



Escola de Camins

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

**Un modelo no-lineal de
homogeneización para pórticos de
hormigón armado confinado –
Tratamiento de la estructura como
material compuesto**

Treball realitzat per:

Gabriel Barbat Vlad

Dirigit per:

Sergio Horacio Oller Martínez

Màster en:

Enginyeria de Camins, Canals i Ports

Barcelona, **Junio de 2016**

Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental

TREBALL FINAL DE MÀSTER

Agradecimientos

Al profesor Sergio Oller por decidirse una vez más a ser mi tutor, guiarme en la realización de este trabajo y por su apoyo y atención que me ha dedicado durante todos estos años.

Asimismo me gustaría agradecer a los doctores Lucia Barbu, Fermín Otero, Xavier Martínez y Cuauhtemoc Escurdero por la ayuda y el apoyo propiciados durante la realización de este trabajo.

A mi familia, amigos y compañeros por el apoyo incondicional, el ánimo constante recibidos durante el desarrollo de este trabajo y durante toda la duración de mi estancia en la Escuela de Caminos.

Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo para el análisis de estructuras de barras de hormigón armado que considera el comportamiento no lineal de la armadura longitudinal, de los cercos y del hormigón. El estudio del estado del conocimiento que se ha realizado muestra que el confinamiento, aportado por los cercos, altera el comportamiento no lineal de las barras, añadiéndoles resistencia y ductilidad, mejorando su respuesta y que, por lo tanto, el confinamiento debe ser incluido en un análisis estructural avanzado. La respuesta no lineal de las estructuras cambia, especialmente en las etapas avanzadas del proceso de carga, mejorando sobre todo su resistencia y su comportamiento post pico. En consecuencia, el confinamiento no puede ser ignorado por el ingeniero a la hora de proyectar o evaluar el comportamiento de las estructuras de hormigón armado.

El análisis numérico del efecto del confinamiento producido por los cercos sobre una barra es difícil de realizar debido a los complejos fenómenos no lineales originados por la plastificación de los cercos y de la armadura longitudinal, así como por el comportamiento no lineal de la matriz de hormigón. Es especialmente difícil modelizar correctamente el estado tensional y deformacional en tres dimensiones, alterado por la no linealidad de los materiales, puesto que el problema depende de muchos parámetros, algunos de los cuales son difíciles de cuantificar y, también, por la compleja interacción que se produce entre los materiales componentes. Por esto, en el presente trabajo se ha desarrollado un modelo de uso sencillo para estructuras de barras de hormigón armado confinado. Dicho modelo, que se basa en la teoría de la homogeneización, trata la estructura como un material compuesto, asegura una buena solución al análisis estructural y puede ser introducido fácilmente en un programa clásico de estructuras de barras. El comportamiento no lineal de los materiales que se ha implementado considera el modelo de daño para la degradación del hormigón y el modelo elasto-plástico para el del acero. El modelo no lineal unidimensional desarrollado se ha introducido en un programa de ordenador para calcular estructuras de barras considerando el confinamiento del hormigón armado creado en Matlab. Los resultados calculados con el programa desarrollado han sido validados mediante comparación con resultados obtenidos con modelos basados en otros métodos y con resultados de ensayos experimentales de otros investigadores.

Los ejemplos de cálculo han mostrado que es necesario considerar el confinamiento en el cálculo de la estructura ya que la presencia de los cercos afecta de forma significativa la resistencia, la ductilidad y el daño de las barras de hormigón armado. Los ejemplos estudiados muestran que la respuesta de la estructura varía de forma significativa en función de parámetros como la separación entre cercos o su diámetro.

El modelo y el programa desarrollados facilitan considerar el efecto del confinamiento en el cálculo de la estructura, de forma que pueda ser utilizado de manera habitual en la práctica de proyecto. Los ejemplos muestran que incluir en el análisis el confinamiento producido por los cercos es posible y necesario para determinar el comportamiento real de la estructura. Se abre así la puerta a la posibilidad de considerar este fenómeno en el diseño de forma práctica, eficiente y habitual.

Abstract

In this work, a model for the analysis of reinforced concrete beam structures, which considers the nonlinear behavior of the longitudinal reinforcement, confinement stirrups and concrete, has been developed. The study of the state-of-the-art that has been performed shows that the confinement provided by the stirrups alters the nonlinear behavior of the bars, adding them strength and ductility, improving their response and that, therefore, confinement should be considered in an advanced structural analysis. The nonlinear response of structures changes especially in the advanced stages of the loading process, by improving their strength and post peak performance. Consequently, the engineer, when designing or evaluating the behavior of reinforced concrete structures cannot ignore the confinement.

The numerical analysis of the confinement effect of the stirrups on a beam is difficult to perform due to complex nonlinear phenomena caused by the yielding of the stirrups and of the longitudinal reinforcement, as well as by the nonlinear behavior of the concrete. It is especially difficult to model correctly the three dimensional stress and strain state, altered by the nonlinearity of the materials, since the problem depends on many parameters, some of which are difficult to quantify, as well as the complex interaction between the constituent materials. Therefore, in this work an easy to use model for beam structures composed of concrete, longitudinal steel and stirrups has been developed. This model is based on the homogenization theory, the structure being made of a composite material. The homogenized one-dimensional model which was developed, assures good results of the structural analysis and can be easily introduced in a classic computer program for beam structures. The nonlinear behavior of the material that has been implemented uses the damage model to describe the nonlinear behavior of concrete and the elasto-plastic model for steel. The one-dimensional nonlinear beam model has been introduced into a Matlab computer program, developed to calculate beam structures considering the confinement of concrete. The model has been validated by comparing the obtained results with results published by other researchers, calculated with other methods or obtained from experimental tests.

The examples of calculation have shown that confinement must be considered in the structural analysis since the presence of stirrups significantly affects the strength, ductility, and damage of the reinforced concrete beams. The examples of application show that the structural response varies greatly in function of parameters like the separation between stirrups or their diameter.

The developed model and the corresponding computer program facilitate considering the effect of confinement in structural analysis, so that it can be used in the design of structures. The examples show that including confinement stirrups in the analysis is possible and necessary, in order to calculate the actual behavior of the structure. Thus, it is feasible to consider this phenomenon in the design in a practical, effective and usual way.

Índice

Agradecimientos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Contenido del trabajo	3
2 Estado del conocimiento del comportamiento de las barras de hormigón armado con confinamiento	5
2.1 Conceptos generales.....	5
2.2 Procedimientos de análisis	11
2.3 Otros modelos existentes.....	14
2.4 Características del modelo propuesto.....	15
3 Modelo de homogeneización para barras de hormigón armado confinado	17
3.1 Deducción del equilibrio y la compatibilidad en la sección homogeneizada.....	17
3.1.1 Hipótesis consideradas	17
3.1.2 Comportamiento a axil del hormigón armado mediante la homogeneización “ad-hoc”	18
3.1.3 Comportamiento a flexión del hormigón armado mediante la homogeneización “ad-hoc”	40
3.1.4 Comportamiento a cortante del hormigón armado mediante la homogeneización “ad-hoc”	44
3.2 Formulación de la matriz de rigidez de la barra considerando la homogeneización del hormigón armado	51
3.2.1 Barra de hormigón armado sin cercos	51
3.2.2 Barra de hormigón armado de sección cuadrada con cercos – caso particular ...	53
3.2.3 Barra de hormigón armado de sección rectangular con cercos	53
3.3 Modelo de homogeneización en el caso tridimensional.....	54
3.3.1 Ecuación constitutiva elástica ortótropa en tres dimensiones	54
3.3.2 Deducción de las componentes del tensor constitutivo	55
4 No linealidad de las barras de hormigón armado confinado debida al daño en el hormigón	57
4.1 Ecuación de equilibrio dinámico para un sólido discreto.....	57
4.2 Problema no lineal y linealización de la ecuación de equilibrio	59
4.3 Método de Newton-Raphson para resolver la ecuación de equilibrio.....	63
4.4 Modelo de daño del hormigón	64
4.5 Criterio umbral de daño.....	65

4.6	Ley de evolución de la variable interna de daño	66
4.7	Tensor constitutivo de daño tangente	67
4.8	Implementación del modelo de daño en el modelo propuesto	68
4.8.1	Cálculo de las tensiones en el hormigón	70
4.8.2	Definición de la función umbral de daño	72
4.8.3	Determinación de la variable de daño	74
4.9	Aplicación del modelo de daño a una sección transversal definida por capas	75
4.9.1	Descomposición de los esfuerzos en tensiones para cada capa de la sección	77
4.9.2	Obtención de las tensiones mediante el modelo constitutivo antes descrito	78
4.9.3	Recomposición de los esfuerzos a partir de las tensiones introducidas en cada capa de la sección	79
5	Tratamiento del comportamiento no lineal elasto-plástico del acero de las barras de hormigón armado y confinado	89
5.1	Modelo de plasticidad para el acero de las armaduras	89
5.1.1	Plasticidad uniaxial de una barra de acero – caso simplificado	90
5.1.2	Plasticidad del acero en una barra homogeneizada de hormigón armado	93
5.2	Equilibrio estructural	105
5.3	Equilibrio de estructuras de barras de hormigón armado con cercos incluyendo el daño del hormigón y la plasticidad de las armaduras	107
6	Validación del modelo desarrollado y ejemplos de cálculo	111
6.1	Cálculo de una viga biapoyada	111
6.1.1	Ejemplo de validación	111
6.1.2	Influencia de los cercos en la respuesta de la estructura	114
6.2	Cálculo de una barra empotrada en un extremo	117
6.2.1	Cálculo de la barra considerando la armadura elástica	118
6.2.2	Influencia de la longitud de separación entre cercos	121
6.2.3	Influencia del diámetro de los cercos	122
6.2.4	Cálculo de la barra considerando la plasticidad del acero	122
6.2.5	Influencia de la separación entre cercos	127
6.2.6	Influencia del diámetro de los cercos	128
6.2.7	Comportamiento de la barra a tracción	128
6.2.8	Influencia de la energía de fractura del hormigón	130
6.2.9	Comparación de los distintos comportamientos de los cercos	131
6.3	Cálculo de un pórtico de 1 piso	133
7	Conclusiones y futuras líneas de investigación	139
7.1	Conclusiones del trabajo	139
7.1.1	Conclusiones sobre el modelo desarrollado	139
7.1.2	Conclusiones sobre el programa de cálculo desarrollado	140

7.1.3	Conclusiones sobre los resultados obtenidos	140
7.2	Líneas futuras de trabajo	141
	Referencias	143
	A1 Matriz de rigidez incluyendo la deformación por cortante	149
A1.1	Deducción de las ecuaciones básicas	149
A1.2	Matriz de rigidez incluyendo la deformación por cortante	152
	A2 Cortante en secciones mixtas Corte Recto	155
A2.1	Deducción del equilibrio y la compatibilidad en la sección.....	155

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

En este trabajo se desarrolla un modelo para la evaluación numérica del comportamiento de pórticos de hormigón armado considerando el efecto de la armadura transversal. En el modelo se considera la no linealidad tanto del acero (armadura longitudinal y cercos) como del hormigón.

En las barras de hormigón armado, el uso de cercos de acero es obligatorio por las normativas, por una parte, para asegurar el confinamiento del núcleo de hormigón y, por otra parte, para incrementar la resistencia de la barra ante el esfuerzo cortante. Sin embargo, en la actualidad, a la hora de proyectar un edificio o de evaluar el comportamiento del mismo mediante el método de los elementos finitos, se realiza el cálculo de la estructura sin considerar el efecto del confinamiento en la resistencia, la rigidez y la ductilidad de las barras provocado por los cercos de acero. Al aplicar las normativas, se da por sentado que los mencionados efectos favorables se van a producir, pero éstos no son cuantificados adecuadamente. No obstante estudios recientes han mostrado que los cercos de acero influyen de manera significativa en el comportamiento estructural, de la misma manera que lo hacen los refuerzos mediante encamisados metálicos en las barras de hormigón armado. Dicho comportamiento depende, entre otros factores, de la separación de los cercos o de su diámetro. Sin embargo las normas no consideran estos parámetros al calcular el comportamiento de la estructura. El complejo comportamiento no lineal de los cercos metálicos en el interior de la barra de hormigón armado no se incluye de manera habitual en el cálculo de la estructura y en la práctica del diseño. Junto con el confinamiento que producen los cercos, éstos actúan, a la vez, en la estructura mediante su capacidad para resistir esfuerzos cortantes. Este último aspecto sí que está incluido y cuantificado en las normativas. Se argumenta que no considerar el confinamiento deja el cálculo del lado de la seguridad, ya que éste aumenta, sobre todo, la resistencia y mejora el comportamiento post-pico de la barra. Sin embargo, tiene un papel muy importante en el comportamiento no lineal de la barra de hormigón armado y, por lo tanto, debería considerarse tanto en el diseño como en la realización de cálculos no lineales mediante el método de elementos finitos.

Si existiese la posibilidad de considerar el confinamiento de manera sencilla y eficaz en el cálculo, seguramente todos los argumentos para no tenerlo en cuenta desaparecerían y su efecto se incluiría en el cálculo de las estructuras de hormigón armado de forma habitual y generalizada.

En las últimas décadas, muchos investigadores (Claeson 1999, Powanusorn 2003, Montoya et al. 2001, etc.) han estudiado el confinamiento en las barras de hormigón armado, inducido tanto por cercos como por encamisados metálicos. Entre otros aspectos, se ha estudiado el aumento de resistencia y ductilidad de las barras provocados por el mencionado confinamiento. Estos estudios han establecido que el confinamiento afecta en gran medida el comportamiento no lineal de las barras, mejorando el comportamiento sobre todo post pico, de manera que no puede ser ignorado por el ingeniero a la hora de proyectar o investigar el comportamiento de las estructuras de hormigón armado. Sin embargo, en la actualidad no se suele considerar el efecto no lineal del confinamiento producido por los cercos dentro del hormigón armado. Ello se debe principalmente a que el análisis de dicho efecto es difícil de determinar por el comportamiento no lineal del hormigón y del acero así como por los diferentes grados de confinamiento que se desarrolla en distintos puntos en el interior del hormigón.

1.2 Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es desarrollar una formulación de bajo coste de utilización que permita el cálculo de pórticos de hormigón armado considerando el efecto no lineal de la armadura, longitudinal y transversal, y el daño en el hormigón. Dicha formulación permitirá calcular el efecto del confinamiento debido a los cercos en régimen no lineal. Para alcanzar el objetivo principal será necesario:

- Encontrar una formulación homogeneizada que describa el efecto del confinamiento de los cercos en el núcleo de hormigón de la barra para el cálculo de estructuras porticadas. Dicha formulación se basará en la teoría de homogeneización, tratando el hormigón armado como un material compuesto y considerará la mejora del comportamiento de la barra a esfuerzo axil, flector y cortante por la presencia de los cercos. Partiendo de consideraciones sobre el equilibrio y la compatibilidad, se desarrolla una formulación que inicialmente será lineal. La no linealidad se incorporará posteriormente, al introducir los modelos constitutivos de los materiales.
- Introducir el modelo no lineal de daño del hormigón en la formulación desarrollada. Se implementará para ello el cálculo no lineal de la estructura de barras realizando la descomposición por capas de las tensiones de la sección y la discretización de la estructura en varios elementos de barra.
- Introducir el comportamiento no lineal elasto-plástico del acero de la armadura longitudinal y de los cercos en la formulación desarrollada.
- Desarrollo de un programa de ordenador que realice el cálculo de estructuras de barras con el modelo no lineal propuesto que considere los efectos producidos por la presencia de cercos, tanto de confinamiento como de capacidad a cortante. Dicho programa de ordenador se desarrollará utilizando la herramienta de cálculo MATLAB.
- Realizar el cálculo de varios ejemplos y validar el modelo propuesto mediante resultados experimentales existentes. Se estudiará detalladamente la respuesta de estructuras porticadas, incluyendo su comportamiento no lineal. Se cuantificarán con el modelo propuesto, el confinamiento y la resistencia a cortante. Con ello se mostrará la necesidad de realizar un diseño de la estructura considerando el confinamiento producido por los cercos.
- Estudio de la respuesta de la estructura en función de los parámetros que intervienen en el confinamiento.

Dicha formulación considerará el efecto del confinamiento producido por los cercos en el hormigón armado, aportando rigidez, resistencia y ductilidad, y reproduciendo adecuadamente el comportamiento no lineal de la barra de hormigón. Asimismo la formulación debe tener en cuenta el aumento de capacidad, resistencia y ductilidad de la estructura en resistir esfuerzos cortantes

debido a los cercos. De esta manera, la formulación debe producir resultados similares a los que se producen en una estructura real.

Se asegurará, asimismo, que el modelo propuesto sea fácil de aplicar en el diseño de este tipo de estructuras, que los resultados sean similares a los que se han obtenido en ensayos de laboratorio, y que se obtengan con una velocidad de resolución comparable con la de las estructuras de pórticos simples.

1.3 Contenido del trabajo

Este trabajo está compuesto por 7 capítulos y 2 anejos. En el primer capítulo se presentan la motivación y los objetivos sobre los que se fundamenta el trabajo. En el capítulo dos, tras una consulta exhaustiva de la literatura existente, se realiza un estudio del estado del conocimiento en el ámbito del comportamiento de las barras de hormigón armado confinado y se muestra la necesidad de considerarlo en el cálculo de estructuras a partir de las investigaciones realizadas por distintos autores. Se presentan, asimismo, las distintas formas que se han desarrollado para considerar el confinamiento del núcleo de la sección.

En el capítulo tres se desarrolla el modelo unidimensional propuesto, incluyendo las hipótesis en que se basa para tratar el confinamiento producido por cercos o por un encamisado metálico exterior de las barras de hormigón armado. Se formula el modelo para estructuras de barras, donde la rigidez depende de la cuantía de cercos, de sus propiedades y de su geometría (o de la forma del encamisado metálico). En realidad, todos los ejemplos que se han introducido en el presente trabajo son para el caso de confinamiento con cercos. Al final del capítulo se muestra también la formulación del modelo tridimensional, que ha sido desarrollado con el objetivo de ser introducido en un futuro en un programa de cálculo de estructuras que utilice el método de los elementos finitos. De esta manera, dicho programa permitirá considerar el confinamiento producido por los cercos en las barras de hormigón de manera más detallada.

En el capítulo cuatro se presenta detalladamente el tratamiento de la no linealidad del modelo unidimensional considerando el daño del hormigón. Se ha introducido un modelo de daño exponencial que utiliza el criterio de umbral de daño de Mohr-Coulomb modificado. Este modelo permite considerar el comportamiento no lineal del hormigón, que se encuentra confinado, mediante la descomposición de las tensiones de la sección en capas y a través de la discretización de las barras de la estructura en varios elementos de barra.

En el capítulo cinco se presenta el tratamiento de la no linealidad del modelo desarrollado considerando el comportamiento no lineal elasto-plástico del acero, tanto de la armadura longitudinal como de los cercos.

En el capítulo seis se muestran distintos ejemplos de aplicación del modelo desarrollado. Se realizan ejemplos de validación donde se comparan los resultados obtenidos con los obtenidos por otros investigadores (experimentales y numéricos). Se realiza, asimismo, el estudio del comportamiento de la estructura en función de los parámetros implicados en el desarrollo de confinamiento en las barras. Los ejemplos que se consideran permiten ilustrar el procedimiento propuesto, mostrando así el potencial del modelo desarrollado para resolver el problema planteado.

Finalmente, en el capítulo séptimo se presentan las conclusiones extraídas de este trabajo sobre el cálculo de barras de hormigón armado confinado y sobre el modelo desarrollado a partir de las observaciones realizadas en los ejemplos presentados. Se presentan, asimismo, los trabajos futuros que se pretende llevar a cabo como continuación del presente trabajo. A continuación se incluye una lista de referencias consultadas y utilizadas en el presente trabajo. También se

4 Modelo no-lineal de homogeneización para pórticos de hormigón armado confinado

incluyen dos anejos al final del trabajo, uno sobre la obtención de la matriz de rigidez de una barra incluyendo la deformación por cortante y otro sobre el cálculo del esfuerzo cortante en secciones compuestas de varios materiales.

Capítulo 2

Estado del conocimiento del comportamiento de las barras de hormigón armado con confinamiento

2.1 Conceptos generales

Las barras de hormigón armado confinadas presentan una muy importante mejora de la respuesta estructural ante las cargas aplicadas al aumentarse la resistencia y la ductilidad del hormigón (ver Figura 2.1). La presencia de cercos produce un retraso en la expansión y propagación del daño en el hormigón y, además, las tensiones internas que se desarrollan en la barra hacen que su modo de fallo pase de ser frágil a ser dúctil (Montoya et al. 2006, Montoya (2000), Powanusorn 2003, Yin et al. 2011).

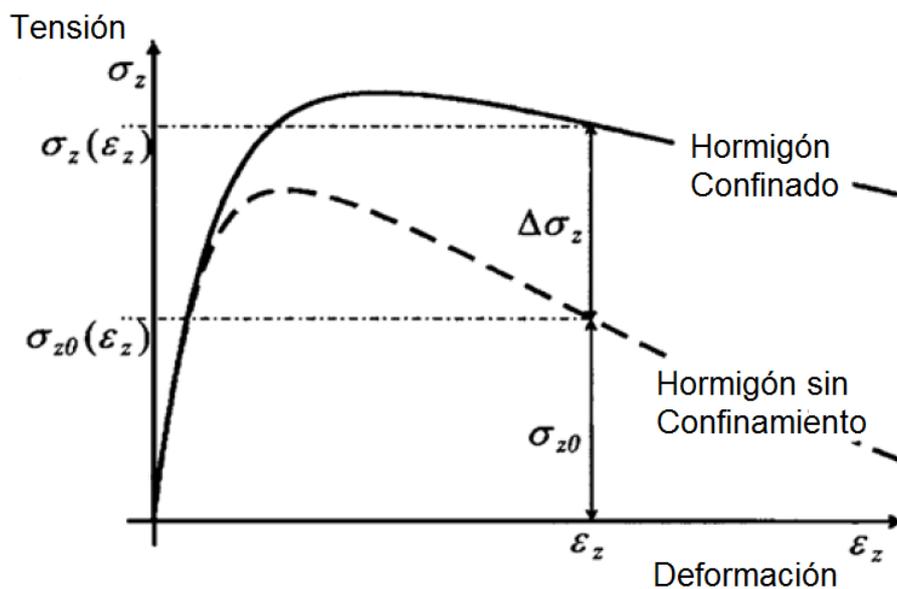


Figura 2.1. Mejora del comportamiento de la barra de hormigón armado debido al confinamiento (Thanthirige et al. 2013)

El comportamiento post pico del hormigón armado varía de forma considerable debido a su confinamiento. Bajo cargas de compresión, el hormigón armado se expande lateralmente; en su interior se producen tensiones de confinamiento en presencia de cercos o encamisados metálicos que se oponen a la expansión del núcleo de hormigón. Se produce, entonces, un estado de compresión triaxial en el hormigón que mejora su comportamiento, aumentado significativamente la ductilidad y la resistencia de la barra (Braga et al. 2006, Laterza 1996, Harmon et al. 1998). En las barras de hormigón armado, el confinamiento puede ser producido por:

- Cercos
- Confinamiento externo, activo o pasivo
- Fibras FRP

En el caso de los cercos, el confinamiento se produce a causa de la expansión lateral del hormigón en la barra bajo cargas axiales de compresión. La deformación lateral de la barra tiene un efecto positivo y activa los cercos que, impidiendo parte de la expansión lateral, confinan el núcleo de hormigón (ver Figura 2.3).

El confinamiento producido por los cercos es distinto del que producen los encamisados metálicos; en éste último caso el acero permanece en el rango elástico mientras que en el caso de los cercos puede producirse plastificación (Rousakis y Karabinis, 2008).

Con el confinamiento del hormigón se desarrolla un estado de compresión triaxial en el núcleo de la barra produciéndose, de esta forma, un estado de confinamiento pasivo al cargarse las barras de hormigón armado. Dicho confinamiento mejora el comportamiento de la barra ante las cargas aplicadas. Por una parte, el estado de compresión triaxial de la barra mejora su ductilidad y su resistencia. De esta forma, si el confinamiento es el adecuado, se puede mejorar de forma importante la resistencia y el comportamiento post-pico de la barra. La barra puede soportar, por lo tanto, mayores deformaciones y fallar de manera dúctil, mientras que sin confinamiento lo hará de forma frágil (ver Figura 2.2). En el hormigón sin confinar se desarrollan tracciones internas que reducen su resistencia y producen el ablandamiento del hormigón, a pesar de estar sujeto a cargas axiales de compresión (Montoya et al. 2001, Montoya et al. 2004, Nallim y Oller 2012).

Por ello, los cercos proporcionan resistencia y rigidez al hormigón no únicamente de forma directa ante los esfuerzos cortantes de la barra, sino que también confina su núcleo interior. El confinamiento mejora el comportamiento estructural al retrasar la formación de fracturas y al aumentar la resistencia y la ductilidad de la barra (Powanusorn 2003).

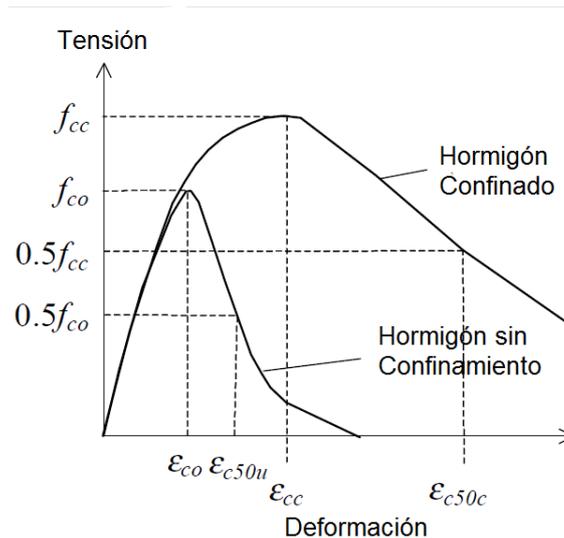


Figura 2.2. Comparación del comportamiento del hormigón confinado y sin confinar (Claeson 1999)

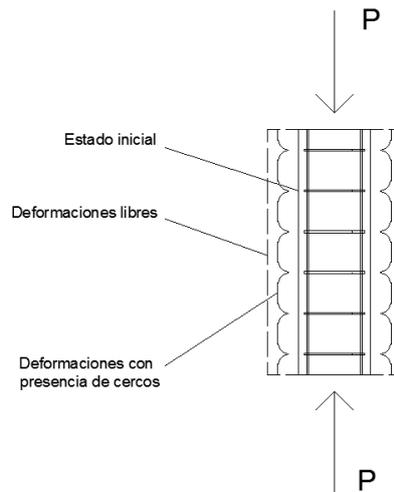


Figura 2.3. Deformaciones laterales en la barra por la presencia de cercos

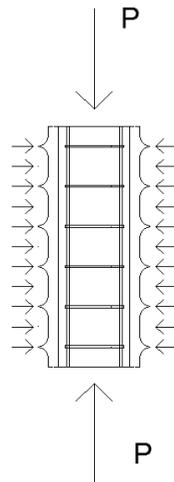


Figura 2.4. Tensiones laterales en la barra por la presencia de cercos

Los cercos producen unas tensiones laterales de confinamiento que no son uniformes a lo largo de la longitud de la barra (Braga et al. 2006). Estas tensiones laterales se distribuyen a lo largo del núcleo de hormigón con la ayuda de la armadura longitudinal, que contribuye a su distribución en la barra (Figura 2.4). Se observa que la tensión de confinamiento en la barra es máxima a la altura de los cercos y mínima en el punto medio entre dos cercos consecutivos (ver Figura 2.3). Al ser los esfuerzos de compresión transmitidos mediante la flexión de las barras longitudinales de acero, los esfuerzos no son transmitidos de forma uniforme en toda la barra. Sin embargo, muchos investigadores proponen modelos que consideran una distribución de tensiones homogénea como hipótesis para que el problema sea manejable como, por ejemplo, hacen Montoya et al. (2001). Otros, sin embargo, proponen aplicar coeficientes de reducción de la tensión de confinamiento en función de la posición en la barra del punto considerado (Braga et al. 2006), lo que supone también una simplificación del problema.

La presencia de cercos desarrolla otros fenómenos que también mejoran el comportamiento de la barra ante cargas de flexión y de cortante. Por una parte, el propio confinamiento que se produce en el núcleo interior mejora también la rigidez y resistencia ante este tipo de cargas (Reisi et al. 2008, Powanusorn 2003, Ziara et al. 1995, Berwander 1975, Park et al. 1982, Kent y Park 1971).

Por otra parte, participan directamente en gran medida a resistir los esfuerzos cortantes que se producen en las barras de hormigón armado por su disposición transversal a lo largo de la viga (Powanusorn 2003). Este fenómeno de mejora del comportamiento ante el esfuerzo cortante sí que se toma en consideración en las normas a la hora de realizar el diseño de las estructuras. En cambio, la mejora de ductilidad y resistencia debida al confinamiento proporcionado por los cercos no está cuantificada actualmente en la normativa española EHE-08 ni tampoco en las normas internacionales de forma sistemática. Las normas, como por ejemplo la española EHE-08, únicamente aseguran que haya un adecuado confinamiento imponiendo unos criterios para la distancia de separación entre cercos así como unas cuantías mínimas, además de imponer los criterios de resistencia a cortante.

Aparte de la utilización de cercos, existe la posibilidad de confinar las barras de hormigón armado también con un confinamiento externo, que se coloca adicionalmente a la instalación de los cercos. De forma general, el confinamiento de las barras de hormigón armado puede ser pasivo o activo (Reisi et al. 2008, Rousakis y Karabinis 2008, Razvi y Saatcioglu 1999):

- El confinamiento pasivo consiste en restringir las deformaciones laterales de la barra con hormigón confinante, elementos de acero o FRP. De esta forma se crean tensiones internas crecientes de compresión en la barra al ir aumentando la compresión axial en la misma. Los cercos también proporcionan confinamiento pasivo a la barra de hormigón armado.
- El confinamiento activo consiste, en cambio, en aplicar una carga de presión lateral en la barra de hormigón armado desde el primer momento, sin que ésta dependa del aumento de carga axial ni de la expansión lateral que se produce.

La presencia de los cercos es esencial para el comportamiento de la estructura ante cargas horizontales y verticales. Sin los cercos no se produce el adecuado confinamiento de las barras de hormigón armado y la rotura se produce de forma frágil. El aporte de ductilidad por parte del confinamiento permite su rotura dúctil. Los efectos favorables del confinamiento de las barras de hormigón se utilizan en la práctica de la construcción con distintos objetivos.

El confinamiento puede ser utilizado, por ejemplo, en el caso de los hormigones de alta resistencia, que tienen un comportamiento más frágil que los de resistencia normal. En ese caso, un aumento del número de cercos permite aumentar el confinamiento y pasar de una rotura frágil a una de tipo dúctil (Claeson 1999, Cusson y Paultre 1994, Candappa et al. 1999). Como ya se ha comentado, los cercos participan asimismo en los mecanismos que permiten resistir los esfuerzos cortantes que se producen en las barras de hormigón armado. Además, la presencia de cercos evita el pandeo de la armadura longitudinal de las barras de hormigón armado ya que añaden unas condiciones de contorno a la barra longitudinal de acero que reducen su longitud de pandeo. De allí la importancia del confinamiento, que afecta al comportamiento de la estructura en gran medida. Por todo ello, su presencia es obligatoria por normativa en todos los casos.

El aumento de resistencia y ductilidad que produce el confinamiento del hormigón también se utiliza en el caso de edificios antiguos, que se han diseñado para resistir cargas menores, y/o que necesitan ser reforzados con confinamientos externos activos o pasivos por razones de mantenimiento (Reisi et al 2008).

El aumento de confinamiento, resistencia y ductilidad puede conducir también a un importante ahorro de materiales, mano de obra, energía y tiempo de construcción de la estructura y, por lo tanto, conlleva una reducción de la contaminación generada (Yin et al. 2011, Einde et al. 2003).

De forma general, el confinamiento retrasa la formación de fracturas en la estructura (Powanusorn 2003). Este fenómeno se puede aprovechar, entre otras cosas, en el diseño sísmico de estructuras de hormigón armado para proporcionar la ductilidad necesaria, de forma que la estructura pueda

deformarse y disipar energía sin colapsar (Claeson 1999, Thanthirige et al. 2013, Reisi et al. 2008). De esta forma, en zonas sísmicas las normativas imponen la presencia del refuerzo transversal que asegure la disipación de energía al producirse su plastificación. Por ejemplo la normativa antisísmica española NCSE-02 impone también unas ciertas separaciones entre cercos a no superar en función de la aceleración de cálculo.

Se suele considerar que la cuantía impuesta por las normas asegura el adecuado confinamiento de la barra de hormigón armado, pero sin considerarse los mecanismos que intervienen en el confinamiento producido por los cercos. Así, pues, muchos los investigadores desarrollan modelos no lineales para el comportamiento de la barra de hormigón armado sin tomar en cuenta la influencia en el comportamiento de la cuantía de cercos incluso en los casos donde ésta interviene directamente en el problema y realizan la hipótesis de que el comportamiento de la barra no cambia en función de la cuantía de cercos o de su separación.

No considerar la presencia del confinamiento en el cálculo de la estructura hace que no se esté estudiando el comportamiento real de la estructura en varios aspectos esenciales. Por ejemplo, la presencia de los cercos afecta de forma significativa la resistencia, la ductilidad, la rigidez y el comportamiento no lineal de la barra. Asimismo, el pandeo de las barras longitudinales de acero depende de la separación entre cercos. En el caso donde la separación entre cercos es demasiado grande, o para aceros de poca resistencia, se puede producir el pandeo de la armadura longitudinal, reduciéndose el efecto favorable del refuerzo encamisado o de la presencia del cerco. Para evitarlo, es necesario poner por lo tanto separaciones de cercos suficientemente pequeñas (Rousakis y Karabinis 2008, Saatcioglu y Razvi 1992, Sankarasubramanian y Rajasekarans 1996).

Es importante apuntar que, a diferencia del núcleo de hormigón, el recubrimiento de la barra que está protegiendo a los cercos y a la armadura longitudinal de acero de los agentes agresores externos no se encuentra confinado por la presencia de los cercos metálicos. Por esto, dicho recubrimiento no se ve afectado por el aumento de resistencia y ductilidad del núcleo. Es importante, cuando se estudia la no linealidad de la barra, modelizar correctamente el fallo del recubrimiento de hormigón (Claeson 1999, Scott et al. 1982). Muchos investigadores no consideran el diferente estado tensional que se produce en el recubrimiento.

Como ya se ha comentado, el colapso de elementos de hormigón armado sometidos a cargas axiales también puede producirse por el pandeo de las armaduras longitudinales (ver Figura 2.5). Dicho modo de fallo se produce cuando la cuantía de cercos en la barra no es suficiente (ver Figura 2.6). Para tratar este modo de fallo los investigadores asumen que la deformación última del hormigón armado es la deformación del hormigón para la que se produce el pandeo del acero. De esta forma, se asume que la máxima deformación a compresión de la barra de hormigón es la deformación para la que el primer cerco plastifica y falla, iniciándose el proceso de pandeo de la armadura longitudinal. Algunos autores (Scribner 1986) consideran la hipótesis simplificada de que el pandeo ocurre entre 2 cercos consecutivos y que, en consecuencia, las barras actúan como si estuvieran fijas a los cercos. Sin embargo, tanto teóricamente como experimentalmente, se considera más correcto y en acorde con la realidad plantear que el pandeo ocurre entre más de 2 cercos, cambiándose las condiciones de contorno y la longitud de pandeo del redondo. Ello provoca una reducción de la resistencia y la ductilidad de la barra, así como una reducción importante del confinamiento (Papia et al. 1988; Albanesi et al. 1994).



Figura 2.5. Fallo de la barra de hormigón armado por pandeo de las armaduras (Berry y Eberhard 2005)

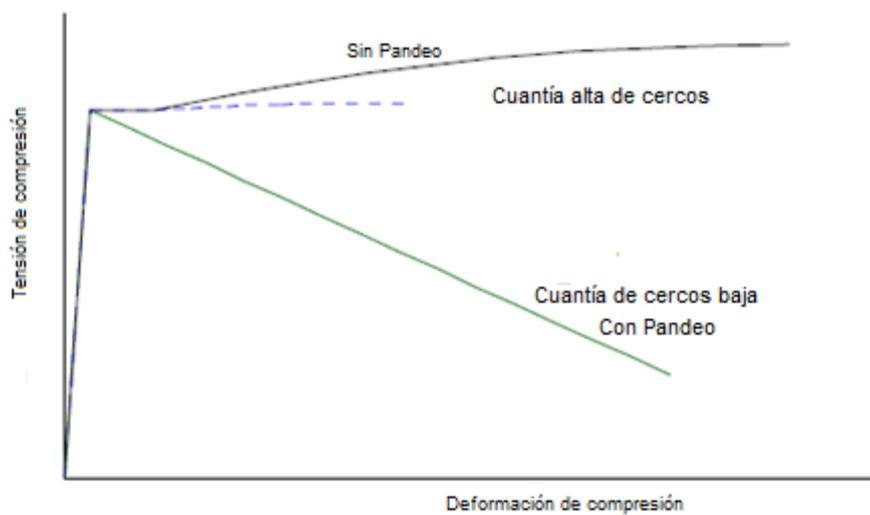


Figura 2.6. Curva fuerza-desplazamiento de la barra para diferentes cuantías de cercos. (Rousakis y Karabinis 2008)

Muchos investigadores reparan en que el grado de confinamiento que se produce en el hormigón depende la configuración que se da a los cercos. Su eficiencia depende no solamente de su longitud de separación sino también de su forma y de la manera como se colocan (ver Figura 2.7). Las espirales se suelen usar sobre todo en columnas circulares mientras que los cercos se ponen

habitualmente en barras rectangulares. No obstante se ha observado que los cercos rectilíneos son menos efectivos para el confinamiento del hormigón porque producen distribuciones de tensiones de confinamiento no uniformes (Yin et al. 2011). Se ha comprobado que incluso en barras de sección rectangular las armaduras transversales con forma circular en ciertas configuraciones tienen mayor ductilidad y resistencia que con cercos rectangulares. Además de la mejora del comportamiento de la barra, con dichas configuraciones se consigue reducir la cantidad de acero necesario, produciéndose así un considerable ahorro de energía y de materiales.

Concretamente, tras estudiar las distintas configuraciones que se muestran en la Figura 2.7, Yin et al. (2011) determinaron experimentalmente que las configuraciones más eficientes para introducir el adecuado confinamiento en las barras de hormigón son la (g) y la (h).

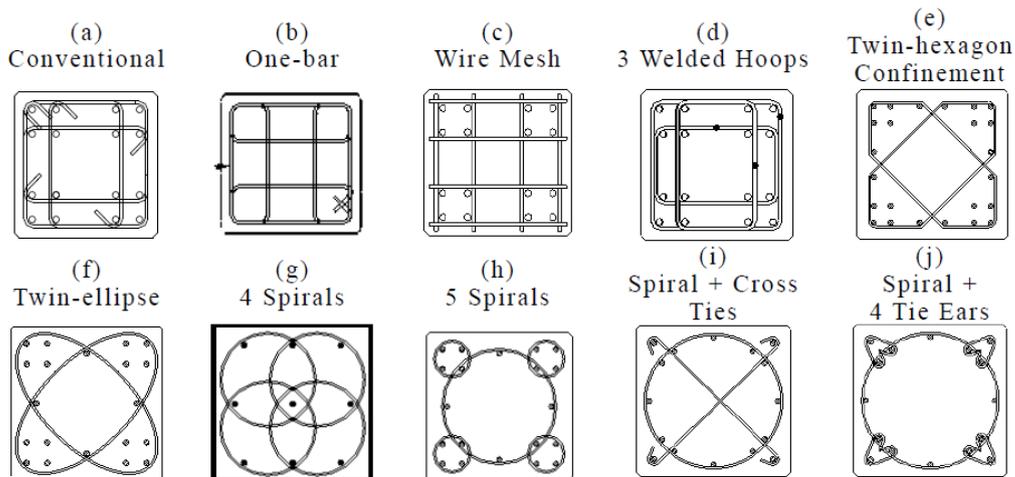


Figura 2.7. Distintas configuraciones posibles de armadura confinante (tomado de Yin et al. 2011)

2.2 Procedimientos de análisis

Los modelos existentes no consideran todos los fenómenos que se producen en el comportamiento mecánico del hormigón armado. Algunos de estos fenómenos son muy difíciles de tomar en cuenta ya que el comportamiento de los cercos dentro de las barras de hormigón armado es muy complejo. Se requiere considerar un gran número de variables en el problema para tratar la no linealidad de los materiales componentes así como su interacción en la barra de hormigón armado, algunas de las cuales son difíciles de obtener (Powanusorn 2003). Asimismo, la heterogeneidad y la anisotropía que se producen en los materiales componentes complican todavía más el análisis del problema (Molina 2011, Molina et al. 2009). Además, el confinamiento de las barras de hormigón armado depende del número de cercos, de su forma y de su disposición en la barra, además de su resistencia, de su separación y del valor de la carga axial aplicada (Thanthirige et al. 2013, Delalibera y Giongo, 2008).

El comportamiento de las estructuras de hormigón armado depende de las características de los materiales que lo componen y de su interacción con las barras longitudinales, los cercos y el encamisado exterior, en el caso de que esté presente. Es necesario, por lo tanto, modelizar correctamente dichos materiales componentes considerándose resistencia, rigidez, ductilidad, etc. (Braga et al. 2006).

Por ejemplo, es difícil conseguir que el modelo tenga en cuenta correctamente la fisuración que se produce en la barra. Sin embargo, para el problema del confinamiento de las barras de hormigón armado, es importante saber predecir el comienzo de la fisuración así como su evolución ya que provoca una redistribución de tensiones y cambia la rigidez del elemento (Powanusorn 2003).

Además, el comportamiento del hormigón, una vez fisurado, es no lineal ante carga elevadas y el acero también tiene un comportamiento no lineal al plastificar. Por todo esto es necesario considerar la no linealidad de los materiales componentes en el modelo de comportamiento considerado.

Existen distintos modelos de análisis para este tipo de problema (Montoya et al. 2001, Montoya et al. 2006):

- Los modelos empíricos basados en resultados experimentales, que consideran variables como la distribución de los cercos y los refuerzos, las dimensiones de la sección y las propiedades del material para predecir el comportamiento de la barra.
- Los modelos racionales, basados en la elasticidad no lineal, la plasticidad, la mecánica de fracturas o la mecánica de daño continuo.

Actualmente, se usan sobre todo modelos empíricos desarrollados por los investigadores a partir de resultados experimentales. Sin embargo se considera que es mejor usar modelos racionales, basados en el equilibrio, la compatibilidad y el comportamiento constitutivo de los materiales. Por una parte, los modelos racionales permiten comprender la respuesta y el mecanismo de fallo de las estructuras. De esta forma se proporciona al ingeniero la posibilidad y las herramientas adecuadas para diseñar mejor las estructuras en casos complejos o poco habituales. Además, las ecuaciones empíricas no consideran todos los aspectos del comportamiento mecánico de las barras de hormigón armado confinadas, sino únicamente aquellos que llegan a producirse en los respectivos experimentos en los que se han basado. Las curvas de tensión-deformación sólo son adecuadas para casos similares a los ensayos de donde se han obtenido y no son aplicables de forma general. Los resultados calculados mediante distintos modelos empíricos dependerán de las circunstancias en que se hicieron los correspondientes ensayos experimentales, como, por ejemplo, el tamaño de las piezas o su modo de fallo. No se puede asegurar que las ecuaciones empíricas desarrolladas coincidan con la realidad en el caso de elementos de tamaño superiores a los de los experimentos, ya que en estructuras de hormigón armado la resistencia se ve afectada, entre otros factores, por el tamaño de la pieza. Por todo ello, algunos modelos empíricos no son adecuados para el análisis con elementos finitos, pero pueden ser usados, en ciertos casos, en el diseño. Las normativas normalmente se basan en ajustes de curvas obtenidas a partir de resultados experimentales, donde se han aplicado conceptos de seguridad y confianza estructural (Powanusorn 2003, Bazant and Planas 1998, Montoya et al. 2001).

Muchos investigadores prefieren usar modelos empíricos basados en resultados experimentales ya que los modelos racionales son demasiado complicados y requieran el uso de muchas variables para su implementación. Sin embargo, consideran hipótesis excesivamente simplificadoras, como tratar al hormigón como un material isótropo, lo que no concuerda con la realidad de los ensayos experimentales al producirse la fisuración del hormigón (Powanusorn 2003).

A pesar de que las barras de hormigón armado están compuestas por dos materiales claramente diferenciables, hormigón y acero, para considerar su no linealidad no es suficiente introducir la no linealidad de los materiales componentes, sino que es necesario considerar también su interacción puesto que el comportamiento resultante es diferente (Powanusorn 2003). Se puede abordar el problema para tratar el material compuesto utilizando bien la teoría de homogeneización o bien la teoría de mezclas (Molina 2011, Molina et al. 2010, Oller 2015, Oller 2003, Rastellini et al. 2003, Car et al. 2000, Car 2000):

- La teoría de mezclas considera que el comportamiento del material compuesto depende únicamente del de cada uno de sus componentes, ponderando sus efectos en función de la participación volumétrica de cada uno.

- La teoría de homogeneización realiza el análisis de la estructura a dos escalas. Por una parte hay una escala macroscópica homogeneizada en la que se determina el comportamiento de la estructura. Por otra parte hay una escala microscópica en la que se obtiene el comportamiento del material compuesto en función de la respuesta de los componentes.

Un modelo constitutivo homogeneizado en tres dimensiones de las barras de hormigón armado confinado permite considerar, de forma detallada, el estado tensional y de deformaciones en todos los puntos de la pieza, lo que resulta conveniente debido a los fenómenos que se producen en el problema estudiado. Por una parte, permite considerar, de forma más detallada, la interacción entre los cercos metálicos y el hormigón de la barra. Y, por otra parte, permite considerar de forma más exacta el comportamiento no lineal de los materiales, incluyendo el efecto producido por los cercos, desarrollándose un aumento de resistencia y ductilidad en la barra de hormigón armado (Claeson 1999). Por ello, muchos modelos para estudiar el problema son en tres dimensiones.

También se han desarrollado modelos constitutivos en dos dimensiones, que simplifican la formulación, a cambio de considerar más fenómenos que alteran la distribución de tensiones, como es la flexión de la armadura longitudinal (Braga et al. 2006).

Sin embargo, en muchos casos es suficiente considerar un modelo unidimensional para tratar el problema del confinamiento en barras de hormigón armado, de forma que pueda ser utilizado para la práctica del diseño, introduciendo los parámetros importantes como la separación entre cercos o su diámetro, a fin de asegurar que las columnas diseñadas tengan la ductilidad necesaria (Claeson 1999).

Otros investigadores consideran modelos basados en la teoría de mezclas, pero dividiendo la sección por zonas para tratar así el confinamiento del núcleo de hormigón (Martínez et al. 2008) (ver Figura 2.8).

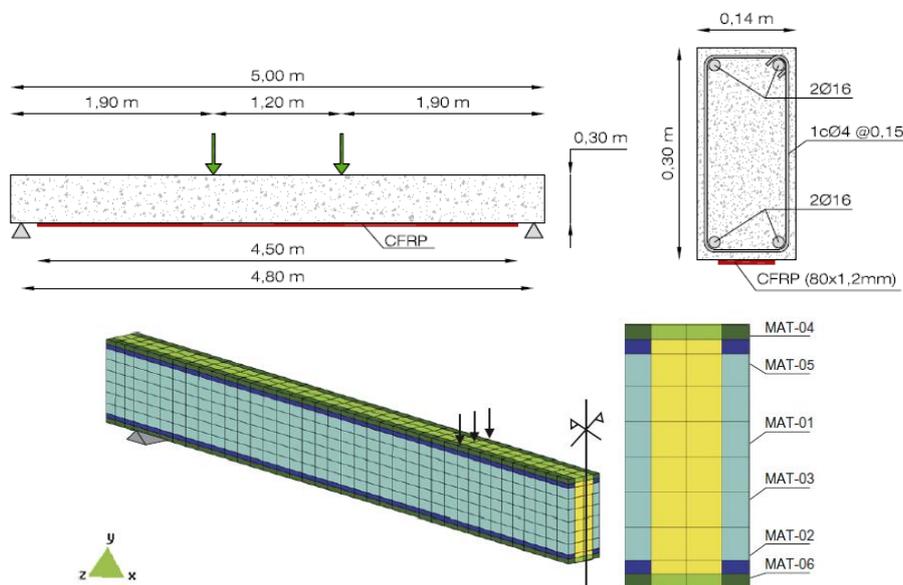


Figura 2.8 Modelo basado en la teoría de mezclas para considerar los cercos y el CFRP de la sección (Martínez et al. 2008)

2.3 Otros modelos existentes

Muchos investigadores han desarrollado modelos para considerar el fenómeno del confinamiento en el hormigón armado. Algunos, considerando el efecto producido por la presencia de cercos; otros, el de fibras FRP y, otros, el de confinamientos exteriores, pasivos o activos (ver Figura 2.9). La mayoría de los modelos se basan en resultados empíricos del comportamiento observado en experimentos realizados en laboratorio.

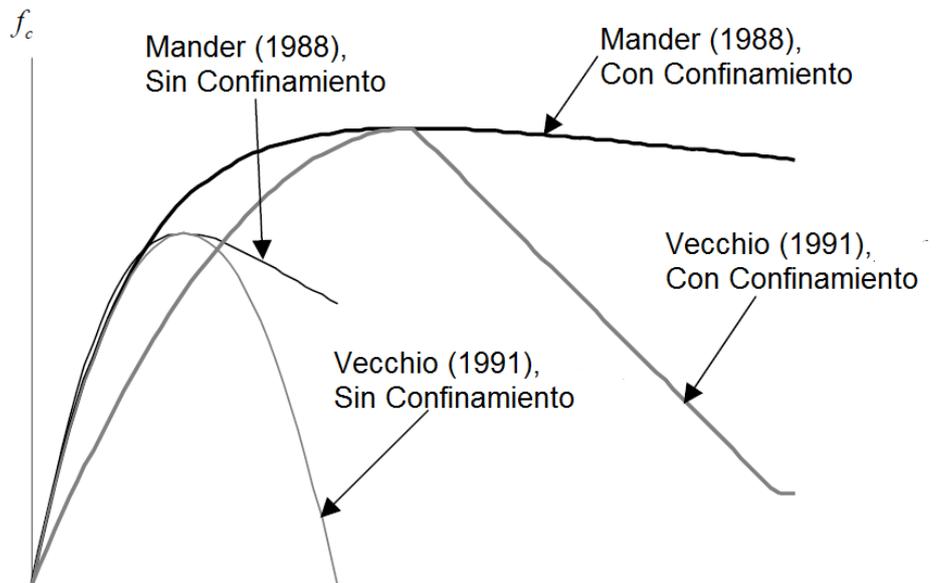


Figura 2.9. Modelos constitutivos desarrollados para el hormigón confinado desarrollados por distintos investigadores (Powanusorn 2003)

Los distintos modelos existentes consideran mecanismos de rotura diferentes: a cortante (Powanusorn 2009), a compresión (Claeson 1999 o Rousakis y Karabinis 2008), a flexión (Bazant y Burrow 1980 o Reisi et al. 2008), por pandeo de la armadura (Attolico et al. 2000). Pero no llegan a considerar todos los posibles mecanismos de fallo en un mismo modelo.

El modelo desarrollado por Braga et al. (2006) considera el confinamiento, producido en el hormigón armado por cercos o por encamisados, basado en la teoría de la elasticidad en deformación plana. Considera las principales variables como la separación entre cercos o el diámetro de las barras. Se considera el confinamiento uniforme y obtiene la presión de confinamiento equivalente, que se toma como el valor promedio. En el caso con varios cercos interiores cubriendo distintas áreas del núcleo de hormigón, varía el nivel de confinamiento del núcleo según la zona considerada. Para ello, proponen un coeficiente de reducción de la tensión de confinamiento en el punto medio entre dos cercos consecutivos. Plantean la compatibilidad de deformaciones entre el acero y el hormigón, por lo que no se contempla el deslizamiento entre el acero y la matriz de hormigón. Usando el principio de superposición, consideran distintas distribuciones posibles de cercos, con distinto grado de confinamiento por la presencia de cercos interiores. Este modelo, a diferencia del de Sheikh and Uzumeri (1982) y el de Mander et al. (1988), considera además la flexión de las barras longitudinales. Al comparar resultados obtenidos con este modelo con los obtenidos mediante ensayos experimentales, se advierte que el modelo es adecuado hasta que se produce el fallo de los cercos de acero.

Montoya et al. (2001) proponen un modelo elástico no lineal que usa tanto formulaciones empíricas como basadas en mecánica teórica para modelizar columnas con carga axial monótona. Este mismo enfoque ha sido adoptado en los modelos de Selby (1990) y Selby y Vecchio (1993). No modelizan cargas a flexión en la barra e introducen un modelo de plasticidad y curvas tensión-

deformación empíricas en un programa de elementos finitos no lineal. Consideran un comportamiento no lineal elástico actualizando la matriz de rigidez secante de los materiales (hormigón y acero). Obtienen resultados parecidos con ciertos ensayos experimentales pero tienen dificultades en modelizar el comportamiento post pico. En su modelo se asume la hipótesis de unión perfecta entre acero y hormigón y tampoco se considera el pandeo de la armadura.

El modelo propuesto por Montoya et al. (2006) considera que la ductilidad y la resistencia de la barra de hormigón armado depende de la relación entre la tensión lateral y la resistencia del hormigón. Así, pues, proponen un modelo donde, con poco confinamiento, el comportamiento post pico muestra ablandamiento del material y reducción de la capacidad mientras que, con mucho confinamiento, el hormigón muestra endurecimiento hasta el fallo.

El modelo desarrollado por Thanthirige et al. (2013) considera el comportamiento cíclico de hormigón bajo cargas de compresión. Los autores consideran el aumento de resistencia y durabilidad del hormigón armado debido al confinamiento lateral producido por cercos, encamisados externos y FRP. Es aplicable en los casos de sección circular y cuadrada. La consideración del comportamiento cíclico permite el cálculo de la estructura ante acciones sísmicas.

Yao et al. (2013) desarrollan un modelo constitutivo para el hormigón armado basado en la teoría de la homogeneización, que también permite considerar cargas a flexión y el confinamiento estudiado puede ser producido por cercos o por encamisado exterior.

El modelo tridimensional desarrollado por Claeson (1999) con el objetivo de calcular columnas confinadas con el método de los elementos finitos, permite introducir excentricidades en la carga de compresión de la columna para introducir así también esfuerzo axial. Considerando la no linealidad de los materiales, ha permitido determinar que las variables que más influyen en el comportamiento post-pico de las barras es la separación entre cercos y la configuración de los cercos. No se considera, en este modelo, el pandeo de la armadura. Ha aplicado sus resultados a hormigones de alta resistencia, donde el confinamiento producido por los cercos permite obtener unas columnas con la suficiente ductilidad. De esta forma, el modelo permite utilizar hormigones que tienen alta resistencia y durabilidad en casos donde se requiera también una gran ductilidad. Considera un modelo de fractura para el hormigón y un modelo de elastoplasticidad perfecta para el acero. El modelo prevé distintas curvas para el hormigón confinado del núcleo y el hormigón sin confinar del recubrimiento. Los resultados obtenidos con este modelo muestran que, variando la separación de los cercos, se afecta poco a la carga máxima de la barra. Sin embargo, la reducción de la separación entre cercos produce un comportamiento más dúctil. El confinamiento tiene mayor influencia en el caso de una carga axial de compresión sin momento, aunque también se nota su efecto en casos de cargas de flexión.

Muchos investigadores resaltan la importancia de considerar también el fenómeno del deslizamiento entre el hormigón y la armadura al estudiar el problema del confinamiento y poder obtener resultados similares con los de los ensayos experimentales (Powanusorn 2013).

2.4 Características del modelo propuesto

En este trabajo se tienen en cuenta las observaciones hechas en este capítulo acerca de las características necesarias de un modelo avanzado de cálculo no lineal de estructuras de barras de hormigón armado y confinado. Como consecuencia, en el modelo propuesto se considerará:

- El efecto que tienen los cercos, aportando confinamiento y capacidad de resistir a cortante. El modelo será capaz de capturar el aumento de rigidez, ductilidad y resistencia de la barra ante esfuerzos axiales, flectores y cortantes.

16 Modelo no-lineal de homogeneización para pórticos de hormigón armado confinado

- La interacción entre cercos, hormigón y armadura longitudinal que se produce en la barra.
- El modelo propuesto puede considerar el confinamiento producido tanto por cercos como por encamisados metálicos externos. No obstante, en los ejemplos calculados en el Capítulo 6 sólo se considera confinamiento por cercos.
- El comportamiento constitutivo no lineal de los materiales componentes: el hormigón con un modelo de daño y el acero con uno elasto-plástico.
- La anisotropía que producen los cercos en las barras.

Fuera del alcance de este trabajo queda:

- El fallo de la barra por pandeo de la armadura longitudinal.
- El efecto del confinamiento externo activo que pueda aplicarse sobre la barra.
- El deslizamiento que se puede producir entre el acero y el hormigón.
- El fallo del recubrimiento de hormigón de la barra, que no se encuentra confinado por los cercos.
- El efecto que tienen en la respuesta de la estructura las distintas configuraciones de cercos en la barra (ver Figura 2.7) o los cercos con formas no rectangulares.
- El cálculo dinámico de los pórticos.

No obstante, todos estos aspectos podrían ser introducidos en un futuro en el modelo desarrollado en el presente trabajo.

Capítulo 3

Modelo de homogeneización para barras de hormigón armado confinado

3.1 Deducción del equilibrio y la compatibilidad en la sección homogeneizada

En el presente capítulo se desarrolla la formulación del modelo de homogeneización para barras de plano medio de hormigón armado teniendo en cuenta el confinamiento debido a los cercos. Dicha formulación puede ser introducida en un programa clásico de estructuras de barras, para tener así en cuenta el efecto del confinamiento de la barra. Primeramente se detalla pormenorizadamente la deducción de la formulación que, luego se explicita en la forma en que ha sido introducida en un programa de ordenador de cálculo de estructuras.

3.1.1 Hipótesis consideradas

El modelo propuesto a continuación ha sido deducido a partir de las siguientes hipótesis:

- En la formulación que se incluye en este capítulo, se considera que hay elasticidad en todos los materiales. Posteriormente, en los Capítulos 4 y 5, se introduce la no linealidad de los materiales.
- Se considera que la deformación longitudinal, la curvatura y la deformación por cortante son constantes en toda la sección y para todos los materiales que la componen.
- Se considera que el esfuerzo axial, el flector y el cortante son constantes a lo largo de toda la longitud de la barra.
- Se admite la hipótesis generalizada de Bernoulli-Navier y, por lo tanto, se desprecia el alabeo relativo entre dos secciones próximas. Esta aproximación es admisible porque la deformación producida por el cortante es mucho menor que la deformación producida por la flexión. Cuanto más esbelta sea la pieza, menor será el efecto del alabeo relativo.
- Para la obtención de la magnitud del esfuerzo cortante es posible usar el área reducida $A^* = \chi^* \cdot A$, exigiendo una energía acumulada correcta, y también el coeficiente de cortante $\hat{\chi} = \hat{A}/A$ si se considera que éste se distribuye de forma uniforme en toda la sección.

- En la formulación que se detalla a continuación, se realiza la simplificación de considerar las áreas reducidas de las secciones de cada uno de los materiales, en este caso del hormigón y del acero, en vez de realizar el cálculo del área reducida de la sección compuesta de hormigón armado. Si bien dicha simplificación no se ajusta exactamente a la realidad, se realiza porque el cálculo del área reducida de cortante de la sección compuesta de hormigón armado es una labor muy compleja. Sin embargo, el procedimiento exacto para obtener dicho valor está detallado en el Anejo 2 del presente trabajo.
- Se hace la hipótesis de que hay adherencia perfecta entre el hormigón y las barras de acero.
- Se ha supuesto que los cercos introducidos en las barras tienen únicamente dos ramas. Sin embargo, la formulación se puede extender fácilmente a otros casos distintos, con configuraciones más elaboradas.
- Se hace la hipótesis de que todo el esfuerzo cortante de las barras es soportado por los cercos. Dicha hipótesis es asumida en muchas normativas.
- Se considera que la tensión lateral de los cercos se distribuye uniformemente a lo largo de la barra de hormigón armado. Ello resulta de considerar que la tensión se reparte de forma uniforme a lo largo de la respectiva área de influencia de cada uno de los cercos. Por lo tanto, al ser el espaciamiento entre cercos constante a lo largo de toda la barra, resulta que la tensión lateral de la barra es constante en toda su longitud.
- Se considera que la tensión lateral σ_{lat} de la barra viene aportada únicamente por los cercos metálicos o por el encamisado metálico.
- Se considera la ortotropía del material.

3.1.2 Comportamiento a axil del hormigón armado mediante la homogeneización “ad-hoc”

a) Barra de hormigón armado sin cercos

Primeramente, se considera únicamente la presencia de la matriz de hormigón y de las barras longitudinales de acero, tal y como puede verse en la Figura 3.1.

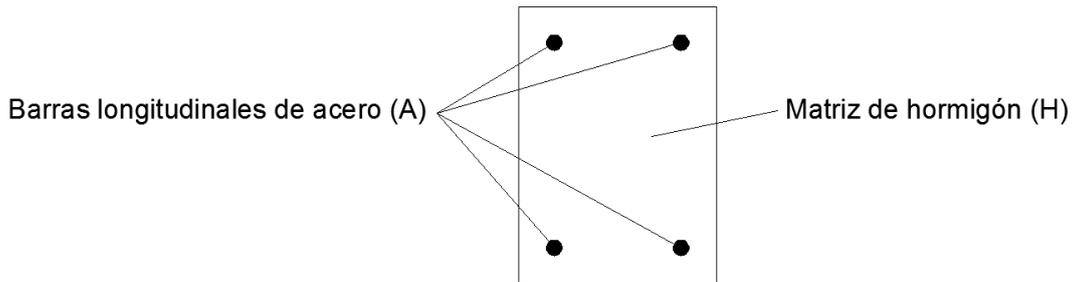


Figura 3.1. Esquema de la sección de la barra de hormigón armado sin cercos

Se escribe el equilibrio por zonas, distinguiendo inicialmente tres regiones (ver Figura 3.2). El mismo esquema se utilizará luego en problemas con comportamiento no lineal.

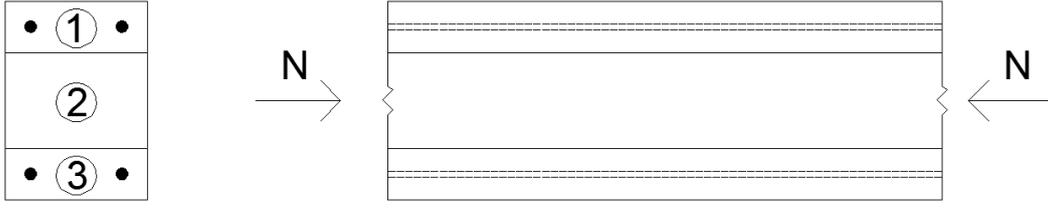


Figura 3.2. Esquema de la división en zonas de la sección para el axil

Por una parte se expresa el equilibrio en la zona 1, compuesta de hormigón y acero

$$\sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_1 = (N_A)_1 + (N_H)_1 = \sigma_A \cdot A_A + \sigma_H \cdot A_H \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.1)$$

Por compatibilidad se tiene que la deformación longitudinal es la misma en toda la sección y para todos los materiales que la componen; es decir

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_H \quad (3.2)$$

de donde se deduce que

$$\frac{\sigma_H}{E_H} = \frac{\sigma_A}{E_A} \quad (3.3)$$

Así pues, del equilibrio expresado en la ecuación (3.1), se tiene para la zona 1

$$\sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_1 = (N_A)_1 + (N_H)_1 = \sigma_A \cdot A_A + \sigma_H \cdot A_H = \sigma_H \cdot \left[\frac{E_A}{E_H} \cdot A_A + A_H \right] \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.4)$$

y, como $\sigma_H = E_H \cdot \varepsilon$, de la ecuación (3.4) se deduce que

$$\sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_1 = (N_A)_1 + (N_H)_1 = [E_A \cdot (A_A)_1 + E_H \cdot (A_H)_1] \cdot \varepsilon \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.5)$$

Asimismo, para la zona 2, donde únicamente hay hormigón, se escribe la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_2 = (N_H)_2 = \sigma_H \cdot A_H = E_H \cdot (A_H)_2 \cdot \varepsilon \quad ; \quad \forall mat: H \quad (3.6)$$

Finalmente, en la zona 3, donde hay nuevamente hormigón y acero, se sigue el mismo procedimiento que para la zona 1, obteniéndose

$$\sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_3 = (N_A)_3 + (N_H)_3 = [E_A \cdot (A_A)_3 + E_H \cdot (A_H)_3] \cdot \varepsilon \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.7)$$

Ahora, se escribe el equilibrio global en la sección, con las 3 zonas consideradas

$$N = \sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_1 + \sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_2 + \sum_{i=1}^{mat} (F_{x,i})_3 \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.5), (3.6) y (3.7) en (3.8) se obtiene

$$N = [E_A \cdot A_A^{Total} + E_H \cdot A_H^{Total}] \cdot \varepsilon \quad (3.9)$$

siendo

$$\begin{aligned} A_A^{Total} &= (A_A)_1 + (A_A)_3 \\ A_H^{Total} &= (A_H)_1 + (A_H)_2 + (A_H)_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

y, como $\varepsilon = \nabla^s u$, que en el caso particular en que el axil se considera constante a lo largo de toda la barra, se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{u}{L} \quad ; \quad u = u_2 - u_1 \quad (3.11)$$

siendo L la longitud de la barra y u el desplazamiento diferencial entre sus extremos (véase la Figura 3.19)

Por lo tanto, sustituyendo (3.11) en (3.9), la expresión queda finalmente como

$$N = [E_A \cdot A_A^{Total} + E_H \cdot A_H^{Total}] \cdot \frac{u}{L} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$N = K_{axil} \cdot u \quad (3.13)$$

siendo K_{axil} la rigidez a axil de barra, tal que

$$K_{axil} = [E_A \cdot A_A^{Total} + E_H \cdot A_H^{Total}] \cdot \frac{1}{L} \quad (3.14)$$

Así, pues, la expresión de la rigidez axial EA a introducir en la matriz de rigidez de la barra equivalente es

$$E_G A_G = \bar{A}_M = \sum_{i=1}^{mat} E_i A_i = (E_A)_L \cdot A_A + E_H \cdot A_H \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.15)$$

El módulo de elasticidad del acero $(E_A)_L$ de la ecuación (3.15) corresponde al módulo de elasticidad de las armaduras longitudinales. No debe confundirse con el de los cercos metálicos, que se introducirá en los siguientes apartados. Esta distinción, no presenta gran importancia en el caso elástico, sin embargo, al introducir la no linealidad del acero, en el Capítulo 5, tendrá una gran transcendencia.

b) Barra de hormigón armado de sección cuadrada con cercos

En el caso con cercos, las deformaciones longitudinal y transversal se ven afectadas por el confinamiento lateral producido por el cerco, alterando las expresiones desarrolladas anteriormente.

Para obtener la formulación del axil en el caso con cercos, se considera el caso de una barra con sección cuadrada de las Figuras 3.3 y 3.4.

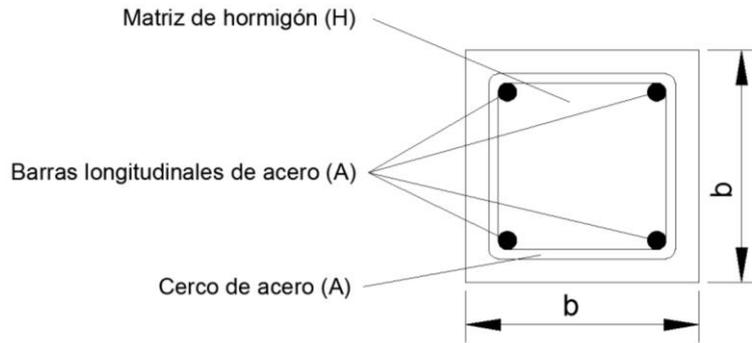


Figura 3.3. Esquema de la sección de la barra de hormigón armado con cercos

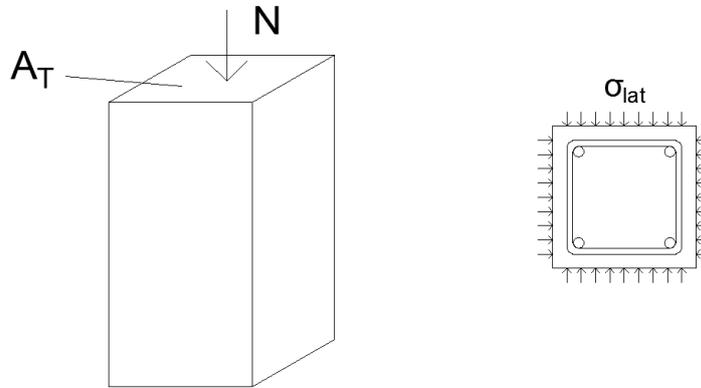


Figura 3.4. Confinamiento lateral de los cercos ante cargas axiales

Considerando la ortotropía del material, en las relaciones entre tensiones y deformaciones se utilizan módulos de elasticidad, de Poisson y a cortante diferentes en función del eje considerado. Se tiene, por lo tanto, en el caso general

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \cdot \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \cdot \sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \cdot \sigma_z \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \cdot \sigma_y - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \cdot \sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \cdot \sigma_z \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \cdot \sigma_z - \frac{\nu_{xz}}{E_x} \cdot \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \cdot \sigma_y \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sin embargo, al tener en cuenta la simetría existente entre los ejes x e y , dado que se está tratando una sección cuadrada, se puede escribir

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_{lat} \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_{lat} \\ E_x &= E_y = E_L \end{aligned} \quad (3.17)$$

Además, es posible utilizar como módulo de elasticidad E_z el módulo calculado en el apartado anterior, E_G , utilizando la ecuación (3.15), que se ha obtenido para barras longitudinales de acero

dentro de la matriz de hormigón armado y utilizando la compatibilidad de deformaciones en el mencionado eje z . De esta forma se tiene

$$E_z = E_G \quad (3.18)$$

y se introduce también la notación

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \varepsilon_{long} \\ \sigma_z &= \sigma_{long} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Asimismo, debido a la geometría y a la simetría del problema considerado, se tiene

$$\begin{aligned} \nu_{xy} &= \nu_{yx} \\ \nu_{xz} &= \nu_{zx} = \nu_{yz} = \nu_{zy} = \nu_z \end{aligned} \quad (3.20)$$

Con todas estas consideraciones, la deformación longitudinal, correspondiente a la que se produce en el eje z , partiendo de la ecuación (3.16), queda

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{long} - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot \sigma_{lat} \quad (3.21)$$

y la deformación lateral es

$$\varepsilon_{lat} = \frac{1}{E_L} \cdot \sigma_{lat} - \frac{\nu_{xy}}{E_L} \cdot \sigma_{lat} - \frac{\nu_z}{E_G} \cdot \sigma_{long} \quad (3.22)$$

• **Planteamiento del equilibrio en la barra**

En el presente caso, la tensión lateral σ_{lat} corresponde a la tensión inducida por los cercos sobre la barra

$$\sigma_{lat} = \sigma_{cerco/barra} \quad (3.23)$$

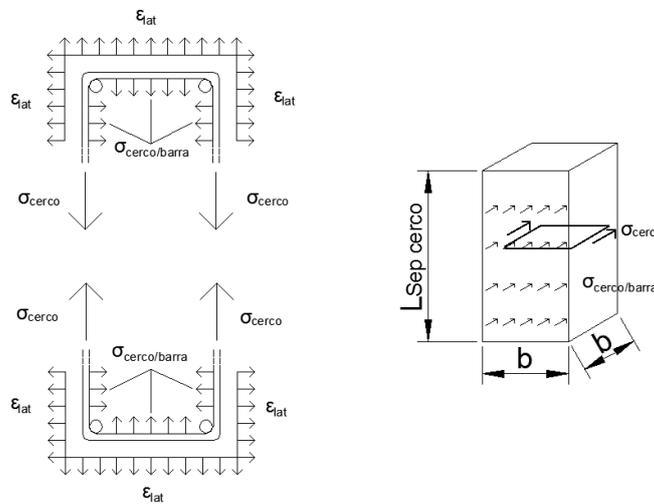


Figura 3.5. Distribución de tensiones provocado por el axil en la barra

Dicha tensión es transmitida a la barra a partir de la tensión que se desarrolla en las ramas del cerco, σ_{cerco} (ver Figura 3.5) y que, al ser compuesto por acero, es tal que

$$\sigma_{cerco} = -(E_A)_C \cdot \varepsilon_{lat} \quad (3.24)$$

En la ecuación (3.24), se denomina $(E_A)_C$ el módulo de elasticidad del cerco de acero para diferenciarlo del módulo de elasticidad de las barras longitudinales de acero $(E_A)_L$ que intervienen, por ejemplo, en la ecuación (3.15). Nótese que la tensión del cerco σ_{cerco} y la deformación lateral ε_{lat} tienen sentidos distintos. Efectivamente, bajo un axil de compresión, la deformación lateral se produce hacia el exterior y la tensión del cerco se produce hacia el interior (véase la Figura 3.5).

Como los cercos se encuentran repartidos de forma puntual a lo largo de la barra con separaciones constantes, la tensión transmitida por el cerco sobre la barra debe ser repartida a lo largo de un área de influencia de cada uno de los cercos (ver Figura 3.5). En el presente caso, se considera que la tensión se reparte de forma uniforme a lo largo de la respectiva área de influencia. Por lo tanto, al ser el espaciamiento entre cercos constante a lo largo de toda la barra, se considera que la tensión lateral de la barra producida por los cercos se distribuye de forma constante en toda su longitud.

Por equilibrio se tiene que

$$\sigma_{cerco} \cdot (A_A)_{ramas} = \sigma_{cerco/hormigón} \cdot A_{influencia} \quad (3.25)$$

siendo

$$A_{influencia} = b \cdot L_{sep\ cerco} \quad (3.26)$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.25) se puede obtener

$$\sigma_{cerco/barra} = \frac{(A_A)_{ramas}}{b \cdot L_{sep\ cerco}} \cdot \sigma_{cerco} = B \cdot \sigma_{cerco} \quad (3.27)$$

donde B es el coeficiente que relaciona el área de las ramas de los cercos con el área de influencia del cerco en la barra, de forma que

$$B = \frac{(A_A)_{ramas}}{b \cdot L_{sep\ cerco}} = \frac{2 \cdot \frac{\phi^2 \cdot \pi}{4}}{b \cdot L_{sep\ cercos}} \quad (3.28)$$

siendo ϕ el diámetro de las ramas del cerco, b el ancho de la barra y $L_{sep\ cercos}$ la distancia de separación entre cercos. El coeficiente B representa la proporción volumétrica de los cercos de acero dentro de la matriz de hormigón. En el caso en que, en vez de cercos, se tenga un confinamiento de la barra de hormigón producido por un encamisado exterior, este coeficiente B se calcula igual, como la proporción volumétrica del acero del encamisado respecto al núcleo de hormigón en la dirección considerada (ver Figura 3.6).

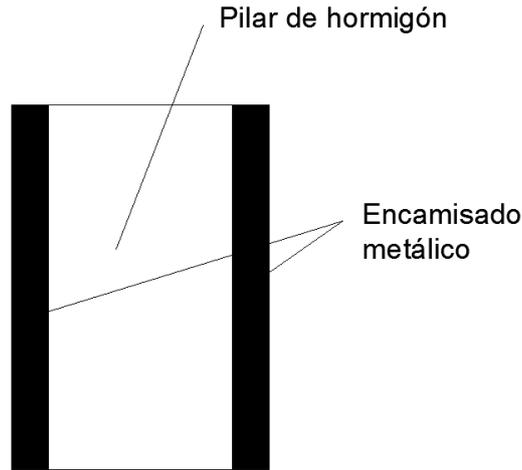


Figura 3.6. Detalle de las proporciones entre encamisado de acero y la barra a considerar en una dirección

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación constitutiva del cerco (3.24) en (3.27), se tiene que

$$\sigma_{lat} = \sigma_{cerco/barra} = B \cdot \sigma_{cerco} = -B \cdot (E_A)_C \cdot \varepsilon_{lat} \quad (3.29)$$

donde ε_{lat} es la deformación lateral que se produce en la barra por la presencia del confinamiento de los cercos al aplicar un esfuerzo axial. De esta forma, la ecuación de compatibilidad es

$$\varepsilon_{lat} = (\varepsilon_{lat})_{real} = (\varepsilon_{lat})_0 - (\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco} \quad (3.30)$$

donde $(\varepsilon_{lat})_0$ es la deformación lateral de la barra que se produce en el caso sin confinamiento, cuando $\sigma_{lat} = 0$ y, por lo tanto, queda

$$(\varepsilon_{lat})_0 = \frac{-\nu_z \cdot \sigma_{long}}{E_G} \quad (3.31)$$

y donde $(\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco}$ es la deformación lateral que se produce a causa de la presencia del cerco

$$(\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco} = -\frac{1}{E_L} \cdot [\sigma_{lat} - \nu_{xy} \cdot \sigma_{lat}] \quad (3.32)$$

Asimismo, se tiene que la tensión longitudinal σ_{long} en el presente caso es

$$\sigma_{long} = \frac{N}{A_G} \quad (3.33)$$

donde A_G es el área total de la sección calculada en el apartado anterior.

- **Cálculo de la deformación longitudinal y lateral de la barra**

La expresión de la deformación lateral se obtiene substituyendo las ecuaciones (3.29) y (3.33) en la expresión (3.22)

$$\varepsilon_{lat} = \frac{1}{E_L} \cdot \sigma_{cerco/barra} - \frac{\nu_{xy}}{E_L} \cdot \sigma_{cerco/barra} - \frac{\nu_z}{E_G} \cdot \sigma_{long} \quad (3.34)$$

$$\varepsilon_{lat} = \frac{1}{E_L} \cdot (-B \cdot (E_A)_C \cdot \varepsilon_{lat}) - \frac{\nu_{xy}}{E_L} \cdot (-B \cdot (E_A)_C \cdot \varepsilon_{lat}) - \frac{\nu_z}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_{lat} = -\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot \varepsilon_{lat} \cdot B + \nu_{xy} \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot \varepsilon_{lat} \cdot B - \frac{\nu_z}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \quad (3.36)$$

$$-\frac{\nu_z}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} = \varepsilon_{lat} \cdot \left[\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B - \nu_{xy} \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B + 1 \right] \quad (3.37)$$

$$-\frac{\nu_z}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} = \varepsilon_{lat} \cdot \left[\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right] \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_{lat} = \frac{-\frac{\nu_z}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G}}{\left[\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \quad (3.39)$$

De forma análoga, sustituyendo las ecuaciones (3.29) y (3.33) en la ecuación (3.21), se obtiene también la expresión de la deformación longitudinal

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{long} - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot \sigma_{cerco/barra} \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot (-B \cdot (E_A)_C \cdot \varepsilon_{lat}) \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} + 2\nu_z \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot \varepsilon_{lat} \quad (3.42)$$

y se substituye en (3.42) la expresión (3.39) obtenida anteriormente de la deformación lateral ε_{lat}

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} - 2\nu_z \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot \frac{\nu_z}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot \frac{1}{\left[\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} \cdot \left[1 - 2\nu_z \cdot \frac{\nu_z \cdot (E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot \frac{1}{\left[\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \right] \quad (3.44)$$

- **Cálculo de la rigidez a axil de la barra**

De la ecuación (3.44) es posible obtener

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} \cdot S \quad (3.45)$$

siendo

$$S = 1 - 2\nu_z \cdot \frac{\nu_z \cdot (E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot \frac{1}{\left[\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \quad (3.46)$$

y de (3.45) se tiene que

$$N = \frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \varepsilon_{long} \quad (3.47)$$

Una vez más, se considera que el axil es constante a lo largo de toda la barra; de acuerdo con la ecuación (3.11). Por lo tanto, tras sustituir (3.11) en la expresión (3.47), se obtiene finalmente

$$N = \frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \frac{u}{L} \quad (3.48)$$

La última ecuación se puede reescribir de la siguiente forma:

$$N = (K_{axil})_{con\ cerco} \cdot u \quad (3.49)$$

siendo $(K_{axil})_{con\ cerco}$ la rigidez a axil de barra considerando la presencia de los cercos, tal que

$$(K_{axil})_{con\ cerco} = \frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \frac{1}{L} \quad \begin{cases} \text{sin cercos: } S = 1 \\ \text{con cercos: } S < 1 \end{cases} \quad (3.50)$$

El parámetro a introducir en la matriz de rigidez de la barra equivalente debido al axil es, en el caso de la barra con cercos, un poco distinta que la deducida para el caso anterior. En vez de usar el parámetro $\frac{EA}{L}$, se debe substituir por $\frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \frac{1}{L}$. Nótese que la rigidez a axil se ve afectada por el coeficiente $1/S$.

- **Determinación de las propiedades de los materiales**

Finalmente es necesaria la determinación de las propiedades E_L , ν_z y ν_{xy} de los materiales de las que dependen los valores de S en la ecuación (3.46).

Por una parte el valor de ν_{xy} corresponde al valor del coeficiente de Poisson en el plano xy . A causa de la compatibilidad de deformaciones en los correspondientes ejes, ν_{xy} se ve afectado por la cuantía de acero producida por la presencia de los cercos, de forma que el valor de ν_{xy} queda

$$\nu_{xy} = \frac{\nu_H \cdot Vol_H + \nu_A \cdot Vol_{cerco\ A}}{(Vol)_{Tot}} \quad (3.51)$$

donde $Vol_{cerco\ A}$ es el volumen de acero y Vol_H el volumen de la matriz de hormigón en la barra, de forma que $(Vol)_{Tot} = Vol_H + Vol_{cerco\ A}$. Debido a la geometría del problema, se considera que el efecto de la armadura longitudinal en el valor de ν_{xy} es despreciable.

Por otra parte, el valor de ν_z corresponde al valor del coeficiente de Poisson en los planos xz e yz . A causa de la compatibilidad de deformaciones en los correspondientes ejes, ν_z también se ve afectado por la cuantía de acero producida por la presencia de los cercos, de forma que el valor de ν_z queda

$$\nu_z = \frac{\nu_H \cdot Vol_H + \nu_A \cdot Vol_{cerco A}}{(Vol)_{Tot}} \quad (3.52)$$

Debido a la geometría del problema, se considera que el efecto de la armadura longitudinal en el valor de ν_z es despreciable. Se acaba obteniendo, por lo tanto, que $\nu_{xy} = \nu_z$, y que ambos valores se ven afectados únicamente por la cuantía de cercos, mientras que la cuantía de armadura longitudinal no se toma en consideración para determinar su valor. Se suele estimar, de forma general, incluso en los casos en que no se considera la presencia de los cercos, que el valor del coeficiente de Poisson en el hormigón armado es muy parecido al del hormigón y que el efecto de las barras longitudinales es despreciable.

Además, se puede definir también el valor del coeficiente de Poisson aparente ν_{apc} de la barra de hormigón armado confinado. Para hallarlo, se expresa la deformación lateral real como

$$\varepsilon_{lat} = \frac{-\nu_{apc} \cdot \sigma_{long}}{E_G} \quad (3.53)$$

y se puede igualar la expresión de ε_{lat} que hay en (3.53) con la que hay en (3.22)

$$\varepsilon_{lat} = \frac{-\nu_{apc} \cdot \sigma_{long}}{E_G} = \frac{1}{E_L} \cdot \sigma_{lat} - \frac{\nu_{xy}}{E_L} \cdot \sigma_{lat} - \frac{\nu_z}{E_G} \cdot \sigma_{long} \quad (3.54)$$

Introduciendo ahora las ecuaciones (3.29), (3.33) y (3.39) en (3.54) se obtiene

$$\frac{-\nu_{apc} \cdot \sigma_{long}}{E_G} = \frac{1}{E_L} \cdot \left[-B \cdot (E_A)_c \cdot \left(-\frac{\nu_z}{E_G} \cdot \sigma_{long} \cdot \frac{1}{\left[\frac{(E_A)_c}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \right) \right] \cdot (1 - \nu_{xy}) - \frac{\nu_z}{E_G} \cdot \sigma_{long} \quad (3.55)$$

que, finalmente, queda

$$\frac{-\nu_{apc} \cdot \sigma_{long}}{E_G} = \frac{-\nu_z \cdot \sigma_{long}}{E_G} \cdot \left[1 - B \cdot \frac{(E_A)_c}{E_G} \cdot \frac{(1 - \nu_{xy})}{\left[\frac{(E_A)_c}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \right] \quad (3.56)$$

Por lo tanto, se puede definir a partir de la ecuación (3.56) la expresión del coeficiente de Poisson aparente ν_{apc} de la barra de hormigón armado confinado

$$\nu_{apc} = \nu_z \cdot \left[1 - B \cdot \frac{(E_A)_c}{E_G} \cdot \frac{(1 - \nu_{xy})}{\left[\frac{(E_A)_c}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \right] \quad (3.57)$$

ν_{apc} es el coeficiente de Poisson que tendrá finalmente la barra. No hay que confundir los coeficientes de Poisson del modelo del material homogeneizado en tres dimensiones con los que son debidos a la interacción entre materiales en la barra.

Finalmente, el valor del módulo de elasticidad transversal, E_L , se ve afectado por la presencia de los cercos de acero dentro de la matriz de hormigón. Aplicando la compatibilidad de deformaciones se obtiene

$$E_L \cdot (A_{lat})_{Tot} = E_H \cdot (A_{lat})_H + (E_A)_C \cdot (A_{lat})_A \quad (3.58)$$

$$E_L = \frac{E_H \cdot (A_{lat})_H + (E_A)_C \cdot (A_{lat})_A}{(A_{lat})_{Tot}} \quad (3.59)$$

donde $(A_{lat})_A$ es el área transversal de acero aportada por los cercos y $(A_{lat})_H$ el área transversal de hormigón a lo largo del eje x , de forma que $(A_{lat})_{Tot} = (A_{lat})_H + (A_{lat})_A$ (véase Figura 3.7).

La ecuación(3.59) se puede reescribir como

$$E_L = \frac{E_H \cdot (A_{lat})_H}{(A_{lat})_{Tot}} + \frac{(E_A)_C \cdot (A_{lat})_A}{(A_{lat})_{Tot}} \quad (3.60)$$

donde la relación $\frac{(A_{lat})_A}{(A_{lat})_{Tot}}$ corresponde a la proporción volumétrica de los cercos de acero dentro de la matriz de hormigón, es decir, corresponde al coeficiente B de la ecuación (3.28). Por lo tanto, la ecuación (3.60) queda finalmente como

$$E_L = (E_A)_C \cdot B + E_H \cdot (1 - B) \quad (3.61)$$

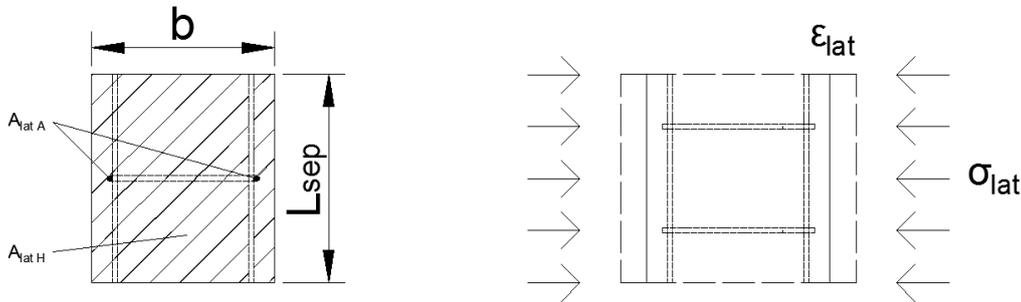


Figura 3.7 Elasticidad lateral de la barra de hormigón armado

Nótese que el valor del módulo de elasticidad transversal E_L de la barra es el que se utiliza para calcular la tensión lateral σ_{lat} en la misma, entendiendo que la barra está constituida por un material compuesto por el acero de los cercos y el hormigón. La tensión lateral en el cerco metálico viene dada por la expresión (3.24) y, para el cálculo de la tensión lateral en el hormigón, debe usarse el módulo del hormigón, E_H . Es importante distinguir la tensión en el material homogeneizado de la tensión en los materiales componentes.

De esta forma, para determinar las tensiones que se producen en el hormigón, una vez se conocen las de la barra, es necesario utilizar

$$\sigma_H = \sigma_{barra} \cdot \frac{E_H}{E_{barra}} \quad (3.62)$$

La ecuación anterior se obtiene considerando la compatibilidad de deformaciones en el interior de la barra, de donde se obtiene

$$\sigma_H = E_H \cdot \varepsilon_H \tag{3.63}$$

$$\sigma_{barra} = E_{barra} \cdot \varepsilon_{barra} \tag{3.64}$$

$$\varepsilon_H = \varepsilon_{barra} \tag{3.65}$$

De la misma forma, para obtener las tensiones que se producen en el acero, tanto en los cercos como en la armadura longitudinal, se utiliza

$$\sigma_A = E_A \cdot \varepsilon_{barra} = E_A \cdot \varepsilon_A \tag{3.66}$$

que también proviene de considerar la compatibilidad de deformaciones en la barra, $\varepsilon_{barra} = \varepsilon_A$.

c) Barra de hormigón armado de sección rectangular con cercos

En el caso en que la sección de la barra es rectangular, se produce una tensión lateral de confinamiento distinta según el eje considerado. Así, pues, al perderse la simetría entre los ejes x e y , ya no se cumplen las igualdades (3.17) y (3.20) (ver Figura 3.8).

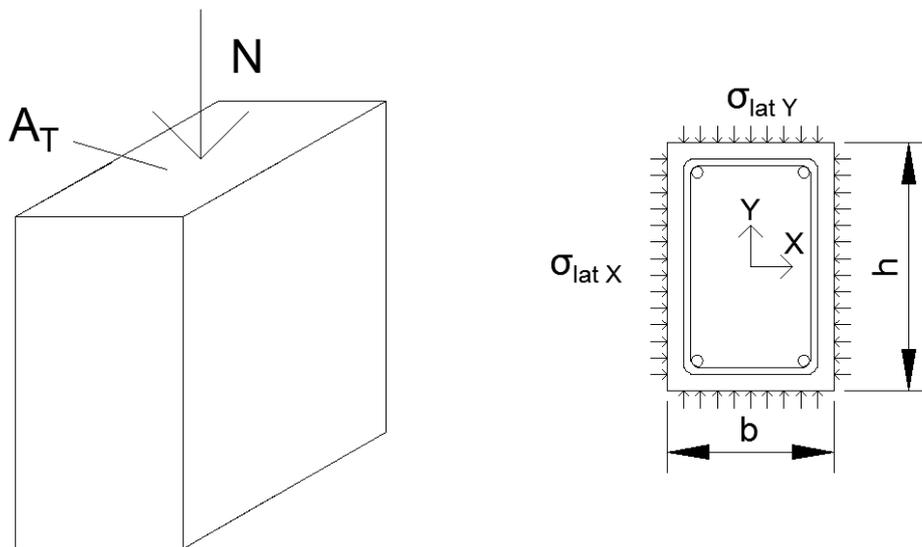


Figura 3.8. Confinamiento lateral de los cercos ante cargas axiales. Viga con sección rectangular

Para el presente caso se utiliza la notación

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \sigma_{long} \\
\varepsilon_z &= \varepsilon_{long} \\
E_z &= E_G \\
\sigma_x &= \sigma_{lat X} \\
\varepsilon_x &= \varepsilon_{lat X} \\
\sigma_y &= \sigma_{lat Y} \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_{lat Y}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

y también

$$\begin{aligned}
\nu_{xy} &= \nu_{yx} = \nu_{sc} \\
\nu_{xz} &= \nu_{zx} = \nu_{cx} \\
\nu_{yz} &= \nu_{zy} = \nu_{cy}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Por lo tanto, partiendo de las expresiones (3.16); la deformación longitudinal, en este caso, es

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{long} - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot \sigma_{lat X} - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot \sigma_{lat Y} \tag{3.69}$$

y las deformaciones laterales en cada uno de los ejes son

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{lat X} &= \frac{1}{E_x} \cdot \sigma_{lat X} - \frac{\nu_{sc}}{E_y} \cdot \sigma_{lat Y} - \frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \sigma_{long} \\
\varepsilon_{lat Y} &= \frac{1}{E_y} \cdot \sigma_{lat Y} - \frac{\nu_{sc}}{E_x} \cdot \sigma_{lat X} - \frac{\nu_{cy}}{E_G} \cdot \sigma_{long}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

donde E_G es el módulo de elasticidad de la barra ya determinado anteriormente según la ecuación (3.15), considerando la presencia de las barras longitudinales de acero dentro de la matriz de hormigón armado.

- **Planteamiento del equilibrio en la barra**

Las tensiones laterales $\sigma_{lat X}$ y $\sigma_{lat Y}$ inducidas por el cerco en el hormigón, en cada uno de los ejes son (ver Figura 3.9)

$$\begin{aligned}
\sigma_{lat X} &= \sigma_{cerco/barra X} \\
\sigma_{lat Y} &= \sigma_{cerco/barra Y}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

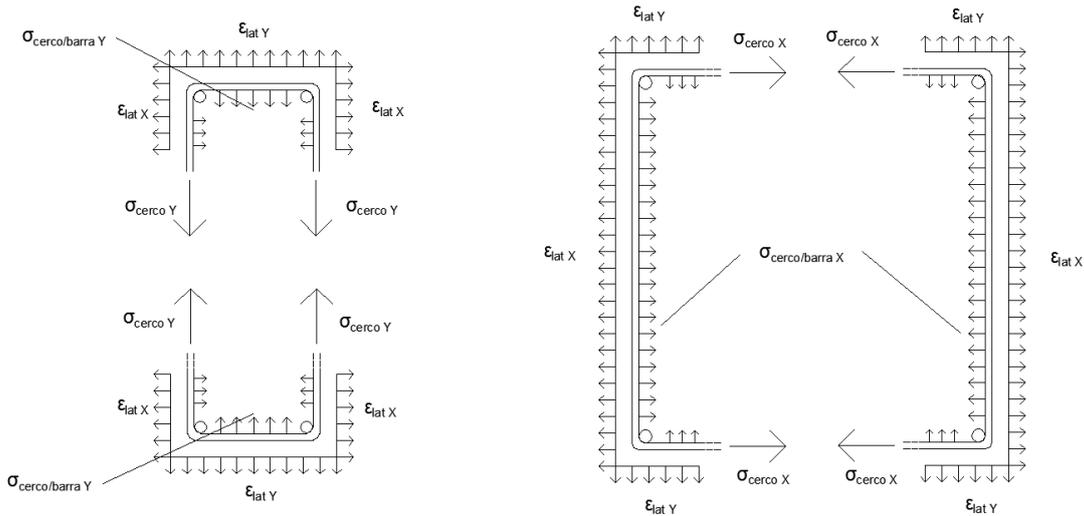


Figura 3.9. Distribución de tensiones provocado por el axil en la barra en cada uno de los ejes

Dichas tensiones se transmiten al hormigón a partir de las tensiones que aparecen en las ramas del cerco $\sigma_{cerco X}$ y $\sigma_{cerco Y}$ y que, al ser compuesto por acero, son

$$\begin{aligned} \sigma_{cerco X} &= -(E_A)_{CX} \cdot \varepsilon_{lat X} \\ \sigma_{cerco Y} &= -(E_A)_{CY} \cdot \varepsilon_{lat Y} \end{aligned} \tag{3.72}$$

Una vez más se distinguen los módulos de elasticidad del cerco de acero en cada una de las direcciones x e y para el tratamiento de la no linealidad del acero (Capítulo 5).

Nótese que, igual que en el caso anterior, las tensiones del cerco $\sigma_{cerco X}$ y $\sigma_{cerco Y}$ tienen sentido distinto de las deformaciones laterales $\varepsilon_{lat X}$ y $\varepsilon_{lat Y}$. Efectivamente, bajo un axil de compresión, la deformación lateral se produce hacia el exterior y la tensión del cerco se produce hacia el interior (ver Figura 3.9).

Como los cercos se encuentran repartidos de forma puntual a lo largo de la barra con separaciones constantes, la tensión transmitida por el cerco sobre la barra debe ser repartida a lo largo de un área de influencia de cada uno de los cercos (ver Figura 3.10). En el presente caso se considera que la tensión se reparte de forma uniforme a lo largo de la respectiva área de influencia de cada cerco. Por lo tanto, al ser el espaciamiento entre cercos constante a lo largo de toda la barra, se considera que la tensión lateral de la barra producida por los cercos se distribuye de forma constante en toda su longitud.

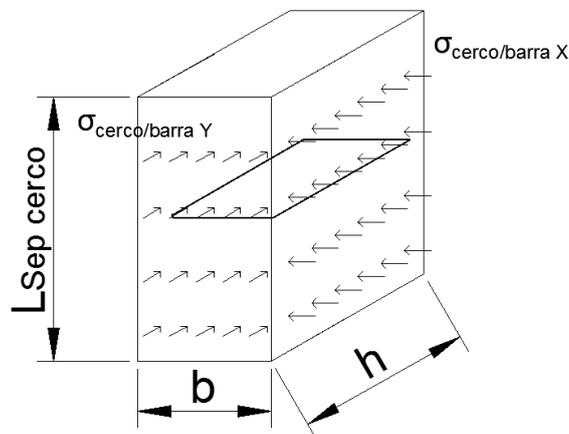


Figura 3.10. Tensión lateral en cada uno de los ejes

Por equilibrio se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{cerco X} \cdot (A_A)_{ramas X} &= \sigma_{cerco/barra X} \cdot A_{influencia X} \\ \sigma_{cerco Y} \cdot (A_A)_{ramas Y} &= \sigma_{cerco/barra Y} \cdot A_{influencia Y}\end{aligned}\quad (3.73)$$

siendo

$$\begin{aligned}A_{influencia X} &= h \cdot L_{Sep\ cerco} \\ A_{influencia Y} &= b \cdot L_{Sep\ cerco}\end{aligned}\quad (3.74)$$

Por lo tanto de la ecuación (3.73) se puede escribir

$$\begin{aligned}\sigma_{cerco/barra X} &= \frac{(A_A)_{ramas X}}{h \cdot L_{Sep\ cerco}} \cdot \sigma_{cerco X} = B_X \cdot \sigma_{cerco X} \\ \sigma_{cerco/barra Y} &= \frac{(A_A)_{ramas Y}}{b \cdot L_{Sep\ cerco}} \cdot \sigma_{cerco Y} = B_Y \cdot \sigma_{cerco Y}\end{aligned}\quad (3.75)$$

donde B_X y B_Y son los coeficientes que relacionan el área de las ramas de los cercos con el área de influencia del cerco en el hormigón en cada uno de los ejes, de forma que

$$\begin{aligned}B_X &= \frac{(A_A)_{ramas X}}{h \cdot L_{Sep\ cerco}} = \frac{2 \cdot \frac{\phi^2 \cdot \pi}{4}}{h \cdot L_{Sep\ cercos}} \\ B_Y &= \frac{(A_A)_{ramas Y}}{b \cdot L_{Sep\ cerco}} = \frac{2 \cdot \frac{\phi^2 \cdot \pi}{4}}{b \cdot L_{Sep\ cercos}}\end{aligned}\quad (3.76)$$

siendo ϕ el diámetro de las ramas del cerco, b y h las dimensiones de la sección de la viga y $L_{Sep\ cercos}$ la distancia de separación entre cercos. Los coeficientes B_X y B_Y representan la proporción volumétrica de los cercos de acero dentro de la matriz de hormigón en cada una de las direcciones x e y . En el caso en que en vez de cercos se tenga un confinamiento de la barra de hormigón producido por un encamisado exterior, los coeficientes B_X y B_Y se calculan igual, como la proporción volumétrica del acero del encamisado respecto el núcleo de hormigón en la dirección considerada (ver Figura 3.6).

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación constitutiva del cerco (3.72) y (3.71) en (3.75), se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{lat X} &= \sigma_{cerco/barra X} = B_X \cdot \sigma_{cerco X} = -B_X \cdot (E_A)_{CX} \cdot \varepsilon_{lat X} \\ \sigma_{lat Y} &= \sigma_{cerco/barra Y} = B_Y \cdot \sigma_{cerco Y} = -B_Y \cdot (E_A)_{CY} \cdot \varepsilon_{lat Y}\end{aligned}\quad (3.77)$$

donde $\varepsilon_{lat X}$ y $\varepsilon_{lat Y}$ son las deformaciones laterales que se producen en la barra en cada uno de los ejes por la presencia del confinamiento de los cercos al aplicar un esfuerzo axial. De forma que la ecuación de compatibilidad para cada uno de los ejes es

$$\begin{aligned}\varepsilon_{lat X} &= (\varepsilon_{lat})_{real,X} = (\varepsilon_{lat})_{0,X} - (\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco,X} \\ \varepsilon_{lat Y} &= (\varepsilon_{lat})_{real,Y} = (\varepsilon_{lat})_{0,Y} - (\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco,Y}\end{aligned}\quad (3.78)$$

donde $(\varepsilon_{lat})_{0,X}$ y $(\varepsilon_{lat})_{0,Y}$ son las deformaciones laterales de la barra que se producen en el caso sin confinamiento en cada uno de los ejes, cuando $\sigma_{lat X} = 0$ y $\sigma_{lat Y} = 0$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{lat})_{0,X} &= \frac{-\nu_{cx} \cdot \sigma_{long}}{E_G} \\(\varepsilon_{lat})_{0,Y} &= \frac{-\nu_{cy} \cdot \sigma_{long}}{E_G}\end{aligned}\quad (3.79)$$

En la ecuación (3.78), $(\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco,X}$ y $(\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco,Y}$ son las deformaciones laterales que se producen a causa de la presencia de los cercos

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco,X} &= -\frac{1}{E_x} \cdot \sigma_{lat\ X} + \frac{\nu_{sc}}{E_y} \cdot \sigma_{lat\ Y} \\(\varepsilon_{lat})_{presencia\ cerco,Y} &= -\frac{1}{E_y} \cdot \sigma_{lat\ Y} + \frac{\nu_{sc}}{E_x} \cdot \sigma_{lat\ X}\end{aligned}\quad (3.80)$$

Asimismo, la tensión longitudinal σ_{long} , en el presente caso, viene expresada igual que antes por la ecuación (3.33).

- **Cálculo de la deformación longitudinal y lateral de la barra**

La deformación lateral en el eje x , $\varepsilon_{lat\ X}$, se expresa, substituyendo (3.77) y (3.33) en (3.70), obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_{lat\ X} = \frac{1}{E_x} \cdot \sigma_{cerco/barra\ X} - \frac{\nu_{sc}}{E_y} \cdot \sigma_{cerco/barra\ Y} - \frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \sigma_{long}\quad (3.81)$$

$$\varepsilon_{lat\ X} = \frac{1}{E_x} \cdot (-B_X \cdot (E_A)_{CX} \cdot \varepsilon_{lat\ X}) - \frac{\nu_{sc}}{E_y} \cdot (-B_Y \cdot (E_A)_{CY} \cdot \varepsilon_{lat\ Y}) - \frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G}\quad (3.82)$$

$$\varepsilon_{lat\ X} = -\frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot \varepsilon_{lat\ X} \cdot B_X + \nu_{sc} \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot \varepsilon_{lat\ Y} \cdot B_Y - \frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G}\quad (3.83)$$

$$\varepsilon_{lat\ X} \cdot \left[1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right] = -\frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} + \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot \varepsilon_{lat\ Y}\quad (3.84)$$

$$\varepsilon_{lat\ X} = \frac{\left[-\frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} + \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot \varepsilon_{lat\ Y} \right]}{\left[1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right]}\quad (3.85)$$

Si siguiendo el mismo procedimiento, es posible obtener también la expresión de $\varepsilon_{lat\ Y}$ substituyendo (3.77) y (3.33) en (3.70)

$$\varepsilon_{lat\ Y} \cdot \left[1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right] = -\frac{\nu_{cy}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} + \nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot \varepsilon_{lat\ X}\quad (3.86)$$

$$\varepsilon_{lat\ Y} = \frac{\left[-\frac{\nu_{cy}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} + \nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot \varepsilon_{lat\ X} \right]}{\left[1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right]}\quad (3.87)$$

Substituyendo la ecuación (3.87) en la ecuación (3.84) se obtiene

$$\varepsilon_{lat X} \cdot \left[1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right] = -\frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} + \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot \frac{\left[-\frac{\nu_{cy}}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} + \nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot \varepsilon_{lat X} \right]}{\left[1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right]} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{lat X} \cdot \left[1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right] &= -\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot \left[\nu_{cx} + \frac{\nu_{cy} \cdot \left(\nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right] + \varepsilon_{lat X} \\ &\cdot \left[\frac{\left(\nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right) \cdot \left(\nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{lat X} \cdot \left[1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} - \frac{\left(\nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right) \cdot \left(\nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right] &= -\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot \left[\nu_{cx} + \frac{\left(\nu_{cy} \cdot \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right] \\ &= -\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot \left[\nu_{cx} + \frac{\left(\nu_{cy} \cdot \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right] \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\varepsilon_{lat X} = -\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot \frac{\left[\nu_{cx} + \frac{\left(\nu_{cy} \cdot \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right]}{\left[1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} - \frac{\left(\nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right) \cdot \left(\nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right]} \quad (3.91)$$

Teniendo en cuenta que

$$H_X = \frac{\left[\nu_{cx} + \frac{\left(\nu_{cy} \cdot \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right]}{\left[1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} - \frac{\left(\nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right) \cdot \left(\nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)}{\left(1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)} \right]} \quad (3.92)$$

La ecuación (3.91) queda

$$\varepsilon_{lat X} = -\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot H_X \quad (3.93)$$

Si siguiendo el mismo procedimiento, substituyendo la ecuación (3.85) en la ecuación (3.86), se obtiene también la expresión de $\varepsilon_{lat Y}$

$$\varepsilon_{lat Y} = -\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot \frac{\left[v_{cy} + \frac{\left(v_{cx} \cdot v_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)}{\left(1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)} \right]}{\left[1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} - \frac{\left(v_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right) \cdot \left(v_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)}{\left(1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)} \right]} \quad (3.94)$$

Teniendo H_Y la expresión

$$H_Y = \frac{\left[v_{cy} + \frac{\left(v_{cx} \cdot v_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)}{\left(1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)} \right]}{\left[1 + B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} - \frac{\left(v_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right) \cdot \left(v_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \right)}{\left(1 + B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \right)} \right]} \quad (3.95)$$

La ecuación (3.94) queda

$$\varepsilon_{lat Y} = -\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot H_Y \quad (3.96)$$

Se obtiene también la expresión de la deformación longitudinal, sustituyendo (3.77) y (3.33) en la ecuación (3.69)

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} - \frac{v_{cx}}{E_x} \cdot (-B_X \cdot (E_A)_{CX} \cdot \varepsilon_{lat X}) - \frac{v_{cy}}{E_y} \cdot (-B_Y \cdot (E_A)_{CY} \cdot \varepsilon_{lat Y}) \quad (3.97)$$

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} + v_{cx} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot \varepsilon_{lat X} + v_{cy} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot \varepsilon_{lat Y} \quad (3.98)$$

Se sustituye ahora en (3.98) las expresiones obtenidas anteriormente (3.93) y (3.96) de las deformaciones laterales $\varepsilon_{lat X}$ y $\varepsilon_{lat Y}$

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} + v_{cx} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot \left(-\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot H_X \right) + v_{cy} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot \left(-\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot H_Y \right) \quad (3.99)$$

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} \cdot \left[1 - v_{cx} \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot B_X \cdot H_X - v_{cy} \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot B_Y \cdot H_Y \right] \quad (3.100)$$

- **Cálculo de la rigidez a axil de la barra**

La ecuación (3.100) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{long} = \frac{N}{E_G \cdot A_G} \cdot S \quad (3.101)$$

siendo

$$S = \left[1 - \nu_{cx} \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot B_X \cdot H_X - \nu_{cy} \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot B_Y \cdot H_Y \right] \quad (3.102)$$

y la ecuación (3.101) se reescribe como

$$N = \frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \varepsilon_{long} \quad (3.103)$$

Una vez más, se considera que el axil es constante a lo largo de toda la barra, lo que conduce, de nuevo a la ecuación (3.11). Por lo tanto, reemplazando (3.11) en (3.103), la expresión queda de la siguiente forma:

$$N = \frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \frac{u}{L} \quad (3.104)$$

de manera que la rigidez a axil de la barra considerando la presencia de los cercos para el caso con sección rectangular resulta, a partir de la ecuación (3.104)

$$N = (K_{axil})_{con\ cerco} \cdot u \quad (3.105)$$

siendo

$$(K_{axil})_{con\ cerco} = \frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \frac{1}{L} \quad \begin{cases} \text{sin cercos: } S = 1 \\ \text{con cercos: } S < 1 \end{cases} \quad (3.106)$$

Así, pues, el parámetro a introducir en la matriz de rigidez de la barra equivalente debido al axil es, en el caso con cercos y sección rectangular, un poco distinta que la deducida para el caso sin cercos y muy parecido al caso anterior con cercos y sección cuadrada. Igual que antes, en vez de usar el parámetro $\frac{EA}{L}$, se debe substituir por $\frac{E_G \cdot A_G}{S} \cdot \frac{1}{L}$. Nótese que la rigidez a axil se ve afectada por el coeficiente $1/S$, cuya expresión es distinta según si la viga tienen sección cuadrada o rectangular.

Se comprueba que si $b = h$ en las ecuaciones (3.76), (3.92), (3.95) y (3.102), se llega a la expresión de S del caso de la viga con sección cuadrada deducida en el apartado anterior, tal y como era de esperar

$$b = h \Rightarrow (E_A)_{CX} = (E_A)_{CY} = (E_A)_C \Rightarrow B_X = B_Y = B \Rightarrow H_X = H_Y = H \quad (3.107)$$

Al ser la sección cuadrada, se cumplen las ecuaciones (3.17) y (3.20) y la ecuación (3.102) queda

$$S = 1 - 2 \cdot \nu_z \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot H \quad (3.108)$$

y además se tiene que

$$H = H_x = H_y = \nu_z \cdot \frac{\left[1 + \frac{\left(\nu_{xy} \cdot B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \right)}{\left(1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \right)} \right]}{\left[1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} - \frac{\left(\nu_{xy} \cdot B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \right) \cdot \left(\nu_{xy} \cdot B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \right)}{\left(1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \right)} \right]} \quad (3.109)$$

$$H = \nu_z \cdot \frac{1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} + \nu_{xy} \cdot B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L}}{1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} + B^2 \cdot \left(\frac{(E_A)_C}{E_L} \right)^2 - (\nu_{xy})^2 \cdot B^2 \cdot \left(\frac{(E_A)_C}{E_L} \right)^2} \quad (3.110)$$

$$H = \nu_z \cdot \frac{1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} + \nu_{xy} \cdot B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L}}{1 + 2 \cdot B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} + B^2 \cdot \left(\frac{(E_A)_C}{E_L} \right)^2 \cdot [1 - (\nu_{xy})^2]} \quad (3.111)$$

$$H = \nu_z \cdot \frac{1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot (1 + \nu_{xy})}{\left[1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot (1 + \nu_{xy}) \right] \cdot \left[1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot (1 - \nu_{xy}) \right]} \quad (3.112)$$

$$H = \nu_z \cdot \frac{1}{\left[1 + B \cdot \frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot (1 - \nu_{xy}) \right]} \quad (3.113)$$

Por lo tanto sustituyendo (3.113) en la ecuación (3.108) se obtiene

$$S = 1 - 2\nu_z \cdot \frac{\nu_z \cdot (E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot \frac{1}{\left[\frac{(E_A)_C}{E_L} \cdot B \cdot (1 - \nu_{xy}) + 1 \right]} \quad (3.114)$$

y la expresión (3.114) corresponde efectivamente a la expresión del parámetro S del caso con sección cuadrada de la ecuación (3.46).

- **Determinación de las propiedades de los materiales**

Igual que en el caso de la sección cuadrada, es necesario determinar las propiedades E_x , E_y , ν_{sc} , ν_{cx} y ν_{cy} de los materiales de las que dependen los valores de S en la ecuación (3.102).

Los valores de E_x y E_y se calculan de forma análoga al caso de la sección cuadrada, formulando la compatibilidad de deformaciones en cada uno de los ejes

$$E_x \cdot (A_{lat x})_{Tot} = E_H \cdot (A_{lat x})_H + (E_A)_{CX} \cdot (A_{lat x})_A \quad (3.115)$$

$$E_x = \frac{E_H \cdot (A_{lat x})_H + (E_A)_{CX} \cdot (A_{lat x})_A}{(A_{lat x})_{Tot}} \quad (3.116)$$

donde $(A_{lat x})_A$ es el área transversal de los cercos y $(A_{lat x})_H$ el área transversal de hormigón a lo largo del eje x , de forma que $(A_{lat x})_{Tot} = (A_{lat x})_H + (A_{lat x})_A$ (ver Figura 3.11).

La ecuación (3.116) se reescribe de la siguiente forma:

$$E_x = \frac{E_H \cdot (A_{lat\ x})_H}{(A_{lat\ x})_{Tot}} + \frac{(E_A)_{CX} \cdot (A_{lat\ x})_A}{(A_{lat\ x})_{Tot}} \quad (3.117)$$

La relación $\frac{(A_{lat\ x})_A}{(A_{lat\ x})_{Tot}}$ corresponde a la proporción volumétrica de los cercos de acero dentro de la matriz de hormigón en la dirección x , es decir, corresponde al coeficiente B_X de la ecuación (3.76), de forma que $\frac{(A_{lat\ x})_A}{(A_{lat\ x})_{Tot}} = B_X$. Por lo tanto la ecuación (3.117) queda finalmente (véase la Figura 3.11)

$$E_x = (E_A)_{CX} \cdot B_X + E_H \cdot (1 - B_X) \quad (3.118)$$

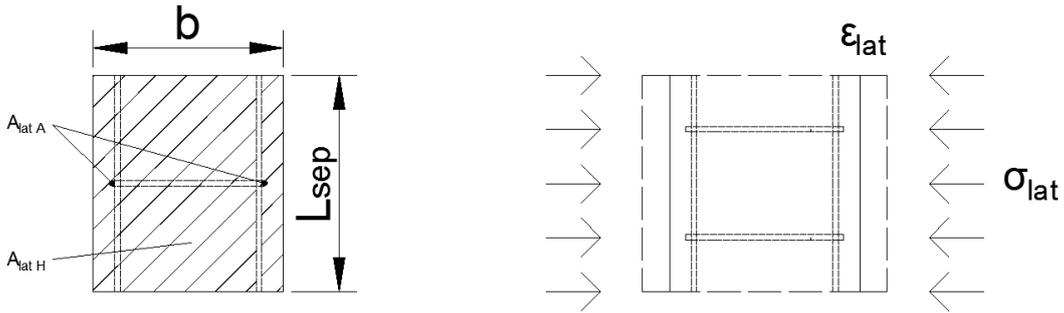


Figura 3.11. Áreas laterales para el cálculo de los módulos de elasticidad transversales

De forma análoga se tiene también

$$E_y = (E_A)_{CY} \cdot B_Y + E_H \cdot (1 - B_Y) \quad (3.119)$$

El valor de ν_{sc} , que es el coeficiente de Poisson en el plano xy , se obtiene igual que en el caso de la sección cuadrada

$$\nu_{sc} = \frac{\nu_H \cdot Vol_H + \nu_A \cdot Vol_{cerco\ A}}{(Vol)_{Tot}} \quad (3.120)$$

donde $Vol_{cerco\ A}$ es el volumen de acero y Vol_H el volumen de la matriz de hormigón en la barra, de forma que $(Vol)_{Tot} = Vol_H + Vol_{cerco\ A}$. Una vez más, debido a la geometría del problema, se considera que el efecto de la armadura longitudinal en el valor de ν_{sc} es despreciable. Los valores de ν_{cx} y ν_{cy} , correspondientes a los coeficientes de Poisson de los planos yz y xz , se obtienen de forma análoga al caso de la sección cuadrada, considerando la compatibilidad de deformaciones en los correspondientes ejes. Una vez más, interviene en su valor únicamente la cuantía de acero de los cercos

$$\nu_{cx} = \nu_{cy} = \frac{\nu_H \cdot Vol_H + \nu_A \cdot Vol_{cerco\ A}}{(Vol)_{Tot}} \quad (3.121)$$

Debido a la geometría del problema, se considera que el efecto de la armadura longitudinal sobre el valor de ν_{cx} y ν_{cy} es despreciable.

Se acaba obteniendo, por lo tanto, que $\nu_{cx} = \nu_{cy} = \nu_{sc}$ y que todos los valores de los coeficientes de Poisson se ven afectados únicamente por la cuantía de cercos, mientras que la cuantía de

armadura longitudinal no se toma en consideración para determinar su valor. Se suele estimar de forma general, incluso en los casos en que no se considera la presencia de los cercos, que el valor del coeficiente de Poisson para el hormigón armado es muy parecido al del hormigón y que el efecto de las barras longitudinales es despreciable. Además, se puede definir también el valor del coeficiente de Poisson aparente de la barra de hormigón armado confinado para cada uno de los lados considerados, $\nu_{apc X}$ y $\nu_{apc Y}$, que sí son distintos entre sí.

Para hallarlos, se expresa la deformación lateral real como

$$\varepsilon_{lat X} = \frac{-\nu_{apc X} \cdot \sigma_{long}}{E_G} \quad (3.122)$$

y se iguala la expresión de ε_{lat} proporcionada por la ecuación (3.122) con la de la ecuación (3.70)

$$\varepsilon_{lat X} = \frac{-\nu_{apc X} \cdot \sigma_{long}}{E_G} = \frac{1}{E_x} \cdot \sigma_{lat X} - \frac{\nu_{sc}}{E_y} \cdot \sigma_{lat Y} - \frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \sigma_{long} \quad (3.123)$$

Introduciendo las ecuaciones (3.77), (3.33), (3.93) y (3.86) en (3.123) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{-\nu_{apc X} \cdot \sigma_{long}}{E_G} = \frac{1}{E_x} \cdot \left[-B_X \cdot (E_A)_{CX} \cdot \left(-\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot H_x \right) \right] - \frac{\nu_{sc}}{E_y} \\ \cdot \left[-B_Y \cdot (E_A)_{CY} \cdot \left(-\frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} \cdot H_Y \right) \right] - \frac{\nu_{cx}}{E_G} \cdot \sigma_{long} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Con lo que, finalmente, se obtiene

$$\frac{-\nu_{apc X} \cdot \sigma_{long}}{E_G} = \frac{-\sigma_{long}}{E_G} \cdot \left[\nu_{cx} - B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot H_X + \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot H_Y \right] \quad (3.125)$$

A partir de la ecuación (3.125) se puede definir la expresión del coeficiente de Poisson aparente en el eje x , $\nu_{apc X}$, de la barra de hormigón armado confinado, que es

$$\nu_{apc X} = \left[\nu_{cx} - B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot H_X + \nu_{sc} \cdot B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot H_Y \right] \quad (3.126)$$

De forma análoga, se puede encontrar también la expresión del coeficiente de Poisson aparente en el eje y , $\nu_{apc Y}$

$$\nu_{apc Y} = \left[\nu_{cy} - B_Y \cdot \frac{(E_A)_{CY}}{E_y} \cdot H_Y + \nu_{sc} \cdot B_X \cdot \frac{(E_A)_{CX}}{E_x} \cdot H_X \right] \quad (3.127)$$

$\nu_{apc X}$ y $\nu_{apc Y}$ son los coeficientes de Poisson que finalmente tendrá la barra. No hay que confundir los coeficientes de Poisson del material homogeneizado en tres dimensiones, ν_{cx} , ν_{cy} y ν_{sc} , con los que se producen realmente en la barra por la interacción entre materiales.

Al igual que en el caso de la sección cuadrada, los valores de los módulos de elasticidad transversales E_x y E_y de la barra son los que se utilizan para calcular las tensiones laterales $\sigma_{lat X}$ y $\sigma_{lat Y}$ en la misma, entendiendo la barra como un material compuesto, con materiales componentes el acero de los cercos y el hormigón. La tensión lateral en el cerco metálico viene dada por la expresión (3.24) y para el cálculo de la tensión lateral en el hormigón debe usarse el módulo de elasticidad del hormigón, E_H . Es importante distinguir la tensión en el material

homogeneizado de la tensión en los materiales componentes. De esta forma, para determinar las tensiones que se producen en el hormigón en cada uno de los ejes x e y , una vez conocidas las tensiones de la barra, es necesario utilizar las ecuaciones (3.62) a (3.66) para cada uno de los correspondientes ejes.

3.1.3 Comportamiento a flexión del hormigón armado mediante la homogeneización “ad-hoc”

a) Barra de hormigón armado sin cercos

En el caso de la rigidez a flexión se expresa, una vez más, el equilibrio por zonas (véase la Figura 3.12).

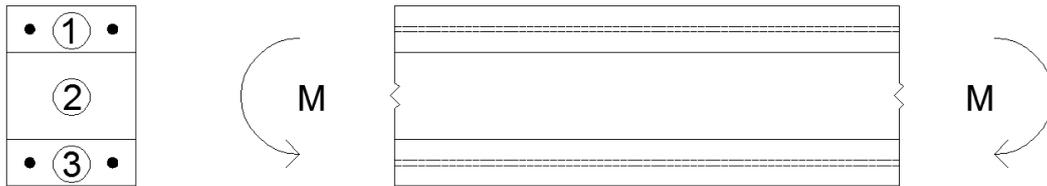


Figura 3.12. Esquema de la división en zonas de la sección para el esfuerzo flector

En la zona 1, hay una matriz de hormigón y barras longitudinales de acero

$$\sum_{i=1}^{mat} (M_i)_1 = (M_A)_1 + (M_H)_1 = E_A \cdot (I_Z)_{A,1} \cdot \chi_A + E_H \cdot (I_Z)_{H,1} \cdot \chi_H \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.128)$$

Por compatibilidad, la curvatura es la misma en toda la sección y para todos los materiales que la componen

$$\chi = \chi_A = \chi_H \quad (3.129)$$

Reemplazando (3.129) en (3.128) se deduce que

$$\sum_{i=1}^{mat} (M_i)_1 = (M_A)_1 + (M_H)_1 = [E_A \cdot (I_Z)_{A,1} + E_H \cdot (I_Z)_{H,1}] \cdot \chi \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.130)$$

Asimismo, para la zona 2, donde únicamente hay hormigón, se tiene

$$\sum_{i=1}^{mat} (M_i)_2 = (M_H)_2 = E_H \cdot (I_Z)_{H,2} \cdot \chi \quad ; \quad \forall mat: H \quad (3.131)$$

Finalmente, en la zona 3, donde hay nuevamente hormigón y acero, se sigue el mismo procedimiento que para la zona 1, obteniéndose

$$\sum_{i=1}^{mat} (M_i)_3 = (M_A)_3 + (M_H)_3 = [E_A \cdot (I_Z)_{A,3} + E_H \cdot (I_Z)_{H,3}] \cdot \chi \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.132)$$

Así, pues, es posible escribir el equilibrio global en la sección, con las 3 zonas consideradas

$$M = \sum_{i=1}^{mat} (M_i)_1 + \sum_{i=1}^{mat} (M_i)_2 + \sum_{i=1}^{mat} (M_i)_3 \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.133)$$

Sustituyendo (3.130), (3.131) y (3.132) en (3.133) se obtiene que

$$M = [E_A \cdot (I_Z)_A^{Total} + E_H \cdot (I_Z)_H^{Total}] \cdot \chi \quad (3.134)$$

siendo

$$\begin{aligned} (I_Z)_A^{Total} &= (I_Z)_{A,1} + (I_Z)_{A,3} \\ (I_Z)_H^{Total} &= (I_Z)_{H,1} + (I_Z)_{H,2} + (I_Z)_{H,3} \end{aligned} \quad (3.135)$$

Considerando la hipótesis de flexión pura, en la cual la curvatura es constante y por lo tanto el momento se considera constante a lo largo de toda la barra, se tiene que

$$\chi = \frac{\theta}{L} \quad (3.136)$$

siendo L la longitud de la barra.

Por lo tanto, reemplazando (3.136) en (3.134), la expresión queda finalmente

$$M = [E_A \cdot (I_Z)_A^{Total} + E_H \cdot (I_Z)_H^{Total}] \cdot \frac{\theta}{L} \quad (3.137)$$

La expresión (3.137) puede reescribirse como

$$M = K_{flexión} \cdot \theta \quad (3.138)$$

siendo $K_{flexión}$ la rigidez a flexión de la barra, tal que

$$K_{flexión} = [E_A \cdot (I_Z)_A^{Total} + E_H \cdot (I_Z)_H^{Total}] \cdot \frac{1}{L} \quad (3.139)$$

Así, pues, la expresión de la rigidez a flexión EI a introducir en la matriz de rigidez de la barra equivalente es

$$E_G I_G = \bar{A}_M = \sum_{i=1}^{mat} E_i I_i = E_A I_A + E_H I_H \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.140)$$

b) Barra de hormigón armado con cercos

Para el caso de una barra con cercos metálicos, se considera que la tensión debida a la flexión se aproxima mediante una descomposición por capas, tal que en cada capa la tensión axial se mantiene constante (ver Figura 3.13), de tal forma que es posible utilizar las expresiones desarrolladas en el apartado anterior.

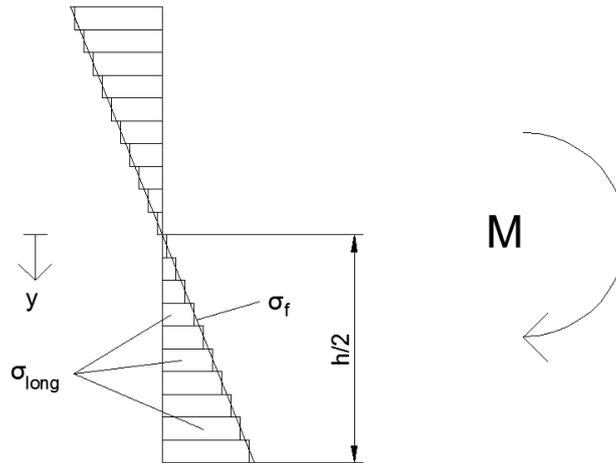


Figura 3.13. Distribución de tensiones aproximada en la sección

De esta forma, la tensión de flexión a lo largo de toda la sección es

$$\sigma_f = \frac{M \cdot y}{I} \quad (3.141)$$

Se considera por lo tanto la tensión que se desarrolla por el efecto del momento en la capa i de la sección, situada a una distancia y del eje neutro. También se puede calcular dicha tensión longitudinal de cada capa a partir de la ecuación (3.103) que, combinada con la ecuación (3.33), proporciona

$$\sigma_{long} = \frac{E_G}{S} \cdot \varepsilon_{long} \quad (3.142)$$

A continuación, se procede a igualar (3.141) con (3.142) para obtener la rigidez a flexión en la zona correspondiente a cada capa

$$\frac{M_e \cdot y}{I} = \frac{E_G}{S} \cdot \varepsilon_{long} \quad (3.143)$$

$$M_e = \frac{E_G \cdot I}{S} \cdot \frac{\varepsilon_{long}}{y} = \frac{E_G \cdot I}{S} \cdot \chi \quad (3.144)$$

siendo χ la curvatura, que es $\chi = \frac{\varepsilon_{long}}{y}$. Considerando, además, que toda la sección de la barra tiene curvatura constante, se puede sumar la contribución al momento global de la sección de cada una de las capas para obtener la rigidez a flexión de toda la barra. Para realizar la correspondiente recomposición de tensiones se comprueba que la suma de tensiones se corresponda a la integral de las tensiones de flexión en la sección considerada

$$\frac{h}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n (\sigma_{long})_i = \sigma_f \left(y = \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \quad (3.145)$$

Aplicando para cada capa, cuya tensión es $(\sigma_{long})_i$, la ecuación (3.143), se tiene que

$$(\sigma_{long})_i = \frac{M \cdot y_i}{I} \quad (3.146)$$

donde y_i es la distancia del centro de la capa al eje neutro

$$y_i = \frac{h}{4n} + \frac{h}{2n} \cdot (i - 1) \quad (3.147)$$

La ecuación (3.145) contiene el sumatorio de una sucesión aritmética. Sabiendo que la suma de una progresión aritmética es $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$, la ecuación (3.145) queda

$$\frac{h}{2n} \cdot \frac{M}{I} \cdot \frac{h \cdot n}{4} = \frac{h}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{4} = \sigma_f \left(y = \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \quad (3.148)$$

De la ecuación anterior es posible deducir el resultado esperado

$$\frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_f \left(y = \frac{h}{2} \right) \quad (3.149)$$

Por esta razón es posible utilizar la ecuación (3.144) de forma más general a lo largo de toda la sección de la barra y no únicamente para una única capa de la sección. Para toda la sección de la barra se deduce

$$M = \frac{E_G I_G}{S} \cdot \chi \quad (3.150)$$

Introduciendo la ecuación (3.136) en (3.150), la ecuación (3.150) puede escribirse como

$$M = K_{flexión} \cdot \theta \quad (3.151)$$

siendo $K_{flexión}$ la rigidez a flexión de la barra, tal que

$$K_{flexión} = \frac{E_G I_G}{S} \cdot \frac{1}{L} \quad (3.152)$$

donde, una vez más, $E_G I_G$ es idéntico al calculado mediante la ecuación (3.140) y donde S corresponde al calculado mediante la expresión (3.102).

Al expresar la formulación de la rigidez a flexión de esta forma, no se considera que el confinamiento de la barra se produce únicamente en la parte de la sección comprimida por el esfuerzo flector y que no se produce en la parte que se encuentra bajo tracción. Dicho fenómeno será considerado al implementar la no linealidad del hormigón en el Capítulo 4.

3.1.4 Comportamiento a cortante del hormigón armado mediante la homogeneización “ad-hoc”

a) Barra de hormigón armado sin cercos

En este apartado se considera la hipótesis de que el momento flector tiene variación lineal a lo largo de la barra, por lo que el esfuerzo cortante que se produce es constante. Ello provoca la aparición de alabeo entre las secciones de la viga. Sin embargo, los resultados obtenidos en el apartado anterior para la rigidez a flexión se han obtenido realizando la hipótesis de sección sin alabeo. Se admite, por lo tanto, la hipótesis generalizada de Bernoulli-Navier y, por lo tanto, se desprecia el alabeo relativo entre dos secciones próximas y se pueden considerar adecuados los resultados obtenidos para la rigidez a flexión y combinarlos con los que se desarrollarán en esta parte. Esta aproximación es admisible porque la deformación producida por cortante es mucho menor que la deformación producida por flexión. Cuanto más esbelta sea la pieza, menor será el efecto del alabeo (Cervera y Blanco, 2001). Se considera, en un primer momento, únicamente la presencia de la matriz de hormigón y de las barras longitudinales de acero y se expresa el equilibrio por zonas (Figura 3.14).

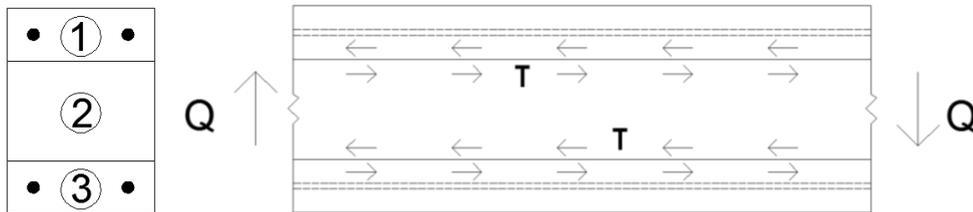


Figura 3.14. Esquema de la subdivisión en zonas de la sección para el cortante en el caso sin cercos

- **Equilibrio en la sección**

Se expresa el equilibrio en la zona 1, formada por hormigón y acero

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_1 = (Q_A)_1 + (Q_H)_1 = \tau_A \cdot A_A + \tau_H \cdot A_H \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.153)$$

Por compatibilidad, la deformación de cortante es la misma en toda la sección y para todos los materiales que la componen

$$\gamma = \gamma_A = \gamma_H \quad (3.154)$$

Considerando (3.154), a partir del equilibrio formulado en (3.153), se tiene que

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_1 = (Q_A)_1 + (Q_H)_1 = [G_A \cdot (A_A)_1 \cdot \gamma + G_H \cdot (A_H)_1 \cdot \gamma] \cdot x^* \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.155)$$

y de (3.155) se obtiene

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_1 = (Q_A)_1 + (Q_H)_1 = [G_A \cdot (A_A)_1 + G_H \cdot (A_H)_1] \cdot \gamma \cdot x^* \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.156)$$

x^* es el factor de cortante que relaciona el área reducida con el área real de la sección de la viga

$$x^* = \frac{A_G^*}{A_G} \quad (3.157)$$

- **Cálculo del factor de cortante de la sección**

La presencia del factor de cortante en la formulación es debida a que el esfuerzo cortante no se distribuye de forma uniforme a lo largo de la sección. El área reducida de una sección es el área equivalente sobre la que un cortante distribuido uniformemente produciría la misma distorsión media que en la sección real (Cervera y Blanco, 2001). Es decir que, en una sección de módulo transversal G y área A sometida a esfuerzo cortante Q :

$$\gamma_{med} = \frac{Q}{G \cdot A^*} = \frac{Q}{G \cdot x^* \cdot A} \quad (3.158)$$

El factor de cortante x^* es una característica geométrica de la sección y se calcula mediante métodos energéticos. La energía interna de la viga debida al cortante es

$$W_{cort} = \int_L \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma dx \quad (3.159)$$

A partir de la fórmula de Collignon se tiene

$$\tau = \frac{Q \cdot \bar{S}^*(y)}{I_Z \cdot b(y)} \quad (3.160)$$

Donde $\bar{S}^*(y)$ es el momento estático de la sección. Además

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q \cdot \bar{S}^*(y)}{I_Z \cdot b(y)} \cdot \frac{1}{G} \quad (3.161)$$

Tras sustituir (3.160) y (3.161) en (3.159) se obtiene

$$W_{cort} = \int_L \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot \bar{S}^*(y)}{I_Z \cdot b(y)} \cdot \frac{Q \cdot \bar{S}^*(y)}{I_Z \cdot b(y)} \cdot \frac{1}{G} dx = \int_L \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{G \cdot A \cdot x^*} dx \quad (3.162)$$

y por lo tanto, de la expresión (3.162) se obtiene que

$$W_{cort} = \int_L \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{G \cdot A^*} dx \quad (3.163)$$

con

$$x^* = \frac{I_Z^2}{A \cdot \int_S \left(\frac{\bar{S}^*(y)}{b(y)} \right)^2 dS} \quad (3.164)$$

Para una sección rectangular $x^* = \frac{5}{6}$ y para una sección circular, $x^* = \frac{9}{10}$.

- **Equilibrio en el resto de la sección**

Para la zona 2, donde únicamente hay hormigón se obtiene

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_2 = (Q_H)_2 = \tau_H \cdot A_H = G_H \cdot (A_H)_2 \cdot \gamma \cdot x^* \quad ; \quad \forall mat: H \quad (3.165)$$

En la zona 3, donde hay nuevamente hormigón y acero, se sigue el mismo procedimiento que para la zona 1, obteniéndose

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_3 = (Q_A)_3 + (Q_H)_3 = [G_A \cdot (A_A)_3 + G_H \cdot (A_H)_3] \cdot \gamma \cdot x^* \quad ; \quad \forall mat: A, H \quad (3.166)$$

Con esto, es posible escribir el equilibrio global en la sección, con las 3 zonas consideradas

$$Q = \sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_1 + \sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_2 + \sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_3 \quad ; \quad \forall mat: A, H \quad (3.167)$$

Sustituyendo (3.156), (3.165) y (3.166) en (3.167) se obtiene

$$Q = [G_A \cdot A_A^{Total} + G_H \cdot A_H^{Total}] \cdot \gamma \cdot x^* \quad (3.168)$$

siendo

$$\begin{aligned} A_A^{Total} &= (A_A)_1 + (A_A)_3 \\ A_H^{Total} &= (A_H)_1 + (A_H)_2 + (A_H)_3 \end{aligned} \quad (3.169)$$

Como el cortante se considera constante a lo largo de toda la barra, se tiene que

$$\gamma = \frac{V}{L} \quad (3.170)$$

siendo L la longitud de la barra.

Por lo tanto, reemplazando (3.170) en la expresión (3.168), esta última ecuación queda

$$Q = [G_A \cdot A_A^{Total} + G_H \cdot A_H^{Total}] \cdot \frac{V}{L} \cdot x^* \quad (3.171)$$

A continuación, se realiza la simplificación de considerar las áreas reducidas de las secciones de cada uno de los materiales considerados, en este caso del hormigón y del acero, en vez de realizar el cálculo del área reducida la sección compuesta de hormigón armado

$$Q = [G_A \cdot (A_A^{Total})^* + G_H \cdot (A_H^{Total})^*] \cdot \frac{V}{L} \quad (3.172)$$

Esta simplificación no se ajusta exactamente a la realidad, pero se realiza porque el cálculo del área reducida a cortante de la sección compuesta de hormigón armado es muy complejo. Sin embargo el procedimiento exacto para obtener dicho valor está detallado en el anejo 2 del presente trabajo.

La expresión (3.172) se puede reescribir como

$$Q = K_{cortante} \cdot v \quad (3.173)$$

siendo $K_{cortante}$ la rigidez a cortante de la barra, tal que

$$K_{cortante} = [G_A \cdot (A_A^{Total})^* + G_H \cdot (A_H^{Total})^*] \cdot \frac{1}{L} \quad (3.174)$$

Así, pues, la expresión de la rigidez a cortante GA a introducir en la matriz de rigidez de la barra equivalente es:

$$A_G^* G_G = \bar{A}_{G_M}^* = \sum_{i=1}^{mat} A_i^* G_i = A_A^* G_A + A_H^* G_H \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.175)$$

b) Barra de hormigón armado con cercos

En el caso en que se considera la presencia de los cercos, se realiza el mismo razonamiento que en el caso anterior y se obtiene una formulación muy similar. Sin embargo se añade, además del área de acero que corresponde a las barras longitudinales, una cierta área de acero que se debe a la presencia de los mencionados cercos (ver Figura 3.15).

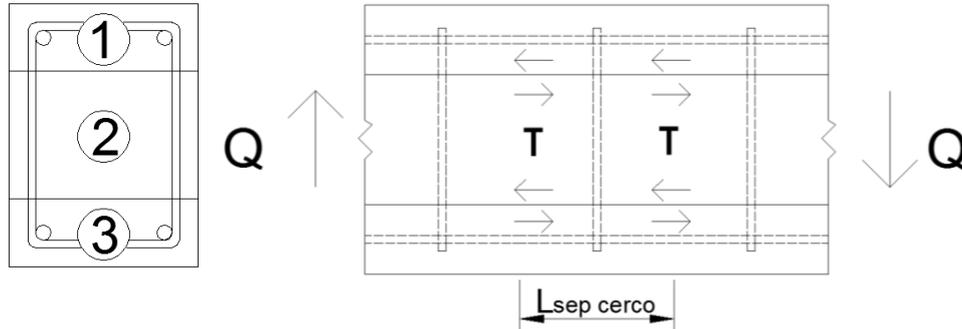


Figura 3.15. Esquema de la división en zonas de la sección para el cortante en el caso con cercos

• **Equilibrio de la sección**

El equilibrio por zonas se expresa igual que anteriormente. Por una parte, se expresa el equilibrio en la zona 1, con hormigón y acero

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_1 = (Q_{A,Long})_1 + (Q_{A,cerco})_1 + (Q_H)_1 \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.176)$$

Por compatibilidad, se tiene que la deformación a cortante es la misma en toda la sección y para todos los materiales que la componen, tal y como está indicado en (3.154). Del equilibrio formulado en la ecuación (3.176), se tiene que

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_1 = [G_A \cdot (A_{A,Long})_1 + G_A \cdot (A_{A,cerco})_1 + G_H \cdot (A_H)_1] \cdot \gamma \cdot x^* \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.177)$$

Para la zona 2, donde esta vez hay hormigón y cercos metálicos, se tiene

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_2 = (Q_{A,cercos})_2 + (Q_H)_2 = [G_A \cdot (A_{A,cercos})_2 + G_H \cdot (A_H)_2] \cdot \gamma \cdot x^* \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.178)$$

Finalmente, en la zona 3, se sigue el mismo procedimiento que para la zona 1, obteniéndose

$$\sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_3 = (Q_{A,Long})_3 + (Q_{A,cercos})_3 + (Q_H)_3 = [G_A \cdot (A_{A,Long})_3 + G_A \cdot (A_{A,cercos})_3 + G_H \cdot (A_H)_3] \cdot \gamma \cdot x^* \quad (3.179)$$

$$; \quad \forall mat: A; H$$

El equilibrio global en la sección, para las 3 zonas consideradas se expresa como

$$Q = \sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_1 + \sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_2 + \sum_{i=1}^{mat} (Q_i)_3 \quad ; \quad \forall mat: A; H \quad (3.180)$$

Sustituyendo (3.177), (3.178) y (3.179) en (3.180) se obtiene

$$Q = [G_A \cdot (A_A^{Total})_{Long} + G_A \cdot (A_A^{Total})_{cercos} + G_H \cdot A_H^{Total}] \cdot \gamma \cdot x^* \quad (3.181)$$

siendo

$$(A_A^{Total})_{Long} = (A_{A,Long})_1 + (A_{A,Long})_3$$

$$(A_A^{Total})_{cercos} = (A_{A,cercos})_1 + (A_{A,cercos})_2 + (A_{A,cercos})_3 \quad (3.182)$$

$$A_H^{Total} = (A_H)_1 + (A_H)_2 + (A_H)_3$$

Puesto que el cortante se considera constante a lo largo de toda la barra, tal y como está indicado en (3.170) se vuelve a tener que $\gamma = v/L$. Por lo tanto, sustituyendo (3.170) en (3.181), la expresión queda finalmente

$$Q = [G_A \cdot (A_A^{Total})_{Long} + G_A \cdot (A_A^{Total})_{cercos} + G_H \cdot A_H^{Total}] \cdot \frac{v}{L} \cdot x^* \quad (3.183)$$

A continuación se realiza la simplificación de considerar las áreas reducidas a cortante de las secciones de cada uno de los materiales considerados (en este caso del hormigón y del acero) en vez de realizar el cálculo del área reducida de la sección compuesta de hormigón armado

$$Q = [G_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* + G_A \cdot (A_A^{Total})_{cercos}^* + G_H \cdot (A_H^{Total})^*] \cdot \frac{v}{L} \quad (3.184)$$

De esta forma la expresión (3.184) puede reescribirse como

$$Q = K_{cortante} \cdot v \quad (3.185)$$

siendo $K_{cortante}$ la rigidez a cortante de la barra, tal que

$$K_{cortante} = \left[G_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* + G_A \cdot (A_A^{Total})_{cerco}^* + G_H \cdot (A_H^{Total})^* \right] \cdot \frac{1}{L} \quad (3.186)$$

La expresión del parámetro GA a introducir en la matriz de rigidez de la barra equivalente es

$$A_G^* G_G = \bar{A}_{G_M}^* = \sum_{i=1}^n A_i^* G_i + G_A \cdot A_{A,Cerco}^* = G_A \cdot A_{A,Long}^* + G_A \cdot A_{A,Cerco}^* + G_H \cdot A_H^* \quad (3.187)$$

Dado que los cercos se encuentran distribuidos de forma puntual en la barra con una separación $L_{Sep\ cercos}$, es necesario encontrar el valor del área de cerco equivalente para poder introducirlo en las ecuaciones obtenidas anteriormente y en la correspondiente matriz de rigidez de la barra.

• **Determinación del área de cortante equivalente del cerco**

La distribución de las tensiones cortantes que se producen en una sección de la barra es la de la Figura 3.16. En medio de la sección se desarrolla la tensión de corte máxima, que toma un valor

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot S_z^*}{I \cdot b} = \frac{3 Q}{2 bh} = \frac{Q}{\hat{x} \cdot bh} \quad (3.188)$$

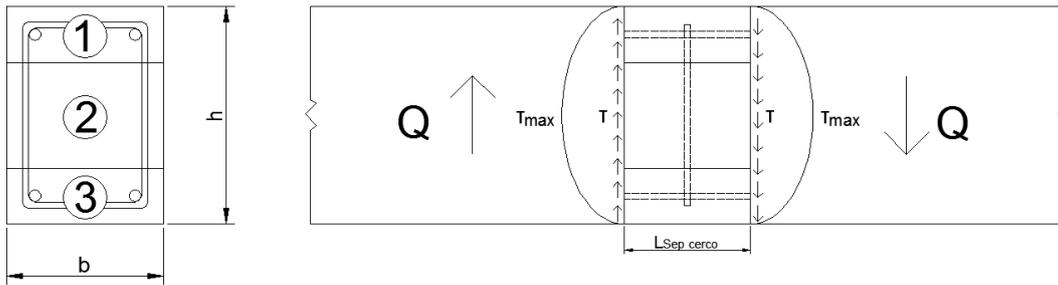


Figura 3.16. Distribución de las tensiones de corte en la sección

siendo \hat{x} el coeficiente de cortante, que relaciona la tensión media y la tensión máxima que se desarrolla en la sección

$$\hat{x} = \frac{\tau_{med}}{\tau_{max}} = \frac{\hat{A}}{A} \quad (3.189)$$

Dicho coeficiente de cortante no debe ser confundido con el factor de cortante x^* descrito en el apartado anterior. Para secciones rectangulares, se tiene que $\hat{x} = \frac{2}{3}$.

Tal y como se observa en la Figura 3.17, debido al equilibrio, el diferencial de tensiones normales que se produce entre dos secciones de una rebanada cualquiera corresponde al esfuerzo cortante. Por lo tanto la fuerza de rozamiento interlaminar debida al cortante, teniendo en cuenta la expresión de τ_{max} indicada en (3.188) (ver Figura 3.18) es

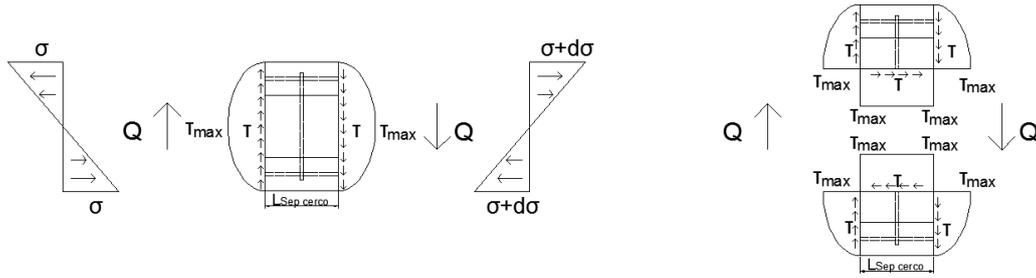


Figura 3.17. Esquema de las tensiones en la rebanada

$$\tau_{max} \cdot b \cdot L_{Sep\ cercos} = \frac{3Q}{2bh} \cdot b \cdot L_{Sep\ cercos} = \frac{3Q}{2h} \cdot L_{Sep\ cercos} \quad (3.190)$$

siendo $L_{Sep\ cercos}$ la longitud de separación entre dos cercos consecutivos. Se considera que dicha separación es constante a lo largo de toda la barra.

Se introduce la hipótesis de que toda dicha fuerza es resistida únicamente por los cercos. Dicha hipótesis es asumida por muchas normativas. Por lo tanto, de la ecuación (3.190) se deduce que la fuerza resistida por un cerco es (ver Figura 3.18)

$$F_{cerco} = \frac{3Q}{2h} \cdot L_{Sep\ cercos} \quad (3.191)$$

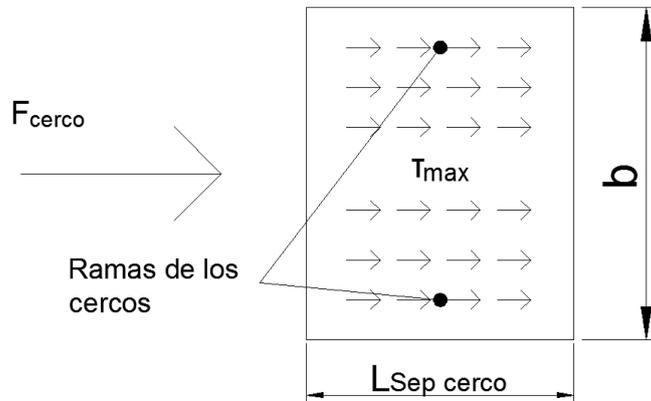


Figura 3.18. Fuerza interlaminar que resiste el cerco

Dicha fuerza es resistida únicamente por el cerco, a cortante, siendo el área sobre el que está aplicada la de las dos ramas de los cercos metálicos

$$\frac{F_{cerco}}{(A_A)_{ramas}} = G_A \cdot \gamma \quad (3.192)$$

siendo

$$(A_A)_{ramas} = \frac{\phi^2 \cdot \pi \cdot 2}{4} \quad (3.193)$$

Sustituyendo (3.192) y (3.193) en (3.191) se obtiene

$$F_{cerco} = \frac{3Q}{2h} \cdot L_{Sep\ cercos} = (A_A)_{ramas} \cdot G_A \cdot \gamma = \frac{\phi^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 \cdot G_A \cdot \gamma \quad (3.194)$$

y por lo tanto la expresión (3.194) proporciona

$$Q = \frac{\phi^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{h}{L_{Sep\ cercos}} \cdot \frac{2}{3} \cdot G_A \cdot \gamma \quad (3.195)$$

La ecuación anterior puede reescribirse como

$$Q = \hat{A}_{A,cercos} \cdot G_A \cdot \gamma \quad (3.196)$$

siendo

$$\hat{A}_{A,cercos} = \frac{\phi^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{h}{L_{Sep\ cercos}} \cdot \frac{2}{3} \quad (3.197)$$

Esta ecuación proporciona el valor del área de cerco equivalente, $\hat{A}_{A,cercos}$, necesario para considerar la presencia de los cercos en la barra y que se debe introducir en las ecuaciones (3.186) y (3.187) y en la correspondiente matriz de rigidez de la barra.

3.2 Formulación de la matriz de rigidez de la barra considerando la homogeneización del hormigón armado

En este apartado se presenta la formulación de las barras de hormigón armado con confinamiento, incluyendo su rigidez, que ha sido introducida en el programa desarrollado en el presente trabajo.

3.2.1 Barra de hormigón armado sin cercos

Los esfuerzos y desplazamientos que se producen en una barra de hormigón armado homogeneizada son los de la Figura 3.19.

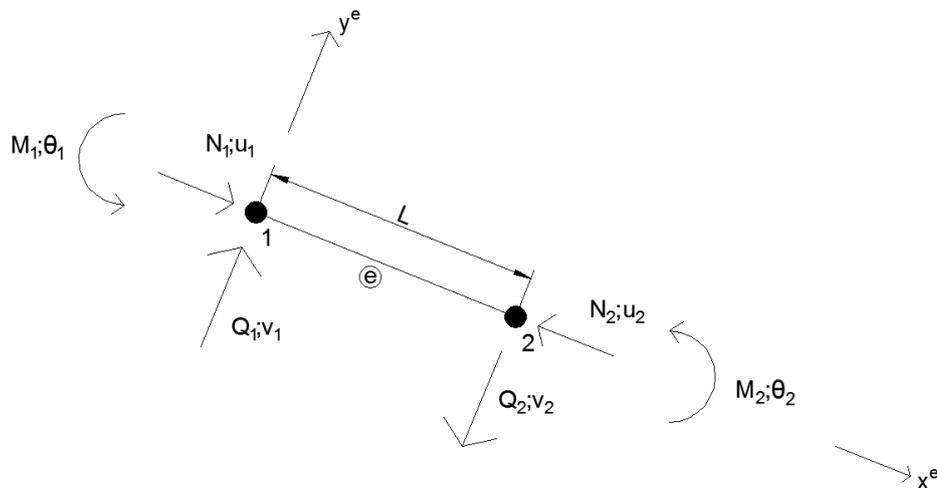


Figura 3.19. Esfuerzos en la barra equivalente

La relación entre los esfuerzos y los desplazamientos es

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.198)$$

siendo \mathbf{K} la matriz de rigidez de dimensión 6x6 de la barra equivalente de hormigón armado sin cercos, en el caso bidimensional, tal que

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{E_G A_G}{L} & 0 & 0 & -\frac{E_G A_G}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C)} & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} & 0 & -\frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C)} & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} \\ 0 & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(4+C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C)} & 0 & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(2-C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C)} \\ -\frac{E_G A_G}{L} & 0 & 0 & \frac{E_G A_G}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C)} & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} & 0 & \frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C)} & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} \\ 0 & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(2-C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C)} & 0 & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(4+C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C)} \end{bmatrix} \quad (3.199)$$

donde el coeficiente C , que aparece en (3.199), considera la deformación por cortante, según lo indicado en el Anejo 1

$$C = \frac{12E_G I_G}{A_G^* G_G L^2} \quad (3.200)$$

$E_G A_G$ es la rigidez axial homogeneizada, o la resultante global del producto $E_i A_i$ de cada uno de los materiales i que componen la sección transversal. En el caso sin cercos, hay únicamente una matriz de hormigón y barras longitudinales de acero (ver Figura 3.20). E_i es el valor del módulo de elasticidad del material i y A_i es el área de dicho material en la sección considerada. Por lo tanto, $E_G A_G$ se obtiene a partir de la ecuación (3.15).

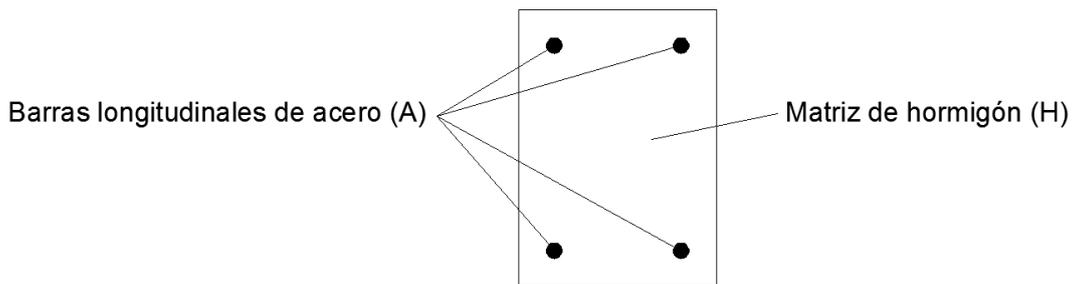


Figura 3.20. Esquema de la sección de la barra de hormigón armado sin cercos

De la misma forma se expresan la rigideces a flexión y a cortante homogeneizadas, o las resultantes globales $E_G I_G$ y $A_G^* G_G$ de los productos $E_i I_i$ y $A_i^* G_i$ de cada uno de los materiales i que componen la sección. I_i es la inercia de la sección de material i considerado y A_i^* es el área de cortante reducida del material i -ésimo de dicha sección. Se tiene, por lo tanto, que $E_G I_G$ y $A_G^* G_G$ se obtienen a partir de las ecuaciones (3.140) y (3.175).

3.2.2 Barra de hormigón armado de sección cuadrada con cercos – caso particular

La presencia de los cercos produce un confinamiento, que altera el valor de la rigidez a axil y a flector por variar la deformación longitudinal que se produce. Asimismo la presencia de los cercos interviene en el valor de la rigidez a cortante $A_G^* G_G$. Para valorar ambas funciones del cerco, se considera primero el caso de una barra con sección cuadrada (ver Figura 3.21).

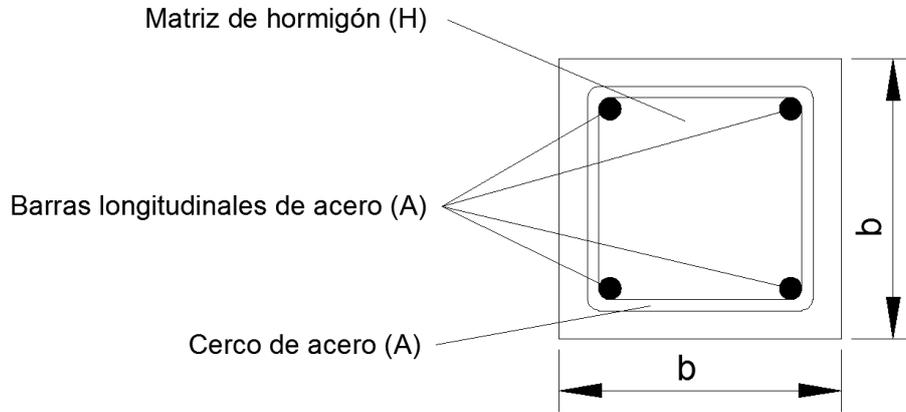


Figura 3.21. Esquema de la sección de la barra de hormigón armado con cercos

En este caso, la matriz \mathbf{K} a introducir en (3.198) queda

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{E_G A_G}{L \cdot S} & 0 & 0 & -\frac{E_G A_G}{L \cdot S} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C) \cdot S} & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} & 0 & -\frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C) \cdot S} & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} \\ 0 & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} & \frac{(4+C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C) \cdot S} & 0 & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} & \frac{(2-C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C) \cdot S} \\ -\frac{E_G A_G}{L \cdot S} & 0 & 0 & \frac{E_G A_G}{L \cdot S} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C) \cdot S} & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} & 0 & \frac{12E_G I_G}{L^3 \cdot (1+C) \cdot S} & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} \\ 0 & \frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} & \frac{(2-C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C) \cdot S} & 0 & -\frac{6E_G I_G}{L^2 \cdot (1+C) \cdot S} & \frac{(4+C) \cdot E_G I_G}{L \cdot (1+C) \cdot S} \end{bmatrix} \quad (3.201)$$

Nótese que la rigidez a axil y a flexión se ven afectadas por el coeficiente $1/S$, siendo S , definido por la expresión (3.46). Para el caso con cercos, las expresiones (3.15) y (3.140) que proporcionan $E_G A_G$ y $E_G I_G$ respectivamente no varían, tan sólo se ven afectadas por el coeficiente S , como se observa en (3.201). Sin embargo en la ecuación de $A_G^* G_G$, que hay que introducir en el coeficiente C de acuerdo con (3.200), hay que añadir, asimismo, un área equivalente de acero que represente la presencia del cerco. Por lo tanto, la fórmula de $A_G^* G_G$ a usar queda definida por (3.187).

3.2.3 Barra de hormigón armado de sección rectangular con cercos

La formulación del caso con sección rectangular difiere del caso con sección cuadrada descrito en el apartado 3.2.2 únicamente en la expresión del parámetro S que en este caso, viene dado por la ecuación (3.102) (véase la Figura 3.22). Para el caso con sección cuadrada ($b = h$), esta ecuación coincide con la expresada en el apartado anterior.

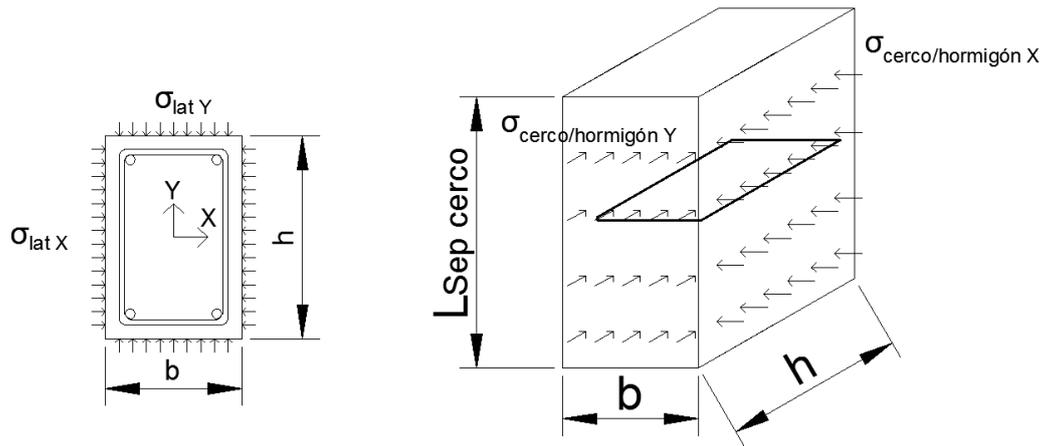


Figura 3.22. Esquema de la viga con sección rectangular considerada

3.3 Modelo de homogeneización en el caso tridimensional

En esta sección se detalla la formulación de una ecuación constitutiva homogeneizada en tres dimensiones para el hormigón armado confinado que se ha desarrollado en el presente trabajo. Dicha formulación del modelo tridimensional propuesto, más complejo, se deja preparada para ser introducida en un programa de cálculo no lineal por elementos finitos en el futuro. Obviamente, el modelo desarrollado en 1 dimensión será más sencillo que el modelo desarrollado en 3 dimensiones, de forma que el primero pueda ser incorporado en programas de cálculo de estructuras convencionales. Ello requiere simplificar distintos aspectos del comportamiento del hormigón armado confinado, que sí pueden considerarse en la formulación del modelo tridimensional, sobre todo ante los esfuerzos de flexión, donde únicamente la parte de la sección de la barra que está comprimida se encuentra confinada.

La formulación para elementos finitos tridimensionales deriva de la que se ha obtenido para elementos de barra unidimensionales en el presente capítulo. El modelo tridimensional permite calcular mejor el campo de tensiones y deformaciones que se producen en la barra, por lo que proporciona resultados más parecidos a la realidad en el caso de barras de hormigón armado confinadas mediante cercos.

3.3.1 Ecuación constitutiva elástica ortótropa en tres dimensiones

Para expresar el problema de forma adecuada, es necesario considerar la ortotropía del hormigón debida a la presencia de los cercos. La ecuación constitutiva de un problema ortótropo en tres dimensiones es

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.202)$$

siendo \mathbf{D} la matriz constitutiva elástica ortótropa en tres dimensiones

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \nu_{yz} \cdot \nu_{zy}}{E_y \cdot E_z \cdot \Delta} & \frac{\nu_{yx} + \nu_{yz} \cdot \nu_{zx}}{E_y \cdot E_z \cdot \Delta} & \frac{\nu_{zx} + \nu_{zy} \cdot \nu_{yx}}{E_y \cdot E_z \cdot \Delta} & & & \\ \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz} \cdot \nu_{zy}}{E_x \cdot E_z \cdot \Delta} & \frac{1 - \nu_{zx} \cdot \nu_{xz}}{E_x \cdot E_z \cdot \Delta} & \frac{\nu_{zy} + \nu_{zx} \cdot \nu_{xy}}{E_x \cdot E_z \cdot \Delta} & & & \\ \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy} \cdot \nu_{yz}}{E_x \cdot E_y \cdot \Delta} & \frac{\nu_{yz} + \nu_{yx} \cdot \nu_{xz}}{E_x \cdot E_y \cdot \Delta} & \frac{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}}{E_x \cdot E_y \cdot \Delta} & & & \\ & & & G_{xy} & 0 & 0 \\ & & & 0 & G_{xz} & 0 \\ & & & 0 & 0 & G_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.203)$$

donde Δ es

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx} - \nu_{xz} \cdot \nu_{zx} - \nu_{yz} \cdot \nu_{zy} - \nu_{xy} \cdot \nu_{yz} \cdot \nu_{zx} - \nu_{xz} \cdot \nu_{yx} \cdot \nu_{zy}}{E_x \cdot E_y \cdot E_z} \quad (3.204)$$

3.3.2 Deducción de las componentes del tensor constitutivo

Los componentes a introducir en las ecuaciones (3.203) y (3.204) se basan en los cálculos desarrollados en el apartado 3.1, que sirvieron para obtener el modelo unidimensional. Así, pues, el módulo de elasticidad respecto el eje z es

$$E_z = \frac{E_G}{S} \quad (3.205)$$

donde E_G es el obtenido con la ecuación (3.15) y S el valor obtenido con la ecuación (3.102).

Asimismo, los módulos de elasticidad respecto los otros ejes E_x y E_y se calculan mediante las ecuaciones (3.118) y (3.119).

Las expresiones de los módulos G_{xz} y G_{yz} se obtienen mediante las ecuaciones (3.187) y (3.197). Nótese que únicamente se tiene $G_{xz} = G_{yz}$ en el caso de barras de sección cuadrada. En el caso más general, para barras rectangulares, la expresión (3.197) es distinta según se utilice para calcular G_{xz} o G_{yz} ya que depende de la dimensión de la sección en la dirección considerada (b o h).

Para la deducción de los coeficientes de Poisson se considera que

$$\begin{aligned} \nu_{xy} &= \nu_{yx} \\ \nu_{xz} &= \nu_{zx} \\ \nu_{yz} &= \nu_{zy} \end{aligned} \quad (3.206)$$

El cálculo de ν_{xy} se realiza a partir de la ecuación (3.120) ya que, igual que en el caso unidimensional, debido a la geometría del problema, se considera que el efecto de la armadura longitudinal es despreciable.

Las expresiones de ν_{xz} y ν_{yz} para el modelo propuesto son iguales a los valores de los coeficientes de Poisson aparentes de la barra, $\nu_{apc X}$ y $\nu_{apc Y}$, que son los que realmente se producen a causa de la interacción entre los materiales componentes. Dichos coeficientes de Poisson se obtienen a partir de las ecuaciones (3.126) y (3.127).

$$v_{xz} = v_{apc X} \quad (3.207)$$

$$v_{yz} = v_{apc Y} \quad (3.208)$$

Finalmente, se considera que, a diferencia de los otros módulos de cortante, el módulo G_{xy} no se ve afectado por el confinamiento del hormigón. Sin embargo, sí que se ve afectado, por compatibilidad de deformaciones, por la cuantía de acero de los cercos, de modo que se puede calcular G_{xy} como (ver Figura 3.23)

$$G_{xy} = \frac{G_H \cdot Vol_H^* + G_A \cdot Vol_{cerco A}^*}{(Vol)_{Tot}^*} \quad (3.209)$$

Estos volúmenes deben ser calculados considerando las áreas reducidas a cortante, de la misma forma en que se ha efectuado anteriormente

$$Vol_H^* = A_H \cdot L_{Sep\ cercos} \cdot x^* = A_H^* \cdot L_{Sep\ cercos} \quad (3.210)$$

$$Vol_{cerco A}^* = A_{cerco A} \cdot L_{Sep\ cercos} \cdot x^* = A_{cerco A}^* \cdot L_{Sep\ cercos} \quad (3.211)$$

$$(Vol)_{Tot}^* = Vol_H^* + Vol_{cerco A}^* \quad (3.212)$$

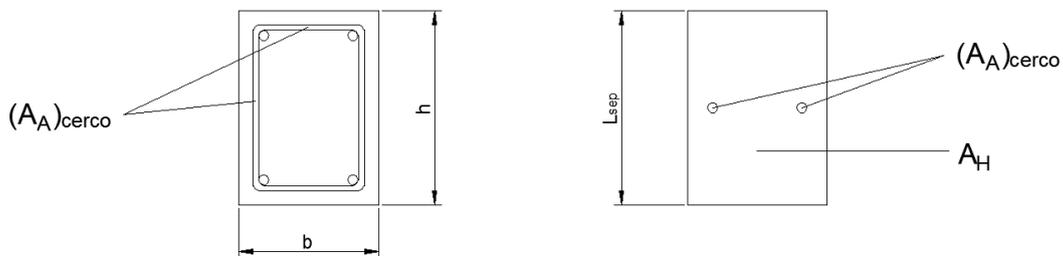


Figura 3.23. Volúmenes de acero y hormigón que intervienen en el cálculo del módulo de cortante G_{xy}

Capítulo 4

No linealidad de las barras de hormigón armado confinado debida al daño en el hormigón

Los efectos del confinamiento en una barra de hormigón armado se observan sobre todo al entrar éste en el rango de comportamiento no lineal. El confinamiento producido por los cercos produce una mejora de la ductilidad, de la resistencia y del comportamiento post pico.

Para tener en cuenta la influencia de los cercos, primeramente se procede a la deducción de la ecuación de equilibrio homogeneizada de una barra de hormigón armado con cercos, y posteriormente se explicará el método utilizado para su resolución.

Se considera el fenómeno de daño del hormigón armado y se realiza un tratamiento general de la no linealidad de la estructura mediante el modelo de daño para el hormigón (Oller 2002). Además, en el capítulo siguiente se incluye la plastificación del acero, tanto de la armadura longitudinal como de los cercos.

4.1 Ecuación de equilibrio dinámico para un sólido discreto

La ecuación de equilibrio dinámico para un sólido discreto se puede obtener directamente a partir de la primera ley de la termodinámica, cuyo balance de potencia se puede escribir como (Oller 1992, Mata 2008)

$$\int_V \sigma_{ij} \nabla_i^S \dot{u}_j dV = \oint_S t_i \dot{u}_i dS + \int_V \rho b_i \dot{u}_i dV - \int_V \rho \dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} dV \quad (4.1)$$

donde σ es el tensor de tensiones, \mathbf{u} es el vector de desplazamientos, S es la superficie del sólido donde actúan las fuerzas de superficie, V es su volumen, t es el vector de fuerzas superficiales aplicadas, b es el vector de fuerzas másicas aplicadas en la estructura y ρ es su densidad. La expresión anterior se corresponde a la ecuación del equilibrio dinámico, donde las acciones externas a las que está sometida la estructura son variables en el tiempo.

Supuesta una barra estructural, se adopta una aproximación polinómica del campo continuo de desplazamientos $u_j(x, y, z)$ o de velocidades $\dot{u}_j(x, y, z)$, mediante una función polinómica normalizada $N_{jk}(x, y, z)$ de soporte local entre los extremos de la barra. Esta función permite aproximar el campo de los desplazamientos y las velocidades de la siguiente forma (Zienkiewicz y Taylor 1989)

$$u_j(x, y, z)|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z)U_k|_{\Omega^e} \Rightarrow \dot{u}_j(x, y, z)|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z)\dot{U}_k|_{\Omega^e} \quad (4.2)$$

La función $N_{jk}(x, y, z)$ actúa sobre el dominio Ω^e de la barra denominado dominio elemental y permite aproximar, dentro de dicho dominio, los campos de desplazamientos $u_j(x, y, z)$, velocidades $\dot{u}_j(x, y, z)$ y aceleraciones $\ddot{u}_j(x, y, z)$ a partir de sus magnitudes U_k , \dot{U}_k y \ddot{U}_k en los extremos de las barras, denominados nodos. De esta forma se pueden obtener los campos derivados del desplazamiento, como la deformación $\varepsilon_{ik} = \nabla_i^S u_k$

$$\varepsilon_{ij}|_{\Omega^e} = \nabla_i^S u_j|_{\Omega^e} = \nabla_i^S N_{jk}U_k|_{\Omega^e} \quad (4.3)$$

Esta aproximación reduce las infinitas incógnitas de la función de campo a un número finito de incógnitas, definidas en ciertos puntos preestablecidos como nodos del dominio de la barra (Oller 2002, Zienkiewicz y Taylor 1989). Substituyendo (4.2) y (4.3) en la ecuación (4.1) se puede escribir la ecuación de equilibrio discreto como

$$\left[\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right]_{\Omega^e} \dot{U}_k|_{\Omega^e} = \left[\oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV - \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} \ddot{U}_j dV \right]_{\Omega^e} \dot{U}_k|_{\Omega^e} \quad (4.4)$$

La ecuación (4.4) se cumple para cualquier velocidad $\dot{U}_k|_{\Omega^e}$, por lo tanto se puede simplificar y obtenerse así la siguiente ecuación de equilibrio dinámico para el sólido discreto

$$\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \Big|_{\Omega^e} = \oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV \Big|_{\Omega^e} - \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \Big|_{\Omega^e} \cdot \ddot{U}_j|_{\Omega^e} \quad (4.5)$$

Dicha ecuación se puede reescribir como

$$f_k^{int}|_{\Omega^e} = f_k^{ext}|_{\Omega^e} - f_k^{mas}|_{\Omega^e} \quad (4.6)$$

donde $f_k^{int}|_{\Omega^e}$, $f_k^{ext}|_{\Omega^e}$ y $f_k^{mas}|_{\Omega^e}$ son los vectores de fuerzas internas, externas y másicas que se desarrollan en cada punto del sistema discreto que aproxima al continuo tal que

$$f_k^{int}|_{\Omega^e} = \int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \Big|_{\Omega^e} \quad (4.7)$$

$$f_k^{ext}|_{\Omega^e} = \oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV \Big|_{\Omega^e} \quad (4.8)$$

$$f_k^{mas}|_{\Omega^e} = \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \Big|_{\Omega^e} \cdot \ddot{U}_j|_{\Omega^e} = M_{kj}|_{\Omega^e} \cdot \ddot{U}_j|_{\Omega^e} \quad (4.9)$$

siendo a su vez $\ddot{U}_j|_{\Omega^e}$ la aceleración en los puntos del sistema discreto considerado y $M_{kj}|_{\Omega^e}$ la masa elemental tal que

$$M_{kj}|_{\Omega^e} = \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \Big|_{\Omega^e} \quad (4.10)$$

Asimismo, se escribe el tensor de compatibilidad de deformaciones $\bar{B}_{ijk}|_{\Omega^e}$ como el gradiente simétrico de la función de aproximación polinomial

$$\bar{B}_{ijk}|_{\Omega^e} = \nabla_i^S N_{jk} \quad (4.11)$$

Puesto que en este trabajo se aborda el estudio de una barra homogeneizada en régimen estático, la ecuación de equilibrio prescinde de las fuerzas másicas. No obstante, este modelo de homogeneización desarrollado en el presente trabajo también podría ser implementado en un programa de cálculo dinámico de estructuras. Así, pues, la ecuación de equilibrio estático de la estructura se reduce a la siguiente expresión:

$$f_k^{int}|_{\Omega^e} = f_k^{ext}|_{\Omega^e} \quad (4.12)$$

4.2 Problema no lineal y linealización de la ecuación de equilibrio

De forma general, la no linealidad en la ecuación de equilibrio puede producirse por (Oller 2002):

- No linealidad constitutiva: que se debe a la pérdida de linealidad entre el campo de tensiones y deformaciones, tal y como ocurre en la plasticidad o el daño. Esta no linealidad se debe al cambio de propiedades que sufre el material durante su comportamiento mecánico. En el presente trabajo, se ha introducido en el modelo propuesto la no linealidad del hormigón, que se daña reduciéndose su rigidez, y la del acero, que plastifica al alcanzar el límite de fluencia.
- No linealidad por grandes deformaciones. En el presente trabajo se ha considerado la hipótesis de pequeñas deformaciones y por lo tanto no se ha tomado en cuenta esta fuente de no linealidad.
- No linealidad por grandes desplazamientos. En el presente caso se ha considerado la hipótesis de pequeños desplazamientos y por lo tanto tampoco se ha tomado en cuenta esta fuente de no linealidad.

La ecuación de equilibrio (4.12), o (4.6) en el caso del cálculo dinámico, representa el equilibrio de fuerzas en el dominio de la barra estructural Ω^e . Su participación en el dominio de toda la estructura Ω se realiza a través del ensamblaje de la ecuación de equilibrio, utilizando el operador lineal de ensamblaje A , que representa la suma de las componentes de las fuerzas según corresponda a la posición y a la dirección de las contribuciones locales de cada barra dentro de la estructura (Zienkiewicz y Taylor 1989).

En el caso que haya linealidad en el comportamiento del sólido, se cumple la siguiente relación de equilibrio global, cuya expresión resulta del ensamblaje de la ecuación de equilibrio local (4.6)

$$0 = A_{\Omega^e} [f_k^{mas} + f_k^{int} - f_k^{ext}]_{\Omega^e} = \Delta f_k|_{\Omega} \quad (4.13)$$

La no linealidad en el comportamiento global del sólido se manifiesta como una fuerza residual $\Delta f_k|_{\Omega}$, provocada por el desequilibrio entre las fuerzas interiores, las fuerzas másicas y las fuerzas exteriores. Este desequilibrio, en un cierto instante de tiempo t del proceso dinámico, puede eliminarse mediante la linealización de esta fuerza residual $\Delta f_k|_{\Omega}$ en la proximidad del estado de equilibrio actual $i + 1$. Para ello es necesario forzar el equilibrio en el estado actual $i + 1$ y expresar dicha condición mediante un desarrollo en serie de Taylor truncado en su primer término (Oller 2002)

$$0 = A_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t \cong A_{\Omega^e}^i [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t + A_{\Omega^e} \left[\left[\frac{\partial (\Delta f_k)}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \right] \quad (4.14)$$

Puesto que se resuelve un problema cuasiestático, y las velocidades y aceleraciones son nulas, y las fuerzas externas no cambian de posición

$$0 = {}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega}^t \cong {}^i [\Delta f_k]_{\Omega}^t + A_{\Omega^e} \left[\left[M_{kj} \underbrace{\frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r}}_0 + \frac{\partial f_k^{int}}{\partial U_r} + \underbrace{\frac{\partial f_k^{int}}{\partial U_j} \frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r}}_0 - \underbrace{\frac{\partial f_k^{ext}}{\partial U_r}}_0 \right]_{\Omega^e}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \right] \quad (4.15)$$

dato que $\frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r} = 0$ por considerarse que la velocidad es nula, $\frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r} = 0$ por ser la aceleración nula y $\frac{\partial f_k^{ext}}{\partial U_r} = 0$ por no cambiar de posición las fuerzas externas. Por esta razón la ecuación (4.15) para el cálculo estático de la estructura queda

$$0 = {}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega}^t \cong {}^i [\Delta f_k]_{\Omega}^t + A_{\Omega^e} \left[\left[\frac{\partial f_k^{int}}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \right] \quad (4.16)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.7), (4.9) y (4.16), resulta el siguiente equilibrio linealizado (Oller 2002)

$$0 = A_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{ext} \right]_{\Omega^e}^t + A_{\Omega^e} \left[\frac{\partial}{\partial U_r} \left(\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) \right]_{\Omega^e}^t \cdot A_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \quad (4.17)$$

$$0 = A_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{ext} \right]_{\Omega^e}^t + A_{\Omega^e} \left[\left(\int_{V^e} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial U_r} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) \right]_{\Omega^e}^t \cdot A_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \quad (4.18)$$

Se particulariza esta ecuación de equilibrio dinámico para un material cuya ley constitutiva no lineal es del tipo

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{S,ijkl} : \varepsilon_{kl} \quad (4.19)$$

Y para una relación cinemática del tipo $\varepsilon_{ij} = \nabla_i^S u_j = \nabla_i^S N_{jk} U_k$, obteniéndose

$$0 = A_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{ext} \right]_{\Omega^e}^t + A_{\Omega^e} \left[\underbrace{\left(\int_{V^e} (\nabla_i^S N_{tr}) \mathbb{C}_{S,ijkl}^T (\nabla_i^S N_{jk}) dV \right)}_{\mathbb{J}_{kr}^T]_{\Omega}^t} \right]_{\Omega^e}^t \cdot A_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \quad (4.20)$$

$$0 = {}^i[\Delta f_k]_{\Omega}^t + \mathbb{J}_{kr}^T]_{\Omega}^t \cdot {}^{i+1}[\Delta U_r]_{\Omega}^t \quad (4.21)$$

donde $\mathbb{J}_{kr}^T = \mathbb{J}^T$ es el operador jacobiano tangente que en este caso coincide estrictamente con la rigidez estructural. Esta ecuación puede también escribirse en la siguiente forma matricial:

$$0 = {}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^t \cong {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^t + {}^i[\mathbb{K}^T]_{\Omega}^t \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}_r]_{\Omega}^t \quad (4.22)$$

siendo el operador jacobiano

$${}^i\mathbb{J}_{\Omega}^T = {}^i[\mathbb{K}^T]_{\Omega}^t \quad (4.23)$$

La ecuación (4.22) es la ecuación de equilibrio linealizada, donde $[\mathbb{K}^T]_{\Omega}$ es la matriz de rigidez tangente, definida en todo el dominio Ω

$$[\mathbb{K}^T]_{\Omega} = A_{\Omega^e} \int_{V^e} (\nabla^S \mathbf{N}) \mathbb{C}_S^T (\nabla^S \mathbf{N}) dV \quad (4.24)$$

Además, $\mathbb{C}_{S,ijkl}^T$ es el tensor tangente correspondiente a la ley constitutiva utilizada en cada punto del sólido y \mathbf{f}^{ext} es la fuerza exterior

$$\mathbf{f}^{ext} = A_{\Omega^e} \left[\oint_{S^e} \mathbf{N} : \mathbf{t} dS + \int_{V^e} \rho \mathbf{N} : \mathbf{b} dV \right] \quad (4.25)$$

La fuerza desequilibrada del sólido ${}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^t$ se elimina utilizando el método de Newton-Raphson (Whittaker E.T. y Robinson G. 1967) hasta que este residuo se vuelve despreciable y se alcanza, por lo tanto, la convergencia del método (ver Figura 4.1).

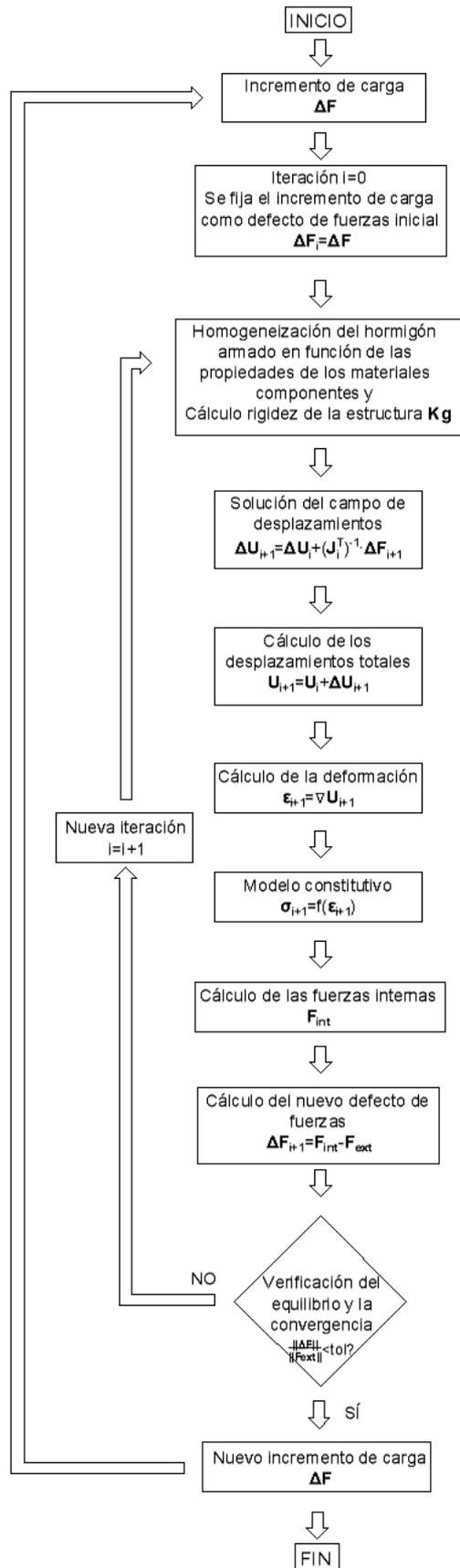


Figura 4.1. Diagrama de flujo del proceso de linealización de la ecuación de equilibrio para un sólido discretizado (estructura de barras)

4.3 Método de Newton-Raphson para resolver la ecuación de equilibrio

Se resuelve la ecuación de equilibrio (4.22) mediante el método de Newton-Raphson (Whittaker E.T. y Robinson G. 1967) detallado a continuación. Este procedimiento tiene una convergencia cuadrática cuando se está cerca de la solución.

Considerando la ecuación de equilibrio de la estructura discretizada (4.22)

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} \quad (4.26)$$

y expresando este residuo mediante un desarrollo en serie de Taylor truncado en su primer término, se obtiene la linealización del residuo, que se eliminará para las aproximaciones sucesivas de Newton-Raphson (ver Figura 4.2)

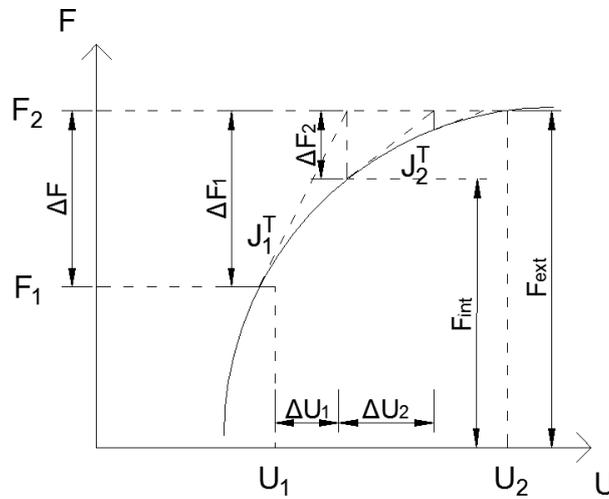


Figura 4.2. Método de Newton-Raphson

$$\begin{aligned} 0 &= {}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cong A_{\Omega^e} {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + A_{\Omega^e} \left[\left[\frac{\partial(\Delta \mathbf{f})}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \right] \\ &= {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^i[\mathbb{K}^T]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.27)$$

siendo el operador jacobiano, ${}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}$ definido en (4.20)

$${}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbb{K}^T]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (4.28)$$

tal que la ecuación (4.27) se puede escribir, en cada paso de carga $i + 1$, como

$${}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = -{}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (4.29)$$

Realizando un uso iterativo de esta linealización, resulta la actualización del desplazamiento a cada paso, como

$${}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (4.30)$$

Una vez que el residuo $[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} < tol$, donde tol es una tolerancia considerada aceptable, se alcanza la convergencia del método y por tanto la solución.

4.4 Modelo de daño del hormigón

En este apartado se introduce la expresión detallada de la tensión degradada que sufre la barra de hormigón en ciertos puntos, y que se integra dentro de la ecuación (4.17).

El daño de un sólido continuo, en el sentido de degradación de rigidez, es una alteración de las propiedades elásticas cuando la tensión supera un determinado umbral durante la aplicación de la carga como consecuencia de una disminución del área efectiva resistente. Esta pérdida de área efectiva es normalmente causada por el crecimiento de vacíos y/o microfisuras (Oller 2002).

El fenómeno de daño sólo afecta a las propiedades elásticas del material. En este trabajo se considera un modelo de daño con una variable interna escalar que permite caracterizar la evolución del daño local. Este modelo, a pesar de ser simple, permite representar el comportamiento del material hormigón con la suficiente precisión (Oller 2002, Armero y Oller 2000). Permite simular el comportamiento de materiales en los que ocurre una degradación en la rigidez una vez superado el umbral de daño. La variable de daño caracteriza el nivel de deterioro del material y se basa en la transformación de un tensor de tensiones efectivas (material no dañado) en uno real (material dañado) (Oller 2002). En el caso del modelo de daño isótropo, la degradación del material se produce en todas las direcciones por igual y sólo depende de una variable escalar de daño d , con lo que la relación entre el tensor de tensiones reales $\boldsymbol{\sigma}$ y el tensor de tensiones efectivas $\boldsymbol{\sigma}_0$ es

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-d)} \quad (4.31)$$

Esta variable interna de daño mide la pérdida de rigidez del material y está acotada por

$$0 \leq d \leq 1 \quad (4.32)$$

de forma que el caso $d = 1$ representa un estado tensional completamente degradado y define la rotura local completa y el caso $d = 0$ representa un material no dañado. De esta forma, la deformación asociada a un estado dañado bajo la tensión aplicada $\boldsymbol{\sigma}$ es equivalente a la deformación asociada con el estado no dañado sometido a una tensión efectiva $\boldsymbol{\sigma}_0$ (Oller 2002).

Para definir el modelo, se partirá de expresar la energía libre de Helmholtz por unidad de volumen, para el caso de un modelo de daño isótropo, como la pérdida de energía libre causada por el deterioro que controla la variable interna d (Oller 2002)

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1-d)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.33)$$

donde $\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$ es la energía libre de Helmholtz, elástica inicial del material no dañado. Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones se puede caracterizar la energía libre a través de una función cuadrática de las deformaciones (Oller 2002)

$$\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.34)$$

donde \mathbb{C}_0 es el tensor constitutivo elástico del material en estado no dañado. Por otra parte, es posible expresar la disipación a través de la forma de la desigualdad de Clausius-Plank (Malvern 1969)

$$\Xi = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (4.35)$$

Esta expresión de la potencia disipativa permite hacer las siguientes consideraciones (Oller 2002)

- La fórmula (4.35) debe cumplirse para cualquier variación temporal de la variable libre $\boldsymbol{\varepsilon}$, con lo que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ tiene que ser nulo. Esta condición proporciona la ley constitutiva hiperelástica para el problema de daño escalar

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\Psi_0 \leq 0 \quad (4.36)$$

- Considerando esta ley constitutiva, el valor de la disipación del modelo de degradación es

$$\Xi = \Psi_0 d \geq 0 \quad (4.37)$$

Introduciendo (4.33) y (4.34) en (4.36) se obtiene la siguiente forma de la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \frac{\partial \Psi_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.38)$$

La fórmula (4.38) es la ecuación constitutiva secante del modelo y presenta la característica de ser un modelo de degradación isótropo ya que las propiedades mecánicas del material están afectados por un único escalar.

4.5 Criterio umbral de daño

El criterio de daño distingue entre un estado de comportamiento elástico y otro estado en el cual se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material. Este criterio depende del tipo de material y se define como una función escalar de argumentos tensoriales (Oller 2002, Barbat et al. 1997, Lubliner et al. 1989, Faleiro 2006)

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0, d) = f(\boldsymbol{\sigma}_0) - c(d) \leq 0 \quad (4.39)$$

donde $f(\boldsymbol{\sigma}_0)$ es una función del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$ y $c(d)$ es un escalar que define la posición del umbral de daño. Esta función permite establecer el inicio del comportamiento no lineal del daño. El valor inicial del umbral de daño $c(d^0) = c^{max} = \sigma^{max}$ es una propiedad del material y está relacionada con su resistencia según cual sea la función umbral de daño que se elija.

El daño en el material se produce cuando el valor de $f(\boldsymbol{\sigma}_0)$ es igual o mayor que $c^{max} = \sigma^{max}$ por primera vez. Una expresión equivalente a la (4.39) está dada por la expresión (Oller 2002)

$$\bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0, d) = G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] - G[c(d)] \leq 0 \quad (4.40)$$

donde $G[c(d)]$ es una función escalar, invertible, positiva y de derivada positiva y monótona creciente.

4.6 Ley de evolución de la variable interna de daño

Es necesario definir la evolución de la variable interna de daño d a lo largo de todo el proceso de carga de la estructura. La ley de evolución del daño se obtiene de la siguiente derivada temporal, cuya variación se expresa como (Oller 2002, Oliver et al. 1990)

$$\dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial \bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0, d)}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} = \dot{\mu} \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \quad (4.41)$$

siendo μ un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño y que describe la magnitud del deterioro estructural. Técnicamente es un multiplicador de Lagrange.

La condición de carga, descarga y recarga se establece mediante las condiciones de Kuhn-Tucker

$$\dot{\mu} \geq 0 ; \bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0, d) \leq 0 ; \dot{\mu} \cdot \bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0, d) = 0 \quad (4.42)$$

En el caso $\bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0, d) < 0$, el criterio de daño no se verifica y, para que se cumplan las condiciones de Kuhn-Tucker, necesariamente debe cumplirse $\dot{\mu} = 0$. Ello conlleva que la variación del daño es nula, $\dot{d} = 0$, y por lo tanto el material no se daña y está en un proceso elástico.

Finalmente, el parámetro de consistencia de daño, que muestra la magnitud del incremento de deterioro en función del incremento de energía introducida al sistema, sigue la siguiente regla de normalidad (Oller 2002)

$$\dot{\mu} = \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) = \dot{c}(d) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_0} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_0} : \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.43)$$

Integrando en el tiempo la variación temporal de la variable de daño, se obtiene la forma explícita del daño en un punto del sólido (Oller 2002)

$$d = \int_t \dot{d} dt = \int_t \dot{G}[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] dt = G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] \quad (4.44)$$

Así, pues, el umbral de daño c en un tiempo $s = t$ es

$$c = \max\{c^{max}, \max\{f(\boldsymbol{\sigma}_0)|_s\}\} \quad \forall 0 \leq s \leq t \quad (4.45)$$

Para el caso particular del hormigón, se ha tomado un modelo de ablandamiento exponencial, que da buenos resultados con este material, suficientemente parecidos al comportamiento que se produce en la realidad. La función $G[c(d)]$ que define la evolución del umbral del daño debe ser monótona y con un valor acotado entre 0 y 1 (Oller 2002)

$$G[c(d)] = 1 - \frac{c^{max}}{c(d)} e^{A\left(1 - \frac{c(d)}{c^{max}}\right)} \quad \text{con } 0 \leq c^{max} \leq c(d) \quad (4.46)$$

También puede expresarse (4.46) como

$$G[f(\sigma_0)] = 1 - \frac{f^0(\sigma_0)}{f(\sigma_0)} e^{A\left(1 - \frac{f(\sigma_0)}{f^0(\sigma_0)}\right)} \quad \text{con } f^0(\sigma_0) = c^{max} \quad (4.47)$$

siendo A un parámetro que depende de la energía de fractura del material. El valor de c^{max} se corresponde al umbral de degradación inicial del material.

El parámetro A se deduce a partir de la expresión de la disipación de la ecuación (4.37) particularizada para un proceso uniaxial bajo una carga monótona creciente. Teniendo en cuenta una función de daño cualquiera, $\tau = f(\sigma_0)$, se tiene en el primer umbral de daño (Oller 2002)

$$\tau = f(\sigma_0) = \sigma_t^{max} \quad (4.48)$$

donde σ_t^{max} es la tensión correspondiente al umbral de resistencia a tracción. Reemplazando esto en la expresión de la energía libre de Helmholtz, según la ecuación (4.34), se tiene (Oller 2002)

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \varepsilon C_0 \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_t^{max} \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{(\sigma_t^{max})^2}{C_0} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{C_0} \quad (4.49)$$

La disipación total se obtiene integrando la expresión de la disipación en el tiempo (Oller 2002)

$$\int_{t=0}^{\infty} \Xi dt = \int_{t=0}^{\infty} \Psi_0 \dot{d} dt = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{C_0} \frac{\partial G[\tau]}{\partial \tau} d\tau \quad (4.50)$$

Realizando la integración por partes de la ecuación anterior se obtiene, usando la ecuación (4.46) (Oller 2002)

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{C_0} \frac{\partial G[\tau]}{\partial \tau} d\tau = \frac{(\tau^0)^2}{C_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) \quad (4.51)$$

y utilizando la máxima energía disipada g_f , normalizada respecto del tamaño de la barra, en la ecuación (4.51), se puede obtener la expresión del parámetro A

$$\frac{(\tau^0)^2}{C_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) = g_f \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{C_0 g_f}{(\tau^0)^2} - \frac{1}{2}} \quad (4.52)$$

4.7 Tensor constitutivo de daño tangente

El tensor constitutivo de daño tangente se obtiene considerando la variación temporal de la ecuación constitutiva secante (4.38)

$$\dot{\sigma} = (1 - d) \mathbb{C}_0 : \dot{\varepsilon} - \dot{d} \mathbb{C}_0 : \varepsilon \quad (4.53)$$

y reemplazando (4.41) en (4.53), se obtiene

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C}_0 : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial G[f(\sigma_0)]}{\partial [f(\sigma_0)]} \dot{f}(\sigma_0) \cdot [\mathbb{C}_0 : \varepsilon] \quad (4.54)$$

y teniendo en cuenta que

$$\dot{f}(\sigma_0) = \frac{\partial f(\sigma_0)}{\partial \sigma_0} : \dot{\sigma}_0 = \frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \varepsilon)}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} \quad (4.55)$$

Reemplazando (4.55) en (4.54) se obtiene

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C}_0 : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial G[f(\sigma_0)]}{\partial [f(\sigma_0)]} \left[\frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \varepsilon)}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} \right] \cdot [\mathbb{C}_0 : \varepsilon] \quad (4.56)$$

De la ecuación anterior se deduce la ecuación del tensor de daño tangente como

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C}_0 - \frac{\partial G[f(\sigma_0)]}{\partial [f(\sigma_0)]} [\mathbb{C}_0 : \varepsilon] \otimes \left[\frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] \quad (4.57)$$

Este tensor se introduce en la ecuación de equilibrio (4.20) para valorar el cambio en el equilibrio estructural y en la ecuación (4.27) para resolver la linealización de Newton-Raphson.

4.8 Implementación del modelo de daño en el modelo propuesto

Para el tratamiento numérico del hormigón se introduce un modelo de daño que representa su comportamiento al alcanzar el rango no lineal. En el presente apartado se particulariza el modelo de daño general antes descrito a la forma simplificada en que se ha implementado en el programa de cálculo desarrollado en el presente trabajo. Se parte del modelo de daño isótropo expuesto en el apartado 4.4, siendo el modelo constitutivo del material el de la ecuación (4.38).

Tal y como se ha visto en el Capítulo 3, la rigidez que resulta del modelo constitutivo del material homogeneizado está descrito por la ecuación (3.201) para el caso de los elementos de barra unidimensionales. La rigidez del material depende de los módulos de elasticidad longitudinal y transversal del hormigón, por lo que la ecuación (4.38) es equivalente, en el presente caso, a introducir en las ecuaciones de los modelos las ecuaciones

$$E_H = (1 - d) \cdot (E_H)_0 \quad (4.58)$$

$$G_H = (1 - d) \cdot (G_H)_0 \quad (4.59)$$

donde d es el índice de daño del hormigón. Asimismo, $(E_H)_0$ y $(G_H)_0$ son los módulos de elasticidad longitudinal y transversal iniciales del hormigón, cuando éste se encuentra intacto. De esta forma, el valor de los módulos de elasticidad de los modelos formulados varía en función de las tensiones que se desarrollan en la estructura.

El procedimiento de cálculo del modelo de daño seguido en el presente trabajo es (ver Figura 4.3):

- Determinación de la tensión predictorica elástica σ_0 según la ecuación según $\sigma_0 = C_0 \cdot \varepsilon$ o bien utilizando los módulos de elasticidad iniciales $(E_H)_0$ y $(G_H)_0$ en la ecuación (3.201) para calcular la estructura.
- Cálculo de la tensión equivalente no dañada a partir de la tensión predictorica elástica σ_0 según la función umbral de tensión $\tau = G[f(\sigma_0)]$ (ver apartado 4.5).
- Verificación de la condición umbral de daño según la función (4.39) o (4.40):
 - Si no se produce daño adicional, se cumple que $f(\sigma_0) - c(d) \leq 0$, que equivale a $\tau \leq \tau_{max}$ y la tensión del hormigón se corresponde a la obtenida con el nivel de daño máximo obtenido hasta el momento $\sigma = \sigma_0 \cdot (1 - d)$.
 - Si $\tau > \tau_{max}$, que equivale a $f(\sigma_0) - c(d) > 0$, se produce daño adicional, que se calcula según la ecuación (4.46) o (4.47). En ese caso, es necesario:
 - Actualizar el valor de la tensión umbral de daño: $\tau_{max} = \tau$.
 - Calcular la nueva variable interna de daño usando la ecuación (4.47).
 - Actualizar el tensor constitutivo tangente según la ecuación (4.57).

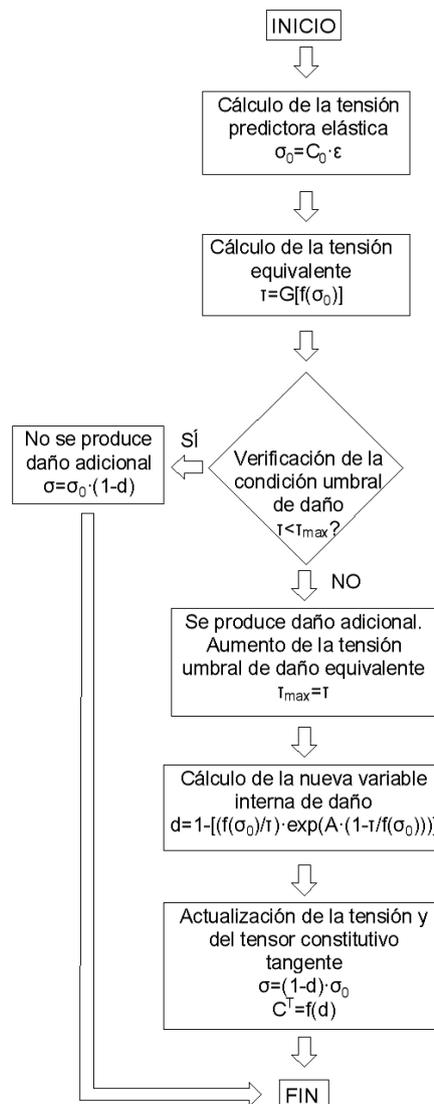


Figura 4.3. Esquema del cálculo del daño

4.8.1 Cálculo de las tensiones en el hormigón

En el caso de las barras de hormigón armado confinado, el hormigón forma parte del compuesto juntamente con el acero longitudinal y el acero de los cercos. Por esta razón, la tensión en un punto del sólido se calcula de la composición de la tensión en cada material y recibe el nombre de tensión homogeneizada.

El vector de tensiones homogeneizadas de la barra de hormigón armado confinado se defina como

$$\sigma^{Hom} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{Hom} \\ \sigma_{yy}^{Hom} \\ \sigma_{zz}^{Hom} \\ \sigma_{xy}^{Hom} \\ \sigma_{xz}^{Hom} \\ \sigma_{yz}^{Hom} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Dicho vector se obtiene, en el caso del modelo unidimensional, a partir del vector de esfuerzos de la sección (ver Figura 4.4)

$$F_e = \begin{pmatrix} N \\ T \\ M \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

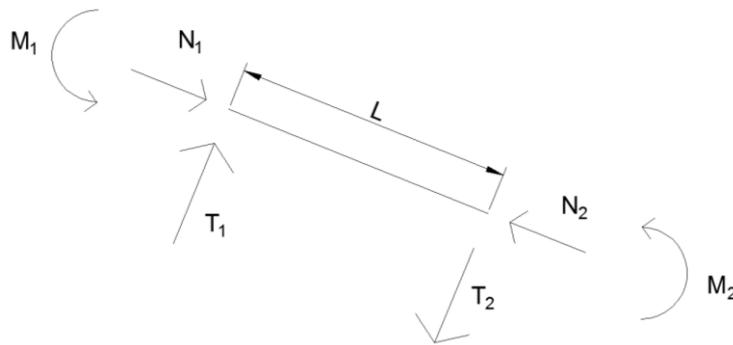


Figura 4.4. Esfuerzos en los extremos de la barra

En este caso, los componentes del vector de tensiones se obtienen mediante las siguientes expresiones (ver Figura 4.5):

$$\sigma_{zz}^{Hom} = \frac{N}{A} - \frac{My}{I} \quad (4.62)$$

$$\sigma_{xx}^{Hom} = -B_X \cdot (E_A)_{CX} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.63)$$

$$\sigma_{yy}^{Hom} = -B_Y \cdot (E_A)_{CY} \cdot \varepsilon_{yy} \quad (4.64)$$

$$\sigma_{xy}^{Hom} = 0 \quad (4.65)$$

$$\sigma_{xz}^{Hom} = 0 \quad (4.66)$$

$$\sigma_{yz}^{Hom} \cong \frac{T}{A^*} = \frac{T}{A_{A,Long}^* + A_{A,Cerco}^* + A_H^*} \quad (4.67)$$

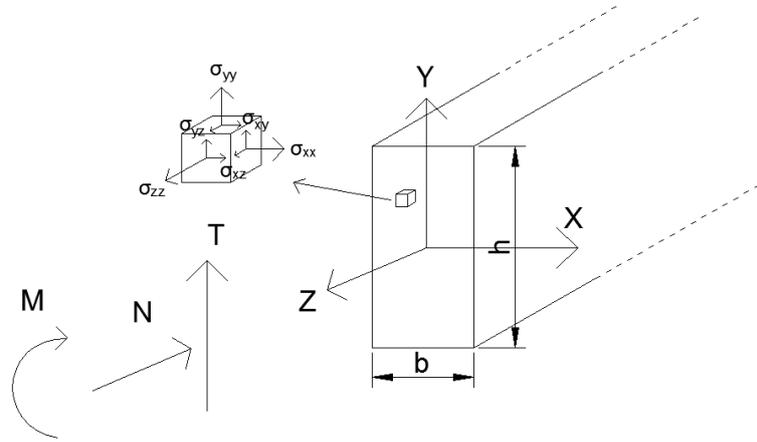


Figura 4.5. Tensiones en el interior de la barra

Las tensiones σ_{xx}^{Hom} y σ_{yy}^{Hom} de las ecuaciones (4.63) y (4.64) son las obtenidas de la ecuación (3.77), a partir del equilibrio y de la compatibilidad en el interior de la barra. En el presente caso, dichas tensiones son diferentes de cero debido a la presencia del confinamiento de las barras de hormigón armado.

Por otra parte, ε_{xx} y ε_{yy} son las deformaciones de la barra, determinadas a partir de las ecuaciones (3.93), (3.96) y (3.33)

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{zz}^{Hom} \cdot H_X \quad (4.68)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{zz}^{Hom} \cdot H_Y \quad (4.69)$$

Los parámetros E_G , H_X y H_Y que intervienen en las ecuaciones (4.68) y (4.69) se obtienen usando las formulas (3.15), (3.92) y (3.95) respectivamente. Asimismo, en la ecuación (4.60) aparecen el axil N y el flector M de la barra en la sección, y también A e I , el área y la inercia de la sección considerada. Finalmente, y es la distancia al eje neutro del punto considerado dentro de la sección (ver Figura 4.5). Además, B_X y B_Y son las cuantías de acero de los cercos de la barra, definidas en la ecuación (3.76) y $(E_A)_{CX}$ y $(E_A)_{CY}$ son los módulos de elasticidad del acero del cerco. Asimismo, los valores de $A_{A,Long}^*$, $A_{A,Cerco}^*$ y A_H^* son las áreas reducidas a cortante de las barras de acero longitudinales, de los cercos de acero y del hormigón de la sección considerada, que vienen determinados por las ecuaciones (3.187) y (3.197).

Dado que el presente trabajo está restringido al cálculo de estructuras planas de barras sujetas a esquemas estructurales en dos dimensiones, y con cargas aplicadas en el plano de la estructura (ver Figura 4.5), las tensiones σ_{xy}^{Hom} y σ_{xz}^{Hom} de cualquier punto de la barra serán nulas, como se indica en las ecuaciones (4.65) y (4.66). Cuando se implemente el modelo a estructuras de barras que trabajen en 3 dimensiones, con esfuerzos cortantes, momentos flectores y momentos torsores

aplicados en todas las direcciones posibles en la barra, será necesario considerar las ecuaciones necesarias para describir adecuadamente el estado tensional de los puntos en el interior de la barra. Además, para ello, también será necesario implementar una matriz de rigidez de la barra de dimensión 12x12, distinta de la que se ha propuesto en la ecuación (3.201). No obstante, en muchos casos en los que la estructura trabaja en un principio en 3 dimensiones, es posible simplificar el problema y realizar el cálculo en 2 dimensiones a causa de la simetría y/o geometría que pueda tener.

Es necesario determinar las componentes de tensión que se producen en el hormigón, a partir del vector de tensiones homogeneizadas de la barra. Para ello se utiliza la ecuación (3.62) con lo que las componentes del vector de tensiones que se produce en el hormigón son

$$(\sigma_{xx})_H = \sigma_{xx}^{Hom} \cdot \frac{E_H}{E_X} \quad (4.70)$$

$$(\sigma_{yy})_H = \sigma_{yy}^{Hom} \cdot \frac{E_H}{E_Y} \quad (4.71)$$

$$(\sigma_{zz})_H = \sigma_{zz}^{Hom} \cdot \frac{E_H}{E_G} \quad (4.72)$$

$$(\sigma_{xy})_H = \sigma_{xy}^{Hom} \cdot \frac{G_H}{G_{xy}} \quad (4.73)$$

$$(\sigma_{xz})_H = \sigma_{xz}^{Hom} \cdot \frac{G_H}{G_{xz}} \quad (4.74)$$

$$(\sigma_{yz})_H = \sigma_{yz}^{Hom} \cdot \frac{G_H}{G_{yz}} \quad (4.75)$$

donde E_H y G_H son los módulos de elasticidad longitudinal y a cortante del hormigón respectivamente. Asimismo, E_X , E_Y , E_G , G_{xy} , G_{xz} y G_{yz} son los módulos de elasticidad de la barra homogeneizada especificados en el Capítulo 3 y vienen definidos por las ecuaciones (3.15), (3.118), (3.119), (3.187), (3.197) y (3.209).

4.8.2 Definición de la función umbral de daño

En el presente trabajo se adopta el criterio de Mohr-Coulomb modificado (Oller 2002, Oller 1991) para introducirlo en la ecuación de la tensión equivalente $f(\sigma_0)$ del apartado 4.5, para poder determinar, de acuerdo con la ecuación (4.39) o (4.40), si se produce daño o no en función de un cierto estado de tensiones.

Con el vector de tensiones del hormigón, determinado en el apartado 4.8.1, a partir de las tensiones homogeneizadas de la barra, es posible ahora calcular la tensión equivalente $f(\sigma_0) = \sigma_{eq.MC}$ utilizando el criterio de Mohr-Coulomb modificado y posteriormente, determinar la evolución de la variable interna de daño usando la ecuación (4.47).

La formulación del modelo que se escribe a continuación y que ha sido introducida en el programa de cálculo desarrollado en el presente trabajo, ha sido obtenida de Oller (2002) y Oller (1991).

El valor de la tensión equivalente $\sigma_{eq.MC}$, siguiendo el criterio de Mohr-Coulomb modificado, viene determinado por la siguiente ecuación:

$$\sigma_{eq.MC} = CFL \cdot Ten \quad (4.76)$$

donde los valores de los factores CFL y Ten vienen expresados por

$$CFL = 2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\cos(\phi)} \quad (4.77)$$

$$Ten = \sigma_m \cdot K_3 + (\sqrt{J_2} \cdot K_1 \cdot \cos(\phi)) - \frac{K_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi)}{\sqrt{3}} \quad (4.78)$$

donde ϕ es el ángulo de rozamiento interno del hormigón, que es una propiedad del material, y cuyo valor es 32° (Oller 1991)

$$\phi = 32 \cdot \frac{\pi}{180} = 0.5585 \text{ rad} \quad (4.79)$$

Asimismo, se calcula la tensión media σ_m como

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_{xx})_H + (\sigma_{yy})_H + (\sigma_{zz})_H}{3} \quad (4.80)$$

siendo $(\sigma_{xx})_H$, $(\sigma_{yy})_H$ y $(\sigma_{zz})_H$ las tensiones del hormigón en los ejes x , y y z definidas en las ecuaciones (4.70), (4.71) y (4.72).

Por otra parte, θ es el ángulo de Lode correspondiente al estado tensional del hormigón, que se calcula como

$$\theta = \frac{\text{asin}\left(-\frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot J_2 \cdot \sqrt{J_2}}\right)}{3} \quad (4.81)$$

donde J_2 y J_3 son respectivamente el segundo y el tercer invariante del tensor desviador de tensiones $(\boldsymbol{\sigma})_H^{desv.}$. Dicho tensor se calcula como

$$(\boldsymbol{\sigma})_H^{desv.} = (\boldsymbol{\sigma})_H - \sigma_m \cdot \mathbf{I} \quad (4.82)$$

siendo $(\boldsymbol{\sigma})_H$ el tensor de tensiones del hormigón, cuyas componentes se calculan con las ecuaciones (4.70) a (4.75), σ_m es la tensión media determinada en la ecuación (4.80) e \mathbf{I} es el tensor unidad (Oliver y Agelet de Saracíbar 2000). Así, pues, el segundo y el tercer invariante del tensor desviador de tensiones se calculan como

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[((\sigma_{xx})_H^{desv.})^2 + ((\sigma_{yy})_H^{desv.})^2 + ((\sigma_{zz})_H^{desv.})^2 + ((\sigma_{xy})_H^{desv.})^2 + ((\sigma_{xz})_H^{desv.})^2 + ((\sigma_{yz})_H^{desv.})^2 \right] \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
J_3 = & (\sigma_{xx})_H^{Desv.} \cdot \left[(\sigma_{yy})_H^{Desv.} \cdot (\sigma_{zz})_H^{Desv.} - ((\sigma_{yz})_H^{Desv.})^2 \right] + (\sigma_{xy})_H^{Desv.} \\
& \cdot \left[-(\sigma_{xy})_H^{Desv.} \cdot (\sigma_{zz})_H^{Desv.} + (\sigma_{xz})_H^{Desv.} \cdot (\sigma_{yz})_H^{Desv.} \right] + (\sigma_{xz})_H^{Desv.} \\
& \cdot \left[(\sigma_{xy})_H^{Desv.} \cdot (\sigma_{yz})_H^{Desv.} - (\sigma_{xz})_H^{Desv.} \cdot (\sigma_{yy})_H^{Desv.} \right]
\end{aligned} \quad (4.84)$$

y los valores de los parámetros K_1 , K_2 y K_3 que aparecen en la ecuación (4.78) se definen de la siguiente forma:

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \alpha) - \left(\frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha) \cdot \sin(\phi) \right) \quad (4.85)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \alpha) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1 + \alpha)}{\sin(\phi)} \right) \quad (4.86)$$

$$K_3 = -\left(\frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha) \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (1 + \alpha) \cdot \sin(\phi) \right) \quad (4.87)$$

siendo el parámetro α que interviene en (4.85), (4.86) y (4.87)

$$\alpha = \frac{Reten}{\left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^2} \quad (4.88)$$

La variable Reten es la relación de resistencias a compresión y a tracción del hormigón

$$Reten = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} = 10 \quad (4.89)$$

De esta forma, con dicha tensión equivalente, se puede determinar si se produce daño en el hormigón, cuando el valor de la mencionada tensión supera el umbral de daño del hormigón, σ_{lim} , usando la ecuación (4.39).

4.8.3 Determinación de la variable de daño

Para conocer la evolución de la variable interna de daño, es necesario expresarla como una evolución temporal de la misma, mediante una regla de evolución (véase el apartado 4.6). En el presente trabajo se ha utilizado para el hormigón un modelo de ablandamiento exponencial, descrito por la ecuación (4.47). No obstante esto, es posible llegar a una expresión explícita que permita evaluarla en función del estado de tensiones impuesto. Por lo que la evolución de la variable interna de daño es

$$d = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_{eq.MC} < \sigma_{lim} \\ 1 - \frac{(\sigma_{lim})_0}{\sigma_{eq.MC}} \cdot \exp \left(A \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{eq.MC}}{(\sigma_{lim})_0} \right) \right) & \text{si } \sigma_{eq.MC} \geq \sigma_{lim} \end{cases} \quad (4.90)$$

donde σ_{lim} es la tensión umbral de daño del hormigón en el estado actual y $(\sigma_{lim})_0$ es la tensión umbral de daño inicial del hormigón, que en (4.47) se corresponde a c^{max} .

El parámetro A se corresponde al definido en la ecuación (4.52) y, en este caso concreto, es

$$A = \frac{1}{\left(\frac{g_f \cdot (E_H)_0 \cdot Reten^2}{\sigma_{lim}^2} - \frac{1}{2}\right)} \quad (4.91)$$

siendo $(E_H)_0$ el módulo de elasticidad inicial del hormigón y g_f es la energía de fractura del hormigón. En el caso del hormigón, el modelo distingue los casos en que la barra se encuentra a tracción o a compresión. Para el caso de tracción dicha energía de fractura es aproximadamente 10 veces inferior que en el caso de compresión.

Por lo tanto, en la ecuación (4.47) se ha llamado a la tensión equivalente umbral de daño inicial $f^0(\sigma_0)$, que en la ecuación (4.90) se corresponde a $(\sigma_{lim})_0$. Asimismo, en (4.47) se ha denominado a la tensión equivalente del hormigón $f(\sigma_0)$, que en la ecuación (4.47), donde se ha calculado siguiendo el criterio de Mohr-Coulomb modificado, se ha denominado $\sigma_{eq.MC}$, al estar particularizada para dicho criterio.

De esta forma se determina la evolución de la variable de daño interna del hormigón. Nótese que, en el modelo unidimensional, para el cálculo de las tensiones homogeneizadas σ^{Hom} de la barra es necesario realizar un despiece de la sección por capas, dado que la ecuación (4.62), que expresa el valor de σ_{zz}^{Hom} , depende del punto de la sección considerado.

4.9 Aplicación del modelo de daño a una sección transversal definida por capas

Para realizar el cálculo no lineal de estructuras con el modelo unidimensional, es necesario discretizar la estructura en distintos elementos unidimensionales de barra (ver Figura 4.6) y, además, dividir cada sección en capas (ver Figura 4.8). Ello es debido a que, de forma general, en la estructura se producen distribuciones de tensiones distintas según el punto de la barra y/o de la sección considerado. Además, en cada punto hay un valor distinto de la variable interna de daño.

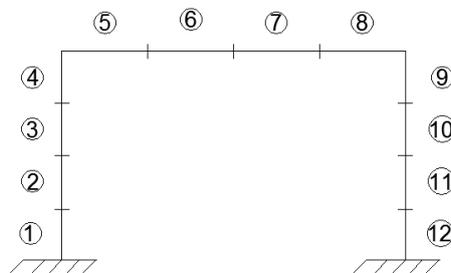


Figura 4.6. Ejemplo de discretización de una estructura de barras en varios elementos de barra unidimensionales

Ello genera una dificultad adicional cuando se calcula la estructura considerando su no linealidad dado que, por ejemplo, la variable de daño del hormigón es distinta en cada punto de la barra y en cada capa. Así, pues, ya no es posible, como en el caso elástico, determinar las tensiones y los esfuerzos en todos los puntos de la barra a partir únicamente de los esfuerzos que se producen en los nodos usando el equilibrio. Ello se debe a que el daño altera las propiedades mecánicas de la estructura en cada punto de forma distinta.

En la Figura 4.7 se muestra el esquema del procedimiento seguido para realizar la descomposición de las tensiones en las capas de la sección y el cálculo de la tensión mediante el modelo constitutivo, incluyendo el daño que se desarrolla en el hormigón. Se calculan las tensiones que se producen en cada capa considerando la no linealidad del material y, posteriormente, se realiza la recomposición de las tensiones de la sección para determinar los esfuerzos que se producen en cada sección dañada.

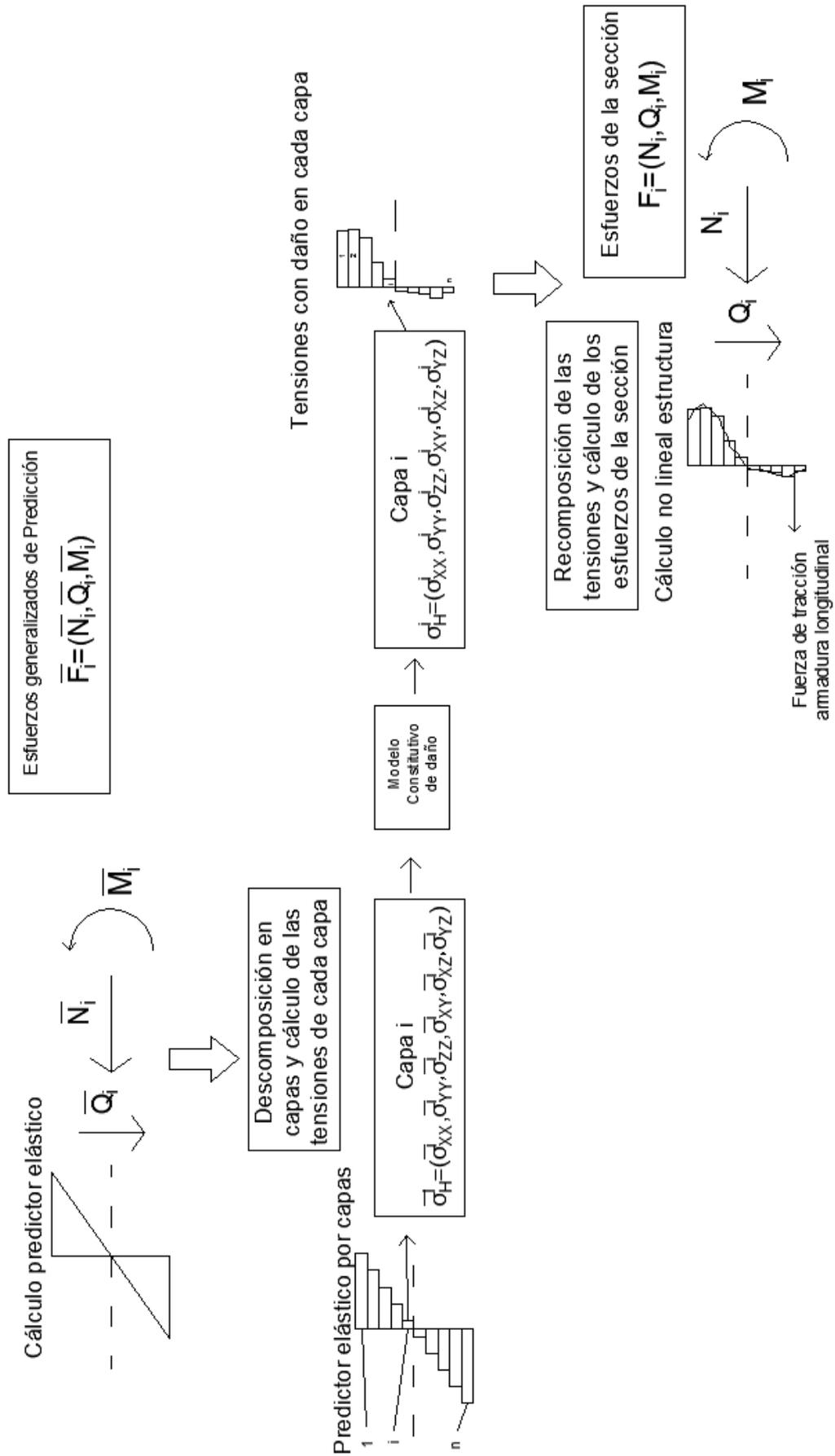


Figura 4.7. Procedimiento de descomposición por capas de la sección

4.9.1 Descomposición de los esfuerzos en tensiones para cada capa de la sección

Se utiliza el procedimiento desarrollado en el apartado 4.8.1 para calcular las tensiones homogeneizadas de la barra σ^{Hom} y las tensiones que se desarrollan en el hormigón σ_H en cada capa i de una cierta sección considerada. Tras realizar la descomposición de la sección en un número n de capas, es necesario determinar la posición del centro geométrico de cada capa i respecto del eje neutro de la sección (ver Figura 4.8). Se denomina y_i a la distancia entre el eje neutro de la sección y el centro geométrico de la capa i . Así, pues, es posible determinar la tensión $(\sigma_{zz}^{Hom})_i$ de cada capa i a partir de los esfuerzos predictores elásticos $F^T = (N \ T \ M)$ de la sección particularizando la ecuación (4.62) para cada capa

$$(\sigma_{zz}^{Hom})_i = \frac{N}{A} - \frac{My_i}{I} \quad (4.92)$$

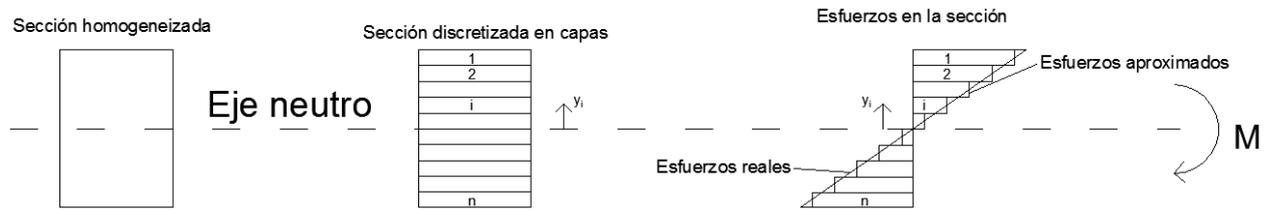


Figura 4.8. Discretización de la sección homogeneizada en capas

El valor $(\sigma_{zz}^{Hom})_i$ se corresponde realmente al valor medio de la tensión en el eje z en cada una de las capas. Por lo tanto, cuanto mayor sea el número n de capas en que se discretiza la sección, mayor será la precisión del cálculo de la estructura.

Posteriormente, a partir del valor de $(\sigma_{zz}^{Hom})_i$ y de los esfuerzos predictores elásticos $F^T = (N \ T \ M)$, es posible determinar el resto de las componentes de tensión $(\sigma_{xx}^{Hom})_i$, $(\sigma_{yy}^{Hom})_i$, $(\sigma_{xy}^{Hom})_i$, $(\sigma_{xz}^{Hom})_i$ y $(\sigma_{yz}^{Hom})_i$ de la capa i usando las ecuaciones (4.63), (4.64), (4.65), (4.66), (4.67), (4.68) y (4.69) particularizadas para cada capa i a partir de lo expuesto en el apartado 4.8.1

$$(\sigma_{xx}^{Hom})_i = -B_X \cdot (E_A)_{CX} \cdot (\varepsilon_{xx})_i \quad (4.93)$$

$$(\sigma_{yy}^{Hom})_i = -B_Y \cdot (E_A)_{CY} \cdot (\varepsilon_{yy})_i \quad (4.94)$$

$$(\sigma_{xy}^{Hom})_i = 0 \quad (4.95)$$

$$(\sigma_{xz}^{Hom})_i = 0 \quad (4.96)$$

$$(\sigma_{yz}^{Hom})_i \cong \frac{T}{A^*} = \frac{T}{A_{A,Long}^* + A_{A,Cerco}^* + A_H^*} \quad (4.97)$$

donde ε_{xx} y ε_{yy} son las deformaciones de la barra, determinadas a partir de la ecuación (3.93), la ecuación (3.96) y la ecuación (3.33)

$$(\varepsilon_{xx})_i = -\frac{1}{E_G} \cdot (\sigma_{zz}^{Hom})_i \cdot H_X \quad (4.98)$$

$$(\varepsilon_{yy})_i = -\frac{1}{E_G} \cdot (\sigma_{zz}^{Hom})_i \cdot H_Y \quad (4.99)$$

Los parámetros E_G , H_X y H_Y que intervienen en las ecuaciones (4.98) y (4.99) se obtienen usando las formulas (3.15), (3.92) y (3.95), respectivamente, descritas en el Capítulo 3. Asimismo, en la ecuación (4.92) aparecen N y M , los esfuerzos axil y flector de la barra en la sección y, también, A e I , el área y la inercia de la sección considerada.

4.9.2 Obtención de las tensiones mediante el modelo constitutivo antes descrito

Como ya se ha comentado en los apartados 4.4 y 4.8.1, las tensiones de la barra homogeneizadas que se han calculado para cada capa i en el apartado anterior 4.9.1 no son idénticas a las tensiones que realmente se producen en el hormigón. Es necesario, por lo tanto, usando el razonamiento realizado en el apartado 4.8.1, calcular, a partir de las tensiones homogeneizadas $(\sigma^{Hom})_i$ de cada capa i y determinadas en 4.9.1, las tensiones en el hormigón $(\sigma_H)_i$ que se desarrollan en la capa i usando las ecuaciones (4.70) a (4.75)

$$((\sigma_{xx})_H)_i = (\sigma_{xx}^{Hom})_i \cdot \frac{E_H}{E_X} \quad (4.100)$$

$$((\sigma_{yy})_H)_i = (\sigma_{yy}^{Hom})_i \cdot \frac{E_H}{E_Y} \quad (4.101)$$

$$((\sigma_{zz})_H)_i = (\sigma_{zz}^{Hom})_i \cdot \frac{E_H}{E_G} \quad (4.102)$$

$$((\sigma_{xy})_H)_i = (\sigma_{xy}^{Hom})_i \cdot \frac{G_H}{G_{xy}} \quad (4.103)$$

$$((\sigma_{xz})_H)_i = (\sigma_{xz}^{Hom})_i \cdot \frac{G_H}{G_{xz}} \quad (4.104)$$

$$((\sigma_{yz})_H)_i = (\sigma_{yz}^{Hom})_i \cdot \frac{G_H}{G_{yz}} \quad (4.105)$$

Posteriormente, se calcula para cada capa i el daño que se produce en el hormigón d_i de acuerdo con el procedimiento expuesto en los apartados 4.8.2 y 4.8.3 a partir de las tensiones $(\sigma_H)_i$ desarrolladas en el hormigón de la capa i de la sección.

Siguiendo el esquema expuesto en el apartado 4.8 (ver Figura 4.3), son necesarios los siguientes pasos para calcular el daño del hormigón

- Primeramente, determinar la tensión predictora elástica del hormigón de la capa $(\sigma_H)_i$, según lo explicado en los apartados 4.9.1 y 4.9.2.
- Calcular la tensión equivalente según el modelo de Mohr-Coulomb modificado $\sigma_{eq,MC}$ (apartado 4.8.2).
- Verificar la condición de umbral de daño y calcular, si procede, el nuevo daño del hormigón mediante la ecuación (4.90) (apartado 4.8.3).
- En caso de que se produzca daño adicional, se debe actualizar el valor de σ_{lim} : $\sigma_{lim} = \sigma_{eq,MC}$.
- Finalmente, se determina el valor de las tensiones en el hormigón a partir de la nueva variable de daño d_i , tal y como se expone a continuación.

4.9.3 Recomposición de los esfuerzos a partir de las tensiones introducidas en cada capa de la sección

a) Cálculo de las tensiones

Tras obtener el valor de la variable interna de daño d_i para las n capas en que se ha dividido la sección, se procede al cálculo de las tensiones que se desarrollan en cada capa a causa del daño utilizando las ecuaciones (4.31) y (4.38). A partir del valor de las tensiones del hormigón que se han utilizado como predictor elástico $(\sigma_H)_i$ y de la variable de daño interna d_i de la capa i , se pueden determinar el valor de las tensiones del hormigón en la capa i afectadas por el daño utilizando $[(\sigma_H)_i]_d$

$$[(\sigma_{xx})_H]_i]_d = ((\sigma_{xx})_H)_i \cdot (1 - d_i) \quad (4.106)$$

$$\left[\left((\sigma_{yy})_H \right)_i \right]_d = \left((\sigma_{yy})_H \right)_i \cdot (1 - d_i) \quad (4.107)$$

$$[(\sigma_{zz})_H]_i]_d = ((\sigma_{zz})_H)_i \cdot (1 - d_i) \quad (4.108)$$

$$\left[\left((\sigma_{xy})_H \right)_i \right]_d = \left((\sigma_{xy})_H \right)_i \cdot (1 - d_i) \quad (4.109)$$

$$[(\sigma_{xz})_H]_i]_d = ((\sigma_{xz})_H)_i \cdot (1 - d_i) \quad (4.110)$$

$$\left[\left((\sigma_{yz})_H \right)_i \right]_d = \left((\sigma_{yz})_H \right)_i \cdot (1 - d_i) \quad (4.111)$$

A continuación se determina, a partir de las tensiones del hormigón que se han obtenido para cada capa $[(\sigma_H)_i]_d$ sujeta al daño, la correspondiente tensión homogeneizada $[(\sigma^{Hom})_i]_d$ de cada capa i sujeta al daño. Para ello se utiliza, una vez más, el concepto de compatibilidad de deformaciones ya expuesto en 4.8.1 y que se ha utilizado para deducir las ecuaciones (4.100) a (4.105)

$$(\sigma_{xx}^{Hom})_i = ((\sigma_{xx})_H)_i \cdot \frac{E_X}{E_H} \quad (4.112)$$

$$(\sigma_{yy}^{Hom})_i = ((\sigma_{yy})_H)_i \cdot \frac{E_Y}{E_H} \quad (4.113)$$

$$(\sigma_{zz}^{Hom})_i = ((\sigma_{zz})_H)_i \cdot \frac{E_G}{E_H} \quad (4.114)$$

$$(\sigma_{xy}^{Hom})_i = ((\sigma_{xy})_H)_i \cdot \frac{G_{xy}}{G_H} \quad (4.115)$$

$$(\sigma_{xz}^{Hom})_i = ((\sigma_{xz})_H)_i \cdot \frac{G_{xz}}{G_H} \quad (4.116)$$

$$(\sigma_{yz}^{Hom})_i = ((\sigma_{yz})_H)_i \cdot \frac{G_{yz}}{G_H} \quad (4.117)$$

b) Cálculo de los esfuerzos axil y flector

Seguidamente es necesario calcular, a partir de las tensiones homogeneizadas afectadas por el daño $[(\sigma^{Hom})_i]_d$, calculadas con las ecuaciones (4.112) - (4.117), el valor de los esfuerzos en la sección, $(F_d)^T = (N_d \ T_d \ M_d)$, afectados por el daño de todas las capas. Para ello, es necesario calcular, en un primer momento, la fuerza F_i que se produce a la altura de la capa i de la sección por el efecto de la tensión homogeneizada $(\sigma_{zz}^{Hom})_i$ en el eje Z de la capa i (ver Figura 4.9). La fuerza F_i de la capa viene determinada por la siguiente expresión:

$$F_i = (\sigma_{zz}^{Hom})_i \cdot b \cdot \frac{h}{ncapas} \quad (4.118)$$

donde b es el ancho de la sección, h es la altura total de la sección, $ncapas$ es el número de capas en que se divide el total de la sección y $(\sigma_{zz}^{Hom})_i$ es el valor de la tensión homogeneizada de la barra en la capa i .

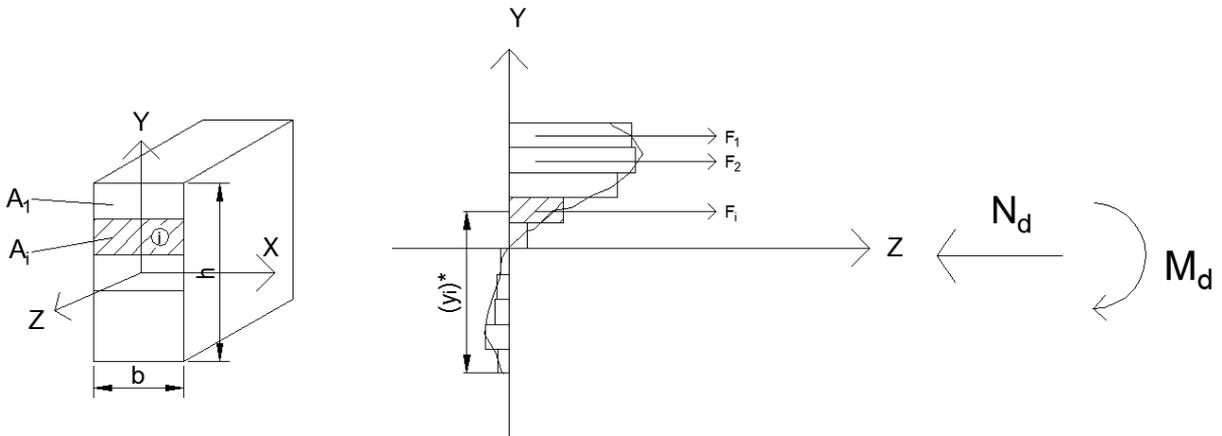


Figura 4.9. Fuerzas desarrolladas en cada una de las capas por la distribución de tensiones

Expresando el equilibrio de fuerzas y momentos en la sección, es posible determinar el valor de los esfuerzos en la sección afectados por el daño a partir de las tensiones homogeneizadas de cada una de las capas, utilizando las fuerzas F_i que se desarrollan en cada capa

$$N_d = \sum_{i=1}^{ncapas} F_i \quad (4.119)$$

y:

$$M_d = \sum_{i=1}^{ncapas} F_i \cdot (y_i)^* \quad (4.120)$$

donde F_i es la fuerza que se produce en la capa i a causa de las tensiones de la barra y donde y_i es la distancia desde la base de la sección hasta el punto medio de la capa i considerada (ver Figura 4.9).

c) Cálculo del esfuerzo cortante

Finalmente, el valor del esfuerzo cortante T_d de la sección, afectado por el daño que se produce en la estructura, se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$T_d = \sum_{i=1}^{ncapas} \tau_i \cdot A_i \quad (4.121)$$

donde es la tensión tangencial de la capa i de la sección y A_i es el área de dicha capa, según lo indicado en la Figura 4.9. Así, pues, se tiene

$$\tau_i = G_{yz} \cdot \gamma_i \quad (4.122)$$

donde γ_i es la deformación angular de la capa i .

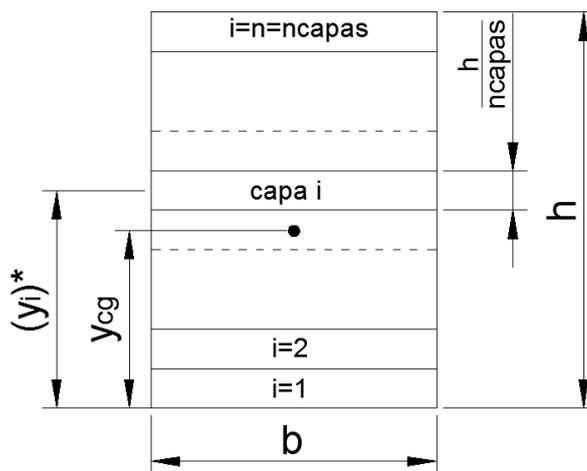


Figura 4.10. Reconstrucción del esfuerzo cortante en la sección dividida en capas

La deformación γ_i se obtiene a partir de la fórmula de Collignon en la capa i (ver Figura 4.10)

$$\tau_i = \frac{Q_i \cdot S_i}{I_i \cdot b} \quad (4.123)$$

Se debe observar que en el presente caso se ha considerado que todas las capas de la sección tienen el mismo ancho b , aunque la formulación propuesta a continuación también es válida si cada capa tiene un ancho distinto.

Introduciendo la ecuación (4.123) en (4.122) se obtiene que

$$\gamma_i = \frac{\tau_i}{G_{yz}} = \frac{Q_i \cdot S_i}{G_{yz} \cdot I_i \cdot b} \quad (4.124)$$

Asimismo, la deformación angular media de la sección, γ_{med} , está definida por la ecuación

$$Q_i = G_{yz} \cdot A_i^* \cdot \gamma_{med} \quad (4.125)$$

e, introduciendo la ecuación (4.125) en (4.124), se obtiene

$$\gamma_i = \frac{G_{yz} \cdot A_i^* \cdot \gamma_{med} \cdot S_i}{G_{yz} \cdot I_i \cdot b} \quad (4.126)$$

$$\gamma_i = \gamma_{med} \cdot \frac{A_i^* \cdot S_i}{I_i \cdot b} \quad (4.127)$$

$$\gamma_i = \gamma_{med} \cdot \frac{S_i}{\frac{I_i}{A_i^*} \cdot b} \quad (4.128)$$

Al tratarse de una sección compuesta, donde interviene en la respuesta de la estructura la rigidez de la capa, se introduce en la ecuación (4.128) el momento estático mecánico y la inercia mecánica de la capa

$$\gamma_i = \gamma_{med} \cdot \frac{\bar{S}_i}{\frac{\bar{I}_i}{A_i^*} \cdot b} \quad (4.129)$$

Tal y como se observa en la Figura 4.10, el momento estático \bar{S}_i de la capa i se determina como

$$\bar{S}_i = \bar{S}_{i-1} + \left(b \cdot \frac{h}{ncapas} \right) \cdot E_i \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot ncapas} + i \cdot \frac{h}{ncapas} - y_{CG} \right) \quad (4.130)$$

donde y_{CG} es el centro mecánico de la sección, que se determina como

$$y_{CG} = \frac{\bar{S}_n^*}{\bar{A}} \quad (4.131)$$

\bar{A} es el área mecánica de la sección, tal que

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{ncapas} A_i \cdot E_i \quad (4.132)$$

y \bar{S}_n^* es el momento estático con respecto la base de la sección. El valor de \bar{S}_i^* para la capa i es (ver Figura 4.10)

$$\bar{S}_i^* = \bar{S}_{i-1}^* + \left(b \cdot \frac{h}{ncapas} \right) \cdot E_i \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot ncapas} + i \cdot \frac{h}{ncapas} \right) \quad (4.133)$$

Asimismo, el cálculo de \bar{I}_i que interviene en la ecuación (4.128) se efectúa como

$$\bar{I}_i = \bar{I}_{i-1} + \left[\frac{b}{12} \cdot \left(\frac{h}{ncapas} \right)^3 + \left(b \cdot \frac{h}{ncapas} \right) \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot ncapas} + i \cdot \frac{h}{ncapas} - y_{CG} \right) \right] \cdot E_i$$

Finalmente, el valor del área reducida a cortante A_i^* a usar en (4.128) ya se ha deducido en el apartado 3.1.4, mediante las ecuaciones (3.157) - (3.164). Para secciones rectangulares es

$$A_i^* = \frac{5}{6} \cdot A_i$$

y de esta forma, es posible efectuar el cálculo de las tensiones tangenciales de la sección dividida por capas y la recomposición del esfuerzo cortante que se produce en la misma.

d) Cálculo de las propiedades homogeneizadas de la barra degradada

Posteriormente, para calcular la matriz de rigidez de la barra con hormigón dañado, es necesario calcular también el área y la inercia mecánicas de la sección, utilizando

$$\bar{A}_M = \sum_{i=1}^{ncapas} (A_H)_i \cdot (E_H)_0 \cdot (1 - d_i) + \sum_{i=1}^{ncapas} (A_A)_i \cdot (E_A)_0 \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_M = & \sum_{i=1}^{ncapas} \left((I_H)_i + (A_H)_i \cdot (y_i^{CM})^2 \right) \cdot (E_H)_0 \cdot (1 - d_i) \\ & + \sum_{i=1}^{ncapas} \left((I_A)_i + (A_A)_i \cdot (y_i^{CM})^2 \right) \cdot (E_A)_0 \end{aligned} \quad (4.135)$$

donde y_i^{CM} es la distancia entre el centro de la capa y el centro mecánico de la sección, $(A_H)_i$ es el área de hormigón en la capa i de hormigón, $(A_A)_i$ es el área de acero en la capa i , $(I_H)_i$ es la inercia del hormigón de la capa i , $(I_A)_i$ es la inercia del acero de la capa i , y d_i es el daño del hormigón de la capa i . Asimismo, $(E_A)_0$ y $(E_H)_0$ son los módulos de elasticidad iniciales del acero y del hormigón. Dichas área e inercias mecánicas deben ser introducidas en la matriz de rigidez de la barra, en substitución de $E_G A_G$ y de $E_G I_G$, en la ecuación (3.201).

e) Daño medio seccional

Sin embargo, a fin de materializar el modelo propuesto en un programa de cálculo de estructuras de barras con la herramienta Matlab, se ha simplificado el problema utilizando el daño medio seccional para calcular la rigidez de la barra y obtener los esfuerzos en la misma. Se define el daño medio seccional a partir del daño d_i obtenido en cada una de las capas i de una cierta sección como

$$d_{med} = \frac{1}{ncapas} \sum_{i=1}^{ncapas} d_i \quad (4.136)$$

De esta forma, para el cálculo del área mecánica de la sección al realizar la recomposición mediante la ecuación (4.134), el resultado es equivalente a tomar como daño medio en la sección el promedio de los daños de todas las capas. De esta forma, tal y como se ha expuesto en el apartado 4.8, se puede obtener el modelo constitutivo de las barras a partir del modelo constitutivo de la ecuación (4.38).

Para el caso del cálculo de estructuras de barras, el modelo constitutivo del material depende de los módulos de elasticidad longitudinal y transversal del hormigón, y se pueden obtener por analogía con (4.38) usando

$$E_H = (E_H)_0 \cdot (1 - d_{med}) \quad (4.137)$$

$$G_H = (G_H)_0 \cdot (1 - d_{med}) \quad (4.138)$$

donde $(E_H)_0$ y $(G_H)_0$ son los valores iniciales de los módulos de elasticidad longitudinal y a cortante del hormigón.

De esta manera es posible obtener la matriz de rigidez de la barra introduciendo los valores de los módulos E_H y G_H en la ecuación (3.201). Esta simplificación se ha hecho por la necesidad de disminuir el tiempo de cálculo y mejorar la eficiencia del programa de ordenador.

Como ya se ha comentado, la rigidez a axil no se ve afectada por esta simplificación ya que ambos planteamientos, utilizando la formulación simplificada y usando la ecuación (4.134), resultan equivalentes. No obstante, la rigidez a flexión sí que se ve afectada hasta cierto punto, porque la formulación simplificada no es equivalente con la de la ecuación (4.135). Sin embargo, se considera que la diferencia entre ambos planteamientos no produce diferencias significativas en los resultados y esta simplificación permite obtener un gran ahorro de coste computacional.

El procedimiento simplificado que se ha implementado para realizar la recomposición de la sección, tras calcular el daño en cada capa, es el descrito a continuación:

- Primeramente, se procede al cálculo del daño medio seccional, d_{med} , en función del daño d_i de cada una de las capas usando la ecuación (4.136).
- A continuación se calcula la rigidez de la barra dañada en función del daño medio seccional, d_{med} , usando los módulos de elasticidad del hormigón dañado E_H y G_H de acuerdo con en las ecuaciones (4.137) y (4.138). Dichos módulos deben ser introducidos en las ecuaciones con las que se calculan las componentes de la matriz de rigidez de la barra: (3.15), (3.140), (3.118), (3.119), (3.92), (3.95), (3.187) y (3.102) y que luego son introducidas en la matriz de rigidez de la ecuación (3.201).
- Tras determinar la nueva matriz de rigidez, afectada por el daño que se ha producido en la estructura, se determinan los esfuerzos de la barra dañada $(F_d)^T = (N_d \quad T_d \quad M_d)$ usando

$$F_d = \begin{pmatrix} N_d \\ T_d \\ M_d \end{pmatrix} = K_{barra}(E_H(d_{med}), G_H(d_{med})) \cdot U_{barra} \quad (4.139)$$

donde K_{barra} es la rigidez de la barra que depende, entre otros parámetros, de los módulos de elasticidad longitudinal y transversal del hormigón dañado, calculado mediante las ecuaciones (4.137) y (4.138), y donde d_{med} es el daño medio seccional determinado en la ecuación (4.136). Asimismo, U_{barra} es el vector de desplazamientos de la barra, determinado a partir del cálculo de la estructura con el método descrito en los apartados 4.2 y 4.3, y cuya implementación detallada se expone más adelante en el trabajo.

Nótese como, en el caso de calcularse una barra de hormigón en masa, sin presencia de armadura ni longitudinal ni transversal, aplicar el daño a los módulos de elasticidad E_H y G_H según (4.137) y (4.138) resulta equivalente a aplicar el daño directamente a la matriz de rigidez de la barra $\mathbf{K} = (1 - d) \cdot \mathbf{K}_0$ tal y como era esperable (ecuación (4.38)).

f) Discretización de la estructura en elementos de barra unidimensionales

Como ya se ha comentado, además de la discretización en capas de la sección, también se realiza la discretización de las barras de la estructura en varios elementos de barra unidimensionales (ver Figura 4.6). Ello permite aproximar con la mayor precisión posible los esfuerzos, el daño y el comportamiento que realmente se producen en todos los puntos de la estructura. Cada uno de estos elementos tiene su propia matriz de rigidez. No obstante, sólo es posible aproximar dicha matriz con los resultados de daño calculados en las dos secciones extremas de los elementos de barra (ver Figura 4.11). Por lo tanto, es necesario determinar la matriz de rigidez que mejor se ajuste al comportamiento real de la estructura, dados los resultados de daño obtenidos para las secciones extremas de las barras. De forma general, usando la aproximación formulada en 4.9.3, el daño medio seccional de cada barra que realmente se produce será una función de los daños medios seccionales de cada una de las secciones extremas de la barra, determinado usando (4.136) tras obtener el daño de cada capa

$$(d_{med})_{barra} = f((d_{med})_{Sección 1}, (d_{med})_{Sección 2}) \quad (4.140)$$

Las dos secciones extremas de la barra son las únicas para las que se puede determinar el valor del daño medio seccional, dado que son las únicas en las que se realiza la discretización de las secciones por capas y se determinan las tensiones homogeneizadas de la barra $(\sigma^{Hom})_i$, las tensiones del hormigón $(\sigma_H)_i$ y el correspondiente daño d_i para cada capa i (apartados 4.9.1 y 4.9.2). Ello se debe a que las secciones extremas de la barra son los únicos puntos de la misma donde se puede determinar, en un principio de forma sencilla, los esfuerzos predictores elásticos que se producen.

En el programa de cálculo desarrollado en el presente trabajo se ha realizado la simplificación de tomar el daño en la sección donde éste es más grande de entre las dos secciones extremas:

$$(d_{med})_{barra} = \max\{(d_{med})_{Sección 1}, (d_{med})_{Sección 2}\} \quad (4.141)$$

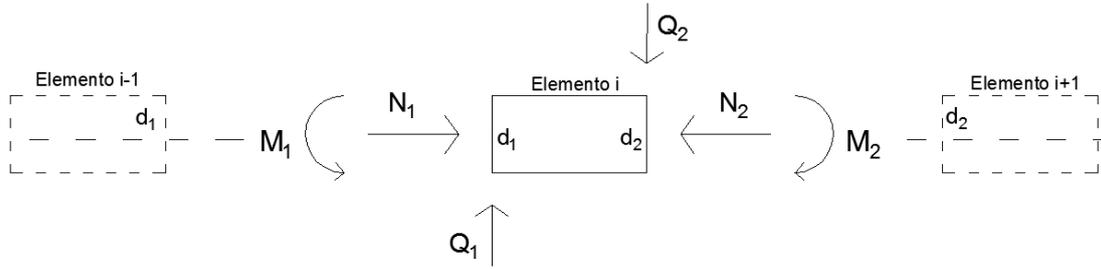


Figura 4.11. Daños producidos en los extremos del elemento i

Así, pues, la síntesis del método propuesto en el presente trabajo es:

- Realizar la discretización por capas de todas las secciones de la estructura (apartado 4.9.1).
- Realizar el cálculo del daño que se produce en cada capa (apartados 4.9.2 y 4.8) con la ecuación (4.90).
- Realizar la correspondiente recomposición de la sección y el correspondiente recálculo de las propiedades de la sección. Como alternativa, se propone para este paso utilizar la simplificación implementada en el programa de cálculo desarrollado y que utiliza el concepto de daño medio seccional. Luego se considera el máximo valor de daño medio seccional de entre los dos valores obtenidos (ecuación 4.136) para las dos secciones extremas como valor representativo del comportamiento en toda la barra (apartado 4.9.3, ecuación 4.141) (ver Figura 4.11). En el caso de no utilizar la simplificación, sigue siendo necesario determinar los valores de las propiedades de la barra en función de los resultados obtenidos en sus secciones extremas siguiendo un procedimiento análogo al de las ecuaciones (4.140) y (4.141).

Concretamente, tal y como se ha expuesto en el apartado 4.9.3, es necesario determinar la nueva área mecánica y la nueva inercia mecánica de la sección a partir de las ecuaciones (4.134) y (4.135). De forma general

$$(\bar{A}_M)_{barra} = f((\bar{A}_M)_{Seccion\ 1}, (\bar{A}_M)_{Sección\ 2}) \quad (4.142)$$

$$(\bar{I}_M)_{barra} = f((\bar{I}_M)_{Seccion\ 1}, (\bar{I}_M)_{Sección\ 2}) \quad (4.143)$$

y tomando como valor representativo de toda la barra el valor correspondiente al de la sección que padece el máximo daño de las dos analizadas

$$(\bar{A}_M)_{barra} = \min\{(\bar{A}_M)_{Seccion\ 1}, (\bar{A}_M)_{Sección\ 2}\} \quad (4.144)$$

$$(\bar{I}_M)_{barra} = \min\{(\bar{I}_M)_{Seccion\ 1}, (\bar{I}_M)_{Sección\ 2}\} \quad (4.145)$$

Con cualquiera de las dos formas utilizadas, se determina el valor de la rigidez de la barra.

La simplificación utilizada en las ecuaciones (4.141), (4.144) y (4.145) de tomar el máximo valor de daño de entre las dos secciones calculadas como un valor representativo de lo que ocurre en toda la barra no introduce grandes discrepancias respecto el comportamiento real de la estructura si la barra se divide en un número suficiente de elementos. De esta forma, si el número de divisiones es suficientemente grande, es posible determinar de forma más precisa la variación de los esfuerzos en la barra y obtener resultados mucho más precisos.

En consecuencia, si no se realiza el cálculo de la estructura con el suficiente número de capas en cada sección, o de elementos en cada barra, no se está calculando el valor adecuado de las tensiones en la barra y se obtendrán resultados alejados de la realidad. Por ejemplo, no se consideraría adecuadamente el valor de las tensiones que se producen por la presencia del esfuerzo flector, que es variable tanto en función del punto considerado dentro de la sección como de la posición a lo largo de la barra. Mediante la consideración de un daño distinto en cada capa, es posible acercarse mejor al comportamiento de la estructura cuando ésta entra en el rango inelástico (ver Figura 4.12).

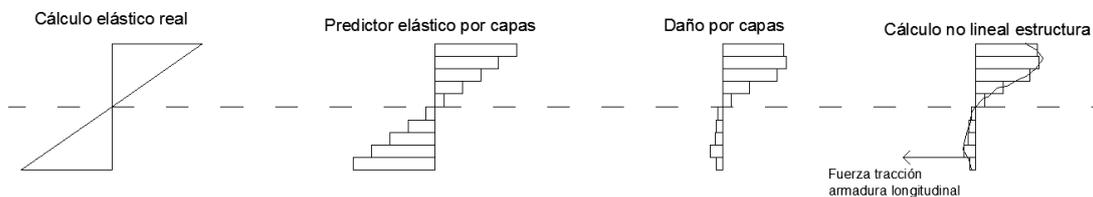


Figura 4.12. Proceso de cálculo. Descomposición y recomposición de las tensiones de las capas.

Debe recalcar que en las partes traccionadas de la barra, donde no se produce confinamiento del hormigón como, por ejemplo, en el caso en que el momento flector mantiene traccionada parte de la sección de la barra, requieren un tratamiento especial. En esos casos, la fisuración del hormigón se produce rápidamente al no actuar el confinamiento. En ese caso, la formulación del daño del hormigón distingue los casos de compresión y los casos de tracción, de forma que el daño en el hormigón traccionado evoluciona de forma más rápida y brusca, no dando tiempo al confinamiento de desarrollarse o producir un efecto significativo en la respuesta de la estructura.

Capítulo 5

Tratamiento del comportamiento no lineal elasto-plástico del acero de las barras de hormigón armado y confinado

5.1 Modelo de plasticidad para el acero de las armaduras

En el presente capítulo se expone el tratamiento elasto-plástico de las barras de hormigón armado con armadura longitudinal y cercos de confinamiento. El efecto de la plasticidad, junto con el del daño del hormigón, permite considerar el comportamiento constitutivo no lineal de todos los materiales componentes en las barras homogeneizadas.

En sentido estricto, la plasticidad se produce en los metales por la distorsión que sufre su red cristalina cuando son sometidos a deformaciones. La plasticidad en pequeñas deformaciones se caracteriza por suponer que las deformaciones en un punto, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$, se descomponen en una parte elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y otra plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ irreversible. La formulación de la teoría de la plasticidad representa el comportamiento fenomenológico macroscópico de un sólido real, con las siguientes características (Oller 2002):

- Al principio el sólido tiene un rango inicial elástico.
- Posteriormente el sólido tiene un comportamiento elasto-plástico donde el campo de tensiones no crece de forma proporcional al campo de deformaciones. Las deformaciones son la suma de una parte recuperable $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y de otra parte irrecuperable $\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

La teoría de la plasticidad sólo admite estos dos estados mecánicos, que están separados por el límite de fluencia o umbral de discontinuidad. Es, por lo tanto, necesario definir una función escalar de argumentos tensoriales, denominada criterio de fluencia, que distingue estos dos estados mecánicos del material. Esta función tiene la siguiente forma general (Oller 2002):

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = 0 \quad (5.1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones y \boldsymbol{q} es el vector del conjunto variables internas. Esta función establece el límite a partir del cual se inicia el comportamiento no lineal.

Cuando el estado tensional de un punto del sólido alcanza el criterio de discontinuidad inicial $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = 0$ y, a la vez, cumple la condición de consistencia plástica $\dot{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = 0$, se admite que este punto se encuentra en estado elasto-plástico (Oller 2002).

Entonces, bajo el modelo de plasticidad, el campo de tensiones que se produce realmente en un punto del sólido es (ver Figura 5.2)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5.2)$$

donde \mathbb{C} es el tensor constitutivo elástico del material y $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ es el campo de deformaciones elásticas. La deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$ se expresa de la siguiente forma aditiva:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (5.3)$$

La deformación plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ representa la variable interna fundamental del problema elasto-plástico y está definida como (Oller 2002)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial \mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) es la regla de normalidad, normal a la superficie de potencial plástico $\mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = cte$. λ es un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia plástica que da la magnitud del incremento de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$. La función de potencial plástico es la que define la dirección del incremento temporal de deformación plástica. El escalar λ viene determinado por (Oller 2002)

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{A + \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \quad \text{con } \lambda \geq 0 \quad (5.5)$$

siendo A el parámetro de endurecimiento plástico.

5.1.1 Plasticidad uniaxial de una barra de acero – caso simplificado

En el presente trabajo se ha utilizado un modelo simplificado de plasticidad uniaxial para tratar la plastificación de las armaduras longitudinales y de los cercos. En un proceso uniaxial, el límite de fluencia queda establecido comparando la tensión predictora elástica de la armadura de acero $(\sigma)_{el}$ con la resistencia correspondiente al límite elástico del material acero $(\sigma_{lim})_A$. Además, en ese caso la única variable interna del problema es la deformación plástica de la barra, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Se define, por lo tanto, en este caso particular, un criterio de fluencia plástica simplificado del tipo

$$\mathbb{F} = (\sigma)_{el} - (\sigma_{lim})_A < 0 \quad (5.6)$$

y la evolución de la variable interna de deformación plástica viene determinada por la ecuación (5.4), siendo en el caso uniaxial $\frac{\partial \mathbb{G}(\sigma, q)}{\partial \sigma} = 1$. Entonces, para este caso particular de plasticidad perfecta uniaxial, se tiene que

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \quad (5.7)$$

Además, en el caso uniaxial con plasticidad perfecta, en la ecuación (5.5), que determina el parámetro $\dot{\lambda}$, el valor del parámetro A es nulo por ser el endurecimiento nulo. Asimismo, por ser un caso uniaxial, se tiene $\mathbb{F} = \mathbb{G}$, por lo que, además de $\frac{\partial \mathbb{G}(\sigma, q)}{\partial \sigma} = 1$, también $\frac{\partial \mathbb{F}(\sigma, q)}{\partial \sigma} = 1$, con lo que $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \sigma} = E_A$. Y, también, por tratarse de un problema con plasticidad uniaxial, $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \sigma} : \mathbb{C} : \dot{\varepsilon} = \dot{\mathbb{F}}$. Finalmente, el parámetro λ queda

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} = \left\langle \frac{\dot{\mathbb{F}}}{E_A} \right\rangle \quad (5.8)$$

siendo $\langle x \rangle$ la función de Macaulay tal que $\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Integrando la ecuación (5.8), se obtiene la expresión de la deformación plástica

$$\varepsilon_p = \left\langle \frac{(\sigma)_{el} - (\sigma_{lim})_A}{E_A} \right\rangle \quad (5.9)$$

tal que la parte elástica de la deformación, definida en (5.3), queda

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p = \underbrace{\nabla^s u}_{\varepsilon = u/L} - \left\langle \frac{(\sigma)_{el} - (\sigma_{lim})_A}{E_A} \right\rangle$$

El algoritmo que se sigue para realizar el cálculo de una barra de acero elasto-plástica es el siguiente:

- Cálculo de la tensión predictora en el tiempo actual

$$(\sigma)_{el}^{t+\Delta t} = E_A \cdot \varepsilon^{t+\Delta t} \quad (5.10)$$

- Verificación de la condición de fluencia plástica:

- Si $\mathbb{F} = (\sigma)_{el}^{t+\Delta t} - (\sigma_{lim})_A < 0$ → régimen elástico
- Si $\mathbb{F} = (\sigma)_{el}^{t+\Delta t} - (\sigma_{lim})_A \geq 0$ → régimen plástico

En caso de plasticidad, cálculo de la variable interna de deformación plástica:

$$\varepsilon_p^{t+\Delta t} = \max \left\{ \varepsilon_p^t ; \left\langle \frac{(\sigma)_{el}^{t+\Delta t} - (\sigma_{lim})_A}{E_A} \right\rangle \right\} \quad (5.11)$$

- Cálculo de la tensión:

$$\sigma_A^{t+\Delta t} = E_A \cdot (\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon_p^{t+\Delta t}) \quad (5.12)$$

En una barra de acero ante una carga axial, la tensión en la misma bajo régimen elástico lineal es (Figura 5.1)

$$\sigma_A = E_A \cdot \varepsilon \tag{5.13}$$

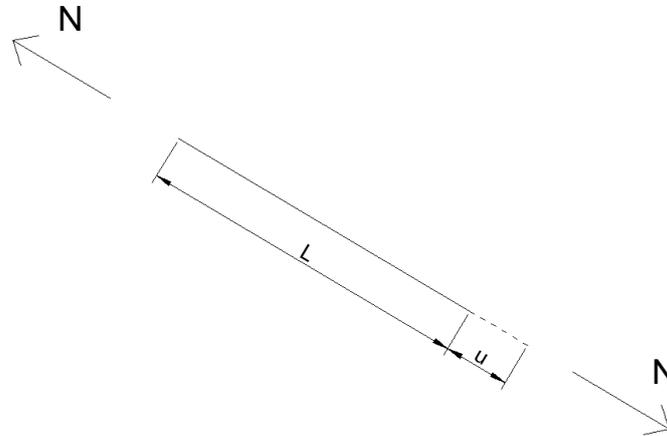


Figura 5.1. Esfuerzos en una barra de acero

donde E_A es el módulo de elasticidad del acero y ε es la deformación de la barra o variable libre del problema, que se obtiene del gradiente simétrico de los desplazamientos, $\varepsilon = \nabla^s u$, y que, en el caso simple de pequeña deformación axial, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{u}{L} \tag{5.14}$$

donde L es la longitud de la barra y u es el desplazamiento relativo que se produce entre los extremos de la barra. La tensión en la barra σ_A es

$$\sigma_A = \frac{N}{A} \tag{5.15}$$

siendo N el esfuerzo axial de la barra y A es el área de la barra. No obstante en este trabajo se considera que el comportamiento constitutivo de la barra de acero es elástico-perfectamente plástico (ver Figura 5.2).

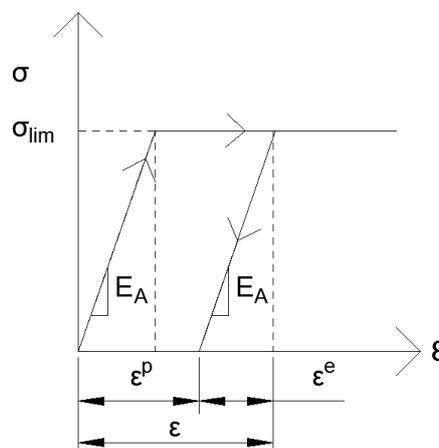


Figura 5.2. Curva simplificada tensión-deformación del acero con elasto-plasticidad perfecta

La tensión que se desarrolla en el acero, considerando el comportamiento elasto-plástico perfecto en el que no se produce endurecimiento, es

$$\sigma_A = \begin{cases} E_A \cdot \varepsilon & \text{si } E_A \cdot \varepsilon \leq (\sigma_{lim})_A \\ (\sigma_{lim})_A & \text{si } E_A \cdot \varepsilon > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.16)$$

La deformación plástica ε_p de la barra, que es la variable interna del problema, se escribe en este caso particular en la siguiente forma:

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 0 & \text{si } E_A \cdot \varepsilon \leq (\sigma_{lim})_A \\ \left\langle \frac{E_A \cdot \varepsilon - (\sigma_{lim})_A}{E_A} \right\rangle & \text{si } E_A \cdot \varepsilon > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.17)$$

y la deformación elástica de la barra, ε_e , es la diferencia entre la variable libre ε y la variable interna ε_p

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p \quad (5.18)$$

El esfuerzo axial que se desarrolla en la barra de acero bajo régimen con elasto-plasticidad perfecta se obtiene introduciendo la ecuación (5.16) en (5.15)

$$N = \begin{cases} E_A \cdot A \cdot \varepsilon & \text{si } E_A \cdot \varepsilon \leq (\sigma_{lim})_A \\ (\sigma_{lim})_A \cdot A & \text{si } E_A \cdot \varepsilon > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.19)$$

Se observa que, cuando la barra de acero plastifica, el esfuerzo axial que se desarrolla en ella es constante y ya no depende del desplazamiento que se produce en la misma.

5.1.2 Plasticidad del acero en una barra homogeneizada de hormigón armado

Se introduce en la formulación del modelo homogeneizado de barras de hormigón armado del Capítulo 3 el modelo de elasto-plasticidad perfecta del apartado anterior. Así, pues, en el caso en que se produce plasticidad en el acero longitudinal, algunas ecuaciones desarrolladas en el Capítulo 3 ya no son aplicables o deben readaptarse al nuevo modelo de comportamiento. Es necesario considerar la limitación de las tensiones que se producen al plastificar el acero en el modelo homogeneizado.

a) Comportamiento a axil de la barra. Caso sin cercos

Se expresa el equilibrio en una barra de hormigón únicamente con armadura longitudinal (ver Figuras 5.3 y 5.4).

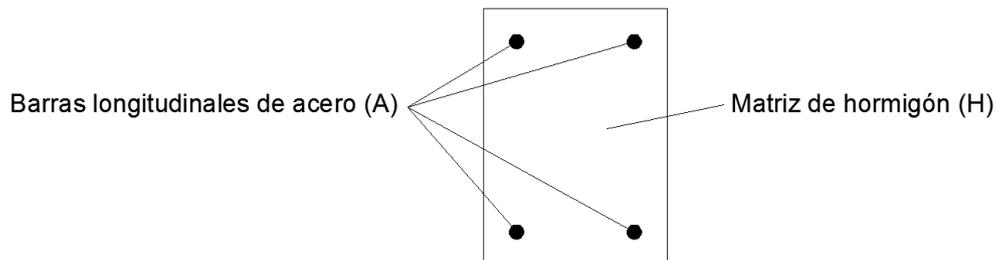


Figura 5.3. Sección de la barra

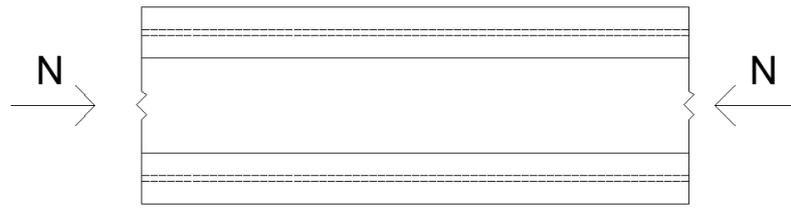


Figura 5.4. Equilibrio de la barra

Tal y como se hizo en el Capítulo 3

$$N = \sigma_A \cdot A_A + \sigma_H \cdot A_H \quad (5.20)$$

Considerando el comportamiento constitutivo del acero de la ecuación (5.16) y considerando también el comportamiento constitutivo del hormigón con daño d , tal y como se ha visto en el Capítulo 4

$$\sigma_H = E_H \cdot (1 - d) \cdot \varepsilon \quad (5.21)$$

Substituyendo (5.16) y (5.21) en (5.20), se obtiene la fuerza axial homogeneizada

$$N = \begin{cases} E_A \cdot A_A \cdot \varepsilon + E_H \cdot (1 - d) \cdot A_H \cdot \varepsilon & \text{si } E_A \cdot \varepsilon \leq (\sigma_{lim})_A \\ (\sigma_{lim})_A \cdot A_A + E_H \cdot (1 - d) \cdot A_H \cdot \varepsilon & \text{si } E_A \cdot \varepsilon > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.22)$$

Introduciendo la deformación (5.14) en (5.22) y considerando la compatibilidad entre el acero y el hormigón

$$N = \begin{cases} (E_A \cdot A_A + E_H \cdot (1 - d) \cdot A_H) \cdot \frac{1}{L} \cdot u & \text{si } E_A \cdot \varepsilon \leq (\sigma_{lim})_A \\ (\sigma_{lim})_A \cdot A_A + E_H \cdot (1 - d) \cdot A_H \cdot \frac{1}{L} \cdot u & \text{si } E_A \cdot \varepsilon > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.23)$$

Se observa en la ecuación (5.23) como, al producirse la plastificación del acero longitudinal de la barra homogeneizada, la tensión que se desarrolla en el acero queda acotada a $(\sigma_{lim})_A$. Ello limita a un cierto umbral la fuerza axial que es capaz de desarrollar el acero en la barra cuando éste plastifica. Dicho umbral de fuerza es

$$(F_{plast})_{axil} = (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \quad (5.24)$$

donde A_A es el área de las barras de acero longitudinal y $(\sigma_{lim})_A$ es la tensión del límite elástico del acero.

b) Comportamiento a flexión de la barra. Caso sin cercos

Se expresa aquí el equilibrio a flexión en una barra de hormigón con únicamente armadura longitudinal cuando el acero ha plastificado (ver Figuras 5.3 y 5.5).

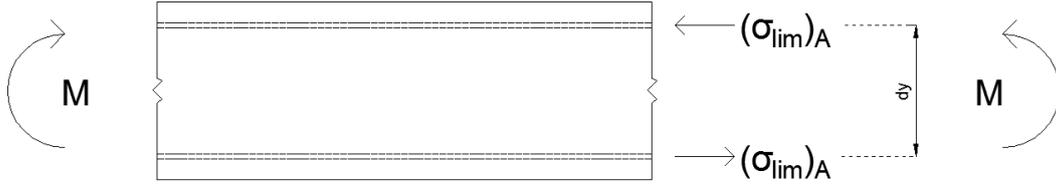


Figura 5.5. Equilibrio de la barra a flexión

En el Capítulo 3 se formuló la rigidez a flexión de la barra cuando el acero tiene un comportamiento elástico mediante las ecuaciones (3.138) y (3.139). Considerando el equilibrio de la sección (Figura 5.5), cuando la armadura longitudinal plastifica, se tiene que

$$M = E_H \cdot (I_Z)_H^{Total} \cdot \frac{1}{L} \cdot \theta + (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \cdot d_y \quad (5.25)$$

donde $(\sigma_{lim})_A$ es la tensión de plastificación del acero, A_A es el área total de las armaduras longitudinales y d_y es la distancia que hay entre las armaduras longitudinales superiores e inferiores.

En caso en que se produzca únicamente la plastificación de las armaduras longitudinales superiores o inferiores de la sección, manteniéndose las otras en régimen elástico

$$M = E_H \cdot (I_Z)_H^{Total} \cdot \frac{1}{L} \cdot \theta + E_A \cdot \frac{(I_Z)_A^{Total}}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot \theta + (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{A_A}{2} \cdot d_y \quad (5.26)$$

La ecuación (5.26) es correcta únicamente en el caso en que las armaduras superior e inferior de la sección tengan la misma área (sección simétrica). En caso contrario, es necesario adaptar la ecuación introduciendo las áreas, inercias y cantos reales, en función de cada caso.

Así, pues, el momento flector M de la barra considerando el comportamiento no lineal del acero y el daño que se puede desarrollar en el hormigón, es

$$M = \begin{cases} [E_A \cdot (I_Z)_A^{Total} + E_H \cdot (1 - d) \cdot (I_Z)_H^{Total}] \cdot \frac{1}{L} \cdot \theta & \text{si } (\sigma_A)_{el} \leq (\sigma_{lim})_A \\ E_H \cdot (1 - d) \cdot (I_Z)_H^{Total} \cdot \frac{1}{L} \cdot \theta + (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \cdot d_y & \text{si } (\sigma_A)_{el} > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.27)$$

donde $(\sigma_A)_{el}$ es la tensión predictorica elástica que se produce en el acero. Dicha tensión, en el caso en que la barra está sujeta a axil, se calcula como $(\sigma_A)_{el} = E_A \cdot \varepsilon$. No obstante, en el presente caso, en que la barra tiene un momento flector M aplicado, el predictor elástico $(\sigma_A)_{el}$ es

$$(\sigma_A)_{el} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M \cdot y}{[E_A \cdot (I_Z)_A^{Total} + E_H \cdot (I_Z)_H^{Total}]} \cdot E_G \quad (5.28)$$

Dado que la sección estudiada está compuesta de distintos materiales, es necesario usar el momento de inercia mecánico (ecuación 3.140) y el módulo de elasticidad homogeneizado de la barra E_G , determinado con la ecuación (3.15). Además, de acuerdo con lo indicado en la Figura 5.5, la altura y a la que se encuentra la armadura es en este caso igual a la mitad de d_y

$$y = \frac{d_y}{2} \rightarrow (\sigma_A)_{el} = \frac{M \cdot d_y}{2 \cdot I} = \frac{M \cdot d_y}{2 \cdot [E_A \cdot (I_Z)_A^{Total} + E_H \cdot (I_Z)_H^{Total}]} \cdot E_G \quad (5.29)$$

Se observa en la ecuación (5.27) como, al producirse la plastificación del acero longitudinal de la barra homogeneizada, la tensión que se desarrolla en el acero queda acotada a $(\sigma_{lim})_A$. Ello limita umbral el momento flector que es capaz de desarrollar el acero en la barra cuando éste plastifica a un cierto umbral. Dicho umbral es

$$(M_{plast}) = (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \cdot d_y \quad (5.30)$$

donde A_A es el área de las barras de acero longitudinal, d_y es la distancia que hay entre las armaduras superiores e inferiores y $(\sigma_{lim})_A$ es la tensión del límite elástico del acero.

c) Comportamiento a cortante de la barra. Caso sin cercos

Se escribe el equilibrio a cortante en una barra de hormigón únicamente con armadura longitudinal cuando el acero ha plastificado (ver Figuras 5.3 y 5.6).

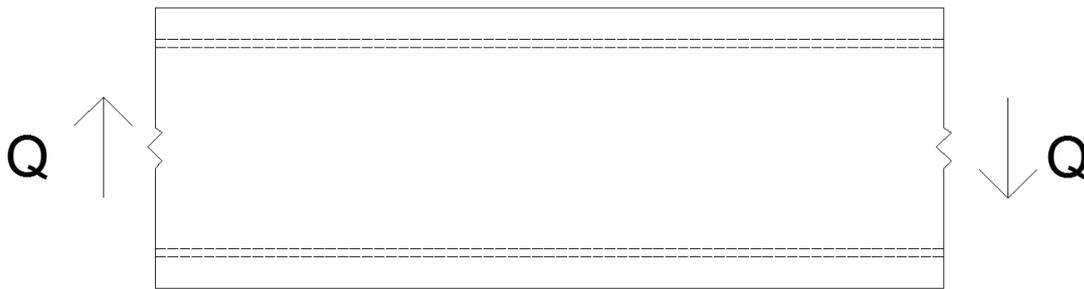


Figura 5.6. Equilibrio de la barra a cortante

Escribiendo el equilibrio en la sección se tiene

$$Q = Q_H + Q_A = \tau_A \cdot A_A + \tau_H \cdot A_H \quad (5.31)$$

La rigidez a cortante de la barra, cuando el acero tiene un comportamiento elástico, viene dada por las ecuaciones (3.173) y (3.174). Cuando la armadura longitudinal ha plastificado, el cálculo correcto de la barra a cortante pasa por considerar

$$Q = \int_A \tau(y) dA \quad (5.32)$$

donde $\tau(y)$ es la tensión cortante en la sección de la barra, que es variable en función de la posición del punto considerado en la sección (ver Figura 5.7). Dicha tensión cortante se determina con la fórmula de Collignon

$$\tau = \frac{Q \cdot m(y)}{I \cdot b(y)} \quad (5.33)$$

donde Q es el esfuerzo cortante de la sección, $m(y)$ es el primer momento de área, I es la inercia de la sección y $b(y)$ es el ancho de la sección a una cierta altura y de la sección.

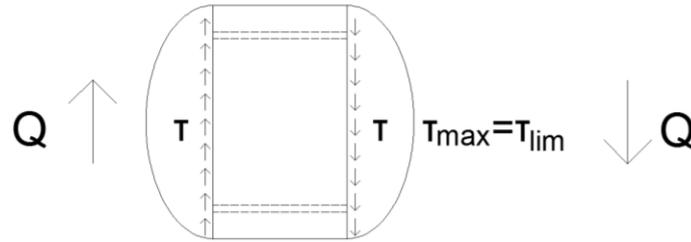


Figura 5.7. Distribución del esfuerzo cortante en la sección

Para realizar el cálculo del esfuerzo cortante para una sección de materiales compuestos, es necesario utilizar la formulación del Anejo 2, en función de las propiedades del hormigón y del acero, teniendo además que considerar en el modelo constitutivo del acero la limitación del esfuerzo cortante cuando éste plastifica

$$\tau_A = \begin{cases} G_A \cdot \gamma & \text{si } (\tau_A)_{el} \leq (\tau_{lim})_A \\ (\tau)_{lim A} & \text{si } (\tau_A)_{el} > (\tau_{lim})_A \end{cases} \quad (5.34)$$

siendo γ la deformación a cortante del acero, G_A su módulo de elasticidad y $(\tau)_{lim A}$ su tensión límite a cortante cuando el acero plastifica. Además, $(\tau_A)_{el}$ es el predictor elástico de la tensión a cortante del acero, que se determina mediante la ecuación

$$(\tau_A)_{el} = G_A \cdot \gamma \quad (5.35)$$

Para agilizar y simplificar el cálculo de la estructura considerando la plastificación del acero, en este trabajo se ha realizado la simplificación de considerar el esfuerzo cortante medio de la sección, tal y como se observa en la Figura 5.8, considerando, además, el área reducida a cortante de la sección.

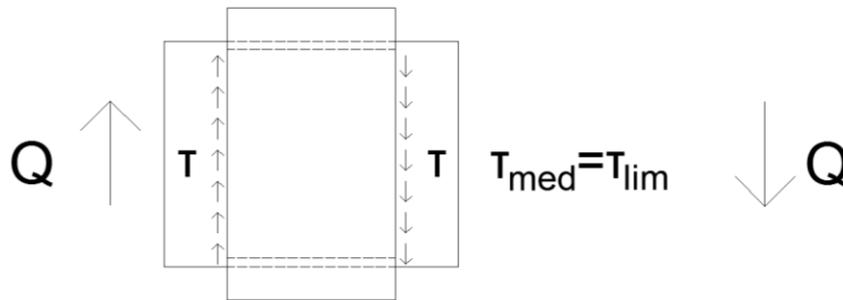


Figura 5.8. Distribución simplificada del esfuerzo cortante en la sección

Cuando la armadura longitudinal plastifica, la ecuación (5.31) se reescribe como

$$Q = Q_H + Q_A = (\tau_{lim})_A \cdot A_A + \tau_H \cdot A_H \quad (5.36)$$

donde $(\tau_{lim})_A$ es la tensión límite de plastificación del acero a cortante. Dicha tensión se puede obtener usando el círculo de Mohr para un caso de tensión uniaxial (véase la Figura 5.9).

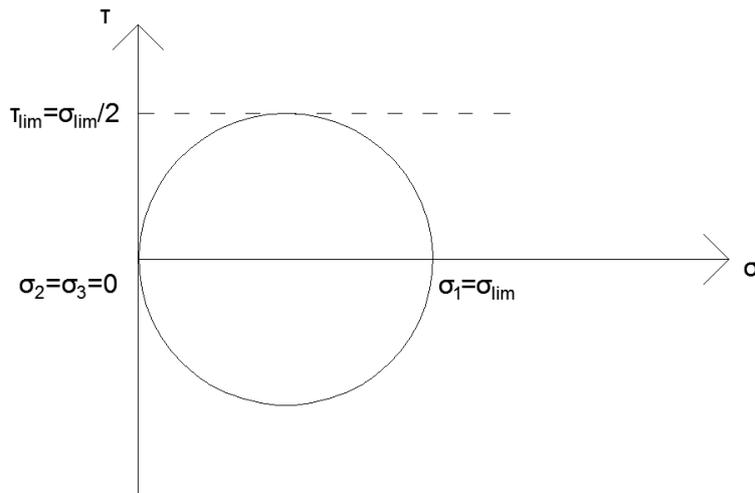


Figura 5.9. Círculo de Mohr. Tensión uniaxial

De la Figura 5.9 se obtiene

$$(\tau_{lim})_A = \frac{(\sigma_{lim})_A}{2} \quad (5.37)$$

siendo $(\sigma_{lim})_A$ la tensión de plastificación del acero a tracción y a compresión. Dicho resultado coincide con la teoría de Von Mises, que se utiliza habitualmente para el acero.

De forma general, el equilibrio a cortante de la sección, considerando el comportamiento no lineal del acero, así como el daño que se desarrolla en el hormigón, es

$$Q = \begin{cases} [G_A \cdot (A_A^{Total})^* + G_H \cdot (1 - d) \cdot (A_H^{Total})^*] \cdot \frac{1}{L} \cdot v & \text{si } (\tau_A)_{el} \leq (\tau_{lim})_A \\ (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})^* + G_H \cdot (1 - d) \cdot (A_H^{Total})^* \cdot \frac{1}{L} \cdot v & \text{si } (\tau_A)_{el} > (\tau_{lim})_A \end{cases} \quad (5.38)$$

donde $(A_A^{Total})^*$ y $(A_H^{Total})^*$ son las áreas reducidas de cortante de la sección, según lo explicado en el Capítulo 3 y donde v es el desplazamiento producido por el cortante.

Obsérvese que en el presente trabajo se realiza la simplificación de considerar la misma área reducida de cortante para el acero cuando ésta se encuentra en régimen lineal y cuando ésta plastifica. En realidad, el valor del área de cortante varía al plastificar las barras. No obstante, se considera que la simplificación introducida al considerar que el valor no varía no produce un error significativo.

En la fórmula (5.38) se hace la hipótesis de que el acero plastifica por el efecto del esfuerzo cortante. No obstante, en el caso en que la barra se encuentre sometida también a esfuerzos axiales o flectores, es posible que el acero plastifique antes de acuerdo con los criterios establecidos anteriormente. Por lo tanto, en el programa desarrollado en este trabajo se ha considerado dicha posibilidad, introduciendo criterios de plastificación distintos para el acero. De forma más general, se podría introducir en un futuro un criterio de plastificación tridimensional del acero, que pueda considerar todas las combinaciones de esfuerzos posibles.

Una vez más, se observa en la ecuación (5.38) como, al producirse la plastificación del acero longitudinal de la barra homogeneizada, la tensión cortante que se desarrolla en el acero queda acotada a $(\tau_{lim})_A$. Ello limita a un cierto umbral el esfuerzo cortante que es capaz de desarrollar el acero en la barra cuando éste plastifica. Dicho umbral de esfuerzo cortante es

$$(Q_{plast}) = (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})^* \quad (5.39)$$

donde A_A es el área reducida a cortante de las barras de acero longitudinal y $(\tau_{lim})_A$ es la tensión cortante del límite elástico del acero, determinado mediante (5.37).

d) Comportamiento a axil de la barra. Caso con cercos

• **Barra de sección cuadrada – caso simple**

En el caso con cercos, la plasticidad puede desarrollarse también en éstos, alterando el equilibrio de la barra. De forma análoga al caso de la armadura longitudinal, la tensión desarrollada en el cerco está acotada por el valor de la tensión en el límite elástico. Ello altera el confinamiento que se podría haber producido si se considerase el acero como un material con comportamiento lineal elástico. Es necesario, por lo tanto, cambiar parte de la formulación desarrollada en el Capítulo 3 para introducir el efecto de la plastificación de los cercos.

La ecuación (3.24) referente al modelo constitutivo del cerco ya no se verifica. En su lugar es necesario considerar

$$\sigma_{cerco} = \begin{cases} -E_A \cdot \varepsilon_{lat} & \text{si } E_A \cdot \varepsilon_{lat} \leq (\sigma_{lim})_A \\ -(\sigma_{lim})_A & \text{si } E_A \cdot \varepsilon_{lat} > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.40)$$

Por lo tanto, la tensión lateral que se desarrolla en la barra es, en vez de lo indicado en (3.29)

$$\sigma_{lat} = B \cdot \sigma_{cerco} = \begin{cases} -B \cdot E_A \cdot \varepsilon_{lat} & \text{si } -E_A \cdot \varepsilon_{lat} \leq (\sigma_{lim})_A \\ -B \cdot (\sigma_{lim})_A & \text{si } -E_A \cdot \varepsilon_{lat} > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.41)$$

El parámetro B se corresponde al definido por la ecuación (3.28). Cabe destacar que se ha realizado la hipótesis de que la plastificación de los cercos no afecta al reparto de fuerzas que se produce entre el cerco y la barra, por lo que la ecuación del parámetro B no varía. En realidad, el parámetro B , que determina el reparto de tensiones entre la barra y el cerco, sí que varía al dañarse el hormigón y al alterarse el equilibrio de tensiones internas en la barra. Dicha variación en el equilibrio interno de las tensiones es muy compleja y difícil de determinar para estados avanzados de daño del hormigón y, por ello, se ha considerado aquí, de manera simplificada, que el coeficiente B permanece constante. El valor de dicho parámetro se verá afectado por los mecanismos de transmisión de tensiones y de fallo en la barra que se desarrollen para estados de degradación avanzada del hormigón. Así, pues, en el caso en que el cerco mantiene su linealidad, el comportamiento de la barra será el indicado en el Capítulo 3. A continuación se realiza el mismo desarrollo para determinar la deformación longitudinal de la barra homogeneizada que en el Capítulo 3, pero substituyendo las ecuaciones (3.24) y (3.29) por (5.40) y (5.41) para poder efectuar el cálculo de la estructura cuando plastifican los cercos. La expresión de la deformación longitudinal de la barra para este caso se obtiene substituyendo la ecuación (5.41) en (3.21)

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{long} - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot (-B \cdot (\sigma_{lim})_A) \quad (5.42)$$

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{long} + \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot B \cdot (\sigma_{lim})_A \quad (5.43)$$

Substituyendo (3.33) en (5.43) se obtiene

$$N = A_G \cdot E_G \cdot \varepsilon_{long} - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot B \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G \quad (5.44)$$

y, tomando $\varepsilon_{long} = u/L$ (ecuación (3.11), se obtiene

$$N = A_G \cdot E_G \cdot \frac{u}{L} - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot B \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G \quad (5.45)$$

Combinando la ecuación (5.45), correspondiente al caso en que el acero ha plastificado, con la ecuación (3.48) obtenida en el Capítulo 3 para el caso del acero no plastificado, se tiene

$$N = \begin{cases} \frac{A_G \cdot E_G}{S} \cdot \frac{u}{L} & \text{si } (\sigma_A)_{el\ cerco} < (\sigma_{lim})_A \\ A_G \cdot E_G \cdot \frac{u}{L} - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot B \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G & \text{si } (\sigma_A)_{el\ cerco} \geq (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.46)$$

Se observa en la ecuación (5.46) como, al plastificar el cerco, el axil ya no depende del coeficiente S de la ecuación (3.50). Obviamente, al producirse la plastificación del cerco, la tensión desarrollada por éste se limita a $(\sigma_{lim})_A$. Ello limita a un cierto umbral la fuerza axil que son capaces de desarrollar los cercos plastificados en la barra. Dicho umbral de fuerza es

$$(F_{plast})_{axil\ con\ cerco} = -\frac{2\nu_z}{E_L} \cdot B \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G \quad (5.47)$$

donde ν_z es el coeficiente de Poisson definido en (3.52), E_L es el módulo de elasticidad lateral homogeneizado de la barra según (3.60), B es el coeficiente descrito en (3.28), $(\sigma_{lim})_A$ es la tensión del límite elástico del acero, A_G es el área total de la sección y E_G es el módulo de elasticidad homogeneizado, obtenido con (3.15).

Es posible que, en algún momento, la armadura longitudinal y los cercos se encuentren plastificados a la vez. En ese caso, combinando (5.46) con (5.23) se obtiene

$$N = (\sigma_{lim})_A \cdot A_A + E_H \cdot (1 - d) \cdot A_H \cdot \frac{1}{L} \cdot u - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot B \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G \quad (5.48)$$

Al plastificar tanto la armadura longitudinal como los cercos, la tensión que se desarrolla en ambas queda acotada a $(\sigma_{lim})_A$. En ese caso, la fuerza umbral total que es capaz de desarrollar el acero en la barra metálica es la suma de las correspondientes fuerzas umbrales de ambos elementos, resultando

$$F_{plast} = (\sigma_{lim})_A \cdot A_A - \frac{2\nu_z}{E_L} \cdot B \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G \quad (5.49)$$

Cabe destacar que la fuerza que se desarrolla en la barra por la plastificación de los cercos lleva signo negativo porque, cuando el esfuerzo axil que se aplica es de compresión, la tensión límite alcanzada por el cerco $(\sigma_{lim})_A$ es positiva al encontrarse éste traccionado y la fuerza umbral de la ecuación (5.47) es negativa, tal y como era de esperar. En cambio, cuando el esfuerzo axil es de tracción, la tensión límite $(\sigma_{lim})_A$ es negativa por estar el cerco comprimido y la fuerza umbral de la ecuación (5.47) que se produce en la barra es positiva. No obstante, a tracción, el daño en el hormigón se produce de forma mucho más rápida y brusca y el confinamiento no actúa.

- **Barra de sección rectangular**

Para una barra de sección rectangular, de forma análoga al caso de barras con secciones cuadradas, la ecuación (3.72) referente al modelo constitutivo del cerco ya no se verifica y, en su lugar, es necesario considerar

$$\sigma_{cerco X} = \begin{cases} -E_A \cdot \varepsilon_{lat X} & \text{si } E_A \cdot \varepsilon_{lat X} \leq (\sigma_{lim})_A \\ -(\sigma_{lim})_A & \text{si } E_A \cdot \varepsilon_{lat X} > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.50)$$

$$\sigma_{cerco Y} = \begin{cases} -E_A \cdot \varepsilon_{lat Y} & \text{si } E_A \cdot \varepsilon_{lat Y} \leq (\sigma_{lim})_A \\ -(\sigma_{lim})_A & \text{si } E_A \cdot \varepsilon_{lat Y} > (\sigma_{lim})_A \end{cases}$$

Por lo tanto, la tensión lateral que se desarrolla en la barra es, en vez de lo indicado en (3.77)

$$\sigma_{lat X} = B_X \cdot \sigma_{cerco X} = \begin{cases} -B_X \cdot E_A \cdot \varepsilon_{lat X} & \text{si } -E_A \cdot \varepsilon_{lat X} \leq (\sigma_{lim})_A \\ -B_X \cdot (\sigma_{lim})_A & \text{si } -E_A \cdot \varepsilon_{lat X} > (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\sigma_{lat Y} = B_Y \cdot \sigma_{cerco Y} = \begin{cases} -B_Y \cdot E_A \cdot \varepsilon_{lat Y} & \text{si } -E_A \cdot \varepsilon_{lat Y} \leq (\sigma_{lim})_A \\ -B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A & \text{si } -E_A \cdot \varepsilon_{lat Y} > (\sigma_{lim})_A \end{cases}$$

Los parámetros B_X y B_Y se corresponden a los determinados en la ecuación (3.76) puesto que se ha realizado igual que en el caso de sección cuadrada la hipótesis de que la plastificación de los cercos no afecta al reparto de fuerzas que se produce entre el cerco y la barra, por lo que la ecuación de los mencionados parámetros no varía.

En el caso en que el cerco mantiene su linealidad, el comportamiento de la barra será el indicado en el desarrollo del Capítulo 3. A continuación se substituyen las ecuaciones (3.72) y (3.77) por (5.50) y (5.51) para poder formular el cálculo de la estructura cuando plastifican los cercos. La expresión de la deformación longitudinal de la barra homogeneizada cuando los cercos han plastificado se obtiene substituyendo (5.51) en la expresión (3.69)

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \sigma_{long} - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot (-B_X \cdot (\sigma_{lim})_A) - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot (-B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A) \quad (5.52)$$

Introduciendo (3.33) en (5.52)

$$\varepsilon_{long} = \frac{1}{E_G} \cdot \frac{N}{A_G} + \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \quad (5.53)$$

$$N = E_G \cdot A_G \cdot \varepsilon_{long} - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G \quad (5.54)$$

e introduciendo (3.11) en (5.54)

$$N = \frac{E_G \cdot A_G}{L} \cdot u - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G \quad (5.55)$$

Combinando la ecuación (5.55), correspondiente al caso en que el acero ha plastificado, con la ecuación (3.104), se tiene

$$N = \begin{cases} \frac{A_G \cdot E_G}{S} \cdot \frac{u}{L} & \text{si } (\sigma_A)_{el\ cerco} < (\sigma_{lim})_A \\ A_G \cdot E_G \cdot \frac{u}{L} - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G & \text{si } (\sigma_A)_{el\ cerco} \geq (\sigma_{lim})_A \end{cases} \quad (5.56)$$

Se observa en la ecuación (5.56) como, al plastificar el cerco, el axil ya no depende del coeficiente S de la ecuación (3.104). Una vez más, al producirse la plastificación del cerco la tensión desarrollada por éste se limita a $(\sigma_{lim})_A$. Ello limita a un cierto umbral la fuerza axil que son capaces de desarrollar los cercos plastificados en la barra. Dicho umbral de fuerza es

$$(F_{plast})_{axil\ con\ cerco} = - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G \quad (5.57)$$

donde ν_{cx} y ν_{cy} son los coeficientes de Poisson definidos en (3.121), E_x y E_y son los módulos de elasticidad laterales homogeneizados de la barra según (3.115) y (3.116), B_x y B_y son los coeficientes descritos en (3.76), $(\sigma_{lim})_A$ es la tensión del límite elástico del acero, A_G es el área total de la sección y E_G es el módulo de elasticidad homogeneizado, obtenido mediante (3.15).

Es posible que en algún momento la armadura longitudinal y los cercos se encuentren plastificados a la vez. En ese caso, combinando (5.56) y (5.23), se obtiene

$$N = (\sigma_{lim})_A \cdot A_A + E_H \cdot (1 - d) \cdot A_H \cdot \frac{1}{L} \cdot u - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G \quad (5.58)$$

por lo que, al plastificar tanto la armadura longitudinal como el cerco, la tensión que se desarrolla en ambos queda acotada por $(\sigma_{lim})_A$. La fuerza umbral total que es capaz de desarrollar el acero en la barra metálica es la suma de las correspondientes fuerzas umbrales de ambos elementos

$$F_{plast} = (\sigma_{lim})_A \cdot A_A - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \cdot A_G \quad (5.59)$$

Obviamente debe destacarse que la fuerza que se desarrolla en la barra por la plastificación de los cercos lleva signo negativo porque cuando el esfuerzo axil que se aplica es de compresión, la tensión límite alcanzada por el cerco $(\sigma_{lim})_A$ es positiva porque éste se encuentra traccionado, de forma que la fuerza umbral de la ecuación (5.57) también es negativa, tal y como era de esperar. En cambio, cuando el esfuerzo axil es de tracción, la tensión límite $(\sigma_{lim})_A$ es negativa por estar el cerco comprimido y la fuerza umbral de la ecuación (5.57) que se produce en la barra es positiva. No obstante, a tracción el daño en el hormigón se produce de forma mucho más rápida y brusca al y el confinamiento no actúa.

e) Comportamiento a flexión de la barra. Caso con cercos

Para considerar el efecto de los cercos plastificados en la respuesta a flexión de la barra, se utiliza el mismo razonamiento que el utilizado en el Capítulo 3 para el caso del cerco todavía elástico (ver Figura 5.10).

Partiendo de la ecuación (5.54) en la que se sustituye (3.33), se obtiene la tensión longitudinal de la barra σ_{long} en función de la deformación longitudinal ε_{long} en el caso en que plastifican los cercos

$$\sigma_{long} = E_G \cdot \varepsilon_{long} - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \quad (5.60)$$

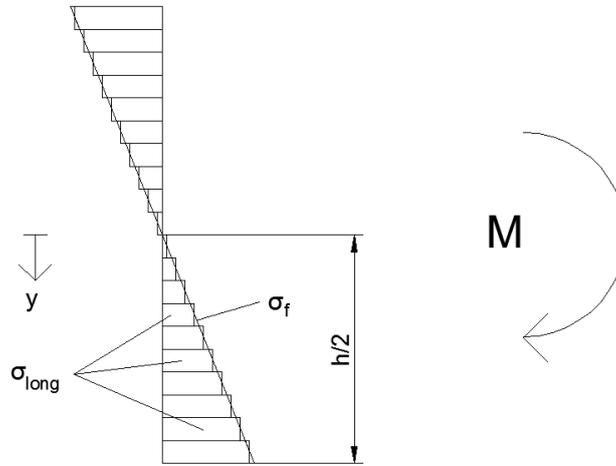


Figura 5.10. Descomposición de la sección en capas

En un punto a la distancia y del eje neutro la tensión producida por el momento es

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad (3.141)$$

Sin embargo, considerando la descomposición de la sección por capas (ver Figura 5.10), dicha tensión se puede igualar con la ecuación (5.60) para cada capa, tomando además el valor de la inercia de la sección compuesta de la ecuación (3.140)

$$\frac{M \cdot y}{I_G} = E_G \cdot \varepsilon_{long} - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot E_G \quad (5.61)$$

$$M = I_G \cdot E_G \cdot \frac{\varepsilon_{long}}{y} - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \quad (5.62)$$

La curvatura de la capa es tal que $\chi = \frac{\varepsilon_{long}}{y}$, por lo que la ecuación anterior queda

$$M = I_G \cdot E_G \cdot \chi - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \quad (5.63)$$

Es posible considerar que toda la sección de la barra tiene una curvatura constante, por lo que el momento que se desarrolla en la sección, tomando $\chi = \frac{\theta}{L}$, es

$$M = \frac{I_G \cdot E_G}{L} \cdot \theta - \frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} - \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \quad (5.64)$$

Combinando la ecuación (5.64), correspondiente al caso en que el acero ha plastificado, con la ecuación (3.150), obtenida en el Capítulo 3, para el caso del acero no plastificado, se tiene

$$M = \frac{E_G I_G \cdot \theta}{S \cdot L} \quad \text{si } (\sigma_A)_{el\ cerco} < (\sigma_{lim})_A$$

$$M = \frac{I_G \cdot E_G}{L} \cdot \theta - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \quad \text{si } (\sigma_A)_{el\ cerco} \geq (\sigma_{lim})_A \quad (5.65)$$

Se observa en la ecuación (5.65) como, al plastificar el cerco, la ecuación de la rigidez ya no depende del coeficiente S de la ecuación (3.104). Al producirse la plastificación del cerco, la tensión desarrollada por éste se limita a $(\sigma_{lim})_A$. Ello limita a un cierto umbral el momento flector que es capaz de desarrollarse por haber plastificado el cerco en la barra. Dicho umbral de momento flector es

$$(M_{plast})_{cerco} = - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \quad (5.66)$$

donde ν_{cx} y ν_{cy} son los coeficientes de Poisson definidos en (3.121), E_x y E_y son los módulos de elasticidad laterales homogeneizados de la barra según (3.115) y (3.116), B_x y B_y son los coeficientes descritos en (3.76), $(\sigma_{lim})_A$ es la tensión del límite elástico del acero, A_G es el área total de la sección, I_G es la inercia homogeneizada, obtenido mediante (3.140) e y es la distancia del punto considerado al eje neutro.

Es posible que, en algún momento, la armadura longitudinal y los cercos se encuentren plastificados a la vez. En ese caso, combinando (5.65) y (5.25), se tiene

$$M = E_H \cdot (I_Z)_H^{Total} \cdot \frac{1}{L} \cdot \theta + (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \cdot dy - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \quad (5.67)$$

Al plastificar tanto la armadura longitudinal como el cerco, la tensión que se desarrolla en ambos queda acotada por $(\sigma_{lim})_A$. En ese caso, el momento flector umbral total que es capaz de desarrollar el acero en la barra es la suma de las correspondientes fuerzas umbrales de ambos elementos, resultando

$$M_{plast} = (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \cdot dy - \left(\frac{\nu_{cx}}{E_x} \cdot B_x + \frac{\nu_{cy}}{E_y} \cdot B_y \right) \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \quad (5.68)$$

f) Comportamiento a cortante de la barra. Caso con cercos

En este caso, el equilibrio de la sección se escribe de la siguiente forma

$$Q = Q_H + Q_{A,Long} + Q_{A,cerco} = \tau_{A,Long} \cdot A_{A,Long} + \tau_{A,Cerco} \cdot A_{A,Cerco} + \tau_H \cdot A_H \quad (5.69)$$

La rigidez a cortante de la barra cuando el acero tiene un comportamiento elástico viene dado por las ecuaciones (3.185) y (3.186).

Se considera de nuevo la simplificación realizada sobre el comportamiento del acero plastificado sujeto a esfuerzo cortante que se ha descrito anteriormente para el comportamiento a cortante sin cercos. Para agilizar y simplificar el cálculo de la estructura considerando la plastificación del acero, en este trabajo se ha realizado la simplificación de considerar el esfuerzo cortante medio de la sección considerando, además, el área reducida a cortante de la sección.

El equilibrio de la sección, de acuerdo con la ecuación (5.69), cuando la armadura longitudinal y los cercos plastifican, se escribe de la siguiente forma:

$$Q = (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* + (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{cerco}^* + G_H \cdot (A_H^{Total})^* \cdot \frac{1}{L} \cdot v \quad (5.70)$$

donde $(A_A^{Total})^*$ y $(A_H^{Total})^*$ son las áreas reducidas de cortante de la sección, según lo explicado en el apartado 3.1.4, $(A_A^{Total})_{cerco}^*$ es el área equivalente de cortante por la presencia de los cercos de la ecuación (3.197) y v es el desplazamiento producido por el cortante.

Se observa en la ecuación (5.70) como, al producirse la plastificación del acero longitudinal y de los cercos a la vez, la tensión cortante en el cerco queda acotada a $(\tau_{lim})_A$. Ello limita a un cierto umbral el esfuerzo cortante que es capaz de desarrollar el acero en la barra cuando éste plastifica. Dicho umbral de esfuerzo cortante es

$$(Q_{plast}) = (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* + (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{cerco}^* \quad (5.71)$$

donde $(A_A^{Total})_{Long}^*$ es el área reducida de cortante de las barras de acero longitudinal, $(A_A^{Total})_{cerco}^*$ el área reducida de cortante de los cercos definida por (3.197) y $(\tau_{lim})_A$ es la tensión cortante del límite de plastificación del acero, determinado según (5.37).

Cuando plastifica únicamente la armadura longitudinal mientras que los cercos siguen teniendo comportamiento elástico, se utiliza

$$Q = (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* + \left[G_A \cdot (A_A^{Total})_{cerco}^* + G_H \cdot (A_H^{Total})^* \right] \cdot \frac{1}{L} \cdot v \quad (5.72)$$

Se observa en la ecuación (5.72) como, al producirse la plastificación del acero longitudinal de la barra homogeneizada, la tensión cortante que se desarrolla en el acero queda acotada a $(\tau_{lim})_A$. Ello limita a un cierto umbral el esfuerzo cortante que es capaz de desarrollar el acero en la barra cuando éste plastifica. Dicho umbral de esfuerzo cortante es

$$(Q_{plast}) = (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* \quad (5.73)$$

donde $(A_A^{Total})_{Long}^*$ es el área reducida de cortante de las barras de acero longitudinal y $(\tau_{lim})_A$ es la tensión cortante del límite elástico del acero, determinado según (5.37). En cambio, el cerco, al no haber plastificado, sigue teniendo un comportamiento lineal.

5.2 Equilibrio estructural

En los apartados anteriores se ha indicado el cálculo a seguir para considerar el comportamiento elasto-plástico del acero. Se ha procedido a limitar la tensión del acero de todas las armaduras, tanto las longitudinales como los cercos, de forma que no se supere la tensión del límite elástico del acero. Para calcular la estructura, se realiza el cálculo con la rigidez homogeneizada, tal y como se observa en la ecuación siguiente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{Hom} \cdot \mathbf{u} \quad (5.74)$$

Donde \mathbf{F} es el vector de fuerzas de la estructura, \mathbf{u} su vector de desplazamientos y \mathbf{K}^{Hom} es la matriz de rigidez global de la estructura, que se obtiene de realizar el ensamble de las matrices de rigidez de todas sus barras, estando descrita cada una de ellas por la ecuación (3.201). Para poder resolver la ecuación (5.74) es necesario reducir el sistema aplicando las condiciones de contorno que tenga la estructura.

Sin embargo, en caso de producirse plastificación se conoce la tensión límite del acero y, por lo tanto, también es conocido el valor de la fuerza desarrollado por el acero. Utilizando la formulación desarrollada en el presente capítulo, es posible considerar un vector de 6 componentes de las barras, que contienen las fuerzas umbrales del acero que se producen cuando éste plastifica (ver Figura 5.11)

$$(\mathbf{F}_{plast})_{A,Long} = \begin{pmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \\ (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* \\ (\sigma_{lim})_A \cdot A_A \cdot d_y \\ -(\sigma_{lim})_A \cdot A_A \\ -(\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{Long}^* \\ -(\sigma_{lim})_A \cdot A_A \cdot d_y \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

$$\mathbf{F}_{A,Cerc} = \begin{pmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_{cx}}{E_X} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G - \frac{v_{cy}}{E_Y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G \\ (\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{cerc}^* \\ -\frac{v_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} - \frac{v_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \\ \frac{v_{cx}}{E_X} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G + \frac{v_{cy}}{E_Y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot A_G \cdot E_G \\ -(\tau_{lim})_A \cdot (A_A^{Total})_{cerc}^* \\ \left(\frac{v_{cx}}{E_x} \cdot B_X \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} + \frac{v_{cy}}{E_y} \cdot B_Y \cdot (\sigma_{lim})_A \cdot \frac{E_G \cdot I_G}{y} \right) \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

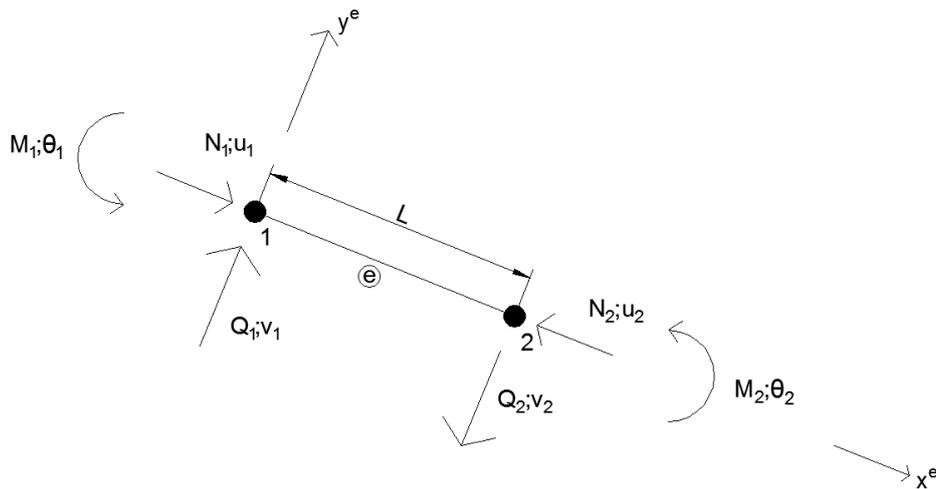


Figura 5.11. Esfuerzos en la barra

Se observa que la fuerza de plastificación de los cercos a flexión depende de la posición en la sección de acuerdo con la ecuación (5.76). Para el tratamiento de la plasticidad de los cercos a flexión no es posible, como se ha hecho para el daño del hormigón, introducir una simplificación análoga al daño medio seccional para mejorar la eficiencia computacional. Por lo tanto, para los

ejemplos de cálculo en los que la estructura trabaje a flexión del Capítulo 6, se ha introducido únicamente la plastificación de la armadura longitudinal en el modelo de cálculo y se ha supuesto que los cercos tienen un comportamiento lineal. Cuando se produce únicamente compresión, y se tiene, por lo tanto, una tensión constante en todas las secciones, el tratamiento no requiere necesariamente de la descomposición en capas de cada una de las secciones, por lo que no es necesaria la posterior recomposición de las tensiones de acuerdo con lo expresado en el Capítulo 4. En cambio, para los casos con flexión, se pueden dar situaciones en que, por el estado de tensiones que se desarrolla en la barra, únicamente una parte del cerco se encuentre plastificada mientras que el resto sigue estando en régimen lineal. En ese caso, la recomposición de las tensiones de la sección presenta la dificultad adicional de tener que considerar 2 leyes de comportamiento distintas para el acero en función del punto de la sección considerado.

Se observa en las ecuaciones (5.47) y (5.57) que la fuerza umbral que se produce por la plastificación de los cercos varía en función de la cuantía de cercos, de forma que la fuerza umbral a la que llega la estructura es mayor si aumenta dicha cuantía. No obstante, en la realidad, para estados avanzados de degradación del hormigón de la barra, el efecto del confinamiento producido por los cercos deja de producirse. Efectivamente, cuando todo el hormigón se encuentra completamente dañado, la rigidez de la barra corresponde únicamente a la aportada por las armaduras longitudinales, hayan o no plastificado. La función de los cercos es confinar el hormigón de forma que, cuando éste está completamente dañado, los cercos ya no producen efecto alguno en la barra. Para estados avanzados de degradación del hormigón, el comportamiento real de la barra se aleja del que se consideró en el Capítulo 3. Notablemente, el equilibrio en el interior de la barra, afectado por la presencia de los cercos ya no es el mismo que cuando el comportamiento del hormigón era considerado lineal y, por lo tanto, dejan de ser adecuadas las ecuaciones (3.27) y (3.75), utilizadas en el modelo desarrollado en el presente trabajo.

Además, cabe destacar que el modelo desarrollado en el Capítulo 3 considera una distribución constante de las tensiones de confinamiento, tratando la presencia de los cercos de forma análoga a un encamisado metálico exterior. Por esta razón, se llega a desarrollar una fuerza umbral constante, de forma similar a la que se produciría en la realidad en el encamisado, aunque todo el hormigón se encuentre completamente dañado en su interior. En ese caso sí que sería correcto que la respuesta de la estructura desarrollara un umbral de fuerza constante para niveles de degradación avanzada del hormigón. Pero, en el caso de los cercos, dicho comportamiento no se llega a desarrollar porque, como ya se ha explicado, al deteriorarse completamente el hormigón el confinamiento de los cercos ya no se produce.

Por lo tanto, se ha considerado más correcto calcular los ejemplos del Capítulo 6 considerando que al plastificar los cercos estos dejan de confinar el hormigón de la barra. Ello se ha hecho porque se ha considerado que, cuando esto ocurre el hormigón se encuentra tan dañado que ya no se considera adecuado considerar que los cercos siguen produciendo confinamiento igual que antes, aunque estos sigan estando presentes.

5.3 Equilibrio de estructuras de barras de hormigón armado con cercos incluyendo el daño del hormigón y la plasticidad de las armaduras

Una vez definido el comportamiento de una barra de hormigón armado homogeneizado y el tratamiento de la no linealidad de los materiales, en este apartado se expone el procedimiento implementado para realizar el cálculo no lineal de la estructura. Para ello, se utiliza el procedimiento de linealización de Newton-Raphson presentado en el apartado 4.3. Partiendo de la formulación del modelo lineal en una dimensión desarrollada en el Capítulo 3, se introducen los procedimientos de cálculo adecuados para considerar el daño en el hormigón según lo expuesto en el Capítulo 4 y la plasticidad del acero tal y como se ha explicado en el presente

capítulo. Así, el programa es capaz de considerar el comportamiento no lineal de todos los materiales que intervienen en el problema. De esta forma, se calcula la estructura considerando su no linealidad utilizando el diagrama de flujo de la Figura 5.12. El algoritmo del cálculo para el modelo unidimensional es el siguiente

- Introducción de la geometría, las condiciones de contorno y las fuerzas externas F_{ext} de la estructura.
- Introducción de las propiedades de los materiales componentes, hormigón y acero.
- Modelo de homogeneización del hormigón armado. Cálculo de la rigidez inicial (Capítulo 3, ecuación 3.201).
- Cálculo de la estructura aplicando incrementos de fuerzas. Para cada incremento de fuerzas:
 - Resolución de la ecuación no lineal de la estructura (5.74) mediante el método de Newton-Raphson según lo expuesto en los apartados 4.2 y 4.3 (ecuaciones 4.22 y 4.29).
 - Cálculo del desplazamiento total de la estructura mediante la ecuación (4.30).
 - Descomposición por capas de las secciones de la estructura. Cálculo de los esfuerzos predictores elásticos para el hormigón y el acero en la sección considerada. Para cada capa:
 - Cálculo de las tensiones homogeneizadas σ^{Hom} de la barra de hormigón armado utilizando las ecuaciones (4.92) a (4.99).
 - Cálculo de las tensiones en el hormigón σ_H con las ecuaciones (4.100) a (4.105) y cálculo del daño d en el hormigón, en la capa considerada, mediante las ecuaciones (4.76) y (4.90).
 - Cálculo de las tensiones en el acero, tanto en las barras longitudinales como en los cercos y comparación con la tensión del límite elástico del acero. Cálculo de la deformación elástica y plástica del acero.
 - Recomposición de las tensiones en la sección en función de las tensiones de cada capa, del daño y de la plasticidad desarrollados. Cálculo de los esfuerzos en la sección en función del daño usando las ecuaciones (4.119) a (4.121) o (4.137) a (4.139). Si la tensión elástica en el acero supera la tensión límite de plastificación se realiza la recomposición con el umbral de tensión del acero. Cálculo de la nueva matriz de rigidez de la barra y determinación de las fuerzas internas de la estructura (apartado 4.9.3). En caso de plastificación del acero la fuerza interna de la estructura resultante está acotada por la fuerza desarrollada en el acero plastificado además de estar afectada por el daño desarrollado en el hormigón.
 - Cálculo del defecto de fuerzas $\Delta F = F_{int} - F_{ext}$ (ecuación 4.22).
 - Comprobación de la convergencia mediante la norma del defecto de fuerzas ΔF de la estructura. En caso de que ésta sea suficientemente pequeña, se aplica el siguiente incremento de fuerzas. En caso de que no se haya alcanzado la convergencia, se procede al cálculo iterativo de la estructura, con el nuevo defecto de fuerzas ΔF . En ese caso, se utiliza la nueva matriz de rigidez obtenida para resolver la ecuación (4.29) con el nuevo defecto de fuerzas ΔF .
- Imponer el siguiente incremento de fuerzas una vez alcanzada la convergencia.

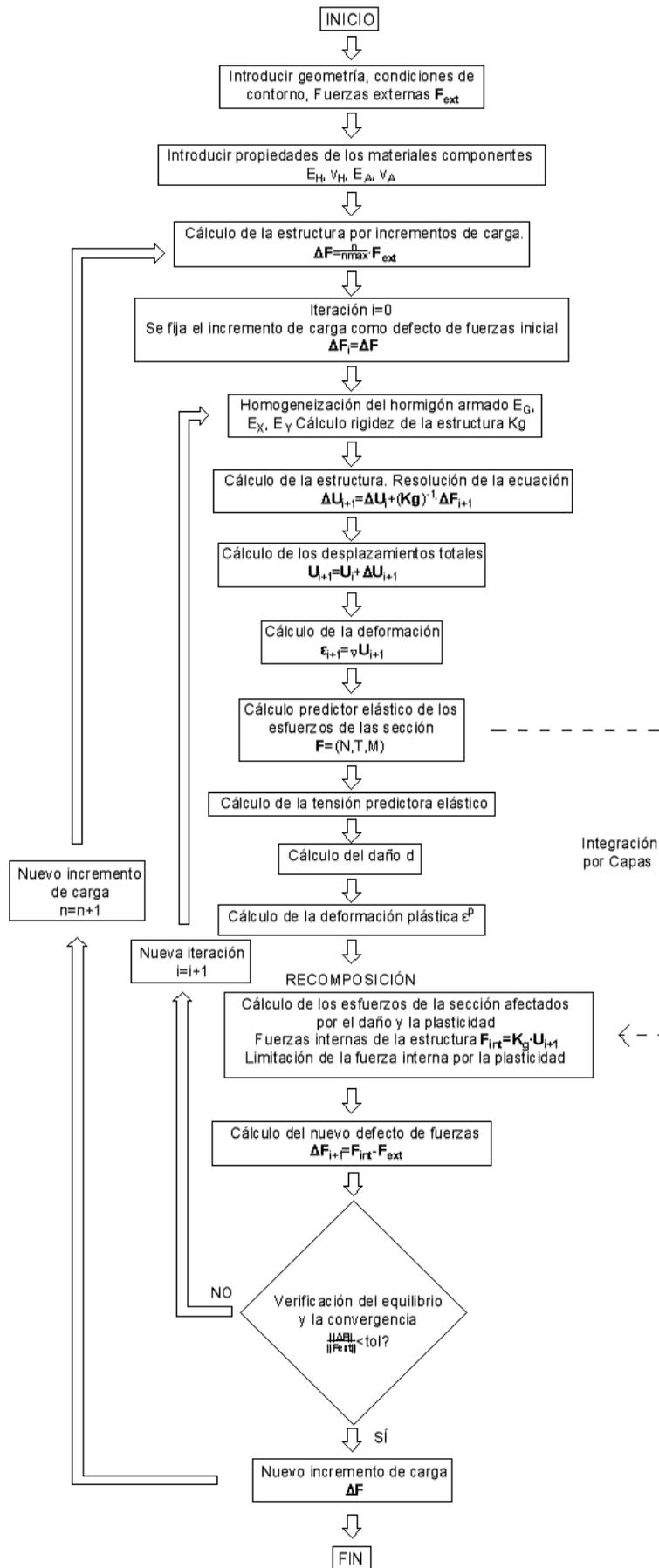


Figura 5.12. Diagrama de flujo del cálculo para el modelo en 1 dimensión

Capítulo 6

Validación del modelo desarrollado y ejemplos de cálculo

En el presente capítulo se detallan distintos ejemplos calculados considerando la presencia de cercos y el efecto del confinamiento producido. Para ello se utiliza el modelo y el programa de ordenador desarrollados en el presente trabajo para calcular estructuras de barras de hormigón armado confinado. El programa ha sido desarrollado con la herramienta de programación Matlab y utiliza para las barras de hormigón armado confinado la matriz de rigidez de la ecuación (3.201). Se comparan los resultados obtenidos con resultados numéricos y experimentales existentes obtenidos por otros investigadores.

6.1 Cálculo de una viga biapoyada

6.1.1 Ejemplo de validación

Primeramente, se considera una barra apoyada en sus dos extremos de sección 0.2×0.45 m y de 3.52 m de longitud. Se han aplicado dos cargas tal y como se observa en la Figura 6.1 de forma que la barra trabaje a flexión y a cortante. Dicho ejemplo fue ensayado experimentalmente por Walraven (1978) y calculada mediante el método de los elementos finitos con un modelo desarrollado por De Borst et al. (1984). Este caso, de geometría sencilla, permite, tras la adecuada calibración de las propiedades del hormigón, realizar una primera validación del modelo propuesto en el presente trabajo.

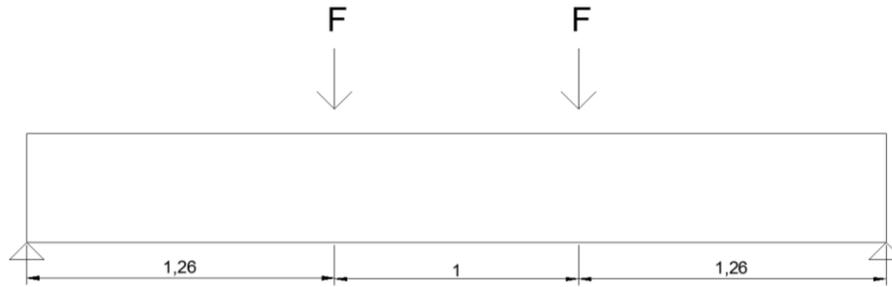


Figura 6.1. Esquema de la barra y las cargas consideradas

La viga está armada con 3 barras longitudinales de acero, dos de 14 mm y una de 20 mm de diámetro (ver la Figura 6.2). En la barra no se introdujo armadura transversal, por lo que no se produce confinamiento. No obstante este ejemplo permitirá mostrar la capacidad del modelo para resolver el problema. Posteriormente se calculará la respuesta de la estructura en otros casos, donde se introducen cercos con distintos diámetros y longitudes de separación para mostrar cómo influyen en la respuesta de la barra y exponer la capacidad del modelo propuesto para considerar de manera adecuada la variación de los parámetros que intervienen en el problema. Además, al encontrarse la armadura longitudinal traccionada no se produce fallo por pandeo de las barras.

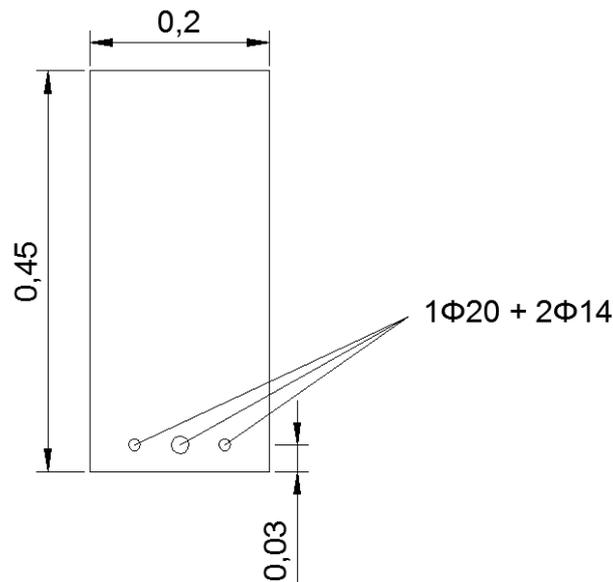


Figura 6.2. Detalle del armado de la barra. Cotas en m.

Los resultados de este caso, obtenidos tanto con el ensayo experimental como con el modelo numérico propuesto por De Borst et al. (1984), se observan en la Figura 6.3. Se aprecia como la curva del ensayo experimental tiene un comportamiento lineal hasta aproximadamente una carga F de 20 kN y 1 mm de desplazamiento vertical. Posteriormente, se observa el comportamiento de la barra al seguir aumento la carga hasta que finalmente se produce la rotura para una carga F de 65 kN y 8.5 mm de desplazamiento vertical. Sin embargo se aprecian ligeras discrepancias entre el ensayo experimental y el modelo numérico.

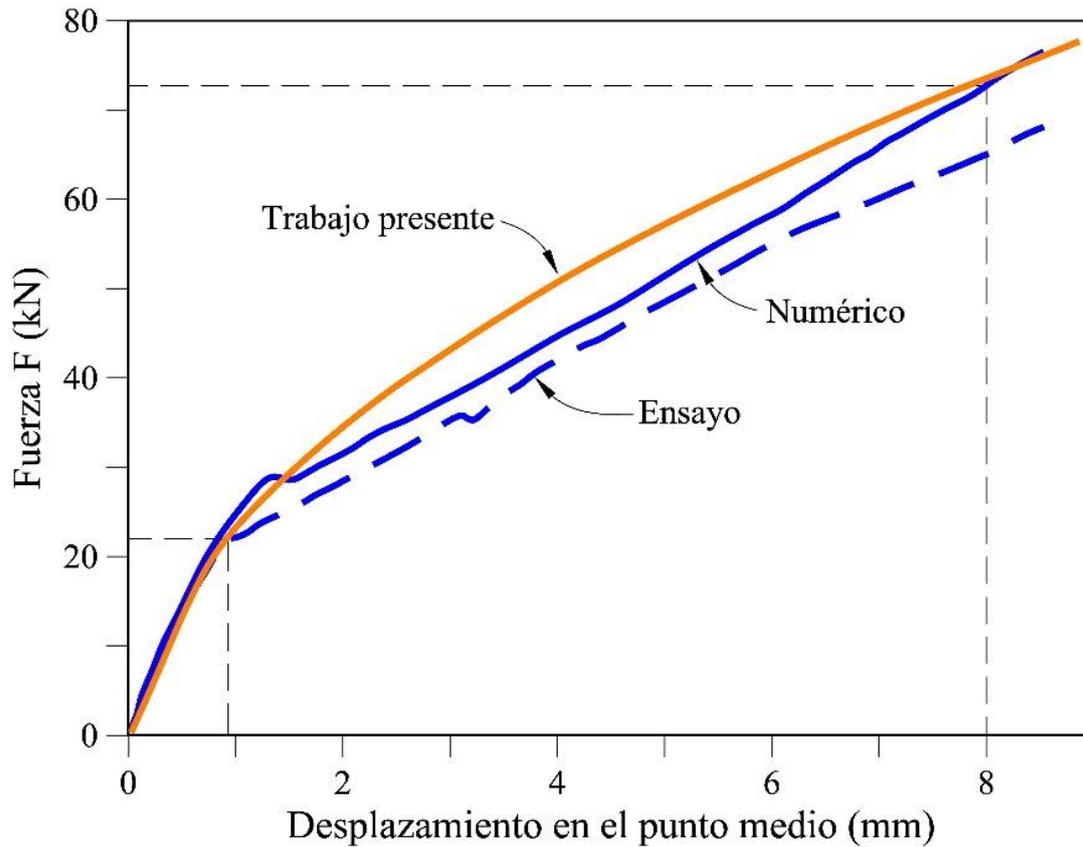


Figura 6.3. Resultados experimentales y numéricos de la barra (De Borst y Nauta 1984) y resultados con el modelo propuesto en el presente trabajo

Al principio se han introducido en el programa de ordenador unas propiedades genéricas para el hormigón y el acero que luego se han ajustado para que se obtengan resultados similares a los del experimento. Concretamente, se ha ajustado la energía de fractura del hormigón a 60 kPa·m a compresión para obtener resultados suficientemente parecidos. Además, la resistencia del hormigón es de 25 MPa a compresión y ambos valores, tanto la energía de fractura como la resistencia del hormigón, son 10 veces inferiores cuando el hormigón está sujeto a tracción. La resistencia del acero de las barras es de 440 MPa (ver Tabla 6.1).

Tabla 6.1. Propiedades de los materiales componentes de la barra

Material	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson	σ_C (MPa)	σ_T (MPa)	G_C (kPa·m)	G_T (kPa·m)
Hormigón	28	0.2	25	2.5	60	6
Acero	210	0.3	440	440	-	-

La curva fuerza-desplazamiento de la barra obtenida con el modelo y programa desarrollados se observa en la Figura 6.3. Se puede ver como la respuesta de la estructura propuesta es muy parecida a la experimental de Walraven (1978) o a la numérica de De Borst et al. (1984). Tal y como se observa en los resultados experimentales, la barra entra en el rango no lineal a una fuerza F de 20 kN aproximadamente y a un desplazamiento de 1 mm. Posteriormente, el hormigón de la barra se va degradando, reduciéndose la rigidez de la barra hasta llegar a una fuerza F de 80 kN, lo que se corresponde a un desplazamiento vertical de aproximadamente 9 mm. Se ha realizado el cálculo de la viga considerando dos hipótesis distintas: armadura elástica y armadura elastoplástica. Sin embargo en el presente caso no se produce plastificación del acero por lo que,

en ambos casos, se obtiene el mismo resultado. Se observa, además, que el resultado obtenido con el modelo propuesto es más parecido al que obtuvieron numéricamente De Borst et al. (1984) que al resultado experimental del ensayo en laboratorio.

No obstante, dado que se ha realizado el cálculo no lineal con un modelo unidimensional, se considera que el comportamiento es suficientemente parecido a la realidad. Hay que tener en cuenta que el modelo propuesto de barras unidimensionales no considera todos los mecanismos que se llegan a producir en el interior de la barra y que se podrían considerar únicamente utilizando un modelo tridimensional con elementos finitos, con un coste computacional mucho mayor.

Para realizar el presente cálculo no lineal se ha dividido cada barra de la viga en 10 elementos de barras y asimismo la sección en 500 capas. Asimismo, ha sido necesario aplicar la fuerza F impuesta en el extremo de la barra en 100 pasos, con lo que el coste computacional total del cálculo en Matlab es de alrededor de 80 segundos.

6.1.2 Influencia de los cercos en la respuesta de la estructura

Tras realizar una primera validación del modelo propuesto, es de interés observar como varía la respuesta de la estructura en función de los principales parámetros que intervienen en el problema, es decir la longitud de separación entre cercos y su diámetro. De esta forma se puede mostrar como el modelo propuesto permite considerar, de manera efectiva, la influencia de estos parámetros sobre la respuesta de las estructuras.

No obstante, la viga del modelo experimental de Walraven (1978) no tiene cercos y, por lo tanto, no tiene confinamiento. A continuación, para mostrar el efecto del confinamiento en la respuesta de la viga así como la capacidad del modelo propuesto para resolver el problema, se calcula la barra de hormigón armado para distintas cuantías de cercos. Así, pues, es posible estudiar la mejora en la respuesta en función, por una parte, del diámetro de los cercos que se colocan en la barra y, por otra parte, de la longitud de separación entre cercos. Además, para mostrar el orden de magnitud de la variación de la respuesta, se ha estudiado también su variación en función de la cuantía de acero longitudinal.

a) Influencia del diámetro de los cercos

Para mostrar la influencia del diámetro de los cercos en la respuesta de la estructura, se considera la viga con el armado longitudinal de la Figura 6.2. Se introducen en la viga cercos separados a una distancia $L_{Sep} = 20 \text{ cm}$. La estructura se ha calculado considerando distintos casos, introduciéndose en la viga cercos de 8 mm, 16 mm, 25 mm y, finalmente, el caso, ya considerado en el apartado anterior, en que no se colocan cercos. Los resultados obtenidos son los de la Figura 6.4. Se observa como al aumentar el diámetro de los cercos se reducen los desplazamientos de la viga y aumenta su ductilidad. La fuerza necesaria para que el desplazamiento en el punto medio de la viga alcance los 10 mm aumenta en 6.3 kN, desde los 81.9 kN del caso sin cercos hasta los 88.2 kN del caso con cercos de 25 mm de diámetros con 20 cm de separación. De esta forma el modelo permite cuantificar la variación de resistencia y de ductilidad de la barra en función de la separación de cercos introducida.

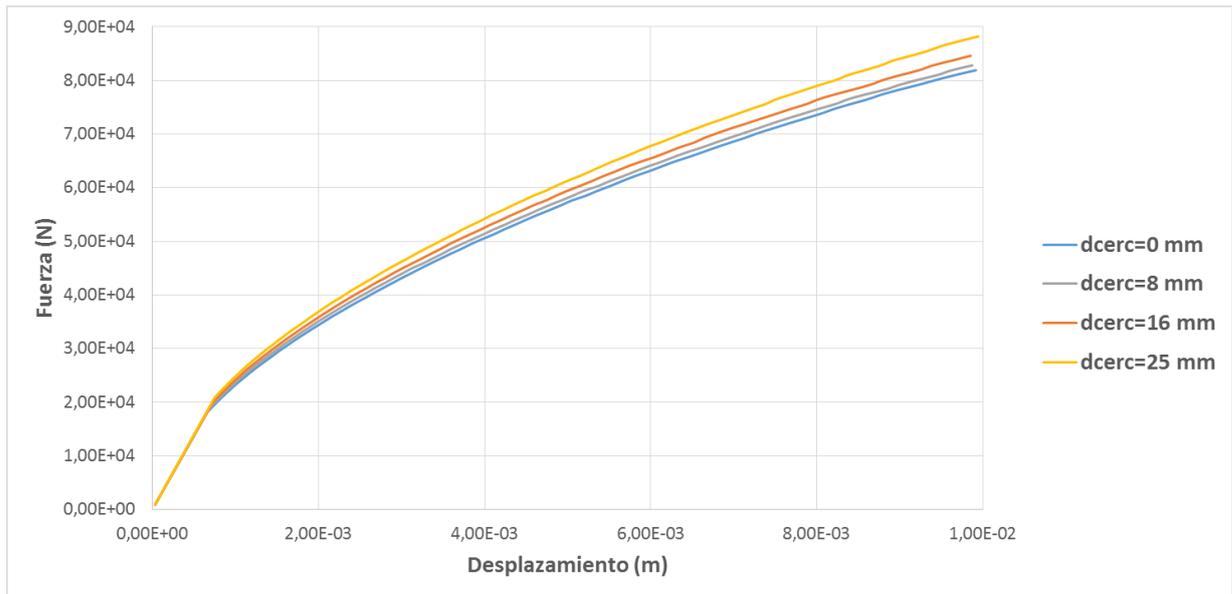


Figura 6.4. Curva fuerza-desplazamiento de la viga en función del diámetro de los cercos introducidos (d_{cerc}).

b) Influencia de la longitud de separación entre cercos

Para mostrar la influencia de la longitud de separación entre cercos en la respuesta de la estructura, se considera, la misma viga con el armado longitudinal de la Figura 6.2. Se introducen en la viga cercos de 8 mm de diámetro. Se ha calculado la estructura considerando distintas separaciones entre cercos. Concretamente, se ha realizado el cálculo con separaciones de 5 cm, 10 cm, 20 cm y 30 cm. Los resultados obtenidos son los de la Figura 6.5. Se observa como al reducir la longitud de separación entre cercos se reducen los desplazamientos de la viga y aumenta su ductilidad. La fuerza necesaria para que el desplazamiento en el punto medio alcance los 10 mm aumenta en 8.1 kN, desde los 81.9 kN del caso con una separación de 30 cm hasta los 90.0 kN del caso con cercos de colocados cada 5 cm. Esto demuestra que el modelo permite cuantificar la variación de resistencia y de ductilidad de la barra en función de la separación de cercos introducida.

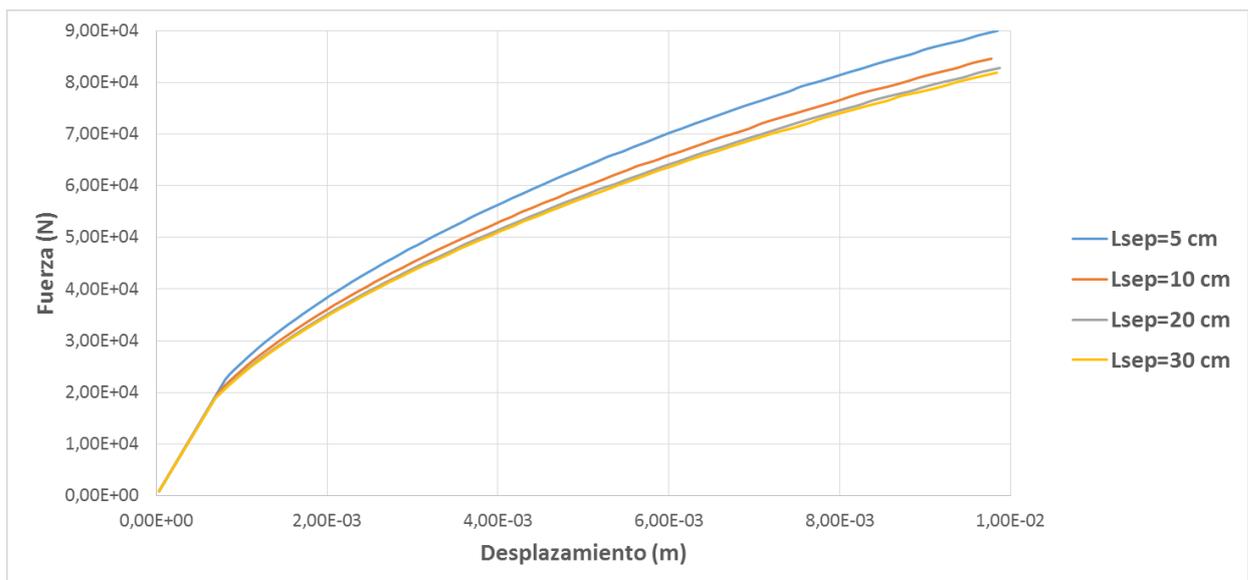


Figura 6.5. Curva fuerza-desplazamiento de la viga en función de la longitud de separación de los cercos (L_{sep}).

Así, en la Figura 6.5 se observa la importante mejora en la respuesta de la barra cuando ésta se encuentra confinada, con una separación entre cercos de 5 cm y donde hay una importante mejora en la respuesta de la viga, respecto del caso en que ésta no está, con separaciones de 20 cm y 30 cm, donde la respuesta observada es muy similar y presenta una ductilidad muy inferior.

c) *Influencia del diámetro de las armaduras longitudinales*

Para comparar la influencia en la respuesta de la viga de los parámetros anteriores respecto de la cuantía de armadura longitudinal que se introduce en la barra, se considera la misma viga que antes con cercos de 8 mm colocados con una separación entre ellos de 20 cm. Se calcula dicha viga con distintos diámetros de barras longitudinales. Concretamente, se ha realizado el cálculo con diámetros de las barras longitudinales de 16 mm, 25 mm, y 20 mm. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 6.6. Tal y como era esperable, se observa como al aumentar el diámetro de las barras longitudinales se reducen los desplazamientos de la viga. La fuerza necesaria para que el desplazamiento en el punto medio alcance los 8 mm aumenta en 16.2 kN, desde los 73.8 kN del caso con 16 mm de diámetro hasta los 90.0 kN del caso con 25 mm de diámetro. Si bien el efecto de la armadura longitudinal en la respuesta de la estructura es mayor, la influencia de la respuesta de la estructura ante todos los factores estudiados en este ejemplo es de una relevancia similar y ninguno de ellos no puede ser obviado al realizar el cálculo de la estructura.

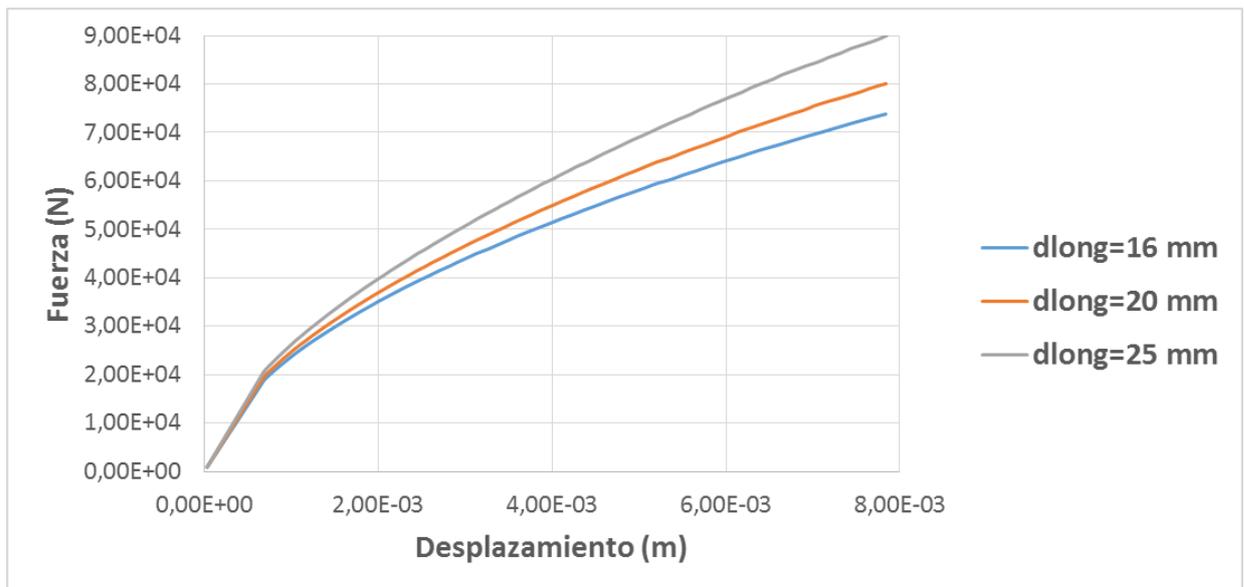


Figura 6.6. Curva fuerza-desplazamiento de la barra en función del diámetro de las barras longitudinales (d_{long}).

d) *Conclusiones*

En conclusión, de la misma forma que variar la cuantía de las barras longitudinales de la viga altera de forma importante la respuesta de la viga al entrar en el rango no lineal, modificar la cuantía de cercos también produce respuestas no lineales distintas de la estructura. Además, la variación en la respuesta de la estructura se produce de forma similar y con el mismo orden de magnitud en el caso de las barras longitudinales y el de los cercos. No es posible, por lo tanto, obviar el efecto de la presencia de los cercos cuando se realiza el cálculo no lineal de la barra.

El modelo y el programa desarrollados es capaz de considerar la influencia de la cuantía de cercos de forma adecuada y cercana a la realidad. Es capaz de reproducir de forma adecuada el efecto de la variación de la cuantía de los cercos en la respuesta no lineal de la estructura. Se ha visto

asimismo que cuando la estructura se encuentra en el rango elástico, la cuantía de cercos no afecta a la rigidez inicial de forma significativa (ver Figura 6.5).

6.2 Cálculo de una barra empotrada en un extremo

En este apartado se considera un pilar de sección 0.2×0.2 m empotrado en uno de sus extremos. La longitud de la barra es de 0.80 m. En su extremo libre se aplican cargas a axil para comprobar el efecto de los cercos en la respuesta del pilar (ver Figura 6.7). Esta barra fue, por una parte, ensayada experimentalmente y, por otra parte, resuelta numéricamente con el modelo propuesto por Claeson (1999). Este ejemplo con geometría sencilla permite realizar una segunda validación del modelo y del programa desarrollados en el presente trabajo. Se realiza, primeramente, el cálculo de la barra sin considerar la plasticidad del acero y, posteriormente, se calcula introduciendo también la plasticidad de las armaduras.

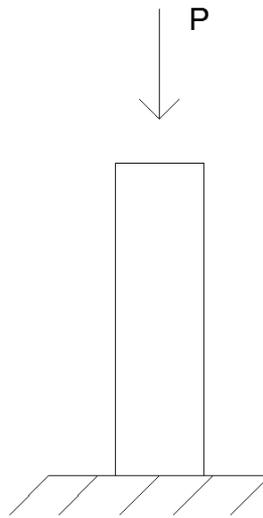


Figura 6.7. Esquema del pilar y la carga considerada

La barra está armada con 4 barras longitudinales de acero de 16 mm y con cercos de 8 mm dispuestos con una separación de 130 mm (ver Figura 6.8). Posteriormente se realiza el cálculo de otros casos donde se altera la longitud de separación entre cercos o el diámetro de los mismos para mostrar cómo influyen en la respuesta de la barra y también la capacidad del modelo propuesto para considerar, de manera adecuada, la variación de los parámetros que intervienen en el problema.

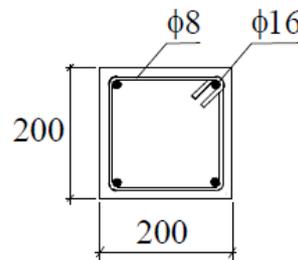


Figura 6.8. Detalle del armado de la viga, cotas en mm. (Claeson 1999)

Se observa que Claeson (1999) obtuvo resultados experimentales sobre unas barras tanto a compresión pura como a flexo-compresión para validar el modelo que realizó. Los resultados obtenidos para compresión pura para la estructura propuesta en Figura 6.8 son los de la Figura 6.9. Se observa como la curva del ensayo experimental tiene un pico de resistencia para una carga

de aproximadamente 1650 kN y un desplazamiento axial de aproximadamente 3 mm. Sin embargo, se aprecian ligeras discrepancias entre el ensayo experimental y el modelo numérico (ver Figura 6.9).

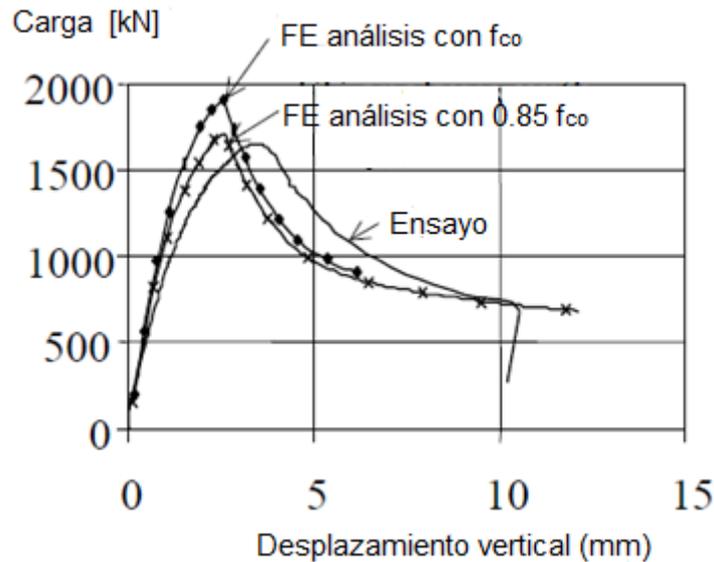


Figura 6.9. Curva fuerza-desplazamiento de la barra ensayada. Resultados experimentales y numéricos de Claeson (1999)

6.2.1 Cálculo de la barra considerando la armadura elástica

El modelo unidimensional desarrollado en el presente trabajo ha sido implementado en un programa de ordenador desarrollado con la herramienta Matlab utilizando las características geométricas mencionadas. Al principio se ha introducido unas propiedades genéricas para el hormigón que luego se han ajustado para que se obtengan resultados similares a los del ensayo de laboratorio. Concretamente, se ha ajustado la energía de fractura del hormigón a 100 kPa·m a compresión para obtener resultados suficientemente parecidos. Además, la resistencia del hormigón es de 30 MPa a compresión y ambos valores, tanto la energía de fractura como la resistencia del hormigón, son 10 veces inferiores cuando el hormigón está sujeto a tracción (ver Tabla 6.2). En este primer cálculo, se ha considerado que el acero de las armaduras tiene un comportamiento lineal.

Tabla 6.2. Propiedades de los materiales componentes de la barra

Material	Módulo de Young (GPa)	Coficiente de Poisson	σ_C (MPa)	σ_T (MPa)	G_C (kPa·m)	G_T (kPa·m)
Hormigón	20	0.2	30	3	100	10
Acero	200	0.3	-	-	-	-

La curva fuerza-desplazamiento de la barra, calculada con el modelo propuesto, puede verse en la Figura 6.10. A diferencia del resto de ejemplos del presente capítulo, esta estructura se ha calculado por incrementos de desplazamientos y no de fuerzas. De esta manera, es posible reproducir mejor el comportamiento real de la barra, en la que se produce ablandamiento en la respuesta observada. Realizar el cálculo utilizando incrementos de fuerzas no permite considerar adecuadamente este fenómeno. Se observa como el modelo propuesto, incluso considerando que las barras de acero tienen un comportamiento lineal, reproduce adecuadamente el ablandamiento que se produce en el pilar debido a la degradación del hormigón armado. Obviamente, al tener el acero un comportamiento elástico lineal, no se reproduce adecuadamente el fallo del pilar a

compresión dado que el acero proporciona a la barra la capacidad de seguir resistiendo la fuerza impuesta. Se observa que, cuando todo el hormigón se encuentra completamente dañado, la respuesta de la barra tiende al valor de la rigidez aportada por las barras de acero, que tienen un comportamiento lineal. No obstante, se observa que la barra entra en el rango no lineal aproximadamente para el mismo nivel de carga que el modelo numérico propuesto por Claeson (ver Figura 6.9), que proporciona valores superiores a los del ensayo experimental.

Para validar y comprender el comportamiento del modelo desarrollado en el presente trabajo, se ha calculado la viga con distintas hipótesis (ver Figura 6.11). Por una parte, se ha calculado la barra considerando que está realizada únicamente de hormigón en masa. Por otra parte se ha calculado la barra considerando únicamente armadura longitudinal, sin cercos. Posteriormente, se ha realizado también el cálculo de la barra armada únicamente con cercos, sin armadura longitudinal. Y, finalmente, se ha realizado el cálculo de la barra tanto con armadura longitudinal como con cercos. Para todos estos casos, el cálculo de la estructura por incrementos de desplazamientos permite reproducir adecuadamente el fuerte ablandamiento debido al daño que se produce en el hormigón. Todos los casos de la Figura 6.11 se calculan considerando la armadura elástica.

Por una parte, se observa en la Figura 6.11 como el comportamiento de la barra de hormigón en masa es mucho más frágil en comparación con el del resto de casos, que sí tienen algún tipo de armadura. La rigidez de la barra se reduce de forma rápida y brusca, quedando una rigidez residual, lo que permite interpretar que se produce la rotura de la barra. Asimismo, se observa como la resistencia de la barra considerando únicamente cercos o únicamente armadura longitudinal es bastante similar, mientras que la barra que tiene tanto armadura longitudinal como cercos presenta una clara mejora en el comportamiento, en la resistencia y en la ductilidad. Nótese, no obstante, que el comportamiento de la barra con únicamente armado longitudinal es mejor que el de la que tiene únicamente cercos, tanto en resistencia como ductilidad. Se observa como retirando la armadura longitudinal el comportamiento de la barra se parece al del hormigón en masa, tendiendo la fuerza a cero para niveles elevados de desplazamiento. No obstante se observa como, incluso así, el efecto de los cercos provoca una mayor resistencia y ductilidad respecto del hormigón en masa. En cambio se observa cómo, para niveles de desplazamiento elevado, el comportamiento de la barra con únicamente armado longitudinal se parece al de la barra que además también tiene cercos. Una vez más, la inclusión de los cercos aumenta la resistencia y la ductilidad de la barra de forma significativa.

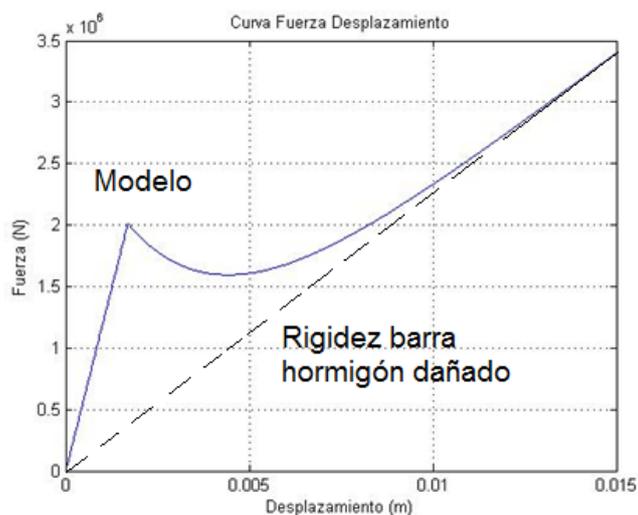


Figura 6.10. Curva fuerza-desplazamiento obtenida con el modelo considerando armadura elástica y rigidez de la barra cuando el hormigón se encuentra completamente dañado.

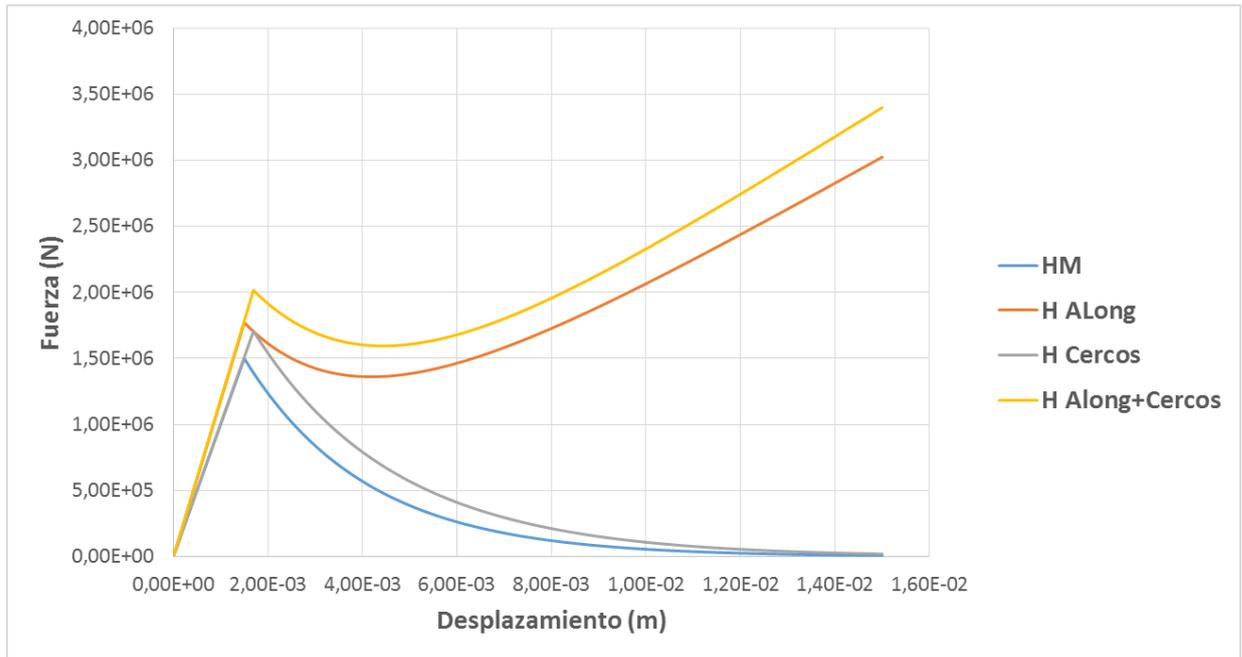


Figura 6.11. Curva fuerza-desplazamiento del pilar para distintas hipótesis de cálculo. La curva HM es el cálculo del hormigón en masa, H A Long es hormigón con armadura longitudinal, H Cercos es hormigón con cercos y H A Long+Cercos es hormigón con armadura longitudinal y con cercos.

Es posible observar la evolución del daño del hormigón. Dicho daño empieza a producirse para unas deformaciones muy reducidas hasta llegar a la unidad cuando se produce la rotura de la barra (ver Figura 6.12). Se ha comprobado que la evolución del daño en el hormigón para el resto de casos es muy similar.

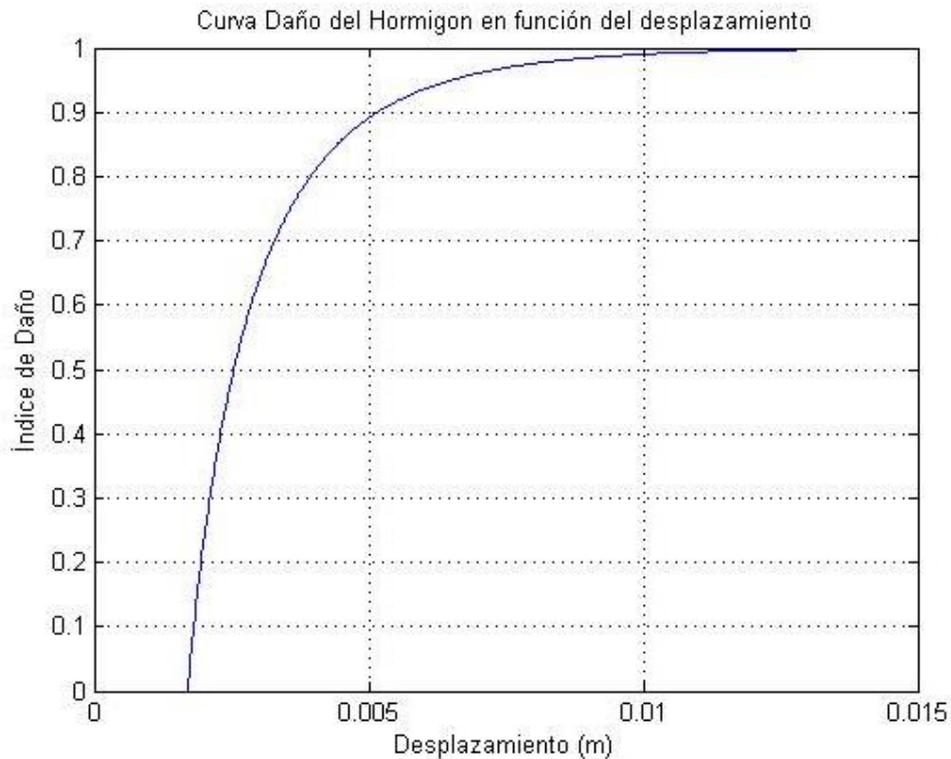


Figura 6.12. Curvas de evolución del daño del hormigón en la barra. Hipótesis de hormigón en masa.

Al comparar las curvas fuerza-desplazamiento de los resultados experimentales con las obtenidas mediante el modelo propuesto se observa como éste último no reproduce de forma exacta el comportamiento de la barra, especialmente respecto el ablandamiento y la ductilidad post-pico. Si bien el modelo numérico propuesto por Claeson consigue reproducir mejor el comportamiento dúctil post-pico de la barra, tampoco acaba de representar exactamente el comportamiento experimental. Hay que tener en cuenta que el cálculo realizado en un primer momento no considera la plasticidad del acero, que se añadirá a continuación. Además el modelo propuesto con barras unidimensionales no considera todos los mecanismos existentes de fallo de las barras como, por ejemplo, el pandeo de la armadura longitudinal de acero.

Tras realizar el cálculo de la barra con el modelo propuesto resulta de interés observar como varía la respuesta de la estructura en función de los principales parámetros que intervienen en el problema propuesto, la longitud de separación entre cercos y su diámetro. De esta forma se puede mostrar como el modelo propuesto permite considerar de manera efectiva la influencia de estos parámetros en la respuesta de las barras con confinamiento por cercos.

6.2.2 Influencia de la longitud de separación entre cercos

Se plantea el cálculo de la misma barra introduciendo distancias de separación entre cercos distintas. En la Figura 6.13 se puede observar la curva fuerza-desplazamiento de la barra para distintas separaciones entre cercos. Concretamente, muestra el resultado del cálculo que considera la presencia tanto de la armadura longitudinal como de los cercos (hipótesis denominada “HA Along+Cercos” en la Figura 6.11) y se comparan los resultados obtenidos para distintas separaciones entre cercos. Se observa como, al reducir la distancia de separación entre cercos, aumenta la ductilidad y la resistencia de la barra. Concretamente, se observa que para una distancia de separación de 5 cm, el confinamiento que se produce en la barra es tan importante que se produce un aumento importante de su resistencia, de aproximadamente el 28 % respecto el caso en que la separación es de 13 cm. Se comprueba una vez más la capacidad del modelo de cuantificar la variación de resistencia y de ductilidad de la barra en función de la separación de cercos introducida.

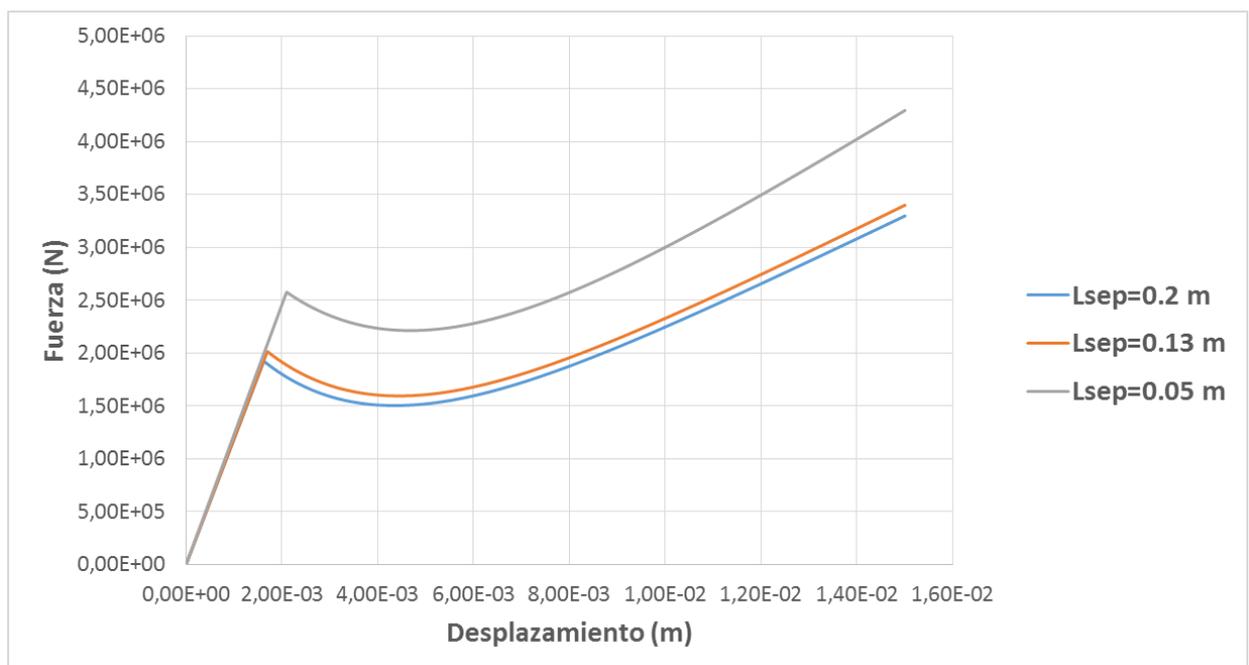


Figura 6.13. Curva fuerza-desplazamiento de la barra en función de la separación entre cercos (Lsep). Diámetro de los cercos de 8 mm

6.2.3 Influencia del diámetro de los cercos

La misma barra se calcula ahora introduciendo esta vez diámetros diferentes de los cercos. En la Figura 6.14 se puede observar la curva fuerza-desplazamiento de la barra para distintos diámetros de cercos. Concretamente, en la mencionada figura se muestra el cálculo considerando la presencia tanto de la armadura longitudinal como de los cercos (hipótesis denominada “HA Along+Cercos” en la Figura 6.11) y se compara los resultados obtenidos para distintas separaciones entre cercos. Se observa como al aumentar el diámetro de los cercos aumenta la ductilidad y la resistencia de la barra. Por ejemplo, para una misma barra, colocando cercos de 25 mm de diámetro se produce un aumento de la resistencia de la barra del 30% respecto del caso con cercos de 8 mm. Se comprueba, por lo tanto, la capacidad del modelo para cuantificar la variación de resistencia y de ductilidad de la barra en función del diámetro de los cercos introducidos.

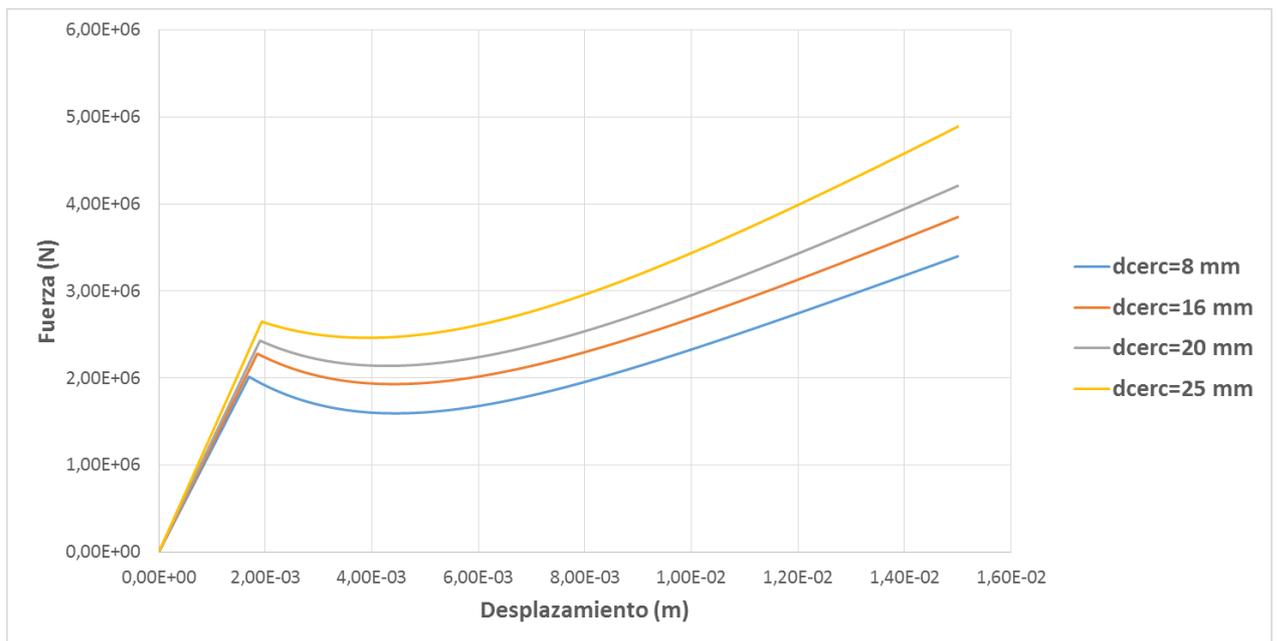


Figura 6.14. Curva fuerza-desplazamiento de la barra para distintos diámetros de cercos (*dcerc*).

6.2.4 Cálculo de la barra considerando la plasticidad del acero

La misma barra ensayada por Claeson (1999) se ha calculado considerando esta vez la plasticidad del acero longitudinal y de los cercos. En este caso, es necesario ajustar, además de las propiedades del hormigón, también las del acero (ver Tabla 6.3).

Tabla 6.3. Propiedades de los materiales componentes de la barra

Material	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson	σ_C (MPa)	σ_T (MPa)	G_C (kPa·m)	G_T (kPa·m)
Hormigón	20	0.2	30	3	100	10
Acero	200	0.3	500	500	-	-

La curva fuerza-desplazamiento de la barra obtenida con el modelo propuesto se muestra en la Figura 6.15. La estructura, se ha calculado imponiendo incrementos de desplazamientos. Se observa como los resultados obtenidos con el modelo propuesto son muy parecidos a los del ensayo experimental y a los del modelo numérico desarrollado por Claeson. Se consigue

reproducir adecuadamente el ablandamiento de la barra, afectada esta vez también por la plasticidad del acero. Se observa que, con el modelo propuesto, la barra entra en el rango no lineal aproximadamente para el mismo nivel de carga que el modelo numérico de Claeson (ver Figura 6.9), que proporciona resultados superiores a los del ensayo experimental. Asimismo, se consigue reproducir el comportamiento post-pico con la suficiente precisión.

Considerar en el cálculo la plasticidad del acero permite reproducir mejor el comportamiento real de la barra. La armadura de acero longitudinal plastifica casi al mismo tiempo con el comienzo de la degradación del hormigón. Efectivamente, para el caso de barras comprimidas, ambos fenómenos se producen para niveles de deformación similares. En la Figura 6.15 se observa como para un desplazamiento de la barra de aproximadamente 6.5 mm se produce un descenso brusco de la rigidez de la barra y que, a partir de allí, a la barra sólo le queda una rigidez residual, lo que corresponde a la plastificación de los cercos. Muchos investigadores consideran que al mismo tiempo que la plastificación de los cercos, se produce la rotura de la barra, por pérdida del confinamiento del hormigón. Sin embargo se observa como con el presente modelo, una vez superado este punto, la respuesta de la estructura tiende asintóticamente hacia el valor de la fuerza constante correspondiente a la plasticidad, F_{plast} , desarrollada en el Capítulo 5. Asimismo, se observa cómo se sigue reduciendo la poca rigidez que le queda todavía al hormigón por el efecto del daño. La mencionada fuerza F_{plast} hacia la que tiende la respuesta de la estructura corresponde, tal y como era previsto, a la fuerza desarrollada por la armadura longitudinal plastificada de la ecuación (5.24). Concretamente, al ser la tensión de plastificación del acero de 500 MPa (véase la Tabla 6.3) y al estar la armadura longitudinal compuesta por 4 barras de 16 mm, se verifica que la fuerza F_{plast} hacia la que tiende la respuesta de la estructura en la Figura 6.15 es

$$F_{plast} = A_A \cdot (\sigma_{lim})_A = 500 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{16 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 = 402 \text{ kN}$$

El coste computacional de este ejemplo es inferior al anterior. Al tratarse de una barra que trabaja únicamente a compresión o a tracción, no es necesario dividir la sección en capas, que es lo que realmente aumenta el coste del modelo desarrollado. Por la misma razón tampoco es necesario dividir la barra en varios elementos de barra. Todo ello hace posible calcular la barra aplicando 1000 incrementos de desplazamiento con el programa desarrollado en alrededor de 20 segundos.

Con el modelo desarrollado en el presente trabajo, se ha calculado la viga para casos distintos (ver Figura 6.16). Por una parte se ha calculado la barra de hormigón en masa, sin considerar la presencia de armadura. Por otra parte se ha calculado la barra considerando únicamente la armadura longitudinal, sin cercos. Posteriormente se ha realizado también el cálculo de la barra armada únicamente con cercos, sin armadura longitudinal. Y, finalmente, se ha realizado también el cálculo de la barra tanto con armadura longitudinal como con cercos. Una vez más, el cálculo de la estructura se realiza imponiendo incrementos de desplazamientos para reproducir adecuadamente el ablandamiento de la barra.

Se observa en la Figura 6.16 como el comportamiento de la barra de hormigón en masa es mucho más frágil en comparación con el caso en que ésta se encuentra armada. La rigidez de la barra se reduce de forma rápida y brusca, quedando tras ello una rigidez residual, que tiende a cero. Llegado a ese punto, se puede interpretar que se produce la rotura de la barra. Se observa, asimismo, que el comportamiento del hormigón únicamente con cercos es similar al del hormigón en masa, ambas curvas tendiendo a cero al dañarse completamente el hormigón. No obstante la presencia de cercos produce un aumento de la ductilidad y la resistencia en la barra respecto al caso del hormigón en masa. También se puede ver como el comportamiento de la barra con armadura longitudinal y con cercos es similar al caso en que la barra tiene únicamente armadura

longitudinal; en ambos casos la respuesta de la estructura tiende al valor de F_{plast} que, como ya se ha visto, en este caso es de 402 kN. Ello hace que los casos con armadura longitudinal tengan una ductilidad mucho mayor. No obstante se observa como la barra con cercos presenta una mayor resistencia y ductilidad. También es posible observar como las resistencias pico en los casos con únicamente armadura longitudinal y únicamente cercos son muy parecidas, siendo un 4% mayor la desarrollada en la barra con únicamente armado longitudinal.

Como se observa en la ecuación (3.104), el efecto de los cercos es proporcional a la rigidez de la barra, que depende del hormigón y del acero. No obstante la rigidez proporcionada por el hormigón va desapareciendo al dañarse el hormigón. Tal y como ocurre en la realidad, el efecto del confinamiento producido por los cercos desaparece al dañarse completamente el hormigón. Ello hace que la respuesta de la barra cuando sólo tiene hormigón en masa y cuando tiene únicamente hormigón con cercos tienda al mismo valor de cero. De la misma forma, la respuesta de la barra de hormigón y armadura longitudinal tiende al mismo valor que la barra de hormigón armado con cercos y armadura longitudinal. El efecto del confinamiento en la barra sólo se produce mientras el hormigón de la misma no se encuentre completamente dañado. Una vez se daña todo el hormigón, el efecto beneficioso de los cercos desaparece.

También es posible comparar el comportamiento de la barra cuando se considera que el acero tiene un comportamiento elástico y el caso en que, además, se incluye su plasticidad (ver Figura 6.17). El comportamiento observado en los ensayos experimentales y numéricos de Claeson (1999) es mucho más parecido al caso en que se considera la plasticidad. Se observa como la plasticidad del acero, tanto de las barras longitudinales como de los cercos tiene una fuerte influencia en la respuesta de la estructura. Si no se toma en cuenta la plasticidad del acero, no se modeliza adecuadamente el comportamiento real de la barra.

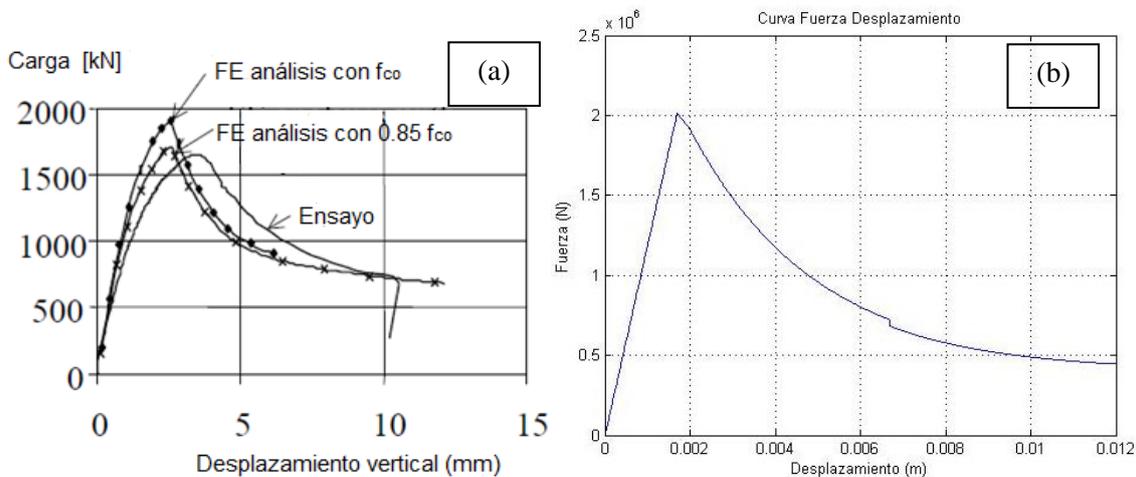


Figura 6.15. Curva fuerza-desplazamiento obtenida numérica y experimentalmente por Claeson (a) y con el modelo propuesto con plasticidad del acero (b)

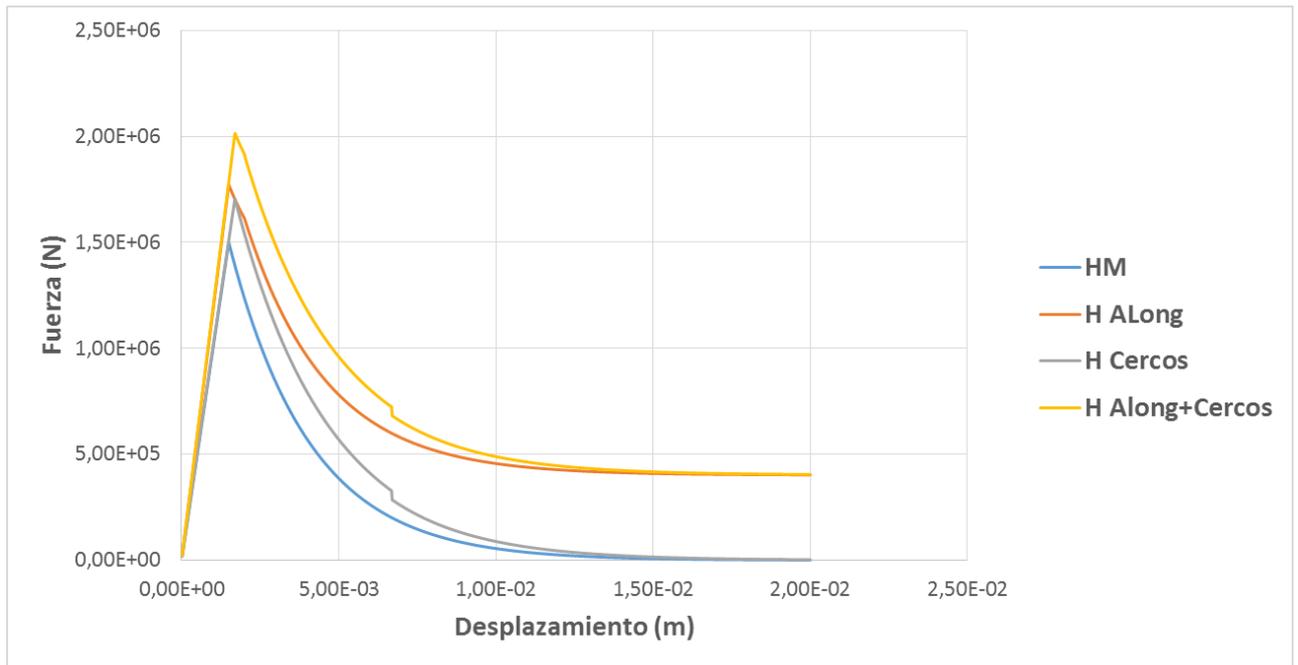


Figura 6.16. Curva fuerza-desplazamiento del pilar para distintas hipótesis de cálculo. La curva HM es el cálculo del hormigón en masa, H ALong es hormigón con armadura longitudinal, H Cercos es hormigón con cercos y H ALong+Cercos es hormigón con armadura longitudinal y con cercos.

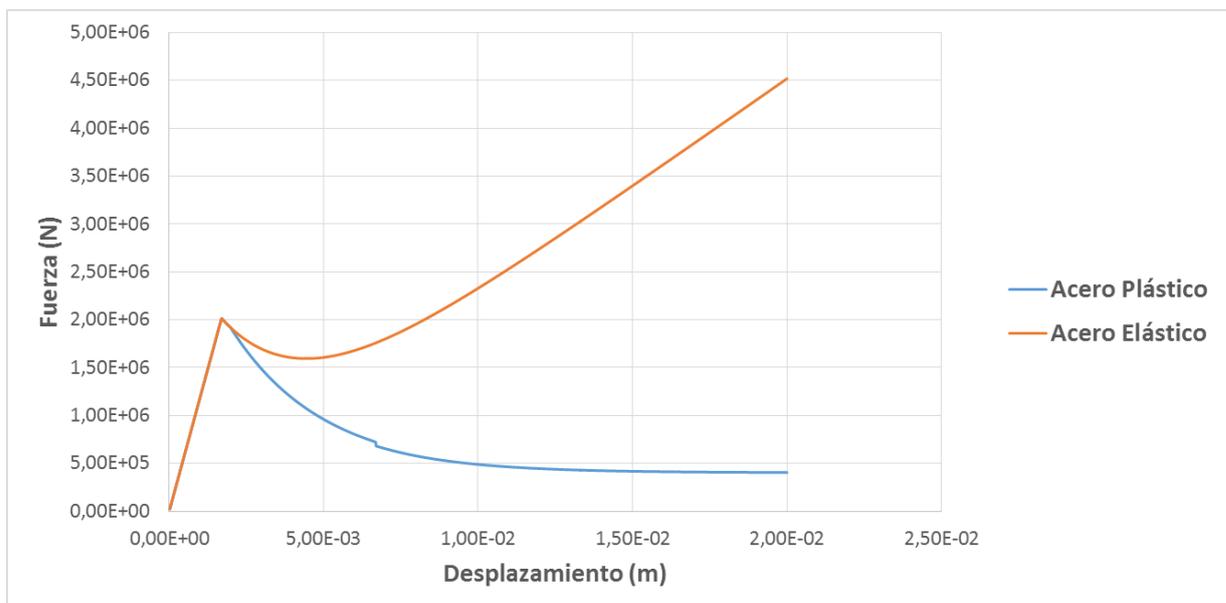


Figura 6.17. Cálculo de la barra considerando acero con y sin plasticidad

Al comparar las curvas fuerza-desplazamiento de los resultados experimentales con las obtenidas mediante el modelo propuesto se observa, por una parte, como se reproduce de forma satisfactoria el comportamiento de la barra, incluyendo el comportamiento no lineal, el ablandamiento y la ductilidad post-pico. Si bien el modelo numérico propuesto por Claeson consigue reproducir mejor el comportamiento dúctil post-pico de la barra, tampoco acaba de representar exactamente el comportamiento experimental. Hay que tener en cuenta que el modelo propuesto con barras unidimensionales no considera todos los mecanismos existentes de fallo de las barras, como por ejemplo, el pandeo de la armadura longitudinal de acero.

Tal y como se observa en la Figura 6.18, la deformación plástica que se desarrolla en la armadura longitudinal es mucho mayor que la que se produce en los cercos. Al imponerse incrementos de desplazamientos en la barra, los desplazamientos totales de la barra son lineales con el paso de carga. Asimismo, se observa como al principio, en régimen lineal, la deformación plástica es nula y sólo empieza a desarrollarse al plastificar el acero. Se observa, también, como la deformación elástica, al principio crece linealmente y que, tras plastificar la barra, queda limitada al valor del límite elástico, $\varepsilon_{lim} = \sigma_{lim}/E_A$.

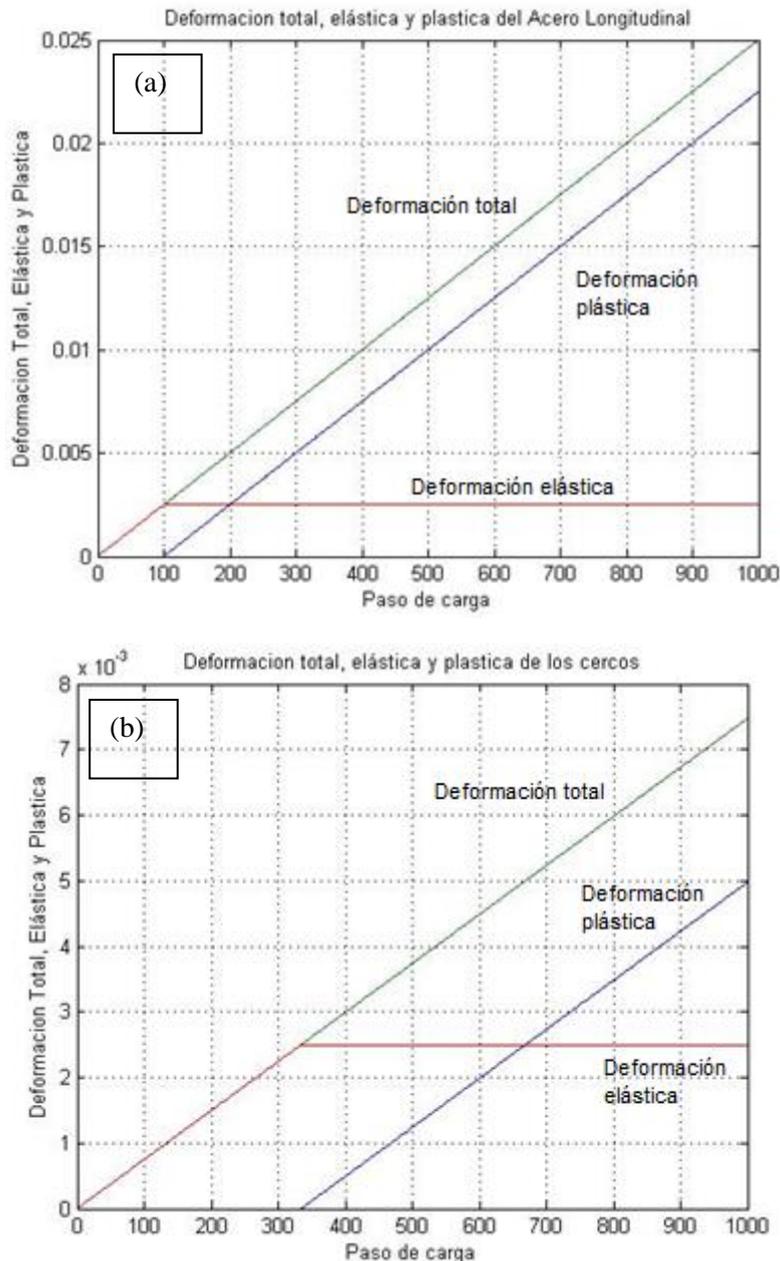


Figura 6.18. Deformación elástica, plástica y total de la armadura longitudinal (a) y de los cercos (b)

Tras realizar el cálculo de la barra con el modelo propuesto resulta de interés observar como varía la respuesta de la estructura en función de los principales parámetros que intervienen en el problema, la longitud de separación entre cercos y su diámetro. De esta forma se puede mostrar como el modelo permite considerar de manera efectiva la influencia de estos parámetros en la respuesta de las estructuras ante el confinamiento producido por los cercos en las barras de hormigón armado.

6.2.5 Influencia de la separación entre cercos

En este apartado se analiza la barra estudiando el efecto de la separación entre cercos. En la Figura 6.19 se muestra la curva fuerza-desplazamiento de la barra para distintas separaciones entre cercos. Se observa como al reducir dicha separación aumenta la ductilidad. Se observa asimismo como al variar la separación entre cercos (y, por lo tanto, la cuantía de cercos en la barra), cambia la deformación a la que se produce la plastificación de los cercos. Al disminuir la separación (aumento de cuantía) de los cercos disminuye la deformación de plastificación y, por lo tanto, las barras plastifican antes. Ello se debe a que, según la formulación del modelo propuesto, se desarrollan mayores tensiones laterales al aumentar la cuantía de cercos dada una cierta deformación longitudinal impuesta. Este aspecto, observado en el modelo, se produce también en la realidad. La mayor cuantía de cercos aumenta la rigidez lateral de la barra, con lo cual, con menores deformaciones, se alcanzan niveles de tensión más elevados. Además se observa que, cuando la plastificación de los cercos se produce para deformaciones menores (por ser la cuantía de cercos mayor), el descenso que se produce en la fuerza es mayor; cuando la plastificación de los cercos se produce para deformaciones más elevadas (cuantía de cercos menor), el descenso de la fuerza es menos importante. Ello se debe a que para mayores niveles de deformación el hormigón tiene un índice de daño mayor lo que se reduce el efecto que tiene el confinamiento.

Se observa, pues, un aumento de la resistencia en la barra al aumentar la cuantía de cercos. Concretamente, para una distancia de separación de 5 cm, el confinamiento que se produce en la barra es tan importante que se produce un aumento de la resistencia de la barra de aproximadamente el 28 % respecto el caso en que la separaciones de 13 cm. Se comprueba una vez más la capacidad del modelo para cuantificar la variación de resistencia y de ductilidad de la barra en función de la separación de cercos. El aumento de resistencia es el mismo que el que se ha observado en el cálculo considerando las armaduras elásticas. Tal y como se ha comentado, se observa que el punto de plastificación de los cercos varía, produciéndose a 7 mm de desplazamiento para una separación de 20 cm entre cercos y a tan solo 4.25 mm de desplazamiento si la separación es de 5 cm.

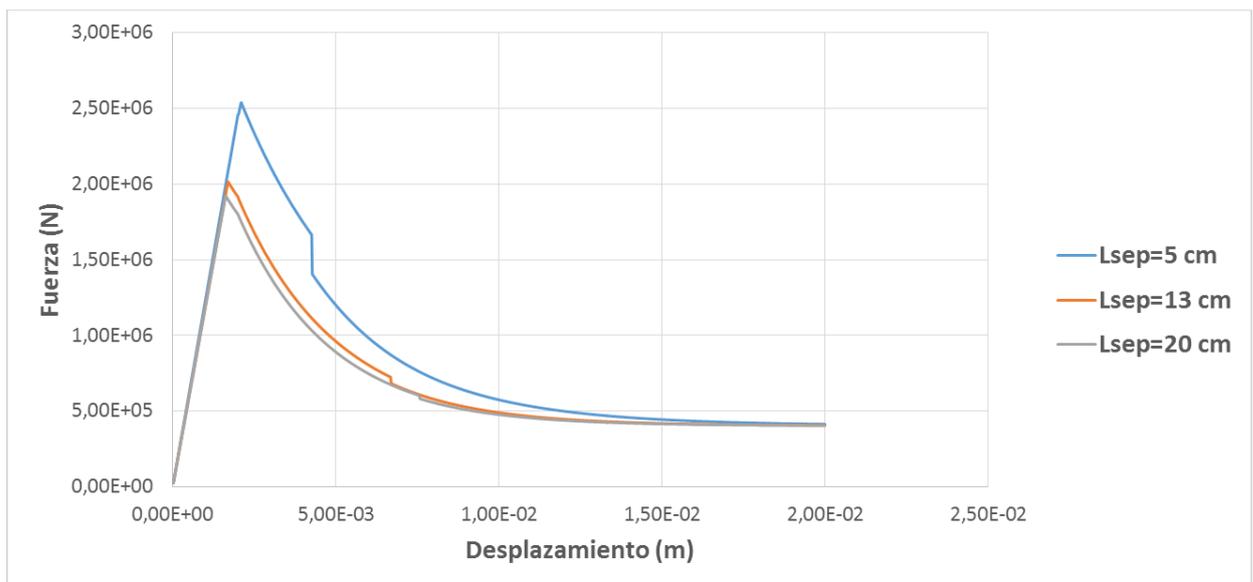


Figura 6.19. Curva fuerza-desplazamiento de la barra para distintas separaciones entre cercos (L_{sep}). Diámetro de los cercos de 8 mm.

6.2.6 Influencia del diámetro de los cercos

La misma barra se calcula ahora considerando cercos de diámetros distintos. En la Figura 6.20 se muestra la curva fuerza-desplazamiento de la barra para distintos diámetros de cercos. Se observa como al aumentar el diámetro de los cercos aumenta la ductilidad y la resistencia de la barra. Se observa, por ejemplo, que para una misma barra, colocando cercos de 25 mm de diámetro se desarrolla una fuerza máxima de aproximadamente 26.4 kN, mientras que con cercos de 8 mm, solamente se alcanza una fuerza máxima de alrededor de 20.1 kN, por lo que los cercos de 25 mm producen un aumento en la resistencia de la barra del 31%. Se comprueba de nuevo la capacidad del modelo de cuantificar la variación de resistencia y de ductilidad de la barra en función del diámetro de los cercos introducidos. Se observa también como el punto de plastificación de los cercos varía en función de la cuantía de cercos colocada. Al aumentar el diámetro de los cercos (aumento de cuantía) disminuye la deformación de plastificación y por lo tanto las barras plastifican antes. Ello se debe a que, tanto en la realidad como en la formulación del modelo propuesto, se desarrollan mayores tensiones laterales al aumentar la cuantía de cercos, dada una cierta deformación longitudinal impuesta. Se observa también que cuando la plastificación de los cercos se produce para deformaciones menores (por ser la cuantía de cercos mayor), el descenso que se produce en la fuerza es mayor mientras que, cuando la plastificación de los cercos se produce para deformaciones más elevadas (cuantía de cercos menor), el descenso de la fuerza es menos importante. Ello se debe a que para mayores niveles de deformación el hormigón tiene un índice de daño mayor y, por lo tanto, se reduce el efecto que tiene el confinamiento de los cercos.

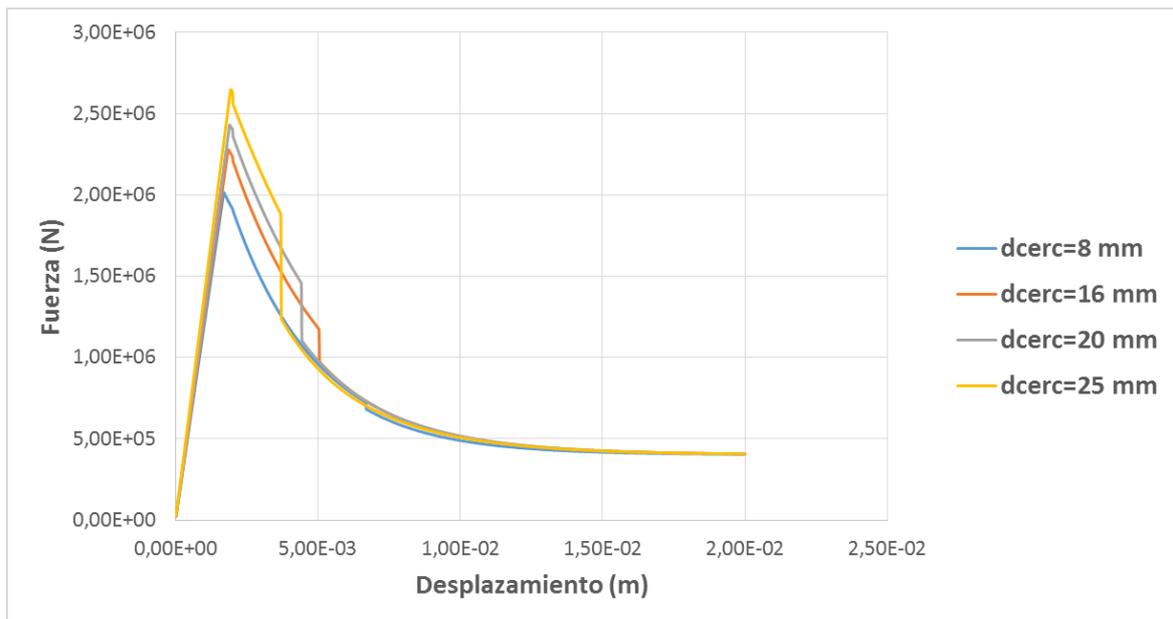


Figura 6.20. Curva fuerza-desplazamiento de la barra para distintos diámetros de cercos (*dcerc*).

6.2.7 Comportamiento de la barra a tracción

Con el modelo desarrollado se ha calculado también la barra estudiada a tracción. Ante cargas de tracción, el hormigón empieza a dañarse para niveles de deformación muy inferiores mientras que la plasticidad del acero se desarrolla para el mismo nivel de deformaciones que a compresión, dado el comportamiento constitutivo del material. En la Figura 6.21 se observa como el hormigón empieza a dañarse de forma muy brusca, para niveles de fuerza 10 veces inferior que a compresión. Posteriormente, las armaduras de acero, que todavía no han plastificado, siguen aportando una cierta rigidez a la barra, que tiene un comportamiento similar que en el apartado 6.2.1, donde no se consideraba la plasticidad de las barras. Para rangos de desplazamiento más

grandes, de 2 mm, las armaduras longitudinales plastifican. No se observa el fallo de los cercos cuando la barra se encuentra traccionada porque todo el hormigón se encuentra completamente dañado. Ello es consistente con el hecho de que el confinamiento de los cercos no interviene a tracción. Se observa cómo, al producirse la plastificación de la armadura longitudinal, se produce un salto brusco en la respuesta de la estructura. Dicha discontinuidad se produce porque, como ya se ha comentado en el capítulo 5, para estados avanzados de degradación del hormigón, el comportamiento real de la barra se aleja del que se consideró en el Capítulo 3 porque se altera el equilibrio interno de la barra.

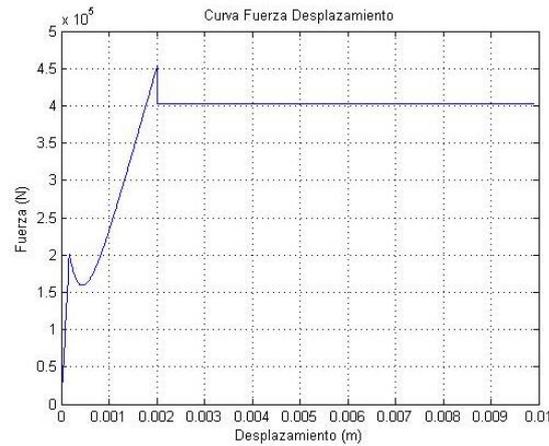


Figura 6.21. Curva fuerza-deformación de la barra a tracción

Al haberse estudiado el comportamiento de la barra tanto a tracción como a compresión, es posible mostrar ahora la curva fuerza-desplazamiento completa (ver Figura 6.22). Se puede observar claramente el comportamiento distinto de la barra a tracción y compresión, puesto que el hormigón empieza a dañarse a tracción al alcanzar fuerzas 10 veces menores que a compresión. En cambio, se observa como el acero tiene el mismo comportamiento tanto a tracción como a compresión, plastificando las armaduras para el mismo nivel de deformación en la estructura en ambos estados de carga. Además, tanto a tracción como a compresión, la respuesta de la barra tiende al mismo valor, correspondiente al valor límite que puede desarrollarse en el acero al plastificar, que en este caso es de 402 kN.

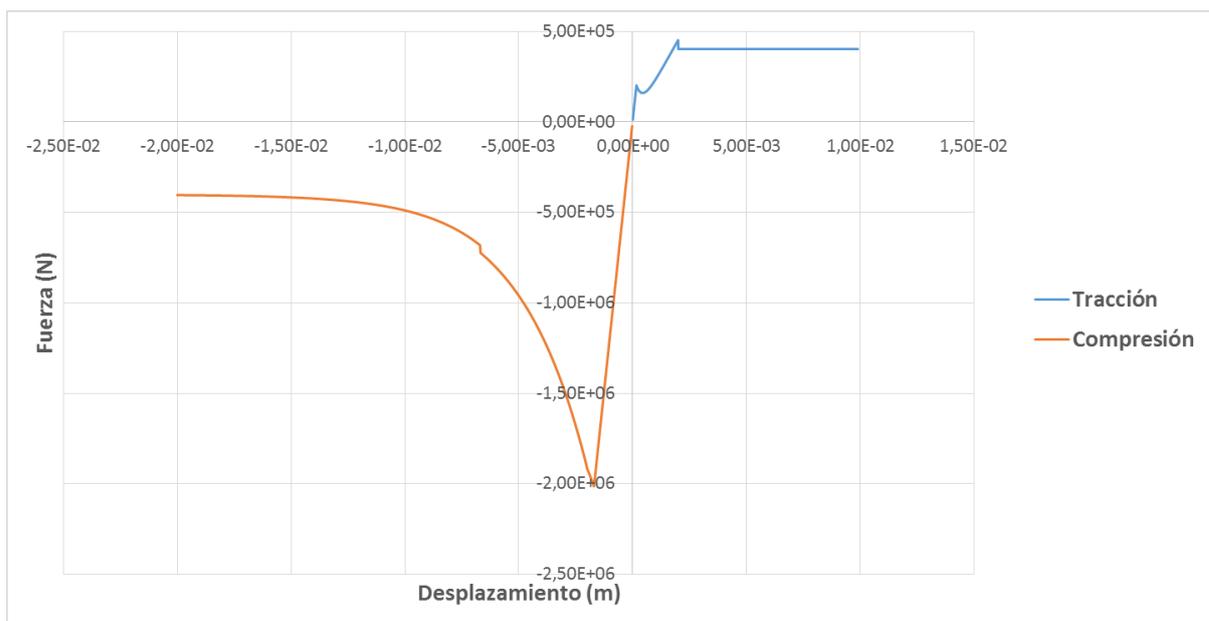


Figura 6.22. Curva fuerza-desplazamiento de la barra a tracción y a compresión

En la Figura 6.23 se observa como la evolución del daño del hormigón es distinta a compresión y a tracción. El inicio del daño se produce para deformaciones completamente distintas, siendo 10 veces superiores a compresión que a tracción. Asimismo, el daño se desarrolla en tracción de forma mucho más rápida y brusca. Además de iniciarse antes, el daño a tracción alcanza el 100% mucho más rápida y súbitamente que a compresión.

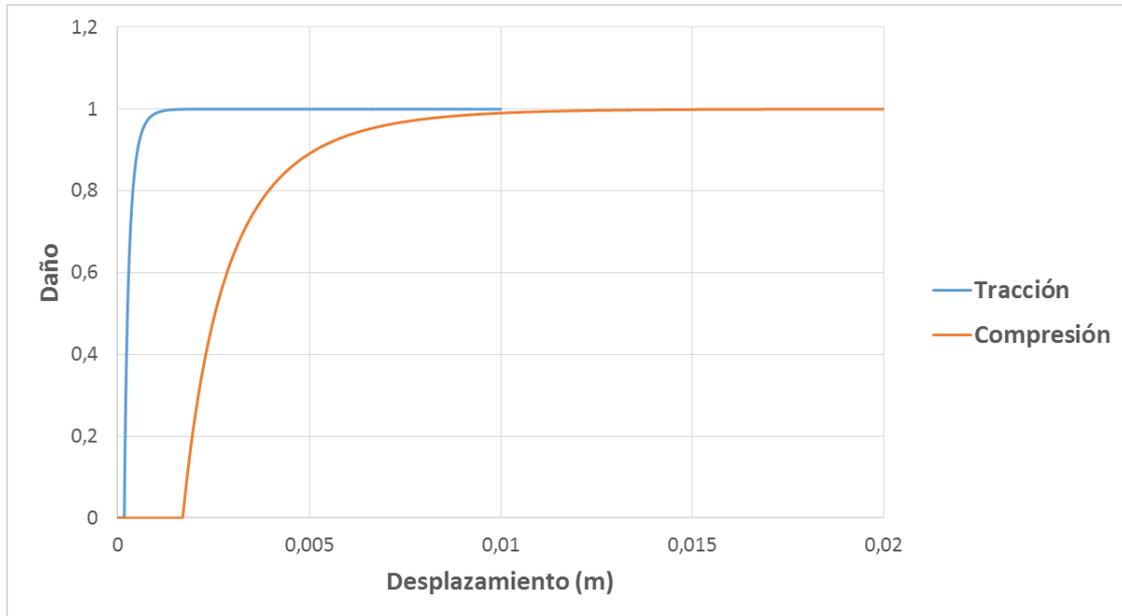


Figura 6.23. Evolución del daño del hormigón a tracción y a compresión

6.2.8 Influencia de la energía de fractura del hormigón

La energía de fractura es un parámetro que afecta la evolución del daño en el hormigón. A mayor energía de fractura, menor será el daño del hormigón, dado una cierta deformación impuesta. Este parámetro depende en gran medida de la dosificación utilizada en la elaboración del hormigón. Así, la energía de fractura es una propiedad del hormigón que debe ser calibrada en el modelo en función de resultados experimentales obtenidos con hormigones similares.

No obstante, es posible estudiar la variación de la respuesta de la estructura en función de la energía de fractura introducida. Para ello, se calcula la barra imponiendo energías distintas (ver Figura 6.24). Se ha implementado, por una parte, un hormigón con 100 kPa·m de energía de fractura, que es el valor que se ha utilizado para realizar todos los cálculos anteriores. Se ha llegado a este valor a través de una calibración de los valores de las propiedades, que comparando la respuesta de la barra con los resultados de Claeson (1999). Asimismo, se ha implementado también una energía de fractura igual a la mitad (50 kPa·m) y al doble (200 kPa·m). Se observa como el hormigón se daña de forma más rápida y brusca al reducirse la energía de fractura. Ello también se puede ver en la Figura 6.25, donde se muestra la evolución de la variable interna de daño del hormigón en función de los desplazamientos de la barra.

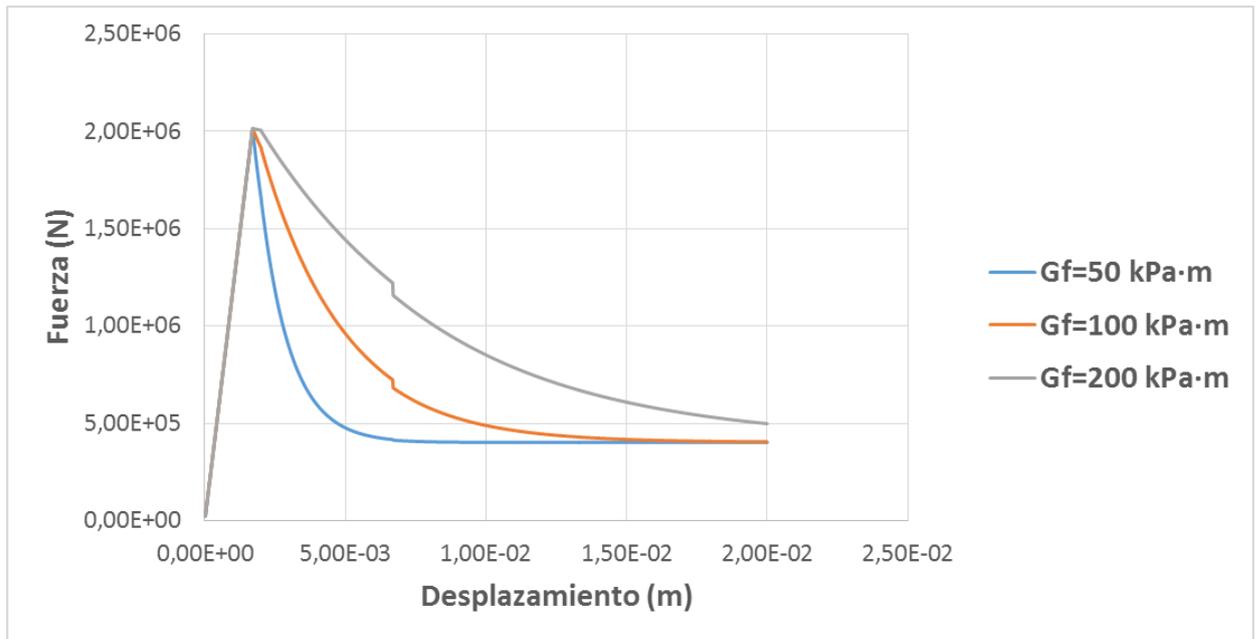


Figura 6.24. Curva fuerza-desplazamiento para distintas energías de fractura

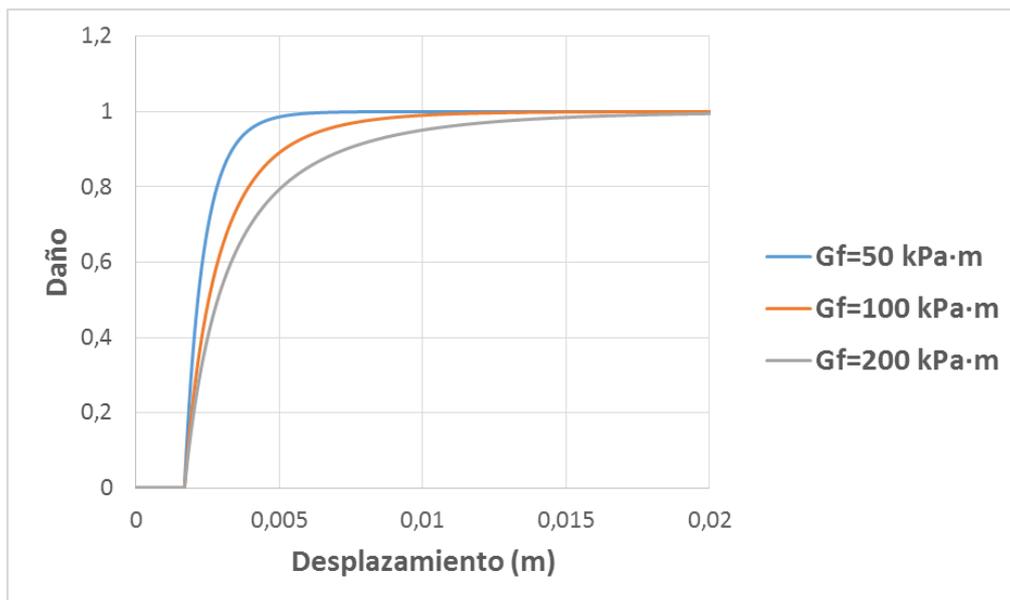


Figura 6.25. Evolución del daño del hormigón en la barra para distintas energías de fractura

El modelo desarrollado en el presente trabajo permite introducir la energía de fractura que se considere adecuada para ajustarse lo mejor posible al comportamiento del hormigón estudiado y adaptarse a la evolución del daño que tenga cada hormigón en particular.

6.2.9 Comparación de los distintos comportamientos de los cercos

El efecto que tiene realmente la plastificación de los cercos en el interior de la barra es complejo. Como ya se ha comentado en el Capítulo 5, se ha considerado más correcto realizar los cálculos anteriores considerando que para niveles importantes de degradación del hormigón el efecto del confinamiento producido por los cercos desaparece. Efectivamente se ha determinado en el Capítulo 5 el efecto que tiene la plastificación de los cercos, de forma que se produce un umbral

de fuerza límite. que depende la cuantía de cercos. No obstante, ya se ha comentado que, en la realidad, para estados avanzados de degradación del hormigón, el efecto del confinamiento producido por los cercos desaparece. La función de los cercos es confinar el hormigón, de forma que cuando éste está completamente dañado, ya no produce efecto alguno en la barra. Para resaltar el interés de realizar esta hipótesis, se muestra a continuación el comportamiento de la barra con diferentes tratamientos posibles en función del estado de plastificación de los cercos.

El cálculo se ha realizado para distintos casos del estado de los cercos. En la Figura 6.26 puede verse el comportamiento de la barra cuando no hay cercos (curva “sin cercos”), cuando los cercos no plastifican y mantienen su comportamiento elástica (curva “cercos elásticos”), cuando el confinamiento desaparece tras plastificar los cercos (curva “modelo”) y cuando se mantiene la fuerza umbral calculada mediante (5.57) (curva “Fplast cerco”). Sería lógico y esperable que el comportamiento real de la estructura esté comprendido entre la curva correspondiente a la barra sin cercos y la curva con cercos elásticos.

En la curva “Fplast cerco” de la Figura 6.26 se produce un salto hacia arriba en la respuesta de la estructura. Dicho salto se debe a que el equilibrio en el interior de la barra se ve afectado por el avanzado estado de daño del hormigón, por lo que ya no se cumplen las ecuaciones (3.27) y (3.75). Además, dicha curva no considera la pérdida del efecto del confinamiento producido por la degradación del hormigón. Por todo ello se ha desestimado utilizar esta hipótesis en el modelo. No obstante, cabe destacar que para niveles de deformación elevados los resultados experimentales de Claeson (1999) son más parecidos a los de esta hipótesis, siendo más parecidos los valores finales de fuerzas a los que tiende la barra. Posiblemente en un futuro será interesante introducir el efecto de la degradación del hormigón en las ecuaciones (3.27) y (3.75).

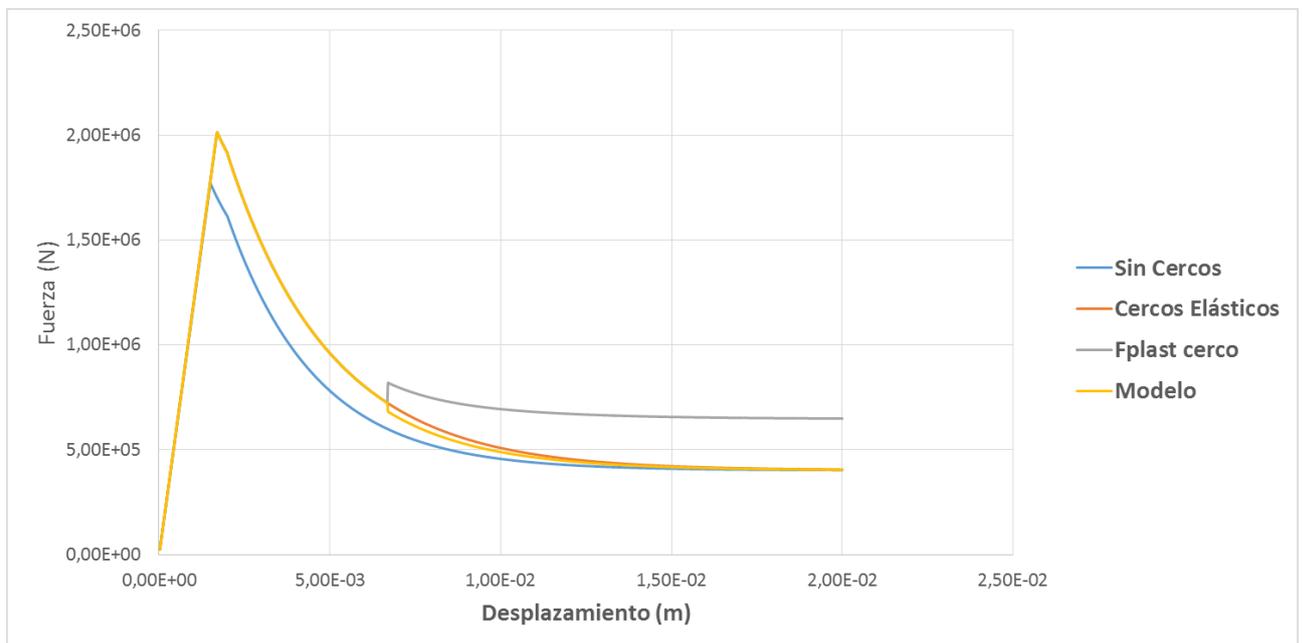


Figura 6.26. Curva fuerza-desplazamiento para distintas hipótesis sobre la plastificación de los cercos

Cabe destacar que el modelo desarrollado en base a la teoría de homogeneización considera una distribución de las tensiones de confinamiento constante en cada elemento y cada capa, tratando la presencia de los cercos de forma análoga a un encamisado metálico exterior. Por esta razón se llega a desarrollar una fuerza umbral constante por el esfuerzo de plasticidad, de forma similar a la que se produciría en la realidad en el encamisado, aunque todo el hormigón se encuentre completamente dañado en su interior. En ese caso sí que sería correcto que la respuesta de la estructura desarrollara un umbral de fuerza constante para niveles de degradación importantes del

hormigón. Pero, en el caso de los cercos, dicho comportamiento no se llega a desarrollar porque, como ya se ha explicado, al deteriorarse completamente el hormigón el confinamiento de los cercos, ya no se produce.

6.3 Cálculo de un pórtico de 1 piso

En este apartado se estudia un pórtico de tres barras sobre el que se aplica una carga lateral (ver Figura 6.27). Dicho pórtico fue calculado por Molina (2001) utilizando la teoría de mezclas para considerar el confinamiento producido por los cercos. Se pretende comparar sus resultados con los obtenidos mediante el presente modelo simplificado, en una dimensión, para realizar la validación del último. El cálculo del mencionado pórtico se ha realizado considerando dos casos: armadura elástica y elasto-plástica. Concretamente, en este caso en que la estructura trabaja a flexión, como ya se ha comentado en el capítulo anterior, se ha considerado únicamente la plastificación de la armadura longitudinal, mientras que para los cercos se considera un comportamiento elástico lineal.

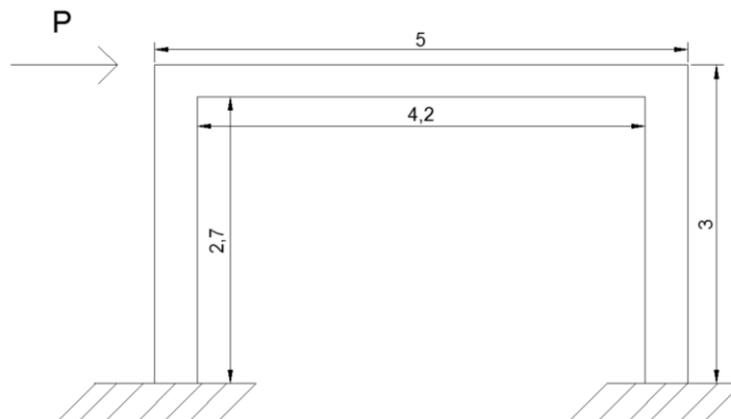


Figura 6.27. Pórtico de un piso calculado, cotas en m.

La estructura se ha cargado aplicando un desplazamiento horizontal en la unión entre la columna y la viga tal y como puede verse en la Figura 6.27. Los detalles del armado de la viga y los pilares son los de la Figura 6.28. La carga se aplica mediante varios incrementos sucesivos en el mencionado punto.

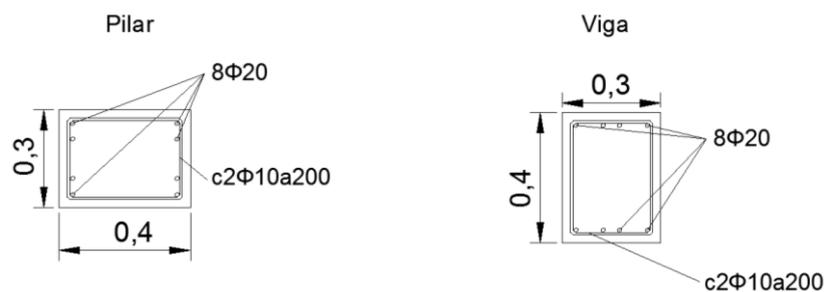


Figura 6.28. Detalle del armado de las secciones del pórtico de un piso considerado

En el primer cálculo, suponiendo armadura elástica, las propiedades de los materiales componentes son los de la Tabla 6.4. Al principio se han introducido unas propiedades genéricas para el hormigón que luego se han ajustado para que se obtengan resultados similares a los del experimento. Concretamente, se ha ajustado la energía de fractura del hormigón a 50 kPa·m a compresión para obtener resultados suficientemente parecidos. La resistencia del hormigón es de 30 MPa a compresión y ambos valores, tanto la energía de fractura como la resistencia del

hormigón, son 10 veces inferiores cuando el hormigón está sujeto a tracción. Como ya se ha comentado, primeramente se considera el caso en que el acero tiene un comportamiento elástico y, posteriormente, se implementará la plasticidad del acero. Los resultados obtenidos con el modelo de Molina (2011) son los de la Figura 6.29.

Tabla 6.4. Propiedades de los materiales componentes del pórtico

Material	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson	σ_C (MPa)	σ_T (MPa)	G_C (kPa·m)	G_T (kPa·m)
Hormigón	25	0.2	30	3	50	5
Acero	200	0.3	-	-	-	-

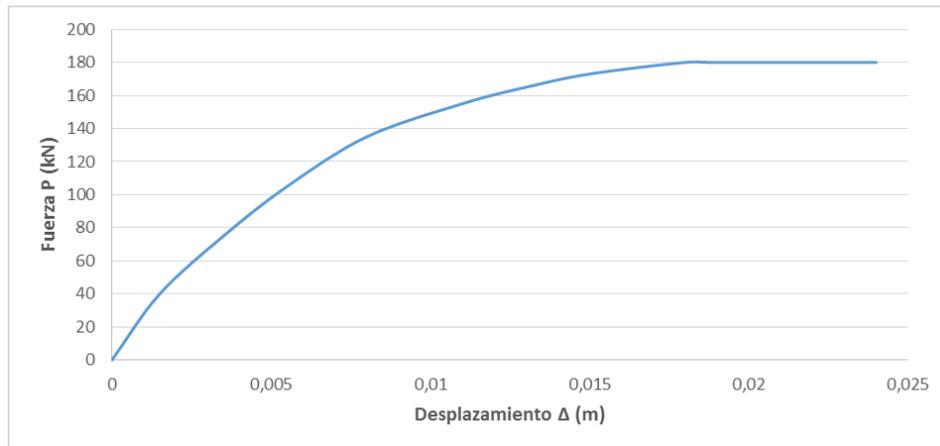


Figura 6.29. Curva cortante en la base-desplazamiento horizontal. Cálculos realizados por Molina (2011).

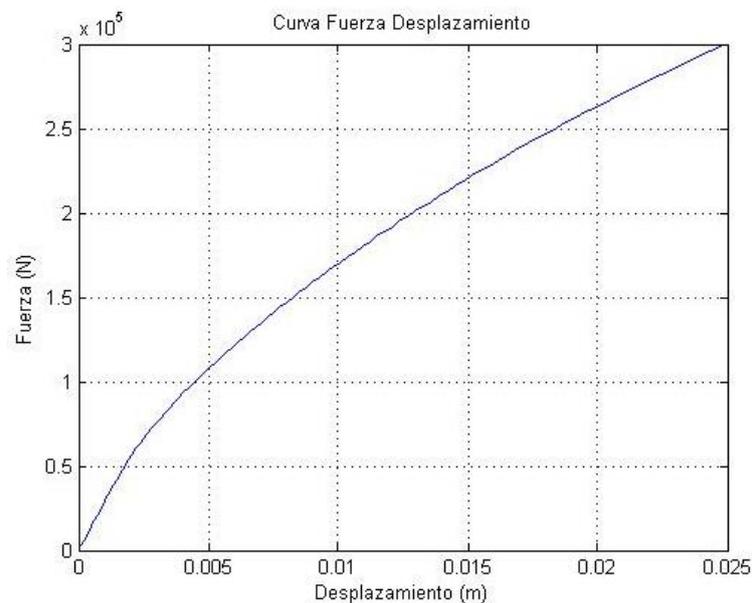


Figura 6.30. Curva cortante en la base-desplazamiento horizontal del pórtico según el modelo propuesto en el presente trabajo. Armadura elástica.

La curva de la respuesta de la estructura calculada con el modelo propuesto en el presente trabajo es la de la Figura 6.30. Se observa el modelo propuesto no reproduce adecuadamente el comportamiento de la estructura para rangos de deformaciones elevados por no considerarse en él la plastificación de las armaduras. No obstante, para niveles de desplazamiento pequeños,

cuando la plastificación de las armaduras todavía no se produce, el modelo describe adecuadamente el comportamiento del pórtico, de forma parecida a los resultados que Molina (2011) ha obtenido.

Se ha realizado un segundo cálculo introduciendo esta vez la plasticidad de la armadura longitudinal. Las propiedades de los materiales componentes son los de la Tabla 6.5. Se ha ajustado la energía de fractura del hormigón compresión a 50 kPa·m para obtener resultados suficientemente parecidos. Además, la resistencia del hormigón es de 30 MPa a compresión y ambos valores, tanto la energía de fractura como la resistencia del hormigón, son 10 veces inferiores cuando el hormigón está sujeto a tracción. La resistencia del acero es de 270 MPa.

Tabla 6.5. Propiedades de los materiales componentes del pórtico

Material	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson	σ_C (MPa)	σ_T (MPa)	G_C (kPa·m)	G_T (kPa·m)
Hormigón	25	0.2	30	3	50	5
Acero	200	0.3	270	270	-	-

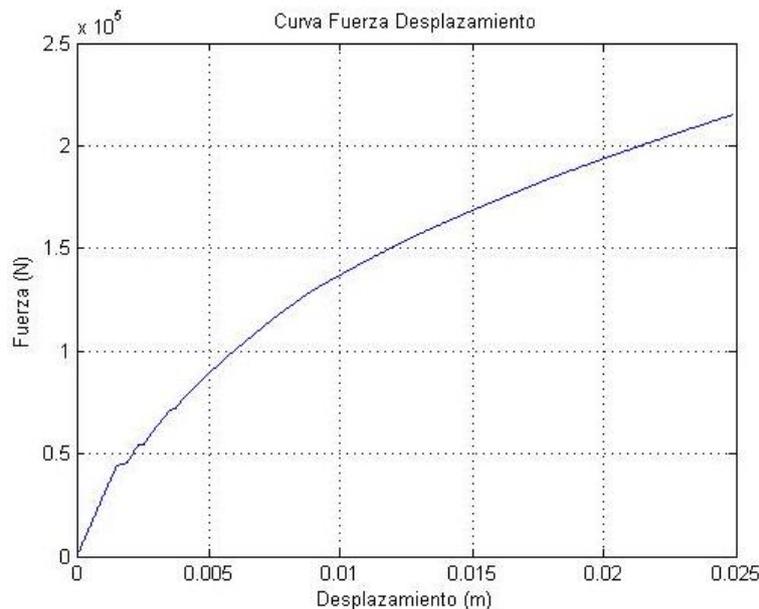


Figura 6.31. Curva cortante en la base-desplazamiento horizontal del pórtico según el modelo propuesto en el presente trabajo. Armadura elasto-plástica.

La curva de la respuesta de la estructura calculada con el modelo propuesto en el presente trabajo considerando la plasticidad de la armadura longitudinal es la de la Figura 6.31. Se observa como la curva fuerza-desplazamiento resultante se parece en gran medida a los resultados obtenidos por Molina (2011) (Figura 6.29). Los resultados son especialmente parecidos cuando los desplazamientos del pórtico son pequeños mientras que, cuando éstos crecen, empiezan a aparecer discrepancias entre el modelo propuesto y los resultados de Molina (2011).

Este pórtico se ha calculado dividiendo cada barra en 10 elementos de barra y dividiendo cada sección en 10 capas. Se ha aplicado la carga impuesta en 100 incrementos, con lo que el tiempo total de cálculo del programa desarrollado es de 40 segundos.

En la Figura 6.32 se comparan los resultados obtenidos mediante las dos hipótesis de cálculo consideradas para el pórtico con los resultados numéricos obtenidos por Molina (2011). Se

observa como el pórtico con plastificación de la armadura tiene una curva más parecida a los resultados de Molina (2011) (ver Figura 6.29). Se observa, asimismo, una reducción de la fuerza bajo la hipótesis de armadura elasto-plástica para un mismo nivel de desplazamientos. Concretamente, para un desplazamiento de 0.025 m, la diferencia de fuerzas es de aproximadamente el 41%, debido a la plastificación de la armadura longitudinal. Cabe destacar que Molina (2011) utiliza un modelo constitutivo para el acero mucho más complejo, que considera, entre otros fenómenos, el ablandamiento del acero tras su plastificación. Posiblemente el uso de modelos constitutivos distintos para el acero sea la causa de que los resultados del modelo propuesto en el presente trabajo no se ajusten mejor a los de Molina (2011).

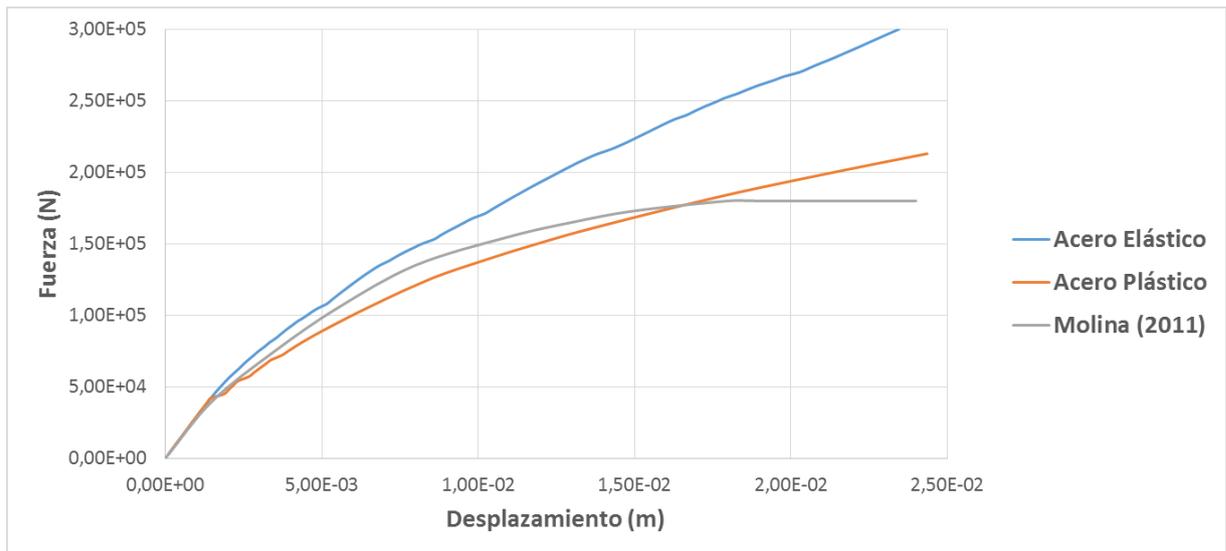


Figura 6.32. Cálculo del pórtico considerando distintas hipótesis

El modelo desarrollado permite, al haber realizado la descomposición de la sección por capas y de la estructuras en barras, determinar las zonas se ha degradado el hormigón. De esta forma es posible determinar el mecanismo de rotura que se produce en la estructura (ver Figura 6.33). Al aumentar el número de elementos y de capas utilizados para realizar el cálculo, se puede determinar con mayor precisión el mecanismo que se desarrolla. Tal y como era esperable, dada la posición de la carga aplicada, se obtiene un mecanismo de fallo traslacional, donde se produce el fallo de los puntos de hormigón que se encuentran traccionados. El fallo de la estructura se produce, sobre todo, por la pérdida de casi toda la sección útil de la sección de hormigón en sus dos apoyos. El mecanismo de rotura obtenido es similar al que obtuvo Molina (2011) (ver Figura 6.34).

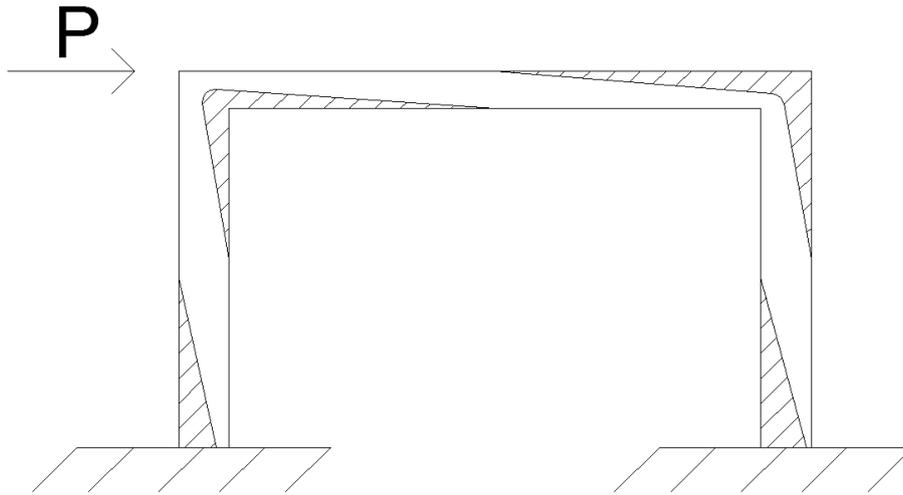


Figura 6.33. Zonas donde se ha producido la degradación del hormigón en la estructura

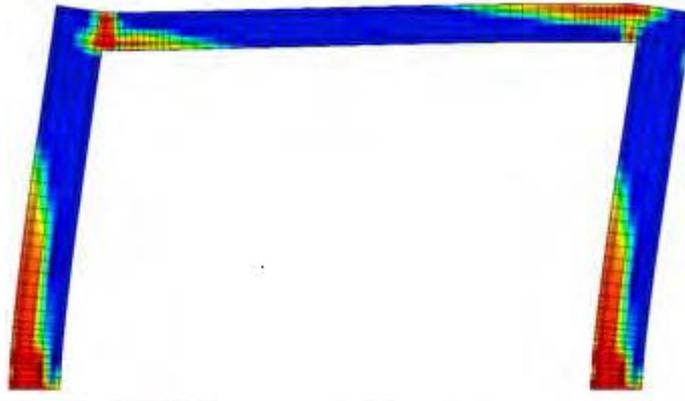


Figura 6.34. Mecanismo de fallo del pórtico determinado por Molina (2011).

No obstante se observa como el modelo unidimensional propuesto es capaz de reproducir adecuadamente el comportamiento del pórtico. El objetivo marcado para el modelo unidimensional propuesto es que sea suficientemente sencillo como para poder ser utilizado en la práctica del diseño y, por lo tanto, que tenga un coste computacional del mismo orden que el de los programas clásicos de cálculo de estructuras de barras.

Capítulo 7

Conclusiones y futuras líneas de investigación

En este trabajo se desarrolla un modelo para el análisis no lineal de pórticos de hormigón armado que considera el confinamiento producido por los cercos así como la capacidad de los mismos de soportar el esfuerzo cortante. Dicho modelo se basa en la teoría de homogeneización, que trata el hormigón armado como un material compuesto. Para su desarrollo se utilizan los principios de equilibrio y compatibilidad y los modelos constitutivos adecuados para tratar la no linealidad de los materiales componentes: ley constitutiva de daño para el hormigón y ley de comportamiento elasto-plástico para el acero. La presencia de los cercos aumenta significativamente la rigidez, resistencia y ductilidad de las barras de hormigón armado.

Se desarrolla un modelo simplificado de barras con confinamiento, sin embargo, los resultados que proporciona son buenos, comparables con los calculados con modelos mucho más sofisticados. El modelo se incorpora en un programa de ordenador que permite resolver el problema de forma eficiente desde el punto de vista computacional. La ventaja del programa es el tiempo de cálculo bajo, muy inferior al de los programas basados en elementos finitos. Con dicho programa se ha validado el modelo propuesto mediante resultados numéricos y experimentales existentes en la literatura. Además, se han calculado ejemplos de aplicación que ilustran la capacidad del modelo para resolver diferentes problemas y la influencia de los principales parámetros que intervienen en el confinamiento de la barra.

7.1 Conclusiones del trabajo

7.1.1 Conclusiones sobre el modelo desarrollado

- El modelo de barras unidimensionales propuesto en este trabajo permite obtener resultados buenos, comparables con los proporcionados por modelos mucho más sofisticados.
- El confinamiento debido a los cercos influye significativamente en el comportamiento de las estructuras de hormigón armado. Dicho confinamiento influye en la resistencia de la estructura ante cargas externas e incrementa la ductilidad de las barras.

- Generalmente, el efecto del confinamiento es considerado únicamente a partir de resultados empíricos y/o experimentales, sin considerar cuáles son los mecanismos que se producen realmente en el interior de la barra. El modelo desarrollado utiliza la teoría de homogeneización para resolver el problema de las barras de hormigón armado confinado de una forma novedosa y eficaz, proporcionando resultados de una adecuada precisión.
- El comportamiento depende en gran medida de las leyes constitutivas utilizadas en el modelo para los materiales componentes (hormigón y acero), y de la cuantía de cercos introducidos en la barra.
- El tratamiento de las barras unidimensionales mediante capas permite describir de forma simplificada el mecanismo de fractura que se produce en la estructura.

7.1.2 Conclusiones sobre el programa de cálculo desarrollado

- El modelo unidimensional propuesto se ha implementado en un programa de cálculo de estructuras desarrollado con la herramienta Matlab. El programa considera el comportamiento no lineal del hormigón y del acero así como el efecto que tiene el confinamiento producido por cercos en el hormigón.
- El programa facilita la combinación de fenómenos no lineales y la utilización de modelos de comportamiento complejos para los materiales, lo que permite describir con más precisión el comportamiento real de las estructuras de barras considerando el confinamiento producido por los cercos.
- El programa resuelve el modelo desarrollado con una alta eficacia computacional: el tiempo de cálculo es muy bajo, muy inferior al de los programas que utilizan elementos finitos.
- La velocidad de resolución de los problemas es del orden de entre unos segundos y uno o dos minutos como máximo, dependiendo del tipo de acción aplicada, de la complejidad de la estructura analizada y del grado de precisión deseado. Concretamente, el tiempo de cálculo depende del número de capas utilizadas para descomponer la sección, del número de elementos de barra en que se haya discretizado la estructura y de la tolerancia impuesta en el cálculo no lineal que, a su vez, influye en el número de iteraciones necesarias. La velocidad, que es muy superior a la de los programas de elementos finitos, se considera razonable dado el objetivo marcado de que el método tuviese una velocidad similar a la de los programas de cálculo convencionales.
- Para asegurar la precisión de los resultados en el caso de los problemas a flexión, se recomienda dividir la sección en un elevado número de capas, así como dividir las barras en un número razonable de elementos. No es necesario hacer esto en el caso de problemas de compresión o tracción pura.

7.1.3 Conclusiones sobre los resultados obtenidos

- Los ejemplos de cálculo realizados para varias estructuras muestran que considerar el confinamiento del pórtico conduce a resultados similares a los obtenidos mediante ensayos experimentales. Tanto la resistencia como la ductilidad de la barra se ven afectadas de forma significativa por el confinamiento producido por los cercos.
- El hormigón de las barras empieza a dañarse ante fuerzas y desplazamientos muy pequeños.
- El daño que se produce en el hormigón y la plastificación de las armaduras de acero altera significativamente la respuesta de la estructura.

- El aumento de la cuantía de cercos mediante la reducción de la separación o el aumento del diámetro de los mismos, produce un importante aumento de la resistencia y de la ductilidad de la barra, que no puede ser ignorado en el cálculo de la estructura.

7.2 Líneas futuras de trabajo

Partiendo del trabajo realizado y de los resultados obtenidos se proponen las siguientes líneas de investigación futura:

- Implementar el modelo propuesto en 3 dimensiones en un programa de cálculo no lineal de estructuras de elementos finitos.
- Desarrollar e introducir la formulación para barras de sección circular.
- Implementar en un programa de ordenador el comportamiento de las barras de hormigón armado confinado sometidas a cargas cíclicas, dinámicas o sísmicas. El modelo propuesto en el presente trabajo permite dicha implementación de forma fácil. El tratamiento por capas de las barras unidimensionales y la adecuada elección del modelo de no linealidad para los materiales resuelve las principales dificultades relacionadas con ello.
- Introducir un modelo de deslizamiento entre el hormigón y el acero. La hipótesis de unión perfecta entre ambos materiales no considera todas las posibilidades de fallo que se pueden llegar a producir.
- Introducir el efecto del pandeo de la armadura longitudinal.
- Implementar leyes constitutivas de no linealidad de los materiales más complejas, que permitan reproducir mejor su comportamiento real observado en ensayos experimentales. Especialmente, introducir un criterio de fluencia tridimensional para el acero que reproduzca con más precisión su comportamiento.
- Implementar el modelo unidimensional propuesto en el modelo de cálculo sísmico para pórticos de hormigón armado con muros de mampostería desarrollado por el autor en el marco del trabajo final de grado (Barbat 2014).
- Mejorar la implementación del tratamiento de la plastificación de los cercos, tanto ante problemas a flexión como a compresión.
- Implementar el modelo propuesto para estructuras de barras con un esquema estructural que trabaja en 3 dimensiones, que requiere de una matriz de rigidez distinta, de dimensión 12×12 , y analizar edificios más complejos.

Referencias

- Alarcón E., Alvarez R. y Gómez M. S. (1990). Cálculo matricial de estructuras. Editorial Reverté. Barcelona. España.
- Albanesi S. y Biondi S. (1995). On Longitudinal Reinforcement Buckling in Flexural R/C Members Subjected to Strong Inelastic Loads. Proc. Of Tenth Eur. Conf. Earthq. Engrg., Vienna 1994.
- Armero F. y Oller S. (2000). A general framework for continuum damage models. Part I: Infinitesimal plastic damage models in stress. International journal of solids and structures 2000. Vol37, No 48-50,:7409-7436.
- Armero F. y Oller S. (2000). A general framework for continuum damage models. Part II: Integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals. International journal of solids and structures 2000. Vol37, No 48-50,:7437-7464.
- Attolico A., Biondi S., Nuti C. y Petrangeli M. (2000). Influence of buckling of longitudinal rebars in finite element modelling of reinforced concrete structures subjected to cyclic loading. Proc. of 12th World Conf. Earthq. Engng., Auckland, 30 Jan. – 4 Feb. 2000, EQC-NZSEE, Silverstream, Paper No. 0896.
- Barbat A.H., Oller S., Oñate E. y Hanganu A. (1997). Viscous damage model for Timoshenko beam structures. *Int. J. Solids Structures* Vol. 34, No. 30, pp. 3953-3976, 1997
- Barbat G. (2014). Un modelo de cálculo sísmico para pórticos de hormigón armado con muros de mampostería. Trabajo final de grado. ETSECCPB. UPC. Dirigido por Sergio Oller.
- Bazant Z.P. y Burrow M.C. (1980). Confinement effect in flexural ductility of concrete: Three dimensional analysis. *Materials and Structures* (RILEM, Paris), 13, 296-308.
- Bazant Z.P. y Planas J. (1998). Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. CRC Press, Boca Raton and London.
- Berry M.P. y Eberhard M.O. (2005). Practical performance model for bar buckling. *J. Struct. Eng.*, 10.1061/(ASCE)0733-9445(2005)131:7(1060), 1060-1070.
- Berwanger C. (1975). Effect of axial load on the moment-curvature relationship of reinforced concrete members. ACI publication No. SP-50, American Concrete Institute, Detroit.

- Braga F., Gigliotti R. y Laterza M. (2006). Analytical stress-strain relationship for concrete confined by steel stirrups and/or FRP jackets. *J. Struct. Eng.*, 10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:9(1402), 1402-1416.
- Candappa D.P., Setunge S. y Sanjayan J.G. (1999). Stress versus strain relationship of high-strength concrete under high lateral confinement. *Cem. Concr. Res.*, 29, 1977-1982.
- Car E., Oller S. y Oñate E. (2000). Tratamiento numérico de materiales compuestos. Monografía nº 57. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE). Barcelona. España.
- Car E. (2000). Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Cervera M. y Blanco E. (2001). Mecánica de estructuras. Libro 1: Resistencia de materiales. Ediciones UPC.
- Claeson C. (1999). Finite element analysis of confined concrete columns. *Nordic Concr Res-Publ*, 22, pp. 1-20
- Cusson D. y Paultre P. (1994). High-strength concrete columns confined by rectangular ties. *J. Struct. Eng.*, 120(3), 783-804.
- De Borst R. y Nauta P. (1984). Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. International Report inst. TNO for building material and building structure. Delft, Netherlands.
- De Borst R., Kusters G.M.A., Nauta P. y Witte F.C. (1984). DIANA, a three-dimensional, nonlinear finite element package on a microcomputer. *Engineering Software for Microcomputers*. Pineridge Press, Swansea, 435-446.
- Delalibera R.G. y Giongo J.S. (2008). Theoretical and numerical analysis of reinforced concrete beams with confinement reinforcement. *Ibracon structures and materials journal*. Volume 1, number 1 (March, 2008) p.17-30. ISSN 1983-4195.
- Eindea L.V.D., Zhao L y Seible F. (2003). Use of FRP composites in civil structural applications. *Construction and building materials*. 17(6-7):389-403.
- Faleiro J. (2006). Plasticity and damage of framed structures. Tesis doctoral dirigida por Alex Barbat y Sergio Oller. Departamento de resistencia de materiales y estructuras en la ingeniería. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Harmon T.G., Ramakrishnan S. y Wang E.H. (1998). Confined concrete subjected to uniaxial monotonic loading. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, No. 12, p. 1303-1309.
- Kent D.C y Park R. (1971). Flexural members with confined concrete. *Journal of the Structural Division*. ASCE, Vol. 97, No. 7.
- Laterza M. (1996). Strength of concrete confined by steel stirrups. Tesis doctoral. Univ. di Salerno y Univ. della Basilicata. Potenza, Italy.
- Lublimer J., Oliver J., Oller S. y Oñate E. (1989). A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures* 1989. Vol.25, No.3:299,326.
- Malvern L. (1969). Introduction to the mechanics of continuous medium. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- Mander J., Priestley M.J.N. y Park R. (1988). Observed stress-strain behavior of confined concrete. *J. Struct. Eng.*, 114(8), 1827-1849.
- Martínez X, Oller S., Rastellini F y Barbat A.H. (2008). A numerical procedure simulating RC structures reinforced with FRP using the serial/parallel mixing theory. *Computers and Structures* 86 (2008) 1604-1618.
- Mata P.L. (2008). Geometric and constitutive nonlinear dynamic analysis of beam structures with local irregularities. Tesis doctoral dirigida por Alex Barbat y Sergio Oller. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Molina M., Oller S., Barbat A. H. y Martínez X. (2009). Estudio de estructuras de hormigón reforzadas con FRP mediante la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista internacional de ingeniería de estructuras*, Vol. 13 y 14, 1, 29-54 (2008-2009).
- Molina M., Oller S., Barbat A.H. y Martínez X. (2010). Análisis numérico de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*. (2010) 26:135-155.
- Molina M. (2011). Simulación de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado. Tesis doctoral dirigida por Sergio Oller y Alex Barbat. Departamento de resistencia de materiales y estructuras en la ingeniería. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Montoya E. (2000). Modelling of confined concrete. Tesis de Master of Applied Science. University of Toronto, Canada.
- Montoya E., Vecchio F.J. y Sheikh A. (2001). Compression field modeling of confined concrete. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 12, Nº 3 (2001) 231-248.
- Montoya E., Vecchio F.J. y Sheikh S.A. (2004). Numerical evaluation of the behavior of steel and FRP confined concrete columns using compression field modeling. Elsevier, *Engineering Structures*; Vol. 26, No. 11, p. 1535-1545.
- Montoya E., Vecchio F.J. y Sheikh A. (2006). Compression field modeling of confined concrete: constitutive models. *J. Mater. Civ. Eng.*, 10.1061/(ASCE)0899-1561(2006)18:4(510), 510-517.
- Nallim L. y Oller S. (2012). Análisis no lineal de estructuras de hormigón armado y reforzado con FRP, mediante elementos finitos. *Reglamentación de las Estructuras de Hormigón. De la Perspectiva Prescriptiva al Diseño por Prestaciones*. Madrid; Año: 2012; p. 163 – 190.
- Oliver J. y Agelet de Saracibar C. (2000). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Ediciones UPC. Barcelona, España.
- Oliver J., Cervera M., Oller S. y Lubliner J. (1990). Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete. *Proceedings of the 2nd International Conference on Computer Aided, Analysis and Design of Concrete Structures*. Austria: Zell am See, 1990. P.945-957.
- Oller S. (1991). Modelización numérica de materiales friccionales. *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Monografía nº3*. Barcelona, España.
- Oller S. (2002). Dinámica no lineal. *Monografía CIMNE nº 63*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona, España.

- Oller S. (2003). Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE). Barcelona, España.
- Oller S. (2015). Numerical Simulation of Mechanical Behavior of Composite Materials. CIMNE. Springer.
- Papia P., Russo G. y Zingone G. (1988). Instability of Longitudinal Bars in RC Columns. *J. Struct. Engrg.* ASCE, (114) 2, 445-461.
- Park R., Priestley M.J.N. y Gill W.D. (1982). Ductility of square-confined concrete columns. ASCE, (4):929-951.
- Powanusorn, S. (2003). Effect of confinement on shear dominated reinforced concrete elements. Tesis doctoral dirigida por Joseph M. Bracci. Texas A&M University.
- Rastellini F., Oller S., Salomon O. y Oñate E. (2003). Advanced serial-parallel mixing theory for composite materials analysis. Continuum basis and finite element applications. COM-PLAS 2003-Proceeding CD of the VII international conference on computational plasticity; 2003.
- Razvi S. y Saatcioglu M. (1999). Confinement model for high-strength concrete. *J. Struct. Eng.* ASCE, 125(3), 281-289.
- Reisi M., Mostofinejad D. y Azizi N. (2008). M-P Curves for strengthened concrete columns with active confinement. The 14th World Conference on Earthquake Engineering. Beijing, China.
- Rousakis T.C. y Karabinis A.I. (2008). Substandard reinforced concrete members subjected to compression-FRP Confining effects. *Materials and Structures* 41(9):1595-1611 January 2008.
- Saatcioglu M. y Razvi S.R. (1992). Strength and ductility of confined concrete. *ASCE Journal of Structural Engineering*, v. 118, n. 6, p. 1590-1607, June.
- Sankarasubramanian G. y Rajasekaran S. (1996). Constitutive modelling of concrete using a new failure criterion. *Compos. Struct.*, 58(5), 1003-1014.
- Scott B.D., Park R. y Priestley M.J.N. (1982). Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates. *ACI journal*, 79(2):13-27.
- Scribner C.F. (1986). Reinforcement buckling in reinforced concrete flexural members. Vol. 83, No. 6, pp.966-973
- Sheikh S.A y Uzumeri S.M. (1982). Strength and ductility of tied concrete columns. *Journal of the Structural Engineering.* ASCE, Vol. 106, No5, 1079-1102.
- Thanthirige L. P., Braga F., Gigliotti R., Laterza M. y D'Amato M. (2013). Analytical cyclic constitutive model for confined concrete implementation in opensees: ConfinedConcrete02. CSECM.
- Walraven J.C. (1978). The influence of depth on the shear strength of light-weight concrete beams without shear reinforcement. Report 5-78-4, Stevin Laboratory, Delft University of Technology, Delft.
- Whittaker E.T. y Robinson G. (1967). *The Calculus of Observations: A Treatise on Numerical Mathematics*, 4th ed. New York: Dover, pp. 84-87.

- Yao W., Yang W. y Liu X. (2013). Experimental study on bending constitutive relation of steel box-concrete combined member. *IJCSI International Journal of Computer Science Issues*, Vol 10, Issue 1, January 2013. ISSN 1694-0784.
- Yin S.Y.L., Wang R. y Liu T.C. (2011). Sustainable concrete columns with innovative multi-spiral shear reinforcement. Conference Paper, Society for Social Management Systems.
- Ziara M.M., Haldane D y Kuttab A.S. (1995). Flexural behavior of beams with confinement. *ACI Journal*. Title n.92-S11, p.103-114, January-February.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. (1989). *The finite element method*. McGraw-Hill, Vol I y II.

Anejo 1

Matriz de rigidez incluyendo la deformación por cortante

A1.1 Deducción de las ecuaciones básicas

A continuación se procede a la deducción de las expresiones de las rigideces de la barra según el método descrito en Alarcón et al. (1990). Se considera una rebanada diferencial de una barra (véase la Figura A1.1).

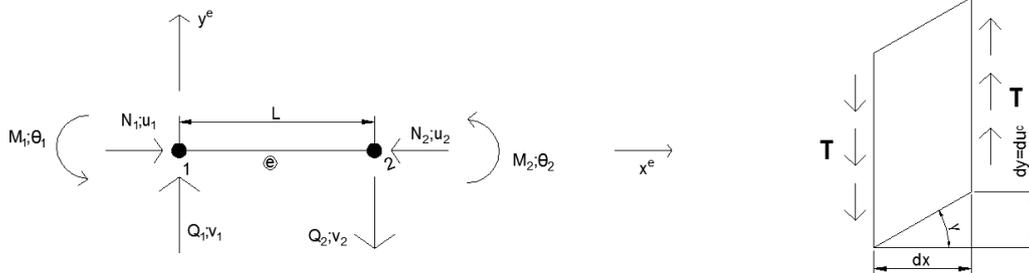


Figura A1.1. Esquema de la barra y de una rebanada diferencial

Debido al cortante se produce una deformación γ adicional, de forma que

$$\frac{dy}{dx} = \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{GA^*} = \frac{du^c}{dx} \quad (\text{A1.1})$$

siendo A^* el área reducida a cortante de la sección y u^c el desplazamiento vertical producido en la barra debido al cortante. También se produce un desplazamiento vertical u^f debido a la flexión, con lo cual el desplazamiento total de la barra es $u = u^f + u^c$.

La ecuación de la elástica es

$$\frac{d^2 u^f}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{M - Qx}{EI} \quad (\text{A1.2})$$

Integrando las ecuaciones (A1.1) y (A1.2) se obtiene

$$\frac{du^f}{dx} = -\frac{Q}{EI} \frac{x^2}{2} + \frac{M}{EI} x + c_1 \quad (\text{A1.3})$$

$$\frac{du^c}{dx} = \frac{Q}{GA^*} \quad (\text{A1.4})$$

$$u^f = -\frac{Q}{EI} \frac{x^3}{6} + \frac{M}{EI} \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (\text{A1.5})$$

$$u^c = \frac{Q}{GA^*} x + c_3 \quad (\text{A1.6})$$

de forma que el desplazamiento total u es

$$u = u^f + u^c = -\frac{Q}{EI} \frac{x^3}{6} + \frac{M}{EI} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{Q}{GA^*} + c_1\right) x + c_4 \quad (\text{A1.7})$$

y el giro de la barra, θ , es

$$\theta = \frac{du}{dx} = -\frac{Q}{EI} \frac{x^2}{2} + \frac{M}{EI} x + \frac{Q}{GA^*} + c_1 \quad (\text{A1.8})$$

Para obtener el valor de las constantes de integración se imponen las adecuadas condiciones de contorno. En el punto $x = 0$ el desplazamiento u y el giro producido por la flexión $\frac{du^f}{dx}$ son nulos (ver Figura A1.2)

$$u(x = 0) = 0 \quad (\text{A1.9})$$

$$\frac{du^f}{dx}(x = 0) = 0 \quad (\text{A1.10})$$

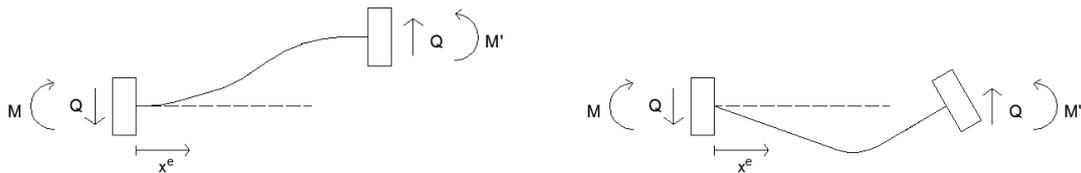


Figura A1.2. Desplazamientos producidos en la barra

De las condiciones de contorno (A1.9) y (A1.10) se deduce que:

$$\begin{aligned}c_4 &= 0 \\c_1 &= 0\end{aligned}\tag{A1.11}$$

En el punto $x = L$ existen dos condiciones de contorno posibles, dependiendo de cuál es la rigidez que se calcula. Por una parte, imponiendo un desplazamiento vertical u unitario y un giro producido por la flexión $\frac{du^f}{dx}$ nulo

$$u(x = L) = 1\tag{A1.12}$$

$$\frac{du^f}{dx}(x = L) = 0\tag{A1.13}$$

En ese caso, imponiendo las condiciones de contorno (A1.12) y (A1.13) junto con (A1.11) en las ecuaciones (A1.7) y (A1.8), se obtiene

$$-\frac{Q}{EI} \frac{L^3}{6} + \frac{M}{EI} \frac{L^2}{2} + \frac{Q}{GA^*} L = 1\tag{A1.14}$$

$$-\frac{Q}{EI} \frac{L^2}{2} + \frac{M}{EI} L + \frac{Q}{GA^*} = 0\tag{A1.15}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por (A1.14) y (A1.15) se obtiene

$$Q = \frac{12EI}{L^3 \cdot (1 + C)}\tag{A1.16}$$

$$M = \frac{6EI}{L^2 \cdot (1 + C)}\tag{A1.17}$$

siendo C un coeficiente cuya expresión es

$$C = \frac{12EI}{L^2 \cdot GA^*}\tag{A1.18}$$

Por equilibrio se puede escribir la siguiente ecuación:

$$M' = -M = -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1 + C)}\tag{A1.19}$$

Las ecuaciones (A1.16), (A1.17) y (A1.19) proporcionan el momento y el cortante producidos por un desplazamiento vertical unidad y , por lo tanto, corresponden a ciertos componentes de la rigidez de la barra que deben ser introducidas en la matriz de rigidez.

Imponiendo en el punto $x = L$ un desplazamiento vertical nulo u y un giro producido por la flexión $\frac{du^f}{dx}$ unitarios se obtiene

$$u(x = L) = 0 \quad (\text{A1.20})$$

$$\frac{du^f}{dx}(x = L) = 1 \quad (\text{A1.21})$$

En ese caso, imponiendo las condiciones de contorno (A1.20) y (A1.21) junto con (A1.11) en las ecuaciones (A1.7) y (A1.8), se obtiene

$$-\frac{Q}{EI} \frac{L^3}{6} + \frac{M}{EI} \frac{L^2}{2} + \frac{Q}{GA^*} L = 0 \quad (\text{A1.22})$$

$$-\frac{Q}{EI} \frac{L^2}{2} + \frac{M}{EI} L = 1 \quad (\text{A1.23})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por (A1.22) y (A1.23) se obtiene

$$Q = -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1 + C)} \quad (\text{A1.24})$$

$$M = -\left(\frac{2 - C}{1 + C}\right) \frac{EI}{L} \quad (\text{A1.25})$$

siendo C un coeficiente descrito por (A1.18).

Por equilibrio se puede escribir la siguiente ecuación

$$M' = \left(\frac{4 + C}{1 + C}\right) \frac{EI}{L} \quad (\text{A1.26})$$

Las ecuaciones (A1.24), (A1.25) y (A1.26) proporcionan el momento y el cortante producidos por un giro unidad y, por lo tanto, corresponden a otros componentes de la rigidez de la barra que deben ser introducidas en la matriz de rigidez.

A1.2 Matriz de rigidez incluyendo la deformación por cortante

Por lo tanto, la matriz de rigidez de la barra considerando también la deformación producida por el cortante es

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1+C)} & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3 \cdot (1+C)} & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(4+C) \cdot EI}{L \cdot (1+C)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(2-C) \cdot EI}{L \cdot (1+C)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3 \cdot (1+C)} & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} & 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1+C)} & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(2-C) \cdot EI}{L \cdot (1+C)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2 \cdot (1+C)} & \frac{(4+C) \cdot EI}{L \cdot (1+C)} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.27})$$

Siendo el coeficiente C el descrito por la ecuación (A1.18).

Para el caso en que no se quiera incluir la deformación por cortante en la ecuación de la barra, es suficiente considerar $C = 0$, lo que equivale a plantear que el área reducida a cortante es muy grande $A^* \rightarrow \infty$, para obtener la matriz de rigidez clásica a flexión.

Anejo 2

Cortante en secciones mixtas Corte Recto

A2.1 Deducción del equilibrio y la compatibilidad en la sección

Tal como se ha visto, se realiza una simplificación al tratar el cortante de la sección compuesta del hormigón armado. Concretamente, a la hora de calcular el área reducida a cortante de la sección compuesta, se consideran en el modelo las áreas reducidas a cortante de las secciones de cada uno de los materiales considerados, en este caso del hormigón y del acero, en vez de realizar el cálculo exacto. Dicha simplificación se realiza porque el cálculo del área reducida a cortante de la sección compuesta de hormigón armado es muy complejo. Sin embargo a continuación se detalla el procedimiento exacto para obtener dicho valor.

Se considera una barra recta con una sección compuesta y se considera que dicha sección no cambia a lo largo de la directriz de la barra (véase la Figura A2.1).

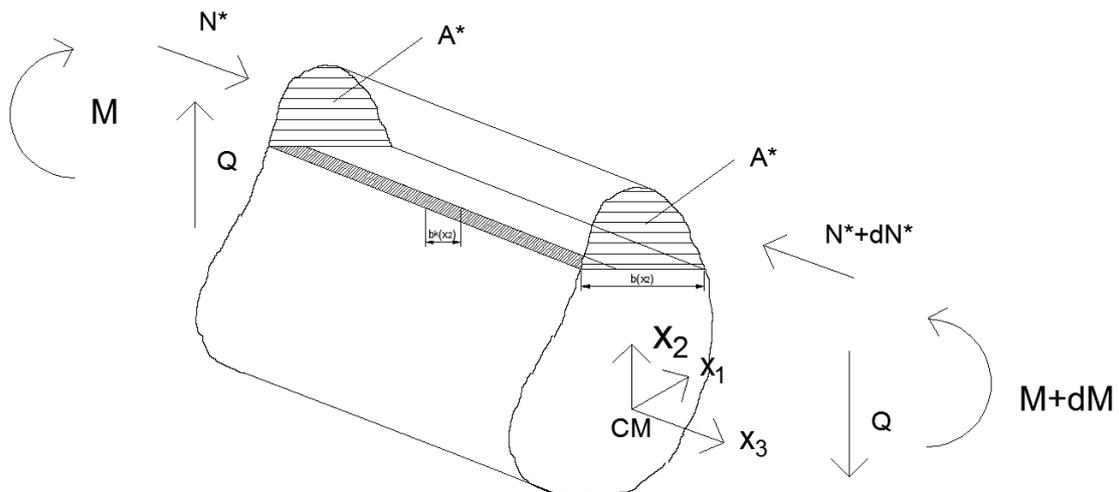


Figura A2.1. Equilibrio en una rebanada de la barra de sección genérica

Dado un plano de corte paralelo a la directriz de la barra, sea n_j el número total de materiales de la sección, n_i el número de materiales por encima del plano de deslizamiento de cortante y n_k el

número de materiales en el plano de corte. Por equilibrio, en una rebanada de la barra (ver Figura A2.1), el axil N^* es

$$N^* = \sum_{i=1}^{n_i} \int_{A_i^*} \sigma_i dA_i = \sum_{i=1}^{n_i} \int_{A_i^*} \frac{M \cdot E_i}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} x_2^i dA = \frac{M}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \cdot \sum_{i=1}^{n_i} \int_{A_i^*} E_i \cdot x_2^i dA \quad (A2.1)$$

y teniendo en cuenta que

$$\bar{S}_{11}^*(x_2) = \sum_{i=1}^{n_i} \int_{A_i^*} E_i \cdot x_2^i dA \quad (A2.2)$$

la ecuación (A2.1) queda de la siguiente forma:

$$N^* = \frac{M \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2)}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \quad (A2.3)$$

Siguiendo el mismo razonamiento, se puede obtener también

$$N^* + dN^* = \frac{M + dM}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2) \quad (A2.4)$$

Por diferencia entre (A2.4) y (A2.3) se obtiene el equilibrio de la capa a x_2 respecto al centro mecánico

$$dN^* = \frac{dM}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2) \quad (A2.5)$$

donde dN^* representa la fuerza desequilibrante entre las dos secciones de la rebanada.

En la Figura A2.2 se observa una sección de la barra con un plano de corte situado a una distancia x_2 del centro mecánico. Dicho plano de corte contiene n_k materiales. La ecuación de equilibrio se escribe:

$$dN^* = \sum_{k=1}^{n_k} \tau^k(x_2) \cdot b^k(x_2) dx_3 = \frac{dM}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2) \quad (A2.6)$$

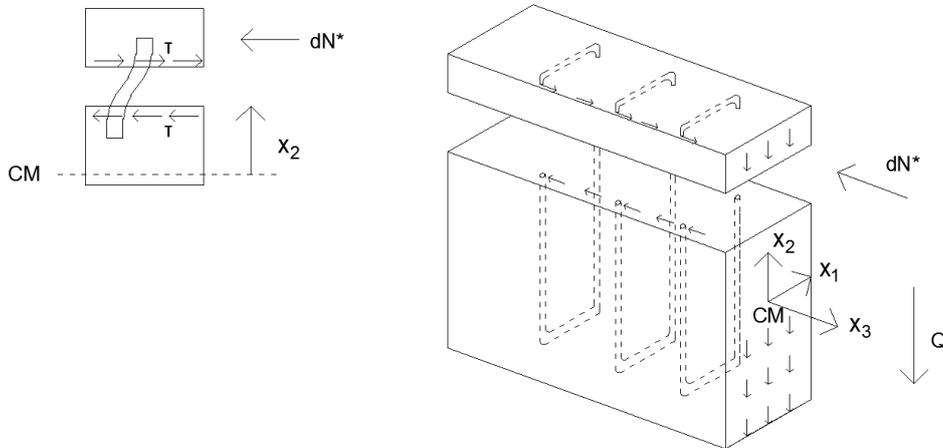


Figura A2.2. Equilibrio de la barra

Por lo tanto

$$\frac{dN^*}{dx_3} = \sum_{k=1}^{n_k} \tau^k(x_2) \cdot b^k(x_2) = \frac{dM}{dx_3} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2) \quad (\text{A2.7})$$

y como

$$\frac{dM}{dx_3} = Q \quad (\text{A2.8})$$

la ecuación (A2.7) queda

$$\sum_{k=1}^{n_k} \tau^k(x_2) \cdot b^k(x_2) = \frac{Q \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2)}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \quad (\text{A2.9})$$

Debido a la compatibilidad de deformaciones y distorsiones γ en la capa de la altura x_2 , los n_k materiales que integran la capa puede escribirse

$$\gamma = \frac{\tau_1}{G_1} = \dots = \frac{\tau_{n_k}}{G_{n_k}} \quad (\text{A2.10})$$

de forma que para un material k cualquiera

$$\tau_k = \gamma \cdot G_k \quad (\text{A2.11})$$

Sustituyendo (A2.11) en (A2.9), se obtiene

$$\gamma(x_2) \cdot \sum_{k=1}^{n_k} G_k \cdot b^k(x_2) = \frac{Q \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2)}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \quad (\text{A2.12})$$

$$\gamma(x_2) = \left[\frac{Q \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2)}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j} \right] \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_k} G_k \cdot b^k(x_2)} \quad (\text{A2.13})$$

y, por lo tanto, la tensión para un material l cualquiera de la misma capa es

$$\tau_l(x_2) = G_l \cdot \gamma(x_2) = \frac{G_l \cdot Q \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2)}{\left(\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_k} G_k \cdot b^k(x_2) \right)} \quad (\text{A2.14})$$

Ahora se puede proceder al cálculo del área reducida de la sección compuesta. Primeramente se determina la distorsión media de la sección

$$\gamma_{med} = \frac{1}{Q} \int_A \tau(x_2) \cdot \gamma(x_2) dA = \frac{1}{QG_G} \int_A [\tau(x_2)]^2 dA = \frac{1}{QG_G} \int_A [\tau(x_2)]^2 \cdot b(x_2) dx_2 \quad (\text{A2.15})$$

Sustituyendo la tensión obtenida de la ecuación (A2.14) en (A2.15), se tiene

$$\gamma_{med} = \frac{1}{QG_G} \cdot \sum_{r=1}^{rcap} \int_{hcapa} \sum_{l=1}^{n_k} \int_A \left[\frac{G_l \cdot Q \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2)}{\left(\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_k} G_k \cdot b^k(x_2) \right)} \right]^2 \cdot b^l(x_2) dx_2 \quad (\text{A2.16})$$

Puesto que $\gamma_{med} = \frac{Q}{A^*G_G}$, se obtiene el área reducida de la sección compuesta

$$A^* = \frac{1}{\sum_{r=1}^{rcap} \int_{hcapa} \sum_{l=1}^{n_k} \int_A \left[\frac{G_l \cdot Q \cdot \bar{S}_{11}^*(x_2)}{\left(\sum_{j=1}^{n_j} E_j \cdot I_{11}^j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_k} G_k \cdot b^k(x_2) \right)} \right]^2 \cdot b^l(x_2) dx_2} \quad (\text{A2.17})$$

