexité est donnée par ce qui se passe aux voisinages de l'infini. On remarque que la construction est inspirée sur un modèle dynamique élaboré dans [AOW85].

### 2.2.1 Préliminaires : flots de suspension et transformations d'échange d'intervalles dénombrable

Dans ce paragraphe nous étudions les flots de suspension et les transformations d'échange d'intervalles dénombrable.

#### Flots de suspension

Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré inversible. Nous considérons deux fonctions mesurables  $\tau_i : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , pour  $i = 1, 2$ , avec  $\tau_1$  bornée loin de zéro, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\tau_1(x) \geq c$  pour tout  $x \in X$ . On définit ainsi l'espace

$$Y = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : -\tau_2(x) \leq t \leq \tau_1(x)\} / \sim,$$

où  $(x, \tau_1(x)) \sim (Tx, -\tau_2(x))$ . Si  $\tau_i \in L^1(\mu)$  pour  $i = 1, 2$ , alors on peut munir  $Y$  d'une mesure de probabilité naturelle induite par  $\mu$  et la mesure de Lebesgue  $m$  sur  $\mathbb{R}$ . En effet, comme

$$\begin{aligned} (\mu \times m)(Y) &= \int_X \int_{-\tau_2(x)}^{\tau_1(x)} dt d\mu(x) \\ &= \int_X \tau_1(x) + \tau_2(x) d\mu(x) < +\infty, \end{aligned}$$

la mesure  $\nu$  définie par  $\nu = \frac{1}{(\mu \times m)(Y)} (\mu \times m)|_Y$  est bien une mesure de probabilité sur  $Y$ .

Sur l'espace  $Y$  on peut définir aussi un flot mesurable appelé *flot de suspension*. Pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , on définit  $\tau^m : X \rightarrow \mathbb{R}$  comme étant

$$\tau^m(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m \tau_1(T^i x) + \tau_2(T^i x) - \tau_2(x), & \text{si } m \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{|m|} \tau_1(T^{-i} x) + \tau_2(T^{-i} x) - \tau_1(x), & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Soit  $(x, s) \in Y$ . Pour tout  $t \geq 0$  tel que  $\tau^{n-1}(x) - s \leq t < \tau^n(x) - s$ , on pose

$$\phi_t(x, s) = (T^n x, t + s - \tau^{n-1}(x) - \tau_2(T^n x)).$$

Par ailleurs, pour tout  $t < 0$  tel que  $\tau^{-n+1}(x) + s \leq |t| < \tau^{-n}(x) + s$ , on pose

$$\phi_t(x, s) = (T^{-n} x, t + s + \tau^{-n+1}(x) + \tau_1(T^{-n} x)).$$

Le flot  $\Phi = (\phi_t)$  agit par translations verticales. Par ailleurs, l'application de premier retour de  $\Phi$  sur l'ensemble  $X \times \{0\}$  fait agir  $T$  sur la première coordonnée. En particulier, puisque  $\mu$  est  $T$ -invariante et  $m$  est invariante par translation, on conclut que la mesure  $\nu$  est  $\Phi$ -invariante.

Décrivons maintenant toutes les mesures de probabilité  $\Phi$ -invariantes sur  $Y$ . On note  $\mathcal{M}_\Phi(Y)$  cet espace. Soit  $\mathcal{M}_T(X)(\tau_1, \tau_2)$  l'ensemble des mesures de probabilité  $T$ -invariantes sur  $X$  telles que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont intégrables. Alors l'application  $R : \mathcal{M}_T(X)(\tau_1, \tau_2) \rightarrow \mathcal{M}_\Phi(Y)$ , qui envoie une mesure  $\mu$  vers une mesure  $R(\mu) = \frac{1}{(\mu \times m)(Y)}(\mu \times m)|_Y$  est une bijection. Cela est une conséquence de la proposition ci-dessous et du fait que  $R$  est injective.

**Proposition 2.6.** *Soit  $\nu \in \mathcal{M}(Y)$  une mesure de probabilité sur  $Y$ . Alors il existe une mesure  $\mu \in \mathcal{M}_T(X)(\tau_1, \tau_2)$  telle que  $\nu = R(\mu)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tilde{Y}$  l'espace défini par

$$\tilde{Y} = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \tau_1(x) + \tau_2(Tx)\} / \sim .$$

L'application  $\Psi : Y \rightarrow \tilde{Y}$  définie par

$$\Psi((x, s)) = \begin{cases} (T^{-1}x, \tau_1(T^{-1}x) + \tau_2(x) + s), & \text{si } s < 0 \\ (x, s), & \text{si } s \geq 0, \end{cases}$$

est un isomorphisme mesuré. Ainsi, la mesure  $\Psi_*\nu$  est bien une mesure de probabilité sur  $\tilde{Y}$ . Comme le plafond  $\tau_1$  est borné loin de zéro, le plafond  $\tau_1 + \tau_2$  l'est aussi. En particulier, un résultat d'Ambrose et Kakutani (voir [AK42]) nous dit que  $\Psi_*\nu$  s'écrit sous la forme

$$\Psi_*\nu = \frac{1}{(\mu \times m)(\tilde{Y})}(\mu \times m)|_{\tilde{Y}}.$$

Autrement dit, la mesure  $\nu$  est l'image de  $\mu$  par  $R$ . □

Pour simplifier, si  $\tau_2 \equiv 0$  on note  $\mathcal{M}_T(X)(\tau_1)$  l'espace  $\mathcal{M}_T(X)(\tau_1, 0)$ . C'est-à-dire

$$\mathcal{M}_T(X)(\tau_1) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T(X) : \int \tau_1 d\mu < \infty \right\}.$$

Ainsi, toute mesure de probabilité  $\Phi$ -invariante sur la suspension classique est construite à partir d'une mesure dans  $\mathcal{M}_T(X)(\tau_1)$ .

Les propriétés dynamiques des flots de suspension ont été largement étudiées depuis longtemps (voir par exemple [Abr59]). La remarque la plus importante de cette construction est que toutes les propriétés d'une suspension classique sont satisfaites dans le cadre d'une suspension avec fonction sol non-nulle.

**Proposition 2.7.** *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré ergodique. Supposons que  $\tau_i : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, 2$ , sont deux fonctions  $\mu$ -intégrables, avec  $\tau_1$  bornée loin de zéro. Alors le système dynamique continu  $(Y, \nu, \Phi)$  est ergodique.*

*Démonstration.* Soit  $A \subset Y$  un ensemble  $\Phi$ -invariant. L'ensemble  $A$  doit être de la forme  $A = \{(x, t) : x \in B, -\tau_2(x) \leq t \leq \tau_1(x)\} / \sim$ , où  $B$  est un sous-ensemble  $T$ -invariant de  $X$ . Comme  $\mu$  est une mesure ergodique, on a  $\mu(B) \in \{0, 1\}$ . En particulier,

$$\nu(A) = \frac{\int_B \tau_1 + \tau_2 d\mu}{\int_X \tau_1 + \tau_2 d\mu} \in \{0, 1\}.$$

□

Nous finissons cette sous-section en donnant une formule d'Abramov adaptée à notre cadre. La preuve de cette formule est la même que la preuve classique, en utilisant les techniques de [Abr59].

**Proposition 2.8.** *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré ergodique. Supposons que  $\tau_i : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , avec  $i = 1, 2$ , sont deux fonctions  $\mu$ -intégrables, avec  $\tau_1$  bornée loin de zéro. Si  $\phi = \phi_1$ , alors*

$$h_\nu(\phi) = \frac{h_\mu(T)}{\int \tau_1 + \tau_2 d\mu}.$$

**Transformations d'échange d'intervalles dénombrable**

**Définition 2.9.** Soit  $T : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  une application inversible. On dit que  $T$  est une Transformation d'Échange d'Intervalles Dénombrable (ou TEID) si

(1) il existe des suites  $\{x_i\} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$  et  $\{a_i\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 1,$$

et  $T(x) = x + a_i$  pour tout  $x \in [x_i, x_{i+1}[$ ; et

(2) l'unique point d'accumulation de l'ensemble  $\{x_i + a_i\} \cup \{x_{i+1} + a_i\}$  est 1.

Soient  $T$  une TEID et  $m$  la mesure de Lebesgue sur l'intervalle unité  $[0, 1[$ . Notons  $I_i$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le sous-intervalle de  $[0, 1[$  défini par  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$  si  $i \geq 1$  et  $I_0 = ]x_0, x_1[$ . Comme  $T$  est une translation sur  $I_i$ , elle laisse invariante  $m$ . En ce qui concerne l'entropie  $h_m(T)$ , elle est liée à l'entropie de la partition  $\mathcal{I} = \{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  d'après un résultat de Blume (voir [Blu12, Theorem 3]).

**Proposition 2.10** (Blume). Si  $H_m(\mathcal{I}) < \infty$ , alors  $h_m(T) = 0$ .

De manière équivalente, la proposition 2.10 nous dit que si l'entropie mesurée est strictement positive, alors l'entropie de la partition  $\mathcal{I}$  est infinie.

**Lemme 2.11.** Soit  $(a_i)_i \subset ]0, 1[^{\mathbb{N}}$  un vecteur de probabilité tel que  $-\sum_i a_i \log a_i = \infty$ . Alors il existe une suite  $(b_i)_i \in ]0, 1[^{\mathbb{N}}$  telle que  $0 < b_i < a_i$  et

$$-\sum_i b_i \log b_i < \infty.$$

*Démonstration.* Pour  $k \geq 1$  définissons  $N_k$  comme l'ensemble d'indices

$$N_k = \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{1}{k+1} < a_i \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Pour tout  $i \in N_k$  on pose  $b_i = \exp(-1/k^3)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} -\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i \log b_i &= \sum_{k \geq 1} \sum_{i \in N_k} -b_i \log b_i \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{i \in N_k} \frac{1}{k^3} \exp\left(-\frac{1}{k^3}\right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \#N_k \frac{1}{k^3} \exp\left(-\frac{1}{k^3}\right) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k^3} < \infty. \end{aligned}$$

□

Les transformations d'échange d'intervalles dénombrable sont particulièrement intéressantes car toute transformation apériodique est conjuguée à l'une d'elles (voir [AOW85, Theorem 2]).

**Définition 2.12.** Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espace de probabilité et  $T : X \rightarrow X$  une transformation inversible qui préserve la mesure  $\mu$ . On dit que  $T$  est une transformation apériodique si elle est ergodique et la mesure de l'ensemble des points périodiques est nulle.

**Théorème 2.13** (Arnoux-Orstein-Weiss). Tout système dynamique apériodique est conjugué à une transformation d'échange d'intervalles dénombrable muni de la mesure de Lebesgue.

Le théorème 2.13 permet de montrer l'existence de TEID's d'entropie arbitraire dans l'intervalle  $[0, \infty]$ . En effet, cela est une conséquence directe du théorème 2.13 et du résultat classique ci-dessous. Comme il n'y a pas une référence précise sur ce dernier résultat, nous le démontrons.

**Théorème 2.14.** *Pour tout  $h \in [0, \infty]$  il existe une transformation apériodique d'entropie  $h$ .*

*Démonstration.* Pour  $h = 0$  il suffit de considérer une rotation irrationnelle du cercle et la mesure de Haar. Pour  $0 < h < \infty$  on utilisera la dynamique symbolique. Soit  $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{k-1})$  un vecteur de probabilité avec  $p_i \neq 0$  pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ . Le décalage bilatéral  $(\Sigma, \mu_{\mathbf{p}}, \sigma)$ , où  $\mu_{\mathbf{p}}$  est la mesure qui donne mesure  $p_i$  au cylindre  $C_i$ , est ergodique (voir [Wal82, Theorem 1.12]). De plus, l'entropie  $h_{\mu_{\mathbf{p}}}(\sigma)$  est égale à  $h_{\mu_{\mathbf{p}}}(\sigma) = -\sum_{i=0}^{k-1} p_i \log p_i$  (voir [Wal82, Theorem 4.26]). D'après ergodicité, l'ensemble des points périodiques du décalage est de mesure nulle ou pleine. Comme l'entropie d'un système dynamique restreint à l'ensemble des points périodiques est égale à zéro, on déduit que la mesure de cet ensemble est nulle. En particulier, le système  $(\Sigma, \mu_{\mathbf{p}}, \sigma)$  est apériodique. Si l'on varie de façon continue le vecteur  $\mathbf{p}$ , alors l'entropie varie aussi de façon continue. Il s'ensuit donc que pour un décalage à  $k$  symboles on peut trouver des mesures d'entropie arbitraire dans  $]0, \log k]$ . Comme  $k$  est arbitraire, on conclut qu'il existe un système apériodique d'entropie arbitraire dans  $]0, \infty[$ . Finalement, pour  $h = \infty$  il suffit de remarquer que si l'on prend  $X = \prod_{k=2}^{\infty} \Sigma_k$ , où  $\Sigma_k$  est le décalage bilatéral à  $k$  symboles, et la mesure  $\mu = \prod_{k=2}^{\infty} \mu_k$  est la mesure produit des mesures équidistribuées dans  $\Sigma_k$ , alors le système dynamique  $(X, \mu, \sigma)$ , où  $\sigma$  est le décalage défini composante par composante, reste apériodique. Le fait que  $(\Sigma_k, \mu_k, \sigma)$  soit un facteur de  $(X, \mu, \sigma)$  pour tout  $k \geq 2$ , entraîne que l'entropie  $h_{\mu}(\sigma) = \infty$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.15.** *Pour tout  $h \in [0, \infty]$  il existe une transformation d'échange d'intervalles dénombrable d'entropie  $h$ .*

## 2.2.2 Constructions

La première étape consiste à construire la variété riemannienne abstraite sur laquelle sera défini chaque contre-exemple. Nous la construirons à partir d'une suspension au-dessus d'une transformation d'échange d'intervalles dénombrable.

### La variété

Soit  $T : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  une transformation d'échange d'intervalles dénombrable (appelée dorénavant TEID). On va fixer d'abord quelques notations. L'intervalle unité ouvert sera noté  $I = ]0, 1[$ , la mesure de Lebesgue sur  $I$  sera notée  $m$  et la famille d'intervalles qui définissent  $T$  sur  $I$  sera notée  $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , avec  $I_0 = ]0, x_1[$  et  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$  pour  $i \geq 1$ . Par simplicité, les longueurs des sous-intervalles seront notées  $l_i = m(I_i)$ . Nous rappelons que la mesure de Lebesgue est  $T$ -invariante et  $T|_{I \setminus S}$  est différentiable, où  $S = \{x_i\}_{i \geq 1}$ .

Pour construire la suspension on a besoin d'une fonction plafond. Pour chaque  $i \in \mathbb{N}$  on prend  $b_i$  un nombre réel positif tel que  $0 < b_i < l_i/2$ . Nous remarquons que la famille  $\{b_i\}$  jouera un rôle fondamental dans la preuve du théorème 2.5. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  on définit cinq sous-intervalles de  $I_i$  comme suit

$$I_{i,1} = ]x_i, x_i + b_i/2[, \quad I_{i,2} = [x_i + b_i/2, x_i + b_i[, \quad I_{i,3} = [x_i + b_i, x_{i+1} - b_i[, \\ I_{i,4} = [x_{i+1} - b_i, x_{i+1} - b_i/2[, \quad I_{i,5} = [x_{i+1} - b_i/2, x_{i+1}[.$$

Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  une fonction de classe  $C^\infty$  telle que  $\alpha|_{]-\infty, 0]} \equiv 1$ , la restriction  $\alpha|_I$  est strictement décroissante et  $\alpha|_{[1, \infty[} \equiv 0$ . On peut considérer par exemple la fonction

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ \exp\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right), & \text{si } x \in I_{i,2} \\ 0, & \text{si } x \in [1, \infty[. \end{cases}$$

Soient  $\gamma_{i,2} : [x_i + b_i/2, x_i + b_i] \rightarrow [0, 1]$  et  $\gamma_{i,4} : [x_{i+1} - b_i, x_{i+1} - b_i/2] \rightarrow [0, 1]$  les deux reparamétrisations de  $I_{i,2}$  et  $I_{i,4}$  définies respectivement par

$$\gamma_{i,2}(x) = \frac{x - (x_i + b_i/2)}{b_i/2} \quad \text{et} \quad \gamma_{i,4}(x) = \frac{x - (x_{i+1} - b_i)}{b_i/2}.$$

Finalement, on considère la fonction  $\alpha_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

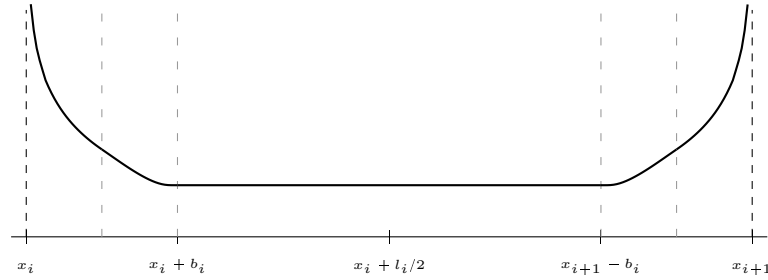
$$\alpha_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I_{i,1} \\ (\alpha \circ \gamma_{i,2})(x), & \text{si } x \in I_{i,2} \\ 0, & \text{si } x \in I_{i,3} \\ 1 - (\alpha \circ \gamma_{i,4})(x), & \text{si } x \in I_{i,4} \\ 1, & \text{si } x \in I_{i,5}. \end{cases}$$

Observons que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\alpha_i$  est de classe  $C^\infty$ . Nous allons définir le plafond  $\tau$  sur chacun des sous-intervalles  $I_i$ . On procède de la façon suivante : Définissons pour  $i \in \mathbb{N}$  la fonction  $f_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^+$  comme étant

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 - \log((x - x_i)/b_i), & \text{si } x \in (x_i, x_i + l_i/2) \\ 1 - \log((x_{i+1} - x)/b_i), & \text{si } x \in [x_i + l_i/2, x_{i+1}). \end{cases}$$

La fonction  $f_i$  est par définition de classe  $C^\infty$  sur  $(x_i, x_i + l_i/2)$  et  $(x_i + l_i/2, x_{i+1})$ . Ainsi, le plafond  $\tau_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $\tau_i(x) = \alpha_i(x)f_i(x) + (1 - \alpha_i(x))$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I_i$ . Il est constant égal à 1 sur  $I_{i,3}$  puisque  $\alpha_i|_{I_{i,3}} \equiv 0$ , et il est égal à  $f_i$  sur  $I_{i,1} \cup I_{i,5}$ . Finalement, on définit le plafond  $\tau$  comme étant égal à  $\tau_i$  sur  $I_i$  et  $\tau(x) = +\infty$  pour  $x \in S$ .

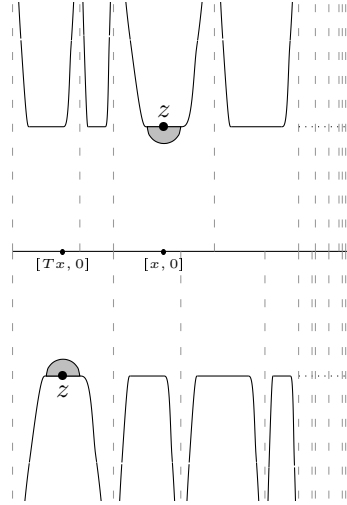
**Graphes du plafond  $\tau_i$**



Considérons  $T$  et  $\tau$  comme ci-dessus. On définit l'espace topologique  $M = M(T, \tau)$  comme étant

$$M = \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} : -\tau(T^{-1}x) \leq t \leq \tau(x)\} / (x, \tau(x)) \sim (Tx, -\tau(x)).$$

On notera  $\pi$  la projection de  $\{(x, t) \in I \times \mathbb{R} : -\tau(T^{-1}x) \leq t \leq \tau(x)\}$  vers  $M$ . Par simplicité, si  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  satisfait  $x \in I$  et  $-\tau(T^{-1}x) \leq t \leq \tau(x)$ , on note  $[x, t]$  sa projection dans  $M$ , c'est-à-dire  $[x, t] = \pi(x, t)$ . On va montrer que, d'une part, l'espace  $M$  admet une structure de variété différentiable, et d'autre part, que  $M$  admet une « bonne » métrique riemannienne. Nous précisons dans la proposition 2.22 l'adjectif « bonne » de la métrique.

L'espace topologique  $M$ 


Soient  $M^*$  et  $F$  les sous-ensembles de  $M$  définis par

$$M^* = \{[x, t] \in M : x \in ]0, 1[, -\tau(T^{-1}x) < t < \tau(x)\}$$

et

$$F = \{[x, \tau(x)] : x \in I \setminus S\}.$$

On considère aussi l'ensemble  $N = \pi^{-1}(M^*) \subset \mathbb{R}^2$ . Les ensembles  $M^*$  et  $F$  seront importants dans la construction des cartes locales pour un atlas différentiable de  $M$ .

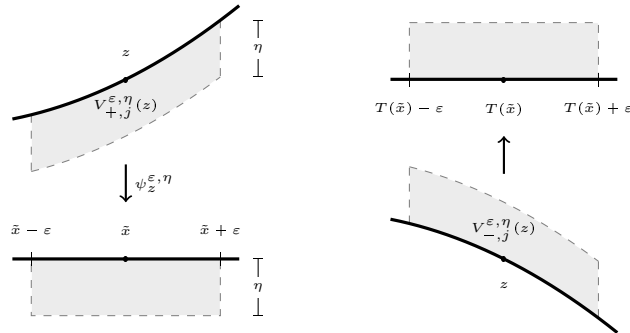
**Proposition 2.16.** *L'espace topologique  $M = M(T, \tau)$  admet une structure de variété différentiable.*

*Démonstration.* Il suffit de construire un atlas différentiable sur  $M$ . On le fera à partir de deux familles de cartes locales. Soit  $z = [x, t] \in M^*$  et  $\varepsilon > 0$  tel que la  $\varepsilon$ -boule euclidienne centrée en  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , notée  $B((x, t), \varepsilon)$ , est contenue dans l'ensemble  $N$ . La carte locale autour de  $z$  est donc définie par l'application inverse  $\psi_z^\varepsilon = \pi^{-1}$  de  $\pi(B((x, t), \varepsilon))$  à  $B((x, t), \varepsilon)$ . On dit qu'une telle carte locale est une *carte locale de première espèce*. Par ailleurs, si  $z = [\tilde{x}, \tau(\tilde{x})] \in F$ , la définition d'une carte locale autour de  $z$  est un peu plus compliquée. Soit  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $\tilde{x} \in I_j$ . Choisissons deux nombres réels (indépendants)  $\varepsilon$  et  $\eta$  tels que  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{|\tilde{x} - x_j|, |\tilde{x} - x_{j+1}|\}$  et  $0 < \eta < \frac{1}{2}$ . On définit ainsi les ensembles  $V_{+,j}^{\varepsilon,\eta}(z)$  et  $V_{-,j}^{\varepsilon,\eta}(z)$  par

$$V_{+,j}^{\varepsilon,\eta}(z) = \{(x, y) : |x - \tilde{x}| < \varepsilon, \tau(x) - \eta < t \leq \tau(x)\}$$

et

$$V_{-,j}^{\varepsilon,\eta}(z) = \{(x, y) : |x - T\tilde{x}| < \varepsilon, -\tau(x) \leq t < -\tau(x) + \eta\}.$$



## 2.2. CONTRE-EXEMPLES À L'INÉGALITÉ DE RUELLE

Remarquons que l'ensemble  $V^{\varepsilon,\eta}(z) = \pi(V_{+,j}^{\varepsilon,\eta}(z) \cup V_{-,j}^{\varepsilon,\eta}(z))$  est un voisinage ouvert de  $z$ . De plus, l'application  $\psi_z^{\varepsilon,\eta} : V^{\varepsilon,\eta}(z) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , définie par

$$\psi_z^{\varepsilon,\eta}([x, t]) = \begin{cases} (x, t - \tau(x)), & \text{si } (x, t) \in V_{+,j}^{\varepsilon,\eta}(z) \\ (x, t + \tau(x)), & \text{si } (Tx, t) \in V_{-,j}^{\varepsilon,\eta}(z), \end{cases}$$

définit une carte locale autour de  $z$  qui est appelée *carte locale de deuxième espèce*.

Il nous reste à montrer que les applications de transition sont de classe  $C^\infty$ . Si deux cartes locales sont en même temps, soit de première espèce, soit de deuxième espèce, alors l'application de transition est l'identité. Elle est bien de classe  $C^\infty$ . Supposons que  $\psi_1$  est une carte locale de première espèce et que  $\psi_2$  est une carte locale de deuxième espèce. L'application  $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$  est soit de la forme  $(x, t) \mapsto (x, t + \tau(x))$ , soit de la forme  $(x, t) \mapsto (Tx, t - \tau(x))$  car le domaine de définition de  $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$  est respectivement soit  $V_{+,j}^{\varepsilon,\eta}(z)$ , soit  $V_{-,j}^{\varepsilon,\eta}(z)$ . Par contre, si l'on considère maintenant l'application  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ , elle sera soit de la forme  $(x, t) \mapsto (x, t - \tau(x))$ , soit de la forme  $(x, t) \mapsto (T^{-1}x, t + \tau(T^{-1}x))$ . Dans tous les cas, les applications de transition sont de classe  $C^\infty$  car  $\tau$  et  $T$  le sont dans les domaines respectifs.  $\square$

Rappelons que  $M^*$  est l'image de  $N$  sous la projection  $\pi$ . Comme  $\pi|_N : N \rightarrow M^*$  est un homéomorphisme, la métrique euclidienne  $\tilde{g}^e$  sur  $\mathbb{R}^2$  induit une métrique riemannienne  $g^e = (\pi|_N^{-1})^* \tilde{g}^e$  sur  $M^*$ . Cette métrique ne peut pas s'étendre à toute la variété  $M$  puisque les cartes locales autour des points de  $F$ , où  $\tau$  n'est pas localement constante, provoquent distorsion de la métrique euclidienne. Malgré tout, on va trouver une métrique riemannienne qui soit localement comparable avec  $g^e$ .

**Définition 2.17.** Soient  $M$  une variété différentiable et  $g^1, g^2$  deux métriques riemanniennes sur  $M$ . Les métriques  $g^1$  et  $g^2$  sont dites *ponctuellement équivalentes* si pour tout  $p \in M$  il existe une constante  $C(p) \geq 1$  telle que pour tout  $v \in T_p M$ , on a

$$C(p)^{-1} \leq \frac{g_p^1(v, v)}{g_p^2(v, v)} \leq C(p).$$

**Proposition 2.18.** La variété différentiable  $M = M(T, \tau)$  admet une métrique riemannienne  $g$  qui est, restreinte à  $M^*$ , ponctuellement équivalente à la métrique euclidienne  $g^e$ .

*Démonstration.* Soit  $z \in F$  et choisissons  $\varepsilon > 0$  et  $0 < \delta < 1/2$  tels que la carte locale de deuxième espèce autour de  $z$  est bien définie. Nous définissons la métrique riemannienne  $h^\delta$  sur  $V^{\varepsilon,\delta}(z)$  par  $h^\delta = (\psi_z^{\varepsilon,\delta})^* \tilde{g}^e$ . Cette métrique est bien définie puisque l'application de transition entre deux cartes locales de deuxième espèce est l'identité. Soit  $R^\delta$  le sous-ensemble de  $M$  défini par

$$R^\delta = \{[x, t] \in M : x \in I \setminus S, -\tau(T^{-1}x) < t < -\tau(T^{-1}x) + \delta \quad \text{ou} \quad \tau(x) - \delta < t \leq \tau(x)\}.$$

On remarque que  $R^\delta$  est l'ensemble de tous les points de  $M$  contenus dans un voisinage de la forme  $V^{\delta,\varepsilon}(w)$ , avec  $w \in F$ . On choisit maintenant une fonction  $\rho_\delta : M \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  telle que  $\rho_\delta|_{M \setminus R^\delta} \equiv 1$ ,  $\rho_\delta|_F \equiv 0$  et  $0 < \rho_\delta < 1$  dans un autre cas. La métrique  $g^\delta$  définie par  $g^\delta = \rho_\delta g^e + (1 - \rho_\delta) h^\delta$  est par construction une métrique riemannienne. Elle coïncide avec la métrique  $g^e$  sur  $M \setminus R^\delta$ .

**Lemme 2.19.** Les métriques riemanniennes  $g^e$  et  $g^\delta$  sont ponctuellement équivalentes sur  $M^*$ .

*Démonstration.* Soit  $z = [x, y] \in M^*$ . On note  $\|\cdot\|_z^\delta$  (resp.  $\|\cdot\|_z^e$ ) la norme induite par  $g^\delta$  (resp.  $g^e$ ) sur  $T_z M$ . Soient  $\tilde{z} \in F$  et  $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} > 0$  tels que  $\psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}}$  est bien définie. On note  $\|d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}}\|$  la norme d'opérateur de la différentielle  $d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}} : (T_z M, g_z^e) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \tilde{g}^e)$ . Si  $z \in V_{+,j}^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}}(\tilde{z})$ , en coordonnées locales, on a

$$d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau'(x) & 1 \end{pmatrix}, \quad d_{\psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}}(z)} (\psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau'(x) & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pas confondre  $\|\cdot\|^\delta$  avec un  $\delta$ -puissance de la norme  $\|\cdot\|_x$ .

Par ailleurs, si  $z \in V_{-,j}^{\tilde{\varepsilon},\delta}(\tilde{z})$ , en coordonnées locales, on a

$$d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau'(T^{-1}x) & 1 \end{pmatrix}, \quad d_{\psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta} z} (\psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau'(T^{-1}x) & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que dans  $\mathbb{R}^n$  la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  est comparable avec la norme supremum  $\|\cdot\|_\infty$  de la façon suivante :

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq n \|\cdot\|_\infty.$$

Comme  $M$  est une variété réel de dimension 2, il découle que  $1 \leq \|d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta}\| \leq 2(1 + |\tau'(x)|)$  et  $1 \leq \|d_{\psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta} z} (\psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta})^{-1}\| \leq 2(1 + |\tau'(x)|)$ . Ainsi, pour tout  $v \in T_z M$ , on a

$$\begin{aligned} (\|v\|_z^\delta)^2 &= g_z^\delta(v, v) = \rho_\delta(z) g_z^e(v, v) + (1 - \rho_\delta) h^\delta(v, v) \\ &= \rho_\delta(z) g_z^e(v, v) + (1 - \rho_\delta) g^e(d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta}(v), d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta}(v)) \\ &\leq \rho_\delta(z) g_z^e(v, v) + (1 - \rho_\delta) \|d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta}\|^2 g_z^e(v, v) \\ &\leq \|d \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta}\|^2 (\|v\|_z^e)^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\|v\|_z^e)^2 &= \|(d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta})^{-1} d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta}(v)\|_z^e)^2 \\ &\leq \|(d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta})^{-1}\|^2 (\|d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta}(v)\|_z^e)^2 \\ &= \|(d_z \psi_{\tilde{z}}^{\tilde{\varepsilon},\delta})^{-1}\|^2 (\|v\|_z^\delta)^2. \end{aligned}$$

Pour  $z = [x, y] \in M^*$ , on pose  $C(z) = (2 + 2|\tau'(x)|)$ . Il s'ensuit que pour tout  $v \in T_z M$ , on a

$$C(z)^{-1} \|v\|_z^e \leq \|v\|_z^\delta \leq C(z) \|v\|_z^e. \quad (2.1)$$

□

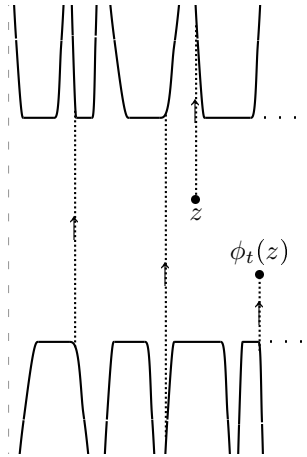
Cela conclut la preuve de la proposition 2.18. □

Observons que la constante  $C$  introduite dans la démonstration du lemme 2.19 n'est pas optimale. En fait, quand  $\tau$  est localement constante, les deux métriques  $g^e$  et  $g^\delta$  coïncident (localement).

### Le difféomorphisme

Dorénavant on considère toujours la variété riemannienne  $(M, g^\delta)$  construite à partir de  $T$  et le plafond  $\tau$ . Soit  $(\phi_t)_t$  le flot de suspension sur  $M$  défini par  $\phi_t[x, s] = [x, s + t]$ . Définissons  $\phi : M \rightarrow M$  comme le temps 1 du flot de suspension, c'est-à-dire  $\phi = \phi_1$ . Ainsi

$$\phi([x, t]) = \begin{cases} [x, t + 1] & \text{si } t + 1 < \tau(x) \\ [Tx, t + 1 - 2\tau(x)] & \text{si } t + 1 \geq \tau(x). \end{cases}$$



Le flot  $(\phi_t)$



Par construction, si un point  $[x, t] \in M$  est tel que  $x \in S$ , alors son orbite positive part directement vers l'infini. Par ailleurs, si  $x \in T(S)$ , alors l'orbite négative de  $[x, t]$  part vers l'infini.

**Proposition 2.20.** *L'application  $\phi : M \rightarrow M$  est de classe  $C^\infty$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $\phi$  est de classe  $C^\infty$  si pour tout couple de cartes locales  $\psi_\alpha$  et  $\psi_\beta$ , l'application  $\phi_{\alpha,\beta} = \psi_\alpha \circ \phi \circ \psi_\beta^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  en tant qu'application définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\psi_\alpha$  et  $\psi_\beta$  sont des cartes locales de première espèce, l'application  $\phi_{\alpha,\beta}$  est égale à  $(x, t) \mapsto (x, t+1)$  ou  $(x, t) \mapsto (Tx, t+1-2\tau(x))$ . Si  $\psi_\alpha$  est une carte locale de première espèce et  $\psi_\beta$  est une carte locale de deuxième espèce, l'application  $\phi_{\alpha,\beta}$  est égale à  $(x, t) \mapsto (Tx, t+1-\tau(x))$ . Si  $\psi_\alpha$  est une carte locale de deuxième espèce et  $\psi_\beta$  est une carte locale de première espèce, alors  $\phi_{\alpha,\beta}$  est égale à  $(x, t) \mapsto (x, t+1-\tau(x))$ . Comme  $\tau \geq 1$ , il n'y a pas d'autres possibilités pour  $\phi_{\alpha,\beta}$ . La régularité de  $\tau$  et  $T$  permettent de conclure la preuve.  $\square$

**Remarque 2.21.** *En utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 2.20 on montre que le flot lui-même ( $\phi_t$ ) est de classe  $C^\infty$ .*

Soit  $\|d\phi\|_\delta$  la norme d'opérateur de  $d\phi$  par rapport à la métrique  $g^\delta$ . Si  $z \in M^* \cap \phi^{-1}(M^*)$  on considère aussi la norme d'opérateur  $\|d_z\phi\|_e$  de  $d\phi$  par rapport à la métrique euclidienne  $g^e$ . La proposition ci-dessous permet de comparer ces deux normes par une « bonne » fonction explicite. Les propriétés de cette fonction seront cruciales dans le calcul des exposants de Lyapounov.

**Proposition 2.22.** *Il existe une fonction explicite  $\beta : M^* \cap \phi^{-1}(M^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , définie dans (2.3), telle que pour tout  $z \in M^* \cap \phi^{-1}(M^*)$ , on a*

$$\|d_z\phi\|_\delta \leq \beta(z)\|d_z\phi\|_e. \quad (2.2)$$

*Démonstration.* En utilisant les calculs dans la preuve du lemme 2.19, pour tout  $z \in M^* \cap \phi^{-1}(M^*)$  et tout  $v \in T_zM$ , on a

$$\begin{aligned} \|d_z\phi(v)\|_{\phi z}^\delta &\leq C(\phi(z))\|d_z\phi(v)\|_{\phi z}^e \\ &\leq C(\phi(z))\|d_z\phi\|_e\|v\|_z^e \\ &\leq C(\phi(z))C(z)\|d_z\phi\|_e\|v\|_z^\delta \\ &\leq (2 + 2|\tau'(x)|) \max_{i=0,1} \{(2 + 2|\tau'(T^i x)|)\} \|d_z\phi\|_e\|v\|_z^\delta. \end{aligned}$$

Rappelons que  $g^\delta$  et  $g^e$  coïncident dans  $M \setminus R^\delta$ . Soit  $K^\delta$  l'ensemble  $K^\delta = \{[x, t] : -\tau(T^{-1}x) + \delta < t < \tau(x) - (1 + \delta)\}$ . Alors, pour  $\beta(z)$  définie par

$$\beta(z) = (2 + 2|\tau'(x)|) \max \{(2 + 2|\tau'(x)|), (2 + 2|\tau'(Tx)|)\} \mathbf{1}_{M \setminus K^\delta}(z) + \mathbf{1}_{K^\delta}(z) \quad (2.3)$$

on déduit (2.2), ce qui conclut la preuve de cette proposition.  $\square$

Rappelons que, pour  $z = [x, t] \in M^* \cap \phi^{-1}(M^*)$  et  $t + 1 < \tau(x)$ , la différentielle  $d_z\phi$  est représentée en coordonnées locales par la matrice identité. Par ailleurs, si  $t + 1 > \tau(x)$  la différentielle  $d_z\phi$  est représentée en coordonnées locales par la matrice

$$d_z\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\tau'(x) & 1 \end{pmatrix}.$$

### La mesure invariante

Nous finissons cette sous-section en décrivant une mesure de probabilité ( $\phi_t$ )-invariante sur  $M$ . D'après la description faite dans la sous-section 2.2.1, il suffit de montrer que

$$\int \tau dm < \infty,$$

où  $m$  est la mesure de Lebesgue sur l'intervalle unité.

**Proposition 2.23.** *L'intégrale  $\int \tau dm$  est finie.*

*Démonstration.* Rappelons que sur  $I_{i,1} \cup I_{i,2}$ , on a  $\tau(x) \leq 2 - \log((x - x_i)/b_i)$ , alors que dans  $I_{i,4} \cup I_{i,5}$ , on a  $\tau(x) \leq 2 - \log((x_{i+1} - x)/b_i)$ . Comme  $\tau|_{I_{i,3}} \equiv 1$ , on déduit

$$\begin{aligned} \int \tau dm &= \int_0^1 \tau(x) dx = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{I_i} \tau(x) dx \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left[ 2 \left( \int_0^{b_i} 2 - \log(x/b_i) dx \right) \right] + l_i - 2b_i \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} 4b_i + l_i \\ &\leq 5. \end{aligned}$$

□

En particulier, la mesure  $\mu = (m \times \text{Leb})|_M / (m \times \text{Leb})(M)$  est une mesure de probabilité sur  $M$  invariante par le flot de suspension.

En résumant, on a construit une variété riemannienne  $(M, g^\delta)$ , un flot  $(\phi_t)$  sur  $M$  de classe  $C^\infty$  et une mesure de probabilité  $(\phi_t)$ -invariante portée sur  $M$ . Comme le système dynamique  $(M, \mu, (\phi_t))$  a été construit comme un flot de suspension avec fonction plafond  $\tau$  et fonction sol  $\tau \circ T^{-1}$ , tous les résultats décrits dans la sous-section 2.2.1 sont applicables dans ce contexte.

### 2.2.3 Preuve du théorème 2.5

Soit  $h \in ]0, \infty]$ . D'après le corollaire 2.15, il existe une transformation d'échange d'intervalles dénombrable  $T : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  telle que  $h_m(T) = h$ . Pour  $0 < \delta < 1/2$  on construit la variété riemannienne  $(M, g^\delta)$ , le flot  $(\phi_t) : M \rightarrow M$  et la mesure de probabilité  $(\phi_t)$ -invariante comme dans la section précédente.

#### Quelques Lemmes Techniques

L'objectif maintenant est de retrouver les hypothèses du théorème d'Oseledets pour l'application  $\phi = \phi_1$ . Nous les obtiendrons sous une condition technique pour les nombres  $b_i$  qui sont utilisés dans la construction du plafond.

**Lemme 2.24.** *Définissons  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  par*

$$h(x) = \begin{cases} 2 + 2|\tau'(x)| & \text{si } x \in I \setminus S \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Si  $-\sum_{i \geq 0} b_i \log b_i < \infty$ , alors  $\log^+(h)$  est  $m$ -intégrable sur  $I$ .*

*Démonstration.* Remarquons qu'il suffit de montrer que  $x \mapsto \log(1 + |\tau'(x)|)$  est  $m$ -intégrable sur  $I$  car

$$h(x) \leq \log(2) + \log(1 + |\tau'(x)|).$$

On rappelle que sur l'intervalle  $I_i$ , le plafond est défini par  $\tau(x) = \alpha_i(x)f_i(x) + (1 - \alpha_i(x))$ . Il s'ensuit que  $|\tau'(x)| \leq |\alpha'_i(x)||f_i(x) - 1| + |f'_i(x)|$ . Ainsi, on a

$$|\tau'(x)| \leq \begin{cases} b_i/(x - x_i) & \text{si } x \in I_{i,1} \\ C/b_i & \text{si } x \in I_{i,2} \\ 0 & \text{si } x \in I_{i,3} \\ C/b_i & \text{si } x \in I_{i,4} \\ b_i/(x_{i+1} - x) & \text{si } x \in I_{i,5}, \end{cases}$$

où  $C \geq 1$  est une constante qui ne dépend que de  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha'(x)| < \infty$ . En particulier, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \log^+(1 + |\tau'(x)|) dx &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^5 \int_{I_{i,k}} \log(1 + |\tau'(x)|) dx \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left( \int_{I_{i,1}} \log \left( 1 + \frac{b_i}{x - x_i} \right) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{I_{i,2}} \log \left( 1 + \frac{C}{b_i} \right) dx + \int_{I_{i,3}} \log(1) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{I_{i,4}} \log \left( 1 + \frac{C}{b_i} \right) dx + \int_{I_{i,5}} \log \left( 1 + \frac{b_i}{x_{i+1} - x} \right) dx \right) \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (3 + \log(2C)) l_i - b_i \log(b_i) \\
 &\leq 3 + \log(2C) - \sum_{i=0}^{\infty} b_i \log(b_i) \\
 &< +\infty.
 \end{aligned}$$

□

L'hypothèse  $-\sum_{i \geq 0} b_i \log b_i < \infty$  est cruciale. En effet, si la transformation d'échange d'intervalles est d'entropie mesurée strictement positive, alors d'après la proposition 2.10, l'entropie de la partition  $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est infinie. Autrement dit, on a  $-\sum_{i=0}^{\infty} l_i \log l_i = \infty$ . Ainsi, les  $b_i$  doivent être choisis de façon convenable (pas arbitraire sous la condition  $0 < b_i < l_i/2$ ). Cela est possible grâce au lemme 2.11.

**Lemme 2.25.** *Si  $-\sum_{i \geq 0} b_i \log b_i < \infty$ , alors*

$$\int \log^+ \|d\phi\|_e d\mu < \infty \quad \text{et} \quad \int \log^+ \|d\phi^{-1}\|_e d\mu < \infty.$$

*Démonstration.* Remarquons que l'ensemble  $M^* \cap \phi^{-1}(M^*)$  est un ensemble de  $\mu$ -mesure pleine. Ainsi on peut supposer que  $z \in M^* \cap \phi^{-1}(M^*)$ . En coordonnées locales, la différentielle est représentée par la matrice identité si  $z \in \{[x, t] \in M : -\tau(T^{-1}x) < t < \tau(x) - 1\}$  et la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\tau'(x) & 1 \end{pmatrix},$$

pour  $z \in \{[x, y] : \tau(x) - 1 < t < \tau(x)\}$ . En particulier, on a  $\|d_z\phi\|_e \leq 2 + 2|\tau'(x)|$ . Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned}
 \int \log^+ \|d\phi\|_e d\tilde{\mu} &= \int_0^1 \int_{\tau(x)-1}^{\tau(x)} \log^+ \|d_z\phi\|_e dt dx \\
 &\leq \int_0^1 \int_{\tau(x)-1}^{\tau(x)} \log^+(2 + 2|\tau'(x)|) dt dx \\
 &= \int \log^+(h) dm \\
 &< +\infty.
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que la dernière intégrale est finie d'après le lemme 2.24. Pour montrer que l'intégrale  $\int \log^+ \|d\phi^{-1}\|_e d\mu$  est finie on procède de manière analogue. □

La conclusion du lemme 2.25 nous donne les hypothèses du théorème d'Oseledets en considérant la métrique  $g^e$ . Pour retrouver les mêmes hypothèses par rapport à la métrique  $g^\delta$ , on utilise l'inégalité (2.2). En effet

**Lemme 2.26.** *Si  $-\sum_{i \geq 0} b_i \log b_i < \infty$ , alors*

$$\int \log^+ \|d\phi\|_\delta d\mu < \infty \quad \text{et} \quad \int \log^+ \|d\phi^{-1}\|_\delta d\mu < \infty.$$

*Démonstration.* L'inégalité (2.2) implique que

$$\begin{aligned} \int \log^+ \|d_z \phi\|_\delta d\mu(z) &\leq \int \log^+ (\beta(z) \|d_z \phi\|_e) d\mu(z) \\ &\leq \int \log^+ \|d_z \phi\|_e d\mu(z) + \int \log^+ \beta(z) d\mu(z). \end{aligned}$$

La première intégrale est finie grâce au lemme 2.25. Pour la deuxième intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int \log^+ \beta d\mu &= \int_0^1 \int_{-\tau(T^{-1}x)}^{-\tau(T^{-1}x)+\delta} \log^+ \beta([x, t]) dt dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_{\tau(x)-(1+\delta)}^{\tau(x)} \log^+ \beta([x, t]) dt dx \\ &\leq (1+2\delta) \int_0^1 2 \log(2+2|\tau'(x)|) + \log(2+2|\tau'(Tx)|) dx \\ &= 3(1+2\delta) \int \log^+(h) dm. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait que  $T$  préserve la mesure de Lebesgue sur  $I$ . Le lemme 2.24 permet de conclure la preuve du lemme 2.26 pour  $\|d\phi\|_\delta$ . En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on montre que l'intégrale  $\int \log^+ \|d\phi^{-1}\|_\delta d\mu$  est finie.  $\square$

**Le cas où  $h = \infty$**

Rappelons que l'un de nos objectifs est de trouver un contre-exemple à l'inégalité de Ruelle. Si l'on suppose que l'entropie est infinie, alors notre construction nous donne déjà un contre-exemple (ou plutôt une famille). En effet, comme le plafond  $\tau$  est  $m$ -intégrable, l'entropie de  $\phi$  est infinie grâce à la formule d'Abramov (voir proposition 2.8). Choisissons les nombres  $b_i$  de sorte que  $-\sum_{i \geq 0} b_i \log b_i < \infty$ . Le lemme 2.26 nous dit que le théorème d'Oseledets s'applique, et en particulier, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$  il existe des exposants de Lyapounov. La remarque importante est la suivante : l'hypothèse d'Oseledets nous dit aussi que la fonction  $\chi^+$  est  $\mu$ -intégrable. En particulier, on a

$$\int \chi^+ d\mu < h_\mu(\phi) = +\infty,$$

ce qui contredit l'inégalité de Ruelle.

**Le calcul des exposants de Lyapounov**

Pour montrer que les exposants de Lyapounov associés à  $g^\delta$  sont  $\mu$ -presque partout nuls, nous allons d'abord montrer que les exposants de Lyapounov associés à la métrique euclidienne le sont. Comme  $M^*$  n'est pas un ensemble invariant, on va travailler sur  $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(M^*)$ . On remarque que cet ensemble est de mesure pleine car  $M^*$  l'est. Une hypothèse importante dans notre calcul des exposants de Lyapounov est l'ergodicité du système dynamique mesuré  $(M, \phi, \mu)$ . Malheureusement, cette hypothèse n'est pas forcément satisfaite. En effet, si  $T$  est ergodique par rapport à  $m$ , alors le flot  $(\phi_t)$  est ergodique par rapport à la mesure  $\mu$  (voir proposition 2.7), ce qui n'entraîne pas que pour  $t \in \mathbb{R}$  l'application  $\phi_t$  soit  $\mu$ -ergodique. Malgré ce fait, le théorème 3.2 de [LS79] nous dit que l'ensemble des temps  $t$  tels que  $\phi_t$  n'est pas  $\mu$ -ergodique est au plus dénombrable. En particulier, il existe un temps  $s$  pour lequel  $\phi_s$  est ergodique. Comme l'entropie vérifie  $h_\mu(\phi_s) = |s|h_\mu(\phi)$  et les exposants de Lyapounov associés à  $\phi_s$  sont  $s$ -multiples des exposants de Lyapounov associés à  $\phi$ , on ne perd rien à supposer que  $s = 1$ . La proposition ci-dessous ([Aar97, Proposition 2.3.1]) est l'outil fondamental pour le calcul des exposants de Lyapounov.

**Proposition 2.27** (Aaronson). *Soit  $(X, \mathcal{B}, m)$  un espace de Lebesgue dont  $m$  est une mesure de probabilité. Supposons que  $T : X \rightarrow X$  est une transformation ergodique qui préserve la mesure  $m$ . Si  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que  $\int \log^+(|h|) dm < \infty$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+ \left| \sum_{i=0}^{n-1} h(T^i x) \right| = 0$$

pour  $m$ -presque tout  $x \in X$ .

*Démonstration du théorème 2.5.* Avec les mêmes notations précédentes, choisissons pour tout  $i \geq 0$  une constante  $0 < b_i < l_i/2$  telle que la série  $-\sum_{i \geq 0} b_i \log b_i$  est finie. Soit  $z = [x, t] \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(M^*)$ . Pour tout  $n \geq 0$ , soit  $k(n) \leq n$  l'entier positif tel que  $\phi^n(z) = [T^{k(n)}x, t']$  pour  $t' \in (-\tau(T^{k(n)-1}x), \tau(T^{k(n)}x))$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|d_z \phi^n\|_e &\leq 2 + 2 \sum_{i=0}^{k(n)} |\tau'(T^i x)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k(n)} (2 + 2|\tau'(T^i x)|) \leq \sum_{i=0}^{n-1} h(T^i x). \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.27, pour  $\mu$ -presque tout  $z \in M$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+ \|d_z \phi^n\|_e &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+ \left( \sum_{i=0}^{n-1} h(T^i x) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, les exposants de Lyapounov associés à  $\phi$ , par rapport à la métrique  $g^e$ , sont  $\mu$ -presque partout nuls car, pour tout  $v \in T_z M$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_z \phi^n(v)\|_{\phi^n z} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\|d_z \phi^n\|_e \|v\|^e) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_z \phi^n\|_e = 0. \end{aligned}$$

En utilisant le même argument pour  $\phi^{-1}$  on conclut que les exposants de Lyapounov négatifs associés à  $\phi$ , par rapport à la métrique  $g^e$ , sont  $\mu$ -presque partout nuls.

Notons  $\lambda^\delta(z, v)$  l'exposant de Lyapounov au point  $z \in M$  dans la direction de  $v \in T_z M$  par rapport à la métrique  $g^\delta$ . Si  $z = [x, t] \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(M^*)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda^\delta(z, v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_z \phi^n(v)\|_{\phi^n z}^\delta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_z \phi^n\|_\delta \|v\|_\delta^\delta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_z \phi^n\|_\delta \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (2 + 2|\tau'(x)|) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max\{(2 + 2|\tau'(x)|), (2 + 2|\tau'(T^{k(n)}x)|)\} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|d_z \phi^n\|_e \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log h(T^{k(n)}x). \end{aligned}$$

Comme la fonction  $\log^+ h$  est  $m$ -intégrable, le théorème ergodique de Birkhoff entraîne

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log h(T^{k(n)}x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} \frac{1}{k(n)} \log h(T^{k(n)}x) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k(n)} \log (h(T^{k(n)}x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour  $m$ -presque tout  $x \in I$ . Ainsi, les exposants de Lyapounov positifs associés à  $\phi$ , par rapport à la métrique  $g^\delta$ , sont  $\mu$ -presque partout nuls. Le même argument pour  $\phi^{-1}$  implique que les exposants de Lyapounov négatifs associés à  $\phi$ , par rapport à la métrique  $g^\delta$ , sont nuls  $\mu$ -presque partout nuls.

En utilisant la formule d'Abramov, on obtient

$$h_\mu(\phi) = \frac{h}{2 \int \tau dm}.$$

Comme  $h_\mu(\phi^s) = |s| h_\mu(\phi)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on conclut que

$$h_\mu(f) = h,$$

pour  $f = \phi^{2 \int \tau dm}$ . Comme les exposants de Lyapounov de  $f$  sont  $\mu$ -presque partout nuls, la démonstration du théorème 2.5 est terminée.  $\square$

**Remarque 2.28.** *La métrique construite dans la démonstration du théorème 2.5 n'est pas complète car la suite  $(z_n)$  définie par*

$$z_n = \left[ 1 - \frac{1}{n}, 0 \right] \in M$$

*est une suite de Cauchy qui ne converge pas dans  $M$ .*

## 2.3 Inégalité de Ruelle pour difféomorphismes linéarisables

On va donner maintenant des conditions suffisantes pour que l'entropie d'un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne satisfasse l'inégalité de Ruelle. Nous nous inspirerons de l'inégalité du théorème 1.40. Le problème qui naît de ce point de vue est le suivant : a priori on n'a pas de bonnes estimations des volumes des boules dynamiques. Malgré cela, on verra que les exposants de Lyapounov positifs apparaissent de manière naturelle comme taux de décroissance exponentielle des volumes des boules de Bowen pour la dynamique de la différentielle.

### 2.3.1 Limites asymptotiques

Soit  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$ . On note  $B_x(0, r)$  la  $r$ -boule centrée en 0 dans  $(T_x M, g_x)$ .

**Définition 2.29.** *La  $(n, r)$ -boule dynamique tangente dans  $T_x M$ , notée  $\mathcal{C}(x, n, r)$ , est définie par*

$$\mathcal{C}(x, n, r) = \bigcap_{i=0}^{n-1} (d_x f^i)^{-1}(B_{f^i x}(0, r)) = \bigcap_{i=0}^{n-1} d_{f^i x} f^{-i}(B_{f^i x}(0, r)).$$

Il est important de remarquer l'analogie entre une boule dynamique tangente et une boule dynamique classique. Une  $(n, r)$ -boule dynamique est définie comme étant l'ensemble

$$B_n(x, r) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i} B(f^i x, r).$$

Autrement dit, pour une boule dynamique tangente on remplace l'application  $f$  par la différentielle  $df$  et la boule  $B(f^i x, r)$  dans  $M$  par la « boule »  $\exp_{f^i x}^{-1} B(f^i x, r) = B_{f^i x}(0, r)$  dans  $T_{f^i x} M$ . On va profiter de l'application exponentielle pour définir la notion de boule dynamique linéarisée. On note  $r_{inj}(x)$  le rayon d'injectivité en  $x \in M$ .

**Définition 2.30.** *Soit  $x \in M$  et  $0 < r \leq r_{inj}(x)$ . La  $(n, r)$ -boule dynamique linéarisée dans  $M$ , notée  $\mathcal{C}_n(x, r)$ , est définie par*

$$\mathcal{C}_n(x, r) = \exp_x \mathcal{C}(x, n, r)$$

Le théorème 2.31 ci-dessous est le principal résultat de cette sous-section. Il nous donne un lien entre le taux de décroissance exponentielle du volume d'une boule dynamique linéarisée, générique pour une mesure donnée, et la somme des exposants de Lyapounov positifs.

**Théorème 2.31.** *Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante. Si  $\log^+ \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ . Alors, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$ , on a*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(\mathcal{C}_n(x, r)) = \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(\mathcal{C}_n(x, r)) = \chi^+(x).$$

Rappelons que volume riemannien « vol » est définie sur une carte locale  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  comme

$$\text{vol}(B) = \int_{\phi(B)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \dots dx^d,$$

où  $B \subset U$  et  $g_{ij} = g(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j)$ . Sur un ensemble compact, le volume est comparable avec le volume euclidien déterminé par les coordonnées locales. Ainsi, en choisissant une bonne carte locale, on trouvera que les estimations du volume d'une boule dynamique linéarisée sont plus simples. Soient  $x \in M$  et  $(v_i)_{i=1}^d$  une base orthonormée de  $T_x M$  pour la métrique  $g_x$ . L'application  $T : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^d$  définie par  $T(v_i) = e_i$ , où  $(e_i)_{i=1}^d$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , est un isomorphisme isométrique. En notant  $\text{vol}_e$  le volume euclidien dans  $\mathbb{R}^d$ , on définit le volume  $\text{vol}_x$  sur  $T_x M$  comme le tiré en arrière par  $T$  de  $\text{vol}_e$ , c'est-à-dire  $\text{vol}_x := T^*(\text{vol}_e)$ . Par définition, le volume  $\text{vol}_x$  est indépendant de la base choisie. On l'appelle le « volume euclidien » sur  $T_x M$ .

Considérons maintenant la carte locale  $\phi_x : B(x, r_{inj}(x)) \rightarrow \mathbb{R}^d$  définie par  $\phi_x = T \circ \exp_x^{-1}$ . En utilisant le fait que  $T$  est une isométrie, on montre :

**Lemme 2.32.** *Les volumes vol et  $(\exp_x^{-1})^* \text{vol}_x$  (ou  $\text{vol}_x$  et  $(\exp_x)^* \text{vol}$ ) sont comparables. De plus, sur un ensemble compact ils sont uniformément comparables.*

Le lemme qui nous permet d'estimer les  $\text{vol}_x$ -volumes des boules dynamiques tangentes à partir des exposants de Lyapounov positifs est le suivant.

**Lemme 2.33.** *Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante ergodique. Si  $\log^+ \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, il existe un ensemble compact  $K \subset M$  tel que pour tout  $x \in K$  il existe une suite  $(t_n)_n$  de nombres réels strictement positifs tels que*

- (1) la  $\mu$ -mesure de  $K$  est plus grande que  $1 - \varepsilon$ ,
- (2) le taux de décroissance exponentielle de  $t_n$  est plus petit que  $2\varepsilon$ , c'est-à-dire que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log t_n \leq 2\varepsilon.$$

- (3) pour tout  $r > 0$  il existe des constantes  $C, C' > 0$  (qui dépendent en  $K, r$  et  $l$ ) tels que, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $x \in K$ , on a

$$\text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r)) \geq C t_n^d \prod_{\lambda_j > 0} \exp(-n \dim(E_j(x))(\lambda_j + \varepsilon)) \quad (2.4)$$

et

$$\text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r)) \leq C' \prod_{\lambda_j > 0} \exp(-n \dim(E_j(x))(\lambda_j - \varepsilon)). \quad (2.5)$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \leq \min\{|\lambda_j| : \lambda_j \neq 0\}/100$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , définissons l'ensemble  $M_{\varepsilon, k}$  comme étant

$$M_{\varepsilon, k} = \{x \in \Lambda : \forall v \in T_x^1 M, \forall |i| \geq k, \exp(i(\lambda(x, v) - \varepsilon)) \leq \|d_x f^i v\| \leq \exp(i(\lambda(x, v) + \varepsilon))\}.$$

Observons que le théorème d'Oseledets implique que  $\mu(M \setminus M_{\varepsilon, k})$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini. En particulier, il existe  $k_0 \geq 1$  tel que  $\mu(M_{\varepsilon, k_0}) \leq \varepsilon/2$ . Comme  $\mu$  est une mesure borélienne, il existe un ensemble compact  $K \subset M_{\varepsilon, k_0}$  tel que  $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ ,  $\int_{M \setminus K} \log^+ \|df^{\pm 1}\| d\mu < \varepsilon$  et les applications  $x \mapsto E_j(x)$  sont continues sur  $K$ . Pour tout  $x \in K$  et  $n \geq 0$ , on définit les ensembles d'entiers  $I_{x, n}$  et  $I_{x, n}^c$  par

$$I_{x, n} = \{k_0 \leq i \leq n : f^i x \in K\}$$

et

$$I_{x, n}^c = \{0 \leq i \leq n : f^i x \notin K\}.$$

D'après la définition d'une boule dynamique tangente, on a

$$\mathcal{C}(x, n, r) = \mathcal{C}_K(x, n, r) \cap \mathcal{C}_{K^c}(x, n, r),$$

où

$$\mathcal{C}_K(x, n, r) = \bigcap_{i \in I_{x, n}} (d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}(0, r)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{K^c}(x, n, r) = \bigcap_{i \in I_{x, n}^c} (d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}(0, r)).$$

Nous utiliserons souvent les estimations classiques de calcul différentiel ci-dessous pour estimer le volume  $\text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r))$ .

$$(d_x f^i)(B_x(0, r)) \subset B_{f^i x}(0, \|d_x f^i\| r) \subset T_{f^i x} M, \quad (2.6)$$

et

$$B_x(0, \|d_x f^i\|^{-1} r) \subset (d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}(0, r)). \quad (2.7)$$

Finalement, comme les applications  $x \mapsto E_j(x)$  sont continues sur  $K$ , il existe un angle  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in K$  et tout couple  $(j_1, j_2)$ , avec  $j_1 \neq j_2$ , on a

$$\angle(E_{j_1}(x), E_{j_2}(x)) \geq \alpha. \quad (2.8)$$

**Étape I : Majoration du volume.** L'inégalité (2.5) s'ensuit directement de l'inclusion  $\mathcal{C}(x, n, r) \subset \mathcal{C}_K(x, n, r)$ . En effet, soit  $w = (d_{f^i x} f^{-i})v$ , où  $v \in B_{f^i x}(0, r) \cap E_j(f^i x)$ ,  $1 \leq j \leq s$  et  $i \in I_{x, n}$ . D'après la définition de  $M_{\varepsilon, k_0}$ , on a

$$\begin{aligned} \|w\| = \|d_{f^i x} f^{-i} v\| &\leq \|d_{f^i x} f^{-i}\| \|v\| \\ &\leq \exp(-i(\lambda(f^i x, v) - \varepsilon)) \|v\| \\ &= \exp(-i(\lambda_j - \varepsilon)) \|v\|. \end{aligned}$$

Soit  $z \in K$ . Pour  $v \in B_z(0, r)$  nous considérons la décomposition  $v = \sum_j v_j$  de  $v$  comme somme directe des vecteurs dans les espaces caractéristiques. La loi des sinus entraîne

$$\|v_j\|_z \leq \frac{\|v\|_z}{\sin(\alpha)}.$$

Ainsi, grâce à (2.6), on a

$$\begin{aligned} (d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}(0, r)) &\subseteq (d_{f^i x} f^{-i}) \left( \prod_{j=1}^l B_{f^i x}^j(0, r/\sin(\alpha)) \right) \\ &\subseteq \prod_{j=1}^l (d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}^j(0, r/\sin(\alpha))) \\ &\subseteq \left( \prod_{\lambda_j \leq 0} B^j(0, r/\sin(\alpha)) \right) \times \left( \prod_{\lambda_j > 0} B^j(0, \exp(-i(\lambda_j - \varepsilon)) r/\sin(\alpha)) \right). \end{aligned}$$



Le dernier ensemble ci-dessus est un parallélépipède (de dimension  $d$ ). Son volume est comparable avec le volume du parallélépipède rectangle d'arêtes de même longueur. La constante de comparaison ne dépend que des angles déterminés par les arêtes. Ces angles sont minorés par  $\alpha$  d'après (2.8), donc il existe une constante  $\tilde{C}' = \tilde{C}'(\alpha) > 0$ , telle que

$$\text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r)) \leq \tilde{C}'(r/\sin(\alpha))^d \prod_{\lambda_j > 0} \exp(-n \dim(E_j(x))(\lambda_j - \varepsilon)).$$

En particulier, l'inégalité (2.5) est satisfaite pour  $C' = \tilde{C}'(r/\sin(\alpha))^d$ .

**Étape II : Minoration du volume.** Comme on n'a pas de contrôle du comportement de la différentielle dehors le compact  $K$ , nous allons réduire le problème d'estimation du volume de  $\mathcal{C}(x, n, r)$  au problème d'estimer le volume de  $\mathcal{C}_K(x, n, r)$ . Pour  $i \in I_{x,n}$ , on définit  $j(i)$  comme le nombre d'indices consécutifs plus grands que  $i$  qui appartiennent à  $I_{x,n}^c$ , c'est-à-dire

$$j(i) = \begin{cases} \max\{j \geq 1 : i + m \in I_{x,n}^c, \forall 1 \leq m \leq j\}, & \text{si } i + 1 \in I_{x,n}^c \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $i \in I_{x,n}$  et supposons  $j(i) \geq 1$ . Par définition, on a  $i + m \in I_{x,n}^c$  pour tout  $1 \leq m \leq j(i)$  et  $i + j(i) + 1 \in I_{x,n}$ . En utilisant l'inclusion (2.7) on déduit

$$\begin{aligned} d_{f^{i+m}x} f^{-(i+m)}(B_{f^{i+m}x}(0, r)) &= d_{f^i x} f^{-i} d_{f^{i+m}x} f^{-m}(B_{f^{i+m}x}(0, r)) \\ &\supset d_{f^i x} f^{-i} B_{f^i x}(0, \|d_{f^i x} f^m\|^{-1} r) \\ &\supset d_{f^i x} f^{-i} B_{f^i x} \left( 0, \left( \prod_{m'=0}^{m-1} \min\{1, \|d_{f^{i+m'}x} f\|^{-1}\} \right) r \right) \\ &\supset d_{f^i x} f^{-i} B_{f^i x} \left( 0, \left( \prod_{k \in I_{x,n}^c} \min\{1, \|d_{f^k x} f\|^{-1}\} \right) r \right). \end{aligned}$$

La suite d'inclusions ci-dessus implique que tout ensemble de la forme  $d_{f^k x} f^{-k}(B_{f^k x}(0, r))$ , avec  $k \in I_{x,n}^c$ , contient un ensemble de la forme  $(d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}(0, t_n r))$ , où  $i \in I_{x,n} \cup \{0\}$  et  $t_n = \prod_{k \in I_{x,n}^c} \min\{1, \|d_{f^k x} f\|^{-1}\}$ . Ainsi,

$$\mathcal{C}(x, n, r) \supset \mathcal{C}_K(x, n, t_n r). \quad (2.9)$$

Le point (2) du lemme 2.33 découle du théorème ergodique de Birkhoff. Précisément, pour tout  $n$  suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \frac{-1}{n} \log t_n &= -\frac{1}{n} \sum_{k \in I_{x,n}^c} \log \min\{1, \|d_{f^k x} f\|^{-1}\} \\ &\leq -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{K^c}(f^k x) \log \min\{1, \|d_{f^k x} f\|^{-1}\} \\ &\leq \int_{M \setminus K} \log^+ \|df\| d\mu + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $i \in I_{x,n}$ . Pour  $w = (d_{f^i x} f^{-i})v$ , où  $v \in B_{f^i x}(0, r) \cap E_j(f^i x)$  et  $1 \leq j \leq l$ , on a  $w \in E_j(x)$ . D'après la définition de  $M_{\varepsilon, k_0}$ , on obtient pour  $i \geq k_0$  l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|w\| = \|d_{f^i x} f^{-i} v\| &\geq \exp(-i(\lambda(f^i x, v) + \varepsilon)) \|v\| \\ &= \exp(-i(\lambda_j + \varepsilon)) \|v\|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pour tout  $1 \leq j \leq l$  considérons  $B_x^j(0, r)$  la  $r$ -boule centrée en 0 dans l'espace caractéristique  $E_j(x)$  (pour la distance induite par  $g_x|_{E_j(x)}$ ). D'après l'inégalité (2.10), on a

$$\begin{aligned} (d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}(0, r)) &\supseteq (d_{f^i x} f^{-i}) \left( \prod_{j=1}^l B_{f^i x}^j(0, r/l) \right) \\ &= \prod_{j=1}^l (d_{f^i x} f^{-i})(B_{f^i x}^j(0, r/l)) \\ &\supseteq \prod_{j=1}^l B_x^j(0, \exp(-i(\lambda_j + \varepsilon))r/l) \\ &\supseteq \left( \prod_{\lambda_j \leq 0} B_x^j(0, r/l) \right) \times \left( \prod_{\lambda_j > 0} B_x^j(0, \exp(-i(\lambda_j + \varepsilon))r/l) \right). \end{aligned}$$

Les mêmes arguments que dans la première partie montrent l'existence d'une constante  $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha) > 0$  satisfaisant la propriété suivante : le volume

$$\text{vol}_x \left( \prod_{\lambda_j \leq 0} B_x^j(0, r/l) \times \prod_{\lambda_j > 0} B_x^j(0, \exp(-i(\lambda_j + \varepsilon))r/l) \right)$$

est plus grand que

$$\tilde{C}(r/l)^d \prod_{\lambda_j > 0} \exp(-n \dim(E_j(x))(\lambda_j + \varepsilon)).$$

L'inégalité ci-dessus avec (2.9) implique (2.4) pour  $C = \tilde{C}(r/l)^d$ .  $\square$

**Remarque 2.34.** Soit  $0 < \rho \leq 1$ . Les constantes  $C = C(r)$  et  $C' = C'(r)$  qui apparaissent respectivement dans (2.4) et (2.5) satisfont par construction

$$C(\rho r) = \rho^d C(r) \quad \text{et} \quad C'(\rho r) = \rho^d C'(r).$$

Maintenant nous sommes prêts à montrer le théorème 2.31. On divisera la preuve en deux étapes. La première consiste à supposer que la mesure est ergodique. La deuxième, qui découle de la première étape, comprendra le cas non-ergodique.

*Démonstration du théorème 2.31.* Supposons que  $\mu$  est une mesure ergodique. Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit de sorte qu'on peut appliquer le lemme 2.33. En utilisant les mêmes notations, soit  $K = K(\varepsilon, k_0)$  le compact de la conclusion de ce lemme. Ainsi, pour tout  $x \in K$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r)) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log t_n + \sum_{\lambda_j > 0} (\lambda_j + \varepsilon) \dim(E_j(x)) \\ &\leq 2d\varepsilon + \sum_{\lambda_j > 0} (\lambda_j + \varepsilon) \dim(E_j(x)) \end{aligned}$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r)) \geq \sum_{\lambda_j > 0} (\lambda_j - \varepsilon) \dim(E_j(x)).$$

D'après la construction de  $K$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\mu(K) \rightarrow 1$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ainsi, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r)) \geq \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j \dim(E_j(x)) \quad (2.11)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}_x(\mathcal{C}(x, n, r)) \leq \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j \dim(E_j(x)). \quad (2.12)$$

La conclusion du théorème 2.31 pour le cas ergodique découle des inégalités (2.11) et (2.12), plus le lemme 2.32. En effet, les constantes de comparaison des volumes riemannien et euclidien n'interfèrent pas dans le calcul des limites asymptotiques.

Le cas non-ergodique s'ensuit facilement du théorème de décomposition Ergodique. Supposons que  $\mu = \int \mu_x d\mu(x)$  est la décomposition ergodique de  $\mu$ . Pour  $x \in M$  générique, soit  $M_x$  l'ensemble de  $\mu_x$ -mesure pleine dont les conclusions théorème 2.31 s'appliquent. Soit  $M_\mu = \bigcup_x M_x$ . Alors

$$\mu(M_\mu) = \int \mu_x(M_\mu) d\mu(x) \geq \int \mu_x(M_x) d\mu(x) = 1.$$

Ainsi, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$ , les limites

$$\lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(\mathcal{C}_n(x, r))$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \text{vol}(\mathcal{C}_n(x, r))$$

coïncident et sa valeur est la somme des exposants de Lyapounov positifs  $\chi^+(x) = \chi^+|_{M_x}$ .  $\square$

### 2.3.2 Une condition suffisante

On a vu que le taux de décroissance exponentielle des volumes des boules dynamiques linéarisées est génériquement égal à la somme des exposants de Lyapounov positifs. Par ailleurs, l'entropie mesurée est majorée par le taux de décroissance exponentielle des volumes des boules dynamiques au sens de Bowen. Si l'on met ces deux résultats ensemble, on pourrait en déduire l'inégalité de Ruelle à condition d'avoir connaissance d'une « bonne » comparaison entre le difféomorphisme et sa différentielle.

**Définition 2.35.** Soit  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne. Pour tout compact  $K \subset M$  on définit  $\rho(f, K, n)$  comme le supremum des  $0 < \rho \leq 1$  tels que l'inclusion

$$\frac{1}{2}(B_x(0, r) \cap d_{f^i x} f^{-i} \exp_{f^i x}^{-1} B(f^i x, r)) \subset \exp_x^{-1}(B(x, r) \cap f^{-i} B(f^i x, r)) \quad (2.13)$$

est satisfaite pour tout  $x \in K$ ,  $0 \leq i \leq n$  et  $0 < r \leq \rho \min_{x \in K} r_{inj}(x)$ .

La valeur  $\rho(f, K, n)$  est strictement positive grâce à la continuité de  $f$ ,  $df$  et  $\exp_x$ . De plus, elle est décroissante en  $n \geq 0$ . L'inclusion (2.13) permet de comparer les boules dynamiques avec les boules dynamiques linéarisées d'après la proposition suivante.

**Proposition 2.36.** Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne et  $K \subset M$  un ensemble compact. Alors, pour tout  $x \in K$  et  $0 < r \leq \min_{x \in K} r_{inj}(x)$ , on a

$$\mathcal{C}_n(x, \rho(f, K, n)r) \subset B_n(x, 2r). \quad (2.14)$$

*Démonstration.* L'inclusion (2.14) s'ensuit de (2.13). En effet, pour tout  $0 < \rho \leq \rho(f, K, n)$ , on a

$$\begin{aligned}
 C_n(x, \rho r) &= \exp_x \left( \bigcap_{i=0}^{n-1} d_{f^i x} f^{-i} B_{f^i x}(0, \rho r) \right) \\
 &= \exp_x \left( \bigcap_{i=0}^{n-1} B_x(0, \rho r) \cap d_{f^i x} f^{-i} \exp_{f^i x}^{-1} B(f^i x, \rho r) \right) \\
 &\subset \exp_x \left( \bigcap_{i=0}^{n-1} \exp_x^{-1} (B(x, 2\rho r) \cap f^{-i} B(f^i x, 2\rho r)) \right) \\
 &= B_n(x, 2\rho r) \subset B_n(x, 2r).
 \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant donner une condition suffisante pour retrouver l'inégalité de Ruelle. Cette condition nous dit qu'un difféomorphisme asymptotiquement linéaire satisfait cette inégalité. Malheureusement, à notre connaissance, il n'y a pas de raisons pour que cette condition soit toujours satisfaite dans le cas d'une variété compacte, même pour un difféomorphisme uniformément hyperbolique.

**Théorème 2.37.** *Soient  $f : M \rightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne complète et  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $f$ -invariante ergodique telle que  $\log^+ \|df^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$ . Si pour tout ensemble compact  $K \subset M$ , on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \rho(f, K, n) = 0, \quad (2.15)$$

alors

$$h_\mu(f) \leq \chi^+.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $K \subset M$  l'ensemble compact donné par le lemme 2.33. Par simplicité on note  $\rho_n = \rho(f, K, n)$ . D'après (2.14), on a

$$\begin{aligned}
 h_\mu^{\text{vol}}(f, K) &= \operatorname{ess\,sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ f^n x \in K}} -\frac{1}{n} \log \operatorname{vol}(B_n(x, r)) \\
 &\leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \operatorname{vol}(C_n(x, \rho_n r/2)).
 \end{aligned}$$

L'inégalité (2.4) et la remarque 2.34 impliquent

$$\begin{aligned}
 h_\mu^{\text{vol}}(f, K) &\leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in K} \lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log (C(r) \rho_n^d t_n^d \exp(-n(\chi^+ + \varepsilon))) \\
 &\leq 2d\varepsilon + \chi^+ + \varepsilon + d \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \rho(f, K, n) \\
 &= \varepsilon(2d + 1) + \chi^+.
 \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le théorème 1.40 plus le fait que  $\varepsilon$  est arbitraire, on conclut que

$$h_\mu(f) \leq \chi^+.$$

□

## Chapitre 3

# Inégalité de Ruelle pour le flot géodésique

Dans ce chapitre nous étudions la validité de l'inégalité de Ruelle dans un cadre plus particulier : le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne à courbure négative. Nous remarquons que les techniques utilisées par la suite sont différentes à celles adoptées dans le chapitre précédent. En effet, la géométrie de la variété porte beaucoup d'informations, telles que l'hyperbolicité du flot et la régularité des feuilletages fortement stable et instable. Cela nous permet d'étudier la dynamique du flot géodésique en utilisant quelques outils de [LS82], [Led84a], [LY85a] pour le cas compact, adaptés au cas non compact dans [OP04] et [PPS12].

### 3.1 L'inégalité de Ruelle

Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . On note  $T^1X$  son fibré unitaire tangent. Rappelons que la mesure de Liouville  $\text{vol}_{T^1X}$  sur  $T^1X$  est le volume riemannien induit par la métrique de Sasaki sur  $T^1X$ . D'après le théorème de Liouville, la mesure  $\text{vol}_{T^1X}$  est invariante par l'action du flot géodésique  $(g_t)$  sur  $T^1X$  (voir par exemple [Pat99, Corollaire 1.31]). Soit  $d$  la distance riemannienne sur  $T^1X$ . La variété fortement instable de  $v \in T^1X$ , notée  $W^{su}(v)$ , est définie par

$$W^{su}(v) = \{w \in T^1X : \lim_{t \rightarrow \infty} d(g_{-t}v, g_{-t}w) = 0\}.$$

De manière analogue on définit la variété fortement instable de  $v \in T^1X$ , notée  $W^{ss}(v)$ , par

$$W^{ss}(v) = \{w \in T^1X : \lim_{t \rightarrow \infty} d(g_tv, g_tw) = 0\}.$$

Les variétés fortement instable et stable sont des sous-variétés lisses immergées dans  $T^1X$ . Notons  $E^{su}(v)$  l'espace tangent de  $W^{su}(v)$  en  $v$ . Le *Jacobien fortement instable*  $J^{su}(v, t)$  de l'application  $g_t : W^{su}(v) \rightarrow W^{su}(g_tv)$  est le déterminant de  $(d_v g_t)|_{E^{su}(v)}$ . Finalement, on définit le *potentiel géométrique*  $F^{su}(v)$  comme étant

$$F^{su}(v) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \log J^{su}(v, t).$$

Le potentiel géométrique jouera un rôle fondamental dans ce chapitre car il est étroitement lié aux exposants de Lyapounov (voir proposition 3.2 ci-dessous). Tout d'abord on va donner quelques propriétés de ce potentiel (voir [Bal95] pour le cas compact et [PPS12, Théorème 7.1] pour le cas non compact).

**Théorème 3.1** (Paulin-Pollicott-Schapira). *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Alors  $F^{su}$  est Hölder-continu et borné.*

Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $T^1X$  invariante par le flot géodésique. Comme les courbures sectionnelles sont pincées, la norme  $\|dg_t\|$  est bornée pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier, on a  $\log^+ \|dg_t\| \in L^1(\mu)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ , on note  $\chi^+(v, t)$  la somme des exposants de Lyapounov positifs en  $v$  associés à  $g_t$ . Pour simplifier on notera  $\chi^+(v) = \chi^+(v, 1)$  et  $g = g_1$ . En particulier, la somme des exposants de Lyapounov positifs associés à  $g$  est égal à  $\chi^+(v)$ .

La notation  $E^{su}$  pour la distribution instable est justifiée par le fait suivant. Si  $v$  est un vecteur régulier (au sens des exposants de Lyapounov), alors la somme directe des espaces caractéristiques liés aux exposants de Lyapounov strictement positifs coïncide avec l'espace tangent de  $W^{su}(v)$  en  $v$ . C'est-à-dire que, pour tout vecteur régulier  $v \in T^1X$ , on a

$$E^{su}(v) = \bigoplus_{\lambda_j(v) > 0} E_j(v).$$

**Proposition 3.2.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Si  $\mu$  est une mesure de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $T^1X$ , alors*

$$\int_{T^1X} F^{su} d\mu = - \int \chi^+ d\mu.$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $\mu$  est une mesure ergodique pour  $g$ . Soit  $v \in T^1X$  un vecteur  $\mu$ -générique. Le théorème ergodique de Birkhoff et la proposition 2.4 entraînent

$$\begin{aligned} \int_{T^1X} F^{su} d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n F^{su}(g^t v) dt \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log J^{su}(v, n) \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log J^{su}(g^i v, 1) \\ &= - \int \chi^+ d\mu. \end{aligned}$$

Le cas d'une mesure non-ergodique découle du théorème de décomposition ergodique.  $\square$

La pierre angulaire de la preuve de l'inégalité de Ruelle pour le flot géodésique est le fait que la mesure de Liouville satisfait la propriété de Gibbs pour le potentiel géométrique (voir [BR75, Volume lemma] et [KHM95, Lemma 20.4.2] pour le cas compact, et [PPS12, Theorem 7.9] pour le cas général). Cette propriété nous donne une estimation précise, liée au potentiel  $F^{su}$ , du volume d'une boule dynamique.

**Proposition 3.3** (Bowen-Ruelle/Paulin-Pollicott-Schapira). *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Alors pour tout ensemble compact  $K \subset T^1X$  et tout  $r > 0$  il existe une constante  $C = C_{K,r} \geq 1$  telle que pour tout  $v \in K$  et tout  $n \geq 0$  telle que  $g_n v \in K$ , on a*

$$C^{-1} \leq \frac{\text{vol}_{T^1X}(B_n(v, r))}{\exp\left(\int_0^n F^{su}(g_t v) dt\right)} \leq C. \quad (3.1)$$

Nous remarquons que l'hypothèse sur les dérivées partielles des courbures sectionnelles est cruciale. Elle entraîne en particulier que la régularité des feuilletages fortement instable et stable est Hölder. Cela permet d'estimer le volume d'une boule dynamique grâce à la structure de produit local du volume riemannien à partir des volumes riemanniens sur les feuilles instables et stables (voir [PPS12, Theorem 7.6]).

**Théorème 3.4.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures*

sectionnelles uniformément bornées. Alors pour toute mesure  $\mu$  de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $T^1X$ , on a

$$h_\mu(g) \leq \int \chi^+ d\mu. \quad (3.2)$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité on peut supposer que  $\mu$  est une mesure ergodique pour le flot géodésique. De manière analogue à la démonstration du théorème 2.5, on ne perd rien à supposer que  $\mu$  est ergodique pour  $g = g_1$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $K \subset T^1X$  un ensemble compact tel que

$$h_\mu^{\text{vol}}(g) \leq h_\mu^{\text{vol}}(g, K) + \varepsilon.$$

Le théorème 1.40, l'inégalité (3.1), le théorème ergodique de Birkhoff et la proposition 3.2 impliquent successivement

$$\begin{aligned} h_\mu(g) &\leq h_\mu^{\text{vol}}(g) < h_\mu^{\text{vol}}(g, K) + \varepsilon \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{v \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ g_n v \in K}} -\frac{1}{n} \log \operatorname{vol}(B_n(v, r)) + \varepsilon \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{v \in K} \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ g_n v \in K}} -\frac{1}{n} \log \left( C \exp \left( \int_0^n F^{su}(g_t v) dt \right) \right) + \varepsilon \\ &= - \int F^{su} d\mu + \varepsilon = \int \chi^+ d\mu + \varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient l'inégalité (3.2).  $\square$

## 3.2 La formule de Pesin

Étant donnée l'inégalité de Ruelle, la question naturelle qui apparaît est la suivante :

Sous quelles conditions a-t-on égalité dans l'inégalité de Ruelle ?

On va répondre à cette question en suivant les méthodes de Ledrappier-Strelcyn [LS82], Ledrappier [Led84a] et Ledrappier-Young [LY85a] dans le cadre d'un difféomorphisme de classe  $C^{1+\alpha}$  d'une variété riemannienne compacte. Ces méthodes ont été adaptés au cas du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne non compacte à courbure négative pincée par Otal-Peigné [OP04] pour montrer l'existence d'une mesure qui maximise l'entropie.

Avant de énoncer le théorème principal de cette section, on va donner quelques préliminaires.

**Définition 3.5.** Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité sur  $T^1X$ . Une partition  $\xi$  de  $T^1X$  est dite  $\mu$ -mesurable s'il existe un ensemble de mesure pleine  $Z \subset T^1X$ , et une collection dénombrable  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments dans la  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(\xi)$  tels que pour tous les éléments distincts  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de  $\xi$ , il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que soit  $\xi_1 \cap Z \subset A_i$  et  $\xi_2 \cap Z \subset T^1X \setminus A_i$ , soit  $\xi_1 \cap Z \subset T^1X \setminus A_i$  et  $\xi_2 \cap Z \subset A_i$ .

D'après un théorème de Rokhlin (voir [Roh52, Section §3]), à une partition  $\mu$ -mesurable  $\xi$  de  $T^1X$  on peut associer un système canonique de mesures conditionnelles portées par les atomes de la partition.

**Théorème 3.6** (Rokhlin). Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité sur  $T^1X$  et  $\xi$  une partition  $\mu$ -mesurable de  $T^1X$ . Alors il existe une collection  $\{\mu_{\xi(v)}\}_{v \in T^1X}$  de mesures telle que pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ , on a que

- (1) la mesure  $\mu_{\xi(v)}$  est une mesure de probabilité sur l'atome  $\xi(v)$ ,
- (2) pour tout ensemble  $B \in \mathcal{B}$ , l'application  $v \mapsto \mu_{\xi(v)}(B \cap \xi(v))$  est  $\sigma(\xi)$ -mesurable, et
- (3) la mesure  $\mu$  se décompose comme

$$\mu(B) = \int \mu_{\xi(v)}(B \cap \xi(v)) d\mu(v).$$

Le théorème de Rokhlin ci-dessus est en quelque sorte une généralisation du théorème de décomposition ergodique. En effet, si  $\mathcal{I}$  est la  $\sigma$ -algèbre des ensembles invariants, alors elle induit une partition  $\xi_{\mathcal{I}}$  de  $T^1X$ , qui est en fait  $\mu$ -mesurable. Ainsi, le système canonique de mesures conditionnelles associé est exactement la famille de mesures conditionnelles ergodiques de la décomposition.

Le théorème de Rokhlin permet aussi de généraliser la définition d'entropie pour des partitions mesurables. Tout d'abord il faut parler de partitions décroissantes. Une partition  $\mu$ -mesurable est dite décroissante si pour tout  $t \geq 0$ , la partition  $g_{-t}\xi$  est plus fine que  $\xi$ .

**Définition 3.7** (Parry). *L'entropie de  $(g_t)$  relativement à une partition  $\mu$ -mesurable  $\xi$  décroissante, notée  $h_{\mu}(g, \xi)$ , est définie par*

$$h_{\mu}(g, \xi) = \int I_{\mu}(g_{-1}\xi|\xi)(v)d\mu(v),$$

où  $I_{\mu}(g_{-1}\xi|\xi)(v) = -\log \mu_{\xi(v)}((g_{-1}\xi)(v))$  est la fonction information de  $g_{-1}\xi$  relativement à la partition  $\xi$ .

D'après un théorème de Parry [Par69, Theorem 5.14], le supremum des entropies des partitions  $\mu$ -mesurables décroissantes coïncide avec l'entropie mesurée classique de  $\mu$ . Ce fait permettra d'estimer l'entropie mesurée en utilisant des partitions  $\mu$ -mesurables décroissantes. Par ailleurs, comme les exposants de Lyapounov sont liés au feuilletage fortement instable (voir proposition 3.2), on s'intéresse à une classe particulière de partitions dont chaque atome est contenu dans une variété fortement instable.

**Définition 3.8.** *Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité sur  $T^1X$  et  $\xi$  une partition  $\mu$ -mesurable de  $T^1X$ . La partition  $\xi$  est dite subordonnée au feuilletage instable si pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ , on a*

- (1) *l'atome  $\xi(v)$  est contenu dans la feuille  $W^{su}(v)$ , et*
- (2) *l'atome  $\xi(v)$  contient un voisinage ouvert de  $v$  dans  $W^{su}(v)$  (pour la topologie de  $W^{su}(v)$  comme sous-variété).*

Comme dans [Pes77], [Led84a], [LS82] et [LY85a, LY85b], nous nous intéressons aux mesures qui sont absolument continues par rapport aux volumes Riemanniens. Pour tout  $v \in T^1X$  on note  $\text{vol}_{W^{su}(v)}$  le volume riemannien sur  $W^{su}(v)$  de la métrique induite par la restriction de la métrique de Sasaki à  $W^{su}(v)$ .

**Définition 3.9.** *On dit qu'une mesure  $\mu$  de  $T^1X$  a des mesures conditionnelles absolument continues sur les variétés instables, si pour toute partition  $\mu$ -mesurable  $\xi$  subordonnée au feuilletage instable, on a  $\mu_{\xi(v)} \ll \text{vol}_{W^{su}(v)}$  pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ .*

Le théorème principal de cette section est le suivant :

**Théorème 3.10.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $T^1X$ . Alors  $\mu$  a des mesures conditionnelles absolument continues sur les variétés instables, si et seulement si, on a*

$$h_{\mu}(g) = \int \chi^+ d\mu.$$

Pour montrer le théorème 3.10 nous aurons besoin de deux résultats techniques fondamentaux. Le premier est l'existence de partitions subordonnées au feuilletage instable et le deuxième est un calcul de l'entropie mesurée.

**Proposition 3.11.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $T^1X$ . Si  $\mu$  est ergodique pour  $g = g_1$ , alors il existe une partition  $\mu$ -mesurable  $\xi$  de  $T^1X$  telle que*



- (1) la partition  $\xi$  est décroissante,
- (2) la partition  $\bigvee_{n \geq 0} g_{-n}\xi$  est la partition de points,
- (3) la partition  $\xi$  est subordonnée au feuilletage fortement instable  $W^{su}$ ,
- (4) pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , on a  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g_n \xi(g_{-n}v) = W^{su}(v)$ ,
- (5) pour tout borélien  $B \subset T^1X$  l'application

$$\psi_B(v) = \text{vol}_{W^{su}(v)}(\xi(v) \cap B)$$

est mesurable et  $\mu$ -presque partout finie.

- (6) pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ , si  $w, w' \in \xi(v)$  alors le produit infini

$$\Delta(w, w') = \frac{\prod_{n=0}^{\infty} J^{su}(g_{-n}v, 1)}{\prod_{n=0}^{\infty} J^{su}(g_{-n}w, 1)}$$

converge, et

- (7) il existe des constantes  $C > 0$  et  $0 < \alpha < 1$ , tels que si  $w \in \xi(v)$ , alors

$$|\log \Delta(v, w)| \leq C(d(v, w))^\alpha.$$

*Démonstration.* Pour montrer les points (1)-(4) nous utiliserons la même construction faite dans [OP04]. Pour les points (5)-(7) nous utiliserons une version modifiée de [Led84a, Proposition 3.1].

Pour  $u \in T^1X$  et  $r > 0$  on note  $\mathbf{B}^{su}(u, r)$  (resp.  $\mathbf{B}^{ss}(u, r)$ ) la boule de centre  $u$  et rayon  $r$  sur la feuille  $W^{su}(u)$  (resp.  $W^{ss}(u)$ ) pour la distance riemannienne  $d^{su}$  (resp.  $d^{ss}$ ) induite par la métrique de Sasaki. On définit la cellule  $\mathcal{C}(u, r)$  comme étant

$$\mathcal{C}(u, r) = \bigcup_{|s| < r} g_s \left( \bigcup_{v \in \mathbf{B}^{ss}(u, r)} \mathbf{B}^{su}(v, r) \right).$$

Remarquons que  $\mathcal{C}(u, r)$  est un voisinage ouvert de  $u$  dans  $T^1X$ . On munit cet ensemble d'un système de coordonnées : Un point  $x \in \mathcal{C}(u, r)$  est représenté par le triplet  $(s, v, w)$ , où  $x = g_s w$ ,  $w \in \mathbf{B}^{su}(v, r)$  et  $v \in \mathbf{B}^{ss}(u, r)$ .

Considérons donc la partition  $\hat{\xi}_r$  de  $T^1X$  dont les atomes sont d'une part les intersections  $W^{su}(v) \cap \mathcal{C}(u, r)$  et d'autre part le complément  $T^1X \setminus \mathcal{C}(u, r)$ . Finalement on définit la partition  $\xi_r$  de  $T^1X$  par  $\xi_r = \bigvee_{n=0}^{\infty} g_n \hat{\xi}_r$ .

La preuve de la proposition 3.11 consiste à montrer que, à partir d'un  $r_0$  petit, pour Lebesgue presque tout  $r \in ]0, r_0[$  la partition  $\xi_r$  satisfait les 7 conditions cherchées. Une dernière condition importante pour la démonstration est de supposer que  $u$  appartient au support de la mesure. Cette condition entraîne en particulier que  $\mu(\mathcal{C}(u, r)) > 0$  pour tout  $r > 0$ . De plus, comme  $g$  est  $\mu$ -ergodique, le support de  $\mu$  est contenu dans l'ensemble non-errant de  $g$ .

**Décroissance et  $\mu$ -mesurabilité de  $\xi_r$ .** Par définition, on a  $g\xi_r = \bigvee_{n=1}^{\infty} g^n \hat{\xi}_r$ . Ainsi, la partition  $g\xi_r$  est moins fine que la partition  $\xi_r$ .

Par ailleurs, la partition  $\hat{\xi}_r$  est  $\mu$ -mesurable. En effet, le quotient  $\mathcal{C}(u, r)/\hat{\xi}_r$  s'identifie à

$$\mathbf{B}^{ss}(u, r) \times ]-r, r[.$$

Ainsi, pour montrer la  $\mu$ -mesurabilité il suffit de choisir une base dénombrable de boréliens formée du complémentaire de  $\mathcal{C}(u, r)$  et des saturés par  $\hat{\xi}_r$ , des ouverts d'une base dénombrable de  $\mathbf{B}^{ss}(u, r) \times ]-r, r[$ . La base dénombrable pour la partition  $\xi_r$  sera donc définie par les itérées positives par  $g$  de la base dénombrable pour  $\hat{\xi}_r$ .

**Propriété génératrice de  $\xi_r$ .** Comme on avait déjà remarqué, puisque  $u$  appartient à l'ensemble non-errant, on a  $\mu(\mathcal{C}(u, r)) > 0$ . L'ergodicité de  $\mu$  assure donc que pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$  il

existe une suite d'entiers  $(n_k)$  strictement croissante telle que  $g_{n_k}v \in \mathcal{C}(u, r)$ . Comme le diamètre des atomes de la partition  $\hat{\xi}_r$  contenus dans  $\mathcal{C}(u, r)$  est uniformément majoré, le diamètre de l'atome  $g_{-n_k}\hat{\xi}_r(g_{n_k}v)$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini.

**La partition  $\xi_r$  est subordonnée au feuilletage instable.** Comme  $u$  est dans l'ensemble non-errant, pour  $\mu$ -presque tout  $v \in \mathcal{C}(u, r)$  il existe un entier  $n > 0$  tel que  $g_{-n}v \in \mathcal{C}(u, r)$ . Ainsi l'atome  $\xi_r(v)$  est inclus dans  $g_n\hat{\xi}_r(g_{-n}v)$ , et a fortiori dans  $W^{su}(v)$ .

Maintenant on veut montrer qu'on peut choisir  $r > 0$  de sorte que pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , l'atome  $\xi_r(v)$  soit un voisinage de  $v$  sur la feuille  $W^{su}(v)$ . Soit  $\pi : T^1X \rightarrow X$  la projection canonique. Comme  $(g_t)$  est un flot uniformément hyperbolique, il existe un réel  $A > 0$  tel que si un vecteur  $w \in W^{su}(v)$  vérifie  $d^{su}(v, w) < r_{inj}(\pi(v))$ , alors pour tout temps positif  $t \geq 0$ , on aura  $d^{su}(g_{-t}v, g_{-t}w) \leq Ae^{-t}d^{su}(v, w)$ . Considérons la fonction  $\beta : \mathcal{C}(u, r) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\beta(v) = \inf_{n \geq 0} \left\{ \frac{e^n}{2A} d^{su}(g_{-n}v, \partial\mathcal{C}(u, r)), \frac{r}{2A}, r_{inj}(\pi(v)) \right\}.$$

**Lemme 3.12.**

- (1) Si  $w \in W^{su}(v)$  vérifie  $d^{su}(v, w) < \beta(v)$ , alors pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $\hat{\xi}_r(g_{-n}v) = \hat{\xi}_r(g_{-n}w)$ .
- (2) On peut choisir  $0 < r < r_{inj}(\pi(u))/4$  de sorte que pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , on ait  $\beta(v) > 0$ .

Admettons pour le moment le lemme ci-dessus. On choisit donc  $r > 0$  de sorte que (2) soit vérifié. D'après (1) on obtient que pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , la boule  $\mathbf{B}^{su}(v, \beta(v))$  est contenue dans  $\xi_r(v)$ . Il s'ensuit donc que la partition  $\xi_r$  est subordonnée au feuilletage instable.

*Démonstration du lemme 3.12.* Soit  $w \in W^{su}(v)$  tel que  $d^{su}(v, w) < \beta(v)$  et  $0 < r_0 < r_{inj}(\pi(u))/4$ . Prenons  $0 < r < r_0$ . Par définition de  $\beta(v)$ , on a  $d^{su}(g_{-n}v, g_{-n}w) \leq Ae^{-\alpha n}d^{su}(v, w)$ . Ainsi  $d^{su}(g_{-n}v, g_{-n}w) \leq \frac{1}{2}d^{su}(g_{-n}v, \partial\mathcal{C}(u, r))$  et  $d^{su}(g_{-n}v, g_{-n}w) \leq r/2$ . La première inégalité nous dit qu'on ne peut pas avoir simultanément  $g_{-n}v \in \mathcal{C}(u, r)$  et  $g_{-n}w \in T^1X \setminus \mathcal{C}(u, r)$ ; la seconde que si  $g_{-n}v$  et  $g_{-n}w$  appartiennent à  $\mathcal{C}(u, r)$ , alors  $\hat{\xi}(g_{-n}v) = \hat{\xi}(g_{-n}w)$ .

On définit sur  $\mathcal{C}(u, r_0)$  la fonction  $h : x \mapsto \sup\{|s|, d^{ss}(w, v), d^{su}(u, v)\}$  où  $x = (s, v, w)$  sont les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{C}(u, r)$ . Comme les feuilletages stable et instable sont Hölder-réguliers (voir [PPS12, Théorème 7.3]), la fonction  $h$  est Hölder sur  $\mathcal{C}(u, r_0)$ . Prolongeons  $h$  en une fonction Hölder sur  $T^1X$  en la définissant égale à  $r_0$  dans le complémentaire de  $\mathcal{C}(u, r_0)$ . Le lemme classique suivant nous sera utile par la suite (voir [LS82, Proposition 3.2]).

**Lemme 3.13.** *Soit  $\nu$  une mesure de probabilité supportée sur un intervalle  $]0, r_0[ \subset \mathbb{R}^+$  et  $a \in ]0, 1[$ . Alors la mesure de Lebesgue de l'ensemble  $\{r \in ]0, r_0[ : \sum_{k=0}^{\infty} \nu[r - a^k, r + a^k] < \infty\}$  est égale à  $r_0$ .*

Appliquons le lemme 3.13 à la mesure image de  $\mu$  par l'application  $h$ . L'invariance de  $\mu$  par  $g$  entraîne que l'ensemble des  $r \in ]0, r_0[$  tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{v \in T^1X : |h(g^{-k}v) - r| \leq a^k\}) < \infty$$

est de mesure de Lebesgue pleine. Or, puisque  $h$  est Hölder, il existe des constantes  $A' > 0$  et  $\kappa \in ]0, 1[$  telles que si  $d(w, \partial\mathcal{C}(u, v)) \leq \tau$  alors on a  $|h(w) - r| \leq A'\tau^\kappa$ . Soit  $K$  l'ensemble des  $r \in ]0, r_0[$  tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu \left( \left\{ v \in T^1X : d(w, \partial\mathcal{C}(u, v)) \leq \frac{1}{A'^{1/\kappa}} e^{-k\alpha} \right\} \right) < \infty.$$

L'ensemble  $K$  satisfait alors  $\text{Leb}(K) = 1$ . Si l'on choisit  $r \in K$  tel que  $\mu(\bigcup_k g_k \partial\mathcal{C}(u, r)) = 0$ , on conclut (3). □

**Preuve de la propriété (4).** On a déjà montré que pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , on a  $g_n \xi_r(g_{-n}v) \subset W^{su}(v)$ . Soit donc  $w \in W^{su}(v)$ . Il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^{su}(g_{-n}v, g_{-n}w) = 0.$$

Puisque  $\mu$  est  $(g_t)$ -invariante, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \beta(g_{-i}v) > 0, \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Ainsi, pour  $n$  suffisamment grand, on a  $\beta(g_n v) > d^{su}(g_{-n}v, g_{-n}w)$ . Cela entraîne que  $g_{-n}w \in \xi_r(g_{-n}v)$ . En particulier, pour tout  $w \in W^{su}(v)$  il existe  $n$  tel que  $w \in g_n \xi_r(g_{-n}v)$ .

**Preuve de la propriété (5).** D'après la régularité des feuilletages stable et instable, pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}$ , la fonction

$$v \rightarrow \text{vol}_{W^{su}(v)}(\hat{\xi}_r(v) \cap B)$$

est mesurable et finie sur l'ensemble  $\mathcal{C}(u, r)$ , mais pas nécessairement sur son complémentaire. On définit donc

$$\psi_{B,n}(v) = \text{vol}_{W^{su}(v)} \left( \left( \bigvee_{i=0}^{n-1} g_i \hat{\xi}_r \right) (v) \cap B \right).$$

Cette fonction est mesurable et finie sur l'ensemble  $\bigcup_{i=0}^{n-1} g_{-i} \mathcal{C}(u, r)$ . De plus  $\psi_{B,n} \geq \psi_{B,n+1}$ , donc

$$\text{vol}_{W^{su}(v)}(\xi_r(v) \cap B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{B,n}(v)$$

est mesurable et finie pour  $\mu$ -presque tout vecteur  $v \in T^1 X$ .

**Preuve des propriétés (6) et (7).** Définissons  $\Delta_k(w, w')$  comme étant

$$\Delta_k(w, w') = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} J^{su}(g_{-i}v, 1)}{\prod_{i=0}^{k-1} J^{su}(g_{-i}w, 1)}.$$

Rappelons que le potentiel géométrique  $F^{su}$  est Hölder, ainsi il existe des constantes  $C' > 0$  et  $0 < \alpha < 1$  tels que

$$\begin{aligned} \log \Delta_k(w, w') &= |\log J^{su}(g_{-k}w, k) - \log J^{su}(g_{-k}w', k)| \\ &\leq \int_0^k |F^{su}(g_{-t}w) - F^{su}(g_{-t}w')| dt \\ &\leq C' \int_0^k d(g_{-t}w, g_{-t}w')^\alpha dt \end{aligned}$$

D'après des théorèmes de Comparaison classiques (voir par exemple [CE75]), on a

$$\begin{aligned} \Delta_k(w, w') &\leq C' d(w, w')^\alpha \int_0^k e^{-\alpha t} dt \\ &\leq C d(w, w')^\alpha (1 - e^{-k\alpha}), \end{aligned}$$

où  $C = 1/\alpha C'$ . En particulier, en faisant tendre  $k$  vers l'infini, on obtient

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\Delta_k(w, w')| \leq C d(w, w')^\alpha. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, l'hyperbolicité du flot entraîne que pour tout  $w, w' \in \xi(v)$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta_k(g_{-t}w, g_{-t}w')| = 0.$$

Ainsi,  $\Delta_k(w, w')$  converge, ce qui montre (6). L'équation (3.3) est une reformulation de (7).  $\square$

Les partitions subordonnées au feuilletage instable contiennent la complexité du flot géodésique. En effet, elles maximisent l'entropie mesurée.

**Proposition 3.14.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Soit  $\mu$  une mesure borélienne de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $T^1X$ . Supposons que  $\mu$  est ergodique pour  $g = g_1$ . Si  $\xi$  est une partition comme dans la proposition 3.11, alors  $h_\mu(g) = h_\mu(g, \xi)$ .*

La démonstration de cette proposition découle de plusieurs lemmes techniques. Tout d'abord on va utiliser une partition finie qui nous servira pour décrire un peu mieux les propriétés dynamiques d'une partition  $\xi$  comme dans la proposition 3.11. Rappelons que pour tout  $v \in T^1X$ , la feuille faiblement instable en  $v$ , notée  $W^u(v)$ , est définie comme étant l'ensemble de vecteurs  $w \in T^1X$  tels qu'il existe un temps  $s \in \mathbb{R}$  pour lequel  $g_s(w) \in W^{su}(v)$ .

**Lemme 3.15.** *Il existe une partition finie  $\hat{\mathcal{P}}$  de  $T^1X$  telle que la partition  $\mathcal{P} = \bigvee_{n=0}^{\infty} g_n \hat{\mathcal{P}}$  possède les propriétés suivantes :*

- (1) *pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ , l'atome  $\mathcal{P}(v)$  est contenu dans la feuille faiblement instable  $W^u(v)$ ,*
- (2) *pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , et pour tout  $w \in \mathcal{P}(v)$ , on a  $W^{su}(w) \cap \mathcal{P} = \xi(w) \cap \mathcal{P}(v)$ .*

*De plus, on peut choisir la partition finie  $\hat{\mathcal{P}}$  de sorte que  $h_\mu(g, \mathcal{P})$  soit arbitrairement proche de  $h_\mu(g)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}(u, r)$  l'ensemble utilisé dans la construction de la partition  $\xi$  dans la proposition 3.11. On définit maintenant la partition  $\hat{\mathcal{P}}$  comme étant la partition finie en deux atomes ; d'une part l'ensemble  $\mathcal{C}(u, r)$  et d'autre part son complémentaire dans  $T^1X$ . La partition  $\mathcal{P} = \bigvee_{n=0}^{\infty} g_n \hat{\mathcal{P}}$  est mesurable. Par ergodicité de  $\mu$ , pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$  il existe une suite  $(n_k)_k$  tendant vers l'infini, telle que  $g_{-n_k} v \in \mathcal{C}(u, r)$ . Observons maintenant qu'il existe  $r'$  tel que pour tout  $u' \in \mathcal{C}(u, r)$ , on a  $\mathcal{C}(u, r) \subset \mathcal{C}(u', r')$ . En particulier, pour tout  $k \geq 0$  on obtient

$$\mathcal{C}(u, r) \subset \mathcal{C}(g_{-n_k} v, r').$$

Soit  $u \in T^1X$ . Pour  $r_0, r^-, r^+ > 0$  on définit l'ensemble  $\mathcal{C}(u, r_0, r^-, r^+)$  comme étant

$$\mathcal{C}(u, r_0, r^-, r^+) = \bigcup_{|s| < r_0} g_s \left( \bigcup_{v \in \mathbf{B}^{ss}(u, r^-)} \mathbf{B}^{su}(v, r^+) \right).$$

L'ensemble  $\mathcal{C}(u, r_0, r^-, r^+)$  est un voisinage de  $u$ . Puisque les courbures sectionnelles  $\mathcal{K}$  de  $X$  sont pincées, avec  $-b^2 \leq \mathcal{K} \leq -1$ , on obtient des théorèmes de Comparaison que

$$\mathcal{C}(g_t u, r_0, e^{-bt} r^-, e^t r^+) \subset g_t(\mathcal{C}(u, r_0, r^-, r^+)) \subset \mathcal{C}(g_t u, r_0, e^{-t} r^-, e^{bt} r^+).$$

Il s'ensuit que  $g_{n_k}(\mathcal{C}(g_{-n_k} v, r')) \subset \mathcal{C}(v, r', e^{-n_k \tau} r', e^{bn_k \tau} r')$ . En particulier, pour tout  $k \geq 0$  l'atome  $\mathcal{P}(v)$  est inclus dans  $\mathcal{C}(v, r', e^{-n_k \tau} r', e^{bn_k \tau} r')$ . Comme l'intersection

$$\bigcap_k \mathcal{C}(v, r', e^{-n_k \tau} r', e^{bn_k \tau} r')$$

est un sous-ensemble de la variété faiblement instable  $W^u(v)$ , on a bien  $\mathcal{P}(v) \subset W^u(v)$  pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ .

D'après la construction de  $\xi$ , pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , et pour tout  $w \in \mathcal{P}(v)$ , on a  $\xi(w) = \xi(w) \cap \mathcal{P}(v) = W^u(w) \cap \mathcal{P}(v)$ .

Pour conclure la preuve du lemme, considérons  $\mathcal{Q}$  une partition finie d'entropie proche de  $h_\mu(g)$ . Alors la partition  $\hat{\mathcal{P}}'$  définie par  $\hat{\mathcal{P}}' = \hat{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q}$  est finie, son entropie est proche de  $h_\mu(g)$  et  $\mathcal{P}' = \bigvee_{n=0}^{\infty} g_n \hat{\mathcal{P}}'$  vérifie (1) et (2).  $\square$

Dans la suite on va montrer d'une part que l'entropie de  $g$  relativement à  $\xi$  est finie et, d'autre part, que pour toute autre partition finie  $\mathcal{Q}$ , on a  $h_\mu(g, \xi) \geq h_\mu(g, \mathcal{Q})$ . Pour la dernière affirmation il suffit de considérer les partitions  $\hat{\mathcal{P}}$  du lemme 3.15 car  $\mathcal{Q} \vee \hat{\mathcal{P}}$  est aussi une partition comme dans ce lemme et  $h_\mu(g, \mathcal{Q} \vee \hat{\mathcal{P}}) \geq h_m(g, \mathcal{Q})$ .

Considérons donc une partition  $\hat{\mathcal{P}}$  comme dans le lemme 3.15 et soit  $\eta = \xi \vee \mathcal{P}$ .

**Lemme 3.16.** *On a  $h_\mu(g, \eta) = h_\mu(g, \xi)$ .*

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est la même à celle de [LY85a, Lemma 3.1.2]. On rappelle que  $\eta$  et  $\xi$  sont des partitions décroissantes et génératrices. Par ailleurs, pour tout  $n \geq 1$ , l'invariance de  $\mu$  entraîne

$$h_\mu(g, \xi \vee \mathcal{P}) = h_\mu(g, \xi \vee g_n \mathcal{P}),$$

donc

$$\begin{aligned} h_\mu(g, \eta) &= h_\mu(g, \xi \vee \mathcal{P}) = h_\mu(g, \xi \vee g_n \mathcal{P}) \\ &= H_\mu(\xi \vee g_n \mathcal{P} | g\xi \vee g_{n+1} \mathcal{P}) \\ &= H_\mu(\xi | g\xi \vee g_{n+1} \mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{P} | g\mathcal{P} \vee g_{-n} \xi) \end{aligned}$$

Si  $n$  tend vers l'infini, alors le terme  $H_\mu(\mathcal{P} | g\mathcal{P} \vee g_{-n} \xi)$  tend vers 0 car la suite de partitions  $(g_{-n} \xi)_n$  est génératrice. Nous affirmons que  $H_\mu(\xi | g\xi \vee g_{n+1} \mathcal{P})$  tend vers  $H_\mu(\xi | g\xi)$ . En effet, comme la partition  $g\xi \vee g_{n+1} \mathcal{P}$  est plus fine que la partition  $g\xi$ , on conclut que  $H_\mu(\xi | g\xi) \geq H_\mu(\xi | g\xi \vee g_{n+1} \mathcal{P})$  pour tout  $n \geq 1$ . Soit  $D_n$  l'ensemble défini par  $D_n = \{v : (g\xi)(v) \subset (g_n \mathcal{P})(v)\}$ . Puisque pour  $\mu$ -presque tout  $v$  le diamètre de  $\xi$  est fini et  $\text{diam}((g^{-n} \xi)(v))$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a  $\mu(D_n) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi, pour  $n$  suffisamment grand, l'ensemble  $D_n$  est de mesure arbitrairement proche de 1. En particulier, sur  $D_n$ , on a  $g\xi \vee g_{n+1} \mathcal{P} = g\xi$ . Il s'ensuit que

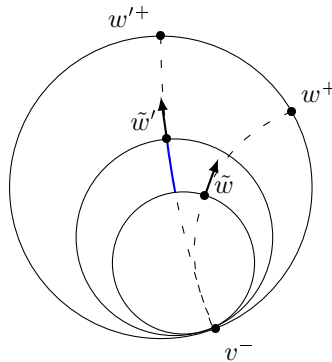
$$H_\mu(\xi | g\xi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H_\mu(\xi | g\xi \vee g_{n+1} \mathcal{P}).$$

□

Nous allons maintenant décrire un peu plus les atomes de  $\mathcal{P}$ . Si  $v \in T^1 X$ , la partition  $\eta$  induit une partition de  $\mathcal{P}(v)$  puisque  $\eta$  est plus fine que  $\mathcal{P}$ . On note cette partition  $\eta|_{\mathcal{P}(v)}$ , dont les atomes sont  $\eta(w)$  pour  $w \in \mathcal{P}(v)$ . D'après la propriété (2) du lemme 3.15, pour  $\mu$ -presque tout  $v$  la partition  $\eta|_{\mathcal{P}(v)}$  est la partition en feuilles instables. Soient  $w, w' \in \mathcal{P}(v)$ . On met une distance  $d_T$  entre les atomes  $\eta(w)$  et  $\eta(w')$ , appelée *distance transverse*. Posons

$$d_T(\eta(w), \eta(w')) = |B_{v^-}(\tilde{\pi}(\tilde{w}), \tilde{\pi}(\tilde{w}'))|.$$

Ici  $\tilde{w}$  et  $\tilde{w}'$  sont des relevés de  $w$  et  $w'$  dans le même domaine fondamental de  $T^1 \tilde{X}$ , le point  $v^- \in \partial \tilde{X}$  est le bout négatif à l'infini de  $\tilde{w}$ , c'est-à-dire  $v^- = w^- = w^+$ ,  $\tilde{\pi} : T^1 \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  est la projection naturelle d'un vecteur sur  $\tilde{X}$ , et  $B$  désigne la fonction de Busemann<sup>1</sup> (voir figure ci-dessous).



Distance transverse  $d_T(\eta(w), \eta(w'))$ .

1. voir Définition A.1 pour trouver une définition de la fonction de Busemann

En d'autres termes, on a identifié l'espace des atomes de la partition  $\eta|\mathcal{P}(v)$  avec un intervalle  $I_v$  de  $\mathbb{R}$  en associant l'atome  $\eta(w)$  avec le temps  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $W^{su}(v) \cap g_t w \neq \emptyset$ . Dans cette identification la distance  $d_T$  correspond à la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}$ . De plus, l'application  $g$  induit une isométrie de  $(\eta|\mathcal{P}(v), d_T)$  dans  $(\eta|\mathcal{P}(gv), d_T)$ .

Démontrons maintenant la proposition 3.14. Insistons sur le fait que cette preuve est une adaptation de [LY85a] faite dans [OP04].

*Démonstration de la proposition 3.14.* Cette preuve est constituée de deux parties. Dans la première on montre la finitude de l'entropie généralisée par rapport à  $\xi$ , dans la deuxième que  $\xi$  maximise l'entropie.

**Étape I : Finitude.** Rappelons que l'entropie  $h_\mu(g, \xi)$  satisfait  $h_\mu(g, \xi) = h_\mu(g, \eta) = H_\mu(g^{-1}\eta|\eta)$  d'après le lemme 3.16. Ainsi, il suffit de montrer le lemme ci-dessous.

**Lemme 3.17.** *L'entropie  $H_\mu(g^{-1}\eta|\eta)$  est finie.*

*Démonstration.* Par définition, on a

$$H_\mu(g^{-1}\eta|\eta) = - \int \log \mu_{\eta(v)}((g^{-1}\eta)(v)) d\mu(v),$$

qui d'après le choix de la partition  $\xi$  vaut aussi

$$- \int \log \mu_{\eta(v)}((g^{-1}\mathcal{P})(v)) d\mu(v).$$

Définissons une fonction mesurable sur  $T^1X$  en posant  $\tau(v) = \mu_{\eta(v)}((g^{-1}\mathcal{P})(v))$ . On veut montrer que la fonction  $-\log \tau$  est  $\mu$ -intégrable. Pour  $\mu$ -presque tout  $v$  la fonction  $\tau$  induit une fonction sur l'espace des atomes de  $\eta|\mathcal{P}(v)$  (qu'on note aussi  $\tau$ ), c'est-à-dire sur l'intervalle  $I_v$ . Cet intervalle porte la mesure image de la mesure  $\mu_{\mathcal{P}(v)}$ , que nous noterons encore  $\mu_{\mathcal{P}(v)}$ . Soit  $I(w, \delta)$  l'intervalle de centre  $\eta(w)$  de rayon  $\delta$  pour la distance transverse. Cet intervalle s'identifie à un sous-intervalle de  $I_v$  qu'on notera aussi  $I(w, \delta)$ . On définit la fonction  $\tau_\delta$  par

$$\tau_\delta(w) = \frac{1}{\mu_{\mathcal{P}(v)}(I(w, \delta))} \int_{I(w, \delta)} \tau d\mu_{\mathcal{P}(v)},$$

et la fonction « maximale »  $\tau_\star(w) = \inf_{\delta > 0} \tau_\delta(w)$ .

Le théorème de dérivation de Lebesgue sur un intervalle entraîne que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tau_\delta(w) = \tau(w)$  pour  $\mu_{\mathcal{P}(v)}$ -presque tout  $w \in I_v$ . Appliqué à chaque atome, on déduit que  $\tau_\delta(v) \rightarrow \tau(v)$ , pour  $\mu$ -presque tout  $v$ .

On sait que la partition  $\mathcal{P}$  est d'entropie finie, donc pour  $\mu$ -presque tout  $v$  la partition  $g^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P}(v)$  est d'entropie finie. La proposition ci-dessous est due à Ledrappier-Young [LY85a, Page 525].

**Proposition 3.18.** *Il existe une constante universelle  $c > 0$ , telle que*

$$- \int_{\mathcal{P}(v)} \log \tau_\star d\mu_{\mathcal{P}(v)} \leq H_{\mu_{\mathcal{P}(v)}}(g^{-1}\mathcal{P}) + c. \quad (3.4)$$

*Démonstration.* Par définition, on a

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{P}(v)} \log \tau_\star d\mu_{\mathcal{P}(v)} &= \int_0^\infty \mu_{\mathcal{P}(v)}(\{-\log \tau_\star > s\}) ds \\ &= \int_0^\infty \sum_{A \in g^{-1}\mathcal{P}} \mu_{\mathcal{P}(v)}(A \cap \{\tau_\star < e^{-s}\}) ds. \end{aligned}$$

Observons que

$$\mu_{\mathcal{P}(v)}(A \cap \{\tau_\star < e^{-s}\}) \leq \mu_{\mathcal{P}(v)}(A).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{P}(v)}(A \cap \{\tau_\star < e^{-s}\}) &= \int_{\{\tau_\star < e^{-s}\}} \mathbb{1}_A d\mu_{\mathcal{P}(v)} \\ &\leq \int_{\{\tau_\star < e^{-s}\}} \mu_{\eta(z)}(A \cap g^{-1}\mathcal{P}(z)) d\mu_{\mathcal{P}(v)}(z) \\ &\leq c(1)e^{-s}, \end{aligned}$$

où  $c(1)$  est la constante du lemme de recouvrement de Besicovitch en dimension 1. En particulier,

$$-\int_{\mathcal{P}(v)} \log \tau_\star d\mu_{\mathcal{P}(v)} \leq \int_0^\infty \sum_{A \in g^{-1}\mathcal{P}} \min\{c(1)e^{-s}, \mu_{\mathcal{P}(v)}(A)\} ds.$$

Remarquons maintenant que  $c(1)e^{-s} \leq \mu_{\mathcal{P}(v)}(A)$  pour tout  $s \geq \log c(1) - \log \mu_{\mathcal{P}(v)}(A)$ . Ainsi, en posant  $c = \log c(1) + 1$ , on conclut que

$$-\int_{\mathcal{P}(v)} \log \tau_\star d\mu_{\mathcal{P}(v)} \leq H_{\mu_{\mathcal{P}(v)}}(g^{-1}\mathcal{P}) + c.$$

□

Puisque  $\tau \geq \tau_\star$ , si l'on intègre par rapport à  $\mu$  les expressions dans (3.4), on obtient

$$-\int \log \tau d\mu \leq -\int \log \tau_\star d\mu \leq H_\mu(g^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P}) + c.$$

Comme  $H_\mu(g^{-1}\eta|\eta) = -\int \log \tau d\mu$  et l'entropie de  $\mathcal{P}$  est finie, on conclut que l'entropie  $H_\mu(g^{-1}\eta|\eta)$  est finie. □

**Étape II : Majoration.** Montrons maintenant que  $h_\mu(g, \eta) \geq h_\mu(g, \mathcal{P})$ . Il est très important de remarquer que l'inégalité  $h_\mu(g, \mathcal{Q}) \leq h_\mu(g, \mathcal{Q}')$ , où  $\mathcal{Q} \leq \mathcal{Q}'$ , est vraie pour des partitions  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  d'entropies  $H_\mu(\mathcal{Q})$  et  $H_\mu(\mathcal{Q}')$  finies. Comme les partitions  $\eta$  et  $\mathcal{P}$  ne sont pas a priori dénombrables, on doit raisonner d'une autre manière. Nous utiliserons le résultat suivant :

**Lemme 3.19.** *Soit  $c \in ]0, 1[$ . Pour  $\mu$ -presque tout  $v$  on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu_{\mathcal{P}(v)}(I(v, e^{-cn})) \geq (1-c)(h_\mu(g, \mathcal{P}) - h_\mu(g, \eta) - c).$$

*Démonstration.* Notons  $p$  la partie entière de  $n(1-c)$ ; fixons  $\delta > 0$ . On a

$$\mu_{\mathcal{P}(v)}(I(v, \delta)) \leq \prod_{k=0}^{p-1} \frac{\mu_{\mathcal{P}(g^k v)}(I(g^k v, \delta))}{\mu_{\mathcal{P}(g^{k+1} v)}(I(g^{k+1} v, \delta))}.$$

D'après la  $g$ -invariance de  $\mu$ , l'unicité des mesures conditionnelles pour  $\mathcal{P}$  et la décroissance de  $\mathcal{P}$ , on a pour  $\mu$ -presque tout  $w$  et tout ensemble mesurable  $A \subset \mathcal{P}(gw)$ , l'égalité

$$\mu_{\mathcal{P}(gw)}(A) = \frac{\mu_{\mathcal{P}(w)}(g^{-1}A)}{\mu_{\mathcal{P}(w)}(g^{-1}\mathcal{P}(w))}. \quad (3.5)$$

Appliquons (3.5) aux points  $g^k v$  et aux boréliens  $I(g^k v, \delta)$  pour  $k = 0, 1, \dots, p-1$ . On obtient ainsi

$$\frac{1}{n} \log \mu_{\mathcal{P}(v)}(I(v, \delta)) \leq I_n(v, \delta) + J_n(v)$$

où

$$I_n(v, \delta) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \log \frac{\mu_{\mathcal{P}(g^k v)}(g^{-1}I(g^{k+1}v, \delta))}{\mu_{\mathcal{P}(g^k v)}(I(g^k v, \delta))}$$

et

$$J_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \log \mu_{\mathcal{P}(g^k v)}((g^{-1}\mathcal{P})(g^k v)).$$

D'après le théorème ergodique de Birkhoff, pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , on a

$$J_n(v) \rightarrow -(1-c)H_\mu(g^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P}) = -(1-c)h_\mu(g, \mathcal{P}).$$

Par ailleurs,  $g^{-1}I(g^{k+1}v, \delta) = I(g^k v, \delta) \cap g^{-1}\mathcal{P}(g^k v)$ , donc

$$I_n(v, \delta) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \log z_\delta(g^k v).$$

Comme  $\tau_\delta(v) \rightarrow \tau(v)$  pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , il existe une fonction mesurable  $v \rightarrow \delta(v)$  telle que  $-\log \tau_\delta(v) \leq -\log \tau(v) + c/2$  pour  $0 < \delta < \delta(v)$ . On vient de montrer que  $-\log \tau_\star$  est  $\mu$ -intégrable, on déduit donc que pour une certaine constante  $\delta_c > 0$ , on a  $\int_{\{v: \delta(v) < \delta_c\}} -\log \tau_\star d\mu \leq c/2$ . Posons  $A_c = \{v \in T^1 X : \delta(v) > \delta_c\}$ . Pour tout entier  $n$  vérifiant  $e^{-cn} \leq \delta_c$ , on a

$$\begin{aligned} I_n(v, e^{-cn}) &= \frac{1}{n} \left( \sum_{g^k v \in A_c} \log \frac{\mu_{\mathcal{P}(g^k v)}(g^{-1}I(g^{k+1}v, e^{-cn}))}{\mu_{\mathcal{P}(g^k v)}(I(g^k v, e^{-cn}))} + \sum_{g^k v \notin A_c} \log \frac{\mu_{\mathcal{P}(g^k v)}(g^{-1}I(g^{k+1}v, e^{-cn}))}{\mu_{\mathcal{P}(g^k v)}(I(g^k v, e^{-cn}))} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{g^k v \in A_c} (-\log \tau(g^k v) + c/2) - \frac{1}{n} \sum_{g^k v \notin A_c} \log \tau_\star(g^k v). \end{aligned}$$

D'après le théorème ergodique de Birkhoff,  $\mu$ -presque tout  $v$  vérifie

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n(v, e^{-cn}) &\leq (1-c) \left( -\int \log \tau d\mu + c/2 + \int_{T^1 X \setminus A_c} -\log \tau_\star d\mu \right) \\ &\leq (1-c) \left( \int -\log \tau d\mu + c \right) \\ &= (1-c)(h_\mu(g, \eta) + c). \end{aligned}$$

Finalement, on conclut que

$$\begin{aligned} \liminf \frac{1}{n} -\log \mu_{\mathcal{P}(v)}(I(v, e^{-cn})) &\geq (1-c)h_\mu(g, \mathcal{P}) - (1-c)(h_\mu(g, \eta) + c) \\ &= (1-c)(h_\mu(g, \mathcal{P}) - h_\mu(g, \eta) - c). \end{aligned}$$

□

Pour montrer que  $h_\mu(g, \eta) \geq h_\mu(g, \mathcal{P})$  il nous manque un dernier lemme technique classique qui découle du lemme de recouvrement de Besicovitch.

**Lemme 3.20.** *Soit  $\nu$  une mesure de Radon sur un intervalle  $I(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ . Alors, pour  $\nu$ -presque tout  $x \in I$ , on a*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \nu(I(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon} \leq 1.$$

On applique le lemme précédent à la mesure  $\mu_{\mathcal{P}(v)}$  sur l'intervalle  $I_v$ . On conclut ainsi que pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1 X$  on a,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu_{\mathcal{P}(v)}(I(v, e^{-cn})) \leq c.$$

L'inégalité  $h_\mu(g, \eta) \geq h_\mu(g, \mathcal{P})$  s'obtient en faisant tendre  $c$  vers 0 dans l'inégalité du lemme 3.19.

□



Démontrons maintenant le théorème 3.10. Comme dans la démonstration du théorème 3.4, on ne perd rien à supposer que  $\mu$  est une mesure ergodique pour le flot et pour le temps unité  $g = g_1$ .

*Démonstration du théorème 3.10.* Montrons d'abord que si  $\mu$  a des mesures conditionnelles absolument continues sur les variétés instables, alors on a égalité dans l'inégalité de Ruelle. Comme  $\xi$  est une partition décroissante, cela est équivalent à montrer que

$$H_\mu(g^{-1}\xi|\xi) = \int \log J^{su}(v, 1) d\mu(v).$$

Définissons une nouvelle mesure borélienne  $\nu$  sur  $T^1X$  en posant pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}$

$$\nu(B) = \int \text{vol}_{W^{su}(w)}(\xi(w) \cap B) d\mu(w), \quad (3.6)$$

D'après la condition (5) de la proposition 3.11, la mesure  $\nu$  est  $\sigma$ -finie. On rappelle qu'on a

$$\mu(B) = \int \mu_{\xi(w)}(\xi(w) \cap B) d\mu(w), \quad (3.7)$$

donc  $\mu \ll \nu$  car  $\mu_{\xi(v)}$  est absolument continue par rapport à  $\text{vol}_{W^{su}(v)}$ . Soit  $\kappa$  la dérivée de Radon-Nikodym  $d\mu/d\nu$ .

**Proposition 3.21.** *Pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$  on a*

$$\kappa = \frac{d\mu_{\xi(v)}}{d\text{vol}_{W^{su}(v)}}$$

*$\text{vol}_{W^{su}(v)}$ -presque partout sur  $\xi(v)$ .*

*Démonstration.* Soit  $A \in \sigma(\xi)$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par la partition  $\xi$ , et soit  $B \in \mathcal{B}$ . Comme

$$\int_{A \cap B} \kappa d\nu = \int_{A \cap B} d\mu,$$

il découle de (3.6) et (3.7) que

$$\begin{aligned} \int_A \left( \int_{B \cap \xi(y)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) \right) d\mu(v) &= \int_{A \cap B} \kappa d\nu \\ &= \int_{A \cap B} d\mu \\ &= \int_A \mu_{\xi(v)}(B) d\mu(v). \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'espace mesuré  $(T^1X, \mathcal{B}, \mu)$  est séparable comme un espace de Lebesgue. En particulier, on peut trouver une collection  $(B_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{B}$  de sous-ensembles denses dans  $\mathcal{B}$  par rapport à la métrique  $d(C, D) = \mu(C \setminus D) + \mu(D \setminus C)$ . Fixons  $j \geq 1$  et appliquons (3.8) pour  $A \in \sigma(\xi)$  arbitraire et  $B = B_j \in \mathcal{B}$ . Puisque  $A$  est arbitraire on déduit l'existence d'un ensemble mesurable  $Z_j$  dans  $\mathcal{B}$ , de mesure pleine, tel que pour tout  $v \in Z_j$  on a

$$\int_{B_j \cap \xi(v)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) = \mu_{\xi(v)}(B_j),$$

ce qui conclut la preuve. □

Maintenant calculons l'entropie. L'information de  $g^{-1}\xi$  conditionnelle à  $\xi$  satisfait

$$\begin{aligned} I_\mu(g^{-1}\xi|\xi)(v) &= -\log \mu_{\xi(v)}((g^{-1}\xi)(v)) \\ &= -\log \int_{(g^{-1}\xi)(v)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w). \end{aligned}$$

Par ailleurs, grâce au théorème de changement de variables, on déduit

$$\begin{aligned} \int_{(g^{-1}\xi)(v)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) &= \int_{g^{-1}(\xi(gv))} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) \\ &= \int_{\xi(gv)} \kappa(g^{-1}w) \frac{1}{J^{su}(g^{-1}w, 1)} d\text{vol}_{W^{su}(gv)}(w) \end{aligned}$$

**Proposition 3.22.** *L'application*

$$L(w) = \frac{\kappa(w) J^{su}(g^{-1}w, 1)}{\kappa(g^{-1}w)}$$

est  $\xi$ -mesurable.

*Démonstration.* Soit  $\psi$  la fonction  $\sigma(\xi)$ -mesurable définie par

$$\psi(v) = \mu_{\xi(v)}((g^{-1}\xi)(v)).$$

Comme la partition  $\xi$  est décroissante, pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}$ , on a d'une part

$$\mu_{(g^{-1}\xi)(v)}(B) = \frac{\mu_{\xi(v)}(B \cap (g^{-1}\xi)(v))}{\mu_{\xi(v)}((g^{-1}\xi)(v))} = \frac{1}{\psi(v)} \int_{B \cap (g^{-1}\xi)(v)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w). \quad (3.9)$$

D'autre part, d'après l'invariance de  $\mu$ , on déduit

$$\mu_{(g^{-1}\xi)(v)}(B) = \mu_{\xi(gv)}(gB). \quad (3.10)$$

En utilisant les égalités (3.9) et (3.10), pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi(v)} \int_{B \cap (g^{-1}\xi)(v)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) &= \int_{\xi(gv) \cap gB} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(gv)}(w) \\ &= \int_{g((g^{-1}\xi)(v) \cap B)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(gv)}(w) \\ &= \int_{(g^{-1}\xi)(v) \cap B} \kappa(gw) J^{su}(w, 1) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$  on a

$$\frac{1}{\psi(v)} \kappa(w) = \kappa(gw) J^{su}(w, 1)$$

pour  $\text{vol}_{W^{su}(v)}$ -presque tout  $w \in (g^{-1}\xi)(v)$ . Il s'ensuit que la fonction  $L \circ g = \frac{1}{\psi}$  est  $g^{-1}\xi$ -mesurable, ce qui finalise la preuve.  $\square$

La proposition ci-dessus nous dit que l'application  $L$  est  $\mu$ -presque partout constante sur les atomes de la partition  $\xi$ . En particulier, pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , et pour tout  $w \in \xi(gv)$ , on a  $L(w) = L(gv)$ . Cela nous donne

$$\begin{aligned} \int_{\xi(gv)} \frac{\kappa(w)}{L(w)} d\text{vol}_{W^{su}(gv)}(w) &= \frac{1}{L(gv)} \int_{\xi(gv)} \kappa(w) d\text{vol}_{W^{su}(gv)}(w) \\ &= \frac{1}{L(gv)}. \end{aligned}$$

Finalement, le terme  $I_\mu(g^{-1}\xi|\xi)$  est égal à

$$I_\mu(g^{-1}\xi|\xi)(v) = \log J^{su}(v, 1) + \log \frac{\kappa(gv)}{\kappa(v)}.$$

Remarquons que l'information est une fonction positive et que  $\log J^{su}(v, 1)$  est  $\mu$ -intégrable. Cela entraîne que

$$\log^{-} \frac{\kappa(gv)}{\kappa(v)} \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

L'entropie  $H_\mu(g^{-1}\xi|\xi)$  est l'intégrale de la fonction information par rapport à la mesure  $\mu$ . On s'intéresse au calcul de la valeur

$$\int I_\mu(g^{-1}\xi|\xi)d\mu.$$

**Lemme 3.23.** *Soit  $T$  une transformation d'un espace de probabilité  $(X, \mu)$  et soit  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mu$ -mesurable. Supposons que  $\mu$  est ergodique pour  $T$  et que le cobord  $h = H \circ T - H$  a une partie négative  $\mu$ -intégrable. Alors  $h$  est intégrable et  $\int h d\mu = 0$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse  $h^-$  est intégrable, donc, d'après le théorème ergodique de Birkhoff pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h^- \circ T^i(x) = \int h^- d\mu.$$

Si  $h^+$  n'est pas intégrable, alors encore d'après le théorème ergodique on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h^+ \circ T^i(x) = +\infty$$

pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ . En particulier, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$  les moyennes ergodiques de  $h$  convergent vers l'infini, c'est-à-dire que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (H \circ T^n(x) - H(x)) = \infty.$$

Par ailleurs, on sait que  $H$  est à valeurs finies sur un ensemble de mesure pleine, donc  $\frac{1}{n}H$  converge vers 0 en probabilité. Puisque la mesure  $\mu$  est  $T$ -invariante on déduit le même pour  $\frac{1}{n}H \circ T^n$ . On est arrivé à une contradiction. Donc  $h$  est intégrable. Les moyennes ergodiques de la fonction  $h$  convergent vers  $\int h d\mu$ , et comme on vient de montrer, ces sommes tendent vers 0 en probabilité. Il s'ensuit donc que  $\int h d\mu = 0$ . □

Le lemme 3.23 ci-dessus implique que  $\int \log \frac{\kappa(gv)}{\kappa(v)} d\mu = 0$ . En particulier, on a

$$H_\mu(g^{-1}\xi|\xi) = \int \log J^{su}(v, 1) d\mu(v).$$

ce qui conclut la première partie de la preuve du théorème 3.10.

Maintenant on doit montrer que si  $h_\mu(g) = \int \chi^+ d\mu$ , alors la mesure  $\mu$  a des mesures conditionnelles absolument continues sur les variétés instables. D'après la proposition 3.14, on doit montrer de manière équivalente que

$$H_\mu(\xi|g\xi) = \chi^+ = \int J^{su}(v, 1) d\mu(v) \Rightarrow \mu_{\xi(v)} \ll \text{vol}_{W^{su}(v)}.$$

Soit  $v \in T^1X$ . D'après (6) et (7) de la proposition 3.11, on sait que l'application  $w \mapsto \log \Delta(v, w)$  est hôlderienne sur  $\xi(v)$ . En particulier, elle est uniformément bornée et bornée loin de 0 sur  $\xi(v)$ . Posons

$$L(v) = \int_{\xi(v)} \Delta(v, w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w).$$

**Lemme 3.24.** *L'application  $L$  satisfait  $0 < L(v) < \infty$  pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ .*

### 3.2. LA FORMULE DE PESIN

*Démonstration.* D'après (6) de la proposition 3.11, le produit  $\Delta(v, w)$  converge, et d'après (3) on sait que  $\text{vol}_{W^{su}(v)}(\xi(v)) > 0$ . Il s'ensuit donc que  $L(v) > 0$  pour  $\mu$ -presque tout  $v \in T^1X$ . D'autre part, grâce à (7), pour tout  $v \in \mathcal{C}$  on a

$$L(v) \leq e^{CD^\alpha} D^d$$

où  $D$  désigne le diamètre de  $\mathcal{C}$  et  $C$  est la constante qui apparaît dans (7). Si  $v$  n'appartient pas à  $\mathcal{C}$ , alors il existe  $k$  tel que  $g^{-k}v \in \mathcal{C}$ . En particulier, on a

$$\xi(v) = g^k((g^{-k}\xi)(g^{-k}v)) \subset g^k\xi(g^{-k}v)$$

et

$$\begin{aligned} L(v) &= \int_{\xi(v)} \Delta(v, w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) \\ &\leq \prod_{n=1}^k J^{su}(g^{-n}v, 1) \int_{g^k\xi(g^{-k}v)} \Delta(g^{-k}v, g^{-k}w) \frac{1}{\prod_{n=1}^k J^{su}(g^{-n}w, 1)} d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) \\ &= \prod_{n=1}^k J^{su}(g^{-n}v, 1) L(g^{-k}v) < \infty. \end{aligned}$$

□

Posons  $\kappa(w) = \Delta(v, w)/L(v)$  sur  $\xi(v)$ . La fonction  $\kappa$  définit une mesure  $\nu$  sur  $T^1X$  en posant  $\nu_{\xi(v)} = \kappa d\text{vol}_{W^{su}(v)}$  et  $\nu = \mu$  sur  $\sigma(\xi)$ .

**Lemme 3.25.**  $\int -\log \nu_{\xi(v)}((g^{-1}\xi)(v)) d\mu(v) = \int J^{su}(v, 1) d\mu(v)$ .

*Démonstration.* Définissons  $q(v) = \nu_{\xi(v)}(g^{-1}\xi)(v)$ . Alors

$$q(v) = \frac{1}{L(v)} \int_{(g^{-1}\xi)(v)} \Delta(v, w) d\text{vol}_{W^{su}(v)}(w) = \frac{L(gv)}{L(v)} \frac{1}{J^{su}(v, 1)}.$$

Comme  $L$  est une fonction mesurable, strictement positive et finie, telle que

$$\int \log^+ \frac{L(gv)}{L(v)} d\mu(v) \leq \int \log^+ J^{su}(v, 1) d\mu(v) < \infty$$

on conclut d'après le lemme 3.23 que  $\log q$  est  $\mu$ -intégrable et

$$\int \log q(v) d\mu(v) = - \int \log J^{su}(v, 1) d\mu(v).$$

□

Par définition de  $\nu$ , on sait que  $\nu = \mu$  sur la  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(\xi)$ . On va montrer en utilisant un argument de récurrence que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\nu = \mu$  sur  $\sigma(g^{-n}\xi)$ .

**Lemme 3.26.** *L'égalité  $\int \log J^{su}(v, 1) d\mu(v) = H_\mu(\xi|g\xi)$  implique  $\nu = \mu$  sur  $\sigma(g^{-n}\xi)$ .*

*Démonstration.* Pour  $\mu$ -presque tout  $v$ , la partition induite par  $(g^{-1}\xi)$  sur  $\xi(v)$  est dénombrable. Pour  $w \in \xi(v)$  on définit

$$\varrho(w) = \frac{d\nu}{d\mu} \Big|_{g^{-1}\xi}(w) := \frac{\nu_{\xi(w)}((g^{-1}\xi)(w))}{\mu_{\xi(w)}((g^{-1}\xi)(w))}.$$

Remarquons que  $\varrho$  est bien définie  $\mu$ -presque partout. D'après la convexité du logarithme on obtient

$$\int \log \varrho d\mu \leq \log \int \varrho d\mu = 0$$

avec

$$\int \log \varrho d\mu = 0 \text{ si et seulement si } \varrho \equiv 1 \mu - \text{p.p.}$$

Grâce au lemme 3.25 et à l'égalité  $H_\mu(\xi|g\xi) = \chi^+$ , on a

$$\begin{aligned} - \int \log \nu_{\xi(v)}((g^{-1}\xi)(v))d\mu &= \int \log J^{su}(v, 1)d\mu \\ &= H_\mu(\xi|g\xi) = H_\mu(g^{-1}\xi|\xi) \\ &= - \int \log \mu_{\xi(v)}((g^{-1}\xi)(v))d\mu, \end{aligned}$$

et donc  $\int \log \varrho d\mu = 0$ . Il s'ensuit que  $\varrho \equiv 1$   $\mu$ -presque partout.  $\square$

Le lemme 3.26 ci-dessus étant vrai pour n'importe quelle partition  $\xi$  entraîne que  $\nu = \mu$  sur la  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(g^{-n}\xi)$ , pour tout  $n \geq 0$ . Or la partition  $\xi$  est génératrice, donc  $\nu = \mu$ . Cela conclut la démonstration du théorème 3.10.  $\square$

### 3.3 Conséquences

Dans cette dernière section nous nous concentrons sur quelques conséquences du théorème 3.4. L'objet fondamental à étudier sera la *pression topologique* du flot géodésique associée à un potentiel  $F : T^1X \rightarrow \mathbb{R}$ . Il y a plusieurs manières équivalentes de la définir, donc nous utiliserons celle qui nous convient.

**Définition 3.27.** Soit  $F : T^1X \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel continu. La pression topologique de  $(g_t)$  pour le potentiel  $F$ , notée  $P_{top}(g, F)$ , est définie par

$$P_{top}(g, F) = \sup_{\mu} P_{\mu}(g, F),$$

où  $P_{\mu}(g, F) = h_{\mu}(g) + \int F d\mu$  et  $\mu$  est une mesure de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $T^1X$ .

Observons que lorsque  $F \equiv 0$ , la pression topologique  $P_{top}(g, F)$  correspond à l'entropie topologique. Ainsi, on peut penser « de façon intuitive » à la pression topologique comme un nombre réel qui permet de mesurer la complexité d'un système dynamique, en donnant différents poids aux points de l'espace.

Un problème intéressant dans ce cadre est le suivant : Étant donné un « bon » potentiel, existe-t-il une mesure qui maximise la pression topologique ?

**Définition 3.28.** Soit  $F : T^1X \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel continu. Une mesure de probabilité  $(g_t)$ -invariante  $m$  sur  $T^1X$  est une mesure d'équilibre pour le potentiel  $F$ , si

$$P_{top}(g, F) = P_m(g, F).$$

Le problème d'existence de mesures d'équilibre pour le flot géodésique a été étudié par Paulin, Pollicott et Schapira dans [PPS12] en suivant les idées de J.-P. Otal et M. Peigné sur l'existence de mesures qui maximisent l'entropie (voir [OP04]).

On rappelle qu'une mesure  $\sigma$ -finie  $m$  sur  $T^1X$  est une *mesure de Gibbs* pour un potentiel  $F : T^1X \rightarrow \mathbb{R}$  avec constante  $c(F) \in \mathbb{R}$ , si pour tout ensemble compact  $K \subset T^1X$  et tout  $r > 0$  il existe une constante  $C = C(K, r) \geq 1$  telle que pour tout  $v \in K$  et tout  $n \geq 0$  telle que  $g^n v \in K$ , on a

$$C^{-1} \leq \frac{m(B_n(v, r))}{\exp\left(\int_0^n (F(g_t v) - c(F)) dt\right)} \leq C.$$

Remarquons que cette définition est due à Paulin-Pollicott-Schapira dans le cas non compact.

Le théorème 3.29 ci-dessous résume certains résultats de [PPS12] sur l'existence de mesures de Gibbs.

**Théorème 3.29** (Paulin-Pollicott-Schapira). *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Soit  $F : T^1X \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel Hölder-continu et borné. Alors*

- (1) *Il existe des mesures de Gibbs pour  $F$  avec constante  $P_{top}(g, F)$ ,*
- (2) *S'il existe une mesure de Gibbs finie  $m_F$  pour  $F$  avec constante  $c(F)$ , alors la mesure  $m^F = m_F / \|m_F\|$  est l'unique mesure d'équilibre pour  $F$  et  $c(F) = P_{top}(g, F)$ .*

Considérons maintenant le potentiel géométrique  $F^{su} : T^1X \rightarrow \mathbb{R}$ . La proposition 3.2 nous dit que  $\int F^{su} d\mu = -\int \chi^+ d\mu$  pour toute mesure de probabilité  $(g_t)$ -invariante. Ainsi, le théorème 3.4 est équivalent au résultat suivant concernant la pression topologique de  $F^{su}$ .

**Corollaire 3.30.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Alors pour toute mesure de probabilité  $(g_t)$ -invariante  $\mu$  sur  $T^1X$ , on a*

$$P_\mu(g, F^{su}) \leq 0.$$

Par ailleurs, le théorème 3.1 nous dit que le potentiel géométrique est Hölder-continu et borné. En particulier, grâce au théorème 3.29, il existe une mesure de Gibbs  $m_{F^{su}}$  pour le potentiel  $F^{su}$  avec constante  $P_{top}(g, F)$ .

Comme conséquence du corollaire 3.30, nous pouvons enlever une hypothèse dans le théorème 7.2 de [PPS12]. On obtient ainsi :

**Corollaire 3.31.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Si le flot géodésique est conservatif par rapport à la mesure de Liouville, alors la mesure de Liouville est proportionnelle à  $m_{F^{su}}$ . De plus, on a*

$$P_{top}(g, F^{su}) = 0.$$

Lorsque  $X$  est une variété de volume fini, le théorème de récurrence de Poincaré nous dit que la mesure de Liouville est conservative. Le corollaire ci-dessous en découle.

**Corollaire 3.32.** *Soit  $X$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons les dérivées partielles des courbures sectionnelles uniformément bornées. Si  $X$  est de volume fini, alors*

$$m^{F^{su}} = \frac{\text{vol}}{\text{vol}(T^1X)}.$$

# Chapitre 4

## Perte de masse

Dans ce dernier chapitre nous nous intéressons à l'estimation de la masse d'un point d'accumulation vague d'une suite de mesures de probabilité sur un espace topologique. Si l'espace est compact, alors la masse d'un tel point d'accumulation est toujours égale à 1. Par contre, lorsque l'espace n'est plus compact, l'estimation de la masse devient un problème très difficile à aborder. L'unique affirmation que nous pouvons assurer est que la masse d'un tel point d'accumulation vague est dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Dorénavant nous nous référons à ce problème comme l'étude de *perte de masse*.

Nous travaillerons particulièrement dans le cadre des systèmes dynamiques topologiques, d'où nous prenons deux modèles (dynamique symbolique et dynamique du flot géodésique), et les suites de mesures à considérer seront toutes définies par des mesures de probabilité invariantes.

Ce chapitre fait partie de l'article « *Entropy in the cusp and phase transitions for geodesic flows* » en collaboration avec Godofredo Iommi et Anibal Velozo. Quelques notations et démonstrations ont été légèrement modifiées pour être cohérents avec le reste de cette thèse.

### 4.1 Perte de masse : dynamique symbolique

Nous avons vu dans la sous-section 2.2.1 certaines propriétés dynamiques des flots de suspension. Nous nous concentrerons maintenant dans le cas particulier d'un flot de suspension au-dessus d'un décalage de Markov dénombrable.

#### 4.1.1 Formalisme thermodynamique pour décalages de Markov

Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble (alphabet) fini ou dénombrable. Considérons une matrice  $A = (A(a, b))_{(a, b) \in \mathcal{A}^2}$  à coefficients dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ . Le sous-décalage de Markov  $(\Sigma_A^+, \sigma)$  associé à la matrice  $A$  est le couple  $(\Sigma_A^+, \sigma)$ , où  $\Sigma_A^+$  est l'espace base

$$\Sigma_A^+ = \Sigma^+ = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} : A(x_k, x_{k+1}) = 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\}$$

et  $\sigma$  est l'application  $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  définie par  $\sigma((x_k)_k) = (x_{k+1})_k$ . On munit  $\Sigma^+$  de la topologie engendrée par les cylindres

$$C_{a_0, \dots, a_n} = \{x \in \Sigma^+ : x_k = a_k \text{ pour } k = 0, \dots, n\}.$$

Remarquons que  $\Sigma^+$  est compact si  $\mathcal{A}$  est de cardinal fini. Si  $\mathcal{A}$  est dénombrable, de manière générale  $\Sigma^+$  n'est pas compact. Nous allons supposer toujours que  $(\Sigma^+, \sigma)$  est *topologiquement mélangeant*, c'est-à-dire que pour tout couple d'ouverts  $A, B \subset \Sigma^+$ , il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $A \cap \sigma^n(B) \neq \emptyset$ .

Pour étudier le formalisme thermodynamique d'un décalage de Markov, on aura besoin de travailler avec de « bons » potentiels.

**Définition 4.1.** Une fonction  $\varphi : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est dite à variation bornée si

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n(\varphi) < \infty,$$

où  $V_n(\varphi) := \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x, y \in \Sigma^+, x_k = y_k \text{ pour } k = 1, \dots, n\}$ .

**Définition 4.2.** Une fonction  $\varphi : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est dite localement Hölder s'il existe  $\theta \in ]0, 1[$  et une constante  $C > 0$  tels que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $V_n(\varphi) \leq C\theta^n$ .

Observons que les potentiels localement Hölder sont des potentiels à variation bornée par comparaison avec une série géométrique. La définition suivante de pression a été introduite par Sarig [Sar99] suivant les travaux de Gurevich [Gur69, Gur70].

**Définition 4.3.** Soit  $\varphi : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée. La pression de Gurevich de  $\varphi$ , notée  $P(\sigma, \varphi)$ , est définie par

$$P(\sigma, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x: \sigma^n x = x} \exp \left( \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\sigma^i x) \mathbb{1}_{C_{i_1}}(x) \right), \quad (4.1)$$

où  $\mathbb{1}_{C_{i_1}}(x)$  est la fonction caractéristique sur le cylindre  $C_{i_1} \subset \Sigma^+$ .

Le fait que  $\varphi$  soit à variation bornée implique que la limite dans (4.1) existe toujours et qu'elle ne dépend pas du symbole  $i_1$  (voir [Sar99, Theorem 1]). Les deux propriétés suivantes sur la pression (propriété d'approximation et principe variationnel) seront utiles pour nos propos (voir [Sar99, Theorems 2 et 3], [JIT15, Theorem 2.10] pour des démonstrations). Rappelons que  $\mathcal{M}_\sigma$  est l'espace des mesures de probabilité  $\sigma$ -invariantes et  $\mathcal{M}_\sigma(\varphi)$  est l'ensemble des mesures de probabilité  $\sigma$ -invariantes telles que  $\varphi \in L^1$ .

**Théorème 4.4** (Sarig/Iommi-Jordan-Todd). Soit  $\varphi : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation bornée. Alors

(1) *Propriété d'approximation.*

$$P(\sigma, \varphi) = \sup\{P(\sigma, \varphi|_K) : K \subset \Sigma^+, \text{ compact non vide et } \sigma\text{-invariant}\},$$

où  $P(\sigma, \varphi|_K)$  est la pression de Gurevich de  $\varphi$  restreinte au compact  $K$ .

(2) *Principe variationnel.*

$$P(\sigma, \varphi) = \sup \left\{ h_\mu(\sigma) + \int \varphi d\mu : \mu \in \mathcal{M}_\sigma(\varphi) \right\}.$$

**Définition 4.5.** Le sous-décalage  $(\Sigma_A^+, \sigma)$  satisfait la condition BIP s'il existe un ensemble fini de symboles dans l'alphabet  $\mathcal{A}$ , disons  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , tel que pour tout  $a \in \mathcal{A}$  il existe  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  avec  $A(b_i, a)A(a, b_j) = 1$ .

En particulier, un sous-décalage de Markov satisfaisant la condition BIP satisfait

$$\Sigma^+ = \sigma^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^n C_{b_i} \right).$$

Ainsi, le formalisme thermodynamique pour cette classe de sous-décalages ressemble beaucoup au formalisme thermodynamique des décalages de type fini. Par exemple, sous certains hypothèses techniques, on peut assurer l'existence de mesures (ou états) d'équilibre. Le théorème 4.6 ci-dessous résume des résultats montrés par Sarig [Sar99, Sar01] et Mauldin et Urbánsky [MU03] dans ce contexte.

**Théorème 4.6.** Soit  $(\Sigma^+, \sigma)$  un décalage de Markov dénombrable d'entropie topologique infinie, en satisfaisant la condition BIP. Soit  $\varphi : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel strictement positif localement Hölder. Alors il existe  $s_\infty^\varphi > 0$  tel que la fonction pression  $t \mapsto P(\sigma, -t\varphi)$  satisfait

$$P(\sigma, -t\varphi) = \begin{cases} \infty, & \text{si } t < s_\infty^\varphi \\ \text{analytique réelle,} & \text{si } t > s_\infty^\varphi. \end{cases}$$

De plus, si  $t > s_\infty^\varphi$ , alors il existe une unique mesure d'équilibre pour  $-t\varphi$ .



### 4.1.2 Formalisme thermodynamique pour flots de suspension

Dorénavant nous supposons toujours que  $(\Sigma^+, \sigma)$  est un décalage de Markov dénombrable, topologiquement mélangeant et d'entropie topologique infinie. Soit  $\tau : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction à variation bornée et bornée loin de zéro, c'est-à-dire qu'il existe une constante strictement positive  $c > 0$  telle que  $\tau(x) \geq c > 0$  pour tout  $x \in \Sigma^+$ . Considérons l'espace

$$Y^+ = \{(x, t) \in \Sigma^+ \times \mathbb{R}\} / \sim,$$

où  $(x, s + \tau(x))$  et  $(\sigma(x), s)$  sont identifiés pour tout  $x \in \Sigma^+$ . Le semi-flot de suspension sur  $\Sigma^+$  avec fonction plafond  $\tau$  est le semi-flot  $\Phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$  sur  $Y^+$  défini par

$$\phi_t[x, s] = [x, s + t].$$

Rappelons que les mesures de probabilité  $\Phi$ -invariantes sur  $Y^+$  sont en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{M}_\sigma(\tau)$  des mesures de probabilité  $\sigma$ -invariantes sur  $\Sigma^+$  telles que  $\tau \in L^1$ .

Considérons maintenant un décalage de Markov bilatéral  $(\Sigma, \sigma)$ , où

$$\Sigma = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} : A(x_k, x_{k+1}) = 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Le semi-flot  $\Phi$  définie sur  $Y^+$  s'étend en un flot de suspension  $\Phi : Y \rightarrow Y$  au dessus de  $(\Sigma, \sigma)$ , avec fonction plafond  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui ne dépend que des coordonnées positives.

Deux fonctions  $\varphi, \phi \in C(\Sigma)$  sont dites *cohomologues* s'il existe une fonction bornée  $\psi \in C(\Sigma)$  telle que  $\varphi = \phi + \psi \circ \sigma - \psi$ . La remarque importante est la suivante : le formalisme thermodynamique pour deux potentiels cohomologues est le même.

**Proposition 4.7.** *Si  $\varphi \in C(\Sigma)$  est à variation bornée, alors il existe  $\phi \in C(\Sigma)$  à variation bornée cohomologue à  $\varphi$  telle que  $\phi(x) = \phi(y)$  pour tout  $x, y \in \Sigma$  tels que  $x_k = y_k$  pour tout  $k \geq 0$  (autrement dit, qui dépend seulement du future).*

Ainsi, si tout potentiel  $\varphi \in C(\Sigma)$  est cohomologue à un potentiel  $\phi \in C(\Sigma)$  qui ne dépend que des coordonnées futures, alors le formalisme thermodynamique du flot peut être étudié à partir du semi-flot correspondant (voir [Sin72]).

La proposition 4.7 a été démontrée sous différentes hypothèses de régularité. Dans le cas compact elle est due à [Sin72], [Bow75] et [CQ98], alors que dans le cas non compact a été démontrée par [Dao13].

Comme la formule d'Abramov nous donne une relation entre l'entropie mesurée de  $(\Sigma, \sigma)$  et l'entropie mesurée de  $(Y, \Phi)$  (voir proposition 2.8), la pression du flot de suspension peut aussi être étudiée à partir de la pression du décalage de Markov. Considérons d'abord un potentiel  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ . Il induit un potentiel  $\Delta_f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$\Delta_f(x) = \int_0^{\tau(x)} f(x, t) dt.$$

**Proposition 4.8.** *Soient  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\nu \in \mathcal{M}_\Phi$  une mesure de probabilité invariante qui s'écrit  $\nu = (\mu \times m)|_Y / (\mu \times m)(Y)$  avec  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\tau)$ . Alors*

$$\int_Y f d\nu = \frac{\int_\Sigma \Delta_f d\mu}{\int_\Sigma \tau d\mu}. \quad (4.2)$$

Les relations entre les pressions topologiques pour  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(Y, \Phi)$  ont été étudiées par plusieurs personnes, dans différents cadres (voir Savchenko [Sav98], Barreira et Iommi [BI06], Kempton [Kem11], et Jaerisch, Kesseböhmer et Lamei [JKL14]). Le résultat suivant donne des définitions équivalentes pour la pression  $P(\Phi, \cdot)$ .

**Théorème 4.9.** *Soit  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\Delta_f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée. Alors*

$$\begin{aligned} P(\Phi, f) &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left( \sum_{\phi_s(x,0)=(x,0), 0 < s \leq t} \exp \left( \int_0^s f(\phi_k(x,0)) \, dk \right) \chi_{C_{i_0}}(x) \right) \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} : P(\sigma, \Delta_f - t\tau) \leq 0\} = \sup\{t \in \mathbb{R} : P(\sigma, \Delta_f - t\tau) \geq 0\} \\ &= \sup\{P(\Phi|_K, f) : K \text{ compact invariant}\}. \end{aligned}$$

Observons que le principe variationnel dans ce contexte est aussi satisfait lorsque les potentiels sont suffisamment régulières (voir [BI06, JKL14, Kem11, Sav98]).

**Théorème 4.10** (Principe Variationnel). *Soit  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\Delta_f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée. Alors*

$$P(\Phi, f) = \sup \left\{ h_\nu(\Phi) + \int_Y f \, d\nu : \nu \in \mathcal{M}_\Phi \text{ et } - \int_Y f \, d\nu < \infty \right\}.$$

En particulier, d'après le théorème 4.9, l'entropie topologique du flot de suspension est l'unique nombre  $h_{top}(\Phi)$  satisfaisant

$$h_{top}(\Phi) = \inf\{t \in \mathbb{R} : P(\sigma, -t\tau) \leq 0\}. \quad (4.3)$$

Une mesure  $\nu \in \mathcal{M}_\Phi$  est appelée *mesure d'équilibre* pour le potentiel  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  si

$$P(\Phi, f) = h_\nu(\Phi) + \int f \, d\nu.$$

Dans [IJT15, Theorem 3.5] les auteurs ont montré que les potentiels  $f$  pour lesquels  $\Delta_f$  est localement Hölder ont au plus une mesure d'équilibre. De plus, le résultat suivant (voir [BI06, Theorem 4]) caractérise les potentiels qui ont une telle mesure.

**Théorème 4.11.** *Soit  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\Delta_f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée. Alors il existe une mesure d'équilibre  $\nu_f \in \mathcal{M}_\Phi$  pour  $f$  si et seulement si on a  $P(\sigma, \Delta_f - P(\Phi, f)\tau) = 0$  et il existe une mesure d'équilibre  $\mu_f \in \mathcal{M}_\sigma$  pour  $\Delta_f - P(\Phi, f)\tau$  telle que  $\int \tau d\mu_f < \infty$ .*

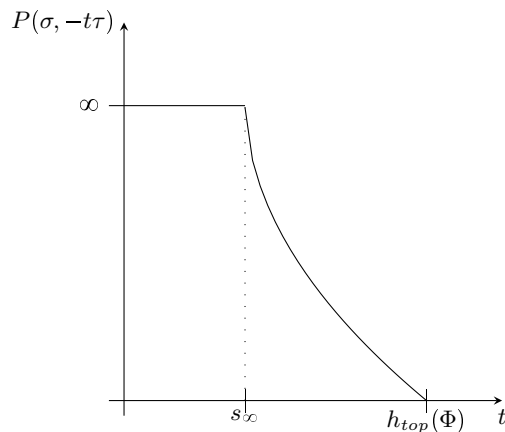
Le théorème 4.11 montre ainsi une autre relation entre les formalismes thermodynamiques des deux systèmes dynamiques ; le décalage de Markov et la suspension.

### 4.1.3 Perte de masse

Soit  $(\Sigma, \sigma)$  un décalage de Markov topologiquement mélangeant d'entropie topologique infinie et  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$  un potentiel à variation bornée et borné loin de zéro. On note encore  $(Y, \Phi)$  le flot de suspension associé qu'on suppose toujours d'entropie topologique finie. Remarquons que puisque  $(\Sigma, \sigma)$  est d'entropie topologique infinie et  $\tau$  est strictement positive, l'entropie topologique  $h_{top}(\Phi)$  du flot satisfait  $P(\sigma, -h_{top}(\Phi)\tau) \leq 0$  (voir équation (4.3)). Ainsi, il existe un nombre réel  $s_\infty \in ]0, h_{top}(\Phi)]$  tel que

$$P(\sigma, -t\tau) = \begin{cases} \text{infinie} & \text{si } t < s_\infty; \\ \text{finie} & \text{si } t > s_\infty. \end{cases}$$

La valeur  $s_\infty$  jouera un rôle fondamental pour décrire en quelque sorte l'entropie de l'infini.



Pour des flots géodésiques définis sur des variétés non-compactes il existe toujours des vecteurs qui s'échappent vers l'infini, ils n'ont pas la propriété de récurrence. Ce phénomène est impossible dans le contexte symbolique puisque tout point revient sur la base après un certain temps. La définition suivante décrit l'ensemble des points qui s'échappent vers l'infini en moyenne.

**Définition 4.12.** On dit qu'un point  $(x, t) \in Y$  s'échappe vers l'infini en moyenne si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\sigma^i x) = \infty. \quad (4.4)$$

On note  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\tau)$  l'ensemble des points qui satisfont (4.4).

**Remarque 4.13.** Si  $\nu \in \mathcal{M}_{\Phi}$  est ergodique et  $\nu = (\mu \times m)/(\mu \times m)(Y)$  avec  $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma}(\tau)$ , alors le théorème ergodique de Birkhoff entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\sigma^i x) = \int \tau d\mu.$$

La remarque ci-dessus implique que aucune mesure dans  $\mathcal{M}_{\Phi}$  n'est portée par  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\tau)$ . On va étudier donc la dynamique de  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}(\tau)$  en considérant des suites de mesures  $\nu_n \in \mathcal{M}_{\Phi}$  telles que leurs mesures associées  $\mu_n \in \mathcal{M}_{\sigma}(\tau)$  satisfont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tau d\mu_n = \infty.$$

Montrons maintenant qu'une mesure d'entropie suffisamment grande ne donne pas trop de poids aux points dont le temps de premier retour est grand. Plus précisément, on a

**Théorème 4.14.** Soit  $c \in ]s_{\infty}, h_{top}(\Phi)[$ . Alors il existe une constante  $M = M(c) > 0$  telle que pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}_{\Phi}$  satisfaisant  $h_{\nu}(\Phi) \geq c$ , on a

$$\int \tau d\mu \leq M.$$

*Démonstration.* Soit  $\nu \in \mathcal{M}_{\Phi}$  avec  $h_{\nu}(\Phi) = c' \geq c$  et soit  $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma}$  la mesure invariante associée à  $\nu$ , c'est-à-dire  $\nu = (\mu \times m)/((\mu \times m)(Y))$ . D'après la formule d'Abramov, on a

$$h_{\mu}(\sigma) - c' \int \tau d\mu = 0.$$

Considérons la droite  $L(t) := h_{\mu}(\sigma) - t \int \tau d\mu$ . Remarquons que  $L(c') = 0$  et  $L(0) = h_{\mu}(\sigma)$ . Soit  $s \in ]s_{\infty}, c'[$ . Grâce au théorème 4.6, on a  $P(\sigma, -s\tau) < \infty$ . D'après le principe variationnel, on a aussi  $L(s) \leq P(\sigma, -s\tau)$ . Ainsi, la pente de  $L(t)$  est bornée. En effet,

$$\int \tau d\mu \leq \frac{P(\sigma, -s\tau)}{c' - s}.$$

La constante  $M(c') = P(\sigma, -s\tau)/(c' - s)$  satisfait donc la conclusion de ce théorème pour la mesure  $\mu$ . Comme  $s \in ]s_\infty, c'[$  est arbitraire, et  $c' \geq c$ , on peut choisir  $s \in ]s_\infty, c[$  et  $M = P(\sigma, -s\tau)/(c - s)$  de sorte que  $\int \tau d\mu \leq M$  pour toute mesure  $\mu$  associée à une mesure  $\nu$  d'entropie  $\geq c$ . Cela conclut la preuve du théorème.  $\square$

La constante  $s_\infty$ , qui est liée à la valeur  $\int \tau d\mu$  d'après le théorème précédent, est optimale grâce au théorème 4.15 ci-dessous.

**Théorème 4.15.** *Supposons que  $s_\infty < h_{top}(\Phi)$ . Soit  $(\nu_n)_n \in \mathcal{M}_\Phi$  une suite de mesures de probabilité  $\Phi$ -invariantes telles que*

$$\nu_n = \frac{\mu_n \times m}{(\mu_n \times m)(Y)},$$

où  $\mu_n \in \mathcal{M}_\sigma(\tau)$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tau d\mu_n = \infty$ , alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(\Phi) \leq s_\infty.$$

De plus, il existe une suite  $(\nu_n)_n \in \mathcal{M}_\Phi$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tau d\mu_n = \infty$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(\Phi) = s_\infty.$$

*Démonstration.* La première affirmation est une conséquence du théorème 4.14. Montrons donc que, sous la condition  $s_\infty < h_{top}(\Phi)$ , il existe une suite  $(\nu_n)_n \in \mathcal{M}_\Phi$  satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tau d\mu_n = \infty$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(\Phi) = s_\infty$ . D'après la propriété d'approximation de la pression, il existe une suite de compacts  $(K_N)_N \subset \Sigma$  tels que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sigma, -t\tau|_{K_N}) = P(\sigma, -t\tau).$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sigma, -(s_\infty - 1/n)\tau|_{K_N}) = \infty.$$

Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$P(\sigma, -(s_\infty + 1/n)\tau|_{K_N}) \leq P(\sigma, -(s_\infty + 1/n)\tau) < \infty.$$

Ainsi, étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n^2 < \frac{P(\sigma, -(s_\infty - 1/n)\tau|_{K_N}) - P(\sigma, -(s_\infty + 1/n)\tau|_{K_N})}{2/n}.$$

Comme l'application  $t \mapsto P(\sigma, -t\tau|_{K_N})$  est réelle analytique, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe  $t_n \in ]s_\infty - 1/n, s_\infty + 1/n[$ , tel que  $P'(\sigma, -t_n\tau|_{K_N}) > n^2$ . Notons  $\mu_n$  la mesure d'équilibre de  $-t_n\tau$  sur  $K_N$ . On a ainsi

$$n^2 < P'(\sigma, -t_n\tau|_{K_N}) = \int \tau d\mu_n.$$

En particulier, la suite  $(\mu_n)_n$  satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tau d\mu_n = \infty.$$

Comme  $s_\infty < h_{top}(\Phi)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, on a

$$h_{\mu_n}(\sigma) - t_n \int \tau d\mu_n > 0.$$

En particulier

$$t_n < \frac{h_{\mu_n}(\sigma)}{\int \tau d\mu_n}.$$

Comme  $t_n \in ]s_\infty - 1/n, s_\infty + 1/n[$ , on conclut

$$s_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{\mu_n}(\sigma)}{\int \tau d\mu_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(\Phi). \quad (4.5)$$

Or la dernière limite à droite dans (4.5) ne peut pas être plus grande que  $s_\infty$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(\Phi) = s_\infty.$$

□

Le résultat ci-dessous est le résultat principal de cette section. Cela nous donne une relation entre la masse perdue d'une limite vague d'une suite de mesures de probabilité  $\Phi$ -invariantes et l'entropie mesurée du flot de suspension. Nous rappelons qu'une suite  $(\nu_n)_n$  de mesures de probabilité converge vaguement vers une mesure  $\nu$ , notée  $\nu_n \rightharpoonup \nu$ , si pour toute fonction  $f \in C_c^0(Y)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\nu_n = \int f d\nu.$$

**Théorème 4.16.** *Supposons que  $s_\infty < h_{top}(\Phi)$ . Alors*

$$\sup_{\nu_n \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(\Phi) \geq s_\infty,$$

où le supremum est pris parmi toutes les mesures de probabilité  $\Phi$ -invariantes qui convergent vaguement vers la mesure 0.

*Démonstration.* Soit  $(\nu_n)_n \in \mathcal{M}_\Phi$  la suite de mesures construite dans la preuve du théorème 4.15 telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(\Phi) = s_\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tau d\mu_n = \infty$ . Si  $f \in C_c^0(Y)$  est une fonction continue sur  $Y$  à support compact, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\nu_n = 0$$

car

$$\int f d\nu_n = \frac{\int \Delta_f d\mu_n}{\int \tau d\mu_n}$$

et la fonction  $\Delta_f$  est bornée. Ainsi, la suite  $\nu_n$  converge vaguement vers 0, ce qui entraîne l'inégalité souhaitée. □

## 4.2 Perte de masse : dynamique du flot géodésique

Dans cette section nous étudions la perte de masse d'une suite de mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne à courbure négative pincée. Tout d'abord nous rappelons quelques notions liées à la géométrie de la variété et la dynamique du flot.

### 4.2.1 Préliminaires en géométrie et dynamique

Soit  $X = \tilde{X}/\Gamma$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Ici  $\tilde{X}$  est le revêtement universel de  $X$  et  $\Gamma$  est un groupe Kleinien d'isométries de  $\tilde{X}$ .

#### Concepts basiques

L'ensemble non-errant du flot géodésique, noté  $\Omega(\Gamma)$ , est l'ensemble de vecteurs dans  $T^1X$  défini par

$$\Omega(\Gamma) = \{v \in T^1X : \forall T \geq 0, \forall U_v, \exists t > T \text{ tel que } U_v \cap g_{-t}U_v \neq \emptyset\},$$

où  $U_v$  est un voisinage ouvert de  $v$ . Cet ensemble concentre la dynamique du flot géodésique.

**Définition 4.17.** *L'ensemble limite de  $\Gamma$ , noté  $L(\Gamma)$ , est le plus petit ensemble non-vide, fermé et  $\Gamma$ -invariant dans  $\partial\tilde{X}$ .*

On peut décrire l'ensemble  $L(\Gamma)$  à partir de la  $\Gamma$ -orbite d'un point arbitraire. Pour tout  $x \in \tilde{X}$ , on a

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot x} \setminus \Gamma \cdot x.$$

Rappelons que les coordonnées de Hopf (voir annexe A) permettent d'étudier plus facilement le fibré unitaire tangent  $T^1\tilde{X}$  et l'action du flot géodésique dans cet espace. Il est donc naturel de penser à l'ensemble non-errant du flot sur  $T^1X$  comme un quotient (par le groupe  $\Gamma$ ) d'un sous-ensemble de  $T^1\tilde{X}$  en ces coordonnées. L'ensemble limite  $L(\Gamma)$  joue ici un rôle fondamental.

**Lemme 4.18.** *L'ensemble  $\Omega(\Gamma)$  s'identifie en coordonnées de Hopf avec*

$$((L(\Gamma) \times L(\Gamma) \setminus \text{Diag}) \times \mathbb{R})/\Gamma.$$

On note  $C(\Gamma)$  l'enveloppe convexe de  $L(\Gamma)$  dans  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ . Cet ensemble est fermé et  $\Gamma$ -invariant. Le cœur de Nielsen, noté  $N(\Gamma) = C(\Gamma)/\Gamma$ , est l'ensemble quotient de  $C(\Gamma)$  par l'action de  $\Gamma$ . Par définition, on a  $\Omega(\Gamma) \subset \pi^{-1}(N(\Gamma))$ , où  $\pi : T^1X \rightarrow X$  est la projection canonique.

**Définition 4.19.** *On dit que  $\Gamma$  est un groupe géométriquement fini si pour tout  $\varepsilon > 0$ , le  $\varepsilon$ -voisinage  $N_\varepsilon(\Gamma)$  de  $N(\Gamma)$  est de volume fini.*

Les variétés géométriquement finies se caractérisent par la propriété suivante. Le cœur de Nielsen se décompose en la réunion disjointe d'un compact  $C_0$  et d'une famille finie  $C_1, \dots, C_l$  de cusps. Pour tout  $1 \leq i \leq l$ , le cusp  $C_i$  est isométrique au quotient de l'intersection de  $C(\Gamma)$  et d'une horoboule  $B_{\xi_i}$  par un groupe parabolique  $\mathcal{P}_i$  en fixant  $\xi_i \in \partial\tilde{X}$  (voir [Bow95]).

### Mesures invariantes, ergodicité et entropie du flot géodésique

Il y a beaucoup des mesures invariantes par le flot géodésique sur  $T^1X$ . Par exemple, on y trouve toutes les mesures portées par une orbite périodique. Ces mesures sont malheureusement de peu intérêt dynamique puisque l'entropie associée à une telle mesure est nulle. En revanche, parfois il est possible de trouver une mesure qui maximise l'entropie, appelée *mesure de Bowen-Margulis* et notée  $m_{BM}$  (voir [Rob03, Chapitre §1] pour une construction propre). Nous donnons maintenant quelques propriétés de  $m_{BM}$ .

Soit  $x \in \tilde{X}$  et  $s \geq 0$ . La série de Poincaré associée à  $\Gamma$ , notée  $P_\Gamma(x, s)$ , est définie par

$$P_\Gamma(x, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x)}.$$

La série de Poincaré converge (resp. diverge) pour tout  $s > \delta_\Gamma$  (resp.  $s < \delta_\Gamma$ ), où  $\delta_\Gamma$  est l'*exposant critique* de  $\Gamma$  défini par

$$\delta_\Gamma = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \#\{\gamma \in \Gamma : d(x, \gamma x) \leq R\}.$$

L'exposant critique ne dépend pas de  $x \in \tilde{X}$  d'après l'inégalité triangulaire. Il est fini du fait que les courbures sectionnelles sont pincées et il est strictement positif puisque  $\Gamma$  est non-élémentaire.

Soit  $\gamma \in \Gamma$ . On note  $\delta_\gamma$  l'exposant critique du groupe  $\langle \gamma \rangle$ .

**Définition 4.20.** *Le groupe  $\Gamma$  est dit de type divergent (resp. convergent) si  $P_\Gamma(x, \delta_\Gamma)$  diverge (resp. converge).*

En ce qui concerne l'ergodicité du système dynamique  $(T^1X, m_{BM}, (g_t))$ , nous trouvons le suivant théorème de dichotomie.

**Théorème 4.21** (Poincaré-Tsuji-Sullivan). *Soit  $X = \tilde{X}/\Gamma$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons que  $\Gamma$  est un groupe Kleinien d'isométries de  $\tilde{X}$ . Alors*

*Premier cas :*

- (i) Le groupe  $\Gamma$  est de type convergent.
- (ii) Le système dynamique  $(T^1X, m_{BM}, (g_t))$  est complètement dissipatif et non-ergodique.

Second cas :

- (i) Le groupe  $\Gamma$  est de type divergent.
- (ii) Le système dynamique  $(T^1X, m_{BM}, (g_t))$  est complètement conservatif et ergodique.

D'après le théorème de récurrence de Poincaré, si la mesure de Bowen-Margulis est finie, alors elle est conservative. En particulier, grâce au théorème 4.21, la mesure  $m_{BM}$  est ergodique. De plus, le groupe  $\Gamma$  est de type divergent.

En ce qui concerne la complexité du flot géodésique, nous faisons remarquer le théorème 4.22 ci-dessous. Ce théorème est une généralisation d'un théorème de Sullivan pour le cas où  $\Gamma$  est un groupe convexe-cocompact (voir [Sul84]). De plus, l'existence d'une mesure maximisant l'entropie dans le cadre d'un groupe convexe-cocompact est une conséquence d'un théorème de Bowen-Ruelle pour des flots Axiome A (voir [BR75]).

**Théorème 4.22** (Otal-Peigné). *Soit  $X = \tilde{X}/\Gamma$  une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Supposons que  $\Gamma$  est un groupe Kleinien d'isométries de  $\tilde{X}$  et que les dérivées partielles des courbures sectionnelles sont uniformément bornées. Alors  $h_{top}(g) = \delta_\Gamma$ . De plus, il existe une mesure  $m$  qui maximise l'entropie mesurée si et seulement si la mesure de Bowen-Margulis est finie. Dans ce cas, on a  $m = m_{BM}$ .*

Nous remarquons que dans [OP04] l'hypothèse sur les dérivées partielles des courbures sectionnelles est omise malgré le fait qu'ils utilisent la régularité du feuilletage fortement instable. Cette hypothèse est fondamentale pour assurer la régularité Hölder des feuilletages fortement instable et stable.

### Quelques lemmes complémentaires

Pour finir cette sous-section, on donnera plusieurs propriétés qui font intervenir l'exposant critique d'un groupe Kleinien et la mesure de Bowen-Margulis. Tous ces résultats, sauf le dernier, s'agissent de théorèmes de F. Dalbo et M. Peigné dans (voir [DOP00]). Le premier et dernier théorème ci-dessous marche dans toute la généralité, pour n'importe quel groupe Kleinien. Par ailleurs, les autres ne sont valides que pour les groupes géométriquement finis.

**Théorème 4.23** (Dal'bo-Otal-Peigné). *Soit  $\Gamma$  un groupe discret et non-élémentaire d'isométries d'une variété riemannienne complète simplement connexe  $\tilde{X}$  de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Si  $H < \Gamma$  est un sous-groupe divergent de  $\Gamma$  et  $L(H)$  est strictement inclus dans  $L(\Gamma)$ , alors  $\delta_\Gamma > \delta_H$ .*

En particulier, si  $\Gamma$  est un groupe discret et non-élémentaire d'isométries de  $\tilde{X}$ , tel qu'il existe un élément  $\gamma \in \Gamma$  avec  $\langle \gamma \rangle$  de type divergent, alors  $\delta_\Gamma > \delta_\gamma$ . Remarquons qu'un groupe non-élémentaire contient toujours une isométrie hyperbolique. Une telle isométrie est de type divergent avec exposant critique nulle. En particulier, pour tout groupe discret et non-élémentaire d'isométries de  $\tilde{X}$ , on a  $\delta_\Gamma > 0$ .

**Théorème 4.24** (Dal'bo-Otal-Peigné). *Soit  $\Gamma$  un groupe discret et non-élémentaire d'isométries d'une variété riemannienne complète simplement connexe  $\tilde{X}$  de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Si  $\Gamma$  est un groupe géométriquement fini tel que  $\delta_{\mathcal{P}} < \delta_\Gamma$  pour tout sous-groupe parabolique  $\mathcal{P} < \Gamma$ , alors la mesure de Bowen-Margulis sur  $T^1X$  est finie.*

Rappelons que le cœur de Nielsen d'une variété géométriquement finie se décompose en la réunion disjointe d'un compact  $\mathcal{C}_0$  et d'une famille finie de cusps  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_l$ . De plus, chaque  $\mathcal{C}_i$  est isométrique au quotient de l'intersection d'une horoboule et  $C(\Gamma)$ , avec un groupe parabolique  $\langle p_i \rangle$ .

La démonstration du théorème 4.24 consiste à estimer la mesure  $m_{BM}(T^1\mathcal{C}_i)$ , pour tout  $0 \leq i \leq l$ . En effet, on obtient les estimations suivantes :

**Proposition 4.25.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret et non-élémentaire d'isométries d'une variété riemannienne complète simplement  $\tilde{X}$  de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Si  $\Gamma$  est un groupe géométriquement fini, alors*

$$m^{BM}(T^1\mathcal{C}_0) \leq De^{2\delta_\Gamma D}, \quad (4.6)$$

où  $D = \text{diam}(\mathcal{C}_0)$ . De plus, si  $p_i \in \Gamma$  est l'isométrie parabolique associée à  $\mathcal{C}_i$ , alors il existe une constante  $C_i \geq 1$  telle que

$$m^{BM}(T^1\mathcal{C}_i) \asymp_{C_i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} d(x, p_i^m x) e^{-\delta_\Gamma d(x, p_i^m x)}, \quad (4.7)$$

où  $x \in \tilde{X}$ .

**Remarque 4.26.** *Si  $D_i$  est le domaine fondamental de l'action de  $\langle p_i \rangle$  dans  $\partial\tilde{X}$ , la constante  $C_i$  dans (4.7) ne dépend que de la distance au bord entre la frontière de  $D_i$  et l'ensemble limite de  $\Gamma$ .*

Le fait que  $\delta_{\mathcal{P}} < \delta_\Gamma$  pour tout sous-groupe parabolique  $\mathcal{P} < \Gamma$  implique que chaque série comme dans l'équation (4.7) converge. Autrement dit, la mesure de Bowen-Margulis dans ce cas est finie.

Une autre propriété intéressante des exposants critiques est la suivante. Il s'agit d'une propriété d'approximation d'exposants critiques basée sur la preuve de [DOP00, Théorème C].

**Théorème 4.27.** *Soit  $\tilde{X}$  une variété riemannienne complète simplement connexe et  $\Gamma$  un groupe Kleinien d'isométries de  $\tilde{X}$  contenant une isométrie parabolique  $p \in \Gamma$  de type divergente. Alors il existe une isométrie hyperbolique  $h \in \Gamma$  et  $x \in \text{Axe}(h)$  tels que les groupes  $\Gamma_n = \langle p, h^n \rangle$  satisfont les propriétés suivantes :*

- (1) le groupe  $\Gamma_n$  est divergent pour tout  $n \geq 1$ ,
- (2) la suite  $(\delta_{\Gamma_n})$  converge vers l'exposant critique  $\delta_{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P} = \langle p \rangle$ ,
- (3) la suite  $(\delta_{\Gamma_n})$  satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sum_{\gamma \in \mathcal{P}} e^{-\delta_{\Gamma_n} d(x, \gamma x)}} = 0.$$

*Démonstration.* Pour  $H$  un groupe, on note  $H^*$  l'ensemble  $H \setminus \{Id\}$ . Prenons  $U_{\mathcal{P}} \subset \tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$  un voisinage connexe et compact du point  $\xi_p$  fixé par  $p$ , tel que pour tout  $m \in \mathbb{Z}^*$ , on ait  $p^m(\partial\tilde{X} \setminus U_{\mathcal{P}}) \subset U_{\mathcal{P}}$ . Par exemple, on peut choisir  $U_{\mathcal{P}}$  de sorte que  $U_{\mathcal{P}} \cap \partial\tilde{X}$  est un domaine fondamental de l'action de  $\mathcal{P}$  sur  $\partial\tilde{X} \setminus \{\xi_p\}$ . Soit  $h \in \Gamma$  une isométrie hyperbolique de  $\tilde{X}$  telle que  $\xi_{h^-}, \xi_h \notin U_{\mathcal{P}}$ . Une telle isométrie existe car l'ensemble de points fixés des isométries hyperboliques dans  $\Gamma$  est un ensemble dense dans  $L(\Gamma) \times L(\Gamma)$ . Fixons  $x \in \tilde{X}$  sur l'axe de  $h$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on peut trouver un ensemble compact  $U_{H_k} \subset \tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ , où  $H_k = \langle h^k \rangle$ , satisfaisant les trois conditions suivantes :

- (a)  $H_k^*(\partial\tilde{X} \setminus U_{H_k}) \subset U_{H_k}$ .
- (b)  $U_{H_k} \cap U_{\mathcal{P}} = \emptyset$ .
- (c)  $x \notin U_{H_k} \cup U_{\mathcal{P}}$ .

Comme  $U_{\mathcal{P}}$  et  $U_{H_k}$  sont en position Schottky (voisinages disjoints satisfaisant une propriété du type Ping-Pong), le lemme du Ping-Pong entraîne que le groupe  $\Gamma_k$  est libre. Encore par le fait que  $\mathcal{P}$  et  $H_k$  sont en position Schottky, il existe une constante universelle  $C > 0$  telle que pour tout  $y \in U_{H_k}$  et  $z \in U_{\mathcal{P}}$ , on a

$$d(y, z) \geq d(x, y) + d(x, z) - C. \quad (4.8)$$

En appliquant l'inégalité (4.8), plus les propriétés d'inclusion décrites ci-dessus, on déduit

$$d(x, p^{m_1} h^{kn_1} \dots p^{m_j} h^{kn_j} x) \geq \sum_i d(x, p^{m_i} x) + \sum_i d(x, h^{kn_i} x) - 2kC, \quad (4.9)$$



où  $m_i, n_i \in \mathbb{Z}^*$ . Remarquons que la série

$$P'(s) = \sum_{j \geq 1} \sum_{n_i, m_i \in \mathbb{Z}^*} e^{-sd(x, p^{m_1} h^{kn_1} \dots p^{m_j} h^{kn_j} x)},$$

est comparable à la série de Poincaré associée à  $\Gamma_k$ . En effet, comme  $h$  est une isométrie hyperbolique, les deux séries ont le même exposant critique. D'après l'inégalité (4.9), on a

$$P'(s) \leq \sum_{j \geq 1} \left( e^{2sC} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-sd(x, h^{kn} x)} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} e^{-sd(x, p^m x)} \right)^j.$$

Or, d'après le choix de  $x$ , pour  $l := d(x, hx)$  on a  $d(x, h^N x) = |N|l$  pour tout  $N \in \mathbb{Z}$ . Ainsi,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-sd(x, h^{kn} x)} \leq 2 \frac{e^{-sl}}{1 - e^{-sl}}.$$

Soit  $\delta_\epsilon := \delta_p + \epsilon > \delta_p$  et notons  $P_s$  la série  $P_s = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(\delta_p + s)d(x, p^m x)}$ . Alors la somme  $P_\epsilon$  est finie par définition. En considérant  $\epsilon$  petit, il existe une constante  $D > 0$  telle que

$$e^{2\delta_\epsilon C} 2 \frac{e^{-\delta_\epsilon kl}}{1 - e^{-\delta_\epsilon kl}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} e^{-\delta_\epsilon d(x, p^m x)} < D e^{-\delta_\epsilon kl} P_\epsilon.$$

Ainsi, si  $\log(DP_\epsilon)/\delta_\epsilon l < k$ , alors  $D e^{-\delta_\epsilon kl} P_\epsilon < 1$  et donc  $\delta_{\Gamma_k} \leq \delta_\epsilon$ . Observons que la fonction  $t \mapsto \log(DP_t)/\delta_t$  est continue, décroissante et non-bornée sur un intervalle  $]0, \eta[$ , pour un certain  $0 < \eta \ll 1$ . Ainsi, on peut résoudre l'équation  $\log(DP_t)/\delta_t l = k - 1$ , où  $t \in ]0, 0 + \eta[$  et  $k$  est suffisamment grand. On note  $\epsilon_k$  la solution à cette équation. Par construction, on a  $\delta_{\Gamma_k} \leq \delta_{\epsilon_k}$  et par définition de  $\epsilon_k$  on a bien

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\epsilon_k} = \infty.$$

Observons que

$$\frac{k}{\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\delta_{\Gamma_k} d(x, p^m x)}} \leq \frac{k}{P_{\epsilon_k}} = \frac{\log(DP_{\epsilon_k})/(\delta_{\epsilon_k} l) + 1}{P_{\epsilon_k}}.$$

Le terme de droite converge vers 0, ce qui entraîne la propriété (3). La propriété (2) découle du fait que  $\delta_{\Gamma_k} \leq \delta_{\epsilon_k}$  et  $\delta_{\epsilon_k} \rightarrow \delta_p$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , car  $\epsilon_k \rightarrow 0$ . Comme  $\mathcal{P}$  est un groupe de type divergent, le théorème 4.24 et puis le théorème 4.21 impliquent la propriété (1).  $\square$

## 4.2.2 Codage du flot géodésique

Soit  $\tilde{X}$  une variété riemannienne complète simplement connexe, de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles  $-b^2 \leq K \leq -1$ . On note  $\partial\tilde{X}$  le bord à l'infini de  $\tilde{X}$ .

### Variétés de type Schottky

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux entiers strictement positifs tels que  $N_1 + N_2 \geq 2$  et  $N_2 \geq 1$ . Considérons  $N_1$  isométries hyperboliques  $h_1, \dots, h_{N_1}$  et  $N_2$  isométries paraboliques  $p_1, \dots, p_{N_2}$ , satisfaisant les conditions suivantes :

(C1) Pour tout  $1 \leq i \leq N_1$  il existe dans  $\partial\tilde{X}$  un voisinage compact  $C_{h_i}$  du point attractif  $\xi_{h_i}$  de  $h_i$  et un voisinage compact  $C_{h_i^{-1}}$  du point répulsif  $\xi_{h_i^{-1}}$  de  $h_i$ , tels que

$$h_i(\partial\tilde{X} \setminus C_{h_i^{-1}}) \subset C_{h_i}.$$

(C2) Pour tout  $1 \leq i \leq N_2$  il existe dans  $\partial\tilde{X}$  un voisinage compact  $C_{p_i}$  de l'unique point fixe  $\xi_{p_i}$  de  $p_i$ , tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad p_i^n(\partial\tilde{X} \setminus C_{p_i}) \subset C_{p_i}.$$

(C3) Les  $2N_1 + N_2$  voisinages introduits dans (1) et (2) sont deux à deux disjoints.

(C4) Les groupes paraboliques  $\langle p_i \rangle$ , pour  $1 \leq i \leq N_2$ , sont de type divergent.

**Remarque 4.28.** *On peut obtenir une telle famille d'isométries en prenant des puissances suffisamment grandes des isométries d'une collection finie d'isométries hyperboliques ou paraboliques qui ont des points fixes distincts.*

*Les domaines  $C_a$  peuvent être considérés comme étant les bords à l'infini des composantes connexes des demi-plans  $\{x \in \tilde{X} : d(x, o) > d(x, a(o))\}$ , où  $o \in \tilde{X}$  est un point fixe de référence.*

D'après le lemme du Ping-Pong, le groupe  $\Gamma = \langle h_1, \dots, h_{N_1}, p_1, \dots, p_{N_2} \rangle$  est libre et non-élémentaire. De plus, l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{X}$  est libre et proprement discontinue (voir [DP98, Corollary II.2]). Un tel groupe  $\Gamma$  est appelé *groupe de Schottky généralisé*.

**Définition 4.29.** *Une variété riemannienne de type Schottky est une variété riemannienne quotient  $X = \tilde{X}/\Gamma$ , où  $\tilde{X}$  est une variété riemannienne complète simplement connexe à courbures sectionnelles négatives pincées, et  $\Gamma$  est un groupe de Schottky généralisé d'isométries de  $\tilde{X}$ .*

On remarque que si  $N_2 = 0$ , autrement dit si  $\Gamma$  ne contient que des éléments hyperboliques, alors  $\Gamma$  est un groupe de Schottky classique et toutes les propriétés géométriques/dynamiques du flot géodésique sont bien comprises. En effet, l'ensemble non-errant du flot géodésique est compact, donc le flot est un flot Axiome A. Par contre, si  $N_2 \geq 1$ , alors  $X$  est une variété géométriquement finie non compacte. De plus, tous les sous-groupes paraboliques de  $\Gamma$  ont rang 1.

La Figure 1 ci-dessous est un exemple d'un groupe de Schottky généralisé qui agit sur le disque hyperbolique  $\mathbb{D}$ . Il contient deux générateurs, l'un hyperbolique et l'autre parabolique.

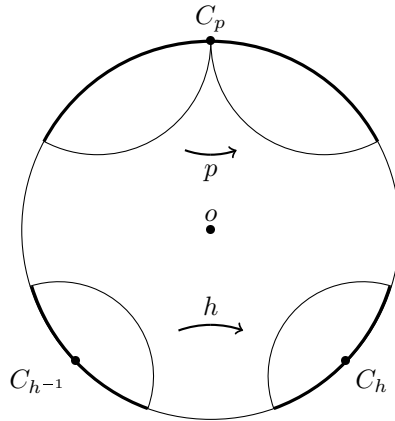


Figure 1. Groupe de Schottky généralisé  $\Gamma = \langle h, p \rangle$ .

Soit  $\mathcal{A}^\pm = \{h_1^{\pm 1}, \dots, h_{N_1}^{\pm 1}, p_1, \dots, p_{N_2}\}$ . Une hypothèse très importante au long de ce chapitre, et qui n'est pas demandée dans [DP98], est la suivante :

(C5) Il existe  $o \in \tilde{X}$  tel que, pour tous  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}^\pm$  avec  $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$ , et tout  $\xi \in C_{a_1}$ , on a

$$B_\xi(a_2 o, o) > 0.$$

Autrement dit, on supposera que toute horoboule centrée dans  $C_{a_1}$  et passant par  $a_2 o$  contient le point  $o$  à l'intérieur (voir Figure 2). Cette condition n'est pas restrictive comme on pourra vérifier dans la proposition 4.31.

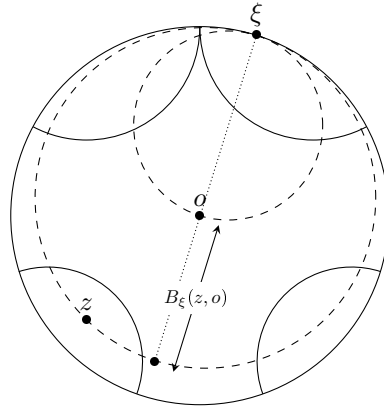


Figure 2.

Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\pm$  on note  $U_a$  l'enveloppe convexe dans  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$  de l'ensemble  $C_a$ . De plus, pour tout  $n \geq 1$  on note  $C_{a^n}$  l'ensemble  $C_{a^n} = a^{n-1}C_a$  et  $U_{a^n}$  son enveloppe convexe dans  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ .

**Lemme 4.30.** *Soit  $\tilde{X}$  une variété riemannienne complète simplement connexe, de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles  $-b^2 \leq K \leq -1$ . Soit  $\Gamma$  un groupe de Schottky généralisé. Fixons  $o \in X$ . Alors il existe une constante universelle  $C > 0$  (qui dépend des générateurs de  $\Gamma$  et de  $o$ ) telle que pour tous  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}^\pm$  satisfaisant  $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$ , et tout  $x \in U_{a_1}$  et  $y \in U_{a_2}$ , on a*

$$d(x, y) \geq d(x, o) + d(y, o) - C. \quad (4.10)$$

*Démonstration.* Puisque  $C_{a_1}$  et  $C_{a_2}$  sont disjoints, pour tous  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}^\pm$  tels que  $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$ , les ensembles  $U_{a_1}$  et  $U_{a_2}$  le sont aussi. Soit  $x \in U_{a_1}$  et  $y \in U_{a_2}$ . Les segments géodésiques  $[o, x]$  et  $[o, y]$  forment un angle uniformément minoré par une constante strictement positive, donc  $d(x, y) \geq d(x, o) + d(y, o) - C$  pour une constante universelle  $C > 0$ .  $\square$

**Proposition 4.31.** *Soit  $\tilde{X}$  une variété riemannienne complète simplement connexe, de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles  $-b^2 \leq K \leq -1$ . Soit  $\Gamma$  un groupe de Schottky généralisé. Alors pour tout  $o \in \tilde{X}$  il existe un entier  $N \geq 1$  tel que le groupe d'isométries défini par  $\langle h_1^N, \dots, h_{N_1}^N, p_1^N, \dots, p_{N_2}^N \rangle$  satisfait la Condition (C5).*

*Démonstration.* Soient  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}^\pm$  et  $\xi \in C_{a_1}$ . Pour tout  $n \geq 1$  on prend  $z_n \in U_{a_2^n}$  de sorte que  $B_\xi(z_n, o)$  atteigne son minimum. Comme la fonction de Busemann  $B$  est continue et l'ensemble  $C_{a_1}$  est compact, il suffit de montrer que  $B_\xi(z_n, o) > 0$  pour tout  $n$  suffisamment grand. Considérons  $(\xi_t) = [o, \xi_t]$  le rayon géodésique partant de  $o$  pointant vers  $\xi$ . Observons qu'il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $t \geq T$ , on a  $\xi_t \in U_{a_1}$ . D'après le lemme 4.30, on sait qu'il existe une constante universelle  $C > 0$  telle que  $d(z_n, \xi_t) \geq d(\xi_t, o) + d(z_n, o) - C$ , pour tout  $t \geq T$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} B_\xi(z_n, o) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(z_n, \xi_t) - d(\xi_t, o) \\ &\geq \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\xi_t, o) + d(z_n, o) - C - d(\xi_t, o) \\ &= d(z_n, o) - C. \end{aligned}$$

Comme  $d(z_n, o) \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , il existe  $N \geq 1$  tel que  $d(z_n, o) > C$  pour tout  $n \geq N$ . En particulier, on a  $B_\xi(z_n, o) > 0$  pour tout  $n \geq N$ , ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

### Codage

Dans [DP98] les auteurs montraient l'existence d'un ensemble  $\Omega_0 \subset T^1X$ , invariant par l'action du flot géodésique et inclus dans l'ensemble non-errant, tel que  $(g_t)|_{\Omega_0}$  est topologiquement conjugué au flot de suspension sur un décalage de Markov dénombrable dont la fonction plafond n'est pas forcément positive. Le théorème 4.32 ci-dessous résume leur construction. Nous demandons l'hypothèse (C5) pour garantir un plafond borné loin de zéro. De plus, nous donnons quelques propriétés dynamiques additionnelles.

**Théorème 4.32.** *Soit  $X = \tilde{X}/\Gamma$  une variété riemannienne de type Schottky telle que  $\Gamma$  satisfait la Condition (C5). Alors il existe un ensemble  $\Omega_0 \subset T^1\tilde{X}/\Gamma$  invariant par  $(g_t)$ , un décalage de Markov dénombrable  $(\Sigma, \sigma)$  et une fonction  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , tels que*

- (1) *la fonction  $\tau$  est localement Hölder et bornée loin de zéro,*
- (2) *la flot géodésique  $(g_t)|_{\Omega_0}$  sur  $\Omega_0$  est topologiquement conjugué au flot de suspension sur  $\Sigma$  avec plafond  $\tau$ ,*
- (3) *le décalage de Markov  $(\Sigma, \sigma)$  satisfait la condition BIP,*
- (4) *si  $N_1 + N_2 \geq 3$ , alors  $(\Sigma, \sigma)$  est topologiquement mélangeant.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{A} = \{h_1, \dots, h_{N_1}, p_1, \dots, p_{N_2}\}$  et considérons l'espace symbolique  $\Sigma$  défini par

$$\Sigma = \{(a_i^{m_i})_{i \in \mathbb{Z}} : a_i \in \mathcal{A}, m_i \in \mathbb{Z} \text{ et } a_{i+1} \neq a_i \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Remarquons que  $\Sigma$  est l'espace des suites infinies sur l'alphabet dénombrable  $\{a_i^m : a_i \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{Z}\}$ . Soit  $L^0(\Gamma)$  l'ensemble limite  $L(\Gamma)$  privé des  $\Gamma$ -orbites des points fixés par les éléments de  $\mathcal{A}$ . On note  $\tilde{\Omega}_0$  l'ensemble de vecteurs dans  $T^1\tilde{X}$  identifié avec  $(L^0(\Gamma) \times L^0(\Gamma) \setminus \text{diagonal}) \times \mathbb{R}$  via les coordonnées de Hopf. Finalement, on pose  $\Omega_0 := \tilde{\Omega}_0/\Gamma$ , où l'action de  $\Gamma$  est donnée par

$$\gamma \cdot (\xi^-, \xi^+, s) = (\gamma(\xi^-), \gamma(\xi^+), s - B_{\xi^+}(o, \gamma^{-1}o)).$$

Ainsi défini, l'ensemble  $\Omega_0$  est invariant par l'action du flot géodésique. De plus, d'après le lemme 4.18, il est inclus dans l'ensemble non-errant.

Fixons maintenant  $\xi_0 \in \partial\tilde{X} \setminus \bigcup_{a \in \mathcal{A}} C_{a\pm}$ , où  $C_{a\pm} = C_a \cup C_{a^{-1}}$ . Dal'bo et Peigné [DP98, Property II.5] ont établi la propriété de codage suivante : pour tout  $\xi \in L^0(\Gamma)$  il existe une unique suite  $\omega(\xi) = (a_i^{m_i})_{i \geq 1}$  avec  $a_i \in \mathcal{A}$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}^*$  et  $a_{i+1} \neq a_i$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k} \xi_0 = \xi.$$

Pour tout  $a \in \mathcal{A}$  on pose  $L^0(\Gamma)_{a\pm} = L^0(\Gamma) \cap C_{a\pm}$  et  $\partial^2 L^0(\Gamma) = \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathcal{A} \\ \alpha \neq \beta}} L^0(\Gamma)_{\alpha\pm} \times L^0(\Gamma)_{\beta\pm}$ . Pour tout couple  $(\xi^-, \xi^+) \in \partial^2 L^0(\Gamma)$ , si  $a^m$  est le premier terme de la suite  $\omega(\xi^+)$ , on pose  $\tilde{\tau}(\xi^+) = B_{\xi^+}(o, a^m o)$  et  $\overline{T}(\xi^-, \xi^+) = (a^{-m} \xi^-, a^{-m} \xi^+)$ . Définissons  $\overline{T}_\tau$  par la formule

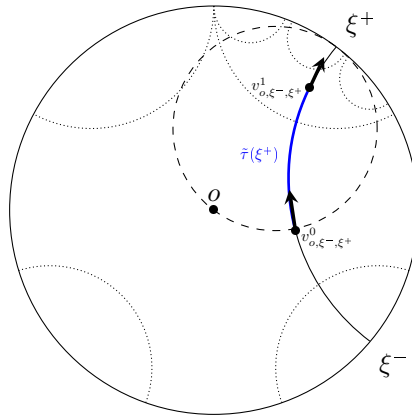
$$\overline{T}_\tau(\xi^-, \xi^+, s) = (\overline{T}(\xi^-, \xi^+), s - \tilde{\tau}(\xi^+)).$$

Observons que  $\overline{T}_\tau$  envoie  $\partial^2 L^0(\Gamma) \times \mathbb{R}$  vers lui-même. L'ensemble  $\Omega_0$  est donc identifié avec  $\partial^2 L^0(\Gamma) \times \mathbb{R} / \langle \overline{T}_\tau \rangle$ . Montrons maintenant que  $\overline{T}_\tau$  induit un flot de suspension sur  $\Sigma$ .

Soit  $(\xi^-, \xi^+) \in \partial^2 L^0(\Gamma)$ . Supposons que  $\omega(\xi^+) = (a_i^{m_i})$  et soit  $\gamma_n$  l'élément de  $\Gamma$  défini par  $\gamma_n = a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}$  pour  $n \geq 1$  et  $\gamma_0 = Id$ . La géodésique déterminée par  $(\xi^-, \xi^+)$  dans  $\tilde{X}$  intersecte l'horosphère centrée en  $\xi^+$  et passant par  $\gamma_n o$  en un seul point  $x_{o, \xi^-, \xi^+}^n$ . Notons  $\tilde{v}_{o, \xi^-, \xi^+}^n$  le vecteur dans  $T^1\tilde{X}$  basé en  $x_{o, \xi^-, \xi^+}^n$  pointant vers  $\xi^+$  (voir Figure 3 ci-dessous). Finalement, notons  $v_{o, \xi^-, \xi^+}^n$  la projection de  $\tilde{v}_{o, \xi^-, \xi^+}^n$  sur  $T^1X$ . Posons

$$S = \{v_{o, \xi^-, \xi^+}^0 : (\xi^-, \xi^+) \in \partial^2 L^0(\Gamma)\} \subset T^1X.$$

La Condition (C5) entraîne que le temps de premier retour de tout vecteur  $v_{o, \xi^-, \xi^+}^0 \in S$  est donné par  $\tilde{\tau}(\xi^+)$  (la distance entre les horosphères basées en  $\xi^+$  et passant par  $o$  et  $\gamma_1 o$ ). De plus,  $g_{\tilde{\tau}(\xi^+)}(v_{o, \xi^-, \xi^+}^0) = v_{o, \xi^-, \xi^+}^1$  (voir Figure 3).


 Figure 3. Section transversale pour  $\Gamma = \langle h, p \rangle$ 

De manière plus générale, pour tout  $n \geq 0$  le temps de premier retour de  $v_{o,\xi^-, \xi^+}^n \in S$  dans  $S$  est donné par  $\tilde{\tau}(\gamma_n^{-1}\xi^+)$  et

$$g_{\tilde{\tau}(\gamma_n^{-1}\xi^+)}(v_{o,\xi^-, \xi^+}^n) = v_{o,\xi^-, \xi^+}^{n+1}.$$

On remarque que pour tout vecteur  $v \in \Omega_0$  il existe un temps  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $g_t v$  appartient à  $S$  (sinon, un relevé de  $v$  en  $T^1\tilde{X}$  aurait son bout à l'infini positif  $v^+$  dans la  $\Gamma$ -orbite d'un point fixé par un élément de  $\mathcal{A}$ ). Ce dernier fait nous permet de construire l'identification entre  $(g_t)|_{\Omega_0}$  et le flot de suspension au-dessus de  $(\Sigma, \sigma)$  avec fonction plafond  $\tau$ . En effet, observons que la propriété de codage entraîne que l'ensemble  $\partial^2 L^0(\Gamma)$  s'identifie avec  $\Sigma$  en considérant  $(\xi^-, \xi^+)$  comme une suite bilatérale  $(\omega^*(\xi^-), \omega(\xi^+))$ . Ici on considère  $\omega^*(\xi^-)$  comme étant la suite  $(\dots, b_2^{-n_2}, b_1^{-n_1})$ , où  $\omega(\xi^-) = (b_i^{n_i})_{i \geq 1}$ . Donc  $(\omega^*(\xi^-), \omega(\xi^+))$  représente les deux suites concaténées.

Soit  $\Sigma^+$  l'espace symbolique unilatéral obtenu à partir de  $\Sigma$  en oubliant les coordonnées négatives. On définit la fonction  $\tau : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\tau(x) = \tau(\omega^{-1}(x)) = B_{\omega^{-1}(x)}(o, a^m o),$$

où  $w : L^0(\Gamma) \rightarrow \Sigma$  est la fonction codage et  $a^m$  est le premier symbole de  $w^{-1}(x)$ . On étend  $\tau$  à  $\Sigma$  en demandant qu'elle soit constante pour les suites bilatérales qui partagent les coordonnées au futur, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que des coordonnées positives. On note encore ce plafond  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Ainsi, le flot géodésique  $(g_t)|_{\Omega_0}$  est codé par le flot de suspension sur  $Y = \{(x, t) \in \Sigma \times \mathbb{R}\} / (x, s) \sim (\sigma(x), s + \tau(x))$ . Cela implique la propriété (2) de la conclusion du théorème 4.32. La propriété (1) suit du lemme 4.33 ci-dessous.

**Lemme 4.33.** *Sous les hypothèses du théorème 4.32, la fonction  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  ne dépend que des coordonnées futures, elle est localement Hölder et bornée loin de zéro.*

*Démonstration.* Le fait qu'elle ne dépend que des coordonnées au futur vient de la définition de  $\tau$ . La régularité est démontrée dans [DP98, Lemma VII]. Soient  $x \in \Sigma^+$  et  $\xi = \omega^{-1}(x)$  le point de  $L^0(\Gamma)$  associé à  $x$  par la propriété de codage. La fonction  $\tau$  satisfait

$$\tau(x) = B_\xi(o, a^m o) = B_{a^{-m}\xi}(a^{-m} o, o).$$

Le dernier terme ci-dessus est positif. En effet, observons que  $a^{-m}\xi = \omega^{-1}(\sigma x) \notin C_{a^\pm}$  et  $a^{-m}o$  est inclus dans l'enveloppe convexe de  $C_{a^\pm}$  sur  $\tilde{X} \times \partial\tilde{X}$ . Ainsi, la Condition (C5) s'applique directement. Comme les domaines  $C_a$ , pour  $a \in \mathcal{A}^\pm$ , sont compacts et la fonction de Busemann est continue, il existe une minoration strictement positive pour  $B_{a^{-m}\xi}(a^{-m} o, o)$ . Cela implique bien que  $\tau$  est bornée loin de zéro.  $\square$

**Lemme 4.34.** *Sous les hypothèses du théorème 4.32, le décalage de Markov  $(\Sigma, \sigma)$  satisfait la condition BIP. De plus, si  $N_1 + N_2 \geq 3$ , alors  $(\Sigma, \sigma)$  est topologiquement mélangeant.*

*Démonstration.* La condition BIP (voir définition 4.5) découle directement de la définition de  $(\Sigma, \sigma)$ . Supposons maintenant que  $N_1 + N_2 \geq 3$ . Rappelons que le décalage  $(\Sigma, \sigma)$  est topologiquement mélangeant si pour tout  $a, b \in \{a_i^m : a_i \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{Z}\}$  il existe  $N(a, b) \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N(a, b)$  il existe un mot admissible de longueur  $n$  de la forme  $ai_1i_2 \dots i_{n-1}b$ . L'ensemble des mots admissibles est par définition l'ensemble

$$\{(a_i^{m_i})_{i \in \mathbb{Z}} : a_i \in \mathcal{A}, m_i \in \mathbb{Z} \text{ et } a_{i+1} \neq a_i \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Comme  $N_1 + N_2 \geq 3$ , étant donné n'importe quel couple de symboles dans  $\{a_i^m : a_i \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{Z}\}$ , disons  $a_1^{m_1}$  et  $a_2^{m_2}$ , on peut considérer un symbole  $a_3 \notin \{a_1, a_2\}$  de sorte que les mots suivants sont admissibles

$$a_1^{m_1} a_3 a_1 a_3 \dots a_1 a_2^{m_2} \quad \text{et} \quad a_1^{m_1} a_3 a_1 a_3 a_1 \dots a_3 a_2^{m_2}.$$

Cela montre que le système est topologiquement mélangeant.  $\square$

Comme le lemme 4.34 ci-dessus montre les points (3) et (4), on a bien fini la démonstration du théorème 4.32.  $\square$

En conclusion, sous les conditions (C5) et  $N_1 + N_2 \geq 3$ , on a montré que  $(\Sigma, \sigma)$  est un décalage de Markov dénombrable topologiquement mélangeant qui satisfait la condition BIP, et que le plafond  $\tau$  est localement Hölder et borné loin de zéro. Ainsi, le flot de suspension  $(Y, \Phi)$  peut être étudié à partir des techniques présentées dans la Section 4.1.

On va décrire maintenant, du point de vue ergodique, le flot géodésique sur  $T^1X \setminus \Omega_0$ . Notons  $\mathcal{M}_{\Omega_0}$  l'espace de mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes portées par  $\Omega_0$ . Nous allons décrire la différence entre l'espace  $\mathcal{M}_{\Omega_0}$  et l'espace  $\mathcal{M}_g$  de toutes les mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes sur  $T^1X$ . Rappelons que dans  $\Gamma$  on a les isométries hyperboliques  $h_1, \dots, h_{N_1}$ , chacune fixant deux points au bord à l'infini. La géodésique joignant les points fixes de  $h_i$  passe au quotient en une géodésique fermée de  $X$ . On note  $\nu^{h_i}$  la mesure de probabilité équilibrée le long de l'orbite d'un vecteur unitaire tangent à cette géodésique.

**Proposition 4.35.** *L'ensemble des mesures ergodiques dans  $\mathcal{M}_g \setminus \mathcal{M}_{\Omega_0}$  est de la forme  $\{\nu^{h_i} : 1 \leq i \leq N_1\}$ . En particulier, pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}_g \setminus \mathcal{M}_{\Omega_0}$ , on a  $h_\nu(g) = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $\nu \in \mathcal{M}_g \setminus \mathcal{M}_{\Omega_0}$  une mesure ergodique et prenons  $v \in T^1X$  un vecteur  $\nu$ -générique. Comme un vecteur générique est récurrent, l'orbite  $g_t v$  ne s'échappe pas vers l'infini, donc  $v^+$  n'est pas un point fixe d'un élément parabolique de  $\Gamma$ . Supposons sans perte de généralité que  $v^+ = \xi_{h_i}$  pour certain  $1 \leq i \leq N_1$ . Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{X}$  la géodésique pointant vers  $\xi_{h_i}$  avec condition initiale  $\gamma'(0) = v$  et soit  $\gamma_i$  la géodésique en reliant  $\xi_{h_i^{-1}}$  avec  $\xi_{h_i}$ . Par reparamétrage, on peut supposer que  $\gamma_i(0)$  est dans la même horosphère centrée en  $\xi_{h_i}$  et passant par  $\pi(v)$ . D'après l'hyperbolicité du flot, la distance  $d(\gamma_i(t), \gamma(t))$  tend vers 0 à vitesse exponentielle. D'après le théorème ergodique de Birkhoff, la mesure orbitale de  $v$  converge vers la mesure  $\nu^{h_i}$ .

Le fait que  $h_\nu(g) = 0$  pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}_g \setminus \mathcal{M}_{\Omega_0}$  est une conséquence du théorème de décomposition Ergodique, du théorème de Jacobs (voir théorème 1.13) et le fait que  $h_{\nu^{h_i}}(g) = 0$ , pour tout  $1 \leq i \leq N_1$ .  $\square$

Pour finir cette section, on donne une définition qui inclut toutes les hypothèses nécessaires pour assurer qu'on peut coder le flot géodésique de manière d'obtenir les propriétés dynamiques décrites ci-dessus. Le point clé de cette définition est qu'on sera en position d'utiliser les lemmes 4.33 et 4.34, et le théorème 4.38 de la sous-section suivante.

**Définition 4.36.** *On dit qu'un groupe de Schottky généralisé  $\Gamma$  satisfait la propriété  $(\star)$  si la Condition (C5) est satisfaite et  $N_1 + N_2 \geq 3$ .*

**Définition 4.37.** *On dit que  $X$  est une variété riemannienne de type  $(\star)$ -Schottky si  $X = \tilde{X}/\Gamma$  avec  $\tilde{X}$  une variété riemannienne à courbures négatives pincées de dérivées partielles uniformément bornées, et  $\Gamma$  un groupe de Schottky qui satisfait la propriété  $(\star)$ .*

### 4.2.3 Un outil symbolique

Cette section constitue la pierre angulaire de ce chapitre. On va trouver une relation entre la valeur symbolique  $s_\infty$  (voir sous-section 4.1.3) et le plus grand exposant critique parabolique de  $\Gamma$ .

**Théorème 4.38.** *Soit  $X$  une variété riemannienne de type  $(\star)$ -Schottky et  $(Y, \Phi)$  le modèle symbolique du flot géodésique, c'est-à-dire le flot de suspension sur  $(\Sigma, \sigma)$  avec fonction plafond  $\tau$ . Alors*

$$s_\infty = \max\{\delta_{p_i}, 1 \leq i \leq N_2\}.$$

*Démonstration.* On montre d'abord que  $s_\infty \leq \max\{\delta_{p_i}, 1 \leq i \leq N_2\}$ . Par définition, on a

$$\begin{aligned} P(\sigma, -t\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log \left( \sum_{x: \sigma^{n+1}x=x} \exp \left( \sum_{i=0}^n -t\tau(\sigma^i x) \right) \chi_{C_{h_1}}(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log \left( \sum_{\xi=\overline{h_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \xi_0}} \exp \left( \sum_{i=0}^n -tB_{\omega^{-1}(\sigma^i x)}(o, x_{i+1}o) \right) \right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log \left( \sum_{\xi=\overline{h_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \xi_0}} \exp \left( \sum_{i=0}^n -td(o, x_{i+1}o) \right) \right) \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que  $d(x, y) \geq B_\xi(x, y)$ . En quittant les mots ayant  $h_1^m$  (pour un certain  $m$ ) dans une position différente à la première, la somme

$$\sum_{\xi=\overline{h_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \xi_0}} \exp \left( \sum_{i=0}^n -td(o, x_{i+1}o) \right)$$

est plus grande que

$$e^{-td(o, h_1 o)} \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in (\mathcal{A} \setminus h_1)_*^n} \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n} \exp \left( \sum_{i=1}^n -td(o, c_i^{m_i} o) \right),$$

où  $(\mathcal{A} \setminus h_1)_*^n$  représente l'ensemble des mots admissibles de longueur  $n$  pour le codage dans l'alphabet  $\mathcal{A}^\pm \setminus h_1^{\pm 1}$ , c'est-à-dire  $c_i \neq c_{i+1}^{\pm 1}, h_1^{\pm 1}$ . Soit  $k \geq 1$ . Pour tout  $0 \leq j \leq k-1$  et  $1 \leq i \leq N_1 + N_2 - 1$ , on pose

$$b_{i+j(N_1+N_2-1)} = \begin{cases} h_{i+1}, & \text{si } 1 \leq i \leq N_1 - 1 \\ p_{i+1-N_1}, & \text{si } N_1 \leq i \leq N_1 + N_2 - 1. \end{cases}$$

Considérons  $n+1 = k(N_1 + N_2 - 1)$ . En restreignant la somme ci-dessus aux mots avec  $c_i = b_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on peut continuer la suite d'inégalités précédentes et obtenir

$$P(\sigma, -t\tau) \geq \sum_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}} \exp \left( \sum_{i=1}^n -td(o, b_i^{m_i} o) \right),$$

où le terme à droite est encore égal à

$$\prod_{i=1}^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-td(o, b_i^m o)).$$

Par définition des  $b_i$ , le dernier terme est égal à

$$\left( \prod_{i=2}^{N_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-td(o, h_i^m o)) \right)^k \left( \prod_{i=1}^{N_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-td(o, p_i^m o)) \right)^k.$$

Ainsi, on déduit

$$\begin{aligned}
 P(\sigma, -t\tau) &\geq \frac{1}{N_1 + N_2} \log \left( \prod_{i=2}^{N_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-td(o, h_i^m o)) \right) \left( \prod_{i=1}^{N_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-td(o, p_i^m o)) \right) \\
 &= \frac{1}{N_1 + N_2} \log \prod_{a \in \mathcal{A} \setminus h_1} P_{\langle a \rangle}(t, o).
 \end{aligned}$$

En particulier, si  $t < \max\{\delta_{p_i}, 1 \leq i \leq N_2\}$ , alors  $P(\sigma, -t\tau) = +\infty$ , ce qui montre l'inégalité  $s_{\mathcal{X}} \geq \max\{\delta_{p_i}, 1 \leq i \leq N_2\}$ .

Montrons maintenant l'autre inégalité. Soit  $(\xi_t^i)$  le rayon géodésique  $[o, \omega^{-1}(\sigma^{i+1}x)]$ . En utilisant (4.10), on a

$$\begin{aligned}
 \tau(\sigma^i x) &= B_{\omega^{-1}(\sigma^i x)}(o, x_i o) \\
 &= B_{\omega^{-1}(\sigma^{i+1}x)}(x_i^{-1} o, o) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_t^i, x_i o) - d(\xi_t^i, o) \\
 &\geq [d(\xi_t^i, o) + d(o, x_i o) - C] - d(\xi_t^i, o) \\
 &= d(o, x_i o) - C.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\exp(-t\tau(\sigma^i x)) \leq \exp(tC) \exp(-td(o, x_i o)).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 P(\sigma, -t\tau) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}} \sum_{m_1, \dots, m_n} \prod_{i=1}^n \exp(tC) \exp(-td(o, a_i^{m_i} o)) \\
 &= \log \left( C^t \prod_{a \in \mathcal{A}} P_{\langle a \rangle}(t, o) \right).
 \end{aligned}$$

En particulier, la pression  $P(\sigma, -t\tau)$  est finie pour tout  $t > \max\{\delta_{p_i}, 1 \leq i \leq N_2\}$ . On conclut ainsi la preuve du théorème.  $\square$

Notons  $\delta_{p, \max} := \max\{\delta_{p_i}, 1 \leq i \leq N_2\}$ . L'exemple le plus facile à considérer est l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Dans ce cas, on a  $\delta_{\langle p_i \rangle} = 1/2$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N_2\}$ , d'où  $\delta_{p, \max} = 1/2$ . De manière plus générale, si l'on remplace l'espace hyperbolique par une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à  $-b^2$ , alors  $\delta_{p, \max} = b/2$ .

Rappelons que d'après l'égalité (4.3), l'entropie topologique  $h_{top}(\Phi)$  d'un flot de suspension vérifie  $h_{top}(\Phi) = \inf\{t : P(\sigma, -t\tau) \leq 0\}$ . En particulier, en utilisant le théorème 4.32 et la proposition 4.35, on obtient

$$h_{top}(g) = h_{top}(\Phi).$$

Par ailleurs, lorsque les dérivées partielles des courbures sectionnelles sont uniformément bornées, l'entropie topologique du flot géodésique coïncide avec l'exposant critique de  $\Gamma$  (voir théorème 4.22). Ainsi, dans ce cadre, on a

$$\delta_{\Gamma} = h_{top}(\Phi). \quad (4.11)$$

Rappelons que la Condition (C4) de la définition d'un groupe de Schottky généralisé dit que les éléments paraboliques de  $\Gamma$  sont divergents. Cette condition implique forcément que  $\delta_{p, \max} < \delta_{\Gamma}$  (voir théorème 4.23). En mettant tout ensemble, le théorème 4.38 et l'égalité (4.11) impliquent

**Proposition 4.39.** *Soient  $X$  une variété riemannienne de type  $(\star)$ -Schottky et  $(Y, \Phi)$  la représentation symbolique du flot géodésique sur  $\Omega_0$ . Alors  $s_{\mathcal{X}} < h_{top}(\Phi)$ .*



#### 4.2.4 Perte de masse

Cette section contient le résultat le plus important de ce chapitre. On va tirer parti du codage du flot géodésique pour donner des conditions suffisantes pour qu'une suite de mesures de probabilité invariantes par le flot ne perde pas la totalité de la masse. Plus précisément, nous montrons que la perte de masse d'une suite de mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique est liée à l'entropie mesurée du flot géodésique.

**Théorème 4.40.** *Soit  $X = \tilde{X}/\Gamma$  une variété riemannienne de type  $(\star)$ -Schottky. Alors pour tout  $h > \delta_{p,max}$  il existe une constante  $m = m(h) > 0$  avec la propriété suivante : Si  $(\nu_n)$  est une suite de mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes ergodiques sur  $T^1X$  satisfaisant  $h_{\nu_n}(g) \geq h$ , alors pour toute limite vague  $\nu$  de  $(\nu_n)$ , on a*

$$\|\nu\| := \nu(T^1X) \geq m.$$

*De plus, la valeur  $\delta_{p,max}$  est optimale dans le sens suivant : il existe une suite  $(\nu_n)$  de mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes sur  $T^1X$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(g) = \delta_{p,max} \quad \text{et} \quad \nu_n \rightarrow 0.$$

D'une manière informelle, une suite de mesures qui perd de masse est portée de plus en plus par des voisinages de l'infini. En considérant la géométrie des groupes de Schottky, cela est équivalent à donner plus de poids aux cusps de la variété. Comme les cusps sont définis à partir de l'action des sous-groupes paraboliques du groupe, il n'est pas très surprenant que la perte de masse soit liée à ce type de sous-groupes.

*Démonstration théorème 4.40.* Pour la première partie de la preuve, on va utiliser les résultats symboliques de la Section 4.1. Malheureusement, pour montrer que la valeur  $\delta_{p,max}$  est optimale, on ne peut pas bénéficier du codage, même si l'on a ce type de résultats pour un flot de suspension sur un décalage de Markov dénombrable (voir 4.15). Cela vient du fait que l'espace symbolique ne partage pas la même topologie de  $T^1X$ .

Soient  $h > \delta_{p,max}$  et  $(\nu_n)_n$  une suite de mesures de probabilité  $(g_t)$ -invariantes ergodiques sur  $T^1X$ , telle que  $h_{\nu_n}(g) \geq h$ . Rappelons qu'une mesure  $(g_t)$ -invariante ergodique est portée soit par  $\Omega_0$ , soit par  $T^1X \setminus \Omega_0$ . D'après la proposition 4.35, toute mesure ergodique dans  $\mathcal{M}_g \setminus \mathcal{M}_{\Omega_0}$  est d'entropie nulle. On déduit ainsi que  $\nu_n \in \mathcal{M}_{\Omega_0}$  pour tout  $n$  suffisamment grand.

Pensons maintenant au flot géodésique du point de vue symbolique. Soit  $\Psi : \Omega_0 \rightarrow Y$  l'identification de  $\Omega_0$  avec la suspension  $Y$ , où  $\tau$  est la fonction plafond. Les mesures images  $\Psi_*\nu_n$  sont toutes de la forme

$$d(\Psi_*\nu_n) = \frac{1}{\int \tau d\mu_n} d\mu_n dt,$$

où  $\mu_n$  est une mesure de probabilité  $\sigma$ -invariante sur  $\Sigma$ . Comme la section transversale  $S = \Psi^{-1}\Sigma \subset T^1X$  est bornée, pour tout  $r \in ]0, \inf_{x \in \Sigma} \tau(x)[$ , il existe un compact  $K_r \subset T^1X$  tel que

$$\Psi(K_r) \supset \Sigma \times [0, r] / \sim.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \nu_n(K_r) &= \Psi_*\nu_n(\Psi(K_r)) \geq \Psi_*\nu_n(\Sigma \times [0, r] / \sim) \\ &= \frac{1}{\int \tau d\mu_n} \int_{\Sigma} r d\mu_n \\ &= \frac{r}{\int \tau d\mu_n}. \end{aligned}$$

Comme  $h \leq h_{\nu_n}(g) = h_{\Psi_*\nu_n}(\Phi)$ , le théorème 4.14 implique qu'il existe une constante  $M = M(h) > 0$  telle que

$$\int \tau d\mu_n \leq M,$$

ce qui donne

$$\nu_n(K_r) \geq \frac{r}{M}.$$

Si l'on pose  $m = \inf_{x \in \Sigma} \tau(x)/M$ , alors  $\nu(T^1 X) \geq m$ . Autrement dit, la masse de  $\nu$  satisfait  $\|\nu\| \geq m$ , ce qui finalise la première partie de la preuve du théorème 4.40.

Pour montrer que  $\delta_{p,max}$  est une valeur optimale, on utilisera des outils purement géométriques. Rappelons que  $X$  est une variété quotient sous la forme  $X = \tilde{X}/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un groupe de Schottky satisfaisant la propriété  $(\star)$ . Soit  $p \in \Gamma$  une isométrie parabolique d'exposant critique maximal, c'est-à-dire telle que  $\delta_p = \delta_{p,max}$ . Considérons la famille de groupes  $\Gamma_n = \langle p, h^n \rangle$  donnée par la proposition 4.27. Ainsi, l'élément  $h \in \Gamma$  est une isométrie hyperbolique et  $\Gamma_n$  est un groupe de type divergent satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\Gamma_n} = \delta_p \quad (4.12)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sum_{\gamma \in \mathcal{P}} e^{-\delta_{\Gamma_n} d(x, \gamma x)} } = 0, \quad (4.13)$$

avec  $x \in \tilde{X}$ . Soit  $m_n^{BM}$  la mesure de Bowen-Margulis (normalisée) sur  $T^1 \tilde{X}/\Gamma_n$ . Comme un groupe de Schottky généralisé satisfait les hypothèses du théorème 4.24, la mesure  $m_n^{BM}$  est finie. De plus, cette mesure maximise l'entropie du flot géodésique sur  $T^1 \tilde{X}/\Gamma_n$  (voir théorème 4.22).

Soit  $\Omega_n \subset T^1 \tilde{X}/\Gamma_n$  l'ensemble des vecteurs qui sont codés d'après le théorème 4.32. Notons  $Y_n$  la suspension de  $\Sigma_n$  avec fonction plafond  $\tau_n$ . D'après la construction du codage, on a bien que  $\Sigma_n$  est un sous-décalage de  $\Sigma$  et le plafond  $\tau_n$  coïncide avec  $\tau|_{\Sigma_n}$ . En particulier, il existe une inclusion naturelle  $Y_n \hookrightarrow Y$ . Par ailleurs, l'ensemble  $\Omega_n$  muni de la topologie induite par celle de  $T^1 X$  est homéomorphe à  $Y_n$ . On déduit ainsi l'existence d'une application « inclusion »  $p_n : \Omega_n \hookrightarrow \Omega_0$ . Cette application peut être vue aussi comme la projection  $T^1 \tilde{X}/\Gamma_n \rightarrow T^1 X$  restreinte à l'ensemble  $\Omega_n$ . En effet, l'inclusion  $Y_n \hookrightarrow Y$  induit par construction l'inclusion  $\tilde{\Omega}_n \hookrightarrow \tilde{\Omega}_0$ , ce qui implique en particulier que  $p_n$  est la projection  $T^1 \tilde{X}/\Gamma_n \rightarrow T^1 X$  restreinte à l'ensemble  $\Omega_n$ . Comme la mesure de Bowen-Margulis  $m_n^{BM}$  est ergodique (voir théorème 4.21) et d'entropie positive (voir théorème 4.22), elle est portée par  $\Omega_n$ . Ainsi, la mesure image  $\nu_n = (p_n)_* m_n^{BM}$  définit bien une mesure de probabilité  $(g_t)$ -invariante sur  $\Omega_0$ . Elle induit une mesure sur  $T^1 X$ , qu'on note encore  $\nu_n$ , par restriction. Remarquons que

$$p_n : (T^1 \tilde{X}/\Gamma_n, m_n^{BM}) \rightarrow (T^1 X, \nu_n)$$

est une conjugaison mesurable, donc  $h_{\nu_n}(g) = h_{m_n^{BM}}(g^{\Gamma_n})$ , où  $g^{\Gamma_n}$  représente le flot géodésique sur  $T^1 \tilde{X}/\Gamma_n$ . Il découle donc de (4.12) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(g) = \delta_p = \delta_{p,max}.$$

On va montrer que  $\nu_n \rightarrow 0$ . Cela est équivalent à montrer que pour tout compact  $K \subset X$ , la mesure  $\nu_n(T^1 K) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Dans ce cas la preuve du théorème 4.40 serait bien terminée. Les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma_n$ , étant des groupes de Schottky généralisés, sont des groupes géométriquement finis. Notons  $C(\Gamma)$  (resp.  $C(\Gamma_n)$ ) l'enveloppe convexe de  $L(\Gamma)$  (resp.  $L(\Gamma_n)$ ) dans  $\tilde{X} \cup \partial \tilde{X}$ . Le cœur de Nielsen associé à chaque groupe se décompose en la réunion disjointe d'un compact et d'une famille de cusps. Comme les groupes  $\Gamma_n$  sont tous de la forme  $\Gamma_n = \langle p, h^n \rangle$ , il n'y a qu'un seul cusp  $\mathcal{C}_1^n$  associé à  $\Gamma_n$ , isométrique à  $C(\Gamma_n) \cap B_{\xi_p}(x)/\langle p \rangle$ , où  $B_{\xi_p}$  est une horoboule centrée en  $\xi_p$  et passant par un certain point  $x \in \tilde{X}$ .

Soit  $K \subset X$  un ensemble compact et  $\tilde{K}$  le relevé de  $K$  dans  $\tilde{X}$  qui appartient au domaine de Dirichlet  $D_0$  de  $\Gamma$  contenant l'origine  $o \in \tilde{X}$ . Soit  $D_n$  le domaine de Dirichlet de  $\Gamma_n$  contenant  $o$ . Rappelons qu'un domaine de Dirichlet est un domaine fondamental particulier pour l'action du groupe. Comme les translatés de  $D_0$  par les éléments de  $\Gamma$  forment un pavage de  $\tilde{X}$ , il existe un ensemble  $T_n \subset \Gamma$  d'éléments de  $\Gamma$  satisfaisant

- (1) pour tout  $\gamma_1, \gamma_2 \in T_n$ , avec  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , on a  $\gamma_1(\text{Int}(D_0)) \cap \gamma_2(\text{Int}(D_0)) = \emptyset$ , et
- (2) l'ensemble  $D_n$  est la réunion des translatés de  $D_0$  par les éléments de  $T_n$ , c'est-à-dire

$$\bigcup_{\gamma \in T_n} \gamma(D_0) = D_n.$$

Si  $\tilde{m}_n^{BM}$  est la mesure de Bowen-Margulis (pas normalisée) sur  $T^1\tilde{X}$ , on a par définition

$$\begin{aligned} \nu_n(T^1K) &= m_n^{BM}(p_n^{-1}(T^1K)) \\ &= \frac{1}{\tilde{m}_n^{BM}(T^1\tilde{X}/\Gamma_n)} \sum_{\gamma \in T_n} \tilde{m}_n^{BM}(T^1(\gamma(\tilde{K}))) \\ &\leq \frac{1}{\tilde{m}_n^{BM}(T^1(B_{\xi_p}(x) \cap D_0))} \sum_{\gamma \in T_n} \tilde{m}_n^{BM}(T^1(\gamma(\tilde{K}))). \end{aligned}$$

D'après (4.7) dans la proposition 4.25, la mesure  $\tilde{m}_n^{BM}(T^1(B_{\xi_p}(x) \cap D_0))$  satisfait

$$\tilde{m}_n^{BM}(T^1(B_{\xi_p}(x) \cap D_0)) \asymp_{C_i^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}} d(x, p_i^m x) e^{-\delta_{\Gamma} d(x, p_i^m x)}.$$

Or, la remarque 4.26 nous dit que la constante  $C_i^n$  peut être choisie indépendamment de  $n$ . Ainsi, il existe une constante  $C \geq 1$  telle que

$$\tilde{m}_n^{BM}(T^1(B_{\xi_p}(x) \cap D_0)) \asymp_C \sum_{m \in \mathbb{Z}} d(x, p_i^m x) e^{-\delta_{\Gamma} d(x, p_i^m x)}.$$

Décrivons maintenant un peu plus les éléments de  $T_n$ . Soit  $\gamma = a_1^{m_1} \dots a_r^{m_r} \in T_n$ , où  $a_i \in \{p, h\}$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ . Observons que puisque  $p \in \Gamma_n$ , pour tout  $x \in \text{int}(D_n)$ , on a  $d(x, o) < d(x, po)$ . Pour une isométrie parabolique  $a \in \mathcal{A}$  on note  $U_{a,1}$  et  $U_{a,2}$  les enveloppes convexes dans  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$  des deux composantes connexes de  $C_a \setminus \{\xi_a\}$ . Ainsi, grâce à la remarque 4.28, on peut supposer que  $D_0 = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} (\tilde{X} \setminus U'_a)$ , où  $U'_a = U_a$  si  $a$  est hyperbolique, et  $U'_a = U_{a,1} \cup U_{a,2}$  si  $a$  est parabolique. Observons que  $U'_p \subset (\tilde{X} \setminus D_n)$  puisque  $p \in \Gamma_n$ . En particulier, comme  $\gamma(D_0) \subset D_n$ , on déduit que  $a_1 \neq p$ . De nouveau par le fait que  $\gamma(D_0) \subset D_n$ , le nombre  $m_1$  satisfait  $|m_1| < n$ . En résumant, on a

$$\gamma \in T_n \Rightarrow \gamma = h^k a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}, \quad \text{avec } |k| < n. \quad (4.14)$$

**Lemme 4.41.** *Il existe une constante  $C' > 0$  telle que*

$$\sum_{\gamma \in T_n} \tilde{m}_n^{BM}(T^1(\gamma(\tilde{K}))) \leq C'n.$$

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\pi} : T^1\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  la projection canonique  $\tilde{\pi}(\tilde{v}) = x$ . Rappelons que la mesure de Bowen-Margulis  $\tilde{m}_n^{BM}$  est portée par l'ensemble  $\tilde{\pi}^{-1}C(\Gamma_n)$ . Ainsi, d'après la construction des mesures de Bowen-Margulis on peut supposer sans perte de généralité que  $\tilde{K} \subset C(\Gamma_1) \cap D_0$ .

Soit  $\tilde{v} \in T^1\tilde{X}$  un vecteur basé en  $x \in D_n$  tel que la géodésique  $\gamma_{\tilde{v}}$  satisfait  $\gamma_{\tilde{v}} \subset C(\Gamma_n)$ . Comme  $x \in D_n$ , il existe  $\gamma \in T_n$  tel que  $x \in \gamma(D_0)$ . Par ailleurs, d'après (4.14), on a  $\gamma = h^k a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}$ . Supposons que  $m_2 \neq 0$ , ce qui implique en particulier que  $a_2 = p$ . Alors  $h^{-k}x \in U'_p$ , et donc l'une des extrémités de  $h^{-k}(\gamma_{\tilde{v}})$  appartient à  $C_p$ . Autrement dit, l'une des extrémités de la géodésique  $\gamma_{\tilde{v}}$  appartient à  $h^k C_p$ . Or  $\gamma_{\tilde{v}} \subset C(\Gamma_n)$ , donc les extrémités de  $\gamma_{\tilde{v}}$  appartiennent à l'ensemble  $C_p \cup C_{h^{-n}} \cup C_{h^n}$ . Comme  $h^k C_p \cap (C_p \cup C_{h^{-n}} \cup C_{h^n}) = \emptyset$  si  $|k| < n$ , on a forcément  $|k| \geq n$ . Cela contredit la condition sur  $k$  dans (4.14).

En conclusion, lorsque  $\gamma(\tilde{K}) \subset C(\Gamma_n)$ , avec  $\gamma \in T_n$ , on a  $m_2 = 0$ , et a fortiori  $m_i = 0$  pour tout  $i \geq 2$ . Autrement dit,

$$\gamma(\tilde{K}) \subset C(\Gamma_n) \Leftrightarrow \gamma = h^k, \quad \text{pour un certain } k \in [-n, n].$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{\gamma \in T_n} \tilde{m}_n^{BM}(T^1(\gamma(\tilde{K}))) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \tilde{m}_n^{BM}(T^1(h^k(\tilde{K}))).$$

Par ailleurs, puisque  $h$  est une isométrie de  $\tilde{X}$ , l'inégalité (4.6) de la proposition 4.25 implique

$$\sum_{k=-n}^n \tilde{m}_n^{BM}(T^1(h^k(\tilde{K}))) \leq (2n-1)De^{2\delta_{\Gamma}D},$$

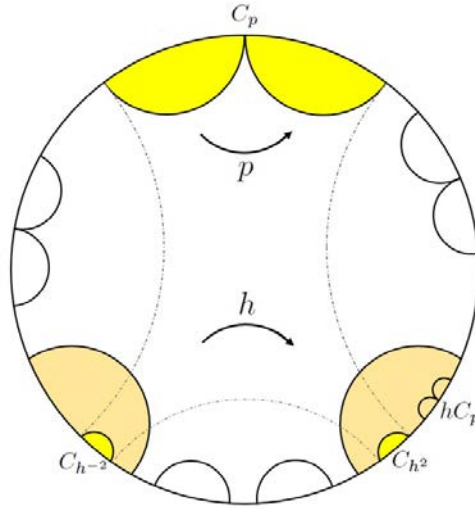


FIGURE 4.1 – Dans la figure on voit que  $h^k C_p \cap C_{h^2} = \emptyset$  si  $k \leq 1$ .

où  $D$  est le diamètre de  $\tilde{K}$ . Comme les courbures sectionnelles sont négatives pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , l'exposant critique de  $\Gamma_n$  est majoré par  $\delta_{\Gamma_n} \leq b \dim(\tilde{X})$ . En posant  $C' = 2De^{2b \dim(\tilde{X})D}$  on obtient l'inégalité désirée.  $\square$

Grâce au lemme 4.41, on a bien

$$\nu_n(T^1 K) \leq \frac{CC'n}{\sum_{m \in \mathbb{Z}} d(x, p_i^m x) e^{-\delta_{\Gamma} d(x, p_i^m x)}}.$$

Or (4.13) nous dit que le terme de droite dans l'inégalité converge vers 0, donc  $\nu_n(T^1 K) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Cela conclut la preuve du théorème 4.40.  $\square$

### 4.3 Conséquences

Les résultats symboliques et géométriques dans cette section motivent la définition suivante d'entropie à l'infini.

**Définition 4.42.** Soit  $F = (f_t) : X \rightarrow X$  un flot continu d'un espace topologique séparé localement compact. L'entropie à l'infini du système dynamique  $(X, F)$  est le nombre  $h_{\infty}(F)$  défini par

$$h_{\infty}(F) = \sup_{\nu_n \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} h_{\nu_n}(F),$$

où le supremum est pris parmi toutes les suites de mesures de probabilité  $F$ -invariantes qui convergent vaguement vers 0.

**Corollaire 4.43.** Soit  $(\Sigma, \sigma)$  un décalage de Markov dénombrable topologiquement mélangeant et d'entropie topologique infinie. Soit  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$  un potentiel à variation bornée et borné loin de zéro. Soit  $(Y, \Phi)$  le flot de suspension associé, qu'on suppose d'entropie topologique finie. Alors l'entropie à l'infini du flot de suspension satisfait

$$h_{\infty}(\Phi) \geq s_{\infty}.$$

**Corollaire 4.44.** Soit  $X$  une variété riemannienne de type  $(\star)$ -Schottky. Alors l'entropie à l'infini du flot géodésique sur  $T^1 X$  satisfait

$$h_{\infty}(g) = \delta_{p, \max}.$$

# Annexe A

## Géométrie en courbure négative

Dans cet appendice nous faisons une brève introduction aux concepts concernant la géométrie des variétés dont les courbures sectionnelles sont négatives pincées.

### Concepts basiques

Soit  $\tilde{X}$  une variété riemannienne complète simplement connexe, de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles  $-b^2 \leq K \leq -1$ . Le fibré unitaire tangent  $T^1\tilde{X}$  est une variété riemannienne munie de la métrique de Sasaki induite par la métrique riemannienne sur  $\tilde{X}$ . Le bord à l'infini de  $\tilde{X}$ , noté  $\partial\tilde{X}$ , est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotiques. Pour tout vecteur  $\tilde{v} = (x, \vec{v}) \in T^1\tilde{X}$  il existe une unique géodésique  $\gamma_{\tilde{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{X}$  qui satisfait les conditions initiales

$$\gamma_{\tilde{v}}(0) = x \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \gamma_{\tilde{v}}(t) = \vec{v}.$$

De plus, la géodésique  $\gamma_{\tilde{v}}$  a exactement deux extrémités (ou bouts) distinctes à l'infini, notées

$$v^- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{\tilde{v}}(t) \quad \text{et} \quad v^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{\tilde{v}}(t).$$

Si l'on fixe une *origine*  $o \in \tilde{X}$ , alors pour tout  $\xi \in \partial\tilde{X}$  il existe un unique vecteur  $\tilde{v} = (o, \vec{v}) \in T^1\tilde{X}$  tel que  $v^+ = \xi$ . En particulier, le bord à l'infini s'identifie avec  $\mathbb{S}^{d-1}$ , où  $d = \dim(\tilde{X})$ . Si l'on munit  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$  de la topologie des cônes, alors  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$  est homéomorphe à la boule unité fermée dans  $\mathbb{R}^d$ . Ainsi, l'espace topologique  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$  est une compactification de  $\tilde{X}$  (voir [Bal95, Chapter II]).

Rappelons que le flot géodésique  $(g_t)$  agit sur  $T^1\tilde{X}$  en envoyant un vecteur  $\tilde{v} \in T^1\tilde{X}$  à distance  $t$  (dans la base  $\tilde{X}$ ) en suivant la géodésique orientée  $\gamma_{\tilde{v}}$ . Autrement dit, on a  $g_t(\tilde{v}) = (\gamma_{\tilde{v}}(t), \partial/\partial s|_{s=t}\gamma_{\tilde{v}}(s))$ .

Une manière ingénieuse d'étudier l'action du flot géodésique sur  $T^1\tilde{X}$  est à travers des coordonnées de Hopf. On note  $\tilde{\pi} : T^1\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  la projection naturelle de  $T^1\tilde{X}$  vers  $\tilde{X}$  définie par  $\tilde{\pi}(\tilde{v}) = x$ , où  $\tilde{v} = (x, \vec{v})$ . Soit  $d$  la distance dans  $\tilde{X}$  induite par la métrique de Sasaki.

**Définition A.1.** La fonction de Busemann  $B : \partial\tilde{X} \times \tilde{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme la limite

$$B_{\xi}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \xi_t) - d(y, \xi_t),$$

où  $\xi \in \partial\tilde{X}$ ,  $x, y \in \tilde{X}$  et  $\xi_t$  est n'importe quel rayon géodésique ayant  $\xi$  comme bout à l'infini.

**Proposition A.2.** La fonction de Busemann satisfait

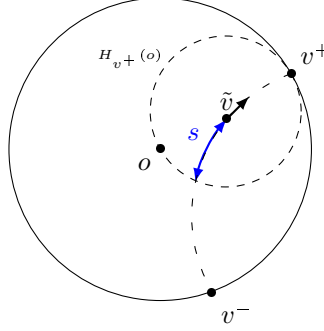
(1) **Propriété de cocycle.** Pour tout  $x, y, z \in \tilde{X}$  et  $\xi \in \partial\tilde{X}$ , on a

$$B_{\xi}(x, z) = B_{\xi}(x, y) + B_{\xi}(y, z).$$

(2) *Invariance par isométrie.* Pour toute isométrie  $\phi \in \text{Isom}(\tilde{X})$ , on a

$$B_{\phi\xi}(\phi x, \phi y) = B_{\xi}(x, y).$$

On note  $\partial^2 \tilde{X}$  l'ensemble  $\partial \tilde{X} \times \partial \tilde{X}$  privé de la diagonale. Ainsi, le fibré unitaire tangent  $T^1 \tilde{X}$  est identifié à  $\partial^2 \tilde{X} \times \mathbb{R}$  en assignant à un vecteur  $\tilde{v} \in T^1 \tilde{X}$  le point  $\mathcal{H}(\tilde{v}) = (v^-, v^+, B_{v^+}(o, \tilde{\pi}(\tilde{v})))$ .



### Coordonnées de Hopf

On montre aisément que cette identification est un homéomorphisme. De plus, le flot géodésique agit par translation dans la troisième coordonnée. En effet, comme le flot géodésique est défini de sorte qu'on suive pendant un certain temps la géodésique déterminée par un vecteur, les premières deux coordonnées sont fixées par l'action du flot. Soit  $\xi_s$  un rayon géodésique ayant  $v^+$  comme bout à l'infini et passant par  $\tilde{\pi}(\tilde{v})$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} B_{v^+}(o, \tilde{\pi}(g_t(\tilde{v}))) &= \lim_{s \rightarrow \infty} d(o, \xi_s) - d(\tilde{\pi}(g_t(\tilde{v})), \xi_s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} d(o, \xi_s) - d(\tilde{\pi}(\tilde{v}), \xi_s) + d(\tilde{v}, \xi_s) - d(\tilde{v}, \xi_s) \\ &= t + B_{v^+}(o, \tilde{\pi}(\tilde{v})). \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus entraîne en particulier que la coordonnée de Hopf  $\mathcal{H}(g_t(\tilde{v}))$ , associée au vecteur  $g_t(\tilde{v})$ , correspond à  $\mathcal{H}(g_t(\tilde{v})) = (v^-, v^+, t + s)$ , si  $\mathcal{H}(\tilde{v}) = (v^-, v^+, s)$ .

**Définition A.3.** Une horoboule centrée en  $\xi \in \partial \tilde{X}$  passant par  $x \in \tilde{X}$ , notée  $B_{\xi}(x)$ , est l'ensemble

$$B_{\xi}(x) = \{y \in \tilde{X} : B_{\xi}(x) > 0\}.$$

Une horosphère centrée en  $\xi \in \partial \tilde{X}$  et passant par  $x \in \tilde{X}$ , notée  $H_{\xi}(x)$ , est le bord dans  $\tilde{X}$  d'une horoboule, c'est-à-dire, un ensemble de niveau de la fonction de Busemann  $B_{\xi}(x, \cdot)$ .

En ce qui concerne à la dynamique du flot géodésique, on s'intéresse souvent aux ensembles de points qui se rapprochent le long du temps par l'action du flot. On remarque que nous utilisons de façon indistincte la notation  $d$  pour la distance riemannienne sur  $\tilde{X}$  et  $T^1 \tilde{X}$ .

**Définition A.4.** Soit  $\tilde{v} \in T^1 \tilde{X}$ . On définit les feuilles fortement instable et fortement stable en  $\tilde{v}$ , notées respectivement  $W^{su}(\tilde{v})$  et  $W^{ss}(\tilde{v})$ , par

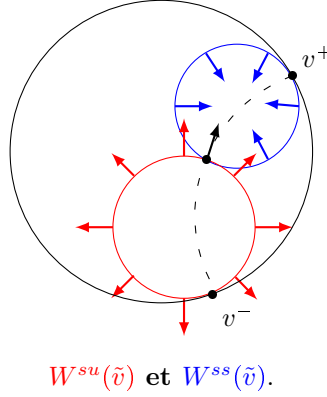
$$W^{su}(\tilde{v}) = \{\tilde{w} \in T^1 \tilde{X} : \lim_{t \rightarrow \infty} d(g_{-t}\tilde{v}, g_{-t}\tilde{w}) = 0\}$$

et

$$W^{ss}(\tilde{v}) = \{\tilde{w} \in T^1 \tilde{X} : \lim_{t \rightarrow \infty} d(g_t\tilde{v}, g_t\tilde{w}) = 0\}.$$

On note ainsi  $W^{su} = \{W^{su}(\tilde{v}) : \tilde{v} \in T^1 \tilde{X}\}$  (resp.  $W^{ss} = \{W^{ss}(\tilde{v}) : \tilde{v} \in T^1 \tilde{X}\}$ ) le feuilletage fortement instable (resp. fortement stable). Remarquons que les sous-variétés  $\tilde{\pi}(W^{su}(\tilde{v}))$  et  $\tilde{\pi}(W^{ss}(\tilde{v}))$  sont les horosphères passant par  $\tilde{\pi}(\tilde{v})$  centrées respectivement en  $v^-$  et  $v^+$ . Ainsi, la feuille fortement instable  $W^{su}(\tilde{v})$  est l'ensemble de vecteurs basés dans l'horosphère  $H_{v^-}(\tilde{\pi}(\tilde{v}))$

pointant de manière perpendiculaire vers l'extérieur. De façon analogue on montre que la feuille fortement stable  $W^{ss}(\tilde{v})$  est l'ensemble de vecteurs basés dans l'horosphère  $H_{v^+}(\tilde{\pi}(\tilde{v}))$  pointant de manière perpendiculaire vers l'intérieur. Les sous-variétés  $W^{su}(\tilde{v})$  et  $W^{ss}(\tilde{v})$  sont des sous-variétés plongées dans  $T^1\tilde{X}$ .

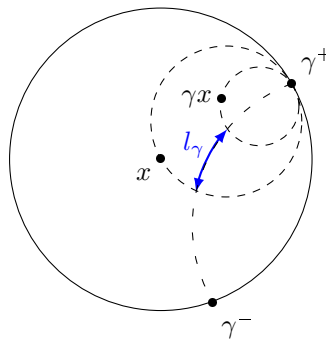


## Isométries

Soit  $\tilde{X}$  une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées  $-b^2 \leq K \leq -1$ , avec  $b > 1$ . Les isométries de  $\tilde{X}$ , sauf l'identité, se répartissent en trois types différents. Une isométrie *elliptique* fixe au moins un point dans  $\tilde{X}$ . Une isométrie *parabolique* fixe un unique point dans  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ , situé à l'infini. Si  $\xi \in \partial\tilde{X}$  est un point fixe d'une isométrie parabolique, alors cette isométrie préserve toute horosphère centrée en  $\xi$ . Finalement, les isométries *hyperboliques* fixent exactement deux points situés à l'infini. Une telle isométrie préserve la géodésique (appelée *axe*) qui a comme bouts à l'infini ces points fixes. De plus, elle agit sur l'axe par translation. Soit  $\gamma$  une isométrie hyperbolique. Notons  $\gamma^-$  (resp.  $\gamma^+$ ) le point répulsif (resp. attractif) fixé par  $\gamma$ . La distance de translation de  $\gamma$ , notée  $l_\gamma$ , est égale à

$$l_\gamma = B_{\gamma^+}(x, \gamma x) = -B_{\gamma^-}(x, \gamma x),$$

pout tout  $x \in \tilde{X}$ .



**Distance de Translation de  $\gamma$**

Il est bien connu le groupe d'isométries de  $\tilde{X}$ , muni de la topologie compacte-ouverte, est un groupe topologique localement compact.

**Définition A.5.** Un groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $\tilde{X}$  est dit Kleinien, si

- (1) Il est discret.
- (2) Il est sans torsion, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma^n = Id$  pour un certain entier  $n \neq 0$ .

---

(3) *Il est non-élémentaire, c'est-à-dire qu'il ne laisse pas invariant un ensemble fini de points dans  $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ .*

Un groupe Kleinien agit de façon libre et proprement discontinue sur  $\tilde{X}$ . La variété quotient  $X = \tilde{X}/\Gamma$  est ainsi une variété riemannienne complète de dimension au moins 2 à courbures sectionnelles pincées. De plus, son fibré unité tangent  $T^1X$  est le quotient  $T^1X = T^1\tilde{X}/\Gamma$ . Si l'on considère une variété riemannienne  $X$  complète de dimension au moins 2 et à courbures sectionnelles pincées, alors son revêtement universel  $\tilde{X}$ , muni de la métrique riemannienne induite par celle de  $X$ , satisfait les mêmes propriétés sur la courbure et la dimension. Le groupe fondamental  $\pi_1(X)$  agit de façon libre et proprement discontinue sur  $\tilde{X}$ . De plus, cette action est par isométries et  $X = \tilde{X}/\pi_1(X)$ .

Soit  $(g_t)$  le flot géodésique sur  $T^1X$ . Pour tout  $v \in T^1X$  la feuille fortement instable  $W^{su}(v)$  (resp. stable  $W^{ss}(v)$ ) de  $v$  est définie de manière analogue comme dans l'espace de revêtement universel. Ainsi, si  $\tilde{v} \in T^1\tilde{X}$  est un relevé de  $v$ , alors  $W^{su}(v) = W^{su}(\tilde{v})/\Gamma$  et  $W^{ss}(v) = W^{ss}(\tilde{v})/\Gamma$ . De plus, les variétés fortement instables et stables deviennent des sous-variétés immergées dans  $T^1X$ .



# Bibliographie

- [Aar97] Jon Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 50, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [Abr59] L. M. Abramov, *On the entropy of a flow*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **128** (1959), 873–875.
- [AK42] Warren Ambrose and Shizuo Kakutani, *Structure and continuity of measurable flows*, Duke Math. J. **9** (1942), 25–42.
- [AOW85] Pierre Arnoux, Donald S. Ornstein, and Benjamin Weiss, *Cutting and stacking, interval exchanges and geometric models*, Israel J. Math. **50** (1985), no. 1-2, 160–168.
- [Bal95] Werner Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Seminar, vol. 25, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995, With an appendix by Misha Brin.
- [BI06] Luis Barreira and Godofredo Iommi, *Suspension flows over countable Markov shifts*, J. Stat. Phys. **124** (2006), no. 1, 207–230.
- [BK83] M. Brin and A. Katok, *On local entropy*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, pp. 30–38.
- [Blu12] Frank Blume, *An entropy estimate for infinite interval exchange transformations*, Math. Z. **272** (2012), no. 1-2, 17–29.
- [Bow75] Rufus Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [Bow95] B. H. Bowditch, *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. **77** (1995), no. 1, 229–274.
- [BR75] Rufus Bowen and David Ruelle, *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 181–202.
- [CE75] Jeff Cheeger and David G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975, North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.
- [CQ98] Zaquie Coelho and Anthony N. Quas, *Criteria for  $\bar{d}$ -continuity*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 8, 3257–3268.
- [Dao13] Yair Daon, *Bernoullicity of equilibrium measures on countable Markov shifts*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), no. 9, 4003–4015.
- [DOP00] Françoise Dal’bo, Jean-Pierre Otal, and Marc Peigné, *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel J. Math. **118** (2000), 109–124.
- [DP98] Françoise Dal’bo and Marc Peigné, *Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting*, J. Reine Angew. Math. **497** (1998), 141–169.
- [EK12] Manfred Einsiedler and Shirali Kadyrov, *Entropy and escape of mass for  $SL_3(\mathbb{Z}) \backslash SL_3(\mathbb{R})$* , Israel J. Math. **190** (2012), 253–288.
- [EKP15] M. Einsiedler, S. Kadyrov, and A. Pohl, *Escape of mass and entropy for diagonal flows in real rank one situations*, Israel J. Math. **210** (2015), no. 1, 245–295.
- [ELMV12] Manfred Einsiedler, Elon Lindenstrauss, Philippe Michel, and Akshay Venkatesh, *The distribution of closed geodesics on the modular surface, and Duke’s theorem*, Enseign. Math. (2) **58** (2012), no. 3-4, 249–313.

- [EW11] Manfred Einsiedler and Thomas Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 259, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.
- [GK01] Boris Gurevich and Svetlana Katok, *Arithmetic coding and entropy for the positive geodesic flow on the modular surface*, Mosc. Math. J. **1** (2001), no. 4, 569–582, 645, Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary.
- [Gur69] B.M. Gurevich, *Topological entropy for denumerable Markov chains*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **10** (1969), 911–915.
- [Gur70] ———, *Shift entropy and markov measures in the path space of a denumerable graph.*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **11** (1970), 744–747.
- [HK95] Michael Handel and Bruce Kitchens, *Metrics and entropy for non-compact spaces*, Israel J. Math. **91** (1995), no. 1-3, 253–271, With an appendix by Daniel J. Rudolph.
- [IJT15] Godofredo Iommi, Thomas Jordan, and Mike Todd, *Recurrence and transience for suspension flows*, Israel J. Math. **209** (2015), no. 2, 547–592.
- [IRV15] G. Iommi, F. Riquelme, and A. Velozo, *Entropy in the cusp and phase transitions for geodesic flows*, <http://arxiv.org/abs/1511.03967> (2015).
- [JKL14] Johannes Jaerisch, Marc Kesseböhmer, and Sanaz Lamei, *Induced topological pressure for countable state Markov shifts*, Stoch. Dyn. **14** (2014), no. 2, 1350016, 31.
- [Kad12] Shirali Kadyrov, *Entropy and escape of mass for Hilbert modular spaces*, J. Lie Theory **22** (2012), no. 3, 701–722.
- [Kat80] A. Katok, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 51, 137–173.
- [Kem11] Tom Kempton, *Thermodynamic formalism for suspension flows over countable Markov shifts*, Nonlinearity **24** (2011), no. 10, 2763–2775.
- [KHM95] Anatole Katok, Boris Hasselblatt, and Leonardo Collaborateur. Mendoza, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge university press, Cambridge, 1995, Autre tirage : 1997 (1<sup>ère</sup> édition), 2009 (10<sup>e</sup> impr.).
- [KSLP] Anatole Katok, Jean-Marie Strelcyn, François Ledrappier, and Feliks Przytycki, *Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1222, Springer Berlin Heidelberg.
- [Led84a] F. Ledrappier, *Propriétés ergodiques des mesures de Sinai*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1984), no. 59, 163–188.
- [Led84b] ———, *Quelques propriétés des exposants caractéristiques*, École d’été de probabilités de Saint-Flour, XII—1982, Lecture Notes in Math., vol. 1097, Springer, Berlin, 1984, pp. 305–396.
- [Led13] François Ledrappier, *Entropie et principe variationnel pour le flot géodésique en courbure négative pincée*, Géométrie ergodique, Monogr. Enseign. Math., vol. 43, Enseignement Math., Geneva, 2013, pp. 117–144.
- [LS79] Viktor Losert and Klaus Schmidt, *A class of probability measures on groups arising from some problems in ergodic theory*, Probability measures on groups (Proc. Fifth Conf., Oberwolfach, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 706, Springer, Berlin, 1979, pp. 220–238.
- [LS82] François Ledrappier and Jean-Marie Strelcyn, *A proof of the estimation from below in Pesin’s entropy formula*, Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1982), no. 2, 203–219 (1983).
- [LY85a] F. Ledrappier and L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin’s entropy formula*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 3, 509–539.
- [LY85b] ———, *The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 3, 540–574.

- [Mañ81] Ricardo Mañé, *A proof of Pesin's formula*, Ergodic Theory Dynamical Systems **1** (1981), no. 1, 95–102.
- [Mat95] Pertti Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Fractals and rectifiability.
- [MU03] R. Daniel Mauldin and Mariusz Urbański, *Graph directed Markov systems*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 148, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, Geometry and dynamics of limit sets.
- [OP04] Jean-Pierre Otal and Marc Peigné, *Principe variationnel et groupes kleinien*, Duke Math. J. **125** (2004), no. 1, 15–44.
- [Ose68] V. I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov exponents of dynamical systems*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **19** (1968), 179–210.
- [Par69] William Parry, *Entropy and generators in ergodic theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [Pat99] Gabriel P. Paternain, *Geodesic flows*, Progress in Mathematics, vol. 180, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [Pes77] Ja. B. Pesin, *Characteristic Ljapunov exponents, and smooth ergodic theory*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), no. 4 (196), 55–112, 287.
- [PPS12] F. Paulin, M. Pollicott, and B. Schapira, *Equilibrium states in negative curvature*, 2012.
- [Riq15] F. Riquelme, *Counterexamples to Ruelle's inequality in the noncompact case*, <http://arxiv.org/abs/1510.05031> (2015).
- [Riq16] ———, *Entropies for a diffeomorphism on a noncompact manifold. applications to Ruelle's inequality and Pesin's formula*, <http://arxiv.org/abs/1601.02843> (2016).
- [Rob03] Thomas Roblin, *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2003), no. 95, vi+96.
- [Roh52] V. A. Rohlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Amer. Math. Soc. Translation **1952** (1952), no. 71, 55.
- [Rue78] David Ruelle, *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **9** (1978), no. 1, 83–87.
- [Sar99] Omri M. Sarig, *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), no. 6, 1565–1593.
- [Sar01] ———, *Phase transitions for countable Markov shifts*, Comm. Math. Phys. **217** (2001), no. 3, 555–577.
- [Sav98] S. V. Savchenko, *Special flows constructed from countable topological Markov chains*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **32** (1998), no. 1, 40–53, 96.
- [Sin72] Ja. G. Sinaï, *Gibbs measures in ergodic theory*, Uspehi Mat. Nauk **27** (1972), no. 4(166), 21–64.
- [Sul84] Dennis Sullivan, *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math. **153** (1984), no. 3-4, 259–277.
- [Wal82] Peter Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

**Résumé**

Dans ce mémoire, nous étudions l'entropie des systèmes dynamiques différentiables définis sur des variétés riemanniennes non compactes. Dans un premier temps, nous éclaircissons les liens entre différentes notions d'entropie dans ce cadre non compact. Ensuite, nous utilisons ces premiers résultats pour y étudier la validité de l'inégalité de Ruelle. Rappelons ici que cette inégalité, pour des difféomorphismes de variétés riemanniennes compactes, nous dit que l'entropie est majorée par la somme des exposants de Lyapounov positifs. Nous montrons que, lorsque nous enlevons l'hypothèse de compacité, l'inégalité de Ruelle n'est pas toujours satisfaite. Nous obtenons ce résultat en construisant une famille explicite de contre-exemples. En revanche, nous montrons, dans le cas d'un difféomorphisme de comportement asymptotique linéaire, ou du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne à courbure négative, que l'inégalité de Ruelle est toujours satisfaite. Pour finir, nous nous intéressons au problème de la perte possible de masse d'une suite de mesures de probabilité d'une variété riemannienne non compacte. Dans le cas du flot géodésique, nous montrons que l'entropie permet de contrôler la masse d'une limite vague de mesures de probabilité invariantes par le flot pour une classe particulière de variétés géométriquement finies. Plus précisément, nous montrons qu'une suite de mesures d'entropie assez grande ne peut pas perdre la totalité de sa masse. De plus, le minorant optimal de l'entropie dans ce résultat est lié à la géométrie de la partie non compacte de la variété : c'est l'exposant critique maximal des sous-groupes paraboliques du groupe fondamental.

**Mots-clefs :** systèmes dynamiques différentiables et théorie ergodique, entropie, exposants de Lyapounov, groupes de Schottky, flot géodésique, perte de masse.

**Abstract**

In this work, we study the entropy of smooth dynamical systems defined on non compact Riemannian manifolds. First, we clarify some relations between different notions of entropy in this setting. Second, we use these first results in order to study the validity of Ruelle's inequality. This inequality, for diffeomorphisms defined on compact Riemannian manifolds, says that the measure-theoretic entropy is bounded from above by the sum of the positive Lyapunov exponents. We show that without the compactness assumption, Ruelle's inequality is not always satisfied. We obtain this result by constructing an explicit family of counterexamples. On the other hand, we prove, in the case of diffeomorphisms with linear asymptotic behavior, or that one of the geodesic flow on the unit tangent bundle of a Riemannian manifold with negative curvature, that Ruelle's inequality is always satisfied. Finally, we are interested in the problem of the possible escape of mass of a sequence of probability measures on a non compact Riemannian manifold. In the case of the geodesic flow, we show that the entropy allows to control the mass of a weak\*-limit of a sequence of probability measures, on the unit tangent bundle of a particular class of geometrically finite manifolds, which are also invariant by the flow. More precisely, we show that a sequence of measures with large enough entropy cannot lose the whole mass. Moreover, the optimal lower bound of the entropy in this result is related to the geometry of the non compact part of the manifold : it is the maximal critical exponent of the parabolic subgroups of the fundamental group.

**Keywords :** smooth dynamical systems and ergodic theory, entropy, Lyapunov exponents, Schottky groups, geodesic flow, escape of mass.