



This is a repository copy of *On the problem solution of piezolaminated plate dynamic deformation based on a hybrid WKB-Galerkin method.*

White Rose Research Online URL for this paper:  
<http://eprints.whiterose.ac.uk/100641/>

---

**Article:**

Ganilova, OA and Gristchak, VZ (2008) On the problem solution of piezolaminated plate dynamic deformation based on a hybrid WKB-Galerkin method. Reports of Ukrainian Academy of Science (5). pp. 12-20.

---

**Reuse**

Unless indicated otherwise, fulltext items are protected by copyright with all rights reserved. The copyright exception in section 29 of the Copyright, Designs and Patents Act 1988 allows the making of a single copy solely for the purpose of non-commercial research or private study within the limits of fair dealing. The publisher or other rights-holder may allow further reproduction and re-use of this version - refer to the White Rose Research Online record for this item. Where records identify the publisher as the copyright holder, users can verify any specific terms of use on the publisher's website.

**Takedown**

If you consider content in White Rose Research Online to be in breach of UK law, please notify us by emailing [eprints@whiterose.ac.uk](mailto:eprints@whiterose.ac.uk) including the URL of the record and the reason for the withdrawal request.

## К решению проблемы динамического деформирования пьезоэлектрических многослойных пластин на основе гибридного ВКБ-Галеркин метода

Грищак В. З., Ганилова О. А.

В связи с широким использованием пьезоэлектрических материалов в современных композитных структурах [1, 2, 3], особый интерес представляет рассмотрение трехслойной пьезоэлектрической пластины, находящейся в электрическом поле под действием динамической внешней нагрузки. Следует отметить, что подобного рода задача была рассмотрена в работе [4] для вязкоупругих пластин, согласно модели слоистых оболочек из вязкоупругих пьезоматериалов, описанной в [5]. Решение основного уравнения задачи проводилось методами усреднения и конечных элементов.

Обращает на себя внимание тот факт, что поведение напряженно-деформируемых пластин с интегрированными в них активаторами и сенсорами, в основном, рассматривается на основе метода конечных элементов [4, 6]. Поэтому особый интерес представляют исследования в этой области на основе точных и приближенных аналитических методов, позволяющие провести качественный анализ полученных решений.

При анализе реальных механических процессов возникает необходимость в интегрировании сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих большие и малые параметры при старшей производной и не допускающих в ряде случаев точных решений. В этом случае приближенное решение поставленной задачи удобно искать в виде асимптотического решения по данному параметру.

Можно назвать ряд подходов, являющихся гибридными, которые основываются на идее построения «уточняющего» решения, построенного на основе последовательности координатных функций асимптотического разложения [7, 8, 9, 10]. Если специальным образом определить неизвестные параметры, то «уточняющее» гибридное решение исходного уравнения хорошо согласуется с точным решением на большом интервале изменения коэффициентов уравнения. Гибридный ВКБ-Галеркин метод, подробное описание которого представлено в работах [7, 8] демонстрирует особенно хорошие результаты при отыскании приближенного решения сингулярных дифференциальных уравнений, в частности с переменными коэффициентами, содержащих параметр при старшей производной, не зависимо от его величины.

В данной работе рассматривается трехслойная пьезоэлектрическая ортотропная пластина, находящаяся в электрическом поле под действием динамической внешней нагрузки, с учетом переменного во времени коэффициента демпфирования. Решение поставленной задачи основано на использовании гибридного ВКБ-Галеркин метода.

Рассмотрим прямоугольную пластинку ( $a \times b$ ) шарнирно опертую по всему контуру. Ортотропная пластинка симметрично собрана, относительно координатной плоскости  $xOy$ , из пьезоэлектрического материала и имеет толщину  $h$ . Приложенная нагрузка инициируется электрической составляющей  $V(x, y, t)$  и механической динамической составляющей в форме:

$$Z_m = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2\rho\varepsilon(t)h \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где

$$\rho = \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k h_k}{h}, \quad (2)$$

где  $\rho_k$ ,  $h_k$  – соответственно плотность и толщина  $k$ -го слоя.

Рис. 1. Ортоотропная симметрично собранная пьезоэлектрическая пластинка

Для рассматриваемой пластинки (рис. 1), согласно [11], для жесткостей получим следующие выражения:

$$K_{ik} = 0, \quad C_{ik} = 2[\delta_0 B_{ik}^0 (\delta - \delta_0) B_{ik}], \quad D_{ik} = \frac{2}{3}[\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta^3 - \delta_0^3) B_{ik}] \quad (3)$$

учитывая что

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta, \quad B'_{ik} = B''_{ik} = B_{ik}. \quad (4)$$

В этом случае основные уравнения движения пластинки, в рамках гипотез описанных в [11, 12, 13], можно записать в виде [1, 14, 15]:

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ik})u_0 + L_{12}(C_{ik})v_0 - L_{13}(K_{ik})w &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} \frac{\partial V^k}{\partial x}, \\ L_{22}(C_{ik})v_0 + L_{12}(C_{ik})u_0 - L_{23}(K_{ik})w &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} \frac{\partial V^k}{\partial y}, \\ L_{33}(D_{ik})w - L_{13}(K_{ik})u_0 - L_{23}(K_{ik})v_0 &= Z_m - \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ik}) &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{22}(C_{ik}) = C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L_{12}(C_{ik}) &= (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad L_{13}(K_{ik}) = K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}, \\ L_{23}(K_{ik}) &= K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}, \quad L_{33}(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Координата срединной плоскости  $k$ -го слоя, согласно [15], определена как

$$z_0^k = \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1}).$$

Отметим, что исходная система (5), с учетом (3), распадается на две самостоятельные подсистемы: первые два уравнения представляют собой некоторую плоскую задачу, а третье – задачу поперечного изгиба пластинки, которая нас интересует:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z, \quad (7)$$

$$\text{где } Z = Z_m - \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial y^2}.$$

Рассмотрим решение основного уравнения, согласно классической теории многослойных пластин, в случае когда на пластинку действует динамическая нагрузка вида (1):

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2\rho \varepsilon(t) h \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Решение будем искать в виде:

$$w(t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (9)$$

Тогда обозначив

$$\tilde{D} = \pi^4 \left( \frac{D_{11}}{a^4} + 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \right); \quad \tilde{D} = \frac{\tilde{D}}{\rho^2 h^2}; \quad \tilde{q}(t) = \frac{q(t)}{\rho^2 h^2}; \quad \tilde{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\rho h}; \quad \lambda^2 = \frac{1}{\rho h}, \quad (10)$$

уравнение (8) перепишем в виде следующего неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$\lambda^2 f''(t) + 2\bar{\varepsilon}(t)f'(t) + \tilde{D}f(t) = \tilde{q}(t), \quad (11)$$

где  $\lambda^2$  - параметр при старшей производной.

Решение уравнения (11) имеет вид:

$$f(t) = f_c(t) + f_p(t), \quad (12)$$

где  $f_c(t)$  - решение однородного уравнения и  $f_p(t)$  - частное решение.

Найдем решение однородного дифференциального уравнения полученного из уравнения (11). Согласно, описанного в [7, 8], гибридного ВКБ-Галеркин метода ВКБ-приближение имеет вид:

$$f(t, \lambda) = \exp\left[\int_a^t \left(\frac{1}{\lambda} f_0(t) + f_1(t)\right) dt\right]. \quad (13)$$

Подставляя (13) в однородное уравнение, получим

$$\lambda^2 \left[ \frac{1}{\lambda} f_0' + f_1' + \frac{1}{\lambda^2} f_0^2 + f_1^2 + 2 \frac{1}{\lambda} f_0 f_1 \right] + 2\bar{\varepsilon}(t) \left[ \frac{1}{\lambda} f_0 + f_1 \right] + \tilde{D} = 0. \quad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\lambda$ , приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} f_0^2 + 2\bar{\varepsilon}(t)f_1 + \tilde{D} = 0, \\ f_0' + 2f_0f_1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln f_0, \\ \bar{\varepsilon}(t)f_0' - f_0^3 - \tilde{D}f_0 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решение, второго уравнения системы (15), найдено используя подстановку  $f_0 = U(t)V(t)$ .

Таким образом, решение системы (15) имеет вид:

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln f_0, \\ f_0 = \pm i \left[ 2 \int \frac{e^{2\tilde{D} \int \frac{dt}{\bar{\varepsilon}(t)}}}{\bar{\varepsilon}(t)} dt \right]^{-1/2} e^{\tilde{D} \int \frac{dt}{\bar{\varepsilon}(t)}}. \end{cases} \quad (16)$$

На втором шаге решения, согласно гибридного ВКБ-Галеркин метода, исходная функция представляется в форме:

$$\tilde{f}(t, \lambda) = \exp\left[\int_a^t [\delta_{01}(\lambda) + i\delta_{02}(\lambda)] f_0(t) dt\right], \quad (17)$$

где  $f_0$  - полученная для ВКБ – решения функция (16). Тогда однородное уравнение полученное из (11) примет вид:

$$\lambda^2 \left[ (\delta_{01} + i\delta_{02}) f_0' + (\delta_{01}^2 + 2i\delta_{01}\delta_{02} - \delta_{02}^2) f_0^2 \right] + 2\bar{\varepsilon}(t) [\delta_{01} + i\delta_{02}] f_0 + \tilde{D} = 0. \quad (18)$$

Согласно условия ортогональности  $\int_a^b R(\delta_0, \dots, \delta_N, u_0, \dots, u_N, u_0', \dots, u_N^{(n-1)}, t, \varepsilon) u_i(t) dt = 0$

для  $R$  и  $N+1$  координатной функции [7, 8], учитывая что  $f_0 = \pm i\bar{f}_0$ , получим:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[ \lambda^2 \left[ (-\delta_{01} - i\delta_{02}) \bar{f}_0' \bar{f}_0 + (-\delta_{01}^2 i + 2\delta_{01}\delta_{02} + i\delta_{02}^2) (\pm \bar{f}_0^3) \right] + \right. \\ & \left. + 2\bar{\varepsilon}(t) [-\delta_{01} - i\delta_{02}] \bar{f}_0^2 + i\tilde{D} (\pm \bar{f}_0) \right] dt = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

Приравнивая коэффициенты при действительной и вещественной частях уравнения, приходим к системе:

$$\begin{cases} A\delta_{02} - B\delta_{01}^2 + B\delta_{02}^2 + W = 0, \\ A\delta_{01} + 2B\delta_{01}\delta_{02} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$A = \int_a^b [-\lambda^2 \bar{f}'_0 \bar{f}_0 - 2\bar{\varepsilon}(t) \bar{f}_0^2] dt, \quad B = \int_a^b \lambda^2 \bar{f}_0^3 dt, \quad W = \int_a^b \bar{D} \bar{f}_0 dt. \quad (21)$$

Решение системы (20) имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{01} = \frac{\sqrt{4BW - A^2}}{2B}, \\ \delta_{02} = -\frac{A}{2B}. \end{cases} \quad (22)$$

Таким образом, гибридное решение однородного уравнения определяется формулой (17), с учетом (22).

Для получения частного решения уравнения (11), в качестве примера рассмотрим два случая коэффициента затухания при заданном внешнем воздействии  $q(t)$ :

$$\varepsilon(t) = Ct \quad \text{и} \quad \varepsilon(t) = Me^{Kt}, \quad (23)$$

где  $C, M, K$  – произвольные константы. Тогда гибридное решение (17) примет вид

$$\tilde{f}(t, \lambda) = e^{-\delta_{02} \sqrt{\bar{D}t}} \left( c_1 \sin \delta_{01} \sqrt{\bar{D}t} + c_2 \cos \delta_{01} \sqrt{\bar{D}t} \right), \quad (24)$$

где  $c_1, c_2$  – произвольные константы. Частное решение определено по методу вариации произвольных постоянных.

Согласно (12) общее решение имеет вид:

$$f(t) = e^{-\delta_{02} \sqrt{\bar{D}t}} \left( (\bar{c}_1 + c_1) \sin \delta_{01} \sqrt{\bar{D}t} + (\bar{c}_2 + c_2) \cos \delta_{01} \sqrt{\bar{D}t} \right), \quad (25)$$

$$\text{где } \bar{c}_1 = \int \frac{\tilde{q}(t) e^{\delta_{02} \sqrt{\bar{D}t}} \cos \delta_{01} \sqrt{\bar{D}t}}{\lambda^2 \delta_{01} \sqrt{\bar{D}}} dt, \quad \bar{c}_2 = -\int \frac{\tilde{q}(t) e^{\delta_{02} \sqrt{\bar{D}t}} \sin \delta_{01} \sqrt{\bar{D}t}}{\lambda^2 \delta_{01} \sqrt{\bar{D}}} dt.$$

Для сопоставления полученного приближенного аналитического решения с результатами прямого численного анализа рассмотрим квадратную пластинку ( $a = b = 2\text{ м}$ ), составленную из трансверсально изотропных пьезоэлектрических слоев, плоскости изотропии, которых параллельны координатной плоскости  $xOy$ . Пьезоэлектрическим материалом слоев пластины является  $\text{BaTiO}_3$ , тогда согласно [1, 11]:

$$Q_{11} = Q_{22} = 120 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad Q_{12} = 36,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad Q_{66} = 42 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz, \quad (26)$$

$$e_{31}^{0k} = e_{32}^{0k} = -12,3 \text{ Кл/м}^2, \quad \rho = 5,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$\theta = 1, \quad R = 10, \quad q_0 = 10^8, \quad \frac{h}{a} = 0,1, \quad h = 0,2, \quad \delta = 2\delta_0 = \frac{h}{2} = 0,1,$$

где  $h$  – полная толщина пластинки.

Пластинка подвергается механической нагрузке в форме (1) и электрической в форме:

$$V^k(x, y, t) = \varphi^k(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (27)$$

действие которой одинаково во всех слоях, т.е.  $\varphi^k(t) = \varphi(t)$ .

Для рассматриваемого случая уравнение (7), учитывая (3) и систему (5), примет вид:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2\rho \varepsilon(t) h \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k \varphi(t) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \varphi(t) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (28)$$

В качестве примера положим, что  $q(t) = R\varphi(t)$  и  $\varphi(t) = q_0 \cos \theta t$ .

Тогда уравнение (28) примет вид:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -2\rho \varepsilon(t) h \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \left[ R + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \right] \varphi(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (29)$$

Решение этого уравнения аналогично решению уравнения (8).

Для получения графической интерпретации полученного решения (25) воспользуемся программным комплексом MAPLE. Для прямого численного решения исходного уравнения (29) используем метод Рунге-Кутта.

Результаты численного анализа на основе предложенного гибридного асимптотического метода и численного метода Рунге-Кутта представлены на рис.2 и в таблице 1.

Рис. 2. Поведение характеристической функции  $f(t)$  при коэффициенте демпфирования

$$\varepsilon(t) = t \text{ (---)}, \quad \varepsilon(t) = 5t \text{ (---)}, \quad \varepsilon(t) = e^{0.09t} \text{ (-)}.$$

Таблица 1

$\varepsilon(t) = 1t$		
$t$	Гибридное решение $f(t)$	Численное решение по методу Рунге-Кутта
0.03	-0.1071743990	-0.105764863015825688
0.035	-0.1124892722	-0.133609903608793212
0.04	-0.1154273314	-0.159883542812304684
2	0.04565994967	0.0422282881712131159
3	0.1086357085	0.107532028638544108
4	0.07173229785	0.0716948593241360234
5	-0.03112145658	-0.0311270814887880908

Сопоставление численных результатов демонстрирует достаточно высокую эффективность, по величине параметра, приближенного аналитического решения, возрастающую с течением времени не зависимо от характера изменения коэффициента демпфирования.

Отметим, что полученное приближенное аналитическое решение (25) уравнения (8) может быть использовано, согласно [3], в случае колебаний однослойной пьезоэлектрической пластины, эффект связанности электрического и механического полей которой находит отражение в изменении жесткостных характеристик (коэффициента Пуассона и жесткости при цилиндрическом изгибе), а так же в случае колебаний биморфной пьезоэлектрической пластины. Полученное решение позволяет решать ряд практических задач, связанных с вычислением величины тока проводимости в цепи генератора и параметров электроупругого поля (напряженность электрического поля, распределение электростатического потенциала в пластине, электрическая индукция

и т.д.), с анализом резонансных и антирезонансных частот колебаний в переменном электрическом поле и анализом других динамических эффектов, возникающих в связанных электромеханических полях.

1. Ishihara M., Noda N. Nonlinear Dynamic Behaviour of a Piezothermoelastic Laminated Plate with Anisotropic Material Properties// *Acta Mechanica*. – 2003. – №166. – P. 103 – 118.
2. Kasap S. O. Principles of Electrical Engineering Materials and Devices. – Canada: McGraw-Hill, 2000. – 690 p.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5ти т.; Т.5)
4. Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин с помощью распределенных пьезоэлектрических включений // *Акуст. вісн.* – 2002. – 5, - N 4. – С. 15-32.
5. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // *Прикл. мех.* – 2001. – 37, N 2. – С. 45-77.
6. Cristovao M. Mota Soares, Carlos A. Mota Soares, Victor M. Franco Correia. Optimal Design of Piezolaminated Structures// *Composite Structures*. – 1999. – №47. – P. 625-634
7. Gristchak V. Z., Ganilova O. A. Application of a Hybrid WKB-Galerkin Method in Control of the Dynamic Instability of a Piezolaminated Imperfect Column//*Technische Mechanik*. – 2006. – №26. – P. 106 – 116.
8. Gristchak V., Dmitrieva Ye. A Hybrid WKB-Galerkin Method and Its Application// *Technische Mechanik*. – 1995. – №15. – P. 281-294.
9. Geer J. F., Andersen C. M. Hybrid Perturbation Galerkin Technique with Application to Slender Body Theory// *SIAM J. Appl. Math.* – 1989. – №49. – P. 344-361.
10. Geer J. F., Andersen C. M. Investigating A Hybrid Perturbation-Galerkin Technique Using Computer Algebra / *NASI-18107*. – Hampton, Virginia. – 1988. – 26 p.
11. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360с.
12. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448с.
13. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Физматгиз, 1957. – 463с.
14. Lee C. K. Theory of Laminated Piezoelectric Plates for the Design of Distributed Sensors and Actuators. Part 1: Governing Equations and Reciprocal Relationships// *Journal of the Acoustical Society of America*. – 1990. – 87, №3. – P. 1144 – 1158.
15. Miller S. E., Abramovich H., Oshman Y. Active Distributed Vibration Control of Anisotropic Piezoelectric Laminated Plates// *Journal of Sound and Vibration*. – 1995. – 183, №5. – P. 797 – 817.

В работе рассматривается поведение трехслойной симметрично собранной ортотропной пьезоэлектрической пластинки, находящейся под действием нормально приложенной динамической нагрузки  $q(x,y,t)$ , учитывая переменный во времени коэффициент демпфирования.

Для решения поставленной задачи был применен гибридный метод ВКБ-Галеркина. Полученные результаты были сопоставлены с результатами прямого численного метода, а так же проанализировано влияние коэффициента демпфирования на полученные результаты.

### **On the problem solution of piezolaminated plate dynamic deformation based on a hybrid WKB-Galerkin method**

The paper deals with the problem of behavior of a symmetrical orthotropic piezoelectric sandwich plate subjected to the dynamic normal loading  $q(x,y,t)$ , taking into consideration variable in time damping coefficient.

A Hybrid WKB-Galerkin method was applied to solve the problem. Obtained results are compared with numerical method results. The damping coefficient effect on the solution is studied.

Грищак В. З.  
Запорожский национальный университет  
[grk@zsu.zp.ua](mailto:grk@zsu.zp.ua)

Ганилова О. А.  
Запорожский национальный университет  
[lionly@rambler.ru](mailto:lionly@rambler.ru)

Запорожский национальный университет  
ул. Жуковского, 66 (1-й корп.), г. Запорожье, 69063  
тел./факс +38(0612)244239



## Рисунки

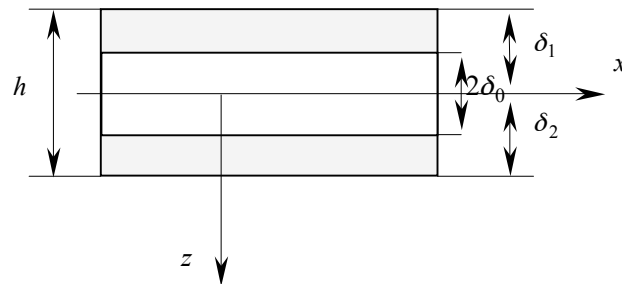


Рис. 1. Ортоотропная симметрично собранная пьезоэлектрическая пластинка

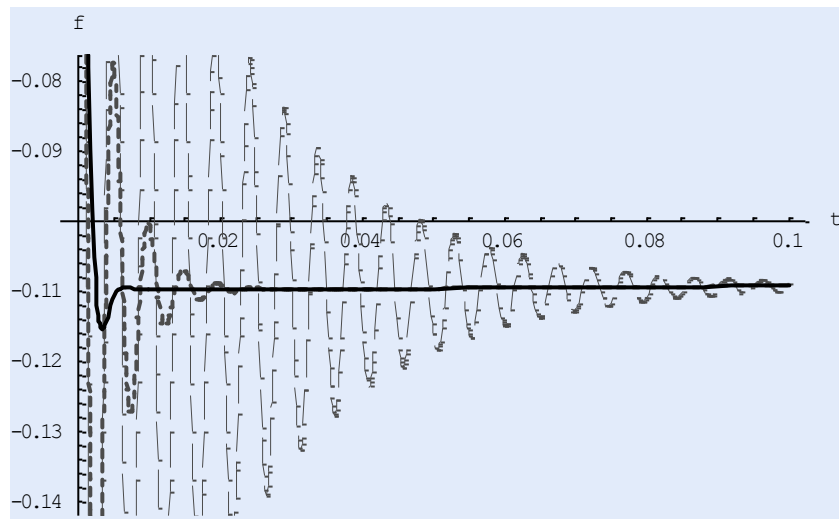


Рис. 2. Поведение характеристической функции  $f(t)$  при коэффициенте демпфирования

$$\varepsilon(t) = t \text{ (---)}, \quad \varepsilon(t) = 5t \text{ (-.-.-)}, \quad \varepsilon(t) = e^{0.09t} \text{ (-)}.$$