# Sistema de tracking para arrays de banda estrecha usando SVD

por

M. D. Ortigueira y M. A. Lagunas

TSC-E.T.S.I. Telecomunicación

Universidad Politecnica de Cataluña

Apdo.30002

08080 Barcelona

## RESUMEN

Los métodos de superresolución utilizados actualmente en detección de ángulo de llegada se derivan o están soportados de alguna manera en la descomposición en valores singulares o en la descomposición en las componentes principales de la matriz de covarianza o correlación de los sucesivos snapshots tomados de la apertura.

La necesidad de disponer de los subespacios de señal o de ruido en cada snapshot, plantea el problema de un método que permita la actualización snapshot a snapshot de los autovectores. Este objetivo del trabajo se ha conseguido explotando el hecho de que la actualización de la matriz es, a cada snapshot, de rango uno. Gracias a ello, la descomposición canónica de la matriz de covarianza es inmediatamente actualizada usando un algoritmo de alta eficiencia computacional, sin necesidad de recalcular la SVD de la nueva matriz de covarianza.

## 1.- INTRODUCCION

La descomposición espectral de la matriz de correlción es la base de los métodos de alta resolución, como MUSIC [10] o el de norma minima [3]. Pero, esta descomposición hecha por los metodos numericos usuales necesita, en el caso de un array de dimensión L, de $5L^3 + O(L^2)$ "flops". Como la matriz de correlación se actualiza recursivamente de la forma seguiente:

$$R_N = \alpha . R_{N-1} + (1-\alpha). v.v^H \quad (2)$$

[1]

se hace necesario el encontrar métodos para obtener la descomposición de $R_N$ a partir de la de $R_{N-1}$. Hay varias propuestas de solución del problema. Las mas importantes son las de Sharman [ 9] y de Schreiber [ 11] .Sharman usa una secuencia de factorizaciones QR. En cada iteración necesita de una factorización y dos multiplicaciones matriciales. El algoritmo presentado por Schreiber es devido a Bunch, Nielsen y Sorensen y gasta $L^3 + O(L^2)$ "flops". El algoritmo que vamos a proponer es equivalente a este, solo que parece ser mas sencillo y de mas facil implementación. Ademas posee un elevado grado de paralelismo. Esto sera presentado en la sección seguiente y en la sec. 3 seran presentados algunos resultados experimentales usando el algoritmo de Kumaresan-Tufts o de norma minima [ 3].

## 2 - CALCULO DE LOS AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

### 2.1 - Recursibilidad del calculo

Vamos a suponer que se nos plantea la situación expresada en (1) y que la descomposición de $R_{N-1}$ esta disponible.

Entonces :

---

[1] H significa transconjugado

$$R_N = V_{N-1} \, [\, \alpha . D_{N-1} + (1-\alpha). V_{N-1}{}^H (v.v^H) \, V_{N-1}] \, V_{N-1}{}^H \qquad (2)$$

donde se ha usado una matriz modal normalizada. Vamos a calcular $V_N$ y $D_N$ tales que $R_N = V_N \, D_N \, V_N{}^H$ .Un cambio de base nos permite expresar v en el espacio de los autovectores de $R_{N-1}$ :

$$w = V_{N-1}{}^H . v \qquad (3)$$

El problema pasa, ahora, a ser el de descomponer la matriz :

$$\alpha . D_{N-1} + (1-\alpha). ww^H \qquad (4)$$

Si $U_N$ es la matriz de los autovectores de ( 4) la matriz $V_N$ sera dada por:

$$V_N = V_{N-1} . U_N \qquad (5)$$

### 2.2- Las matrices singulares elementales

Una matriz E se dice elemental si es de la forma $E = v.v^H$ ,donde v es un vector. La matriz E tiene rango 1. A su unico autovalor no nulo le corresponde un autovector igual al que ha generado la matriz [ ]. Si A es una matriz (LxL) qualquiera de autovalores $a_i$ (i=1, ..., L ) y E una matriz singular elemental (MSE). Los autovalores $\lambda_i$ de A+E verifican:

$$\lambda_i = a_i + v^H v \, m_i \qquad \text{con} \qquad \sum_{1}^{L} m_i = 1 \qquad (6)$$

Si D es una matriz diagonal (LxL) con M-1 autovalores distintos y no nulos y w un vector (Lx1). La suma $D+ww^H$ tiene :

a) M-1 valores propios distintos de cero, si $ww^H$ es diagonal; su matriz modal es la matriz identidad: $ww^H$= Diag {0, 0, . . . , 0, $w^H w$, 0, . . . , 0} y, por tanto, los autovectores de $R_N$ son los de $R_{N-1}$ y los autovalores son los dados por :

$$\lambda_j^N = \lambda_j^{N-1} \quad j \neq i \qquad \lambda_i^N = \lambda_j^{N-1} + w^H w \qquad (7)$$

b) M autovalores distintos de cero al que correspondem M autovectores distintos. Los restantes constituyen una base cualquiera del subespacio correspondientes a los autovalores nulos.

### 2.3 - Calculo de los nuevos autovalores y autovectores

Empecemos por intentar calcular los autovalores y autovectores directamente. Tenemos :

$$[\, \alpha . D_{N-1} + (1-\alpha). ww^H] \, u = \lambda u \qquad (8)$$

y, si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq d_i$ (i = 1, . . . N)

$$u = \frac{\alpha}{1-\alpha} . w^H u . \, [\lambda I - D]^{-1} \, w \qquad \text{si } w^H u = 0 \qquad (9)$$

donde $w^H u = \frac{\alpha}{1-\alpha} . (w^H u \,). w^H [\lambda I - D]^{-1} \, w$ y, finalmente,

$$\sum_{i=1}^{M-1} \frac{|w_i|^2}{\gamma - d_i} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=M}^{L} |w_i|^2 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad \text{con } \gamma = \lambda / \alpha \qquad (10)$$

La solución de ( 10 ) nos dae los M autovalores. Es interesante notar que (10) es lo mismo que hacer $w^H u = 1$. Los correspondientes autovectores se obtienen de (9) . Si $\lambda$ =

0, entonces solo hay soluciones no triviales si $w^H u = 0$ y $u_1 = \ldots = u_{M-1} = 0$ lo que significa que este subespacio tiene dimensión L-M. $\lambda = d_i$ $(1 \leq i \leq M)$, solo ocurre si $w_i = 0$, lo significa que el vector v no tiene componente segundo el autovector $v_i$. Supongase que los autovalores de la matriz diagonal estan ordenados:

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_{M-1} > d_M = d_{M+1} = \ldots = d_L = 0 \qquad (11)$$

La ecuación (10) y la propriedades antes presentadas nos indican que los autovalores verifican las desigualdades seguientes:

$$d_i \geq \lambda_i \leq d_{i-1} \qquad i=2, \ldots, L \qquad d_1 \geq \lambda_1 + w^H w \qquad (12)$$

Basta notar que la derivada del primero miembro de (10) es siempre decresciente; como es infinita para las $d_i$, los ceros tienen que estar entre ellas. El caso de la raiz mas elevada sale directamente de las propiedades. Vamos a considerar el problema de los autovalores nulos. Como ya ha sido dicho, los autovectores correspondientes son ortogonales al vector w. Esto nos va a servir para resolver el problema. Consideremos la situación en la que el nuevo vector w no esta en el subespacio de los autovectores del subspacio $\lambda \neq 0$. Es facil de observar que los autovectores correspondientes a $\lambda = 0$ pueden no intervenir en el proceso de formacion de la matriz R. El calculo del vector w supone que puede haber proyecciones no nulas segun todos los autovectores de la base. Pero como hay infinitas bases del subespacio $\lambda = 0$, podremos elegir la que tiene un vector paralelo a la componente de v ortogonal al subspacio $\lambda \neq 0$. Esto trae como consecuencia que, si L es la dimension del subspacio $\lambda = 0$, w tiene L-1 componentes nulas, por lo que se concluye que los L-1 correspondientes autovectores no son necesarios. Entonces el procedimento es el siguiente: Sean $a_i$ las projecciones de w sobre los autovectores $v_i$. Se forma el vector $u = \sum a_i v_i$. El vector v=w-u nos puede servir como el autovector correspondiente al autovalor $\lambda_M$.

Este procedimento nos permite dar una expresion a qualquier vector sin necesidad de crear una base del subspacio $\lambda = 0$.

Si el vector v no es nulo, hay un vector del subspacio $\lambda = 0$ que " pasa " al otro $(\lambda \neq 0)$. Pero, la creación de una base del subespacio nulo puede ser interesante en algunas aplicaciones. El uso de la transformación de Householder puede ayudar a la solución del problema.

## 3 - CONPROVACION EXPERIMENTAL.

### 3.1 El metodo de norma minima

En el metodo de norma minima [ 3] los DOA son encontrados por localizacion de los ceros de un polinomio P(z), cuyo vector p de coeficientes es ortogonal al subespacio de la señal. este vector puede ser expresado o en el subespacio de señal o en el de ruido. Salvo una constante multiplicativa, este vector viene dado por

$p = E_n . v_n$ ,si lo esta en el subespacio de ruido $E_n$

El vector $v_n$ es el transconjugado de la primera linea de $E_n$.

### 3.2 Evaluación experimental

Para realizar la experimentación se ha simulado un entorno con las seguientes caracteristicas:

Dimension del Array: L=6; Numero maximo de fuentes activas: L/2; Frecuencia nominal: 1 MHz; Amplitudes de las fuentes: 1; Maxima relación señal/ruido por fuente: 10 dB; numero inicial de fuentes: 2; probabilidad de cambio en el numero de fuentes activas: 0.98;

Los autovalores se calculan usando el metodo de Newton. Los valores iniciales se han obtenido a partir de: $\lambda_{0i} = d_i + \phi_i$ con $\phi_i = |w_{i-1}/w_i|^2$ si i=2, ..., L y $\lambda_{01} = d_1 +$

$(1-S).\rho \frac{\alpha}{1-\alpha}$, donde $\rho$ es la norma de w y S la suma de las restantes raices[2]. La precision usada en el calculo de los autovalores ha sido de $10^{-16}$. Para el "tracking" se han seleccionado las L/2 raices de P(z) de magnitud mas cerca de 1.

### 3.3 Resultados

En las figuras de la pagina seguiente se presentan algunos resultados obtenidos con las condiciones de la sec. 3.3 en que L se ha hecho igual a 6. Las posiciones angulares correctas de las fuentes han sido: 19, -15 y -53. En las figuras, 0 grados significa que la fuente no esta activa. Para tener una idea sobre el grado de precision o de degradacion numerica del algoritmo se han calculadado al fin de 5000 "snapshots" los productos seguientes: $V.V^H$ y $V^H.V$. Se ha usado dupla precision; para los dos primeros productos se ha verificado que los valores de la diagonal han sido todos iguales a 1 y el maximo de los modulos de los valores fuera de la diagonal ha sido de inferior a $10^{-6}$.

## 4 - CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un algoritmo recursivo para el calculo de los autovalores y autovectores de una matriz generada recursivamente como la suma de matrices de rango 1. Este algoritmo es bastante sencillo, tiene buenas propiedades numericas y un grado de paralelismo elevado. Su generalizacion para matrices no hermiticas es inmediata [ 8] . Tambien es facil obtener el algoritmo para el caso en que se usa una ventana rectangular en lugar de una exponencial en la recursion (1).

REFERENCIAS


[1] Bellman, R. "Introduction to Matrix Analysis", Mc. Graw-Hill, 1970

[2] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. "Matrix Computations", Johns Hopkins University Press, 1983

[3] Kumaresan,R. and Tufts,D.W.," Estimating the Angles of Arrival of Multiple Plane Waves", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-19,No.1, Jan 1983.

[4] Kung, S.Y., Whitehouse, H.J. and Hailath, T. Editions "VLSI and Modern signal Processing", Prentice-Hall, 1985

[5] Lawson, C.L. and Hanson, R.Y. "Solving Least-Squares Problems" Prentice-Hall, 1974

[6] Monzingo, R.A. and Miller, T.W. "Introduction to Adaptive Arrays" Wiley, 1980

[7] Ortigueira, M. D. "Sobre la Diagonalización Recursiva de Matrices Simétricas", Dep. de Procesado de Señal, ETSE de Telecomunicación, Univ. Polit.de Cataluña, Barcelona, Feb. 1989.

[8] Ortigueira, M. D. "Factorización, inversión y diagonalización de matrices generadas recursivamente ", Dep. de Procesado de Señal, ETSE de Telecomunicación, Univ. Polit.de Cataluña, Barcelona, Feb. 1989.

[9] Sharman, K.C., " Adaptive Algoritms for Estimating the Complete Covariance Eigenstructure", Proceedings of ICASSP-86, Tokyo.

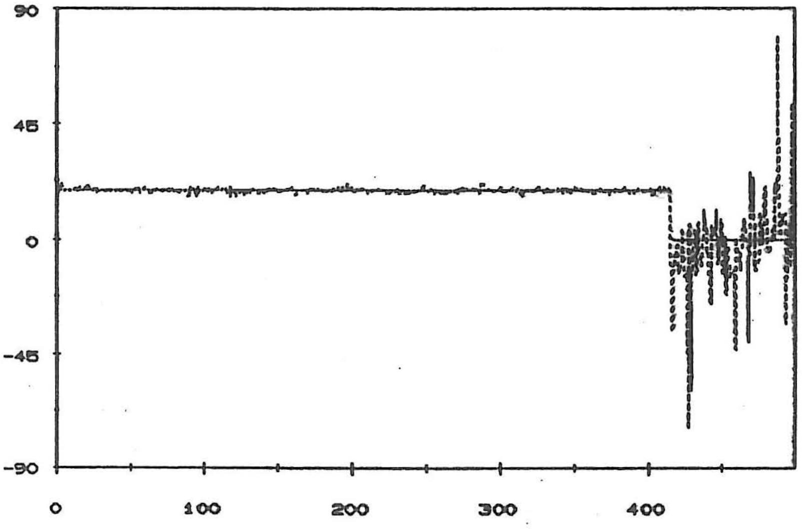
[10] Schmidt, R.," Multiple Emitter Location and Signal Parameter estimation", Proceedings of RADC Spectral Estimation Workshop.

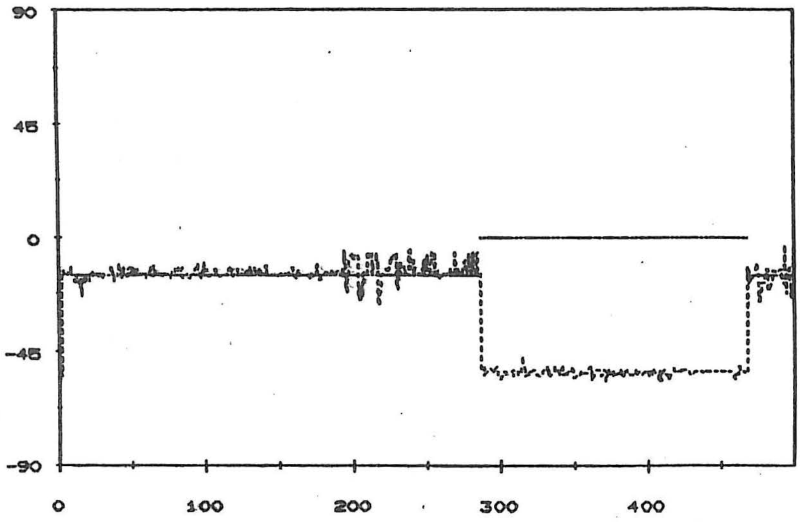
[11] Schreiber,R.," Implementation of Adaptive Array Algorithms", IEEE Transactions on ASSP, vol.34, No.5, Oct. 1986.

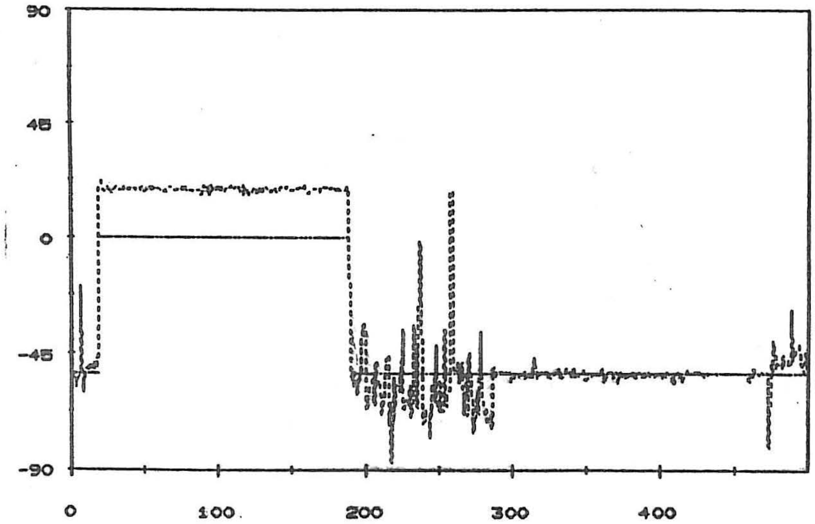
[12] Wilkinson, J.H. "The Algebraic Eigenvalue Problem" Clarendon Press, Oxford, 1965


---

[2] de notar que este valor es teoricamente exacto


90
45
0
-45
-90
0
100
200
300
400


90
45
0
-45
-90
0
100
200
300
400


90
45
0
-45
-90
0
100
200
300
400