TREBALL DE FI DE GRAU

# Grau en Matemàtiques

**Títol:** Introducció als jocs cooperatius, jocs simples, votació pondederada i poder polític

**Autor:** Víctor Bustillo Ballester

**Director:** Josep Freixas Bosch

**Departament:** Grup de Recerca en Teoria de Jocs

**Any acadèmic:** 2015-2016



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball de Fi de Grau

# Introducció als jocs cooperatius, jocs simples, votació ponderada i poder polític

Víctor Bustillo Ballester

Director: Josep Freixas Bosch

Grup de Recerca en Teoria de Jocs

Agraïments a cada una de les persones que m' han donat suport de manera incondicional des del primer dia en aquesta facultat i per suposat al meu tutor Josep Freixas, per ensenyar-me aquesta apassionant branca de les matemàtiques.

# Resum

**Paraules clau:** Jocs cooperatius, Jocs simples, Votació ponderada, Índex de poder

**MSC2000:** 91A12, 91A80, 91B12

La teoria de jocs és una branca de les matemàtiques que, tot i recent, ha demostrat tenir una complexitat notòria i moltes aplicacions en situacions de la vida real. Aquest treball es centra concretament en el jocs cooperatius, dels quals en veurem una introducció als conceptes clau i demostracions dels resultats més interessants per acabar estudiant el tema que realment vertebra el projecte: els jocs simples i de majoria ponderada.

Al treball s'estudia la caracterització d'un joc simple, concretament en situacions d'una votació sí-no. S'analitza matemàticament què vol dir que un sistema de votació sigui ponderat i quines condicions ha de complir un sistema de votació per ser-ho. Seguidament s'avalua el concepte de dimensió d'una votació. El projecte s'ajuda amb exemples de la vida real per fer més visual alguns conceptes que a priori poden resultar una mica abstractes.

Finalment s'intenta donar una definició matemàtica al concepte de poder basat en l'influència que té un individu a l'hora d'exercir la seva voluntat en una votació. Es defineixen els dos índexs de poder més reconeguts que intenten quantificar aquesta influència i s'observen alguns índexs existents. El treball també fa una incursió en l'efecte té sobre aquest poder les incompatibilitats entre dos votants a l'hora de formar coalicions. Tot això ajudat, per suposat, amb exemples de sistemes de votació com el Parlament de Catalunya o el Congrés dels Diputats.

Per complementar el treball, s'adjunten codis de programació en C++ que s'han anat escrivint paral·lelament amb el treball per resoldre alguns dels problemes que es van plantejant al llarg del projecte i que presenten un cost de temps inabastable si es resolen manualment. En aquests es fa ús d'alguns conceptes d'algorísmica per reduir notablement el cost computacional de la resolució. Tot el treball fet sobre incompatibilitats així com els codis és contingut original d'aquest projecte.

# Abstract

**Keywords:** Cooperative games, Simple Games, Weighted voting system, Index of power

**MSC2000:** 200091A12, 91A80, 91B12

This project studies Game Theory and focuses specifically on cooperative games, of which we will see an introduction of some key concepts and demonstrations of the most interesting results to end up focusing on the issue that really structures the project: simple games and weighted voting.

The project studies simple games, specifically in cases of a yes-no voting. We analyze what means that a voting system is weighted and what conditions must meet a voting system to be weighted. Then the concept of dimension is evaluated for a voting system. Some examples from real life aid the reader to visualize concepts that a priori can seem a bit abstract.

Finally, a mathematical definition of the concept of power is given, based on the influence of an individual when exercising their will in a vote. Power indices attempt to quantify this influence and two important indices are reviewed. The work also makes a brief look at what effect could incompatibilities between two voters have when forming coalitions. All of this being aided, of course, with more examples as the Parliament of Catalonia or the Congress of Deputies of Madrid.

To complement the work some programming codes in C++ are attached. They have been parallelly coded to solve some of the problems raised during the project and that have an inconceivable time cost if solved manually. Some concepts of algorithmics are used to significantly reduce the computational cost of the resolution.

# Índex general

Prefaci 1

Introducció 3
1. Breu introducció a la teoria de jocs 3
2. Equilibri de Nash 4
3. Extensió mixta d'un joc 6

Capítol 1. Jocs cooperatius 9
1. Cooperació 9
2. Espai vectorial dels jocs cooperatius en N 11
3. Valor de Shapley 12
4. Conseqüències del teorema de Shapley 17

Capítol 2. Jocs simples i de majoria ponderada 21
1. Jocs simples 21
2. Jocs de majoria ponderada 22
3. Robustesa per intercanvis un-a-un 24
4. Anàlisi dimensional 29

Capítol 3. Poder polític 35
1. Índex de poder de Shapley-Shubik 36
2. Índex de poder de Banzhaf 39
3. Poder ordinal 43
4. Aplicacions del poder a casos reals 45

Conclusions i treball futur 57

Capítol 4. Apèndix 59
1. Codi en C++ dels pagaments de Shapley 59
2. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik 60
3. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik amb matriu de restriccions 1r model 62
4. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik amb matriu de restriccions 2n model 64
5. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik amb matriu de restriccions 3r model 67
6. Codi en C++ de l'índex de poder de Banzhaf amb matriu d'incompetències 69

Bibliografia 73

# Prefaci

La teoria de jocs és una branca relativament recent de les matemàtiques que estudia models de conflicte i cooperació entre persones que suposadament actuen de forma racional.

Aquesta teoria ha estat desenvolupada quasi per complet durant l'últim segle però no fou fins als anys 50 que s'evidenciaren les primeres aplicacions a la política. Gràcies a la caracterització de Lloyd Shapley de la solució d'un joc cooperatiu, que ell mateix provà que era única, seguit de l'adaptació de Pradeep Dubey als anys 70 per jocs simples, podem a dia d'avui estudiar les estructures polítiques que regeixen el món.

Veurem, per a jocs simples, què és un joc de majoria ponderada i com podem saber si un joc simple és d'aquest tipus. Estudiarem maneres per representar el poder polític i analitzarem si és, per exemple, proporcional al nombre d'escons en un parlament. Amb tota aquesta informació podrem aplicar els continguts estudiats a exemples reals, alguns d'ells implementant codis degut al seu elevat cost computacional.

# Introducció

El principal objectiu de les properes pàgines és definir què és un joc i explicar (breument) què és l'equilibri de Nash. Aquesta última definició té poc a veure amb els jocs cooperatius que tractarem al treball però es tracta d'un concepte fonamental de la teoria de jocs així que creiem que val la pena mencionar-lo.

## 1. Breu introducció a la teoria de jocs

Els jocs estudiats per la teoria de jocs són objectes matemàtics ben definits. Consten dels següents elements: els jugadors, la informació i les accions disponibles per a cada jugador i els pagaments per a cada possible desenllaç. El nostre propòsit és estudiar els jocs cooperatius però òbviament cal que comencem amb una definició formal sobre què és un joc.

**Definició 0.1.** Comencem amb una representació estàndard d'un joc, coneguda com *joc en forma normal* o *joc en forma estratègica*:

- El conjunt de jugadors és $N = \{1, \ldots, n\}$.
- El jugador $i$ té un conjunt d'accions $A_i$ disponibles. Aquest conjunt pot ser finit o infinit.
- Sigui $A = A_1 \times \cdots \times A_m$ el conjunt de totes les accions, que té com a element genèric $a = (a_1, \ldots, a_m)$ amb $a \in A$ i $a_i \in A_i$.
- Els pagaments del jugador $i$ com una funció d'utilitat $u_i : A \to \mathbb{R}$, on $u_i(a)$ és el pagament pel jugador $i$ si $a$ és el conjunt d'accions escollides pels jugadors. Aquesta funció intenta mesurar el contentament del jugador al concloure el joc.

Els jocs en forma normal són habitualment representats en taules matricials. Veiem un exemple que ajudi a il·lustrar aquest concepte i que és segurament el més emblemàtic de la teoria de jocs.

**Exemple 0.2.** [Dilema del presoner] Enunciat per A.W. Tucker, el dilema del presoner és, probablement, el joc més famós de la història. L'enunciat és el següent. Dues persones han comès, presumiblement, un crim i són ubicades en cel·les incomunicades. El fiscal parla amb ambdós presoners per separat i els hi proposa a cada un: "Si confesses el crim i testifiques contra el teu company i ell decideix no confessar et deixarem anar lliure. Si els dos testifiqueu, aleshores anireu a presó durant només 5 anys per col·laborar amb la justícia. Si el teu company confessa el crim però tu no aleshores buscaré per tu la màxima condemna de 20 anys de presó. Finalment, si cap dels dos testifica, tinc prou proves per acusar-vos d'un crim lleu donat que éreu al lloc del crim armats i condemnar-vos a un any."
Ara podem modelitzar aquesta situació com un joc on els jugadors són els dos acusats i en el qual cada jugador té dues estratègies, confessar (C) o no confessar (NC). Saben quins són els pagaments de cada situació (els anys de presó) i és justament el que intenten minimitzar. Si ara expressem el joc en la taula de la forma normal, essent el primer nombre de cada cel·la el pagament del jugador 1 i el segon nombre el pagament del jugador 2 obtenim la taula 1.

Introduïm ara quatre idees que ens ajuden a entendre com els jugadors racionals escullen la seva estratègia.

TAULA 1. Joc del dilema del presoner

| | | Jugador 2: NC | Jugador 2: C |
|---|---|---|---|
| Jugador 1 | NC | $(-1,-1)$ | $(-20,0)$ |
| | C | $(0,-20)$ | $(-5,-5)$ |

**Definició 0.3.** Una **estratègia prudent** per un jugador és aquella que li garanteix el màxim dels mínims pagaments possibles per cada acció que el jugador pren.

Això és, una estratègia $a_i \in A_i$ és **prudent** pel jugador $i$ si

$$\text{mínim } u_i(a_i, a_{-i}) \quad \geq \quad \text{mínim } u_i(a'_i, a_{-i})$$

per tot $a'_i \in A_i$ i tot $a_{-i} \in A_{-i} = A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_m$.

En el nostre cas de l'exemple 0.2 veiem que per ambdós jugadors, el mínim pagament és, quan confessen, 5 anys de presó i quan no confessen, 20 anys de presó. Això porta per un conflicte de jugadors que opten per estratègies prudents, una situació (C,C)

**Definició 0.4.** Una **estratègia dominant** per un jugador és aquella que produeix un pagament superior per al jugador en cada una de les combinacions d'estratègies possibles de la resta de jugadors.

Això és, una estratègia $a_i \in A_i$ és **dominant** (o dèbilment dominant) pel jugador $i$ si

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$$

per a tot $a'_i \in A_i$ i tot $a_{-i} \in A_{-i} = A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_m$. L'estratègia és estrictament dominant quan la desigualtat és estricta.

Les estratègies dominants són un concepte molt interessant, no només des del punt de vista analític, sinó des del punt de vista del jugador ja que a aquest no li cal fer cap predicció sobre allò que jugaran la resta de jugadors i tot i així tenir la seva pròpia ben definida.

Veiem, per exemple, al dilema del presoner, com ambdós jugadors tenen com a estratègia dominant confessar. Això és així ja que si el jugador 2 no confessa, el jugador 1 va a la presó 1 any si ell tampoc confessa però cap ni un si decideix col·laborar amb el fiscal. Similarment, si el jugador 2 decideix confessar, el jugador 1 anirà a la presó 20 anys si no ho fa però 5 si també confessa. Així doncs, ambdós jugadors no obtenen cap avantatge decidint no col·laborar amb la justícia i arriben a un equilibri (C,C).

## 2. Equilibri de Nash

Anem ara a veure un concepte clau de la teoria de jocs, l'equilibri de Nash.

**Definició 0.5.** Una estratègia $a_i$ s'anomena **millor resposta** del jugador $i$ a un conjunt d'estratègies $a_{-i} \in A_{-i}$ dels altres jugadors si

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$$

per a tot $a'_i$. Una millor resposta s'anomena **millor resposta estricta** si és l'única millor resposta.

**Definició 0.6.** Un conjunt d'estratègies $a \in A$ s'anomenen estratègies (pures) en equilibri de Nash si $a_i$ és una millor resposta per $a_{-i}$ per a tot $i$. Això vol dir que $a$ és un **equilibri (de Nash)** si

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$$

per tot $i$ i $a'_i$.

Aquesta definició pot semblar molt similar a la d'estratègies dominants però presenta una diferència crucial. A les estratègies pures en equilibri de Nash se'ls demana que cada jugador presenti la millor resposta contra l'equilibri establert en aquell moment per la resta de jugadors i no necessàriament contra totes les possibles

TAULA 2. Joc de parells i senars

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | S | P |
| Jugador 1 | S | $(0,1)$ | $(1,0)$ |
| | P | $(1,0)$ | $(0,1)$ |

estratègies possibles del joc.
L'equilibri de Nash té la propietat desitjable de que es estable. Això vol dir que si cada jugador espera que $a$ serà el conjunt d'accions que prendran la resta de jugadors, aleshores cap jugador té cap incentiu per canviar la seva estratègia. En altres paraules, en un equilibri de Nash cap jugador té incentiu a canviar d'estratègia ja que això li suposarà una pèrdua.

Si ara tornem a l'exemple 0.2, ens adonem que el conjunt d'estratègies (C,C) és un equilibri de Nash ja que ambdós jugadors, si decidissin canviar la seva estratègia de C a NC passarien d'anar 5 anys a la presó a anar-ne 20. Per altra banda també podem veure que en qualsevol altra situació, el jugador que decideix no confessar obté benefici confessant.

**Exemple 0.7.** [Parells i senars] Cal notar que no tots els jocs tenen equilibris de Nash. Un exemple bastant mundà és el joc de parells i senars. En aquest joc a un jugador se li assignen els nombres parells i a l'altre els senars. Aleshores, cada jugador mostra una quantitat de dits sense saber els que mostrarà l'altre i guanya si la quantitat de dits totals és senar i ell havia triat senars i viceversa.

Anem a veure la taula del joc suposant que el jugador 1 tria senars i el jugador 2 tria parells. A la taula, S implica treure una quantitat de dits senar i P una quantitat de dits parella.

Ens en podem adonar que en un joc d'aquestes característiques el jugador que perd sempre obté benefici canviant la seva estratègia i per tant no existeix cap equilibri de Nash.

Veiem ara una última idea que dóna forma a una propietat desitjable en un joc.

**Definició 0.8.** Un conjunt d'estratègies $a \in A$ s'anomena **òptim de Pareto** si no hi ha cap $a' \in A$ tal que $u_i(a') \geq u_i(a)$ per tot jugador $i$.

**Remarca 0.9.** Així doncs, si el conjunt de jugadors es troben en un conjunt d'estratègies que no és òptim de *Pareto*, existeix un conjunt que beneficiarà a tots i cada un dels jugadors. És d'esperar pensar, aleshores, que demanar que un equilibri sigui òptim de *Pareto* és quelcom raonable.

**Remarca 0.10.** Tot i el que acabem d'esmentar, ens en podem adonar que a l'exemple 0.2, l'únic conjunt d'estratègies que no és òptim de *Pareto* és la situació (C,C). Això és bastant interessant i és el que dota en aquest exemple de tanta fama. Acabem de veure que (C,C) arriba a un equilibri per estratègies prudents, per estratègies dominats i per equilibri de Nash. Tot i així és l'unica situació de les 4 que no és òptim de *Pareto*. És per això que aquest exemple es cataloga com a "dilema".

Veiem un exemple de com s'aplica l'equilibri de Nash abans de submergir-nos en els jocs cooperatius pròpiament dits.

**Exemple 0.11.** Dues empreses que venen el mateix perfil de producte han de decidir si publicitar-se (P) o no publicitar-se (NP) en un cert medi. Els beneficis totals que obtindran entre les dues és 28 però el cost de la publicitat és de 8. L'empresa 1 té una quota de mercat major que l'empresa 2 de forma que els 28 de benefici es reparteixen en 16 per l'empresa 1 i 12 per l'empresa 2. Si ambdues empreses decideixen invertir en publicitat es repartiran el mercat en parts iguals, és a dir 14 per empresa, però tindran unes despeses de 8 en publicitat així que tindran un benefici de 6. Per altra banda, si una empresa decideix invertir en publicitat i l'altre no, la primera s'endurà tres quartes parts de la quota de mercat però, com hem dit, tindrà despeses en publicitat. Els pagaments nets s'expressen a la Taula 3.

Per aconseguir un equilibri de Nash cal buscar per un parell d'accions en la qual cap jugador està interessat en canviar l'estratègia dónada la tria de l'altre empresa. En aquest cas, veiem que l'empresa 1 té una estratègia

TAULA 3. Joc de parells i senars

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | NP | P |
| Jugador 1 | NP | $(16, 12)$ | $(\ 7, 13)$ |
| | P | $(13, 7)$ | $(\ 6, 6)$ |

dominant en no publicitar-se. Aleshores, dónada la predicció de que 1 no es publicitarà, l'empresa 2 obté un benefici més alt si es publicita. D'aquesta manera, com cap de les dues empreses obté benefici canviant d'estratègia, hem assolit un equilibri de Nash.

Cal mencionar, però, que tot i que aquest equilibri és molt satisfactori pel jugador 2, no ho és tant pel jugador 1 el qual obté bastant menys benefici del que potencialment podria arribar a tenir.

Per tant, hem vist que hi ha jocs sense equilibris de Nash i jocs que en tenen però són poc satisfactoris per un o els dos jugadors. Això motiva l'última secció d'aquesta introducció.

## 3. Extensió mixta d'un joc

**Definició 0.12.** Sigui $\Gamma$ un joc en forma normal definit pel conjunt de totes les accions $A$ i una funció d'utilitat $u$. Una **estratègia mixta** pel jugador $i$ és una distribució de probabilitat sobre el conjunt de les seves estratègies $A_i$. És a dir, un vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ amb $x_i \geq 0$ per tot $i$ i

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

**Definició 0.13.** Sigui $\Gamma$ un joc en forma normal de dos jugadors definit pel conjunt de totes les accions $A$ i una funció d'utilitat $u$. Siguin $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ les distribucions de probabilitat dels dos jugadors, les **funcions de pagament per estratègies mixtes** $k_1$ i $k_2$ estan definides per

$$k_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t u_i(A)\mathbf{y}.$$

Aquest concepte dóna molt de si però anem a veure només les aplicacions directes per equilibris de Nash.

TEOREMA 0.14. *L'extensió mixta d'un joc en forma normal per dos jugadors admet sempre algun equilibri de Nash. (Nash, 1950.)*

La complexitat d'aquesta demostració escapa als objectius d'aquest projecte tot i que cal mencionar que per realitzar la demostració, Nash fa servir el teorema del punt fix de Kakutani.

Veurem breument el mètode per trobar les citades estratègies mixtes.

**Definició 0.15.** La **correspondència de millor resposta** del jugador 1 és la regla que assigna a cada estratègia mixta $\mathbf{y} \in A_2$ el conjunt

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in A_1 : k_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{és màxim.}\}$$

Anàlogament, la **correspondència de millor resposta** del jugador 2 és la regla que assigna a cada estratègia mixta $\mathbf{x} \in A_1$ el conjunt

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in A_2 : k_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{és màxim.}\}$$

Així doncs, $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ és un equilibri de Nash de l'extensió mixta del joc normal si i només si $\mathbf{x}\in\mathbf{x}^*(\mathbf{y})$ i $\mathbf{y}\in\mathbf{y}^*(\mathbf{x})$. Anem a aplicar aquests conceptes als tres exemples vists fins ara.

**Exemple 0.16.** (Continuació de l'exemple 0.7). Ens cal trobar primer les funcions de pagament en extensions mixtes d'ambdós jugadors. Fem servir la taula de l'exemple i sigui $\mathbf{x}=(x,1-x)$ i $\mathbf{y}=(y,1-y)$,

$$k_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^t u_1(A)\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix},$$

$$k_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^t u_2(A)\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix}.$$

Fent els calculs corresponents obtenim

$$k_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=x(1-y)+(1-x)y=x+y-2xy,$$

$$k_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=xy+(1-x)(1-y)=2xy-x-y+1.$$

Trobem ara les correspondències de millor resposta estudiant el pendent de $k_1$ i $k_2$.

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{y})=\begin{cases}1 & \text{si } y<1/2,\\ [0,1] & \text{si } y=1/2,\\ 0 & \text{si } y>1/2,\end{cases}\qquad \text{i}\qquad \mathbf{y}^*(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & \text{si } x<1/2,\\ [0,1] & \text{si } x=1/2,\\ 0 & \text{si } x>1/2,\end{cases}$$

Per tant, l'únic equilibri de Nash del problema és el punt $(1/2,1/2)$. Si hi rumiem això té sentit. Imaginem un contrincant amb molta capacitat psicològica per a jugar a parells i senars. L'estratègia $(1/2,1/2)$ és l'única que ens garanteix que per més hàbil que sigui el contrari, res pugui fer en contra nostra si juguem repetides vegades al joc. De fet, ni que el contrincant sàpiga la nostra estratègia li dóna opcions de guanyar-nos en termes esperats. .

**Exemple 0.17.** (Continuació de l'exemple 0.2 corresponent al dilema del presoner). Aplicant el mateix procediment que a 0.16, obtenim

$$k_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^t u_1(A)\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -20\\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix},$$

$$k_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^t u_2(A)\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -20 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix}.$$

Fent els calculs corresponents obtenim

$$k_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=14xy-15x+5y-5,$$

$$k_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=14xy+5x-15y-5.$$

i així trovem

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{y})=\begin{cases}0 & \text{si } y<15/14,\\ [0,1] & \text{si } y=15/14,\\ 1 & \text{si } y>15/14,\end{cases}\qquad \text{i}\qquad \mathbf{y}^*(\mathbf{x})=\begin{cases}0 & \text{si } x<15/14,\\ [0,1] & \text{si } x=15/14,\\ 1 & \text{si } x>15/14,\end{cases}$$

Trobem ara les correspondències de millor resposta estudiant el pendent de $k_1$ i $k_2$. Si derivem $k_1$ respecte $x$ i $k_2$ respecte $y$, trobem que el punt de $y$ i $x$ corresponent que és punt crític s'assoleix a $(15/14, 15/14)$ amb el que obtindríem una funció de distribució de probabilitat amb elements més grans que 1 i amb elements negatius. Per tant, restringint el domini de $x$ i $y$ es pot veure que el màxim és precisament $x = 0$, $y = 0$ corresponent a l'equilibri per estratègies pures (C,C).

**Exemple 0.18.** (Continuació de l'exemple 0.11 corresponent al problema de la publicitat). Aplicant el mateix procediment que a 0.16 i a 0.17, obtenim

$$k_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t u_1(A)\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 13 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix},$$

$$k_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t u_2(A)\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

Fent els calculs corresponents obtenim

$$k_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2xy + x + 7y + 6,$$

$$k_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2xy + 7x + y + 6.$$

Trobem ara les correspondències de millor resposta estudiant el pendent de $k_1$ i $k_2$.

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{y}) = 1 \text{ per tot } y \in [0,1] \quad \text{ i } \quad \mathbf{y}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/2, \\ [0,1] & \text{si } x = 1/2, \\ 0 & \text{si } x > 1/2, \end{cases}$$

En aquest cas ens trobem en el mateix cas que a l'exemple 0.17 per a $\mathbf{x}^*(\mathbf{y})$ però en aquest cas acabem trobant que $x = 1$ per tot $y$, el que implica que mai es publicitarà. Per altra banda, al valer sempre $x = 0$, l'empresa 2 sempre es publicitarà i d'aquesta manera arribem a l'equilibri de Nash per estratègies pures un altre cop.

Així doncs, hem vist que als tres jocs treballats, els equilibris de Nash trobats en estratègies pures, eren també equilibris de Nash en estratègies mixtes però la implicació contrària no és certa.

De totes maneres, tant a l'exemple de publicitat com al dilema del presoner hom pot observar que d'haver cooperat, ambdós jugadors podrien haver arribat a escenaris que fossin més beneficiosos globalment. Heus aquí d'on esdevé la necessitat de crear una branca per si mateixa de la teoria de jocs que estudii els beneficis d'aquesta potencial cooperació i en la qual hem basat el nostre treball.

# Capítol 1
# Jocs cooperatius

## 1. Cooperació

Els jocs presenten quasi sempre elements de conflicte entre les aspiracions dels jugadors. A la introducció hem vist de forma breu com els jugadors buscaven el seu màxim benefici sense tenir en compte en cap moment el dels altres. Als jocs cooperatius entra en joc un element crucial que canvia per complet la teoria dels jocs no cooperatius. Aquest element és la **comunicació** entre jugadors. La principal conseqüència d'aquesta comunicació es que es poden establir pactes entre els jugadors per coordinar estratègies que maximitzin el benefici mutu, establint pagaments laterals entre els jugadors.

Recordem l'exemple 0.11. Les empreses assolien un equilibri de Nash en què el primer jugador rebia un pagament de 7 mentre que el segon jugador rebia un pagament de 13. Què hagués passat de poder-se comunicar? És senzill adonar-se que si els jugadors haguessin pactat no publicitar-se i acte seguit l'empresa 1 hagués realitzat un pagament lateral a l'empresa 2 de 2 unitats, ambdues haguessin rebut un benefici de 14, superior en ambdós casos a l'hipotètic "desitjable"equilibri de Nash.

És fàcil veure, doncs, el gran potencial de la teoria cooperativa. Ara bé, és possible establir una solució satisfactòria per a tots els implicats en jocs cooperatius? La resposta és afirmativa si s'admeten certes propietats com a desitjables però fins arribar-hi cal definir formalment la teoria de jocs cooperatius.

**Definició 1.1.** Denotem per a *coalició* a un subconjunt del conjunt de tots els jugadors, formalment és qualsevol $S \subseteq N$.

Les coalicions modelitzen subconjunts de jugadors que, en posar-se d'acord, podran obtenir un benefici conjunt independentment del que la resta de jugadors faci.

Cal remarcar que aquesta definició de coalició inclou, entre altres, el conjunt buit (denotat per $\emptyset$) i el conjunt total. És important adonar-se també que el nombre de coalicions possibles pot arribar a ser molt gran. El següent resultat precisa aquest punt.

**Proposició 1.2.** *Per a qualsevol joc amb $n$ jugadors, hi ha un total de $2^n$ coalicions.*

Demostració. Un conjunt de $n$ elements admet subconjunts de qualsevol mida $k = 0, 1, \dots, n$. Per a cada $k$, el nombre de subconjunts de mida $k$ és el nombre de combinacions de $n$ elements escollits de $k$ en $k$, és a dir, $\binom{n}{k}$. Així doncs, per trobar el nombre total de subconjunts n'hi ha prou amb

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Afegint ara potències de la unitat, aquesta expressió es converteix en el desenvolupament de la potència d'un binomi per la fórmula de Newton:

$$\binom{n}{0}1^0 1^n + \binom{n}{1}1^1 1^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}1^n 1^0 = (1+1)^n = 2^n. \quad \square$$

$\square$

A continuació podem ja formalitzar la idea de joc cooperatiu.

**Definició 1.3.** Sigui $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunt de jugadors ($n \geq 2$). Un **joc cooperatiu** en $N$ és una funció $u$ (anomenada funció característica del joc) que assigna a cada coalició $S \subseteq N$ un nombre real $u(S)$. L'única condició imposada a la funció $u$ és que $u(\emptyset) = 0$.

**Remarca 1.4.** A la funció $u$ se li exigeix ser una funció d'utilitat transferible, que compleix cinc propietats independents que depassen els objectius del treball. Per a als nostres objectius en tenim prou que aquesta funció representa "diners"o qualsevol mesura quantificable, ordenable i transferible.

A la pràctica escriurem $u(1)$ en comptes de $u(\{1\})$. A no ser que diguem el contrari, d'ara en endavant tractarem amb jocs cooperatius no negatius i monòtons i anàlogament per a altres condicions:

**Definició 1.5.** Un joc cooperatiu és **no negatiu** si la seva funció característica no pren valors negatius:

$$u(S) \geq 0 \quad \text{per a tota coalició } S \subseteq N.$$

**Definició 1.6.** Un joc cooperatiu és **monòton** si al afegir-li jugadors a una coalició no disminueix en cap cas el valor de la funció característica del joc:

$$u(S) \geq u(T) \quad \text{per tot } T \subset S.$$

Veiem, abans de continuar desenvolupant la teoria, un exemple típic d'un joc cooperatiu.

**Exemple 1.7. Distribució de costos** Suposem que 3 localitats estan interessades en rebre subministrament d'aigua o electricitat. La ubicació de les localitats es pot representar en un sistema de referència cartesià de manera que trobem la ciutat $A$ al punt $(2, 0)$, $B$ al punt $(2, 4)$ i finalment $C$ al punt $(-2, 4)$. Per altra banda el centre de distribució de la matèria prima es troba a l'origen de coordenades $O = (0, 0)$. Cada unitat de distància és equivalent a un quilòmetre. El cost de construir la xarxa de subministrament és de $100000 euros$ per quilòmetre. Per motius geogràfics, les possibles canalitzacions que es poden construir per subministrar simultàniament a una, dues o tres localitats són les següents (vegis la Figura 1):

- Subministre fins a $A$ i $B$, seguint els trams $OA$ i $AB$.
- Subministre fins a $A$ i $C$, seguint els trams $OA$ i $OC$.
- Subministre fins a $B$ i $C$, seguint el tram conjunt $OI$, $IB$ i $IC$, on $I = (2, 0)$ és un punt intermig on es bifurca el subministre.
- Subministre fins les tres localitats seguint els trams $OA, OI, IB$, i $IC$.

Així doncs, podem construir una funció de costos que ens val com a funció d'un joc cooperatiu i que assigna un cost conjunt per a cada çoalició"de ciutats, donat en desenes de milers d'euros.

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(A) = 200, \quad c(B) = 448, \quad c(C) = 448,$$

$$c(A, B) = 600, \quad c(A, C) = 648, \quad c(B, C) = 766,$$

$$c(A, B, C) = 966.$$

El problema resideix ara en quina fracció ha de pagar cada una de les localitats pel subministrament conjunt de 966 desenes de milers d'euros. Si tenim en compte els costs individuals és fàcil adonar-se que el repartiment equitatiu no és just. Això implicaria que la localitat $A$ hauria de pagar 322 quan per ella sola podria haver de pagar tan sols 200. Per altra banda, el repartiment dels costos proporcional als costs individuals tampoc

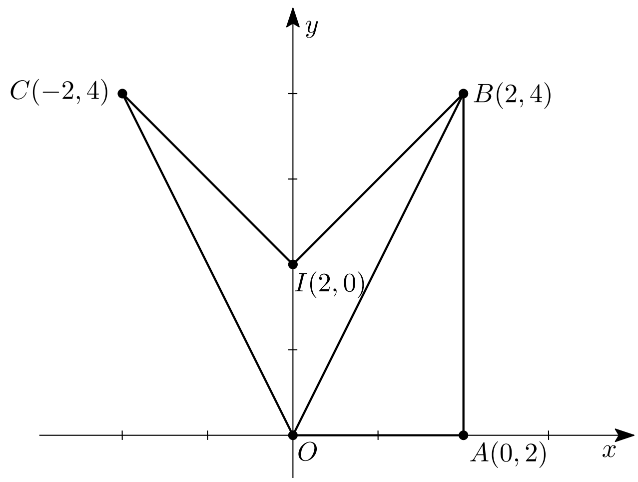



FIGURA 1. Línies de subministre a les 3 localitats

és just ja que no té en compte costs per coalicions de dues localitats. Cal remarcar que $A$ i $C$ no estalvien res unint-se en coalició mentre que $A$ i $B$ per una banda i $B$ i $C$ per l'altre si. Intuïtivament, sembla que $B$ és qui més s'hauria de beneficiar de la cooperació. Ara bé, com podem quantificar aquest benefici esperat? El valor de Shapley que ara introduirem ens dóna una resposta.

Per tant, anem a desenvolupar una teoria que ens permeti repartir els pagaments de forma justa. Aquest és el concepte troncal de la teoria de jocs cooperatius.

## 2. Espai vectorial dels jocs cooperatius en N

Tot i que no sigui intuïtiu de bones a primeres, si hi pensem ens adonem que, dotat de les operacions de suma i producte per escalar que ara introduirem, podem afirmar que l'espai vectorial generat per tots els jocs cooperatius,$G_N$, és un espai vectorial real.

La dimensió d'aquest espai és $2^n - 1$ ja que al definir un joc $u \in G_N$ hem de fixar els $2^n$ valors de cada una de les coalicions possibles $u(S)$, amb la restricció de $u(\emptyset) = 0$. Això ens deixa $2^n - 1$ graus de llibertat.

**Definició 1.8.** Siguin $u, v \in G_N$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La **suma de** $u$ **i** $v$ és el joc $u + v$ definit en $N$ per $(u + v)(S) = u(S) + v(S)$ per a cada coalició $S \subseteq N$.
- El **producte de l'escalar** $\alpha$ **pel joc** $u$ és el joc $\alpha u$ definit en $N$ per $(\alpha u)(S) = \alpha u(S)$ per a cada coalició $S \subseteq N$.

Hi ha una base d'aquest espai vectorial que es fa servir de forma habitual degut a la seva comoditat a l'hora de tractar amb l'aplicació del valor de Shapley. Per a cada coalició no buida $S \subseteq N$, definim el joc $u_S$ en $N$ amb les regles següents:

$$\begin{cases} u_S(T) = 1 \text{ si } S \subseteq T. \\ u_S(T) = 0 \text{ altrament.} \end{cases}$$

Anomenem a $u_S$ el **joc d'unanimitat de** $S$. No és difícil demostrar que la col·lecció de tots els jocs d'unanimitat $\{u_S : \emptyset \neq S \subseteq N\}$ és un conjunt linealment independent. Com conté $2^n - 1$ jocs, la dimensió de l'espai $G_N$ ens assegura que aquest conjunt, a més d'independent, és un sistema de generadors i que per tant és una base.

Finalment, mostrem com expressar qualsevol joc com a combinació lineal d'elements de la base.

$$u = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S(u) u_S.$$

On les components $c_S(u)$, anomenades **dividends de Harsanyi del joc** $u$, venen donades per

$$c_S(u) = \sum_{R \subseteq S} (-1)^{s-r} u(R),$$

essent $s$ i $r$ els cardinals corresponents a les coalicions $S$ (fixa) i $R$ (variable).

## 3. Valor de Shapley

Aquesta secció ve a donar resposta als problemes originats per situacions com la de l'exemple 1.7. Al 1953, Lloyd S. Shapley va introduir el mètode axiomàtic a la teoria de jocs cooperatius, quelcom inèdit fins aleshores.

Així doncs, Shapley va plantejar un conjunt de propietats desitjables que havia de tenir una solució per un problema de jocs cooperatius i no només això sinó que va demostrar l'existència i unicitat de l'esmentada solució.

Abans de veure els axiomes de Shapley veiem tres conceptes necessaris.

**Definició 1.9.** Siguin $i$ i $S$ un jugador i una coalició tals que $i \in S$. La **contribució marginal** del jugador $i$ a la coalició $S$ en un joc $u$ és la diferència entre el benefici que pot obtenir la coalició (amb la participació de $i$) i la que obtindria si $i$ l'abandona. És a dir:

$$cm(i, S, u) = u(S) - u(S \setminus \{i\}).$$

**Exemple 1.10.** Calculem les contribucions marginals de la localitat B a cada una de les coalicions a les que pertany de l'exemple 1.7.

- $cm(B, \{B\}, c) = c(B) - c(\emptyset) = 448.$
- $cm(B, \{A, B\}, c) = c(A, B) - c(A) = 400.$
- $cm(B, \{B, C\}, c) = c(B, C) - c(C) = 318.$
- $cm(B, \{A, B, C\}, c) = c(A, B, C) - c(A, C) = 318.$

**Definició 1.11.** Es diu que un jugador $i$ és un **jugador nul** al joc $u$ si totes les seves contribucions marginals a $u$ són nul·les. És a dir:

$$u(S) - u(S \setminus \{i\}) = 0 \quad \text{per a tota coalició } S.$$

**Definició 1.12.** Es diu que dos jugadors $i, j$ són **equivalents** al joc $u$ si les seves contribucions marginals a qualsevol coalició que no les contingui és la mateixa. És a dir:

$$u(S \cup \{i\}) - u(S) = u(S \cup \{j\}) - u(S) \quad \text{per a qualsevol coalició } S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

És fàcil deduir l'expressió anterior es pot expressar com

$$u(S \cup \{i\}) = u(S \cup \{j\}) \text{ per a qualsevol coalició } S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

I per tant també es compleix

$$u(S \cup \{i\}) \cup \{j\}) - u(S \cup \{i\}) = u(S \cup \{j\}) \cup \{i\}) - u(S \cup \{j\}).$$

és a dir, la contribució marginal de $i$ i $j$ a una coalició que conté a l'altre és la mateixa. A la pràctica això es tradueix en que dos jugadors són equivalents si les seves contribucions marginals coincideixen.

Ara, centrant-nos ja en el concepte de solució de Shapley, ens interessa trobar una funció aplicable a tots els jocs sobre un conjunt $N = 1, 2, \dots, n$ que assigni a cada joc $u$ un vector de pagaments als jugadors. És a dir volem:

$$\Phi : G_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Phi[u] = (\Phi_1[u], \Phi_2[u], \dots, \Phi_n[u]).$$

Ara, Shapley suposa que els jugadors formaran la coalició total $N$ i es disposen a repartir-se els pagaments que genera aquesta coalició. És aquí quan exigeix que la solució satisfaci els axiomes següents:

(1) Eficiència: $\sum_{i \in N} \Phi_i[u] = u(N)$ per tot joc $u \in G_N$.
(2) Jugador nul: si $i \in N$ és un jugador nul en un joc $u$, aleshores $\Phi_i[u] = 0$.
(3) Jugadors equivalents: si $i, j \in N$ són jugadors equivalents en un joc $u$, aleshores $\Phi_i[u] = \Phi_j[u]$.
(4) Additivitat: $\Phi[u + v] = \Phi[u] + \Phi[v]$ per a qualsevol $u, v \in G_N$.

Les tres primeres propietats resulten bastant comprensibles i hom entén que es requereixin per a una solució desitjable. Ara bé, la quarta no és tan clara a primer cop d'ull. El què ens ve a dir és que si hom disposa de dos jocs sobre el mateix conjunt de jugadors, per exemple el subministrament d'aigua i el d'electricitat a $n$ localitats, la solució que s'obtingui en el joc suma ha de coincidir amb la suma de les solucions en cadascun dels dos jocs per separat. És a dir, fer servir el joc suma directament no ha de proporcionar ni beneficis ni pèrdues respecte a la suma dels repartiments que s'obtenen en els jocs individuals.

Per veure com funcionen les propietats prendrem una possible "solució"alternativa, regla del **repartiment proporcional** i comprovem si es cumpleixen aquestes quatre propietats.

**Exemple 1.13.** (Grups de compra) Des de fa anys, els petits comerços estableixen grups de compra per beneficiar-se de descomptes que, de fer la comanda individualment, no tindrien i fer front així a la competència dels grans magatzems. En aquest exemple veurem com funcionen. Imaginem que tenim 3 comerços $A, B$ i $C$ que s'organitzen en un grup per comprar un determinat producte. La comanda que necessita cada comerç és, respectivament, 4, 6 i 8 lots. El majorista que subministra el producte fixa el preu a un miler d'euros el lot però ofereix els següents descomptes:

- Cap descompte per comandes inferiors a 5 lots.
- Un 10% de descompte per comandes de 5 a 9 lots.
- Un 15% de descompte per comandes de 10 a 14 lots.
- Un 20% de descompte per comandes de 15 o més lots.

Així doncs, si les 3 empreses cooperen, poden fer les comandes de forma conjunta i estalviar diners. La taula 1 il·lustra, per les diferents coalicions, la comanda acumulada (en lots), el descompte aplicat, el cost final (en milers d'euros) i la quantitat de diners estalviada (també en milers d'euros).

TAULA 1. Grups de compra

| **Grup** | Comanda acumulada | Descompte aplicat (%) | Cost final | Estalvi |
|---|---|---|---|---|
| {A} | 4 | 0 | 4 | 0 |
| {B} | 6 | 10 | 5.4 | 0.6 |
| {C} | 8 | 10 | 7.2 | 0.8 |
| {A,B} | 10 | 15 | 8.5 | 1.5 |
| {A,C} | 12 | 15 | 10.2 | 1.8 |
| {B,C} | 14 | 15 | 11.9 | 2.1 |
| {A,B,C} | 20 | 20 | 16 | 4 |

D'aquesta manera, podem ara generar la funció $c$, corresponent a les despeses acumulades de cada coalició, abans d'aplicar el descompte, els valors de la qual venen donades per la segona columna de la taula 1. De manera similar creem la funció $d$, corresponent als costs de cada coalició un cop hem aplicat els descomptes, amb les imatges per cada coalició a la tercera columna. Finalment, la funció $b$ il·lustra els beneficis obtinguts per a cada coalició. Observem que $c = d + b$.

Considerem ara la solució per la regla proporcional $\pi$ que assigna a cada joc $u$ el pagament $u(N)$ entre els jugadors:

$$\pi_i[u] = \frac{u(i)}{u(1) + \ldots + u(n)} u(N) \text{ per a cada } i \in N.$$

Veiem primer que la regla proporcional si compleix les tres primeres propietats.

**Eficiència**:

$$\sum_{i \in N} \pi_i[u] = \frac{u(1) + \ldots + u(n)}{u(1) + \ldots + u(n)} u(N) = u(N). \quad \square$$

**Jugador nul**: Sigui $i \in N$ un jugador nul, calculem

$$\pi_i[u] = \frac{u(i)}{u(1) + \ldots + u(n)} u(N) = \frac{0}{u(1) + \ldots + u(n)} u(N) = 0. \quad \square$$

**Jugadors equivalents**: Siguin $i, j \in N$ dos jugadors equivalents, calculem

$$\pi_i[u] = \frac{u(i)}{u(1) + \ldots + u(n)} u(N) = \frac{u(j)}{u(1) + \ldots + u(n)} u(N) = \pi_j[u]. \quad \square$$

Anem ara a veure que no es satisfà la quarta propietat ajudant-nos de les funcions $c, d$ i $b$. Com ja hem mencionat anteriorment, aquesta solució no té en compte les coalicions intermèdies (formades per dos membres) . Cal remarcar també que aquesta solució només és aplicable a jocs no negatius ja que sinó podríem tenir un denominador nul. Anem a provar ara que, efectivament, la solució no satisfà el quart axioma pels jocs $c, d$ i $b$. Per fer-ho trobem $\pi[c], \pi[d]$ i $\pi[b]$. Afegim els resultats a la taula 2.

Taula 2. Pagaments proporcionals

| | $\pi[c]$ | $\pi[d]$ | $\pi[b]$ |
|---|---|---|---|
| A | 4 | 3.86 | 0 |
| B | 6 | 5.20 | 1.71 |
| C | 8 | 6.94 | 2.29 |
| **Total** | 20 | 16 | 4 |

Per tant, si apliquem el quart axioma a $c = d + b$, hauríem d'obtenir $\pi[c] = \pi[d + b] = \pi[d] + \pi[b]$. però no és així. Per tant, la regla proporcional no satisfà la propietat additiva. Si pensem en l'exemple, veiem que és lògic que aquesta solució no sigui acceptable. La regla proporcional atorga a aquest joc, uns beneficis a l'empresa $A$ de 0 euros. Tot i així, quan la coalició $\{B, C\}$ s'afegeix a $A$, passa d'obtenir uns beneficis de 2100 euros a gairebé doblar aquesta quantitat ($4000 euros$) i per tant no té cap sentit que $A$ no percebi cap benefici d'aquesta unió.

Així doncs, existeix una o més solucions que compleixin els requisits de Shapley? El següent teorema ens dóna la resposta.

Teorema 1.14. *(Shapley, 1953.) Per a cada conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$* ***existeix una i només una*** *funció $\Phi : G_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfà les propietats d'eficència, jugador nul, jugadors equivalents i additivitat i aquesta és definida per:*

$$\Phi_i[u] = \sum_{S \subseteq N : i \in S} \gamma_n(s)[u(S) - u(S \backslash \{i\})]$$

*per a cada jugador $i \in N$ i cada joc $u \in G_n$, essent $s = |S|$ el cardinal de la coalició $S$ i*

$$\gamma_n(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.$$

No hem afegit la prova d'aquest teorema al treball doncs supera els objectius del projecte.

**Remarca 1.15.** Els coeficients $\gamma_n(s)$ no depenen del joc, sinó simplement del nombre de jugadors que formen la coalició $S$ i del nombre total de jugadors. A més es poden calcular a partir del triangle de Tartaglia gràcies a que

$$\gamma_n(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n\binom{n-1}{s-1}}.$$

**Proposició 1.16.** *Sigui $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunt dels jugadors. Per a cada $i \in N$ es verifica que*

$$\sum_{S \subseteq N : i \in S} \gamma_n(s) = 1.$$

Demostració. Per a cada mida $s$,amb $(1 \leq s \leq n)$ existeixen $\binom{n-1}{s-1}$ coalicions de $S$ de mida $s$ que contenen al jugador $i$. Això és així ja que per formar una coalició de mida $s$ que contingui $i$ ens cal triar $s-1$ elements d'un conjunt de $n-1$. Per tant tenim:

$$\sum_{S \subseteq N : i \in S} \gamma_n(s) = \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} \frac{1}{n\binom{n-1}{s-1}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

$\square$

Anem ara a estudiar amb una mica de profunditat el cas amb $n = 2$. Els coeficients $\gamma_2(s)$ es poden calcular fàcilment:

$$\gamma_2(1) = \frac{1}{2\binom{1}{0}} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2(2) = \frac{1}{2\binom{1}{1}} = \frac{1}{2}.$$

Per tant, la fórmula explícita de Shapley en aquest cas és, pel jugador $i = 1, 2$ i essent $j \neq i$,

$$\Phi_i[u] = \frac{1}{2}[u(i) - u(\emptyset)] + \frac{1}{2}[u(i,j) - u(j)].$$

Veiem ara un resultat interessant.

**Proposició 1.17.** *Sigui $u$ un joc de dos jugadors tal que $u(1)+u(2) \neq 0$. La igualtat $\pi[u] = \Phi[u]$ es produeix si i només si es verifica almenys una de les condicions següents:*

- $u(1) = u(2)$
- $u(1, 2) = u(1) + u(2)$.

Demostració. Primer, expressem el resultat trobat abans de la Proposició 1.15. d'una forma una mica més adient:

$$\Phi_i[u] = u(i) + \frac{1}{2}[u(i,j) - u(i) - u(j)].$$

Si ara recordem la fórmula de la regla de proporcionalitat i l'apliquem a $n = 2$ trobem:

$$\pi_i[u] = u(i) + \frac{u(i)}{u(i)+u(j)}[u(i,j) - u(i) - u(j)].$$

Ara imposem la igualtat:

$$\pi_i[u] = \Phi_i[u] \iff u(i) + \frac{1}{2}[u(i,j) - u(i) - u(j)] - u(i) - \frac{u(i)}{u(i)+u(j)}[u(i,j) - u(i) - u(j)] = 0 \iff$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{u(i)}{u(i)+u(j)}\right)[u(i,j) - u(i) - u(j)] = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{u(i)}{u(i)+u(j)} = 0 \iff u(i) = u(j) \\ u(i,j) - u(i) - u(j) = 0 \iff u(i,j) = u(i) + u(j) \end{cases}$$

□

Així doncs, hem vist que inclús en el cas per $n = 2$ la regla de proporcionalitat no és una solució adequada excepte per casos molt concrets.

Anem ara a trobar els pagaments de Shapley pels exemples proposats anteriorment en aquesta secció. Abans però trobem la forma dels valors de Shapley per jocs amb $n = 3$ (recordem que tant el joc de subministrament com el de grup de compres comptàvem amb 3 jugadors).

$$\gamma_3(1) = \frac{1}{3\binom{2}{0}} = \frac{1}{3}, \quad \gamma_3(2) = \frac{1}{3\binom{2}{1}} = \frac{1}{6}, \quad \gamma_3(3) = \frac{1}{3\binom{2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Per tant, la fórmula explícita del pagament de Shapley pel jugador 1 és:

$$\begin{aligned}\Phi_1[u] = \frac{1}{3}[u(1) - u(\emptyset)] + \frac{1}{6}[u(1,2) - u(2)] + \\ + \frac{1}{6}[u(1,3) - u(3)] + \frac{1}{3}[u(1,2,3) - u(2,3)].\end{aligned}$$

Les expressions són anàlogues pels jugadors 2 i 3. Una observació interessant és que les contribuicions a les coalicions de mida extrema (mides 1 i 3) és paguen doble que les contribucions a les coalicions intermèdies (mida 2).

**Exemple 1.18.** (Continuació de l'exemple 1.7 sobre els costs de subministrament). Recordem que la funció característica d'aquest joc sobre el conjunt de jugadors $N = \{A, B, C\}$ prenia els següents valors:

$c(\emptyset) = 0, \quad c(A) = 200, \quad c(B) = 448, \quad c(C) = 448,$

$c(A,B) = 600, \quad c(A,C) = 648, \quad c(B,C) = 766,$

$c(A,B,C) = 966.$

Aplicant ara la regla proporcional així com el valor de Shapley trobem els resultats de la taula 3

Taula 3. Pagaments de Shapley i regla proporcional del problema dels costs de subministrament.

| **i** | Cost individual | $\pi_i[c]$ | $\Phi_i[c]$ |
|---|---|---|---|
| A | 200 | 176.28 | 192 |
| B | 448 | 394.86 | 375 |
| C | 448 | 394.86 | 399 |

Cal remarcar que els pagaments de Shapley són francament diferents als resultats de la regla de la proporcionalitat.

**Exemple 1.19.** (Continuació de l'exemple 1.13 sobre els grups de compra). Igual que en l'anterior exemple, donem els valors de la funció característica d'aquest joc sobre el conjunt de jugadors $N = \{A, B, C\}$:

$$c(\emptyset) = 0, \quad c(A) = 4, \quad c(B) = 5.4, \quad c(C) = 7.2,$$

$$c(A, B) = 8.5, \quad c(A, C) = 10.2, \quad c(B, C) = 11.9,$$

$$c(A, B, C) = 16$$

Aplicant ara la regla proporcional així com el valor de Shapley trobem els resultats de la taula 4

TAULA 4. Pagaments de Shapley i regla proporcional del problema dels grups de compra.

| **i** | Cost individual | $\pi_i[c]$ | $\Phi_i[c]$ |
|---|---|---|---|
| A | 4 | 3.86 | 3.72 |
| B | 5.4 | 5.20 | 5.27 |
| C | 7.2 | 6.94 | 7.02 |

El comerç $A$ estalvia un 7%, el doble que amb la regla proporcional que estalviava tan sols un 3.5%. Per altra banda els comerços $B$ i $C$ estalvien un 3.4% i un 2.5% respectivament. Percentatges inferiors als 3.7% i 3.6% corresponents de la regla proporcional.

## 4. Conseqüències del teorema de Shapley

En aquesta secció introduïm un tipus especial de jocs que són de gran interès per diferents motius, els jocs superadditius.

**Definició 1.20.** Un joc cooperatiu $u$ és **additiu** si per qualsevol coalició $S \subseteq N$ es compleix que $u(S) = \sum_{i \in S} u(i)$. Això significa que quan un jugador entra a una coalició, la seva aportació a la utilitat de la mateixa és exactament la seva utilitat individual.

En un joc d'aquest tipus és clar que formar coalicions no té cap mena d'interès atès que els jugadors no reben cap incentiu en la cooperació.

**Proposició 1.21.** *Si $u$ és un joc monòton, aleshores $\Phi_i[u] \geq 0$ per tot jugador $i \in N$.*

DEMOSTRACIÓ. Donat que

$$\Phi_i[u] = \sum_{S \subseteq N : i \in S} \gamma_n(s)[u(S) - u(S \backslash \{i\})],$$

$$\gamma_n(s) > 0,$$

i

$$u(S) - u(S \backslash \{i\}) \geq 0,$$

Aleshores, per monotonia $\Phi_i[u]$ és un sumatori d'elements positius o zeros. □

**Definició 1.22.** Es diu que un joc $u$ és **superadditiu** si $u(S \cup T) \geq u(S) + u(T)$ per tot parell de coalicions $S, T \subseteq N$ que siguin disjuntes ($S \cap T = \emptyset$).

Cal remarcar el fet que tot joc additiu és superadditiu tot i que es tracta del cas extrem en què en tota desigualtat és una igualtat. La idea al darrere del concepte de superadditivitat és que quan més grans siguin les coalicions més beneficiosa és la cooperació.

**Proposició 1.23.** *Sigui $u$ un joc superadditiu. Aleshores $\Phi_i[u] \geq u(i)$ per a cada jugador $i \in N$.*

Demostració. Sabem que, per superadditivitat,

$$u(S) \geq u(i) + u(S\backslash\{i\}).$$

Per tant,

$$-u(S\backslash\{i\}) \geq -u(S) + u(i).$$

Si ara substituïm l'expressió a la fórmula del valor de Shapley obtenim

$$\Phi_i[u] = \sum_{S\subseteq N: i\in S} \gamma_n(s)[u(S) - u(S\backslash\{i\})] \geq \sum_{S\subseteq N: i\in S} \gamma_n(s)u(i) = u(i).$$

□

Anem ara a veure resultats que tenen a veure amb l'addició o eliminació de jugadors en un joc cooperatiu.

**Definició 1.24.** (Restricció i extensió nul·la d'un joc.) Sigui $u$ un joc sobre un conjunt de jugadors $N$.

(a) Sigui $P \subset N$ una part del conjunt de jugadors. Anomenem **restricció de** $u$ **a** $P$ al joc $u_P$ definit per

$$u_P(S) = u(S) \text{ per a tot } S \subseteq P.$$

(b) Sigui ara $M \supset N$. Anomenem **extensió nul·la de** $u$ **a** $M$ al joc $u^M$ definit per

$$u^M(T) = u(T \cap N) \text{ per a tot } T \subseteq M.$$

**Remarca 1.25.** En el joc $u$ en $P$ generat per la restricció sobre $N$ els jugadors no només no formen coalicions amb els jugadors de $N\backslash P$ sinó que tampoc tenen valor les seves contribucions marginals a coalicions formades per jugadors de $N\backslash P$.

**Remarca 1.26.** És fàcil veure que $u^M(S) = u(S)$ per a qualsevol coalició $S \subseteq N$, de manera que la restricció al conjunt inicial de jugadors de l'extensió nul·la d'un joc coincideix amb el joc inicial. És a dir, $(u^M)_N = u$.

Aquesta última remarca ens porta al següent resultat.

**Proposició 1.27.** *Si $u^M$ és l'extensió nul·la d'un joc $u$ de $N$ a $M$, aleshores*

$$\Phi_i[u] = \Phi_i[u^M] \text{ per a cada } i \in N.$$

Demostració. N'hi ha prou amb demostrar que la inclusió d'un jugador nul addicional a un joc no afecta al valor de Shapley dels demés jugadors. Sigui, doncs, $M = N \cup \{n+1\}$. Anem ara a calcular el valor de Shapley d'un jugador $i \in N$. Aleshores

$$\Phi_i[u^M] = \sum_{T\subseteq M: i\in T} \gamma_m(t)[u^M(T) - u^M(T\backslash\{i\})],$$

essent $m = |M| = n+1$ i $t = |T|$ la mida de la coalició variable $T$. Aquesta coalició pot ser de dos tipus: (1) $T = S \subseteq N$; (2) $T = S \cup \{n+1\}$ amb $S \subseteq N$. Separem ara el sumatori en els dos tipus de coalició. Tenint en compte, a més, que $n+1$ és un jugador nul de l'extensió nul·la $u^M$ en resulta

$$\Phi_i[u^M] = \sum_{S\subseteq N: i\in S} \gamma_m(s)[u^M(S) - u^M(S\backslash\{i\})] + \sum_{S\subseteq N: i\in S} \gamma_m(s+1)[u^M(S) - u^M(S\backslash\{i\})] =$$

$$= \sum_{S\subseteq N: i\in S} [\gamma_m(s)+\gamma_m(s+1)][u^M(S)-u^M(S\backslash\{i\})] = \sum_{S\subseteq N: i\in S} \gamma_n(s)[u^M(S)-u^M(S\backslash\{i\})] = \Phi_i[u]$$

La penúltima igualtat és deguda a:

$$\gamma_m(s)+\gamma_m(s+1) = \frac{(s-1)!(m-s)!}{m!} + \frac{(s)!(m-s-1)!}{m!} =$$
$$= \frac{(s-1)!(m-s-1)!(m-s+s}{m!} = \frac{(s-1)!(m-s-1)!}{(m-1)!}.$$

I ara, com $m = n+1$,

$$\frac{(s-1)!(m-s-1)!}{(m-1)!} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{(n)!} = \gamma_n(s).$$

□

**Remarca 1.28.** El resultat obtingut a la proposició 1.27 ens diu que a l'hora de calcula els valors de Shapley podem abans eliminar els jugadors nuls del joc. Això pot ser útil per càlculs de pagaments de Shapley amb $n$ molt gran, ja que el cost computacional augmenta exponencialment. (Deng, 1994.)

De la fórmula explícita del valor de Shapley es dedueix immediatament que aquest concepte de solució és una transformació lineal de $G_N$ a $\mathbb{R}^n$, és a dir, satisfà les propietats de conservació d'operacions:

(1) Additivitat: $\Phi[u+v] = \Phi[u] + \Phi[v]$ (de fet, aquesta és la quarta propietat que caracteritza el valor).
(2) Homogenietat: $\Phi[\alpha u] = \alpha\Phi[u]$.

Anem a veure ara un esbós de la demostració d'existència i unicitat del valor de Shapley com a solució, la qual com hem dit no hem inclòs al treball.

**Esbós de la demostració**

Existència: l'expressió del valor de Shapley satisfà els quatre axiomes enunciats en el Teorema 1.14.

Unicitat: de les propietats d'eficiència, jugador nul i jugadors equivalents es dedueix que l'actuació del valor de Shapley sobre un joc d'unanimitat arbitrari $u_S$ ve donada per

$$\Phi_i[u_S] = \begin{cases} 1/s & \text{si} \quad i\in S, \\ 0 & \text{si} \quad i\notin S, \end{cases}$$

essent $s = |S|$ la mida de la coalició $S$. Aleshores, donat qualsevol joc $u$, escrit com a combinació lineal dels jocs d'unanimitat

$$u = \sum_{\emptyset\neq S\subseteq N} c_S(u)u_S.$$

L'aplicació d'additivitat dóna lloc a:

$$\Phi_i[u] = \sum_{S\subseteq N: i\in S} c_S(u)/s$$

per a cada jugador $i\in N$.

Per a la demostració completa queda pendent veure que aquesta darrera expressió coincideix amb la donada en el Teorema 1.14 i que els quatre axiomes donats són imprescindibles.

# Capítol 2
# Jocs simples i de majoria ponderada

## 1. Jocs simples

Aquest capítol és el bloc central del projecte i es centra en la branca principal dels jocs simples, anomenats de majoria ponderada, i tota la teoria matemàtica que se'n desprèn. Però abans d'entrar de ple en aquest tipus de jocs cal definir el concepte de joc simple i és el que farem en aquesta breu secció inicial.

**Definició 2.1.** Sigui $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunt de jugadors. Es diu que un joc cooperatiu $u$ en $N$ és **un joc simple** si satisfà les següents condicions:

1. $u(S) = 1$ o $0$ per a tota coalició $S \subseteq N$. 2. Monotonia: si $S \subset T$ aleshores $u(S) \leq u(T)$.

**Remarca 2.2.** Durant tot el projecte a partir d'aqui tractarem amb jocs simples. A la pràctica es pot imaginar sempre un joc simple com una votació en la qual els jugadors només poden votar si o no. Per això es parlarà indistintament en les pàgines que venen de jugadors o votants i de jocs simples o sistemes de votació simple.

Les coalicions $S$ tals que $u(S) = 1$ s'anomenen coalicions guanyadores i aquelles amb $u(S) = 0$ perdedores. S'acostuma a designar la col·lecció de coalicions guanyadores amb $W$ (de l'anglès *Winning*). Per altra banda, ens adonem que n'hi ha prou a prendre una col·lecció de subconjunts $W$ que compleixin la propietat de monotonia per tenir el joc ben definit.

**Definició 2.3.** Sigui $u$ un joc simple de $N$. Sigui $W$ la col·lecció de coalicions guanyadores de $u$. Aleshores, anomenem **coalicions guanyadores minimals** al subconjunt $W^m \subseteq W$ els elements $S$ del qual compleixen que $S \in W$ però $S \backslash \{i\} \notin W$ per a tot $i \in S$.

Les coalicions guanyadores minimals tenen una propietat que les caracteritza entre les guanyadores i és la propietat d'*exclusió mútua*: cap coalició guanyadora minimal conté estrictament a l'altre. És a dir,

$$S, T \in W^m \Rightarrow S \not\subset T \text{ i } T \not\subset S.$$

Així doncs, tan sols ens cal $W^m$ per determinar el joc. És a dir, per definir un joc simple en un conjunt de jugadors $N$, n'hi ha prou en presentar una col·lecció $W^m$ de subconjunts de $N$ que tinguin la propietat d'exclusió mútua.

**Exemple 2.4.** (El consorci) Imaginem un consorci format per quatre empreses, de les quals dues d'elles tenen un volum de facturació semblant i superior a les altres dues que també són semblants entre elles. La junta directiva del consorci està formada pels presidents de les quatre empreses, d'ara en endavant, $1, 2, 3$ i $4$.

La presa decisions del consorci s'estructura de la següent manera. Per prendre una decisió n'hi ha prou amb l'aprovació de 1 i 2 (les dues empreses grans). o bé amb l'aprovació d'una empresa gran i les dues minoritàries (3 i 4). Així doncs, amb els conceptes vistos fins ara podem trobar els conjunts

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

$$W = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}.$$

És fàcil veure que els elements de $W^m$ compleixen la propietat d'exclusió mútua. Si ara definim $u(S)$ sobre el conjunt de jugadors $N = \{1,2,3,4\}$ de manera que

$$u(1,2) = u(1,2,3) = u(1,2,4) = u(1,3,4) = u(2,3,4) = u(1,2,3,4) = 1$$

i $u(S) = 0$ per qualsevol altra coalició $S \subseteq N$.

En aquest capítol tractarem situacions en què un grup d'individus o entitats hauran de posicionar-se en una votació per aprovar o rebutjar una certa proposta. És a dir, cada jugador té només dues vies d'acció. Veurem que, tot i així, es poden arribar a donar situacions d'una complexitat important.

**Exemple 2.5.** Comencem amb el cas més senzill d'un joc de majoria. Suposem que tenim un comitè format per $n$ persones encarregat de prendre decisions. A cada persona se li assigna un vot i per aprovar qualsevol proposta es demana que aquesta rebi, com a mínim, una quantitat $q$ de vots. Normalment, $q \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ per tal que el joc sigui superadditiu, és a dir, sense coalicions guanyadores disjuntes. El joc simple que reflexa aquest mecanisme de presa de decisions queda definit per

$$W = \{S \subseteq N : |S| \geq q\},$$

on $|S|$ és el nombre d'elements de la coalició $S$. Una forma d'escriure el joc $u$ és

$$u \equiv [q; 1, 1, \ldots, 1].$$

Com a remarca, cal dir que si $q$ és el mínim enter superior a $n/2$, es diu que tenim un joc de **majoria absoluta**. Per altra banda, si $q = n$, es diu que $u$ és un joc d'**unanimitat**.

Tot i que aquest model pot semblar el més just, a la realitat es produeixen associacions de caràcter polític, econòmic o social que cohesionen amb una determinada força i que altera la situació de forma notable. Per exemple, una societat anònima és regida en funció del percentatge d'accions de cada soci. Per tant, hem de construir un model molt més genèric que l'exemple anterior per interpretar millor la forma d'operar de la majoria de mecanismes de presa de decisions per votació. Però abans, definim dos conceptes que donen nom a jugadors especials que a vegades apareixen als jocs simples.

**Definició 2.6.** Sigui $u$ un joc simple definit en un conjunt de jugadors $N$.

(a) Un jugador $i \in N$ té vet en el joc $u$ si pertany a totes les coalicions guanyadores de $u$.
(b) Un jugador $i \in N$ és un dictador en el joc $u$ si $W^m = \{\{i\}\}$.

**Remarca 2.7.** Ambdós conceptes de la definició 2.6 són bastant versemblants a primer cop d'ull. La gran diferència entre un jugador que té vet i un dictador radica en el fet que un jugador amb vet pot aconseguir que es rebutgi una determinada proposta si no hi està d'acord però en canvi no pot aprovar-la per si sol.

## 2. Jocs de majoria ponderada

Comencem amb la definició troncal de la secció.

**Definició 2.8.** Sigui $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunt de jugadors. Un joc simple és de **majoria ponderada** si existeixen uns pesos $w_i \geq 0$ i una quota $q > 0$ tal que

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i \geq q \iff S \in W.$$

$[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$ és una representació del joc simple $u$.

**Exemple 2.9.** Tornem a l'exemple del consorci per veure si és possible presentar el joc com un de majoria ponderada. N'hi ha prou amb prendre

$$u \equiv [4; 2, 2, 1, 1].$$

No és difícil adonar-se que les coalicions guanyadores minimals són

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\},$$

les mateixes que havíem obtingut a l'exemple 2.5.

**Remarca 2.10.** Cal tenir en compte que de representacions d'un joc simple n'hi ha infinites. Qualsevol múltiple de la solució és valid també. És a dir, si $u \equiv [q; w_1, \ldots, w_n]$ també podem expressar $u \equiv [t \cdot q; w_1 \cdot t, \ldots, w_n \cdot t]$.

**Remarca 2.11.** Els pesos i la quota sempre es poden prendre com a naturals. A més, es pot donar pes 0 a un jugador nul i el mateix pes a jugadors equivalents.

**Remarca 2.12.** De l'última remarca s'extreu una idea molt interessant que és la que motivarà el capítol final del projecte: dues empreses tenen diferent pes en una certa junta directiva però a la pràctica tenen el mateix poder a l'hora de prendre decisions. Aquest poder és el que intentarem quantificar al capítol 3.

Tot això ens porta a la pregunta de si tots els jocs simples es poden expressar en forma de joc de majoria ponderada. La resposta ens la dona la següent proposició.

**Proposició 2.13.** *Sigui $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunt de jugadors amb $n \geq 4$. No tots els jocs simples $u$ en un conjunt $N$ es poden representar en forma de joc de majoria ponderada.*

Demostració. Per veure-ho n'hi ha prou amb crear un joc i demostrar que no es pot expressar en forma de joc de majoria ponderada. Fixem $n = 4$ i prenem un joc $u$ definit per les seves coalicions guanyadores minimals.

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

Aquesta col·lecció defineix un joc simple $u$ perquè compleix la condició d'exclusió mútua. Ara anem a veure que no és possible donar-li representació de joc de majoria ponderada per reducció a l'absurd.

Suposem que existeix una representació $u \equiv [q; w_1, w_2, w_3, w_4]$. Donat que les coalicions $\{1, 4\}$ i $\{2, 3\}$ són perdedores i {1,2},{3,4} són guanyadores obtenim que els pesos han de satisfer les següents condicions:

$$w_1 + w_4 < q \leq w_3 + w_4 \quad \text{i} \quad w_2 + w_3 < q \leq w_1 + w_2.$$

Simplificant ara les expressions arribem a la contradicció:

$$w_1 < w_3 \quad \text{i} \quad w_1 > w_3.$$

□

Veiem ara dos exemples que ens ajudaran a entendre millor els conceptes de la definició 2.6

**Exemple 2.14.** Estructura del Congrés dels Diputats (o Cambra baixa de les Corts generals). Durant la legislatura $2011 - 2015$, després de les eleccions celebrades el 20 de novembre de 2011, l'estructura del Congrés dels Diputats, amb disciplina de vot dins de cada partit, quedava representada pel joc de majoria ponderada següent, que indica la distribució dels 350 escons entre els partits que obtingueren representació (176 és la quota que defineix la majoria absoluta per la presa de decisions ordinària):

$$u \equiv [176; 186, 110, 16, 11, 7, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 1].$$

El partit que va obtenir 186 diputats fou el Partit Popular (el jugador 1). És fàcil veure que $W^m = \{\{1\}\}$ i per tant el jugador 1 és un dictador en el sentit de la definició anterior.

**Exemple 2.15.** Estructura del Congrés dels Diputats (o Cambra baixa de les Corts generals) II. Plantegem ara el mateix exemple 2.14 amb una diferència crucial. Els partits sotmeten ara a votació una reforma de la Constitució, la qual requereix per ser aprovada, en àmbit local, el vot a favor de tres cinquenes parts de la cambra. Això vol dir que la nova quota $q$ és 210. Obtenint així el joc

$$u \equiv [210; 186, 110, 16, 11, 7, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 1].$$

Es pot veure que en aquest cas el jugador 1 (Partit Popular) no té prou representació per promulgar la reforma per si sol. No és difícil veure que totes les coalicions guanyadores minimals han de contindre forçosament al Partit Popular ja que

$$\sum_{i=2}^{n} w_i = 164 < 210.$$

Per tant el jugador 1 té vet en el sentit de la definició anterior.

Abans de continuar desenvolupant la teoria dels sistemes de votació expliquem un exemple troncal amb el qual ens ajudarem per explicar molts dels conceptes que seguiran.

**Exemple 2.16. Sistema federal dels Estats Units d'Amèrica (EUA)**

Per aprovar una proposta en aquest sistema de votació hi ha 537 votants. D'aquests, 435 són membres de la Cambra de Representants, 100 formen el Senat i finalment tenim el president i el vicepresident. El vicepresident juga un paper de desempat en el Senat mentre que el president posseeix un vet que pot ser revocat per dues terceres parts de la Cambra i dues terceres parts del Senat. Així doncs, perquè una proposta sigui aprovada cal el suport de:

- 218 representants o més, 51 o més senadors (amb o sense el vicepresident) i el president.
- 218 representants o més, 50 senadors, el vicepresident i el president.
- 290 representants o més i 67 o més senadors (amb o sense el vicepresident i president).

Aquest sistema de votació, com veurem més endavant, no es pot representar com a joc de majoria ponderada i resulta bastant interessant per exemplificar més propietats que encara estan per explicar.

# 3. Robustesa per intercanvis un-a-un

En aquest apartat definirem un concepte combinatori que ajuda a caracteritzar quan un sistema de votació és un joc de majoria ponderada. Cal dir que aquesta no és l'única manera d'afrontar aquest problema. L'altre mètode alternatiu consisteix a estudiar la consistència de sistemes de desigualtats, que es pot reduir a problemes de programació lineal, sovint amb un nombre de desigualtats molt elevat. En aquest projecte, però, enfoquem el problema amb combinatòria com veurem a continuació.

**Definició 2.17.** Sigui $u$ un joc simple definit en un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diem que $u$ és robust per intercanvis un-a-un si per a qualsevol intercanvi de jugadors entre dues coalicions guanyadores $X$ i $Y$ fa romandre almenys una d'aquestes coalicions guanyadora. Per tant, un dels jugadors ha de pertànyer a $X$ però no a $Y$ i viceversa.

Expressat més formalment, sigui $u$ joc simple definit en $N$. Siguin $X, Y \in W$ i siguin $x \in X$ i $y \in Y$

$$u \text{ és robust per intercanvis un-a-un } \Rightarrow (X \cup \{y\}) \backslash \{x\} \in W \text{ o } (Y \cup \{x\}) \backslash \{y\} \in W,$$

per a tot $x, y \in N$ i per tot $X, Y \subseteq N$ que compleixin les hipòtesis proposades.

**Proposició 2.18.** *Sigui $u$ un joc simple definit en un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si $u$ és un joc de majoria ponderada, aleshores $u$ és robust per intercanvis.*

Demostració. Imaginem que tenim un joc de majoria ponderada $u \equiv [q, w_1, w_2, \ldots, w_n]$. Siguin $X$ i $Y$ dues coalicions guanyadores que compleixen que almenys un jugador $i$ pertany a $X$ i no a $Y$ i un jugador $j$ pertany a $Y$ i no a $X$. Suposem ara que intercanviem els jugadors $i$ i $j$, obtenint les coalicions $X'$ i $Y'$. Ara el pes de la coalició $X'$ és el pes de $X - w_i + w_j$ mentre que el pes de $Y'$ és el pes de $Y - w_j + w_i$. Sigui $w_{ij} = w_i - w_j$ podem expressar ara el pes de $X'$ com $X - w_{ij}$ i $Y'$ com $Y + w_{ij}$. Aleshores, donat que tant el pes de $X$ com el pes de $Y$ ja eren superiors a la quota $q$, si $w_{ij} > 0$ tenim $Y' \in W$, i si $w_{ij} < 0$ tenim $X' \in W$. □

**Corol·lari 2.19.** *El sistema federal dels EUA (explicat al exemple 2.16) no es pot expressar com a joc de votació de majoria ponderada.*

Demostració. N'hi ha prou amb veure que el sistema federal dels EUA no és robust per intercanvis un-a-un i aplicar la proposició 2.18.

Primer numerem els 100 senadors i els 350 representants per ordre alfabètic. Sigui ara $X \in W$ una coalició formada pel president, els 51 primers senadors i els 218 primers representants. Sigui $Y \in W$ format pel president, els 51 últims senadors i els 218 últims representants. Sigui ara $x$ el primer dels senadors i $y$ l'últim dels representants. És fàcil veure que $x$ pertany a $X$ però no a $Y$ i que $y$ pertany a $Y$ però no a $X$. Si ara intercanviem $x$ per $y$ obtenim $X'$ que té 50 senadors i per tant és una coalició perdedora i $Y'$ que té 217 representants i per tant és una coalició perdedora.

Per tant el sistema federal dels EUA no és robust per intercanvis un-a-un i per tant no es pot representar com a joc de majoria ponderada. □

Fins ara hem vist que joc de majoria ponderada implica robustesa per intercanvis un-a-un. Això ens planteja la pregunta de si la implicació és doble. La resposta és negativa. Per demostrar-ho ens ajudarem amb un contra-exemple.

**Exemple 2.20.** Des de 1982, una esmena a la Constitució del Canadà esdevé llei sempre i quant sigui aprovada per set o més de les deu províncies canadenques amb la condició que entre aquestes províncies s'englobi com a mínim al 50% de la població del país. Així doncs, les províncies de Canadà, acompanyades del seu percentatge de població:

- Illa del Princep Eduard (0%)
- Terranova (2%)
- Nou Brunswick (2%)
- Nova Escòcia (3%)
- Saskatchewan (3%)
- Manitoba (4%)
- Alberta (11%)
- Colúmbia Britànica (13%)
- Quebec (23%)

- Ontario (39%)

**Proposició 2.21.** *El procediment per esmenar la Constitució canadenca és robust per intercanvis un-a-un.*

Demostració. Suposem que $X$ i $Y$ són coalicions guanyadores en el sistema per esmenar la Constitució canadenca. En aquest cas els votants són les províncies. Sigui doncs $x$ una província de $X$ però no a $Y$ i que $y$ és una província de $Y$ però no de $X$. Per veure que el procediment és robust per intercanvis un-a-un hem de veure que les coalicions resultants $X'$ i $Y'$ d'intercanviar $x$ per $y$ almenys una d'elles és guanyadora. Així doncs cal veure que $X'$ o $Y'$ satisfà les dues següents condicions:

(1) Conté almenys 7 províncies.
(2) Les províncies incloses sumen almenys un 50% de la població de Canadà.

Es pot veure que tant $X'$ com $Y'$ satisfan la primera condició ja que ambdues partien amb 7 o més províncies així que al perdre'n una i guanyar-ne el nombre de votants roman constant. La segona condició es demostra de forma semblant a com hem demostrat que un sistema de votació ponderada és robust per intercanvis un-a-un, és a dir, si $x$ té més població que $y$, aleshores $Y'$ és una coalició guanyadora ja que té més població que $Y$ que ja arribava per hipòtesi al 50%. El raonament és anàleg per $y$ amb més població que $x$. $\square$

Els jocs simples que són robusts per intercanvis un-a-un s'anomenen **complets** i han estat estudiats molt a fons. (Carreras i Freixas, 1994.) Per a caracteritzar els jocs de majoria ponderada dins dels simples cal anar més enllà.

**Definició 2.22.** Sigui $u$ un joc simple definit en un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diem que $u$ és robust per intercanvis entre coalicions si, al intercanviar jugadors d'entre vàries coalicions guanyadores, almenys una d'aquestes coalicions roman guanyadora.

Cal explicar a que ens referim en aquest cas per intercanvi.

**Definició 2.23.** Sigui $(N, u)$ un joc simple. Una **transformació mitjanançant intercanvis** és una col·lecció de coalicions $< X_1, \ldots, X_k, X'_1, \ldots, X'_k >$ de longitud parell satisfent la condició:

$$|\{i : a \in X_i\}| = |\{i : a \in X'_i\}|$$

per a tot $a \in N$.

**Remarca 2.24.** Hi ha dues grans diferències entre robustesa per intercanvis un-a-un i robustesa per intercanvis. Primer, els canvis a la robustesa per intercanvis no estan restringits a intercanvis d'un-per-un. Per altra banda, la robustesa per intercanvis pot involucrar més de dues coalicions i més de dos jugadors.

**Proposició 2.25.** *Sigui $u$ un joc simple definit en un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si $u$ es pot expressar com un joc de majoria ponderada aleshores és robust per intercanvis.*

Demostració. Una sèrie d'intercanvis entre vàries coalicions guanyadores fa romandre el nombre de coalicions a les quals un cert jugador pertany constant. Per tant, els pesos totals de totes les coalicions sumats també roman constant. Encara més, donat que el nombre de coalicions també roman constant, la mitjana de pes de cada una de les coalicions roman constant també.

Per tant, si comencem amb vàries coalicions guanyadores en un sistema de votació ponderat, aleshores totes les coalicions sumen un pes superior o igual a la quota. Per tant, la mitjana de pesos de totes les coalicions també iguala o supera la quota. Per tant, com la mitjana roman constant després dels intercanvis, com a mínim una de les coalicions seguirà igualant o superant la quota. $\square$

**Proposició 2.26.** *El procediment d'esmena de la Constitució de Canadà (de l'exemple 2.20) no es pot expressar com un sistema de votació ponderada.*

Demostració. Gràcies a la proposició 2.25, si som capaços de veure que el procediment d'esmena de la Constitució Canadenca no és robust per intercanvis, haurem demostrat la proposició. Així doncs, declarem les coalicions guanyadores $X$ i $Y$ com segueix:

**X:** Illa del Príncep Eduard, Terranova, Manitoba, Saskatchewan, Alberta, Colúmbia Britànica i Quebec, que sumen un 56% de la població de Canadà.

**Y:** Nou Brunswick, Nova Escòcia, Manitoba, Saskatchewan, Alberta, Colúmbia Britànica i Ontario, que sumen un 75% de la població de Canadà.

Sigui ara $X'$ i $Y'$ obtingudes al intercanviar els votants d'$X$ Illa de Príncep Eduard i Terranova per Ontario de la coalició $Y$. D'aquesta manera, $X'$ és una coalició perdedora perquè només acumula 6 províncies a favor i $Y'$ és una coalició perdedora perquè no arriba al 50% de població. Per tant, el sistema d'esmenes a la Constitució canadenca no és robust per intercanvis. Aleshores, per la proposició 2.25, no es pot expressar com un sistema de votació ponderada. □

Per tant, en aquesta secció, hem vist que si un sistema de votació es pot expressar com a joc de majoria ponderada és robust per intercanvis un-a-un però en canvi la implicació contrària no era certa.

També hem vist que si un sistema de votació es pot expressar com a joc de majoria ponderada aleshores també és robust per intercanvis. De fet, en aquest cas la implicació contraria si que és certa però la demostració no és inclosa en aquest projecte ja que sobrepassa els objectius del mateix. (Taylor i Zwicker, 1999.)

En l'últim cas de robustesa, tractarem amb un cas de sistema que és robust per intercanvis entre dues coalicions però que en canvi no ho és entre tres. Un cas així és francament difícil de trobar al món real i de fet es tracta d'un sistema artificialment dissenyat.

Així doncs, diem que un joc simple de votació és 2-robust per intercanvis si intercanvis arbitraris de jugadors entre dues coalicions guanyadores deixen sempre almenys una coalició guanyadora.

Teorema 2.27. *Existeix un joc simple de votació que és 2-robust per intercanvis però que no és 3-robust per intercanvis.*

Demostració. El nostre punt de partida és el següent quadrat màgic (que rep aquest nom ja que totes les fileres i columnes i diagonals principals sumen el mateix, 15).

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{matrix}$$

Un cop aquí, construïm el nostre sistema de votació simple de la següent manera: els jugadors tenen cada un, un nombre assignat de l'1 al 9. Qualsevol coalició amb quatre o més jugadors és guanyadora i qualsevol coalició amb dos o menys jugadors és perdedora. Per altra banda, per coalicions amb exactament tres jugadors, aquelles amb una suma dels nombres del votant superior a 15 seran guanyadores i aquelles amb una suma inferior a 15 seran perdedores. Ara, les úniques coalicions de tres jugadors que sumen 15 són les fileres, columnes i diagonals del quadrat màgic. Declarem que les coalicions formades pels jugadors d'una mateixa filera del quadrat són guanyadores i les altres perdedores.

El nostre objectiu és demostrar que aquest joc és 2-robust per intercanvis però no robust per intercanvis.

Per veure que és 2-robust per intercanvis suposem que tenim dues coalicions guanyadores $X$ i $Y$ i un canvi arbitrari entre elles donant $X'$ i $Y'$. Mostrem que una d'elles és encara una coalició guanyadora. Considerem tres casos:

**1. $X$ o $Y$ té quatre o més jugadors.**

Sense pèrdua de generalitat, suposem que és $X$. Donat que $Y$ és guanyadora, aquesta té almenys tres jugadors. Un cop efectuat el canvi el nombre de jugadors roman constant i per tant $X'$ o $Y'$ té almenys quatre jugadors i per tant és guanyadora.

**2. $X$ o $Y$ suma estrictament més que 15 i ambdues coalicions tenen exactament tres jugadors.**

Sense pèrdua de generalitat, suposem que $X$ té suma major que 15. Donat que $Y$ és guanyadora, té una suma de com a mínim 15. Per tant la suma conjunta de $X'$ i $Y'$ és com a mínim 31. Per tant, $X'$ o $Y'$ tenen suma 16 o superior i per tant son coalicions guanyadores.

**3. $X$ i $Y$ tenen una suma d'exactament 15 i tenen tres jugadors cada una.**

Això implica que $X$ i $Y$ són fileres. Un cop efectuat l'intercanvi, si $X'$ o $Y'$ tenen menys de tres jugadors implica que l'altre té quatre o més jugadors i per tant és coalició guanyadora. Si $X'$ o $Y'$ suma 14 o menys implica que l'altre suma 16 o més i per tant és coalició guanyadora.

Per altra banda, si $X'$ i $Y'$ tenen exactament tres jugadors amb una suma de 15 però ambdues són coalicions perdedores, aleshores vol dir que tant $X'$ com $Y'$ són fileres o columnes del quadrat màgic. De totes maneres, això últim és impossible ja que un no pot convertir dues coalicions filera en dues coalicions columna o diagonal. Està clar que els canvis han de ser del mateix nombre de jugadors cada coalició ja que sinó una superaria els tres jugadors i passaria immediatament a ser guanyadora. Si el canvi és de tres jugadors per tres jugadors, $X' = Y$ que és guanyadora i $Y' = X$ que també és guanyadora. A més, si el canvi és un-per-un, no es pot arribar a la mateixa suma de 15 que en el punt de partida ja que les tres fileres tenen nombres diferents. Finalment, si el canvi és dos a dos tampoc es pot generar una columna o diagonal ja que les sumes d'elements dos a dos de la primera filera són $\{7, 11, 12\}$, de la segona $\{6, 10, 14\}$ i de la tercera $\{8, 9, 13\}$, per tant, per un raonament similar amb els canvis un-per-un, és impossible fer romandre constant la suma 15 de dues coalicions filera al efectuar un canvi dos a dos amb una altra filera.

Per tant, el sistema és 2-robust per intercanvis.

Ara cal veure que aquest sistema falla, en canvi, a l'hora de ser robust per un intercanvi de tres coalicions guanyadores. Definim, aleshores, les tres coalicions guanyadores filera:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{4, 3, 8\}, \\ F_2 &= \{9, 5, 1\}, \\ F_3 &= \{2, 7, 6\}. \end{aligned}$$

Ara efectuem el següent sistema d'intercanvis:

$$\begin{aligned} &3 \text{ de } F_1 \text{ a } F_2, \\ &8 \text{ de } F_1 \text{ a } F_3, \\ &1 \text{ de } F_2 \text{ a } F_3, \\ &9 \text{ de } F_2 \text{ a } F_1, \\ &2 \text{ de } F_3 \text{ a } F_1, \\ &7 \text{ de } F_3 \text{ a } F_2. \end{aligned}$$

Aquests canvis transformen

$$\begin{aligned} F_1 &\text{ en } \{4, 9, 2\}, \text{ que és la primera columna,} \\ F_2 &\text{ en } \{3, 5, 7\}, \text{ que és la segona columna,} \\ F_3 &\text{ en } \{8, 1, 6\}, \text{ que és la tercera columna.} \end{aligned}$$

Per tant, com les tres columnes són coalicions perdedores, el sistema no és robust per intercanvis.

□

**Remarca 2.28.** De la mateixa manera que hem estat capaços de generar un sistema 2-robust per intercanvis però no 3-robust per intercanvis, es poden generar exemples més complexes que siguin $(k-1)$-robusts per intercanvis però no $k$-robusts per intercanvis.

# 4. Anàlisi dimensional

Fins ara hem vist que hi havia sistemes de votació que es podien expressar en forma de votació ponderada i altres que no. La qüestió troncal d'aquesta secció és veure si es pot expressar qualsevol sistema de votació simple que no és expressable en forma de votació ponderada com a intersecció de sistemes que si són expressables d'aquesta manera.

Una de les motivacions per afrontar aquesta qüestió és que la gairebé totalitat dels sistemes de votació reals solen expressar-se com a intersecció d'un número molt reduït de jocs de majoria ponderada. De fet, la majoria s'expressa com a intersecció d'un o dos tot i que hi ha també exemples de dimensions superiors. (Freixas, 2004.)

**Proposició 2.29.** *Sigui $u$ un sistema de votació simple sobre el conjunt $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de jugadors i sigui $m$ el nombre de coalicions perdedores de $u$. Aleshores és possible trobar $m$ sistemes de votació ponderada sobre $N$ de forma que una coalició $X$ és guanyadora a $u$ si i només si $X$ és guanyadora als $m$ sistemes de votació ponderada.*

**Remarca 2.30.** Les coalicions guanyadores $W$ de $u$ de la proposició 2.29 són de la forma $W = W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_m$ amb $W_i$ conjunt de coalicions guanyadores del $i$-èssim sistema de votació ponderada de la proposició.

Demostració. Per cada coalició perdedora $P$ a $u$, construïm un sistema de votació ponderada sobre el conjunt de jugadors $N$ de la forma següent: Cada jugador $i$ de $P$ se li dona un pes $w_i$ de $-1$. A cada jugador $j$ que no pertany a $P$ se li assigna un pes $w_j$ de $+1$. Es declara la quota $q = -|L| + 1$, on $|L|$ és la mida de $L$.

Cal remarcar que en aquest sistema de votació ponderada $L$ és l'única coalició perdedora ja que té pes total $-|L|$ que és menor a la quota. Per altra banda, qualsevol altra coalició és guanyadora ja que totes tenen major quota que $L$.

D'aquí es dedueix que si una coalició és guanyadora a $u$, aleshores és guanyadora a cada un d'aquests sistemes de votació ponderada.

Per a la implicació contrària, si una coalició és guanyadora en cada un dels sistemes de votació ponderada, aleshores és guanyadora a $u$ (ja que si fos perdedora a $u$ li hauríem construït un sistema de votació ponderada a mida que la fes perdedora). Per tant, una coalició és guanyadora a $u \iff$ aquesta coalició és guanyadora a cada un dels $m$ sistemes de votació ponderada. □

Així doncs, hem trobat una manera constructiva de trobar un conjunt de sistemes de votació ponderada, la intersecció dels quals ens dongui el sistema de votació simple original. Malauradament aquest sistema és molt ineficient ja que sovint podrem trobar un sistema de votació simple com a intersecció de dos sistemes de votació ponderada. Veiem-ho en un exemple.

**Exemple 2.31.** (Continuació de l'exemple 2.20). El sistema d'esmenes de la Constitució de Canadà té milers de coalicions perdedores. Tot i així, es pot expressar com a intersecció de tan sols dos sistemes de votació ponderada. Ordenant les deu províncies per ordre de més a menys població:

**Sistema** $u_1$ **:** On les coalicions guanyadores són aquelles que tenen 7 o més jugadors. Aleshores podem expressar $u_1$ com:

$$u_1 \equiv [7; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

**Sistema** $u_2$ **:** On les coalicions guanyadores són aquelles que tenen el 50% de la població o més entre els jugadors. Aleshores podem expressar $u_2$ com:

$$u_2 \equiv [50; 39, 23, 13, 11, 4, 3, 3, 2, 2, 0].$$

Ara, el sistema d'esmenes de la Constitució de Canadà $u$ es pot expressar de manera que el conjunt de coalicions guanyadores $W = W_1 \cap W_2$ amb $W_1$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u_1$ i $W_2$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u_2$.

La noció que introduirem ara té a veure amb l'eficiència d'aquestes representacions com a interseccions de jocs de majoria ponderada.

**Definició 2.32.** Un sistema de votació simple **té dimensió** $k$ si i només si es pot expressar com intersecció d'exactament $k$ sistemes de votació ponderada però no es pot expressar com a intersecció de $k-1$ o menys sistemes de votació ponderada.

Hem vist, doncs, que el sistema de votació de l'exemple 2.20 és de dimensió 2. Hom podria preguntar-se ara quina és la dimensió del sistema federal dels EUA.

**Proposició 2.33.** *El sistema federal dels EUA (exemple 2.16) té dimensió* 2.

Demostració. De l'anterior secció sabem que aquest sistema no és de dimensió 1 ja que al no ser robust per intercanvis un-a-un no es pot expressar com a sistema de majoria ponderada. Així doncs, si som capaços de veure que es pot expressar com a intersecció de dos jocs, aleshores haurem demostrat que té dimensió 2. Expressem els jugadors del sistema de manera que el primer jugador és el president, el 2n el vicepresident, del 3r al 102è són senadors i del 103è al 537è membres de la cambra de representants.

N'hi ha prou amb veure que els següents sistemes compleixen les nostres demandes:

**Sistema** $u_1$ **:** On les coalicions guanyadores són aquelles que resulten guanyadores al senat, ja sigui amb o sense el president. Aleshores podem expressar $u_1$ com:

$$u_1 \equiv [67; 16.5, 0.5, 1, \underset{100}{\ldots}, 1, 0, \underset{435}{\ldots}, 0].$$

**Sistema** $u_2$ **:** On les coalicions guanyadores són aquelles que resulten guanyadores a la cambra de representants, ja sigui amb o sense el president. Aleshores podem expressar $u_2$ com:

$$u_2 \equiv [290; 72, 0, 0, \underset{100}{\ldots}, 0, 1, \underset{435}{\ldots}, 1].$$

Volem ara veure que una coalició $X$ és guanyadora al sistema federal dels EUA si i només si és guanyadora a $u_1$ i $u_2$ simultàniament. Suposem que $X$ és, de fet, una coalició guanyadora minimal, aleshores $X$ és un dels següents tres tipus de coalició:

(1) $X$ conté 218 representants, 51 senadors i el president.
(2) $X$ conté 218 representants, 50 senadors, el vicepresident i el president.
(3) $X$ conté 290 representants i 67 senadors.

Aquestes coalicions arriben a la quota dels dos sistemes construïts:

(1) arriba a quota 67.5 a $u_1$ i a quota 290 a $u_2$.

(2) arriba a quota 67 a $u_1$ i a quota 290 a $u_2$.
(3) arriba a quota 67 a $u_1$ i a quota 290 a $u_2$.

Per tant, $X \in W \Rightarrow X \in W_1$ i $X \in W_2$. Per veure la implicació contrària considerem els dos següents casos:

**1. $X$ conté el president**

Donat que $X$ és guanyadora a $u_1$, aleshores $X$ ha de tenir un pes a $u_1$ d'almenys 67. Com el president suma 16.5, entre els demés membres de $X$ han de sumar com a mínim 50.5 però donat que els membres de la cambra de representants tenen pes 0, per arribar a aquesta xifra ens calen o bé 50 senadors i el vicepresident o bé 51 senadors.

Si ara ens fixem en $u_2$, $X$ ha de sumar per ser guanyadora 290, dels quals 72 venen del president. De manera similar a com hem fet al senat, els 218 que falten han de ser aportats per 218 membres de la cambra de representants. Per tant, $X$ és guanyadora al sistema federal dels EUA.

**2. $X$ no conté el president**

El raonament és anàleg al del cas 1 però aquest cop tot el pes ha de ser aportat per membres del senat i la cambra respectivament. □

L'últim resultat fa referència a expressar un sistema de votació simple $k$-dimensional en forma de vector.

**Definició 2.34.** Un sistema de votació simple és **un sistema de votació ponderada per vectors** si per $n \in \mathbb{Z}_+$, existeix un vector $v$ de $\mathbb{R}^n$ on les seves components són les $n$ quotes dels $n$ sistemes de votació ponderada que caracteritzen un sistema de votació simple de dimensió $n$. Aleshores una coalició guanyadora és aquella la suma dels pesos de la qual supera la quota per cada component de $v$.

**Exemple 2.35.** (Continuació dels exemples 2.20 i 2.31) Sabem que el sistema d'esmena de la Constitució de Canadà és de dimensió 2. Podem ara expressar cada província com un vector de dues components on la primera component sigui la quota de $u_1$ de l'exemple 2.31 i la segona component sigui la quota de $u_2$. Per altra banda el vector quota en resulta de fer el mateix procediment.

- Illa del Princep Eduard $(1, 0)$
- Terranova $(1, 2)$
- Nou Brunswick $(1, 2)$
- Nova Escòcia $(1, 3)$
- Saskatchewan $(1, 3)$
- Manitoba $(1, 4)$
- Alberta $(1, 11)$
- Colúmbia Britànica $(1, 13)$
- Quebec $(1, 23)$
- Ontario $(1, 39)$

I, finalment, el vector quota és $(7, 50)$. Per tant una coalició $X = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_k\}\}$ és guanyadora sí i només si

$$\sum_{i=1}^{k} (w_{x_{i,1}}, w_{x_{i,2}}) \geq (q_1, q_2),$$

on $w_{x_{i,1}}$ és el pes de la primera component de l'element i-èssim de la coalició.

Així doncs, si per exemple formem la coalició amb Ontario, Quebec i Colúmbia Britànica obtenim:

$$(1, 39) + (1, 23) + (1, 13) = (3, 72) \ngeq (7, 50).$$

Per tant és una coalició perdedora.

TEOREMA 2.36. *Sigui $u$ un joc de votació simple de dimensió $k$. Aleshores $u$ és un sistema de votació ponderada per vectors de mida $n$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $u$ un sistema de votació simple sobre el conjunt $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de jugadors amb $W$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$. Aleshores, existeix $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $u$ és de dimensió $n$. Per tant, podem triar $n$ sistemes de votació ponderada $u_1, \ldots, u_n$ amb $W_i$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u_i$ de manera que per tota coalició $X$ de $N$ tenim que

$$X \in W \iff X \in W_1 \text{ i } \ldots \text{ i } X \in W_n \iff X \in W_1 \cap \ldots \cap W_n.$$

Sigui $w_i$ la funció de pesos associada a $u_i$ i $q_i$ la seva quota corresponent. Aleshores, si $X$ és una coalició:

$$X \in W_1 \cap \ldots \cap W_n \iff w_i(X) \geq q_i \quad \forall i \in N.$$

Aleshores sigui $x$ un jugador arbitrari, podem crear un vector de $n$ components amb els pesos corresponents a cada $u_i$.

$$w(x) = (w_1(x), \ldots, w_n(x)).$$

També podem combinar les quotes en el vector

$$q = (q_1, \ldots, q_n).$$

Ara cal veure que aquests vectors de pesos i quota funcionen en el sentit que una coalició és guanyadora a $u$ si i només si $w(x) \geq q$. Aleshores, sigui $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Aleshores,

$$w_i(X) = w_i(x_1) + \ldots + w_i(x_k) \quad \forall i \in N.$$

Així doncs, juntant-ho tot:

$$X \in W \iff X \in W_1 \cap \ldots \cap W_n \iff w_i(X) \geq q_i \quad \forall i \in N \iff$$

$$\iff w_i(x_1) + \ldots + w_i(x_k) \geq q_i \quad \forall i \in N \iff$$

$$\iff (w_1(x_1), \ldots, w_n(x_1)) + \ldots + (w_1(x_k), \ldots, w_n(x_k)) \iff$$

$$\iff w(x_1) + \ldots + w(x_k) \geq q \iff w(X) \geq q.$$

$\square$

Així doncs, com a conclusió d'aquest capítol, hem vist que no tots els sistemes de votació simples es poden expressar com a sistemes de votació ponderada. Els conceptes de robustesa per intercanvis un-a-un i robustesa per intercanvis ens han ajudat a caracteritzar aquest resultat, concretament, el concepte de robustesa per intercanvis és una condició necessària i suficient perquè un joc simple sigui de majoria ponderada.

Per altra banda, hem vist que aquelles sistemes de votació que no són expressables com a sistema de votació pondera si es poden expressar com a intersecció de més d'un sistemes de votació ponderada. Un resultat francament interessant.

# Capítol 3
# Poder polític

En aquesta secció introduirem el concepte d'índex de poder. Aquests índexs es fan servir en jocs simples per quantificar la capacitat dels jugadors per fer valer la seva voluntat a l'hora d'aprovar o no una determinada mesura.

A les dues primeres seccions analitzarem dos índexs de poder diferents. En veurem les diferències i l'aplicarem per trobar el poder del president dels Estats Units d'Amèrica en el seu sistema parlamentari. A la tercera secció d'aquest capítol estudiarem els conceptes de poder ordinal, és a dir quan és comparable el poder entre dos jugadors en un determinat joc simple. Finalment a l'última secció, usarem els codis implementats que calculen l'índex de poder de Shapley simple i els índexs de poder Shapley i Banzhaf en casos d'existir incompatibilitats entre jugadors. Aquest últim detall resulta de gran utilitat a escenaris polítics complexes. Aplicarem els casos al Parlament de Catalunya i al Congrés dels diputats de les legislatures el·lectes al 2015.

Així doncs, quines propietats cal que tingui un índex de poder per que el considerem prou bo? Doncs bé, els índex de poder són una otorga que assigna a cada jugador una certa mesura de poder $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que, de forma general, segueix les dues següents propietats:

(1) $\alpha_i \geq 0$ per a tot $i \in N$.
(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Essent $N = \{1, \dots, n\}$ el nombre de jugadors.

**Remarca 3.1.** La condició (2), anomenada propietat d'eficència, és important únicament si es tracta de repartir quelcom tangible entre els jugadors. Si es tracta de mesurar la capacitat d'influència dels jugadors en el joc, aleshores el que és important és la comparació relativa dels índexs.

Traduint ara aquest resultat al conjunt dels jocs simples obtenim la següent definició.

**Definició 3.2.** Sigui $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunt de jugadors. Anomenem $S_N$ el conjunt de tots els jocs simples no nuls a $N$. Una **mesura de poder** a $N$ és una funció

$$\Phi : S_N \to [0, 1]^n,$$

que assigna a cada joc simple $u$ un vector de repartiment entre els jugadors

$$\Phi[u] = (\Phi_1[u], \Phi_2[u], \dots, \Phi_n[u])$$

de manera que $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i[u] = 1$.

Aquesta definició és bastant poc restrictiva així que existeixen moltes mesures de poder però no gaires que tinguin alguna mena de sentit. El primer que treballarem i que dona nom a aquesta secció és l'Índex de poder de Shapley-Shubik, proposat al 1954 i que en resulta d'aplicar els valors de Shapley a jocs simples com a mesura de poder.

# 1. Índex de poder de Shapley-Shubik

**Proposició 3.3.** *La restricció del valor de Shapley al conjunt dels jocs simples no nuls és una mesura de poder.*

Demostració. En primer lloc, el valor de Shapley està definit per qualsevol tipus de joc cooperatiu i, en particular, per tots els jocs simples no nuls. A més, per la proposició 1.21, sabem que gràcies a la propietat de monotonia dels jocs simples, tenim $\Phi_i[u]$ per a cada jugador $i \in N$ i cada joc simple $u$. Per últim, la propietat d'eficiència del valor i el fet de que tractem amb jocs simples no nuls impliquen que es verifica $\Phi_i[u] = 1$. □

A aquesta mesura de poder se la coneix com índex de poder de Shapley-Shubik (SSI). Per calcular les mesures de poder n'hi ha prou, doncs, definint les coalicions guanyadores i aplicant el teorema 1.14. De totes maneres, hi ha una manera bastant més senzilla de trobar aquestes mesures.

Sigui $u$ un joc simple no nul sobre el conjunt de jugadors $N$. Sigui $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ una permutació qualsevol de $N$. Si imaginem que es va formant una coalició a partir de $\sigma_1$, afegint jugadors un per un en l'ordre marcat per la permutació sempre arribarem a trobar un jugador $\sigma_k$ que, al integrar-se, converteix la coalició que formen els elements precedents de la permutació en guanyadora. És a dir, existeix un únic jugador $\sigma_k$ de manera que $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}\} \notin W; \quad \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \in W$. Diem que $\sigma_k$ és el pivot de la permutació $\sigma$.

Comptem el nombre de vegades que un jugador $i \in N$ és pivot en el total de les $n!$ permutacions possibles i normalitzem el valor dividint per $n!$. Sigui ara $\Psi_i[u]$ aquest valor.

Teorema 3.4. *Per cada joc simple no nul $u$ sobre el conjunt de jugadors $N$ i cada jugador $i \in N$ es verifica la igualtat*

$$\Phi_i[u] = \Psi_i[u].$$

Demostració. La fórmula de Shapley recordem que valia

$$\Phi_i[u] = \sum_{S \subseteq N : i \in S} \gamma_n(s)[u(S) - u(S \backslash \{i\})].$$

Ara bé, la contribució marginal entre claudàtors val només 1 només si $S \in W$ però $S \backslash \{i\} \notin W$ i val 0 en tots els demés casos. Així doncs, obtenim

$$\Phi_i[u] = \sum_{S \subseteq W : i \in S, S \backslash \{i\} \notin W} \gamma_n(s).$$

Observem que cada coalició $S$ tal que $i \in S, S \in W$ i $S \backslash \{i\} \notin W$ defineix totes les permutacions en les que $i$ és pivot. Concretament, les $(s-1)!(n-1)!$ permutacions que podem escriure col·locant a les $s-1$ primeres posicions els $s-1$ elements de $S \backslash \{i\}$ en qualsevol ordre, el jugador $i$ a la posició $s$ i els $n-s$ elements de $N \backslash S$ en les $n-s$ posicions finals. Per tant,

$$\Phi_i[u] \geq \Psi_i[u].$$

Per altra banda, $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i[u] = 1 = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i[u]$ de manera que la desigualtat anterior ha de reduir-se sempre a la igualtat per tot $i \in N$.

□

Aquest teorema es pot interpretar probabilísticament de la següent manera: en un joc simple no nul, l'índex de poder de Shapley-Shubik és la probabilitat de ser pivot en una permutació si suposem totes les permutacions equiprobables.

**Exemple 3.5.** Sigui $u$ un joc simple definit sobre $N = \{1,2,3\}$ de manera que es pot expressar com a sistema de votació ponderada de la forma següent:

$$u \equiv [51; 50, 49, 1]$$

Siguin $p_1, p_2$ i $p_3$ els jugadors. Anem ara a calcular el seu índex de poder de Shapley per pivots. Les $3! = 6$ maneres d'ordenar les permutacions de $N$ són:

(1) $p_1 \quad p_2 \quad p_3$
(2) $p_1 \quad p_3 \quad p_2$
(3) $p_2 \quad p_1 \quad p_3$
(4) $p_2 \quad p_3 \quad p_1$
(5) $p_3 \quad p_1 \quad p_2$
(6) $p_3 \quad p_2 \quad p_1$

Aleshores, $p_1$ és pivot a (3), (4), (5) i (6). Per altra banda, $p_2$ és pivot només a (1) i finalment $p_3$ és pivot només a (2).

Això vol dir que $\Phi_1[u] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Per altra banda, $\Phi_2[u] = \Phi_3[u] = \frac{1}{6}$. Aquest resultat pot semblar curiós. El jugador $p_2$ té un pes 49 cops el del jugador $p_3$ i tot i així tenen el mateix índex de poder. Això és certament interessant, els índex de poder són monòtons però ni de bon tros segueixen una proporcionalitat amb el pes del jugador del joc.

**Exemple 3.6.** (Comunitat Econòmica Europea, 1958) Aquest exemple és francament curiós i deixa palès la importància que té tenir un mínim bagatge matemàtic a l'hora de negociar. Al 1958, el Tractat de Roma va establir l'existència d'un sistema de votació simple anomenat Comunitat Econòmica Europea. Els jugadors eren, acompanyats del nombre de vots per país, els següents:

- França (4)
- Alemanya (4)
- Itàlia (4)
- Bèlgica (2)
- Països Baixos (2)
- Luxemburg (1)

Per aprovar una determinada mesura calien un total de dotze vots dels disset possibles pel que el joc era de mesura ponderada de la forma

$$[12; 4, 4, 4, 2, 2, 1].$$

Anem ara a calcular el poder de Luxemburg pel mètode dels pivots. Això implica calcular totes les permutacions en les quals Luxemburg exerceix de pivot, o el que és el mateix, totes les maneres de sumar 11 vots entre els demés jugadors. Malauradament, donat que tots els jugadors tenen una quantitat de vots parella, resulta impossible arribar a la quantitat exacta d'11 vots pel que Luxemburg mai serà pivot. Això vol dir que l'índex de poder de Shapley-Shubik és exactament 0 per Luxemburg. Hom sap que aquest país no és una super-potència europea però donar-li 0 poder potser és abusiu!

**Exemple 3.7.** (Continuació de l'exemple 2.16) Anem ara a calcular el poder del president dels Estats Units d'Amèrica. Com veurem a continuació no són càlculs fàcils però es tracta d'un cas amb prou interès pel què els farragosos càlculs valen la pena.

Per trobar el poder del president cal trobar el nombre el nombre de permutacions en les quals exerceix de pivot i dividir-ho per les 537! permutacions possibles. Així doncs anem a descriure primer en quines situacions el president exerceix de pivot.

Per el president ser pivot es necessiten:

(1) Al president el precedeixen exactament 50 senadors, el vicepresident i entre 218 i 435 membres de la Cambra de Representants.
(2) Al president el precedeixen entre 51 i 66 senadors, el vicepresident i entre 218 i 435 membres de la Cambra de Representants.
(3) Al president el precedeixen exactament entre 55 i 66 senadors i entre 218 i 435 membres de la Cambra de Representants.
(4) Al president el precedeixen entre 67 i 100 senadors, el vicepresident i entre 218 i 290 membres de la Cambra de Representants.
(5) Al president el precedeixen exactament entre 67 i 100 senadors i entre 218 i 290 membres de la Cambra de Representants.

Anem ara a realitzar els càlculs combinatoris per esclarir quants casos favorables tenim.

(1): Ens cal triar a 50 d'entre 100 senadors, 1 vicepresident d'entre 1 vicepresident i 218 dels 435 representants. Acte seguit hem d'ordenar els $50+1+218$ elements precedents al president i els $50+0+217$ membres posteriors al president. Aquest cas concret es pot trobar de

$$\binom{100}{50}\binom{1}{1}\binom{435}{218}(50+1+218)!(536-50-1-218)!.$$

Ara cal sumar-li quan enlloc de 218 representants en tenim 219. De forma similar obtenim

$$\binom{100}{50}\binom{1}{1}\binom{435}{219}(50+1+219)!(536-50-1-219)!.$$

Així doncs, el total de casos de (1) és

$$\binom{100}{50}\binom{1}{1}\sum_{i=0}^{217}\left[\binom{435}{218+i}(269+i)!(267-i)!\right].$$

(2) Ens trobem ara en el mateix cas que (1) però amb 51 (o més) senadors. No és difícil veure, gràcies a l'expressió anterior, que el resultat per 51 senadors és

$$\binom{100}{51}\binom{1}{1}\sum_{i=0}^{217}\left[\binom{435}{218+i}(270+i)!(266-i)!\right].$$

El nostre objectiu és sumar ara pels casos de 51 a 66 senadors. De fet hi podem afegir el cas de 50 senadors a la fórmula i obtenir

$$s_2=\sum_{j=0}^{16}\left[\binom{100}{50+j}\binom{1}{1}\sum_{i=0}^{217}\left[\binom{435}{218+i}(269+j+i)!(267-j-i)!\right]\right].$$

(3): Si ara el vicepresident no precedeix al president, hem de fer el mateix sumatori però des de 51 fins 66 (ja que amb 50 senadors ara no n'hi ha prou) pel què la $j$ començarà a 1 i no a 0. i a l'hora de fer les ordenacions, el vicepresident es suma al bloc a ordenar posterior i es resta del precedent. Aplicant tot això obtenim

$$s_3 = \sum_{j=1}^{16} \left[ \binom{100}{50+j} \sum_{i=0}^{217} \left[ \binom{435}{218+i} (268+j+i)!(268-j-i)! \right] \right].$$

(4): Si ara tenim més de 66 senadors, ja no podem tenir més de 289 representants, no perquè no en resultaria una coalició guanyadora sinó perquè el president ja no seria pivot. Per tant trobem el cas en què tenim exactament 67 senadors.

$$\binom{100}{67}\binom{1}{1} \sum_{i=0}^{71} \left[ \binom{435}{218+i} (286+i)!(250-i)! \right].$$

Per tant si li sumem ara tots els valors fins als 100 senadors obtenim

$$s_4 = \sum_{j=0}^{33} \binom{100}{67+j}\binom{1}{1} \sum_{i=0}^{71} \left[ \binom{435}{218+i} (286+i+j)!(250-i-j)! \right].$$

(5): Aquest cas és al (4) el què el cas (3) és al (2). Així doncs, obtenim aquest resultat:

$$s_5 = \sum_{j=0}^{33} \binom{100}{67+j} \sum_{i=0}^{71} \left[ \binom{435}{218+i} (285+i+j)!(251-i-j)! \right].$$

Així doncs, el poder del president al sistema federal dels Estats Units d'Amèrica és

$$\frac{s_2+s_3+s_4+s_5}{537!} = 0.16312$$

Òbviament tant els sumatoris com un factorial tan gran no s'han calculat a mà. Hem fet servir Matlab per resoldre-ho.

## 2. Índex de poder de Banzhaf

La mesura de poder de Banzhaf és semblant a la mesura de poder de Shapley-Shubik però en depèn quins casos pot arribar a donar mesures molt diferents. Fou ideada per l'advocat John F. Banzhaf III i el trobem d'especial interès per resoldre certs exemples més endavant. Anem doncs a donar una definició formal.

**Definició 3.8.** Sigui un joc simple no nul $u$ sobre el conjunt de jugadors $N$ i sigui $W$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$ sobre $N$. El poder de Banzhaf total d'un jugador $i \in N$, denotat per $TBP_i(u)$, és el nombre de coalicions $X$ satisfent:

(1) $i \in X$.
(2) $X \in W$.
(3) $X \backslash \{i\} \notin W$.

Si $X \in W$ però $X \backslash \{i\} \notin W$ es diu que la marxa de $i$ de $X$ és crítica.

**Remarca 3.9.** La definició anterior ens diu que $TBP$ és un nombre enter positiu. Per comparar-ho amb altres mesures de poder cal normalitzar-lo perquè el sumatori de tots els $TBP$ sigui 1 com hem imposat a la definició de mesura de poder 3.2.

**Remarca 3.10.** De totes maneres, normalment, nostre objectiu no és fer una comparativa amb altres poders sinó tractar l'índex en si mateix. Aleshores es renuncia a la condició d'eficiència i es divideix el $TBP$ pel nombre total de coalicions a les quals pertany, és a dir, $2^{n-1}$. Això és així perquè d'aquesta manera, es pot dotar a la mesura de poder d'una interpretació probabilística, la qual ens indica per cada jugador quina és la probabilitat de ser decisiu en una coalició a la qual pertany si totes les coalicions són equiprobables. Anem doncs, a definir l'índex de poder de Banzhaf amb aquesta idea.

**Definició 3.11.** Sigui un joc simple no nul $u$ sobre el conjunt de jugadors $N$ i sigui $W$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$ sobre $N$. L'índex de poder de Banzhaf d'un jugador $i \in N$, denotat per $\beta_i[u]$, és

$$\beta_i[u] = \frac{TBP_i(u)}{2^{n-1}}.$$

Al haver renunciat a la condició d'eficiència, el joc ens dona ara la següent informació:

(1) Un joc té una elevada decisivitat si $\sum_{i=1}^n \beta_i[u] > 1$.
(2) Un joc té una baixa decisivitat si $\sum_{i=1}^n \beta_i[u] < 1$.

Anem ara a aplicar l'índex de poder de Banzhaf als exemples usats a la secció de Shapley-Shubik.

**Exemple 3.12.** Ens trobem amb la situació de l'exemple 3.5. Recordem que teníem un sistema de votació simple ponderada de la forma $u \equiv [51; 50, 49, 1]$ i que les coalicions guanyadores $W$ eren

$$\begin{aligned} X_1 &= \{p_1, p_2, p_3\}, \\ X_2 &= \{p_1, p_2\}, \\ X_3 &= \{p_1, p_3\}. \end{aligned}$$

La marxa de $p_1$ és crítica en els tres casos (recordem de capítols anteriors que això volia dir posseir veto). Per altra banda l'única marxa crítica de $p_2$ és de $X_2$ i l'única marxa crítica de $p_3$ és de $X_3$. Així doncs, obtenim

$$TBP_1(u) = 3, \quad TBP_2(u) = 1, \quad TBP_3(u) = 1.$$

El què porta a trobar els índexs de poder de Banzhaf

$$\beta_1[u] = \frac{3}{4}, \quad \beta_2[u] = \frac{1}{4}, \quad \beta_3[u] = \frac{1}{4}.$$

Si calculem

$$\sum_{i=1}^n \beta_i[u] = \frac{5}{4} > 1.$$

Per tant es tracta d'un joc amb elevada decisivitat.

Aquest resultat difereix (inclús imposant eficiència) dels índexs de poder de Shapley-Shubik que recordem que eren

$$\Phi_1[u] = \frac{2}{3}, \quad \Phi_2[u] = \Phi_3[u] = \frac{1}{6}.$$

Anem ara a donar una manera molt útil de calcular els índexs de poder de Banzhaf.

**Proposició 3.13.** *Sigui un joc simple no nul $u$ sobre el conjunt de jugadors $N$ i sigui $W = \{S_1, \ldots, S_k\}$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$ sobre $N$ . Aleshores per cada jugador $i$, definim el valor indicador $\alpha_j^i$ amb $j$ prenent valors entre 1 i $k$:*

$$\alpha_j^i = \begin{cases} 1 \ si \ i \in S_j \\ -1 \ si \ i \notin S_j \end{cases}$$

*Aleshores es compleix la següent igualtat*

$$TBP_i[u] = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^i.$$

**Remarca 3.14.** Una manera menys formal d'expressar aquesta igualtat és dir que si analitzem totes les coalicions guanyadores de $u$ i sumem a les que un cert jugador s'hi troba i restem a les que no hi és ens dona el poder de Banzhaf total (TBP) del jugador en qüestió.

Demostració. Per veure perquè aquest procediment funciona, fixem primer un jugador $i$ del joc. Aleshores podem dividir les coalicions guanyadores $S_j \in W$ en tres blocs:

- Bloc 1: Coalicions guanyadores que no contenen $i$.
- Bloc 2: Coalicions del Bloc 1 afegint-hi $i$.
- Bloc 3: La resta de coalicions guanyadores.

Adonem-nos ara que la marxa de $i$ de les coalicions del Bloc 2 no és crítica ja que que en resulten les coalicions del Bloc 1 que són guanyadores. Així doncs, el $TBP_i[u]$ és el cardinal del Bloc 3 ($|B_3|$). Per altra banda, és fàcil veure que el cardinal del Bloc 1 ($|B_1|$)i el Bloc 2 ($|B_2|$) és el mateix ja que hi ha les mateixes coalicions afegint-hi $i$. Per tant, al sumar 1 per cada coalició guanyadora on hi és $i$ i després restar aquelles on no hi és estem fent:

$$|B_2| + |B_3| - |B_1| = |B_1| + |B_3| - |B_1| = |B_3| = TBP_i[u].$$

□

**Exemple 3.15.** (Continuació de l'exemple 2.16) Per aconseguir l'índex de poder de Banzhaf del president dels EUA, no ens cal trobar el poder total de Banzhaf de cada jugador del sistema federal dels EUA però si volem comparar-lo amb l'obtingut per Shapley-Shubik, si.

**1. Poder dels senadors**

Hem de trobar la quantitat de coalicions guanyadores, la marxa de $s$ de la qual sigui crítica. Quin tipus de coalicions fan crítica la marxa del senador $s$?

(a) El president, el vicepresident, 50 senadors (essent $s$ un d'ells) i entre 218 i 435 representants.
(b) El president, 51 senadors (essent $s$ un d'ells) i entre 218 i 435 representants.
(c) 67 senadors (essent $s$ un d'ells) i entre 290 i 435 representants.

Per calcular quantes coalicions compleixen (a) pensem que hem de triar 49 d'entre 99 senadors i 218 ( o els que siguin) d'entre 435 representants. Notem que ara no cal ordenar res com al mètode de Shapley-Shubik perquè el mètode de Banzhaf no tracta permutacions sinó coalicions i per tant no té en compte l'ordre. Així doncs a (a) hi trobem,

$$\binom{99}{49} \sum_{j=0}^{217} \binom{435}{218+j}$$

Per raonaments similars trobem els valors de (b) i (c) respectivament

$$\binom{99}{50}\sum_{j=0}^{217}\binom{435}{218+j} \quad \binom{99}{66}\sum_{j=0}^{217}\binom{435}{290+j}$$

Per tant,

$$TBP_s[u] = \binom{99}{49}\sum_{j=0}^{217}\binom{435}{218+j} + \binom{99}{50}\sum_{j=0}^{217}\binom{435}{218+j} + \binom{99}{66}\sum_{j=0}^{145}\binom{435}{290+j}.$$

**2. Poder dels representants**

Per raonaments anàlegs al dels senadors trobem que el poder d'un representant $r$ és

$$TBP_r[u] = \binom{434}{217}\sum_{j=0}^{50}\binom{100}{50+j} + \binom{434}{217}\sum_{j=1}^{50}\binom{100}{50+j} + \binom{434}{289}\sum_{j=0}^{33}\binom{100}{67+j}.$$

**3. Poder del vicepresident**

La marxa del vicepresident només és crítica en coalicions de la forma {President , vicepresident, 50 senadors, $(218+i)$ representants} amb $i$ de 0 a 217. Notem que es tracta, exactament, del tipus (a) dels senadors. Així doncs, sigui $v$ el vicepresident,

$$TBP_v[u] = \binom{99}{49}\sum_{j=0}^{217}\binom{435}{218+j}.$$

**4. Poder del president** Hem de trobar la quantitat de coalicions guanyadores, la marxa de $p$ (el president) de la qual sigui crítica. Quin tipus de coalicions fan crítica la marxa del president $p$?

(a) El president, el vicepresident, entre 50 i 66 senadors i entre 218 i 435 representants.
(b) El president, entre 51 i 66 senadors i entre 218 i 435 representants.
(c) El president, el vicepresident, entre 67 i 100 senadors i entre 218 i 289 representants.
(d) El president, entre 67 i 100 senadors i entre 218 i 289 representants.

Els raonaments per trobar el nombre de coalicions que compleixen aquests casos són similars als ja fets, per tant donem directament la fórmula del poder del president.

$$TBP_p = \sum_{i=0}^{16}\binom{100}{50+i}\sum_{j=0}^{217}\binom{435}{218+j} + \sum_{i=1}^{16}\binom{100}{50+i}\sum_{j=0}^{217}\binom{435}{218+j} + 2\sum_{i=0}^{33}\binom{100}{67+i}\sum_{j=0}^{71}\binom{435}{218+j}$$

El 2 que multiplica l'últim sumatori apareix al tenir en compte les coalicions que tenen el vicepresident i les que no.

Així doncs, els índexs de poder de Banzhaf dels diferents jugadors del sistema federal dels EUA són

$$\beta_p[u] = \frac{TBP_p}{2^{435+100+1+1-1}} = \frac{TBP_p}{2^{536}} = 0.2500. \quad \beta_v[u] = \frac{TBP_v}{2^{435+100+1+1-1}} = \frac{TBP_v}{2^{536}} = 0.0099.$$

$$\beta_s[u] = \frac{TBP_s}{2^{435+100+1+1-1}} = \frac{TBP_s}{2^{536}} = 0.0199. \quad \beta_r[u] = \frac{TBP_r}{2^{435+100+1+1-1}} = \frac{TBP_r}{2^{536}} = 0.0096.$$

Anem ara a calcular els índexs de poder de Banzhaf imposant la condició d'eficiència per comparar-los amb els obtinguts amb Shapley-Shubik:

$$\beta_p[u] = \frac{TBP_p}{TBP_p + TBP_v + 100TBP_s + 435TBP_r} = 0.0389. \quad \beta_v[u] = \frac{TBP_v}{TBP_p + TBP_v + 100TBP_s + 435TBP_r} = 0.0015.$$

$$\beta_s[u] = \frac{TBP_s}{TBP_p + TBP_v + 100TBP_s + 435TBP_r} = 0.0031. \quad \beta_r[u] = \frac{TBP_r}{TBP_p + TBP_v + 100TBP_s + 435TBP_r} = 0.0015.$$

Expressat en percentatges i per cambres el poder de Banzhaf del Senat, la Cambra de Representants, el vicepresident i el president és

Poder del president $= 3.89\%$

Poder del vicepresident $= 0.15\%$

Poder retingut al Senat $= 31.03\%$

Poder retingut a la Cambra de Representants $= 64.92\%$

Per tant, l'índex de poder de Banzhaf atorga molt menys poder al President que l'índex de poder de Shapley-Shubik (recordem que aquest últim donava al president un poder del 16.31%).

**Remarca 3.16.** Així doncs, hem vist fins ara els dos índexs de poder més populars tot i que no són els únics. L'índex de poder de Deegan-Packel, per exemple, considera que al ser més fàcil que es formin coalicions de tamanys inferiors, atorga als jugadors de coalicions guanyadores més petites, mesures més elevades de poder.

**Remarca 3.17.** Ara bé, a l'hora de triar entre l'índex de poder de Shapley-Shubik quin és millor? El cert és que per les seves característiques, l'índex de Banzhaf sembla més versemblant i es construeix d'una manera més intuïtiva que l'índex de Shapley-Shubik, sobretot per estructures polítiques com un parlament.

## 3. Poder ordinal

En aquesta secció al igual que a tot el projecte tractarem sistemes de votació simples que són monòtons. Això vol dir que si una coalició és guanyadora ho segueix essent al afegir-li qualsevol jugador. Això es compleix tant en jocs que són expressables com a sistemes de votació ponderada com als que no ho són.

Ara, el nostre objectiu en aquesta secció és formalitzar la comparació de poders entre dos jugadors.

**Definició 3.18.** Sigui $u$ un sistema de votació simple sobre un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Siguin $i$ i $j$ dos jugadors de $N$ i sigui $W$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$ sobre $N$. Diem que $i$ i $j$ són **igualment desitjables** o són equivalents (ho denotem $i \approx j$) si es compleixen les següents implicacions:

Si per a tota coalició $X$ tal que $i, j \notin X$,

$$X \cup \{i\} \in W \iff X \cup \{j\} \in W.$$

Per altra banda, és possible que dues coalicions diferents $X$ i $Y$, en què cap de quals inclou $i$ o $j$, una resulti guanyadora al incloure $i$ però perdedora al incloure $j$ i viceversa? La següent formació formalitza aquest concepte.

**Definició 3.19.** Sigui $u$ un sistema de votació simple sobre un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Siguin $i$ i $j$ dos jugadors de $N$ i sigui $W$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$ sobre $N$. Diem que **l'atractiu de $i$ i $j$ és incomparable** (en el sentit literal) , denotat per $i|j$ si es compleixen les següents implicacions:

Si existeixen $X$ i $Y$ dues coalicions tal que $i, j \notin X$ i $i, j \notin Y$ i

$$\begin{cases} X \cup \{i\} \in W \text{ però } X \cup \{j\} \notin W \\ Y \cup \{j\} \in W \text{ però } Y \cup \{i\} \notin W \end{cases}$$

Per motius pràctics direm tan sols que $i$ i $j$ són incomparables quan $i|j$.

**Exemple 3.20.** (Continuació de l'exemple 2.16) Sigui $u$ el sistema federal dels Estats Units d'Amèrica. Anem a veure que un membre de la cambra de representants i un membre del senat són incomparables. Aleshores, sigui $i$ l'últim representant en ordre alfabètic i sigui $j$ l'últim senador, anem a fabricar dues coalicions que compleixin les condicions de la definició 3.19 .

Sigui $X$ la coalició formada pel president, els primers 217 representants (en ordre alfabètic), els 50 primers senadors i el president.

Sigui $Y$ la coalició formada pel president, els primers 218 representants (en ordre alfabètic), els 49 primers senadors i el president.

Aleshores és fàcil veure que $X \cup \{i\} \in W$ però $X \cup \{j\} \notin W$ així com $Y \cup \{j\} \in W$ però $Y \cup \{i\} \notin W$.

**Proposició 3.21.** *Sigui $u$ un sistema de votació simple sobre un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \dots, n\}$ i sigui $W$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$ sobre $N$. Aleshores, els dos enunciats següents són equivalents:*

*(1) Existeixen jugadors $i$ i $j$ amb atractiu incomparable.*
*(2) El sistema no és robust per intercanvis un-a-un.*

Demostració. (1) → (2): Suposem $i$ i $j$ incomparables. Siguin $X$ i $Y$ coalicions tals que:

$$X \cup \{i\} \in W \quad X \cup \{j\} \notin W \quad Y \cup \{j\} \in W \quad Y \cup \{i\} \notin W$$

Siguin ara les coalicions guanyadores $S_1 = X \cup \{i\}$ i $S_2 = Y \cup \{j\}$. Si ara realitzem un intercanvi un-a-un entre $S_1$ i $S_2$, canviant $i$ i $j$ obtenim dues coalicions perdedores.

(2) → (1): Suposem que $u$ no és robust per intercanvis un-a-un. Aleshores podem triar d'entre les coalicions guanyadores dues $S_1$ i $S_2$ tals que $i$ pertany a $S_1$ però no a $S_2$ i $j$ pertany a $S_2$ però no a $S_1$ de manera que ambdues coalicions es tornen perdedores si intercanvien $i$ i $j$. Sigui ara $X = S_1 \backslash \{i\}$ i $Y = S_2 \backslash \{j\}$.

$$X \cup \{i\} = S_1 \in W \quad X \cup \{j\} \notin W \quad Y \cup \{j\} = S_2 \in W \quad Y \cup \{i\} \notin W$$

Això demostra que l'atractiu de $i$ i $j$ no és comparable. □

Finalment, què en podem dir de dos jugadors que no són igualment desitjables o incomparables? La següent definició completa la casuística en matèria de poder ordinal.

**Definició 3.22.** Sigui $u$ un sistema de votació simple sobre un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Siguin $i$ i $j$ dos jugadors de $N$ i $W = \{S_1, \dots, S_k\}$ el conjunt de coalicions guanyadores de $u$. Aleshores diem que $i$ és més desitjable que $j$ (denotat amb $i > j$) si i només si les següents afirmacions es compleixen:

(1) Per cada coalició $X$ tal que $i, j \notin X$, si $X \cup \{j\} \in W \Rightarrow X \cup \{i\} \in W$.
(2) Existeix una coalició $Z$ tal que $i, j \notin Z$ tal que $Z \cup \{i\} \in W$ però $Z \cup \{j\} \notin W$.

**Exemple 3.23.** (Continuació de l'exemple 2.16) Sigui $u$ el sistema federal dels Estats Units d'Amèrica. Sigui $i$ un senador i sigui $j$ el vicepresident. Aleshores $i > j$. Anem a veure que es compleix (1). Les coalicions guanyadores minimals on hi trobem el vicepresident són:

$$W_j^m = \{ \text{ president } \cup \text{ 218 representants } \cup \text{ 50 senadors } \cup \text{vicepresident}\}$$

Per altra banda les coalicions guanyadores minimals on hi trobem un senador són:

$$W_i^m = \{ \text{ president } \cup \text{ 218 representants } \cup \text{ 50 senadors } \quad \cup \text{vicepresident}\} \cup$$
$$\{ \text{ president } \cup \text{ 218 representants } \cup \text{ 51 senadors } \} \quad \cup \quad \{ \text{ 290 representants } \cup \text{ 67 senadors } \}$$

Donat que $W_i^m \subseteq W_j^m$, si un senador fa guanyar una coalició, aleshores el vicepresident també. De totes maneres, gràcies a les coalicions guanyadores minimals trobades, veiem també que si a la coalició perdedora formada per

$$\{ \text{ 290 representants } \cup \text{ 66 senadors } \}$$

li afegim un senador en resulta una coalició guanyadora però si hi afegim el vicepresident en resulta una coalició perdedora. Per tant, $i > j$.

# 4. Aplicacions del poder a casos reals

Aquesta és la secció més pràctica de tot el treball. L'objectiu és analitzar els índexs de poder del Parlament de Catalunya i el Congrés dels Diputats espanyol de les legislatures de 2015. Intentarem veure si amb aquests índexs es poden explicar alguns dels esdeveniments que han succeït. Cal comentar que aquests índexs estan calculats *ex-ante*, és a dir en el moment en el que es varen repartir els escons. Un cop això succeeix, posteriors aliances poden alterar el paradigma del joc.

Tot i que hem introduït dos índexs diferents val a dir que ambdós són ordinal equivalents en jocs de majoria ponderada i, més generalment, en els jocs complets. És a dir, tot i que les avaluacions numèriques donen diferent, els índexs de Shapley-Shubik i de Banzhaf ordenen els índexs dels jugadors de la mateixa forma. (Freixas, 2010.)

La situació política a Catalunya fou la següent, una formació política que tenia més del doble d'escons que el segon partit més important va haver de renunciar al seu cap de llista per poder formar govern. A Espanya, després de mesos de negociacions, els partits polítics foren incapaços de formar govern i es veuran avocats a unes noves el·leccions al juny de 2016.

S'han implementat codis en C++ aplicant conceptes de programació dinàmica per reduir el cost computacional dels càlculs desitjats. Així doncs, primer de tot, anem a definir els dos jocs que analitzarem en aquesta secció.

**Joc 1: Catalunya**

El Parlament de Catalunya té 135 escons que ocupen els parlamentaris de diferents partits en funció dels resultats a les el·leccions autonòmiques catalanes. Després de les el·leccions del 27 de setembre de 2015, la formació *Junts pel sí (JxS)*, amb Artur Mas com a presidenciable va obtenir 62 escons, *Ciutadans(C's)*, amb Inés Arrimadas com a cap de llista, en va obtenir 25, el *Partit socialista de Catalunya (PSC)*, amb Miquel Iceta al capdavant, va quedar en tercera posició amb 16 escons, la formació *Catalunya si que es pot (CSQP)*, amb Lluís Rabell com a cap de llista, va obtenir 11 escons, el *Partit Popular (PP)*, amb Xavier García Albiol com a cap de llista, va obtenir també 11 escons i finalment, la *Candidatura d'Unitat Popular - Crida Constituent (CUP)*, representada per Antonio Baños, va obtenir 10 escons.

Així doncs, considerant cada formació política com un jugador diferenciat, el Parlament de Catalunya es pot expressar com un joc simple de majoria ponderada en la forma

$$u_C \equiv [68; 62, 25, 16, 11, 11, 10].$$

**Joc 2: Espanya**

El Congrés dels Diputats espanyol té 350 escons que ocupen els diputats dels partits escollits a les el·leccions generals. Després de les el·leccions del 20 de desembre de 2015 es varen repartir els escons de la següent manera:

| 2015 | | |
|---|---|---|
| Candidaturas | Votos | Diputados |
| PARTIDO POPULAR | 7.215.752 (28,72%) | 123 |
| PARTIDO SOCIALISTA OBRERO ESPAÑOL | 5.530.779 (22,01%) | 90 |
| PODEMOS | 3.182.082 (12,67%) | 42 |
| CIUDADANOS-PARTIDO DE LA CIUDADANÍA | 3.500.541 (13,93%) | 40 |
| EN COMÚ PODEM | 927.940 (3,69%) | 12 |
| COMPROMÍS-PODEMOS-ÉS EL MOMENT | 671.071 (2,67%) | 9 |
| ESQUERRA REPUBLICANA DE CATALUNYA-CATALUNYA SÍ | 599.289 (2,39%) | 9 |
| DEMOCRÀCIA I LLIBERTAT. CONVERGÈNCIA. DEMÒCRATES. REAGRUPAMENT | 565.501 (2,25%) | 8 |
| EN MAREA | 408.370 (1,63%) | 6 |
| EUZKO ALDERDI JELTZALEA-PARTIDO NACIONALISTA VASCO | 301.585 (1,20%) | 6 |
| UNIDAD POPULAR: IZQUIERDA UNIDA, UNIDAD POPULAR EN COMÚN | 923.133 (3,67%) | 2 |
| EUSKAL HERRIA BILDU | 218.467 (0,87%) | 2 |
| COALICIÓN CANARIA - PARTIDO NACIONALISTA CANARIO | 81.750 (0,33%) | 1 |

FIGURA 1. Resultats de les el·leccions de desembre de 2015

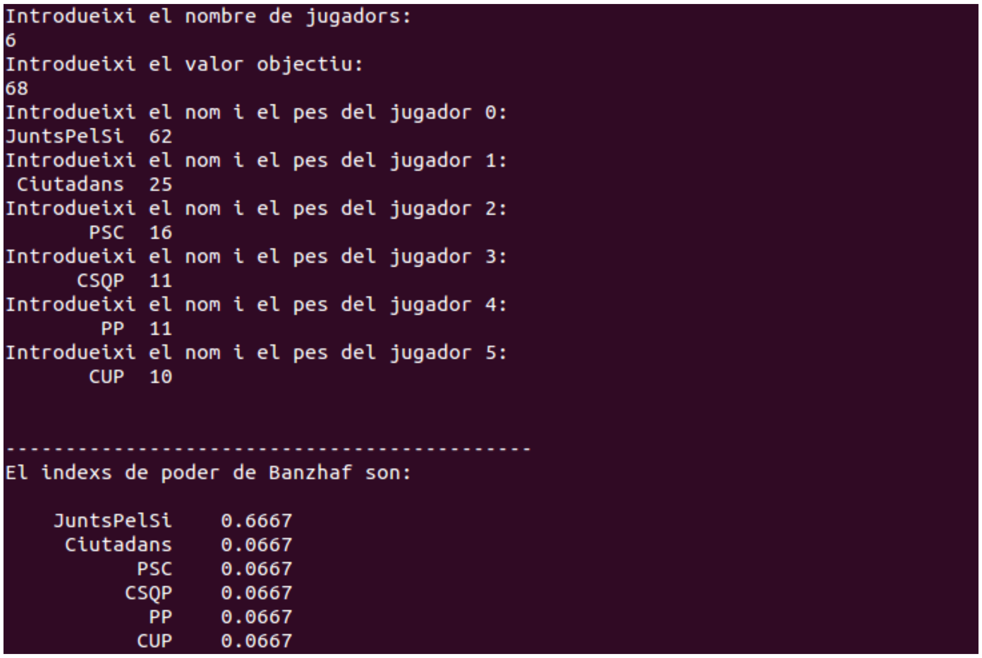
Així doncs, considerant cada formació política com un jugador diferenciat (excepte *Podemos*, *En Comú Podem*, *Compromís* i *En Marea* que els expressem com un mateix jugador), el Congrés dels Diputats espanyol es pot expressar com un joc simple de majoria ponderada en la forma

$$u_E \equiv [175; 123, 90, 69, 40, 9, 8, 6, 2, 2, 1].$$

Un cop hem expressat els dos jocs com a sistemes de votació simple ponderada, introduïm els valors al codi implementat per trobar els índex de poder de Shapley-Shubik.

**Catalunya Figura 2:** Els resultats obtinguts francament reveladors. Per començar, tots els jugadors excepte *Junts pel sí* tenen el mateix índex de poder de Shapley. Si ens hi parem a pensar això no és tan estrany, *Junts pel sí* tan sols necessita 6 escons per la majoria absoluta i tots els altres partits superen aquesta xifra. Això fa que l'única manera per un partit que no sigui *Junts pel sí* de formar govern és o bé aliant-se amb aquests o bé formant una coalició amb tots els demés partits minoritaris. Aquesta simetria entre les cinc formacions polítiques minoritàries implica que són jugadors equivalents. La diferència de poder és abismal, *Junts pel sí* té deu cops el poder que té *C's* tot i només tenir 2.5 cops els seus escons. Això dona perspectives molt favorables per *Junts pel sí* a l'hora de formar govern.

**Espanya Figura 3:** Aquests índexs de poder de Shapley-Shubik són bastant més variats que el cas català però el cert és que no hi ha gaires coses a comentar, tots els resultats són bastant esperats. El *Partit Popular*



```
Introdueixi el nombre de jugadors:
6
Introdueixi el valor objectiu:
68
Introdueixi el nom i el pes del jugador 0:
JuntsPelSi  62
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
 Ciutadans  25
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
       PSC  16
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
      CSQP  11
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
        PP  11
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
       CUP  10


-------------------------------------------
El indexs de poder de Banzhaf son:

    JuntsPelSi    0.6667
     Ciutadans    0.0667
           PSC    0.0667
          CSQP    0.0667
            PP    0.0667
           CUP    0.0667
```

Figura 2. Índexs de poder de Shapley-Shubik al Parlament de Catalunya

ostenta un 40% del poder i *Podemos* i *PSOE* són jugadors equivalents. Aquesta última dada podria explicar en part la seva dificultat per entendre's durant tota la durada de les negociacions on el *PSOE* actuava des de una posició de poder amb *Podemos* que no tenia. Destaca el baix índex de poder de *Ciutadans*, el qual té menys d'una tercera part de poder que *Podemos* tenint més de la meitat dels seus escons.

**Matrius d'incompatibilitats:**

Havent vist aquesta informació, ens podem adonar que no quadra gaire amb el que ha passat a la realitat. A Catalunya van ser necessaris cent dies d'intenses negociacions i assemblees que culminaren amb un pacte *in extremis* i pel qual *Junts pel sí* va haver de pagar un preu molt alt, el cap del seu presidenciable Artur Mas per aconseguir formar govern. Això no quadra en absolut amb l'altíssim índex de poder de Shapley que havíem obtingut a la taula 2, els quals, sobre el paper, només els hi calia pactar amb un dels cinc partits minoritaris per governar.

Al Congrés dels Diputats aquesta situació ha estat encara més exagerada. Si és cert que el *Partit Popular* tenia un percentatge d'escons inferior al que tenia *Junts pel sí* a Catalunya però el líder del *PP*, Mariano Rajoy, ni tan sols es va sotmetre a una sola sessió d'investidura durant els mesos de desgovern que ha viscut Espanya durant la primera meitat de l'any 2016. La situació d'ingovernabilitat ha estat tan greu que el 26 de juny es repetiran les el·leccions generals per intentar canviar la situació d'*impasse* que s'ha viscut durant aquests mesos.

Aquestes diferències entre els resultats del codi implementat i els esdeveniments reals radica en un punt clau i que segurament el lector ja haurà intuït. No tots els partits són compatibles entre si. Els partits polítics són agrupacions que intenten representar un conjunt d'idees comunes i la seva representació al Parlament o al Congrés depèn del nombre de persones que simpatitzen amb aquestes idees. Així doncs, donat que vivim en una societat on impera una diversificació d'opinions molt àmplia, hi ha partits que es troben a les antípodes els uns dels altres ja sigui en matèria econòmica, social o en quan a sentiments nacionalistes.

En aquest projecte tractarem aquestes incompatibilitats entre partits fabricant una matriu de compatibilitats entre els diferents partits polítics. Es tracta d'una matriu binària ja que una matriu amb coeficients reals entre 0 i 1 suposaria una complexitat massa elevada per aquest projecte. Així doncs cal ser especialment curós a l'hora de declarar les incompatibilitats ja que alteren el paradigma de forma molt rellevant. Tot

```
Introdueixi el nombre de jugadors:
10
Introdueixi el valor objectiu:
176
Introdueixi el nom i el pes del jugador 0:
        PP 123
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
      PSOE  90
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
   PODEMOS  69
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
       C'S  40
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
       ERC   9
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
       DLL   8
Introdueixi el nom i el pes del jugador 6:
       PNV   6
Introdueixi el nom i el pes del jugador 7:
        IU   2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 8:
     BILDU   2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 9:
        CC   1


--------------------------------------------
El indexs de poder de Banzhaf son:

            PP    0.4024
          PSOE    0.2198
       PODEMOS    0.2198
           C'S    0.0690
           ERC    0.0302
           DLL    0.0254
           PNV    0.0198
            IU    0.0056
         BILDU    0.0056
            CC    0.0024
```

FIGURA 3. Índexs de poder de Shapley-Shubik al Congrés dels Diputats

i que aquest tema ja ha estat treballat anteriorment (per exemple (Bergantiños, Carreras i García-Jurado, 1993.)), tota la feina feta és original.

Així doncs, les nostres matrius d'incompatibilitats són matrius $n \times n$ de manera que l'element de la fila $i$ i columna $j$ val 1 si el partit $i$ és compatible amb el $j$ i 0 altrament. La diagonal pren, per tant, valors 1. A més, la nostra matriu és simètrica.

Així doncs anem a raonar les incompatibilitats que hem declarat. Tot i que el lector pugui creure que algunes no tenen sentit, cal dir que aquest no és un treball sobre ciències polítiques i que el que intentem analitzar són les conseqüències que tenen aquestes incompatibilitats als índexs de poder. És per això que, sobretot al joc 2, no hem declarat incompatibles parelles de partits que en situacions normals no pactarien però que podrien arribar a posar-se d'acord en certes matèries.

A Catalunya ens hem centrat exclusivament en les incompatibilitats generades pel nacionalisme català. Així doncs, hem declarat incompatibles *Junts pel sí* amb *C's*, *PSC*, *PP* i *CSQP*. Hom podria pensar que aquest últim no estava tan allunyat de les postures a favor de la independència de Catalunya ja que alguns dels seus parlamentaris són obertament independentistes. Tot i així, el partit esta oficialment només a favor del Referèndum d'autodeterminació i, com vàrem veure, *Junts pel sí* no va considerar en cap moment *CSQP* com a possible company de govern i haguessin anat abans a noves el·leccions autonòmiques que pactar amb la formació d'esquerres.

Per altra banda, al Congrés dels Diputats, hem declarat les incompatibilitats següents, per motius nacionalistes i de caire econòmic i social: *PP-Podemos*, *PP-ERC*, *PP-Bildu*, *PP-IU*, *C's-DLl*, *C's-ERC*, *C's-Bildu*, *C's-IU*.

Hi ha algunes incompatibilitats o competències que podrien sorprendre al lector. Intentarem justificar els raonaments duts a terme a continuació. *Ciutadans* i *Podemos* no són incompatibles ja que s'ha considerat que tot i que difereixen en molts punts també coincideixen amb altres. En canvi el lider de *IU* si que va afirmar per activa i per passiva que mai pactaria amb *Ciutadans*. Per altra banda, *C's* i *PP*, sempre s'han considerat bel·ligerantment contraris als nacionalismes basc i català pel què són incompatibles amb els patits independentistes amb l'excepció de la relació *PP-DLl* ja que aquests dos partits sempre han tingut relacions molt diferents a àmbit local (Catalunya) i a àmbit estatal. És cert que des de que *Convergència de Catalunya*, partit al qual pertany *DLl* s'ha declarat independentista s'ha perdut el contacte entre aquests dos partits però com hem dit cal ser molt curós i estar segur a l'hora d'establir les incompatibilitats.

La pregunta és: com s'apliquen aquestes incompatibilitats al codi implementat? Per trobar l'índex de poder de Shapley-Shubik usàvem el mètode dels pivots. Ara bé, portar aquest mètode amb incompatibilitats no és quelcom directe i requereix de certa interpretació.

La primera interpretació que podem fer és que només es poden generar subpermutacions factibles, ja no és possible fer permutacions ja que hi ha elements que no poden anar en la mateix *pack* que altres. Així doncs, només que hi hagi una incompatibilitat, la permutació mai arribarà a longitud $n$. D'aquesta manera, el programa crea subpermutacions factibles i que respectin les competències entre formacions polítiques i quan un element és pivot se li suma 1 igual que a l'anterior programa.

La segona interpretació possible de les incompatibilitats és que es fan totes les permutacions possibles i si s'arriba abans a un pivot que a una incompatibilitat sumes punt, independentment de si la permutació és pot formar o no. Aquesta interpretació pren forma si mirem les coalicions des d'una òptica probabilística ja que no es preocupa de tot el que segueix al pivot, sinó que pregunta per la probabilitat relativa de que es produeixi fins al moment del pivot.

Finalment, la tercera interpretació, sembla, a primera vista, la més realista de les tres, consisteix en formar totes les permutacions, al igual que quan no es tenen incompatibilitats. Un cop aquí a l'hora de trobar un pivot es va mirant la permutació i si es troba abans una incompatibilitat que un pivot, aquest s'ignora, no es suma a la quota i es segueix buscant dintre de la mateixa permutació. L'explicació seria que en una ronda de votació això seria equivalent a que l'element que genera la incompatibilitat votés en sentit contrari a tots els elements precedents degut a la incompatibilitat amb algun dels elements previs però no per això anul·la la ronda de votació. De totes maneres aquest mètode no representa fidedignament el poder ja que per votar en el sentit d'un cert partit amb moltes restriccions cal començar la "ronda"per ell, amb lo qual no s'endú poder ja que és un altre el que exerceix de pivot. Això implica que penalitzarà de forma dramàtica els partits amb incompatibilitats.

Un cop trobat el número de vegades en que cada element és pivot aquest cop no és divideix per $n!$ ja que no en totes les permutacions hem sumat punts. Enlloc d'això es divideix cada element pel nombre de punts totals de pivotatge de cada element.

**Exemple 3.24.** Sigui $u$ el sistema de votació simple ponderada amb jugadors A, B, C i D. Expressem el sistema com

$$u \equiv [4; 2, 2, 1, 1]$$

Si ara fem C i D incompatibles amb A tenim una matriu de incompatibilitats

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular el poder de cada un dels jugadors segons cada una de les 3 interpretacions.

**1a interpretació:** Anem a formar totes les possibles subpermutacions:

$$\begin{gathered}\{A,B\},\\ \{B,A\},\quad \{B,C,D\},\quad \{B,D,C\},\\ \{C,B,D\},\quad \{C,D,B\},\\ \{D,B,C\},\quad \{D,C,B\}.\end{gathered}$$

A exerceix de pivot només 1 cop en aquest cas. B exerceix de pivot 3 cops i finalment C i D exerceixen de pivot 2 cops cada un. Per tant els índex de poder es distribueixen de la següent manera:

$$\Phi[u]=(\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4}).$$

**2a interpretació:** Escribim ara totes les permutacions possibles.

$$\begin{array}{cccc}\{A,B,C,D\}, & \{A,B,D,C\}, & \{A,C,B,D\}, & \{A,C,D,B\},\\ \{A,D,B,C\}, & \{A,D,C,B\}, & \{B,A,C,D\}, & \{B,A,D,C\},\\ \{B,C,A,D\}, & \{B,C,D,A\}, & \{B,D,A,C\}, & \{B,D,C,A\},\\ \{C,A,B,D\}, & \{C,A,D,B\}, & \{C,B,A,D\}, & \{C,B,D,A\},\\ \{C,D,A,B\}, & \{C,D,B,A\}, & \{D,A,B,C\}, & \{D,A,C,B\},\\ \{D,B,A,C\}, & \{D,B,C,A\}, & \{D,C,A,B\}, & \{D,C,B,A\}.\end{array}$$

A exerceix de pivot, sense causar incompatibilitats, en dos casos, $\{B,A,C,D\}$ i $\{B,A,D,C\}$.

B exerceix de pivot en quatre casos $\{A,B,C,D\}$ , $\{A,B,D,C\}$ , $\{C,D,B,A\}$ i $\{D,C,B,A\}$.

C i D exerceixen de pivot en dos casos, veiem els de C que són anàlegs a D : $\{B,D,C,A\}$ i $\{D,B,C,A\}$.

Per tant els índex de poder es distribueixen de la següent manera:

$$\Phi[u]=(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}).$$

**3a interpretació:** En aquest cas, obtenim resultats francament dolents. Veiem-ho:

A exerceix de pivot en dos casos $\{B,A,C,D\}$ i $\{B,A,D,C\}$.

B exerceix de pivot en 10 casos:

$$\begin{array}{ccccc}\{A,B,C,D\}, & \{A,B,D,C\}, & \{A,C,B,D\}, & \{A,C,D,B\}, & \{A,D,B,C\},\\ \{A,D,C,B\}, & \{C,A,D,B\}, & \{C,D,A,B\}, & \{D,A,C,B\}, & \{D,C,B,A\}.\end{array}$$

Donat que C i D són equivalents i queden 12 casos, cada un d'ell exerceix de pivot 6 cops. Per tant els índex de poder es distribueixen de la següent manera:

$$\Phi[u]=(\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{4}).$$

Veiem doncs, que aquest model penalitza de forma molt greu les incompatibilitats.

```
Introdueixi el nombre de jugadors:
6
Introdueixi el valor objectiu:
68
Introdueixi el nom i el pes del jugador 0:
JuntsPelSi 62
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
Ciutadans 25
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
PSC 16
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
CSQP 11
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
PP 11
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
CUP 10
Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0 incompatible):
1 0 0 0 0 1
0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0
1 0 0 0 0 1


--------------------------------------------
El indexs de poder de Shapley  son:

    JuntsPelSi    0.5000
     Ciutadans    0.0000
           PSC    0.0000
          CSQP    0.0000
            PP    0.0000
           CUP    0.5000
```

FIGURA 4. Índexs de poder de Shapley-Shubik amb restriccions al Parlament de Catalunya

**Catalunya Figura 4:** Els resultats són ara molt diferents que en el primer cas. Si ens parem a pensar no son en absolut il·lògics. *Ciutadans*, *PSC*, *PP* i *CSQP* tenen 0 poder. Això es deu a que segons el nostre model aquests partits només poden pactar entre ells mateixos i només sumen 63 escons, de forma que mai podran ser pivots. Per altra banda, *Junts pel sí* i la *CUP* tenen ambdós un índex de poder de 0.5. Efectivament les úniques pseudo-permutacions guanyadores són *JxS*, *CUP* i *CUP*, *JxS*. En un cas un partit és pivot i en l'altre l'altre.

Aquest resultat concorda molt més amb la realitat. *Junts pel sí* necessitava el suport de la *CUP* si o si i això va fer que aquests poguessin posar exigències tan altes com que el candidat a la Presidència renunci a les seves aspiracions com va fer Artur Mas en favor de Carles Puigdemont. A l'argumentari de la majoria de simpatitzants de *JxS* a les tertúlies que dugueren a terme durant els tensos mesos de negociacions es va sentir sovint la frase : "no pot ser que un partit amb 10 escons imposi la seva voluntat a una formació que en té 62". El cert és que mirat des del punt de vista matemàtic si podia i de fet així ho va fer.

Cal comentar també que els resultats són els mateixos per les tres interpretacions possibles, lo qual no és gens estrany si es té en compte que el sistema, un cop aplicades les restriccions és extremadament simple: només *CUP* i *JxS* poden crear majoria i ambdós es necessiten l'un a l'altre.

**Espanya Figura 5:** En aquesta taula obtenim resultats que podríem qualificar de desastrosos en quan a com de fidedignes són amb la realitat. Veiem que el *PP* té un poder del 0.28% essent el partit amb més escons i *C's* té 0.58%. Ambdós tenen menys inclús que *Coalición Canaria*. Aquest resultat no és un error del programa però si un error de model. Donat que Shapley-Shubik tracta amb permutacions o en aquesta cas amb les anomenades pseudo-permutacions, els partits amb moltes restriccions i que poden fer coalicions amb menys integrants es veuen penalitzats en excés pel model. D'aquesta manera, *Coalición Canaria* exerceix de pivot quan ve precedit per *PSOE*, *Podemos*, *Democràcia i llibertat*, *Partit Nacionalista Basc* i o bé *Izquierda Unida* o bé *Bildu* i el segueix *Esquerra Republicana* i o bé *Izquierda Unida* o bé *Bildu*. Com el mètode

```
Introdueixi el nombre de jugadors:
10
Introdueixi el valor objectiu:
176
Introdueixi el nom i el pes del jugador 0:
PP 123
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
PSOE 90
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
PODEMOS 69
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
C'S 40
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
ERC 9
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
DLL 8
Introdueixi el nom i el pes del jugador 6:
PNV 6
Introdueixi el nom i el pes del jugador 7:
IU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 8:
BILDU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 9:
CC 1
Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0 incompatible):
1 1 0 1 0 1 1 0 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 0 1 1 0 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1


--------------------------------------------
El indexs de poder de Shapley  son:

            PP    0.0029
          PSOE    0.3297
       PODEMOS    0.3267
           C'S    0.0058
           ERC    0.1116
           DLL    0.0930
           PNV    0.0767
            IU    0.0209
         BILDU    0.0209
            CC    0.0116
```

FIGURA 5. Índexs de poder de Shapley-Shubik amb restriccions al Congrés dels Diputats 1

de Shapley-Shubik distingeix entre coalicions en funció de l'ordre, *Coalición Canaria* exerceix de pivot en $2 \times 5! \times 2! = 480$ vegades.

En canvi el *Partit Popular* exerceix de pivot en molts tipus de coalicions però al ser més curtes estan menys premiades que en el cas de *CC*. Concretament el *PP* exerceix de pivot $2 \times (\binom{3}{0}3! + \binom{3}{1}2!2! + \binom{3}{2}3! + \binom{3}{3}4!) = 120$. (Veiem que efectivament un índex és 4 cops més gran que l'altre). En qualsevol cas descartem aquesta interpretació ja que és una molt mala adaptació del sistema de poder de Shapley ja que al tenir subpermutacions de diferents longituds es perd per complet la proporcionalitat i es premia molt més subpermutacions curtes.

**Espanya Figura 6:** En aquest model obtenim uns resultats que podríem considerar propers als *statu quo* que es varen imposar els partits a ells mateixos a l'hora de realitzar les negociacions. Veiem que el *PP* té

```
Introdueixi el nombre de jugadors:
10
Introdueixi el valor objectiu:
176
Introdueixi el nom i el pes del jugador 0:
PP 123
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
PSOE 90
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
PODEMOS 69
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
C'S 40
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
ERC 9
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
DLL 8
Introdueixi el nom i el pes del jugador 6:
PNV 6
Introdueixi el nom i el pes del jugador 7:
IU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 8:
BILDU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 9:
CC 1
Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0 incompatible):
1 1 0 1 0 1 1 0 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 0 1 1 0 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1


------------------------------------------
El indexs de poder de Shapley  son:

            PP    0.1623
          PSOE    0.3528
       PODEMOS    0.1905
           C'S    0.0519
           ERC    0.0844
           DLL    0.0671
           PNV    0.0476
            IU    0.0173
         BILDU    0.0173
            CC    0.0087
```

Figura 6. Índexs de poder de Shapley-Shubik amb restriccions al Congrés dels Diputats 2

menys poder que el *PSOE* però que la diferència no és tan exagerada com en la primera interpretació. En aquest cas el *PP* si fa valer la seva gran quantitat d'escons en contra dels partits minoritaris que tenen 10 cops menys escons. Per tant podem concloure que aquest model és francament bo.

**Espanya Figura 7:** Com preveiem, aquesta interpretació dona resultats desastrosos ja que penalitza de forma dràstica els partits amb penalitzacions. Cal fixar-se que *PSOE*, *PNV* i *CC* que són els partits sense restriccions són els que més poder tenen tot i tenir molts menys escons que altres formacions polítiques. Decidim aleshores que la interpretació més acurada és la segona.

**Aplicant Banzhaf:** Com hem vist, els índexs de Poder de Shapley-Shubik són francament difícils d'interpretar quan entren en joc incompatibilitats. Hem vist com requereix de la interpretació del lector i que els resultats es troben en un ventall molt ampli en funció d'aquesta interpretació. Això és degut al fet que en les

```
Introdueixi el nombre de jugadors:
10
Introdueixi el valor objectiu:
176
Introdueixi el nom i el pes del jugador 0:
PP 123
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
PSOE 90
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
PODEMOS 69
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
C'S 40
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
ERC 9
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
DLL 8
Introdueixi el nom i el pes del jugador 6:
PNV 6
Introdueixi el nom i el pes del jugador 7:
IU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 8:
BILDU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 9:
CC 1
Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0 incompatible):
1 1 0 1 0 1 1 0 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 0 1 1 0 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1


-------------------------------------------
El indexs de poder de Shapley  son:

           PP    0.0189
         PSOE    0.2154
      PODEMOS    0.1215
          C'S    0.0196
          ERC    0.0726
          DLL    0.0893
          PNV    0.1534
           IU    0.0957
        BILDU    0.0662
           CC    0.1476
```

FIGURA 7. Índexs de poder de Shapley-Shubik amb restriccions al Congrés dels Diputats 3

interpretacions primera i tercera hem tractat tota l'estona amb permutacions les quals penalitzen de forma desmesurada una incompatibilitat. Per altra banda, la segona interpretació, de caire probabilístic, premia més coalicions de poques formacions polítiques. En canvi, si fem memòria, el mètode per trobar els índexs de poder de Banzhaf era molt més intuïtiu ja que tractava amb coalicions i no amb permutacions. Una incompatibilitat a l'hora de formar una coalició és un concepte molt més clar. Així doncs apliquem Banzhaf per backtracking i trobem els índexs de poder de Banzhaf.

**Catalunya Figura 8:** No apreciem diferències respecte l'aplicació de Shapley amb restriccions. Això és així per la ja comentada simplicitat del sistema.

**Catalunya Figura 9:** Aquesta és segurament la millor representació del poder de tot el procés de refinament que hem anat fent en aquesta secció junt amb la segona interpretació de Shapley. Veiem que Banzhaf si

```
Introdueixi el nombre dels jugadors:
6
Introdueixi el valor objectiu:
68
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
JuntsPelSi 62
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
Ciutadans 25
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
PSC 16
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
CSQP 11
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
PP 11
Introdueixi el nom i el pes del jugador 6:
CUP 10
Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0 incompatible)
1 0 0 0 0 1
0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0
1 0 0 0 0 1


------------------------------------------
El indexs de poder de Banzhaf son:

    JuntsPelSi    0.5000
     Ciutadans    0.0000
           PSC    0.0000
          CSQP    0.0000
            PP    0.0000
           CUP    0.5000
```

FIGURA 8. Índexs de poder de Banzhaf amb restriccions al Parlament de Catalunya

atorga una mesura de poder bastant raonable donades certes restriccions. Efectivament, el *Partit Popular* segueix tenint, al igual que amb models anteriors, una mesura de poder bastant inferior a *PSOE* però ni de bon tros hi ha una diferència tan absurda com a les interpretacions primera i tercera. El *PSOE* té en aquest cas un 30.26% del poder, quasi quatre cops més que el *PP* amb un 7.89% tot i tenir menys escons al Congrés. Això es deu principalment a l'elevada quantitat de incompatibilitats que té el *Partit Popular*. Això explica perquè fou Pedro Sánchez i no Mariano Rajoy, qui va portar la iniciativa en tot moment durant les negociacions i perquè fou L'únic que es va sotmetre a una sessió d'investidura. Per altra banda, es veu també com el poder està molt més repartit que en el model sense incompetències, això explica també, en part, perquè no s'ha pogut formar govern ja que al estar el poder tan repartit i existir tantes incompetències entre partits es feia extremadament difícil arribar a un acord.

**Remarca 3.25.** Cal dir que els dos models que hem considerat com acceptables que són el de Banzhaf i la segona interpretació de Shapley-Shubik respecten quelcom que ja havíem vist al trobar el poder del president al exemple 2.16 i és que Shapley dona més importància als elements amb més quota de poder que Banzhaf. Acceptem com a vàlids doncs els dos models mencionats.

**Limitacions dels models:** Al fet de que no hi ha una mesura de poder considerada com òptima i que la tria de incompatibilitats és molt delicada, al nostre model se li suma una limitació crucial. El sistema de votació sobre el que apliquem el poder és simple. Això vol dir que els jugadors es decanten pel sí o el no però mai per **l'abstenció**.

El fet que el model no consideri l'abstenció és una mancança important ja que el fet de permetre a un determinat partit donar suport o rebutjar una certa proposta, fa que els partits amb més escons cobrin, de forma intuïtiva, més poder que els que en tenen menys. Això es deu al fet que l'índex de poder augmenta de forma dràstica al apropar-se més i més un jugador a la quota per si sol. La formalització de tots aquests

```
Introdueixi el nombre dels jugadors:
10
Introdueixi el valor objectiu:
176
Introdueixi el nom i el pes del jugador 1:
PP 123
Introdueixi el nom i el pes del jugador 2:
PSOE 90
Introdueixi el nom i el pes del jugador 3:
PODEMOS 69
Introdueixi el nom i el pes del jugador 4:
C'S 40
Introdueixi el nom i el pes del jugador 5:
ERC 9
Introdueixi el nom i el pes del jugador 6:
DLL 8
Introdueixi el nom i el pes del jugador 7:
PNV 6
Introdueixi el nom i el pes del jugador 8:
IU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 9:
BILDU 2
Introdueixi el nom i el pes del jugador 10:
CC 1
Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0 incompatible)
1 1 0 1 0 1 1 0 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 0 1 1 0 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1


-------------------------------------------
El indexs de poder de Banzhaf son:

            PP    0.0789
          PSOE    0.3026
       PODEMOS    0.2237
           C'S    0.0526
           ERC    0.1184
           DLL    0.0921
           PNV    0.0658
            IU    0.0263
         BILDU    0.0263
            CC    0.0132
```

Figura 9. Índexs de poder de Banzhaf amb restriccions al Congrés dels Diputats

conceptes requereix d'un bagatge matemàtic més avançat que el que s'estudia en aquest projecte però es tracta d'un objectiu de partida per feina futura.

# Conclusions i treball futur

Aquest projecte ha servit per introduir al lector en conceptes fonamentals de la teoria de jocs cooperatius, fent especial èmfasi en la teoria de jocs simples aplicada a la política. Gran part del projecte ha consistit en desenvolupar de manera més o menys endreçada els conceptes que ens han acabat als dos punts claus que motivaven aquest treball.

El primer era la caracterització dels sistemes de votació ponderada i sobretot pels sistemes que no són expressables com a tals, dur-ne a terme l'anàlisi dimensional. La connexió d'aquesta secció amb l'àlgebra és francament interessant. El segon punt que ha motivat aquest projecte és la definició matemàtica del poder i tot el que se'n deriva. Hem treballat amb models ja enunciats i hem intentat perfeccionar-los amb les anomenades matrius d'incompatibilitats, amb les que hem intentat donar més versemblança als models. Tot plegat i al aplicar-ho a problemes de dimensions prou grans, ha suposat un autèntic repte en matèria de càlcul combinatori així com de programació.

La primera conclusió rellevant a la que hem arribat és que els índexs de poder vainilla, és a dir, sense més especificacions, són una mesura del poder bastant pobre si s'aplica en àmbits polítics on existeix una pluralitat àmplia d'opinions. En canvi es tracta d'una mesura prou bona per juntes directives o certs sistemes de votació on voten individus i no formacions d'individus en bloc.

La segona conclusió és que al aplicar matrius d'incompatibilitats a un cert joc, l'índex de poder de Shapley-Shubik passa a ser un concepte massa abstracte i que, a més, al tractar-se d'anàlisi de permutacions perd totalment l'eficàcia ja que penalitza de forma excessiva a un partit amb incompatibilitats. No és així en canvi, quan ens mirem el mètode dels pivots des de una vessant probabilística on si s'obtenen resultats interessants i que podríem considerar acceptables.

Finalment, l'índex de poder de Banzhaf, al treballar directament sobre coalicions, és un índex de poder molt més robust per incompatibilitats que l'índex de Shapley-Shubik, és a dir, poques restriccions no provoquen descensos dramàtics de poder. Així doncs, concloem que per analitzar joc d'un sistema parlamentari on els jugadors són formacions polítiques i on, per tant, existeixin incompatibilitats ideològiques entre certes partits, l'índex de poder de Banzhaf s'ajusta més a la realitat que l'índex de poder de Shapley-Shubik.

En quant a futur treball, han quedat obertes certes vies d'estudi francament interessants. Primer, com es podria treballar un model on les incompatibilitats no fossin quelcom binari sinó que entre formacions polítiques hi pogués haver un cert coeficient real normalitzat de compatibilitat. Això permetria un nivell de versemblança a la realitat més alt. Per altra banda, estudiar com altera el paradigma d'un joc la possibilitat d'abstenció és una via que sembla, a priori, molt interessant i que permetria també confeccionar models que assignin mesures de poder cada cop més properes a la realitat.

# Capítol 4
# Apèndix

## 1. Codi en C++ dels pagaments de Shapley

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

const int M = 31;


typedef long long ll;
typedef vector<ll> VL;
typedef vector<VL> VVL;
typedef vector<double> VD;

VD coal;
VD payoff;
VL coefs;
VL coal_size;
VVL tartaglia;


int main() {

  //Precalcularem tots els valors del triangle de tartaglia
  tartaglia = VVL(M, VL(M, 0));
  for (int i = 0; i < M; ++i) {
    tartaglia[i][0] = 1;
    tartaglia[i][i] = 1;
    if (i >= 2) {
      for (int j = 1; j <= i-1; ++j) tartaglia[i][j] = tartaglia[i-1][j-1]
          + tartaglia[i-1][j];
    }
  }

  int n;
  cout << "Introdueixi␣el␣nombre␣de␣jugadors" << endl;
  cin >> n;

  coal = VD(1 << n, 0);
```

```
  coal_size = VL(1 << n, 0);

  // donem el valor de cada una de les coalicions
  for (int i = 1; i < (1 << n); ++i) {
    cout << "Escrigui el valor de la coalicio";
    for (int j = n - 1; j >= 0; --j) {
      if ((i >> j) & 1) cout << " 1";
      else cout << " 0";
    }
    cout << endl;
    cin >> coal[i];
  }

  int pot2 = 1;
  // trobem el tamany de cada coalicio` de forma eficient
  for(int i = 1; i < (1 << n); ++i) {
    if (i == 2*pot2) pot2 = 2*pot2;
    coal_size[i] = coal_size[i-pot2] + 1;
  }

  // coeficients de Shapley que depen del tamany de la coalicio i el
      nombre de jugadors
  coefs = VL(n, 0);
  payoff = VD(n, 0);

  // assignem a cada coalicio el seu coeficient
  for (int i = 0; i < n ; ++i){
    coefs[i] = n*tartaglia[n-1][i];
  }

  // anem ara a calcular els payoffs
  for (int i = 0; i < n; ++i){
    int comptador = (1 << i);
    int sub_comptador = 0;
    while (comptador < (1 << n)){
      payoff[i] += (coal[comptador]-coal[comptador-(1 << i)])/coefs[
          coal_size[comptador]-1];
      ++sub_comptador;
      if(sub_comptador == (1 << i)){
        comptador = comptador + sub_comptador + 1;
        sub_comptador = 0;
      }
      else ++comptador;
    }
    cout << i+1 << " : " << payoff[i] << endl;
  }
  cout << endl;

}
```

## 2. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
using namespace std;


typedef vector<int> VE;
typedef vector<string> VS;
typedef vector<double> VD;
typedef vector<VE> VVE;


int n;
double obj, total;
VE permutacio, usat;
VD pesos, power;
VS noms;


// Calucla els indexs de poder de Shapley considerant totes  les
   permutacions
void permuta(int i) {

  // Considerem aquesta permutacio
  if (i == n) {
    double sumpes = 0;

    // Busquem el pivot en aquesta permutacio
    for (int j = 0; j < n; ++j) {
      sumpes += pesos[permutacio[j]];

      // Pivot trobat, actualitzem el poder
      if(sumpes >= obj) {
        ++power[permutacio[j]];
        ++total;
        return;
      }
    }
    ++total;
    return;
  }


  // Generem totes les possibles permutacions
  for (int x = 0; x < n; ++x) {
    if (not usat[x]) {
      usat[x] = true;
      permutacio[i] = x;
      permuta(i + 1);
      usat[x] = false;
    }
  }

}
```

```
int main() {

  cout << "Introdueixi␣el␣nombre␣de␣jugadors:" << endl;
  cin >> n; // nombre de jugadors

  cout << "Introdueixi␣el␣valor␣objectiu:" << endl;
  cin >> obj;  // pes necessari per guanyar el joc

  pesos = VD(n);
  noms  = VS(n);
  for (int i = 0; i < n ; ++i) {
    cout << "Introdueixi␣el␣nom␣i␣el␣pes␣del␣jugador␣" << i << ":" << endl
       ;
    cin >> noms[i] >>  pesos[i];
  }

  power = VD(n,0);
  permutacio = VE(n);
  usat = VE(n, false);
  total = 0;
  permuta(0);

  // Normalitzo els indexs de poder
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    power[i] = power[i]/total;

  cout.setf(ios::fixed);
  cout.precision(4);
  cout << endl << endl << "-----------------------------------------------"
     << endl;
  cout << "El␣indexs␣de␣poder␣de␣Banzhaf␣son:" << endl << endl;
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    cout << setw(14) << noms[i] << setw(10) << power[i] << endl;

}
```

## 3. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik amb matriu de restriccions 1r model

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
using namespace std;


typedef vector<int> VE;
typedef vector<double> VD;
typedef vector<VE> VVE;
typedef vector<string> VS;
```

```
int n;
double obj, total;
VE usat;
VD pesos, power;
VVE compet;
VS noms;


// Retorna cert si el jugador i es compatible amb la permutacio actual
bool compatible(int i) {
  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    if (compet[i][j] == 0 and usat[j] == 1)
      return false;
  }
  return true;
}

void shapley(double suma, int guanyador) {

  bool trobat = false;
  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    if (not usat[j] and compatible(j)) {
      trobat = true;
      // Si trobem el pivot per primer cop no cal seguir buscant
      if (suma + pesos[j] >= obj and (guanyador == -1)) {
        usat[j] = true;
        shapley(suma, j);
        usat[j] = false;
        continue;
      }

      // Seguim generant la perumtacio
      usat[j] = true;
      shapley(suma + pesos[j], guanyador);
      usat[j] = false;
    }
  }

  if (not trobat and guanyador != -1) {
    ++power[guanyador];
    ++total;
  }

}


int main() {
  cout << "Introdueixi el nombre de jugadors:" << endl;
  cin >> n; // nombre de jugadors
  cout << n << endl;

  cout << "Introdueixi el valor objectiu:" << endl;
  cin >> obj;  // pes necessari per guanyar el joc
```

```
  cout << obj << endl;

  pesos = VD(n);
  power = VD(n,0);
  noms  = VS(n);
  for (int i = 0; i < n ; ++i) {
    cout << "Introdueixi␣el␣nom␣i␣el␣pes␣del␣jugador␣" <<  i << ":" <<
       endl;
    cin >> noms[i] >> pesos[i];
    cout << noms[i] << '␣' << pesos[i] << endl;
  }


  compet = VVE (n , VE(n));
  cout << "Introdueixi␣la␣matriu␣de␣competibilitat␣(1␣compatible␣0␣
     incompatible):" << endl;
  for (int i = 0; i < n ; ++i){
    for (int j = 0; j < n ; ++j) {
      cin >> compet[i][j];
      cout << compet[i][j] << '␣';
    }
    cout << endl;
  }

  total = 0;
  usat = VE(n, false);
  shapley(0, -1);


  // Normalitzem els inedxs de poder
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    power[i] = power[i]/total;


  cout.setf(ios::fixed);
  cout.precision(4);
  cout << endl << endl << "---------------------------------------------"
     << endl;
  cout << "El␣indexs␣de␣poder␣de␣Shapley␣␣son:" << endl << endl;
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    cout << setw(14) << noms[i] << setw(10) << power[i] << endl;

}
```

## 4. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik amb matriu de restriccions 2n model

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
using namespace std;
```

```
typedef vector<int> VE;
typedef vector<double> VD;
typedef vector<VE> VVE;
typedef vector<string> VS;


int n;
double obj, total;
VE usat, factorial;
VD pesos, power;
VVE compet;
VS noms;


// Retorna cert si el jugador i es compatible amb la permutacio actual
bool compatible(int i) {
  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    if (compet[i][j] == 0 and usat[j] == 1)
      return false;
  }
  return true;
}

int compta_jugadors() {
  int ans = 0;
  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    if (usat[j] == 0)
      ++ans;
  }
  return ans;
}

void shapley(double suma) {

  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    if (not usat[j] and compatible(j)) {

      // Si trobem el pivot no cal seguir buscant
      if (suma + pesos[j] >= obj) {
        int val = compta_jugadors() - 1;
        power[j] += factorial[val];
        total    += factorial[val];
        continue;
      }

      // Seguim generant la perumtacio
      usat[j] = true;
      shapley(suma + pesos[j]);
      usat[j] = false;
    }
  }

}
```

```
int main() {
  cout << "Introdueixi␣el␣nombre␣de␣jugadors:" << endl;
  cin >> n; // nombre de jugadors
  cout << n << endl;

  factorial = VE(n + 1, 1);
  for (int j = 1; j <= n; ++j)
    factorial[j] = factorial[j - 1]*j;

  cout << "Introdueixi␣el␣valor␣objectiu:" << endl;
  cin >> obj;  // pes necessari per guanyar el joc
  cout << obj << endl;

  pesos = VD(n);
  power = VD(n,0);
  noms  = VS(n);
  for (int i = 0; i < n ; ++i) {
    cout << "Introdueixi␣el␣nom␣i␣el␣pes␣del␣jugador␣" <<  i << ":" <<
       endl;
    cin >> noms[i] >> pesos[i];
    cout << noms[i] << '␣' << pesos[i] << endl;
  }


  compet = VVE (n , VE(n));
  cout << "Introdueixi␣la␣matriu␣de␣competibilitat␣(1␣compatible␣0␣
     incompatible):" << endl;
  for (int i = 0; i < n ; ++i){
    for (int j = 0; j < n ; ++j) {
      cin >> compet[i][j];
      cout << compet[i][j] << '␣';
    }
    cout << endl;
  }

  total = 0;
  usat = VE(n, false);
  shapley(0);

  // Normalitzem els inedxs de poder
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    power[i] = power[i]/total;


  cout.setf(ios::fixed);
  cout.precision(4);
  cout << endl << endl << "-------------------------------------------"
     << endl;
  cout << "El␣indexs␣de␣poder␣de␣Shapley␣␣son:" << endl << endl;
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    cout << setw(14) << noms[i] << setw(10) << power[i] << endl;
```

```
}
```

## 5. Codi en C++ de l'índex de poder de Shapley-Shubik amb matriu de restriccions 3r model

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
using namespace std;


typedef vector<int> VE;
typedef vector<double> VD;
typedef vector<VE> VVE;
typedef vector<string> VS;


int n;
double obj, total;
VE usat, coalicio, visitat;
VD pesos, power;
VVE compet;
VS noms;


// Retorna cert si el jugador i es compatible amb la permutacio actual
bool compatible(int i) {
  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    if (compet[i][j] == 0 and visitat[j] == 1)
      return false;
  }
  return true;
}

void shapley(int pos) {

  if (pos == n) {
    double suma = 0;
    visitat = VE(n, 0);
    for (int j = 0; j < n; ++j) {
      int jug = coalicio[j];
      if (not compatible(jug)) continue;
      visitat[jug] = 1;
      suma += pesos[jug];
      if (suma >= obj) {
        ++power[jug];
        ++total;
      }
    }
    return;
  }
```

```
  for (int j = 0; j < n; ++j) {
    if (not usat[j]) {
      // Seguim generant la perumtacio
      usat[j] = true;
      coalicio[pos] = j;
      shapley(pos + 1);
      usat[j] = false;
    }
  }

}


int main() {
  cout << "Introdueixi el nombre de jugadors:" << endl;
  cin >> n; // nombre de jugadors
  cout << n << endl;

  cout << "Introdueixi el valor objectiu:" << endl;
  cin >> obj;  // pes necessari per guanyar el joc
  cout << obj << endl;

  pesos = VD(n);
  power = VD(n,0);
  noms  = VS(n);
  for (int i = 0; i < n ; ++i) {
    cout << "Introdueixi el nom i el pes del jugador " <<  i << ":" <<
        endl;
    cin >> noms[i] >> pesos[i];
    cout << noms[i] << ' ' << pesos[i] << endl;
  }


  compet = VVE (n , VE(n));
  cout << "Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0
     incompatible):" << endl;
  for (int i = 0; i < n ; ++i){
    for (int j = 0; j < n ; ++j) {
      cin >> compet[i][j];
      cout << compet[i][j] << ' ';
    }
    cout << endl;
  }

  total = 0;
  usat = VE(n, false);
  coalicio = VE(n, 0);
  shapley(0);

  // Normalitzem els inedxs de poder
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    power[i] = power[i]/total;
```

```
  cout.setf(ios::fixed);
  cout.precision(4);
  cout << endl << endl << "--------------------------------------------"
     << endl;
  cout << "El␣indexs␣de␣poder␣de␣Shapley␣␣son:" << endl << endl;
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    cout << setw(14) << noms[i] << setw(10) << power[i] << endl;

}
```

## 6. Codi en C++ de l'índex de poder de Banzhaf amb matriu d'incompetències

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
using namespace std;


typedef vector<int> VE;
typedef vector<double> VD;
typedef vector<VE> VVE;
typedef vector<string> VS;

int n, punts_totals;
double obj;
VE coalicio;
VD pesos, power;
VS noms;
VVE compet;


// Retorna cert si el jugador i es compatible amb la colaicio actual
bool compatible(int i) {
  for (int j = 0; j < int(compet[i].size()); ++j) {
    if (coalicio[j] == 1 and compet[i][j] == 0)
      return false;
  }
  return true;
}

// Fa tots els precalculs necessaris per a trobar el index de Banzhaf
// iterant sobre totes les possibles permutacions
void poder_Banzhaf(int i){

  // Considero la coalicio actual
  if (i == n) {
    double sum = 0;
    for (int j = 0; j < n; ++j) {
      sum += coalicio[j]*pesos[j];
    }
    //Si es guanyador sumo els index
```

```
    if (sum >= obj) {
      for (int j = 0; j < n; ++j) {
        if (coalicio[j] == 1 and (sum - pesos[j]) < obj) {
          ++power[j];
          ++punts_totals;
        }
      }
    }
    return;
  }


  // Si es compatible considero la coalicio incloentlo
  if (compatible(i)) {
    coalicio[i] = 1;
    poder_Banzhaf(i + 1);
    coalicio[i] = 0;
  }

  // Considero la colacio sense el jugador i
  poder_Banzhaf(i + 1);

}




int main() {

  cout << "Introdueixi el nombre dels jugadors: " << endl;
  cin >> n; // nombre de jugadors

  cout << "Introdueixi el valor objectiu: " << endl;
  cin >> obj;  // pes necessari per guanyar el joc


  pesos = VD(n);
  power = VD(n,0);
  noms  = VS(n);

  for (int i = 0; i < n ; ++i) {
    cout << "Introdueixi el nom i el pes del jugador " << i + 1 << ":" <<
        endl;
    cin >> noms[i] >> pesos[i];
  }

  coalicio = VE(n, 0);
  compet = VVE (n , VE(n));
  cout << "Introdueixi la matriu de competibilitat (1 compatible 0
     incompatible)" << endl;
  for (int i = 0; i < n ; ++i){
    for (int j = 0; j < n ; ++j)
      cin >> compet[i][j];
  }
```

```
  poder_Banzhaf(0);

  // Normalitzem els indexs de poder
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    power[i] = power[i]/punts_totals;

  cout.setf(ios::fixed);
  cout.precision(4);
  cout << endl << endl << "----------------------------------------------"
     << endl;
  cout << "El␣indexs␣de␣poder␣de␣Banzhaf␣son:" << endl << endl;
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    cout << setw(14) <<  noms[i] << setw(10)  << power[i] << endl;

}
```

# Bibliografia


[Nas50] John Nash. "Equilibrium points in n-person games". A: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36.1 (1950), pàg. 48 - 49.

[LSS53] L.S.Shapley. *A value for n-person games. Contributions to the theory of games II.* Princeton: Princeton University Press, 1953.

[Dub75] P. Dubey. "On the uniqueness of the Shapley value." A: *International Journal of Game Theory* 4 (1975), pàg. 131 - 139.

[G B93] I. García-Jurado G. Bergantiños F. Carreras. "Cooperation when some players are incompatible". A: *Methods and Models of Operation Research* 38 (1993), pàg. 187 - 201.

[Xia94] Christos H. Papadimitriou Xiaotie Deng. "On the Complexity of Cooperative Solution Concepts". A: *Mathematics of Operations Research* 19.2 (1994), pàg. 257 - 266. ISSN: 0364765X, 15265471. URL: `http://www.jstor.org/stable/3690220`.

[F C96] J. Freixas F. Carreras. "Complete simple games". A: *Mathematical Social Sciences* 32 (1996), pàg. 135 - 155.

[Tay99] Zwicker W. S Taylor A. D. *Simple games: Desirability relations, trading, pseudoweightings.* Princeton: Princeton University Press, 1999.

[Fre04] Josep Freixas. "The dimension for the European Union Council under the Nice rules". A: *European Journal of Operational Research* 156 (2004), pàg. 415 - 419.

[FA05] Antonio Magaña Francesc Carreras i Rafel Amer. *Teoría de juegos.* Barcelona: Edicions UPC, 2005.

[PS07] Bezalel Peleg i Peter Sudhölter. *Introduction to the Theory of Cooperative Games.* Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.

[TP09] Allan D. Taylor i Allison M. Pacelli. *Mathematics and politics.* New York: Springer, 2009.

[Fre10] J. Freixas. "On ordinal equivalence of the Shapley and Banzhaf values for cooperative games". A: *International Journal of Game Theory* 39 (2010), pàg. 513 - 527.

[EH11] Ezra Einy i Ori Haimanko. "Characterization of the Shapley–Shubik power index without the efficiency axiom". A: *Games and Economic Behavior* 73.2 (2011), pàg. 615 - 621. ISSN: 0899-8256. DOI: `http://dx.doi.org/10.1016/j.geb.2011.03.007`. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825611000583`.

[Jac11] Matthew O. Jackson. *A Brief Introduction to the Basics of Game Theory.* Stanford, 2011.