Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Харьковский национальный университет
имени В.Н.Каразина

К 200-летию Харьковского университета

В.В.Ульянов

ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Часть пятая

$$\Psi' = \hat{O}\Psi$$

$$\hat{A}' = \hat{O}\hat{A}\hat{O}^{-1} \qquad \hat{O}^{+} = \hat{O}^{-1}$$

$$\Psi(p) = \int dq \psi_p^*(q)\Psi(q)$$

$$E_0 = < H >_0 \leq < H >$$

Харьков 2011

К 65-летию кафедры теоретической физики
имени академика И.М.Лифшица

В.В.Ульянов

ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

V

Харьков 2011

УДК 530.145
ББК 22.314я73-1
У 51

Рецензент – доктор физико-математических наук, профессор А.М.Ермолаев.

У 51 **Ульянов В.В**. Лекции по квантовой механике. Ч.V/ В.В.Ульянов. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 44 с.

Лекции продолжают серию изданий, приуроченную к 200-летию Харьковского университета и 65-летию кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица.

К изданию прилагается компакт-диск с электронными версиями некоторых книг автора по квантовой теории.

Посвящаются Льву Элеазаровичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики, известному физику-теоретику, воспитавшему многих выдающихся специалистов.

Предназначены для преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

Издается по решению кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица от 17 мая 2011 года (протокол № 11)

УДК 530.145
ББК 22.314я73-1

О Т А В Т О Р А

Каждый, кто сиживал на морском берегу,
не раз завороженно пересчитывал набегающие волны: одна, другая, третья... Но не каждый задумывался при этом над тем, что своим прерывистым счетом он описывает этапы непрерывного процесса.
Д.Данин

Данное пособие составлено из фрагментов лекций по дополнительным главам квантовой механики, которые я читал в 1970-х годах. В своем архиве я обнаружил несколько листочков, напечатанных на пишущей машинке. К сожалению, в былые годы, готовясь к лекциям, я ограничивался черновыми набросками нужных формул, но иногда, оказывается, кое-что не поленился изложить более подробно. Тогда, в процессе изложения материала, связанного с соотношением неопределенностей, мне пришла идея различных обобщений этого соотношения. Впоследствии эти результаты были опубликованы, но я решил попытаться восстановить первоначальное изложение.

Эти рукописи и подготовил к изданию мой сын Николай. Я очень благодарен ему за это.

Нужно еще раз отметить, что цикл лекций, к которым относится и данная 5-я часть, не образуют единого курса. Лекции читались мною в разные годы на заочном, вечернем и дневном отделениях, читались на физическом и радиофизическом факультетах, а также на факультете повышения квалификации преподавателей. В связи с этим кое-что повторяется, но с методическими вариациями изложения.

Пособие посвящается Льву Элеазаровичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики Харьковского университета, известному физику-теоретику. Лев Элеазарович в течение многих лет читал курс лекций по квантовой механике физикам и радиофизикам нашего Университета. Пусть эта небольшая книжечка записей лекций послужит выражением нашей признательности этому человеку, отдавшему лучшие годы своей жизни служению благородному делу университетского образования.

Публикация приурочена к 200-летию Харьковского университета и 65-летию кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица.

Издание дополнено компакт-диском с электронными версиями некоторых книг автора по квантовой теории.

Благодарю Александра Михайловича Ермолаева за внимательное отношение к рукописям автора, за лестный отзыв о данном пособии и помощь советами и редкой литературой.

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(Из лекций по дополнительным главам квантовой механики)

1. Вводная часть посвящена краткому рассказу о роли рассматриваемого вопроса в квантовой теории (канонические преобразования фактически используются в различных расчетах, при объяснении основных положений, применяются как сознательно, искусственно, так и непроизвольно, естественно, спонтанно, в процессе эволюции системы, например).

На предыдущем занятии студенты были оповещены о предстоящей теме, им было задано проштудировать соответствующий материал по книгам.

2. Введение понятия «представление» в широком смысле. Случай чистых состояний. Переход от старого представления к новому:

$$\Psi' = \hat{O}\Psi .$$

Эквивалентность представлений. Обратное преобразование также должно выполняться:

$$\Psi = \hat{O}^{-1}\Psi' .$$

3. Накладываем дополнительное условие, исходя из требования инвариантности основных физических

характеристик, выражаемых через скалярное произведение:

$$(\Psi', \Phi') = (\Psi, \Phi).$$

4. Замечание о выполнимости всех используемых преобразований и операций с математической точки зрения.

5. Следствие наложенного условия:

$$(\hat{O}\Psi, \hat{O}\Phi) = (\Psi, \Phi) \Rightarrow \hat{O}^{+}\hat{O} = 1,$$

т. е. $\hat{O}^{+} = \hat{O}^{-1}$.

Канонические преобразования – унитарные преобразования.

Эрмитовы и унитарные операторы. Примеры.

Генераторы унитарных преобразований.

Унитарный (от латинского unitas – единство) означает объединенный, единый, образующий одно целое.

6. Вопрос о соответствующем преобразовании линейных операторов. Определение оператора в

новом представлении. Правило преобразования линейных операторов:

$$\hat{A}\psi = \varphi; \ \hat{A}'\psi' = \varphi'$$

$$\hat{A}'\hat{O}\psi = \hat{O}\varphi = \hat{O}\hat{A}\psi \Rightarrow \hat{A}'\hat{O} = \hat{O}\hat{A}, \text{ или}$$

$$\hat{A}' = \hat{O}\hat{A}\hat{O}^{-1}.$$

7. Подведение итогов. Сводка результатов. По ходу записи формул кратко проговариваются основные требования и смысл соотношений:

$$\Psi' = \hat{O}\Psi,$$

$$\hat{O}^{+} = \hat{O}^{-1},$$

$$\hat{A}' = \hat{O}\hat{A}\hat{O}^{-1}.$$

8. Иллюстрация связи симметрии некоторой величины, описываемой оператором $\hat{B}$, и коммутативности:

$$\hat{B}' = \hat{B} \Rightarrow \hat{B}\hat{O} = \hat{O}\hat{B}.$$

Необходимое и достаточное условие симметрии некоторой величины относительно какого-либо преобразования есть коммутативность ее оператора и оператора преобразования.

9. О роли коммутаторов в квантовой теории. Физическая совместимость. Операторы производных по времени. Бозевские и фермиевские соотношения коммутации. Антикоммутаторы. Симметрия и коммутативность.

10. Особый случай симметрии гамильтониана относительно некоторого преобразования. Связь симметрии с сохранением:

если $\hat{H}' = \hat{O}\hat{H}\hat{O}^{-1} = \hat{H}$, т. е. $\hat{H}\hat{O} = \hat{O}\hat{H}$, или $\{\hat{H}, \hat{O}\} = 0$,

и $\dfrac{\partial\hat{O}}{\partial t} = 0$, то $\dfrac{d\hat{O}}{dt} = \dfrac{\partial\hat{O}}{\partial t} + \{\hat{H}, \hat{O}\}$.

Отсюда закон сохранения:

$$\frac{d}{dt} < \hat{O} >= 0 \Rightarrow < \hat{O} >= const(t) .$$

Переход к генераторам для непрерывных преобразований.

11. Особенность законов сохранения в квантовой механике. Сохранение распределения вероятностей. Особый случай стационарных состояний.

12. Еще раз о взаимосвязи симметрии и сохранения. Современная ситуация в теории элементарных частиц.

13. Следующий раздел – «Конкретные примеры канонических преобразований». «Канонический» – принятый за образец, твердо установленный, соответствующий канону, узаконенный (от греческого kanōn – правило, предписание).

14. Пример простого фазового преобразования:

$$\Psi' = e^{i\alpha}\Psi \,;$$

$$\hat{O} = e^{i\alpha}\,;\ \hat{O}^{+} = e^{-i\alpha}\,;\ \hat{O}^{+}\hat{O} = 1\,;\ \hat{A}' = e^{i\alpha}\hat{A}e^{-i\alpha} = \hat{A}\,.$$

15. Оживляющий материал – шуточный сценарий из жизни векторного пространства в трех актах с участием канонических преобразований.

16. Домашнее задание – переход от одного полного набора физических величин в качестве аргументов волновой функции к другому (представления в узком смысле – координатное, импульсное, энергетическое и т. п.).

17. Методические замечания: начальная часть темы весьма абстрактна, так что нужно, чтобы она шла после какой-то другой темы (желательно начать лекционную пару с другого вопроса), нужно сначала «разогреть» аудиторию и раскачаться самому; тема затрагивает очень много вопросов, однако следует все время не упускать из поля зрения основную линию.

КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Вкратце рассказывается о предмете предыдущей лекции и о целях сегодняшнего занятия. Продолжаются примеры канонических преобразований.

Попутно вспоминаются основные результаты перехода от одного базиса к другому, разъясняется физический смысл некоторых формальных на первый взгляд свойств и правил. Указываются опорные прикладные, практически важные соотношения, развиваются навыки работы в различных конфигурационных представлениях.

Сравниваются формы записи результатов в обозначениях Шредингера и Дирака.

2. В качестве второго примера канонических преобразований берется локальное фазовое преобразование (для определенности говорится о координатном представлении и рассматривается величина типа обобщенного импульса):

$$\Psi'(q) = e^{i\varphi(q)}\Psi(q)\,;\ \hat{O} = e^{i\varphi(q)}\,;\ \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\,;$$

$$\hat{p}' = e^{i\varphi}\,\hat{p}e^{-i\varphi} = \hat{p} - \hbar\varphi'\,.$$

Различные пути ввода оператора импульса в квантовую механику (плоские волны, геометрический сдвиг, канонические переменные и скобки Пуассона и т. д.). Особенность рассматриваемого преобразования – остаемся в рамках одного и того же координатного пространства, изменяются только фазы волновых функций (локальное преобразование). Аналогия с системами отсчета, в которых выбираются различные виды систем координат (декартовы, ортогональные, неортогональные и т. п.). Различные современные следствия такого рода преобразований и вопросы градиентных преобразований в связи с электродинамическими вопросами не затрагиваются на данном этапе обсуждения. Однако необходимо подчеркнуть роль фазы волновой функции (помимо формального изменения вида операторов типа импульса, она непосредственно определяет распределение вероятностей других – не координатных – физических величин, а также целиком определяет потоковые характеристики. Более подробное обсуждение этих вопросов обычно отнесено на соответствующее практическое занятие по квантовой механике (потоковая и вероятностная роль фазы волновой функции).

3. В качестве третьего конкретного примера рассматривается наиболее часто встречающееся преобразование перехода от одного представления (в узком смысле слова) к другому.

Начинаем с определения понятия представления в узком смысле и рассмотрения операции проектирования абстрактного вектора состояния на некоторый орт в выбранном базисе:

$$\Psi(q) = (\psi_q, \Psi) \ .$$

Скалярное же произведение расписываем в некотором другом базисе (для определенности говорим о координатном и импульсном пространствах):

$$\Psi(q)=\int dp\,\psi_q^*(p)\Psi(p)\,.$$

Обратное преобразование соответствует перемене местами значков координат и импульсов:

$$\Psi(p)=\int dq\,\psi_p^*(q)\Psi(q)\,.$$

Связь же между этими двумя формально эквивалентными и независимыми соотношениями устанавливается с помощью соотношения «взаимности», которое есть не что иное как эрмитова симметрия скалярного произведения:

$$\psi_p(q)=(\psi_q,\psi_p)=(\psi_p,\psi_q)^*=\psi_q^*(p)\,.$$

Перед переходом к дальнейшему изложению, записываем все соотношения в обозначениях Дирака:

$$\langle q|\Psi\rangle\,;$$

$$\langle q|\,p\rangle=\langle p|q\rangle^*\,.$$

Отличительная черта дираковских обозначений – чрезвычайная лаконичность, компактность записи. Это очень удобно на практике, но производит слишком формальное впечатление при освоении материала. На первом этапе знакомства с величинами и физическим смыслом соотношений, видимо, предпочтение следует отдавать более пространным и детальным обозначениям Шредингера. Так, первое соотношение по Шредингеру содержит толкование волновой «функции», вводит понятие аргументов, индексов представления, а затем придает определенный геометрический смысл такой величине, трактуя ее как результат проектирования абстрактного вектора состояния на некоторый орт выбранного базиса в гильбертовом пространстве. Это касается и других случаев, как будет видно из дальнейшего.

Продолжая тему взаимосвязи представлений, получаем запись перехода от одного представления к другому и обратно в форме, обычной для прямого и обратного преобразования Фурье (разложение Фурье и вычисление образа Фурье):

$$\Psi(q) = \int dp\, \psi_p(q)\Psi(p)\,; \; \langle q|\Psi\rangle = \int dp \langle q|p\rangle\langle p|\Psi\rangle\,;$$

$$\Psi(p) = \int dq\, \psi_p^*(q)\Psi(q)\,.$$

Чтобы непосредственно связать рассматриваемое преобразование с общим видом канонических преобразований, обратимся к соответствующим сведениям из области операторных величин. Каждому линейному оператору $\hat{A}$ сопоставляется матрица в соответствии с правилом действия оператора на орт выбранного базиса:

$$\hat{A}\psi_p = \sum_{p'} A_{p'p}\psi_{p'} \ .$$

Отсюда вытекает и обратное соотношение:

$$A_{p'p} = (\psi_{p'}, \hat{A}\psi_p) \ .$$

При этом первое равенство можно рассматривать в прикладном аспекте как рецепт получения результата действия оператора, когда известна матрица, а второе – позволяет найти саму матрицу, если известно действие оператора.

Поскольку первое соотношение определяет действие оператора на некоторый орт, то тем самым мы имеем в принципе и действие на произвольный вектор. Однако желательно реализовать эту возможность в явном виде. Это достигается следующей цепочкой простых преобразований (как всегда молчаливо подразумевается возможность выполнения всех математических преобразований и существование соответствующих величин):

$$\hat{A}\Psi = \hat{A}\sum_{p'}\Psi(p')\psi_{p'} = \sum_{p'}\Psi(p')\hat{A}\psi_{p'} =$$

$$= \sum_{p'}\Psi(p')\sum_{p}A_{pp'}\psi_{p} = \sum_{p}(\sum_{p'}A_{pp'}\Psi(p'))\psi_{p} \ .$$

Отсюда получаем окончательное выражение, которое можно трактовать как правило действия оператора «на индекс представления»:

$$(\hat{A}\Psi)(p) = \sum_{p'}A_{pp'}\Psi(p') \ ;$$

исходная же формула с такой точки зрения есть форма действия «на индекс состояния»:

$$\hat{A}\psi_{p} = \sum A_{p'p}\psi_{p'} \ .$$

Заметим, что разложения в правых частях получаемых равенств могут производиться не только в том же самом базисе, но и в другом (так получаются более общего вида матрицы, у которых «строки» и «столбцы» оказываются разной природы, – именно с таким случаем мы и сталкиваемся при описании канонического преобразования, как будет видно из дальнейшего).

Другое замечание следует сделать в связи с аналогией и различием получаемых двух форм действия оператора: формально оба соотношения содержат одни и те же значки, но несколько различаются в мелких деталях, однако фактически в обозначениях Шредингера имеется существенная разница. В одном случае выбирается конкретный вектор в произвольном представлении, тогда как в другом мы имеем дело с произвольным вектором, но в конкретном представлении. И вновь методически полезно выразить эти соотношения на языке дираковских обозначений, дабы еще раз проиллюстрировать богатые возможности этих обозначений и их удивительную гибкость и эффективность. В первом случае

$$\hat{A}|p\rangle = \sum_{p'} |p'\rangle\langle p'|A|p\rangle,$$

а во втором

$$\langle p|\hat{A} = \sum_{p'} \langle p|A|p'\rangle\langle p'|.$$

Другими словами, первому случаю отвечает действие оператора на кет-вектор, а второму – на бра-вектор (или, соответственно, направо и налево).

Возвращаясь к описанию рассматриваемых преобразований на языке канонических правил, получаем

$$\Psi(q) = \int dp\,\psi_p(q)\Psi(p) \Leftrightarrow \Psi' = \hat{O}\Psi \ ;$$

$$\Psi(q) = (\hat{O}\Psi)(q) = \int dp O_{qp}\Psi(p) \Rightarrow$$

$$O_{qp} = \psi_p(q) .$$

Унитарность такого преобразования иллюстрируется следующей цепочкой соотношений, в которой необходимо проявить бдительность при записи обратного преобразования, вводя соответствующий значок:

$$O_{qp} = \psi_p(q) = \psi_q^*(p) = (O_{pq}^{-1})^* = O_{qp}^{-1+} \ ;$$

$$\hat{O} = \hat{O}^{-1+} \ ; \ \hat{O}^{-1} = \hat{O}^{+}$$

(или $O^{-1}_{pq} = \psi_q(p) = \psi^*_p(q) = O^*_{qp} = O^+_{pq}$).

Переходя к преобразованию для операторов, используем запись матричных элементов в виде

$$A_{pp'} = (\psi_p, \hat{A}\psi_{p'}),$$

раскрывая скалярное произведение:

$$A_{pp'} = \iint dq dq' \psi^*_p(q) A_{qq'} \psi_{p'}(q').$$

Нетрудно усмотреть в этом стандартном тензорном преобразовании каноническое правило

$$\hat{A}' = \hat{O}\hat{A}\hat{O}^{-1}.$$

Наконец, следует упомянуть специальный случай собственных представлений. Рассматривая некоторый эрмитов оператор (физическую величину) $\hat{F}$, мы отмечаем, что в соответствии с определением его собственный значений и векторов

$$\hat{F}\psi_F = F\psi_F$$

действие на индекс состояния оказывается очень простым, что означает диагональность матрицы в собственном представлении

$$F_{FF'} = F\delta_{FF'}$$

и дает, в свою очередь, правило действия на индекс представления:

$$\hat{F}\Psi(F) = \sum_{F'} F_{FF'}\Psi(F') = F\Psi(F).$$

Это приводит непосредственно к выражению, имеющему важное прикладное значение:

$$F_{pp'} = \sum_{F}\sum_{F'}\psi_p^*(F)F_{FF'}\psi_{p'}(F') = \sum_{F} F\psi_F(p)\psi_F^*(p')$$

(спектральное разложение эрмитова оператора).

Еще один вопрос связан с условиями ортогональности и полноты системы базисных векторов. Рассматривая матричные элементы единичного оператора, получаем соотношение

$$I_{pp'} = (\psi_p, \psi_{p'}) = \delta_{pp'}.$$

Если при этом расписать скалярное произведение явно в некотором представлении

$$(\psi_p,\psi_{p'}) = \int dq\,\psi_p^*(q)\psi_{p'}(q) = \sum_F \psi_p^*(F)\psi_{p'}(F)\,,$$

то приходим к дираковской записи

$$\left\langle p \middle| \hat{I} \middle| p' \right\rangle = \sum_F \left\langle p \middle| F \right\rangle \left\langle F \middle| p' \right\rangle,$$

в которой, в силу произвольности выбранных исходных базисных векторов, оставляем только «скелетную», операторную часть:

$$\hat{I} = \sum_F \left| F \right\rangle \left\langle F \right|.$$

Это есть спектральное разложение единичного оператора, или условие полноты системы собственных векторов $\left| F \right\rangle$. Обозначения Дирака позволяют строить наряду с произведением двух векторов скалярного вида $\left\langle p \middle| p' \right\rangle$ также и диадное, тензорное произведение $\left| p \right\rangle \left\langle p' \right|$ (два режима «стыковки», «нос к носу», «спина к спине» или какие-либо другие образные выражения). Нетрудно усмотреть во многих дираковских разложениях именно такие цепочки соотношений. Чтобы освоить прием записи дираковских матричных соотношений, необходимо обратить внимание на несколько подобных выражений и закрепить навыки на простых примерах (матричные элементы произведения операторов, формула спектрального разложения эрмитова оператора и т. п.).

В заключение следует еще раз вспомнить удобный прием работы с конечными представлениями, когда используется обычное правило умножения матриц и проекциям векторов состояния сопоставляются матрицы-столбцы (материал одного из первых занятий по квантовой механике, посвященный работе с матрицами).

ОБОБЩЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Описание общих закономерностей квантового движения на основе соотношения неопределенностей относится к числу типичных интегральных подходов. Оно имеет универсальную форму и характеризует движение в целом, а в наиболее важных случаях канонически сопряженных величин вообще не связано с конкретной волновой функцией, с конкретным видом состояния.

Так, соотношение неопределенностей Гейзенберга для импульса и координаты $\Delta p \Delta x \geq \hbar / 2$ является неравенством и служит (не говоря о фундаментальной теоретической роли) для оценок квантовостатистических флуктуаций координат и импульсов, а также входит в общие расчетные неравенства, например при нахождении энергии нелинейных нулевых колебаний. Оно устанавливает нижнюю границу произведения неопределенностей, наименьшее принципиально возможное значение этой величины, но не дает представления о ее фактических значениях для данной конкретной системы в заданном состоянии. Часто это соотношение используют для оценок по порядку величины, полагая $\Delta p \Delta x \sim \hbar$. Однако существуют состояния, в которых такая оценка оказывается неверной (существенно заниженной). При этом аномально большие значения произведения неопределенностей могут соответствовать как чисто квантовому случаю (квантовые аномалии), так и классическому (классические аномалии). Чисто квантовое явление аномального возрастания произведения неопределенностей $\Delta p \Delta x$ возникает в случае движения частицы в стационарных состояниях с малой энергией связи $|E|$. Возможность классических аномалий проиллюстрируем на примере одномерных ветвей движения в стационарных состояниях с большим возбуждением. Здесь большая величина произведения неопределенностей вызывается увеличением каждой из них в соответствии с классическим законом: средние значения для стационарных состояний в классическом пределе, т. е. для достаточно больших энергий, переходят в средние по классическому колебаний, так что $\Delta p \Delta x \approx \Delta p_{кл} \Delta x_{кл} >> \hbar$. При этом неопределенности по порядку величины совпадают с классическими амплитудами колебаний (по координате и по импульсу). Так, для гармонического осциллятора в стационарных состояниях с энергией E_n

$$\Delta p \Delta x = E_n / \omega = \hbar(n + 1/2), \quad n = 0,1,2,... \quad ,$$

так что при $n \gg 1$ получаем $\Delta p \Delta x >> \hbar$.

Далее рассмотрим некоторые обобщения. В обычном соотношении неопределенностей содержатся величины с некоммутирующими операторами в некотором чистом состоянии и в один и тот же момент времени. Можно получить более полную информацию о неопределенностях двух величин, относя их к *различным моментам времени* и *учитывая корреляцию этих величин* в *смешанных состояниях*.

Введем скалярное произведение операторов по правилу

$$(\hat{F}, \hat{G}) \equiv Sp(\hat{\rho} \hat{F}^{+} \hat{G}) = < \hat{F}^{+} \hat{G} >.$$

Тогда на основании неравенства Шварца $(\hat{F}, \hat{F})(\hat{G}, \hat{G}) \geq \left| (\hat{F}, \hat{G}) \right|^2$, полагая $\hat{F} = \hat{f}(t_1) - < f(t_1) >$ и $\hat{G} = \hat{g}(t_2) - < g(t_2) >$, где операторы физических величин $\hat{f}(t_1)$, $\hat{g}(t_2)$ и статистический оператор $\hat{\rho}$ относятся к гейзенберговскому представлению, получаем после разделения $(\hat{F},\hat{G})$ на вещественную (антикоммутаторную) и мнимую (коммутаторную) части:

$$D_{ff}(t_1,t_1)D_{gg}(t_2,t_2) \geq D_{fg}^2(t_1,t_2) + (\hbar^2/4)\varphi_{fg}^2(t_1,t_2)\,. \qquad (1)$$

В левой части этого неравенства находится произведение дисперсий рассматриваемых величин. Стоящие в правой части неравенства величины также имеют простой смысл: функция корреляции флуктуаций $D_{fg}(t_1,t_2) = <\hat{F}\hat{G} + \hat{G}\hat{F}>/2$ является центральным корреляционным моментом второго порядка для величин f и g, а функция $\varphi_{fg}(t_1,t_2) - < \left| \hat{f}(t_1), \hat{g}(t_2) \right| >$ определяет в квантовой теории необратимых процессов линейную реакцию величины f в момент времени t_1 под действием единичного импульса обобщенной силы в момент t_2 при обобщенной координате g (ее называют функцией последействия). Напоминаем, что для квантовых скобок Пуассона используется обозначение

$$\{\hat{f},\hat{g}\} \equiv i(\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f})/\hbar\,.$$

Из неравенства (1) вытекает искомое соотношение для среднеквадратичных отклонений (неопределенностей) рассматриваемых величин

$$\Delta f(t_1)\Delta g(t_2) \geq \sqrt{D_{fg}^2(t_1,t_2) + \hbar^2\varphi_{fg}^2(t_1,t_2)/4}\,, \qquad (2)$$

которое будем называть обобщенным соотношением неопределенностей.

Приведем некоторые примеры и рассмотрим частные случаи обобщенного СН.

а) Для совпадающих моментов времени $t_1 = t_2 \equiv t$ имеем

$$\Delta f \Delta g \geq \sqrt{D_{fg}^2 + \hbar^2 < \{\hat{f}, \hat{g}\} >^2 / 4}\,, \tag{3}$$

где общий для величин временной аргумент t явно не выписан. Произведение неопределенностей определяется не только некоммутативностью величин, отражающей их физическую несовместимость (что характерно для обычных СН), но и их корреляцией, статистической взаимосвязью.

В частности, для импульса p и соответствующей ему координаты x (вообще для двух канонически сопряженных величин)

$$\Delta p \Delta x \geq \sqrt{D_{px}^2 + \hbar^2 / 4}\,.$$

Для коммутирующих величин (например, для энергии и интеграла движения) или для величин в состояниях с $< \{\hat{f}, \hat{g}\} >= 0$ (скажем, для проекций момента M_x и M_y в состояниях с $< M_z >= 0$) соотношение неопределенностей содержит только корреляцию:

$$\Delta f \Delta g \geq \left| D_{fg} \right|. \tag{4}$$

Для спиновых величин, пропорциональных матрицам Паули σ, обобщенное соотношение неопределенностей имеет вид

$$\Delta\sigma_x\Delta\sigma_y \geq \sqrt{<\sigma_x>^2<\sigma_y>^2+<\sigma_z>^2}\ .$$

Отметим также, что знак равенства в формуле (3) соответствует чистому состоянию с вектором ψ, удовлетворяющим уравнению

$$D_{gg}(\hat{f}-<f>)\psi = (D_{fg}+i\hbar\varphi_{fg}/2)(\hat{g}-<g>)\psi\ .$$

В частности, для импульса и координаты это есть состояние в виде гауссова пакета в координатном шредингеровском представлении с перемещением средней точки $<x>$ со скоростью $<p>/m$ и корреляцией $D_{px}=(m/2)dD_{xx}/dt$:

$$\psi(x,t)=(2\pi D_{xx})^{-1/4}\exp[\frac{i}{\hbar}x<p>+(\frac{iD_{px}}{2\hbar D_{xx}}-\frac{1}{4D_{xx}})(x-<x>)^2].$$

При $D_{px}=0$ получаем хорошо известный минимизирующий произведение неопределенностей $\Delta p\Delta x$ пакет, отвечающий, например, когерентным состояниям осциллятора.

б) Если в правой части неравенства (2) отбросить неотрицательную величину D_{fg}^2, то приходим к соотношению

$$\Delta f(t_1)\Delta g(t_2) \geq \hbar\left|\varphi_{fg}(t_1,t_2)\right|/2\ ,$$

которое для чистого состояния и при совпадающих временных аргументах $t_1 = t_2$ переходит в обычное соотношение неопределенностей $\Delta f \Delta g \geq \hbar \left| < \{\hat{f}, \hat{g}\} > \right| / 2$, описываемое во всех книгах по квантовой механике.

в) При отбрасывании в (2) члена с функцией последействия φ_{fg}, а также в классическом пределе

$$\Delta f(t_1)\Delta g(t_2) \geq \left| D_{fg}(t_1, t_2) \right|. \qquad (5)$$

г) Неопределенности одной и той же величины в разные моменты времени связаны соотношением, содержащим функцию автокорреляции D_{ff}:

$$\Delta f(t_1)\Delta f(t_2) \geq \sqrt{D_{ff}^2(t_1, t_2) + \hbar^2 \varphi_{ff}^2(t_1, t_2) / 4}.$$

д) В стационарных смешанных состояниях функции корреляции и последействия зависят от разности временных аргументов. В частности, в состоянии термодинамического равновесия фурье-образы этих функций по переменной $t_1 - t_2$ непосредственно связаны между собой:

$$D_{fg}(\omega) = (\hbar / 2i)\varphi_{fg}(\omega) cth(\hbar\omega / 2T),$$

что является одной из форм флуктуационно-диссипационной теоремы в квантовой кинетике.

Подчеркнем некоторые особенности полученных результатов.

Новым является учет корреляции в соотношении неопределенностей, а также тот факт, что величины берутся в разные моменты времени.

Вывод обобщенного СН является чисто интегральным: используются самые общие свойства операторных инвариантов, через которые выражены интересующие нас физические величины.

Наличие корреляции в СН само по себе представляет принципиальный интерес, так как вскрывает причины возникновения взаимной связи неопределенностей: наряду с обычно подчеркиваемой чисто квантовой причиной – физической несовместимостью, существует и другой источник – корреляция.

Учет корреляции позволяет сформулировать соотношение неопределенностей даже для коммутирующих величин (4).

Мы подчеркиваем, что это есть соотношение для Δf и Δg, однако для практических целей может оказаться полезной оценка не для неопределенностей, а для корреляции.

Принятие во внимание корреляции и разновременного характера величин в смешанных состояниях позволяет выйти за рамки механики: получаем соотношение, которое в корреляционном анализе позволяет оценивать матрицу корреляции $D_{fg}(t_1, t_2)$. В этом случае появляется дополнительно к известной оценке корреляции по автокорреляциям отдельных величин (дисперсиям) чисто квантовый член с функцией последействия: из (1) вытекает неравенство

$$D_{fg}^2(t_1,t_2) \le D_{ff}(t_1,t_1)D_{gg}(t_2,t_2) - \hbar^2\varphi_{fg}^2(t_1,t_2)/4\,.$$

В кинетических задачах мы имеем возможность получить аналогичную оценку для функции последействия $\varphi_{fg}(t_1,t_2)$.

Установить СН для разновременных величин удалось благодаря использованию представления Гейзенберга: хотя принципиально все представления эквивалентны, однако на практике есть случаи, когда в рамках шредингеровской картины временного описания невозможно непосредственно построить характеристику движения, например типа $< A(t_1)B(t_2) >$. Так, функции Грина в статистической физике построены из полевых операторов, отнесенных к разным моментам времени. Аналогично в кинетике рассматриваются ФГ, построенные на основе произведений операторов физических величин, взятых в разные моменты времени.

Нельзя не отметить и такого принципиального момента: всегда полезно увидеть интересующее нас соотношение в качестве частного случая более общих закономерностей, чтобы лучше понять его место, смысл, происхождение.

ОЦЕНКА ЭНЕРГИИ НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Цель – освоить различные аспекты применения соотношения неопределенностей, методы количественных оценок энергии основного состояния, проиллюстрировать применение теорем Эренфеста.

В качестве первого примера выбирается наиболее простая модель – гармонический осциллятор. Предварительно подводятся итоги вариационных оценок энергии основного состояния (обычно обсуждаемое занятие является второй частью цикла, посвященного приближенным методам в квантовой механике). Намечается общая цель предстоящих расчетов и отмечается умышленная простота рассматриваемого конкретного примера. Обрисовывается общий ход рассуждений. Подчеркивается отличие данного метода от вариационного и отмечается сходство некоторых деталей.

Кратко о содержании материала занятия.

Задается гамильтониан изучаемой системы:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}.$$

Используем тот факт, что энергия основного состояния системы равна среднему значению гамильтониана в этом состоянии (заметив попутно, что это же, разумеется, относится и к любому другому уровню энергии и соответствующему стационарному состоянию):

$$E_0 = < H >_0 = \frac{1}{2m} < p^2 >_0 + \frac{m\omega^2}{2} < x^2 >_0 .$$

Далее замечаем, что средние значения квадратов импульса и координаты непосредственно связаны с неопределенностями (дисперсиями) этих величин, поскольку средние значения импульса и координаты в любых стационарных состояниях нашей системы равны нулю:

$$D_p = < p^2 > - < p >^2 = < p^2 >; \; D_x = < x^2 > - < x >^2 = < x^2 > .$$

Это вытекает как из общих физических соображений (нет общего смещения системы, симметрия поля), так и непосредственно из теорем Эренфеста:

$$< p > = m\frac{d}{dt} < x > \Rightarrow < p > = 0 ;$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -m\omega^2 < x > \Rightarrow < x >= 0 \,.$$

Таким образом, получаем два соотношения

$$D_p D_x \geq \frac{\hbar^2}{4} \,;$$

$$E_0 = \frac{D_p^0}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} D_x^0 \,.$$

Исключение одной из дисперсий приводит к неравенству

$$E_0 \geq \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{D_x^0} + \frac{m\omega^2}{2} D_x^0 \,.$$

В этом месте желательно обратить внимание на прием, заключающийся в том, что изучаемая величина (энергия) выражена через другую неизвестную характеристику движения (дисперсию координаты, например), и хотя ни состояние, ни дисперсия нам не известны, тем не менее, достаточно как-то выразить энергию через дисперсию, чтобы получить общую информацию или количественную оценку.

Дальнейшие шаги связаны с математическим свойством полученной функции от дисперсии, введя вспомогательные коэффициенты A и B :

$$A/D_x^0 + BD_x^0 \geq (A/D_x^0 + BD_x^0)_{\min} =$$

$$= 2\sqrt{AB} \Rightarrow$$

$$E_0 \geq 2\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m}\frac{m\omega^2}{2}}\,.$$

Здесь можно отметить сходство с процедурой варьирования энергии, где также встречается аналогичная ситуация.

Окончательный ответ имеет форму неравенства, устанавливающего количественную оценку нулевой энергии гармонического осциллятора снизу:

$$E_0 \geq \frac{\hbar\omega}{2}\,.$$

Совместно с полученной ранее оценкой сверху (на основе вариационного метода) имеем соотношение в виде двустороннего неравенства $\frac{\hbar\omega}{2} \leq E_0 \leq \frac{\hbar\omega}{2}$.

Отсюда делаем вывод о точном значении энергии нулевых колебаний гармонического осциллятора:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\,.$$

В заключение следует отметить, что столь простой и точный ответ достигнут только благодаря особому свойству нулевых колебаний гармонического осциллятора (минимизация соотношения неопределенностей), с одной стороны, и подходящему выбору пробных функций в вариационной оценке, с другой стороны. В более сложных задачах, конечно, нельзя надеяться на подобную «узкую вилку», однако при удачном выборе способа действий можно получить достаточно хорошие количественные результаты. Кроме того, есть возможность еще раз отметить те методические моменты, которые встретились в данной задаче, упомянуть другие приближенные методы (в том числе и разработанные специальные методы разного рода вариационных оценок и других аппроксимаций).

В качестве задания для самостоятельной работы целесообразно предложить аналогичную задачу для четверного осциллятора, гамильтониан которого запишем в виде

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \beta\hat{x}^4 .$$

При этом желательно сопоставить результаты различных методов оценки энергии нулевых колебаний этой ангармонической системы: как вариационного и квазиклассического, так и на основе соотношения неопределенностей.

В случае вариационного подхода в первом приближении можно ограничиться пробной однопараметрической функцией гауссова вида (как в примере с гармоническим осциллятором), а затем использовать болем гибкую структуру с двумя параметрами.

В квазиклассическом подходе можно сравнить результаты первого и второго приближений в правилах квантования Бора-Зоммерфельда.

В случае применения соотношения неопределенностей использовать дополнительно, что

$$\overline{x^4} \geq \left(\overline{x^2}\right)^2 .$$

Во всех случаях опираться на полученное численными методами значение основного уровня энергии

$$E_0 = \frac{\hbar^{4/3}\beta^{1/3}}{(2m)^{2/3}} 1.060362... \, .$$

В группе теоретиков целесообразно разобрать один прием двусторонних оценок энергии основного состояния, связанный с теорией стационарных возмущений и также использующий усреднения по собственному состоянию данной величины (энергии), хотя и неизвестному, и по известному состоянию, но не являющемуся, вообще говоря, собственным. При этом для системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1,$$

где первое слагаемое отвечает известной (модельной, невозмущенной, хорошо изученной достаточно простой) системе, а второе – учитывает отличие реальной системы от модельной аппроксимации, получаем двустороннее неравенство в виде

$$E_0^0 + < H_1 >_0 \le E_0 \le E_0^0 + < H_1 >_0^0 .$$

Здесь E_0 – энергия нулевых колебаний изучаемой системы, E_0^0 – аналогичная известная величина для модели, а $< H_1 >_0^0$ и $< H_1 >_0$ – соответственно средние значения «возмущения» в основном модельном и реальном состояниях. Следует особо отметить, что последняя величина не может быть вычислена явно, но часто удается продолжить оценочные неравенства, используя какие-то конкретные конструктивные особенности этого вклада в гамильтониан или свойства всей системы в целом, вытекающие из самых общих представлений об этой системе (симметрия и т. п.).

Д О П О Л Н Е Н И Е

К пособию прилагается компакт-диск, на котором содержатся электронные версии некоторых книг автора по квантовой теории (файлы формата pdf).

1. Ульянов В.В. Задачи по квантовой механике и квантовой статистике. - Х.: Высш. шк., 1980. - 216 с.
2. Ульянов В.В. Интегральные методы в квантовой механике. - Х.: Высш. шк., 1982. - 160 с.
3. Ульянов В.В. Методы квантовой кинетики. - Х.: Высш.шк., 1987. - 144 с.
4. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 1-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2002. - 40 с.
5. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 2-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2002. - 28 с.
6. Ульянов В.В. Вступ до квантової кінетики. - Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2004. - 164 с.
7. Василевская Ю.В., Ульянов В.В. Новые квазиточнорешаемые модели в квантовой теории спиновых систем. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2005. - 124 с.
8. Ульянов В.В. Конспект вводных лекций по квантовой механике. Часть 3-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 52 с.
9. Ульянов В.В. Конспект вводных лекций по квантовой механике. Часть 4-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 52 с.
10. Ульянов В.В. Конспект лекций по квантовой статистике. Часть 1-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 40 с.
11. Ульянов В.В. Конспект лекций по квантовой статистике. Часть 2-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 40 с.
12. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 1-я. 2-е изд., доп. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 48 с.
13. Ульянов В.В. Вводные лекции по квантовой механике. Часть 2-я. 2-е изд., доп. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 48 с.
14. Ульянов В.В. Лекции по квантовой механике. Часть 5-я. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2011. - 44 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

От автора 3

Канонические преобразования 5

Конкретные примеры канонических преобразований 10

Обобщенное соотношение неопределенностей. 23

Оценка энергии нулевых колебаний с помощью

соотношения неопределенностей 31

Дополнение 38

В конце книжки приведены списки четырех серий изданий кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица к 200-летию нашего Университета (вклад Ульяновых).

Навчальне видання

Володимир Володимирович Ульянов
ЛЕКЦІЇ З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ
Частина п′ята

Навчальний посібник

Російською мовою

Відповідальний за випуск Г.І.Рашба

Підп. до друку 10.07.2011. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк ризографічний.
Умов. друк. арк. 2,3 . Тираж 50 пр. Ціна договірна.

Надруковано з готових оригінал-макетів у друкарні ФОП “Азамаєв В.Р.”
Свідоцтво про державну реєстрацію ВО2 № 229278 від 25.11.1998 р.
Свідоцтво про внесення суб’єкта визначеної справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ХК № 135 від 23.02.05 р.
м.Харків, вул. Познанська 6, к. 84 тел. 8(057) 362-01-52

Издания кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица (вклад Ульяновых)

К 200-летию Харьковского университета

Серия монографий и учебных пособий

1. В.В.Ульянов. ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ КІНЕТИКИ. – 2004.
2. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов
НОВЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ. – 2005.
3. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов
ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ(+CD). – 2005.
4. А.В.Лымарь, В.В.Ульянов. ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ. Ч. 2 (+CD). – 2010.
5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. Сост. В.В.Ульянов. – 2009.
6. В.В.Ульянов. О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ. – 2002.

7,8. В.В.Ульянов, Н.В.Ульянов. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ. Ч. 1, 2 (+CD). – 2011, 2012.

9,10,11,12. В.В.Ульянов. ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. 1, 2, 3, 4. – 2002, 2011.

13,14. В.В.Ульянов. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ. Ч. 1, 2. – 2011.

15,16. В.В.Ульянов. ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. 1, 2. Изд. 2-е, доп. – 2011.

17. В.В.Ульянов. ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. 5. – 2011.

18,19. В.В.Ульянов. СБОРНИК ОБЗОРОВ И СТАТЕЙ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. Ч. 1, 2. – 2011.

20. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 1. – 2003.
21. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 2. – 2003.
22. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 3. – 2004.
23. А.М.Ермолаев, Н.В.Ульянов. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ ПРОВОДНИКАХ С ПРИМЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ЭЛЕКТРОНОВ. – 2006.
24. A.M.Ermolaev, N.V.Ulyanov. ELECTRON SPIN WAVES IN NONMAGNETIC CONDUCTORS WITH RESONANCE STATES OF ELECTRONS. – 2008.
25. О.М.Єрмолаєв, В.В.Ульянов. СТИСЛИЙ НАРИС ІСТОРІЇ КАФЕДРИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМЕНІ АКАДЕМІКА І.М.ЛІФШИЦЯ. – 2008.

К 200-летию Харьковского университета

Серия воспоминаний об ученых-физиках

1. В.В.Ульянов
   И Л Ь Я М И Х А Й Л О В И Ч Л И Ф Ш И Ц. – 2001,2007(+DVD).
2. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   М О И С Е Й И С А А К О В И Ч К А Г А Н О В. – 2001.
3. В.В.Ульянов. ЛЕВ ЭЛЕАЗАРОВИЧ ПАРГАМАНИК. – 2002.
4. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
   Л Е О Н И Д С Т Е П А Н О В И Ч Г У Л И Д А. – 2002.
5. В.В.Ульянов
   Б О Р И С И Е Р Е М И Е В И Ч В Е Р К И Н. – 2002.
6. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   А Р Н О Л Ь Д М А Р К О В И Ч К О С Е В И Ч. – 2002.
7. В.В.Ульянов
   В И К Т О Р М О И С Е Е В И Ч Ц У К Е Р Н И К. – 2002.
8. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   ВАЛЕНТИН ГРИГОРЬЕВИЧ П Е С Ч А Н С К И Й. 2002.
9. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   Э М А Н У И Л А Й З И К О В И Ч К А Н Е Р. – 2002.
10. А.М.Ермолаев, Ю.П.Степановский, В.В.Ульянов
    А Л Е К С А Н Д Р И Л Ь И Ч А Х И Е З Е Р. – 2002.
11. В.В.Ульянов
    АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ Ж Е Л Е Х О В С К И Й. – 2003.
12. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
    В Л А Д И М И Р П Е Т Р О В И Ч Г А Л А Й К О. – 2003.
13. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
    И Г О Р Ь И В А Н О В И Ч Ф А Л Ь К О. – 2003.
14. Г.И.Рашба, В.В.Ульянов
    АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ Е Р М О Л А Е В. –2003.
15.
16. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
    О Л Е Г И В А Н О В И Ч Л Ю Б И М О В. – 2005.
17. В.В.Ульянов. Л А Н Д А У В Х А Р Ь К О В Е. – 2008.
18. В.В.Ульянов. ВОСПОМИНАНИЯ ФИЗИКА-ТЕОРЕТИКА. Ч.1. – 2008.
19. В.В.Ульянов. К 95-ЛЕТИЮ Л.Э.ПАРГАМАНИКА. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ЛАНДАУ В ХАРЬКОВЕ (2-е изд., доп.). – 2010.
21. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов. М.И.КАГАНОВ В ХГУ. – 2011.
22. В.В.Ульянов. К 90-ЛЕТИЮ М.И.Каганова. – 2011 (CD).
23. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов. В.Г.ПЕСЧАНСКИЙ НА ТЕОРКАФЕДРЕ. – 2011.
24. В.В.Ульянов. К 80-ЛЕТИЮ В.Г.ПЕСЧАНСКОГО. – 2011 (CD).

К 200-летию Харьковского университета

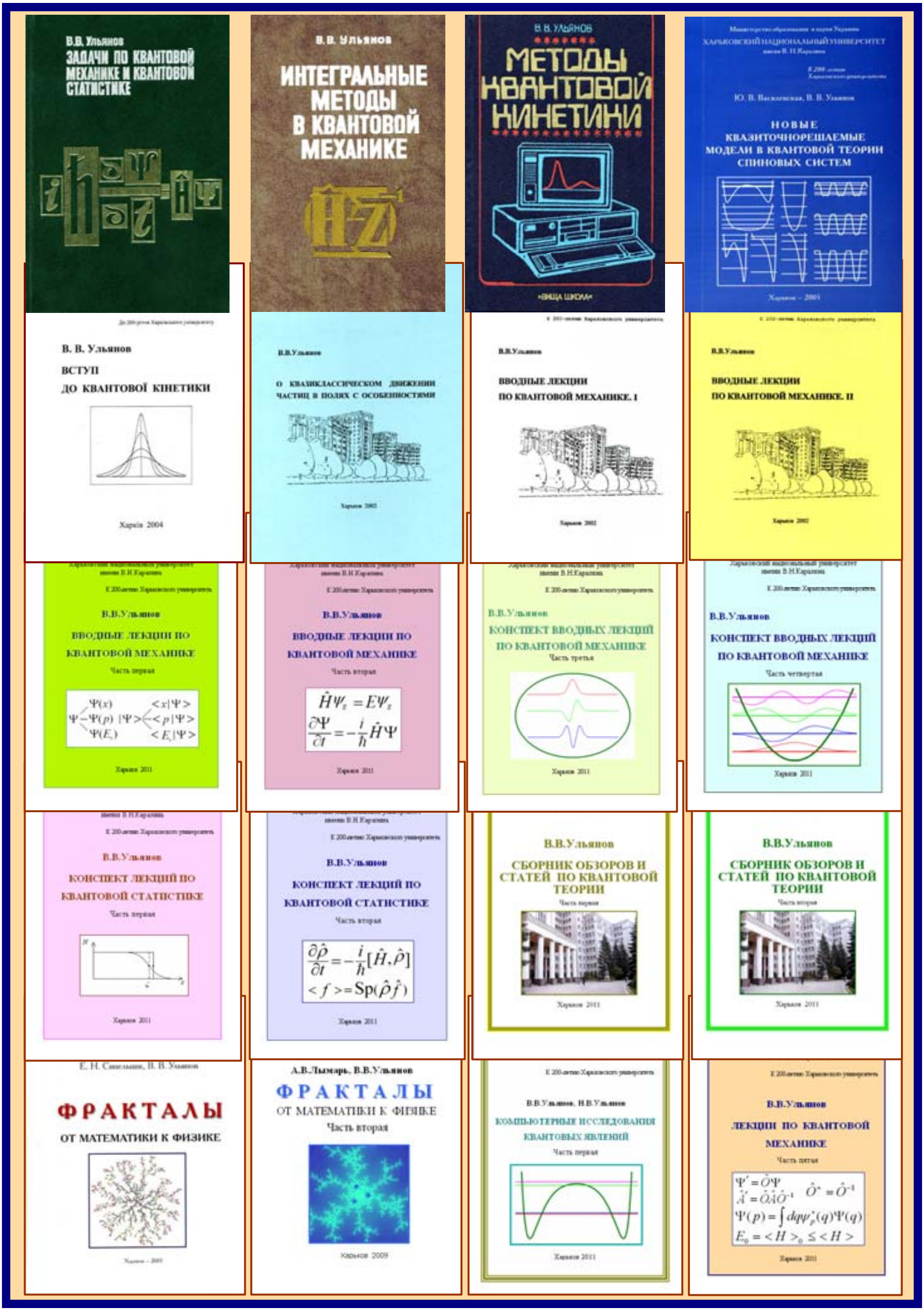
Серия воспоминаний о Детях физмата

1. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ ШАРАПОВ. – 2002, 2007.
2. В.В.Ульянов. Н А У Н И В Е Р С И Т Е Т С К О Й. – 2002, 2007.
3. В.В.Ульянов. А Н А Т О Л И Й Г А В Р И Л О В И Ч К Л А Д К О В О Й (М о й д р у г Т о л ь к а). – 2002, 2007(CD).
4. ЛЕГЕНДЫ И БЫЛИ СТАРОГО ФИЗМАТА
   Ч.I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Дзюба А.С., Перваков В.А., Сизова З.И., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2002.
   Ч. I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Гапон Э.В, Иванов И.Г., Кондратьев Б.В., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Хижковый В.П., Шарапов А.И. - 2002.
   Ч.I I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Козинец В.В., Кондратьев Б.В., Николаев Г.Т., Ульянов В.В.,Шарапов А.И.- 2002.
   Ч.IV. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2002.
   Ч.V. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Валиев Б.М., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Сизова З.И., Ульянов В.В. - 2002.
   Ч.VI. Сборник рассказов. Барьяхтар В.Г., Гребенник И.П., Креснин А.А., Манжелий В.Г., Пустовалов В.В., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.VII. Сборник стихов. Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2003.
   Ч.VIII. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.IX. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003..
   Ч.X. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Ульянов В.В., Хижковый В.П., Яцук К.П. - 2003.
   Ч.XI. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2003.
   Ч.XII. Сборник рассказов. Боярский Л.А., Гребенник И.П., Малеев В.Я., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2004.
   Ч.XIII. Сборник рассказов. Ковинько Н.М., Мазель Е.З., Ривкина Э.М., Розенберг В.Я., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2008.
   Ч.XIV. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Евланов М.В., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Таранова Г.М., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2009.
   Ч.XV. Сборник рассказов. Креснин А.А., Ульянов В.В., Федченко Л.Ю., Хайтман Е.Н., Яровая Р.Г. - 2009.
   Ч.XVI. Сборник рассказов. Рофе-Бекетов Ф.С., Татарченко Л.П., Ульянов В.В. – 2009.
5. В.В.Ульянов. КАК МЫ ПРАЗДНОВАЛИ 50-ЛЕТИЕ ОКОНЧАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА (+CD). – 2007.

К 200-летию Харьковского университета

Серия воспоминаний о жизни в XX веке

1. В.В.Ульянов. Д О В О Й Н Ы (1934-1941). – 2002.
2. В.В.Ульянов. В О Е Н Н Ы Е Г О Д Ы (1941-1945). – 2002.
3. В.В.Ульянов. В Ш К О Л Е (1945-1952). – 2002.
4. В.В.Ульянов
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1934-1950). – 2003.
5. В.В.Ульянов
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1951-1954). – 2003.
6. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1955-1957). – 2003.
7. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
   Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1958-1961). – 2003.
8. В.В.Ульянов. Д В А Д Н Я В А Л У Ш Т Е. – 2003.
   (Волейбольные грёзы)
9. В.В.Ульянов. Д В А Д Ц А Т Ы Й Д О М. – 2003.
10. В.В.Ульянов. 5 0 Л Е Т С П У С Т Я. – 2003.
11. В.А.Ульянов
    ВОСПОМИНАНИЯ ДЕТСТВА И ЮНОСТИ. – 2003.
12. В.А.Ульянов. МОЯ ПОЕЗДКА В США И ОБРАТНО. – 2003.
13. В.А.Ульянов. С Т Р А Н И Ч К И Ж И З Н И. – 2003.
14. В.В.Ульянов
    Р О Д О С Л О В Н А Я Н А Ш Е Й С Е М Ь И. – 2004.
15. В.В.Ульянов. П О Л В Е К А В У Н И В Е Р С И Т Е Т Е. – 2004.
16. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
    Р А С С К А З Ы О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1962-1967)+CD. – 2006.
17. В.В.Ульянов.ПОЛВЕКА В УНИВЕРСИТЕТЕ(2-е изд., доп.).–2007.
18. В.В.Ульянов. ВИКТОР ЕВГЕНЬЕВИЧ РУБАНОВИЧ(+CD).– 2008.
19. В.В.Ульянов. НОВОЕ О ПУШКИНЕ И ГОГОЛЕ. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ИЗДАНИЯ. ВЫСТАВКА КНИГ. – 2009 (CD).
21. Н.В. и И.П.Ульяновы. ЧЕРНОГОРИЯ. ИЮЛЬ 2009. – 2009 (CD).
22. Н.В.Ульянов, И.П.Ульянова. ПО ЮГУ ЕВРОПЫ. – 2009 (CD).
23. В.В.Ульянов. К 150-ЛЕТИЮ А.П.ЧЕХОВА. – 2010 (CD).
24. В.В.Ульянов. К 170-ЛЕТИЮ П.И.ЧАЙКОВСКОГО. – 2010 (CD).
25. Н.В. и И.П.Ульяновы. БОЛГАРИЯ И РУМЫНИЯ. – 2010 (CD).
26. В.В. и Н.В.Ульяновы. МИСХОР – АВГУСТ 2010. – 2010 (CD).
27. В.В.Ульянов. К 110-летию В.А.Ульянова.Рисунки отца.–2011(CD).
28. В.В.Ульянов.АНАТОЛИЙ ПАВЛОВИЧ ЗАВАЛИШИН.–2011(CD).
29. В.В. и Н.В.Ульяновы. МИСХОР – ИЮЛЬ 2011. – 2011(CD).
30. В.В.Ульянов. МОЯ МУЗЫКАЛЬНАЯ ИСТОРИЯ (+DVD). – 2011.
31. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова. Р А С С К А З Ы О Л Е Т Н Е М О Т Д Ы Х Е (1968-1973) (+DVD). – 2011.
32. В.В.Ульянов. ВОСПОМИНАНИЯ ФИЗИКА-ТЕОРЕТИКА. Ч.2. – 2012.


В.В. Ульянов
ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ
В.В. Ульянов
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
В.В. УЛЬЯНОВ
МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ КИНЕТИКИ
«ВИЩА ШКОЛА»
Ю. В. Васкевская, В. В. Ульянов
НОВЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ
В. В. Ульянов
ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ КІНЕТИКИ
Харків 2004
В.В.Ульянов
О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ
В.В.Ульянов
ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. I
Харьков 2002
В.В.Ульянов
ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. II
Харьков 2002
В.В.Ульянов
ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
Часть первая
Харьков 2011
В.В.Ульянов
ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
Часть вторая
Харьков 2011
В.В.Ульянов
КОНСПЕКТ ВВОДНЫХ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
Часть третья
Харьков 2011
В.В.Ульянов
КОНСПЕКТ ВВОДНЫХ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
Часть четвертая
Харьков 2011
В.В.Ульянов
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ
Часть первая
Харьков 2011
В.В.Ульянов
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ
Часть вторая
Харьков 2011
В.В.Ульянов
СБОРНИК ОБЗОРОВ И СТАТЕЙ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
Часть первая
Харьков 2011
В.В.Ульянов
СБОРНИК ОБЗОРОВ И СТАТЕЙ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
Часть вторая
Харьков 2011
ФРАКТАЛЫ
ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ
А.В.Лымарь, В.В.Ульянов
ФРАКТАЛЫ
ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ
Часть вторая
Харьков 2009
В.В.Ульянов, Н.В.Ульянов
КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ
Часть первая
Харьков 2011
В.В.Ульянов
ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
Часть пятая
Харьков 2011