

Министерство образования и науки,  
молодежи и спорта Украины

**ХАРЬКОВСКИЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени В.Н. Каразина**

**А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба**

**Л Е К Ц И И  
ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ  
И КИНЕТИКЕ**

**7. Метод Келдыша  
в квантовой кинетике**

**Учебно-методическое пособие**

**Харьков – 2012**

К 100-летию со дня рождения академика Л.Д. Ландау

Министерство образования и науки,  
молодежи и спорта Украины

**ХАРЬКОВСКИЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени В.Н. Каразина**

**А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба**

**Л Е К Ц И И  
ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ  
И КИНЕТИКЕ**

**7. Метод Келдыша  
в квантовой кинетике**

**Учебно-методическое пособие**

**Харьков – 2012**

УДК 530.145, 530.1 (075.8)

ББК 22.317я73

Е74

**Рецензенты:**

доктор физ.-мат. наук, вед. научн. сотр. ФТИНТ НАН  
Украины, профессор **А.С. Ковалев**;  
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической  
физики имени академика И.М. Лифшица Харьковского  
национального университета имени В.Н. Каразина,  
профессор **В.В. Ульянов**.

*Рекомендовано к печати решением Научно-методического совета  
Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина  
(протокол № 2 от 14.12. 2011 г.)*

**Ермолаев А.М.**

Е 74 Лекции по квантовой статистике и кинетике. 7. Метод Келдыша в квантовой кинетике : учебно-методическое пособие для студентов физических специальностей университетов / **А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба** – Х. : ХНУ имени В.Н. Каразина, 2012. – 77 с.

В учебно-методическом пособии изложен формализм современной квантовой статистики и кинетики, основанный на методах квантовой теории поля. Основное внимание уделено применению метода квантовых функций Грина и функциональных методов в теории конденсированного состояния вещества. В седьмой главе изложен метод Л.В. Келдыша, развитый для изучения явлений переноса в сильно неравновесных системах. Описана диаграммная техника для неравновесных функций Грина. Выведены уравнения Каданова–Бейма, обобщенное кинетическое уравнение, уравнение Больцмана. Рассмотрена техника вычисления неравновесных функций Грина методом континуального интегрирования по грасмановым переменным. Теория применяется к электронному газу в примесных проводниках при наличии магнитного поля и модели сверхпроводимости БКШ.

**УДК 530.145, 530.1 (075.8)**

**ББК 22.317я73**

© Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 2012

© Ермолаев А.М., Рашба Г.И., 2012

© Макет обложки Дончик И.Н., 2012

## Содержание

Введение.....	4
7. Метод Келдыша в квантовой кинетике.....	6
7.1. Неравновесные временные функции Грина–Келдыша.....	6
7.2. Функции Грина идеального газа.....	13
7.3. Функции Грина в представлении взаимодействия.....	16
7.4. Диаграммная техника для неравновесных систем.....	19
7.5. Собственно-энергетические функции. Уравнения Дайсона.....	30
7.6. Уравнения Каданова–Бейма.....	37
7.7. Обобщенное кинетическое уравнение.....	39
7.8. Кинетическое уравнение в диаграммной технике.....	41
7.9. Матричная функция Грина и континуальный интеграл.....	48
7.10. Модель БКШ и функциональные методы.....	61
Задачи.....	72
Литература.....	75

## Введение

В процессе развития физической кинетики можно выделить несколько непрерывно сменяющихся этапов. Развитый Л. Больцманом кинетический подход к описанию явлений переноса в макроскопических системах в середине прошлого столетия уступил место методу Р. Кубо. Этот метод хорошо зарекомендовал себя в процессе расчета кинетических коэффициентов слабо неравновесных систем. Эффективным методом изучения систем, далеких от состояния равновесия, является метод Л.В. Келдыша, развитый в 1964 году.

На каждом этапе развитие кинетики стимулировалось успехами, достигнутыми в других областях теоретической физики, на первый взгляд далеких от кинетики. Общеизвестны успехи кинетического подхода Больцмана, достигнутые в сочетании с гидродинамическим описанием макросистем. Дополнением к методу Кубо стал метод функций Грина, заимствованный из квантовой теории поля. Связь физической кинетики с этой теорией становится все более глубокой. За последние годы метод Келдыша в сочетании с функциональными методами квантовой теории поля стал мощным инструментом исследования явлений

переноса в сильно неравновесных системах. Количество журнальных статей, в которых используется этот метод, непрерывно растет. Это позволило россиянам недавно номинировать академика Л.В. Келдыша на звание Человека года в своей стране.

К сожалению, метод Келдыша еще не нашел должного освещения в учебной литературе для студентов. Авторы пособия предприняли попытку устранить этот пробел. Наряду с традиционным описанием диаграммной техники для неравновесных систем, предложенной Келдышем, мы кратко излагаем технику континуального интегрирования по грассмановым переменным, используемую для расчета неравновесных функций Грина. В качестве иллюстрации рассматриваем неравновесные функции Грина электронного газа в примесных проводниках при наличии магнитного поля и в модели сверхпроводимости БКШ.

Во втором издании пособия добавлен раздел 7.10. Кроме того, приведены задачи, способствующие расширению области применения метода Келдыша.

Пособие адресовано студентам физических, физико-технических, радиофизических факультетов университетов, изучающим квантовую кинетику.

Авторы

## 7. Метод Келдыша в квантовой кинетике

### 7.1. Неравновесные временные функции Грина-Келдыша

Основная задача квантовой кинетики состоит в том, чтобы описать реакцию первоначально равновесной системы на внешнее возмущение. Мы ограничимся случаем, когда учет возмущения сводится к добавлению оператора  $V$  взаимодействия системы с возмущающим полем к невозмущенному гамильтониану  $H_0$ . Тогда гамильтониан системы в поле становится равным

$$H = H_0 + V. \quad (1)$$

Будем использовать также гамильтониан большого канонического ансамбля Гиббса  $H'_0 = H_0 - \mu N$ , где  $N$  – оператор числа частиц,  $\mu$  – химический потенциал системы.

Если возмущение  $V$  слабое, кинетические коэффициенты системы, характеризующие ее реакцию на слабое поле, могут быть рассчитаны методом Р. Кубо [1]. Этот метод позволяет выразить кинетические коэффициенты через равновесные функции Грина [2-4], для расчета которых разработаны мощные методы. Если же внешнее поле как угодно сильно отклоняет систему от состояния равновесия, описать реакцию системы в терминах равновесных функций Грина невозможно. Необходимо использовать неравновесные функции Грина. Они введены Л.В. Келдышем в 1964 году [5].

Ниже будет показано, что для описания реакции системы на произвольное внешнее поле необходимо ввести четыре функции. Прежде чем вводить их, рассмотрим одночастичную матрицу плотности системы одинаковых ферми- или бозе-частиц [3,6,7]

$$\rho_1(r_1, r_2, t) = \frac{1}{N} \text{Sp} \left[ \rho(t) \psi^+(r_2) \psi(r_1) \right] = \frac{1}{N} \left\langle \psi^+(r_2) \psi(r_1) \right\rangle_t, \quad (2)$$

где  $N$  – число частиц в системе,  $r = (\vec{r}, \alpha)$  – радиус-вектор и спиновая переменная частицы,  $\psi(r)$  и  $\psi^+(r)$  – шредингеровские операторы уничтожения и рождения частиц в точке  $r$ ,  $\rho(t)$  – неравновесный статистический оператор системы в момент времени  $t$ . Известно, что

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^+(t, t_0), \quad (3)$$

где  $U(t, t_0)$  – оператор эволюции системы с гамильтонианом (1),  $t_0$  – произвольный начальный момент времени. Подставляя выражение (3) в формулу (2) и используя циклическую инвариантность шпура, а также унитарность оператора эволюции, получаем

$$\begin{aligned} N\rho_1(r_1, r_2, t) &= \text{Sp} \left[ \rho(t_0) \psi_H^+(r_2, t) \psi_H(r_1, t) \right] = \\ &= \left\langle \psi_H^+(r_2, t) \psi_H(r_1, t) \right\rangle_{t_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь индексом  $H$  отмечены гейзенберговские полевые операторы, а символом  $\langle \dots \rangle_{t_0}$  – усреднение с неравновесным статистическим оператором  $\rho(t_0)$ . Из формулы (4) видно, что одночастичная матрица плотности выражается через корреляционную функцию гейзенберговских полевых операторов с одинаковыми временными аргументами. Удобно, однако, ввести более общие двухвременные функции:



$$\begin{aligned}
G_{12}^{++} &= -\frac{i}{\hbar} \left\langle T^c \left( \psi_1^H \psi_2^{+H} \right) \right\rangle_{t_0}, \\
G_{12}^{--} &= -\frac{i}{\hbar} \left\langle T^a \left( \psi_1^H \psi_2^{+H} \right) \right\rangle_{t_0}, \\
G_{12}^{+-} &= \pm \frac{i}{\hbar} \left\langle \psi_2^{+H} \psi_1^H \right\rangle_{t_0}, \\
G_{12}^{-+} &= -\frac{i}{\hbar} \left\langle \psi_1^H \psi_2^{+H} \right\rangle_{t_0}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $T^c$  – символ обычного хронологического упорядочения операторов [2]. Символ  $T^a$  означает антихронологическое упорядочение [6,7]. Он располагает операторные сомножители так, чтобы временной аргумент возрастал слева направо, а не справа налево, как в случае  $T^c$ . Необходимо помнить, что в случае фермионов при перестановке любой пары фермиевских операторов произведение меняет знак. В формулах (5) и ниже  $1 = (\vec{r}_1, \alpha_1, t_1)$ , верхний знак относится к фермионам, а нижний – к бозонам,  $\hbar$  – квантовая постоянная. В отличие от равновесных функций Грина в формулах (5) выполняется усреднение с неравновесным статистическим оператором  $\rho(t_0)$ . Величина  $G^{++}$  называется причинной функцией Грина, а  $G^{--}$  – антипричинной,  $G^{+-}$  и  $G^{-+}$  – двухвременные корреляционные функции. Для них часто используются обозначения  $G^{++} = g^c$ ,  $G^{+-} = g^<$ ,  $G^{-+} = g^>$ ,  $G^{--} = g^a$ .

Из формул (4) и (5) следует, что

$$N \rho_1(r_1, r_2, t_1) = \mp i \hbar G_{12}^{+-} |_{t_2=t_1}. \tag{6}$$

Плотность частиц в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$  связана с функцией  $G^{+-}$  соотношением

$$n(\vec{r}, t) = \mp i \hbar \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}^{+-}(\vec{r}t, \vec{r}t).$$

Поскольку оператор плотности тока электронов с массой  $m$  и зарядом  $e$  в поле векторного потенциала  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  равен

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{ie\hbar}{2m} \sum_{\alpha} \left\{ \left[ \nabla \psi_{\alpha}^{+}(\vec{r}, t) \right] \psi_{\alpha}(\vec{r}, t) - \psi_{\alpha}^{+}(\vec{r}, t) \nabla \psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \right\} - \frac{e^2}{mc} \vec{A}(\vec{r}, t) \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{+}(\vec{r}, t) \psi_{\alpha}(\vec{r}, t),$$

плотность тока в точке  $\vec{r}_1$  в момент  $t_1$  связана с функцией  $G^{+-}$  соотношением

$$\vec{j}(\vec{r}_1, t_1) = -\frac{e\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} - \frac{ie}{c\hbar} \vec{A}(\vec{r}_1, t_1) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} - \frac{ie}{c\hbar} \vec{A}(\vec{r}_2, t_2) \right] \times \\ \times \sum_{\alpha_1} G_{\alpha_1\alpha_1}^{+-}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_2) \Big|_{\substack{\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \\ t_2 = t_1}}.$$

Здесь  $c$  – скорость света в пустоте.

В пространственно-неоднородной неравновесной системе функции (5) зависят от  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  и  $t_1$ ,  $t_2$  порознь. Из определения видно, что функции  $G^{++}$  и  $G^{--}$  имеют скачки при  $t_1 = t_2$ , а  $G^{+-}$  и  $G^{-+}$  меняются непрерывно. Скачки  $G^{++}$  и  $G^{--}$  отличаются знаком. Используя перестановочные соотношения для полевых операторов, легко показать, что значение функции  $G^{++}$  при  $t_1 = t_2$  связано со значением  $G^{+-}$  соотношением

$$i\hbar \left[ G_{\alpha_1\alpha_2}^{-+}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_1) - G_{\alpha_1\alpha_2}^{+-}(\vec{r}_1 t_1, \vec{r}_2 t_1) \right] = \delta_{\alpha_1\alpha_2} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (7)$$

Из определений (5) следует, что функции Грина и корреляционные функции связаны соотношениями "симметрии":

$$\begin{aligned} (G_{12}^{++})^* &= -G_{21}^{--}, & (G_{12}^{--})^* &= -G_{21}^{++}, \\ (G_{12}^{-+})^* &= -G_{21}^{+-}, & (G_{12}^{+-})^* &= -G_{21}^{-+}. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко убедиться также в справедливости соотношений:

$$\begin{aligned} G_{12}^{++} &= \Theta(t_1 - t_2) G_{12}^{-+} + \Theta(t_2 - t_1) G_{12}^{+-}, \\ G_{12}^{--} &= \Theta(t_2 - t_1) G_{12}^{+-} + \Theta(t_1 - t_2) G_{12}^{-+}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Theta$  – функция Хевисайда. Отсюда следует равенство

$$G_{12}^{++} + G_{12}^{--} = G_{12}^{+-} + G_{12}^{-+}. \quad (10)$$

Таким образом, из четырех неравновесных функций (5) лишь две являются независимыми.

Введем также запаздывающую  $G^R$  и опережающую  $G^A$  функции Грина:

$$\begin{aligned} i\hbar G_{12}^R &= \Theta(t_1 - t_2) \left\langle \left[ \psi_1^H, \psi_2^{+H} \right]_{\pm} \right\rangle_{t_0}, \\ i\hbar G_{12}^A &= -\Theta(t_2 - t_1) \left\langle \left[ \psi_1^H, \psi_2^{+H} \right]_{\pm} \right\rangle_{t_0}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $[a, b]_{\pm} = ab \pm ba$ . Они связаны соотношением

$$G_{12}^A = (G_{21}^R)^*. \quad (12)$$

Из определений (5) и (11) следуют формулы:

$$\begin{aligned} G_{12}^R &= G_{12}^{++} - G_{12}^{+-} = G_{12}^{-+} - G_{12}^{--}, \\ G_{12}^A &= G_{12}^{++} - G_{12}^{-+} = G_{12}^{+-} - G_{12}^{--}. \end{aligned} \quad (13)$$

Неравновесные многовременные функции Грина и корреляционные функции вводятся аналогично. Например, s-частичная причинная функция Грина определяется соотношением:

$$(i\hbar)^s G^c(1\dots s, 1' \dots s') = \left\langle T^c \left( \psi_1^H \dots \psi_s^H \psi_{s'}^{+H} \dots \psi_1^{+H} \right) \right\rangle_{t_0}.$$

Четыре функции (5) можно объединить в одну матричную функцию Грина

$$G_{12} = -\frac{i}{\hbar} \left\langle T_C \left( \psi_1^H \psi_2^{+H} \right) \right\rangle_{t_0}, \quad (14)$$

определенную на контуре Келдыша-Швингера  $C$ , изображенном на рис. 1. Этот контур идет вдоль

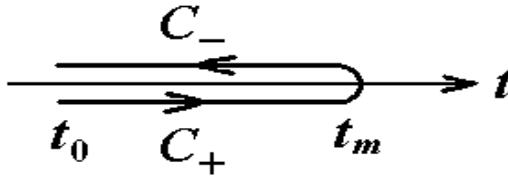


Рис. 1

временной оси от точки  $t_0$  до некоторой точки  $t_m$ , а затем возвращается обратно в точку  $t_0$ . Он состоит из двух ветвей  $C_+$  и  $C_-$ :  $C = C_+ + C_-$ . Значение  $t_m$  подбирается так, чтобы оно превышало значения всех временных аргументов в функциях (5). Символом  $T_C$  обозначен оператор упорядочения вдоль контура  $C$ . На ветви  $C_+$  он совпадает с  $T^c$ , а на ветви  $C_-$  – с  $T^a$ . Иными словами, раскрывая символ  $T_C$ , мы выписываем, как обычно, операторные сомножители слева направо, двигаясь против стрелки на контуре  $C$ . В случае фермионов необходимо учесть множитель  $(-1)^P$ , где  $P$  – четность перестановки фермиевских операторов при переходе от исходного их порядка к хронологическому. Например, в случае расположения моментов времени, показанном на рис. 2, имеем

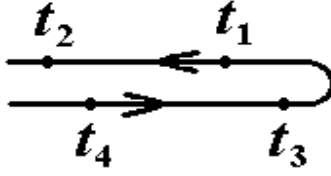


Рис. 2

$$T_C(\psi_1\psi_2\psi_3^+\psi_4^+) = \mp\psi_2\psi_1\psi_3^+\psi_4^+.$$

Легко убедиться в том, что компоненты матрицы (14) совпадают с функциями (5):

$$G_{12} = \begin{pmatrix} G_{12}^{++} & G_{12}^{+-} \\ G_{12}^{-+} & G_{12}^{--} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Индекс + или - у матричного элемента соответствует той ветви контура, на которой лежит расположенный под ним временной аргумент. Например,  $G_{12}^{-+}$  означает, что  $t_1 \in C_+$ , а  $t_2 \in C_-$ .

В стационарном пространственно-однородном случае все функции (5) зависят от  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  и  $t = t_1 - t_2$ . Совершим фурье-преобразование по этим переменным. Тогда из соотношений (8) и (12) получаем связь фурье-компонент:

$$\begin{aligned} G^{++}(\vec{p}, \varepsilon) &= -[G^{--}(\vec{p}, \varepsilon)]^*, \\ G^A(\vec{p}, \varepsilon) &= [G^R(\vec{p}, \varepsilon)]^*. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\vec{p}$  и  $\varepsilon$  – импульсная и энергетическая переменные, а спиновые индексы опущены. Компоненты Фурье  $G^{\pm\mp}(\vec{p}, \varepsilon)$  оказываются чисто мнимыми.

## 7.2. Функции Грина идеального газа

Дифференцируя функцию  $G_{12}^{++}$  по  $t_1$  и используя уравнение движения для оператора  $\psi_1^H$  свободных частиц

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} \psi_1^H = [\psi_1^H, H'_0]_- = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \mu \right) \psi_1^H,$$

легко показать, что в случае идеального ферми- или бозе-газа с гамильтонианом  $H'_0$  эта функция удовлетворяет уравнению

$$G_{01}^{-1} G_0^{++}(1, 2) = \delta_{12}, \quad (17)$$

где  $G_0^{-1}$  – дифференциальный оператор

$$G_0^{-1} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu, \quad (18)$$

$\delta_{12} = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$ . Индекс 1 у  $G_0^{-1}$  в (17) означает дифференцирование по  $\vec{r}_1, t_1$ . Такому же уравнению удовлетворяют функции  $G_0^{R,A}$ . Поскольку функция  $G_{12}^{--}$  имеет при  $t_1 = t_2$  скачок, отличающийся от скачка  $G_{12}^{++}$  знаком, для нее имеем уравнение

$$G_{01}^{-1} G_0^{--}(1, 2) = -\delta_{12}. \quad (19)$$

Непрерывные при  $t_1 = t_2$  функции  $G^{+-}, G^{-+}$  удовлетворяют уравнению

$$G_{01}^{-1} G_0^{\pm\mp}(1, 2) = 0. \quad (20)$$

Если дифференцирование выполняется по переменным  $\vec{r}_2, t_2$ , то знак перед  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  необходимо изменить, т. е. оператор  $G_{01}^{-1}$  надо заменить на  $(G_{02}^{-1})^*$ . В частности,

$$(G_{02}^{-1})^* G_0^{++}(1, 2) = \delta_{12}. \quad (21)$$

Рассмотрим стационарное однородное состояние неравновесного идеального газа. Его функция распределения по импульсам  $n_{\vec{p}}$  отличается от функции распределения Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна. В рассматриваемом случае она не зависит от спинового квантового числа. Уравнения движения для гейзенберговских полевых операторов идеального газа с гамильтонианом  $H'_0$  имеют решения:

$$\begin{aligned} \psi_H(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - \xi_{\vec{p}}t)\right], \\ \psi_H^+(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+ \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - \xi_{\vec{p}}t)\right], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $a_{\vec{p}}$  и  $a_{\vec{p}}^+$  – операторы уничтожения и рождения частиц с импульсом  $\vec{p}$ ,  $\xi_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu$ ,  $\Omega$  – объем системы. Подставим (22) в формулы (5) и учтем выражения для средних

$$\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'} \rangle_{t_0} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} n_{\vec{p}}, \quad \langle a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^+ \rangle_{t_0} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} (1 \mp n_{\vec{p}}).$$

Тогда будем иметь

$$G_0^{+-}(\vec{r}, t) = \pm \frac{i}{\hbar} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} n_{\vec{p}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - \xi_{\vec{p}}t)\right].$$

Это выражение можно переписать в виде

$$G_0^{+-}(\vec{r}, t) = \pm \frac{i}{\hbar} (2\pi\hbar) \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} n_{\vec{p}} \times \\ \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - \varepsilon t)\right] \delta(\varepsilon - \xi_{\vec{p}}).$$

Следовательно, компонента Фурье функции  $G_0^{+-}$  равна

$$G_0^{+-}(\vec{p}, \varepsilon) = \pm 2\pi i n_{\vec{p}} \delta(\varepsilon - \xi_{\vec{p}}). \quad (23)$$

Аналогично находим

$$G_0^{-+}(\vec{p}, \varepsilon) = -2\pi i (1 \mp n_{\vec{p}}) \delta(\varepsilon - \xi_{\vec{p}}). \quad (24)$$

Функции  $G_0^{R,A}(\vec{p}, \varepsilon)$  могут быть получены из уравнения

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu \right) G_0^{R,A}(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t)$$

с надлежащими граничными условиями [2,6]. Они равны

$$G_0^{R,A}(\vec{p}, \varepsilon) = (\varepsilon - \xi_{\vec{p}} \pm i0)^{-1}. \quad (25)$$

Отметим, что эти функции не содержат  $n_{\vec{p}}$ , т. е. не зависят от свойств состояния, по которому производится усреднение в формулах (5).

Оставшиеся две функции  $G^{++}(\vec{p}, \varepsilon)$  и  $G^{--}(\vec{p}, \varepsilon)$  могут быть найдены из формул связи (13) и (16):

$$G_0^{++}(\vec{p}, \varepsilon) = P \frac{1}{\varepsilon - \xi_{\vec{p}}} + i\pi (\pm 2n_{\vec{p}} - 1) \delta(\varepsilon - \xi_{\vec{p}}), \\ G_0^{--}(\vec{p}, \varepsilon) = -P \frac{1}{\varepsilon - \xi_{\vec{p}}} + i\pi (\pm 2n_{\vec{p}} - 1) \delta(\varepsilon - \xi_{\vec{p}}), \quad (26)$$



где  $P$  – символ главного значения. В состоянии равновесия  $n_{\vec{p}}$  совпадает с функцией распределения Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна.

В случае идеального электронного газа в квантующем магнитном поле в формулах (23)-(26) необходимо перейти к другой классификации одночастичных состояний. В этом случае функции (5) в  $(\sigma, \kappa, \varepsilon)$ -представлении равны

$$\begin{aligned}
 G_0^{++}(\kappa\sigma, \varepsilon) &= \frac{1 - n_{\kappa\sigma}}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} + i0} + \frac{n_{\kappa\sigma}}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} - i0}, \\
 G_0^{+-}(\kappa\sigma, \varepsilon) &= \frac{-n_{\kappa\sigma}}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} + i0} + \frac{n_{\kappa\sigma}}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} - i0}, \\
 G_0^{-+}(\kappa\sigma, \varepsilon) &= \frac{1 - n_{\kappa\sigma}}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} + i0} + \frac{n_{\kappa\sigma} - 1}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} - i0}, \\
 G_0^{--}(\kappa\sigma, \varepsilon) &= \frac{-n_{\kappa\sigma}}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} + i0} + \frac{n_{\kappa\sigma} - 1}{\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} - i0}, \\
 G_0^{R,A}(\kappa\sigma, \varepsilon) &= (\varepsilon - \xi_{\kappa\sigma} \pm i0)^{-1},
 \end{aligned} \tag{27}$$

где  $\kappa$  – набор орбитальных квантовых чисел электрона в магнитном поле,  $\sigma$  – спиновое квантовое число. Мы советуем читателю самостоятельно вычислить функции Грина для однородного стационарного состояния идеального фононного газа в жидкости (см. [6], стр. 479-480).

### 7.3. Функции Грина в представлении взаимодействия

В формулах (5) и (14) полевые операторы записаны в представлении Гейзенберга с точным гамильтонианом (1). Удобно перейти к операторам в представлении взаимодействия. Для этого выберем начальный момент времени в формулах (5) и (14) равным  $t_0 = -\infty$ , а  $t_m = +\infty$ .

Тогда контур Келдыша-Швингера на рис. 1 превращается в две прямые на рис. 3. Будем считать, что в формуле (1)  $H_0$  –

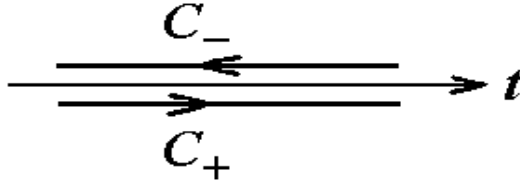


Рис. 3

гамильтониан свободных частиц (в него входит магнитное поле, если речь идет об электронах в этом поле), а  $V$  – гамильтониан взаимодействия частиц друг с другом, с внешним полем, с другими частицами. Предположим, что взаимодействие  $V$  адиабатически включается от  $t_0 = -\infty$  к конечным временам. Тогда символ  $\langle \dots \rangle_{t_0}$  в (5) и (14) означает усреднение по состояниям идеального газа. В дальнейшем будем обозначать его  $\langle \dots \rangle$ , опуская индекс  $t_0$ .

Гейзенберговский оператор  $F_H(t)$  связан с оператором в представлении взаимодействия  $F_D(t)$  соотношением

$$F_H(t) = S^{-1}(t, -\infty) F_D(t) S(t, -\infty), \quad (28)$$

где

$$S(t_2, t_1) = T_C \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt V_D(t) \right] \quad (29)$$

– унитарный оператор, определенный на контуре Келдыша-Швингера  $C$ , изображенном на рис. 3. Он обладает групповым свойством:

$$S(t_1, t_2) S(t_2, t_3) = S(t_1, t_3), \quad t_1 > t_2 > t_3. \quad (30)$$

Справедливо также соотношение

$$S^{-1}(t_1, t_2) = S(t_2, t_1). \quad (31)$$

Напомним, что чем дальше от начала контура  $C$  расположена точка  $t$ , тем позже соответствующий момент времени. Если точки  $t_1$  и  $t_2$  в формуле (29) лежат на ветви  $C_+$ , имеем

$$S(t_2, t_1) = T^c \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt V_D(t) \right], \quad (32)$$

где  $T^c$  – символ обычного хронологического упорядочения.

Пусть  $t_1 > t_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} G_{12}^{++} |_{t_1 > t_2} &= \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left\langle S^{-1}(t_1, -\infty) \psi_1^D S(t_1, -\infty) S^{-1}(t_2, -\infty) \psi_2^{+D} S(t_2, -\infty) \right\rangle, \end{aligned}$$

где  $\psi_1^D$  и  $\psi_2^{+D}$  – полевые операторы в представлении взаимодействия. Они подчиняются уравнениям движения для свободных частиц. Из формул (30) и (31) следуют соотношения

$$\begin{aligned} S(t_1, -\infty) S^{-1}(t_2, -\infty) &= S(t_1, t_2), \\ S^{-1}(t_1, -\infty) &= S^{-1}(\infty, -\infty) S(\infty, t_1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_{12}^{++} |_{t_1 > t_2} &= -\frac{i}{\hbar} \left\langle S^{-1}(\infty, -\infty) S(\infty, t_1) \psi_1^D S(t_1, t_2) \psi_2^{+D} S(t_2, -\infty) \right\rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left\langle S^{-1}(\infty, -\infty) T^c \left[ \psi_1^D \psi_2^{+D} S(\infty, -\infty) \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Эта формула справедлива и при  $t_1 < t_2$ , поэтому

$$G_{12}^{++} = -\frac{i}{\hbar} \left\langle S^{-1}(\infty, -\infty) T^c \left[ \psi_1^D \psi_2^{+D} S(\infty, -\infty) \right] \right\rangle. \quad (33)$$

Аналогичные формулы можно получить и для других компонент матричной функции Грина (15). Сама она имеет вид

$$G_{12} = -\frac{i}{\hbar} \left\langle S^{-1}(\infty, -\infty) T_C \left[ \psi_1^D \psi_2^{+D} S(\infty, -\infty) \right] \right\rangle, \quad (34)$$

где  $T_C$  – символ упорядочения вдоль контура  $C$  на рис. 3. Отметим, что в отличие от обычного выражения для равновесной функции Грина в представлении взаимодействия [2,3] в методе Келдыша усреднение оператора  $S^{-1}$  в формулах (33) и (34) нельзя отделить от усреднения остальных множителей [6].

#### 7.4. Диаграммная техника для неравновесных систем

Задача диаграммной техники состоит в том, чтобы выразить функцию Грина (15) через функции Грина свободных частиц, вычисленные во втором разделе. Это достигается разложением функции (15) в ряд по степеням  $V$ . Ряды для операторов  $S(\infty, -\infty) = S$  и  $S^{-1}(\infty, -\infty) = S^{-1} = S^+$  имеют вид

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt'_n T^c [V(t'_1) \dots V(t'_n)], \quad (35)$$

$$S^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^m \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt''_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt''_m T^a [V(t''_1) \dots V(t''_m)].$$

Здесь и ниже  $-\infty < t < \infty$ , индекс  $D$  у операторов опущен. Подставляя ряды (35) в формулу (33), получаем

$$i\hbar G_{12}^{++} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^m \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{m!n!} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt'_m \int_{-\infty}^{\infty} dt''_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt''_n \times \quad (36)$$

$$\times \left\langle T^a [V(t'_1) \dots V(t'_m)] T^c \left\{ \psi_1 \psi_2^{+D} T^c [V(t''_1) \dots V(t''_n)] \right\} \right\rangle.$$

Последний символ  $T^c$  в этой формуле можно опустить, так как предпоследний выполнит «работу» и за него.

Рассмотрим сначала взаимодействие идеального ферми-газа с внешним полем. В этом случае

$$V(t) = \int dr \psi^+(r, t) u(\vec{r}, t) \psi(r, t), \quad (37)$$

где  $\int dr = \sum_{\alpha} \int d^3 r$ ,  $u(\vec{r}, t)$  – энергия взаимодействия частицы

с внешним полем. Предполагается, что она не зависит от спиновой переменной. Входящий в оператор (32) интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) = \int dx \psi^+(x) u(x) \psi(x),$$

где  $x = (r, t)$ ,  $\int dx = \int dr \int_{-\infty}^{\infty} dt$ . Подставляя это выражение в

формулу (36), находим

$$\begin{aligned} i\hbar G_{12}^{++} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^m \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{m!n!} \int dx'_1 \dots \int dx'_m \times \\ &\times \int dx''_1 \dots \int dx''_n u(x'_1) \dots u(x'_m) u(x''_1) \dots u(x''_n) \times \\ &\times \left\langle T^a \left( \psi_1^+ \psi_{1'} \dots \psi_m^+ \psi_{m'} \right) T^c \left( \psi_1 \psi_2^+ \psi_{1'}^+ \psi_{1''} \dots \psi_n^+ \psi_{n''} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Выполняя суммирование по  $m$  и  $n$ , получаем ряд теории возмущений для функции Грина:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n.$$

В частности, поправка первого порядка к функции  $G_0^{++}(1, 2)$  равна

$$\begin{aligned}
i\hbar G_1^{++}(1,2) = & -\frac{i}{\hbar} \int d^3u_3 \left\langle T^c \left( \psi_1 \psi_2^+ \psi_3^+ \psi_3 \right) \right\rangle + \\
& + \frac{i}{\hbar} \int d^3u_3 \left\langle T^a \left( \psi_3^+ \psi_3 \right) T^c \left( \psi_1 \psi_2^+ \right) \right\rangle,
\end{aligned} \tag{38}$$

где  $\int d^3 = \int dx_3$ . Входящие сюда средние вычисляются при помощи теоремы Вика [2,3]. В первом слагаемом операторы рождения обычным образом спариваются с операторами уничтожения:

$$\begin{aligned}
\left\langle T^c \left( \psi_1 \psi_2^+ \psi_3^+ \psi_3 \right) \right\rangle = & -\left\langle T^c \left( \psi_1 \psi_3^+ \right) \right\rangle \left\langle T^c \left( \psi_2^+ \psi_3 \right) \right\rangle + \\
+ \left\langle T^c \left( \psi_1 \psi_2^+ \right) \right\rangle \left\langle \psi_3^+ \psi_3 \right\rangle = & i\hbar G_0^{++}(1,3) i\hbar G_0^{++}(3,2) + \\
+ i\hbar G_0^{++}(1,2) \left\langle \psi_3^+ \psi_3 \right\rangle.
\end{aligned} \tag{39}$$

Напомним, что при совпадающих временах порядок операторов в свертке нормальный [2,3]. Во втором слагаемом поправки (38) операторы  $T^a$  и  $T^c$  расставляют сомножители в антихронологическом (нормальном при совпадающих временах) и хронологическом порядке. После этого необходимо использовать теорему Вика для среднего от обычного произведения операторов [3]. Порядок операторов, входящих в свертку, после «выпутывания» остается прежним. Два способа спаривания операторов во втором слагаемом (38) дают

$$\begin{aligned}
\left\langle T^a \left( \psi_3^+ \psi_3 \right) T^c \left( \psi_1 \psi_2^+ \right) \right\rangle = & \left\langle T^a \left( \psi_3^{a+} \psi_3^a \right) T^c \left( \psi_1^b \psi_2^{b+} \right) \right\rangle + \\
& + \left\langle T^a \left( \psi_3^{a+} \psi_3^b \right) T^c \left( \psi_1^a \psi_2^{b+} \right) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Операторы в свертке снабжены одинаковыми латинскими буквами. Во втором слагаемом этой формулы спариваемые операторы не упорядочены друг с другом символом  $T^c$  или  $T^a$ . Например, при  $t_1 > t_2$  имеем

$$\left\langle T^a \left( \psi_3^{a+} \psi_3^b \right) T^c \left( \psi_1^a \psi_2^{b+} \right) \right\rangle = \left\langle \psi_3^{a+} \psi_3^b \psi_1^a \psi_2^{b+} \right\rangle$$

– среднее значение обычного произведения операторов.  
Оно равно

$$\left\langle \psi_3^{a+} \psi_3^b \psi_1^a \psi_2^{b+} \right\rangle = - \left\langle \psi_3^+ \psi_1 \right\rangle \left\langle \psi_3 \psi_2^+ \right\rangle = i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{-+}(3,2).$$

Это соотношение справедливо и при  $t_1 < t_2$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \left\langle T^a \left( \psi_3^+ \psi_3 \right) T^c \left( \psi_1 \psi_2^+ \right) \right\rangle &= \left\langle \psi_3^+ \psi_3 \right\rangle i\hbar G_0^{++}(1,2) + \\ &+ i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{-+}(3,2). \end{aligned} \quad (40)$$

Подставляя средние (39) и (40) в формулу (38), находим

$$\begin{aligned} i\hbar G_1^{++}(1,2) &= \int d^3 \left( -\frac{i}{\hbar} u_3 \right) i\hbar G_0^{++}(1,3) i\hbar G_0^{++}(3,2) + \\ &+ \int d^3 \left( \frac{i}{\hbar} u_3 \right) i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{-+}(3,2). \end{aligned} \quad (41)$$

Аналогичным способом можно получить поправки к остальным компонентам функции Грина (15).

Отдельным слагаемым в разложении функций Грина будем сопоставлять диаграммы, аналогичные диаграммам Фейнмана в квантовой электродинамике. Элементами каждой диаграммы являются сплошные и штриховые линии, точки (узлы, вершины), в которых линии сходятся. Компонентам невозмущенной функции  $i\hbar G_0(1,2)$  (15) сопоставим направленные сплошные линии, изображенные на рис. 4. Они

$$\begin{aligned}
i\hbar G_0^{++}(1,2) &= \begin{array}{c} + \\ \leftarrow \\ 1 \quad 2 \\ + \end{array} & i\hbar G_0^{+-}(1,2) &= \begin{array}{c} + \quad - \\ \leftarrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \\
i\hbar G_0^{-+}(1,2) &= \begin{array}{c} - \quad + \\ \leftarrow \\ 1 \quad 2 \end{array} & i\hbar G_0^{--}(1,2) &= \begin{array}{c} - \quad - \\ \leftarrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \\
-\frac{i}{\hbar} u_3 &= \begin{array}{c} + \\ \leftarrow \text{---} \\ 3 \end{array} & +\frac{i}{\hbar} u_3 &= \begin{array}{c} - \\ \leftarrow \text{---} \\ 3 \end{array}
\end{aligned}$$

Рис. 4

соединяют точку 2 (аргумент оператора рождения в (5)) с точкой 1 (аргумент оператора уничтожения). Компоненты матричной функции Грина (15) различаются индексами  $\pm$  в «пространстве Келдыша». Сомножителям  $\pm\left(\frac{i}{\hbar}\right)u_3$  сопоставляем штриховые линии с точками 3 и индексами  $\mp$  на рис. 4. Тогда поправка первого порядка (41) к функции  $i\hbar G_0^{++}(1,2)$  изобразится диаграммами на рис. 5. Как и в

$$i\hbar G_1^{++}(1,2) = \begin{array}{c} | \\ | \\ + \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ + \quad 1 \quad 2 \quad + \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ - \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ + \quad 1 \quad 2 \quad + \end{array}$$

Рис. 5

обычной диаграммной технике [2,3], в технике Келдыша необходимо учитывать только связанные диаграммы, не содержащие отсоединенных петель. Диаграммы с такими



петлями сокращаются, как это имеет место при сложении слагаемых в формуле (38) [6]. Сравнение формулы (41) с рис. 5 показывает, что индексы на множителях необходимо расставлять, двигаясь против стрелок на рисунках. По координатам вершин необходимо интегрировать по правилу

$$\int d3 = \int dr_3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 = \int dx_3 .$$

Например, поправка первого порядка к функции  $i\hbar G_0^{+-}(1,2)$  изображается диаграммами на рис. 6. Соответствующее

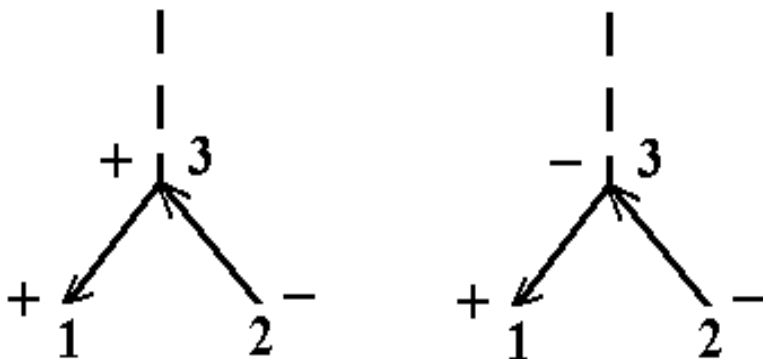


Рис. 6

аналитическое выражение имеет вид

$$i\hbar G_1^{+-}(1,2) = \int d^3\left(-\frac{i}{\hbar}u_3\right) i\hbar G_0^{++}(1,3) i\hbar G_0^{+-}(3,2) + \\ + \int d^3\left(\frac{i}{\hbar}u_3\right) i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{--}(3,2).$$

Читатель без труда изобразит диаграммы для поправок  $G_1$  к остальным компонентам функции Грина (15) и выпишет соответствующие аналитические выражения.

Полученные здесь правила соответствия между диаграммами и формулами остаются справедливыми и для поправок высшего порядка. Например, поправка второго порядка к функции  $i\hbar G_0^{++}(1,2)$  изображается диаграммами на рис. 7. Соответствующее этим диаграммам аналитическое

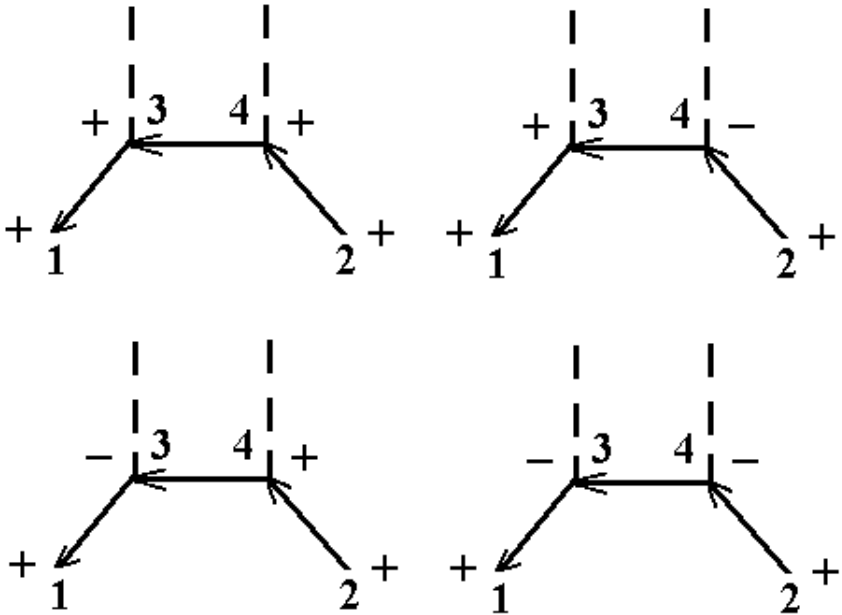


Рис. 7

выражение

равно

$$i\hbar G_2^{++}(1,2) =$$

$$= \int d^3 \int d^4 \left[ \left( -\frac{i}{\hbar} u_3 \right) \left( -\frac{i}{\hbar} u_4 \right) i\hbar G_0^{++}(1,3) i\hbar G_0^{++}(3,4) i\hbar G_0^{++}(4,2) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{i}{\hbar} u_3 \right) \left( \frac{i}{\hbar} u_4 \right) i\hbar G_0^{++}(1,3) i\hbar G_0^{+-}(3,4) i\hbar G_0^{-+}(4,2) + \right. \\ \left. + \left( \frac{i}{\hbar} u_3 \right) \left( -\frac{i}{\hbar} u_4 \right) i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{-+}(3,4) i\hbar G_0^{++}(4,2) + \right. \\ \left. + \left( \frac{i}{\hbar} u_3 \right) \left( \frac{i}{\hbar} u_4 \right) i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{--}(3,4) i\hbar G_0^{-+}(4,2) \right].$$

В отличие от обычной диаграммной техники при нулевой температуре [2,3] в технике Келдыша мы приписываем всем вершинам и двум свободным концам на диаграммах дополнительные индексы  $\pm$ . Это справедливо и для других типов взаимодействия. Например, в случае межчастичного взаимодействия  $v(x_1 - x_2) = v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$  диаграммы обычной техники содержат штриховую линию на рис. 8 (а).

$$\begin{array}{l} \overset{+}{x_1} - - \overset{+}{x_2} = -\frac{i}{\hbar} v(x_1 - x_2) \\ \overset{-}{x_1} - - \overset{-}{x_2} = -\frac{i}{\hbar} v(x_1 - x_2) \quad a \\ \overset{-}{x_1} - - \overset{-}{x_2} = +\frac{i}{\hbar} v(x_1 - x_2) \quad \delta \end{array}$$

Рис. 8

Теперь двум концам этой линии мы должны приписать пару одинаковых индексов  $\pm$  (рис. 8(б)). Тогда поправка первого порядка к гриновской функции  $i\hbar G_0^{++}(1,2)$  изобразится диаграммами на рис. 9. Эта поправка равна

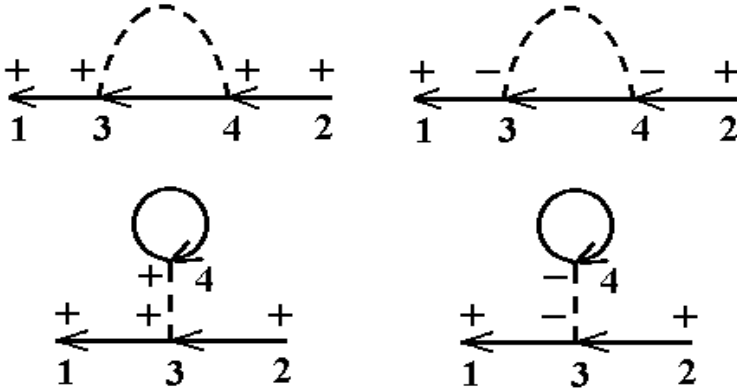


Рис. 9

$$\begin{aligned}
 i\hbar G_1^{++}(1,2) = & \int d3 \int d4 \left( -\frac{i}{\hbar} \nu_{34} \right) i\hbar G_0^{++}(1,3) i\hbar G_0^{++}(3,4) i\hbar G_0^{++}(4,2) + \\
 & + \int d3 \int d4 \left( \frac{i}{\hbar} \nu_{34} \right) i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{--}(3,4) i\hbar G_0^{+}(4,2) + \\
 & + \int d3 \int d4 \left( -\frac{i}{\hbar} \nu_{34} \right) i\hbar G_0^{++}(1,3) i\hbar G_0^{++}(3,2) n_4^0 + \\
 & + \int d3 \int d4 \left( \frac{i}{\hbar} \nu_{34} \right) i\hbar G_0^{+-}(1,3) i\hbar G_0^{+-}(3,2) n_4^0,
 \end{aligned}$$

где  $n_4^0$  – плотность идеального газа в точке  $x_4$ . Ей сопоставляется фермионная петля с одной вершиной на диаграммах. Правило знаков при переходе от обычной диаграммной техники к технике Келдыша остается прежним: в соответствующем аналитическом выражении необходимо учесть множитель  $(-1)^L$ , где  $L$  – число замкнутых

фермионных петель на диаграмме с более чем одной вершиной [6].

Диаграммная техника Келдыша применима и к равновесным системам при конечной температуре. Сформулируем в этом случае правила соответствия между диаграммами и аналитическими выражениями в импульсном представлении для однородной и изотропной системы. Учтем парное взаимодействие частиц  $\nu$ . Выполняя разложение функции Грина (15) в ряд по  $\nu$ , убеждаемся в том, что диаграммы для  $G$  в  $(\vec{p}, \varepsilon)$ -представлении остаются такими же, как и в координатном представлении, но правила соответствия изменяются. Теперь каждой линии на диаграмме приписывается 4-импульс и этим линиям сопоставляются компоненты Фурье  $G_0(p)$  и  $\nu(q)$ , где  $p$  и  $\hbar q$  – 4-импульсы (рис.10). Замкнутой фермионной петле с

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \leftarrow \\ + \end{array} \begin{array}{c} p \\ \hline + \end{array} &= i\hbar G_0^{++}(p) \\
 \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \begin{array}{c} - \\ q \\ - \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \end{array} &= \mp \frac{i}{\hbar} \nu(q) \\
 \bigcirc &= n_0
 \end{aligned}$$

Рис. 10

одной вершиной по-прежнему сопоставляется плотность идеального газа как функция температуры и химического

потенциала. В каждой вершине выполняется закон сохранения 4-импульса. По 4-импульсам внутренних линий выполняется интегрирование:

$$\int \frac{d^4 p_1}{(2\pi\hbar)^4} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1}{2\pi\hbar}.$$

Как и в координатном представлении, необходимо учитывать знаковый множитель  $(-1)^L$ . Например, вклад только двух диаграмм в функцию  $i\hbar G^{-+}(p)$  равен

$$= i\hbar G_0^{-+}(p) i\hbar G_0^{-+}(p) \frac{i}{\hbar} v(0) \sum_{\alpha} n_{\alpha}^0 +$$

$$+ \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi\hbar)^4} i\hbar G_0^{-+}(p) i\hbar G_0^{++}(p_1) i\hbar G_0^{++}(p) \left( -\frac{i}{\hbar} v\left(\frac{p-p_1}{\hbar}\right) \right).$$

Диаграммная техника Келдыша для равновесных систем при нулевой температуре непосредственно переходит в обычную диаграммную технику. Действительно, при  $T=0$  ( $T$  – температура) функция распределения  $n_{\vec{p}}$  в формулах (23), (24), (26) превращается в ступеньку Ферми. Поэтому для ферми-системы при  $T=0$  имеем

$$G_0^{+-}(\vec{p}, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad |\vec{p}| > p_F,$$

$$G_0^{-+}(\vec{p}, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad |\vec{p}| < p_F,$$

где  $p_F$  – импульс Ферми. В результате все диаграммы для  $G^{++}(p)$ , содержащие вершины с индексом  $-$ , обращаются в нуль. Техника Келдыша превращается в обычную диаграммную технику при  $T = 0$  [6].

## 7.5. Собственно-энергетические функции.

### Уравнения Дайсона

Диаграммы для функций Грина удобно суммировать блоками. Одним из таких блоков является собственно-энергетическая функция [2,3]. Она представляет собой сумму диаграмм (без внешних концов, соответствующих свободным функциям Грина), которые нельзя разделить на две части удалением одной сплошной линии. В обычной диаграммной технике при  $T = 0$  собственно-энергетическая функция  $\Sigma$  связана с функциями Грина  $G$  и  $G_0$  уравнением Дайсона:

$$G = G_0 + G_0 \Sigma G. \quad (42)$$

Ему соответствуют диаграммы на рис. 11. На этом

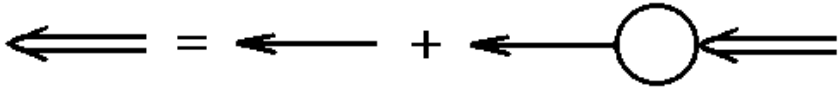
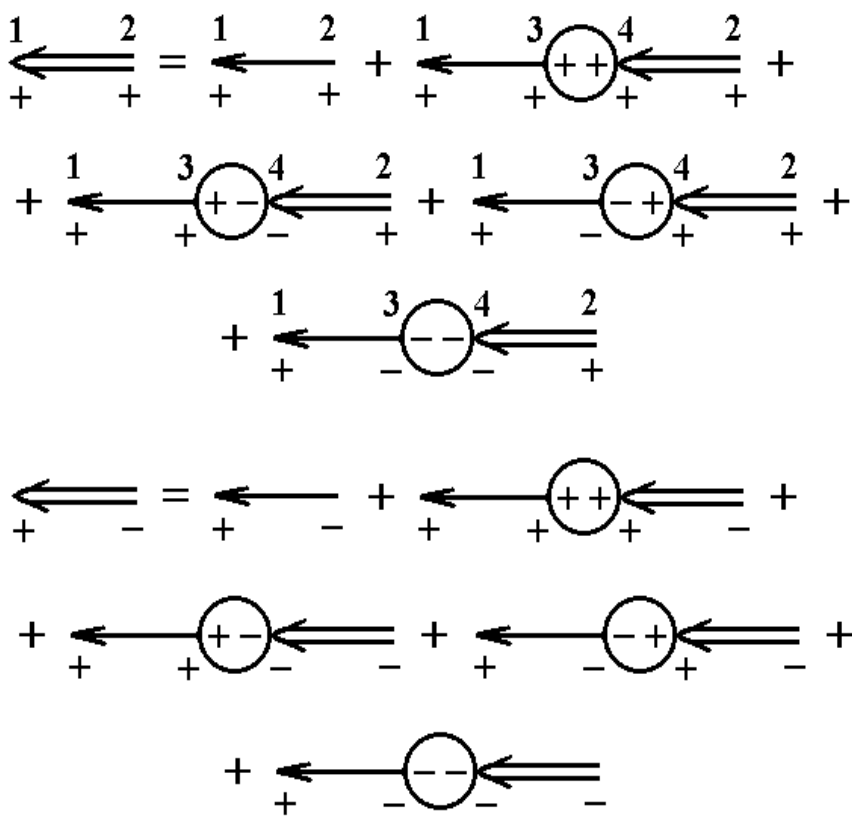


Рис. 11

рисунке двойная линия изображает точную функцию Грина  $G$ , а кружочек – собственно-энергетическую функцию  $\Sigma$ . В координатном представлении уравнение (42) имеет вид

$$i\hbar G_{12} = i\hbar G_{12}^0 + \int d3 \int d4 i\hbar G_{13}^0 \frac{1}{i\hbar} \Sigma_{34} i\hbar G_{42}.$$

В технике Келдыша концам линий на рис. 11 и каждой вершине необходимо приписать индексы  $\pm$ . Поэтому эти индексы необходимо приписать и функции  $\Sigma$ . В результате мы получаем четыре собственно-энергетические функции  $\Sigma^{++}$ ,  $\Sigma^{+-}$ ,  $\Sigma^{-+}$ ,  $\Sigma^{--}$ . Они связаны с функциями Грина соотношениями, которые графически изображены на рис. 12.





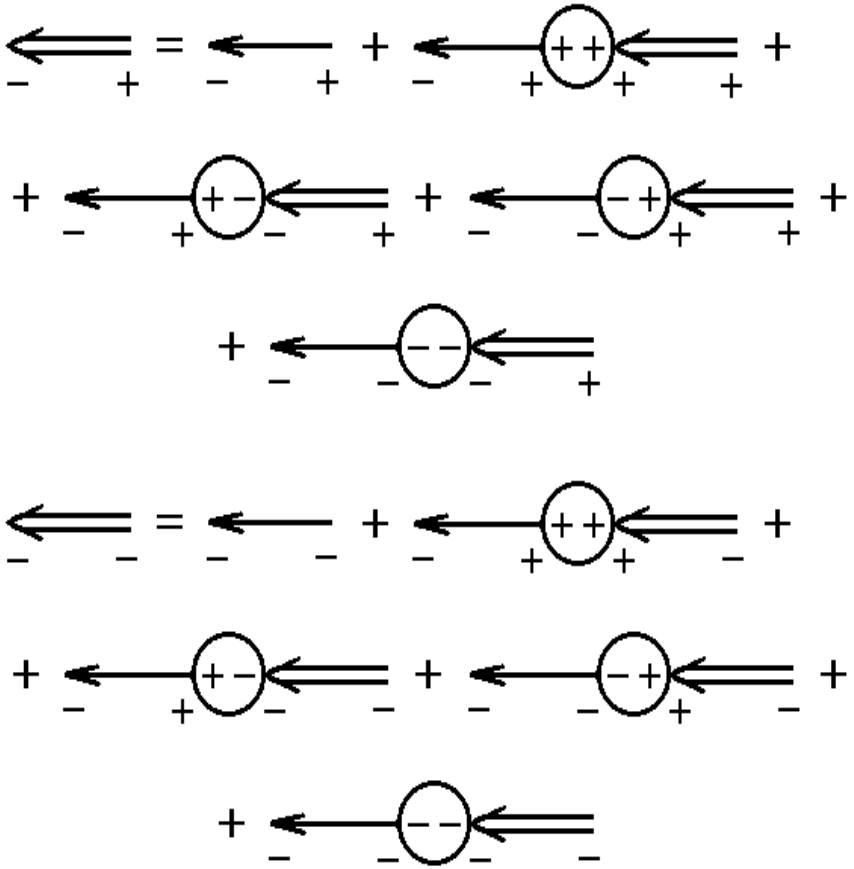


Рис. 12

Соответствующие этим графикам уравнения Дайсона имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_{12}^{++} &= G_{12}^{0++} + \int d3 \int d4 \times \\
 &\times \left( G_{13}^{0++} \Sigma_{34}^{++} G_{42}^{++} + G_{13}^{0++} \Sigma_{34}^{+-} G_{42}^{+-} + G_{13}^{0+-} \Sigma_{34}^{-+} G_{42}^{++} + G_{13}^{0+-} \Sigma_{34}^{--} G_{42}^{+-} \right), \\
 G_{12}^{+-} &= G_{12}^{0+-} + \int d3 \int d4 \times \\
 &\times \left( G_{13}^{0++} \Sigma_{34}^{++} G_{42}^{+-} + G_{13}^{0++} \Sigma_{34}^{+-} G_{42}^{--} + G_{13}^{0+-} \Sigma_{34}^{-+} G_{42}^{+-} + G_{13}^{0+-} \Sigma_{34}^{--} G_{42}^{--} \right), \\
 G_{12}^{-+} &= G_{12}^{0-+} + \int d3 \int d4 \times \\
 &\times \left( G_{13}^{0-+} \Sigma_{34}^{++} G_{42}^{-+} + G_{13}^{0-+} \Sigma_{34}^{+-} G_{42}^{--} + G_{13}^{0--} \Sigma_{34}^{-+} G_{42}^{-+} + G_{13}^{0--} \Sigma_{34}^{--} G_{42}^{--} \right), \\
 G_{12}^{--} &= G_{12}^{0--} + \int d3 \int d4 \times \\
 &\times \left( G_{13}^{0-+} \Sigma_{34}^{++} G_{42}^{--} + G_{13}^{0-+} \Sigma_{34}^{+-} G_{42}^{--} + G_{13}^{0--} \Sigma_{34}^{-+} G_{42}^{-+} + G_{13}^{0--} \Sigma_{34}^{--} G_{42}^{--} \right).
 \end{aligned} \tag{43}$$

Мы по-прежнему сопоставляем линиям функции  $i\hbar G^0$  или  $i\hbar G$ , а кружочкам — функции  $-\frac{i}{\hbar} \Sigma$ . Например,

$$\textcircled{+-} = -\frac{i}{\hbar} \Sigma^{+-}.$$

Четыре уравнения (43) можно записать в виде одного матричного уравнения для матрицы  $2 \times 2$  (15):

$$G_{12} = G_{12}^0 + \int d3 \int d4 G_{13}^0 \Sigma_{34} G_{42}, \tag{44}$$

где матрица  $\Sigma_{34}$  имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{++} & \Sigma^{+-} \\ \Sigma^{-+} & \Sigma^{--} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (44) можно представить в эквивалентном виде, изображая на рис. 12 двойные линии слева, а не справа:

$$G_{12} = G_{12}^0 + \int d^3 \int d^4 G_{13} \Sigma_{34} G_{42}^0. \quad (45)$$

Уравнения (17), (19), (20) для функций Грина идеального газа также можно записать в матричном виде

$$G_{01}^{-1} G_{12}^0 = \sigma_z \delta_{12}, \quad (46)$$

где  $G_0^{-1}$  – оператор (18), а  $\sigma_z$  – третья матрица Паули.

Действуем на уравнение (44) оператором (18) и учитываем (46). Тогда для функции Грина получаем систему четырех интегро-дифференциальных уравнений

$$G_{01}^{-1} G_{12} = \sigma_z \delta_{12} + \int d^3 \sigma_z \Sigma_{13} G_{32}. \quad (47)$$

Аналогично, действуя на уравнение (45) оператором  $(G_{02}^{-1})^*$ , получаем эквивалентное уравнение

$$(G_{02}^{-1})^* G_{12} = \sigma_z \delta_{12} + \int d^3 G_{13} \Sigma_{32} \sigma_z. \quad (48)$$

Как и в обычной технике, в методе Келдыша собственно-энергетические функции могут быть представлены суммой диаграмм. Некоторые из них для межчастичного взаимодействия изображены на рис. 13.

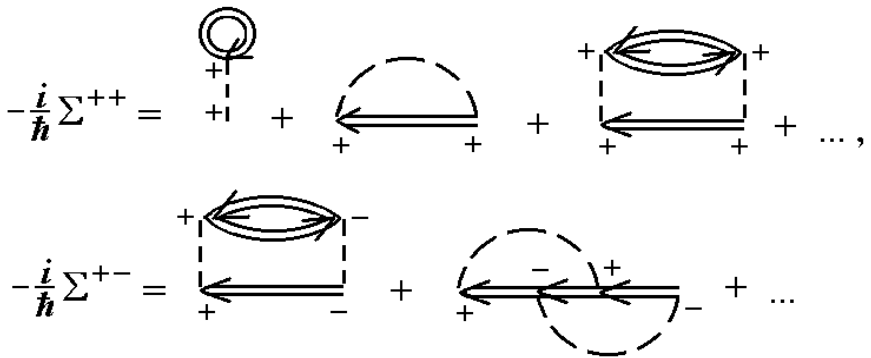


Рис. 13

Суммируя эти диаграммы, мы видим, что уравнения (47) (или (48)) представляют собой полную систему уравнений для функций Грина (5). Поскольку уравнение (47) не содержит функции  $G_0$ , зависимость от начального состояния, по которому выполняется усреднение в  $G_0$ , в методе Келдыша исчезает [6].

В системе уравнений (47) не учтена связь гриновских функций (10). Ее можно учесть, подвергнув матрицу  $G$  линейному преобразованию в пространстве Келдыша таким образом, чтобы один из ее элементов обратился в нуль [6]. Такое преобразование (вращение в пространстве Келдыша) имеет вид [6]

$$G' = R^{-1}GR, \quad (49)$$

где

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что авторы работы [8] используют преобразование

$$G' = L\sigma_z GL^+,$$

где

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая формулу (15), представим преобразованную матрицу (49) в виде

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & F \end{pmatrix}, \quad (50)$$

где  $G^{R,A}$  – запаздывающая и опережающая функции Грина (11),

$$F = G^{++} + G^{--} = G^{+-} + G^{-+}. \quad (51)$$

Легко убедиться, что в результате такого же преобразования матриц  $G_0$  и  $\Sigma$  уравнение (44) не изменит своего вида.

Преобразованная матрица  $\Sigma$  равна

$$\Sigma' = R^{-1}\Sigma R = \begin{pmatrix} \Omega & \Sigma^R \\ \Sigma^A & 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Здесь

$$\Omega = \Sigma^{++} + \Sigma^{--}, \quad \Sigma^R = \Sigma^{++} + \Sigma^{+-}, \quad \Sigma^A = \Sigma^{++} + \Sigma^{-+}. \quad (53)$$

В справедливости этих соотношений легко убедиться с учетом равенства

$$\Sigma^{++} + \Sigma^{--} = -(\Sigma^{+-} + \Sigma^{-+}). \quad (54)$$

Это равенство легко получить из (см. (10))

$$G_{01}^{-1}(G^{++} + G^{--} - G^{+-} - G^{-+}) = 0$$

с учетом уравнения (47).

Переписывая преобразованное матричное уравнение (44) в компонентах, находим

$$G_{12}^A = G_{12}^{0A} + \int d3 \int d4 G_{13}^{0A} \Sigma_{34}^A G_{42}^A. \quad (55)$$

Такое же уравнение для  $G^R$  получается из (55) применением операции сопряжения. Действуя на третье уравнение оператором (18) и учитывая

$$G_{01}^{-1}F_{12}^0 = 0,$$

получаем

$$G_{01}^{-1}F_{12} = \int d3 (\Omega_{13} G_{32}^A + \Sigma_{13}^R F_{32}). \quad (56)$$

Уравнение (55) не зависит от начального состояния, по которому производится усреднение в функции  $G_0$ , поскольку

$G_0^A$  не зависит от этого состояния. Уравнения (55) и (56) образуют полную систему уравнений, описывающих кинетические процессы в неравновесной системе [6].

### 7.6. Уравнения Каданова-Бейма

Как уже отмечалось, матричная функция Грина (15) задана на контуре Келдыша-Швингера  $C$  (см. рис. 3). Введем правило интегрирования функций вдоль этого контура:

$$\int_C dt F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t)|_{C_+} - \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t)|_{C_-},$$

где  $F(t)$  – произвольная функция, заданная на контуре  $C$ . Использованный здесь предельный переход  $t_0 \rightarrow -\infty$  позволяет обойти проблему выбора начального статоператора  $\rho(t_0)$ . Введем также дельта-функцию  $\delta_C(t-t')$  на контуре  $C$  [7]:

$$\int_C dt' F(t') \delta_C(t-t') = F(t),$$

где

$$\delta_C(t-t') = \begin{cases} \delta(t-t'), & t \in C_+, t' \in C_+, \\ -\delta(t-t'), & t \in C_-, t' \in C_-, \\ 0 & \text{in other cases.} \end{cases}$$

Стандартным методом [4,7] можно показать, что матричная функция Грина (15) удовлетворяет уравнениям (см. (47) и (48))

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla_1)^2 \right] G(1,1') = \delta_C(1,1') + \int_C d2 \Sigma(1,2) G(2,1'),$$

$$\left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1'} - \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla_1')^2 \right] G(1,1') = \delta_C(1,1') + \int_C d2 G(1,2) \Sigma(2,1'),$$
(57)

где

$$\begin{aligned} \Sigma(1,1') &= \mp i\hbar \int_C d2 \int_C d3 \nu_{12} G_2(12, 32^+) G^{-1}(3,1') = \\ &= \mp i\hbar \int_C d2 \int_C d3 G^{-1}(1,3) G_2(32^-, 1'2) \nu_{1'2} \end{aligned}$$

– массовый оператор,  $G_2$  – двухчастичная функция Грина системы взаимодействующих друг с другом частиц.

В этом и следующем разделах мы используем обозначения, принятые в [7]. В этих обозначениях компоненты  $\Sigma^{+-}$  и  $\Sigma^{-+}$  отличаются знаком от использованных выше, а вместо соотношений (53) и (54) имеем теперь

$$\Sigma^R = \Sigma^{++} - \Sigma^{+-} = \Sigma^{-+} - \Sigma^{--}, \quad \Sigma^A = \Sigma^{++} - \Sigma^{-+} = \Sigma^{+-} - \Sigma^{--}. \quad (58)$$

Соотношения (13) и (58) позволяют исключить функции  $G^{++}$ ,  $G^{--}$  и  $\Sigma^{--}$  из уравнений Дайсона (57). Тогда из этих уравнений получаем

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla_1)^2 \right] G^{\mp\pm}(1,1') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d2 \left[ \Sigma^R(1,2) G^{\mp\pm}(2,1') + \Sigma^{\mp\pm}(1,2) G^A(2,1') \right],$$
(59)

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla_1)^2 \right] G^{R,A}(1,1') =$$

$$= \delta(1-1') + \int_{-\infty}^{\infty} d2 \Sigma^{R,A}(1,2) G^{R,A}(2,1'), \quad (60)$$

$$\left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla_1)^2 \right] G^{\mp\pm}(1,1') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d2 \left[ G^{\mp\pm}(1,2) \Sigma^A(2,1') + G^R(1,2) \Sigma^{\mp\pm}(2,1') \right], \quad (61)$$

$$\left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla_1)^2 \right] G^{R,A}(1,1') =$$

$$= \delta(1-1') + \int_{-\infty}^{\infty} d2 G^{R,A}(1,2) \Sigma^{R,A}(2,1'). \quad (62)$$

Эти уравнения для временных корреляционных функций называются уравнениями Каданова-Бейма [4]. Они играют ключевую роль при выводе кинетического уравнения для функции распределения частиц.

### 7.7. Обобщенное кинетическое уравнение

Уравнения (59)-(62) запишем в матричном виде. Для этого будем рассматривать любую функцию  $F(1,1')$  как матрицу с матричными индексами  $1=(r_1, t_1)$ ,  $1'=(r_1', t_1')$ . Произведение матриц  $F_1$  и  $F_2$  определим соотношением

$$(F_1 F_2)(1,1') = \int_{-\infty}^{\infty} d1'' F_1(1,1'') F_2(1'',1').$$



Введем также оператор (см. (18))

$$g_0^{-1}(1,1') = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \right) \delta(1-1').$$

Тогда уравнения (59)-(62) принимают вид [7]

$$\left( g_0^{-1} - \Sigma^R \right) g^> = \Sigma^> g^A, \quad \left( g_0^{-1} - \Sigma^R \right) g^< = \Sigma^< g^A, \quad (63)$$

$$\left( g_0^{-1} - \Sigma^{R,A} \right) g^{R,A} = 1, \quad (64)$$

$$g^> \left( g_0^{-1} - \Sigma^A \right) = g^{R\Sigma^>}, \quad g^< \left( g_0^{-1} - \Sigma^A \right) = g^{R\Sigma^<}, \quad (65)$$

$$g^{R,A} \left( g_0^{-1} - \Sigma^{R,A} \right) = 1, \quad (66)$$

где  $\Sigma^> = \Sigma^{++}$ ,  $\Sigma^< = \Sigma^{--}$ ,  $1$  – единичная матрица, а большая буква  $G$  заменена малой (см. p. 1).

Вычтем уравнение (65) из уравнения (63) и при помощи соотношений (13) и (58) исключим из полученной разности функции  $g^A$  и  $\Sigma^A$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \left[ \left( g_0^{-1} - \Sigma^R \right), g^> \right] - \left[ \Sigma^>, g^R \right] &= g^> \left( \Sigma^> - \Sigma^< \right) - \Sigma^> \left( g^> - g^< \right), \\ \left[ \left( g_0^{-1} - \Sigma^R \right), g^< \right] - \left[ \Sigma^<, g^R \right] &= g^< \left( \Sigma^> - \Sigma^< \right) - \Sigma^< \left( g^> - g^< \right), \end{aligned} \quad (67)$$

где  $[F_1, F_2]$  обозначает коммутатор матриц  $F_1(1,1')$  и  $F_2(1,1')$ . Выделяя вещественные и мнимые части матриц  $g^R$  и  $\Sigma^R$  и используя соотношения (13) и (58), из (67) получаем уравнение

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( g_0^{-1} - \text{Re } \Sigma^R \right), g^> \right] - \left[ \Sigma^>, \text{Re } g^R \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left( \Sigma^> g^< + g^< \Sigma^> - \Sigma^< g^> - g^> \Sigma^< \right), \\
& \left[ \left( g_0^{-1} - \text{Re } \Sigma^R \right), g^< \right] - \left[ \Sigma^<, \text{Re } g^R \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left( \Sigma^> g^< + g^< \Sigma^> - \Sigma^< g^> - g^> \Sigma^< \right).
\end{aligned} \tag{68}$$

В этом уравнении учтены эффекты памяти и нелокальности. Оно называется обобщенным кинетическим уравнением. Левая часть этого уравнения описывает обратимую эволюцию функции распределения системы, а правая представляет собой интеграл столкновений частиц.

Вывод кинетического уравнения для одночастичной функции распределения из уравнения (68) приведен в монографии [7]. Мы же обратимся к более простому подходу к этой проблеме в [6].

## 7.8. Кинетическое уравнение в диаграммной технике

В этом разделе мы выясним, как уравнения (55), (56) используются для вывода кинетического уравнения Больцмана [6-12]. Рассмотрим слабо неидеальный разреженный ферми-газ. Будем считать, что выполнены условия квазиклассичности:

$$\frac{l p_F}{\hbar} \gg 1, \quad \frac{\tau \varepsilon_F}{\hbar} \gg 1, \tag{69}$$

где  $\varepsilon_F$  – энергия Ферми,  $l$  и  $\tau$  – расстояние и промежуток времени, на которых существенно меняются интересующие нас величины. Квантовое кинетическое уравнение формулируется для одночастичной матрицы плотности (2) [6]. Для перехода к квазиклассическому пределу удобно

ввести переменные [4,6]  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ , откуда получаем  $\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}/2$ ,  $\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{r}/2$ . Фурье-образ матрицы плотности по переменной  $\vec{r}$  равен функции распределения Вигнера:

$$\frac{1}{N} n(\vec{R}, t, \vec{p}) = \int d^3 r \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r}\right) \rho\left(\vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, \vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}, t\right). \quad (70)$$

Спиновые индексы здесь и ниже опущены. Обратное преобразование имеет вид

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{p} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right] n\left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, t, \vec{p}\right). \quad (71)$$

Известно [6], что интегрирование вигнеровской функции распределения по переменной  $\vec{R}$  дает функцию распределения частиц по импульсам

$$N(\vec{p}, t) = \int d^3 R n(\vec{R}, t, \vec{p}), \quad (72)$$

а интегрирование по  $\vec{p}$  – функцию распределения по координатам

$$N(\vec{R}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} n(\vec{R}, t, \vec{p}) = N \rho(\vec{r}, \vec{r}, t). \quad (73)$$

Функция  $n(\vec{R}, t, \vec{p})$  совпадает с функцией распределения частиц по координатам и импульсам одновременно лишь в квазиклассическом приближении [6].

Наиболее тесно связана с матрицей плотности корреляционная функция  $G_{12}^{+-}$  (см. (6)). Введем для нее четырехмерное смешанное представление

$$G^{+-}(X, P) = \int d^4 \Xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} P \Xi\right) G^{+-}\left(X + \frac{1}{2} \Xi, X - \frac{1}{2} \Xi\right), \quad (74)$$

где  $X = (\vec{R}, T)$ ,  $\Xi = (\vec{r}, t)$ ,  $P = (\vec{p}, \varepsilon)$ ,  $P\Xi = \vec{p}\vec{r} - \varepsilon t$ . Здесь  $T = (t_1 + t_2) / 2$ ,  $t = t_1 - t_2$ . Мы надеемся, что обозначение временной переменной и температуры одной буквой не приведет к недоразумениям. Функция распределения Вигнера связана с функцией (74) соотношением

$$n(\vec{R}, T, \vec{p}) = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} G^{+-}(X, P). \quad (75)$$

Для вывода этого соотношения необходимо воспользоваться формулами (6) и (70), преобразованием, обратным (74), а также фурье-разложением  $\delta$ -функции Дирака.

Перемножая матрицы  $\sigma_z$ ,  $\Sigma$  и  $G$ , из уравнений (47) и (48) находим разность компонент  $+-$  этих уравнений:

$$\left[ (G_{02}^{-1})^* - G_{01}^{-1} \right] G_{12}^{+-} = -\int d3 \left( \Sigma_{13}^{++} G_{32}^{+-} + \Sigma_{13}^{+-} G_{32}^{--} + G_{13}^{+-} \Sigma_{32}^{--} + G_{13}^{++} \Sigma_{32}^{+-} \right). \quad (76)$$

Входящий сюда оператор равен

$$\left( G_{02}^{-1} \right)^* - G_{01}^{-1} = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_1 - \Delta_2) = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial T} - \frac{i\hbar}{m} \nabla_{\vec{R}} \nabla_{\vec{r}} \right)$$

Перейдем в уравнении (76) к фурье-компонентам (74) и положим  $t_1 = t_2$ . Тогда левая сторона уравнения (76) примет стандартный для уравнения Больцмана вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \right) n(\vec{R}, T, \vec{p}).$$

Правая сторона должна совпасть с интегралом столкновений  $St n$ .

В правой части уравнения (76) учтем условия квазиклассичности (69). Тогда получаем сумму интегралов вида

$$\int dx_3 \Sigma(x_1, x_3) G(x_3, x_2).$$

Переходя к разностям и полусуммам переменных, находим

$$\int dx_3 \Sigma\left(x_1 - x_3, \frac{x_1 + x_3}{2}\right) G\left(x_3 - x_2, \frac{x_3 + x_2}{2}\right).$$

В фурье-компонентах по разностям переменных существенна область значений  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|$  и  $|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|$  порядка  $\hbar/p$  и область значений  $|t_1 - t_3|$ ,  $|t_2 - t_3|$  порядка  $\hbar/\varepsilon$ . На этих интервалах  $\Sigma$  и  $G$  как функции полусумм переменных меняются мало. Это позволяет заменить эти полусуммы значениями  $X = (x_1 + x_2)/2$  :

$$\int dx_3 \Sigma(x_1 - x_3, X) G(x_3 - x_2, X).$$

После этого совершаем фурье-преобразование по разностям аргументов при фиксированном  $X$ . В результате правая сторона уравнения (76) оказывается равной

$$St n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} \left( -\Sigma^{+-} G^{-+} + \Sigma^{-+} G^{+-} \right), \quad (77)$$

где учтены равенства (10) и (54). Функции  $\Sigma$  и  $G$  под знаком интеграла зависят от  $X$  и  $P$ .

Входящие в (77) функции  $G$  и  $\Sigma$  вычислим в модели слабо неидеального ферми-газа. Межчастичное

взаимодействие  $\nu(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  будет учитываться по теории возмущений. Далее будет видно, что  $\Sigma \sim \nu^2$ , поэтому, ограничиваясь первым неисчезающим приближением по межчастичному взаимодействию, подставим в (77) корреляционные функции (23) и (24), вычисленные в нулевом приближении по этому взаимодействию. Однако входящую туда функцию распределения  $n_{\vec{p}}$  для однородного стационарного состояния будем считать зависящей не только от  $\vec{p}$ , но и от  $X = (\vec{R}, T)$ . Дело в том, что в квазиклассическом приближении функция распределения меняется медленно с изменением  $\vec{R}$  и  $T$ . Поэтому замена  $n_{\vec{p}} \rightarrow n(\vec{R}, T, \vec{p})$  допустима, а полученное ниже выражение для интеграла столкновений не ограничено однородным и стационарным случаем [6]. Выполняя интегрирование по  $\varepsilon$ , получаем

$$\text{St}n(X, \vec{p}) = \frac{i}{\hbar} \Sigma^{+-}(X, \vec{p}, \xi_{\vec{p}}) [1 - n(X, \vec{p})] + \frac{i}{\hbar} \Sigma^{-+}(X, \vec{p}, \xi_{\vec{p}}) n(X, \vec{p}). \quad (78)$$

Первое слагаемое в этом выражении обусловлено приходом фермионов в состояние  $\vec{p}$ , а второе – их уходом из этого состояния.

Первый неисчезающий вклад в функции  $\Sigma^{\pm\mp}$ , входящие в (78), дают диаграммы второго порядка, изображенные на рис. 14 (см. также рис. 13). Поскольку в каждой вершине

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{\hbar} \Sigma^{+-}(p) &= p_1 - p' \quad \begin{array}{c} + \\ \text{---} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ P_1 \\ \text{---} \\ - \end{array} \begin{array}{c} - \\ \text{---} \\ - \end{array} + \\
 &\quad \begin{array}{c} + \\ \text{---} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ P_1' \\ \text{---} \\ - \end{array} \quad \text{а} \\
 &+ p' - p_1 \quad \begin{array}{c} + \\ \text{---} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ P_1' \\ \text{---} \\ - \end{array} \begin{array}{c} - \\ \text{---} \\ - \end{array} + \\
 &\quad \begin{array}{c} + \\ \text{---} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ P_1 \\ \text{---} \\ - \end{array} \begin{array}{c} - \\ \text{---} \\ - \end{array} \quad \text{б}
 \end{aligned}$$

Рис. 14

выполняется закон сохранения четырехимпульса, четырехимпульсы на рисунках связаны соотношением  $p'_1 = p + p_1 - p'$ . Используя правила соответствия, полученные в четвертом и пятом разделах, находим вклад диаграммы на рис. 14 (а) в собственно-энергетическую функцию:

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{\hbar} \Sigma_a^{+-}(p) &= -2 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi\hbar)^4} \left[ -\frac{i}{\hbar} \nu \left( \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}'}{\hbar} \right) \right] \times \\
 &\times \left[ \frac{i}{\hbar} \nu \left( \frac{\vec{p}' - \vec{p}_1}{\hbar} \right) \right] i\hbar G^{+-}(p_1) i\hbar G^{-+}(p_1) i\hbar G^{+-}(p').
 \end{aligned} \tag{79}$$

Знак  $-$  в правой части связан с фермионной петлей на диаграмме, а множитель 2 – результат суммирования по

спиновым индексам в этой петле:  $\sum_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\alpha_2\alpha_1} = 2$ .

Напомним, что в рассматриваемом случае  $G_{\alpha_1\alpha_2} = G\delta_{\alpha_1\alpha_2}$ . В разреженном газе длина волны частицы  $\frac{\hbar}{p}$  велика по сравнению с радиусом межчастичного взаимодействия. Это означает, что  $\nu$  в формуле (79) можно взять при нулевом значении аргумента:

$$\nu_0 = \int d^3r \nu(\vec{r}).$$

Тогда вклад диаграмм на рис. 14 равен

$$-\frac{i}{\hbar} \Sigma_a^{+-}(p) - \frac{i}{\hbar} \Sigma_b^{+-}(p) = -\frac{i}{2\hbar} \Sigma_a^{+-}(p),$$

где

$$\Sigma_a^{+-}(p) = -2\hbar^2 \nu_0^2 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi\hbar)^4} G^{+-}(p+p_1-p') G^{-+}(p_1) G^{+-}(p')$$

Снова подставляя сюда выражения (23) и (24), получаем интеграл столкновений (78) в виде

$$\begin{aligned} \text{St } n &= \frac{2\pi}{\hbar} \nu_0^2 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ &\times [n'n'_1(1-n)(1-n_1) - nn_1(1-n')(1-n'_1)] \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1), \end{aligned} \quad (80)$$

где  $n_1 = n(X, T, \vec{p}_1)$ ,  $\varepsilon_1 = \vec{p}_1^2 / 2m$ . Выражение (80) совпадает с интегралом столкновений в уравнении Больцмана, полученным элементарными методами [6].



## 7.9. Матричная функция Грина и континуальный интеграл

В этом разделе, следуя работе [13], мы покажем, как матричная функция Грина фермионов (14) связана с континуальным интегралом по полям Грассмана.

Функциональные методы, развитые в квантовой теории поля [14], все настойчивее проникают в статистическую физику и кинетику [15-17]. Недавно эти методы использовались для изучения свойств неупорядоченных нормальных [8,13] и сверхпроводящих [18] металлов, примесных состояний электронов в проводниках [19], взаимодействующих бозонов [20]. В работе [13] показано, как метод континуального интегрирования по грассмановым переменным [21] может быть использован для расчета матричной функции Грина электронов в технике Келдыша и характеристик неупорядоченных проводников в отсутствие магнитного поля. Здесь мы кратко резюмируем результаты этой работы с учетом квантующего магнитного поля. Мы предполагаем, что читатель знаком с функциональными методами в объеме нашего курса статистической физики [22].

Гамильтониан системы по-прежнему считаем равным (1), где  $H_0$  – гамильтониан электронов в магнитном поле, а  $V$  учитывает межчастичное взаимодействие и взаимодействие электронов с внешним полем. Оно может зависеть от времени. Считаем, что взаимодействие  $V$  включается в момент  $t_0 = -\infty$ , когда система электронов еще находилась в состоянии равновесия. Тогда матричная функция Грина электронов равна (14), где угловыми скобками  $\langle \dots \rangle$  обозначено гиббсовское усреднение с гамильтонианом  $H_0$ . В формуле (14) перейдем к операторам  $\psi_1^S$  и  $\psi_2^{+S}$  в представлении Шредингера. Оператор  $F_S(t)$  в

этом представлении связан с гейзенберговским оператором соотношением

$$F_H(t) = U_{C_t}^{-1}(t, -\infty) F_S(t) U_{C_t}(t, -\infty), \quad (81)$$

где

$$U_{C_t}(t, t') = T_{C_t} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t dt_1 H_S(t_1) \right] \quad (82)$$

– оператор эволюции вдоль контура Келдыша-Швингера  $C_t$  на рис. 3. Он обладает свойствами:

$$\begin{aligned} U_{C_t}^{-1}(t_1, t_2) &= U_{C_t}(t_2, t_1); \\ U_{C_t}(t_1, t_2) U_{C_t}(t_2, t_3) &= U_{C_t}(t_1, t_3), \\ t_1 > t_2 > t_3. \end{aligned} \quad (83)$$

Напомним, что момент  $t_1$  превышает  $t_2$ , если точка  $t_1$  на контуре  $C_t$  находится дальше от начала контура, чем точка  $t_2$ . В представлении Шредингера функция (14) имеет вид

$$i\hbar G_{12} = \left\langle T_{C_t} \left( \psi_1^S \psi_2^{+S} U_{C_t} \right) \right\rangle, \quad (84)$$

где  $U_{C_t}$  – оператор эволюции вдоль контура  $C_t$ . Действительно, пусть точки  $t_1$  и  $t_2$  лежат на ветви  $C_+$  контура  $C_t$ , причем  $t_1 > t_2$ . Тогда функция (84) равна

$$i\hbar G_{12}^{++} = \left\langle U_{C_t}(-\infty, t_1) \psi_1^S U_{C_t}(t_1, t_2) \psi_2^{+S} U_{C_t}(t_2, -\infty) \right\rangle. \quad (85)$$

В представлении Шредингера полевые операторы не зависят от времени. Однако, раскрывая хронологическое произведение операторов, удобно приписать им временные индексы. Из (83) следует, что при  $t_1 > t_2$  справедливо равенство

$$U_{C_t}(t_1, -\infty) = U_{C_t}(t_1, t_2) U_{C_t}(t_2, -\infty),$$

из которого получаем

$$U_{C_t}(t_1, t_2) = U_{C_t}(t_1, -\infty) U_{C_t}^{-1}(t_2, -\infty).$$

Подставляя это выражение в (85) и учитывая (81) и (83), убеждаемся в справедливости формулы (84).

Используя стандартную процедуру (см., например, [15,16,22]), представим функцию Грина (84) в виде континуального интеграла по полям Грассмана  $\psi_1, \psi_2^*$ , ассоциированным с полевыми операторами. Для этого введем гиббсовскую экспоненту  $\exp(-\beta H_0)$  ( $\beta$  – обратная температура) в формуле (84) под знак хронологического произведения. Это достигается использованием вместо контура  $C_t$  на рис. 1 расширенного контура  $C = C_t + C_\tau$  на рис. 15 и

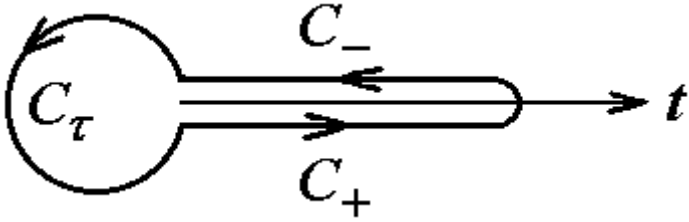


Рис. 15

операции упорядочения  $T_C$  вдоль этого контура. Предполагается, что на части контура  $C_\tau$  гамильтониан электронов равен  $H_0$ . Тогда функция (84) принимает вид

$$i\hbar G_{12} = \frac{\text{Sp} \left[ T_C \left( \psi_1^S \psi_2^{+S} U_C \right) \right]}{Z_0}, \quad (86)$$

где  $U_C$  – оператор эволюции вдоль контура  $C$  на рис. 15, а  $Z_0 = \text{Sp} \left[ \exp(-\beta H_0) \right]$  – статистическая сумма электронов в

магнитном поле. Функция (86) может быть представлена в виде континуального интеграла [13,15]:

$$\begin{aligned} i\hbar G_{12} = & \int D\psi^* \int D\psi \psi_1 \psi_2^* \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \oint_C dt \left[ \sum_\alpha \int d\vec{r} \psi_\alpha^*(\vec{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(\vec{r}, t) - H(\psi^*, \psi) \right] \right\} \times \\ & \times \left( \int D\psi^* \int D\psi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \oint_C dt \left[ \sum_\alpha \int d\vec{r} \psi_\alpha^*(\vec{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(\vec{r}, t) - H(\psi^*, \psi) \right] \right\} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (87)$$

Входящая сюда функция  $H(\psi^*, \psi)$  получается из оператора  $H(\psi^+, \psi)$  заменой полевых операторов полями Грассмана  $\psi_\alpha^*(\vec{r}, t)$ ,  $\psi_\alpha(\vec{r}, t)$ . В контурном интеграле  $\oint_C dt$  переменная интегрирования на части контура  $C_\tau$  растет от 0 до  $\beta$  при движении в направлении, указанном стрелкой.

Гриновские функции любого порядка могут быть получены функциональным дифференцированием производящего функционала [13,15,16,21,22]

$$\begin{aligned} Z[J, J^*] = & \int D\psi^* \int D\psi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \oint_C dt \left[ \sum_\alpha \int d\vec{r} \psi_\alpha^*(\vec{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(\vec{r}, t) - H(\psi^*, \psi) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_\alpha \int d\vec{r} \psi_\alpha^*(\vec{r}, t) J_\alpha(\vec{r}, t) + \sum_\alpha \int d\vec{r} J_\alpha^*(\vec{r}, t) \psi_\alpha(\vec{r}, t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

по источникам  $J$ ,  $J^*$  фермионов. Они отличны от нуля на части контура  $C_t$ . Нормировочный множитель в этой формуле опущен. В частности, функция (86) равна

$$i\hbar G_{12} = \left( \frac{\delta^L}{\frac{i}{\hbar} \delta J_1^*} \frac{\delta^R}{\frac{i}{\hbar} \delta J_2} W \left[ J, J^* \right] \right)_{\substack{J=0 \\ J^*=0}}, \quad (89)$$

где  $W = \ln Z$  – производящий функционал для связанных функций Грина, индексами  $L$  и  $R$  отмечены левая и правая функциональные производные по грасмановым переменным  $J^*, J$ .

В формуле (88) перейдем к  $(\kappa, \alpha, t)$ –представлению ( $\kappa$  – набор орбитальных квантовых чисел электрона в магнитном поле) и вычислим свободный производящий функционал электронов в магнитном поле и в поле источников:

$$Z_0 \left[ J, J^* \right] = \int Da^* \int Da \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \oint_C dt \sum_{\kappa\alpha} \left[ a_{\kappa\alpha}^*(t) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_{\kappa\alpha} \right) a_{\kappa\alpha}(t) + J_{\kappa\alpha}^*(t) a_{\kappa\alpha}(t) + a_{\kappa\alpha}^*(t) J_{\kappa\alpha}(t) \right] \right\}. \quad (90)$$

Здесь  $a_{\kappa\alpha}$ ,  $a_{\kappa\alpha}^*$ ,  $J_{\kappa\alpha}$ ,  $J_{\kappa\alpha}^*$  – коэффициенты разложения грасмановых переменных  $\psi$ ,  $\psi^*$ ,  $J$ ,  $J^*$  по базису Ландау,  $\varepsilon_{\kappa\alpha}$  – энергия электрона в магнитном поле (за вычетом химического потенциала, если используется большой канонический ансамбль Гиббса). Входящие сюда функции  $a(t)$  и  $a^*(t)$  удовлетворяют граничным условиям [13]:

$$\begin{aligned} a_+(\infty) &= a_-(\infty), & a_+(\infty) &= a_*(\infty), \\ a_-(-\infty) &= a_\tau(0), & a_-(-\infty) &= a_\tau^*(0), \\ a_+(-\infty) &= -a_\tau(\beta), & a_+(-\infty) &= -a_\tau^*(\beta). \end{aligned} \quad (91)$$

Индексы  $+$ ,  $-$ ,  $\tau$  нумеруют части  $C_+$ ,  $C_-$ ,  $C_\tau$  контура на рис. 15, а индексы  $\kappa, \alpha$  опущены.

В формуле (90) положим  $a = a_0 + a'$ ,  $a^* = a_0^* + a^{*'}$  и подберем  $a_0$  и  $a_0^*$  так, чтобы линейные по переменным Грассмана  $a'$ ,  $a^{*'}$  члены в показателе экспоненты выпали. Для этого необходимо, чтобы функции  $a_0^+$ ,  $a_0^-$ ,  $a_0^\tau$  удовлетворяли системе уравнений

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\right)a_0^+ = -J^+, \quad \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\right)a_0^- = J^-, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon\right)a_0^\tau = 0 \quad (92)$$

и условиям (91). Мы положили  $J = J^+$  на части контура  $C_+$  и  $J = -J^-$  на  $C_-$ . Переменные  $t$  и  $\tau$  связаны соотношением  $\tau = it/\hbar$ .

Решение системы уравнений (92) с граничными условиями (91) представим в виде [13]

$$a_{\kappa\alpha}^0(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_{\kappa\alpha}^0(t-t') J_{\kappa\alpha}(t'),$$

где  $G^0$  – матричная функция Грина электронов в магнитном поле. Ее компоненты равны

$$G_{\kappa\alpha}^{0++}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[ \Theta(t)(n_{\kappa\alpha} - 1) + \Theta(-t)n_{\kappa\alpha} \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\kappa\alpha} t\right),$$

$$G_{\kappa\alpha}^{0+-}(t) = \frac{i}{\hbar} n_{\kappa\alpha} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\kappa\alpha} t\right),$$

$$G_{\kappa\alpha}^{0-+}(t) = \frac{i}{\hbar} (n_{\kappa\alpha} - 1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\kappa\alpha} t\right),$$

$$G_{\kappa\alpha}^{0--}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[ \Theta(t)n_{\kappa\alpha} + \Theta(-t)(n_{\kappa\alpha} - 1) \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\kappa\alpha} t\right),$$

где  $n_{\kappa\alpha}$  – фермиевская функция распределения. Фурье-преобразование этих функций по переменной  $t$  дает уже известные нам соотношения (27). Величины  $a_0$  и  $J$  образуют двумерные векторы-столбцы в пространстве Келдыша с компонентами  $a_0^+$ ,  $a_0^-$  и  $J^+$ ,  $J^-$ , а  $a_0^*$  и  $J^*$  – строки с компонентами  $a_0^{*+}$ ,  $a_0^{*-}$  и  $J^{*+}$ ,  $J^{*-}$ .

Континуальный интеграл (90) по грассмановым переменным  $a^{*'}, a'$  гауссов. Он вычисляется по правилу [15,16]

$$\int Da^{*'} \int Da' \exp(-a^{*'} A a') = \det A$$

( $A$  – несингулярная матрица, индексы суммирования в  $a^{*'} A a'$  опущены) и здесь интереса не представляет. Существенный для дальнейшего множитель в производящем функционале (90) равен

$$Z_0[J, J^*] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{12} J_1^* G_{12}^0 J_2\right). \quad (93)$$

Здесь  $1 = (\kappa_1, \alpha_1, t_1)$ ,  $\sum = \sum_1 \int_{\kappa_1 \alpha_1 - \infty}^{\infty} dt_1$ , а сумма в показателе

экспоненты равна

$$\begin{aligned} & \sum_{12} \begin{pmatrix} J_1^{*+} & J_1^{*-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{12}^{0++} & G_{12}^{0+-} \\ G_{12}^{0+-} & G_{12}^{0--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2^+ \\ J_2^- \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{12} \left( J_1^{*+} G_{12}^{0++} J_2^+ + J_1^{*+} G_{12}^{0+-} J_2^- + J_1^{*-} G_{12}^{0+-} J_2^+ + J_1^{*-} G_{12}^{0--} J_2^- \right). \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим расчет производящего функционала (88) и функции Грина (89) электронов в проводнике с примесными атомами в магнитном поле [19]. В этом случае гамильтониан взаимодействия равен

$$V = \sum_{\kappa_1 \kappa_2 \alpha} \langle \kappa_1 | u | \kappa_2 \rangle a_{\kappa_1 \alpha}^+ a_{\kappa_2 \alpha},$$

где  $a_{\kappa \alpha}$  и  $a_{\kappa \alpha}^+$  – операторы уничтожения и рождения электронов в состоянии  $|\kappa \alpha\rangle$ ,  $u$  – энергия взаимодействия электрона с примесными атомами. Поскольку  $V = 0$  на части контура  $C_\tau$ , то интеграл в показателе экспоненты (88) равен

$$\oint_C dt V(a^*, a) = \sum_{12} u_{12} a_1^* \sigma_z a_2, \quad (94)$$

где  $u_{12} = \langle \kappa_1 | u | \kappa_2 \rangle \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta(t_1 - t_2)$ . Из формулы (88) видно, что полный производящий функционал может быть получен из свободного функционала (93) действием оператора

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \oint_C dt V\right),$$

который получается из (94) в результате замены

$$a_{\kappa \alpha}^*(t) \rightarrow \frac{\delta^R}{\frac{i}{\hbar} \delta J_{\kappa \alpha}(t)}, \quad a_{\kappa \alpha}(t) \rightarrow \frac{\delta^L}{\frac{i}{\hbar} \delta J_{\kappa \alpha}^*(t)}.$$

Следовательно, с точностью до несущественного множителя производящий функционал (88) равен

$$Z[J, J^*] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{12} u_{12} \frac{\delta^R}{\frac{i}{\hbar} \delta J_1} \sigma_z \frac{\delta^L}{\frac{i}{\hbar} \delta J_2^*}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{34} J_3^* G_{34}^0 J_4\right). \quad (95)$$



В показателях экспонент необходимо выполнить суммирование по индексам Келдыша  $\pm$ . Таким образом, процедура расчета матричной функции Грина (14) электронов в поле примесных атомов и в магнитном поле свелась к вычислению функциональных производных в формулах (89) и (95).

Формула (95) позволяет представить производящий функционал в виде ряда по степеням взаимодействия  $V$ . Функция Грина (89) также представляется в виде ряда, совпадающего с полученным на основе диаграммной техники, использующей теорему Вика [2]. Поправка первого порядка к производящему функционалу  $W$  равна

$$\begin{aligned} W_1[J, J^*] = & \sum_{12} u_{12} \left( G_{21}^{0++} - G_{21}^{0--} \right) - \\ & - \frac{i}{\hbar} \sum_{12} u_{12} \sum_{34} \left[ J_3^{*+} J_4^+ \left( G_{31}^{0+-} G_{24}^{0-+} - G_{31}^{0++} G_{24}^{0++} \right) + \right. \\ & + J_3^{*+} J_4^- \left( G_{31}^{0+-} G_{24}^{0--} - G_{31}^{0++} G_{24}^{0+-} \right) + \\ & + J_3^{*-} J_4^+ \left( G_{31}^{0--} G_{24}^{0-+} - G_{31}^{0-+} G_{24}^{0++} \right) + \\ & \left. + J_3^{*-} J_4^- \left( G_{31}^{0--} G_{24}^{0--} - G_{31}^{0-+} G_{24}^{0+-} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя формулу (89), получаем поправки первого порядка к компонентам матричной функции Грина (15):

$$\begin{aligned} G_{12}^{1++} &= \sum_{34} u_{34} \left( -G_{13}^{0+-} G_{42}^{0-+} + G_{13}^{0++} G_{42}^{0++} \right), \\ G_{12}^{1+-} &= \sum_{34} u_{34} \left( -G_{13}^{0+-} G_{42}^{0--} + G_{13}^{0++} G_{42}^{0+-} \right), \\ G_{12}^{1-+} &= \sum_{34} u_{34} \left( -G_{13}^{0--} G_{42}^{0-+} + G_{13}^{0-+} G_{42}^{0++} \right), \\ G_{12}^{1--} &= \sum_{34} u_{34} \left( -G_{13}^{0--} G_{42}^{0--} + G_{13}^{0-+} G_{42}^{0+-} \right). \end{aligned}$$

На рис. 16 изображены диаграммы для поправки  $G_{12}^{1++}$ .

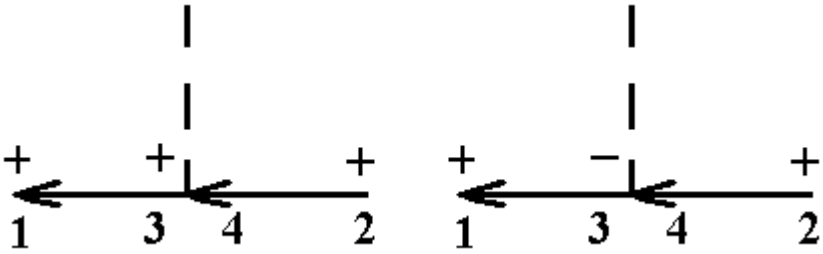


Рис. 16

Диаграммы для других компонент матричной функции Грина отличаются от приведенных на рис. 16 другими индексами  $\pm$  на электронных линиях.

Учет межэлектронного взаимодействия в неупорядоченных проводниках сводится к добавлению к оператору  $V$  гамильтониана электрон-электронного взаимодействия

$$V' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \psi_{\alpha_1}^+(\vec{r}_1) \psi_{\alpha_2}^+(\vec{r}_2) \psi_{\alpha_2}(\vec{r}_2) \psi_{\alpha_1}(\vec{r}_1),$$

где  $v$  – энергия взаимодействия двух электронов. Переходя к переменным Грассмана, для контурного интеграла в показателе экспоненты (88) получаем выражение:

$$\oint_C dt V'(t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ \psi_{\alpha_1}^*(\vec{r}_1, t) \psi_{\alpha_1}(\vec{r}_1, t) \right] v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \times \\ \times \left[ \psi_{\alpha_2}^*(\vec{r}_2, t) \sigma_z \psi_{\alpha_2}(\vec{r}_2, t) \right].$$

В формуле

$$Z[J, J^*] = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \oint_C dt (V + V') \right] Z_0[J, J^*] \quad (96)$$

входящие в гамильтониан взаимодействия  $V + V'$  переменные Грассмана необходимо заменить операторами функционального дифференцирования

$$\psi_\alpha^*(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{\delta^R}{\frac{i}{\hbar} \delta J_\alpha(\vec{r}, t)}, \quad \psi_\alpha(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{\delta^L}{\frac{i}{\hbar} \delta J_\alpha^*(\vec{r}, t)}.$$

Тогда, представляя экспоненту в виде ряда и вычисляя функциональные производные в формулах (89) и (96), получаем ряд теории возмущений для матричной функции Грина по взаимодействию  $V + V'$ .

Из условий (91) видно, что переменные Грассмана  $\psi_\pm$ ,  $\psi_\pm^*$ , заданные на участках  $C_+$  и  $C_-$  контура  $C$ , не являются независимыми. Переход к независимым переменным  $\chi_\alpha(\vec{r}, \varepsilon)$ ,  $\chi_\alpha^*(\vec{r}, \varepsilon)$  в  $(\vec{r}, \alpha, \varepsilon)$ -представлении осуществляется по правилу [13]

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \psi_+^* & \psi_-^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_+^* & \chi_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-n & -n \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $n$  – функция Ферми. В новых переменных производящий функционал (90) имеет вид

$$\begin{aligned}
Z_0[J, J^*] &= \int D\chi^* \int D\chi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{12} \chi_1^* \begin{pmatrix} G_R^{-1}(1,2) & 0 \\ 0 & G_A^{-1}(1,2) \end{pmatrix} \chi_2 + \right. \right. \\
&+ \sum_1 J_1^* \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 1 & n_1 - 1 \end{pmatrix} \chi_1 + \sum_1 \chi_1^* \begin{pmatrix} 1 - n_1 & -n_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} J_1 \left. \right] \right\} \times \\
&\times \left\{ \int D\chi^* \int D\chi \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{12} \chi_1^* \begin{pmatrix} G_R^{-1}(1,2) & 0 \\ 0 & G_A^{-1}(1,2) \end{pmatrix} \chi_2 \right] \right\}^{-1},
\end{aligned}$$

где теперь

$$\sum_1 = \sum_{\alpha_1} \int d\vec{r}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1}{2\pi\hbar},$$

а индекс 0 у запаздывающей и опережающей функций Грина опущен. Входящий в формулу (88) интеграл теперь равен [13]

$$\begin{aligned}
\oint_C dt (V + V') &= \sum_{\alpha} \int d\vec{r} u(\vec{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} \chi_{\alpha}^*(\vec{r}, \varepsilon) \chi_{\alpha}(\vec{r}, \varepsilon) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 d\varepsilon_4}{(2\pi\hbar)^4} \times \\
&\times \left[ \chi_{\alpha_1}^*(\vec{r}_1, \varepsilon_1) A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \chi_{\alpha_1}(\vec{r}_1, \varepsilon_2) \right] \left[ \chi_{\alpha_2}^*(\vec{r}_2, \varepsilon_3) B_{\varepsilon_3 \varepsilon_4} \chi_{\alpha_2}(\vec{r}_2, \varepsilon_4) \right] \times \\
&\times 2\pi\hbar \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4),
\end{aligned} \tag{97}$$

где

$$A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \begin{pmatrix} 1 - 2n_{\varepsilon_1} & n_{\varepsilon_1} + n_{\varepsilon_2} - 2n_{\varepsilon_1} n_{\varepsilon_2} \\ 2 & 2n_{\varepsilon_2} - 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{\varepsilon_3 \varepsilon_4} = \begin{pmatrix} 1 & n_{\varepsilon_4} - n_{\varepsilon_3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним усреднение производящего функционала (96) по всем возможным конфигурациям случайного поля  $V$ . Предположим, что вероятность реализации случайного потенциала имеет гауссов вид [13]:

$$P[u] = \exp\left[-\int d\vec{r} \int d\vec{r}' u(\vec{r}) K(|\vec{r} - \vec{r}'|) u(\vec{r}')\right] \times \\ \times \left\{ \int Du \exp\left[-\int d\vec{r} \int d\vec{r}' u(\vec{r}) K(|\vec{r} - \vec{r}'|) u(\vec{r}')\right] \right\}^{-1},$$

где  $K$  – положительно определенное ядро. Среднее по беспорядку определяется соотношением

$$\langle \dots \rangle_c = \int Du P[u] \dots$$

Подставляя сюда

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \oint_C dt V\right)$$

и учитывая (97), получаем гауссов континуальный интеграл:

$$\left\langle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \oint_C dt V\right) \right\rangle_c = \exp\left\{-\frac{1}{4\hbar^2} \sum_{\alpha} \int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha'} \int d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{2\pi\hbar} \times \right. \\ \left. \times \left[ \chi_{\alpha}^*(\vec{r}, \varepsilon) \chi_{\alpha}(\vec{r}, \varepsilon) \right] K^{-1}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \left[ \chi_{\alpha'}^*(\vec{r}', \varepsilon') \chi_{\alpha'}(\vec{r}', \varepsilon') \right] \right\}. \quad (98)$$

Из формул (96)-(98) видно, что проблема расчета среднего значения производящего функционала  $Z$  электронной жидкости в неупорядоченном проводнике свелась к вычислению континуального интеграла  $\int D\chi^* \int D\chi$ , содержащего в показателе экспоненты произведение четырех грасмановых переменных  $\chi, \chi^*$ . При помощи тождества

Хаббарда-Стратоновича [15,16,22]

$$\exp(u^* A^{-1} u) = (\det A)^{-\eta} \int \prod_l \left[ \frac{dz_l^* dz_l}{(2\pi i)^{(1-\eta)/2}} \right] \exp(-z^* A z - u^* z - z^* u) \quad (99)$$

( $\eta = +1$  для фермионов и  $\eta = -1$  для бозонов) экспонента, содержащая произведение четырех переменных Грассмана, сводится к континуальному интегралу по вспомогательному полю от экспоненты с произведением двух переменных [8]. В результате интеграл по переменным Грассмана оказывается гауссовым и вычисляется точно. Проблема расчета интеграла по вспомогательному полю и характеристик неупорядоченных проводников выходит за рамки этого пособия.

### 7.10. Модель БКШ и функциональные методы

Поучительным примером использования функциональных методов в статистической физике и кинетике является задача об энергетическом спектре сверхпроводника. В р. 2.11 она рассматривалась методом Н.Н. Боголюбова. Функциональные методы в теории сверхпроводимости использовались в работах А.В. Свидзинского (Мікроскопічна теорія надпровідності, 2001, 2011), в статьях: В.П. Гусынин, В.М. Локтев, И.А. Шовковий, ЖЭТФ, 107, 2007, 1995; M.V. Feigel'man, A.I. Larkin, M.A. Skvortsov, Phys. Rev., B61, 12361, 2000; А.А. Левченко, Вісник ХНУ, серія «Фізика», № 783, 34, 2007. Здесь мы рассмотрим эту задачу на основе модели Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), следуя работе А.А.Левченко. В его работе уравнение для щели в энергетическом спектре сверхпроводника получено с использованием функционального интеграла в реальном времени в рамках

формализма Келдыша. Он показал как используются основные приемы теории: расщепление БКШ-взаимодействия при помощи преобразования Хаббарда-Стратоновича, поворот в пространстве Келдыша, техника вычисления следов матриц и др.

Гамильтониан электронов в модели БКШ имеет вид

$$H = H_0 + U,$$

где

$$H_0 = \sum_{\alpha} \int d\vec{r} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \xi \psi_{\alpha}(\vec{r})$$

– гамильтониан свободных электронов,

$$\xi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu,$$

$$U = -g \int d\vec{r} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}),$$

– гамильтониан БКШ-взаимодействия,  $g$  – константа взаимодействия. Индексами  $\uparrow \downarrow$  отмечена ориентация спина электрона. Остальные обозначения см. в р. 2.

Основным объектом теории является введенный в р. 7.9 функционал

$$Z = \int D[\psi^*, \psi] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\psi^*, \psi]\right), \quad (7.100)$$

где

$$S[\psi^*, \psi] = \oint_C dt \int d\vec{r} \left[ \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\vec{r}, t) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) \psi_{\alpha}(\vec{r}, t) + g \psi_{\uparrow}^*(\vec{r}, t) \psi_{\downarrow}^*(\vec{r}, t) \psi_{\downarrow}(\vec{r}, t) \psi_{\uparrow}(\vec{r}, t) \right] \quad (7.101)$$

– действие,  $\psi_\alpha^*(\vec{r}, t)$  и  $\psi_\alpha(\vec{r}, t)$  – грассмановы поля,  $\int D[\psi^*, \psi] = \int D\psi^* \int D\psi$ . Интегрирование  $\oint_C dt$  выполняется

по контуру Келдыша  $C$  на рис. 7.3.

Входящая в (7.100) экспонента с четырьмя переменными Грассмана при помощи преобразования Хаббарда-Стратоновича (3.119), (7.99) принимает вид

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{ig}{\hbar} \oint_C dt \int d\vec{r} \psi_\uparrow^*(\vec{r}, t) \psi_\downarrow^*(\vec{r}, t) \psi_\downarrow(\vec{r}, t) \psi_\uparrow(\vec{r}, t) \right] = \\ = \frac{\int D[\Delta^*, \Delta] e^{\frac{i}{\hbar} \oint_C dt \int d\vec{r} \left[ -\frac{1}{g} \Delta^* \Delta + \Delta \psi_\uparrow^* \psi_\downarrow^* + \Delta^* \psi_\downarrow \psi_\uparrow \right]}}{\int D[\Delta^*, \Delta] e^{\frac{i}{\hbar} \oint_C dt \int d\vec{r} \left[ -\frac{1}{g} \Delta^* \Delta \right]}}, \end{aligned} \quad (7.102)$$

где  $\Delta^*(\vec{r}, t)$  и  $\Delta(\vec{r}, t)$  – вспомогательные бозевские поля. Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно в числителе правой части (7.102) учесть

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g} \Delta^* \Delta + \Delta \psi_\uparrow^* \psi_\downarrow^* + \Delta^* \psi_\downarrow \psi_\uparrow = g \psi_\uparrow^* \psi_\downarrow^* \psi_\downarrow \psi_\uparrow - \\ - \frac{1}{g} (\Delta^* - g \psi_\uparrow^* \psi_\downarrow^*) (\Delta - g \psi_\downarrow \psi_\uparrow) \end{aligned}$$

и сдвинуть переменные интегрирования  $\Delta^*, \Delta$ . Тогда действие (7.101) примет вид  $S = S_0 + S_\Delta$ , где

$$S_0 = \oint_C dt \int d\vec{r} \left[ \sum_\alpha \psi_\alpha^* \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) \psi_\alpha + \Delta \psi_\uparrow^* \psi_\downarrow^* + \Delta^* \psi_\downarrow \psi_\uparrow \right],$$



$$S_{\Delta} = -\frac{1}{g} \oint_C dt \int d\vec{r} \Delta^* \Delta.$$

Разбивая интеграл  $\oint_C dt$  на интегралы по ветвям  $C_{\pm}$  контура  $C$  на рис. 7.3

$$\oint_C dt [C] = \int_{-\infty}^{\infty} dt [C_+] - \int_{-\infty}^{\infty} dt [C_-],$$

получаем  $S_0 = S_0^+ + S_0^-$ , где

$$S_0^+ = \text{sp} \left[ \psi_{\uparrow+}^* \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) \psi_{\uparrow+} + \psi_{\downarrow+}^* \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) \psi_{\downarrow+} + \Delta_+ \psi_{\uparrow+}^* \psi_{\downarrow+}^* + \Delta_+^* \psi_{\downarrow+} \psi_{\uparrow+} \right], \quad (7.103)$$

$$S_0^- = \text{sp} \left[ \psi_{\uparrow-}^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \xi \right) \psi_{\uparrow-} + \psi_{\downarrow-}^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \xi \right) \psi_{\downarrow-} - \Delta_- \psi_{\uparrow-}^* \psi_{\downarrow-}^* - \Delta_-^* \psi_{\downarrow-} \psi_{\uparrow-} \right].$$

Здесь

$$\text{sp}(\dots) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\vec{r} (\dots),$$

индексы  $\pm$  отмечают величины, заданные на ветвях  $C_{\pm}$ .

Следуя Горькову и Намбу (см. Дж. Шриффер, Теория сверхпроводимости, 1970), введем спиноры

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow+} \\ \psi_{\downarrow+}^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow-} \\ \psi_{\downarrow-}^* \end{pmatrix}$$

и им сопряженные. Тогда действие (7.103) примет вид

$$S_0^+ = \text{sp} \left[ \begin{array}{c} \left( \psi_{\uparrow+}^* \quad \psi_{\downarrow+} \right) \begin{pmatrix} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) & \Delta_+ \\ \Delta_+^* & \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \xi \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow+} \\ \psi_{\downarrow+}^* \end{pmatrix} \\ \left( \psi_{\uparrow-}^* \quad \psi_{\downarrow-} \right) \begin{pmatrix} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \xi \right) & -\Delta_- \\ -\Delta_-^* & \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow-} \\ \psi_{\downarrow-}^* \end{pmatrix} \end{array} \right].$$

Целесообразно построить прямое произведение пространств Горькова-Намбу и Келдыша, вводя биспиноры

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow+} \\ \psi_{\downarrow+}^* \\ \psi_{\uparrow-} \\ \psi_{\downarrow-}^* \end{pmatrix}, \quad \Psi^* = \left( \psi_{\uparrow+}^* \quad \psi_{\downarrow+} \quad \psi_{\uparrow-}^* \quad \psi_{\downarrow-} \right).$$

Тогда  $S_0 = S_0^+ + S_0^- = \text{sp}(\Psi^* G^{-1} \Psi)$ , где матрица  $4 \times 4$   $G^{-1}$  имеет вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) & \Delta_+ & 0 & 0 \\ \Delta_+^* & \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \xi \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \xi \right) & -\Delta_- \\ 0 & 0 & -\Delta_-^* & \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \xi \right) \end{pmatrix}. \quad (7.104)$$

В результате величина (7.100) становится равной

$$Z = \int D[\Psi^*, \Psi] \int D[\Delta^*, \Delta] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ S_{\Delta} + \text{sp}(\Psi^* G^{-1} \Psi) \right] \right\}. \quad (7.105)$$

Несущественный в дальнейшем постоянный множитель здесь опущен. Входящий в (7.105) интеграл по полям Грассмана гауссов. Он равен (см. р. 3.5)

$$\int D[\Psi^*, \Psi] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \text{sp}(\Psi^* G^{-1} \Psi) \right] = \det(G^{-1}) = \exp[\text{Sp} \ln G^{-1}]. \quad (7.106)$$

Здесь учтено равенство  $\ln \det A = \text{Sp} \ln A$  и введено обозначение

$$\text{Sp} A = \sum_{\nu=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\vec{r} A_{\nu\nu}.$$

Подставляя (7.106) в (7.105), находим

$$Z = \int D[\Delta^*, \Delta] \exp \left( \frac{i}{\hbar} S_{\Delta} + \text{Sp} \ln G^{-1} \right). \quad (7.107)$$

В матричном операторе (7.104) выделим недиагональную часть  $\Delta = G^{-1} - G_0^{-1}$ , равную

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \Delta_+ & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -\Delta_- \end{pmatrix}, \quad (7.108)$$

где индексом 2 сверху отмечены матрицы  $2 \times 2$

$$\Delta_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{\pm} \\ \Delta_{\pm}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.109)$$

Не все элементы матричной функции Грина-Келдыша (7.14) независимы. Они связаны соотношением (7.10). Чтобы учесть это соотношение, подвергнем входящие в (7.104) матрицы  $4 \times 4$   $G_0^{-1}$  и  $\Delta$  преобразованию

$$G_0'^{-1} = L G_0^{-1} \sigma_z L^{-1}, \quad \Delta' = L \Delta \sigma_z L^{-1}, \quad (7.110)$$

где

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\sigma_z$  – третья матрица Паули. Преобразование (7.110) представляет собой поворот в пространстве Келдыша. После поворота матрица (7.108) оказывается равной

$$\Delta' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \Delta_{cl} & \Delta_q \\ 2 & 2 \\ \Delta_q & \Delta_{cl} \end{pmatrix}, \quad (7.111)$$

где

$$\Delta_{cl|q} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{cl|q} \\ \Delta_{cl|q}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.112)$$

$$\Delta_{cl} = \frac{1}{2}(\Delta_+ + \Delta_-), \quad \Delta_q = \frac{1}{2}(\Delta_+ - \Delta_-)$$

– классическая и квантовая компоненты бозонного поля.

Преобразованная суперматрица

$$G'_0 = L\sigma_z G_0 L^{-1}$$

имеет вид

$$G'_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ G_R & G_K \\ 2 & 2 \\ 0 & G_A \end{pmatrix}, \quad G_\alpha = \begin{pmatrix} G_\alpha(\varepsilon) & 0 \\ 0 & -G_\alpha^*(-\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (7.113)$$

где индекс  $\alpha = R, A, K$  относится к запаздывающей, опережающей функциям Грина свободных электронов и функции Келдыша. В (7.113) выполнено преобразование Фурье по времени. В  $(k, \varepsilon)$ -представлении из (7.27) и (7.51) в состоянии равновесия находим

$$G_{R,A}(k, \varepsilon) = (\varepsilon - \xi_k \pm i0)^{-1}, \quad (7.114)$$

$$G_K(k, \varepsilon) = [G_R(k, \varepsilon) - G_A(k, \varepsilon)] \operatorname{th} \frac{\beta \varepsilon}{2},$$

где  $\beta$  – обратная температура.

Входящий в (7.107) след матрицы равен

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} \ln G^{-1} &= C + \operatorname{Sp} [L \ln(G^{-1} \sigma_z) L^{-1}] = C + \operatorname{Sp} [\ln(LG^{-1} \sigma_z L^{-1})] = \\ &= C + \operatorname{Sp}(G_0'^{-1} + \Delta') = C' + \operatorname{Sp}(1 + G_0' \Delta'), \end{aligned} \quad (7.115)$$

где  $C$  и  $C'$  – константы, не зависящие от  $\Delta'$ . Подставляя (7.108), (7.109) и (7.112) в  $S_\Delta$ , получаем

$$S_\Delta = -\frac{2}{g} \operatorname{sp}(\Delta_{cl}^* \Delta_q + \Delta_q^* \Delta_{cl}).$$

В результате выражение (7.107) равно

$$Z = \int D[\Delta^*, \Delta] \exp \left[ -\frac{2i}{g\hbar} \operatorname{sp}(\Delta_{cl}^* \Delta_q + \Delta_q^* \Delta_{cl}) + \operatorname{Sp} \ln(1 + G_0' \Delta') \right]. \quad (7.116)$$

Константа  $C'$  в (7.115) опущена.

Интеграл (7.116) вычисляется методом стационарной фазы. Оптимальная конфигурация вспомогательного поля  $\Delta_{cl}(\vec{r}, t)$  может быть получена из уравнения

$$\left( \frac{\delta S}{\delta \Delta_q^*} \right)_{\Delta_q=0} = 0. \quad (7.117)$$

Это уравнение имеет вид

$$\frac{2i}{g\hbar} \Delta_{cl} = \operatorname{Sp} \left[ (1 + G_0' \Delta')^{-1} G_0' \frac{\delta \Delta'}{\delta \Delta_q^*} \right]_{\Delta_q=0}. \quad (7.118)$$

В  $(k, \varepsilon)$ -представлении

$$\text{Sp} = \frac{1}{V} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} \sum_{\nu} ,$$

где  $V$  – объем системы. Входящая сюда функциональная производная матрицы (7.111) равна

$$\frac{\delta\Delta'}{\delta\Delta_q^*} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы, содержащейся в (7.118), при  $\Delta_q = 0$  равен

$$\det(1 + G'_0\Delta') = \left[ 1 + G_R(\varepsilon)G_R^*(-\varepsilon)|\Delta_{cl}|^2 \right] \times \\ \times \left[ 1 + G_A(\varepsilon)G_A^*(-\varepsilon)|\Delta_{cl}|^2 \right].$$

Из

$$G'_0 \frac{\delta\Delta'}{\delta\Delta_q^*} \Big|_{\Delta_q=0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ G_K \gamma & G_R \gamma & & \\ 2 & 2 & 2 & \\ G_A \gamma & 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_K^* & 0 & -G_R^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_A^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

следует, что под знаком следа произведения матриц в (7.118) содержится

$$-a_{21}G_K^* - a_{41}G_A^* - a_{23}G_R^*,$$

где  $a_{21}$ ,  $a_{41}$  и  $a_{23}$  – алгебраические дополнения к элементам матрицы  $1 + G'_0\Delta'$ . Они равны

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -G_R \Delta_{cl} \left( 1 + G_A G_A^* |\Delta_{cl}|^2 \right), \\
a_{41} &= G_R G_A G_K^* \Delta_{cl} |\Delta_{cl}|^2 - G_K \Delta_{cl}, \\
a_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (7.117), (7.118) в  $(k, \varepsilon)$ -представлении принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{2i}{g} \Delta_{cl} &= \frac{1}{V} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \times \\
&\times \left[ \Delta_{cl} \frac{G_K^*(k, -\varepsilon) G_R(k, \varepsilon) + G_A^*(k, -\varepsilon) G_K(k, \varepsilon)}{\left[ 1 + G_R(k, \varepsilon) G_R^*(k, -\varepsilon) |\Delta_{cl}|^2 \right] \left[ 1 + G_A(k, \varepsilon) G_A^*(k, \varepsilon) |\Delta_{cl}|^2 \right]} \right].
\end{aligned}$$

В однородном случае  $\Delta_{cl}(k, \omega) = \Delta_{cl} = \text{const}$  это уравнение упрощается:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{V} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \text{th} \frac{\beta\varepsilon}{2} \text{Im} \frac{1}{\left( G_R^{-1} G_R^{*-1} + \Delta_{cl}^2 \right)}.$$

Подставляя сюда функцию Грина (7.114), получаем

$$\frac{1}{g} = -\frac{1}{V} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \text{th} \frac{\beta\varepsilon}{2} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon^2 - E_k^2 + i0 \text{sgn} \varepsilon}, \quad (7.119)$$

где  $E_k = \left( \xi_k^2 + \Delta_{cl}^2 \right)^{1/2}$  – энергия боголона, а  $\Delta_{cl}$  – энергетическая щель. Подынтегральное выражение в (7.119) содержит дельта-функцию. После интегрирования из (7.119)

получаем уравнение для щели в спектре возбуждений сверхпроводника:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{2V} \sum_k \frac{\text{th} \frac{\beta E_k}{2}}{E_k} . \quad (7.120)$$

Решение этого уравнения приведено в р. 2.11.

Развитию метода Келдыша и его многочисленным применениям в физике посвящен обзор [23], который мы советуем читателю изучить. Т.И. Рашба обратил наше внимание на этот обзор, за что мы выражаем ему благодарность.



## Задачи

7.1. Найдите функции (7.5) для однородного стационарного состояния фононного газа в жидкости. См. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, Физическая кинетика.

7.2. Получите функции Грина-Келдыша электронного газа на поверхности нанотрубки.

7.3. Исходя из определений функций Грина-Келдыша (7.5), покажите, что контур  $C$  на рис. 7.1 можно продолжить вправо, добавляя операторы эволюции в средних значениях. См. цитированную выше книгу Д.Н.Зубарева, В.Г.Морозова, Г.Рёпке.

7.4. В случае межчастичного взаимодействия найдите поправки первого и второго порядка ко всем элементам матричной функции Грина-Келдыша.

7.5. Найдите поправки первого и второго порядка к функциям (9.27) неравновесной и равновесной системы электронов при конечной температуре с учетом электрон-примесного и электрон-электронного взаимодействия в магнитном поле.

7.6. Убедитесь в том, что введенная в р. 7.6 дельта-функция обладает обычным свойством

$$\int_C dt_2 \delta_C(t_1 - t_2) F(t_2) = F(t_1),$$

где  $F(t)$  – функция, заданная на контуре Келдыша-Швингера  $C$ .

7.7. Получите уравнения (7.57).

7.8. Убедитесь в справедливости соотношений (7.58) для элементов массового оператора.

7.9. Используя приближение Хартри-Фока для двухчастичной функции Грина

$$G_2(12, 1'2') = G(1, 1')G(2, 2') \mp G(1, 2')G(2, 1'),$$

получите элементы массового оператора.

7.10. Получите массовый оператор в приближении  $T$ -матрицы. См. монографии Д.Н.Зубарева, В.Г.Морозова, Г.Рёпке и Л.Каданова, Г.Бейма.

7.11. Запишите уравнения (7.68) в представлении Вигнера.

7.12. Введите спектральную функцию  $i \left[ g^>(1, 1') - g^<(1, 1') \right]$  и запишите ее в представлении Вигнера.

7.13. Получите спектральную функцию в квазичастичном приближении. См. монографию Д.Н. Зубарева, В.Г. Морозова, Г. Рёпке.

7.14. Используя метод Келдыша, найдите изменение функции распределения электронов в проводнике, обусловленное примесными атомами. См. J. Rammer, H. Smith, Rev. Mod. Phys. 58, 323, 1986.

7.15. Выразите интеграл столкновений в кинетическом уравнении через  $T$ -матрицу.

7.16. Используя р. 7.8, получите интеграл столкновений электронов с примесными атомами и фононами в нормальном металле. См. J. Rammer, H. Smith, Rev. Mod. Phys. 58, 323, 1986.

7.17. Рассчитайте функции Грина-Келдыша двумерного электронного газа в сильном магнитном поле, используя в

качестве базиса «вихревые» состояния  $|m, \vec{R}\rangle$ , где  $m$  – неотрицательное целое число,  $\vec{R}$  – точка на плоскости, занятой газом. См. T. Champel and S. Florens, Phys. Rev. B75, 245326 (2007).

7.18. Вычислите входящие в (7.96)-(7.99) интегралы по вспомогательному полю. См. A. Kamenev, A. Andreev, Phys. Rev. B60, 2218, 1999; A. Kamenev, arXiv: cond.mat/0412296 v2 7 Feb 2005; A. Kamenev and A. Levchenko, Keldysh technique and nonlinear  $\sigma$ -model: basic principles and applications.

7.19. Найдите нормальные и аномальные функции Грина сверхпроводника в диаграммной технике Келдыша. См. обзор: П.И. Арсеев, С.О. Лойко, Н.К. Федоров, УФН 176, 3 (2006).

## Литература

1. Вопросы квантовой теории необратимых процессов. – М.: ИИЛ, 1961. – 365 с.
2. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 444 с.
3. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. ч. 2. – М.: Физматлит, 2000. – 494 с.
4. Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1964. – 256 с.
5. Келдыш Л.В. Диаграммная техника для неравновесных процессов // ЖЭТФ. – 1964. – 47, в. 4(10). – С. 1515-1527.
6. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 2002. – 536 с.
7. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёпке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. – М.: Физматлит, 2002. – Т. 1. – 432 с.; 2002. – Т. 2. – 296 с.
8. Kamenev A., Andreev A. Electron-electron interactions in disordered metals: Keldysh formalism // Phys. Rev. – 1999. – B60, № 4. – P. 2218-2238.
9. Danielewicz P. Quantum theory of nonequilibrium processes // Ann. Phys. – 1984. – 152. – P. 239-326.
10. Rammer J., Smith H. Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals // Rev. Mod. Phys. – 1986. – 58, № 2. – P. 323-359.
11. Botermans W. and Malfliet R. Quantum transport theory of nuclear matter // Phys. Rep. – 1990. – 198, № 3. – P. 115-194.
12. Zagoskin A.M. Quantum theory of many-body systems: Techniques and applications. – New York: Springer, 1998. – 244 p.

13. Babichenko V.S. and Kozlov A.N. Functional method for the random-field systems with inelastic scattering // *Solid State Communications*. – 1986. – 59, № 1. – P. 39-43.
14. Райдер Л. Квантовая теория поля. – М.: Мир, 1987. – 512 с.
15. Negele J.W. and Orland H. *Quantum Many-Particle Systems*. – California: Addison-Wesley Publ. Co., 1988. – 456 p.
16. Блейзо Ж.-П., Рипка Ж. Квантовая теория конечных систем. – Киев: Феникс, 1998. – 480 с.
17. Цвелик А. М. Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
18. Feigel'man M.V., Larkin A.I., Skvortsov M.A. Keldysh action for disordered superconductors // *Phys. Rev.* – 2000. – B61, № 18. – P. 12361-12388.
19. Ермолаев А.М., Рашба Г.И. К теории магнитопримесных состояний электронов в проводниках // *ФНТ*. – 2004. – 30, № 1. – С. 69-73.
20. Andersen J.O. Theory of the weakly interacting Bose gas // *Rev. Mod. Phys.* – 2004. – 76, № 2. – P. 599-639.
21. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. – М.: Наука, 1965. – 236 с.
22. Ермолаев О.М., Рашба Г.И. Вступ до статистичної фізики і термодинаміки. – Х. : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2004. – 516 с.
23. Kuang-chao Chou, Zhao-bin Su, Bal-lin Hao and Lu Yu. Equilibrium and nonequilibrium formalisms made unified. *Phys. Rep.*, 118, № 1,2, 1985, p. 1-131.
24. Kamenev A. Many-bodytheory of non-equilibrium systems // *arXiv: cond-mat/0412296v2* 7 Feb.– 2005. – P. 1-71.
25. Kamenev A. and Levchenko A. Keldysh technique and nonlinear  $\bar{\sigma}$ -model: basic principles and applications // *Depart. of Phys. Univ.of Minneap., MN55455, USA, Febr. 21.* – 2009. – P. 1-102.

26. Kita T. Introduction to nonequilibrium statistical mechanics with quantum field theory // arXiv: 1005.0393 v1 [cond-mat. stat-mech] 3 May. – 2010. – P. 1-78.
27. Зинн-Жюстен Ж. Континуальный интеграл в квантовой механике. – М.: Физматлит, 2010. – 356 с.

*Навчальне видання*

**Єрмолаєв Олександр Михайлович**

**Рашба Георгій Ілліч**

Лекції з квантової статистики і кінетики  
**7. Метод Келдиша у квантовій кінетиці**

**(Рос. мовою)**

**Відповідальний за випуск О.І. Любимов**

*В авторській редакції*  
Макет обкладинки *І.М. Дончик*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. . Наклад 50 прим. Зам.  
№ 159/10.

Видавець і виготовлювач  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Видавництво ХНУ імені В.Н. Каразіна  
61077, Харків, пл. Свободи, 4. Тел. 705-24-32  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від  
13.01.09.