

УДК 517.977.58;528.88

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИИ ПРИ ЧАСТОТНОМ ЗОНДИРОВАНИИ

**Д.О. Батраков, А.А. Симачев**

*Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, кафедра теоретической радиофизики,*

E-mail: [Dmitry.O.Batrakov@univer.kharkov.ua](mailto:Dmitry.O.Batrakov@univer.kharkov.ua)

Поступила в редакцию 28 октября 2009 г.

В данной работе рассмотрена задача восстановления профиля диэлектрической проницаемости плоскослоистой структуры с учетом дисперсии. При этом характер дисперсионной зависимости предполагается известным, а определению подлежит вид функции распределения реальной и мнимой частей диэлектрической проницаемости. В качестве информативного параметра использовалась частота. Предполагается, что исследуемая структура лежит на бесконечной подложке с известными электрофизическими свойствами. Рассмотрен итеративный метод решения обратной задачи рассеяния, сводящий ее к задаче минимизации сглаживающего функционала. В рамках этого метода была учтена дисперсия диэлектрической проницаемости, типичная для таких природных сред, как почвогрунты. Приведены схема вычислительного алгоритма и результаты численного моделирования.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плоскослоистые среды, дисперсия, обратная задача, диэлектрическая проницаемость.

У роботі розглянута задача відновлення профілю діелектричної проникності плоскошаруватої структури з урахуванням дисперсії. При цьому характер дисперсійної залежності припускається відомим, а визначенню підлягає від функції розподілу реальної та уявної частин діелектричної проникності. У якості інформативного параметра використовувалася частота. Припускається, що структура, що вивчається, знаходиться на підкладці з відомими електрофізичними властивостями. Розглянуто ітеративний метод рішення зворотної задачі розсіювання, що зводить її до задачі мінімізації згладжуючого функціоналу. У рамках цього метода була врахована дисперсія діелектричної проникності, що є типовою для таких природних середовищ, як почвогрунти. Наведені схема чисельного алгоритму та результати чисельного моделювання.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** плоскошаруваті середовища, дисперсія, зворотна задача, діелектрична проникність.

In the present paper the problem of dielectric permittivity profile reconstruction with regard to dispersion is discussed. The nature of the dispersion function is assumed to be known and unknown functions are real and imaginary parts of dielectric permittivity. Frequency is used as an informative parameter. It is assumed that the layered medium is laying on a substrate with known dielectric permittivity and permeability. The iterative method reducing the problem of reconstruction to the functional minimization problem is used. Within the scope of this method the inverse problem for of dielectric permittivity profile with a conducting medium dispersion is solved. The algorithm and numerical results are given.

**KEYWORDS:** layered media, dispersion, inverse problem, dielectric permittivity.

Решение обратных задач рассеяния является важной прикладной задачей и находит широкое применение в таких областях, как геозондирование, томография и задачи неразрушающего контроля [1]. В практических приложениях часто возникает необходимость анализа свойств многослойных структур [1,2].

Одним из подходов к решению задач такого типа является метод, основанный на сведении задачи восстановления профиля диэлектрической проницаемости к задаче минимизации функционала невязки [3, 4, 5]. Для решения задачи минимизации функционала невязки используют как точные методы [2], так и пользующиеся большей популярностью итеративные методы [6]. Итеративные методы решения получили развитие в работах [7,8], в основе которых лежит метод Ньютона-Канторовича. При этом, для устранения некорректности поставленной обратной задачи рассеяния [9], обычно применяется [7,8, 10,11,12] регуляризация Тихонова [13]. Однако в рамках такого подхода ранее пренебрегали дисперсией диэлектрической проницаемости, что сужало круг применения результатов во многих практических приложениях (геозондирование, задачи биомедицины). С другой стороны, в практических исследованиях часто можно выделить определенный характер дисперсионной зависимости [1, 14]. Поэтому целью настоящей работы является задача восстановления профиля диэлектрической проницаемости плоскослоистой структуры с учетом наличия дисперсионной зависимости, типичной для естественных проводящих сред (почвогрунты).

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскостойкую структуру с неизвестным распределением электрических параметров, лежащую на подложке с известными диэлектрической проницаемостью и проводимостью. Считаем, что комплексная диэлектрическая проницаемость и зависит от частоты по следующему закону [16]

$$\varepsilon(z) = \varepsilon'(z) - i \frac{4\pi\sigma(z)}{\omega}, \quad (1)$$

где  $\sigma(z)$ ,  $\varepsilon'(z)$  - некоторые не зависящие от частоты вещественные функции от  $z$ , описывающие проводимость и высокочастотный предел диэлектрической проницаемости соответственно. Данная зависимость является типичной для естественных проводящих сред [14]. Диэлектрическая проницаемость предполагается непрерывной, однако для численного алгоритма рассматривается ее дискретизация [4] на слои (рис. 1).

Введем дополнительно в рассмотрение также структуру (которую назовем пробной) с известной и близкой по значению диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 1). Предполагается, что слои составляющие структуру - немагнитные, т.е.  $\mu = 1$ .

Исследуемая структура облучается электромагнитной волной с известными параметрами, и измеряются характеристики рассеянного поля. Сторонние монохроматические источники располагаются над структурой на конечном или же бесконечном удалении. Они порождают первичную электромагнитную волну с комплексной амплитудой  $\vec{E}^{in}$ . Эта волна, падая на слой, порождает как поле внутри слоя, так и рассеянное поле  $\vec{E}^{sc}$ .

Также нам известен профиль диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{aux}(z)$  вспомогательной (пробной) плоскостойкой структуры, которая имеет такую же геометрию, как исследуемая структура, и находится на такой же однородной подложке с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_c$ . Будем искать профиль диэлектрической проницаемости исследуемой структуры с помощью последовательного уточнения оценки искомого профиля. На каждом этапе будем находить новую поправку к  $\varepsilon_{aux}(z)$  как результат "подгонки" расчетных данных к экспериментальным в рамках приближения Борна [4] для прямой задачи рассеяния.

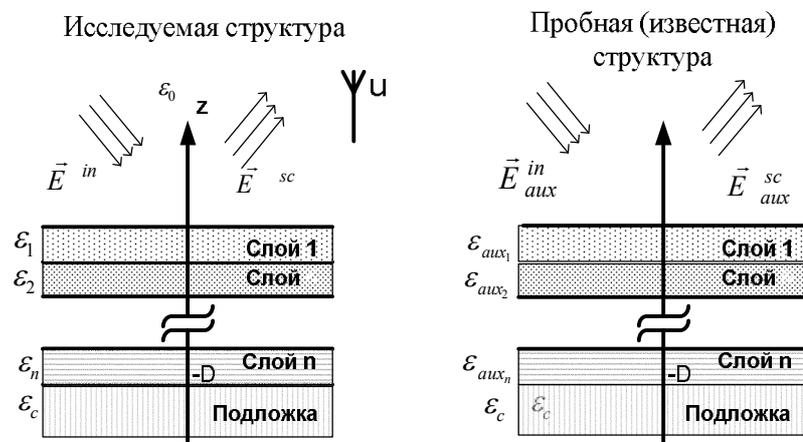


Рис. 1. Постановка задачи.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поле, создаваемое сторонними источниками в пробной структуре, может быть записано [15,16] в виде:

$$\vec{E}(\vec{R}) \equiv \vec{E}_{aux}(\vec{R}) + \frac{ik_0c}{4\pi} \int_V dV' [\hat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') \hat{\eta}(\vec{R}') \vec{E}(\vec{R}')] \quad (2)$$

где  $\hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}')$  - полевые функции Грина пробной структуры,  $\vec{J}(\vec{R}), \vec{M}(\vec{R})$  - сторонние источники электрического и магнитного типов,  $\hat{\eta} = \varepsilon'_{aux} - \varepsilon'$  - искомая поправка к профилю диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{aux}(z)$  пробной структуры.

Воспользовавшись борновским приближением, получим:

$$\vec{E}(\vec{R}) \approx \vec{E}_{aux}(\vec{R}) + \frac{ik_0c}{4\pi} \int_V dV' [\hat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') \hat{\eta}(\vec{R}') \vec{E}_{aux}(\vec{R}')] \quad (3)$$

Подставим  $\varepsilon_{aux}(z)$  и  $\varepsilon(z)$  в выражение для  $\hat{\eta}(z)$ :

$$\hat{\eta}(z) = \varepsilon'_{aux}(z) - i \frac{4\pi\sigma_{aux}(z)}{\omega} - (\varepsilon'(z) - i \frac{4\pi\sigma(z)}{\omega}) = (\varepsilon'_{aux} - \varepsilon') - i \frac{4\pi}{\omega} (\sigma_{aux} - \sigma) \quad (4)$$

Таким образом, для нахождения  $\hat{\eta}$  нам необходимо найти «поправки» к  $\varepsilon'_{aux}$  и  $\sigma_{aux}$ . Обозначим  $\chi = -4\pi/\omega$ , а искомые поправки как

$$\eta = \varepsilon'_{aux} - \varepsilon', \quad \zeta = \sigma_{aux} - \sigma \quad (5)$$

Подставим полученные выражения в формулу для поля (2), получим выражение для поля в точке наблюдения, которое собственно и измеряется в эксперименте:

$$\begin{aligned} \bar{U}(R_H) = & \bar{U}_{aux}(R) + \frac{ik_0c}{4\pi} \int_V dV' \bar{p}(\bar{R}_H) \hat{G}_{ee}(R, R') \bar{E}_{aux}(R') \eta(R') + \\ & + \frac{k_0c}{\omega} \int_V dV' \hat{G}_{ee}(R, R') \bar{E}_{aux}(\bar{R}') \bar{p}(\bar{R}_H) \zeta(R') \end{aligned} \quad (6)$$

где  $R'_H$  - радиус-вектор точки наблюдения вне исследуемой структуры,  $\bar{p}$  вектор, определяющий поляризацию, на которой регистрируется поле в точке наблюдения.

Введем следующие обозначения:

$$L(\bar{R}_H, \bar{R}') = \frac{ik_0c}{4\pi} \bar{p}(\bar{R}_H) G(\bar{R}_H, \bar{R}') E(\bar{R}'), \quad M(\bar{R}_H, \bar{R}') = \frac{4\pi}{\omega} L(\bar{R}_H, \bar{R}') \quad (7)$$

Учитывая, что рассматриваемые диэлектрические проницаемости исследуемой и эталонной структур - скалярные величины и учитывая (7), приходим к соотношению:

$$U(R_H) = U_{aux}(R_H) + \int_V dV' L(R_H, R') \eta(R') + i \int_V dV' M(R_H, R') \zeta(R') \quad (8)$$

Таким образом, определено выражение для поля в точке наблюдения. Пусть для каждого из N измерений известны соответствующие значения поля, падающего поля и соответствующее значение L:

$$U^{(j)}(\bar{R}_H), U_{IN}^{(j)}(\bar{R}_H), L^{(j)}(\bar{R}_H, \bar{R}'), j = 1, \dots, N \quad (9)$$

В общем случае в качестве параметра для измерений могут выступать как частота, радиус-вектор точки наблюдения, так и величины, характеризующие поляризацию или направление распространения волны, испускаемой сторонними источниками. Согласно (8) получаем:

$$U^{(j)}(R_H) = \bar{U}^{(j)}_{aux}(R_H) + \int_V dV' L^{(j)}(R_H, R') \eta(R') + i \int_V dV' M^{(j)}(R_H, R') \zeta(R'), j = 1 \dots N \quad (10)$$

Это система N интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно  $\eta(R)$  и  $\zeta(R)$ . Будем искать решение  $(\eta(R), \zeta(R))$  как функции, реализующие минимум сглаживающего функционала [1, 4, 17]  $F[\eta, \zeta] \rightarrow \min$ , где

$$\begin{aligned} F[\eta, \zeta] \equiv & \sum_{j=1}^N w_j \left| U^{(j)}(\bar{R}_H) - U_{aux}^{(j)}(\bar{R}_H) - \int_{V_p} L^{(j)} \eta dV' - i \int_V M^{(j)} \zeta dV' \right|^2 + \\ & + \frac{\alpha}{N} \int_{V_p} w(\bar{R}) \sum_j |\eta + i\chi^j \zeta|^2 dV \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $w_j$  - весовые коэффициенты,  $w(\bar{R})$  - весовая функция,  $\alpha$  - параметр регуляризации, - положительно определенные величины. Стабилизирующее слагаемое выбрано следующим образом [7]:

$$\frac{\alpha}{N} \int_{V_p} w(z) \sum_j |\eta(z) + i\chi^j \zeta(z)|^2 dV \quad (12)$$

Используя методы вариационного исчисления [17,18] данная задача может быть сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая в силу вырожденности ядра может быть сведена к СЛАУ.

Таким образом общая схема вычислительного алгоритма выглядит следующим образом:

1. Задаются начальные параметры и процедуры, вычисляющие функцию Грина пробной структуры с учетом этих параметров

2. Вычисляется начальное значение сглаживающего функционала  $F[\eta, \zeta]$  по формуле (11).
3. Находятся коэффициенты СЛАУ, которая получена из системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
4. Вычисляются поправки для вещественной части  $\varepsilon'$  и проводимости  $\sigma$ .
5. Корректируются принятые в качестве начального приближения  $\varepsilon = \varepsilon^\circ + \eta$  и  $\sigma = \sigma^\circ + \zeta$ , используя полученные на шаге 4 поправки.
6. Вычисляется новое значение функционала  $F[\eta, \zeta]$  по формуле (12).
7. Далее, если найденные значения  $\varepsilon$  и  $\sigma$  не удовлетворяют требуемой точности, можно, приняв их в качестве начальных параметров, опять повторить процедуру вычисления до достижения необходимой малости невязки  $F[\eta, \zeta]$ .

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проверки практического использования предложенной схемы восстановления профиля диэлектрической проницаемости плоскостной среды было разработано соответствующее программное обеспечение. Результаты расчета  $\varepsilon'(z)$  и  $\sigma(z)$  для структуры содержащей 30 слоев за 50 итераций, а также начальное приближение приведены на рис. 2.

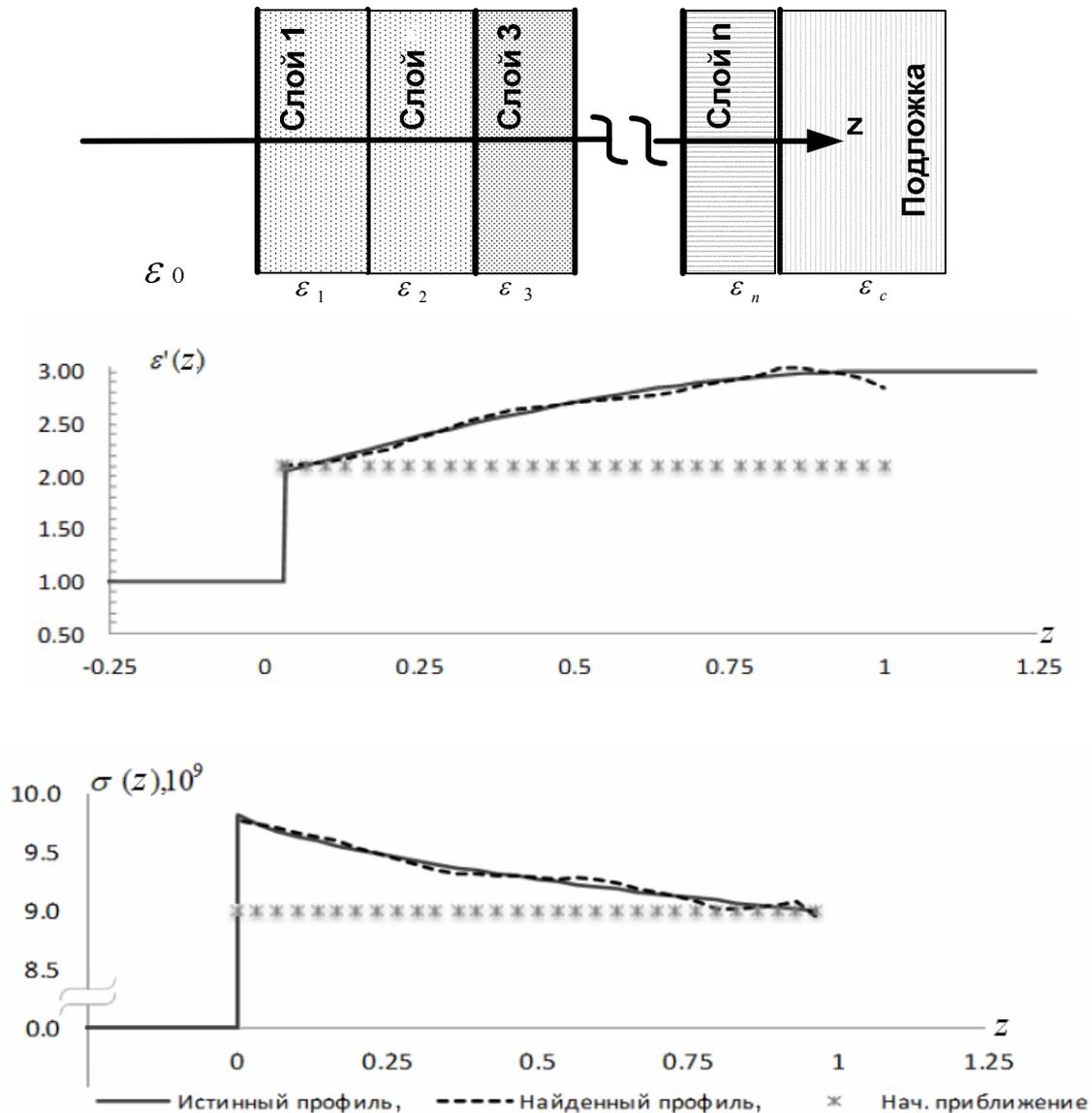


Рис. 2. Восстановление вещественной части профиля  $\varepsilon'(z) = 2 + \sin(\pi z/2)$  и проводимости  $\sigma(z)$  ( $f = 1$  ГГц)

## ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена задача восстановления профиля диэлектрической проницаемости плоскослоистой структуры с учетом наличия дисперсионной зависимости, типичной для проводящих сред. Предложен итеративный метод решения обратной задачи рассеяния, сводящий ее к математической задаче минимизации функционала. Большая часть решения задачи получена аналитически, что сделало довольно простой ее численную реализацию. Хорошая сходимость метода, показанная в результатах численного моделирования, подтверждает эффективность построенного вычислительного метода.

Предложенный метод существенно расширяет область практического применения итеративной процедуры решения обратной задачи рассеяния. С его помощью можно с успехом решать более широкий круг задач биомедицины и дистанционного мониторинга со спутника. В частности, в отличие от предложенного ранее метода, данную процедуру можно применить к решению задач геоэкологического зондирования в случае влажных почв.

Кроме того, предложенный подход в дальнейшем можно распространить на случаи иных дисперсионных зависимостей профиля диэлектрической проницаемости, а именно на модели Дебая и Друде, и сделать основой для решения более сложных задач определения физико-геометрических характеристик биологических объектов и промышленных сооружений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A. Tarantola* Inverse problem theory and methods for model parameter estimation - Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. Philadelphia, PA, USA, - Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM), -2005г. 352 стр.
2. *R. Newton* Inversion of reflection data for layered media: a review of exact methods. // Geophys. J.R. Astr. Soc. 65 (1981), pp. 191–215.
3. *A. J. Tjhuis and C. van der Worm* Iterative approach to the frequency-domain solution of the inverse-scattering problem for an inhomogeneous lossless dielectric slab // IEEE trans., - 1984. AP31, pp. 711-716.
4. *D. O. Batrakov and N. P. Zhuck* Solution of a general inverse scattering problem using distorted Born approximation and iterative technique. //Inverse Problems, 10, Feb. 1994, pp. 39-54.
5. *Yung Chen* An iterative procedure for solving inverse scattering problems arising from active remote sensing. // Proc. of Mathematical Methods and Applications of Scattering Theory: Washington, D.C., - 1979. vol. 130, p.308-310
6. *H. Egger* Fast fully iterative Newton-type methods for inverse problems // J. Inv. Ill-posed Problems 15 (2007), 257-276
7. *N. P. Zhuck and D. O. Batrakov* Inverse scattering problem in the polarization parameters domain for isotropic layers: solution via Newton-Kantorovich iterative technique. //Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 1994, vol. 8, No 6, pp.759-779.
8. *L. Mönch* A Newton method for solving the inverse scattering problem for a sound-hard obstacle // Inverse Problems, - 1996. Volume 12, Issue 3, pp. 309-323.
9. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, изд. 3-е, 1989г., 608 стр.
10. *A. Doicu, F. Schreier, et al* DRACULA-advanced retrieval tool for atmospheric remote sensing. // Proc. Of Envisat Symposium, Montreux, Switzerland, - 2007. ESA SP-636.
11. *A. Doicu, F. Schreier, M. Hess* Iteratively regularized Gauss–Newton method for atmospheric remote sensing // Journal of quantitative spectroscopy & radiative transfer, - 2004. vol. 83, pp. 47-61.
12. *N. S. Tezel* Newton's method for inverse obstacle scattering of buried objects. // J. Integral Equations Appl., - 2009. Volume 21, Number 2, pp. 317-328.
13. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, изд. 3-е, 1986г., 287 стр.
14. *Mironov, V. L., M. C. Dobson, V. H. Kaupp, S. A. Komarov, and V. N. Kleshchenko* Generalized refractive mixing dielectric model for moist soils // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, Vol. 42, No. 4, 773-785, 2004.
15. *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. М.: Наука. 1982, 272 с.
16. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. – В 2-х тт. Т. 1, 2 – М.: Мир, 1978г., т. 1 – 550 стр., т. 2 – 558 стр.
17. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971г., 424 стр.
18. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, изд. 4-е, 1983г., 392 стр.