



**GRAU EN ÒPTICA I OPTOMETRIA**

**TREBALL FINAL DE GRAU**

---

**SIMULACIÓ DEL TRAÇAT DE RAIGS DE LES IMATGES  
DIÒPTRIQUES DE L'ULL TEÒRIC SOTA DIFERENTS SITUACIONS**

**DANIEL PARRA LÓPEZ**

DIRECTORA  
Montserrat Tàpias Anton  
DEPARTAMENT  
Òptica i Optometria

30/06/2015



## GRAU EN ÒPTICA I OPTOMETRIA

La Sra. Montserrat Tàpias Anton, com a directora del treball

### CERTIFICA

Que el Sr./Sra. Daniel Parra López ha realitzat sota la seva supervisió el treball *Simulació del traçat de raigs de les imatges diòptriques de l'ull teòric sota diferents situacions* que es recull en aquesta memòria per optar al títol de grau en Òptica i Optometria.

I per a què consti, signo aquest certificat.

Sra. Montserrat Tàpias Anton  
Directora del treball

Terrassa, 15 de juny de 2015



## GRAU EN ÒPTICA I OPTOMETRIA

# SIMULACIÓ DEL TRAÇAT DE RAIGS DE LES IMATGES DIÒPTRIQUES DE L'ULL TEÒRIC SOTA DIFERENTS SITUACIONS

### RESUM

Quan es volen estudiar les imatges formades per l'ull s'utilitza molt habitualment l'ull teòric o esquemàtic. Lo que proporciona aquest mètode és una representació del funcionament visual de l'ull sota les anomenades característiques paraxials.

Les imatges més estudiades ja sigui per les seves condicions o per les seves aplicacions clíniques han estat, per exemple, les de Purkinje o les imatges retinals i s'han deixat de banda altres tipus d'imatges formades per el mateix ull com són les imatges diòptriques.

En aquest treball i amb l'ajuda d'un ull esquemàtic i el programa de traçat de rajos Beam 4 hem volgut representar les imatges diòptriques tal com haurien de ser teòricament i ho hem comprovat mitjançant les tècniques dites. Si es cert que aquestes imatges no tenen tanta importància clínica com si la tenen les seves companyes, les imatges de Purkinje, però pel sol fet que la quarta imatge diòptrica és la que ha de coincidir amb la retina i, per tant, segons on caigui aquesta imatge tindrem un ull amb una ametropia ja es significatiu de veure-ho representat. També cal dir que la representació de les quatre imatges diòptriques és una cosa que no s'ha fet i hem volgut precisament fer això, donar el pas de tenir-les representades totes elles en diferents esquemes.

Una altra activitat que hem fet, a més a més de la representació d'aquestes imatges en un ull "nu" ha estat posar diferents lents oftàlmiques per tal de veure com es comporten aquestes imatges i comparar-les entre elles.

Com s'ha dit totes aquestes representacions s'han representat en diferents esquemes i s'ha pogut comprovar de manera experimental la teoria existent sobre aquestes imatges.



## GRAU EN ÒPTICA I OPTOMETRIA

# SIMULACIÓN DEL TRAZADO DE RAYOS DE LAS IMÁGENES DIOPTRICAS DEL OJO TEÓRICO EN DIFERENTES SITUACIONES

### RESUMEN

Cuando se quieren estudiar las imágenes formadas por el ojo se utiliza muy habitualmente el ojo teórico o esquemático. Lo que proporciona este método es una representación del funcionamiento visual del ojo bajo las llamadas características paraxiales.

Las imágenes más estudiadas ya sea por sus condiciones o por sus aplicaciones clínicas han sido, por ejemplo, las de Purkinje o las retinales y se han dejado de lado otros tipos de imágenes formadas por el mismo ojo como lo son las imágenes dióptricas.

En este trabajo y con la ayuda de un ojo esquemático y el programa de trazado de rayos Beam 4 hemos querido representar las imágenes dióptricas tal como deberían ser teóricamente y lo hemos comprobado mediante las técnicas dichas. Si es cierto que estas imágenes no tienen tanta importancia clínica como si la tienen sus compañeras, las imágenes de Purkinje, pero por el solo hecho de que la cuarta imagen dióptrica es la que debe coincidir con la retina y, por tanto, según donde caiga dicha imagen tendremos un ojo con una ametropía ya es significativo de verlo representado. También hay que decir que la representación de las cuatro imágenes dióptricas es algo que no se ha hecho y hemos querido precisamente hacer eso, dar el paso de tenerlas representadas todas ellas en diferentes esquemas.

Otra actividad que hemos llevado a cabo, además de la representación de estas imágenes en un ojo “desnudo”, ha sido la de poner diferentes lentes oftálmicas para ver cómo se comportan estas imágenes y compararlas entre ellas.

Como se ha dicho todas estas representaciones se han presentado en diferentes esquemas y se ha podido comprobar de forma experimental la teoría existente sobre estas imágenes.



## GRAU EN OPTICA I OPTOMETRIA

# SIMULATION OF DIOPTRIC IMAGE'S RAY TRACING IN THEORETICAL EYE UNDER DIFFERENT SITUATIONS

### ABSTRACT

When you want to study the images formed by the eye is very commonly used the theoretical or schematic eye. What this method provides a representation of the visual functioning of the eye under the paraxial characteristics.

As stated above, the images most studied either by its terms or their clinical applications have been, for example, the Purkinje or retinal's image and have neglected other types of images formed by the same eye like the diopter images.

In this final thesis and with the help of a schematic eye and a ray tracing program called Beam 4 we wanted to represent the diopter images as they should be theoretically and we have demonstrated through such techniques. If it is true that these images do not have much clinical significance as if they have their partners, Purkinje images, but by the mere fact that the fourth diopter image is the one must match the retina and, therefore, according to where it falls that image will have an eye with a refractive error is already seeing significant represented. We must also say that the representation of the four diopter images is something that has not been done and we wanted to do just that, take the step of having them all represented in different schemes.

Another activity that we conducted along the representation of these images in a "naked" eye, has been to put different ophthalmic lenses to see how these images are and see the differences.

As mentioned all these representations have been presented in different schemes and has been shown experimentally existing theory about these images.

## Sumari

<b>1. Abstract</b> .....	7
<b>2. Introducció i objectius</b> .....	10
<b>3. Marc teòric</b> .....	11
3.1 Imatges formades per l'ull .....	11
3.1.1 Imatges per reflexió i refracció.....	11
3.1.2 Imatges retinals.....	12
3.1.3 Imatges entòptiques.....	13
3.2 Ull teòric.....	13
3.2.1 Ull reduït.....	14
3.2.2 Ull de Le Grand.....	15
3.2.3 Ull de Gullstrand.....	16
3.3 Diàmetre Pupilar .....	17
3.4 Càlcul de les imatges diòptriques .....	22
3.5 Paràmetres de les lents oftàlmiques.....	26
<b>4. Mètode experimental</b> .....	30
4.1 Representació gràfica de les imatges diòptriques amb el Beam4.....	35
4.2 Representació gràfica de la quarta imatge diòptrica amb lents oftàlmiques.....	46
<b>5. Conclusions</b> .....	56
<b>6. Bibliografia</b> .....	57
<b>7. Annexes</b> .....	58

## Agraïments

Primer de tot agrair a la meva tutora Montserrat Tàpias Anton per donar-me l'oportunitat de treballar i dur a terme aquest projecte de final de carrera i per la seva ajuda en tot moment quan tenia dubtes pendents.

Agrair també el suport tant moral com econòmic de la meva família al llarg de tota la carrera en especial als meus pares i a la meva germana per aguantar-me en moments de molt estrés.

Donar les gràcies al meu millor amic i al meu cosí per aquelles tardes i nits de distracció que ajudaven a desconnectar dels nervis de la feina.

També a tots els meus amics en general que sempre m'han donat moments d'alegria i diversió i que sempre m'han donat suport i ànims.

Finalment menció especial als meus antics companys de pis per ajudar-me tan al llarg de tota la carrera a superar dificultats en les assignatures.

Molt agraït a tots.

## 1. Abstract

The purpose of this project are, firstly, represent the four dioptric images formed by refraction in the theoretic eye of Le Grand in schemes draw up with the help of ray tracing program called Beam 4 and developed by Stellar Software and to use these drawings as an illustrative tool for students of the Optica Visual subject. The secondly purpose would be represent the fourth dioptric image in four eyes with refractive error eye lens before neutralizing each with different powers and index, and determinate the position and curvature, as well as the asphericity, each of the retinas under this different ametropys.

First we took the data from the eye of Le Grand and we used to configure The Beam4 our theoretical eye where represent the four dioptric images, but we wanted to get a eye as real as possible and it is why we documented ourselves on the average pupilars exact diameters that are most commonly in normal eyes. We seek this information in an article called *A unified formula for light-adapted pupil size* by Andrew B. Watson and John I. Yellott. This article proposed the design of a unified formula for calculating the diameter's pupil from several formulas by earlier authors, the result was a diameter's pupil of 3 mm since all the formulas were around this value. Once we had configured the eye what he did was to calculate the position of the pupil's entrance of the eye and doing through trigonometry finding the heights that passed through the middle of the pupil's entrance of the eye under five different inclinations:  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$  and  $20^\circ$ . Never exceeding twenty degrees because we are all under paraxial's condition.

Once this datas was founded we had determinate manually with the Beam4 program the two extreme rays coming through the ends of the entrance pupil and repeat the process for each beam tilt each obtaining the final total fifteen rays ( three rays entering each inclination). Then we proceeded to go varying refracting index so that the dioptric images was formed by thee refraction of the different surfaces of the theoretical eye and thus representing all of them. Once we had all of the dioptrica images we could calculate the curvature and position of a retina in one eye emmetrop resulting in a eye 24.197 mm lenght and the retina's curvature -9.7847 mm. To find this information what he did was take all the cutoffs of fifteen rays of the fourth dioptric image, make half and thus represent the retina with the help of Microsoft Programm called excel.

In fact the first objective of this project was fulfilled, remember this objective was basically representing each of the four dioptric images into the theoretal Le Grand's eye.

Then we spend working on accomplish the second objective which involves placing various ophthalmic lenses in front of eyes with different characteristics. Selecting the lenses that were to carry out the objective was the following: +6.00 lens with a refractive index 1.523, a +1.00D lens with an index of 1.7, a -7.50D lens with a



refractive index 1.523 and finally a -5.00D lens with a refractive index 1.7. The first step was carried out to characterize these lenses in Beam4 was to calculate all optical parameters (curvatures, thicknesses, powers) and all of the physiological parameters as a unit with the eye (points of the main plans connection, the eye's remot point and the position of the new pupil entrance). To accomplish all functions were some conditions such as the eye's remote point position had to match with the power of the lens account the distance between the lens and eye. Once enter the data into the program Beam4 we determined, again, the new heights of the rays that enter through the news entrance pupil calculated to trigonometry. The position of the new entry pupil is now measured by the distance that exists between the former's entrance pupil and the main image plane of the lens, thus obtained new heights to fulfill the requirement of passing the entrance pupil of each eye. Once we enter all the configuration data is represented in the program Beam4 fourth dioptric image for each of the four eyes giving an idea of where the retina was, as we know, the fourth dioptric image is matches on the retina when the eye is properly neutralized with lenses.

Once represented the fourth dioptric image we noticed the final X column of the Rays table in Beam4 and we took those values which were crossed rays, previously we had to put a final plan to find these values, then with the help of excel we find the middle intersection's point of each ray beam (remember who threw three beams for each of the five meetings inclinations with heights so that it complies the condition that these rays pass across the entrance'es pupil). Once we had the crossing midpoints what he did was put the question on curvature and asphericity of the retina's eye and create a column in the Rays table called X goal where we put those values found with excel and the use the Beam4 option called auto adjust and program itself reveals the curvature and asphericity of the retina's eye in which we were working.

The results were satisfactory since they fit very well in the dioptric image theory and the axial ametrophys theory. The dioptric images theory by calculations indicate that the fourth dioptric image coincides with the retina's position in a emmetropic eye then we would have the first, second and third dioptric images. The first and the third dioptric images are formed very close in the same area and the second dioptric image is the most be far away respect for the other three. So the results with Beam4 and the excel calculations of the position and sizes of these images showed a total coincidence with dioptric images calculations according the theory. We obtained the position of the fourth dioptric image on 44.197mm, the first dioptric image formed on 48.241mm with respect the origin( about 5mm beyond the fourth dioptric image), the third dioptric image was formed on 48.737mm ( the first and the third are separated by a distance less than 1 mm, and the third is on a position farthest the fourth) and finally the second dioptric image was formed on 51.241 mm regarding the origin ( as seen is the farthest difference between the previous one that corroborates the theory).

Then the position's retina results knowing that the fourth's dioptric image be formed on the retina with different lenses in neutralizing ametrop eyes with refractive error were the following:

The eye with more negative power was like and eye 3 mm larger than the emetropic eye and with less curvature due to the size of the eye, the results were specifically a located retina on 46.717 mm with curvature of -12.35 mm ( remember that the retina's position of the emetropic eye was 43.923 mm and its curvature was -9.78mm). The eye with the lens of -5.00D gave values between the previous two eyes as expected. About hipermetropic eyes: the eye with more positive power proved to be an eye about 2 mm smaller and a big curvature as a result of the smaller size ( the values were

41.763 mm to position and curvature was -9.00 mm). Results for lens of +1.00D gave intermediate values between the emetropic eye nad the eye with power +6.00D as expected.

Ultimately the results were expected in all cases and therefore could see and more visually verify the theoretical's base on these images. In the future it could carry out a similar project but now putting toric lenses or contact lenses to see how they behave outcomes.

## 2. Introducció i objectius

Aquest projecte es basarà en les imatges diòptriques formades per l'ull i a través del programa de traçat de rajos Beam4 de Stellar Software les representarem tal com es formen.

El tema de les imatges diòptriques no ha estat massa estudiat perquè no té cap aplicació clínica i s'han deixat una mica de banda aquest tipus d'imatges a diferència de les imatges de Purkinje i es per això que aquest treball té un caràcter més docent que d'investigació.

Per tal d'establir els sistemes òptics que utilitzarem ens basarem en l'ull teòric de LeGrand per tal d'utilitzar mides lo més reals possibles sempre treballant sota el sistema paraxial. També a l'hora de determinar l'obertura de les pupil·les prendrem com a base uns estudis recents (*Andrew B. Watson* i *John I. Yellott, 2012*) sobre la mida de la pupila segons una fórmula unificada dissenyada per aquests autors.

També afegirem lents correctores davant d'ulls ametrops per representar-hi la quarta imatge diòptrica que serà la més reveladora i la que donarà més informació. Per tal d'utilitzar aquestes lents hem utilitzat dades de lents reals com els radis, les sagetes o les potències esferomètriques trobades experimentalment i a partir d'aquí anirem calculant tots els paràmetres òptics d'aquestes lents per així poder-li definir al programa el nostre sistema òptic complet.

Hem plantejat aquests objectius per a aquest projecte:

- La representació de les imatges diòptriques en un ull emmetrop tal com es formen cadascuna d'elles amb les respectives posicions.
- Mostrar els esquemes amb el dibuix de les imatges tal com es formen.
- Posar lents oftàlmiques de diferents potències, i per tant, en ulls amb diferents ametropies i veure la posició i curvatura de la quarta imatge diòptrica i així poder comparar aquestes imatges en els diferents ulls.

### 3. Marc teòric

#### 3.1 Imatges formades per l'ull

Tot i que el treball està enfocat exclusivament a la representació gràfica de les imatges diòptriques cal dir que existeixen altres tipus d'imatges formades per l'ull. En aquest apartat farem un breu comentari a cadascuna d'elles:

Les imatges òptiques que pot formar l'ull estarien classificades dins de dos grans grups:

- Imatges per reflexió i refracció
- Imatges retinals

També existeixen les anomenades imatges entòptiques que serien el resultat de la llum difosa a l'ull o de fenòmens perceptius.

##### 3.1.1 Imatges per reflexió i refracció

Dins d'aquest grup hi trobem tres tipus d'imatges:

- Imatges catòptriques: aquestes imatges serien les formades únicament per reflexió. En altres paraules, les imatges formades per un mirall.
- Imatges catadiòptriques (imatges de Purkinje): aquestes imatges son les formades per reflexió i refracció conjuntament. Se'n diuen imatges de Purkinje perquè van ser descrites per primer cop pel txec Purkinje al 1821. D'imatges de Purkinje n'existeixen 4, una formada per cada superfície refractiva. Aquest tipus d'imatge han estat molt estudiades degut a la gran quantitat d'aplicacions que tenen en la pràctica clínica, un exemple en seria l'estudi de la curvatura de superfícies amb l'ajuda de les imatges de Purkinje ( George Smith i cia, 1994).



**Figura 1. Exemple de la reflexió de les imatges de Purkinje**

- Imatges diòptriques: aquestes imatges son les formades únicament per la refracció de les 4 superfícies refractives i amb les que centrarem la investigació del treball.

Com en el cas de les imatges de Purkinje en trobarem 4, una per cada refracció produïda per les superfícies refractives de l'ull.

Teòricament cada imatge diòptrica es formaria per darrere de la retina sent la quarta coincident amb la retina en un ull emmetrop. En el cas que l'ull fos miop la quarta imatge diòptrica es formaria per davant de la retina i si l'ull fos hipermetrop es formaria per darrere de la retina, aquestes condicions provocarien l'efecte de borrositat en la imatge final.

Les tres imatges diòptriques restants ( primera, segona i tercera ) tenen un caràcter purament docent ja que les imatges, realment, no s'arriben a formar ja que son posteriors a l'ull i no hi ha cap superfície que les arribi a captar.

Més endavant es comentaran els resultats obtinguts amb la representació de les quatre imatges diòptriques en forma d'esquema donada pel programa Beam4 i en parlarem sempre sota un motiu docent per a poder entendre com es formarien aquestes imatges en cas que existís una superfície que les pogués captar.

Aquestes imatges com tenen aquestes característiques no han estat objecte d'estudi ja que no presenten cap aplicació clínica actualment.

### 3.1.2 Imatges retinals

Les imatges retinals son les formades per la intersecció del conus de llum refractada pels dioptrics oculars sobre la retina, en altres paraules, és la imatge final que la retina envia al cervell per la seva interpretació. Com s'ha dit anteriorment en l'ull emmetrop la imatge formada a la retina correspondria amb la quarta imatge diòptrica.

Un cop més senyalar que aquestes imatges poden estar enfocades o desenfocades per l'ull depenent del grau d'ametropia que aquest tingui.

Degut a la importància en el sistema visual de les imatges retinals s'han fet estudis de com poder detectar patologies com la retinopatia, a partir de l'anàlisi de les imatges retinals ( Rony Helman i cia, 2005).

### 3.1.3 Imatges entòptiques

Finalment trobem aquest tipus d'imatges que no estarien considerades com a imatges òptiques pròpiament ja que estan formades per estimulacions no lluminoses.

Dins d'aquest grup es distingeixen 4 tipus:

- Postimatges: provocades pel blanqueig dels fotoreceptors després d'haver mirat una llum intensa que ho hagi provocat.
- Miodesopsies: ombres provocades per restes de teixit embrionari que es troba flotant per l'humor vitri. Comunament son anomenades "mosques volants".
- Fosfens: estimulacions mecàniques dels fotoreceptors que fan percebre taques de llum.
- Halo: provats per llum difosa com a conseqüència d'un edema corneal.

### 3.2 Ull teòric

A l'hora de representar els raigs de llum amb el Beam4 ho farem sobre un esquema d'ull anomenat ull teòric o ull esquemàtic per tal de representar un ull real amb aproximació paraxial.

Per estudiar moltes propietats del sistema ocular es poden construir models d'ulls a partir de paràmetres oculars de la població. Aquests ulls s'anomenen ulls esquemàtics paraxials perquè estan dissenyats sota de les següents condicions:

S'assumeix que les superfícies refractives son esfèriques i centrades sobre un eix comú. Sabem que en els ulls reals les diferents superfícies (còrnia, cristal·lí,...) no son totalment esfèriques i a més a més no es troben sobre un mateix eix òptic (el cristal·lí es troba lleugerament desplaçat i inclinat referit a la còrnia).

En primer lloc tenim que en l'ull real existeixen fins a 8 superfícies de discontinuïtat d'índex de refracció, dues d'elles corresponents a la còrnia i les 6 restants al cristal·lí. Després tenim les condicions de la còrnia, com s'ha dit en l'ull teòric es considera la còrnia totalment esfèrica però la realitat és una altra, rarament aquesta superfície és de revolució: fins i tot la zona òptica presenta curvatures diferents (astigmatisme corneal) (Le Grand, 1965). Situacions similars passen amb el cristal·lí.

En l'ull esquemàtic les superfícies refractives de la còrnia i el cristal·lí son perpendiculars a l'eix òptic i els seus centres de curvatura estan situats sobre d'ell amb una desviació tan petita que es pot menysprear.

Una de les principals aplicacions dels ulls esquemàtics paraxials es preveure algunes propietats dels ulls reals ( potència, focals  $F$   $F'$   $H$   $H'$ , posicions i augments de les pupiles a partir del traçat de raigs).

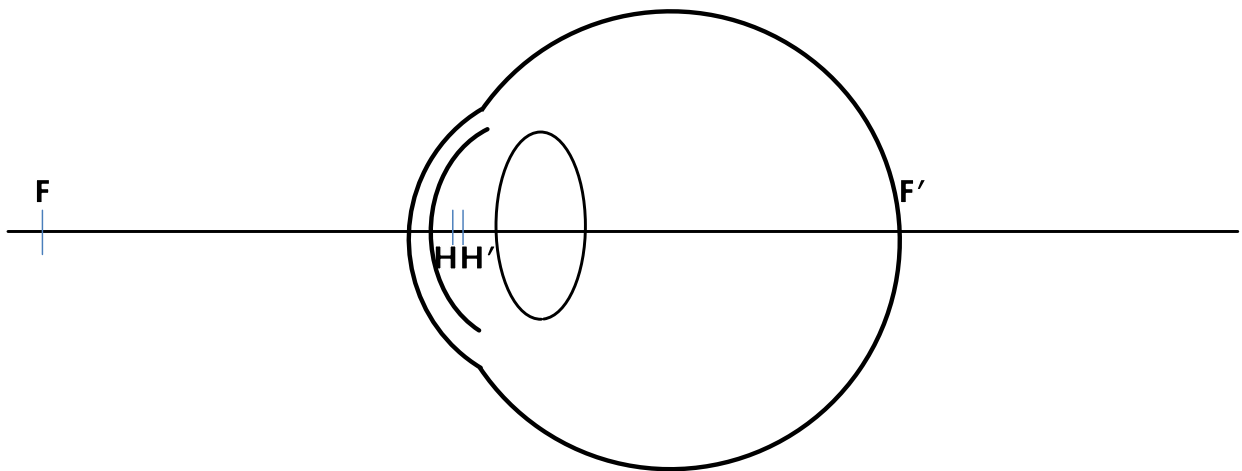


Figura 2. Elements cardinals de l'ull esquemàtic

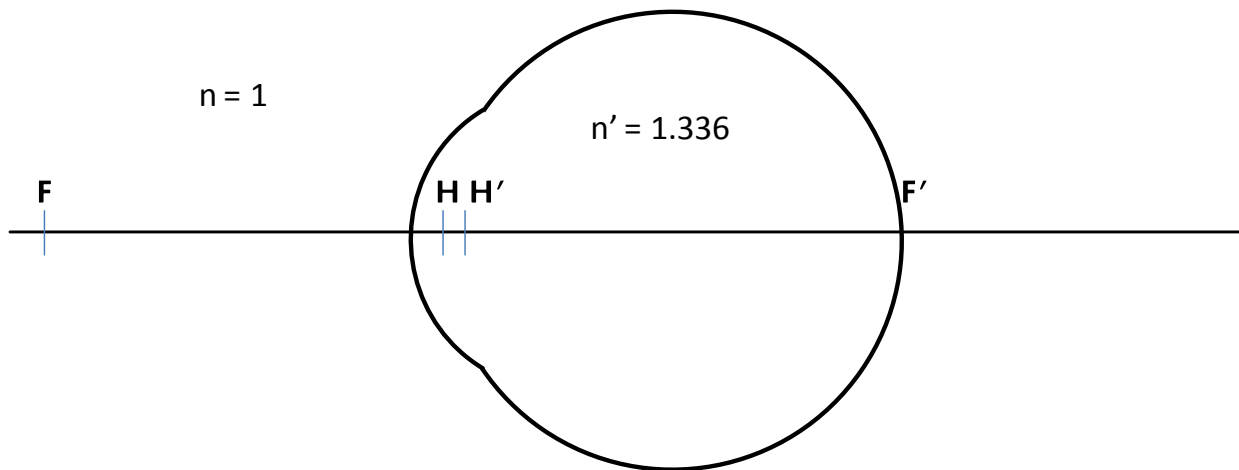
Dins dels ulls teòrics hi ha varis models i maneres de representar-los diferents, a continuació explicarem els models existents:

### 3.2.1 Ull reduït:

En l'ull esquemàtic paraxial els elements principals objecte i imatge i els punts nodals estan tan junts que no suposa una gran alteració substituir cada parell per un punt mig, es a dir, l'ull reduït els considera com un de sol. També es substitueixen les 4 superfícies refractives per una única superfície.

D'aquesta forma s'obté el model d'ull reduït, que encara que estigui molt simplificat descriu adequadament l'òptica de l'ull en el context de l'aproximació paraxial en la majoria de situacions.

En aquest model d'ull s'utilitzaran només l'índex de l'aire (1) i l'índex intern del globus serà de 1.336 ( veure esquema 1.2).



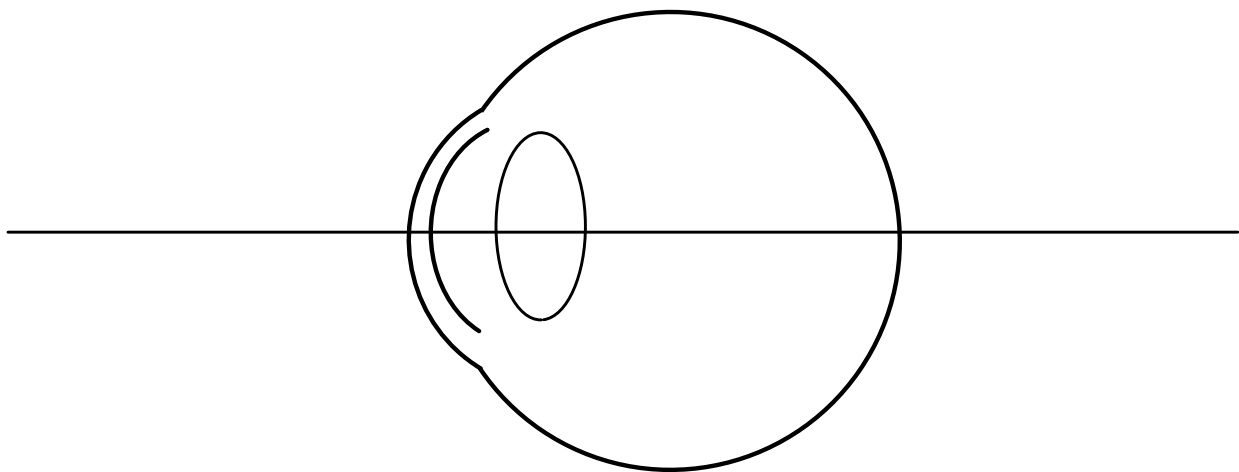
**Figura 3. Model d'ull reduït**

### 3.2.2 Ull de Le Grand i Gullstrand de 4 superfícies:

L'ull de Le Grand seria el model d'ull estàndard i el que utilitzarem principalment en aquest treball.

En aquest ull es representen un total de 4 superfícies que serien: la còrnia anterior en contacte amb l'aire, la còrnia posterior en contacte amb l'humor aquós, la superfície anterior del cristal·lí també en contacte amb l'humor aquós i finalment la superfície posterior del cristal·lí.

Els índex de refracció en aquest ull es distribuïrien de la següent manera: l'índex de l'aire seria 1, l'índex de la còrnia 1.3771 i es trobaria entre la superfície anterior i posterior de la còrnia, l'índex corresponent al humor aquós és de 1.3374, situat entre la superfície posterior de la còrnia i la superfície anterior del cristal·lí, l'índex del cristal·lí seria 1.42 que es situaria entre les dues superfícies de la lent i finalment l'índex de l'humor vitri que seria 1.3360, situat per darrere de la superfície posterior del cristal·lí i fins la retina.



**Figura 4. Posició de les superfícies en l'ull de Le Grand**



### 3.2.3 Ull de Gullstrand original:

Aquest model consta de 6 superfícies refractives. Com en el cas anterior la còrnia estaria composta per una cara anterior i una posterior, però a diferència de l'anterior, el cristal·lí consta d'un total de 4 superfícies que serien la cara anterior i posterior de la càpsula del cristal·lí i, al seu interior, la cara anterior i posterior del nucli de la lent.

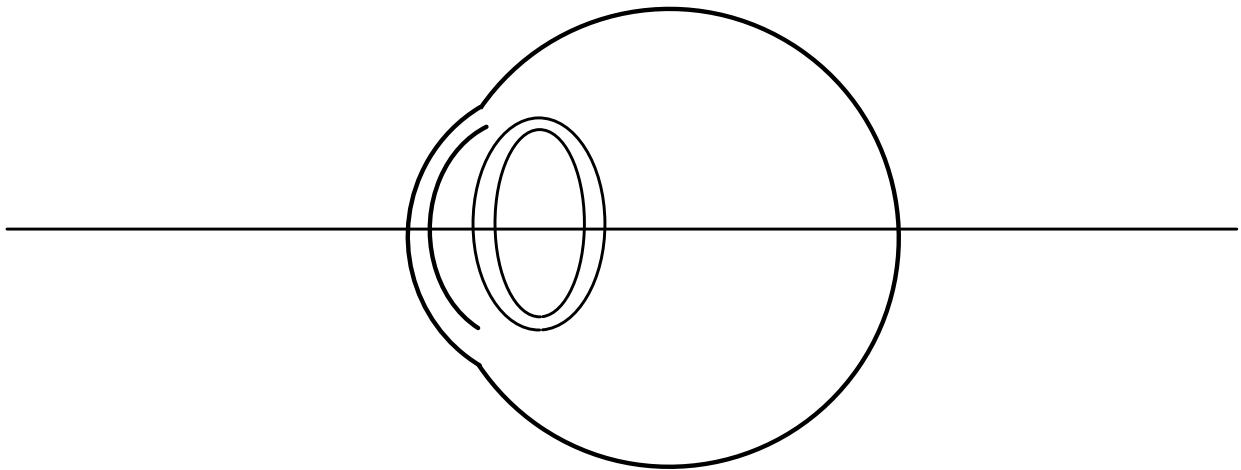


Figura 5. Ull teòric de 6 superfícies de Gullstrand

En aquest projecte considerarem l'ull totalment esfèric tot i que l'ull real no es perfectament esfèric sinó que és asfèric. Aquesta asfericitat ve donada segons el valor de la constant d'asfericitat Q.

Normalment el radi de curvatura de les superfícies de l'ull humà augmenta amb la distància desde el vèrtex, de manera que resulten més aplanades per la perifèria que pel centre. Per aquest fet es diu que aquestes superfícies son asfèriques.

La forma de la cara anterior de la còrnia ha estat molt estudiada, especialment desde els 8 mm centrals fins als 12 mm de diàmetre. Aquesta zona òptica és la màxima per on passa la llum per formar la imatge foveal.

Per estudiar aquesta forma de superfície s'han hagut de representar aquestes superfícies en formes còniques de 3 o 2 dimensions.

Una corba cònica s'expressa amb la següent expressió:

$$h^2 + (1+Q)z^2 - 2zR = 0 \quad (1)$$

On:

-  $z$  és l'eix òptic

-  $h^2 = X^2 + Y^2$

-  $R$  és el radi de curvatura del vèrtex

-  $Q$  és l'asfericitat ( $Q < -1$  és hipèrbola,  $Q = -1$  és paràbola,  $-1 > Q > 0$  és el·lipse i  $Q = 0$  és una esfera).

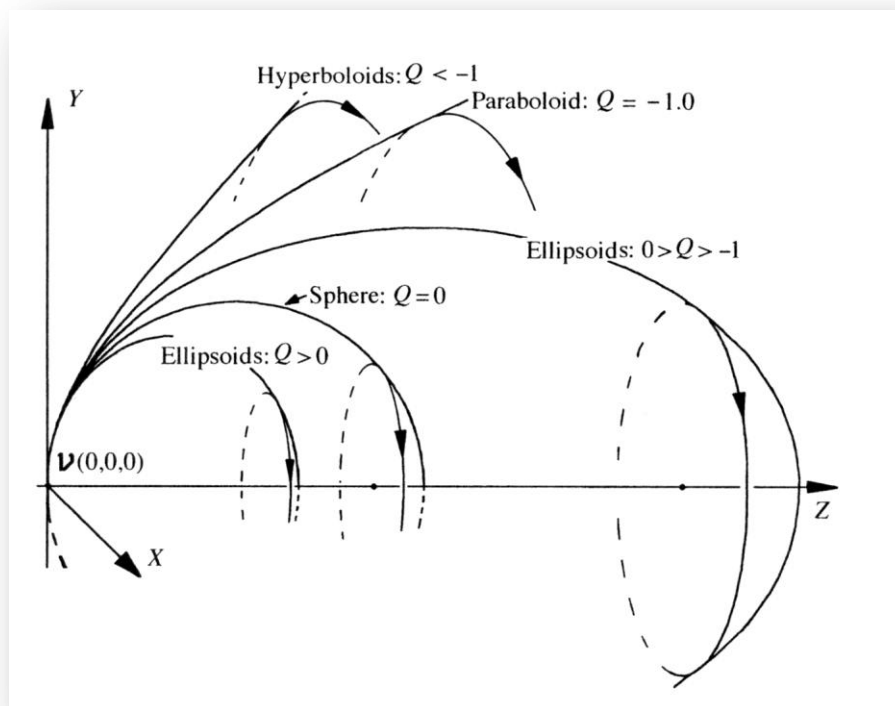


Figura 6. En aquest esquema es poden veure representades diferents corbes còniques

### 3.3 Diàmetre Pupilar

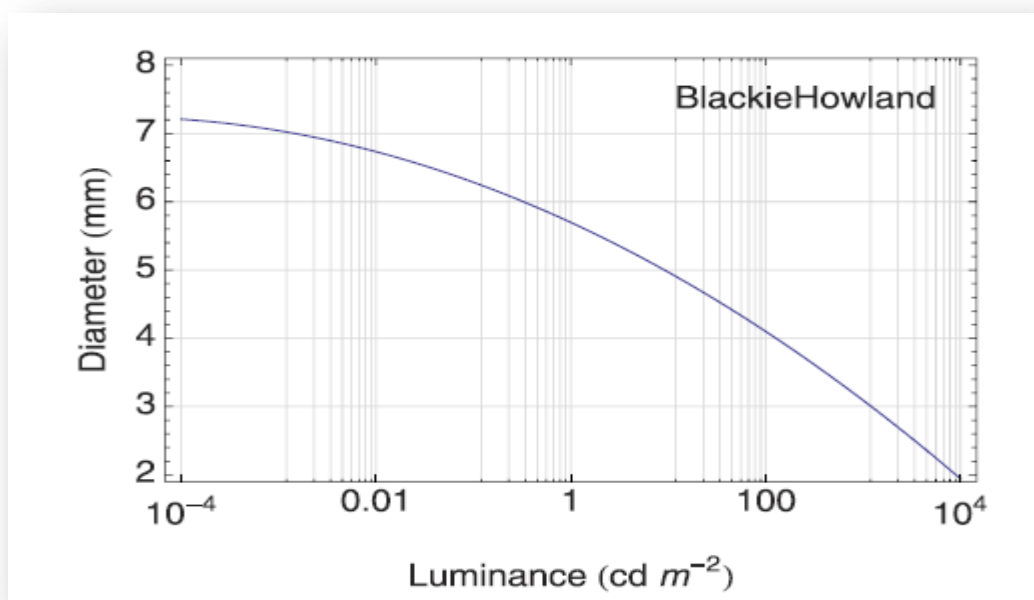
Un altre element que forma part del nostre sistema òptic i que no s'ha comentat a l'apartat anterior és la pupil·la. La funció de la pupil·la serà la d'actuar com a diafragma i per tant és la principal responsable de la quantitat de llum que arriba a entrar dins de l'ull.

La pupila la situarem entre la segona cara de la còrnia i la primera superfície del cristal·lí i , per tant, estarà banyada per l'humor aquós. D'aquesta manera l'índex de refracció que li correspondrà serà el 1.3374 (índex de l'humor aquós).

Un altre factor a tenir en compte, apart de la posició, serà la mida del seu diàmetre. Com s'ha dit anteriorment el nostre objectiu és el de proporcionar un sistema òptic (en el nostre cas un ull) lo més fidel possible a la realitat, per aquest motiu no podem escollir un valor aleatori i per això haurem de determinar unes característiques:

- En primer lloc suposarem que el nostre ull ha d'estar en condicions fotòpiques, es a dir, el nostre sistema òptic estarà exposat a la llum i la pupila tindrà una mida dins del marge òptim per a aquestes condicions.
- En segon lloc l'ull es trobarà en un ambient d'interior totalment estàndard: amb finestra i sistemes d'iluminació fluorescents al sostre.

Per tal de definir el diàmetre de la pupila del nostre sistema òptic hauríem de calcular amb un fotòmetre la luminància que hi ha en l'ambient de referència i a partir d'aquí relacionar la luminància amb la mida òptima de diàmetre pupil·lar.



**Figura 7. Taula que relaciona luminància amb diàmetre pupil·lar (Blackie and Howland (1999))**

Però en aquest projecte hem volgut anar una mica més enllà i determinar el diàmetre de la pupila del nostre sistema òptic a partir dels estudis actuals d' Andrew B. Watson i John I. Yellott (2012) comentant també en quins treballs es van basar.

El càlcul del diàmetre pupil·lar han anat evolucionant al llarg del temps començant per la relació del diàmetre de la pupil·la amb la luminància de l'entorn ( Crawford (1936)). Seguidament van aparèixer autors que van començar a dissenyar fórmules on a més a més de fer dependre el diàmetre pupil·lar amb la luminància van afegir l'àrea d'angle sòlid produït per una font de llum ( Stanley i Davis (1995)). Posteriorment, a aquestes variables es van afegir l'edat del pacient i la condició de treballar de forma monocular o binocular ( Andrew B. Watson i John I. Yellott (2012)). A partir d'aquí aquests autors van aconseguir dissenyar una fórmula on s'unificaven totes les variables al mateix temps i d'aquesta manera s'obtenia un diàmetre pupil·lar òptim encara més exacte.

A continuació citarem les diferents fórmules utilitzades per autors al llarg del temps i compararem com varia aquest diàmetre sota les diferents condicions per tal d'agafar la més realista possible per a dur a terme el nostre projecte.

Fórmules que depenen de la luminància de l'entorn:

- *Holladay (1926)*:

$$D_H(L) = 7 \exp(-0.1007 \times L^{-0.4}) \quad (2)$$

Aquesta fórmula calcula el diàmetre pupil·lar a partir d'una relació amb la luminància expressada en  $cd/m^2$ .

- *Crawford (1936)*:

$$D_C(L) = 5 - 2.2 \tanh[0.61151 + 0.447 \times \log L] \quad (3)$$

Aquesta fórmula també ens relaciona el diàmetre pupil·lar amb la luminància però d'una manera més complexa i el propi autor va afirmar que ajustava millor el resultat que la de Holladay.

- *Moon i Spencer (1944):*

$$D_{MS}(L) = 4.9 - 3 \tanh[0.4 \times \log L] \quad (4)$$

El que es va fer amb aquesta fórmula va ser utilitzar diferents treballs d'altres autors com Cawford (1936) i dissenyar-la.

- *De Groot i Gebhard (1952):*

$$D_{DG}(L) = 7.175 \exp[ -0.00092(7.597 + \log L)^3 ] \quad (5)$$

Aquests autors van senyalar que les dues fórmules anteriors treballaven amb una asymptota en l'eix de coordenades de 2 mm, però es va veure que aquesta dada no era exigida fisiològicament i a l'eliminar-la l'aproximació del diàmetre era més exacte.

Fórmules que depenen de la luminància de l'entorn i de l'àrea d'angle sòlid de la font de llum:

- *Stanley i Davies (1995):*

$$D_{SD}(L, a) = 7.75 - 5.75 \frac{(L \times a / 846)^{0.41}}{(L \times a / 846)^{0.41} + 2} \quad (6)$$

La unitat utilitzada per l'àrea d'angle sòlid és l'angle al quadrat (deg<sup>2</sup>).

- *Barten (1999)*:

$$D_B(L, a) = 5 - 3 \tanh \times 0.4 \log \frac{L \times a}{40^2} \quad (7)$$

El que va fer Barten va ser agafar la fórmula de Moon i Spencer i combinar-la amb la de Stanley i Davies. Resultant la fórmula esmentada.

Finalment els autors Andrew B. Watson i John I. Yellott al 2012 van agafar de referència totes aquestes fórmules citades i van introduir dues variables més al càlcul del diàmetre pupil·lar: l'edat dels pacients i el fet d'utilitzar la visió monocularment o binocularment.

A la variable de treballar en visió monocular o binocular li van donar el nom de M i prenia el valor de M = 0.1 si era en condició monocular o M = 1 si la condició era binocular.

Finalment a la variable de l'edat se la va representar amb una y i es va introduir a la fórmula de manera que depenia de l'edat de referència que es triés.

$$\begin{aligned}
 &D_u(L, a, y, y_0, e) \\
 &= D_{SD}(F, 1) + (y - y_0)[0.02132 - 0.009562 D_{SD}(F, 1)].
 \end{aligned}$$

**Figura 8. Fórmula unificada d'Andrew B. Watson i John I. Yellott**

Aquesta és la fórmula definitiva on s'engloben totes les variables esmentades. A les posicions on hi ha hi posa  $D_{SD}$  s'hi ha d'adjuntar la fórmula d'Standley i Davies.

Un cop organitzades les diferents fórmules vam passar a utilitzar-les totes per comparar els resultats i d'aquesta manera argumentar la nostra tria del diàmetre de pupila per el nostre sistema òptic (l'ull més realista possible). Aquest procediment serà explicat al capítol de *Mètode experimental*.

### 3.4. Càlcul de les imatges diòptriques

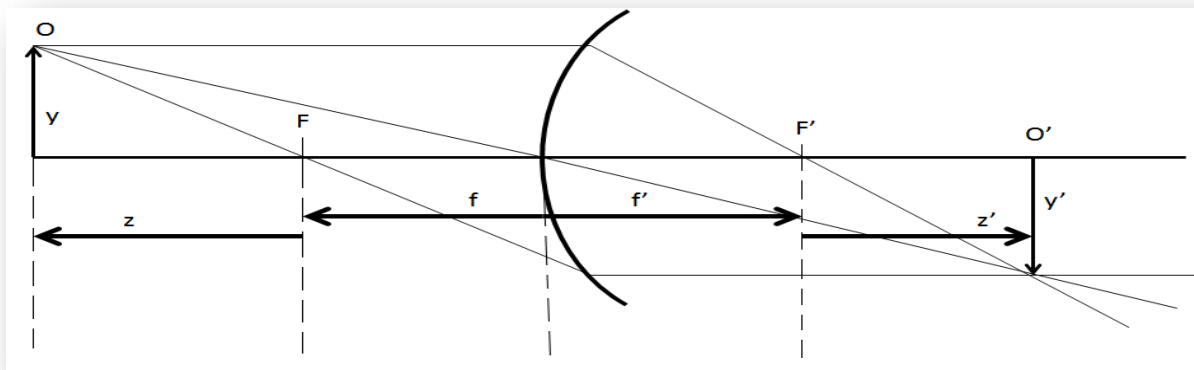
A l'hora de calcular les imatges hem de tenir en compte que sempre treballarem sota l'aproximació paraxial. La base de l'aproximació paraxial es considerar que la trajectòria dels rajos formen angles petits ( de  $0^\circ$  a  $20^\circ$  ) respecte l'eix òptic. Aquesta aproximació té les següents característiques:

- Aproximació paraxial : es considera  $\sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta$  al mateix temps tenim  $\cos \theta \cong 1$
- Els rajos que incideixen a la lent perpendiculars a l'eix òptic es refracten de manera que tallen al focus de la lent.
- Els rajos que passen pel centre òptic d'una lent no es refracten.

#### *Equacions de correspondència dels diòptres esfèrics*

Les equacions de correspondència relacionen la posició i la mida de l'objecte amb els de la imatge i sempre venen donades pels paràmetres del diòptre. Segons els orígens presos per caracteritzar la posició de l'objecte i de la imatge aquestes equacions són:

- Origen als focus  $F$  i  $F'$ :



**Figura 9. Correspondència d'elements**

Si establim relacions de semblança amb els triangles de la figura obtenim:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'} \quad (10)$$

d'on es pot deduir l'equació de Newton:

$$z \times z' = f \times f' \quad (11)$$

- *Origen al vèrtex:*

En aquest cas, l'equació que relaciona la posició de l'objecte amb el de la imatge es l'invariant d'Abbe. Agrupant els seus termes i tenint en compte la fórmula de la focal imatge obtenim l'equació de Descartes:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} \quad (12)$$

Un cop tenim plantejada l'equació de Descartes podem passar a definir el terme de vergència.

Es defineix vergència com l'inversa de la distància reduïda. Així doncs, les vergències objecte i imatge seran, respectivament:

$$X = \frac{n}{s} \quad (13)$$

$$X' = \frac{n'}{s'} \quad (14)$$

sent les seves unitats les diòptries quan les distàncies s'expressen en metres. En termes de vergències, l'equació de Descartes s'escriu com:

$$X + X' = P \quad (15)$$

- *Càlcul de la primera imatge diòptrica:*

Recordem que aquesta imatge diòptrica és la formada per refracció amb la primera superfície de la còrnia.

Plantegem l'ull teòric de LeGrand amb les seves quatre superfícies i els paràmetres de potència i radi dels diòptres així com els índex de refracció que els separen. També s'ha de conèixer prèviament la posició inicial de l'objecte i la seva mida.

Un cop són conegudes totes aquestes dades s'aplica la fórmula de vergències.



Ens interessa conèixer  $X'$  que serà la dada per trobar la posició de la primera imatge diòptrica. A la fórmula de vergències on  $X$  serà l'índex de l'aire (1) dividit per la posició de l'objecte que serà en negatiu ja que es troba per davant de la còrnia. El resultat de  $X$  el sumem a la potència de la cara anterior de la còrnia i d'aquesta manera obtenim  $X'$ .

Acte seguit per trobar la posició de la primera imatge diòptrica ( $x'$ ) apliquem la fórmula de posició que es divideix l'índex de la còrnia entre la  $X'$  trobada prèviament. D'aquesta manera obtindrem la posició de la primera imatge diòptrica.

Finalment apliquem la fórmula de mida dividint la  $X$  entre la  $X'$  i multiplicant al resultat a la mida de l'objecte.

#### - Càlcul de la segona imatge diòptrica:

Aquesta imatge serà la resultant de la refracció a la segona superfície de la còrnia.

Per tal de calcular aquesta segona imatge seguirem el mateix procediment fet per la primera però ara utilitzant com a posició i mida de l'objecte les dades de la primera imatge diòptrica trobada anteriorment.

#### - Càlcul de la tercera imatge diòptrica:

Aquesta imatge és la formada per la refracció de la primera cara del cristal·lí. En aquest cas agafarem com a objecte la posició i mida de la segona imatge diòptrica.

#### - Càlcul de la quarta imatge diòptrica:

El resultat d'aquesta imatge és produït per la refracció de la llum a la segona cara del cristal·lí. Les dades de posició i mida de l'objecte per a aquesta imatge seran les de la tercera imatge diòptrica.

En un ull emmetrop la quarta imatge diòptrica teòricament ha de coincidir amb la posició de la retina.

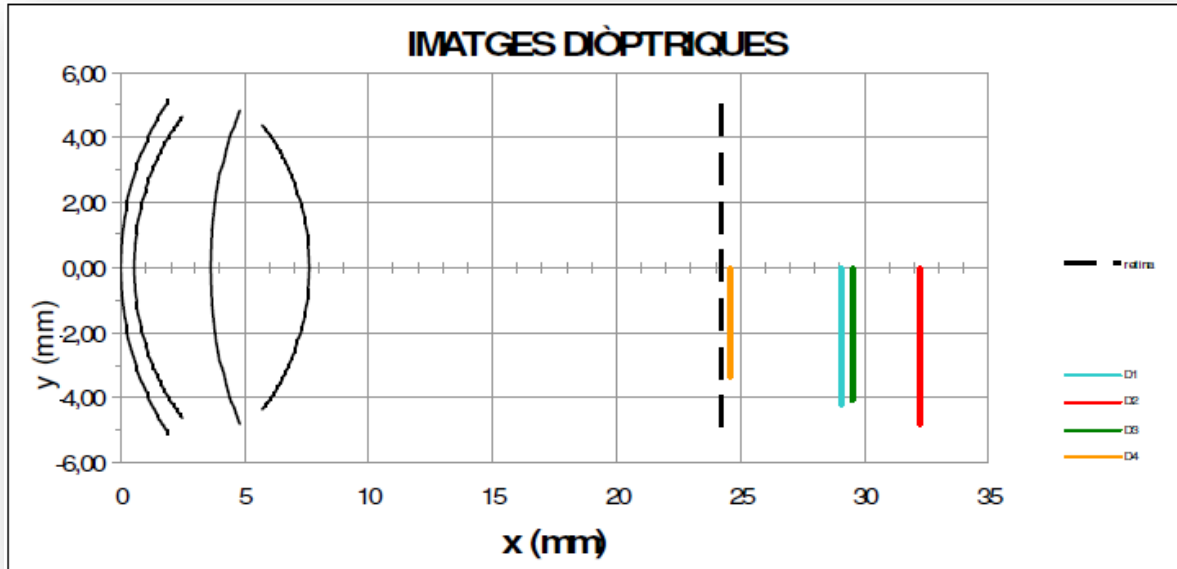


Figura 10. Esquema d'exemple de les imatges diòptriques

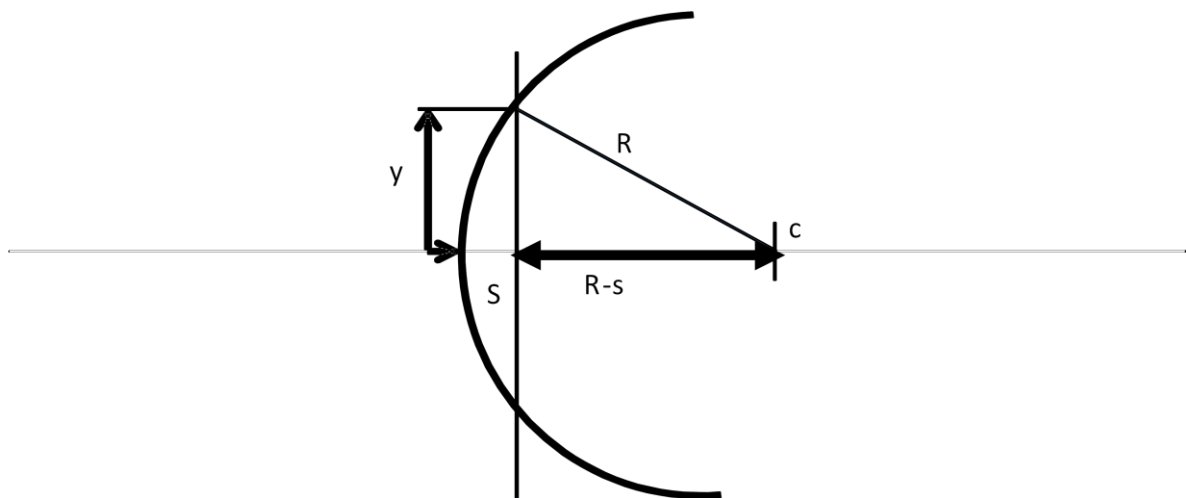
### 3.5 Càlcul dels paràmetres de les lents oftàlmiques

Una altra experiència que durem a terme serà la de col·locar davant del nostre sistema òptic quatre lents oftàlmiques, dues positives i dues negatives amb índex de refracció 1.523 i 1.7.

Amb aquestes lents davant del sistema òptic podrem veure com es veuen afectades les trajectòries de rajos i, per tant, la imatge diòptrica que es formi finalment sota aquestes condicions.

En aquest apartat mostrarem la manera de calcular teòricament els diferents paràmetres de les lents (Radi, Pvp, gruixos, focals, etc...) a partir de dades experimentalment obtingudes.

Primer de tot caldrà definir els radis de curvatura d'una lent; per poder calcular el radi s'haurà de fer una relació entre la sageta ( $s$ ) i la seva corresponent corda de semi distància ( $y$ ). La sageta és la mínima distància entre el vèrtex de la superfície i la corda establerta, en el següent esquema podrem veure la relació:



**Figura 11. Relació trigonomètrica entre la sageta, la corda i el radi**

Mitjançant la relació de triangles es pot deduir el radi de la següent manera:

$$R = \frac{y^2 + s^2}{2s} \quad (16)$$

D'aquesta manera a partir del càlcul de la sageta i la corda amb un sagímetre es podrien deduir els radis de la lent corresponent.

En el cas que tinguéssim les potències esferomètriques donades per un esferòmetre, en comptes de les sagetes, també es podrien trobar els radis corresponents a partir de les següents fórmules:

$$P_{1_{esf}} = \frac{n_{esf} - 1}{R_1} \times 1000 \quad (17)$$

$$P_{2_{esf}} = \frac{1 - n_{esf}}{R_2} \times 1000 \quad (18)$$

Amb aquest mètode s'ha de tenir en compte que l'índex de refracció de l'esferòmetre és exclusivament 1.523. Donat el cas que la lent tingués un índex de refracció de 1.523 la potència esferomètrica correspondria a la potència diòptrica, ara bé, si l'índex de refracció de la lent fos diferent a 1.523 llavors s'hauria d'aplicar la conversió de potència esferomètrica a potència diòptrica:

$$P_1 = P_{1_{esf}} \times \frac{n_L - 1}{n_{esf} - 1} \quad (19)$$

Aquesta conversió s'hauria d'aplicar a la potència de la cara anterior i a la potència de la cara posterior per separat.

Un cop trobats tan els radis com les potències de les cares de la lent passarem a concretar els seus gruixos (gruix de bora i gruix de centre). Abans d'especificar més cal dir que en una lent positiva els gruixos de bora tindran valors similars a 1-2mm i en una lent negativa aquests valors els prendrà el gruix de centre.

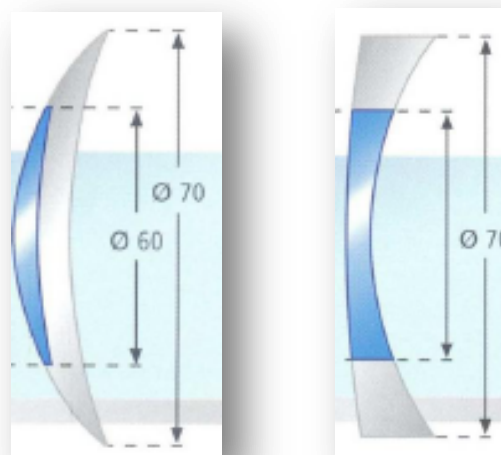


Figura 12. Gruix de la lent positiva i de la negativa

Per trobar els gruixos de manera teòrica existeix una relació que ens proporciona aquesta informació:

Es calcula per a cada radi la sageta pel diàmetre aplicant l'expressió 20 i acte seguit amb l'expressió 21 es troba el gruix que ens interressi saber.

$$s_{\varphi} = R - \sqrt{R^2 - \frac{\varphi^2}{2}} \quad (20)$$

$$E_c + s_{2\varphi} = E_b + s_{1\varphi} \quad (21)$$

Com a últim paràmetre ens interessarà conèixer la  $P_{VP}$  teòrica de la lent. L'expressió per a la determinació de la potència de vèrtex posterior relaciona les potències diòptriques 1 i 2, el gruix de centre i l'índex de refracció:

$$P_{vp} = \frac{P_1}{1 - \frac{E_c}{n_L} P_1} + P_2 \quad (22)$$

Ara que ja hem definit els paràmetres que utilitzarem en el nostre projecte cal determinar les característiques més fisiològiques de les lents, es a dir, la relació entre lent i ull.

Per tal de posar una lent compensadora davant de l'ull es necessari que aquest ull tingui una ametropia, les més comunes i les que basarem el treball són la miopia i l'hipermetropia. Per a aquestes condicions tocarà una lent de potència negativa per a neutralitzar la miopia i una lent de potència positiva per compensar l'ull hipermetrop.

Tot aquest raonament ens porta a citar l'objectiu i el principi de la neutralització de l'òptica fisiològica:

- Objectiu: Que la persona vegi els objectes de l'infinit nítidament sense necessitat d'acomodar.
- Principi: La imatge d'un objecte situat a l'infinit a través de la lent ha de formar-se en el punt remot de l'ull.

Serà important calcular els plans principals de la lent (H i H') així com les focals i la focal de vèrtex posterior ja que coneixent aquestes dades ens serviran per a calcular la posició de la nova pupila d'entrada.

Primer de tot el que caldrà saber son les distàncies desde l'origen fins la primera superfície de la lent, que serà 0 perquè la lent la posarem just a l'origen del sistema, i la distància desde l'origen fins la segona superfície de la lent que en tots els casos serà el gruix de la lent.

Acte seguit s'haurà de calcular una incògnita anomenada  $\delta_L$  amb la següent fórmula:

$$\delta = \frac{H'_1 \times H_2}{n'_1} \quad (23)$$

Un cop coneguem aquesta incògnita s'han d'aplicar les fórmules 24, 25, 26 i 27 per esbrinar els plans principals de la lent, tant el pla objecte com el pla imatge:

$$H_1 H = \delta \times n_1 \times \frac{P_2}{P} \quad (24)$$

$$SH = SH_1 + H_1 H \quad (25)$$

$$H'_2 H' = - \delta \times n'_2 \times \frac{P_1}{P} \quad (26)$$

$$SH' = SH'_2 + H'_2 H' \quad (27)$$

També serà necessari calcular el punt remot de l'ull així com la seva focal de vèrtex posterior i comprovar que coincideixen:

$$R = \frac{P_{vp}}{1 - \delta_v \times P_{vp}} \quad (28)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{P_{vp}} - \delta_v \quad (29)$$

On la distància de vèrtex la tindriem com una constant de 12mm.

Finalment determinarem la posició i mida de la nova pupil·la d'entrada amb les següents expressions:

$$x = x' (1 + \delta_v \times R) \quad (30)$$

$$y = y' (1 + \delta_v \times R) \quad (31)$$

On la  $x'$  i la  $y'$  seran la posició i mida de la pupil·la d'entrada original,  $x'$  serà referida desde la lent.

## 4. Mètode experimental

Primerament introduïrem el programa informàtic que hem utilitzat per a dur a terme les representacions de les imatges diòptriques.

### *Beam4*

El Beam4 és un programa desenvolupat per Stellar Software i executable amb el Java.

El Beam4, bàsicament, és un simulador de traçat de rajos que utilitza les dades introduïdes prèviament per l'usuari i a partir d'aquí desenvolupa un esquema on hi apareix el sistema òptic que s'ha configurat amb la trajectòria exacte del raig que ens interessa conèixer.

El programa treballa utilitzant tres eixos ( X, Y i Z), l'eix X és el vertical, l'eix Z és l'eix òptic i finalment l'eix Y que no serà utilitzat seria el perpendicular a Z.

El menú principal del programa consta de varies funcions que ens seran útils a l'hora de dur a terme la tasca proposada.

<b>BEAM FOUR JAVA EDITION --- MENU REFERENCE</b>				
<b>File</b>	<b>Edit</b>	<b>Run</b>	<b>Options</b>	<b>Help</b>
New Optics	Cut	InOut	InOut	Show Error
New Rays	Copy	Layout	Layout	Special Keys
New Media	Paste	Plot2Dim	AutoAdjust	About....
Open Optics	Delete	MultiPlot	Plot2Dim	
Open Rays	Select All	Map	MultiPlot	
Open Media		Plot3Dim	Map	
Save Table		Histo1Dim	Plot3Dim	
Save Table As		MTF	Histo1Dim	
QuickPNG		Histo2Dim	Histo2Dim	
WriteCAD		AutoAdjust	Random	
WriteHisto		AutoRay	CAD	
Print/PDF		Random	Startup Files	
Quit		Demo	Factory Settings	
			Editors	
			Graphics	
			Default Rays	
			Ray Generators	
			Look and Feel	

Figura 13. Menú d'inici del Beam 4 (B4 guide)

A la secció *File* trobem totes les opcions referents a la configuració dels nostres sistemes òptics i dels rajos. Els apartats *New optics*, *New rays* i *New media* serveixen respectivament per obrir una nova taula de configuració de sistema òptic, una nova taula de configuració de rajos i un nou gràfic.

Seguidament trobem la secció *Open* també amb les 3 tipologies d'*optics*, *rays* i *media* que ens servirà per obrir taules que tinguem guardades prèviament.

A continuació trobem les funcions de *save* que ens guardaran les taules fetes que vulguem conservar.

Les opcions següents tenen varies funcions com per exemple la d'imprimir els documents, guardar les gràfiques en format PNG, etc...

A la secció *Edit* trobarem les tradicionals eines per retallar, copiar, enganxar, esborrar i seleccionar.

De les funcions de l'apartat *Run* només utilitzarem tres: la funció *InOut* serveix per a que un cop introduïdes les dades del sistema òptic i dels rajos a traçar el programa calcula la trajectòria per on ha de passar exactament el raig a través del sistema òptic. La funció *Layout* ens permetrà representar les dades de les taules òptics i rajos en un esquema proporcionat pel programa. L'última funció que utilitzarem d'aquesta secció és la de *Plot2Dim* que serveix per a veure la ubicació dels punts dels rajos en dos dimensions.

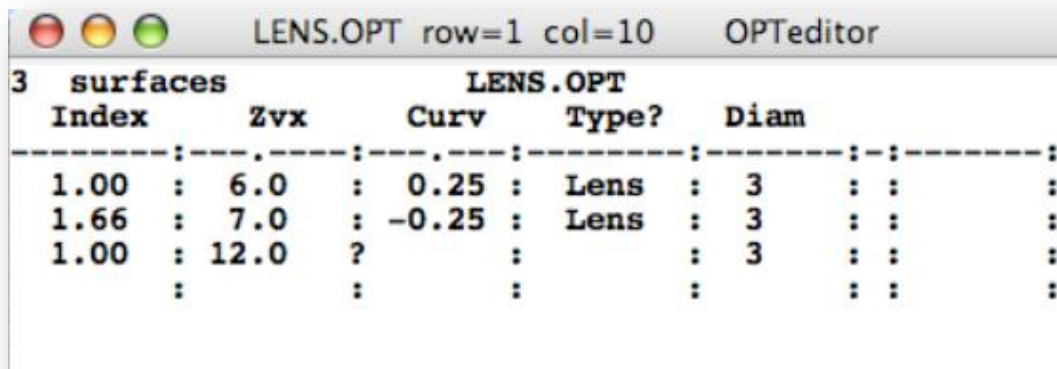
Les dues últimes seccions del menú principal són les d'opcions i les d'ajuda que no seran utilitzades per a aquest treball.

### *Optics i optics tables*

Aquesta eina ens permetrà introduir les dades referent al sistema òptic on es desenvoluparan les trajectòries dels rajos.

Les taules es divideixen en una espècie de títol on deixarem clar al programa quantes superfícies tindrà el nostre sistema òptic posant un número seguit de la paraula *surface* o *surfaces* (superfícies), a continuació consta diferents columnes per distribuir les nostres dades d'entrada.





LENS.OPT row=1 col=10 OPTeditor

3 surfaces		LENS.OPT			
Index	Zvx	Curv	Type?	Diam	
1.00	6.0	0.25	Lens	3	:
1.66	7.0	-0.25	Lens	3	:
1.00	12.0	?	:	3	:
:	:	:	:	:	:

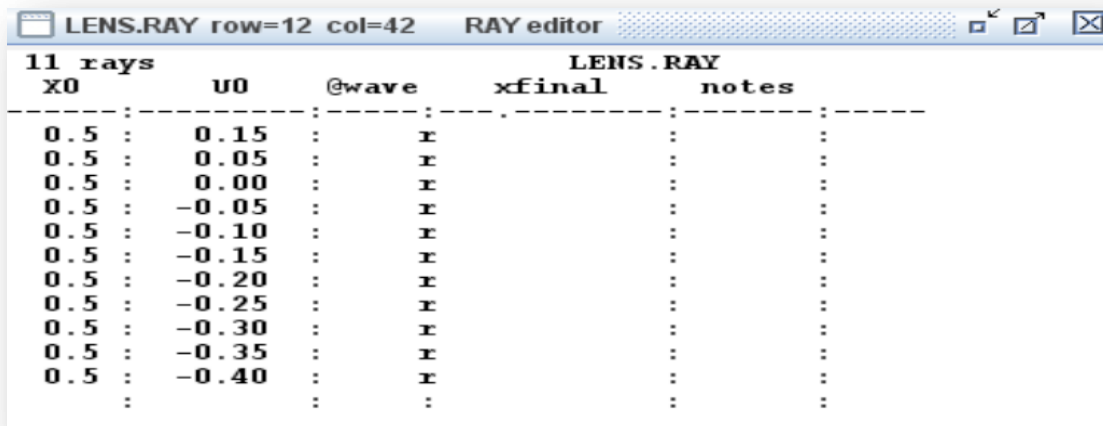
Figura 14. Menú òptics d'exemple

### Columnes de la taula òptics:

- **Índex:** aquí posarem els índex de refracció anteriors a la superfície, per exemple, si la primera superfície es la cara anterior de la còrnia l'índex de refracció corresponent serà l'índex de l'aire, es a dir, 1.
- **Zvx:** posarem la posició de les diferents superfícies refractives en l'eix Z (eix òptic) respecte l'eix vertical X. Les posicions per darrere l'eix X tindran números positius i les posicions per davant negatius.
- **Curvatura o Curv:** fa referència a la curvatura de les superfícies del sistema òptic i les dades introduïdes corresponen a l'inversa del radi de les superfícies, per tant, haurem de conèixer prèviament els radis.
- **Type:** serveix per dir-li al programa quin tipus de superfícies són cada una de les existents en el sistema òptic per mitjà d'una inicial o paraula. *Lens* o *L* voldrà dir que la superfície és una lent que separa dos índex de refracció i per tant el raig es difractarà. *Mirror* o *M* voldrà dir que la superfície és un mirall i, per tant, els rajos només s'hi reflectiran. Utilitzant la lletra *I* podrem definir un iris dins del sistema. Superfícies finals *F* que voldrà dir que serà la superfície final del nostre sistema òptic.
- **Diam:** podrem triar quin diàmetre volem posar a les superfícies, aquesta opció serà especialment útil quan es doni el cas en que un raig no pot acabar la seva trajectòria perquè el diàmetre d'una superfície és massa petit i, per tant, el raig no s'hi pot refractar. Quan es dona aquest problema el mateix programa t'avisarà en una columna anomenada *Notes* que forma part de la taula *rays* i que explicarem en el següent punt.

## Rays i rays tables

Les taules de rajos les utilitzarem per introduir al programa les dades sobre la trajectòria de rajos que volem que es propagui per el nostre sistema òptic.



11 rays		LENS.RAY		
X0	U0	@wave	xfinal	notes
0.5	0.15	r		
0.5	0.05	r		
0.5	0.00	r		
0.5	-0.05	r		
0.5	-0.10	r		
0.5	-0.15	r		
0.5	-0.20	r		
0.5	-0.25	r		
0.5	-0.30	r		
0.5	-0.35	r		
0.5	-0.40	r		
:	:	:	:	:

Figura 15. Menú rays d'exemple

A la taula de rajos tindrem un títol similar que a la taula *Optics* però ara a continuació del número hi posarem la paraula *rays* així li indicarem al programa quants rajos volem definir.

### Columnes de la taula rays:

- *X0*: En aquesta zona posarem les altures en l'eix de les x des d'on volem que surti el raig, d'aquesta manera es poden posar rajos a diferents altures d'un mateix objecte.
- *U0*: aquí posarem el cosinus de l'angle que forma el raig amb l'eix de les x, definint així l'inclinació dels diferents rajos.
- *@Wave*: serveix per posar color als rajos. Per tal de posar color s'ha de posar l'inicial del color en anglès (vermell = r de *red*, blau = b de *blue* i així consecutivament fins a posar els 5 colors dels que consta el programa) a la zona de transició amb la columna del costat.
- *Notes*: aquí el programa ens indicarà si els rajos configurats travessen correctament les diferents superfícies diòptriques. En cas de que no fos així, en aquesta columna ens mostrarien textos com ara: iris (l'iris és massa petit i el raig no hi passa), diam3 (el diàmetre de la superfície 3 es massa petit i el raig no la pot travessar), etc...

- *X<sub>final</sub>*: dona la informació dels punts en l'eix x on acaben els rajos depenent d'on haguem col·locat la última superfície. Aquesta informació ens serà útil a l'hora de determinar els punts de la recta que forma el raig per determinar en quin punt es creua amb altres rajos.

- *v<sub>final</sub>*: ens donarà la informació de l'angle que té el raig en el punt on acaba respecte l'eix de les x.

Amb tota la informació introduïda en aquestes dues taules el programa ja serà capaç de calcular la trajectòria dels rajos que haguem volgut introduir i representarà tot el sistema òptic configurat juntament amb tots els rajos. A la imatge següent es pot veure un exemple dels esquemes que el programa proporciona:

### *Determinació del diàmetre pupil·lar:*

Vam mesurar els diferents paràmetres que formen part de la fórmula unificada en un entorn diari i quotidià, en el nostre cas un despatx de la universitat. Primerament vam prendre mesures d'una pantalla d'ordinador, situada a mitja distància, tan horitzontalment com verticalment. Aquesta mesura ens va proporcionar la informació de l'àrea de la pantalla i utilitzant l'expressió 32 vam esbrinar l'angle subtendit entre la persona i la pantalla en estereoradians, aquest resultat va ser convertit en graus al quadrat (deg<sup>2</sup>) mitjançant l'expressió 33 per tal d'utilitzar les unitats d'àrea d'angle sòlid proposades pels autors. Finalment, amb un fotòmetre, vam mesurar la luminància del despatx en cd/m<sup>2</sup>.

$$\text{Angle en estereoradians} = \frac{A}{d^2} \quad (32)$$

$$\text{Angle deg}^2 = \frac{180^2}{\pi} \quad (33)$$

Dades del despatx:

Monitor	
x	51 cm
y	28.5 cm
d	70 cm

L (cd <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> )	200
A (dg <sup>2</sup> )	973
Edat de referència	28.58
Edat de l'observador	50

Els resultats amb totes les fórmules descrites en el capítol 3.3 *Diàmetre pupil·lar* van ser els següents:

Autor	Diàmetre pupil·lar (mm)
Holladay (1926)	3.0268699
Crawford (1936)	2.9595387
Moon i Spencer (1944)	2.7221723
De Groot i Gebhard (1952)	2.9401501
Stanley i Davies (1995)	3.0180001
Barten (1999)	2.9521314
Andrew B. Watson i John I. Yellott (2012)	2.8563201

A la vista dels resultats vam decidir agafar un diàmetre de pupila de 3 mm ja que operant amb totes les fórmules proposades es rondava aquest valor i, a més a més, és un diàmetre òptim en condicions fotòpiques.

### 3.4.1 Representació gràfica de les imatges diòptriques amb el Beam4

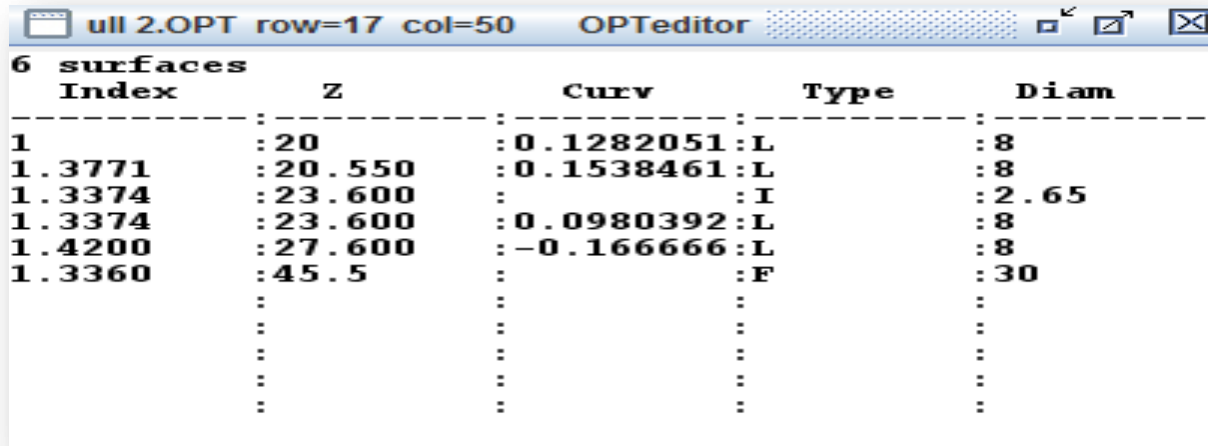
Tot seguit passarem a introduir dades al Beam4 a partir de càlculs previs que anirem citant contínuament i a partir d'aquestes dades el programa anirà representant les diferents imatges. Cal dir que sempre procurem que les característiques del sistema siguin el més realistes possible.

#### - Representació de la quarta imatge diòptrica:

Per començar definirem el nostre sistema òptic (ull) amb les taules de LeGrand:

Medi	Índex de refracció	Radi de curvatura	Distància
Aire	1	-	-
1a cara còrnia		7,800	0,550
2a cara còrnia	1.3771	6,500	3,050
Humor aquós	1.3374	10,200	
1a cara cristal·lí	1,4200		-6,000
2a cara cristal·lí		1.3360	-

Un cop introduïdes aquestes dades al Beam4 en una taula *Optics* queden de la següent manera:



Index	Z	Curv	Type	Diam
1	20	0.1282051	L	8
1.3771	20.550	0.1538461	L	8
1.3374	23.600		I	2.65
1.3374	23.600	0.0980392	L	8
1.4200	27.600	-0.1666666	L	8
1.3360	45.5		F	30
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:

Figura 16. Taula d'optics

Comentar que la primera superfície de la còrnia l'hem col·locat a 20 mm per darrere del punt 0 i les distàncies estan representades a partir del 20 on comença el nostre sistema òptic, també hem afegit tipus de superfície (la còrnia i el cristal·lí serien lents, a l'humor aquós hi hem representat l'iris i a l'última superfície que seria la que fa de retina li hem posat la F de pla final i de moment no li hem posat curvatura.

Per últim hem posat diàmetres a totes les superfícies i seguidament comentarem el diàmetre de 2.65 que li ha tocat a l'iris.

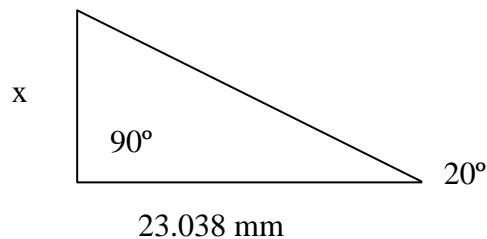
Tal com hem comentat anteriorment vam acabar determinant que el diàmetre de la pupila d'entrada havia de ser de 3 mm per posar una condició de normalitat, doncs a partir d'aquesta dada i aplicant les fórmules de vergències vam aconseguir trobar el diàmetre d'iris equivalent al diàmetre de 3 mm de la pupila d'entrada aplicant la següent fórmula:

$$3 = 1.131 \times \varphi_{IRIS} \tag{34}$$

Obtenint el resultat d'un iris de diàmetre 2.65 mm.

Ara passarem a definir els nostres rajos i per tal de no fer un ull acomodat es necessari que els rajos vinguin de l'infinit. Aquests rajos també han de passar per la pupil·la d'entrada determinada. Com ens trobem en un sistema sota condicions paraxials hem de procurar que els rajos no entrin a l'ull amb més obertura de 20° mitjançant uns càlculs tot i que també existeix la manera de determinar-ho amb el propi Beam4 i veurem els dos mètodes:

El que volem es trobar l'altura idònia de la que vinguin els rajos però que no superin els 20° d'inserció a l'ull, per això caldrà plantejar el següent triangle:



Per a poder trobar l'altura que ens interessa (x) posarem a l'angle oposat 20° que és l'angle màxim que volem que assoleixi el raig, a la base del triangle posarem la distància entre l'origen del sistema a la pupil·la d'entrada i aplicarem la següent expressió:

$$\tan 20^\circ = \frac{x}{23.038} \quad (35)$$

Obtenint una altura de 8.38 mm.

D'aquesta manera hem obtingut l'altura desitjada d'inserció del raig calculat manualment i el cosinus de l'angle de 70° serà el que introduïm al Beam 4 per tal de definir la trajectòria del raig el qual passarà just pel centre de la pupil·la d'entrada.

Acte seguit triarem una altura superior a 8.38mm i una d'inferior per tal que aquests dos rajos extrems passin per les bores superior i inferior del nostre iris de 2.65mm (corresponent a la pupil·la d'entrada de 3mm).

6 surfaces					3 rays				
Index	Z	Curv	Type	Diam	X0	Xfinal	@	U0	note
1	:20	:0.1282051	:L	:8	9.8	: -6.5479	:	r-0.342020	:OK 6
1.3771	:20.550	:0.1538461	:L	:8	8.3	: -6.3388	:	b-0.342020	:OK 6
1.3374	:23.600	:	:I	:2.65	6.9	: -6.0908	:	g-0.342020	:OK 6
1.3374	:23.600	:0.0980392	:L	:8					
1.4200	:27.600	:-0.1666666	:L	:8					
1.3360	:45.5	:	:F	:30					
:	:	:	:	:					
:	:	:	:	:					
:	:	:	:	:					
:	:	:	:	:					
:	:	:	:	:					
:	:	:	:	:					

Figura 17. Taules òptics i rays dels 3 rajos superiors

Comentar que s'ha introduït l'ull de LeGrand amb l'iris de 2.65mm i a la taula *rays* s'han introduït les 3 altures que passen per la totalitat de l'iris amb la inclinació corresponent al cosinus de  $70^\circ$  i  $110^\circ$  (0.342020), dir que aquesta inclinació té un signe negatiu perquè això li dirà al programa que aquest raig és descendent.

Un altre mètode per trobar aquesta altura és mitjançant l'opció *Auto adjust*, amb la qual el programa representa el raig que passa pel centre de la pupila d'entrada justament pel centre fent canvis inferiors a la centèsima en les altures.

Un cop ja coneixem els mètodes per trobar les altures segons les inclinacions que nosaltres vulguem, decidirem quatre angles més, compresos entre 0 i 20 graus, que sempre vinguin de l'infinit amb un raig central que passi pel centre de la nostra pupila d'entrada i dos rajos extrems que passin per les bores del diafragma. Els angles que hem seleccionat, apart del de  $20^\circ$ , han estat  $15^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $5^\circ$  i  $0^\circ$ , llavors aplicant el mateix triangle que amb el primer feix determinem les altures d'aquestes altres inclinacions i sempre posant al programa el cosinus d'aquest angles més  $90^\circ$ .

Finalment ajuntem totes les altures i inclinacions en una mateixa taula *Rays* que quedaria de la següent manera:

X0	Xfinal	@	U0	note	Ufinal
9.8	-11.7692	:	-0.342020	:OK 6	-0.453
8.3	-10.5063	:	-0.342020	:OK 6	-0.369
6.9	-9.2541	:	-0.342020	:OK 6	-0.285
7.6	-8.9706	:	r-0.258819	:OK 6	-0.364
6.1	-7.7867	:	r-0.258819	:OK 6	-0.278
4.7	-6.6261	:	r-0.258819	:OK 6	-0.193
5.5	-6.2723	:	b-0.1736	:OK 6	-0.274
4	-5.1409	:	b-0.1736	:OK 6	-0.185
2.6	-4.0474	:	b-0.1736	:OK 6	-0.099
3.5	-3.6764	:	g-0.0871	:OK 6	-0.184
2	-2.5696	:	g-0.0871	:OK 6	-0.094
0.6	-1.5230	:	g-0.0871	:OK 6	-0.008
1.4	-1.0260	:	0.00001	:OK 6	-0.085
0	0.0001	:	0.00001	:OK 6	-0.000
-1.4	1.0263	:	0.00001	:OK 6	0.085

Figura 18. Taula amb tots els feixos de rajos de la quarta imatge diòptrica

Amb aquesta taula *Rays* hi anirà la taula *Optics* de l'ull de LeGrand amb l'iris de 2.65mm però amb una particularitat: de moment no hi posarem retina amb curvatura sinó que posarem un pla final molt allunyat per poder apreciar bé la intersecció dels rajos:

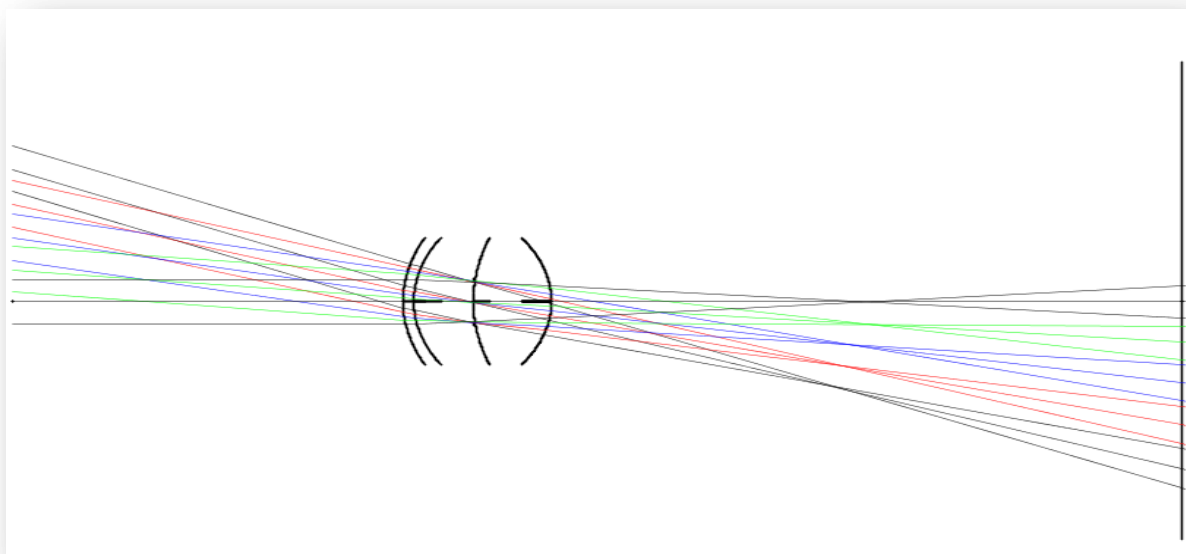
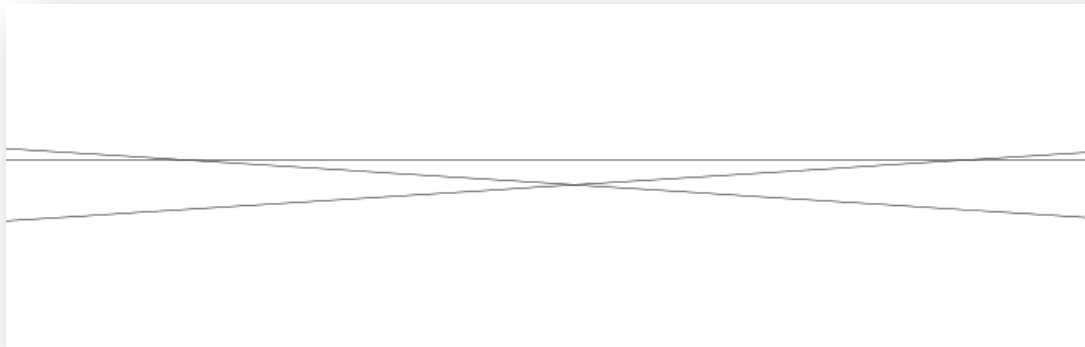


Figura 19. Quarta imatge diòptrica



Es poden veure clarament les cinc interseccions dels cinc feixos de rajos i és en aquestes interseccions on trobaríem la retina però en aquestes condicions ens surgeix un problema: al fer zoom sobre la imatge podem veure que els tres rajos de cada feix no es creuen en un punt exacte sinó es creuen dos a dos com podem veure al dibuix següent:



**Figura 20. Creuament dels rajos**

En aquesta imatge el que hem fet es ampliar molt el punt d'intersecció del feix que incideix a  $20^\circ$  (de color negre) i podem observar com no es tallen els tres rajos en un mateix punt comú, per tant, s'ha fet el càlcul de la mitjana dels tres punts de creuament amb l'ajuda de l'Excel i del Wiris. Com abans, mostrarem el procediment fet pel feix de  $20^\circ$  i el de  $0^\circ$  es podrà trobar en els annexes.

vermell							
x	y		vermell-blau				
35,5	-2,947		x	y			
45,5	-6,5479		42,623	-5,5118			
Pendent	-0,36009						
Ord. Orig	9,836195						
blau			blau-verd				
x	y		x	y		x	y
35,5	-3,4646		41,919	-5,3096		42,2736667	-5,4032
45,5	-6,3388						
Pendent	-0,28742						
Ord. Orig	6,73881						
verd			vermell-verd				
x	y		x	y			
35,5	-3,9092		42,279	-5,3882			
45,5	-6,0908						
Pendent	-0,21816						
Ord. Orig	3,83548						

**Figura 21. Càlcul del punt mig d'intersecció dels tres raigs**

El que es va fer va ser col·locar el pla final en dues posicions diferents (35.5 mm i 45.5 mm) i llavors fer el càlcul de la recta amb l'excel per trobar les coordenades dels tres punts de tall, un cop amb aquestes coordenades es va fer una mitjana aritmètica obtenint així el punt mig de creuament dels tres rajos.

Amb la informació dels punts de creuament dels 5 feixos de llum vam poder esbrinar la forma exacta i la curvatura de la retina del nostre sistema òptic de la següent manera: primer vam afegir una columna a la taula de *Rays* general anomenada *Xgoals*, en aquesta nova columna vam introduir les dades corresponents a l'eix de les x en el programa, recordem que l'eix de les x és el vertical, i fent la funció d'*autoadjust* el propi programa ens va proporcionar la curvatura de la retina i la seva asfericitat. Un cop fet això vam anar a l'excel i vam introduir la següent fórmula per aconseguir trobar la posició z:

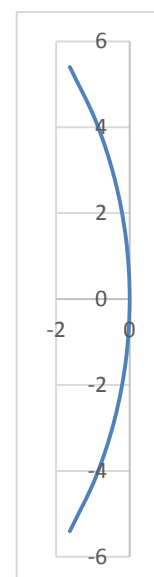
$$z = \frac{Cx^2}{1 + \sqrt{1 - SC^2x^2}} \quad (32)$$

Aquesta fórmula ens la va proporcionar el manual del propi programa per trobar la coordenada z a partir de la curvatura, la posició x i la seva asfericitat. Els resultats van ser els següents:

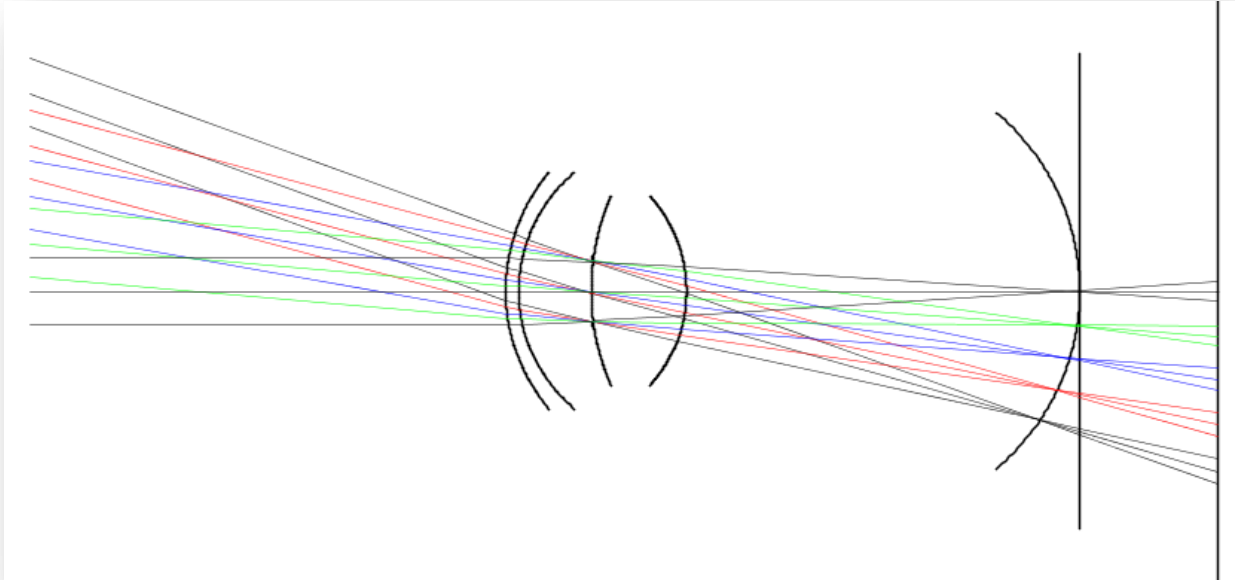
Curvatura retina	-0.1022 (inversa de -9.7847mm)
Asfericitat	0.01

z	x
42,2736667	-5,4032
42,9713333	-
43,487	-2,824
43,8063333	-1,4279
43,929	0,00018333

x	z
-5,4032	-1,6287591
-	-
4,15873333	0,92824805
-2,824	-0,4164732
-	-
-1,4279	0,10475406
0,00018333	-1,7175E-09
-	-
1,4279	0,10475406
2,824	-0,4164732
-	-
4,15873333	0,92824805
5,4032	-1,6287591



D'aquesta manera hem obtingut la forma exacte de la quarta imatge diòptrica de l'ull de LeGrand:



**Figura 22. Quarta imatge diòptrica amb la retina plana posada inicialment**

Per obtindre la primera, segona i tercera imatges diòptriques l'únic que es va haver de fer va ser anar mantenint els índex de les superfícies anteriors per tot l'ull, es a dir, la primera imatge diòptrica és la formada per la refracció del raig incident amb la primera cara de la còrnia (pas de  $n=1$  a  $n=1.3771$ ) i per tant vam haver de modificar la taula *optics* de tal manera que tots els índex del sistema menys el de l'aire fossin l'índex de refracció de la còrnia (1.3771). Per la taula *rays* no hi va haver cap mena de modificació tret del reajustament dels rajos per part del Beam4.

8 surfaces					15 rays				
Index	Z	Curv	Type	Diam	X0	Xfinal	@	U0	note
1	:20	:0.1282051	:L	:8	9.8	:-11.5620		:-0.342020	:OK 8
1.3771	:20.550	:0.1538461	:L	:8	8.3	:-11.0357		:-0.342020	:OK 8
1.3771	:23.600	:	:I	:2.65	6.9	:-10.4197		:-0.342020	:OK 8
1.3771	:23.600	:0.0980392	:L	:8	7.6	:-8.6368		r-0.258819	:OK 8
1.3771	:27.600	:-0.166666	:L	:8	6.1	:-8.1689		r-0.258819	:OK 8
1.3771	:44.197	:	:L	:15	4.7	:-7.6390		r-0.258819	:OK 8
1.3771	:48.241	:-0.0922	:L	:16	5.5	:-5.8242		b-0.1736	:OK 8
1.3771	:60	:	:F	:30	4	:-5.3925		b-0.1736	:OK 8
:	:	:	:	:	2.6	:-4.9277		b-0.1736	:OK 8
:	:	:	:	:	3.5	:-3.1032		g-0.0871	:OK 8
:	:	:	:	:	2	:-2.6857		g-0.0871	:OK 8
:	:	:	:	:	0.6	:-2.2678		g-0.0871	:OK 8
:	:	:	:	:	1.4	:-0.3931		:0.00001	:OK 8
:	:	:	:	:	0	:0.0002		:0.00001	:OK 8
:	:	:	:	:	-1.4	:0.3936		:0.00001	:OK 8

Figura 23. Taules per la primera imatge diòptrica

A la imatge es pot veure com s'ha posat l'índex de refracció de 1.3771 a totes les superfícies per tal que la imatge refractada a la primera cara de la còrnia es mantingui i es formi per darrere de l'ull una mica més enllà de la retina com s'indica teòricament:

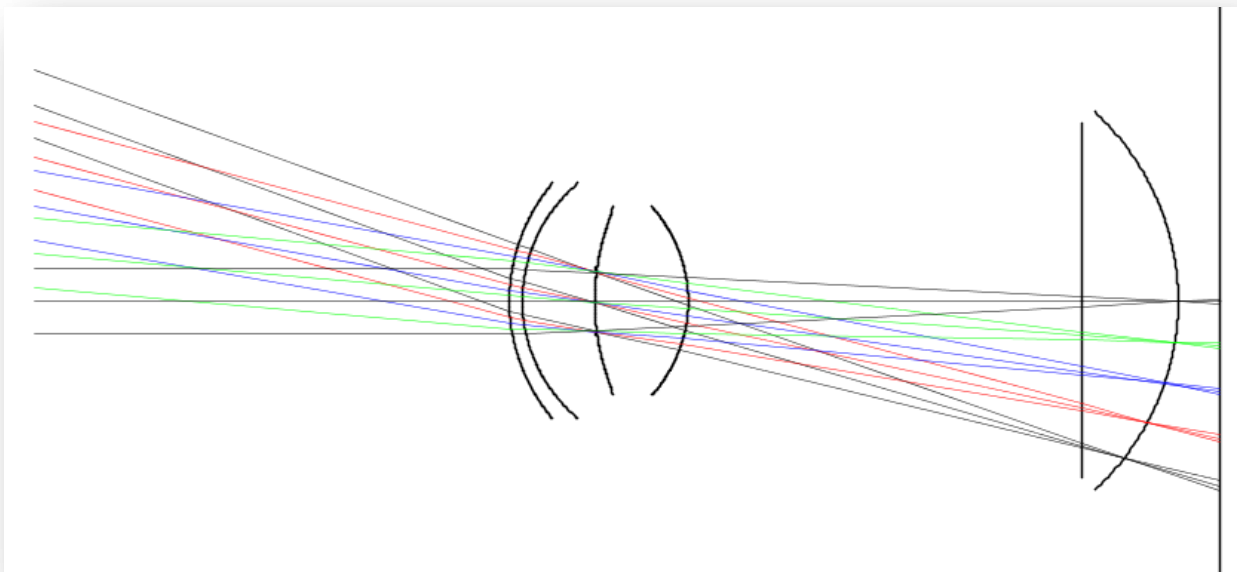


Figura 24. Primera imatge diòptrica i retina plana posada originalment

Fent la comprovació del punt mig del feix a  $0^\circ$  tan de la quarta com de la primera imatge diòptrica vam obtenir que la quarta imatge diòptrica amb els rajos de  $0^\circ$  es trobava a 44.197mm del punt origen del sistema (coincident amb la retina de l'ull) i amb la primera imatge diòptrica vam veure que, pel feix de  $0^\circ$ , es trobava a 48.241 mm de l'origen.

Seguidament vam seguir el mateix procediment per trobar la posició de la segona imatge diòptrica:

row=14 col=20 OPTeditor					row=T col=1 RAYeditor				
8 surfaces					15 rays				
Index	Z	Curv	Type	Diam	X0	Xfinal	@	U0	note
1	:20	:0.1282051	:L	:8	9.8	: -11.5620:		: -0.342020:	OK 8
1.3771	:20.550	:0.1538461	:L	:8	8.3	: -11.0357:		: -0.342020:	OK 8
1.3374	:23.600	:	:I	:2.65	6.9	: -10.4197:		: -0.342020:	OK 8
1.3374	:23.600	:0.0980392	:L	:8	7.6	: -8.6368:		r-0.258819:	OK 8
1.3374	:27.600	:-0.166666	:L	:8	6.1	: -8.1689:		r-0.258819:	OK 8
1.3374	:44.197	:	:L	:15	4.7	: -7.6390:		r-0.258819:	OK 8
1.3374	:51.241	:-0.0922	:L	:16	5.5	: -5.8242:		b-0.1736	:OK 8
1.3374	:60	:	:F	:30	4	: -5.3925:		b-0.1736	:OK 8
:	:	:	:	:	2.6	: -4.9277:		b-0.1736	:OK 8
:	:	:	:	:	3.5	: -3.1032:		g-0.0871	:OK 8
:	:	:	:	:	2	: -2.6857:		g-0.0871	:OK 8
:	:	:	:	:	0.6	: -2.2678:		g-0.0871	:OK 8
:	:	:	:	:	1.4	: -0.3931:		:0.00001	:OK 8
:	:	:	:	:	0	: 0.0002:		:0.00001	:OK 8
:	:	:	:	:	-1.4	: 0.3936:		:0.00001	:OK 8

Figura 25. Taules de la segona imatge diòptrica

Per aquesta imatge s'ha mantingut l'índex de l'aire i el de la còrnia però, a partir d'aquí, hem posat el 1.3374 fins al final del sistema òptic per tal que es formi la segona imatge diòptrica (refracció del raig a la segona cara de la còrnia).

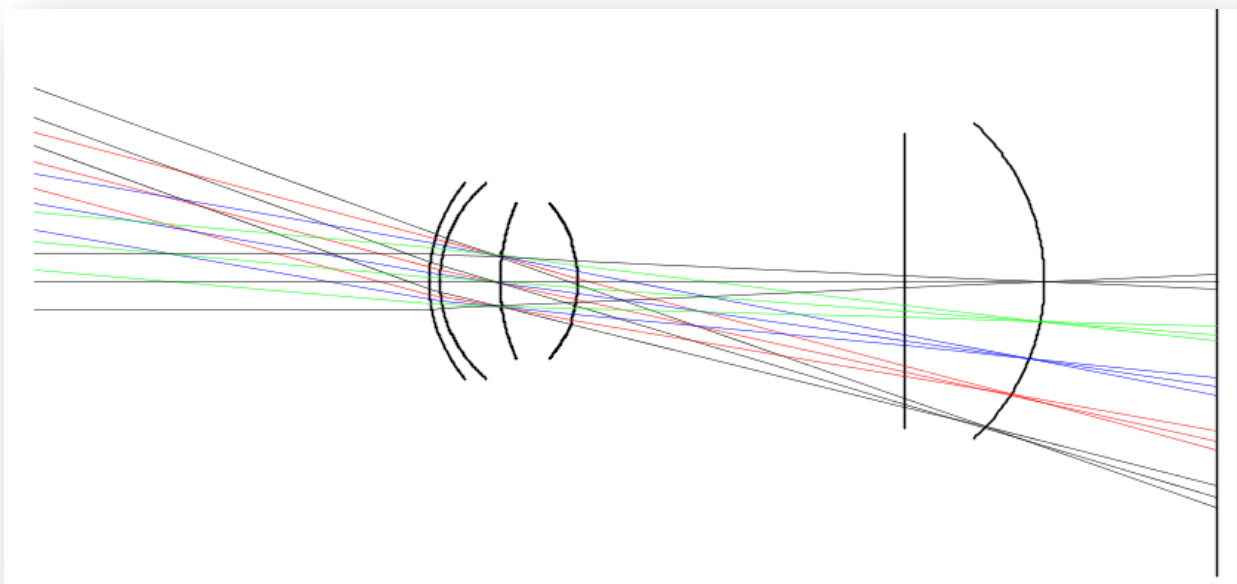


Figura 26. Segona imatge diòptrica amb la retina plana original

La posició d'aquesta imatge en el feix de referència de  $0^\circ$  va donar una posició de 51.241 mm respecte l'eix del sistema, molt més allunyada que la quarta (44.197 mm) i que la primera (48.241 mm) tal com indica la teoria.

Finalment només quedava per representar la tercera imatge diòptrica que és la imatge refractada a la primera cara del cristal·lí, així doncs a la taula *optics* es van mantenir els índex de l'aire, còrnia, humor aquós i l'índex del cristal·lí ja es va estendre fins al final del sistema òptic perquè es formés la tercera imatge diòptrica:

8 surfaces					15 rays				
Index	Z	Curv	Type	Diam	X0	Xfinal	@	U0	note
1	:20	:0.1282051:L	:	:8	9.8	:-11.5620:	:	:-0.342020:OK	8
1.3771	:20.550	:0.1538461:L	:	:8	8.3	:-11.0357:	:	:-0.342020:OK	8
1.3374	:23.600	:	:I	:2.65	6.9	:-10.4197:	:	:-0.342020:OK	8
1.3374	:23.600	:0.0980392:L	:	:8	7.6	:-8.6368:	:	r-0.258819:OK	8
1.4200	:27.600	:-0.166666:L	:	:8	6.1	:-8.1689:	:	r-0.258819:OK	8
1.4200	:44.197	:	:L	:15	4.7	:-7.6390:	:	r-0.258819:OK	8
1.4200	:48.737	:-0.0945:L	:	:16	5.5	:-5.8242:	:	b-0.1736:OK	8
1.4200	:60	:	:F	:30	4	:-5.3925:	:	b-0.1736:OK	8
:	:	:	:	:	2.6	:-4.9277:	:	b-0.1736:OK	8
:	:	:	:	:	3.5	:-3.1032:	:	g-0.0871:OK	8
:	:	:	:	:	2	:-2.6857:	:	g-0.0871:OK	8
:	:	:	:	:	0.6	:-2.2678:	:	g-0.0871:OK	8
:	:	:	:	:	1.4	:-0.3931:	:	:0.00001:OK	8
:	:	:	:	:	0	:0.0002:	:	:0.00001:OK	8
:	:	:	:	:	-1.4	:0.3936:	:	:0.00001:OK	8

Figura 27. Taules de la tercera imatge diòptrica

I la representació va ser la següent:

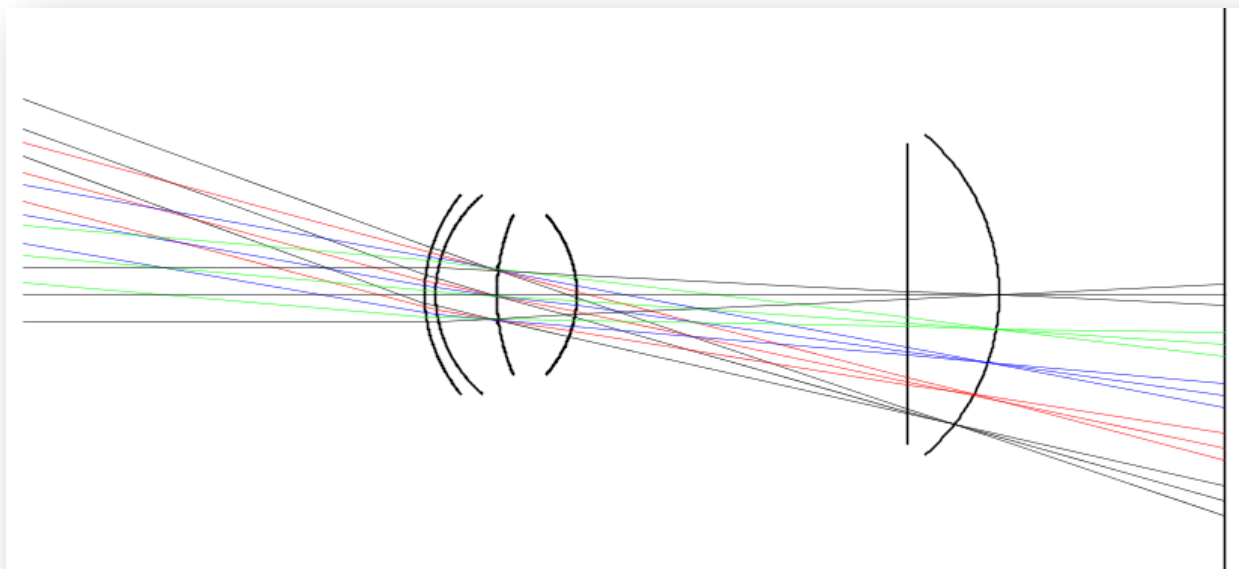


Figura 28. Tercera imatge diòptrica amb la retina plana original

Tenint en compte el raig de referència a 0° vam trobar amb l'excel que la posició d'aquesta imatge era a 48.737 mm respecte l'eix del sistema. Com s'indica a l'esquema de les imatges de la teoria aquesta imatge realment es forma entre la primera (48.241 mm) i la segona (51.241 mm).

### 3.4.2 Representació de la quarta imatge diòptrica amb lents oftàlmiques

Un cop vistes les quatre imatges diòptriques en un ull emmetrop vam decidir de fer la quarta imatge diòptrica però amb ulls ametrops i amb diferents lents correctores. En total hem utilitzat quatre lents de diferent potència (dues positives i dues negatives) i dues amb índex de refracció 1.523 i les altres dos amb un índex de refracció de 1.7. Concretament vam agafar: una lent de +6.00D amb  $n= 1.523$ , una lent negativa de -7.50D amb  $n= 1.523$ , una lent de +1.00D amb  $n= 1.7$  i per últim una lent de -5.00D amb  $n= 1.7$ .

#### Lent de +6.00D\*

Amb aquesta lent vam partir de les dades prèvies de les sagetes tenint:

$$n= 1.523$$

$$y= 18.14\text{mm} \quad s= 3.22\text{mm} \quad y'= 21.89\text{mm} \quad s'= 2.03\text{mm}$$

A partir d'aquí vam trobar els dos radis corresponents a les cares de la lent ( els quals era necessari saber per tal de posar al Beam4 la curvatura d'aquestes superfícies), les potències i el gruix de centre.

$$R_1= 52.71\text{mm} \quad R_2= 119.04\text{mm} \quad P_1= 9.92\text{D} \quad P_2= -4.39\text{D} \quad E_c= 6.53\text{mm}$$

Un cop trobats els paràmetres de la lent vam passar a calcular els plans principals d'aquesta lent i finalment la nova posició de la pupil·la d'entrada:

$$SH_L= -3.41 \times 10^{-3}\text{m} \quad SH'_L= -1.17 \times 10^{-3}\text{m}$$

També vam verificar que es complís la condició següent de neutralització amb ullera:

$$R= 6.46 \quad P_{vp}= +6.00 \quad \delta_v= 12\text{mm}$$

$$1/6.46 \cong 1/6 - 12 \times 10^{-3}$$

Finalment es va determinar la nova posició de la pupil·la d'entrada del sistema amb la lent davant:

$$x= 24.45 \text{ mm} \quad y= 3.23 \text{ mm}$$

Per tal de que el raig apuntés a aquesta nova pupil·la d'entrada vam haver de variar el diàmetre de l'iris del sistema a 2.85mm.

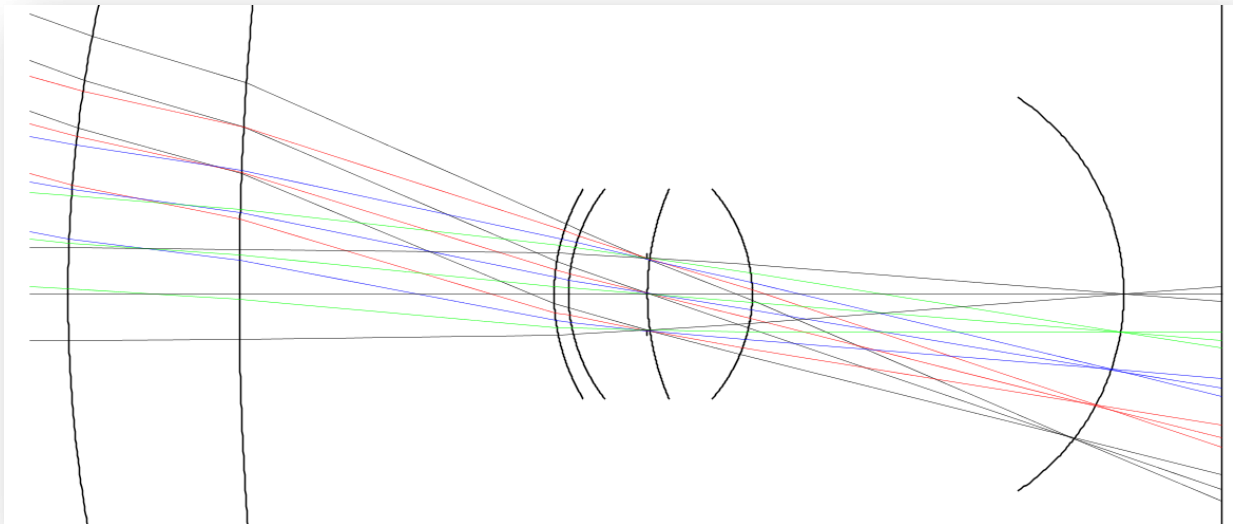
**\* Els càlculs complets es troben als annexes del treball.**

8 surfaces					15 rays				
Index	Zvx	Curv	Type	Diam	X0	Xfinal	@	U0	note
1	:1.47	:0.0189717:L		:30	10.7	: -7.9067:		:-0.342020:OK 8	
1.523	:8	:0.0084005:L		:30	8.9	: -7.4451:		:-0.342020:OK 8	
1	:20	:0.1282051:L		:8	7	: -6.9008:		:-0.342020:OK 8	
1.3771	:20.550	:0.1538461:L		:8	8.3	: -5.8537:		r-0.258819:OK 8	
1.3374	:23.600	:	:I	:2.85	6.5	: -5.4699:		r-0.258819:OK 8	
1.3374	:23.600	:0.0980392:L		:8	4.6	: -5.0207:		r-0.258819:OK 8	
1.4200	:27.600	:-0.166666:L		:8	6.0	: -3.9150:		b-0.1736 :OK 8	
1.3360	:45.5	:	:F	:60	4.3	: -3.6021:		b-0.1736 :OK 8	
:	:	:	:	:	2.4	: -3.2237:		b-0.1736 :OK 8	
:	:	:	:	:	3.9	: -2.0852:		g-0.0871 :OK 8	
:	:	:	:	:	2.1	: -1.7808:		g-0.0871 :OK 8	
:	:	:	:	:	0.3	: -1.4633:		g-0.0871 :OK 8	
:	:	:	:	:	1.8	: -0.2997:		:0.00001 :OK 8	
:	:	:	:	:	0	: 0.0002:		:0.00001 :OK 8	
:	:	:	:	:	-1.8	: 0.3000:		:0.00001 :OK 8	

Figura 29. Taules de la lent de +6.00D

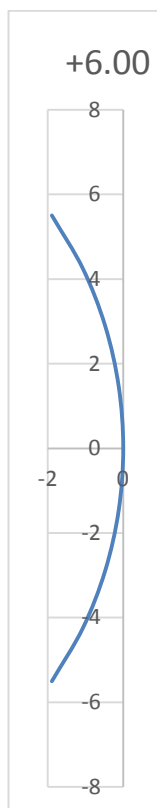
A la taula *optics* vam afegir la lent per davant de la còrnia a una distància de 12mm respecte la segona cara de la lent i la separació entre les dues superfícies de la lent separades pel seu gruix de centre així com l'índex de refracció corresponent de 1.523. A la taula *rays* vam seleccionar unes altures per tal que els rajos no apuntessin a la pupil·la d'entrada amb més dels 20° permessos. Fent el triangle corresponent a la distància de la pupil·la d'entrada i amb la tangent de 20° trobem que l'altura de 10.7mm es troba dins del marge permès i, per tant, amb tota seguretat els rajos entren amb menys de 20° d'inclinació.





**Figura 30. Quarta imatge diòptrica ben formada amb la lent de +6.00D**

Com en el cas de l'ull emmetrop vam determinar la posició i la curvatura de la quarta imatge diòptrica donant els següents resultats:



La quarta imatge per la lent de +6.00 ens va donar una mica més curvada que la de l'ull emmetrop:

$$C_{\text{ull emmetrop}} = -9.78 \text{ mm}$$

$$C_{\text{ull } +6.00\text{D}} = -9.00 \text{ mm}$$

I la seva posició (prenent de nou el feix a 0° com a referència respecte l'ull emmetrop) ens va resultar en un ull un pèl més petit:

$$\text{Posició retina / imatge emmetrop: } 44.197 \text{ mm}$$

$$\text{Posició imatge } +6.00: 41.763 \text{ mm}$$

### Lent de +1.00D

Amb aquesta lent hem partit directament de les dades dels radis de curvatura de les seves dues cares sabent que l'índex de refracció és de 1.7. El primer pas va ser trobar les seves potències així com el seu gruix de centre:

$$R_1 = 92.71\text{mm} \quad R_2 = 105.95\text{mm}$$

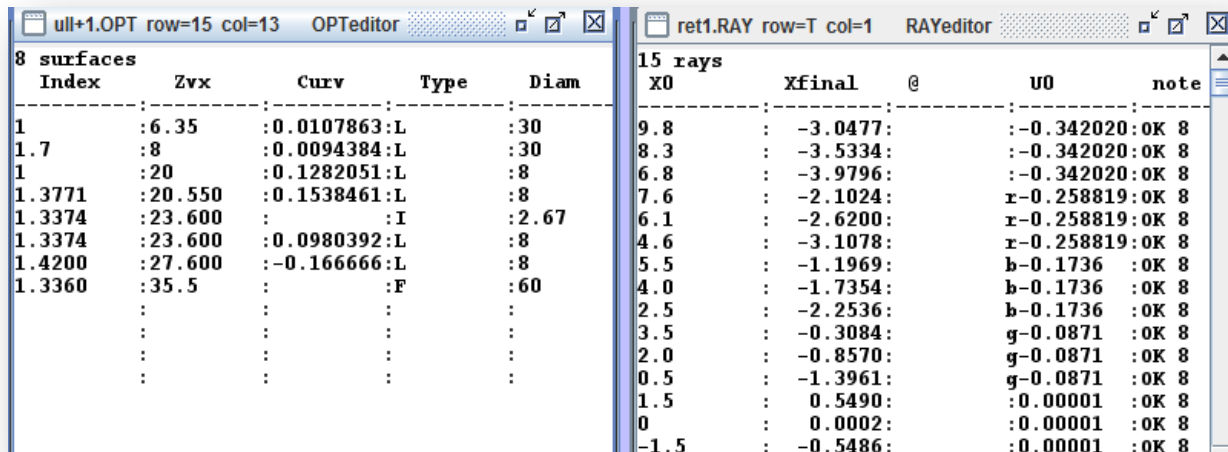
$$P_1 = +7.75\text{D} \quad P_2 = -6.60\text{D} \quad E_c = 1.65\text{mm}$$

Comentar que el gruix de centre és molt menor que el de la lent de +6.00D com ho justifica la graduació més petita i l'índex de refracció més gran.

Seguidament vam determinar els seus plans principals i la pupil·la d'entrada d'aquesta lent, així com la relació entre el punt remot i al distància de vèrtex posterior de la lent:

$$SH_L = -6.75 \times 10^{-3}\text{m} \quad SH'_L = -6.07 \times 10^{-3}\text{m} \quad x_{PE} = 36.02\text{mm} \quad y_{PE} = 3.03\text{mm}$$

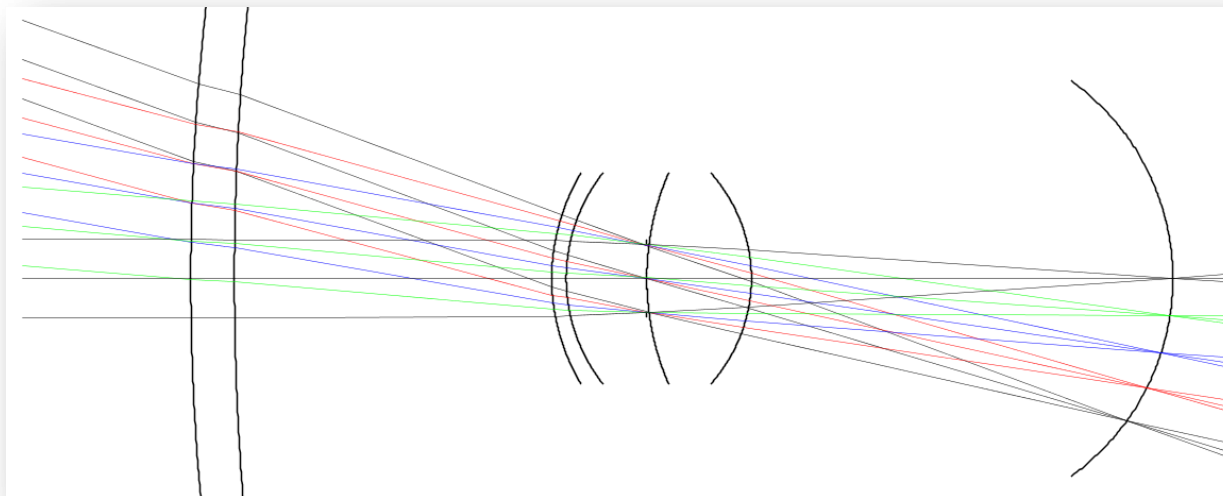
$$1/1.012 \cong 1/1 - 12 \times 10^{-3} \quad x = 22.70\text{mm} \quad y = 3.03\text{mm}$$



8 surfaces					15 rays				
Index	Zvx	Curv	Type	Diam	X0	Xfinal	@	U0	note
1	:6.35	:0.0107863:L	:	:30	9.8	: -3.0477:	:	:-0.342020:OK	8
1.7	:8	:0.0094384:L	:	:30	8.3	: -3.5334:	:	:-0.342020:OK	8
1	:20	:0.1282051:L	:	:8	6.8	: -3.9796:	:	:-0.342020:OK	8
1.3771	:20.550	:0.1538461:L	:	:8	7.6	: -2.1024:	r-	0.258819:OK	8
1.3374	:23.600	:	:I	:2.67	6.1	: -2.6200:	r-	0.258819:OK	8
1.3374	:23.600	:0.0980392:L	:	:8	4.6	: -3.1078:	r-	0.258819:OK	8
1.4200	:27.600	:-0.166666:L	:	:8	5.5	: -1.1969:	b-	0.1736 :OK	8
1.3360	:35.5	:	:F	:60	4.0	: -1.7354:	b-	0.1736 :OK	8
:	:	:	:	:	2.5	: -2.2536:	b-	0.1736 :OK	8
:	:	:	:	:	3.5	: -0.3084:	g-	0.0871 :OK	8
:	:	:	:	:	2.0	: -0.8570:	g-	0.0871 :OK	8
:	:	:	:	:	0.5	: -1.3961:	g-	0.0871 :OK	8
:	:	:	:	:	1.5	: 0.5490:	:	0.00001 :OK	8
:	:	:	:	:	0	: 0.0002:	:	0.00001 :OK	8
:	:	:	:	:	-1.5	: -0.5486:	:	0.00001 :OK	8

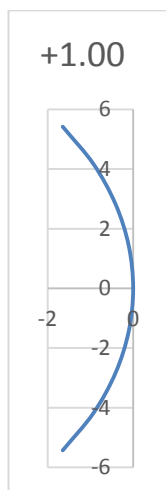
Figura 31. Taules per la lent de +1.00D

Un cop més hem ajustat a la taula *òptics* la curvatura de la lent, el seu índex i el seu gruix de centre. A la taula *rays* s'han determinat les altures per a que els rajos apuntin amb menys de 20° a la nova pupil·la d'entrada.



**Figura 32. Quarta imatge diòptrica ben formada amb la lent de +1.00D**

L'anàlisi de la quarta imatge diòptrica en aquestes condicions va ser el següent:



La curvatura d'aquesta imatge va resultar ser de -9.25mm, trobant-se aquest valor entre la curvatura de la imatge de l'ull emmetrop i la de l'ull amb +6.00D.

La posició va resultar ser de 43.545 mm trobant-se també entre el 44.197mm i el 41.763mm com era d'esperar.

## Lent de -7.50D

Aquest cop utilitzarem una lent negativa d'índex 1.523 davant del nostre sistema òptic. Per trobar els paràmetres d'aquesta lent hem partit de les potències esferomètriques per tal de variar una mica el mètode de les anteriors lents i el que hem hagut de trobar han estat els radis de curvatura ja que les potències esferomètriques, al trobar-nos en una lent de 1.523 d'índex de refracció, equivalen a les potències diòptriques de la lent:

$$R_1 = 348.66\text{mm} \quad R_2 = 58.11\text{mm} \quad P_{\text{esf1}} = P_1 = +1.50\text{D} \quad P_{\text{esf2}} = P_2 = -9.00\text{D}$$

El gruix de bora el teníem mesurat prèviament amb un espessímetre amb un resultat de 0.95mm.

Com amb les altres lents, un cop tenim totes les dades anteriors, calculem la posició dels plans principals de la lent, la posició de la PE i la igualtat entre punt remot i focal de vèrtex posterior:

$$SH_L = 7.488 \times 10^{-4}\text{m} \quad SH'_L = 1.0748 \times 10^{-3}\text{m} \quad x_{PE} = 20.8\text{mm} \quad y_{PE} = 2.75\text{mm}$$

$$1/-6.88 \cong 1/-7.50 - 12 \times 10^{-3}$$

ull-7.5 row=8 col=14 OPTeditor					ret750.RAY row=12 col=68 RAYeditor						
8 surfaces	Index	Zvx	Curv	Type	Diam	15 rays	X0	Xfinal	@	U0	note
1		7.05	0.0028681:L		30	8.7		-7.1698		-0.342020	OK 8
1.523		8	0.0172087:L		30	7.5		-6.8969		-0.342020	OK 8
1		20	0.1282051:L		8	6.4		-6.5910		-0.342020	OK 8
1.3771		20.550	0.1538461:L		8	6.7		-5.3752	r	-0.258819	OK 8
1.3374		23.600		I	2.43	5.5		-5.1403	r	-0.258819	OK 8
1.3374		23.600	0.0980392:L		8	4.5		-4.9076	r	-0.258819	OK 8
1.4200		27.600	-0.166666:L		8	4.9		-3.6404	b	-0.1736	OK 8
1.3360		50.5		F	60	3.7		-3.4280	b	-0.1736	OK 8
						2.5		-3.1861	b	-0.1736	OK 8
						3.0		-1.9033	g	-0.0871	OK 8
						1.8		-1.7038	g	-0.0871	OK 8
						0.7		-1.5075	g	-0.0871	OK 8
						1.2		-0.2021		0.00001	OK 8
						0		0.0002		0.00001	OK 8
						-1.2		0.2024		0.00001	OK 8

Figura 33. Taules per la lent de -7.50D

Es pot veure com hem posat les inverses dels radis de curvatura de la lent i la separació entre cares (amb índex 1.523) és el 0.95mm de gruix de centre de la lent.

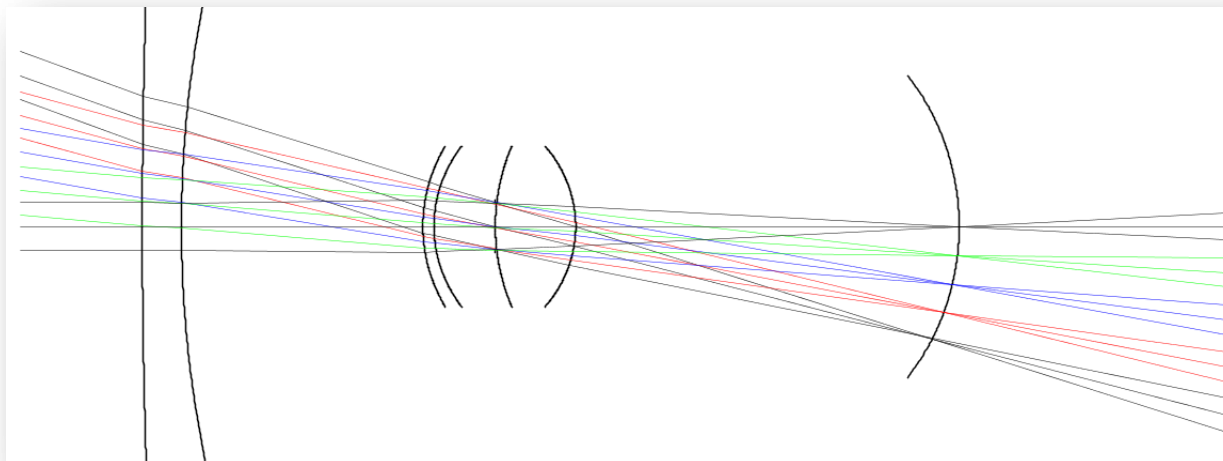
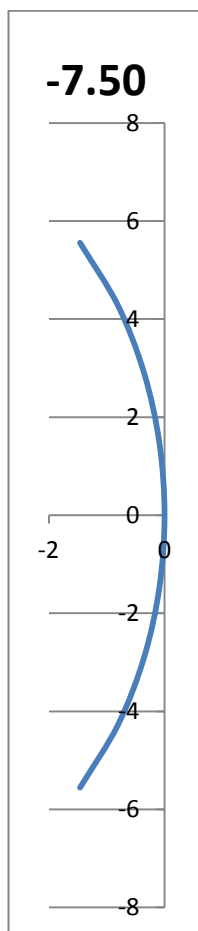


Figura 34. Quarta imatge diòptrica formada amb la lent de -7.50D

Finalment la representació de la imatge corresponent amb els punts mitjos d'intersecció dels rajos va donar els següents resultats:



La curvatura de la imatge va resultar ser de -12.35mm, un valor superior als -9.78mm de l'ull emmetrop i, per tant, indicant una retina menys curvada amb la conseqüència que reflecteix que l'ull es lleugerament més gran que l'emmetrop.

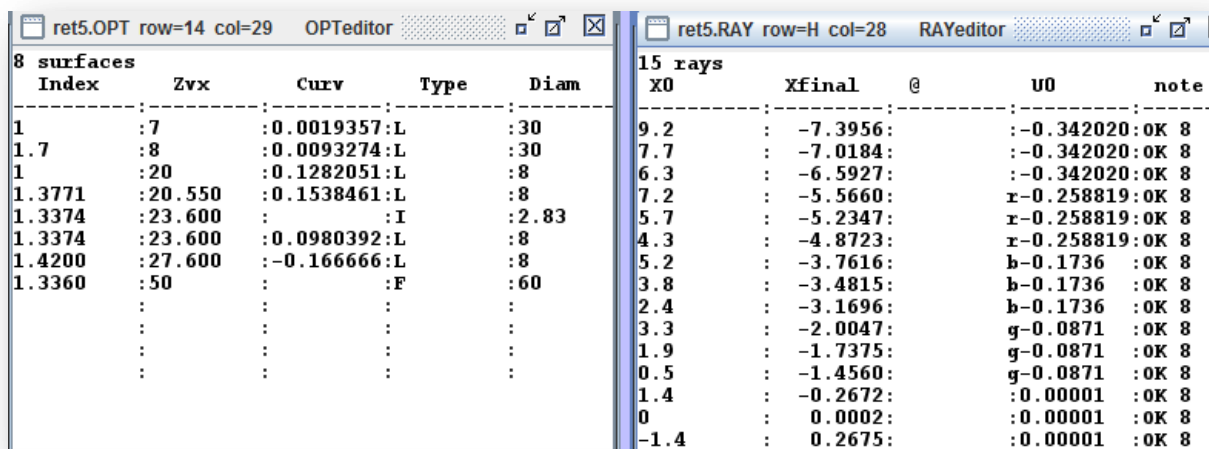
La posició també va donar més allunyada, concretament a 46.717 (mirant el feix de referència a  $0^\circ$ ), reafirmant la grandària de l'ull.

### Lent de -5.00D

Per acabar, l'última lent que vam seleccionar va ser de -5.00 diòptries i amb un índex de refracció de 1.7, amb aquesta lent vam partir de les dades dels radis i a partir d'aquí es van trobar les potències diòptriques per tal de calcular posteriorment els plans principals:

$$P_1 = +1.36D \quad P_2 = -6.53D \quad E_c = 1\text{mm} \quad SH_L = 7.427 \times 10^{-4}\text{m} \quad SH'_L = 1.154 \times 10^{-3}\text{m}$$

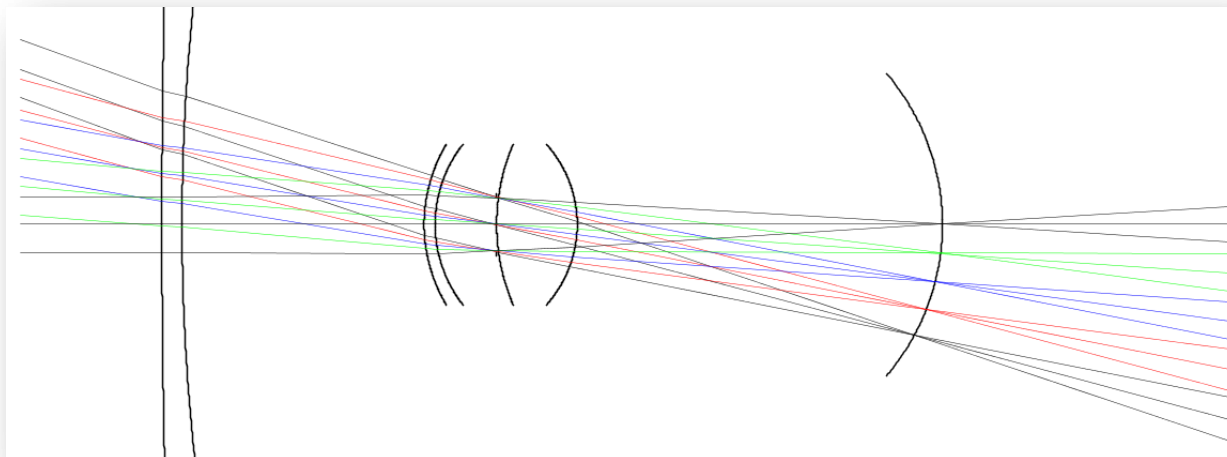
$$1/-4.72 \cong 1/-5 - 12 \times 10^{-3}$$



8 surfaces					15 rays				
Index	Zvx	Curv	Type	Diam	X0	Xfinal	@	U0	note
1	:7	:0.0019357:L		:30	9.2	: -7.3956:		:-0.342020:OK 8	
1.7	:8	:0.0093274:L		:30	7.7	: -7.0184:		:-0.342020:OK 8	
1	:20	:0.1282051:L		:8	6.3	: -6.5927:		:-0.342020:OK 8	
1.3771	:20.550	:0.1538461:L		:8	7.2	: -5.5660:		r-0.258819:OK 8	
1.3374	:23.600	:	:I	:2.83	5.7	: -5.2347:		r-0.258819:OK 8	
1.3374	:23.600	:0.0980392:L		:8	4.3	: -4.8723:		r-0.258819:OK 8	
1.4200	:27.600	:-0.166666:L		:8	5.2	: -3.7616:		b-0.1736 :OK 8	
1.3360	:50	:	:F	:60	3.8	: -3.4815:		b-0.1736 :OK 8	
:	:	:	:	:	2.4	: -3.1696:		b-0.1736 :OK 8	
:	:	:	:	:	3.3	: -2.0047:		g-0.0871 :OK 8	
:	:	:	:	:	1.9	: -1.7375:		g-0.0871 :OK 8	
:	:	:	:	:	0.5	: -1.4560:		g-0.0871 :OK 8	
:	:	:	:	:	1.4	: -0.2672:		:0.00001 :OK 8	
:	:	:	:	:	0	: 0.0002:		:0.00001 :OK 8	
:	:	:	:	:	-1.4	: 0.2675:		:0.00001 :OK 8	

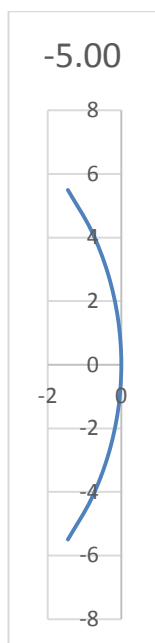
Figura 35. Taules per la lent de -5.00D

Com en els casos anteriors es van ajustar les altures per als rajos per passar per la pupil·la d'entrada amb angles no superiors als 20°. A la taula *optics* es van posar els paràmetres de curvatura, índex i gruix de centre de la lent.



**Figura 36. Quarta imatge diòptrica formada amb la lent de -5.00D**

Finalment la representació de la quarta imatge diòptrica va donar els següents resultats:



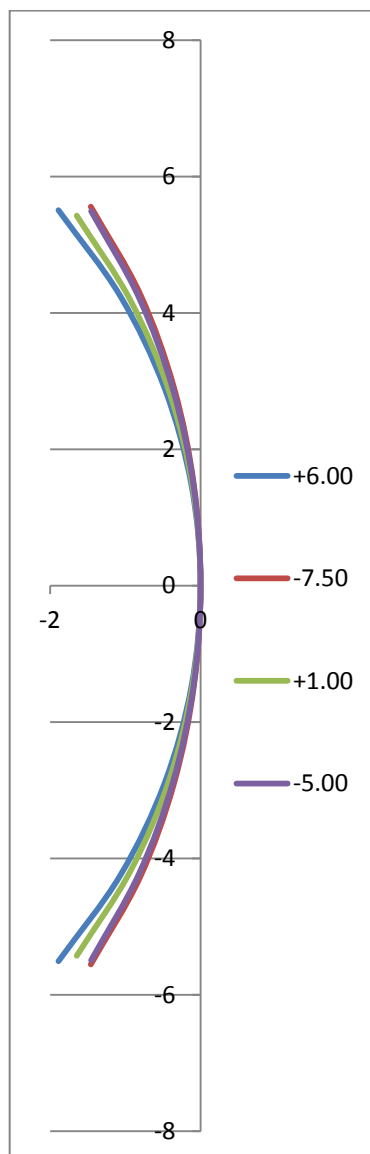
La posició de la imatge en el feix de referència de  $0^\circ$  va ser de 45.761mm respecte el pla origen tal com era d'esperar, ja que aquest resultat es troba entre la posició de la de l'ull emmetrop (44.197 mm) i la de més ametropia negativa:

(-7.50D a 46.717mm).

Referent a la curvatura va donar un radi de -11.58mm, valor que també està comprès entre el de l'ull emmetrop, -9.78mm i el valor de la retina de l'ull de -7.50D que era -12.35mm.

Quadre resum de les curvatures i posicions de la quarta imatge diòptrica en les diferents situacions i comparació gràfica de les curvatures del pla imatge:

ULL	CURVATURA	POSICIÓ
ull emmetrop	-9.78 mm	44.197 mm
amb lent +6.00D	-9.00 mm	41.763 mm
amb lent +1.00D	-9.25 mm	43.763 mm
amb lent -7.50D	-12.35 mm	46.717 mm
amb lent -5.00D	-11.58 mm	45.761 mm





## 5. Conclusions

Amb l'ajuda del programa de traçat de rajos hem aconseguit desenvolupar uns esquemes on es mostren clarament les posicions i la mida de les imatges diòptriques tal com ens havíem proposat. Amb aquest projecte hem pogut comprovar la teoria d'aquestes imatges a partir de la representació pràctica obtenint resultats molt satisfactoris ja que les bases teòriques senyalen exactament els resultats obtinguts.

En primer lloc si comparem les posicions de les quatre imatges diòptriques podem veure com la quarta imatge es forma justament sobre de la retina de l'ull emmetrop donant pas a l'anàlisi de les tres imatges restants:

Partim de la posició de 44.197mm on es troba la retina i la quarta imatge diòptrica, seguidament tenim la primera imatge diòptrica formada a 48.241mm de l'origen, en altres paraules a 4.044mm de la quarta. A continuació i segons els resultats tenim immediatament la tercera imatge diòptrica a 48.737mm molt aprop, menys d'1 mm de la primera tal com indica el quadre teòric. Finalment trobem la segona imatge diòptrica formada a 51.241mm respecte l'origen, on una vegada més es compleix la previsió de formació de la imatge.

La segona part del projecte consistia en col·locar quatre lents de diferent potència i amb dos índex de refracció diferents i, mitjançant el Beam4 determinar la mida i posició de la quarta imatge diòptrica. Un cop més la teoria de les ametropies axials es va complir i es va reflexar perfectament en els resultats de les imatges i en els esquemes obtinguts. Així doncs es va comprovar com un ull hipermetrop era lleugerament més petit que l'ull emmetrop model que vam utilitzar així com quan més potència positiva presentava l'ull més disminuïa la seva mida i augmentava la seva curvatura:

Tenim que la posició de la quarta imatge diòptrica de l'ull emmetrop era de 44.197 mm i la seva curvatura era de -9.784 mm i els resultats de l'ull amb més potència positiva (+6.00D) van ser d'una imatge a la posició de 41.763 mm i amb una curvatura de -9.00 mm. Els resultats mostren clarament com es pot traduir que l'ull amb l'ametropia de +6.00D és uns 2 mm més curt i una mica més curvat que l'ull emmetrop, evidentment els resultats de l'ull amb la lent de +1.00D van donar resultats compresos entre els dos ulls com era d'esperar.

Per acabar i comparar l'ull emmetrop amb els dos ulls miops es va trobar, amb l'ull de més potència negativa, la quarta imatge diòptrica a la posició de 46.717 mm respecte l'origen amb una curvatura de -12.35 mm, una imatge allunyada uns 2 mm més enllà que a l'ull emmetrop i amb menys curvatura. Els resultats amb la lent de -5.00D van donar resultats compresos entre l'ull emmetrop i l'ull amb l'ametropia de -7.50D. Finalment comentar que en un futur es podria fer un projecte semblant però posant lents astigmàtiques o lentilles per veure els resultats que s'obtenen sota aquestes altres situacions.

## 6. Bibliografia

- David A. Atchison; George Smith, *Optics of the human eye*. Oxford: Butterworth-Heinemann 2000. ISBN 0 7506 3775 7
- Yves Le Grand; *Optica fisiologica tomo 1: La dioptrica del ojo y su compensacion*. Departamento de optica Universidad Complutense Madrid; Sociedad Española de optometría.
- Susana Marcos; Pablo Artal; Javier Santamaría; Mariano Aguilar; Lorenzo Plaza, *Investigación en optica fisiologica en España: Un repaso a los orígenes*. Instituto de Óptica CSIC, Madrid 2006.
- W. Lotmar, *Theoretical eye model with Aspherics*. Swiss Office of weights and measures, CH 3084 Wabern, Switzerland 1971.
- Rafael Navarro, *The optical design of the human eye: a critical review*. J Optom 2009; 2:3 18
- Dra. Maria Cinta Puell Marín, *Óptica fisiológica, el sistema óptico del ojo y la visión binocular*. Universidad Complutense Madrid ISBN 1-4135-6363-5
- Larry N. Thibos; Ming Ye; Xiaoxiao Zhang; Arthur Bradley, *The chromatic eye: a new reduced eye model of ocular chromatic aberration in humans*. Department of visual sciences, Indiana University, Bloomington, Indiana 1992.
- M. Koomen; R. Tousey; R. Scolnik, *The spherical aberration of the eye*. US Naval research laboratory, Washington DC 1949.
- Andrew B. Watson; John I. Yellott, *A united formula for light-adapted pupil size*. NASA Ames research center, Moffet Field, CA, USA; Department of cognitive sciences, University of California, Irvine, CA, USA 2012.
- David A. Atchison; Nicola Pritchard; Katrina L. Schmid; Dion H. Scott; Catherine E. Jones; James M. Pope, *Shape of the retinal surface in emmetropia and myopia*. Centre for health research-optometry, School of physical and chemical sciences, Queensland University of technology, Brisbane, Queensland, Australia 2004.

## 7. Annexes: Annex I: Càlculs de les lents

Lent de +6.00D:

Pvp (D) = +6.00D			
y (mm)	s1 (mm)	y'(mm)	s2 (mm)
18.14	3.22	21.89	2.03

Figura 37. Taula de les sagetes i cordes de la lent de +6.00D

$$R_1 = \frac{3.22^2 + 18.14^2}{2 \times 3.22} = 52.71 \text{ mm}$$

$$R_2 = \frac{2.03^2 + 21.89^2}{2 \times 2.03} = 119.04 \text{ mm}$$

$$P_1 = \frac{1.523 - 1}{52.71} \times 1000 = 9.92 \text{ D}$$

$$P_2 = \frac{1 - 1.523}{119.04} \times 1000 = -4.39 \text{ D}$$

$$s\varphi_1 = 52.71 - \sqrt{52.71^2 - \frac{60^2}{2}} = 9.37 \text{ mm}$$

$$s\varphi_2 = 119.04 - \sqrt{119.04^2 - \frac{60^2}{2}} = 3.84 \text{ mm}$$

$$9.37 + 1 = 3.84 + E_c \quad E_c = 6.53 \text{ mm}$$

$$\delta_L = \frac{0 + 6.53 \times 10^{-3}}{1.523} = 4.29 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$H_{1S} H_L = 4.29 \times 10^{-3} \times 1 \times \frac{-4.39}{5.53} = -3.41 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$SH_L = 0 + -3.41 \times 10^{-3} = -3.41 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$H'_{2S} H'_L = -4.29 \times 10^{-3} \times 1 \times \frac{9.92}{5.53} = -7.70 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$SH'_L = 6.53 \times 10^{-3} + (-7.70 \times 10^{-3}) = -1.17 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$P_{vp} = \frac{9.92}{1 - \frac{6.53 \times 10^{-3}}{1.523} \times 9.92} + - 4.39 = +6.00D$$

$$R = \frac{6.00}{1 - 12 \times 10^{-3} \times 6.00} = 6.46D$$

$$1 / 6.46 \cong 1 / 6 - 12 \times 10^{-3}$$

$$x = ((1.17 + 23.038) \times 10^{-3}) \times (1 + 12 \times 10^{-3} \times 6.46) = 24.45 \text{ mm}$$

$$y = 3 \times (1 + 12 \times 10^{-3} \times 6.46) = 3.23 \text{ mm}$$

Lent de +1.00D:

Pvp(D) = +1.00D	
R1 (mm)	R2 (mm)
92.71	105.95

Figura 38. Taula amb els radis trobats experimentalment al laboratori de lents

$$P_1 = \frac{1.7 - 1}{92.71} \times 1000 = 7.55D$$

$$P_2 = \frac{1 - 1.7}{105.95} \times 1000 = -6.60D$$

$$s\varphi_1 = 92.71 - \sqrt{92.71^2 - \frac{60^2}{2}} = 4.99 \text{ mm}$$

$$s\varphi_2 = 105.95 - \sqrt{105.95^2 - \frac{60^2}{2}} = 4.34 \text{ mm}$$

$$4.99 + 1 = 4.34 + E_c \quad E_c = 1.65 \text{ mm}$$

$$\delta_L = \frac{0 + 1.65 \times 10^{-3}}{1.7} = 9.71 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$H_{1S} H_L = 9.71 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{-6.60}{0.95} = -6.75 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$SH_L = 0 + -6.75 \times 10^{-3} = -6.75 \times 10^{-3} m$$

$$H'_{2S} H'_L = -9.71 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{7.55}{0.95} = -7.72 \times 10^{-3} m$$

$$SH'_L = 1.65 \times 10^{-3} + (-7.72 \times 10^{-3}) = -6.07 \times 10^{-3} m$$

$$P_{vp} = \frac{7.55}{1 - \frac{1.65 \times 10^{-3}}{1.7} \times 7.55} + -6.60 = +1.00 D$$

$$R = \frac{1.00}{1 - 12 \times 10^{-3} \times 1.00} = 1.012 D$$

$$1 / 1.012 \cong 1 / 1 - 12 \times 10^{-3}$$

$$x = ((6.07 + 23.035) \times 10^{-3}) \times (1 + 12 \times 10^{-3} \times 1.012) = 22.70 mm$$

$$y = 3 \times (1 + 12 \times 10^{-3} \times 1.012) = 3.03 mm$$

*Lent de -7.50D:*

Pvo(D) = -7.50D			
P1 esf (D)	P2 esf (D)	nL	Ec (mm)
+1.50	-9.00	1.523	0.95

**Figura 39.** Taula amb les potències esferomètriques, índex i gruix de centre de la lent trobats experimentalment al laboratori de lents

$$R_1 = \frac{1.523 - 1}{1.50} \times 1000 = 348.66 mm$$

$$R_2 = \frac{1 - 1.523}{-9.00} \times 1000 = 58.11 mm$$

$$\delta_L = \frac{0 + 0.95 \times 10^{-3}}{1.523} = 6.24 \times 10^{-4} m$$

$$H_{1S} H_L = 6.24 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{-9.00}{-7.50} = 7.488 \times 10^{-4} m$$

$$SH_L = 0 + 7.488 \times 10^{-4} = 7.488 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$H'_{2S} H'_L = -6.24 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{1.50}{-7.50} = 1.248 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$SH'_L = 0.95 \times 10^{-3} + 1.248 \times 10^{-4} = 1.0748 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$P_{vp} = \frac{1.50}{1 - \frac{0.95 \times 10^{-3}}{1.523} \times 1.50} + \dots - 9.00 = \dots - 7.50D$$

$$R = \frac{-7.50}{1 - 12 \times 10^{-3} \times -7.50} = \dots - 6.88D$$

$$x = (23.038 - 1.0748) \times 10^{-3} \times (1 + 12 \times 10^{-3} + -6.88) = 20.8 \text{ mm}$$

$$y = 3 \times (1 + 12 \times 10^{-3} \times -6.88) = 2.75 \text{ mm}$$

*Lent de -5.00D:*

Pvp(D) = -5.00D	
R1 (mm)	R2 (mm)
516.59	107.21

Figura 40. Taula amb els radis trobats experimentalment al laboratori de lents

$$P_1 = \frac{1.7 - 1}{516.59} \times 1000 = 1.36D$$

$$P_2 = \frac{1 - 1.7}{107.21} \times 1000 = \dots - 6.53D$$

$$s\varphi_1 = 516.59 - \sqrt{516.59^2 - \frac{60^2}{2}} = 0.87 \text{ mm}$$

$$s\varphi_2 = 107.21 - \sqrt{107.21^2 - \frac{60^2}{2}} = 4.28 \text{ mm}$$

$$E_b = 4.41 \quad E_c = 1$$

$$\delta_L = \frac{0 + 1 \times 10^{-3}}{1.7} = 5.88 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$H_{1S} H_L = 5.88 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{-6.53}{-5.17} = 7.427 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$SH_L = 0 + (7.427 \times 10^{-4}) = 7.427 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$H'_{2S} H'_L = -5.88 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{1.36}{-5.17} = 1.546 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$SH' = 1 \times 10^{-3} + (1.546 \times 10^{-4}) = 1.154 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$P_{vp} = \frac{1.36}{1 - \frac{1 \times 10^{-3}}{1.7} \times 1.36} + \frac{-6.53}{-5.17} = -5.00 \text{ D}$$

$$R = \frac{-5.00}{1 - 12 \times 10^{-3} \times -5.00} = -4.72 \text{ D}$$

$$x = ((23.038 - 1.154) \times 10^{-3}) \times (1 + 12 \times 10^{-3} \times -4.72) = 20.64 \text{ mm}$$

## Annex II: Exemple de com calcular el punt mig d'intersecció dels raigs:

vermell									
x	y	vermell-blau							
35,5	0,5384	x	y						
45,5	-0,1001	45,926	0,0002						
Pendent	-0,06385								
Ord. Orig	2,805075								
blau		blau-verd							
x	y	x	y			x	y		
35,5	0,0002	44,197	0,0002			44,197	0,00018333		
45,5	0,0002								
Pendent	0								
Ord. Orig	0,0002								
verd		vermell-verd							
x	y	x	y						
35,5	-0,5381	42,468	0,00015						
45,5	0,1004								
Pendent	0,06385								
Ord. Orig	-2,804775								

Finestra de l'excel on es pot veure com es va calcular, per exemple, la posició de creuament del feix de tres rajos a 0° de la quarta imatge diòptrica de l'ull de Le Grand.

El procediment va ser col·locar dos plans finals diferents a l'ull en comptes de la retina, primer un pla final a 35.5mm i després un cop agafades les dades posar el pla final a 45.5. Fent aquest procediment el que vam obtenir van ser tres posicions de creuament en una recta: un punt de creuament pels rajos vermell i blau, un punt pels rajos blau i verd i un punt pels rajos vermell i verd. Amb aquesta informació es va fer una mitjana aritmètica i d'aquesta manera obteníem el punt mitjà on els tres rajos es creuaven.

En aquest cas del feix de 0° és el feix central que vam usar per delimitar la posició de la quarta imatge diòptrica.



## Annex III: Excels amb la quarta imatge diòptrica de cada ull amb lent:

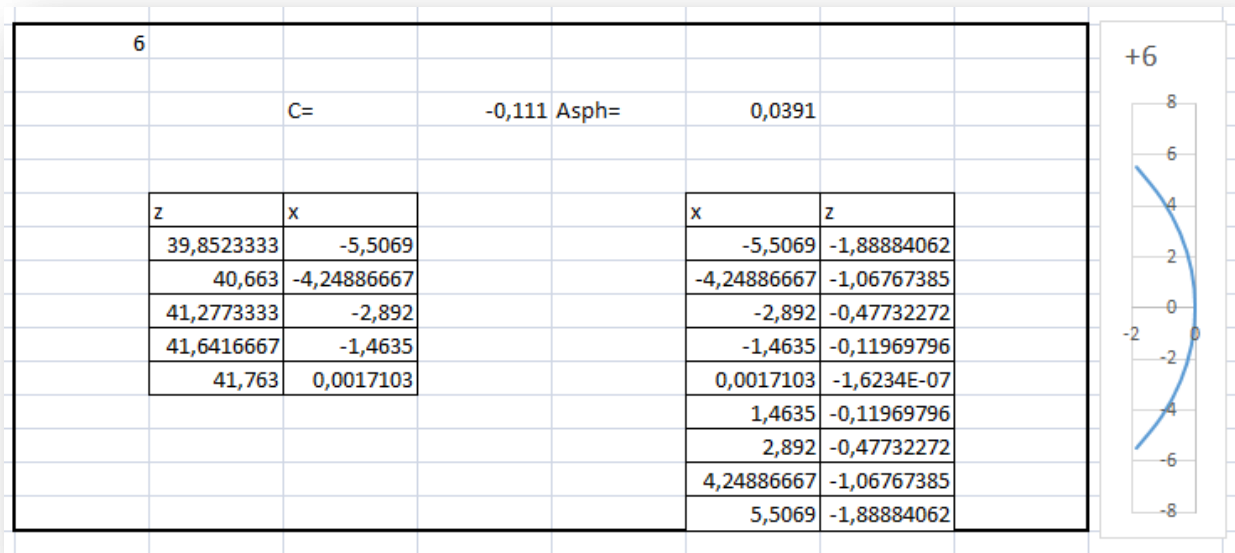


Figura 41. Quarta imatge diòptrica amb la lent de +6.00D

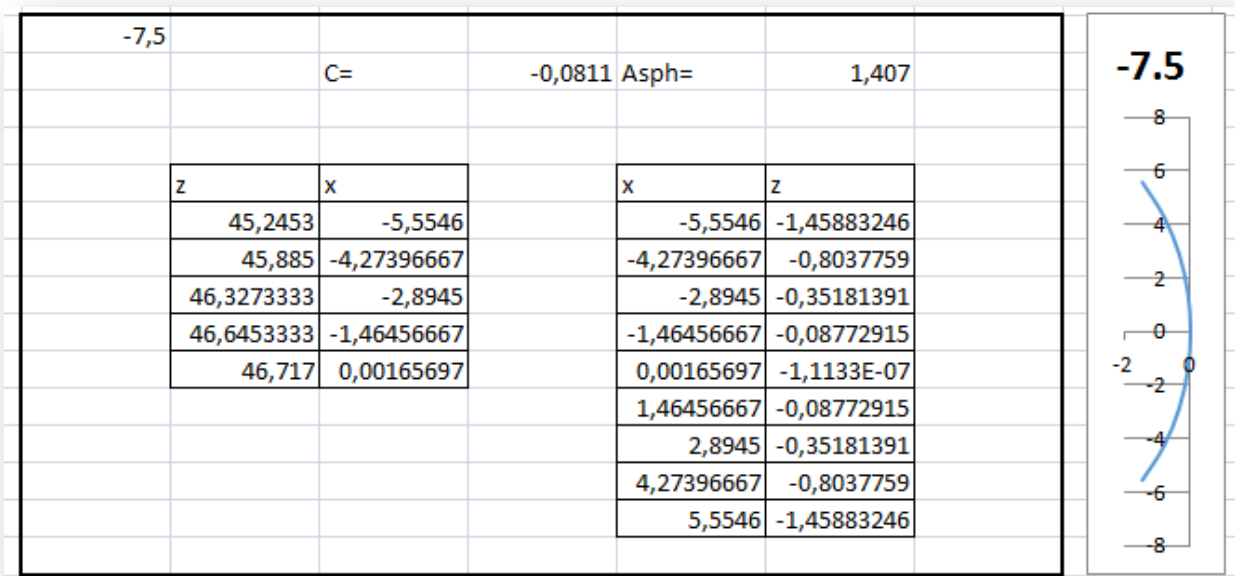


Figura 42. Quarta imatge diòptrica amb la lent de -7.50D

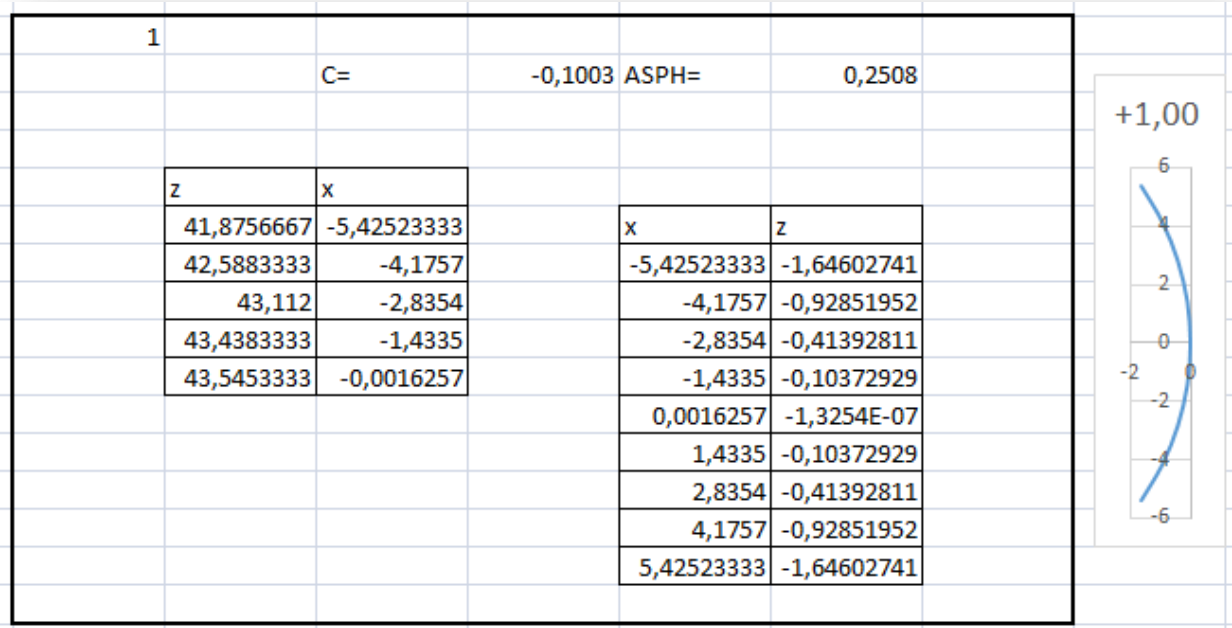


Figura 43. Quarta imatge diòptrica amb la lent de +1.00D

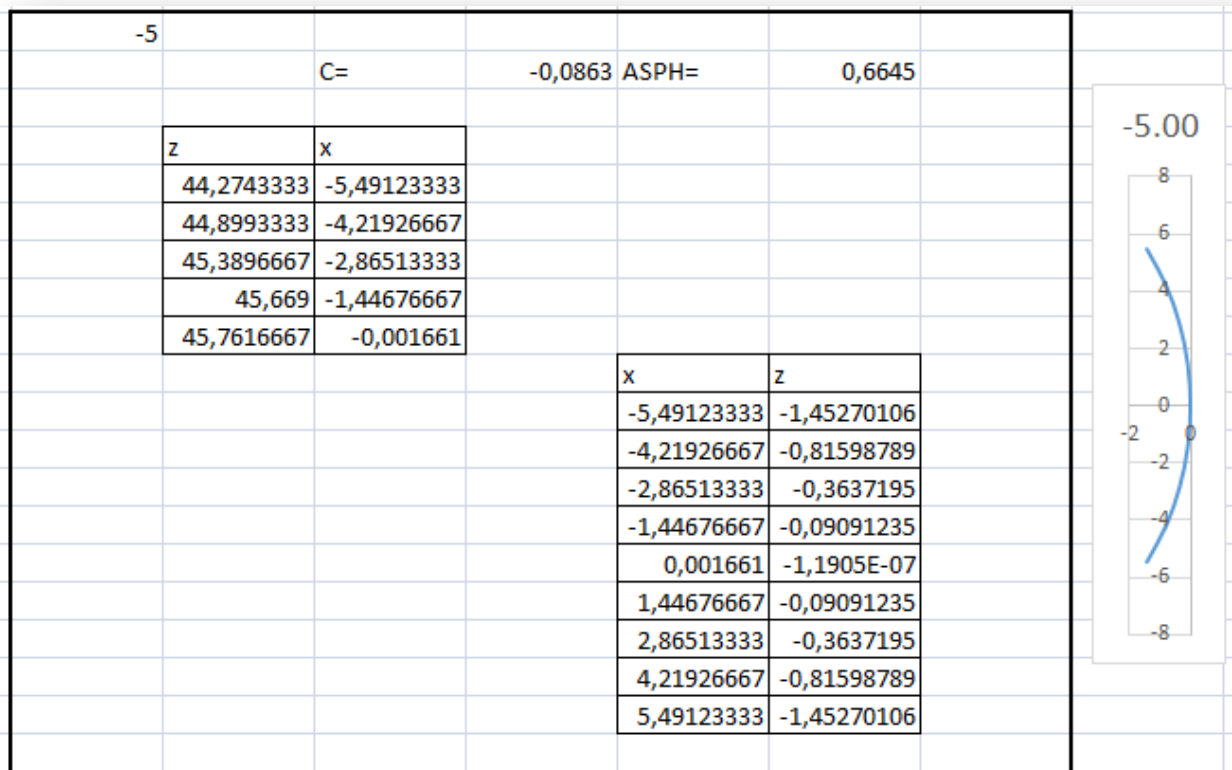


Figura 44. Quarta imatge diòptrica amb la lent de -5.00D





