TITULO: SISTEMA ADAPTATIVO NO LINEAL

Francesc Vallverdú, Miguel A. Lagunas
E.T.S.I. Telecomunicacion de Barcelona
C/ Jordi Girona Salgado, s/n, 08034 Barcelona - España

ABSTRACT

In this paper, we present a method to correct the amplitud distorsion produced by a non linear system. First of all it is shown how this correction can be achieved making use of a least square error criterium by means of a polynomical function. An adaptive method is also studied and a discussion of the convergence condition is made. Finally, as an example, the method is aplied to design the expansor which makes use of a mu_law.

INTRODUCTION

Una señal x(t) sometida a un sistema no lineal, caracterizado por f(.), sufre una distorsión o deformación en su amplitud. Nuestro interés se centra en corregir o compensar dicha deformación con un sistema también no lineal g(.), al que llamaremos sistema corrector. Se representa en la figura 1 la estructura descrita así como la nomenclatura que se utilizará en el trabajo.

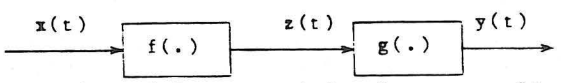

Fig. 1. Modelo general de sistema no lineal seguido de sistema corrector.

x(t) es la señal de entrada. z(t) es la señal de salida del sistema no lineal que es, evidentemente, la señal de entrada al sistema corrector. Se obtiene aplicando g(.) a la entrada, es decir

$$z(t) = f(x(t))$$

La señal de salida del sistema corrector es y(t), que vale en función de la entrada

$$y(t) = g(z(t)) = g(f(x(t)))$$

Nuestro propósito es diseñar el sistema corrector g(.) de modo que su salida y(t) sea lo más parecida posible a la señal original x(t). Si se considera el caso en que y(t)=x(t) deberá cumplirse la restricción de que para el margen de valores de la señal x(t), el sistema no lineal f(.) sea biunívoco, es decir, deberá poder hallarse g(.) como inversa de f(.) en el rango de valores de la entrada. Teniendo en cuenta que en general el sistema no lineal es desconocido, y nosotros pretendemos desarrollar un sistema corrector no dependiente del mismo, centraremos el diseño a una aproximación de g(.) bajo un criterio de minimización del error cuadrático medio producido entre la entrada al sistema no lineal y la salida del sistema corrector.

Sistema corrector polinómico óptimo

Como aproximación al sistema corrector g(.) proponemos en este artículo la utilización de una función polinómica g(x) de orden p.

$$g(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_px^p$$

El diseño, una vez fijado el orden, se reduce al cálculo de los p+1 coeficientes. Obtendremos un vector de coeficientes que designaremos por $\underline{A}_{op}$ que contendrá dichos coeficientes. Como criterio de diseño se minimizará el error cuadrático medio producido.

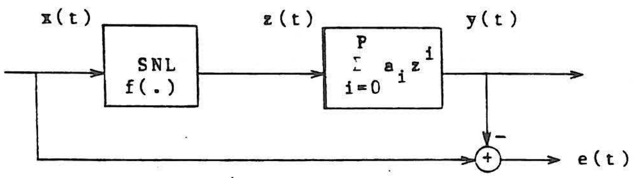

Fig. 2. Diagrama de bloques de un sistema corrector polinómico para un sistema no lineal.

El error instantáneo producido vale, tal y como se esquematiza en la figura 2.

$$e(t) = x(t)-y(t) = x(t)-\underline{A}^T.\underline{Z}$$

donde $\underline{A}$ es el vector de coeficientes y $\underline{Z}$ es un vector que contiene las distintas potencias de z(t).

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ z(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z(t)^p \end{bmatrix}$$

El valor cuadrático medio ξ puede expresarse |2| por

$$\xi = E\{e^2(t)\} = E\{x^2(t)\}+ \underline{A}^T.E\{\underline{Z}.\underline{Z}^T\}\underline{A}-2\underline{A}^T E\{x(t).\underline{Z}\}$$

Como este error es una forma cuadrática de $\underline{A}$, tendrá un mínimo que puede hallarse igualando a cero el gradiente del error cuadrático medio respecto al vector de coeficientes $\underline{A}$.

Designando por $\underline{\underline{C}}$ a la matriz

$$\underline{\underline{C}} = E\{\underline{Z}.\underline{Z}^T\} = \begin{bmatrix} 1 & E\{z(t)\} & \cdots & E\{z^p\} \\ E\{z\} & E\{z^2\} & \cdots & E\{z^{p+1}\} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ E\{z^p\} & \cdots & \cdots & E\{z^{2p}\} \end{bmatrix}$$

y por $\underline{P}$ al vector

$$\underline{P} = E\ x(t)\ \underline{Z} = \begin{bmatrix} E\{x(t)\} \\ E\{x(t).z(t)\} \\ . \\ . \\ E\{x(t).z^p\} \end{bmatrix}$$

el gradiente del error cuadrático medio vale

$$\nabla_A(\xi) = 2.\underline{\underline{C}}.\underline{A} - 2.\underline{P}$$

que igualando a $\underline{0}$ proporciona el vector de coeficientes $\underline{A}_{op}$ que produce error cuadrático mínimo.

$$\underline{A}_{op} = \underline{C}^{-1}.\underline{P}$$

$$\xi_{mín} = E\{x^2(t)\} - \underline{P}^T.\underline{\underline{C}}^{-1}.\underline{P}$$

Obsérvese que para el cálculo del conjunto de coeficientes óptimo se requiere del conocimiento de los distintos momentos de la señal de salida del sistema no lineal así como de los momentos cruzados entre entrada y salida. Adicionalmente deberemos invertir una matriz de orden p+1, lo que implica una gran carga computacional.

Aproximación adaptativa

Conociendo pues la existencia de un óptimo, intentaremos desarrollar un proceso adaptativo para el cálculo de los coeficientes del polinomio corrector de tal manera que tengamos un proceso convergente a dicha solución óptima.

El método estudiado es el conocido por método del gradiente descendente. Se basa en actualizar los pesos que denotamos por $\underline{A}_n$ en la dirección negativa del gradiente y con una pequeña perturbación proporcional al mismo gradiente. El nuevo vector de coeficientes $\underline{A}_{n+1}$ será pues:

$$\underline{A}_{n+1} = \underline{A}_n - \mu\nabla = \underline{A}_n + 2\mu E\{e(n).\underline{Z}_n\}$$

Para evitar el cálculo de la esperanza del producto error instantáneo por las distintas potencias de la señal de entrada en el sistema corrector, consideraremos en primera aproximación de dicha esperanza su valor instantáneo. Así la actualización del vector de pesos será:

$$\underline{A}_{n+1} = \underline{A}_n + 2\mu e(n).\underline{Z}_n$$

Convergencia

Debemos ahora asegurar la convergencia del método adaptativo considerado. Una vez realizado un número suficientemente grande de iteraciones podemos expresar:

$$E\{\underline{A}_{n+1}\} = (\underline{\underline{I}} - 2\ \underline{\underline{C}}_n)^{n+1}.\underline{A}_0 + 2\mu \left| \sum_{i=0}^{n} (\underline{\underline{I}} - 2\ \underline{\underline{C}}_n)^i \right| .\underline{P}_n$$

que al diagonalizar $\underline{C}_n$ e imponer la restricción para la constante

$$\mu < \frac{1}{P_i} \leqslant \frac{1}{C_{máx}}$$

donde P_i es la potencia de la señal y $C_{máx}$ el autovalor máximo, nos lleva a la solución óptima al tender n a infinito.

Diseño de un expansor

En un proceso de codificación |1| es frecuente el uso de compansores a fin de obtener un error porcentual de cuantificación constante. Se presenta el resultado obtenido como corrección a un compansor de ley_mu, |3| que responde a la expresión

$$y(n) = x_{max} \frac{\log(1+mu\ \frac{x(n)}{x_{max}})}{\log\ (1+mu)}\ sig(x(n))$$

y se representa en la figura 3 para mu=250.

En las figuras 4 y 5 se muestran los resultados obtenidos para el expansor de forma adaptativa, así como la evolución del error cuadrático instantáneo. En este caso el expansor se ha aproximado por un polinomio impar de orden 9 y la señal de entrada está uniformemente distribuida entre 1 y -1.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en el proceso de corrección de la amplitud de señales distorsionadas, por sistemas no lineales de forma adaptativa son excelentes. Siempre que pueda disponerse de un cierto tiempo de proceso en el que utilizar para la adaptación una señal de referencia conocida, se podrá hallar un sistema corrector con un cierto error mínimo.

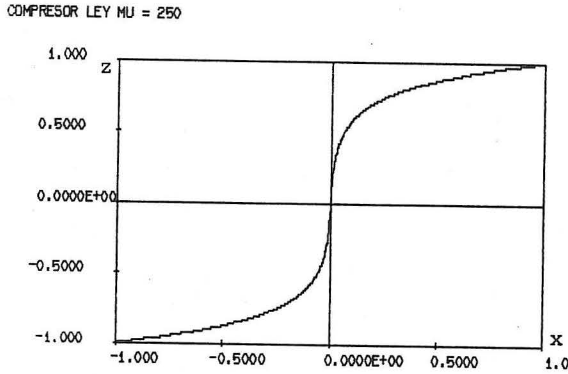

Fig.3 Función de compresión

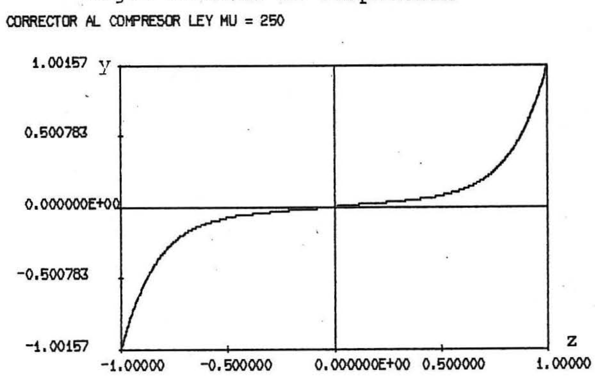

Fig.4 Corrector al compresor

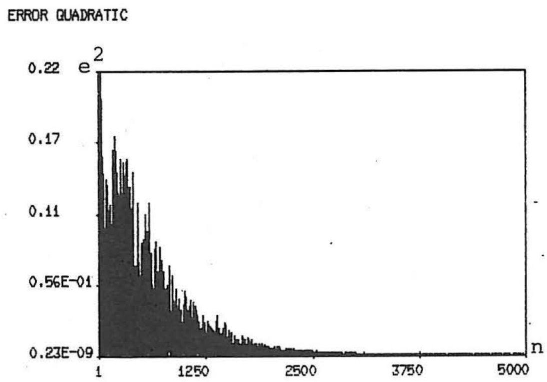

Fig.5 Evolución del error cuadrático. $(x-y)^2$

REFERENCIAS

|1| L.R. Rabiner,R.W. Schafer, "Digital Processing of Speach Signals", Prentice-Hall, pp. 185-191.

|2| Monzingo, Miller, "Introduction to Adaptive Arrays", Wiley, pp. 162.

|3| B. Smith, "Instantaneous Companding of Quantized Signals", Bell System Tech. J., Vol. 36, N. 3, pp. 653-709, May 1957.