PARAMETRIZACION DE LA ENVOLVENTE ESPECTRAL

Mateo Amengual y Miguel A. Lagunas
E.T.S.I. Telecomunicación de Barcelona
Apdo. 30002. 08080 Barcelona

ABSTRACT

A new variational ARMA power spectral estimation procedure is proposed which involves a rational modeling for the square of the spectral envelope.

The non linear problem of solving the Lagrange multipliers which appears in any variational procedure is translated into an eigenanalysis one since the autocorrelation "causal image" must be a minimum phase sequence in a general case.

1. INTRODUCCION

Los procedimientos variacionales en análisis espectral llevan a cabo la minimización (o maximización) de una función objetivo que depende del estimador $S(w)$ y que suele tener la forma $\int F[S(w)]dw$. Esta optimización es llevada a cabo bajo ciertas restricciones que frecuentemente son obtenidas del periodograma $P(w) = |X(w)|^2/N$ (donde $X(w)$ es la D.F.T. de los datos y N el número de ellos) y tienen la forma (1).

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(S(w))\exp(jmw)dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(P(w))\exp(jmw)dw \qquad |m|<Q \tag{1}$$

En (1), pueden igualmente ser utilizadas variaciones del periodograma. Las restricciones más utilizadas son las que resultan de considerar G(.)=., es decir, las correlaciones estimadas según el estimador polarizado.

Es importante notar que el estimador final $S(w)$ dependerá no sólo de las restricciones sino también de la función objetivo. Esto significa que la elección restricciones-función objetivo no puede ser arbitraria para un modelo espectral dado.

A modo de ejemplo, veamos qué resulta de considerar la entropía $\frac{1}{2\pi}\int \log S(w)dw$ como objetivo y como restricciones las de correlación y cepstrum (2).

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(S(w))\, e^{jnw}dw = c(n); \quad |n|<P,\ n\neq 0 \tag{2-a}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(w)\, e^{jmw}dw = r(m); \quad |m|<Q \tag{2-b}$$

Si se forma el Lagrangiano y se iguala su derivada a cero se obtiene (3), un modelo ARMA para $S(w)$.

$$S(w) = \frac{1+\sum_{n=-P,\, n\neq 0}^{P} \lambda_n \exp(-jnw)}{\sum_{n=-Q}^{Q} \beta_n \exp(-jnw)} \tag{3}$$

De igual forma se puede comprobar fácilmente que si la entropía es el objetivo, se obtiene un modelo MA para $S(w)$ si se consideran las restricciones de cepstrum (2-a) y un modelo AR al considerar las de correlación (2-b).

Así pues, variando función objetivo y restricciones, se pueden obtener diferentes modelos espectrales, un ejemplo de los cuales es el siguiente.

2. EL METODO PROPUESTO

En primer lugar se define una función $\emptyset(S(w))$ según (4).

$$\emptyset(S(w)) = S(w)+jH\{S(w)\} \tag{4}$$

donde j indica unidad imaginaria y $H\{.\}$ es la transformada de Hilbert.

Debe notarse que $|(\emptyset(S(w)))|$ es la envolvente espectral y que la Transformada inversa de Fourier de $\emptyset(S(w))$ es dos veces la "imagen causal" de la autocorrelación según la definición de Cadzow /1/. Con $\emptyset(.)$ así definida, se puede formular un problema variacional consistente en la maximización de (5)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |\emptyset(w)|^2 dw \tag{5}$$

sujeto a las restricciones (6)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\emptyset(w)|^2 e^{jnw}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(P^2(w)+H^2\{P(w)\})e^{jnw}dw = \zeta(n) \qquad |n|<P,\ n\neq 0 \tag{6-a}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\emptyset(w)|^2 e^{jmw}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (P^2(w)+H^2\{P(w)\})e^{jmw}dw = \emptyset(m) \qquad |m|<Q \tag{6-b}$$

Donde $P(w)$ es el periodograma y $\zeta(0)$ no se incluye en las restricciones al ser el objetivo.

Lo anterior da lugar a (7), es decir, un modelo racional para $|\emptyset(w)|^2$

$$|\emptyset(w)|^2 = \frac{1+\sum_{n=-P,\, n\neq 0}^{P} \lambda_n \exp(jnw)}{\sum_{n=-Q}^{Q} \beta_n \exp(jnw)} \tag{7}$$

El problema es encontrar los multiplicadores de Lagrange λ_n y β_n tales que se verifiquen las restricciones. Este problema es no lineal, y alguna suposición se deberá hacer para evitar una solución de tipo iterativo.

3. PROCESOS REGULARES Y DE ESPECTRO ACOTADO

Se puede demostrar que si $\int_{-\pi}^{\pi} \log |S(w)| dw <$ (condición de Paley-Wiener para señales discretas) y $S(w)$ está acotada, entonces $\int_{-\pi}^{\pi} \log |\emptyset(w)|^2 dw < \infty$, y entonces puede escribirse (8)

$$E(z) = r^2 \frac{N-(z)}{D-(z)} \frac{N+(z)}{D+(z)} \qquad (8)$$

Donde se verifica que $E(z)|_{z=e^{jw}} = |\emptyset(w)|^2$ y que $\frac{N+(z)}{D+(z)}$ es dos veces la transformada -z de la "imagen causal" de la autocorrelación y cumple que es una función racional de fase mínima.

Las consideraciones anteriores dan lugar al siguiente resultado, válido cuando $S(w)$ es acotado y se verifica la condición de Paley-Wiener:

- $R(z)$ $(R(z)|_{z=e^{jw}} = S(w))$, puede descomponerse en el producto de una función de fase mínima por la correspondiente de fase máxima y a su vez admite la descomposición en suma de una función de fase mínima (transformada -z de la iamgen causal) más otra de fase máxima (correspondiente a la imagen anticausal).

4. OBTENCION DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

El problema de obtener los multiplicadores que cumplen con las restricciones, o de forma equivalente, la ganancia r^2 y los coeficientes de los polinomios $N(z)$ y $D(z)$ es altamente no lineal si se intenta resolver directamente a partir de las restricciones.

El método de obtención de λ_n y β_n en (7) es similar al propuesto por Musicus y Kabel /2/ en otro contexto. Se basa en el resultado anteriormente citado de que si $S(w) < \infty$ y se verifica la condición de Paley-Wiener entonces $\frac{N+(z)}{D+(z)}$ debe ser una función racional de fase mínima.

Así pues, en la situación del apartado anterior y suponiendo grados P y Q para $N+(z)$ y $D+(z)$ respectivamente, se pueden escribir las ec. (9) y (10).

$$\frac{N^+(z)}{D^+(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, z^{-n} \qquad (9)$$

$$N^+(z) = 1 + \sum_{n=1}^{P} a_n\, z^{-n}$$

$$D^+(z) = 1 + \sum_{n=1}^{Q} b_n\, z^{-n} \qquad (10)$$

Multiplicando (9) por $D+(z)$ e identificando potencias de z, puede escribirse la siguiente ecuación matricial (11).

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ g(1) & 1 & 0 \\ \vdots & & \\ g(P) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_Q \end{bmatrix} \qquad (11)$$

En forma simplificada $\underline{a} = \underline{\underline{G}}\, \underline{b}$.

Puesto que $g(n)$ debe ser una secuencia de fase mínima (la "imagen causal" normalizada al valor en cero), puede obtenerse a partir de la parte causal de su cepstrum $(\zeta(.))$ según la recursión (12) propuesta por Oppenheim /3/.

$$g(0) = 1$$

$$g(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\, \zeta(k)\, g(n-k); \; n=1,2,\ldots \qquad (12)$$

La ecuación (8) puede ser reescrita en la forma (13)

$$D^+(z)\; E(z) = r^2\, N^+(z)\, \frac{N^-(z)}{D^-(z)} \qquad (13)$$

De nuevo, igualando potencias de z, se obtiene (14)

$$\underline{\underline{\emptyset}}\, \underline{b} = r^2\, \underline{\underline{G}}^H\, \underline{a} \qquad (14)$$

donde $\underline{\underline{\emptyset}}$ es la siguiente matriz (Toeplitz y simétrica).

$$\underline{\underline{\emptyset}} = \begin{bmatrix} \emptyset(0) & \emptyset(1) & \cdots & \emptyset(Q) \\ \emptyset(1) & \emptyset(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset(1) \\ \emptyset(Q) & \cdots & \emptyset(1) & \emptyset(0) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (11) y (14) dan como resultado (15)

$$\underline{\underline{\emptyset}}^{-1}\, \underline{\underline{G}}^T\, \underline{\underline{G}}\, \underline{b} = \frac{1}{r^2}\, \underline{b} \qquad (15)$$

Así, el problema no lineal inicial se ha convertido en un problema de autovalores y autovectores. Puede demostrarse (ver /3/) que la adecuada elección para $\frac{1}{r^2}$ es $\frac{1}{r^2} = \lambda_{máx}$; donde $\lambda_{máx}$ es el autovalor máximo de $\underline{\underline{\emptyset}}^{-1}\, \underline{\underline{G}}^T\, \underline{\underline{G}}$.

Una vez que r^2, $\underline{a}$ y $\underline{b}$ han sido calculados, el espectro puede ser obtenido según (16)

$$S(w) = \mathrm{Re}\, |\emptyset(w)| \qquad (16)$$

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo método variacional de análisis espectral. En general, dichos métodos llevan a cabo identificaciones de secuencias de primer orden. El método propuesto puede considerarse una generalización de los anteriores pues las identificaciones son de segundo orden.

Es importante notar los siguientes puntos:

- La función objetivo $(\log r^2)$ está relacionada con el valor de correlación extrapolado en cero $(R(0)=r)$; por tanto, este método intenta maximizar la potencia del proceso.

- La función objetivo depende de la envolvente espectral.

- Las restricciones $\zeta(.)$ son equivalentes a restricciones de correlación.

- El espectro S(w) es dos veces la parte real de $\phi(w)$, sin embargo no está asegurada la positividad.

- La característica principal de este procedimiento es su alta resolución y capacidad para distinguir sinusoides en ruido.

REFERENCIAS

/1/ J. Cadzow, "High Performance Spectral Estimation - A New ARMA Model", IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing. Vol. ASSP-28, No. 5, Oct. 1980.

/2/ B. Musicus and A. Kabel, "Maximum Entropy Pole-Zero Estimation". ICASSP 86. Tokyo, pp. 1389-1392.

/3/ A. Oppenheim and R. Schafer, "Digital Signal Processing", Prentice Hall, 1975.